Thèse de Doctorat

Université de Limoges

Université de Limoges
ED 653 – Sciences et Ingénierie (SI)
Faculté des Sciences et Techniques – Institut de Recherche XLIM

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Limoges
Mathématiques et applications

Présentée et soutenue par
Carène GUILLET
Le 21 mars 2025

GÉOMÉTRIE DES AIRES DANS LES MANUELS DU SECONDAIRE ET PRIMAIRE SUPÉRIEUR FRANÇAIS (1833 – 1902) — DES SAVOIRS À L'INTERFACE DES DOMAINES MATHÉMATIQUES, DES MÉTHODES D'ENSEIGNEMENT, ET DES ACTEURS ÉDUCATIFS

Thèse dirigée par Marc MOYON et Jenny BOUCARD

Directeurs de thèse
Mme Jenny BOUCARD, Maîtresse de conférences – Centre François Viète – Université de Nantes
M. Marc MOYON, Professeur – XLIM – Université de Limoges

Rapporteurs
M. Thomas PREVERAUD, Maître de conférences – Université d'Artois et Université de Lille
M. Norbert VERDIER, Maître de conférences – Université Paris-Saclay

Examinateurs
Mme Caroline EHRHARDT, Professeure – IDHES – Université Paris 8
Mme Jemma LORENAT, Associate Professor – Pitzer College – Los Angeles
M. Thomas MOREL, Professeur – Bergische Universität Wuppertal

Invité
M. Alain BERNARD, Maître de conférences – Centre Alexandre Koyré – Université Paris Est Créteil

Président du jury
M. Thomas MOREL, Professeur – Bergische Universität Wuppertal

Remerciements

En premier lieu, je tiens tout particulièrement à remercier Jenny et Marc, grâce à qui j'ai pu mener ce projet à son terme. Leur exigence scientifique n'a d'égal que leur bienveillance à mon égard. Par leur grande compétence, ils m'ont guidée dans les dédales du monde de la recherche, et leur amitié m'a aidée à surmonter mes doutes et les difficultés rencontrées. En plus d'avoir consacré un temps considérable à relire et à commenter mes écrits, ils m'ont offert, par leur écoute, leur patience et la confiance qu'ils m'ont manifestée, l'opportunité de discuter sereinement des orientations à prendre dans cette thèse. Leur parfaite cohérence scientifique a contribué à créer un cadre de travail dans lequel j'ai pu me sentir en sécurité.

Je remercie par ailleurs Thomas Préveraud et Norbert Verdier d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Leurs avis et leurs suggestions revêtent une grande importance pour la chercheuse apprentie que je suis. Et bien sûr, merci également à Caroline Ehrhardt, Jemma Lorenat et Thomas Morel d'avoir consenti à être membres de mon jury, ainsi qu'à Alain Bernard qui me fait le plaisir d'être présent parmi nous. C'est un honneur pour moi d'exposer le fruit de mon travail devant cette assemblée de grands spécialistes.

J'ai eu la chance de découvrir l'histoire des sciences et des techniques durant mes années de master au Centre François Viète de 2009 à 2011. C'est en suivant les cours d'histoire des mathématiques et de la mécanique que j'ai rencontré Évelyne Barbin. En plus d'avoir été une excellente professeure, c'est elle qui m'a ensuite permis d'intégrer le groupe « Histoire » de l'IREM de Nantes, puis la CII « épistémologie et histoire des mathématiques ». Je l'en remercie grandement. L'enthousiasme qui a réuni les filles de notre groupe — Annabelle, Anne, Catherine, Évelyne, Isabelle et Marie-Line — autour du projet de faire des mathématiques avec l'histoire dans nos classes, m'a poussée à approfondir mes connaissances en histoire de l'enseignement.

En tant que doctorante, les membres du Centre François Viète de Nantes m'ont tous réservé un accueil chaleureux, et ont contribué à me procurer un environnement de travail à la fois amical et stimulant intellectuellement. J'ai particulièrement apprécié mes échanges, au laboratoire ou dans les moments de convivialité, avec Anaël, Anaïs, Giulia, Mathilde, Pierre et Stéphane. J'adresse également mes remerciements à mes camarades doctorantes et doctorants, Adèle, Agnès, Angélique, Gabriela, Gaëtan, Hugo et Laura. Leur bonne humeur fait du bureau des doctorants un lieu où l'on peut travailler,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

parler, rire... et trouver du réconfort quand le besoin s'en fait sentir.

Je tiens à mentionner également toutes celles et tous ceux qui m'ont aidée dans cette entreprise de longue haleine. Pour les apports techniques en méthodes quantitatives et cartographie, je me suis appuyée sur Aliette Roux et Sylvain Audel. Aliette m'a énormément appris et est devenue ma référence absolue en statistiques « lourdes » sur R. Beaucoup de chercheuses et chercheurs m'ont apporté, avec une grande disponibilité, des réponses à des questions que j'ai pu leur adresser au cours de mes recherches. Je les en remercie vivement. J'espère n'oublier personne en citant, en plus des membres de mon jury qui m'ont prêté main forte à plusieurs reprises : Konstantinos Chatzis, Nathalie Chevalarias, Jules-Henri Greber, Frédéric Métin, Hervé Renaud, Sylviane Schwer et Dominique Tournès.

Enfin, cette aventure qui dure depuis plus de cinq années n'aurait pas pu se faire sans le soutien de tous mes proches, amis et famille. Je les remercie tous sincèrement pour leur présence et leurs encouragements. J'ai une pensée particulière pour mes deux grands garçons, Achille et Louca, qui ont consenti de bon gré à avoir une maman moins disponible pour eux. J'espère avoir malgré tout réussi à les accompagner au mieux dans les affres de leur adolescence.

Pour finir, je veux exprimer toute ma gratitude à Samuel, qui a dû faire preuve d'une infinie patience à mon égard pendant les nombreuses périodes de « turbulences », en plus d'endosser entièrement la charge mentale et domestique de notre foyer. Mon mari est un véritable gentleman, qui ne s'est pas contenté d'être à mes côtés, mais a de surcroît tenu à relire toute ma thèse pour y apporter ses précieuses corrections et suggestions. Je ne saurai assez l'en remercier !

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Résumé

Cette thèse a pour objectif d'étudier la manière dont les enseignements relatifs aux aires apparaissent dans les manuels de géométrie français, à destination d'élèves de niveau intermédiaire (d'âge scolaire théorique de 11 à 18 ans). Cette étude s'étend de la création de l'enseignement primaire supérieur en 1833, à la réforme de l'enseignement secondaire de 1902. Elle est menée selon une double perspective quantitative et qualitative, et s'appuie sur le concept d'interface pour analyser le rôle joué par la « géométrie des aires » à l'intersection de nombreux domaines mathématiques, des méthodes d'enseignement, et des acteurs éducatifs. Dans la première partie, la consultation et l'analyse de sources institutionnelles et éditoriales originales permet de dépeindre le contexte scolaire de l'époque, mais également celui de la production éditoriale des manuels nécessaires pour enseigner la géométrie, ainsi que les enjeux et objectifs de cet enseignement. La seconde partie présente la constitution d'un corpus de 40 manuels et en dresse les principales caractéristiques, déterminées via des méthodes quantitatives. Dans ces deux premières parties, des hypothèses de recherche sont discutées, auxquelles l'analyse quantitative apporte des éléments de réponse. Ces hypothèses portent notamment sur les profils des auteurs et de leurs lecteurs potentiels, et sur le cloisonnement supposé entre les ordres primaire et secondaire, déjà remis en question par une partie de l'historiographie. La dernière partie explore d'un point de vue qualitatif les méthodes mathématiques mobilisées pour déterminer, calculer ou comparer des aires de figures planes, en les mettant en regard des objectifs éducatifs liés à ces apprentissages, suivant les catégories de publics concernés — élèves du primaire supérieur, du secondaire classique ou spécial, filles ou garçons. Elle questionne également les dispositifs pédagogiques envisagés par les auteurs des manuels dans ces divers contextes d'enseignement. Elle suit trois idées fortes concernant la géométrie des aires et ses connexions avec les autres domaines des mathématiques : la géométrie des aires apparaît comme une géométrie des constructions et des figures, mais aussi comme un lieu d'expression de techniques opératoires et de calculs, y compris algébriques, ainsi que comme un moyen de s'initier à l'analyse infinitésimale. En suivant toutes ces pistes, cette thèse montre que la géométrie des aires joue un rôle primordial à l'interface des domaines des sciences mathématiques, des méthodes d'enseignement qui émergent alors, et des acteurs éducatifs de l'époque.

Mots-clés :
Histoire de l'enseignement, géométrie, aires, XIX^{e} siècle, France, méthodes quantitatives et qualitatives.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Abstract

The aim of this thesis is to study how knowledges related to areas appear in French geometry textbooks, aimed at intermediate-level pupils (theoretical school age from 11 to 18). This study covers the period from the creation of upper primary education in 1833, to the reform of secondary education in 1902. It is conducted from both a quantitative and qualitative perspective and draws on the concept of interface to analyse the role played by “geometry of areas” at the intersection of numerous mathematical fields, teaching methods and educational actors. In the first part, the consultation and analysis of original institutional and editorial sources enable us to depict the school context of the time, but also that of the editorial production of the textbooks needed to teach geometry, as well as the issues and objectives of this teaching. The second part presents the constitution of a corpus of 40 manuals and outlines their main characteristics, determined using quantitative methods. In these first two parts, research hypotheses are discussed, to which quantitative analysis provides some answers. These hypotheses concern the profiles of authors and their potential readers, and the supposed compartmentalization of primary and secondary education, already called into question by some historiography. The final section explores from a qualitative point of vue the mathematical methods used to determine, calculate or compare the areas of plane figures, and compares them with the educational objectives linked to this learning, according to the categories of public concerned - upper primary, classical or special secondary school pupils, girls or boys. It also examines the teaching methods envisaged by the authors of the manuals in these different teaching contexts. It follows three key ideas concerning area geometry and its connections with other fields of mathematics : geometry of areas appears as a geometry of constructions and figures, but also as a place for expressing operative techniques and calculations, including algebraic ones, and as a means of initiating students into infinitesimal analysis. By following all these paths, this thesis shows that geometry of areas plays a key role at the interface between the fields of mathematical science, the teaching methods emerging, and the educational actors of the time.

Keywords :
History of education, geometry, areas, XIX^{e} century, France, quantitative and qualitative methods.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Droits d'auteurs

Cette création est mise à disposition selon le Contrat :
« Attribution-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de modification 3.0 France »
disponible en ligne : http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/fr/



Licence CC BY-NC-ND 3.0

Abréviations et acronymes

Les principaux acronymes et abréviations utilisés dans cette thèse sont les suivants :

ACM : Analyse en Composantes Multiples
ACP : Analyse en composantes Principales
AFC : Analyse Factorielle des Correspondances
AGD : Analyse Géométriques des Données
AN : Archives Nationales
BF : *Bibliographie de la France*
BNF : Bibliothèque Nationale de France
CAH : Classification Ascendante Hiérarchique
CC : Cours Complémentaire
CCfr : Catalogue Collectif de France
CE : Cours Élémentaire
CM : Cours Moyen
CS : Cours Supérieur
ENP : École Normale Primaire
ENS : École Normale Supérieure
EPCI : École Professionnelle de Commerce et d'Industrie
EPS : École Primaire Supérieure
resp. : respectivement
? : Désigne des informations manquantes (année de naissance ou de décès par exemple, ou encore des données non fournies par une source).

Certaines abréviations sont utilisées dans le cadre des tableaux et graphiques :

Élém : pour élémentaire
Encyclo : pour encyclopédique
Intro : pour introduction
Log : pour logarithmes
Maths : pour mathématiques
Max : pour maximum
Min : pour minimum
Prog : pour programme(s)
Prop : pour propriété

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Sup : pour supérieur(e)
Trigo : pour trigonométrie
+ : pour plus

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conventions concernant les personnalités

Les personnalités rencontrées au cours de cette thèse ne sont pas toutes présentées de la même manière :

- Les personnalités scientifiques et/ou institutionnelles antérieures au XIX^e siècle sont nommées sans information complémentaire, sauf si des éléments de contexte les concernant sont nécessaires à la compréhension de notre propos. La plupart sont des personnalités bien connues des historiennes et historiens des mathématiques.
- Les personnalités ayant vécu et/ou exercé leurs fonctions au cours du XIX^e siècle sont présentées au fil de notre texte :
  - soit par une courte description de leur statut ou profession dans le corps du texte lorsque nous estimons ces éléments suffisants dans le contexte concerné (c'est le cas par exemple de certains auteurs de manuels, seulement désignés comme tels).
  - soit par un court rappel biographique en note de bas de page, indiquant leurs années de naissance et de mort, lorsque nous les connaissons, ainsi que des informations succinctes sur leurs activités scientifiques, institutionnelles et/ou d'enseignement.
- Les auteurs des ouvrages de notre corpus bénéficient quant à eux d'une note biographique plus complète en annexe (p. 678 et suivantes).

Dans tous les cas, leur prénom est indiqué lors de leur première occurrence, et plus par la suite. Ces personnalités pourront être retrouvées à l'aide de l'index correspondant (D p. 763).
Les auteurs des sources secondaires consultées sont quant à eux désignés sans leurs prénoms, que vous pouvez retrouver dans la bibliographie (C p. 724).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Table des Matières

Table des matières 16
Introduction générale 17

I La géométrie des aires dans les institutions scolaires du XIX^e siècle (structures éducatives, programmes officiels, édition scolaire, méthodes d'enseignement) 35

Introduction 37
I.1 La place de l'enseignement des aires dans les programmes des différentes structures éducatives 38
I.1.1 Panorama des structures d'enseignement et de leur évolution au cours du siècle 38
I.1.2 L'enseignement des aires dans les programmes et instructions officielles 46
I.1.2.1 Géométrie des aires pour toutes et pour tous : un apprentissage commun, suivant des finalités différentes . 46
I.1.2.2 L'apprentissage des aires dans le territoire mathématique 50
I.1.2.3 Des contenus sur les aires pour tous les publics, à toutes les époques 52
I.1.3 Conclusion 57
I.2 La géométrie et la géométrie des aires dans les manuels scolaires . . 59
I.2.1 Les manuels de géométrie au XIX^e siècle : Nombre et évolution, auteurs et publics 60
I.2.1.1 Nature de la source et collecte des données 61
I.2.1.2 Nombre de manuels de géométrie publiés et évolution dans le temps 63
I.2.1.3 L'environnement professionnel des auteurs des manuels de géométrie 67
I.2.1.4 Publics visés par les manuels de géométrie 70
I.2.1.5 Qui écrit pour qui ? 75

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.2.2 Auteurs prolifiques et best-sellers 80
I.2.2.1 Auteurs prolifiques 81
I.2.2.2 Best-sellers 86
I.2.3 Quels manuels scolaires pour la géométrie des aires ? 92
I.2.3.1 Géométrie des aires dans les livres d'arithmétique . . . 93
I.2.3.2 Géométrie des aires dans les ouvrages de dessin linéaire 98
I.2.4 Conclusion 100
I.3 La géométrie des aires dans les débats sur l'enseignement de la géométrie au XIX^e siècle 102
I.3.1 Un enseignement de la géométrie entre tradition et modernité 103
I.3.1.1 Avec ou sans Euclide ? Réception de la géométrie euclidienne dans l'enseignement au XIX^e siècle 103
I.3.1.2 Objectifs éducatifs utilitaires ou théoriques de la géométrie 106
I.3.1.3 Entre méthode synthétique et analytique, la modernité de la géométrie en question 112
I.3.1.4 Émergence de nouvelles méthodes d'enseignement de la géométrie 117
I.3.2 Typologie des manuels de géométrie du XIX^e siècle par leurs titres 124
I.3.3 Conclusion 138
I.4 Conclusion 139

II Élaboration d'un corpus d'ouvrages et premiers éléments d'analyse 141
Introduction 143
II.1 Des sources officielles pour sélectionner les manuels 146
II.1.1 Les recommandations d'ouvrages dans les programmes officiels 147
II.1.2 Listes officielles 148
II.1.3 Campagnes de mise à l'essai 153
II.1.4 Travaux des commissions, admissions d'ouvrages 161
II.1.5 Listes départementales (1882 – 1889) 169
II.1.6 Conclusion 195
II.2 Méthode de sélection d'un corpus et analyse de ses caractéristiques 196
II.2.1 Présentation de la sélection 197
II.2.2 Caractéristiques du corpus 205
II.2.2.1 Références des auteurs et réseaux d'intercitations . . . 205
II.2.2.2 La place des aires dans les ouvrages retenus 220

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.2.2.3 Analyse croisée du poids du thème des aires et de la longévité éditoriale des ouvrages du corpus 224
II.2.2.4 Analyse croisée du public, de la reconnaissance institutionnelle et du « succès » des manuels scolaires 234
II.2.2.5 Classification suivant le type d'énoncés de savoir sur les aires 245
Conclusion 267
II.3 Trois résultats mathématiques transversaux 269
II.3.1 La mesure du rectangle 270
II.3.1.1 Intérêts scientifiques et pédagogiques de la notion, dans le contexte du XIX^e siècle 270
II.3.1.2 Place de l'aire du rectangle dans les programmes et les manuels 273
II.3.1.3 Les énoncés de savoir relatifs au rectangle dans les manuels du corpus : nombre et évolution 275
II.3.2 Le théorème de Pythagore 284
II.3.2.1 Place et désignation du théorème de Pythagore dans les programmes et les manuels 285
II.3.2.2 Les énoncés et les preuves relatifs au théorème de Pythagore dans les manuels du corpus : nombre et évolution 286
II.3.2.3 Intérêts scientifiques et pédagogiques du théorème, dans le contexte du XIX^e siècle 294
II.3.3 Les aires curvilignes 299
II.3.3.1 Intérêts scientifiques et pédagogiques des aires curvilignes, dans le contexte du XIX^e siècle 300
II.3.3.2 Place des aires curvilignes dans les programmes et les manuels 302
II.3.3.3 Les énoncés de savoir sur les aires curvilignes dans les manuels du corpus : nombre et évolution 305
Conclusion 315
II.4 Conclusion 316

III La géométrie des aires : des contenus et des méthodes à l'interface des domaines mathématiques 319
Introduction 322
III.1 La géométrie des aires comme géométrie des constructions 325

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.1.1 La figure et sa construction, étapes intrinsèques au raisonnement et à la preuve 330
III.1.1.1 Les figures de l'« empilement » et de la « grille » pour déterminer l'aire du rectangle 332
III.1.1.2 De multiples figures au fondement des preuves possibles du théorème de Pythagore 343
III.1.1.3 Construire pour démontrer : le cas du cercle chez Legendre 367
III.1.1.4 La figure dans l'espace comme support d'une preuve dans le cas des coniques 376
III.1.1.5 Conclusion 384
III.1.2 La figure comme médiation entre un savoir géométrique et sa représentation 387
III.1.2.1 Une approche graphique de la similitude 388
III.1.2.2 Dupliquer des carrés, agrandir, réduire 395
III.1.2.3 Les « images figuratives » au service de la géométrie des aires 403
III.1.2.4 Conclusion 414
III.1.3 La construction comme savoir-faire à maîtriser 415
III.1.3.1 La quadrature des polygones 417
III.1.3.2 La quadrature du cercle 427
III.1.3.3 Du terrain au papier, et vice-versa 434
III.1.3.4 Conclusion 441
III.2 Nombres et calculs dans la géométrie des aires 446
III.2.1 De la comparaison à la mesure des aires, les cas du rectangle et du cercle 450
III.2.1.1 Le cas du rectangle 451
III.2.1.2 Le cas du cercle et de l'ellipse 462
III.2.2 Entre comparaison et mesure, le rôle des proportions et de l'unité 465
III.2.2.1 Proportions et unités dans la détermination de l'aire du rectangle 465
III.2.2.2 Figures semblables, proportions et théorème de Pythagore 473
III.2.2.3 Le langage des unités comme médiateur entre grandeurs et nombres : le cas du rectangle 484
III.2.2.4 Le théorème de Pythagore : le langage comme médiateur entre les théories 495
III.2.3 Aspects opératoires : procédures de calcul et formules algébriques 499

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.2.3.1 Le système métrique et la mutation des unités 501
III.2.3.2 Les interactions entre le géométrique et le numérique en géométrie pratique 514
III.2.3.3 Techniques de calcul et gestion des erreurs à propos de l'aire du disque 523
III.2.3.4 L'apport de l'algèbre à la géométrie des aires 541
III.2.4 La nature des nombres en question 570
III.2.4.1 La nature de $\sqrt{2}$ en conséquence du théorème de Pythagore 571
III.2.4.2 L'incommensurabilité dans le cas de l'aire du rectangle . 575
III.2.4.3 La nature de π au cœur du problème de la quadrature du cercle 586
III.3 La méthode infinitésimale en géométrie des aires 597
III.3.1 Les limites comme réponse à l'incommensurabilité 599
III.3.1.1 La théorie des grandeurs proportionnelles 599
III.3.1.2 L'analyse : infiniment petits et passage à la limite 606
III.3.2 Infiniment petits et limites pour la détermination des aires curvilignes 616
III.3.2.1 Le cas du cercle 616
III.3.2.2 Les aires curvilignes quelconques 629
III.3.2.3 Les coniques 641
Conclusion générale 655

A Annexes **664**
A.1 Compléments sur le corpus 666
A.1.1 Chronologie de publication des manuels du corpus 666
A.1.2 Bilan des classifications de la section II.2.2 667
A.1.3 Liste des énoncés-types sur les aires recensés dans les manuels du corpus 669
A.2 Éléments biographiques des auteurs du corpus 678

B Table des figures **705**
Table des figures 705

C Références bibliographiques **724**
Documents d'archives 725
Ouvrages du corpus 725

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Sources primaires 729
Sources secondaires 744

D Index des personnalités rencontrées **763**

Index **764**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Introduction générale

Dans la France du début du XIX^e^ siècle, l'enseignement de la géométrie revêt une importance toute particulière, au sein de l'école comme à l'extérieur. Deux figures des mathématiques et de son enseignement, contemporains et originaires de la ville de Metz, témoignent dans leurs ouvrages de ce double enjeu de l'apprentissage de la géométrie.

Le premier auteur est Olry Terquem (voir sa notice biographique en annexe p. 678), qui occupe alors la fonction de professeur de sciences appliquées au Dépôt central d'artillerie de Vincennes. Dans l'introduction de son *Manuel de géométrie*, il écrit :

> Pour l'intelligence des sciences physiques, des arts industriels, les propriétés des sections coniques, les moyens graphiques sont au moins aussi importants à connaître que la mesure des distances, des aires, des volumes, but ordinaire de la géométrie élémentaire. Si l'on veut donc remédier à l'inconvénient qu'on vient de signaler [se contenter d'enseigner les rudiments de la géométrie], on devra renoncer aux divisions établies dans la géométrie ; les agglomérer dans une seule science, exposée dans un volume, qu'on pourrait enseigner dans une année. C'est le moyen le plus efficace de familiariser la jeunesse studieuse avec les principales propriétés de l'espace et avec la nomenclature géométrique. (Terquem, 1829, p. iv)

Son manuel de géométrie, ainsi que ceux de mécanique et d'algèbre qu'il rédige également, sont tirés de son expérience d'enseignement. Ils paraissent dans la bibliothèque des « Manuels Roret », collection éditoriale publiée de 1822 à 1939, qui regroupe des ouvrages présentant des savoir-faire et des techniques propres aux arts et aux métiers, aux côtés de titres de nature plus scientifique (Servier-Crouzat, 2020). L'orientation professionnelle du manuel se double d'un usage scolaire, puisque le titre est officiellement préconisé pour l'enseignement dans les classes supérieures de l'enseignement primaire, ainsi que pour le secondaire. La citation extraite de son introduction présentée

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ci-avant souligne bien la préoccupation de l'auteur de s'adresser à ces deux lectorats.

La seconde personnalité est Claude-Lucien Bergery (voir sa notice biographique en annexe p. 678), qui à cette époque enseigne les mathématiques à l'École régimentaire d'artillerie de Metz, et qui dispense également des leçons de géométrie lors des cours ouvriers qu'il a contribué à fonder dans cette ville. Tout comme Terquem, sa *Géométrie appliquée à l'industrie* est tirée des cours qu'il professe, et est reconnue par les autorités de l'Instruction Publique pour l'enseignement dans le primaire comme le secondaire. Dans le « Discours d'ouverture » de ses cours ouvriers en 1825, qui fait office d'avant-propos à son ouvrage publié trois ans plus tard, il écrit :

> Pour que vous deveniez des artistes et des ouvriers distingués, que votre fortune augmente et que votre bonheur s'accroisse, il faut que vous abandonniez la routine, que vous puissiez raisonner toutes les circonstances de votre travail, et trouver les moyens les plus propres à le porter jusqu'à la perfection, avec le moins de dépense possible en force, en temps et en capitaux.
> Or, il n'y a que l'étude de la géométrie et de la mécanique, telle que nous désirons que vous la fassiez, qui puisse vous mettre en état de remplir toutes ces conditions. (Bergery, 1828, p. x)

Même si ces introductions sont indéniablement faites pour promouvoir la géométrie et faire vendre les ouvrages correspondants, ces deux extraits sont révélateurs des enjeux, scolaires et sociétaux, liés à l'enseignement de la géométrie. Les savoirs qui lui sont relatifs sont en effet indispensables à l'étude des sciences en général, mais ils apparaissent également comme cruciaux pour la pratique des arts industriels. Apprendre la géométrie relève donc d'objectifs à la fois théoriques et pratiques, qui concernent aussi bien les élèves que certaines catégories de professionnels, pour lesquels ces connaissances se présentent, aux dires mêmes de Bergery, comme un vecteur de progrès et d'émancipation.

Problématique générale

Un aspect de ces savoirs, souligné par Terquem, est celui de la mesure des grandeurs que forment les longueurs, aires et volumes. C'est à l'un de ces objets — les aires — que nous proposons de nous intéresser dans cette thèse. Notre intérêt particulier pour cette grandeur trouve ses motivations sur plusieurs plans.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Tout d'abord, l'analyse de cet objet est un moyen de questionner les caractéristiques plus générales de la géométrie et de son enseignement au XIX^e siècle à un niveau intermédiaire. Ce que nous désignons par « niveau intermédiaire » correspond aux structures d'enseignement françaises accueillant des élèves de plus de 11 ans et moins de 18 ans [1]. Ces structures sont principalement divisées en deux voies : l'une dépendant de l'« ordre primaire » constituée des écoles primaires élémentaires et supérieures, et l'autre relevant de l'« ordre secondaire » poursuivie dans les collèges et lycées (Luc et al., 2020). Ces deux systèmes éducatifs parallèles coexistent en s'adressant à des catégories sociales distinctes, comme nous le détaillons dans la première partie de cette thèse (voir la section I.1.1 p. 38). La géométrie au XIX^e siècle est une discipline en grande évolution, et même en voie de modernisation (Lorenat, 2019), et la manière dont on peut ou doit l'enseigner est discutée tant dans l'ordre primaire que secondaire (D'Enfert, 2003a ; Moktefi et al., 2013 ; Moussard, 2015).

De plus, les aires occupent une position particulière au sein des sciences mathématiques, à l'intersection de nombreux domaines comme la géométrie, élémentaire ou appliquée, l'arithmétique et le système métrique, mais aussi l'algèbre, ou encore l'analyse infinitésimale. En effet, l'établissement de certains résultats sur les aires se heurte à des obstacles de nature épistémologique, et qui ne trouvent leur résolution qu'en allant puiser hors de la stricte géométrie. Il peut s'agir par exemple de l'établissement de la formule de l'aire d'un rectangle, qui sert de fondement à la détermination de l'aire de tous les polygones, dans le cas où les côtés sont incommensurables, ou encore des calculs d'aires de domaines délimités par des lignes courbes (et en particulier des coniques).

D'un point de vue pédagogique, l'apprentissage des aires n'échappe pas aux grands questionnements de l'époque sur l'enseignement de la géométrie. Omniprésents dans les programmes de deux ordres, les savoirs et savoir-faire sur les aires peuvent être abordés en suivant principalement deux voies : une approche théorique guidée par les *Éléments* d'Euclide ou une autre plus pratique et intuitive. Se pose alors la question d'enseigner les aires à la mode euclidienne, avec des propositions sur les quadratures progressivement énoncées et démontrées, ou de façon appliquée, par exemple en faisant usage de formules, en lien avec le calcul numérique et le système métrique dont l'usage se généralise au cours du siècle. Les obstacles épistémologiques décrits ci-avant nécessitent de produire des contenus d'enseignement accessibles au niveau intermédiaire, et notamment sans faire usage du calcul infinitésimal, qui n'est pas

1. Ce sont les âges des élèves auxquels ces structures s'adressent en théorie.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

encore au programme pour ces élèves.

La question des enjeux sociaux de l'apprentissage d'une géométrie théorique comme pratique, intervenant à la fois dans la formation des élites, la formation professionnelle ou encore celle des citoyen·ne·s, se pose également. La diversité des lectorats visés par les manuels montre déjà qu'une grande partie de la société est touchée par cet enseignement : élèves des deux ordres, filles ou garçons, mais également des professionnels de plusieurs domaines des arts et de l'industrie. Les connaissances sur les aires participent à leur formation théorique, mais aussi à l'acquisition de techniques applicables dans l'exercice de certaines fonctions ou métiers, comme par exemple l'arpentage. Au cours de cette étude, nous prenons soin de prendre en compte tous les acteurs éducatifs, des lectrices et lecteurs auxquels les ouvrages s'adressent, scolaires ou professionnels, à leurs autrices et auteurs, en n'oubliant pas les institutionnels de l'instruction et les professionnels de l'édition [2].

Ce premier tour d'horizon des caractéristiques spécifiques de l'objet « aires » au sein de la géométrie, qu'elles soient épistémologiques, pédagogiques ou sociétales, montre sa position à l'intersection — voire à l'interface [3] — des domaines mathématiques, des méthodes d'enseignement et des acteurs de l'époque.

Géométrie des aires

L'expression retenue pour cette étude et mise en exergue dans son titre est celle de « géométrie des aires ». Le terme d'« aire » n'est pourtant pas d'un usage généralisé chez les auteurs de manuels de géométrie du XIX^{e} siècle auxquels nous nous intéressons. Néanmoins, le mot est utilisé par certains d'entre eux, représentant alors la grandeur relative à la mesure d'une surface. Le mot « surface » est également employé dans une partie des textes pour désigner cette même grandeur, pouvant induire une confusion puisque ce terme s'applique aussi aux figures géométriques à deux dimensions, sans qu'il ne soit question de leur mesure. C'est pour éviter tout malentendu que nous conservons le mot « aire », qui de surcroît est le terme considéré comme mathématiquement exact de nos jours.

2. L'ensemble de ces acteurs se verra parfois désigné par l'expression « communauté éducative » au cours de ce travail, qui prend donc le sens très général de l'ensemble des personnalités professionnelles ou usagères de l'instruction (publique ou privée) à l'époque considérée.

3. Le terme sera défini précisément p. 25.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La formulation « géométrie des aires » est notre création. Une recherche *a posteriori* dans la littérature secondaire en histoire des mathématiques montre qu'elle a néanmoins déjà été utilisée sous d'autres acceptions que la nôtre. Par exemple, Szabó désigne ainsi la géométrie qui s'intéresse aux propriétés des surfaces. D'après lui, cette géométrie, qui remonte à une époque antérieure à Euclide, est particulièrement présente dans ses *Éléments*, et prend souvent la forme d'une résolution « au moyen de surfaces » de « problèmes posés avec des segments » (Szabó, 2000, p. 200). Dans les sources primaires, c'est une expression proche que nous trouvons dans l'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert. Ce dernier évoque en effet, dans son article « Géométrie », la « division naturelle de la Géométrie élémentaire en géométrie des lignes droites et des lignes circulaires, géométrie des surfaces, géométrie des solides » (D'Alembert, 1757, p. 633). C'est donc l'expression « géométrie des surfaces », proche de celle que nous avons choisi de mettre en avant, qui est utilisée par D'Alembert pour désigner la géométrie qui s'intéresse aux figures du plan et à leur mesure. Nous aurons l'occasion de montrer que la division en lignes/surfaces/solides décrite par D'Alembert reste grandement en usage dans les manuels du siècle suivant. L'expression « géométrie des aires » fait également écho aux intitulés qui se trouvent dans les programmes en vigueur à l'époque (D'Enfert, 2003c, p. 159) et les titres des sections de certains manuels (Briot, 1863, p. 386), qui prévoient de se consacrer à la « mesure des aires » ou à la « mesure des surfaces ».

Prenant en compte toutes ces influences, la définition que nous proposons pour la « géométrie des aires » en question dans cette étude est la suivante :

> Il s'agit de la partie de la géométrie plane qui traite de la comparaison et/ou de la mesure des aires des figures, en termes de savoirs comme de savoir-faire.

Sources et périodisation

C'est à travers l'analyse d'un corpus de manuels d'enseignement de la géométrie que nous projetons d'examiner la manière dont les aires sont abordées dans ces ouvrages : tout d'abord à travers une analyse des savoirs mathématiques concernés ; puis par une étude des méthodes d'enseignement mises en jeu pour en assurer l'acquisition par les élèves ; enfin en nous penchant sur les objectifs visés en fonction des publics ciblés, en lien avec les besoins de la société.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Notre matériau principal est donc celui des « manuels français ». Notre étude s'inscrit en effet dans le cadre des travaux d'histoire de l'enseignement portant sur l'objet du « manuel scolaire ». Nous prenons pour point de départ les travaux de Choppin, déjà anciens mais toujours significatifs, dans lesquels il estime qu'un manuel scolaire est « révélateur [...] de l'état des connaissances d'une époque ainsi que des principaux aspects et stéréotypes d'une société » (Choppin, 1992, p. 19). Nous considérons également que de tels ouvrages témoignent de leurs relations avec les programmes scolaires et la production mathématique de leur époque. C'est ce que souligne Ehrhardt quand elle écrit de Lacroix, à propos de l'écriture de ses manuels, qu'il s'appuie sur deux principes : « l'actualisation des savoirs et leur adaptation aux contraintes pédagogiques » (Ehrhardt, 2009, p. 14). Les manuels scolaires attestent de surcroît des liens qu'entretiennent leurs auteurs et utilisateurs entre eux ainsi qu'avec le monde dans lequel ils évoluent. Il est néanmoins important de garder en tête la limitation induite par ce type de sources : si un manuel est souvent le reflet d'une pratique d'enseignement, envisagée pour l'avenir ou se fondant sur une expérience passée[4], il ne rend pas compte de l'usage qui peut en être fait dans les classes. Il n'est donc pas le révélateur de pratiques effectives d'enseignement, qui nécessiteraient d'autres sources — cahiers d'élèves, rapports d'inspection, etc. — pour être analysées.

Nous adhérons également à la qualification des manuels par Choppin de « fausse évidence historique », qui souligne la difficulté de définir de manière unique un objet qui a beaucoup évolué au cours du temps (Choppin, 2008). Les critères qu'il met en place afin de lever cet obstacle méthodologique nous ont offert un moyen de délimiter l'objet « manuel scolaire » au XIX^{e} siècle, et d'en constituer un corpus conséquent dans la discipline qui nous intéresse. Parmi eux, les trois que nous avons retenus pour définir le caractère « scolaire » d'un ouvrage sont (Choppin, 2008, p. 49-53) :

— le critère « légal », qui couvre les ouvrages « qui ont obtenu de l'autorité compétente en matière d'éducation, qu'elle soit civile ou religieuse, nationale ou locale, l'autorisation (*a fortiori* l'obligation) d'être utilisées dans l'enseignement ».

— le critère « formel », soit les publications « dont le contenu coïncide avec une ou plusieurs matières enseignées dans un ou plusieurs niveaux d'enseignement et dont la structure s'adapte aux cours, leçons ou thèmes d'un programme scolaire ».

— le critère « intentionnel » représentant les livres « qui ont été intentionnellement conçus par l'auteur ou l'éditeur pour un usage scolaire, exclusif ou non ».

4. Là encore, l'articulation entre la pratique d'enseignement et la rédaction des ouvrages pour enseigner est analysée spécifiquement par Ehrhardt dans le cas de Lacroix (Ehrhardt, 2009, p. 12-16).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Pour ce qui concerne plus spécifiquement les mathématiques, les historiennes et historiens de la discipline et de son enseignement se sont, depuis plusieurs décennies, emparé·e·s du matériau, parfois abondant, constitué par les manuels scolaires. Lorenat a d'ailleurs résumé cette historiographie autour de l'objet des manuels de mathématiques au XIX^{e} siècle. Nous renvoyons à son article, qui présente clairement les avancées historiques à ce sujet, réalisées par Dhombres, Schubring, Belhoste, D'Enfert, Moussard, Gispert et Erhardt, et auxquelles elle a également largement contribué par son propre travail (Lorenat, 2019, p. 72-75). Tous ces travaux ont en commun de montrer que les contenus de ces manuels restent plutôt standards, en conformité avec le cadre institutionnel de leur époque, mais que de nouvelles notions y apparaissent néanmoins quelquefois, selon la volonté de certains auteurs de dépasser les programmes en vigueur, et quand ces savoirs présentent un intérêt pour le public ciblé. Nous rajoutons à ces références le travail de Legros sur les manuels d'arithmétique au XIX^{e} siècle (Legros, 2019). Les études que nous citons ici forment le socle sur lequel nous nous sommes appuyée [5]. La liste n'est néanmoins pas exhaustive, et d'autres travaux plus spécifiques nous ont naturellement guidée à certains stades de nos recherches. Nous les citerons en temps voulu.

S'appuyant sur un corpus de manuels scolaires, notre travail se donne pour objectif d'étudier les savoirs sur les aires qu'ils contiennent, à la fois à destination de l'enseignement « secondaire » et du « primaire supérieur », sur la période 1833 – 1902. Dans ce contexte, une partie de notre travail consiste à comparer les contenus sur les aires proposés par les manuels scolaires relatifs à ces deux ordres d'enseignement, pour mesurer en quoi cette offre diffère suivant les publics distincts auxquels elle s'adresse. C'est pourquoi nous avons choisi de faire débuter notre étude en 1833, année de l'instauration officielle des écoles primaires supérieures par la loi Guizot. Cette création fournit aux élèves de l'ordre primaire le moyen de poursuivre une scolarité après le dernier degré, appelé à certaines époques « cours supérieur », de l'école primaire élémentaire, pour une durée de 2 à 5 ans d'études supplémentaires. Cette scolarité primaire étendue concerne ainsi théoriquement, tout comme le cursus allant de la classe de 6ème au baccalauréat dans les collèges et lycées, des élèves âgés de 11 à 18 ans. C'est donc à partir de cette date que la mise en parallèle des programmes et des contenus des manuels associés, concernant les élèves d'une même tranche d'âge

5. Le « nous » dit « de modestie » employé dans notre thèse s'accorde en genre et en nombre, donc ici au féminin singulier. Voir (Académie Française, 2024).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

suivant leur scolarité dans les deux systèmes, commence à avoir du sens.

Quant à la date de 1902 qui clôt notre période d'étude, elle correspond à l'année d'une réforme majeure du secondaire, notamment pour l'enseignement des sciences, bien documentée en histoire de l'éducation (Belhoste, 1990). Les programmes en vigueur à partir de cette date en mathématiques prévoient en effet pour la première fois d'enseigner le calcul différentiel, et donc en particulier le calcul intégral, aux élèves des lycées. Notre étude portant sur la détermination des aires dans les manuels, cette réforme marque une véritable réorientation, en cela qu'elle importe de nouvelles méthodes de calcul issues de l'analyse infinitésimale dans l'enseignement intermédiaire. C'est la manière d'enseigner les aires en amont de cette nouveauté institutionnelle que nous souhaitons interroger dans cette thèse.

Interfaces

Au cours de notre étude, nous avons cherché un concept qui serait le plus adéquat pour rendre compte de la transversalité de la notion d'aire. Nos lectures nous ont montré que les historiennes et historiens des sciences et des mathématiques mobilisent des notions liées à l'espace et aux territoires pour leurs analyses. Le terme « territoire » est en particulier utilisé par Assude et Gispert pour leur étude des mathématiques dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Ferdinand Buisson (Assude et Gispert, 2015). Les auteures choisissent d'examiner la manière dont la discipline apparaît et évolue dans cette source sous la forme d'une cartographie d'un domaine, décliné en régions et territoires [6]. De même, les membres du projet Cirmath ont pour intention d'« étudier sur le temps long et dans des aires géographiques diversifiées, réunissant les principaux pays dans lesquels on peut repérer une activité mathématique significative, la circulation des mathématiques dans et entre différents territoires, mais aussi dans et entre divers milieux » (Nabonnand et al., 2019). Ils mobilisent ainsi la notion de territoire à la fois dans le sens géographique et dans le sens conceptuel du terme. Nous nous inscrivons dans cette méthodologie, que nous estimons appropriée à l'analyse des disciplines, et tout particulièrement dans notre perspective de mettre en évidence des interactions entre leurs différentes branches.

6. Dans leur cas et dans le nôtre, la notion de « territoire » est à prendre au sens figuré, comme « ce sur quoi porte, s'applique quelque chose, ce qui en constitue le contenu, la matière » (ATILF, 1994c). D'autres études en histoire des sciences travaillent en revanche la notion de territorialité au sens propre, prise d'un point de vue géographique, comme le rappellent Boucard et Tirard, qui évoquent les « Nouvelles approches centrées sur la spatialité et les territoires » en introduction d'un numéro des *Cahiers François Viète* (Boucard et Tirard, 2020, p. 27-28).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Une notion — celle d'« interface » — a récemment émergé dans des travaux en histoire des sciences, notamment en physique à travers le mémoire d'habilitation à diriger des recherches d'Emanuel Bertrand, qui y déclare sa « passion pour les interfaces », qu'il s'agisse d'interfaces au sens littéral admis en chimie[7], d'interfaces entre les disciplines ou encore entre recherche et enseignement (Bertrand, 2023). Schubring érige le concept en titre de son ouvrage portant sur les interfaces entre les pratiques et l'enseignement des mathématiques[8], mais sans en donner de définition (Schubring, 2019). L'ouvrage traite des interactions entre l'enseignement et le développement des mathématiques, entre les acteurs, entre les disciplines, ainsi qu'entre une science et son contexte social. Dans ses derniers travaux sur les manuels de mathématiques, il justifie l'intérêt d'étudier ce type de source en qualifiant ces ouvrages comme de réelles interfaces entre recherche et enseignement (Schubring, 2022, p. 3-4). Nous adhérons pleinement à cette idée, très largement confirmée et développée dans cette thèse. Nous poussons même plus loin le rôle d'interface, joué non seulement par les manuels, mais par leurs contenus concernant les aires, à la jonction des domaines disciplinaires connexes aux mathématiques, des méthodes d'enseignement et des différents acteurs éducatifs impliqués dans la transmission de ces savoirs.

Pour parfaire ce cadre conceptuel, nous avons cherché à mieux définir la notion d'interface. Pour cela, nous nous sommes tournée vers d'autres disciplines. En effet, ce terme admet diverses définitions, suivant les domaines dans lesquels il apparaît. En chimie et en physique, une interface est la surface de contact ou de séparation entre deux milieux, qui diffèrent par leur composition, la nature de leur phase ou encore par leur orientation cristalline (Encyclopædia Universalis, 2021). En informatique et en électronique, ce mot désigne un dispositif qui permet des échanges et interactions entre différents acteurs, par l'adoption de règles communes physiques ou logiques (ATILF, 1994a), alors que dans le langage courant, il s'agit d'une personne ou d'une chose qui assure l'échange d'informations entre deux domaines, deux services, deux personnes. Les géographes ont récemment mobilisé tout particulièrement cette notion, afin de dépasser les idées de frontière, de limite ou de discontinuité. Ils la définissent alors comme une « zone de contact entre deux espaces différenciés engendrant des dynamiques d'échange entre ces deux espaces » (Géoconfluences, 2010) et la décrivent

7. Sa définition est la suivante : « Toute surface est [donc] une délimitation entre deux phases (et est donc parfois aussi appelée “interphase”), ou encore une zone de séparation entre les deux faces de cette surface, d'où la dénomination interface » (Bertrand, 2023, p. 20).
8. En anglais, « Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

aussi comme « une forme particulière de discontinuité, renfermant à la fois rupture et échange » (Pagney Bénito-Espinal, 2008), ne constituant donc ni une frontière rigide ni une frontière étanche. Qu'elle soit caractérisée ainsi ou comme un « objet géographique inscrit sur une discontinuité et qui assure la mise en relation de différents systèmes » (Allard et al., 2010), ces définitions ont en commun de mettre l'accent sur la différence initiale entre les espaces interfacés, et sur les échanges qui peuvent en découler. Cette idée rejoint d'ailleurs les acceptions du terme dans les autres domaines disciplinaires — physique-chimie et électronique-informatique — que nous avons évoquées ci-avant.

Pour les géographes qui ont développé cette notion, une interface peut émerger à partir de disparités ou de complémentarités inhérentes à une organisation spatiale donnée. Pour l'identifier, il est donc nécessaire de repérer le différentiel dont elle est issue, qui peut être de nature diverse : physique, socio-économique, politique, institutionnelle, administrative ou encore culturelle (Allard et al., 2010). Dans leur discipline, une interface peut être ouverte ou fermée selon la présence ou l'absence de flux entre les espaces considérés, ou encore partiellement ouverte dans le cas de flux contrôlés. Elle peut être théorique et/ou pratique, réalité palpable ou concept, visible ou invisible. Pas forcément fixée dans le temps et l'espace, elle peut fluctuer dans la durée. Enfin, elle peut être de type horizontal si elle concerne des organisations de même niveau, ou vertical, sinon (Groupe de recherche « Interfaces », 2008). La fonction principale de l'interface est l'échange, puisqu'en mettant en relation différents systèmes, elle permet les interactions entre eux. Elle joue aussi un rôle de régulation, en conciliant parfois des fonctionnements contradictoires, et peut faciliter ou bloquer ces échanges. Enfin, elle favorise les transferts d'un système vers un autre (Allard et al., 2010, p. xi-xxi) [9]. Toutes ces caractéristiques trouvent leur écho dans notre travail, et ces aspects structurels ou fonctionnels des interfaces éclairent tour à tour des éléments de notre étude. La notion apparaît en cela particulièrement adaptée à la situation que nous projetons de décrire dans notre travail, et lui apporte une plus-value en termes d'analyse et d'interprétation de nos résultats [10]. Par exemple, l'étude des programmes réalisée dans

9. Dans l'avant-propos de leur ouvrage, Allard et ses co-auteurs développent en détails la notion d'interface et élaborent une grille d'analyse déclinée en identification, nature et fonction des interfaces, détermination de leurs mécanismes, effets territoriaux ou encore leur dynamique. Cette grille aboutit même à la définition d'un indicateur mesurant l'« interfacité » d'une interface. Si nos analyses au sein de cette thèse ne développent pas autant la notion d'interface, ces éléments ont néanmoins inspiré et guidé notre méthodologie de recherche.

10. Notre propos n'est pas, dans cette thèse, de prouver que seule la géométrie des aires peut occuper un tel rôle d'interface. Néanmoins, nous souhaitons montrer que le concept d'interface mobilisé est particulièrement adapté à la situation de la géométrie des aires, et permet de la décrypter de manière efficiente.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la partie I.1.2.3 (p. 52 et suivantes) met en évidence les connexions entre diverses parties des mathématiques enseignées au niveau intermédiaire autour des connaissances sur les aires. La nature de cette interface, ouverte, théorique et horizontale est identifiable en suivant la grille des géographes. Les interactions engagées autours de ces savoirs illustrent significativement les fonctions d'échanges ou de transferts décrites dans leur cadre disciplinaire.

C'est pourquoi nous avons choisi de représenter les interfaces qui émergent au fil de notre recherche par des schémas. Ces schémas, dans leur ensemble, ont pour objectif de montrer en quoi tout ou partie de la géométrie des aires, désigné(e) en titre dans l'encadré, est à l'interface de différents « territoires », figurant pour leur part dans des rectangles en couleur (voir le schéma générique 1 p. 27).

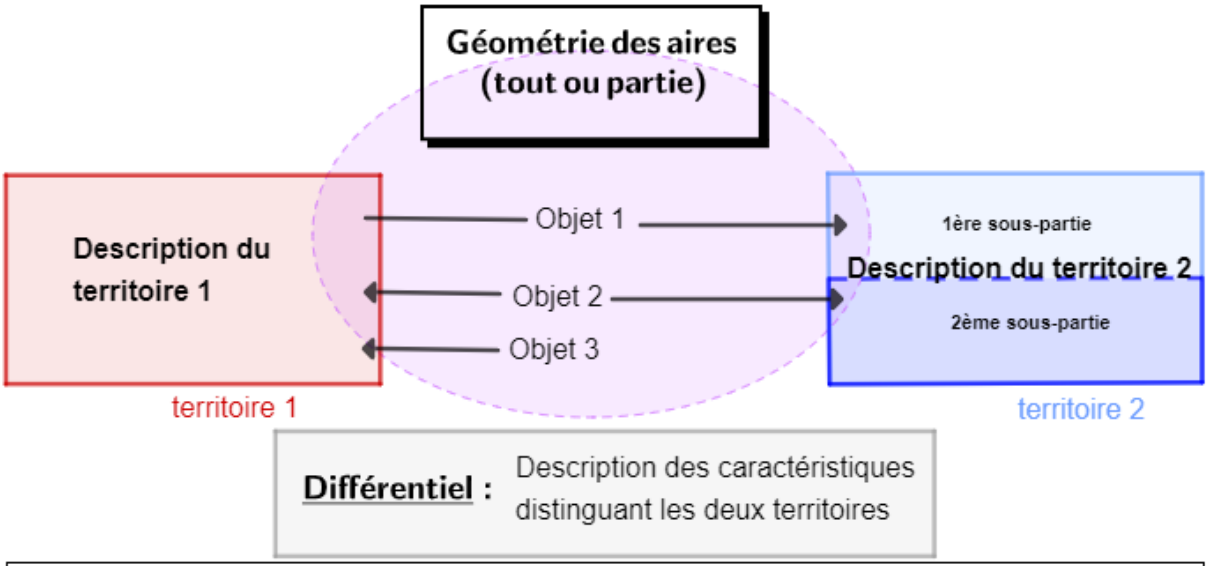


FIGURE 1 – Schéma générique expliquant le mode de représentation d'une interface

Ces territoires peuvent être entre autres des domaines mathématiques, des parties de la géométrie, ou encore des publics. Ils sont dans tous les cas caractérisés par un « différentiel », qui explicite ce qui les distingue les uns des autres. Ce différentiel est décrit dans un cadre en gris au bas de chaque schéma. Par exemple, s'il s'agit de domaines mathématiques distincts, comme la géométrie, l'arithmétique, ou l'algèbre,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

leur différentiel repose sur les caractéristiques distinctes de leurs cadres théoriques respectifs (voir par exemple le schéma I.3 p. 52). L'interface entre les territoires est matérialisée par une ellipse mauve, qui présente de fait une intersection physique avec les territoires interfacés. Elle est désignée et décrite par le titre figurant dans l'encadré. Dans cette ellipse sont notés les éléments remarquables de cette interface, c'est-à-dire les « objets » qui la composent. Il peut s'agir d'idées, de notions, de connaissances ou encore de savoir-faire.

Ces objets de l'interface entrent en interaction avec les territoires par l'intermédiaire de flèches. Les flèches simples, allant dans un seul sens, symbolisent un flux de connaissances, c'est-à-dire l'apport d'une idée, d'une notion, d'une technique, d'un territoire vers un autre. Les doubles flèches indiquent comment certains objets entrent en interaction avec deux territoires simultanément, formant une passerelle entre les deux, qui peut se franchir dans les deux sens. Dans ces cas-là, on peut dire aussi que les territoires entrent en interaction autour de cet objet. Certains objets n'entrent en relation qu'avec un territoire. Même s'ils ne forment pas vraiment, à ce titre, des éléments de l'interface, ils figurent parfois dans le schéma à titre indicatif, en comparaison avec des éléments justement reliés à plusieurs territoires. Les interfaces qui interviennent dans cette étude sont presque toutes ouvertes, avec des flux transitant d'un côté à l'autre, mais il en existe de plus rares qui sont fermées : elles sont alors matérialisées par une frontière étanche à l'intérieur de la zone d'interface. Enfin, certaines interfaces sont doubles, comprenant deux sous-parties qui sont alors délimitées par une ligne en pointillés.

En fin de partie ou de chapitre, à chaque fois que nous estimons cette représentation significative, les différentes interfaces rencontrées au cours de la section sont résumées à travers un schéma plus global, reprenant la partition des domaines mathématiques considérés dans l'étude sous la forme d'une cartographie : le rôle d'interface de la géométrie des aires y apparaît alors sous la forme de flèches, simples ou doubles, correspondant aux diverses mises en relation entre territoires constatées durant l'analyse réalisée (voir par exemple le schéma I.5 p. 58).

Méthodologie

La démarche suivie dans ce travail est à la fois quantitative et qualitative. Nous nous inscrivons en cela dans le mouvement d'implémentation des méthodes quantitatives en histoire en général, dont l'histoire des sciences, et en histoire de l'enseignement

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des mathématiques en particulier. Pour Lemercier et Zalc, l'usage de ces méthodes en histoire n'est pas une fin en soi, mais constitue un outil, qui s'avère nécessaire pour la gestion de données historiques. Elles mettent en avant à la fois la puissance et les limites de tels procédés (Lemercier et Zalc, 2019), rejoignant par là les préoccupations de Goldstein quant à la « question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques », qui souligne le caractère « prospectif », voire « heuristique » de ces méthodes, tout en mettant en garde contre les écueils possibles, notamment quand cette approche n'est pas accompagnée et contrôlée par une démarche qualitative (Goldstein, 1999, p. 192-194). Dans cette perspective, les travaux de Dhombres sur les manuels de mathématiques au tournant du XIX^e^ siècle (Dhombres, 1985) et de Legros sur les manuels d'arithmétique au XIX^e^ siècle (Legros, 2019) montrent toute la pertinence qu'il y a à articuler méthodes quantitatives et qualitatives pour l'étude des manuels, qui constituent un matériau de choix pour l'histoire de l'enseignement des mathématiques.

Le problème auquel nous avons été confrontée dès le départ a été de construire un corpus à une échelle adaptée, afin qu'il se montre à la fois représentatif et analysable qualitativement dans le cadre d'une thèse. Nous l'avons résolu en commençant par réaliser une analyse statistique globale de l'offre de manuels de géométrie du siècle concerné. Nous avons pour cela consulté une source, la *Bibliographie de la France* (voir la section I.2.1.1 p. 61), qui nous permette sinon d'atteindre, mais au moins d'approcher l'exhaustivité. L'identification des manuels scolaires relatifs à une discipline parmi les ouvrages publiés sur une période donnée ne va pas de soi. Les notices de la *Bibliographie de la France* peuvent suivant les cas fournir des informations relatives aux trois critères de Choppin que nous avons retenus, en précisant par exemple les ouvrages autorisés par les autorités de l'Instruction Publique (« légal »), en mentionnant un programme d'enseignement avec lequel son contenu entre en conformité (« formel »), ou encore en indiquant le public scolaire auquel l'auteur destine l'usage de son livre (« intentionnel ») (voir p. 22). Mais ces informations ne sont pas présentes pour tous les titres mentionnés, et nous avons alors dû mobiliser d'autres sources externes pour les compléter, comme par exemple des documents de nature institutionnelle, relatifs aux autorisations ou refus de certains ouvrages par les autorités éducatives pour le critère « légal », ou aux programmes d'enseignement en vigueur pour le critère « formel ». Quant au critère « intentionnel », son identification a été possible en consultant le livre lui-même, en particulier la couverture, la préface, l'introduction ou l'avant-propos.

L'analyse quantitative de l'offre globale en manuels de géométrie sur la période d'étude

Licence CC BY-NC-ND 3.0

nous permet de nous interroger à propos d'idées communément admises en histoire de l'enseignement des mathématiques — par exemple sur l'évolution de la production éditoriale de manuels de géométrie, sur les profils des auteurs et lecteurs de ces ouvrages, ou encore sur l'étanchéité des deux ordres d'enseignement — selon la littérature secondaire que nous avons consultée. Plus généralement, la confrontation de nos lectures et de l'analyse de nos sources fait émerger des questions de recherche, que nous explorons sous l'angle plus spécifique de la géométrie des aires. Pour mettre cette démarche en évidence, et aussi afin de faciliter la lecture des parties quantitatives de l'étude, nous avons mis au point un système typographique. Les questions que nous nous posons figurent, après une présentation du contexte, dans un demi-cadre ouvert en bas à droite en caractères gras. Elles sont suivies d'un encadré en pointillés dans lequel nous indiquons des éléments de méthodes, concernant la gestion et le traitement des données, la réalisation des tableaux ou des diagrammes, qui constituent la présentation finale de nos résultats. La lecture et l'analyse de ces résultats apparaissent ensuite dans un encadré en traits réguliers. Enfin, les conclusions auxquelles l'étude permet d'aboutir, en réponse aux questions posées en amont, figurent dans un demi-cadre ouvert en haut à gauche, en gras (voir modèle ci-dessous).

Questions :

— **Question 1.**

— **Question 2, etc.**

Méthode : Description de la méthode.
Résultat : Mention des tableaux et/ou diagrammes produits.

Lecture et analyse : Éléments de lecture des diagrammes et tableaux et analyse des résultats.

Conclusion :

— Conclusion 1.

— Conclusion 2, etc.

L'étape quantitative, en plus des résultats qu'elle permet d'apporter, sert de base pour construite notre corpus. Elle fait également naître de nouvelles hypothèses, que nous confrontons alors aux résultats d'une étude plus qualitative, afin de les confirmer ou de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

les infirmer. Or, analyser qualitativement les contenus précis des manuels de géométrie ne peut pas se faire sur des milliers de titres, mais plutôt sur un corpus limité à quelques dizaines d'ouvrages. Cette sélection est indispensable et répond à des contraintes spécifiques à chaque étude. Nous pouvons l'observer par exemple dans les travaux de Moussard ou Lorenat, tous deux portant sur les manuels de géométrie du XIX^e^ siècle, suivant des orientations de recherche différentes (Lorenat, 2019 ; Moussard, 2015, 2023). Pour Moussard, il s'agit de délimiter un corpus de manuels de géométrie traitant en suffisamment grande partie de la résolution de problèmes, puis, dans son étude suivante, de la question des méthodes. Quant à Lorenat, c'est la présence des objets d'étude de la géométrie moderne qu'elle s'emploie à repérer dans les manuels de l'époque. Tout comme dans leurs travaux, les choix des titres retenus pour l'analyse qualitative de leurs contenus de savoirs sur les aires sont largement explicités dans la section II.2.1 (p. 197). L'étude de ce corpus, sous l'angle des savoirs sur les aires proposés, est à même de corroborer, de réfuter, ou même d'affiner les hypothèses émises, de faire naître d'autres questionnements, et à terme de préciser ou modifier les conclusions établies au cours de l'analyse quantitative.

Structure de la thèse

La double méthodologie — quantitative et qualitative — mise en œuvre dans cette étude, et l'outil conceptuel d'interface, accompagné d'une représentation graphique synthétique, sont conçus pour être au service des questions auxquelles nous nous proposons de répondre. Il en est de même de l'organisation de cette thèse en parties, chapitres et sections. Trois grandes parties apportent chacune des éléments de compréhension sur : 1) La place et le rôle de la géométrie en général, et de la géométrie des aires en particulier, dans les programmes des diverses structures éducatives, dans la production éditoriale de manuels scolaires de l'époque, et dans les réflexions et débats sur l'enseignement de la géométrie au cours du siècle ; 2) La manière de construire un corpus de manuels de géométrie représentatif de l'enseignement de son époque, et ce qu'un tel corpus nous apprend sur le poids de la géométrie des aires dans les contenus de savoirs au sein des manuels, et également sur les publics et les auteurs de ces ouvrages ; 3) Le rôle d'interface de la géométrie des aires avec les domaines des figures et constructions, des nombres et des calculs, ainsi qu'avec celui de l'analyse infinitésimale.

Plus précisément, dans la première partie, nous nous employons tout d'abord à décrire dans quelles structures de l'enseignement intermédiaire français la géométrie

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des aires est susceptible d'être enseignée. Nous examinons ensuite les contenus et les objectifs des apprentissages relatifs à cette géométrie qui figurent dans les programmes et instructions officielles, par ordre d'enseignement et par niveau scolaire. Nous poursuivons par un recensement qui se veut le plus exhaustif possible de l'offre globale de manuels de géométrie édités sur la période, à partir duquel nous engageons des analyses quantitatives. Ces dernières visent à déterminer comment la production éditoriale de manuels de géométrie évolue dans le temps, en relation avec les prescriptions institutionnelles, et à cerner les profils des auteurs et lecteurs de ces ouvrages, comment ils entrent en interaction, ou plus simplement, qui écrit pour qui. L'approche quantitative a également pour objectif d'identifier les auteurs les plus prolifiques de la période et les manuels que l'on peut qualifier de « best-sellers » [11]. En établissant une comparaison des contenus relatifs aux aires dans des manuels de différents domaines mathématiques, nous justifions le parti-pris de ne considérer que des titres de géométrie ou d'arpentage dans cette étude. Enfin, nous examinons, dans les textes officiels, les éléments relatifs aux débats sur l'enseignement de la géométrie du XIX^{e} siècle. Cette analyse, menée sous l'angle de la géométrie des aires, met en évidence les interactions entre les approches théoriques ou pratiques des apprentissages en géométrie, la naissance ou la stabilisation de certaines branches de la discipline, et l'émergence de nouvelles méthodes pour son enseignement. Ce panorama, dressé *via* une démarche qualitative, est confronté aux résultats d'une analyse quantitative portant sur les titres des manuels de géométrie recensés sur la période.

La seconde partie est consacré à l'établissement et à l'analyse quantitative d'un corpus de 40 manuels de géométrie. La sélection des titres qui le composent est effectuée en appui sur des sources éditoriales et institutionnelles — programmes officiels, listes d'ouvrages pouvant être utilisés dans les classes, travaux de la commission des livres classiques ou encore listes départementales des manuels effectivement en usage dans les écoles — que nous présentons de manière détaillée, avant d'expliquer l'usage que nous en faisons pour choisir les manuels que nous retenons. Ce corpus de 40 ouvrages contient à la fois des grands classiques et des manuels plus singuliers, pour certains encore inédits dans l'historiographie. Cette diversité dans le profil des titres retenus répond à un double objectif : étudier des manuels de forme et de contenus standards, souvent rédigés en conformité avec les préconisations officielles de leur époque, mais également analyser des propositions plus originales en termes de fond comme de forme, afin de souligner toute la diversité des contenus et des méthodes proposés dans ces

11. Cette notion est définie précisément p. 86.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ouvrages. Cette sélection de titres est alors passée au crible des méthodes quantitatives, afin de mesurer la part que représentent les aires dans les savoirs et savoir-faire qu'ils exposent, et de croiser ces informations avec d'autres relatives aux publics auxquels ils se destinent, à leur succès, leur longévité ou encore leur reconnaissance institutionnelle. Cette étape poursuit une double finalité : tout d'abord élaborer une classification des ouvrages suivant un ou plusieurs de ces critères sur laquelle appuyer notre étude qualitative à venir, par exemple en étudiant conjointement des ouvrages d'une même catégorie ou au contraire en comparant des titres appartenant à des groupes différents, mais aussi faire émerger de nouvelles hypothèses à propos de ces ouvrages. Les relations de citations communes ou d'intercitations des auteurs sont explorées pour mettre en évidence des références que certains d'entre eux pourraient partager, ou encore des cercles d'influence dans lesquels ils sont susceptibles de s'inscrire. Enfin, trois résultats mathématiques majeurs ont une place très importante dans les programmes d'enseignement, et donc dans les manuels : la mesure ou la comparaison des aires des rectangles, le théorème de Pythagore exprimé en aires, et la détermination des aires curvilignes (cercle, surface délimitée par une courbe quelconque, ou par des sections coniques). Ces trois objets d'étude, particulièrement pertinents sur le plan scientifique et pédagogique, comme nous proposons de le montrer dans les sections II.3.1.1 (p. 270), II.3.2.3 (p. 294) et II.3.3.1 (p. 300), servent par la suite de fil rouge guidant la lecture des manuels retenus et ont permis de structurer l'analyse de leurs contenus.

Une fois les 40 ouvrages sélectionnés parmi les manuels de géométrie de la période, et analysé de manière externe, c'est une plongée dans les contenus que nous présentons au cours de la troisième partie. L'exploration est alors exclusivement qualitative, et concerne les énoncés de savoir [12] sur les aires qui se trouvent dans les ouvrages. L'objectif est de comprendre quels sont les connaissances et les méthodes sur les aires que les auteurs choisissent de présenter, et quelles en sont les applications. Nous nous interrogeons également sur le fait que ces résultats soient démontrés ou non, et le cas échéant comment, en fonction des publics auxquels les manuels sont destinés. Présentée de manière thématique, cette analyse, guidée par les cas d'études présentés dans la partie II (rectangle, Pythagore, aires curvilignes) suit trois idées principales. La première est l'hypothèse selon laquelle la géométrie des aires est partie intégrante de la géométrie des figures et des constructions. En effet, nous mettons en évidence le fait que l'acte de construire est intrinsèque à l'élaboration d'une preuve,

12. Au sens défini par Legros (2019, p. 138), voir p. 220.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

qu'une figure peut porter à elle seule le sens mathématique d'un résultat, et en cela constituer une médiation entre un concept et sa représentation. À cela s'ajoute le rôle de la construction en géométrie des aires comme un savoir-faire à maîtriser, dans des domaines où la réalisation pratique d'une figure constitue une fin en soi. La seconde idée forte est que les connaissances sur les aires entrent pour beaucoup en interaction avec celles relevant de l'arithmétique, qu'il s'agisse de techniques de calcul ou de considérations sur la nature des nombres. Dans ce chapitre, c'est l'articulation entre comparaison et mesure que nous interrogeons, reliées entre elles par les notions de proportion et d'unité. Nous examinons par ailleurs les aspects opératoires des diverses techniques calculatoires que nécessite la pratique de la géométrie des aires. Nous soulignons en outre les questions qui se posent à cette occasion au sujet de la nature des nombres qui entrent en jeu dans ces calculs. En troisième lieu, la détermination des aires apparaît, sous certains aspects, particulièrement liée aux notions d'infiniment petit et de limite appartenant au domaine de l'analyse. La possibilité d'un recours aux méthodes infinitésimales se présente principalement à deux occasions : l'extension de la détermination de l'aire du rectangle au cas où ses côtés sont incommensurables, et la recherche des aires curvilignes, quelconques, circulaires, ou délimitées par des sections coniques. Ces trois axes de recherche contribuent tous à souligner en quoi la géométrie des aires est à l'interface de tous les domaines mathématiques et même scientifiques.

Au cours de ces trois parties, notre étude rencontre beaucoup de questions scientifiques centrales, dont la notion d'interface contribue à dépasser des réponses seulement dichotomiques. Nous nous donnons ainsi pour ambition de transcender les oppositions courantes entre mesure et comparaison, théorie et pratique, technique et raisonnement, ordre primaire et secondaire, école et monde professionnel. Cette étude propose en outre une immersion dans l'histoire de la France enseignante et apprenante du XIX^{e} siècle, réalisée à travers l'analyse des savoirs sur les aires figurant dans les manuels, à l'interface des domaines mathématiques, des méthodes d'enseignement et des acteurs éducatifs.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La géométrie des aires dans les institutions scolaires du XIX^{e} siècle

(structures éducatives, programmes officiels, édition scolaire, méthodes d'enseignement)

Sommaire

Introduction **37**

I.1 La place de l'enseignement des aires dans les programmes des différentes structures éducatives **38**

I.1.1 Panorama des structures d'enseignement et de leur évolution au cours du siècle 38

I.1.2 L'enseignement des aires dans les programmes et instructions officielles 46

I.1.2.1 Géométrie des aires pour toutes et pour tous : un apprentissage commun, suivant des finalités différentes 46

I.1.2.2 L'apprentissage des aires dans le territoire mathématique 50

I.1.2.3 Des contenus sur les aires pour tous les publics, à toutes les époques 52

I.1.3 Conclusion 57

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.2 La géométrie et la géométrie des aires dans les manuels scolaires **59**
I.2.1 Les manuels de géométrie au XIXe siècle : Nombre et évolution, auteurs et publics . . . 60
I.2.1.1 Nature de la source et collecte des données 61
I.2.1.2 Nombre de manuels de géométrie publiés et évolution dans le temps . . . 63
I.2.1.3 L'environnement professionnel des auteurs des manuels de géométrie . . . 67
I.2.1.4 Publics visés par les manuels de géométrie 70
I.2.1.5 Qui écrit pour qui ? . . . 75
I.2.2 Auteurs prolifiques et best-sellers . . . 80
I.2.2.1 Auteurs prolifiques . . . 81
I.2.2.2 Best-sellers . . . 86
I.2.3 Quels manuels scolaires pour la géométrie des aires ? . . . 92
I.2.3.1 Géométrie des aires dans les livres d'arithmétique . 93
I.2.3.2 Géométrie des aires dans les ouvrages de dessin linéaire . . . 98
I.2.4 Conclusion . . . 100
I.3 La géométrie des aires dans les débats sur l'enseignement de la géométrie au XIXe siècle . . . **102**
I.3.1 Un enseignement de la géométrie entre tradition et modernité 103
I.3.1.1 Avec ou sans Euclide ? Réception de la géométrie euclidienne dans l'enseignement au XIXe siècle . . 103
I.3.1.2 Objectifs éducatifs utilitaires ou théoriques de la géométrie . . . 106
I.3.1.3 Entre méthode synthétique et analytique, la modernité de la géométrie en question . . . 112
I.3.1.4 Émergence de nouvelles méthodes d'enseignement de la géométrie . . . 117
I.3.2 Typologie des manuels de géométrie du XIXe siècle par leurs titres . . . 124
I.3.3 Conclusion . . . 138
I.4 Conclusion . . . **139**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Introduction

Dans la France du XIXe siècle, alors que l'on assiste au développement et à la stabilisation progressive des structures d'enseignement, les mathématiques en général, et la géométrie en particulier, y occupent une place de plus en plus grande. L'importance prise par l'École Polytechnique influence notablement les programmes de l'enseignement secondaire : les exigences de son examen d'admission ont pour effet d'accroître considérablement le niveau scientifique des plans d'études des collèges et des lycées (Belhoste, 1995, p. 15-62). Quant à l'enseignement primaire supérieur, il voit les « éléments de la géométrie et ses applications usuelles » (D'Enfert, 2003c) inscrits dans ses matières d'étude par la loi Guizot en 1833, poussant les professionnels de l'éducation à « inventer une géométrie pour l'école primaire » (D'Enfert, 2003a).

Dans ce contexte particulier, le monde de l'édition scolaire s'organise, afin de pouvoir fournir une offre variée et adaptée de manuels, et en grande quantité, à un nombre croissant d'élèves (Choppin, 1992 ; Mollier, 2015). En mathématiques, les besoins concernent les livres d'arithmétique et de géométrie, mais aussi des domaines connexes, comme le dessin linéaire, l'arpentage, ou encore l'algèbre, qui intègrent eux aussi progressivement les programmes d'enseignement du primaire ou du secondaire (Legros, 2019, p. 78-79 ; Dhombres, 1985 ; Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003c). Au tournant du siècle, quelques auteurs se partagent les classiques des éléments de géométrie, comme Bézout, Lacroix ou Legendre (Lamandé, 1993). Avec les réformes et les besoins de nouveaux manuels qu'elles engendrent, des propositions nouvelles et plus nombreuses émergent, émanant d'autres auteurs aux profils variés, mais souvent professionnels de l'éducation (Legros, 2019, p. 128-130 ; Choppin, 1992, p. 58-59).

Tout ce contexte, de mutation des structures d'enseignement et de constitution d'une offre de manuels scolaires conséquente, rend la période propice à la réflexion sur l'enseignement : sa nature, ses objets, et ses méthodes sont largement discutés. La géométrie n'échappe pas à ces débats, et les échanges sont parfois vifs entre les partisans d'une géométrie synthétique ancrée dans la tradition euclidienne et ceux

Licence CC BY-NC-ND 3.0

penchant vers une géométrie plus utilitaire que théorique (Assude et Gispert, 2015 ; Moktefi et al., 2013). Les objectifs diffèrent, parfois d'une structure d'enseignement à une autre, de même que les procédés pédagogiques visant à les atteindre, de nouvelles méthodes émergeant progressivement.

L'objectif de cette partie est de mesurer la place de l'enseignement de la géométrie des aires dans ce triptyque que forment les structures éducatives et leurs programmes, le monde de l'édition scolaire et l'ensemble des débats sur l'enseignement de la géométrie, ainsi que le rôle d'interface qu'elle joue parmi eux.

I.1 La place de l'enseignement des aires dans les programmes des différentes structures éducatives

I.1.1 Panorama des structures d'enseignement et de leur évolution au cours du siècle

Durant le processus de mutation et de consolidation des structures d'enseignement françaises, une spécificité perdure, même si elle tend à s'estomper à l'approche de la fin du XIXe siècle : les enfants de classes sociales différentes ne fréquentent pas les mêmes établissements. En effet, l'ordre primaire est organisé en écoles de village, puis en cours complémentaires et écoles primaires supérieures pour les élèves souhaitant poursuivre leur scolarité. Celui-ci a pour public principal les jeunes issus de familles paysannes ou ouvrières. À l'opposé, les lycées et collèges de l'enseignement secondaire accueillent les enfants des classes sociales plus aisées et vivant majoritairement en ville (Briand et Chapoulie, 2012). Les jeunes de 11 à 18 ans [1] sont donc répartis dans chacun de ces deux systèmes existant en parallèle, principalement en fonction de leur provenance sociale. Nous proposons de présenter ces différentes structures et leur évolution sur la période considérée dans cette étude, afin de dresser le cadre dans lequel les élèves de cette époque sont susceptibles d'apprendre la géométrie en général, et la géométrie des aires en particulier.

C'est en 1833 que sont instaurées officiellement les écoles primaires supérieures (EPS). Dans ces dernières sont proposées entre une et trois années d'études supplémentaires aux élèves sortant de l'enseignement élémentaire, et pouvant même être complétées par

1. Cette tranche d'âge est un âge scolaire théorique, c'est-à-dire l'âge officiel des enfants auquel la structure scolaire considérée est destinée. L'enseignement dédié aux élèves de cette tranche d'âge pourra être appelé par la suite « enseignement intermédiaire ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

deux ou trois années d'école normale primaire (ENP) pour les aspirants instituteurs et les futures institutrices. En 1850, la loi Falloux supprime l'existence légale des EPS, qui perdurent néanmoins sous d'autres appellations, souvent avec le soutien des municipalités (D'Enfert, 2003c, p. 16). En 1882, l'enseignement primaire est restructuré sous une forme proche de celle que nous connaissons, avec tout d'abord les classes enfantines, suivies du cours élémentaire, du cours moyen et du cours supérieur. Le cas échéant, les élèves peuvent alors poursuivre en EPS — qui ont alors tout juste retrouvé un statut officiel — puis en ENP. Un brevet supérieur est instauré pour les aspirants instituteurs en EPS, le brevet élémentaire suffisant pour enseigner dans les écoles primaires.

Quant à l'enseignement secondaire, il est initialement structuré de la 9ème — première classe élémentaire des collèges et lycées [2] — à la classe de philosophie, préparant le passage du baccalauréat. Les sciences sont alors étudiées à partir de la classe de rhétorique seulement. Victor Cousin adjoint à l'étude des humanités des conférences préparatoires de mathématiques dès la classe de seconde en 1840, puis dès la 3ème en 1845 (Belhoste, 1995, p. 169-173, 198-203). Le régime de la « bifurcation » est instauré en 1852, permettant de choisir entre une voie littéraire ou une voie scientifique en 3ème (puis en seconde après 1863). Il sera abandonné en 1868. À partir de 1880, il est possible de passer directement de la 3ème (ou de la seconde) à la première année de mathématiques élémentaires, pour les élèves ne souhaitant pas finir leurs humanités. Un enseignement secondaire féminin est instauré par la loi Camille Sée en 1880, et l'enseignement secondaire spécial institué sous le ministère de Gustave Rouland en 1866 se trouve consolidé par des examens (certificat d'études et baccalauréat) qui lui sont spécifiques. Enfin, la réforme de 1902 est marquée par l'apparition de sections, A et B avec ou sans latin de la 6ème à la 3ème, puis A, B, C, D durant les trois années de lycée, selon que les élèves étudient ou non le latin, des langues vivantes et/ou des sciences.

L'étude et la comparaison des textes officiels permet de dresser un panorama de ces structures d'enseignement par périodes, avec une mise en parallèle des systèmes du primaire et du secondaire. Une telle présentation n'existe pas, à notre connaissance, dans la littérature secondaire, qui s'intéresse en général à l'un des ordres et non aux

2. Les enfants entrent alors dans le système scolaire autour de 8 ans. Ces classes élémentaires, appelées aussi « petits lycées », s'étendent progressivement à des divisions inférieures appelées 10ème et 11ème, dans lesquelles les enfants peuvent être accueillis à partir de 6 ans (Lelièvre, 2011 ; Robert, 2005).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

deux simultanément[3]. Nous présentons ci-après des tableaux synthétiques de ces structures, lors de quatre années ou périodes correspondant à des réformes majeures de l'enseignement français sur l'ensemble de la période considérée : la loi Guizot en 1833, avec quelques ajustements en 1840 (voir tableaux I.1 p. 41), la réforme Fortoul en 1852 (voir figure I.2 p. 42), les lois Ferry de 1880-82 (voir figure I.3 p. 43) et la réforme de 1902 (voir figure I.4 p. 44).

Lecture et analyse : Sur les tableaux I.1 (p. 41), I.2 (p. 42), I.3 (p. 43) et I.4 (p. 44), les niveaux correspondants à l'âge scolaire théorique (11 – 18 ans) considérés dans cette étude sont encadrés en vert, les structures correspondant à l'ordre primaire d'enseignement en rouge et celles de l'ordre secondaire en bleu. L'enseignement spécial est inclus dans l'ordre secondaire, dont il dépend, en parallèle des études dites « classiques ». Il correspond essentiellement, malgré des évolutions au cours du temps, à un enseignement sans latin, davantage tourné vers les sciences et leurs applications utiles (Belhoste, 1995, p. 19, 42). Il deviendra l'« enseignement moderne » à la fin du XIX^e siècle (Belhoste, 1995, p. 50). Dans le dernier tableau (1902), les Écoles Pratiques de Commerce et d'Industrie (EPCI) figurent en-dehors du cadre de l'enseignement secondaire : elles dépendent du ministère du Commerce de 1892 à 1920 (Briand et Chapoulie, 2012, p. 47).
L'enseignement primaire subit de moins grands changement au cours du siècle que le secondaire, mis à part la disparition temporaire des EPS. En fin de période, il propose un cursus complet jusqu'à l'examen de fin d'études normales. L'ordre secondaire est construit globalement de la même manière tout au long de la période, de la classe de 6^ème jusqu'au baccalauréat. Ses bouleversements portent davantage sur les apparitions et disparitions successives de voies plus scientifiques et techniques (bifurcation, enseignement spécial puis moderne), ainsi que sur l'introduction progressive d'un enseignement féminin.

3. Nos sources sont principalement les *Bulletins Administratifs de l'Instruction Publique* (BAIP) et les travaux de D'Enfert (2003c) et de Belhoste (1990, 1995). Nous n'avons pas jugé opportun de citer les références exactes correspondant à chacun des éléments des tableaux synthétiques présentés, ce qui rendrait leur lecture trop fastidieuse. Nous invitons nos lectrices et lecteurs qui souhaiteraient plus de détails à se référer aux tables des matières des ouvrages de D'Enfert et de Belhoste qui reprennent ces « textes officiels » par date, ce qui permet de les identifier aisément.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

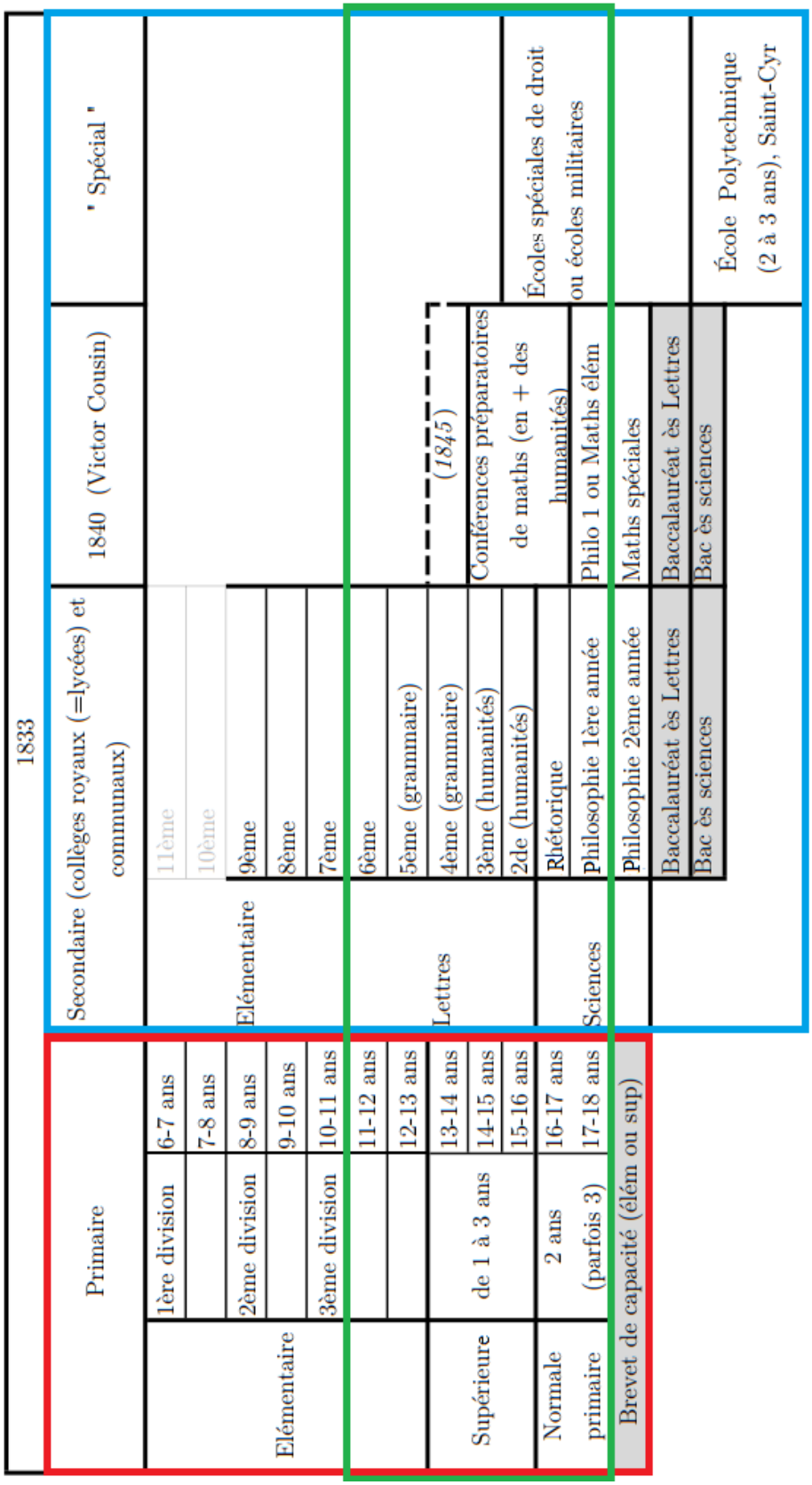


TABLE I.1 – Structures d'enseignement entre la loi Guizot de 1833 et 1840

Licence CC BY-NC-ND 3.0

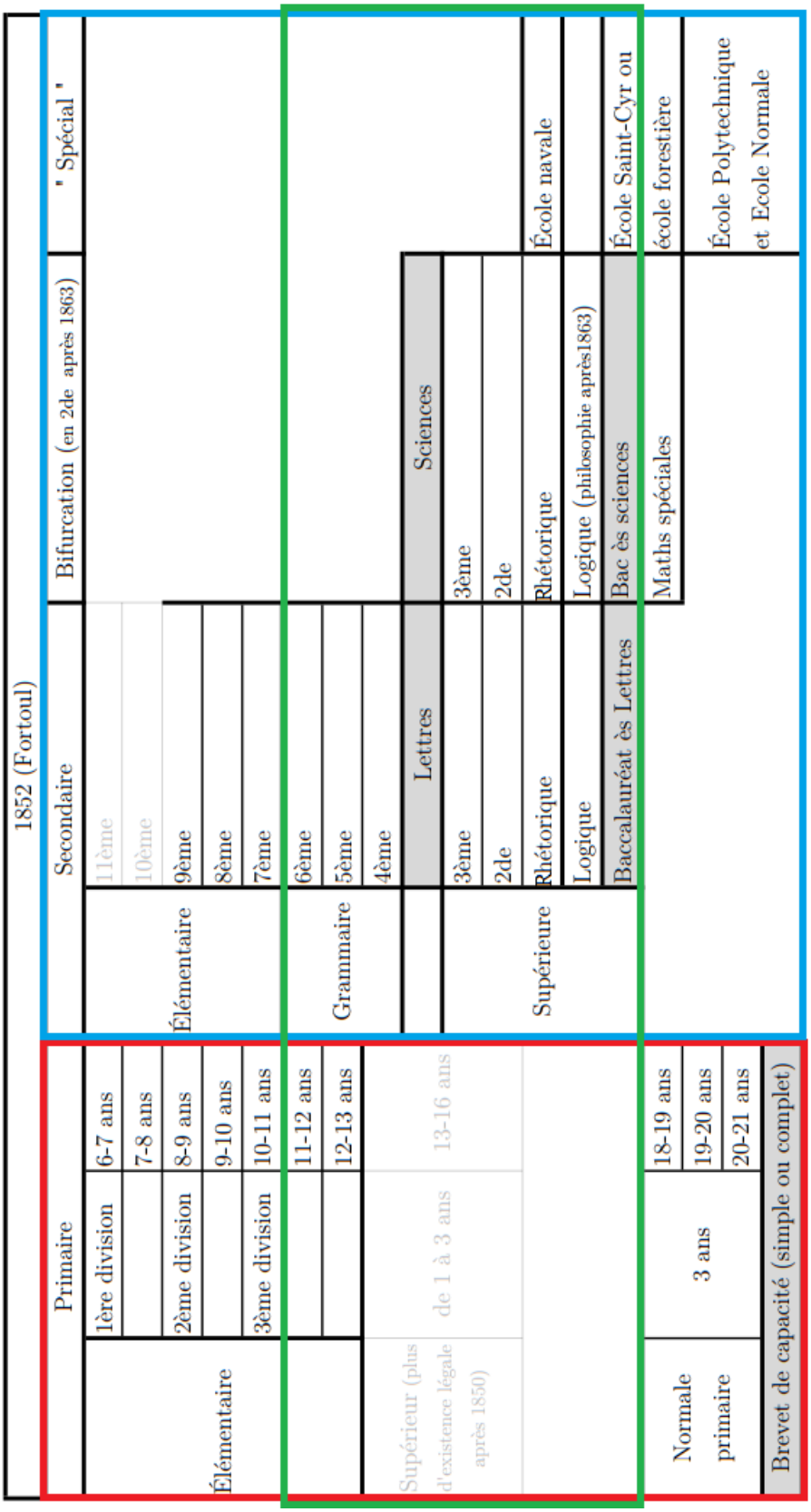


TABLE I.2 – Structures d'enseignement à partir de la réforme Fortoul de 1852 (jusqu'en 1868)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

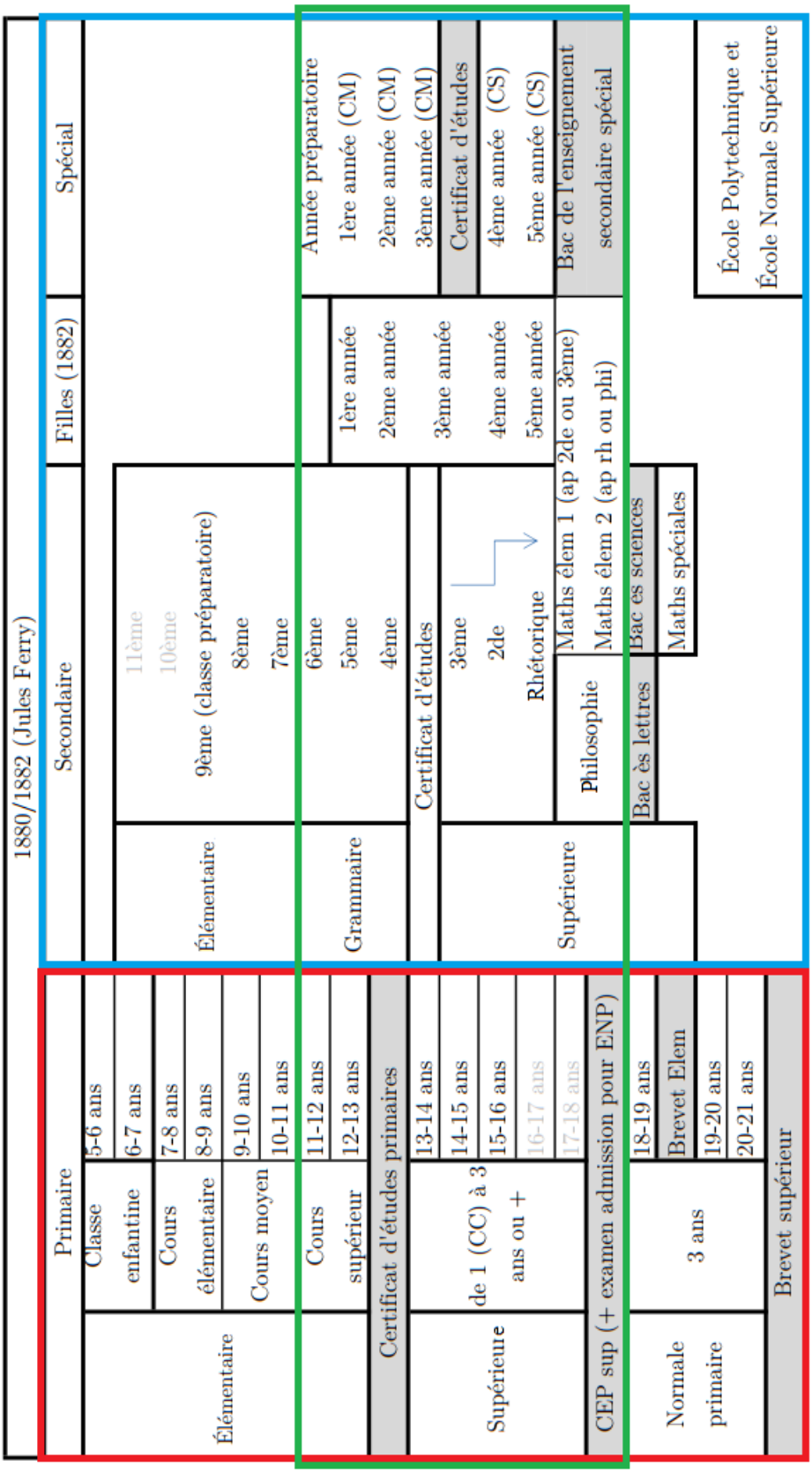


TABLE I.3 – Structures d'enseignement à partir des lois Ferry de 1880-82 (jusqu'en 1886)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

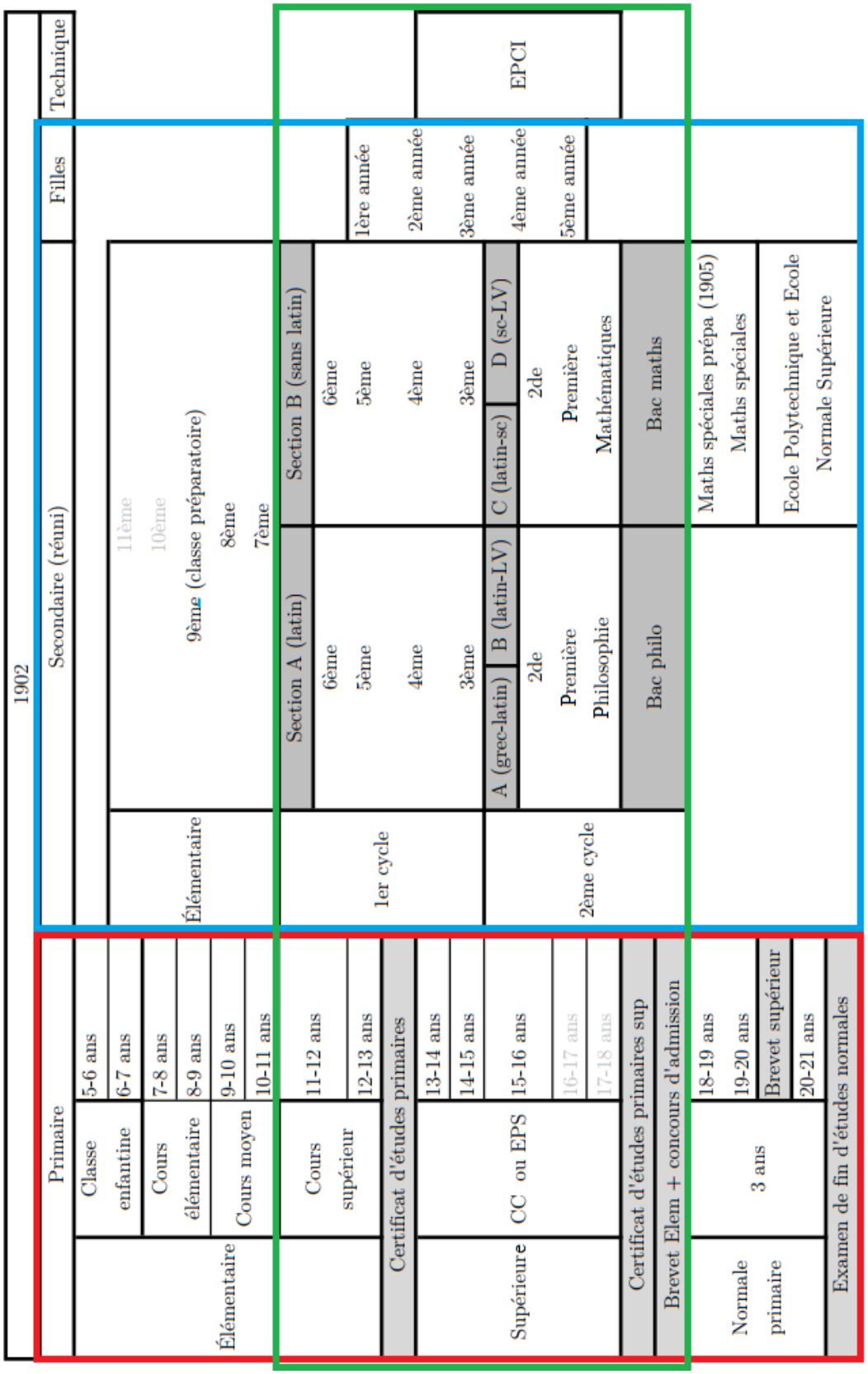


TABLE I.4 – Structures d'enseignement à partir de la réforme de 1902

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans ces différentes structures, les élèves bénéficient tous d'un enseignement en mathématiques, à un niveau ou à un autre, et dans ce cadre, de cours de géométrie, théorique ou appliquée. Les objectifs des deux ordres d'enseignement ne sont pas les mêmes, et justifient des approches pédagogiques qui diffèrent substantiellement d'un public à l'autre, en particulier en sciences. Les EPS ont en effet vocation à préparer leurs élèves aux métiers agricoles, industriels et commerciaux pour les garçons, et aux métiers de bureau, voire à l'enseignement, en les préparant à entrer dans les ENP, pour les filles. L'ambition des EPS réside de surcroît dans la constitution d'un socle de connaissances et de culture suffisamment général pour former des citoyens éclairés, mais n'est pas, comme dans les collèges et lycées, axée sur la préparation au baccalauréat et à l'entrée dans l'enseignement supérieur (Briand et Chapoulie, 2012 ; Decayeux-Cuvillier, 2019). Les deux archives photographiques présentées ci-après témoignent de l'écart entre ces deux conceptions de l'enseignement des sciences, l'une davantage axée sur la pratique et la manipulation, et l'autre plutôt sur la théorie et l'observation sous la forme d'un cours magistral[4] (voir figure I.1 p. 45).

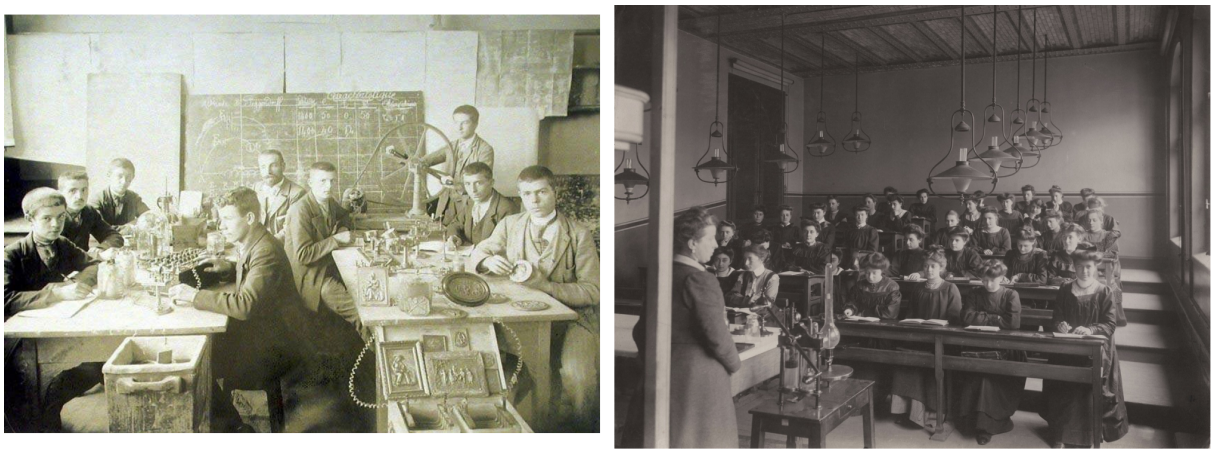


Figure I.1 – Cours d'électricité dans une EPS de garçons de Clermont-Ferrand (1899), à gauche (Inconnu, 1899) et cours de physique pour jeunes filles au lycée Racine (1890), à droite (Inconnu, 1890)

Les élèves de l'enseignement intermédiaire du XIXe siècle sont donc répartis dans deux types de structures, qui diffèrent nettement par leur forme tant que par leurs objectifs, et dans lesquelles ils sont tous susceptibles d'acquérir des connaissances en géométrie des aires. L'objectif de la section suivante est de préciser quels sont les contenus à

4. Même si les photos présentées montrent pour l'une des filles, pour l'autre des garçons, la différence de méthode d'apprentissage tient essentiellement à l'ordre d'enseignement concerné, et non au genre des élèves, l'enseignement primaire supérieur, féminin comme masculin, étant resté tout au long du siècle plus tourné vers la manipulation et l'expérience que son homologue du secondaire. Voir à ce sujet (D'Enfert, 2014).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ce sujet que les programmes préconisent de leur enseigner, qu'il s'agisse des élèves des ordres primaire ou secondaire, féminins ou masculins.

I.1.2 L'enseignement des aires dans les programmes et instructions officielles

Les éditions commentées des textes officiels concernant l'enseignement des mathématiques de D'Enfert (2003c) sur l'ordre primaire (dont supérieur) et de Belhoste (1995) sur le secondaire montrent que l'étude des aires apparaît dans les programmes des deux ordres à différents niveaux. L'objectif de cette section est de montrer quelles sont les finalités pédagogiques affichées d'un tel enseignement en fonction des publics concernés, mais aussi de repérer dans quel cadre mathématique celui-ci est dispensé, et enfin de préciser quels sont les contenus de savoir préconisés par les programmes, suivant les catégories d'élèves et leur niveau.

I.1.2.1 Géométrie des aires pour toutes et pour tous : un apprentissage commun, suivant des finalités différentes

L'apprentissage des aires est un incontournable des programmes d'enseignement intermédiaire, mais ses objectifs ne sont pas toujours explicités dans les textes de référence. Néanmoins, une partie de ces textes officiels précisent certains d'entre eux, pour l'enseignement primaire comme pour le secondaire.

Le cas de l'enseignement primaire est particulier, car dès le texte de Guizot de 1833, la géométrie ne figure pas au programme de l'enseignement primaire, et la mention même de la « géométrie et ses applications usuelles » pour les EPS fait déjà l'objet de vives discussions (Assude et Gispert, 2015, p. 185-186). Ensuite, de la loi Falloux en 1850 jusqu'aux lois Ferry de 1882, la géométrie ne figure plus officiellement au programme de l'enseignement primaire. Les instructions au sujet de la géométrie, qui datent d'avant 1850 pour les EPS, puis d'après 1882 pour le primaire en général, placent la « mesure des surfaces et des volumes » comme un but à atteindre, faisant de la géométrie des aires un objectif en soi. C'est ce qu'exprime un directeur d'ENP de Bar-le-Duc en 1843, qui concède avoir « réuni en un corps de doctrine le petit nombre de propositions qui sont indispensables pour arriver à la mesure des surfaces, des solides et aux opérations géodésiques » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 83). Cet enseignement est très clairement lié à celui de l'arpentage, qui en constitue une autre finalité. Toujours en 1843, mais dans l'EPS d'Avranches, le rapporteur estime que « les élèves n'apprennent de géométrie que les principales définitions, les propriétés les plus simples des figures

Licence CC BY-NC-ND 3.0

planes, la mesure des surfaces et l'arpentage. [Ils] sont conduits sur le terrain pour arpenter eux-mêmes sous les yeux du maître » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 112). Un autre point fondamental est souligné quelques lignes plus tard, puisqu'il est précisé que dans cette école, « on donne une infinité de problèmes qui exigent la connaissance de l'arithmétique et de la géométrie, en sorte que l'enseignement de ces deux sciences est simultané » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 112). L'objectif de l'enseignement des aires est donc intrinsèquement lié à celui du système métrique, qui est inclus dans le cours d'arithmétique. En 1840, au fondement de la future EPS Turgot (Paris 3ème) [5], il est prévu d'alterner les leçons d'arithmétique et de géométrie, mais le comité central s'est vu forcé de « réunir dans un même enseignement l'arithmétique et la géométrie » pour que « les notions géométriques arrivent quand l'enseignement de l'arithmétique est assez avancé pour permettre de les comprendre ». Finalement, l'enseignement de la géométrie « se borne à la mesure des surfaces et des solides réguliers ; il ne se donne qu'à l'occasion de l'arithmétique et se compose de leçons et de problèmes » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 108). L'auteur du texte affirme ensuite que « c'est de la géométrie pratique », expression elle aussi représentative des objectifs poursuivis par cet enseignement. De surcroît, les instructions pour les ENP de 1843 indiquent que la géométrie qui y est enseignée doit être « réduite à sa plus simple expression, mais qu'elle renferme tout ce que cette partie de la science a d'usuel » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 115), insistant ainsi sur les aspects utilitaires et pratiques de cet enseignement.

La maîtrise de la géométrie des aires est donc un objectif à atteindre, en lien avec les leçons d'arpentage et d'arithmétique, dans une vision très utilitaire et pratique de la géométrie. Si Octave Gréard [6] explique en 1868 que concernant les exercices d'application du système métrique à la mesure des surfaces pour les aspirantes institutrices, « il ne convient pas de pousser trop loin » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 155), les programmes de 1893 pour les EPS de jeunes filles font en revanche des problèmes de mesurage l'un des deux axes de l'enseignement de la géométrie, à côté du dessin linéaire (D'Enfert, 2003c, p. 271-279). Son initiateur, Félix Pécaut [7], tient néanmoins à préciser que dans l'apprentissage du mesurage des surfaces et volumes, « toute démonstration qui ne pourra pas être présentée sous une forme immédiatement intuitive sera rejetée » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 274). Les ambitions relatives à cet enseignement restent donc

5. Voir l'article à son sujet dans le *Nouveau dictionnaire de pédagogie* de Ferdinand Buisson (Filon, 1911).

6. Octave Gréard (1828 – 1904). Normalien, professeur de lettres, il est alors inspecteur de l'académie de Paris. Il deviendra par la suite directeur du service de l'instruction primaire, puis inspecteur général, avant d'être nommé vice-recteur de l'académie de Paris.

7. Félix Pécaut (1828 – 1898). Après des études de théologie, il dirige une institution libre protestante, avant de rejoindre Ferdinand Buisson et Jules Ferry pour collaborer à l'œuvre de rénovation de l'enseignement. Il fonde et dirige les études de l'École Normale d'institutrices de Fontenay-aux-Roses jusqu'en 1896.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

limitées d'un point de vue théorique, au moins pour les jeunes filles, puisque Félix (François) Vintéjoux[8], en 1887, regrette pour sa part que les professeurs se contentent de « mettre les élèves en état de comprendre les questions pratiques les plus usuelles sur les surfaces et les volumes et de résoudre des problèmes sur le système métrique », préconisant pour sa part de compléter cette étape de développements théoriques à même d'ouvrir l'esprit des élèves aux démonstrations (cité dans D'Enfert 2003c, p. 245). Vers la fin de la période, l'enseignement des aires dans l'ordre primaire tente donc de rallier les objectifs théoriques et éducatifs de la formation au raisonnement, aux visées plus utilitaires et pratiques exprimées dans la première moitié du siècle. Cette dualité est résumée par Pierre Leyssenne, inspecteur général de l'Instruction Primaire et promoteur de l'école laïque, primaire et obligatoire alors en pleine instauration (voir annexe biographique). Dans l'article « Géométrie » qu'il rédige pour le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson en 1882, il explique que si, dans l'enseignement primaire, les connaissances géométriques doivent « faciliter l'intelligence du système métrique, puis donner les moyens d'évaluer toutes les surfaces et tous les volumes qui se présentent dans les usages de la vie », elles dépassent ce simple cadre dans les écoles primaires supérieures, où la géométrie doit devenir une science déductive dans laquelle « toutes les propositions doivent être démontrées rigoureusement et méthodiquement » (Leyssenne 1882a, p. 1163-1164, cité dans Assude et Gispert 2015).

L'enseignement de la géométrie des aires dans le primaire et le primaire supérieur est donc essentiellement pratique, et son utilité est soulignée à travers ses applications à « l'arpentage, le levé de plans et le dessin linéaire » (Leyssenne, 1882a, p. 1164). Toutefois, l'intérêt de ses aspects théoriques pour la formation au raisonnement est également nettement mise en avant, en particulier à la fin du siècle.

Dans le secondaire, les enjeux ne sont pas les mêmes, puisque la géométrie figure officiellement au programme de toutes les structures d'enseignement tout au long de la période considérée. De plus, les questions de mesure d'aires ne forment pas un objectif final, mais seulement un pan des connaissances à acquérir. Néanmoins, l'accent est mis sur cet aspect des savoir-faire à maîtriser dans le cadre de l'enseignement secondaire spécial, institué en 1849, puisqu'il y est recommandé aux professeurs de faire « exécuter par les élèves des applications numériques sur les aires des figures planes », et plus généralement, de montrer « toutes les fois que l'occasion s'en présentera, l'application à l'art ou à l'industrie des théorèmes qu'ils démontrent » (Belhoste, 1995, p. 228). Cet aspect est confirmé dans les programmes de 1866 de l'enseignement spécial, pour

8. Félix (François) Vintéjoux (1833 – 1921). Professeur au lycée St-Louis et membre du Conseil Supérieur de l'Instruction publique, il participe à ce titre à l'élaboration des programmes de l'instruction primaire.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

lequel le cours de géométrie doit être « tout rempli d'applications à l'art et à l'industrie » (Belhoste, 1995, p. 422). Les connaissances relatives aux aires doivent de surcroît être reliées à l'apprentissage de l'arpentage sur le terrain, puisqu'il est indiqué :

> On conçoit qu'à moins de circonstances exceptionnelles, le professeur de mathématiques ne pourra pas conduire tous ses élèves dans la campagne pour leur faire faire les exercices d'arpentage qui doivent compléter son cours ; mais le jeudi, toutes les fois que le temps le permettra, on emploiera quelques heures sur le terrain aux opérations pratiques. (cité dans Belhoste 1995, p. 422-423)

Dans l'enseignement secondaire classique, les orientations des textes officiels diffèrent et tendent davantage à mettre en relation les aires avec la partie « système métrique » des programmes d'arithmétique. Dans les instructions pour la mise à exécution du plan d'études des lycées de 1854, il est précisé :

> Les énoncés relatifs à la mesure des aires et des volumes laissent trop souvent de l'incertitude dans l'esprit des élèves, sans doute à cause de leur forme. On les fera mieux saisir en insistant sur leurs applications par un grand nombre d'exemples : ce sera une occasion de revenir sur la partie du système métrique qui est relative à la mesure des surfaces et des capacités. (cité dans Belhoste 1995, p. 341)

Finalement, les aires présentent une importance moindre dans les programmes de l'enseignement secondaire, dans lesquels elles ne constituent pas un point d'orgue des connaissances à acquérir. Néanmoins, quelques textes officiels mentionnent explicitement les enjeux d'apprentissage des notions qui leur sont relatives, en connexion avec l'arpentage, les arts et l'industrie pour l'enseignement spécial, et avec le système métrique pour la voie classique, conformément à ce que nous avons déjà observé dans le primaire. Les enjeux éducatifs des aspects plus théoriques de ces apprentissages pour la formation au raisonnement, s'ils ne sont pas relayés spécifiquement à propos des aires dans les textes officiels consultés, n'en restent pas moins réels, notamment à travers les démonstrations et les méthodes mobilisées pour aborder ce type de résultats.

La géométrie des aires se situe donc à l'interface des objectifs d'enseignement des ordres primaire et secondaire. Si le primaire partage avec l'enseignement secondaire spécial des visées essentiellement utilitaires et pratiques, ainsi qu'une incitation à lier ces apprentissages avec ceux de l'arpentage, il a en commun avec le secondaire classique la volonté de mettre en connexion ces connaissances avec celles relatives au système métrique étudié en arithmétique. Les objectifs théoriques de formation au raisonnement

Licence CC BY-NC-ND 3.0

sont plus spécifiques au secondaire classique, même si une évolution apparaît en ce sens dans l'enseignement primaire à la fin du siècle (voir schéma I.2 p. 50).

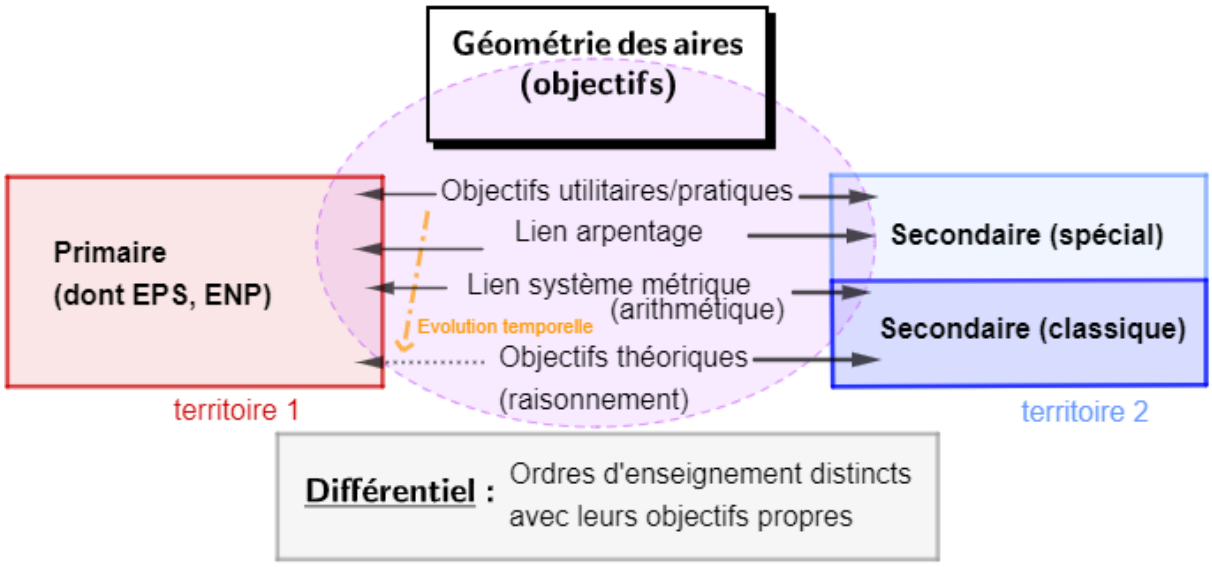


FIGURE I.2 – Schéma montrant en quoi les objectifs de l'enseignement de la géométrie des aires sont à l'interface des ordres primaire et secondaire

I.1.2.2 L'apprentissage des aires dans le territoire mathématique

Nous pouvons à présent déterminer comment s'insère la géométrie des aires dans l'enseignement des mathématiques, et pour cela entreprendre de localiser ses connaissances au sein des programmes, dans des catégories reflétant une image du « territoire » (voir p. 24) que forment alors les mathématiques en tant que discipline, à la fois scientifique et scolaire. En effet, le regroupement de divers domaines mathématiques sous cette dénomination commune est loin d'être une évidence historique et s'est mis en place progressivement au cours de la période étudiée (Assude et Gispert, 2015). Leur cartographie n'est par conséquent pas facile à dresser. C'est ce dont attestent également les programmes, puisque, dans ce contexte d'une discipline en cours de constitution et encore très fragmentée, les contenus sur les aires se retrouvent le plus souvent en « géométrie » mais aussi en « arithmétique », « trigonométrie », « arpentage », « application de l'algèbre à la géométrie » ou encore « courbes usuelles ».

— **En arithmétique** : Sous l'appellation « arithmétique » dans le programme de 3ème section « sciences » de 1852, il est noté « Mesure de superficie, de volume et de capacité » (Belhoste, 1995, p. 282). Cette mention reste d'actualité en 1863 (Duruy, 1863a, p. 239). En 1881, dans le programme de « Cours Complémentaire », partie « arithmétique », il est indiqué : « système métrique, avec la pratique des mesures de surface et de volume » (D'Enfert, 2003c, p. 194). Les garçons des EPS étudient

Licence CC BY-NC-ND 3.0

le système métrique dès 1885 avec des « applications nombreuses, notamment à la mesure des surfaces et des volumes » (D'Enfert, 2003c, p. 223). Les élèves de 5ème de 1890 ont quant à eux à traiter des « exercices relatifs à la mesure des aires et des volumes » (Belhoste, 1995, p. 518).

— **En « application de la géométrie » ou « arpentage »** : Le programme de 1852 des 3èmes en section scientifique présente une rubrique « Application de la géométrie élémentaire » dans laquelle se trouve mentionné « Notions sur l'arpentage. Cas où le terrain serait limité, dans une de ses parties, par une ligne courbe » (Belhoste, 1995, p. 287). En 1885, les EPS de garçons enseignent de l'arpentage, avec l'« évaluation des surfaces sur les plans dessinés » (D'Enfert, 2003c, p. 223). Cette préconisation est réitérée en 1894 sous la formulation « Mesurer la surface d'un terrain ayant la forme de [...] » (D'Enfert, 2003c, p. 283).

— **Dans les autres domaines (« application de l'algèbre à la géométrie », trigonométrie, etc.** : En 1848 figure dans le programme de l'enseignement spécial une partie « applications de l'algèbre à la géométrie » où il est prévu de calculer les aires des surfaces délimitées par des sections coniques (Belhoste, 1995, p. 242). Enfin, il est parfois question de « résolution des triangles » incluant le calcul de leurs surfaces dans des parties intitulées « Trigonométrie », comme c'est le cas par exemple dans le programme de l'enseignement spécial de 1886 (Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1866).

Le panorama des programmes ainsi réalisé met en évidence un point essentiel : l'enseignement des aires ne se restreint pas aux seuls cours de géométrie élémentaire. Les connaissances acquises durant les leçons de géométrie sont alors amenées à entrer en interaction avec celles relatives à d'autres territoires mathématiques, comme le système métrique, les courbes usuelles, l'arpentage ou la trigonométrie. Et *a contrario*, l'étude de ces domaines mathématiques est aussi à même de motiver la nécessité pour les élèves de savoir manipuler les aires. En ce sens, l'apprentissage des aires joue manifestement le rôle d'interface entre eux, tel que nous l'avons supposé. Dans des domaines qui semblent délimités au sein des mathématiques, ne serait-ce que par la diversité de leurs dénominations dans les instructions officielles, les aires forment effectivement une zone de contact, susceptible de générer ou dynamiser des transferts de connaissances de l'un à l'autre (voir schéma I.3 p. 52).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

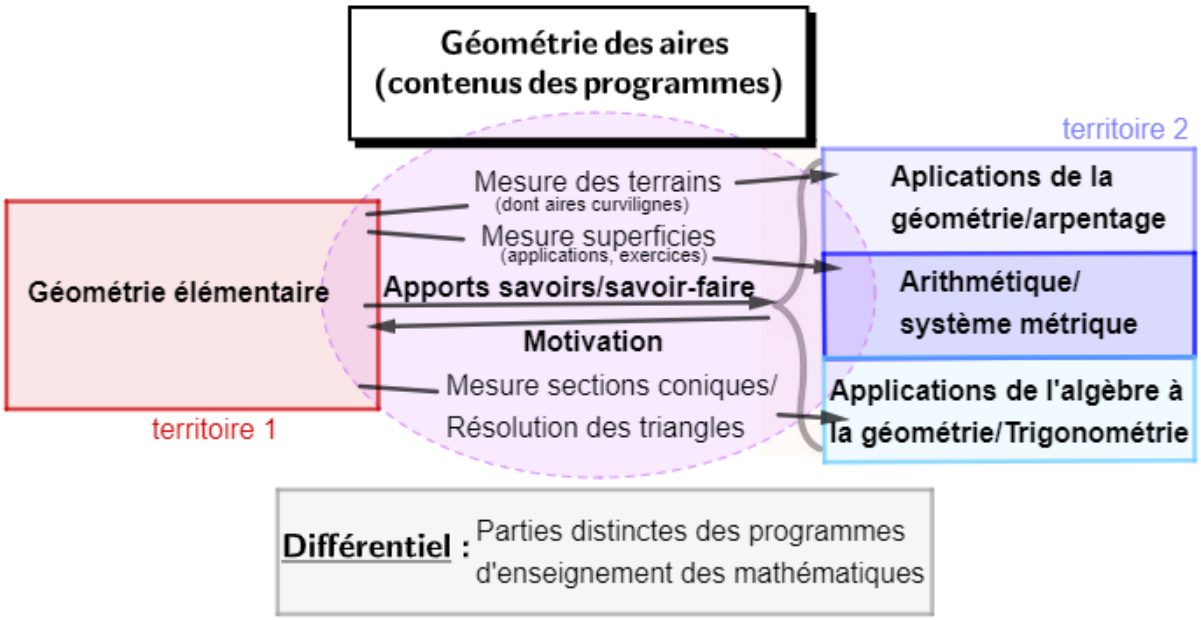


FIGURE I.3 – Schéma montrant en quoi les contenus des programmes relatifs à la géométrie des aires sont à l'interface des différents domaines mathématiques

I.1.2.3 Des contenus sur les aires pour tous les publics, à toutes les époques

Les aires et les savoirs qui leur sont relatifs sont donc enseignés à toutes et à tous au niveau intermédiaire, du début à la fin de la période d'étude, dans les ordres primaire et secondaire, suivant des finalités qui divergent assez nettement, mais dans les deux cas en relation avec d'autres domaines des mathématiques que la stricte géométrie élémentaire. Ces savoirs sont transmis à des niveaux qui peuvent être différents. Pour les analyser plus finement, nous nous sommes appuyée sur les 25 programmes d'enseignement reproduits dans les ouvrages de Belhoste et D'Enfert (Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003c), desquels nous avons extrait tout ce qui relève de l'enseignement des aires. Nous les avons ensuite décliné par années de réformes, par structure d'enseignement et par niveau. Le tableau I.5 (p. 53) montre le résultat de ce recensement.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Années	1833	1838	1843	1849	1852		1863		1865	1866	1874	1880		1882	1881	1885	1886	1885	1890		1893	1897		1902	
Structures	Sec	Sec	Sec (ME)	Spé	Sec-L	Sec-S	Sec-L	Sec-S	Sec	Spé	Sec	Sec-G	Sec-F	Spé	EPS	Sec	Spé	EPS-G	Sec-C	Sec-M	EPS-G	EPS-F	Sec-F	SecG-A	SecG-B
1	4	4	7	4	4	4	4	4	5	3	3	2	4	3	1	4	3		4	4	1	1	4	5	3
1 +						4				3															
1 ++				4				5		3			5				3					4		7	
2					4	4	4	4	5		4		4	3			3			4	4	4	4	7	7
3	4	4	7	4	4	4	4	4	5	3	5	2	4	3		4	4		4	4	4		4	5	3
3 +	4	4	7		4	4	4	4	5	3	5		4	3			4			4	4				7
3 ++	4	4		4		4	4	4	5	3	5			3			4			4	4				7
4		4		4	4	4	4	4	5	3	5	4	4	3		4	3		4	4	4	4		5	3
5						4	4	4		3										4					7
6				4	7	4			5	3	4	2		3	1		3	3		4	1	1			3
6 +				4		4				3											4				
7											4			3								4		7	
8			7			5		5																	
9																									7
10				6						4														7	
11						4	4	4							3	2		3	2	2	3		2	2	1
12																						4			
13																								7	
14																								7	

Contenus

Légende :

1	Aire d'un triangle, quadrilatère, polygone quelconque
1 +	Méthode de décomposition en triangles et en trapèzes rectangles
1 ++	Problèmes sur la comparaison des aires ou figures équivalentes
2	Théorème du carré construit sur l'hypoténuse ("Pythagore")
3	Aire du cercle
3 +	Aire du polygone régulier
3 ++	Aire du secteur circulaire et segment de cercle
4	Rapport des aires de deux polygones semblables
5	Rapport des aires de deux cercles de rayons différents
6	Arpentage
6 +	Cas où le terrain serait limité par une ligne courbe
7	Aire approchée d'une figure délimitée par une courbe quelconque
8	Trigonométrie: résolution des triangles avec calcul de sa surface
9	Planimétrie
10	Coniques : surface de l'ellipse, hyperbole, secteur de parabole
11	Système métrique : ex relatifs à la mesure des aires
12	Travail manuel : papier quadrillé, découpage, pesage
13	Aire comme limite d'une somme de rectangles inférieure et supérieure
14	Aire par utilisation d'une primitive

Enseignement secondaire classique ("C" ou "A")
Enseignement secondaire spécial (ou moderne "M" ou "B")
Enseignement féminin
Enseignement primaire supérieur

Note : "G" désigne l'enseignement des garçons, "F" des filles
"L" désigne la section "lettres" et "S" celle des "sciences"

1	Classe 1 : âge scolaire théorique 11-12 ans
2	Classe 2 : âge scolaire théorique 12-13 ans
3	Classe 3 : âge scolaire théorique 13-14 ans
4	Classe 4 : âge scolaire théorique 14-15 ans
5	Classe 5 : âge scolaire théorique 15-16 ans
6	Classe 6 : âge scolaire théorique 16-17 ans
7	Classe 7 : âge scolaire théorique 17-18 ans

TABLE I.5 – Tableau récapitulatif des contenus sur les aires présents dans les différents programmes d'enseignement de l'ordre primaire comme secondaire de 1833 à 1902

Carène GUILLET| Thèse de doctorat | Université de Limoges
Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture (figure I.5 p. 53) : Les contenus des programmes à propos de l'étude des aires sont référencés de 1 à 14, avec quelques éléments complémentaires (1+, 1++, 3+, 3++ et 6+) pour certains de ces contenus (aire des polygones, aire du cercle et arpentage). Leur localisation dans les textes officiels des différentes réformes des deux ordres d'enseignement sont signifiés par un chiffre allant de 1 à 7 dans le tableau, correspondant au plus bas niveau scolaire auquel se situe ce contenu dans le programme correspondant.
Exemple (cadre gris) : L'aire approchée d'une figure délimitée par une courbe quelconque (contenu 7) est un attendu des programmes de l'enseignement secondaire classique de 1874 pour la classe d'âge 4 (équivalent de la 3ème actuelle), de l'enseignement secondaire spécial de 1882, pour la classe d'âge 3, des EPS de filles de 1897, pour la classe d'âge 4, et de l'enseignement secondaire série A en 1902, pour la classe d'âge 7 (actuelle terminale).

Nous pouvons extraire quelques éléments d'analyse de ce tableau, concernant tout d'abord le niveau scolaire auquel les aires sont prioritairement enseignées, puis la mise en évidence des contenus majoritairement préconisés, pour finir avec une mise en comparaison des programmes du primaire supérieur, du secondaire spécial et de l'enseignement féminin avec ceux du secondaire classique :

Les aires sont principalement enseignées à des élèves âgés de 13 à 15 ans, ce qui correspond aux classes de 4ème et 3ème des collèges (classes d'âge 3 et 4 du tableau) : les contenus théoriquement enseignés à ces classes d'âge représentent environ 70 % des valeurs du tableau, et ceux relatifs à la classe 4 plus de la moitié. Ensuite viennent les classes 5 et 7, avec environ 10 % des valeurs chacun. Les aires sont enseignées à la classe d'âge 5 (équivalent de l'actuelle classe de seconde) principalement dans les années 1860-70, ce qui souligne un recul global de l'âge auquel ces notions sont étudiées durant cette période. La classe 7 est surtout représenté lors de la réforme de 1902, alors que les aires sont également abordées sous l'angle du calcul différentiel en classe de philosophie (actuelle terminale), mais aussi dans les programmes de « mathématiques élémentaires » de 1843. Quelques notions de base sont également enseignées aux classes d'âge 1 et 2, mais dans une faible proportion (environ 9 % des valeurs du tableau).

Les contenus des programmes les plus courants forment un socle de savoirs sur la mesure des aires des polygones et du cercle et sur les rapports des aires des polygones semblables (contenus 1, 3 et 4). Ces contenus apparaissent en effet dans au moins 20 des 25 programmes analysés, soit plus de 80 % d'entre eux. Ils sont complétés par

Licence CC BY-NC-ND 3.0

le théorème de Pythagore, l'aire des polygones réguliers, des secteurs et segments de cercle, l'arpentage et divers exercices liés au système métrique (contenus 2, 3+, 3++, 6 et 11), eux aussi assez fréquents puisque respectivement présents dans 15, 16, 14, 15 et 12 des 25 programmes étudiés (soit entre 48 et 64 % d'entre eux). D'autres connaissances sont plus rarement évoquées, comme les problèmes de comparaison ou d'équivalence des figures (n° 1++, cité 7 fois, soit dans 28 % des programmes), la comparaison des cercles (n° 5, cité 6 fois, soit 24 %), puis la détermination des aires curvilignes quelconques (n° 6+ et 7, cités 4 fois chacun, soit 16 %), et celles délimitées par des coniques (n° 10, cité 3 fois, soit 12 %). Enfin, certains éléments sont spécifiques à un seul programme, au moins dans leurs formulations. C'est le cas des méthodes infinitésimales, de la « planimétrie » en 1902 (items n° 9, 13 et 14), ou encore des méthodes de quadrillage et pesées (n° 12) pour les jeunes filles en 1897.

Les programmes du primaire supérieur ne peuvent être comparés avec leurs homologues du secondaire qu'à la toute fin du siècle [9], période à laquelle nous pouvons noter que le programme de 1893 pour les EPS de garçons semble sensiblement identique à celui du secondaire moderne de 1890, en contenu comme en niveau. Nous pouvons également mettre en parallèle très directement les plans d'études pour les jeunes filles avec leurs équivalents masculins contemporains. Les contenus de 1880 à destination des jeunes filles sont assez différents de ceux des garçons, avec une tendance à être enseignés plus tardivement : de 14 à 16 ans chez les filles, contre 12 à 15 ans chez les garçons. Les écolières du primaire supérieur de 1897 bénéficient d'un programme très particulier, pas du tout calqué sur celui de leurs camarades masculins (programme EPS garçons de 1893), même si les contenus sur les aires leur sont présentés au même âge (classe n° 4 essentiellement). Le programme du secondaire féminin de 1897 se distingue moins de son homologue masculin : il semble, au moins en première analyse, très proche de celui de l'enseignement secondaire classique de 1890. Enfin, les programmes de l'enseignement spécial sont globalement riches en contenus sur les aires, avec beaucoup de connaissances abordées. Ils contiennent tous des notions d'arpentage, et deux d'entre eux traitent des aires délimitées par des sections coniques. En les mettant en parallèle avec leurs homologues « classiques » contemporains, ils apparaissent, à partir de 1866, systématiquement plus complets et plus précoces, comme celui de 1866 par rapport au classique de 1865 (de même pour celui de 1882 par rapport à 1880, 1886 par rapport à 1885, ou les deux programmes de 1890).

9. En effet, les instructions de 1833 ne sont pas déclinées en contenus explicites de programme pour le primaire supérieur, et l'effacement officiel des écoles primaires supérieures à partir de la loi Falloux jusqu'aux lois Ferry ne nous permet pas de présenter un programme d'études spécifique à ce type de structure avant 1881.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Afin de croiser les informations extraites dans le tableau I.5 (p. 53) en termes de contenus et de public, nous avons choisi de présenter la répartition de ces savoirs dans un carré dont les sommets symbolisent les quatre types de publics considérés dans cette étude (secondaire classique et spécial, EPS et enseignement féminin, secondaire ou primaire).

Méthode : Chacun des contenus de programme recensés dans cette section donne lieu à un pourcentage d'apparition dans l'ensemble des programmes relatifs à chacun des publics concernés. Ces pourcentages sont ensuite pris comme les coefficients barycentriques affectés à chacun des quatre points, sommets du carrés, représentant les quatre types de publics. Le barycentre ainsi construit est alors le point modélisant le contenu considéré.
Exemple : Le contenu 2 apparaît dans 67 % des programmes de l'enseignement spécial, 33 % de ceux des EPS de garçons, 100 % des programmes féminins et 54 % de ceux de l'enseignement spécial. Le point $Cont_2$ correspondant est donc construit comme le barycentre des quatre sommets du carré, pondérés par les coefficients 67, 33, 100 et 54.
Résultat : Voir schéma I.4 p. 57

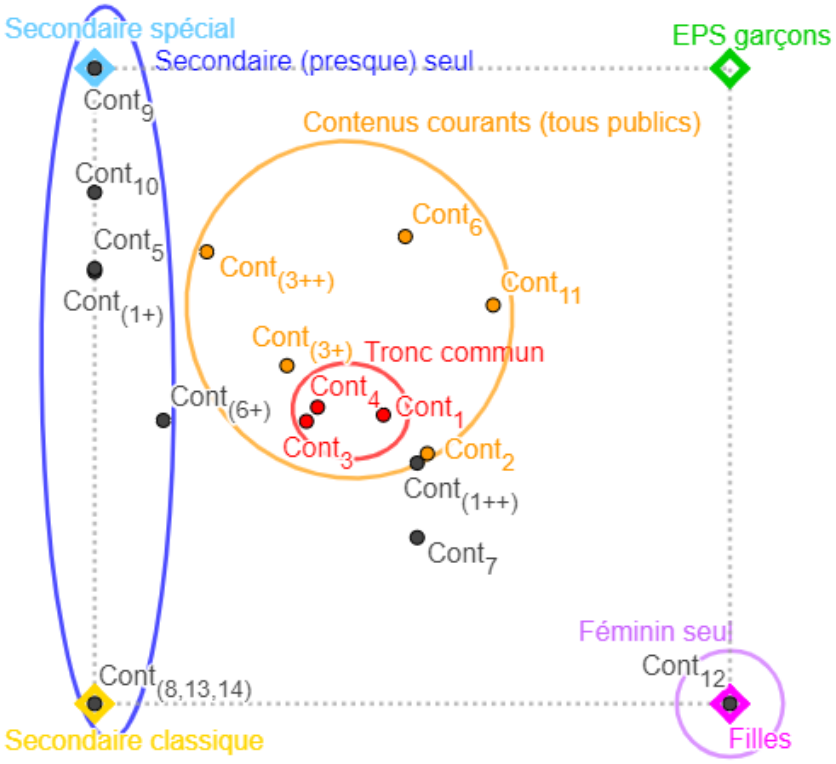


FIGURE I.4 – Schéma montrant comment les contenus sur les aires des programmes se situent par rapport aux publics qu'ils concernent

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse (figure I.4 p. 57) : Les contenus reconnus pour former le socle commun de connaissances sur les aires (1, 3 et 4, soit les aires des polygones et du cercle, et le rapport des aires des polygones semblables), présents dans presque tous les programmes, se situent naturellement au centre du carré (ellipse en rouge), puisqu'il concerne tous les publics. Un groupe élargi de contenus est également présent au centre du carré, qui correspond à des savoirs présents dans environ la moitié des programmes ou plus (2, 3+, 3++, 6 et 11 [10], dans l'ellipse en orange). Une partie des contenus est presque exclusivement réservée à l'enseignement secondaire, classique ou spécial (1+, 5, 8, 9, 10, 13 et 14, dans l'ellipse en bleu) : ils concernent des connaissances avancées sur les méthodes de décomposition des surfaces, les rapports des aires des cercles entre eux, la trigonométrie, la planimétrie, les aires des sections coniques, et les méthodes du calcul différentiel appliquées à la détermination des aires. Le contenu 12, relatif au quadrillage, découpage et pesage, n'est présent quant à lui que dans l'enseignement féminin.

Ce premier tour d'horizon des programmes sur les aires déclinés par contenus souligne la diversité des savoirs attendus suivant les structures et publics concernés, malgré la présence d'un socle commun de connaissances. Les besoins particuliers à certains types d'élèves, comme ceux de l'enseignement spécial, traditionnellement à vocation plus utilitaire, ou encore ceux pour les jeunes filles, trouvent leur expression dans des programmes aux contenus assez spécifiques. Il reste que les aires sont réellement enseignées à toutes et tous, du début à la fin de la période d'étude, à des niveaux parfois différents et en proposant des contenus plus ou moins avancés. Les connaissances sur les aires se trouvent ainsi à l'interface de multiples contextes d'enseignement, et leur analyse peut donc mettre en évidence les différences et points communs dans les objectifs qu'ils poursuivent et les méthodes qu'ils appliquent.

I.1.3 Conclusion

Les diverses structures d'enseignement intermédiaire, de l'ordre primaire ou secondaire, intègrent toutes de la géométrie dans leurs cursus, sous une forme ou une autre. Les programmes d'enseignement diffèrent suivant les contextes, mais présentent tous des connaissances sur les aires aux élèves auxquels ils s'adressent. Certes, les contenus ne sont pas toujours semblables, et des particularités apparaissent suivant les publics concernés, notamment dans l'enseignement spécial ou l'enseignement féminin, au-delà

10. Théorème de Pythagore, aire des polygones réguliers, des secteurs et segments de cercle, arpentage et divers exercices liés au système métrique.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des savoirs communément enseignés, que l'on peut voir comme un socle commun. Les connaissances sur les aires ne sont de surcroît pas seulement mobilisées dans les cours de géométrie, mais sont également présentes dans les programmes d'arithmétique, en lien avec le système métrique, dans ceux de géométrie appliquée, notamment à l'arpentage, en trigonométrie ou au sujet des courbes usuelles. Cette présence au carrefour de plusieurs domaines des mathématiques fait des connaissances sur les aires une interface au sein de cette partition de la discipline mathématique, alors encore en cours de construction. L'ensemble des interfaces relevées dans ce chapitre, entre les territoires mathématiques considérés ainsi qu'entre les publics concernés par la géométrie des aires, sont synthétisées sur le schéma I.5 p. 58.

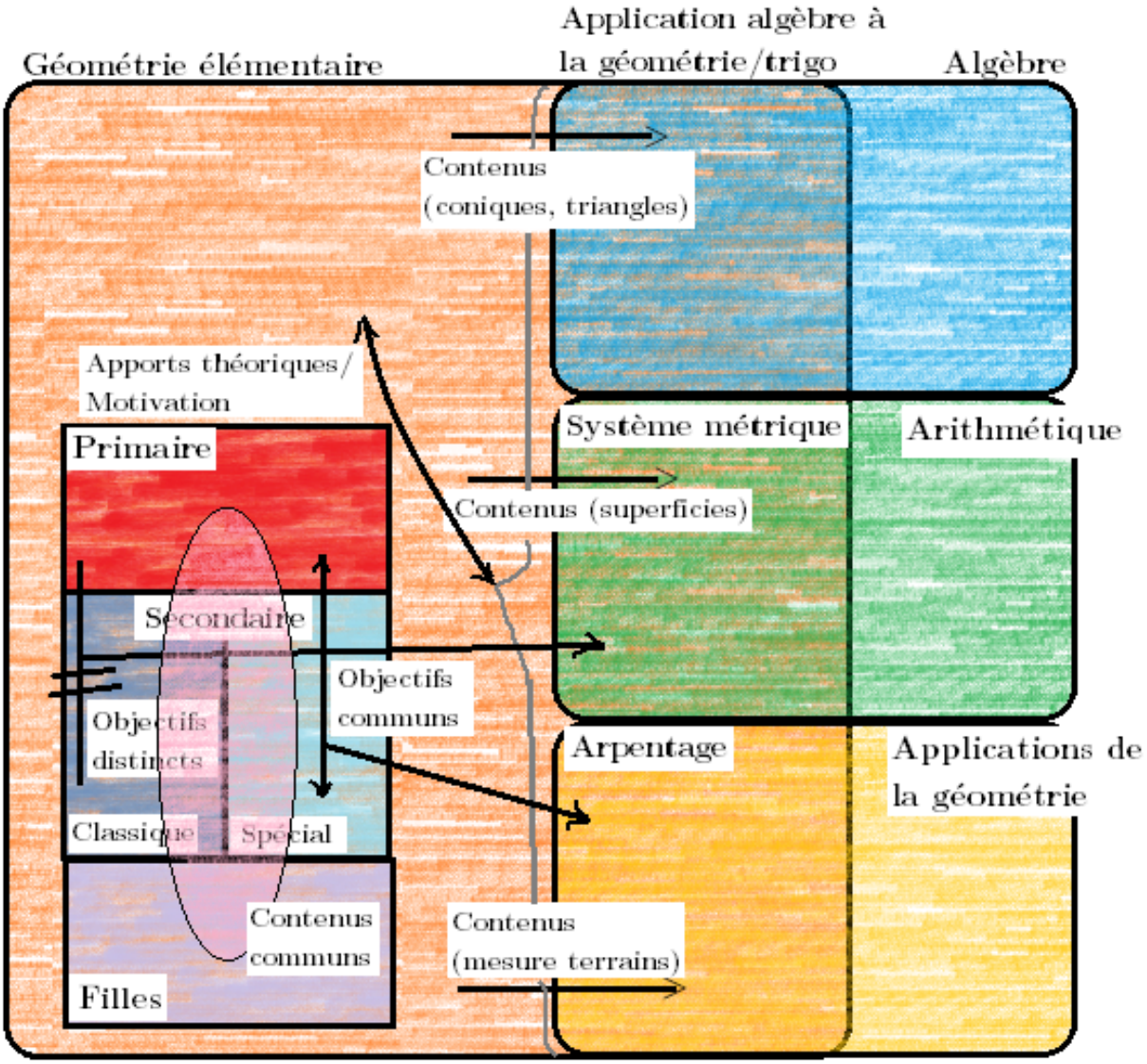


FIGURE I.5 – Schéma synthétisant le rôle d'interface de la géométrie des aires entre les domaines mathématiques et les publics au sein des programmes officiels

Licence CC BY-NC-ND 3.0

L'enjeu de notre étude est désormais d'analyser plus précisément en quoi la géométrie des aires joue un rôle dans les flux de connaissances au sein des diverses branches des mathématiques, et au cœur des objectifs éducatifs, utilitaires ou théoriques, de l'enseignement de la géométrie, exprimés par les instructions officielles.

I.2 La géométrie et la géométrie des aires dans les manuels scolaires

Le fait que la géométrie s'impose comme une matière à enseigner, dans toutes les structures scolaires qui se mettent en place au XIXe siècle, nécessite l'élaboration d'une offre adaptée de livres scolaires. Les historiennes et historiens des mathématiques se sont emparés, au cours des dernières décennies, de cette source d'étude que constituent les manuels scolaires, ce dont témoignent les travaux récents dans l'histoire de son enseignement (Bernard et Proust, 2014 ; Karp et Schubring, 2014). Selon Karp, néanmoins, « Il ne serait pas faux de dire que les études historiques sur ces sujets [organisation du processus d'instruction, pratiques d'enseignement et fonction des manuels] dans de nombreux pays ne font que commencer » (traduction de l'auteur[11]) (Karp et Schubring, 2014, p. 13). Dans ce cadre, l'étude des manuels de géométrie s'avère pertinente, dans la mesure où ceux-ci sont liés aux programmes scolaires en vigueur et à la production mathématique de leur époque (Choppin, 1992, p. 19). En les analysant, nous serons à même de mieux comprendre comment la notion d'aire et ses usages sont censés être enseignés durant notre période en France, en termes de contenus de savoir, de savoir-faire, ou encore de méthodes d'enseignement.

Nous proposons dans ce chapitre de mesurer le volume de manuels de géométrie produits par l'édition française du XIXe siècle et d'en dégager les principales caractéristiques concernant leurs auteurs et les publics auxquels ils s'adressent. Cette analyse vise à montrer la position des ouvrages d'enseignement de la géométrie à la jonction des communautés formées par les auteurs d'une part, et leurs lecteurs de l'autre. Cette situation permet ensuite d'envisager et de déterminer le rôle de la géométrie des aires à l'interface de ces groupes d'individus au sein de la société française. Pour mener à bien la suite de notre étude, il est nécessaire de délimiter le type d'ouvrages que nous envisageons de retenir pour traiter de la géométrie des aires, ce que nous nous employons à faire dans la dernière section (I.2.3 p. 92).

11. En anglais dans le texte : « it would not be wrong to say that historical studies in these topics [organization of the instructional process, teaching practices, and the function of textbooks] in many countries are only beginning ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.2.1 Les manuels de géométrie au XIX^e siècle : Nombre et évolution, auteurs et publics

L'objectif de cette section [12] est d'étudier la place de la géométrie au sein de l'offre de manuels scolaires de la période s'étendant de 1833 à 1902. Ce faisant, notre intention est de prolonger les travaux récents qui remettent en question certaines idées reçues en histoire de l'éducation, en discutant des liens de causalité ou d'opposition communément admis : par exemple, nous nous proposons d'évaluer le rapport éventuel entre la production des manuels de géométrie et les prescriptions institutionnelles, tel qu'il est exprimé par Choppin (Choppin, 1986). Nous interrogeons également l'imperméabilité supposée des deux ordres d'enseignement, primaire et secondaire, à travers le prisme de la géométrie des aires, comme l'a fait D'Enfert à propos de l'offre locale d'enseignement et de la circulation des enseignants (D'Enfert, 2015). En particulier, dans la continuité de l'étude de Legros sur les manuels d'arithmétique (Legros, 2019), nous analysons les types d'auteurs d'ouvrages d'enseignement de la géométrie, ainsi que leurs publics, avant de croiser les données obtenues. Nous cherchons donc, dans cette section, à déterminer comment le nombre de manuels de géométrie publiés évolue au fil du temps et pour quelles raisons, mais également qui sont les auteurs de ces manuels, quels sont leurs publics cibles et qui écrit pour qui.

La méthode que nous suivons pour y répondre est quantitative. Elle se fonde sur une recension de données relatives aux ouvrages d'enseignement de la géométrie, suivie de leur analyse statistique, dont les résultats permettront de confirmer ou d'infirmer les conclusions avancées par les historiennes et historiens de l'éducation évoquées ci-avant. Cette démarche nécessite au préalable de sélectionner dans une source fiable et exhaustive l'ensemble des manuels de géométrie édités sur la période. De telles démarches ont déjà été suivies en histoire de l'enseignement, et notamment, comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction générale : par Dhombres sur les manuels de mathématiques au tournant du XIX^e siècle, par Lorenat sur les manuels français de géométrie moderne et par Legros à propos des manuels d'arithmétique, dans ces deux derniers cas au XIX^e siècle. Les stratégies de recension des ouvrages diffèrent suivant les études : Dhombres s'appuie sur des catalogues de la *Bibliothèque Nationale de France* (*BNF*), dans lesquels sont consignés tous les ouvrages édités et donnant lieu à un dépôt légal, mais ne cible que quatre années de sa période d'étude, s'étendant de 1770 à 1830 [13], et retient ainsi 123 titres (Dhombres, 1985, p. 93-97) ; Lorenat puise 113 références en géométrie moderne entre 1800 à 1833 sur le site de la BNF, complétés par 13 titres issus du catalogue de la Library of Congress et du

12. Les résultats présentés dans cette section ont été publiés dans (Guillet, 2022).
13. Les quatre années qu'il retient sont 1775, 1800, 1812 et 1825.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

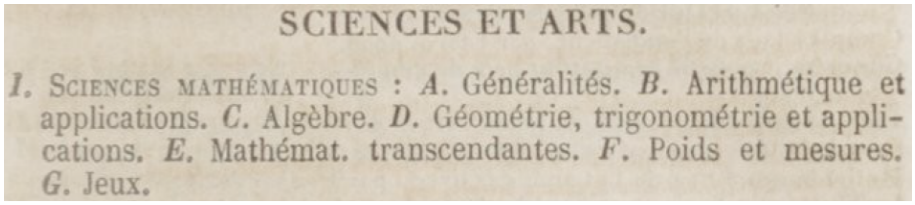
Catalogue collectif de France (CCfr) (Lorenat, 2019, p. 76-77) ; Legros quant à elle sélectionne les notices de la BNF comprenant les mots-clés « calcul » et « arithmétique » croisés avec « école », ce qui lui fournit 575 notices, parmi lesquelles elle opère une sélection, principalement par exclusion (Legros, 2019, p. 91-94). Nous présentons dans la section suivante les sources que nous avons consultées et la méthode que nous avons suivie pour recenser le plus exhaustivement possible les manuels de géométrie en usage sur notre période d'étude.

I.2.1.1 Nature de la source et collecte des données

Concernant la source initiale pour constituer une base de données exhaustives des ouvrages d'enseignement de la géométrie publiés officiellement de 1811 à 1902, notre choix s'est porté sur la *Bibliographie de la France* (*BF*). Il s'agit en effet de la première bibliographie nationale française, publiée entre 1811 et 1971, qui recense toutes les publications entrées par dépôt légal à la bibliothèque nationale sous la forme d'un volume annuel (Seckel, 2011). Même si elle paraît de manière irrégulière dans le temps, ce périodique propose un numéro récapitulatif contenant tous les livres publiés officiellement au cours d'une année.

Pour constituer notre corpus de manuels de géométrie, nous avons parcouru ces volumes annuels de façon systématique, en s'appuyant sur leurs tables des matières lorsqu'elles existent. Jusqu'en 1856, il existe dans la table des matières, appelée « table systématique », une section « Sciences et arts », dans laquelle se trouve une rubrique « Mathématiques ». Jusqu'en 1847, aucune classification interne aux mathématiques n'est réalisée, même si l'ordre des ouvrages dans la table paraît vraisemblablement répondre à une certaine structure implicite (ouvrages de mathématiques générales, puis d'arithmétique, d'algèbre, parfois d'analyse, de géométrie, de géométrie pratique puis de mécanique ou de statique), montrant une partition des mathématiques en tant que discipline caractéristique de l'époque. Certaines années à partir de 1848, la table systématique de la rubrique « Mathématiques » est découpée en sous catégories comme celles apparaissant sur la figure I.6 (p. 62). Ces tables disparaissent de 1857 à 1867. À partir de 1868, une distinction est introduite entre les « Sciences mathématiques » et l'« Enseignement des sciences », ce qui reflète bien l'accroissement des publications des livres pour enseigner, et l'importance qui leur est accordée, nécessitant une nouvelle partition.

Licence CC BY-NC-ND 3.0


SCIENCES ET ARTS.

I. Sciences mathématiques : *A.* Généralités. *B.* Arithmétique et applications. *C.* Algèbre. *D.* Géométrie, trigonométrie et applications. *E.* Mathémat. transcendantes. *F.* Poids et mesures. *G.* Jeux.

Figure I.6 – Exemple de catégories internes à la section « Mathématiques » de la table systématique de la *BF* (Bibliographie de la France, 1811-1990, année 1848)

Dans les volumes comprenant des tables des matières, nous avons donc puisé dans les catégories *ad hoc* les ouvrages dont les titres évoquent la géométrie ou des domaines connexes. Pour les années sans table des matières, la recherche a été effectuée par mots-clés dans les titres, tels que « géométrie », « arpentage », « nivellement » ou « trigonométrie ». Puis, parmi les ouvrages sélectionnés par ces deux méthodes (table des matières et/ou mots-clés des titres), ceux dédiés à l'enseignement ont été repérés *via* la table des matières (en particulier, à partir de 1868, sous la rubrique « Enseignement des sciences ») et/ou par de nouveaux mots-clés dans le titre ou dans les mentions d'usage, tels que « cours », « leçons », « à l'usage des élèves de », « école », « lycée », « collège », etc. La base de données qui en résulte comprend 2328 manuels de géométrie publiés entre 1811 et 1902 (y compris les rééditions) et référencés dans la *BF*.

L'étude quantitative que nous nous proposons de mener porte sur les données suivantes, qui se verront exploitées statistiquement par la suite : le nom de l'auteur, le titre (y compris parfois le public cible), le statut professionnel et/ou académique (profession, statut académique ou appartenance à une institution) et le numéro de l'édition. Or, une entrée typique de la *BF* (voir figure I.7 p. 63) n'inclut pas toujours toutes ces informations. Par exemple, parmi les 2328 titres de manuels de géométrie relevés, 1839 seulement précisent le statut de l'auteur[14]. De même, les publics visés ne sont pas toujours explicitement indiqués, mais le sont néanmoins fréquemment, et de plus en plus au fil du temps. Ces informations effectivement disponibles à propos du lectorat ont été complétées par la consultation d'autres documents officiels, tels que les programmes (Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003c) ou les listes officielles de manuels autorisés à être utilisés dans les classes d'un niveau donné (Giraud, 1851 ; Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1851). Finalement, les données sur les publics ciblés ont été obtenues pour 1694 des 2328 manuels recensés.

14. Dans certains cas, le nom lui-même indique le statut de l'auteur, comme un grade militaire, ou un acronyme pour les membres d'une congrégation religieuse (comme les « Frères des écoles chrétiennes »).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

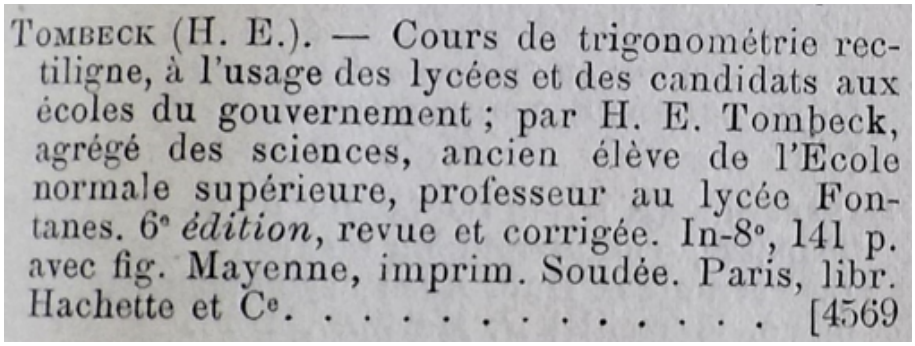

TOMBECK (H. E.). — Cours de trigonométrie rectiligne, à l'usage des lycées et des candidats aux écoles du gouvernement ; par H. E. Tombeck, agrégé des sciences, ancien élève de l'Ecole normale supérieure, professeur au lycée Fontanes. 6e *édition*, revue et corrigée. In-8°, 141 p. avec fig. Mayenne, imprim. Soudée. Paris, libr. Hachette et Ce. . . . . [4569

FIGURE I.7 – Entrée pour le *Cours de trigonométrie rectiligne* de Henri-Étienne Tombeck (1827-1878). Source : *BF*, 1898, 85ème année, 2ème série, volume XLII, p. 283 (Bibliographie de la France, 1811-1990, année 1898)

Comparativement aux méthodes d'élaboration de corpus de Dhombres, Lorenat et Legros, que nous avons pris pour références au début de cette section (p. 60), la nôtre se distingue par les choix opérés et les résultats inédits obtenus. En effet, la nature particulière de notre source initiale, la *BF*, recensant tous les ouvrages français parus officiellement, nous permet d'être très proche de l'exhaustivité. De plus, nous avons été en mesure de consulter toutes les années sans exception de 1811 à 1902, sans besoin de cibler des dates spécifiques. Enfin, la double recherche, par usage des tables des matières et par mots-clés, nous laisse penser que nous n'avons pu laisser échapper que très peu de titres relatifs à l'enseignement de la géométrie. Le choix d'inclure les rééditions des ouvrages, parfois multiples, est justifié par le traitement des données obtenues, ayant notamment vocation à estimer le poids de ce domaine dans l'édition scolaire, en nombre d'ouvrages produits. Il permet également par la suite de mettre en évidence des auteurs prolifiques ou des titres à fort succès éditorial (voir la section I.2.2 p. 80). En conséquence, le volume final global du corpus constitué, de plus de 2000 titres, est inédit à notre connaissance, et constitue une base de données quasi exhaustive des ouvrages ayant pu servir à enseigner la géométrie sur la période considérée.

I.2.1.2 Nombre de manuels de géométrie publiés et évolution dans le temps

À partir de cette collecte, nous pouvons désormais mener une étude quantitative du nombre de manuels de géométrie recensés, afin d'en mesurer l'importance et l'évolution, et dans l'objectif de confronter les résultats obtenus avec ceux provenant d'autres recherches de même nature. Déjà, dans son article sur les manuels de mathématiques au tournant du XIXe siècle, Dhombres estime à plusieurs milliers les tirages des ouvrages les plus courants pour enseigner l'arithmétique ou la géométrie, comme ceux de Bézout, Lacroix ou encore Legendre (Dhombres, 1985, p. 99-102). Ensuite, dans son histoire de l'édition, Mollier présente la montée en puissance de certains éditeurs, comme

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Hachette, à la faveur de la loi Guizot de 1833 et des commandes de manuels scolaires que le ministère reçoit alors [15]. Ainsi, la *Petite arithmétique raisonnée* de Vernier (1834) est commandée à Hachette à 55 000 exemplaires en 1832-33 [16]. L'ouvrage est ensuite inclus dans la liste des livres recommandés pour l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles primaires. Par ailleurs, le nombre de titres « classiques » [17] édités ou réédités par cette maison d'édition par an est en moyenne de 14 titres entre 1827 et 1832, puis de 58 jusqu'en 1839 (Mollier, 2015, p. 133-160). Choppin confirme cette première grande vague d'édition de manuels scolaires dans les années 1830 et décrit également « un second essor » au début de la Troisième République (Choppin, 1992, p. 54-70), que Mollier désigne comme « le deuxième décollage de l'édition scolaire » (Mollier, 2015, p. 152). Au cours des années 1880, les éditeurs de livres scolaires se multiplient et l'apogée de l'édition scolaire est atteint avec environ 800 titres par an à la fin de la décennie (Mollier, 2015, p. 154). C'est au cours de cette décennie, plus précisément en 1882, que Leyssenne voit son manuel d'arithmétique pour les écoles, *L'année préparatoire*, imprimé à 140 000 exemplaires (Moyon et Legros, 2017, p. 65-66).

Hypothèses :

- **La production des manuels de géométrie est croissante au cours du temps, à l'instar de l'évolution globale de la publication des manuels scolaires sur la période considérée.**
- **En particulier, les deux pics d'éditions constatés dans les années 1830 et 1880 concernent également les manuels de géométrie.**

15. Pour le seul éditeur Hachette, ces commandes sont estimées à 5 millions d'exemplaires par ses détracteurs, qui lui reprochent son quasi-monopole lié à sa collusion avec la « Commission des livres classiques ».

16. La nature de la source consultée dans notre étude ne nous donne pas accès à ce type d'information, que nous ne pouvons donc pas comparer à celles extraites de la littérature secondaire en histoire de l'édition.

17. Terme utilisé à l'époque pour désigner les livres à l'usage de la classe.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Parmi les 2328 titres recensés comme indiqué préalablement, nous avons dénombré le nombre de manuels de géométrie publiés par an, puis lissé les effectifs obtenus par demi-décade en effectuant la moyenne des cinq années correspondantes, afin de réduire la fluctuation des valeurs et de pouvoir observer des tendances plus globales. Par exemple, le sommet de 53,6 livres par an, atteint durant la décennie entre 1881 et 1885, est en réalité la moyenne des valeurs 56, 53, 50, 62 et 47 indiquant le nombre de publications de manuels de géométrie en 1881, 1882, 1883, 1884 et 1885. En arrière-plan ont été positionnées les chronologies des réformes relatives à l'enseignement primaire, secondaire, ainsi que l'enseignement secondaire spécial, afin de pouvoir comparer la production de manuels aux grandes dates de l'histoire de l'enseignement.
Résultat : Voir diagramme I.8 p. 66.

Lecture (figure I.8 p. 66) : Les 2328 titres référencés (y compris les rééditions) correspondent à une moyenne de 25 publications par an. Le nombre de manuels de géométrie publiés augmente au cours de la période, avec un maximum dans la décennie 1880, avec plus de 50 ouvrages publiés par an. Le graphique montre trois pics, le premier après 1833 (année de la loi Guizot), le second après 1852 (réforme de Fortoul) et le troisième, le plus élevé, après les lois Ferry de 1880-82.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

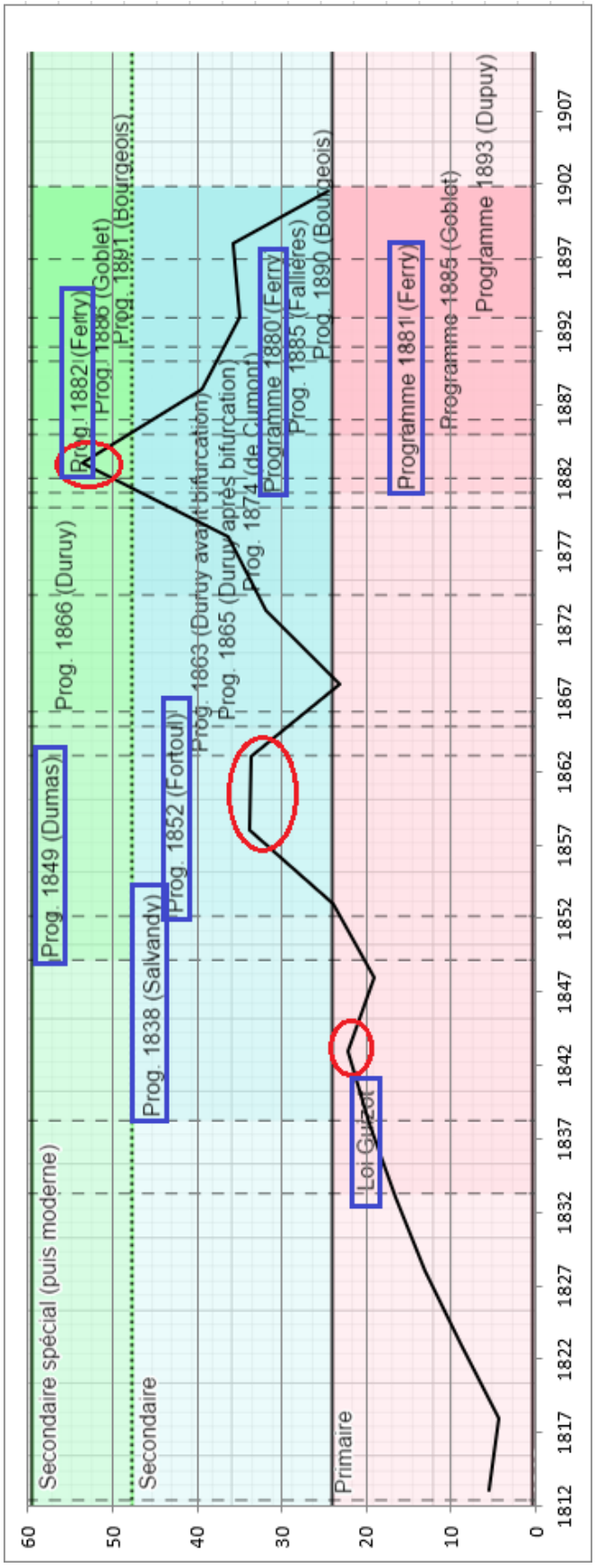


FIGURE I.8 – Évolution du nombre de manuels de géométrie français publiés au cours du temps

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :
— La production de manuels de géométrie s'inscrit pleinement dans le contexte éducatif et éditorial global de la période. Les ordres de grandeur obtenus pour les seuls manuels de géométrie correspondent aux données générales trouvées par Mollier et Choppin, si comme eux nous ne tenons pas compte des rééditions.

— Les deux périodes de croissance de l'édition scolaire des années 1830 et 1880, décrites par Mollier et Choppin, apparaissent clairement à travers nos données.

— Nos données montrent également une nouvelle augmentation de l'édition dans les années 1850, suite à la réforme de Fortoul, qui n'est pas réellement relevée par les historiens de l'édition scolaire. Il est probable que cette hausse, plus caractéristique des manuels de géométrie, soit le fait de la création de l'enseignement secondaire spécial, dont les programmes spécifiques en géométrie nécessitent de nouveaux manuels.

— Nos observations confirment manifestement le caractère prescriptif des lois et réformes éducatives, qui se traduisent de façon automatique par une production plus intensive de manuels (Choppin, 1986).

I.2.1.3 L'environnement professionnel des auteurs des manuels de géométrie

Au XIXe siècle, la rédaction de manuels scolaires, d'après Choppin, n'est pas considérée comme ce qu'il appelle « un genre mineur », et constitue au contraire une activité d'écriture reconnue, puisque de nombreux enseignants, ainsi que des hauts fonctionnaires de l'enseignement public ou des universitaires, s'y investissent (Choppin, 1992, p. 58-59). Dans son étude sur les manuels d'arithmétique pour l'école élémentaire à la même période, Legros note que la plupart de leurs auteurs travaillent dans le monde de l'enseignement, primaire ou secondaire (Legros, 2019, p. 128-130). Nous pouvons alors nous demander s'il en est de même pour les manuels de géométrie, dans le cadre de l'enseignement primaire comme secondaire, en étudiant spécifiquement de quel monde professionnel proviennent leurs auteurs.

Pour répondre à cette question, nous avons classé en six grands domaines les auteurs des 1839 manuels dont la notice comprend des informations sur leur statut, suivant la manière dont ils déclarent eux-mêmes leurs positions professionnelles et/ou institutionnelles en exergue de leurs ouvrages : l'armée, l'église, l'administration de l'instruction publique (directeurs d'école, recteurs, inspecteurs, etc.), le corps professoral, le monde

Licence CC BY-NC-ND 3.0

scientifique non enseignant (docteurs ès sciences, membres d'institutions scientifiques, etc.), et la « société civile ». Nous regroupons dans cette dernière catégorie les professionnels n'appartenant à aucune des autres décrites ci-avant : elle comprend par exemple les ingénieurs, architectes, géomètres, artisans, agriculteurs, etc. Il est à noter que ces informations, tirées uniquement des notices de la *BF*, sont seulement déclaratives. Le très grand nombre d'individus considérés ne permet pas de vérifier la réalité des positions professionnelles et/ou institutionnelles annoncées. Par exemple, la source ne permet pas de savoir si la mention « ingénieur » se réfère seulement à un diplôme, ou à l'exercice réel d'une telle fonction. Ces informations restent néanmoins riches et exploitables pour notre étude, à condition d'être interprétées avec les précautions liées aux limites évoquées.

Hypothèse : Les manuels de géométrie sont principalement rédigés par des professionnels de l'éducation, enseignants ou administratifs.

Méthode : Nous avons dénombré les auteurs par secteurs, en faisant le choix qu'un individu ne soit comptabilisé que dans une seule catégorie. Certains auteurs présentent en effet des déclarations qui incluent plusieurs de ces domaines, comme l'auteur Martin G., dont la notice de l'ouvrage dans la *BF* indique : « ingénieur civil, professeur de dessin, sous-directeur technique de l'école d'apprentissage du Havre, ancien directeur de plusieurs établissements industriels » (*BF*, 1889, 78ème année, 2ème série, volume XXXIII, p. 488, 1811-1990). Suivant cette notice, un tel auteur pourrait donc être classé dans la société civile, parmi les professeurs ou encore dans l'administration de l'instruction publique (IP). Nous avons choisi de privilégier le premier domaine mentionné dans l'ordre de la déclaration. Ainsi, Martin G. se trouve référencé dans la société civile, en tant qu'ingénieur civil. Le biais potentiel lié à cet usage est limité par le faible nombre d'auteurs présentant des déclarations multiples de leurs statuts professionnels ou institutionnels, 58 en tout sur les 1839 déclarés, soit un peu plus de 3 % de l'effectif.
Résultat : Voir diagramme I.9 p. 70.

Lecture (figure I.9 p. 70) : Un premier tri suivant ces critères montre qu'un peu plus des trois quarts des manuels sont rédigés par des membres de l'instruction publique (environ 59 % par des enseignants et près de 19 % par des administratifs). Un livre sur dix est écrit par un religieux, environ 5,6 % par des membres de la société civile, environ 4 % par des scientifiques et le reste par des militaires.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— L'implication des professionnels de l'éducation dans la rédaction des manuels et, dans une moindre mesure, de la communauté scientifique, constatée dans les études de Legros et de Choppin, se confirme en ce qui concerne les ouvrages d'enseignement de la géométrie, pour lesquels ces catégories représentent près de 82 % des auteurs.

— Notre étude statistique fait également apparaître trois catégories d'auteurs minoritaires, mais néanmoins présents : les membres du clergé, qui ont également été identifiés par Legros comme une communauté d'auteurs non négligeable pour les ouvrages d'arithmétique, malgré la difficulté de quantification due à l'anonymat de nombre d'entre eux (Legros, 2019, p. 126-127), mais aussi les auteurs de la société civile et de l'armée. Ce ne sont pas moins de 164 auteurs (environ 9 % de l'effectif total des auteurs aux statuts déclarés) issus de ces deux domaines qui apparaissent en effet dans nos données, et que les autres études mentionnées précédemment (Legros et Choppin) n'ont pas spécifiquement repérés.

— Ces catégories d'auteurs rédigent majoritairement des ouvrages d'un niveau scolaire ou théorique globalement plus élevé, et abordent souvent des aspects de la géométrie davantage destinés à des applications concrètes dans certains domaines professionnels. Par exemple, on trouve des auteurs militaires qui écrivent des livres sur la géodésie, la topographie ou la trigonométrie (en relation avec la navigation), ou qui préparent les examens d'entrée dans les écoles militaires, comme l'école navale ou Polytechnique. De même, les auteurs issus de la société civile traitent pour beaucoup des applications de la géométrie aux secteurs professionnels dans lesquels ils exercent : des architectes écrivent sur le dessin géométrique, des peintres sur la perspective, des ingénieurs à propos du nivellement, des géomètres sur l'arpentage ou la géodésie, entre autres exemples.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

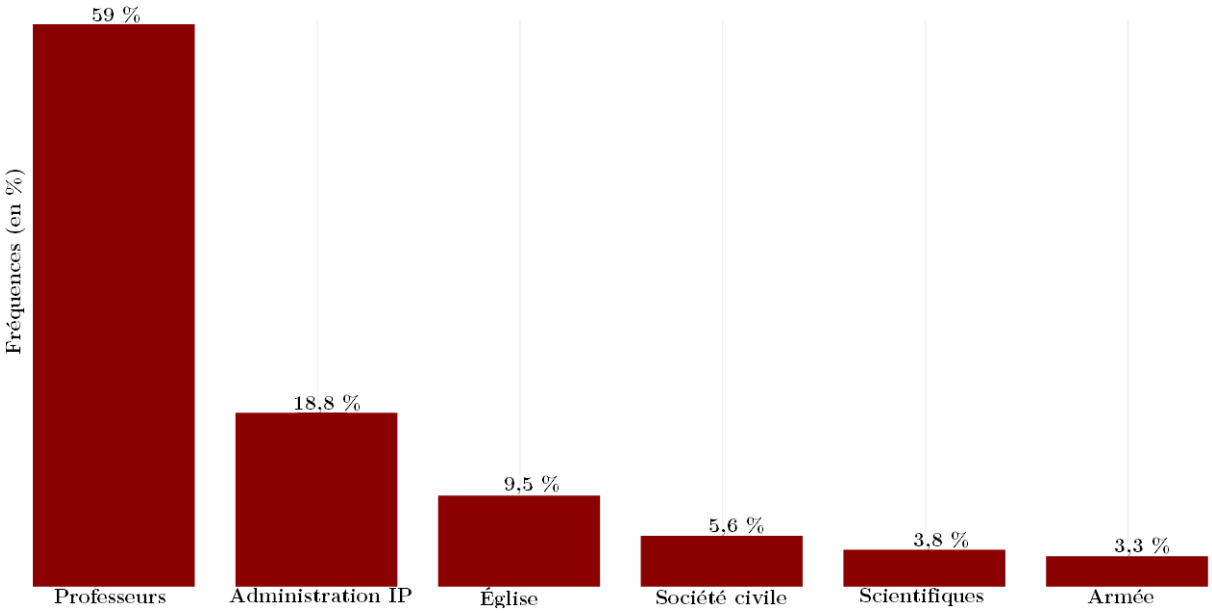


FIGURE I.9 – Répartition des auteurs de manuels de géométrie par statuts professionnels et institutionnels déclarés

I.2.1.4 Publics visés par les manuels de géométrie

Au XIXe siècle, les deux systèmes primaire et secondaire sont généralement considérés comme imperméables dans l'histoire de l'éducation, même si les recherches récentes remettent en cause cette idée et tendent à montrer leur potentielle porosité, qu'il s'agisse de leurs contenus d'enseignement ou des professionnels de l'éducation qui en dépendent. Par exemple, après une longue période depuis la loi Falloux (1850) durant laquelle leur existence n'est plus officielle (voir la section I.1.1, p. 39), les EPS renaissent institutionnellement en 1880. Briand et Chapoulie expliquent que ce renouveau a lieu dans un esprit de rupture affichée avec l'enseignement dispensé dans les lycées. L'écueil qu'elles ont alors à éviter est de ne pas devenir « une contrefaçon » de l'enseignement secondaire spécial développé dans les lycées pour offrir une alternative plus scientifique et appliquée aux études classiques. En pratique, ces deux systèmes tendent à se rapprocher, au moins d'un point de vue curriculaire, comme le montre par exemple la convergence progressive des cursus des EPS et de l'enseignement spécial au lycée Chaptal (Briand et Chapoulie, 2012, p. 369-382). C'est également ce que remarque D'Enfert à travers son étude de l'offre locale d'enseignement des mathématiques à Troyes durant la première moitié du XIXe siècle (D'Enfert, 2015). Les enseignants exerçant au collège de Troyes sont en effet également sollicités pour donner des cours dans les ENP et les EPS de la région. Ils importent à cette occasion leurs méthodes et parfois leurs manuels issus de leurs cours dans l'enseignement secondaire, notamment en géométrie, dans les structures de l'ordre primaire (D'Enfert,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

2015, p. 88), et ce en dépit du fait que les programmes des EPS de 1833 aient été créés dans un contexte de différenciation avec ceux de l'ordre secondaire, tant dans les méthodes (pédagogie concrète) que dans les finalités (essentiellement pratiques) (D'Enfert, 2003b). À propos des manuels d'arithmétique, Legros note que des auteurs issus de l'enseignement secondaire ont écrit pour un public primaire, et certains pour les deux, comme Tarnier (1877) et Vernier (1834). Néanmoins, la proportion d'instituteurs écrivant des ouvrages pour l'école primaire, dans laquelle eux-mêmes enseignent, augmente au cours du siècle (Legros, 2019, p. 128-130).

L'étude quantitative à propos des publics des manuels de géométrie présentée dans cette section a pour finalité d'interroger la potentielle étanchéité des deux ordres d'enseignement et de questionner leurs relations paradoxales. Nous avons à cet effet analysé et croisé les données extraites des 1694 ouvrages de géométrie recensés dans la *BF* comprenant la mention du public auxquels ils se destinent. Contrairement aux professions, le lectorat ciblé par un ouvrage est fréquemment multiple, et nous avons choisi de garder à ce sujet une information aussi riche que possible, en consignant pour chaque titre l'ensemble des catégories d'usagers qu'il concerne.

Hypothèse :
Les manuels de géométrie sont équitablement répartis, en nombre, entre les différents niveaux et les différents ordres d'enseignement.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Nous avons dénombré les ouvrages par types de lecteurs, suivant 10 catégories définies dans le tableau I.6 (p. 73). Le total des fréquences (en %) est supérieur à 100, puisqu'un livre s'adresse assez fréquemment à plusieurs lectorats. Les totaux ont alors été calculés par ordres d'enseignement concernés, sauf pour les publics échappant à la distinction primaire/secondaire. La répartition par niveau a été réalisée selon la distinction suivante : le niveau « NI » correspond à un niveau scolaire non indiqué (pour des publics professionnels par exemple), le niveau 1 au niveau primaire ou élémentaire comme minimum requis, le niveau 2 au niveau secondaire ou primaire supérieur comme minimum requis [18], et enfin le niveau 3 correspond à un niveau d'études supérieures (après baccalauréat ou équivalent) comme minimum requis, tels qu'ils se trouvent décrits dans le tableau.
Exemple : L'ouvrage de toisé géométrie de Desnanot (1835) est annoncé comme étant « destiné aux Instituteurs primaires, aux Élèves des Écoles primaires supérieures, des Écoles normales ; aux Ouvriers, aux Artistes, aux Arpenteurs, aux Élèves des Collèges, à tous ceux qui veulent mesurer sans instrumens [*sic*] » (Desnanot, 1835, couv.). Il appartient donc aux catégories « eps », « enp », « pro », et « class ». Il est comptabilisé dans les catégories relatives à l'ordre primaire, l'ordre secondaire et à celle « autre », ainsi que dans les niveaux « NI », 2 et 3.
Résultat : Voir le tableau I.6 p. 73.

18. Il inclut l'enseignement féminin car les ouvrages destinés aux jeunes filles sont à l'usage soit des écoles primaires supérieures de filles, ou de l'enseignement secondaire de jeunes filles, ou de niveau supérieur (écoles d'institutrices par exemple).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Public (abréviation)	Description	Fréquence (en %)
pro	Enseignement professionnel, à l'école ou en-dehors	14.3
tout	Lorsqu'il est mentionné "à l'usage de tous les établissements d'instruction" (ou équivalent)	6.7
elem	Enseignement élémentaire, soit les classes élémentaires des collèges et des lycées (7ème, 8ème, 9ème, etc.)	2.0
class	Enseignement secondaire classique des collèges et des lycées, avec latin et grec	43.0
spe	Enseignement secondaire spécial des collèges et des lycées, sans latin et grec mais avec plus de sciences	11.0
prim	Enseignement primaire dans les écoles	19.5
eps	Ecoles primaires supérieures, soit les classes supérieures des écoles primaires	11.8
enp	Ecoles normales primaires pour la formation des instituteurs	9.4
sup	Enseignement supérieur	26.0
fem	Enseignement féminin, quelque soit le niveau et l'ordre d'enseignement	0.7

Répartition par ordre	Catégories incluses	Fréquence (en %)
Ordre primaire	prim, eps, enp, tout	36.4
Ordre secondaire	elem, class, spe, tout	53.1
Autre	fem, pro, tout	23.5

Répartition par niveau	Catégories incluses	Fréquence (en %)
Niveau ' NI '	pro	16.6
Niveau 1	tout, prim, elem	23.8
Niveau 2	eps, class, spe, fem	46.5
Niveau 3	sup, enp	13.2

TABLE I.6 – Catégories de publics visés par les manuels de géométrie, description et répartition par ordre et par niveau

Lecture (tableau I.6 p. 73) : Le lectorat le plus courant demeure celui de l'enseignement secondaire classique, avec environ 43% des ouvrages de géométrie qui lui sont destinés. Les enseignements supérieur, primaire et professionnel arrivent loin derrière avec respectivement 26, 20 et 14 % des titres qui sont destinés à leur usage. Cette répartition montre de surcroît que le niveau le plus représenté dans les manuels de géométrie est le niveau 2 avec près de 800 livres, soit près de la moitié des titres, suivi du niveau 1 (400 livres, soit un sur quatre), puis du niveau « NI » (280 livres, soit près de 17 % des titres), et enfin du niveau 3 (220 livres, un peu plus de 13 % d'entre eux). L'offre de manuels pour l'ordre secondaire (plus de 50 %) est plus important que pour l'ordre primaire (environ 36 %), et la part des ouvrages destinés à d'autres publics (féminin, professionnel, supérieur) est relativement importante (un peu moins d'un quart).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :
— C'est l'enseignement intermédiaire, destiné aux élèves de 11 à 18 ans, qui génère le plus grand nombre de manuels de géométrie. Cette concentration de livres de niveau 2 est probablement due à la plus forte présence de cet objet d'étude dans les programmes de l'enseignement intermédiaire (Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003a), ainsi qu'aux nombreuses structures d'enseignement dédiées à la tranche d'âge concernée. Le nombre toutefois important de livres de niveau non indiqué s'explique par l'essor d'une littérature destinée à un public professionnel et potentiellement non scolaire, sans doute porté par les nombreuses créations, au début du siècle, de cours ouvriers en géométrie et en mécanique appliquées aux arts et métiers, initiés notamment par Charles Dupin à Paris (voir notice biographique, Bodé 2014 et Dupin 1828).

— L'ordre secondaire concentre davantage d'offre de manuels de géométrie que le primaire, ce qui là encore peut s'expliquer par l'importance du nombre d'élèves de ces deux systèmes. Pour comparaison, Briand et Chapoulie estiment à environ 37 000 le nombre de garçons scolarisés dans les EPS en 1900 (Briand et Chapoulie, 2012, p. 166), alors que Prost en dénombre environ 180 000 dans l'enseignement secondaire en 1898 (Prost, 2008, p. 32).

Les manuels se répartissent également par ordre d'enseignement selon qu'ils s'adressent aux élèves de l'enseignement primaire, secondaire, ou éventuellement à un autre public (voir la « Répartition par ordre » dans le tableau I.6 p. 73). En croisant les effectifs relatifs à ces différentes catégories, nous pouvons désormais tester l'hypothèse d'étanchéité des deux ordres d'enseignement.

Hypothèse :
Les ordres d'enseignement primaire et secondaire sont relativement étanches : les auteurs écrivent donc pour l'un ou pour l'autre de ces deux publics scolaires, mais pas, ou très rarement, pour les deux.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Nous avons calculé les effectifs de chacun des ordres, ainsi que leur union (individus appartenant à l'un ou l'autre) et leur intersection (ceux appartenant aux deux). Ces effectifs permettent de construire un diagramme statistique faisant apparaître les effectifs et les fréquences de la partition réalisée par ces deux ensembles et leur intersection, que l'on appelle diagramme de Venn.
Résultat : Voir le tableau I.10a p. 76 et la la figure I.10b p. I.10b.

Lecture : Ce diagramme montre que les ordres primaire et secondaire partagent un nombre important de manuels de géométrie, avec 220 titres destinés aux élèves des deux ordres, soit 13 % de la production sur la période étudiée. Il montre également un grand nombre de livres destinés à d'autres publics.

Conclusion :
— Les résultats obtenus battent en brèche l'idée préconçue d'une séparation totale des deux ordres dans le système éducatif français, et viennent donc confirmer les résultats de Briand et Chapoulie ainsi que de D'Enfert, puisqu'une grande partie des auteurs de manuels de géométrie n'hésitent pas à écrire des ouvrages qui peuvent être utilisés aussi bien dans l'ordre primaire que dans l'ordre secondaire.

— Il existe également un grand nombre de livres destinés à d'autres publics. Ceci s'explique par la présence d'une quantité importante d'ouvrages dédiés à l'enseignement supérieur ainsi qu'à l'enseignement professionnel.

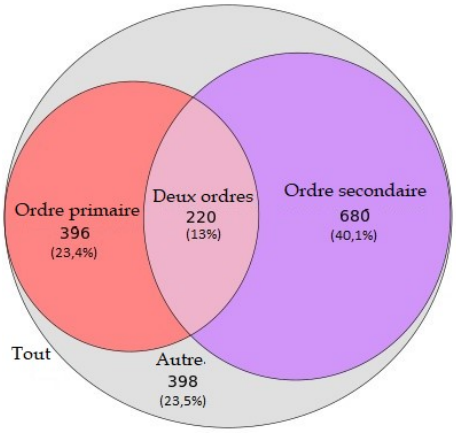
I.2.1.5 Qui écrit pour qui ?

En 2017, dans un chapitre intitulé « Histoire de l'enseignement, histoire des mathématiques : une fécondité récurrente », Gispert montre la richesse des études proposant de « penser des collectifs d'acteurs » (Gispert, 2017, p. 13-37). À cet égard, elle montre l'essor des études prosopographiques portant principalement sur des collectifs d'enseignants. Dans les années 1990 déjà, une telle approche était à la base de l'étude *British Mathematics : A database*, dans laquelle diverses données sur les structures éducatives anglaises et leurs acteurs (enseignants et élèves) de 1860 à 1940 se sont vues collectées et analysées. Ce travail a rassemblé des données biographiques sur les scientifiques et sur les cours enseignés, mais pas spécifiquement sur les manuels (Barrow-Green, 1996). Plus récemment, l'ouvrage *Les uns et les autres* dirigé par Rollet et Nabonnand (Rollet et Nabonnand, 2012) met en avant l'usage des méthodes

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Nombre et fréquence des manuels de géométrie par		
Ordres	**Nombre**	**Fréquence**
Total ordre primaire	616	36.4%
Total ordre secondaire	900	53.1%
Total ordres primaire ou secondaire	1296	76.5%
Total ordres primaire et secondaire	220	13.0%
Total autres	398	23.5%

(a) Répartition des manuels de géométrie par ordres d'enseignement (tableau)



(b) Répartition des manuels de géométrie par ordres d'enseignement (diagramme de Venn, réalisé à l'aide du package « VennDiagram » du logiciel de statistiques « R »)

FIGURE I.10 – Tableau et diagramme de Venn associés à la répartition des manuels suivant les ordres d'enseignement qu'ils concernent

biographiques et prosopographiques en histoire des sciences, en regroupant des études dont un grand nombre concerne l'histoire de l'éducation, s'intéressant notamment à des collectifs d'élèves, d'enseignants ou encore de recteurs. Quant à Legros, elle étudie elle aussi spécifiquement et quantitativement le profil des auteurs des manuels d'arithmétique du XIXe siècle, dans son ouvrage qui leur est consacré (Legros, 2019, p. 119-122). Comme nous l'avons vu, elle montre qu'il s'agit principalement d'instituteurs ou de professeurs du secondaire.

Dans notre étude quantitative à propos des manuels de géométrie, les auteurs sont également considérés et analysés collectivement en fonction de leurs positions professionnelles et/ou institutionnelles déclarées dans la *BF*, et mis en relation avec leurs potentiels lecteurs, en fonction de leurs niveaux et ordres d'enseignement. En croisant ces données, il est alors possible d'établir où se rencontrent ces différents acteurs éducatifs sur le terrain des manuels de géométrie, ou en d'autres termes, de déterminer qui écrit pour qui.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Hypothèses :
— Les auteurs professeurs (ou instituteurs) écrivent pour des élèves des systèmes éducatifs dans lesquels ils enseignent, et les administratifs de l'IP pour toutes les structures de l'IP.
— Les auteurs exerçant d'autres fonctions écrivent pour un lectorat issu du milieu dans lequel ils évoluent professionnellement ou institutionnellement.

Méthode : Le tableau suivant a été établi en croisant les domaines d'exercice des auteurs et les profils des publics qu'ils ciblent, pour les 1473 livres pour lesquels ces deux types d'information sont disponibles. Les totaux par catégorie de public incluent tous les livres ayant au moins ce type d'audience, éventuellement parmi d'autres. Par exemple, le « total classique » comprend tous les manuels destinés au moins en partie aux élèves de l'enseignement secondaire classique. Par conséquent, les totaux par ligne dépassent 100 %, car un livre se retrouve potentiellement dans plusieurs catégories, quand il présente un lectorat multiple.
Le code couleur adopté dans ce tableau met en évidence les catégories sous-représentées, c'est-à-dire celles dont le pourcentage partiel est inférieur au pourcentage total (en rouge) et celles qui sont sur-représentées (en bleu). En outre, les valeurs maximales et minimales pour chaque catégorie de public ont été mises en évidence en gras.
Résultat : Voir le tableau I.7 p. 78.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Domaine professionnel de l'auteur et public ciblé

Quel est le public que ciblent les manuels en fonction des domaines professionnels de leurs auteurs ?

Domaines professionnels	Total pro	Total tout	Total elem	Total prim	Total eps	Total class	Total spe	Total enp	Total sup	Total fem
Armée	**71.79**[1]	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**2.56**	**0.00**	2.56	30.77	**0.00**
Eglise	**1.21**	0.61	**0.00**	**47.88**	**15.15**	37.58	0.61	**0.00**	**0.61**	**0.00**
Société civile	69.57	**13.04**	**0.00**	4.35	4.35	6.52	8.70	2.17	19.57	**0.00**
Adm. IP	4.79	10.86	1.60	25.88	14.06	**47.60**	**16.29**	12.46	17.25	**1.60**
Professeurs	15.16	6.37	**2.78**	13.89	11.34	46.41	12.15	9.72	32.18	0.58
Scientifiques	4.35	4.35	**0.00**	10.87	10.87	39.13	2.17	**30.43**	**63.04**	**0.00**
Total	**14.26**	**6.65**	**1.97**	**19.48**	**11.81**	**43.04**	**11.00**	**9.44**	**26.00**	**0.68**

[1] Lecture : Environ 71.79% des manuels écrits par des militaires sont en partie dédiés à un public professionnel.

TABLE I.7 – Tableau croisé des auteurs et des publics des manuels de géométrie, réalisé sur « R » en utilisant des techniques d'analyse bivariée, puis les outils de mise en forme des tableaux croisés

Lecture :
Ce tableau met en évidence quelles catégories de public sont sur-représentées parmi les livres écrits par un certain type d'auteur. Par exemple, dans la première colonne, la ligne « Total » montre que les livres destinés à un public professionnel représentent 14,26 % des manuels publiés, alors que ces mêmes livres représentent 71,79 % des titres écrits par des auteurs militaires. On peut donc dire que les auteurs militaires écrivent préférentiellement pour les professionnels [19], par rapport aux autres auteurs de manuels de géométrie. De même, les livres écrits pour l'enseignement primaire sont sur-représentés parmi ceux émanant d'auteurs religieux (environ 48 % des livres rédigés par des membres de l'église alors qu'ils représentent moins de 20 % des manuels publiés au total). Par ailleurs, les administratifs de l'enseignement public semblent se concentrer sur les publics de l'enseignement secondaire (classique ou spécial) et les scientifiques sur les livres destinés aux étudiants de l'enseignement supérieur des deux ordres (universités, écoles d'ingénieurs ou écoles normales primaires).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La représentation en couleur montre notamment que les ouvrages à destination du secondaire classique sont sous-représentés parmi ceux écrits par des militaires et également par les auteurs de la société civile, tout comme le lectorat professionnel parmi les livres rédigés par des ecclésiastiques, les administratifs de l'enseignement et les scientifiques. Le tableau confirme l'intérêt des auteurs militaires, mais aussi de ceux issus de la société civile pour les lectorats professionnels. Les religieux ont tendance à s'adresser aux élèves des écoles primaires et primaires supérieures, qui sont souvent les types d'écoles dans lesquelles ils enseignent. Les professionnels de l'éducation (enseignants ou administratifs) écrivent davantage pour l'enseignement secondaire, classique ou spécial, et moins pour l'enseignement supérieur ou professionnel.

Conclusion :

— Les auteurs écrivent pour des publics qu'ils connaissent, parce qu'ils leur enseignent, parce qu'ils en font partie ou sont issus du même milieu : les professeurs écrivent pour l'enseignement secondaire, supérieur ou les futurs instituteurs, les membres de l'administration de l'IP pour les principales structures de l'enseignement primaire ou secondaire, les scientifiques pour l'enseignement supérieur. Quant aux auteurs religieux, et comme l'a déjà mis en évidence Legros à propos des manuels d'arithmétique, ils produisent des manuels à destination des publics auxquels ils s'adressent, qui correspondent aux élèves fréquentant les écoles où ils exercent.

— Les ouvrages ciblant certains niveaux ou types d'enseignement, sans doute plus spécifiques et usant vraisemblablement d'autres ressources, mobilisent un plus petit nombre d'auteurs, comme ceux destinés aux classes élémentaires des collèges (qui utilisent probablement les manuels de l'école primaire), à l'enseignement secondaire spécial ou, de façon encore plus marquée, aux filles, pour lesquelles les programmes en géométrie sont encore très peu développés à l'époque (Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003a ; Decayeux-Cuvillier, 2019).

19. Même si la nature des sources consultées ne permet pas de préciser de quels professionnels il s'agit.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Certains types particuliers d'auteurs de manuels de géométrie, comme les militaires et ceux issus de la société civile, écrivent pour des publics assez ciblés, leurs ouvrages s'adressant en grande partie à des professionnels et également à l'enseignement supérieur, lectorat sur-représenté parmi les livres écrits par des auteurs militaires. Ceci confirme l'hypothèse selon laquelle ces derniers s'intéressent à de la géométrie plutôt appliquée, et à un niveau relativement élevé.

La base de données réalisée, concernant les manuels de géométrie potentiellement en usage dans l'enseignement au XIX^e siècle, a permis de tester et de vérifier certaines idées plus ou moins communément admises en histoire de l'éducation. Tout d'abord, il existe une réelle corrélation entre la production éditoriale des manuels de géométrie et les prescriptions officielles, notamment après les réformes, comme l'ont souligné Mollier et Choppin pour l'ensemble des manuels français. Notre étude a néanmoins mis en évidence une particularité des ouvrages de géométrie, qui ont subi une hausse éditoriale spécifique suite à la création de l'enseignement secondaire spécial en 1849. L'étude quantitative que nous avons menée confirme la remise en cause de l'imperméabilité des systèmes d'enseignement primaire et secondaire français, déjà mise en évidence par d'autres travaux de nature plus qualitative (voir p. 71). Nos résultats montrent que la frontière est loin d'être aussi nette et que les auteurs issus d'un ordre d'enseignement n'hésitent pas à écrire pour un public de l'autre ordre, voire pour des lecteurs mixtes. Ces conclusions vont dans le sens de celles de l'étude de D'Enfert sur les circulations des enseignants de mathématiques de la ville de Troyes (D'Enfert, 2015). Enfin, les manuels en général, et ceux de géométrie en particulier, forment un territoire de rencontre entre leurs auteurs et leurs lecteurs. En cela, l'enseignement de la géométrie se situe à l'interface des communautés d'experts — les rédacteurs des manuels — et d'apprentis géomètres, souvent scolaires, mais pas toujours. Cette position au croisement des différentes catégories d'acteurs de l'enseignement et de l'éducation, et les caractéristiques de leur intersection, mises en évidence dans cette section, sont à garder en tête pour mieux comprendre les enjeux éducatifs et sociétaux des contenus des manuels autour de la géométrie des aires que nous examinons dans la suite de notre travail.

I.2.2 Auteurs prolifiques et best-sellers

D'un point de vue éditorial, les manuels de géométrie forment une entreprise plutôt prospère et en expansion, comme en témoigne le graphique I.8 (p. 66). Plusieurs auteurs publient un très grand nombre d'ouvrages, rééditions comprises, durant la période s'étendant de 1811 à 1902, en tant que seuls rédacteurs ou en collaboration. Comme le précise Choppin, la fonction d'auteur de manuel est en voie de professionnalisation

Licence CC BY-NC-ND 3.0

depuis le Directoire (1795 — 1799), même si l'écriture de tels ouvrages ne constitue pas une activité principale, mais s'ajoute la plupart du temps à des postes d'enseignement (Choppin, 1992, p. 58-59). La base de données des 2328 ouvrages pouvant servir à enseigner la géométrie que nous avons constituée permet de mettre à jour les auteurs les plus prolifiques dans ce contexte, ainsi que les best-sellers en la matière sur la période considérée.

I.2.2.1 Auteurs prolifiques

L'objectif de cette section est de dresser une liste d'auteurs de manuels de géométrie parmi les plus prolifiques, c'est-à-dire ayant rédigé le plus grand nombre d'ouvrages édités ou réédités sur la période [20], et de mettre en évidence la longévité de leurs productions éditoriales. Ce travail vise à repérer les noms de personnalités d'importance dans le milieu des auteurs de livres classiques en géométrie, et sert de point d'appui à la constitution du corpus que nous nous proposons d'étudier par la suite (voir la partie II p. 141).

Hypothèses :
— Quelques auteurs particulièrement prolifiques occupent une grande part du terrain de la production de manuels de géométrie sur notre période d'étude (1811 – 1902).
— Les auteurs du début du siècle gardent leur importance au cours du temps, rejoints par de nouveaux noms, dont le poids éditorial dans le milieu s'étend peu à peu.

20. Il est à noter que nous avons choisi, de par la nature des données collectées, de ne pas distinguer un auteur qui écrirait 10 manuels de géométrie, chacun publiés une fois, d'un auteur qui écrirait un ouvrage de ce type, publié 10 fois. Nous remarquons néanmoins que peu d'auteurs écrivent un grand nombre d'ouvrages distincts en géométrie sur la période, et que le profil très majoritaire parmi les auteurs que nous appelons « prolifiques » est celui de personnes écrivant un ou quelques titres, fréquemment réédités.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Parmi les auteurs des 2328 ouvrages pouvant servir à l'enseignement de la géométrie, recensés à partir de la *BF*, nous avons retenu ceux ayant publié le plus grand nombre d'ouvrages sur la période allant de 1811 à 1902 (15 ouvrages ou plus, rééditions comprises), puis nous avons calculé la « longévité » de leur production éditoriale sur la période : il s'agit de la différence entre la date de dernière édition et celle de première édition des ouvrages d'un auteur donné, dans les limites de la période (1811 — 1902) considérée dans la base de données. Un calcul d'« indice de prolificité » [21]a également été effectué : obtenu en divisant le nombre de titres publiés par un auteur par la longévité de la production éditoriale de ce même auteur sur la période, il représente le nombre moyen d'ouvrages (rééditions comprises) que cet auteur a publié par année durant sa période globale de publications de manuels.
Nous avons ensuite classé les 29 auteurs concernés, d'une part suivant le nombre d'ouvrages édités, puis suivant la longévité de leur production éditoriale, et enfin suivant leur indice de prolificité.
Un diagramme a ensuite été réalisé avec une double échelle de valeurs : d'une part une échelle située à gauche, avec des valeurs allant de 0 à 100, sur laquelle nous pouvons lire le nombre d'ouvrages (ou de rééditions) considéré (bâtons bleus) ainsi que la longévité de production éditoriale d'un auteur donnée sur la période d'étude (bâtons pointillés orange), et d'autre part une échelle située à droite, avec des valeurs s'étendant de 0 à 3, permettant de lire l'indice de prolificité d'un auteur (losanges rouges foncés). Les auteurs sont classés en abscisses par ordre de date de première édition, afin de garder un caractère temporel visualisable sur le graphique.
Résultat : Voir le tableau I.8 p. 83 et le graphique I.11 p. 84.

21. Le terme « prolificité », désigne en biologie la fécondité plus ou moins grande d'un être vivant ou d'une espèce. Nous l'employons ici comme substantif associé à l'adjectif « prolifique », lui donnant un sens plus littéral de mesure de la productivité éditoriale d'un auteur repéré comme « prolifique ». Nous préférons ce terme à celui de « productivité », que nous trouvons trop connoté en sciences économiques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Auteurs	Nombre d'éditions	1ère édition
Bos H.	58	1866
André P.	55	1866
Guilmin A.	54	1854
F. P. B.	53	1835
Briot C.	50	1847
Vacquant C.	50	1856
Girod F.	38	1878
Sonnet H.	36	1839
Dufailly J.	31	1869
Catalan E.	30	1843
Lacroix S. F.	27	1812
Lamotte M. L.	27	1833
Leroy C. F. A.	26	1829
Puille D.	26	1851
Amiot A.	25	1850
Tombeck H. E.	25	1872
Rouché E.	23	1857
Lebon E.	23	1875
Comberousse C. (de)	22	1861
Pichot J.	22	1866
F. J.	21	1887
Frères écoles chrétiennes	19	1893
Lefébure de Fourcy	17	1827
Boucquet C.	17	1847
Bezodis A.	17	1866
Eysseric	15	1848
Kiaes (ou Kioes) J.	15	1866
F. I. C.	15	1880
Combette E.	15	1876

Auteurs	Longévité	1ère édition
Lacroix S. F.	84	1812
Leroy C. F. A.	67	1829
Sonnet H.	60	1839
F. P. B.	58	1835
Briot C.	52	1847
Catalan E.	49	1843
Amiot A.	47	1850
Lamotte M. L.	46	1856
Vacquant C.	46	1833
Lefébure de Fourcy	43	1857
Rouché E.	43	1827
Eysseric	41	1848
Guilmin A.	40	1854
Comberousse C. (de)	39	1861
Boucquet C.	37	1847
Puille D.	36	1866
Bos H.	36	1851
André P.	34	1866
Pichot J.	32	1866
Dufailly J.	26	1869
Tombeck H. E.	26	1872
Lebon E.	26	1875
Bezodis A.	25	1866
Kiaes (ou Kioes) J.	22	1878
Girod F.	22	1866
Combette E.	16	1880
F. I. C.	15	1887
F. J.	15	1876
Frères écoles chrétiennes	7	1893

Auteurs	Prolificité
Frères écoles chrétiennes	2.71
Girod F.	1.73
André P.	1.62
Bos H.	1.61
F. J.	1.40
Guilmin A.	1.35
Dufailly J.	1.19
Vacquant C.	1.09
F. I. C.	1.00
Briot C.	0.96
Tombeck H. E.	0.96
Combette E.	0.94
F. P. B.	0.91
Lebon E.	0.88
Puille D.	0.72
Pichot J.	0.69
Kiaes (ou Kioes) J.	0.68
Bezodis A.	0.68
Catalan E.	0.61
Sonnet H.	0.60
Lamotte M. L.	0.59
Comberousse C. (de)	0.56
Rouché E.	0.53
Amiot A.	0.53
Boucquet C.	0.46
Lefébure de Fourcy	0.40
Leroy C. F. A.	0.39
Eysseric	0.37
Lacroix S. F.	0.32

TABLE I.8 – Liste des auteurs ayant le plus d'ouvrages publiés entre 1811 et 1902, triés par nombre d'éditions, par longévité de leur production éditoriale, et par indice de prolificité

Carène GUILLET| Thèse de doctorat | Université de Limoges
Licence CC BY-NC-ND 3.0

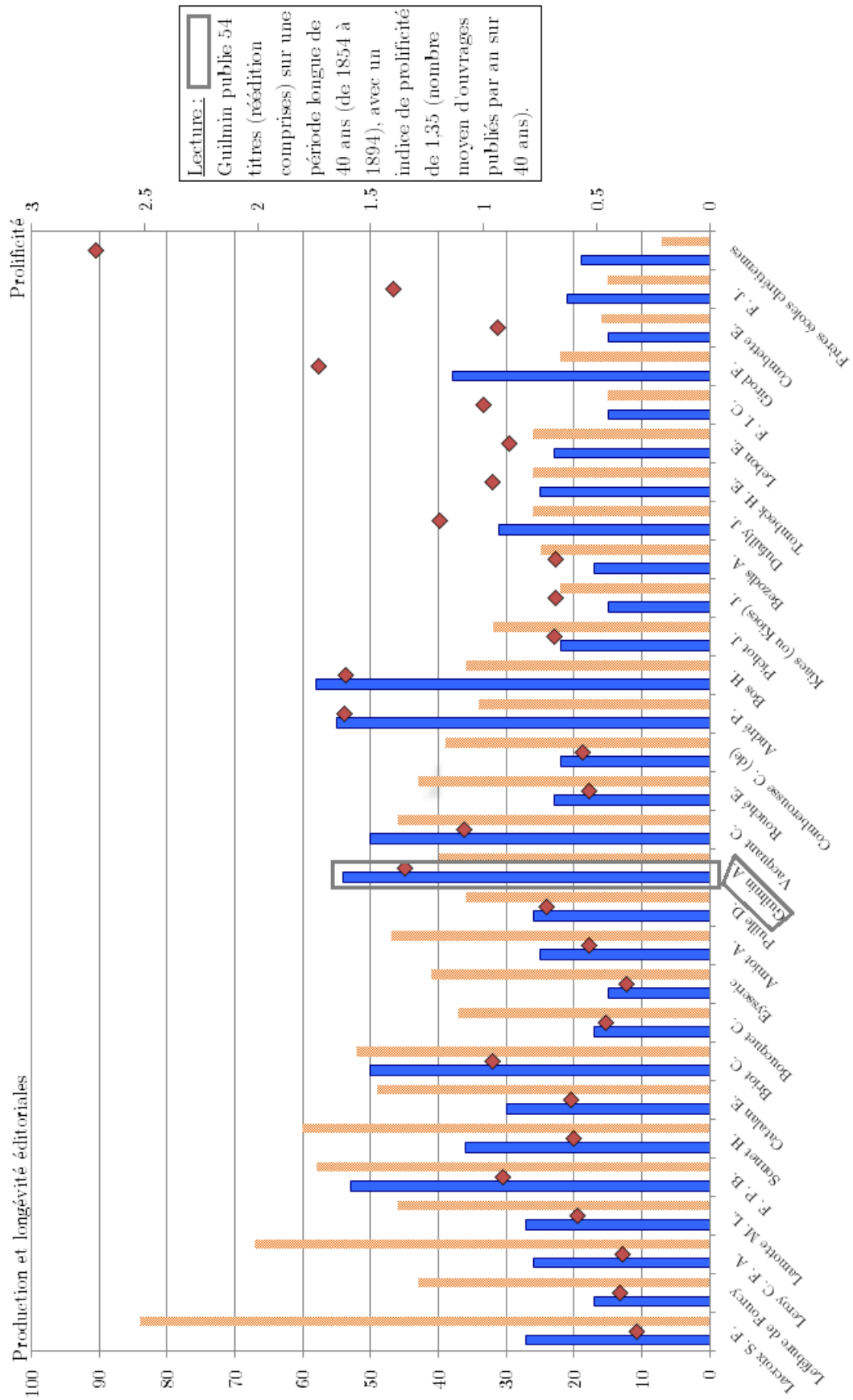


FIGURE I.11 – Auteurs ayant le plus d'ouvrages publiés entre 1811 et 1902, longévité et prolificité éditoriales

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture :
Parmi les dix auteurs ayant publié le plus d'ouvrages de géométrie sur la période, six ont commencé à éditer durant la première moitié de la période, soit avant 1857. Il s'agit de F. P. B. (année de 1ère édition, 1835), Sonnet (1839), Catalan (1843), Briot (1847), Guilmin (1854) et Vacquant (1856). Ces auteurs affichent de grandes longévités de leurs productions éditoriales en géométrie sur la période, comprises entre 40 et 60 ans, le record allant à Sonnet (60 ans). Les quatre auteurs parmi les plus prolifiques restant ont pour leur part commencé à publier des ouvrages en 2ème partie de la période, de 1866 (Bos et André) à 1878 (Girod), en passant par Dufailly en 1869. Ces derniers ont donc réussi à voir un très grand nombre de leurs ouvrages édités dans un temps plus court que les autres, puisque les longévités de leurs productions éditoriales varient entre 22 et 36 ans. D'ailleurs, ils affichent tous les quatre de bons indices de prolificité, nettement supérieurs à 1, ce qui montre qu'ils font paraître en moyenne, en première édition ou non, plus d'un ouvrage par an pour l'enseignement de la géométrie (et jusqu'à 1,73 pour Girod).
L'indicateur de longévité distingue quant à lui d'autres personnalités, ayant publié pendant au moins 45 années sur la période considérée, comme Lacroix, édité durant 84 ans au cours de cette période, ou encore Leroy (62 ans), Amiot (47 ans), et Lamotte (46 ans). Il confirme également le poids éditorial d'auteurs déjà cités précédemment comme Sonnet, F. P. B., Catalan, Briot et Vacquant. Les plus grandes longévités concernent presque toujours des auteurs de la première moitié du siècle, puisque la période considérée s'arrête automatiquement à 1902, du fait de la nature de nos données, et ce même si certains auteurs ont vu les éditions de leurs ouvrages se prolonger bien après. Néanmoins, les ouvrages des auteurs comme Amiot, Lamotte, ou Lefébure de Fourcy, dont les premières éditions sont ultérieures à 1850, semblent bien durer dans le temps avec de grandes longévités sur notre période, pourtant restreinte.
L'examen de l'indicateur de prolificité fait émerger quelques auteurs dont le nombre moyen de manuels de géométrie parus sur leur période de production éditoriale est particulièrement élevé. En-dehors des personnes déjà évoquées ci-avant, il s'agit surtout des auteurs associés aux Frères des écoles chrétiennes, avec 19 titres parus en 7 ans sous cette dénomination (soit un indice de 2,71), 21 titres en 15 ans sous le nom « F. J. » (indice de 1,40) et 15 en 15 ans en tant que « F. I. C » (indice de 1).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :
— Dix auteurs affichent une très grande production éditoriale d'ouvrages d'enseignement de la géométrie sur la période. Parmi ces auteurs, tous se distinguent également par la longévité de leur production et/ou par leur importante prolificité.
— Des auteurs plus tardifs dépassent en prolificité ceux du début du siècle dont la production atteint les plus grandes longévités sur la période (comme Lacroix ou Leroy). Ces derniers concentrent de nombreuses éditions ou rééditions de leurs titres sur des périodes plus courtes. C'est le cas notamment des auteurs issus de la congrégation religieuse des Frères des écoles chrétiennes, que l'indicateur de prolificité fait émerger en tête du classement associé.
— Dans le cadre de l'édition scolaire en géométrie, des auteurs s'imposent donc comme des références en la matière, et les dix auteurs les plus productifs en manuels sur la période sont tous issus du monde de l'enseignement, soit en tant que professeurs, dans le secondaire (Guilmin, Girod, Dufailly) ou dans le supérieur (Briot, Sonnet, Catalan), soit en tant qu'inspecteurs (Bos et Vacquant). Il peuvent également exercer comme chefs d'institution ou enseignants d'une congrégation religieuse (André et F. P. B., acronyme sous lequel se cache le père Mathieu Bransiet).

I.2.2.2 Best-sellers

Dans le chapitre intitulé « Les best-sellers » de son ouvrage sur « le triomphe du livre », Lyons caractérise quantitativement cette notion en tant qu'ouvrages les plus vendus, qu'il repère par une méthode de nature statistique, fondée sur le nombre de rééditions et le nombre moyen de tirages par édition (estimé ou obtenu *via* les données des éditeurs) (Lyons, 1987, p. 76-104). Pour des raisons de sources disponibles, nous n'avons pour notre part retenu que le critère du nombre de rééditions, disponible dans la *BF*, contrairement au nombre de tirages.

Hypothèses :
— Quelques titres très souvent réédités occupent une grande part du terrain de la production et de la diffusion des manuels de géométrie sur notre période d'étude (1811 — 1902).
— Les best-sellers des manuels de géométrie suivent une forme de standard, s'adressant à des publics assez homogènes et abordant la discipline de manière similaire.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : En prenant en compte leur nombre de rééditions, nous avons pu identifier les titres les plus souvent publiés de 1811 à 1902[22]. Cet indicateur met en évidence une forme de pérennité de l'ouvrage sur la période considérée, même si les éditions de certains titres ont commencé avant 1811, et que d'autres se poursuivront après 1902.
Ces ouvrages sont également représentés sur un graphique qui affiche, en plus de l'indicateur précédemment mentionné (en bleu, suivant l'échelle de gauche), les longévités éditoriales de ces titres sur la période d'étude (en rouge, échelle de droite). Seuls les 19 ouvrages présentant un nombre de rééditions ou un nombre d'occurrences supérieur ou égal à 15 ont été conservés dans ces classements et graphiques.
Résultat : Voir le tableau I.9 p. 88 et le graphique I.12 p. 89.

22. Les deux ouvrages les plus réédités entre 1811 et 1902 ne sont pas à proprement parler des ouvrages de géométrie. Ce sont des manuels destinés à préparer l'examen du baccalauréat, rédigés par Lefranc et Jeannin (E. Lefranc et Jeannin, 1876 ; É. Lefranc et Jeannin, 1864), et traitant en partie de géométrie. Nous avons choisi de ne pas les retenir dans cette étude du fait qu'il ne s'agisse pas réellement de manuels de géométrie, mais plutôt d'ouvrages de préparation à l'examen présentant des connaissances mixtes en mathématiques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Titres	Auteurs	Codage	Nombre d'éditions	Année de première édition	Année de dernière édition	Longévité
Cours de géométrie élémentaire	Guilmin A.	Guilmin 1	26	1854	1891	37
Eléments de géométrie	Lacroix S. F.	Lacroix	25	1811	1896	85
Cours élémentaire de géométrie	Guilmin A.	Guilmin2	25	1865	1893	28
Nouveau cours de géométrie	André P.	André 1	24	1866	1899	33
Abrégé de géométrie pratique	Frères écoles chrétiennes	F. E. C.	23	1831	1888	57
Leçons normales de géométrie élémentaire	Puille D.	Puille 2	20	1855	1887	32
Eléments de géométrie	André P.	André 2	20	1866	1897	31
Nouveau traité de géométrie pratique	Lancelot	Lancelot	19	1830	1839	9
Extrait de l'abrégé du cours de géométrie appliquée au dessin linéaire	F. P. B.	F. P. B.	19	1859	1891	32
Cours d'arithmétique élémentaire. Ouvrage renfermant de nombreux exercices et les 1ères notions de géométrie	Burat E.	Burat	19	1878	1894	16
Traité élémentaire d'arpentage	Lamotte L.	Lamotte	18	1833	1875	42
Cours complet d'arpentage élémentaire, théorique et pratique	Puille D.	Puille 1	18	1851	1887	36
Traité pratique d'arithmétique et de géométrie	Chardon C. A.	Chardon	18	1859	1865	6
Cours élémentaire de dessin linéaire et d'arpentage	Boyer A.	Boyer	18	1860	1894	34
Géométrie élémentaire	Bos H	Bos	18	1868	1902	34
Cours de géométrie théorique et pratique	Girod F.	Girod	16	1880	1900	20
Cours de géométrie	Bobillier E.-E.	Bobillier	15	1837	1879	42
Notions (puis Leçons) de géométrie, pour servir à l'étude du dessin linéaire	D******* A.	D*****	15	1845	1867	22
Traité de géométrie élémentaire	Tombeck H.	Tombeck	15	1872	1894	22

TABLE I.9 – Liste des manuels présentant le plus de rééditions entre 1811 et 1902, dates d'édition et longévité éditoriale

Licence CC BY-NC-ND 3.0

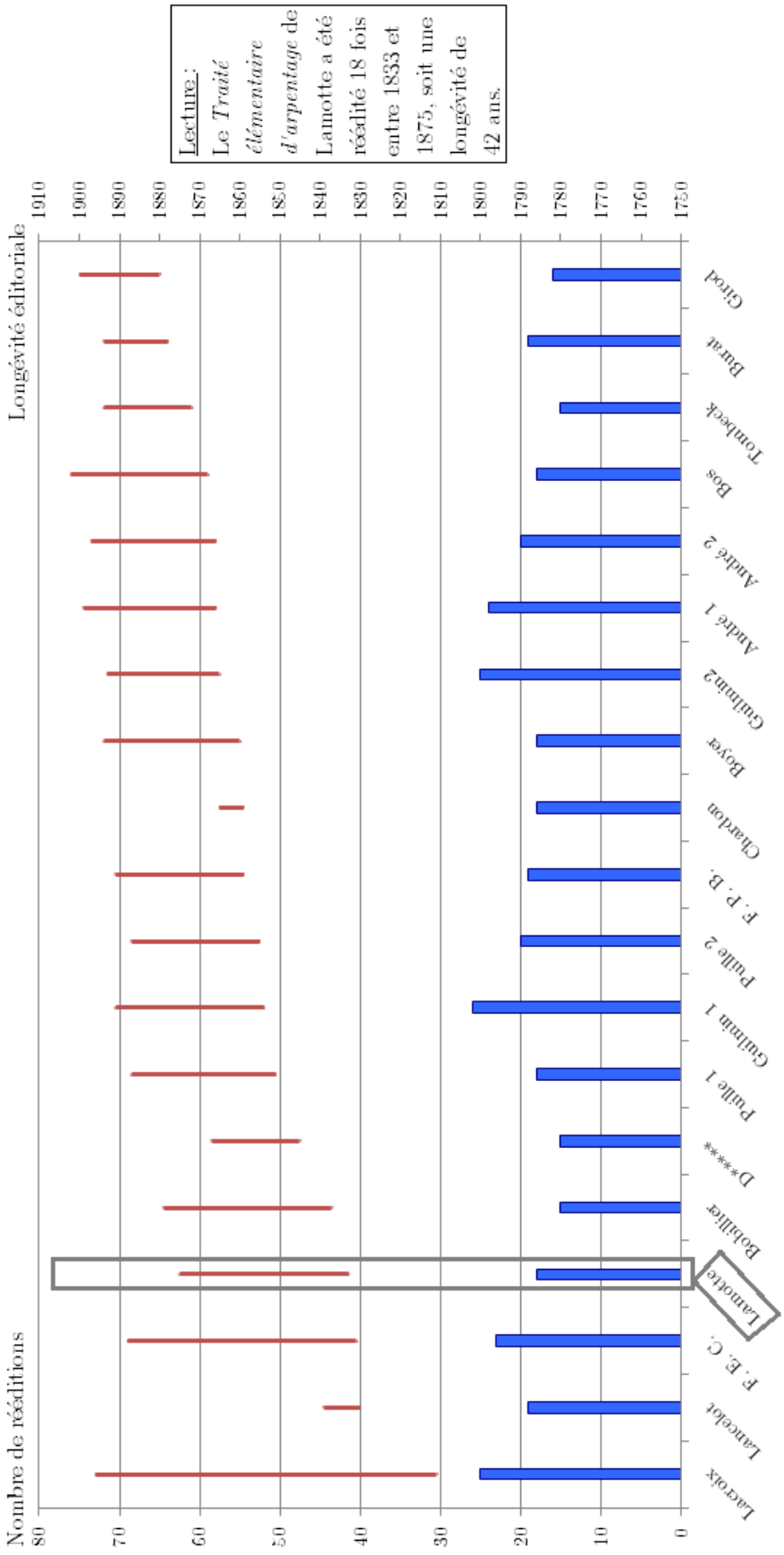


FIGURE I.12 – Ouvrages présentant le plus de rééditions entre 1811 et 1902, dates d'édition et longévité éditoriale

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture :
Guilmin et André placent chacun deux de leurs titres en tête du classement des best-sellers (P. André, 1879, 1895 ; Guilmin, 1864, 1882), égalisant ou dépassant les 25 rééditions des *Éléments de géométrie* de Lacroix (1855). Les ouvrages de Puille montrent également un nombre de rééditions remarquable, respectivement 20 (Puille, 1855) et 18 (Puille, 1852). Dans la mouvance de la géométrie pratique, Lancelot, Lamotte et Boyer s'alignent avec 18 ou 19 rééditions (Boyer, 1854 ; Chardon, 1859 ; Lamotte, 1839 ; Lancelot, 1833), résultats comparables à celui de l'ouvrage de géométrie élémentaire de Bos (1875). Le cas des Frères des écoles chrétiennes est un peu à part, car les ouvrages de ces auteurs apparaissant sous diverses dénominations comme F. P. et L. C. et/ou F. P. B. et ont un nombre de rééditions qui n'est pas toujours indiqué dans la *BF*. Il n'en reste pas moins que l'*Abrégé de géométrie pratique appliquée au dessin linéaire* et l'*Extrait* qui lui est associé (F.P.B. [Bransiet], 1872 ; L.C. et F.P.B., 1840) figurent dans le classement respectivement en 5ème et 9ème positions, accumulant à eux deux 42 rééditions. La *Géométrie élémentaire* de Bos (1875) apparaît 28 fois dans la *BF*, malgré un nombre de rééditions seulement égal à 18, ce qui s'explique par le fait que le titre soit décliné suivant différents niveaux de cours (enseignement secondaire classique et spécial, dont « année préparatoire », « 1ère année », « 2ème année »). Le tableau met de surcroît en lumière le succès de certaines « arithmétiques » comprenant des éléments de géométrie, comme celles de Burat et Chardon (respectivement 19 et 18 éditions) (Burat, 1875 ; Chardon, 1859).

Les longévités éditoriales des différents titres distinguent de grands classiques, comme les *Éléments de géométrie* de Lacroix (85 ans), ainsi que d'autres cours de géométrie qui se maintiennent bien dans le temps (ceux de Bobillier et de Guilmin par exemple), durant plus de 35 ans. Elles mettent aussi en lumière des ouvrages plus ancrés dans une tradition pratique, comme les livres d'arpentage de Lamotte et Puille, ainsi que la géométrie pratique des Frères des écoles chrétiennes. En termes de publics, si les livres de Guilmin sont « à l'usage des collèges et des lycées », ceux d'André ont une audience dans les écoles spéciales, comme l'école du cadastre, ou encore l'École centrale des Quatre-Nations. Le manuel de Lamotte est à destination des écoles primaires ou EPS, tandis que celui de Puille vise les élèves des ENP, pendant que Lancelot écrit pour les deux ordres d'enseignement.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— Une vingtaine d'ouvrages se distingue par un très grand nombre de rééditions sur la période, souvent sur une longue période de publication, et forment en cela des best-sellers de l'édition scolaire en géométrie.

— Une grande diversité apparaît ainsi dans les titres des manuels de géométrie rencontrant le plus grand succès, mêlant des manuels de facture classique à d'autres plus appliqués. Les publics auxquels ces livres se destinent sont également très variés, concernant aussi bien l'ordre primaire que secondaire, et parfois les deux.

Le panorama de l'édition scolaire en géométrie au XIX^e siècle que nous venons de dresser fait apparaître les plus grands producteurs de manuels de cette discipline pour notre période d'étude, ainsi que les best-sellers en la matière. Cette étude donne de surcroît de nouveaux arguments en faveur d'un décloisonnement entre la géométrie du primaire et celle du secondaire, ainsi qu'entre sa version théorique et sa version pratique. Non seulement les deux ordres d'enseignement mobilisent des auteurs reconnus pour créer de nouveaux ouvrages, dans la mouvance théorique comme pratique, qui rencontrent l'adhésion de leurs lecteurs, mais des liens apparaissent de surcroît entre ces deux mondes supposément séparés et étanches, avec des titres s'adressant à des publics multiples. Le focus réalisé sur les manuels de plus grande audience conforte ainsi les hypothèses émises précédemment, selon laquelle la géométrie, et en particulier celle des aires, de par ses connexions avec les applications de cette discipline à l'arpentage ou à d'autres domaines, figure à l'interface entre les différentes conceptions de la géométrie véhiculées par les auteurs, et également à la croisée de ses enseignements auprès de tous les publics (voir schéma I.13 p. 92).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

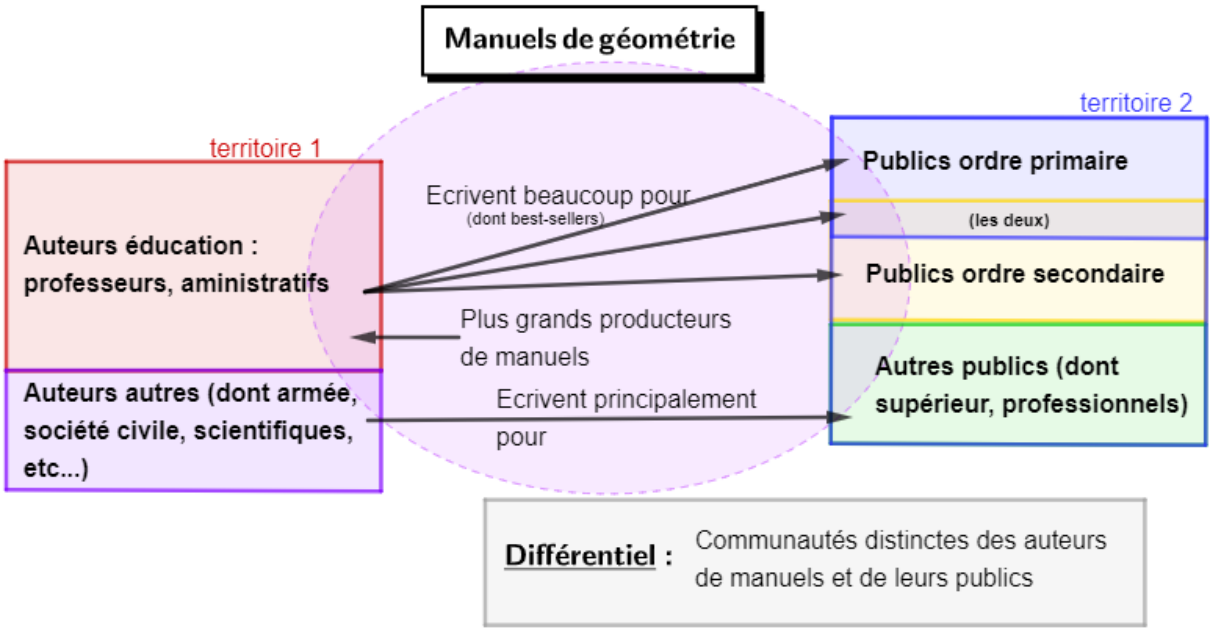


FIGURE I.13 – Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie sont à l'interface des catégories de leurs auteurs et publics

I.2.3 Quels manuels scolaires pour la géométrie des aires ?

Après avoir étudié l'offre éditoriale des manuels de géométrie, nous pouvons désormais nous interroger sur la place de la géométrie des aires dans ces manuels, et plus précisément dans lesquels de ces ouvrages elle est traitée. En effet, le mode de repérage des manuels de géométrie (détaillé dans la section I.2.1.1 p. 61) a généré une sélection très large d'ouvrages, incluant, aux côtés des traités classiques de géométrie, des ouvrages de dessin linéaire, d'arpentage, et même d'arithmétique, lorsque leurs titres font également explicitement référence à la géométrie [23]. La question qui se pose alors est de déterminer dans quels ouvrages les principaux contenus relatifs aux aires se trouvent, d'un point de vue théorique comme pratique, et quels types de manuels seront retenus dans cette étude, apparaissant comme les plus complets et les plus représentatifs des connaissances à acquérir au sujet des aires.

L'étude des programmes d'enseignement montre que les apprentissages sur les aires relèvent principalement du domaine de la géométrie et de ses applications. Néanmoins, il existe d'autres rubriques contenant de telles notions, comme l'arithmétique ou la

23. Sur les 2328 manuels de géométrie recensés, 189 contiennent ainsi également le mot « arithmétique » dans leur titre, comme par exemple les *Éléments d'arithmétique et de géométrie* de Vintéjoux (1883).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

trigonométrie, dans le cadre de la résolution des triangles [24] (voir la section I.1.2.3 p. 52). Les livres de géométrie, qui contiennent et exposent des connaissances complètes sur les aires, sont donc la cible à privilégier dans notre étude, même si ce ne sont pas les seuls ouvrages qui traitent de ce sujet. On peut le trouver également abordé dans des livres d'arithmétique, ainsi que dans des traités de dessin linéaire. En effet, si la géométrie n'a pas toujours figuré officiellement dans les programmes de l'ordre primaire, le dessin linéaire, lui l'a été, et les livres traitant de cette discipline ont pu aussi aborder l'arpentage, et donc la mesure des aires (D'Enfert, 2003a). De même, les ouvrages d'arithmétique pour le primaire ont progressivement intégré des parties traitant de la géométrie, sous l'angle de la mesure de lignes, surfaces ou volumes, en lien avec l'apprentissage du système métrique.

I.2.3.1 Géométrie des aires dans les livres d'arithmétique

En examinant plus particulièrement les livres d'arithmétique, et en parcourant un grand nombre de ces ouvrages d'après 1833, il est apparu qu'ils ne comprenaient pratiquement jamais de partie « Géométrie » avant 1870 (Legros, 2019, p. 176-177) [25]. Dans les années 1830 à 1840, les auteurs peuvent évoquer les calculs de surfaces et la géométrie, tout en les excluant du domaine d'expertise de leurs ouvrages. Par exemple, André Antoine Louis Reynaud [26] indique dans son *Traité d'arithmétique* que « les recherches des rapports qui existent entre les diverses unités de surface [...] exigeant des notions de Géométrie, ne sauraient trouver place ici » (Reynaud, 1835, p. 120). Quant à Louis-Benjamin Francœur [27], il précise en 1845 dans un traité de même nature que « la géométrie donne les règles des calculs propres à faire évaluer les lignes, les surfaces et les volumes des corps » mais que son ouvrage « n'a pas pour objet d'exposer ou de démontrer ces règles » (Francœur, 1845, p. 167). Dans les années 1850, on peut trouver quelques livres proposant des chapitres d'application de l'arithmétique et du système métrique aux aires des surfaces planes. C'est le cas dans

24. La détermination de la surface des triangles dans ce cadre est suffisamment marginale dans les programmes pour justifier de ne pas faire de la trigonométrie un thème central de cette étude, et donc d'en exclure à ce stade les ouvrages dont c'est la spécialité.

25. Legros note d'ailleurs que : « Durant toute la première partie du XIXe siècle, [...] de très rares manuels abordent les racines carrées ou la géométrie » (Legros, 2016, p. 533).

26. André Antoine Louis Reynaud (1771 – 1844). Mathématicien, polytechnicien, chevalier de la Légion d'honneur, examinateur à l'École Polytechnique, il est l'auteur d'un grand nombre de manuels d'enseignement des mathématiques, et est également connu pour ses rééditions annotées des différents volumes du *Cours de mathématiques* de Bézout.

27. Louis-Benjamin Francœur (1773 – 1849). Ancien polytechnicien, il devient répétiteur dans cette école, puis examinateur avant de devenir professeur, d'abord au lycée Charlemagne, puis à la faculté des sciences de Paris. Il est connu pour ses travaux d'algèbre, de mécanique théorique, et de géodésie. Il participe à la création de la Société pour l'enseignement élémentaire en 1815, aux côtés de nombreux dirigeants de la Société d'encouragement, et y développe des méthodes originales d'enseignement mutuel du calcul et du dessin.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

une partie du *Nouveau traité d'arithmétique décimale* par F. P. B. intitulée « Mesure des surfaces et des corps », qui présente les définitions et résultats géométriques les plus strictement nécessaires aux calculs des surfaces dans le cadre du système métrique (F.P.B. [Bransiet], 1853, p. 321-329).

C'est à partir des années 1870 que certains ouvrages d'arithmétique commencent à proposer des chapitres entiers consacrés à la géométrie, comme l'*Arithmétique élémentaire* de Bos (1872), la *Deuxième année d'arithmétique* de Leyssenne (1875) (qui préfigure sa future *Troisième année d'arithmétique* examinée ci-après), ou encore le *Cours d'arithmétique élémentaire* de Burat (1875). Sur cette période, les manuels d'arithmétique, notamment à destination des écoles primaires et primaires supérieures, peuvent donc renfermer de larges parties traitant de la géométrie, de l'arpentage et des aires vues à travers l'étude du système métrique (D'Enfert et al., 2017, p. 65, 70-72). Pour mesurer la place et la part de la géométrie des aires dans les manuels d'arithmétique, comparativement à ceux de géométrie, nous proposons de dresser une analyse parallèle des chapitres étudiant la « mesures des aires » et la « comparaison des aires » dans deux de ces ouvrages [28].

La *Géométrie théorique et pratique* de Sonnet (1880b) et *La troisième année d'arithmétique* de Leyssenne (1889) sont tous les deux des « best-sellers » au sens de Lyons (voir la section I.2.2 p. 80). Multiplement réédités, leur emploi dans les classes s'est étalé pendant plusieurs décennies : de la 1ère édition en 1839 à la 9ème en 1887 pour Sonnet, et de la 1ère édition en 1889 à la 22ème en 1912 pour Leyssenne [29]. Les versions diffèrent très peu les unes des autres, ce sont donc des ouvrages comparables en termes de période, puisqu'ils sont tous les deux en usage à la fin des années 1880. De plus, leurs auteurs ont des profils et des parcours similaires, tous deux d'abord professeurs puis inspecteurs [30], et rédacteurs d'articles dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, comme par exemple « Arpentage » (Sonnet, 1887) pour Sonnet et « Géométrie » pour Leyssenne (Leyssenne, 1882a).

28. Cette analyse des contenus sur les aires est relativement sommaire, même si elle reste de nature qualitative. Elle ne se substitue pas à une étude plus approfondie des ouvrages d'un corpus restreint qui sera menée dans la partie III, mais a vocation à dresser un portrait suffisamment détaillé des connaissances proposées dans les deux types d'ouvrages pour qu'il permette de délimiter la nature des manuels avec lesquels nous avons intérêt à travailler par la suite.

29. Le premier n'apparaît pas dans notre étude des best-sellers précédente, puisque nous nous sommes limités aux titres ayant été réédités 15 fois au minimum, mais le fait qu'il ait bénéficié de 9 éditions demeure révélateur de son succès éditorial, de même que la longévité de sa période de publication,s'étalant sur presque un demi-siècle. Le second dépasse le seuil des 15 rééditions retenu pour notre étude des best-sellers, mais il n'apparaît pas non plus dans le tableau I.9 (p. 88) puisqu'il s'agit d'un manuel d'arithmétique et non de géométrie.

30. Voir leurs notes biographiques en annexe p. 678 ainsi que dans (Dubois, 2002e, p. 98, 133).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Éléments comparés	*Arithmétique* de Leyssenne 1889		*Géométrie* de Sonnet 1880	
Intitulés des chapitres	« Des aires » (1889, p. 100)	« Comparaison des aires » (1889, p. 107)	« De la mesure des aires » (1880b, p. 156)	« Propositions relatives à la comparaison des aires » (1880b, p. 170)
Nombre de pages par sections	8	7	13	24
Mesures des aires des formes géométriques usuelles	Formules successives des aires des rectangles, parallélogrammes, triangles, trapèzes, polygones quelconques, polygones réguliers, cercles et secteurs circulaires		La même chose dans le même ordre, plus les aires des segments, couronnes et trapèzes circulaires	
Mesures des aires délimitées par des courbes quelconques	Dans la partie « Arpentage »[a] (1889, p. 145-146) section 300. 3 procédés : abaissement de perpendiculaires sur la directrice, abaissement de perpendiculaires plus courtes sur une directrice plus adaptée et méthode des « emprunts »		Propositions 335 et 336 du chapitre « Mesure de l'aire des figures curvilignes », (1880b, p. 170). Méthode des perpendiculaires abaissées et procédé par compensation	
Preuve de l'aire du rectangle	Preuve de la prop. 234 « L'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur » (1889, p. 101) par induction à partir d'un quadrillage et de valeurs numériques particulières, entières puis décimales, puis résultat admis « dans tous les cas » (1889, p. 102). Aucune preuve lorsque les côtés sont incommensurables, cas jamais évoqué		Proposition 317, raisonnement analogue dans le cas où « une unité [est] contenue un nombre exact de fois dans la hauteur et dans la base », puis reporte la preuve dans le cas de l'incommensurabilité à une partie ultérieure (Sonnet, 1880b, p. 156-157)	Proposition 337, preuve que « deux rectangles de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases » dans le cas où les bases sont incommensurables, avec méthode d'encadrement et recours aux « infiniment petits », sans les nommer (1880b, p. 170-171)

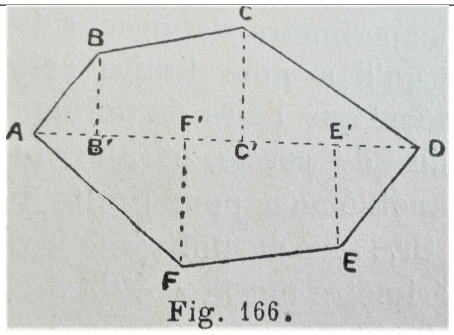
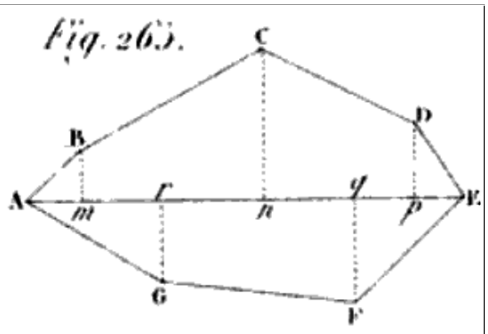
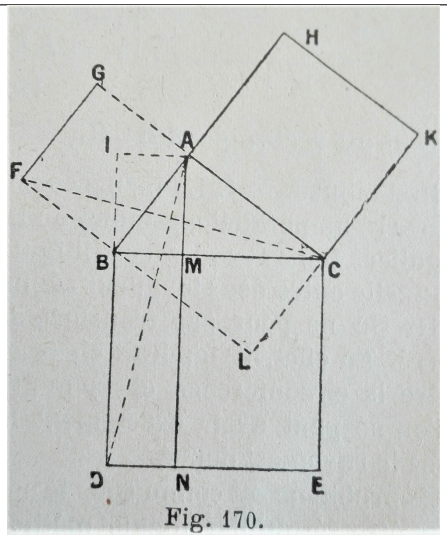
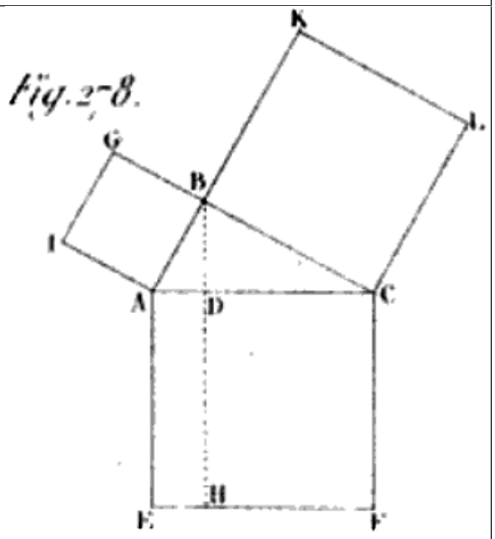
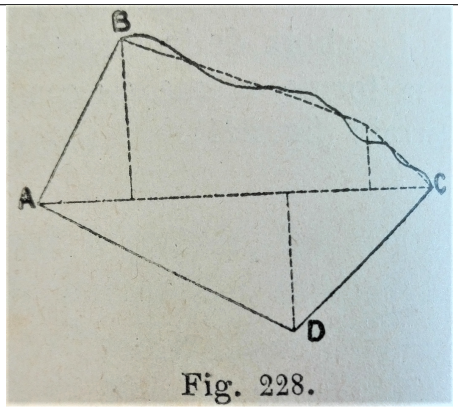
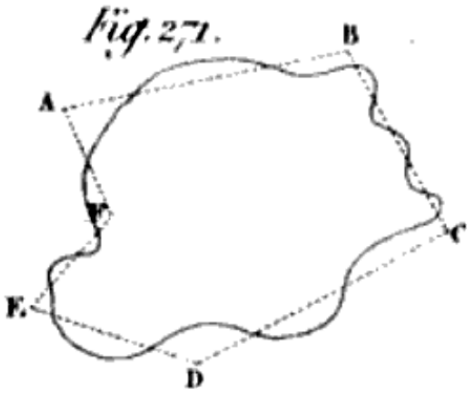
a. On retrouve dans cette partie certains des résultats relatifs aux aires des polygones.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Comparaison des aires des polygones		Comparaison des aires des triangles semblables, justifiée par la formule de l'aire du triangle, elle-même tirée de celle du rectangle, pratiquement admise dans la partie précédente, puis compare les aires de polygones semblables (1889, p. 107-108).		Proposition 337 sur la comparaison des aires des rectangles, y compris dans le cas de l'incommensurabilité des côtés (voir ligne ci-dessus), étendue ensuite aux aires des parallélogrammes, triangles, puis polygones semblables (1880b, p. 170-189) [a].
Formule de Héron	Formule non nommée dans le texte, donnée sans preuve en « Remarque » après la partie sur la formule du triangle (section 237). Il est indiqué que « la démonstration de cette formule sort du programme de l'enseignement primaire » (1889, p. 103), mais son utilité est soulignée (calculer l'aire d'un triangle lorsqu'on connaît ses trois côtés)		Formule figurant à la toute fin de la première partie « Géométrie plane » en tant que « Note relative à l'aire du triangle ». Elle n'est pas nommée non plus, mais démontrée sur deux pages par des méthodes géométriques et du calcul algébrique (1880b, p. 207-208)	

a. On trouve également dans cette partie divers problèmes de quadratures et des résultats relatifs à des « carrés construits sur la somme (ou la différence) de deux lignes » (1880b, p. 183-185) qui produisent ce que l'on appelle actuellement des « identités remarquables ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Figures polygones quelconques	 Fig. 166. (1889, p. 105)	 (1880a, p. 30)
Figures théorème de Pythagore [a]	 Fig. 170. (1889, p. 109)	 (1880a, p. 31)
Figures aire délimitée par une ligne courbe	 Fig. 228. (1889, p. 146)	 (1880a, p. 31)

a. Non cité comme tel, mais comme théorème du « carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle »(Sonnet, 1880b, p. 179).

TABLE I.10 – Comparaison des ouvrages de Leyssenne, 1889 et Sonnet, 1880

Afin de confronter les contenus de leurs ouvrages, nous avons mis en parallèle certains points remarquables des chapitres traitant des aires et de leurs comparaisons dans le tableau I.10 p. 97. Cette analyse qualitative des contenus confirme l'impression donnée

Licence CC BY-NC-ND 3.0

par le point de vue strictement quantitatif, qui ne s'intéresse dans ce cas qu'au nombre de pages dans les deux ouvrages. Dans les deux parties, les résultats énoncés sont à peu de choses près les mêmes, avec quelques compléments chez Sonnet, et les figures proposées sont pratiquement identiques. Les différences majeures résident donc dans les preuves, plus systématiques et mettant en œuvre des raisonnements mathématiques de niveau plus élevé [31] dans l'ouvrage de géométrie, et dans les applications, avec des problèmes nombreux posés à la suite des propositions chez Sonnet. Finalement, concernant le cœur de l'objet d'étude examiné ici, il ne figure rien dans le livre de Leyssenne que l'on ne puisse trouver (en plus détaillé) dans celui de Sonnet. Nous considérons qu'en tant que best-sellers rédigés par des auteurs de statut comparable et en usage à la même période, ces deux ouvrages sont représentatifs de leurs catégories (manuels respectivement de géométrie et d'arithmétique) à un moment où co-existent des parties de géométrie dans ces deux types de livres. En conséquence, suite à la comparaison des contenus des deux ouvrages, nous choisissons d'écarter de notre corpus à venir les manuels d'arithmétique, et ce même si certains contiennent de la géométrie des aires.

I.2.3.2 Géométrie des aires dans les ouvrages de dessin linéaire

Concernant les manuels de dessin linéaire, leurs parties abordant les aires et l'arpentage peuvent être mises également en regard de celles figurant dans les ouvrages de géométrie élémentaire, comme dans ceux de géométrie pratique, traitant spécifiquement d'arpentage. Là encore, la question est de déterminer si leurs contenus peuvent se retrouver dans ceux des manuels de géométrie ou d'arpentage, avec ou sans apport supplémentaire, afin de décider s'il est ou non nécessaire de les inclure dans le corpus restreint qui sera analysé par la suite. L'ouvrage retenu pour cette comparaison est le *Dessin linéaire et arpentage* de Francœur (1839). Ce choix est justifié par le fait que c'est précisément lui qui a conçu ce nouvel enseignement à la fin des années 1810 (D'Enfert, 2003a, p. 42), en publiant notamment en 1819 *Le dessin linéaire d'après la méthode de l'enseignement mutuel* (Francœur, 1819). De plus, son ouvrage de 1839 figure dans les listes officielles des ouvrages autorisés dans l'enseignement primaire, dont il sera question dans la 2ème partie (Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1851).

Cet ouvrage sera confronté au manuel de géométrie de Sonnet précédemment évoqué, pris dans une version antérieure (3ème édition) pour garder la cohérence des périodes d'étude (Sonnet, 1848), puis au *Traité élémentaire d'arpentage et du lever des plans* de

31. Comme le recours aux infiniment petits dans la preuve de l'aire d'un rectangle de côtés incommensurables, ou au calcul algébrique dans la preuve de la formule de Héron.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lamotte (1839) [32]. Le choix s'est porté sur ce dernier titre du fait du statut de son auteur et de la longévité de son ouvrage, en plus de son caractère « officiel ». En effet, Lamotte (voir ses éléments biographiques en annexe p. 678) a été inspecteur de l'instruction primaire pour le département de la Seine. Adepte de l'enseignement mutuel, il est réputé pour avoir été un protégé de Guizot avec son collègue et co-auteur de nombreux ouvrages, Paul Lorain (Chapoulie, 2005, p. 26-27). Il est à la 12ème position des auteurs de géométrie les plus publiés entre 1811 et 1902 d'après le tableau I.8 (p. 83), avec une longévité éditoriale de 46 ans sur cette période, et son traité d'arpentage est l'ouvrage « officiel » de ce genre le plus longtemps publié, avec 27 rééditions s'étalant de 1833 à 1902. La comparaison portera donc sur des titres de réputation similaire, de même que celle de leurs auteurs.

Dans le livre de Francœur, les parties traitant des aires se situent en 3ème section sous le titre « Application du calcul à la géométrie » et une sous-partie nommée « Sur les surfaces » (Francœur, 1839, p. 112). Des formules pratiques pour calculer des aires y sont données, sans preuve ni même explication, et directement appliquées sur des cas numériques, avec usage du nouveau système métrique en vigueur depuis 1837. La différence fondamentale avec l'ouvrage de Sonnet décrit ci-avant, fondé pour sa part sur des propositions démontrées avec rigueur avant toute application pratique, est en cela manifeste. Dans la première partie du traité de Lamotte intitulée « Arpentage », le 3ème chapitre traite des calculs d'aires (Lamotte, 1839, p. 39-45). Comme chez Francœur, il expose les différentes formules et techniques de calcul d'aires, sans preuves mais avec des explications. Les références au système métrique et les applications numériques sont nombreuses. Là où Francœur préconisait d'utiliser le rapport approché de « 3 et 1/7 » pour calculer l'aire d'un cercle (Francœur, 1839, p. 118), Lamotte propose d'abord la même approximation, attribuée à Archimède, puis une autre, plus précise, de valeur $\frac{355}{113}$ ou encore $3 + \frac{16}{113}$, donnée par Métius (Lamotte, 1839, p. 45). Par conséquent, il apparaît dans ce cas encore que l'intégralité des connaissances exposées dans l'ouvrage de dessin linéaire sur les aires se retrouve dans un ouvrage d'arpentage de la même époque et de statut manifestement comparable (au moins du fait de leur appartenance aux liste officielles pour l'instruction primaire), avec des compléments dans le livre plus spécialisé.

Ce travail nous permet donc d'écarter de notre sélection ultérieure les ouvrages de dessin linéaire, en plus de ceux d'arithmétique, tous deux moins complets sur les questions qui nous intéressent que ceux de géométrie et d'arpentage. En effet, les

32. Là encore, le panorama présenté reste global quoique qualitatif. Il met en évidence les points de comparaison saillants entre les ouvrages observés, sans rentrer dans des détails qui ne seront étudiés que dans la partie III.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

connaissances et techniques présentées dans ces types d'ouvrages se retrouvent entièrement dans ceux de géométrie, et la prise en compte de leurs contenus n'apporterait donc pas d'éléments supplémentaires à notre étude, d'autant qu'avec des publics cibles variés, les manuels de géométrie (et d'arpentage) couvrent déjà bien les différents niveaux de présentation des savoirs et méthodes de la géométrie des aires. Cette analyse souligne néanmoins la présence de la géométrie des aires dans des manuels touchant à d'autres domaines que la stricte géométrie, comme nous l'avions remarqué à travers l'étude des programmes (voir la section I.1.2.3 p. 52), même si elle figure dans ces ouvrages de façon plus concise et certainement simplifiée. Cela confirme ainsi le rôle d'interface que jouent les aires entre ces ouvrages relatifs aux différentes facettes des sciences mathématiques, à la fois comme une zone qui leur est commune et comme un lieu où s'expriment aussi bien des complémentarités que des différences (voir schéma I.14 p. 100).

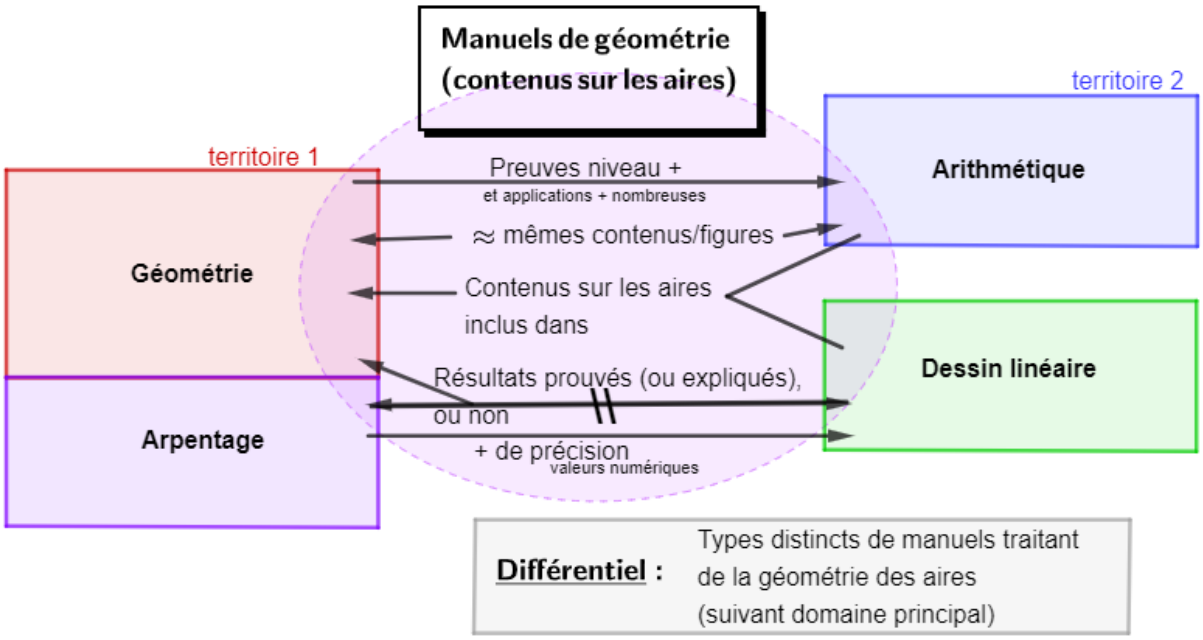


FIGURE I.14 – Schéma montrant en quoi les contenus sur les aires sont à l'interface des manuels de géométrie d'arpentage, d'arithmétique et de dessin linéaire

I.2.4 Conclusion

Finalement, la géométrie des aires est bien représentée dans la production éditoriale de manuels aux XIXe siècle, en tant que partie de la géométrie, dont les ouvrages d'enseignement voient leurs publications augmenter au cours du temps. Cet essor est à mettre en parallèle avec la présence croissante des savoirs en géométrie, et notamment en géométrie des aires, dans les programmes d'enseignement. Ces nombreux manuels,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

nécessaires dans le contexte éducatif de l'époque, sont écrits par des auteurs aux profils divers, pour un public varié, appartenant pour la plupart aux différentes structures éducatives qui se mettent progressivement en place au cours du siècle.

Le travail mené dans ce chapitre a permis de poser les jalons de la constitution d'un corpus plus restreint de tels manuels, que nous proposons d'analyser quantitativement et qualitativement dans la suite de cette étude. En effet, nous avons constitué un corpus global de plus de 2000 titres, source dans laquelle nous sommes en mesure d'effectuer une sélection ultérieure, guidée par l'identification des auteurs les plus prolifiques et des ouvrages « best-sellers ». Enfin, tout comme dans les programmes, la géométrie des aires est présente dans des manuels concernant de nombreux domaines des mathématiques, en plus de l'arpentage, comme le dessin linéaire et l'arithmétique. Néanmoins, une première confrontation des contenus met en évidence la relative « pauvreté » des savoirs présentés dans les ouvrages d'arithmétique et de dessin linéaire, comparativement à ceux de géométrie et d'arpentage, ce qui justifie le choix de ne conserver dans notre étude que ces derniers.

De surcroît, à travers les manuels scolaires, la géométrie en général, et celle des aires en particulier, figure à l'interface des communautés d'auteurs et des communautés d'élèves (voir figure I.13 p. 92). C'est en effet ce que fait émerger le croisement des domaines professionnels des auteurs et des niveaux et ordres d'enseignements de leurs lecteurs. L'analyse des données confirme la porosité des ordres primaires et secondaires, et contredit une séparation potentielle entre le monde de l'école et la société, puisque des auteurs de milieux potentiellement externes à l'instruction écrivent pour des scolaires, et que des professeurs écrivent pour des lecteurs professionnels. Nous aurions pu penser que les manuels à succès et les profils de leurs auteurs répondraient à un certaine homogénéité. Notre étude révèle au contraire la diversité du genre, affichant des longévités importantes pour des manuels d'approche théorique comme pratique, pour le primaire comme pour le secondaire, et en particulier des livres dédiés à l'arpentage. À l'occasion de la comparaison des contenus des manuels de géométrie et d'arpentage avec ceux d'arithmétique et de dessin linéaire, la géométrie des aires montre également un autre aspect de son rôle d'interface entre ces différents domaines (voir figure I.14 p. 100). Cette observation vient conforter l'hypothèse selon laquelle cette géométrie constitue un terrain d'échanges et d'interactions entre les savoirs liés aux raisonnements, aux calculs, et aux constructions de figures en mathématiques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.3 La géométrie des aires dans les débats sur l'enseignement de la géométrie au XIXe siècle

Le milieu du XIXe siècle est marqué par de vifs débats sur l'enseignement de la géométrie. Le modèle euclidien, incarné par les *Éléments de géométrie* de Legendre (1794), est remis en question tant dans sa construction que dans ses qualités pédagogiques. Le regain d'intérêt pour les *Élémens de géométrie* de Clairaut, réimprimés conformément aux programmes en 1852 (Clairaut, 1741, 1852), est le signe d'un retour à une conception plus intuitive de l'enseignement de la géométrie et davantage reliée aux sens (Bkouche, 1981 ; Moktefi et al., 2013). Les textes des instructions officielles, quant à eux, mettent en avant alternativement au cours du temps plutôt l'une ou plutôt l'autre de ces deux approches (Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003c). À première vue, ce débat pourrait s'apparenter à celui opposant les ordres primaires et secondaires autour des visées éducatives utilitaires ou théoriques de l'enseignement (Assude et Gispert, 2015). La situation est pourtant plus complexe en réalité, car ces questionnements sur l'enseignement de la géométrie s'invitent même au cours de la mise en place des programmes du secondaire. L'enseignement primaire, et notamment primaire supérieur, n'y échappe pas non plus, puisque tout est à construire à ce niveau en géométrie (D'Enfert, 2003a). Alors que la recherche en géométrie dite « moderne » réveille les vertus de la méthode synthétique, les discussions portent également sur la pertinence de l'usage des méthodes analytiques en géométrie, qu'elles soient issues de l'algèbre ou de l'analyse infinitésimale, et sur le bien-fondé d'introduire dans l'enseignement les nouveautés de la géométrie modernisée (Boyé, 1998 ; Lorenat, 2019). L'ensemble de ces échanges constitue un terrain propice à l'émergence de nouvelles méthodes d'enseignement de la géométrie, parmi lesquelles les méthodes inductives, intuitives, ou encore expérimentales.

L'apprentissage des aires n'échappe pas au débat qui agite les acteurs de l'éducation (professeurs, inspecteurs, etc.) de l'époque. En effet, ces derniers se demandent si cet objet a intérêt à être appréhendé dans un cadre euclidien, ou au contraire, dans un contexte pratique, en lien avec le calcul et le système métrique. Dans le premier cas, il s'agit de mettre l'accent sur le raisonnement et sa structure axiomatico-déductive, et de construire des figures « équivalentes », c'est-à-dire d'aires égales entre elles. Dans la tradition d'Euclide, cette étude est alors séparée de toute considération sur les nombres ou la mesure. Dans le second cas, les aires sont traitées à travers des formules de calcul suivies d'applications concrètes, et même éventuellement complétées par des expériences de mesurage sur le terrain. Au-delà de la question du « comment ? » se pose celle du « pourquoi ? ». Là encore, certains pédagogues envisagent l'enseignement des

Licence CC BY-NC-ND 3.0

aires comme un moyen d'exercer l'esprit au raisonnement et à la démonstration, alors que d'autres ambitionnent plutôt de former des futurs praticiens, tout en développant une approche sensible de la géométrie, en lien avec le cours de dessin ou de leçon de choses. En outre, cette opposition n'apparaît pas seulement liée à la dichotomie des ordres d'enseignement primaires et secondaires, mais également à d'autres facteurs, relevant notamment des évolutions internes de la discipline. Par exemple, la question des aires curvilignes devient l'étendard des partisans de l'introduction de l'analyse infinitésimale en géométrie, même si d'autres pensent qu'il est préférable de l'éviter. De même, le traitement de certains résultats plus avancés, comme les aires délimitées par des coniques, interroge la nécessité d'un recours aux nouveautés de la géométrie moderne récemment constituée. Les méthodes pédagogiques qui voient le jour ou se développent, trouvent également dans la géométrie des aires un terrain d'expérimentation et d'application, à travers les procédés de visualisation, d'induction, ou de manipulation, qui s'expriment par exemple dans le traitement du théorème de Pythagore.

Au-delà du seul antagonisme entre son caractère théorique ou pratique, la géométrie et les débats sur son enseignement révèlent la nature protéiforme de ce domaine de connaissances, entre approche analytique ou synthétique, prenant sa source dans les traditions ou tendant vers les nouveautés issues des récentes recherches, et générant des procédés d'enseignement variés et originaux. La nature de ces oppositions et interactions restent néanmoins à préciser. Pour cela, nous complétons notre panorama de l'enseignement de la géométrie au XIX^e siècle par une analyse lexicale des titres des manuels de géométrie recensés dans la *BF*, qui a pour objectif de mettre en relation les diverses conceptions possibles de cette discipline et de son enseignement. En réalisant ce travail, c'est le rôle d'interface des aires au centre du débat éducatif sur la géométrie que nous sommes amenés à mesurer.

I.3.1 Un enseignement de la géométrie entre tradition et modernité

I.3.1.1 Avec ou sans Euclide ? Réception de la géométrie euclidienne dans l'enseignement au XIX^e siècle

Les *Éléments* d'Euclide ont traversé l'histoire de la géométrie et de son enseignement, non sans remous. Que cet ouvrage ait été initialement conçu ou non pour enseigner, ses diverses traductions et réécritures ont alimenté l'apprentissage de la géométrie au cours des siècles [33] et reste une référence, sinon un modèle, pour les manuels

33. Dans cette section, nous n'avons ni l'ambition ni la prétention d'étudier le statut précis des *Éléments* d'Euclide pour l'enseignement de la géométrie en général. Notre objectif, plus modeste, est de rappeler quelques points nécessaires pour comprendre l'influence de cet ouvrage au XIX^e siècle et ses implications.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

de géométrie au XIXe siècle. De plus, la notion d'aire, objet de notre présente étude, est fondamentale dans l'approche d'Euclide. En effet, les livres I et II s'emploient à déterminer les quadratures des polygones quelconques, c'est-à-dire à savoir construire un carré d'aire égale à un tel polygone, ce qui revient à comparer son aire à celle d'un carré équivalent. Cette « géométrie des aires » (voir introduction p. 21), comme la désigne Szabó, et plus communément appelée « méthode des aires » (Baroux et Bühler, 2022), est un modèle de preuve qui consiste à démontrer par les aires des résultats portant sur des lignes [34] (Szabó, 2000, p. 200-230). Le lien entre les savoirs sur les aires et l'œuvre du savant antique est donc manifeste et incontournable dans notre étude.

Néanmoins, les qualités pédagogiques de l'ouvrage ne sont pas restées sans critique. Au XVIIIe siècle, un géomètre comme Clairaut, dans le sillage de la pensée de son prédécesseur Antoine Arnauld, lui reproche son ordre théorique et lui préfère une organisation axée sur la résolution de problèmes (Moktefi et al., 2013, p. 3-4 ; Baroux et Bühler, 2022, p. 19-20). En France, au tournant du XIXe siècle, Legendre suit très largement le modèle euclidien pour rédiger ses *Éléments de géométrie* (Legendre, 1794), proposant ainsi une version euclidienne adaptée à l'enseignement de la géométrie de son époque, traité qui se diffusera largement en Europe et au-delà, en particulier aux États-Unis (Moktefi et al., 2013 ; Preveraud, 2017). Quant aux programmes d'enseignement, une partie des échanges et débats qui animent leurs rédacteurs au cours du siècle portent également sur la pertinence de l'usage de l'œuvre euclidienne pour apprendre la géométrie. Au début du siècle et pendant plusieurs décennies, Legendre, digne représentant de la pensée d'Euclide, est la référence en la matière (Belhoste, 1995, p. 39), bientôt remplacé par le livre de Clairaut (1741), mis à l'honneur dans les programmes de Fortoul en 1852 pour les lycées (Belhoste, 1995, p. 274-275), et même réimprimé à l'occasion (Clairaut, 1852). L'ouvrage de Bézout, considéré par les législateurs de l'instruction publique comme proche de celui de Clairaut de par son état d'esprit et les méthodes employées, profite aussi de cet engouement et se voit lui aussi préconisé officiellement, traduit, commenté et réédité à de nombreuses reprises, et notamment en 1848 pour l'enseignement spécial (Belhoste, 1995, p. 36-37, 215, 324). En 1863, sous l'impulsion du ministre de l'instruction publique Victor Duruy, c'est le retour à Euclide qui est préconisé et le traité de Clairaut tombe en disgrâce, considéré comme manquant de rigueur, et se trouve réduit à un simple « livre de lecture » (Belhoste, 1995, p. 384). La question de la référence euclidienne se pose aussi dans l'enseignement primaire, mais un peu plus tardivement, puisque dans une conférence en 1887, Vintéjoux estime qu'« au risque de porter une main sacrilège sur l'édifice élevé par Euclide et Legendre, il faut se résigner, dans la géométrie de l'école primaire, à admettre un certain nombre

34. Comme par exemple le théorème de Pythagore.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

de propositions comme évidentes », puisque de fait, « certaines propositions, qu'on démontre d'ordinaire, ont un tel caractère d'évidence, que les enfants ne comprennent pas la portée de la démonstration qu'on en donne, et qu'elle risque d'obscurcir pour eux ce qu'ils apercevaient clairement » (cité dans D'Enfert 2003c, p. 245) [35].

Ces discussions autour d'auteurs apparaissant ou non comme des références pour l'enseignement de la géométrie ne sont pas anodines, et mettent en évidence les conceptions épistémologiques et pédagogiques sous-jacentes de leurs défenseurs ou détracteurs. La structure euclidienne, réinterprétée par Legendre, est vantée par les uns pour son ordre et sa rigueur, alors que les autres estiment l'approche par problèmes de Clairaut ou de Bézout mieux adaptée aux perceptions immédiates et à l'intuition des élèves. Quoiqu'il en soit, même si les *Éléments* d'Euclide ne sont pas l'unique référence en la matière, ils demeurent, pour les auteurs de manuels de géométrie, un modèle à suivre, à contester ou encore à améliorer. La position de la géométrie des aires à l'interface des références, euclidiennes ou non, pour ses manuels d'enseignement, est résumée sur le schéma I.15 p. 105.

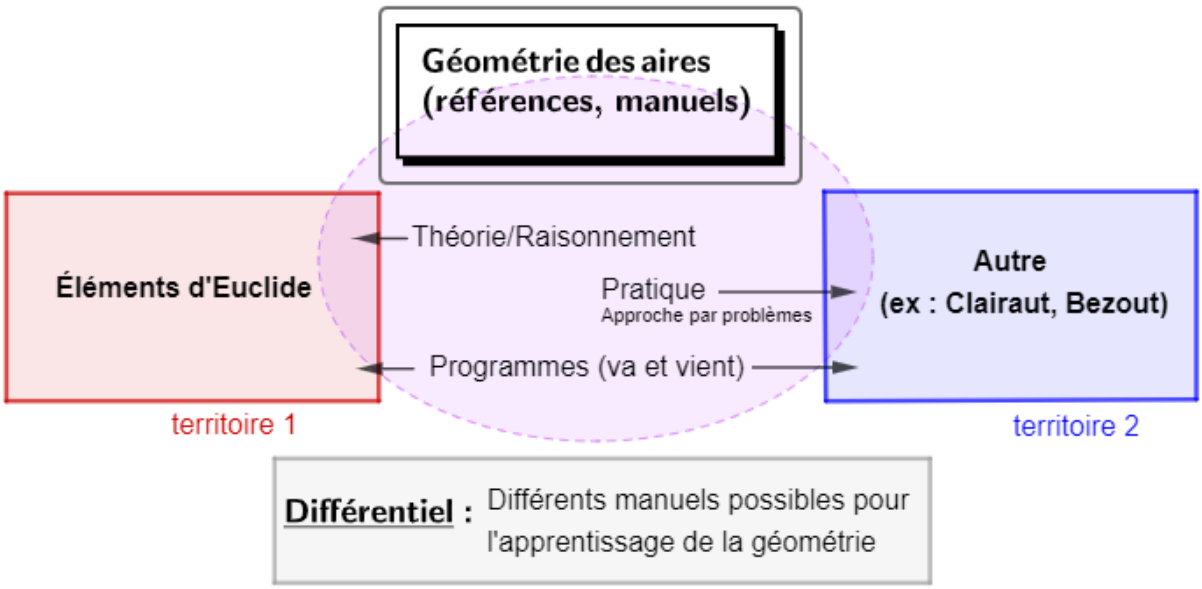


FIGURE I.15 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des références, euclidienne ou non, pour les manuels d'enseignement

35. Quant à Clairaut, ce n'est qu'en 1903 qu'il se trouve évoqué dans les instruction officielles pour le primaire, dont Jules Tannery vante les mérites pour l'enseignement de la géométrie dans les écoles. Tannery ironise sur les réticences que montrent d'autres acteurs de l'éducation à son encontre, en l'appelant l'« épouvantail des rigoristes »(D'Enfert, 2003c, p. 299).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.3.1.2 Objectifs éducatifs utilitaires ou théoriques de la géométrie

La géométrie du XIXe siècle a hérité, en plus de l'influence durable des *Éléments* d'Euclide, d'autres traditions, notamment celle de la géométrie pratique, mois spéculative et davantage liée à la mesure, descendant principalement de la culture des agrimenseurs (Moyon, 2017 ; Raynaud, 2015). Durant notre période d'étude, les liens entre ces deux versants de la géométrie restent à élucider, et en particulier leur opposition traditionnellement supposée [36], dans le cadre de contextes d'enseignement très différents. En première analyse, le primaire peut apparaître comme puisant davantage dans les aspects pratiques de la discipline, dans un objectif essentiellement utilitaire, alors que le secondaire se rapprocherait plus d'une géométrie théorique, fondée sur la rigueur des démonstrations, poursuivant un but d'éducation au raisonnement. Là encore, ces représentations restent à discuter en les confrontant à nos sources, ainsi qu'en les étudiant à travers le prisme des nouveaux besoins de la société du XIXe siècle.

Pour l'enseignement secondaire, le mot d'ordre concernant la géométrie pourrait être résumé par cette affirmation du ministre Duruy en 1864 : « La science véritable est la théorie » (Belhoste, 1995, p. 51). Il affirme alors, au moment de la suppression de la bifurcation, le retour de la formation au raisonnement dans l'enseignement classique, renvoyant les applications vers l'enseignement spécial. Pourtant, ce point de vue ne constitue pas une évidence et un consensus historique. Durant la première moitié du siècle, un courant formé par des ingénieurs polytechniciens exprime sa préférence pour un enseignement secondaire utile, alliant la théorie et la pratique, dans la lignée des idées de Gaspard Monge [37]. Leurs idées se heurtent tout d'abord à la résistance des membres de l'Université, mais finiront par mener à la création de l'enseignement secondaire spécial (1847), puis au régime de la bifurcation entre voie littéraire et voie scientifique dans les lycées en 1852 (Belhoste, 1995, p. 41-42) (voir la section I.1.1 p. 38). D'ailleurs, en 1854, les vertus de l'alliance entre théorie et pratique sont mises en avant, puisque les instructions liées au programme de géométrie pour la section des lettres préconisent de s'appuyer « sur des démonstrations pratiques qui mettront toujours le fait et l'application à côté de la théorie » (Belhoste, 1995, p. 326). Le principe des aspects théoriques et des applications marchant de pair est confirmé un peu plus loin dans le même texte pour la section des sciences, en adossant à l'enseignement

36. L'histoire de la distinction entre géométrie théorique et géométrie pratique est retracée par Raynaud dans l'ouvrage qu'il a récemment dirigé (Raynaud, 2015, p. 9-20). De même, Moyon rappelle l'origine médiévale de la distinction entre la géométrie savante d'une part et les *Practica Geometricae* (géométrie pratique) liées à la mesure d'autre part, malgré les interactions évidentes entre ces deux traditions (Moyon, 2017, p. 15-16).

37. Gaspard Monge (1746 – 1818). Mathématicien de renom, il est le fondateur de l'École Polytechnique, dont il a été le directeur jusqu'en 1809, et dans laquelle il a enseigné l'analyse et la géométrie descriptive. Son enseignement est un mélange de science théorique pure et d'applications pratiques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

d'une géométrie centrée sur la démonstration, des « applications de la géométrie » (dessin géométrique et levé des plans), pour lesquelles :

> on s'est proposé un double but : d'une part, éclairer la théorie par des exemples empruntés à la vie réelle, et montrer à quelles conditions et dans quelles limites ses préceptes sont applicables ; d'autre part, faire acquérir aux jeunes gens certaines connaissances pratiques et un certain degré d'habileté manuelle, qui peuvent être utiles à tout le monde, et qui sont indispensables à ceux qui se destinent aux services publics. (Belhoste, 1995, p. 358)

La même philosophie anime encore les auteurs des programmes de l'enseignement spécial en 1886, sous l'impulsion du directeur de l'enseignement secondaire Charles Zévort, qui souhaite un rapprochement de cet enseignement avec les études classiques. Ce dernier présente les arguments suivants :

> Il paraît nécessaire de réclamer, au nom de l'expérience acquise, contre une tendance, trop hautement affichée peut-être, à rendre l'enseignement exclusivement pratique. Sans doute, il faut tenir compte des applications ; mais on doit se rappeler qu'appliquer, c'est mettre en œuvre les principes qui sont la science elle-même ; il ne faudrait pas oublier que la pratique seule, sans connaissances théoriques et doctrinales, tourne aisément au simple procédé et à la routine. Dans le mouvement incessant, qui est un des traits de la société moderne, la pratique doit se modifier sans cesse ; seule la théorie peut assurer ces modifications et rendre féconde la pratique elle-même. (cité dans Belhoste 1995, p. 510)

La dichotomie entre théorie et pratique devient, à travers les propos exposés, une réelle complémentarité : l'une ne va pas sans l'autre, dans le sens où la pratique fournit la motivation et l'utilité des connaissances acquises, et la théorie l'apport même de savoirs, et la rigueur nécessaire à leurs applications. Le lien qui existe entre les deux est plus ou moins fort selon les publics et les niveaux considérés. L'enseignement secondaire féminin, initié par Duruy en 1867, et finalement officiellement institué en 1882 par Camille Sée, calqué sur l'enseignement secondaire spécial, est davantage ancré dans la pratique que sur la théorie (Belhoste, 1995, p. 50). En 1866, concernant l'enseignement spécial, il est demandé de « diriger constamment l'attention des élèves sur les réalités de la vie », et plus particulièrement, l'enseignement des mathématiques en année préparatoire (préalable à la 1ère année) consiste « beaucoup plus en exercices pratiques qu'en leçons théoriques » (Belhoste, 1995, p. 415-417). De même, en 1874, pour les classes de collège, il est précisé que « Le cours de quatrième doit être essentiellement pratique : c'est de l'enseignement primaire. [...] L'enseignement théorique commence en troisième » (Belhoste, 1995, p. 452). Le curseur est donc davantage du côté de la

Licence CC BY-NC-ND 3.0

pratique pour certains élèves dépendant de l'enseignement secondaire : les jeunes filles, les élèves de l'enseignement spécial et/ou les élèves de niveau inférieur.

Dans l'enseignement primaire, la question n'est pas de choisir entre la théorie et la pratique en géométrie, mais plutôt de savoir dans quel ordre aborder ces deux facettes de la discipline. Même si en 1874, le rapport d'une commission relatant des travaux réalisés en conférence pédagogique fait apparaître l'opinion selon laquelle, pour les apprentissages dans le primaire, « la pratique doit précéder la théorie » (D'Enfert, 2003c, p. 168), tout le monde n'est pas unanime sur cet ordre. Lors des discussions qui ont précédé l'établissement de la loi Guizot en 1833, il a par exemple été question de positionner les applications de la géométrie en amont de ses aspects théoriques, avant de finalement trancher en faveur d'un texte plaçant les « éléments de géométrie » comme préalables au dessin linéaire et à l'arpentage, qui les mettent en application (D'Enfert, 2003c, p. 67). Ce point de vue semble partagé par les praticiens de l'enseignement primaire, comme en témoignent des rapports d'activité d'écoles normales ou primaires supérieures. L'enseignant de géométrie de l'EN de Bar-le-Duc indique en effet réunir un « corps de doctrine » nécessaire aux applications ultérieures de la géométrie au dessin et à la mesure des terrains, et se situe ainsi dans la lignée de l'inspecteur du Calvados, qui préconise pour sa part que dans les EPS, « à la suite de la géométrie, viennent les applications » (D'Enfert, 2003c, p. 83, 85). En revanche, un rapport concernant une EPS de Paris en 1840 conseille de se limiter à la géométrie pratique en 1ère année, notamment à travers le système métrique appliqué aux calculs de surfaces, et de n'aborder la théorie que l'année suivante (D'Enfert, 2003c, p. 108). C'est également ce que prévoit le plan d'études primaires de 1882, qui préconise d'étudier au Cours Supérieur (deux dernières années de l'école primaire) des « notions sommaires sur la géométrie plane », abordant ainsi un peu de théorie après avoir travaillé sur les figures et les mesures lors des années précédentes (D'Enfert, 2003c, p. 214).

La question de l'ordre n'est bien sûr pas sans lien avec celle des objectifs poursuivis, ce qui transparaît dans l'argumentaire des différents interlocuteurs de ce débat. Dans le bilan dressé en 1838 sur les écoles normales par Ambroise Rendu, alors inspecteur général, ce dernier souligne que pour l'enseignement de la géométrie, « dans certains départements, on a parfaitement senti la nécessité d'éclairer la théorie par la pratique » (D'Enfert, 2003c, p. 95). Les applications viennent donc bien motiver les apprentissages théoriques et leur donner un sens concret, de même que la théorie demeure nécessaire aux pratiques du dessin ou de l'arpentage. Il faut néanmoins bien savoir où placer le curseur, et choisir les connaissances strictement nécessaires pour les objectifs que l'on se fixe. Les instructions pour la réorganisation des ENP en 1881 précisent en ce sens qu'il faut « borner l'enseignement théorique aux principes et théorèmes qui sont

Licence CC BY-NC-ND 3.0

nécessaires pour établir l'enchaînement des propositions géométriques et pour donner une vue nette de l'ensemble de cette science », afin de pouvoir ensuite mener les applications requises par les programmes (D'Enfert, 2003c, p. 207). Il semble donc pertinent d'allier les aspects théoriques et pratiques de la géométrie, en accentuant ce qui apparaît comme le plus utile. Duruy l'exprime dans des instructions adressées aux recteurs en 1866, leur conseillant, pour enseigner les éléments de géométrie dans les ENP, de ne pas s'arrêter « aux difficultés de théorie ; mais [d'insister] sur les applications pratiques » (D'Enfert, 2003c, p. 148). À la fin du siècle, une évolution sensible apparaît à travers les propos que tient Vintéjoux lors d'une conférence sur l'enseignement primaire, reportés dans la *Revue pédagogique* en 1887. Il y fait l'apologie d'une géométrie qui « fortifie le raisonnement » et qui favorise « l'effort intellectuel », montrant ainsi une ambition différente de celle d'un enseignement de la géométrie strictement utilitaire (D'Enfert, 2003c, p. 241-243).

L'étude des articles « Géométrie » des différentes éditions du *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson par Assude et Gispert, souligne les enjeux éducatifs, utilitaires ou théoriques [38], de l'apprentissage de cette discipline, et leur évolution au cours du temps. À la fin du siècle, dans les années 1880, l'article écrit par Leyssenne se fait l'écho de la pensée de son époque pour l'enseignement de la géométrie : ancré dans le réel, avec pour moteur le recours aux sens et l'intuition, il doit se présenter sous la forme de « leçons de choses » dans le primaire [39], et évoluer vers davantage de raisonnement et de rigueur, se transformant en « une école de logique et de bon sens » dans les EPS et ENP. Les ambitions que partage alors cet enseignement avec le secondaire sont nuancées en excluant néanmoins les questions théoriques pures qui ne donnent pas lieu à des applications directes et immédiates. Ce caractère « pratique formateur » de l'enseignement de la géométrie, qui s'appuie sur « la valeur formatrice du concret » a en particulier pour vocation de répondre aux enjeux de la formation des futur(e)s

38. Dans leur étude, les auteures montrent qu'une opposition utilitaire/éducatif a cours dans les articles de l'époque. Nous avons fait le choix de ne pas conserver cette dichotomie entre les termes dans nos propos, préférant parler d'objectifs éducatifs, déclinés ensuite en finalités théoriques ou utilitaires. En effet, nous souhaitons mettre en avant les aspects éducatifs de toutes les pratiques mathématiques, qu'elles visent la formation au raisonnement ou des applications concrètes. Assude et Gispert vont dans le même sens en relayant la pensée de Carlo Bourlet, rédacteur de l'article portant sur l'arithmétique dans la version du *Dictionnaire de pédagogie* de 1911 : « En d'autres termes, cet enseignement [de l'arithmétique] doit être à la fois utilitaire et éducatif. On a trop souvent le tort de croire que ces deux tendances sont contradictoires et de n'accorder de valeur éducative qu'aux études abstraites ne donnant lieu à aucune application pratique réelle. C'est une grave erreur » (cité dans Assude et Gispert 2015, p. 186).

39. Ces idées sont défendues également par la pédagogue et inspectrice des salles d'asile (ancienne dénomination des écoles maternelles) Marie Pape-Carpantier, pour aborder la géométrie dans les classes très élémentaires ou les salles d'asile.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

institutrices et instituteurs, en plus de préparer les élèves aux diverses opérations utiles dans leur quotidien (Assude et Gispert, 2015) [40].

Les contenus des programmes relatifs à la géométrie des aires s'inscrivent sans conteste dans ce tableau, puisqu'ils relient les aspects théoriques de la structure des raisonnements sur les aires de la géométrie euclidienne au caractère pratique des questions de mesurage des surfaces, nécessités par les besoins de la société dans divers domaines. En effet, dès le début du siècle, l'arpentage figure au programme de l'enseignement secondaire et du baccalauréat ès sciences, et il y restera tout au long du siècle (Belhoste, 1995). Dans l'enseignement primaire, la connaissance de l'arpentage est requise pour l'obtention du brevet de capacité de l'instruction primaire depuis 1816, et il entre dans les matières d'enseignement prévues par la loi Guizot en 1833 pour les écoles primaires supérieures (D'Enfert, 2003c). Comme pour l'enseignement secondaire, sa présence dans les programmes perdurera tout le long du siècle. L'apprentissage de l'arpentage n'a donc pas qu'une fonction éducative, consistant à proposer un cadre pratique d'application de la géométrie, il a aussi un objectif social. Une tradition ancienne veut que, dans les campagnes, l'instituteur exerce aussi une activité d'arpenteur. Ce rôle conforte sa position sociale dans sa communauté, en lui donnant une autre utilité que celle d'enseigner tout en lui apportant un complément de revenu non négligeable (D'Enfert, 2003c ; Garlopeau, 2006). Dans les arts et l'industrie en plein développement, les besoins en géométrie, et notamment en géométrie des aires [41] se font ressentir, nécessitant la formation de praticiens à la fois habiles et éclairés. L'élite de ces futurs professionnels est pour la plupart formée dans des écoles spécialisées, comme l'Académie Royale d'Architecture, l'École Royale des Ponts et Chaussées, l'École navale ou encore l'École centrale des arts et manufactures, dans lesquelles des cours de géométrie leur sont dispensés. Mais d'autres voies sont discutées pour enseigner cette discipline, parmi les autres sciences utiles, à des professionnels de catégories sociales plus populaires, et aboutissent à la création de plusieurs cours ouvriers en France, que ces derniers peuvent suivre après leur journée de travail. Initiés par Dupin à Paris et par Poncelet [42] et Bergery (voir notice biographique en annexe

40. Dans la version suivante du *Dictionnaire* de 1911, Bourlet revient aux objectifs utilitaires de l'enseignement de la géométrie dans le primaire, en abordant un virage vers la nature expérimentale de cette science, à mettre en avant dans les méthodes d'apprentissage, tout en ne perdant pas de vue la rigueur attendue.

41. Ces besoins touchent par exemple les inspecteurs du cadastre pour les estimations des terrains, les employés des ponts et chaussées pour les calculs des surfaces de talus, des déblais et des remblais, l'industrie du bois « pour mesurer les bois carrés ou les bois en grumes » (Dolivet, 1859), ou encore « le plâtrier, le maçon, le tailleur de pierres, le charpentier, le menuisier » (Mouquet, 1866).

42. Jean-Victor Poncelet (1788 – 1867). Mathématicien et ingénieur polytechnicien français, il se distingue en particulier pour ses travaux en géométrie projective. Originaire de Metz, il mène une carrière militaire en parallèle de ses fonctions d'enseignement, à la faculté des sciences de Paris, puis à l'École Polytechnique, dont il sera le commandant durant les années 1848-50.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

p. 678) à Metz, ces cours se développent dans plusieurs villes françaises durant les premières décennies du siècle (Dupin, 1828, p. 393-405 ; Vatin, 2014). Dupin précise ses intentions en préambule de son ouvrage de géométrie en promettant à son auditoire :

> Si vous étudiez l'application de la géométrie et de la méchanique [*sic*] à vos arts, à vos métiers, vous trouverez dans cette étude un moyen de travailler avec plus de régularité, de précision, d'intelligence, de facilité et de rapidité. Vous ferez mieux et plus vite ; vous apprendrez à raisonner vos travaux et vos inventions. (Dupin, 1828, p. vi)

Il n'est donc pas seulement question de devenir plus efficace ou plus précis, mais également de mieux réfléchir. Ces contextes d'enseignement, différents dans leur forme de ceux entrant dans le cadre strictement scolaire, ont vu également se développer un apprentissage spécifique de la géométrie des aires, aux caractéristiques manifestement liées aux objectifs d'application pratique poursuivis dans les différents échelons du monde professionnel, mais ne laissant pas pour autant de côté des ambitions plus théoriques.

Apprendre la géométrie présente donc le double intérêt de se former au raisonnement tout en acquérant des connaissances utiles et directement applicables dans certains contextes. La géométrie des aires et son enseignement s'inscrivent dans ces deux objectifs éducatifs, utilitaires et théoriques, et ce quelque soit le contexte considéré, primaire ou secondaire, dans le cadre scolaire ou hors de l'école. Dans certaines structures et à certains niveaux, la balance penche davantage du côté de la théorie ou au contraire de la pratique, mais une forme de consensus apparaît dans tous les cas sur la richesse des interactions entre ces deux versants de la discipline. La géométrie des aires se trouve ainsi au carrefour d'enjeux qui se complètent plus qu'ils ne s'opposent, à l'interface des enjeux utilitaires et théoriques de son enseignement (voir schéma I.16 p. 112).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

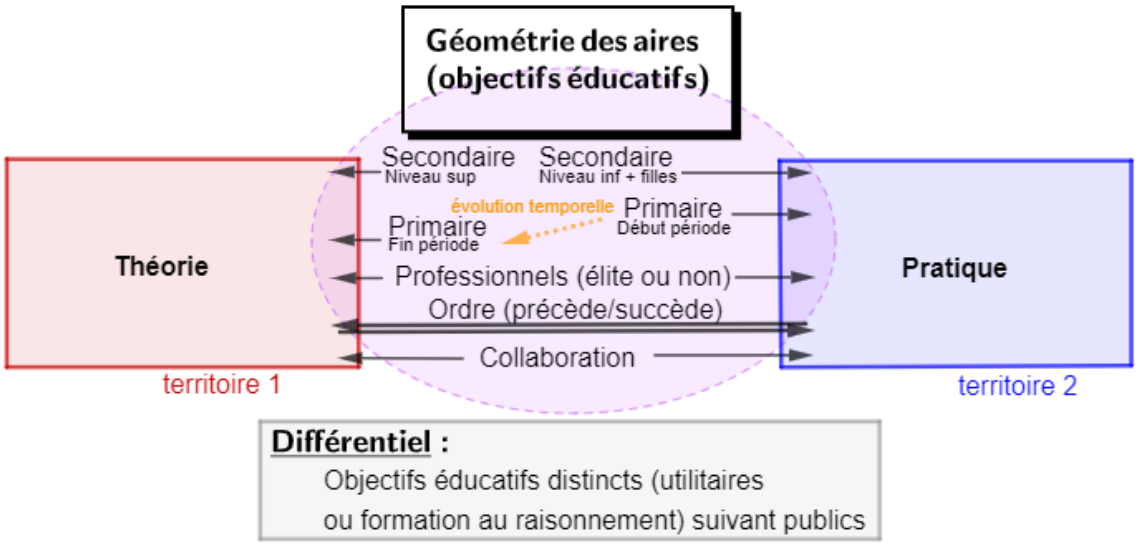


FIGURE I.16 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des objectifs pédagogiques, utilitaires ou théoriques, suivant les publics concernés

I.3.1.3 Entre méthode synthétique et analytique, la modernité de la géométrie en question

Au début du XIXe siècle, après une longue période consacrée en grande partie au développement des méthodes analytiques initiées par Descartes, la géométrie suit de nouvelles orientations. L'essor de la géométrie descriptive, puis de la géométrie projective, développées par Monge et Poncelet, marque un retour à une approche synthétique, pendant qu'en ce qui concerne la géométrie des courbes (ou différentielle), les mathématiciens s'emploient à intégrer et à exploiter les avancées de l'analyse infinitésimale (Boyé, 1998 ; Lorenat, 2019). Michel Chasles [43] dans un discours inaugurant son nouveau « Cours de Géométrie Supérieure » en 1846, récapitule les avancées de cette discipline depuis l'Antiquité grecque, et distingue la « géométrie des propriétés des figures », dans le sillage de ce qu'il nomme l'« analyse géométrique des Anciens » (parmi lesquels il cite Pappus), de la « géométrie des mesures », qui s'occupe de « la longueur des lignes, de l'étendue des surfaces, des volumes des corps ». Il estime que cette dernière se doit d'utiliser des méthodes infinitésimales, afin d'éviter le risque de « rétrograder » en revenant aux techniques des Anciens. Quant à la « géométrie des figures », elle forme la base de sa « Géométrie supérieure », ainsi que le socle sur lequel repose la géométrie de la mesure, qui « ne saurait procéder seule » (Chasles, 1847, p. 10-12).

43. Michel Chasles (1793 – 1880). Mathématicien célèbre pour ses travaux en géométrie, notamment projective, il enseigne à l'École Polytechnique, dont il est diplômé, avant d'occuper la chaire de géométrie supérieure créée pour lui en 1846 à la faculté des sciences de Paris.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les discussions autour de ce que doit être une géométrie « moderne » (Lorenat, 2019) au début du siècle s'accompagnent de nombreux débats au sujet de l'enseignement de la discipline, notamment pour l'ordre secondaire. Une question majeure est alors celle de l'introduction des méthodes infinitésimales en géométrie élémentaire. En effet, à l'École Polytechnique, la méthode dite « des infiniment petits » est prescrite en 1817 sous l'impulsion de Siméon Poisson[44] et Gaspard de Prony[45], tous deux enseignants et membres du Conseil de perfectionnement de l'école, pour la rectification et la quadrature des courbes et des surfaces (Renaud, 2017). Cette initiative est suivie, quelques décennies plus tard, d'une même préconisation officielle dans les programmes des conférences préparatoires de mathématiques proposées en classe de 3ème des collèges en 1837-1838, adoptée en 1841 (Belhoste, 1995, p. 147-152, 169-173). La personne à la manœuvre de cette nouveauté est Poisson, membre de la commission en charge de cette mission, et déjà à l'origine de la même initiative à Polytechnique. La méthode semble avoir fait ses preuves, puisque Pierre Finck[46] affirme dans une lettre à Coriolis en 1843 qu'il a « introduit les infiniment petits rigoureux dans l'enseignement de la géométrie » et qu'à la suite, le Conseil royal les a prescrits « pour la mesure des surfaces et des volumes dans nos Collèges » (Renaud, 2017, p. 231-323). Finck fait alors référence à sa *Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment petits*, publiée en 1838, en introduction de laquelle il précise :

> Déjà, dans le manuscrit de cet ouvrage, présenté à Son Excellence le ministre de l'instruction publique en 1835, l'auteur [Finck lui-même] avait adopté cette méthode qui, du reste, lui sert de base dans l'enseignement de la géométrie depuis plus de quinze ans. Il n'a donc pu qu'applaudir à un arrêté récent par lequel Son Excellence a décidé que dorénavant, dans les collèges royaux, la méthode des infiniment petits doit être employée exclusivement. (Finck, 1838, p. i-ii)

Pendant que certains se félicitent de cette nouveauté, d'autant quand elle est en accord avec des pratiques d'enseignement déjà existantes, d'autres n'adhèrent pas à ce projet pour la géométrie élémentaire apprise avant le baccalauréat. C'est le cas de Louis

44. Siméon Denis Poisson (1781 – 1840). Mathématicien et physicien français, ses travaux ont contribué à un très grand nombre de domaines scientifiques. Polytechnicien, il enseigne la mécanique rationnelle à la faculté sciences de Paris, avant de devenir examinateur des élèves de l'artillerie puis de l'École militaire de Saint-Cyr. Il remplace Laplace comme géomètre au bureau des longitudes en 1827.

45. Gaspard (Riche) de Prony (1755 – 1839). Ingénieur diplômé de l'École des ponts et chaussées (qu'il dirigera de 1798 à 1839), Prony devient directeur du cadastre en 1791 et s'implique dans la confection de tables logarithmiques, puis dans la création de l'École Polytechnique. Il y enseigne puis en devient examinateur permanent.

46. Pierre (Joseph Étienne) Finck (1797 – 1870). Mathématicien et polytechnicien français, il exerce comme répétiteur puis professeur de mathématiques à l'École d'artillerie de Strasbourg. À partir de 1829 il enseigne également en classe de mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg, avant d'être nommé professeur suppléant d'astronomie à la Faculté des sciences de Strasbourg en 1842.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lefébure de Fourcy, alors successeur de Lacroix à la chaire de calcul différentiel et intégral de la faculté des sciences de Paris, qui dans une réponse à une lettre de Finck [47], indique, à propos de l'usage de la méthode des infiniment petits :

> Dans votre lettre, Monsieur et cher confrère, vous me faites l'honneur, pour justifier certaines définitions de géométrie, de me rappeler que je m'en suis moi-même servi dans mes leçons de géométrie analytique. Sur ce point je vous dois des remerciements : car j'avoue que je n'aurais point osé, de ma seule autorité, les faire descendre dans la Géométrie élémentaire, à laquelle tous les auteurs se sont toujours fait un devoir de conserver une grande simplicité. (Finck et Lefebure de Fourcy, 1845)

Malgré les textes officiels en vigueur, que ne manque pas de lui rappeler Finck [48], l'usage des infiniment petits en géométrie devrait donc pour Lefébure de Fourcy se restreindre au domaine de la géométrie analytique, mais demeure trop complexe pour trouver sa place dans les cours de géométrie élémentaire. Cette opinion semble partagée par d'autres enseignants et auteurs d'ouvrages, comme G. Faure, chef d'institution [49], qui dans son *Mémoire sur la réforme de l'enseignement de la géométrie* présenté au Conseil royal et à l'Académie des sciences en 1845, estime :

> Quant à la méthode des infiniment petits, si elle n'a pas les inconvénients de la méthode par l'absurde, elle en a d'autres, non moins graves peut-être et non moins nombreux.
> Le premier, c'est d'introduire dans un livre élémentaire, qui ne devrait renfermer que des principes simples, clairs et à la portée des plus faibles intelligences, les hautes et abstraites considérations de l'infini.
> Le second, c'est de manquer de rigueur ; non-seulement de cette rigueur absolue qu'exclut la nature de cette espèce de quantités, mais encore de cette rigueur actuelle dont l'absence vicie la démonstration. (Faure, 1845, p. 9)

Dix ans plus tard, néanmoins, Urbain Le Verrier [50] rédige les « instructions pour la mise à exécution du plan d'études des lycées » pour les mathématiques, sous le

47. L'objet de cette correspondance, publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* est un différend qui oppose les deux personnages au sujet de propos injurieux qu'aurait tenu Lefébure de Fourcy sur l'enseignement mathématique dispensé par Finck au Collège royal de Strasbourg, lors de sessions d'examens dont Lefébure était l'examinateur.

48. Il est d'ailleurs soutenu par Terquem lui-même, rédacteur en chef des *Nouvelles Annales*, qui dans une longue note suivant un de ses articles, rappelle que D'Alembert proposait déjà, dans l'*Encyclopédie*, d'introduire le calcul différentiel dans les éléments, et propose lui aussi d'entremêler l'enseignement de la géométrie avec les principes de ce calcul (Renaud, 2017, p. 271).

49. Il est également l'auteur d'*Éléments de géométrie* publiés en 1844 (Faure, 1844).

50. Urbain Le Verrier (1811 – 1877). Mathématicien et astronome français, il particulièrement reconnu pour ses travaux en astronomie (François et al., 2018 ; Lallemant et Fourmaux, 2024).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ministère de Fortoul, et se félicite des effets de « l'emploi de la méthode des limites », « véritable progrès pour l'esprit de l'enseignement » (Belhoste, 1995, p. 340). Il regrette cependant que les préconisations des initiateurs (Prony et Poisson) de cette réforme aient été mal comprises, et qu'en « ne l'appliquant pas *franchement* », les auteurs d'ouvrages de géométrie aient « enlevé à la méthode des limites tous ses avantages de simplicité » (Belhoste, 1995, p. 340).

Dans la première moitié du siècle, la question de l'introduction des méthodes infinitésimales en géométrie élémentaire secoue donc la communauté scientifique et éducative, et concerne tout particulièrement la géométrie des aires à travers le cas de la mesure des figures curvilignes (longueur et aire des cercles, portions de coniques, courbes quelconques). En effet, ces questions, lorsqu'elles sont traitées par les méthodes de la géométrie classique, sont complexes et nécessitent des preuves sophistiquées reposant sur des raisonnements par l'absurde, longs et peu accessibles pour des élèves débutants. C'est donc explicitement pour ces résultats que l'emploi de la méthode des infiniment petits est discuté. Le problème est d'autant plus délicat que les programmes de l'enseignement au collège et au lycée, et également plus tardivement des écoles primaires supérieures, comportent des parties sur les « courbes usuelles » sans que l'« application de l'algèbre à la géométrie » ne soit enseignée (Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003c). Les procédés de la géométrie élémentaire classique trouvent alors leurs limites pour enseigner des propositions sur les aires curvilignes de façon suffisamment claire et intelligible pour les élèves, tout en gardant une rigueur acceptable, selon les critères du milieu et de l'époque considérés, dans les démonstrations.

Quelques décennies après le discours d'introduction à son cours de 1846, Chasles, dans l'introduction de son *Rapport sur les progrès de la géométrie*, fait le point une nouvelle fois sur les avancées de la discipline, et estime que les deux branches des mathématiques que forment l'analyse et la géométrie ne doivent pas s'opposer mais au contraire « se prêt[er] un mutuel secours », et que le recours au « calcul analytique » a contribué « puissamment aux grands progrès de la théorie des lignes et des surfaces ». Il distingue néanmoins la « géométrie moderne », nouvellement constituée par Monge, et incarnée par son propre cours de « géométrie supérieure », de la « géométrie ancienne » ou encore « géométrie pure », à laquelle il rattache une branche spécifique qui « repose sur l'emploi de considérations infinitésimales, sans calcul », et qu'il désigne comme la « géométrie infinitésimale ». Au sujet de cette dernière, Chasles regrette qu'elle soit « privée du secours d'un enseignement, c'est-à-dire d'une chaire qui serait si utile à ses progrès » (Chasles, 1870, p. 5, 375-376). Ce discours est proche de celui de Rouché et Comberousse, qui retracent, dans la longue préface de leur *Traité de géométrie élémentaire*, l'histoire de la géométrie des Anciens à Monge, et regrettent

Licence CC BY-NC-ND 3.0

que « les magnifiques découvertes de la Géométrie moderne n'[aient] pas pénétré dans l'enseignement » (Rouché et Comberousse, 1866, p. xiii).

Et en effet, dans les manuels de géométrie du XIXe siècle, les intentions des auteurs s'affichent parfois sous l'étendard de cette modernité, ou tout au moins en lien avec les dernières découvertes en la matière. Dans son chapitre « "Je n'ai point ambitionné d'être neuf" », Lorenat met en lumière les auteurs du début du siècle qui incorporent des concepts de géométrie moderne, au sens du mouvement initié par Monge, dans leurs ouvrages d'enseignement (Lorenat, 2019). Mais par ailleurs, bon nombre de manuels affichent une forme de nouveauté directement dans leurs titres, et beaucoup de *Nouveaux éléments* (Idoux, 1842), de *Nouvelle[s] géométrie[s]* (Sonnet, 1839), ou encore de *Leçons nouvelles* (Amiot, 1850) fleurissent au fil du siècle. Le *Traité* de Rouché et Comberousse s'inscrit dans le sillage de la modernité, affichée non pas dans le titre, mais en sous-titre : « renfermant [...] plusieurs appendices consacrés à l'exposition des principales méthodes de la géométrie moderne » (Rouché et Comberousse, 1866). L'appendice du livre III, en particulier, expose les « nouvelles doctrines » sur les pôles, polaires, transversales, en « préparation à la Géométrie supérieure de M. Chasles » (Rouché et Comberousse, 1866, p. xv). Il s'agit donc bien de présenter des contenus mathématiques novateurs. Dans leur préface, Rouché et Comberousse relient leur préoccupation d'exposer des connaissances nouvelles aux contraintes qu'ils doivent aux instructions officielles. Ils expliquent que :

> Il y a aujourd'hui deux manières d'écrire un livre destiné aux études : on peut se restreindre aux Programmes officiels et n'en pas franchir le cadre ; on peut aussi, en suivant strictement ces Programmes dans ce qu'ils ont d'obligatoire, aller au delà et essayer de les compléter (Rouché et Comberousse, 1866, p. xiii)

En outre, ils se demandent pourquoi les élèves ne pourraient pas « apprendre un programme d'examen et essayer en même temps de comprendre la portée de la science [qu'ils] étudie[nt] » (Rouché et Comberousse, 1866, p. xiii).

Les représentations de ce qu'est et doit être la géométrie au XIXe siècle varient d'une personne à une autre, mais la préoccupation de distinguer ou au contraire de relier les diverses branches de cette discipline est manifeste chez beaucoup d'entre eux. Les méthodes synthétiques et analytiques ne sont plus perçues en simple opposition mais apparaissent progressivement comme complémentaires, y compris en y incluant les méthodes infinitésimales. La modernité de la géométrie s'exprime dans de nouveaux courants, qui irriguent progressivement les manuels d'enseignement, certains de leurs auteurs envisageant clairement d'exposer ses théories nouvelles

Licence CC BY-NC-ND 3.0

au-delà des préconisations officielles. La géométrie des aires, et son traitement dans les manuels, se trouvent impactés par ces évolutions, notamment par l'acceptation progressive du calcul infinitésimal en géométrie élémentaire. La géométrie des aires se situe ainsi à l'interface des méthodes synthétiques et analytiques en géométrie, comme le résume le schéma I.17 p. 117.

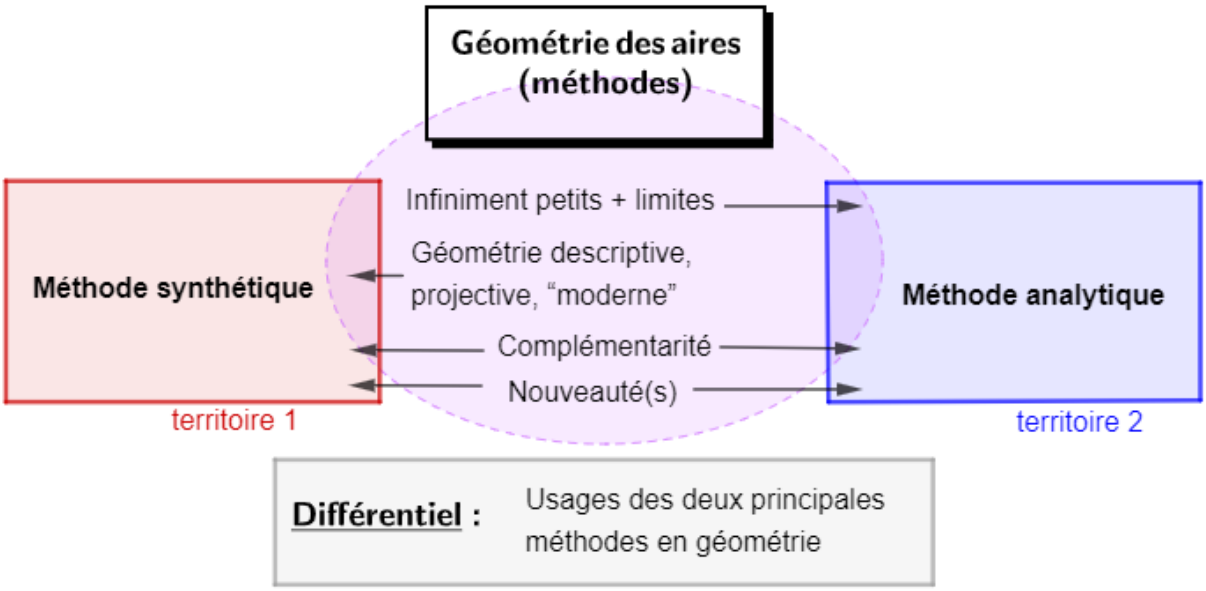


FIGURE I.17 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des méthodes géométriques, analytique et synthétique

I.3.1.4 Émergence de nouvelles méthodes d'enseignement de la géométrie

Dans les années 1850, les deux ordres, primaire et secondaire, sont traversés par de nouvelles conceptions pédagogiques, dont les textes officiels se font l'écho. Deux ans après le nouveau plan d'études des lycées de 1852, les instructions relatives à son application, rédigées par Le Verrier pour les mathématiques, préconisent l'utilité, la simplicité et le caractère pratique des apprentissages. Le recours à la méthode inductive, même s'il n'est pas explicite, apparaît néanmoins à travers la recommandation de marcher « du concret vers l'abstrait » pour l'enseignement scientifique en section des lettres. En géométrie, cela se traduit par la réalisation de constructions et de mesures des figures, sur la base desquelles le professeur pourra envisager de « communiquer l'usage et l'intelligence réelle des théorèmes » (Belhoste, 1995, p. 44, 326). Pour la section des sciences, la géométrie se doit d'être enseignée suivant la pensée de Clairaut, c'est-à-dire à partir d'une entrée par des problèmes pratiques, permettant d'éviter que « les commençants se fatiguent et se rebutent avant d'avoir une idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner » (Belhoste, 1995, p. 336). Cette tendance, nouvelle en France, fait rupture avec l'influence durable d'Euclide *via* le traité de Legendre (voir la

Licence CC BY-NC-ND 3.0

section I.3.1.1 p. 103). Elle s'inscrit dans les conceptions alors en cours depuis la fin des années 1820 aux États-Unis, où James Hayward, un des professeurs de mathématiques à Harvard, publie en 1829 ses *Elements of Geometry upon the Inductive Method* en s'inspirant notamment des travaux de Clairaut (Preveraud, 2017, p. 189).

À la même période, Jean-Jacques Rapet, alors inspecteur primaire, rédige un article dans le *Bulletin de l'instruction primaire* dans lequel il présente sa vision de « la direction à donner par les instituteurs à leur enseignement ». S'inscrivant dans le sillage de la pensée du pédagogue suisse le père Girard, dont il est le disciple, il préconise un enseignement des mathématiques ancré dans le réel, et propose d'aborder les notions de géométrie « sans sortir du programme de l'enseignement élémentaire » à l'occasion de l'apprentissage du système métrique. Pour lui, cet enseignement doit se faire :

> de la manière la plus agréable pour les élèves, en présence des objets auxquels elle [la géométrie] s'applique, et en satisfaisant le besoin d'activité [...] qui est un des caractères distinctifs de l'enfance. (cité dans D'Enfert 2003c, p. 140)

Il s'agit bien là d'une méthode active qui concerne directement la géométrie des aires et qui se base sur l'expérience des élèves, puisque ces derniers sont amenés, en plus des opérations de mesurage opérées à l'aide d'instruments, « à apprécier avec la main le poids des objets et leur volume ; à évaluer à la vue la longueur, la largeur, la hauteur, la profondeur des objets, à en estimer l'étendue et la surface » (D'Enfert, 2003c, p. 137-140). Durant les décennies 1850 et 1860, les idées relatives à une pédagogie de type actif, axée sur l'observation et des manipulations d'objets ou de matériels conçus pour les apprentissages, se développent, incarnées en particulier par le personnage de Pape-Carpantier (voir la note 39 p. 109) et son travail relatif aux salles d'asile (publications, conférences, confection de matériel pédagogique) (D'Enfert, 2003c, p. 36 ; Decayeux-Cuvillier, 2019, p. 91 ; Dubois, 2002e, p. 112). Les rapports d'inspection de l'époque témoignent de la volonté de diffuser ces pratiques, puisqu'on y trouve, en 1869 dans l'académie de Caen, des conseils aux instituteurs permettant de mieux préparer leurs élèves à « acquérir la faculté d'évaluation intuitive assez exacte des longueurs, des surfaces, des volumes, des poids » (D'Enfert, 2003c, p. 161).

À l'aube des années 1880, les acteurs politiques de la IIIe République poursuivent dans cette voie, et notamment Buisson, qui expose en 1878 alors qu'il est inspecteur de l'enseignement primaire, dans une conférence faite à la Sorbonne à destination des instituteurs, sa vision de l'intuition et de la méthode intuitive en pédagogie (Buisson, 1878). Cette conférence fait date et sert de guide aux acteurs de l'éducation de l'époque, notamment aux auteurs de manuels de géométrie, comme Gaspard Bovier-Lapierre

Licence CC BY-NC-ND 3.0

(voir sa notice biographique en annexe p. 678), qui le cite abondamment dans la préface de sa *Géométrie élémentaire* parue l'année suivante (Bovier-Lapierre, 1879, p. 5-6). Pourtant, comme le rappelle Decayeux-Cuvilliers [51], Buisson n'est pas l'inventeur de la méthode intuitive, il la doit aux travaux de ses prédecesseurs, proches ou plus lointains, comme Coménius, Rousseau, Pestalozzi [52] ou encore Pape-Carpantier. Ses idées s'incarnent néanmoins dans le plan d'études de 1882 pour les écoles primaires publiques, dans lequel l'enseignement doit explicitement s'avérer « intuitif et pratique ». La définition en est même donnée dans le texte, comme pour ne laisser place à aucune mauvaise interprétation :

> C'est-à-dire qu'il compte avant tout sur le bon sens naturel, sur la force de l'évidence, sur cette puissance innée qu'a l'esprit humain de saisir du premier regard et sans démonstration non pas toutes les vérités mais les vérités les plus simples et les plus fondamentales. (D'Enfert, 2003c, p. 217-218)

Cette définition est proche de celle donnée lors de sa conférence, et reprise dans l'introduction de Bovier-Lapierre : « L'intuition, c'est l'acte le plus naturel et le plus spontané de l'intelligence humaine, celui par lequel l'esprit saisit une réalité, sans effort, sans intermédiaire, sans hésitation. C'est une "perception immédiate", qui se fait d'un seul coup d'œil en quelque sorte ». Déclinée en trois catégories, l'intuition « sensible », « mentale » ou encore « morale », cette aptitude sert par conséquent de base à la « méthode intuitive » en pédagogie, qui « fait appel à cette force *sui generis*, à ce coup d'œil de l'esprit, à cet élan spontané de l'intelligence vers la vérité ». Plus concrètement, « elle consiste non dans l'application de tel ou tel procédé, mais dans l'intention et dans l'habitude générale de faire agir, de laisser agir l'esprit de l'enfant en conformité avec ce que nous appelions tout à l'heure les instincts intellectuels » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 5-6) [53]. S'inscrivant dans le cadre des procédés pédagogiques actifs, cette démarche n'est pas non plus sans lien avec la méthode inductive dont il a été question précédemment, puisque le texte officiel de 1882 préconise en outre que :

> Le maître part[e] toujours de ce que les enfants savent, et, procédant du connu à l'inconnu, du facile au difficile, il les condui[se] [...] à découvrir les conséquences d'un principe, les applications d'une règle, ou inversement les principes et les règles qu'ils ont déjà inconsciemment appliqués. (D'Enfert, 2003c, p. 217).

51. Elle s'appuie elle-même sur les travaux de Loeffel pour retracer l'histoire de la méthode intuitive en géométrie (Decayeux-Cuvillier, 2019, p. 90-91).

52. D'Enfert souligne l'influence du pédagogue suisse sur les directions à suivre pour l'enseignement de la géométrie, qui se manifeste à plusieurs reprises : en 1855 à travers l'article de Rapet (voir p. 118), et en 1882 lors de l'instauration du nouveau plan d'études des écoles publiques (D'Enfert, 2003c, p. 137-138).

53. Les idées de Buisson à propos de l'intuition et de la méthode intuitive seront développées dans l'article « Intuition et méthode intuitive » de son *Dictionnaire de pédagogie*. Il y désigne cette méthode comme « la méthode même de l'enseignement populaire » (Buisson, 1882).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ces principes vont trouver leur application au sein de l'enseignement de la géométrie, car comme le souligne Bovier-Lapierre dans son introduction « y a-t-il dans le domaine de l'instruction primaire un champ où cette méthode féconde puisse être employée avec plus d'intérêt et plus de succès que dans celui de la géométrie ? » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 6). Dans l'article « Géométrie » qu'il rédige pour le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, Leyssenne reprend le caractère nécessairement intuitif que doit revêtir cet apprentissage dans les classes élémentaires, qui doit « se résumer à des leçons de choses appliquées à des objets concrets ; [...] exclure le par cœur et s'appuyer sur la langue usuelle », et réserver une approche plus théorique au niveau des écoles primaires supérieures (Assude et Gispert, 2015 ; Leyssenne, 1882a). En 1887, Vintéjoux publie dans la *Revue pédagogique* une conférence sur l'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie à l'école primaire, qu'il donne devant un public composé d'instituteurs et d'institutrices. Rappelant d'abord les objectifs pratiques de ces enseignements, et notamment celui de la géométrie, qui est d'après lui d'« apprendre à mesurer une surface rectangulaire, à faire un toisé de peinture ou de menuiserie, à cuber une maçonnerie ou un déblai, à évaluer, au besoin, la superficie d'un terrain ou la contenance d'un champ », il insiste sur l'importance de suivre la méthode intuitive avec les plus jeunes, avant d'aborder les choses de manière plus théorique avec les plus grands (cité dans Décayeux-Cuvillier 2019, p. 94-95). Les vertus de la méthode intuitive, reconnues par ces auteurs, sont en effet de favoriser le raisonnement, et de ce fait de préparer les élèves à une plus grande abstraction. Les filles, originellement exclues de l'apprentissage de la géométrie, bénéficient en 1893 d'un retournement des auteurs des programmes en faveur d'un enseignement de cette discipline spécifiquement conçu pour elles. il est prévu d'axer cet enseignement sur le dessin et la mesure des grandeurs, sans se préoccuper de rechercher la rigueur, mais en faisant « appel à l'intuition toutes les fois qu'il sera possible ». Comme dans les programmes des garçons, ces préconisations rejoignent la démarche des méthodes actives et instrumentales, puisqu'il est prévu par exemple que les jeunes filles aient à évaluer des surfaces par des techniques de découpage et de pesées (D'Enfert, 2003c, p. 273-275).

La pensée liée à la méthode intuitive poursuit son chemin à la fin du siècle, provoquant de nouvelles évolutions. En 1889, Jules Dalsème, alors professeur à l'école normale d'instituteurs de la Seine (voir sa notice biographique en annexe p. 678), publie un article à propos de l'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie et se félicite à cette occasion de la portée de la méthode intuitive, qui « se propose d'agir sur les sens pour pénétrer jusqu'à l'esprit et s'adresse aux facultés intellectuelles par l'entremise d'objets matériels, d'images visibles ». Comme Leyssenne, il se montre en faveur d'une enseignement graduel de la géométrie, des écoles primaires aux cours complémentaires et

Licence CC BY-NC-ND 3.0

EPS pour finir avec les ENP, évoluant d'un enseignement « descriptif » à des apprentissages plus substantiels, s'appuyant sur le fait que « quand l'enfant a été bien préparé par l'exercice gradué de l'intuition sensible, il a une certaine puissance de jugement et même de raisonnement spontané » (Decayeux-Cuvillier, 2019, p. 97). Dalsème est par ailleurs l'auteur d'un manuel intitulé *Éléments de takymétrie (Géométrie Naturelle)* (Dalsème, 1880), inspiré d'un ouvrage de Lagout [54] (1872) dont il a adapté le travail pour des élèves d'écoles primaires [55]. La tachymétrie (ou takymétrie) représente alors un courant nouveau pour l'enseignement de la géométrie. Proche de la méthode intuitive sur certains points, comme le recours aux sens, aux manipulations d'objets, et donc à l'intuition sensible, elle en diffère néanmoins par certains aspects. Contrairement à celle mise en place par Pestalozzi, la méthode des tachymètres a vocation à être rapide à apprendre et mémorisable sans effort. Pour cela, elle s'appuie sur des illustrations, colorées en vert et rose, à la fois attrayantes et efficaces pour comprendre et retenir les notions qu'elles illustrent, ainsi que sur une « boîte à manipulation » contenant du matériel géométrique à manier. Lagout comme Dalsème n'utilisent pourtant pas l'adjectif « intuitif » pour définir leur méthode, la qualifiant en revanche de « naturelle » ou encore de « concrète » (Leme da Silva et Moyon, 2020).

Le recours aux sens, la manipulation de matériel et d'instruments, et l'observation de phénomènes font-elles de la géométrie une science « expérimentale » ? Le terme n'apparaît pas dans les textes officiels, du primaire comme du secondaire, avant le début du XXe siècle, même si sont publiés en 1886 les *Premiers éléments de géométrie expérimentale* de Paul Bert. Indiquant en sous-titre que ces éléments sont appliqués « à la mesure des longueurs, des surfaces et des volumes », Bert revendique le lien entre le caractère expérimental de sa géométrie et la question de la mesure, et en partie de celle des aires (Bert, 1886). La première décennie du XXe siècle est marquée par une convergence, dans le primaire et le secondaire, vers une conception de la géométrie comme une science expérimentale (D'Enfert, 2003c, p. 43). Dans l'enseignement secondaire, les programmes de 1905 marquent une rupture, puisqu'il y est indiqué que « l'enseignement de la géométrie doit être essentiellement concret ; il a pour but de classer et de préciser les notions acquises par l'expérience journalière, d'en déduire d'autres plus cachées et de montrer leurs applications aux problèmes qui se posent dans la pratique ». Ce texte fait suite à la conférence que Louis Liard, alors vice-recteur de l'académie de Paris, a tenue en 1904 au sujet des sciences dans l'enseignement

54. Édouard Lagout (1820 – 1885). Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, vulgarisateur du savoir technique à l'École normale primaire de Paris, cet ancien élève de l'École Polytechnique a été ingénieur en chef de la ligne de l'Adriatique. A son sujet, voir (Greber et Verdier, 2021).

55. Cette adaptation ne s'est pas faite sans critique de la part de Dalsème sur le travail de son prédécesseur, à qui il reproche de manquer de pédagogie et d'utiliser un vocabulaire trop complexe, dans lequel il utilise de nombreux néologismes (Leme da Silva et Moyon, 2020, p. 195).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

secondaire, au cours de laquelle il présente sa vision d'un enseignement des sciences ancré dans le réel, et qui

> sert à découvrir et à comprendre la vérité positive, observation, comparaison, classification, expérience, induction, déduction, analogie, d'éveiller et de développer ce sens des réalités et des possibles qui n'importe pas moins que l'esprit d'idéal. (cité dans Belhoste 1995, p. 626)

Cette inspiration positiviste est soutenue par Poincaré, Borel et Hadamard[56] dans leurs interventions au Musée pédagogique la même année, qui affirment qu'« en traitant la géométrie comme une science physique — ce qu'elle est véritablement — , on fera disparaître ce que son enseignement a présenté jusqu'ici d'artificiel et de rebutant » (Belhoste, 1995, p. 57). En 1903, Tannery, alors maître de conférences à l'École normale supérieure et membre du Conseil supérieur de l'instruction publique, expose dans la *Revue pédagogique* ses idées sur « l'enseignement de la géométrie élémentaire ». Il y vante les mérites de la pensée de Clairaut, mais aussi de la nouvelle méthode établie et expérimentée par Charles Méray (voir sa notice biographique en annexe p. 678) dans des EPS et ENP, consistant à introduire les notions géométriques par le recours au mouvement, par analogie avec des objets de la vie courante (tiroir, wagon, etc.) (D'Enfert, 2003c, p. 294-300). Enfin, Bourlet, aussi bien dans sa conférence de 1908 consacrée à l'enseignement secondaire, que dans son article « Géométrie » qu'il rédige pour le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, confirme le virage pris pour enseigner la géométrie vers des aspects plus expérimentaux et liés au mouvement. Dans le *Dictionnaire*, il écrit : « On oublie beaucoup trop souvent que la géométrie pure est une science à base expérimentale. [. . .] Toute la géométrie repose sur deux notions primordiales indéfinissables : celle d'une figure géométrique invariable et celle du mouvement » (Assude et Gispert, 2015).

Les propos de ces personnalités des mathématiques, ancrées dans l'enseignement secondaire mais s'exprimant aussi pour l'ordre primaire, montrent la convergence des conceptions des cercles scientifiques et des pédagogues de l'époque vers une géométrie en tant que science expérimentale, utilitaire autant que théorique, ancrée dans le réel, mais tendant néanmoins vers la rigueur et l'abstraction. Cette analyse montre une nouvelle fois que l'étanchéité entre les deux ordres d'enseignement est loin d'être totale, et que les nouveaux procédés pédagogiques qui se sont développés dans le primaire au cours du siècle (recours à l'intuition, à l'observation, aux manipulations, usage du mouvement, etc.), sont venus progressivement modifier la perception de

56. Henri Poincaré (1854 – 1912), Émile Borel (1871 – 1956) et Jacques (Salomon) Hadamard (1865 – 1963) sont trois mathématiciens de grande renommée, à la fois comme professeurs, respectivement à l'École Polytechnique, à la faculté des sciences de Lille et au Collège de France, que par la portée de leurs recherches mathématiques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

l'enseignement de la géométrie pour le secondaire, aboutissant aux réformes de fond de 1902 et 1905. La géométrie des aires, à travers les méthodes d'enseignement qu'elle contribue à mettre en jeu, pour le primaire comme pour le secondaire, se situe donc à l'interface de ces deux ordres d'enseignement (voir schéma I.18 p. 123).

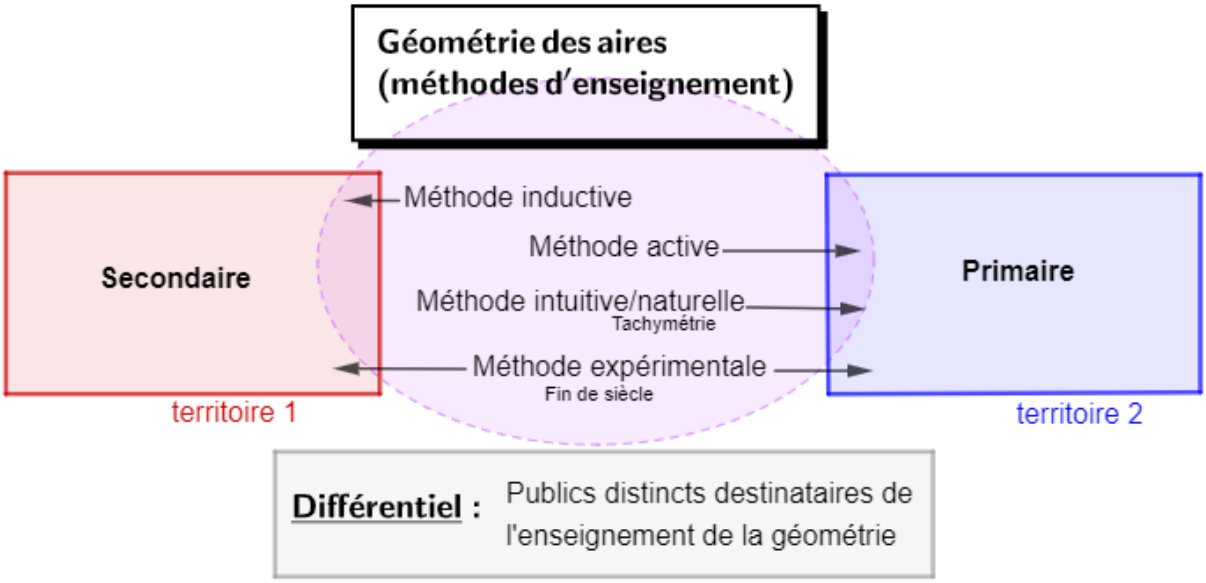


FIGURE I.18 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des méthodes d'enseignement du primaire et du secondaire

Finalement, la géométrie des aires se positionne au sein des débats sur l'enseignement de la géométrie à tous les niveaux précédemment évoqués : prenant pour référence ou non les *Éléments* d'Euclide, poursuivant des objectifs éducatifs utilitaires et/ou théoriques, en fonction des publics à qui on l'enseigne, s'inscrivant dans le cadre de la géométrie synthétique ou faisant usage des outils de la géométrie analytique, et relevant éventuellement des nouvelles méthodes d'enseignement qui émergent au cours du siècle dans les deux ordres. À cette intersection, la géométrie des aires joue un rôle d'interface, comme nous l'avons mis en évidence dans les sections précédentes. Les interactions mises en jeu entre tous les territoires concernés par les débats sur l'enseignement de la discipline, autour de notre objet d'études, sont synthétisées sur le schéma I.19 p. 124).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

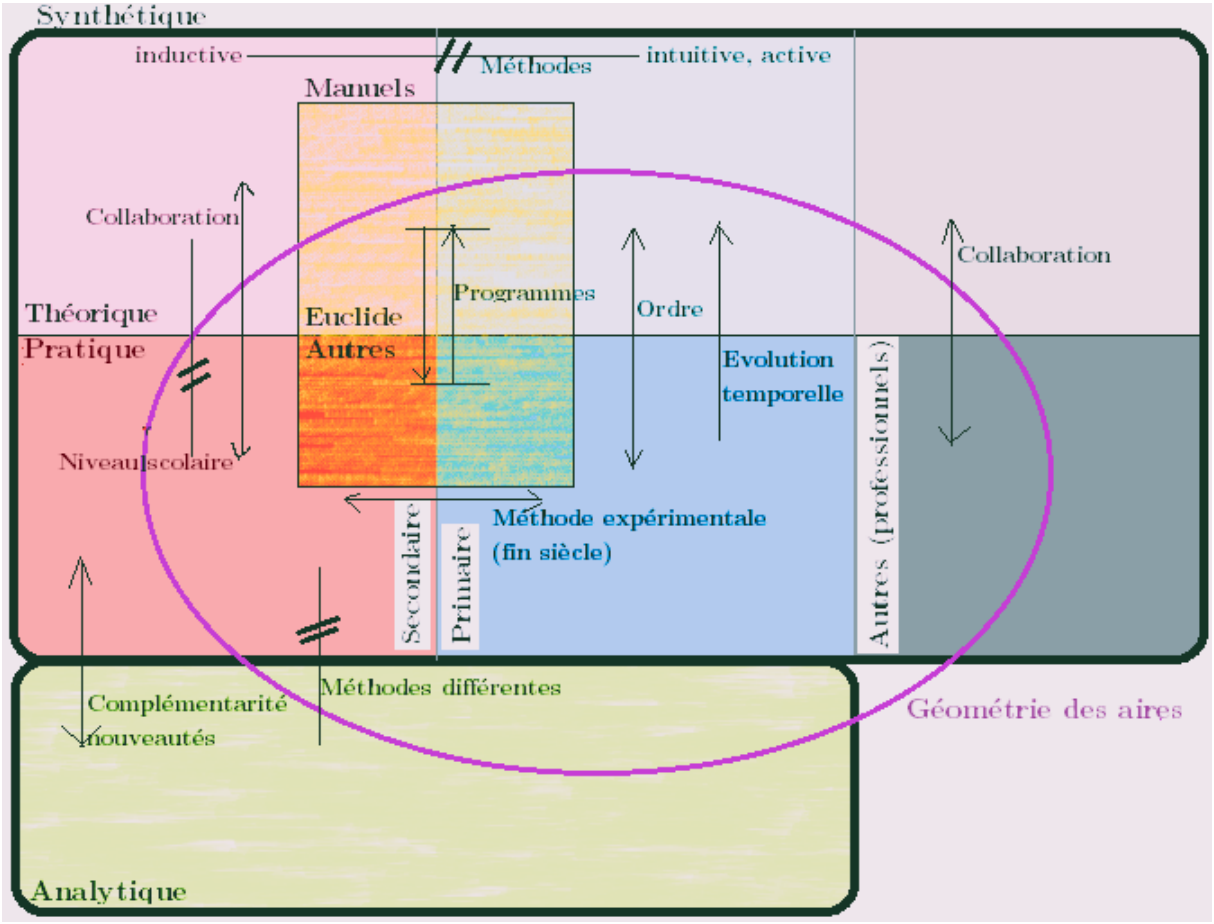


FIGURE I.19 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des territoires concernés par les débats sur l'enseignement de la géométrie au cours du siècle

I.3.2 Typologie des manuels de géométrie du XIXe siècle par leurs titres

Nous sommes désormais à même de nous demander si le panorama des débats autour de l'enseignement de la géométrie que nous avons effectué trouve ou non sa concrétisation dans les manuels produits durant cette période, au moins à travers les intentions directement affichées dans leurs titres. C'est par une analyse lexicale des titres complets, systématiquement recensés parmi les 2328 notices relatives aux manuels de géométrie, que nous nous proposons d'y répondre. Dans un premier temps, une recherche par mots-clés dans les titres vise à repérer les références à des courants décrits dans la section précédente. La partition de la géométrie que nous comptons dresser par cette méthode peut nous amener à mieux comprendre dans quelle tradition elle s'inscrit (euclidienne ou non, héritée de la géométrie spéculative ou pratique), avec quel objectifs éducatifs (utilitaires ou théoriques) et en lien ou non avec des pratiques professionnelles, en suivant quelles méthodes (analytique ou synthétique), ou

Licence CC BY-NC-ND 3.0

encore par quels procédés la faire comprendre aux commençants (méthodes intuitive, inductive, expérimentale).

La recherche des mots-clés dans les titres a été réalisée en choisissant avec soin les termes à repérer, afin qu'ils s'avèrent représentatifs des axes que nous venons de rappeler. Dans une telle démarche, des biais sont à craindre, que nous avons d'ailleurs vu apparaître au cours de l'analyse de nos données. Le premier est autour du terme « élémentaire » ou encore « élément ». Cet adjectif et ce substantif couvrent en effet aussi bien les « éléments » de géométrie que la géométrie dite « élémentaire ». Or, depuis l'Antiquité, le genre éditorial désigné d'« éléments » correspond à un exposé qui repose sur les éléments qui fondent une théorie, et dès le XVIII^e siècle, de nombreux traités portent le titre d'*Éléments* (comme celui de Clairaut par exemple), et structurent leur présentation en définitions, axiomes, propositions, théorèmes, problèmes, corollaires, etc. (Bernard, 2022). Depuis l'article « Élémens des sciences » de D'Alembert dans la *Grande Encyclopédie*, ce processus d'« élémentarisation » [57] (parfois également appelé « élémentation » [58]) de la géométrie poursuit sa marche et aborde un tournant à travers l'élaboration et la diffusion de « livres élémentaires », dont Legendre est l'un des principaux acteurs (Schubring, 2022, p. 96-124). Dans notre corpus, ce mot-clé donne donc accès aux différents « Éléments de géométrie » (261 dénombrés sur les 2328 notices) ou à ceux relevant de la « Géométrie élémentaire » (l'expression apparaît dans 195 titres parmi les 2328) produits durant la période. Dans ces deux cas, il s'agit très majoritairement d'ouvrages de géométrie synthétique au sens d'une géométrie pure, axiomatisée, fondée sur des constructions de figures à la règle et au compas dans la tradition des anciens. Mais le terme est également utilisé pour désigner un niveau d'enseignement de la géométrie, polysémie qui apparaît déjà dans l'expression « géométrie élémentaire », qui peut désigner des « éléments » au sens euclidien, mais également une géométrie enseignée à un niveau simple. Cette signification est plus claire quand il s'agit par exemple de « notions élémentaires », d'un « cours élémentaire » ou encore d'une « méthode élémentaire ». Dans un tel contexte, il nous apparaît impossible de savoir quel est le sens du mot, décliné comme substantif ou adjectif, et ce qu'il recouvre réellement pour l'auteur qui en fait usage. Cela est d'autant plus complexe que les auteurs emploient parfois le terme avec des sens différents au sein d'un même ouvrage, comme dans la *Méthode élémentaire et pratique d'arpentage* de Gillet-Damitte (1837), dans lequel l'auteur justifie la matière de son manuel (l'arpentage) par les programmes de l'« enseignement élémentaire », puis indique qu'il s'agit

57. Ce concept apparaît initialement en 1791 dans les *Cinq mémoires sur l'instruction publique* de Condorcet (Coutel, 1995).

58. Utilisé au sens de « la mise en ordre d'une science, ici la géométrie élémentaire, qui semble la plus propre pour son enseignement » (Barbin, 2021).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

d'un « livre élémentaire, pratique, à la portée de tous », avant de justifier l'absence de démonstration d'un résultat par le fait qu'il s'agisse d'un traité « tout à fait élémentaire » (Gillet-Damitte, 1837, p. vii, x, 30). L'auteur fait ainsi référence à la fois à une structure scolaire, au niveau scientifique auquel il se place, et en creux, au fait qu'il s'agisse d'un livre regroupant les connaissances essentielles relatives à une théorie. Cette très grande variété de sens possibles nous oblige donc à ne pas prendre en compte les mots « élément » ni « élémentaire » dans cette étude.

De la même manière, la « modernité » de la géométrie, au sens de la géométrie de Monge ou dans son sens plus commun, n'est pas aisée à repérer. Notre première idée, en effet, a été de prendre en compte les mots dérivés de « moderne » et « nouveau » comme marqueurs d'une appartenance revendiquée au mouvement de renouveau et de modernisation de la discipline. Mais les 134 titres (130 pour « nouveau », et seulement 4 pour « moderne ») alors recensés recouvrent des réalités très diverses, entre les « leçons nouvelles », « nouveaux traités » ou encore les « nouveaux cours ». La nouveauté exprimée dans le titre n'est alors pas toujours explicitée dans le contenu du manuel, et quand elle l'est, les innovations en question peuvent être d'ordre scientifique, l'ouvrage présentant des résultats mathématiques nouveaux, et/ou d'ordre pédagogique, par exemple quand il s'agit d'un manuel pour un public spécifique ou suivant des méthodes d'enseignement particulières [59]. Parfois, le terme n'est pas justifié, et paraît uniquement servir à distinguer deux versions différentes d'un manuel pour des lectorats distincts, comme le *Nouveau cours de géométrie* d'André (1875), destiné aux aspirants au bac ès sciences des lycées, alors que ses *Éléments de géométrie* (P. André, 1879) sont dédiés à l'enseignement spécial et aux élèves préparant le bac ès lettres. Les préfaces des deux ouvrages, mentionnant les intentions et les méthodes pédagogiques suivies par l'auteur, sont malgré cela mot pour mot les mêmes (P. André, 1875, p. v-vii, 1879, p. v-vii). Face à la très faible représentation des mots associés à « moderne » dans les titres, et les difficultés d'interprétation de ceux associés à « nouveau », les termes en question ont également été écartés de notre étude.

Finalement, les mots-clés retenus pour notre analyse sont les suivants :

59. Par exemple, les « innovations » annoncées par Méray dans la préface de ses *Nouveaux éléments de géométrie* (1874, p. xi-xv) portent sur l'abandon de la distinction entre géométrie plane et géométrie dans l'espace, le remplacement des « axiomes reçus » par « d'autres faits », la réorganisation de la « distribution générale des matières » dans les chapitres. Il s'agit donc à la fois de nouveautés scientifiques, portant sur le fond mathématique, et pédagogiques, concernant la forme donnée au traité.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Concernant la problématique autour des traditions géométriques héritées, ainsi que des objectifs d'apprentissages liés, nous avons retenu les mots-clés « théorique », « pratique » et « appliqué » ainsi que leurs dérivés [60]. Certains termes n'ont pas été retenus puisque ne figurant pas substantiellement dans les titres des ouvrages considérés, comme « Euclide » et « euclidien » (2 occurrences, correspondant aux *œuvres d'Euclide* traduites par Peyrard), « pure » (3 occurrences dont 2 relative à la géométrie [61]), et « spéculative », qui n'apparaît dans aucun titre.

— Concernant les liens de l'enseignement de la géométrie avec ses éventuelles applications professionnelles, nous avons repéré les titres en connexion avec l'« arpentage », l'« industrie », mais aussi le « dessin », les « arts » et les « métiers ». La racine « profession » a été écartée puisqu'elle ne faisait référence, dans les titres où elle apparaissait, qu'aux publics de l'enseignement « professionnel » auquel elle s'adressait. Or, notre choix ici n'est pas de nous focaliser sur les publics, mais sur la vision globale de la géométrie véhiculée par l'auteur à travers le titre de son livre. C'est pourquoi nous avons élargi la recherche aux domaines connexes à la géométrie, figurant dans les programmes et potentiellement relatifs à des pratiques professionnelles, et nous avons ainsi complété la liste par les mots-clés « système métrique », « mesure » et « toisé ». Parmi ces ouvrages, une grande partie relève de la géométrie dite « pratique » identifiée dans la classification précédente, mais qui se trouve déclinée ici de manière plus détaillée, par domaines d'applications.

— Pour l'aspect synthétique ou analytique de l'approche géométrique concernée, nous avons considéré la racine « anal » afin de repérer les ouvrages relatifs à la géométrie désignée comme « analytique ». Dans le même ordre d'idée, nous avons recherché également les termes « projective » et « descriptive » et leurs dérivés, afin de mesurer l'importance des ces courants issus du renouveau de la géométrie synthétique du début du siècle parmi les ouvrages d'enseignement. En revanche, les ouvrages de géométrie synthétique dite « élémentaire » n'ont pas pu être dénombrés du fait des difficultés liées au mot-clé associé évoquées ci-avant.

— Enfin, pour évaluer l'impact des procédés d'enseignement qui émergent au cours du siècle dans les titres des manuels de géométrie, ce sont les radicaux « expéri », « acti », « intuit » et les préfixes « tachy » ou « taky » qui ont été recherchés. D'autres mots comme « naturel », « inductif », ou « concret », ne fournissant pas

60. Pour ceci, nous avons saisi pour notre recherche une racine commune pouvant couvrir les verbes, substantifs et adjectifs relatifs à la même famille, soit « théori », « prati », et « appli ».

61. Il s'agit d'éléments de géométrie d'Alexandre Eudes, professeur au lycée Napoléon, « comprenant la géométrie pure et appliquée », déclinés en deux tomes (Eudes, 1856, 1857).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

de résultats convaincants, ont été rejetés : le premier ne se trouve associé qu'aux tachy (ou taky)mètres et ne fournit donc pas plus d'ouvrages que ceux obtenus par la recherche des deux préfixes, et les deux suivants ne présentent aucune occurrence parmi les titres du corpus.

Hypothèses :
— Les auteurs des manuels affichent pour une grande part dans quelles branches ou traditions géométriques ils inscrivent leurs ouvrages, ainsi que, vraisemblablement dans une moindre mesure, les méthodes d'enseignement dont ils se réclament.
— La diversification des pratiques de recherche ou d'application de la géométrie au cours du siècle trouve son reflet dans les titres des manuels d'enseignement de l'époque.

Méthode : Les occurrences de tous les mots-clés sélectionnés et relatifs aux courants décrits ci-avant ont été repérés dans les titres des ouvrages, tels qu'ils figurent dans leurs notices au sein de la *BF*[62]. Ces mots concernent 1155 des 2328 manuels, comprenant dans leurs titres au moins l'un de ceux retenus dans le tableau, ce qui représente environ la moitié de l'effectif global. Ce total n'apparaît pas dans le tableau, et ne correspond pas à la somme des effectifs qui y figurent, puisque de nombreux titres comportent plusieurs de ces termes. Les mots-clés sont classés en fonction des thématiques auxquelles ils se réfèrent, suivant qu'ils relèvent de la géométrie plutôt théorique ou pratique, ou des liens qu'ils affichent avec les pratiques du monde professionnel, avec les différentes branches de la géométrie en tant que discipline, ou encore avec les procédés d'enseignement correspondants.
Résultat : Voir le tableau suivant I.11 p. 129.

62. Dans le relevé des titres à partir des notices, une distinction a été faite entre le titre lui-même et les mentions d'usage, quand elles sont indiquées. Il demeure néanmoins de rares ouvrages qui font figurer la mention du public auquel ils se destinent dans leur titre-même, choix qui dans ce cas a été respecté. Par exemple, le cours de géométrie publié par Guilmin en 1859 s'intitule précisément, suivant sa notice (n° 7862 dans le recueil de 1859), *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des lycées et collèges, et de tous les établissements d'instruction publique, suivi d'un grand nombre d'applications usuelles et de questions d'examen, et de notions sur les courbes usuelles* (Guilmin, 1859).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Thématique	Mot-clé (ou dérivé)	Nombre d'ouvrages
Théorique ou pratique	Pratique	286
	Appliqué	239
	Théorique	150
Lien avec le monde professionnel	Arpentage	255
	Dessin	168
	Système métrique	44
	Mesure	24
	Toisé	22
	Arts	14
	Industrie	12
	Métiers	6
Branches de la géométrie	Descriptive	292
	Analytique	121
	Projective	10
Méthodes d'enseignement	Tachy (ou taky)métrie	12
	Expérimentale/Active	6
	Intuitive	2

TABLE I.11 – Nombre d'occurrences des mots-clés sélectionnés parmi les 2328 titres de manuels de géométrie recensés dans la *BF*

Lecture :
La catégorie la plus représentée est celle de la géométrie descriptive, avec 292 occurrences (12,5 %, soit un livre sur 8), ce qui montre la vigueur de cette branche de la géométrie dans l'enseignement au XIX^e siècle (Sakarovitch, 2015). Ces livres ne seront néanmoins pas analysés dans notre étude, puisqu'ils concernent essentiellement l'enseignement supérieur et très peu la géométrie des aires planes.
À leur suite se distinguent trois catégories de géométrie « pratique », « appliquée », et notamment à l'« arpentage », respectivement représentées dans 286, 239 et 255 titres (soit respectivement 12,3 %, 10,3 % et 11 % d'entre eux). Là encore, et même si certains ouvrages incluent dans leurs titres plusieurs de ces termes, ces données mettent en lumière un domaine très actif de l'enseignement de la géométrie, et qui concernent pour leur part très largement la géométrie des aires.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les ouvrages traitant du dessin, et notamment du « dessin linéaire », matière d'enseignement officielle du primaire comme du secondaire (D'Enfert, 2003a), sont un peu moins nombreux (168 titres) mais représentent néanmoins une part non négligeable (environ 7 %) des manuels.
Ils se placent juste avant les ouvrages qui revendiquent leur caractère théorique (150 titres, soit 6,4 %), et la géométrie dite « analytique », qui concerne un manuel sur 20 seulement. Ce nombre, comparativement au poids des manuels de géométrie descriptive, montre un certain recul de cette forme de géométrie au profit des nouvelles géométries synthétiques développées au début du siècle. La géométrie projective peine cependant à s'afficher dans les titres des manuels : seuls 7 ouvrages la mentionnent en plus des 3 éditions du *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet (1822).
Enfin, quelques catégories sont plus anecdotiques et concernent peu d'ouvrages : la « mesure », le « toisé » ou encore le « système métrique » s'annoncent dans respectivement 24, 22 et 44 ouvrages, avec un total de 84 manuels (environ 3,6 %) comprenant au moins l'un de ces termes dans leurs titres. Quant aux « arts et métiers » et à l'« industrie », ils sont revendiqués seulement par un petit groupe d'auteurs à travers leurs titres, de même que les nouvelles méthodes d'enseignement, expérimentales, actives, intuitives ou encore tachymétriques.

Conclusion :
— Les auteurs affichent dans leurs titres prioritairement les aspects généraux de leur approche géométrique, théorique ou plus utilitaire (529 titres en tout), mais aussi les connexions avec le monde professionnel (446 titres), notamment à travers le dessin et l'arpentage, puis les branches de la géométrie dont ils relèvent (421 titres). Les méthodes d'enseignement sont en revanche très peu évoquées.

— Les titres témoignent de la vigueur de la géométrie descriptive au cours du siècle, portée notamment par les programmes de l'enseignement supérieur. À travers le prisme des titres, la géométrie analytique apparaît en revanche beaucoup moins présente, et la géométrie projective encore très marginale.

À ce stade, un croisement des données internes à une même thématique apparaît nécessaire, afin de déterminer dans quelle mesure les ouvrages affichent dans leur titre plusieurs intentions, parfois supposément contradictoires, selon notre grille d'analyse.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Hypothèses :
— Les caractères théoriques ou pratiques/appliqués de la géométrie entrent en opposition dans les titres des manuels.
— Les liens avec les pratiques professionnelles apparaissent de manière segmentée dans les titres des manuels, vraisemblablement en fonction des publics auxquels ils s'adressent.
— Les géométries descriptive, projective et analytique sont l'objet de manuels distincts et spécifiques.
— Les méthodes d'enseignement annoncées sont cloisonnées, et chaque titre évoque une seule d'entre elles à la fois.

Méthode : Les données recensées dans le tableau I.11 (p. 129) et leurs diverses intersections ont été représentées par des diagrammes de Venn, réalisés à l'aide du package « eulerr » du logiciel R, qui présente l'avantage de produire des diagrammes comprenant beaucoup d'ensembles, et de taille proportionnelle aux effectifs qu'ils contiennent. Chaque thématique abordée dans le tableau donne lieu à un diagramme, tenant compte de la présence des mots-clés intervenant dans les titres des ouvrages, et de leur présence simultanée dans les intitulés (intersections des cercles) [63]. Ces diagrammes ont pour objectif de mettre en évidence la répartition des titres des ouvrages suivant les mots-clés qu'ils contiennent, en tenant compte des parties communes à plusieurs d'entre eux.
Résultat : Voir les diagrammes I.20 p. 132, I.21 p. 132 et I.22 p. 133.

63. Dans le diagramme relatif aux liens avec les pratiques professionnelles, une intersection ne pouvait pas figurer sur le graphique suivant la disposition proposée par le logiciel : nous avons donc fait le choix de faire figurer son effectif dans un encadré rectangulaire. Il s'agit de 2 titres évoquant à la fois le toisé, le système métrique et l'arpentage.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

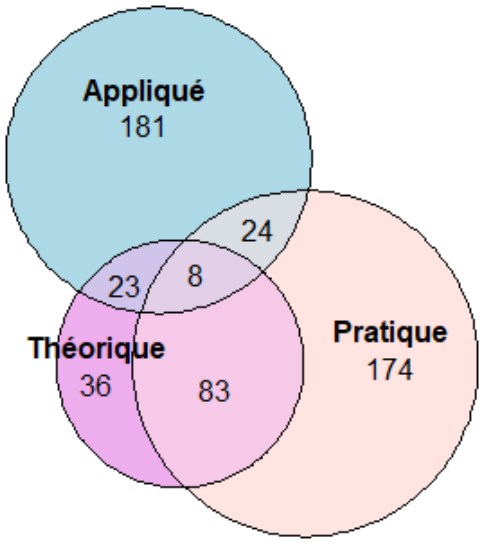


FIGURE I.20 – Répartition des titres suivant la mention des termes « théorie », « pratique », « application » et leurs dérivés

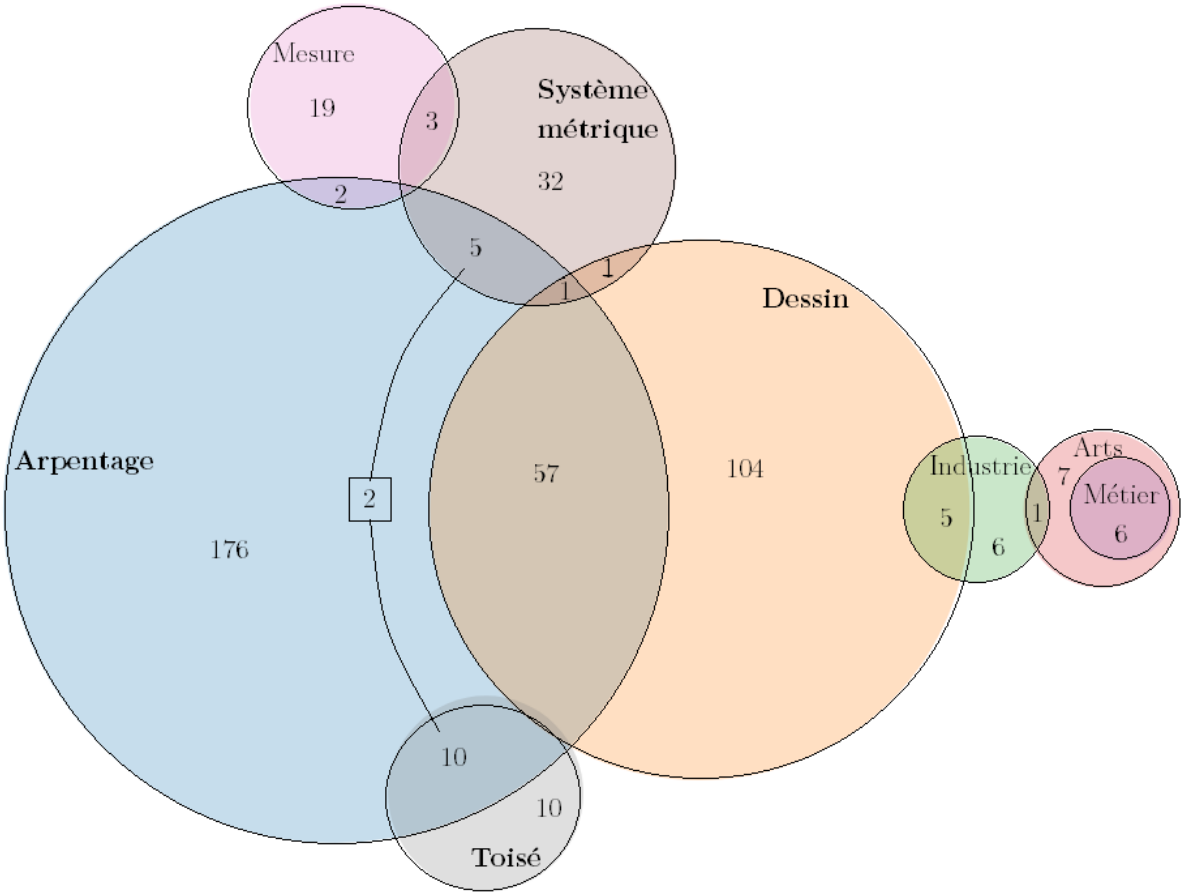


FIGURE I.21 – Répartition des titres suivant leurs liens exprimés avec des pratiques professionnelles comme l'arpentage, le dessin, la mesure, le système métrique, l'industrie, les arts et métiers

Licence CC BY-NC-ND 3.0

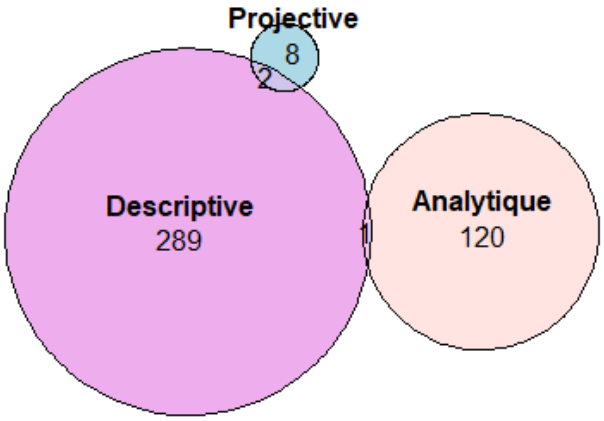


FIGURE I.22 – Répartition des titres suivant l'approche géométrique descriptive, projective ou analytique affichée

Lecture et analyse :

Le premier diagramme (I.20 p. 132) comporte une large zone commune entre les cercles relatifs à la théorie et à la pratique, ainsi que, dans une moindre mesure, celle entre la théorie et les applications, manifestant nettement le mélange des genres affiché par un nombre conséquent d'auteurs dans leur titres (114 pour ces deux cas). La pratique et les applications coexistent quant à elles dans 32 intitulés d'ouvrages. Huit titres allient même les trois idées, comme celui de Sonnet, *Géométrie théorique et pratique avec de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, au lever des plans, à la gnomonique, à la perspective, aux ombres* (Sonnet, 1848). Ce titre est emblématique de l'articulation entre les termes « pratique » et « appliqué », et de leurs dérivés, parmi les 32 figurant dans la partie commune à ces deux catégories. En effet, dans la grande majorité des cas (29 sur 32), la géométrie que présente le manuel est qualifiée de « pratique », avant d'en préciser le (ou les) domaine(s) d'application.

Le titre de Sonnet inclut également une liste de la nature des applications de sa géométrie, en lien avec de potentielles pratiques professionnelles, qui sont représentées dans le diagramme de Venn suivant (I.21 p. 132). Ce diagramme montre une répartition plus cloisonnée des mots-clés choisis dans les titres, avec des binômes néanmoins assez fréquents, comme le dessin et l'arpentage (58 titres), l'arpentage associé au toisé (12 titres) ou au système métrique (8 titres), le dessin et l'industrie (5 titres) ou encore les arts et les métiers (6 titres). Ces cas correspondent à des types d'ouvrages très spécifiques : ceux d'arpentage et de dessin linéaire, illustrés par l'emblématique *Dessin linéaire et arpentage* de Francœur (1839), qui peuvent aussi être associés au terme « toisé » désignant les connaissances relatives aux mesures des surfaces et volumes, les arithmétiques générales qui se déclinent quelquefois

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en matières comprenant l'emploi du système métrique et l'arpentage, les manuels de dessin industriel, comme par exemple le *Cours de dessin industriel* de Bardin (1862), et les ouvrages dédiés au domaine des arts et métiers, parmi lesquels la célèbre *Géométrie et méchanique des arts et métiers et des beaux-arts* de Dupin (1828). Le premier genre, mêlant l'arpentage au dessin linéaire, est assez courant durant la période, puisqu'il répond à une demande issue des programmes officiels, notamment pour le primaire. Les deux derniers sont moins répandus, s'adressant à un auditoire plus limité.
Le troisième diagramme de Venn (I.22 p. 133) montre la répartition des manuels suivant les branches de la géométrie, faisant figurer les ouvrages se réclamant de la géométrie dite « analytique », « descriptive » ou encore « projective ». Les domaines représentant les occurrences des mots-clés testés présentent des zones de contact très réduites, ce qui confirme le cloisonnement supposé entre ces branches de la géométrie. La géométrie analytique cohabite avec la géométrie descriptive au sein d'un seul manuel, le 3ème tome du *Cours de mathématiques* de Comberousse, qui annonce traiter de la « géométrie analytique plane et dans l'espace » augmenté de « compléments de géométrie descriptive » (Comberousse, 1862). Les géométries projectives et descriptives sont introduites conjointement dans seulement deux ouvrages. Quant aux approches analytiques et projectives, elles apparaissent, au moins à travers les titres, entièrement séparées dans les manuels. En creux, nous pouvons également noter que 1907 ouvrages parmi les 2328 ne se réclament d'aucune de ces branches de la géométrie, et constituent le vivier de manuels relevant d'une géométrie décrite comme « élémentaire ». La polysémie de ce terme, ainsi que celle du mot « nouveau », et leurs dérivés nous a conduite à les écarter de notre étude. Nous souhaitons néanmoins souligner que parmi les ouvrages se réclament des branches de la géométrie que nous venons d'évoquer, beaucoup s'annoncent par ailleurs comme étant « élémentaires » et/ou « nouveaux ». C'est le cas par exemple du *Nouveau manuel complet de la coupe des pierres, précédé de notions de géométrie élémentaire et descriptive nécessaires* de Toussaint (1857), qui affiche sa nouveauté autour d'un cas d'application, la coupe des pierres, nécessitant des connaissances à la fois de géométrie élémentaire et descriptive.

L'émergence des nouvelles méthodes d'enseignement de la géométrie est peu visible dans les titres recensés. Il est vrai que ce mouvement se développe majoritairement à la fin de la période, ce qui limite le nombre de manuels potentiellement concernés. 18 ouvrages annoncent dans leur titre une tendance vers un enseignement expérimental, intuitif, ou encore tachymétrique, de la géométrie. Un seul titre contient deux des mots-

Licence CC BY-NC-ND 3.0

clés retenus : les *Éléments de takymétrie (géométrie intuitive)* de Dalsème (1880). Il n'est donc pas nécessaire dans ce cas de réaliser un diagramme de Venn, puisque cet ouvrage est la seule intersection entre les groupes répondant aux termes repérés. En plus des tachymètres (Lagout, Dalsème, et Mélinge), un petit groupe de partisans de la géométrie par l'expérience se forme, avec Bert et Jully [64], auxquels on peut rajouter Jean-Ambroise Barré, qui publie beaucoup plus tôt, en 1839, sa *Géométrie en action* (Barré, 1839). Dans les titres de ces géomètres, des liens apparaissent avec d'autres thématiques abordées précédemment, comme les contextes spécifiques d'enseignement de la géométrie dans le manuel *Tachymétrie ou l'arpentage rapide et facile* de Mélinge (1875), ou encore le processus d'élémentarisation, qui touche également ce pan de la géométrie, avec les *Premiers éléments de géométrie expérimentale* de Bert (1886), suivis des *Éléments de géométrie expérimentale* de Jully (1898).

Conclusion :

— Les aspects théorique et utilitaires de la géométrie sont loin de s'exclure, et se complètent dans d'assez nombreux titres au lieu d'entrer systématiquement en opposition. Ceci confirme les résultats de l'analyse menée dans la section I.3.1.2 p. 106 (voir notamment le schéma d'interface I.16 p. 112).

— Les liens avec les pratiques professionnelles restent assez segmentées, même si des associations apparaissent plus fréquemment, notamment à travers des manuels présentant des objets spécifiques, comme le dessin industriel, ou répondant simultanément à une double injonction institutionnelle, comme les ouvrages de dessin linéaire et d'arpentage.

— Les branches de la géométrie décrites comme « analytique », « descriptive » et « projective » sont en effet très séparées dans les titres des manuels. En revanche, présenter ces parties de la géométrie n'empêche pas les auteurs de revendiquer leurs ouvrages comme étant « élémentaires » ou « nouveaux ».

— Les méthodes d'enseignement, qui s'annoncent dans un nombre restreint d'ouvrages en fin de période, ne concernent qu'une méthode spécifique à la fois.

C'est bien le caractère protéiforme de l'enseignement de la géométrie au XIX^e siècle qui apparaît à l'issue de cette étude, avec des titres souvent révélateurs d'un parti-pris de

64. Deux titres contenant le radical « expéri » sortent un peu de ce cadre : un qui s'affiche sous la bannière des « Récréations mathématiques » et qui se propose de prouver « expérimentalement de 78 manières différentes » la quadrature du cercle (Michuy, 1864), et l'autre qui relève de la « mécanique expérimentale » en plus de la « géométrie pratique » (Lagarrigue, 1880).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

leurs auteurs, et affichant leur adhésion à une vision de la géométrie et à la manière dont elle doit être enseignée. Les aspects théoriques et pratiques ne s'opposent pas toujours, puisqu'une large part d'ouvrages s'inscrivent dès leurs intitulés dans ces deux conceptions. Parmi les branches spécifiques de la géométrie qui s'annoncent comme telles, la géométrie descriptive semble dominer, au moins numériquement, mais le courant de la géométrie analytique ne s'éteint pas devant les nouvelles géométries synthétiques. De plus, les seuls titres ne suffisent sans doute pas à mesurer l'impact de l'usage des méthodes analytiques en géométrie élémentaire, ce qui sera approfondi dans l'étude fine des contenus. Quelques liens possibles avec les pratiques professionnelles se distinguent, à travers les applications de la géométrie aux arts et métiers, à l'industrie, mais aussi aux tâches de mesurage ou de toisé. Parallèlement, dans un contexte à la fois scolaire et sociétal, une forme de complémentarité des apprentissages de l'arpentage et du dessin linéaire se profile. Quant aux nouvelles méthodes d'enseignement, même si elles demeurent peu explicitées encore dans les titres des manuels, leur percée apparaît néanmoins en fin de période autour de petits groupes de géomètres partisans de l'expérience et des méthodes actives en géométrie.

À travers cette étude, c'est également le rôle d'interface des manuels de géométrie, contenant entre autres les savoirs sur les aires, qui apparaît, à l'intersection des approches théoriques ou pratiques de la discipline, de ses diverses branches du versant synthétique ou plutôt analytique, de ses applications possibles dans le monde professionnel et des méthodes d'enseignement qui peuvent lui être associées. Les relations entre tous ces territoires, mises en évidence dans cette section concernant les titres des manuels et leur analyse lexicale, sont résumées sur le schéma I.23 p. 137. Certes, notre étude a été menée par thématique, ce qui induit un cloisonnement partiel des territoires interfacés, mais des connexions entre eux sont d'ores et déjà mises à jour, que des approches différentes, à la fois quantitatives et qualitatives, vont permettre par la suite d'enrichir et de préciser.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

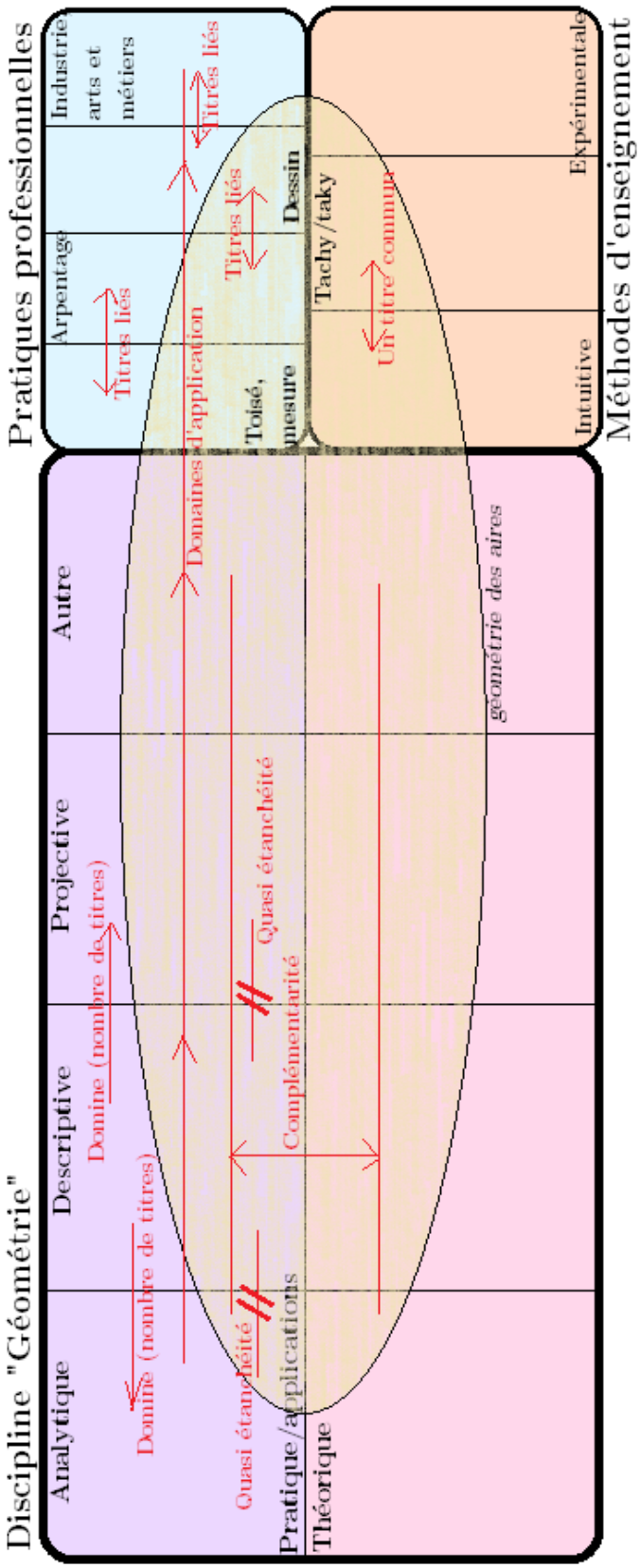


FIGURE I.23 – Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie comprenant notamment des savoirs sur les aires sont à l'interface des approches géométriques, des branches de la discipline, de ses applications au monde professionnel et de ses méthodes d'enseignement

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.3.3 Conclusion

L'étude quantitative des titres des manuels à travers des mots-clés confirme les observations réalisées lors de l'étude des divers débats sur l'enseignement de la géométrie du XIX^{e} siècle. La géométrie se montre segmentée entre plusieurs branches, relatives aux traditions dont elles héritent, mais aussi à la nature des méthodes scientifiques ou pédagogiques qu'elles emploient, au cœur d'un processus de constitution des mathématiques en général, et dont la géométrie est une partie, en tant que discipline (Assude et Gispert, 2015). Mais si ces parties de la géométrie se distinguent par leurs objets et leurs procédés d'enseignement, répondant à des objectifs censément différents, cette séparation n'est pas si tranchée dans les faits, et les oppositions qu'elle suppose prennent souvent la forme de complémentarités. La forme euclidienne des « éléments » n'exclut pas les géométries autres que spéculatives, la théorie et la pratique sont souvent perçues comme plus complémentaires que contradictoires, au cours des débats comme dans les intentions affichées dans les titres des manuels. Cette forme de collaboration entre les aspects théoriques et ceux plus appliqués de la géométrie, et spécifiquement de la géométrie des aires, est à même de répondre au double enjeu, utilitaire et éducatif, de ses apprentissages. Suivant les publics, la balance penche plus ou moins d'un côté ou de l'autre, et trouve son équilibre en fonction des objectifs d'enseignement. La même situation d'interactions possibles se manifeste autour des méthodes analytiques et synthétiques en géométrie, au moins chez les acteurs, scientifiques et pédagogues, les moins clivés sur la question. Les méthodes d'enseignement se mettent progressivement au diapason des nouvelles tendances, incluant dans certains manuels des connaissances qualifiées de « modernes », mais toujours dans un souci d'efficacité dans la transmission des savoirs. Les ordres primaires et secondaire affichent progressivement des objectifs plus proches, voire communs, avec des procédés d'enseignement qui convergent parfois également.

Dans ce panorama, la géométrie des aires, enseignée tant dans le primaire que dans le secondaire, avec des enjeux pratiques comme théoriques, utilitaires comme éducatifs, se trouve aussi à la croisée des méthodes analytiques et synthétiques, puisant dans les procédés pédagogiques en développement pour mieux se transmettre. À l'interface des courants géométriques et des méthodes d'enseignement de la discipline, son étude est en mesure de définir plus précisément les parts d'opposition, de tension, ou au contraire de mélange et d'interactions, entre ces différentes tendances (voir schémas d'interfaces I.23 p. 137 et I.19 p. 124).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.4 Conclusion

Finalement, ce parcours à travers les structures éducatives et leurs programmes, l'édition scolaire et les débats sur l'enseignement, montre l'importance institutionnelle, éditoriale et pédagogique de la géométrie des aires. Il dépeint en outre une discipline — la géométrie — en cours de constitution et qui ouvre des chemins pour son enseignement. Omniprésente dans les structures scolaires du XIX^e siècle et les programmes et instructions qui les guident, la géométrie est progressivement mise en ordre et organisée en sous-disciplines, tandis que les pédagogues débattent et transforment ses méthodes d'apprentissage. Ce processus est tout d'abord scientifique, avec la formation ou le développement de branches plus récentes de la géométrie, telles que la géométrie descriptive, aux cotés des plus anciennes, géométries élémentaire ou même analytique. L'enseignement de la géométrie, en particulier à travers les intentions affichées dans les manuels, ne s'affiche plus seulement comme théorique ou pratique, mais peut se décliner suivant cette ramification disciplinaire, ou encore sous ses formes appliquées (arpentage, dessin linéaire, etc.). Cette partition de la géométrie se met en place progressivement, et donne lieu à des échanges et débats, tout particulièrement en ce qui concerne la question primordiale de l'enseignement. Ce dernier se modifie en effet et trouve une forme de plus en plus commune aux ordres primaire et secondaire à travers l'émergence des méthodes actives, intuitives et expérimentales. La production de manuels scolaires s'adapte à ces mutations, et en révèle certains aspects quand on l'étudie quantitativement dans sa globalité.

Au cœur de cette évolution, la géométrie des aires se situe de plus en plus à l'interface des domaines mathématiques, notamment par sa présence dans des parties des programmes qui leur sont relatives, parfois hors de la géométrie. Les branches de la discipline « géométrie » se distinguent pour mieux se rejoindre, et les séparations entre l'ancien et le moderne, le théorique et le pratique, l'analytique et le synthétique, semblent plus artificielles que réelles quand il est question de déterminer des aires. Notre analyse des manuels en témoigne, qui montre la permanence du modèle des « éléments » tout en mettant en valeur toutes les formes de géométries « nouvelles » ou « modernes », souligne la complémentarité des approches théoriques et utilitaires dans bon nombre d'ouvrages, et, comme il en sera question ultérieurement, explique comment les méthodes analytiques peuvent venir au secours de la géométrie désignée comme élémentaire. Les enjeux des connaissances sur les aires figurent en bonne place sur le terrain des méthodes pédagogiques alors en discussion, les procédés émergents, manipulations, recours à l'intuition, à la visualisation, s'appliquant très bien à ces savoirs spécifiques. Les cartes se brouillent aussi quant aux ordres d'enseignement, censément cloisonnés, puisque la géométrie des aires vient les relier par ses objectifs

Licence CC BY-NC-ND 3.0

et méthodes, mais aussi à travers les auteurs et les lecteurs des manuels produits pour son enseignement, d'horizons parfois très différents.

Les méthodes quantitatives apportent quant à elles des éléments d'analyse que les autres sources consultées ne révèlent pas. Par exemple, la littérature scolaire en géométrie montre des particularités, avec un pic d'édition dans les années 1850 qui apparaît comme spécifique à la discipline. L'étude statistique des auteurs et ouvrages des manuels de géométrie produits sur la période met en évidence des personnalités référentes en termes de rédaction de manuels de géométrie, principalement issues du monde de l'éducation. Cette relative homogénéité des profils des auteurs les plus importants n'empêche pas la grande diversité des caractéristiques des ouvrages que l'on peut qualifier de « best-sellers ». Appliquées à d'autres types de données, comme les profils des acteurs éducatifs (auteurs et élèves ciblés) ou les mots-clés des titres, ces analyses quantitatives mettent en lumière certains types de manuels, tels que ceux destinés à des publics professionnels. Ce genre d'ouvrages se développe en effet au cours du siècle, est principalement rédigé par des auteurs issus de la société civile ou de l'armée, et puise dans les connaissances relatives à plusieurs branches de la géométrie. Ces résultats confortent la direction à donner à nos recherches, dans un sens où les oppositions et les cloisons supposées cèdent place à des interactions et des complémentarités, dont la géométrie des aires peut se faire le porte-drapeau. C'est sur cette voie que nous nous proposons de nous engager plus avant, en constituant un corpus de manuels plus restreint et en en analysant avec précision leurs contenus sur les aires.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II

Élaboration d'un corpus d'ouvrages et premiers éléments d'analyse

Sommaire

Introduction **143**
II.1 Des sources officielles pour sélectionner les manuels **146**
II.1.1 Les recommandations d'ouvrages dans les programmes officiels 147
II.1.2 Listes officielles 148
II.1.3 Campagnes de mise à l'essai 153
II.1.4 Travaux des commissions, admissions d'ouvrages 161
II.1.5 Listes départementales (1882 – 1889) 169
II.1.6 Conclusion 195
II.2 Méthode de sélection d'un corpus et analyse de ses caractéristiques **196**
II.2.1 Présentation de la sélection 197
II.2.2 Caractéristiques du corpus 205
II.2.2.1 Références des auteurs et réseaux d'intercitations . 205
II.2.2.2 La place des aires dans les ouvrages retenus . . . 220

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.2.2.3 Analyse croisée du poids du thème des aires et de la longévité éditoriale des ouvrages du corpus . . . 224
II.2.2.4 Analyse croisée du public, de la reconnaissance institutionnelle et du « succès » des manuels scolaires 234
II.2.2.5 Classification suivant le type d'énoncés de savoir sur les aires . . . 245
Conclusion . . . **267**
II.3 Trois résultats mathématiques transversaux . . . **269**
II.3.1 La mesure du rectangle . . . 270
II.3.1.1 Intérêts scientifiques et pédagogiques de la notion, dans le contexte du XIXe siècle . . . 270
II.3.1.2 Place de l'aire du rectangle dans les programmes et les manuels . . . 273
II.3.1.3 Les énoncés de savoir relatifs au rectangle dans les manuels du corpus : nombre et évolution . . . 275
II.3.2 Le théorème de Pythagore . . . 284
II.3.2.1 Place et désignation du théorème de Pythagore dans les programmes et les manuels . . . 285
II.3.2.2 Les énoncés et les preuves relatifs au théorème de Pythagore dans les manuels du corpus : nombre et évolution . . . 286
II.3.2.3 Intérêts scientifiques et pédagogiques du théorème, dans le contexte du XIXe siècle . . . 294
II.3.3 Les aires curvilignes . . . 299
II.3.3.1 Intérêts scientifiques et pédagogiques des aires curvilignes, dans le contexte du XIXe siècle . . . 300
II.3.3.2 Place des aires curvilignes dans les programmes et les manuels . . . 302
II.3.3.3 Les énoncés de savoir sur les aires curvilignes dans les manuels du corpus : nombre et évolution . . . 305
Conclusion . . . **315**
II.4 Conclusion . . . **316**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Introduction

DANS la partie précédente, nous avons identifié plus de 2000 titres de manuels de géométrie. Pour pouvoir envisager une étude qualitative des contenus, il est nécessaire de sélectionner un corpus plus restreint et représentatif de l'enseignement intermédiaire de la géométrie des aires. Cette étape de sélection d'un plus petit nombre de livres est nécessaire lorsque l'on souhaite analyser avec précision des savoirs ou des méthodes pédagogiques figurant dans des manuels. Pour ce faire, les méthodologies adoptées par les historiennes et historiens des mathématiques ne sont pas toutes les mêmes. Par exemple, parmi les travaux les plus récents, Legros fonde la partie qualitative de son étude des manuels d'arithmétique du XIX^{e} siècle sur un corpus de 63 livres, à partir d'une liste de 575 notices recensées dans la *BF* (voir la section I.2.1 p. 60). Sa sélection repose sur les critères suivants : « La matière : arithmétique et/ou calcul, la destination des ouvrages, la période de publication, le type d'auteurs, le type de livres [1] » (Legros, 2019, p. 94). Lorenat explique quant à elle avoir extrait 79 titres des 126 sélectionnés au préalable (voir p. 60), retenant parmi eux ceux dont « le titre, le sous-titre, la dédicace, la préface ou l'introduction s'adressent explicitement à un public d'enseignants ou d'étudiants » [2] (Lorenat, 2019, p. 77). Elle s'appuie ainsi sur le critère « intentionnel » défini par Choppin pour les manuels scolaires (voir p. 22). Elle termine ensuite sa sélection en repérant dans les tables des matières ou introductions des références aux nouveaux objets ou contenus relatifs à la géométrie moderne qu'elle étudie, ou a des recherches récemment publiées à ce sujet. Il lui reste alors sept ouvrages, sans compter

1. Il s'agit de la forme indiquée dans le titre, parmi les « traités », « abrégés », « éléments », « arithmétiques », « cours » ou encore « leçons » (Legros, 2019, p. 135).
2. En anglais : « books that explicitly advertised to an audience of teachers or students through the title, subtitle, dedication, preface, or introduction ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

les rééditions, à étudier avec précision de manière qualitative (Lorenat, 2019, p. 78). Dans sa thèse, Moussard explique lui aussi sur quelles sources il se base pour élaborer son corpus d'ouvrages de géométrie [3]. Il utilise les listes officielles d'ouvrages autorisés pour l'usage dans les classes (voir la section II.1.2 p. 148), qui vérifient alors le critère dit « légal » de Choppin. Il puise également dans une bibliographie détaillée figurant dans un recueil de problèmes en aval de sa période d'étude afin de repérer des ouvrages qui traitent en grande partie de la résolution des problèmes, conformément à son angle d'analyse. Il s'appuie aussi sur la liste exhaustive des ouvrages publiés figurant dans la *BF*. Il n'indique pas, en revanche, comment il sélectionne les ouvrages auxquels il s'intéresse parmi ceux identifiés dans ses sources (Moussard, 2015, p. 6-10).

Pour ce qui est de la constitution de notre corpus d'étude, nous retenons comme Lorenat et Moussard des livres répondant aux critères de type « légal » et/ou « intentionnel », en prenant soin, tout comme eux, de vérifier qu'ils contiennent bien des parties conséquentes sur notre objet d'étude, la géométrie des aires. De plus, le travail mené dans la première partie nous a permis d'établir deux premières règles :

1. l'ouvrage doit être l'un des livres recensé dans la *BF* comme un manuel d'enseignement, suivant la définition que nous en avons donné en introduction ;
2. les titres retenus doivent se référer à l'enseignement de la géométrie et/ou de l'arpentage, les manuels d'arithmétique ou de dessin linéaire étant exclus, même si certains présentent des connaissances sur les aires.

Or, notre principal objectif est de constituer un corpus suffisamment important pour pouvoir en étudier les caractéristiques quantitativement, mais avec un nombre de titres permettant néanmoins une analyse qualitative précise des contenus sur les aires qui y figurent. Les titres retenus doivent donc impérativement contenir des parties conséquentes sur les aires. La sélection effectuée doit également se montrer représentative de l'intégralité de la période d'étude, suivant une répartition temporelle qui couvre bien les années de 1833 à 1902, en incluant des ouvrages antérieurs à 1833, toujours en usage à cette date. Le corpus doit également regrouper des ouvrages s'adressant à tous les types de publics concernés par l'enseignement de la géométrie de l'époque : ordres primaire et secondaire, dont l'enseignement spécial, pour scolaires et/ou professionnels, filles et/ou garçons. L'étude menée dans cette partie a également pour finalité d'identifier des résultats et/ou des objets mathématiques spécifiques qui serviront de fil rouge à une étude plus qualitative dans la troisième partie. À l'issue de cette analyse, plusieurs thèmes se verront alors retenus comme marqueurs dans notre étude, tels que l'aire du rectangle, le théorème de Pythagore, les aires délimitées par des courbes quelconques

3. Il n'en précise pas le nombre exact, mais nous avons pu dénombrer dans sa bibliographie primaire 190 titres de géométrie compris dans sa période d'étude allant de 1794 à 1891.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ou par des sections coniques (voir le chapitre II.3 p. 269). Enfin, l'idée générale qui guide nos choix pour ce corpus est de réunir à la fois des ouvrages standards pour leur époque, dans le fond (conformité des contenus avec les programmes) comme dans la forme (organisation classique en chapitres et sections), et des propositions plus singulières, en termes de contenus, de présentation et/ou d'approche pédagogique.

Pour effectuer cette sélection, nous avons choisi d'analyser un ensemble de sources à la fois riches et complémentaires. Une partie de ces documents, consultés pour beaucoup aux Archives Nationales (*AN*), n'a pas, à notre connaissance, fait l'objet de travaux antérieurs, et le traitement que nous en faisons pour constituer notre corpus et l'analyser est selon nous inédit. Ces sources témoignent aussi bien de la reconnaissance des institutions que de celle des professionnels de l'enseignement. De surcroît, certains des documents étudiés, comme les procès-verbaux de la commission des livres classiques (voir la section II.1.4 p. 161) ou les listes départementales d'ouvrages effectivement en usage dans les classes (voir la section II.1.5 p. 169), présentent des éléments d'information sur le fond des ouvrages dont ils traitent, en plus de leur réception sur le terrain. Ces documents présentent également l'avantage de couvrir à eux tous l'ensemble de la période d'étude. Nous opérons alors la sélection de notre corpus à partir des données recueillies dans ces sources : nous procédons d'un côté par ajout de titres à la liste en cours d'élaboration, suivant certains de nos critères, et de l'autre par soustraction, en en retirant d'autres qui ne les respectent pas. Ce travail de construction de notre corpus constitue la première étape de cette partie, au cours de laquelle nous présentons les sources officielles que nous avons exploitées pour appliquer nos critères de choix, ainsi que le corpus final construit en suivant cette méthode.

Dans le deuxième chapitre de cette partie, nous analysons à la fois le corpus de manuels et leurs auteurs. Ces deux entités sont considérées dans notre analyse à la fois individuellement et collectivement, chaque ouvrage et chaque personnalité bénéficiant d'une attention particulière, tout en conservant une approche globale des collectifs qu'ils forment. Le groupe des auteurs est examiné à travers les liens qu'il entretient avec les institutions, qui apparaissent par exemple dans leurs échanges avec la commission des livres classiques (section II.1.3 p. 153), ou par la conformité éventuelle de leurs ouvrages aux programmes officiels (section II.1.1 p. 147), mais aussi à travers les relations qu'ils partagent au sein de réseaux, notamment d'intercitations et de références communes (section II.2.2.1 p. 205). Leurs parcours professionnels individuels sont quant à eux examinés en lien avec la réception de leurs manuels sur le territoire français (section II.1.5 p. 169), et les personnalités scientifiques que chacun d'entre eux évoque sont listées dans la perspective de nourrir l'étude qualitative à venir. Quant aux manuels, les analyses quantitatives les traitent de façon collective

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en les regroupant par catégories, relativement à des variables qui caractérisent leurs publics, leur reconnaissance institutionnelle et/ou de terrain, leurs longévités ou succès éditoriaux, leurs contenus sur les aires, en nombre, en proportion et par leur nature (sections II.2.2.3 p. 224, II.2.2.4 p. 234 et II.2.2.5 p. 245). En revanche, d'un point de vue individuel, chacun d'entre eux fait l'objet d'une étude spécifique, et notamment d'un recensement des énoncés de savoir [4] sur les aires qu'il contient, permettant d'en déterminer les caractères remarquables en termes de nature des énoncés, notamment sous l'angle du théorique et du pratique (section II.2.2.5 p. 245).

Cette entrée dans les contenus, aboutissant à une classification des ouvrages par la nature des savoirs qui y sont exposés, a pour objectif d'identifier leur appartenance à des familles ou courants de pensée géométrique, parmi ceux présentés dans la première partie. Au cours de la constitution du corpus et de cette première exploration de ses contenus, nous avons repéré trois objets d'études récurrents, préconisés dans la plupart des programmes, et qui apportent des éclairages différents sur l'enseignement de la géométrie des aires. Il s'agit de la mesure du rectangle, du théorème de Pythagore et de la détermination des aires curvilignes. Dans l'objectif d'analyser, à la partie III, les savoirs sur les aires à travers le spectre formé par ces trois thèmes, nous détaillons également au préalable leur place et leur importance dans la discipline, dans les programmes, ainsi que dans nos manuels. Ce dernier point vise à confirmer la légitimité d'une analyse fondée sur ces objets d'étude.

II.1 Des sources officielles pour sélectionner les manuels

Afin de constituer notre corpus restreint d'ouvrages, nous avons utilisé plusieurs types de documents officiels, publiés ou non, permettant de couvrir la période étudiée :

- Pour le début du siècle, les programmes et instructions mettent en avant certains ouvrages et auteurs (voir la section II.1.1 p. 147) ;
- les listes officielles d'ouvrages pour la classe établies dans les années 1850-51 constituent quant à elles une synthèse des manuels admis pour l'enseignement de la géométrie dans les ordres primaire et secondaire au mitan du siècle (voir la section II.1.2 p. 148) ;
- suivent également les documents relatifs aux campagnes de mise à l'essai d'ouvrages dans les classes des années 1854-58 (voir la section II.1.3 p. 153) ;

4. Au sens de Legros, voir p. 220.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— les travaux de la commission des livres classiques s'étalent jusqu'aux années 1880 et nous apportent des éléments de fond concernant les qualités requises pour un manuel de géométrie (voir la section II.1.4 p. 161) ;

— les listes des ouvrages en usage dans les écoles primaires, réalisées par des instituteurs en conférences cantonales et regroupées à l'échelle du département de 1882 à 1889, initiée par Ferry, permettent de dresser un panorama des préférences en termes de manuels des praticiens de l'enseignement de la géométrie à la fin de notre période, même si celui-ci ne concerne qu'un seul des deux ordres (voir la section II.1.5 p. 169).

Dans ce chapitre, nous présentons de manière détaillée ces diverses sources, consultées pour beaucoup aux *AN*, et qui n'ont pas, à notre connaissance, fait l'objet de travaux antérieurs. Nous montrons ce qu'elles apportent à la compréhension des rouages des institutions en charge des livres scolaires, ainsi que des contraintes qui pèsent sur leurs auteurs. De plus, les différents types de documents consultés mettent chacun en lumière des titres et des auteurs, et en cela constituent un appui précieux pour sélectionner les ouvrages de notre corpus.

II.1.1 Les recommandations d'ouvrages dans les programmes officiels

Un premier moyen de repérer les ouvrages d'enseignement de la géométrie utilisés comme tels, est de recueillir, dans les programmes et instructions officielles, des titres de livres ou d'auteurs recommandés, comme les *Élémens de géométrie* de Clairaut (1741), ceux de Bézout (1848) ou encore de Lacroix (1855) cités dans les programmes de l'enseignement secondaire classique de 1852 (Fortoul, 1852, p. 166-187) et les instructions données pour leur application en 1854 (Belhoste, 1995, p. 335-341). Les programmes de l'enseignement spécial de 1849 (Belhoste, 1995, p. 228) préconisent quant à eux les ouvrages de messieurs Dupin (1828), Bergery (1828) et Sonnet (1839). Les programmes ultérieurs de l'enseignement secondaire ne mentionnent plus explicitement d'auteurs ou d'ouvrages, pas plus que ceux de l'enseignement primaire supérieur, et ce jusqu'aux réformes de 1902/1903.

Dans le cadre de notre étude, Les ouvrages directement préconisés par les programmes officiels bénéficient d'une reconnaissance institutionnelle forte et on peut supposer qu'ils ont eu un impact substantiel dans l'enseignement de la géométrie. Nous les avons donc intégrés dans notre corpus, à l'exception de l'ouvrage de Clairaut [5].

5. La justification de cette exclusion est exposée dans la section II.2.1 p. 199. L'ensemble de l'analyse de nos sources est nécessaire pour en comprendre la raison, c'est pourquoi nous en reportons

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.1.2 Listes officielles

Des listes officielles d'ouvrages existent pour l'enseignement primaire et secondaire tant qu'un système dit d'« autorisation » prévaut à ce sujet. Durant le Consulat, dès 1802, des commissions sont créées pour élaborer ces listes (Choppin, 1980, p. 6). Ferry fait le point sur les « Ouvrages en usage dans les écoles communales » dans une circulaire du 10 juin 1879, dans laquelle il indique que ce système a globalement prévalu jusqu'en 1850, avec des listes quinquennales, puis annuelles (Ferry, 1879). Jusqu'en 1875, les systèmes d'autorisation alternent avec ceux dits « de veto », dans lesquels il n'y a plus d'ouvrages officiellement autorisés, mais où certains peuvent se voir interdits. Par exemple, en 1850, Fortoul établit le système du veto pour les établissement privés de second degré et celui de l'autorisation par ailleurs. En 1865, Duruy instaure le système du veto dans l'enseignement public également, mais le système d'autorisation reviendra provisoirement entre 1873 et 1875. Depuis 1875, c'est le système du veto qui prévaut et il n'y a donc plus eu de listes officielles éditées à partir de cette date (Choppin, 1980, p. 6-7). Ces différentes étapes, pour l'enseignement primaire comme secondaire, public ou privé, sont résumées sur le graphique II.1 (p. 149).

Ces listes officielles se trouvent dans les *Bulletins administratifs de l'instruction publique* dans la catégorie « Admission d'ouvrages ». Deux listes récapitulatives sont publiées pour les deux ordres d'enseignement en 1851 : la *Liste officielle des ouvrages qui ont été autorisés depuis l'année 1802 jusqu'au 1er septembre 1850, pour le service de l'instruction primaire...* (Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1851), et la *Liste chronologique et officielle des ouvrages d'enseignement supérieur et secondaire, approuvés de 1802 au 1er septembre 1850* (Giraud, 1851). Ces deux listes sont des ressources particulièrement précieuses. Les ouvrages qu'elles contiennent et qui concernent l'enseignement de la géométrie ont été reportés dans le tableau ci-après (voir tableau II.1 p. 151), classés suivant les ordres d'enseignement auxquels ils se réfèrent. Il est à noter que dans la liste officielle pour l'enseignement secondaire, les ouvrages pour l'enseignement supérieur ne sont pas distingués des autres, et seule une étude plus approfondie de leurs contenus pourra permettre de le faire.

l'explication en aval de cette section.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

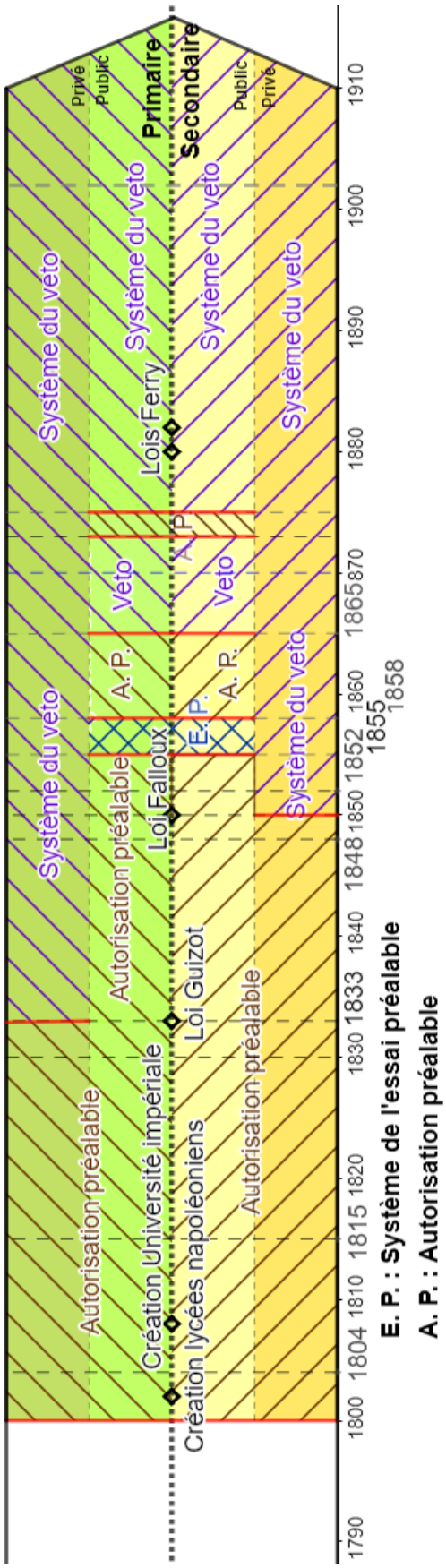


FIGURE II.1 – Chronologie des systèmes d'autorisation ou de veto pour les livres classiques des ordres primaires et secondaires de l'enseignement public et privé au XIX^e^ siècle, fondée sur (Choppin, 1986 ; Fortoul, 1855 ; Rouland, 1858b ; Wallon, 1875)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

	Auteur	Année d'autorisation	Titre
Primaire	Lamotte M. L.	1834	Traité élémentaire d'arpentage et du lever des plans
	Lamotte M. L.	1835	Tableaux d'arpentage
	Sonnet H.	1839	Nouvelle géométrie théorique et pratique
	Normand aîné et Rebout A. E.	1841	Manuel de géométrie, de dessin linéaire, d'arpentage et de nivellement
	Luçon J.	1842	Traité élémentaire d'arpentage
	Gimelli	1842	Leçons d'arpentage et du lever des plans
Primaire supérieur	Vernier M. H.	1835	Géométrie élémentaire
	Bergery C. L.	1835	Géométrie des écoles primaires
	Desnanot P.	1835	Pratique du toisé géométrique ou Géométrie pratique à la portée des personnes qui savent les quatre règles
	Dupin C. L.	1835	Géométrie et mécanique des arts et métiers
	Marie A.	1835	Géométrie stéréographique, ou reliefs des polyèdres pour faciliter l'étude des corps
	Caubet H.	1835	Tableaux synoptiques d'arpentage
	LC et FPB	1836	Abrégé de géométrie pratique, à l'usage des écoles chrétiennes
	Lacroix S. F.	1836	Manuel d'arpentage, ou instruction élémentaire sur cet art et celui de lever les plans
	Belargent	1841	Collection de solides de géométrie exécutés à une grande échelle, d'après un nouveau système
	Sonnet H.	1845	Premiers éléments de géométrie, avec les principales applications au dessin linéaire, au lever des plans, à l'arpentage
	Eyssèric A. D. et Pascal J. C.	1849	Traité de géométrie théorique et pratique
Primaire supérieur	Bergery C. L.	1828	Géométrie appliquée à l'industrie
	Ritt G.	1836	Problèmes de géométrie et de trigonométrie, avec réponses et solutions
	Terquem O.	1836	Manuel de géométrie
	Percin J.	1843	Géométrie simplifiée, suivie de notions de trigonométrie et d'arpentage
	Legendre A. M.	1802	Eléments de géométrie
	Mauduit A. R.	1802	Géométrie
	Leblond G.	1802	Arithmétique et géométrie de l'officier
	Biot J. B.	1802	Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré
	Lacroix S. F.	1809	Eléments de géométrie
	Lacroix S. F.	1809	Applications de l'algèbre à la géométrie

Licence CC BY-NC-ND 3.0

secondaire et supérieur	Poullet Delille A. C. M.	1809	Traité d'application de l'algèbre à la géométrie
	Biot J. B.	1821	Application de l'algèbre à la géométrie, d'après le traité des courbes du 2ème degré
	Bourdon P. L. M.	1826	Application de l'algèbre à la géométrie
	Vincent A. J. H.	1829	Cours de géométrie élémentaire
	Mutel A.	1832	Cours de géométrie et de trigonométrie
	Ritt G.	1836	Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie
	Cirodde P. L.	1837	Leçons de géométrie théorique et pratique
	Gouré M. E.	1837	Eléments de géométrie, de trigonométrie
	Finck P. J. E.	1838	Traité de géométrie élémentaire
	Ferriot L. A. S.	1838	Applications de la méthode des projections à la recherche de certaines propriétés géométriques
	Menjaud C.	1839	Les deux trigonométries et les éléments de la géométrie descriptive
	Planche J.	1841	Cahiers de géométrie élémentaire
	Lenthéric J.	1841	Trigonométrie et géométrie analytique
	Page C. E.	1842	Complément de géométrie analytique
	Idoux A. J.	1842	Nouveaux éléments de géométrie
	Lionnet E.	1843	Eléments de géométrie
	Planche J.	1844	Géométrie élémentaire pour servir de complément au traité de Legendre
	Mahistre A.	1844	Les analogies de la géométrie élémentaire ou la géométrie dans l'espace ramenée à la géométrie plane
	Cirodde P. L.	1845	Leçons de géométrie analytique, précédées des éléments de trigonométrie rectiligne
	Briot C. et Bouquet C.	1848	Leçons nouvelles de géométrie analytique, précédées des Eléments de la trigonométrie
	Saigey J. F.	1849	Eléments d'arithmétique, de géométrie, d'algèbre d'après Bezout
	Sonnet H.	1849	Algèbre élémentaire, avec de nombreuses applications à la géométrie
	Percin J.	1849	Principes d'arpentage et de nivellement
	Clarke L.	1850	Théorèmes et problèmes de géométrie rectiligne et sphérique (1ère partie, trigonométrie rectiligne)

TABLE II.1 – Tableau des ouvrages de géométrie des listes officielles pour l'enseignement primaire, primaire supérieur, secondaire et supérieur (Giraud, 1851 ; Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1851)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ce sont 51 ouvrages qui sont officiellement destinés à l'enseignement de la géométrie en 1851 à tous les niveaux d'enseignement[6]. Ces deux listes sont présentées de façon différente. Celle concernant l'ordre primaire est d'abord détaillée suivant les degrés d'enseignement, avec les « écoles normales primaires »[7], les « écoles primaires supérieures », puis les « écoles primaires élémentaires ». Dans ces trois catégories, les ouvrages sont déclinés par matières d'enseignement, parmi lesquelles la « géométrie et ses applications usuelles » et l'« arpentage ». Les livres retenus dans la liste du tableau II.1 (p. 151) sont ceux de ces deux catégories. Comme cela a été expliqué dans la première partie, les ouvrages d'arithmétique et de dessin linéaire ont été volontairement écartés.

La liste des ouvrages d'enseignement secondaire et supérieur se présente quant à elle de façon chronologique, par date d'autorisation (c'est d'ailleurs le classement global qui a été retenu pour notre tableau). En 1802, la liste est également déclinée par matières, commençant par les « mathématiques », puis par date d'autorisation, sans distinction des matières. La sélection des ouvrages de géométrie a alors été faite par mots-clés dans les titres[8] (voir tableau II.1 p. 151).

Tout comme les programmes officiels, ces listes nous renseignent sur la reconnaissance officielle directe des ouvrages pouvant servir à enseigner la géométrie de la première moitié du siècle. Sur cette période, l'appartenance à cette liste constitue ainsi un critère essentiel pour retenir un titre au sein du corpus. Le grand nombre de manuels qui y figurent, qu'il soient à destination de l'ordre primaire ou de l'ordre secondaire, ne nous permet pas de tous les conserver, et notre choix sera guidé par la condition supplémentaire que la question des aires s'y trouve assez largement abordée.

6. Dans un *Arrêté portant désignation des livres qui pourront être mis utilement entre les mains des enfans et des maîtres, dans les écoles primaires* (R.L.R.I.P., 1822, p. 148-152) paru en 1817, deux autres ouvrages de géométrie sont indiqués, le *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement* de Puissant (1807) et le *Nouveau traité de l'arpentage* de Lefèvre (1803). Étonnamment, ces deux ouvrages ne se retrouvent pas dans la liste officielle récapitulative de 1851, alors que d'autres ouvrages d'arpentage y figurent, même antérieurement à 1837, année de prescription des nouvelles unités du système métrique dans l'enseignement.

7. Les ouvrages de cette catégorie sont repris ensuite dans les deux autres, et n'ont donc pas été notés dans la liste de façon spécifique.

8. Cette liste est moins rigoureuse que celle de l'ordre primaire concernant les noms des auteurs et l'exactitude des titres. Par exemple, il est noté « Sage » au lieu de « Page », ou encore « Sonnet » au lieu de « Saigey » comme auteur de la réédition des *Élémens de géométrie* de Bézout (1848). Sous le titre *Géométrie* de Mauduit se cachent en fait ses *Leçons de géométrie théoriques et pratiques* (Mauduit, 1790). Dans le tableau présenté, les auteurs ont été corrigés, mais les titres sont transcrits en l'état.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.1.3 Campagnes de mise à l'essai

L'élaboration du corpus d'ouvrages d'enseignement nécessite de prendre en compte le contexte officiel pour les « livres classiques ». En effet, si le système d'autorisation perdure un peu après 1851, comme cela a été indiqué précédemment, il est remplacé par une campagne d'approbation soumise à une « épreuve préalable » de 1855 à 1858 (voir figure II.1 p. 149). Décidé par Fortoul, ce règlement prévoit d'introduire dans les classes, provisoirement et à titre d'essai, des ouvrages non encore soumis à l'examen du Conseil Impérial, sur proposition des recteurs, eux-mêmes se référant à l'avis des conseils académiques. Suite à un rapport des chefs d'établissements participant à cet essai, auquel s'ajoute l'avis du recteur concerné, le Conseil peut se voir saisi afin d'émettre un avis officiel concernant l'introduction de l'ouvrage dans les établissements publics d'instruction (Fortoul, 1855). Pour en savoir plus sur cette campagne, nous avons dépouillé des documents se trouvant aux *AN* (cotes F/17/2784 et F/17/2785). La première série regroupe, par ordre alphabétique, les demandes des auteurs afin que leurs ouvrages soient introduits à titre provisoire dans les classes, parfois accompagnées des rapports que leurs examinateurs adressent aux recteurs. La seconde contient des comptes-rendus de huit conseils académiques suite à l'examen des ouvrages qui leur ont été transmis, émettant un avis pour ou contre leur introduction temporaire dans les classes. Dans les deux cas, seuls les livres traitant de géométrie ont été retenus.

Les résultats de ce dépouillement figurent dans le tableau II.2 p. 154. Ces sources constituent une double richesse pour notre étude : d'une part en nous donnant des clés de compréhension du fonctionnement de l'institution des livres scolaires des années 1850, et les critères d'exigence concernant les futurs manuels qu'elle applique, en particulier en ce qui concerne les aires, et d'autre part en nous donnant des raisons d'écarter ou de retenir certains titres dans notre corpus, en fonction de la reconnaissance officielle dont ils bénéficient.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Auteur	Titre	Année	Commission	Décision
Amiot	*Eléments de géométrie*	1856	Douai - Taiée	peut être autorisé
Amiot	*Eléments de géométrie*	1857	Lyon	introduit avec avantage (secondaire)
Bailly C.	*Réforme de la géométrie*	1857	Paris - Sonnet	refusé
Bardin G.	*La topographie enseignée par des plans reliefs et des dessins*	1858	Paris - Faye	approuvé (spécial + cand. écoles militaires), rejeté (classique)
Bovier-Lapierre G.	*Cours de géométrie élémentaire ?*	1855	?	?
Briot	*Eléments de géométrie - Théorie*	1856	Bordeaux - Dutrey/Abria	recommandé (collèges et lycées et bibliothèques)
Briot	*Eléments de géométrie - Théorie*	1856	Douai - Taiée	peut être autorisé
Briot	*Eléments de géométrie - Théorie*	1857	Caen	visiblement approuvé
Briot et Martin	*Géométrie*	1856	Dijon - Cournot	refusé
Briot et Martin	*Géométrie*	1857	Douai - Taiée	recommandé
Briot et Martin	*Géométrie*	1857	Lyon	"oui"
Briot et Vacquant	*Eléments de géométrie - Application*	1856	Bordeaux - Dutrey/Abria	recommandé (collèges et lycées et bibliothèques)
Briot et Vacquant	*Eléments de géométrie - Application*	1856	Douai - Taiée	à autoriser et recommander
Briot et Vacquant	*Eléments de géométrie - Application*	1857	Caen	visiblement approuvé
Etex A.	*Cours élémentaire de dessin*	1856	?	?
Godimus	*Arpentage*	1857	Douai - Taiée	non
Guilmin A.	*Leçons de trigonométrie élémentaire*	1856	?	?
Guilmin A.	*Cours de géométrie élémentaire (3)*	1854-56	?	?
Lacomme J.	*Rapport du diamètre à la circonférence*	1857	?	(oui) "Classer au carton des livres classiques"
Lacroix S. F.	*Eléments de géométrie (17)*	1855	?	?
Lecoeur	*Géométrie élémentaire (ouvrage de…)*	1857	Laferrière	refusé
Noir Louis	*Démonstration du postulat des parallèles*	1858	?	?
Prouhet E.	*La géométrie de Lacroix*	1856	?	?
Roguet C.	*Traité de géométrie et de trigonométrie*	1855	Dunoyer	?
Sarlet	*Trigonométrie rectiligne*	1855	?	?
Sonnet et Frontera	*Eléments de géométrie analytique*	1856	Aix - Vignally	à l'essai (secondaire)
Sonnet et Frontera	*Eléments de géométrie analytique*	1857	Caen	visiblement approuvé
Sonnet et Frontera	*Eléments de géométrie analytique*	1857	Paris - Caresme	non décidé
Sonnet et Saigey	*Nouveau manuel du bac ès ciences*	1857	Aix - Vignally	à l'essai (secondaire)
Tarnier	*Eléments d'algèbre et de trigonométrie*	?	Toulouse	"admis" (mérite l'approbation du conseil)
Tarnier	*Eléments de trigonométrie*	1856	?	?
Vincent	*Sur un point de l'histoire de la géométrie chez les grecs*	1857	?	?

TABLE II.2 – Auteurs et ouvrages ayant formulé une demande d'approbation « à l'essai » de 1855 à 1858 et réponse de la commission (en rose les ouvrages approuvés, en bleu les refusés et en jaune ceux dont le statut n'est pas tranché)

Les demandes adressées s'étalent de 1854 à 1858[9] et émanent d'auteurs divers, pour la plupart enseignants de mathématiques, voire de dessin, comme Bardin, maître des travaux graphiques à l'École Polytechnique. Ces professeurs exercent aussi bien dans le secondaire (Amiot et Guilmin par exemple), que dans le supérieur (Bardin et Tarnier entre autres). Quelques exceptions concernent des auteurs issus du monde profes-

9. Nous n'indiquons pas pour cette section et les deux suivantes, les références des livres évoqués, du fait des informations lacunaires qui figurent dans les documents d'archives, où parfois les titres mêmes sont inexacts, et les numéros d'éditions et années de publication ne sont pas précisés. Les ouvrages qui se verront intégrés dans notre corpus à l'issue de ce travail bénéficieront quant à eux d'un référencement exact.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

sionnel non enseignant, comme Bailly [10], écrivain et éditeur scientifique (et membre de nombreuses sociétés savantes), Ètex [11], statuaire, peintre et architecte, ainsi que Lacomme [12], cultivateur. Certains ouvrages figurent plusieurs fois dans les listes, correspondant à des cas examinées par plusieurs conseils académiques. Si l'on en croit les documents pour lesquels cette information est indiquée clairement, les demandes semblent être traitées par diverses personnalités de la haute administration de l'instruction publique : des inspecteurs académiques (Sonnet et Caresme [13] à Paris, Taiée [14] à Douai, Vignally [15] à Aix) ou généraux (Faye [16]), des recteurs d'académie (Cournot [17] à Dijon, Dutrey [18] à Bordeaux, Dunoyer [19]Dunoyer à Grenoble) ou encore des doyens d'universités (Abria [20] à Bordeaux et Lafaye [21] à Aix) [22]. Nous pouvons observer qu'une partie de ces notables du monde de l'éducation sont par ailleurs des scientifiques, comme Sonnet, Faye, Cournot et Abria, alors que les autres non, ce qui ne les empêche pas d'avoir la responsabilité de statuer sur le sort des ouvrages de géométrie qui leur sont proposés. Certains, comme Sonnet, sont également eux-mêmes rédacteurs d'ouvrages d'enseignement des mathématiques.

10. Charles-François Bailly de Merlieux (1800 – 1862).
11. Antoine Ètex (1808 – 1888).
12. Joseph Lacomme (1792 - ?). Pour une note biographique complète de cet autodidacte, dont la tentative de résolution de la quadrature du cercle a été très commentée, voir (Société archéologique historique, 1900, p. 129-136).
13. Benjamin (Marie Joseph) Caresme (1802 – 1873), a exercé alternativement les fonctions d'inspecteur et de recteur dans diverses académies. Voir (Condette, 2006f).
14. Charles (André) Taiée (1804 – 1889), a exercé successivement les fonctions de proviseur au lycée de Moulins, puis d'inspecteur dans diverses académies (Calvados, Clermont-Ferrand, Montpellier, puis Douai). Source : *BAIP*.
15. Dominique-Antoine Vignally (1811 – 1871), a exercé successivement les fonctions d'instituteur et de principal de collège en Corse, et d'inspecteur d'académie à Aix puis à Alger. Source : *BAIP*.
16. Hervé Faye (1814 – 1902), a exercé comme professeur d'astronomie et de géodésie à l'École Polytechnique et à la faculté des sciences de Nancy avant de devenir recteur de l'académie de Nancy puis inspecteur général pour l'enseignement des sciences. Voir (Condette, 2006c).
17. Antoine Augustin Cournot (1801 – 1877), normalien, a exercé comme professeur de mathématiques dans la faculté des sciences de Lyon et de Grenoble, et a également occupé les fonctions de recteur et d'inspecteur général. Voir (Havelange et al., 1986b).
18. Gabriel Fort Dutrey (1792 – 1870), normalien, il enseigne comme professeur de rhétorique dans divers collèges parisiens avant de devenir recteur de l'académie de Clermont-Ferrand puis de celle de Lyon, puis inspecteur général. Voir (Havelange et al., 1986c).
19. Charles Marie Dunoyer (1799 – 1881), professeur de philosophie, il devient secrétaire général puis préfet de plusieurs départements avant de devenir recteur dans le Var, l'Isère, puis à Nancy. Il exerce aussi momentanément la fonction de chef de division de l'enseignement secondaire au ministère. Voir (Condette, 2006b).
20. Benoît (Jérémie Joseph) Abria (1811 – 1892), physicien membre de l'Académie des sciences, il est d'abord professeur de physique, puis doyen de la faculté des sciences de Bordeaux. Voir (Le Pendeven et al., 2018).
21. Pierre Benjamin Lafaye (1809 – 1867), normalien, il enseigne comme professeur de philosophie puis devient doyen de la faculté des lettres d'Aix. Voir (« Nécrologie » 1867).
22. Tous les rapports ne mentionnent pas les noms des membres des commissions académiques, comme par exemple l'académie de Caen.

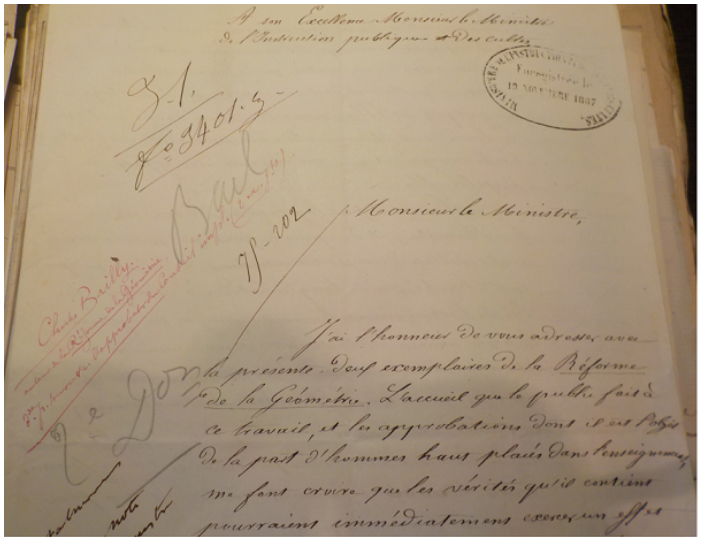
Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les arguments présentés par les auteurs pour défendre leurs ouvrages sont de natures diverses [23]. Certains sont relatifs à leur réputation, à leur mérite ou à des recommandations de personnages d'autorité. C'est le cas d'Ètex, qui est, de ses propres mots « un artiste dont le nom est gravé dans les plus grands monuments de Paris », et qui met en avant les services qu'il a rendus à l'enseignement du dessin, recevant pour son travail « l'assentiment des plus grands artistes et des professeurs du plus grand talent ». Guilmin souligne ses efforts constants pour améliorer ses ouvrages et aider à la réalisation des nouveaux programmes, et précise que son travail, « ayant déjà reçu un accueil favorable, [peut] être utile ». Les même arguments portant sur la bonne réception de l'ouvrage chez leurs confrères, ainsi que sur sa potentielle utilité sont mis en avant par Tarnier et Bardin. Ce dernier précise d'ailleurs que son manuel de topographie, dont il souhaiterait étendre l'usage des seules « écoles d'application des services publics » (comme l'école supérieure des Mines où il enseigne) aux lycées, serait de nature à faciliter l'apprentissage de la géographie physique, sans alourdir les programmes d'enseignement. Il existe aussi des justifications d'ordre pédagogique, comme un « système d'enseignement », qui, d'après Sarlet, pourrait s'avérer meilleur. Bailly accuse quant à lui la géométrie de subir des « méthodes irrationnelles » et des « théories absurdes », où l'on s'emploie à « établir par des syllogismes que [l'on a] cinq doigts à la main », et qui produisent des « effets déplorables ». Il propose une méthode plus intuitive, ancrée dans le bon sens, qui délivrerait « les jeunes intelligences de la tyrannie la plus cruelle qu'elles puissent subir » (voir figure II.2 p. 157 [24]). D'autres auteurs arguent d'une meilleure conformité à de nouveaux programmes, comme Prouhet, qui s'est « proposé d'introduire dans la géométrie de Lacroix toutes les améliorations indiquées par les programmes ». Enfin, Lacomme évoque les grands sacrifices qu'il a du consentir pour écrire son ouvrage, « but de [ses] efforts depuis 20 ans » et qui « a épuisé [ses] ressources de telle manière » qu'il « se retrouve dans une position très gênée ». Ce sont bien alors des considérations pécuniaires qui interviennent dans un tel cas, la situation financière d'un auteur justifiant sa demande de faire vendre son ouvrage dans les divers établissements d'instruction.

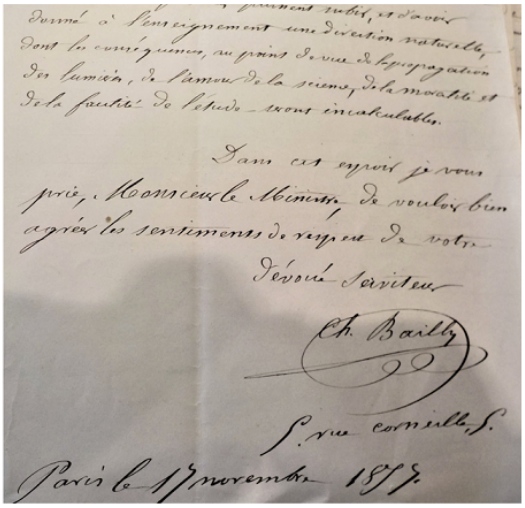
23. Tous les arguments avancés dans ce paragraphe figurent dans les documents du dossier F/17/2784 des *AN*, et les feuillets ne sont pas référencés. Nous faisons le choix de ne pas indiquer la provenance du document pour chacune des citations, afin de ne pas alourdir notre propos.

24. Les extraits des lettres proposés dans cette section sont exposés à travers des photographies partielles accompagnées d'une transcription dans un encadré à droite. Les lettres étant très souvent longues de plusieurs pages, nous faisons le choix de ne pas les présenter en intégralité.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



[...]



À son Excellence Monsieur le Ministre
de l'Instruction publique et des cultes,

Monsieur le Ministre,

J'ai l'honneur de vous adresser avec la présente deux exemplaires de la Réforme de la Géométrie. L'accueil que le public fait à ce travail, et les approbations dont il est l'objet de la part d'hommes haut placés dans l'enseignement, me font croire que les vérités qu'il contient pourraient immédiatement exercer un effet

[...]

et d'avoir donné à l'enseignement une diversion naturelle, dont les conséquences, eu point de vue de la propagation des lumières, de l'amour de la science, de la moralité et de la facilité de l'étude seront incalculables.

Dans cet espoir, je vous prie, Monsieur le Ministre, de bien vouloir agréer les sentiments de respect de votre dévoué serviteur.

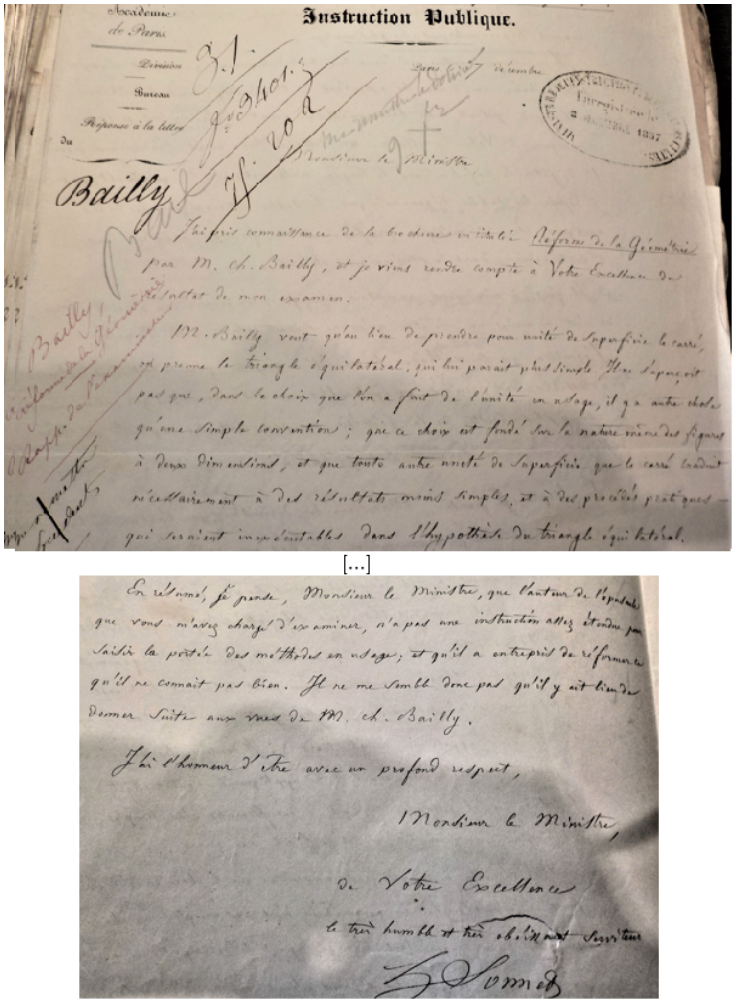
Ch. Bailly

5 rue Corneille

Paris, le 17 novembre 1875

FIGURE II.2 – Lettre adressée par Bailly à la commission pour l'admission de sa *Réforme de la géométrie* (extraits d'un lettre de trois pages) (dossier F/17/2784 des *AN*)

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Paris, le 7 décembre

Monsieur le Ministre,

J'ai pris connaissance de la brochure intitulée Réforme de la géométrie par M. Ch. Bailly ; et je viens rendre compte à Votre Excellence du résultat de votre examen.

M. Bailly veut qu'au lieu de prendre pour unité de superficie le carré, on prenne le triangle équilatéral, qui lui parait plus simple. Il ne s'aperçoit pas que, dans le choix que l'on fait de l'unité en usage, il y a autre chose qu'une simple convention ; que ce choix est fondé sur la nature même des figures à deux dimensions, et que toute autre unité de superficie que le carré conduit nécessairement à des résultats moins simples et à des procédés pratiques qui seraient inexécutables dans l'hypothèse du triangle équilatéral.

[...]

En résumé, je pense, Monsieur le Ministre, que l'auteur de l'opuscule que vous m'avez demandé d'examiner, n'a pas une instruction assez étendue pour saisir la portée des méthodes en usage ; et qu'il a entrepris de réformer ce qu'il ne connaît pas bien. Il ne me semble donc pas qu'il y ait lieu de donner suite aux vues de M. Ch. Bailly.

J'ai l'honneur d'être avec un profond respect,

Monsieur le Ministre,

de votre Excellence

le très humble et très obéissant serviteur

H. Sonnet

FIGURE II.3 – Rapport de Sonnet au Ministre après examen de l'ouvrage *Réforme de la géométrie* de Bailly (extraits d'un rapport de deux pages) (dossier F/17/2784 des *AN*)

Sur les 32 demandes, 20 réponses quant à l'approbation des ouvrages figurent plus ou moins explicitement dans les dossiers, dont 4 refus et 16 avis positifs. La raison d'un refus peut s'avérer purement matérielle, comme l'ouvrage de Lecœur, qui est manuscrit, alors que « seuls les ouvrages imprimés peuvent être soumis à l'examen » (*AN* F/17/2784). Les approbations sont parfois sous condition de niveau du public destinataire, comme la *Topographie* de Bardin,« repoussée » pour l'enseignement classique, mais recommandée pour « l'enseignement spécial de la division scientifique, où déjà figure la topographie élémentaire » (*AN* F/17/2784). Les *Éléments de géométrie analytique* de Sonnet et Frontera sont admis pour l'enseignement secondaire, leurs contenus répondant « aux exigences du programme d'admission à l'École Polytechnique et à l'école normale supérieure »(*AN* F/17/2785). La *Géométrie* de Briot et Martin est plutôt recommandée pour la section littéraire du lycée, et en particulier pour les élèves de 4ème, dans les mains desquels elle a « souvent été mise avec fruit » (*AN* F/17/2785). L'ouvrage d'Amiot est pour sa part « particulièrement utile aux candidats pour les écoles

Licence CC BY-NC-ND 3.0

spéciales », et les commissions sont donc favorables à ce qu'ils soit « introduit avec avantage dans l'enseignement secondaire », section sciences (*AN* F/17/2785). Dans les avis que nous venons de mentionner, la conformité aux instructions officielles est un argument essentiel, ce qui apparaît particulièrement à propos du manuel d'Amiot, dans lequel « toutes les démonstrations sont faites dans l'esprit des programmes », ou dans celui de Briot et Vacquant, qui « répond scrupuleusement aux exigences du programme » (*AN* F/17/2785). Tarnier a quant à lui réalisé « des changements considérables » pour rendre ses éléments d'algèbre et de trigonométrie en accord avec le nouveau plan d'études (*AN* F/17/2784).

Les examinateurs justifient également leurs décisions pour des raisons de forme ou de fond. Des qualités de simplicité, d'intelligibilité, de clarté ou encore de précision, sont reconnues aux livres de Briot, Sonnet et Frontera, Amiot, Briot et Vacquant, là où celui de Bailly est jugé fantaisiste. Le problème, pour ce dernier ouvrage, est plus grave, car sa défaillance ne porte pas que sur la forme, mais aussi sur le fond. L'auteur pense en effet pouvoir réformer la géométrie en proposant « qu'au lieu de prendre pour unité de superficie le carré, on prenne le triangle équilatéral » et de fonder l'étude de la trigonométrie sur cette figure, à la place du triangle rectangle. Pour Sonnet, rapporteur du compte-rendu de la commission [25], ces propositions montrent l'incompétence de leur auteur, qui « n'a pas une instruction assez étendue pour saisir la portée des méthodes en usage, et qui a entrepris de réformer ce qu'il ne connaît pas bien » [26] (voir figure II.3 p. 158) (*AN* F/17/2784). Les ouvrages peuvent s'avérer très complets sur le sujet qu'ils traitent, comme ceux de Briot et Vacquant ou de Tarnier, alors que le livre d'arpentage de l'abbé Godimus est jugé trop incomplet par son examinateur, qui conclut : « Nous avons beaucoup de traités d'arpentage aussi simples et plus complets ». Il lui est notamment reproché de ne contenir « aucun détail sur les précautions à prendre pour opérer sur le terrain, ni sur la division des terrains » (*AN* F/17/2785). La qualité des contenus compte donc bien sûr beaucoup, et par exemple, la supériorité de la partie sur les courbes et les interpolations du manuel de Sonnet et Frontera est soulignée, par rapport aux autres ouvrages du genre. En particulier, le lien avec les applications pratiques est mis en valeur par plusieurs commissions, le manuel de Sonnet et Frontera présentant de nombreux « problèmes d'application directe dans les arts et l'industrie », et le livre de Briot et Martin « diverses applications pratiques fondues dans la théorie » (*AN* F/17/2785).

25. Il est remarquable que Sonnet fasse à la fois partie des auteurs dont les ouvrages sont examinés par la commission, et rapporteur d'une partie des titres qui lui sont soumis. Cet état de fait questionne sur l'objectivité des personnalités qui sont dans ce cas, face à des ouvrages potentiellement « concurrents » des leurs.

26. Avec une forme de délicatesse, Sonnet tente d'adoucir ce rapport à charge contre Bailly, en lui reconnaissant « un certain courage pour entreprendre une pareille réforme », mérite qu'« on ne saurait lui refuser ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ce tour d'horizon met en évidence une partie des enjeux liés à l'écriture des manuels d'enseignement de la géométrie, en soulignant les qualités reconnues par les plus plébiscités (les livres de Briot, Briot et Vacquant, Sonnet et Frontera, ou encore Amiot), et les lacunes de ceux qui se voient rejetés (Bailly et Godimus). Des ouvrages, comme celui de Briot et Martin, ne font pas l'unanimité et sont diversement évalués par les commissions, celle de Dijon proposant de le refuser car « trop incomplet pour les applications ». L'accent mis sur la conformité aux programmes, en lien avec les niveaux des publics visés, ainsi que sur les qualités de forme, associées à des contenus solides, décrit bien l'ensemble des contraintes auxquelles les auteurs sont censés se soumettre.

Qui plus est, une partie des commentaires recensés portent directement sur la géométrie des aires, comme ceux concernant les propositions de Godimus et Bailly. Ils éclairent en particulier les impératifs sur ce sujet, pour la théorie comme pour la pratique. De même, les critiques au sujet des applications sont caractéristiques de l'importance portée à l'adéquation entre les résultats exposés et leur applicabilité dans le monde réel. Nous pouvons donc affirmer que les exigences qui pèsent sur les manuels de géométrie, notamment en ce qui concerne les aires, situent ces derniers à l'interface des institutions relatives aux livres scolaires et de leurs auteurs (voir schéma II.4 p 160).

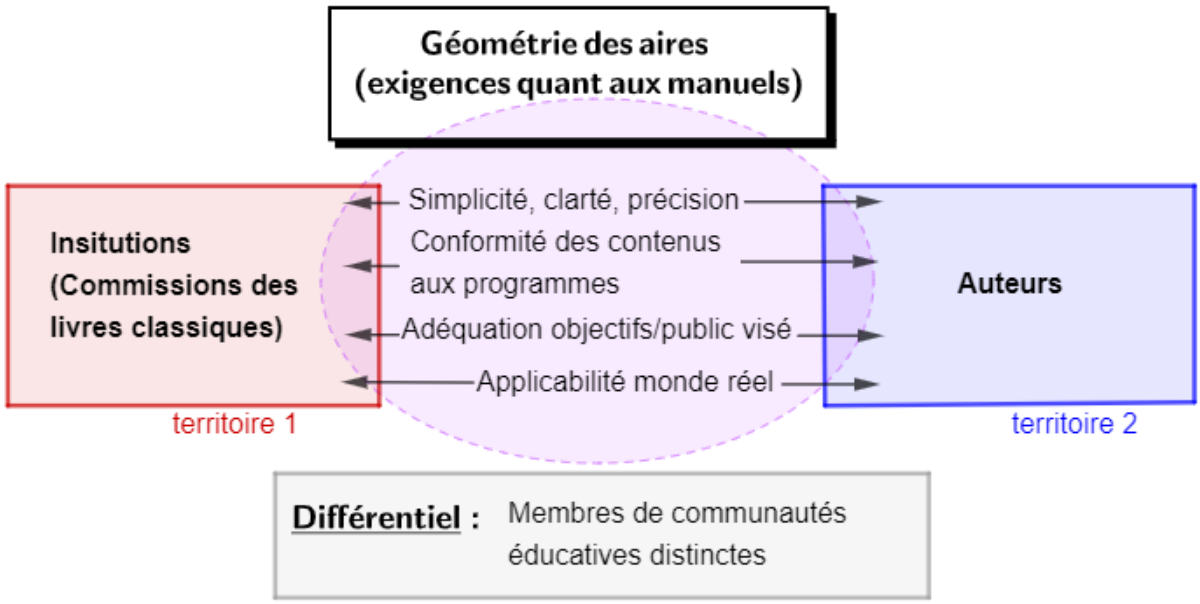


FIGURE II.4 – Schéma montrant en quoi les exigences pesant sur les manuels de géométrie, notamment au sujet des aires, sont à l'interface des institutions des livres classiques et des auteurs des ouvrages. Les doubles flèches matérialisent, dans un sens, les contraintes imposées par les membres des commissions pour la rédaction des ouvrages, et dans l'autre, les réponses que leur apportent les auteurs à travers le fond et la forme de leurs écrits, avec succès ou non.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

L'analyse de ces sources apporte ainsi un éclairage d'importance sur les mécanismes de l'acceptation d'un manuel scolaire de géométrie par les instances dédiées, et sur la difficulté pour les auteurs de se soumettre aux codes du genre. Cette étude joue également le rôle que nous en attendions initialement, en nous guidant dans le choix des ouvrages pour notre corpus : en effet, à l'issue de l'examen de ces sources, nous sommes en mesure d'écarter de notre sélection les ouvrages ayant été rejetés par la commission, et de privilégier au contraire l'introduction des titres ayant bénéficié d'une bonne critique de la part des autorités. L'un des objectifs de la constitution du corpus est de se montrer représentatif de l'offre en manuels de l'époque. Or, les titres approuvés présentent vraisemblablement davantage les caractéristiques attendues pour ce type d'ouvrages, dans le fond comme dans la forme.

II.1.4 Travaux des commissions, admissions d'ouvrages

En 1858, Gustave Rouland, alors ministre de l'Instruction Publique, revient à un système d'approbation pour les livres classiques, sur avis d'une instance ministérielle, nommée « commission pour l'examen des livres classiques », chargée de les évaluer. Elle est composée « des inspecteurs généraux des trois ordres et de sept membres nommés par le Ministre ». Le système de la mise à l'essai est abandonné. Le décret du 26 décembre 1858 précise néanmoins que « les auteurs [...] qui entendent faire usage de l'autorisation qui leur est accordée, sont tenus de reproduire textuellement, en tête de l'ouvrage, les termes mêmes de l'autorisation ministérielle » (Rouland, 1858b). Pour étudier les admissions d'ouvrages sous ce nouveau régime d'autorisation, ainsi que les suivants, les *AN* disposent, sous différentes cotes (voir le tableau II.3 p. 162), de documents relatifs aux travaux de cette commission, s'étalant de 1850 à 1886 [27].

Il n'est pas question ici d'étudier intégralement tous les examens relatifs aux titres soumis à l'approbation des instances d'examen des livres classiques, mais d'en dégager certains points caractéristiques. Dans cette section comme dans la précédente, l'objectif de l'analyse de ces documents est de mieux cerner les critères d'acceptation ou de refus des manuels de géométrie, de comprendre qui sont les experts auteurs de ces décisions et ce qui les anime dans leurs choix. La mise en parallèle de cette source administrative avec celle de nature éditoriale ayant permis d'évaluer le succès de certains auteurs et titres (voir la section I.2.2 p. 80), nous met en position de suivre le sort réservé aux auteurs prolifiques ou aux best-sellers dans ces instances. Nous

27. La date de 1850 correspond à la loi établie par Fortoul, instaurant un système de veto pour le privé et un système d'autorisation par ailleurs (voir la section II.1.2 p. 148). C'est alors au Conseil Supérieur de l'Instruction Publique que reviennent ces décisions.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

questionnons ainsi, à travers le parcours de certains manuels, le lien entre le succès d'édition et la reconnaissance institutionnelle des manuels de géométrie.

F/17/6684	1850-56	Liste des livres présentés à l'examen du conseil supérieur de l'Instruction Publique depuis la loi du 15/03/50	11
F/17/2784-2785	1852-58	Examen d'ouvrages classiques par les conseils académiques	23
F/17/2787	1859	Liste des ouvrages que le Ministre, après examen de la commission, a reconnu pouvoir être introduits dans les écoles publiques	6
F/17/2787	1859	Est ajournée l'introduction, dans les écoles publiques, des ouvrages suivants	8
F/17/2787	1859-63	Peuvent être introduits dans les écoles publiques les ouvrages ci-après désignés	5
F/17/2787	1859-64	Liste des ouvrages dont l'introduction dans les écoles publiques est sollicitée et que le ministre a reconnu pouvoir être soumis à l'examen du CI	13
F/17/2208-2209-2210	1860-64	Examen d'ouvrages classiques par la commission d'examen des livres classiques	24
F/17/2787-6882	1860-64	Procès-verbal des séances de la commission	30
F/17/2787	1861-62	Liste des ouvrages approuvés ou refusés	7
F/17/6882	1864	Liste des ouvrages à soumettre au Conseil Impérial (session du 10/11/1864)	1
F/17/6882	1864	Ouvrages soumis à l'examen du Conseil Impérial après avis défavorable de la commission	4
F/17/6684	1873-75	Liste des ouvrages admis par la commission des livres classiques, section 'science physiques et naturelles'	16
F/17/6885	1873-77	Lettres adressées à la commission des livres classiques	8
F/17/11655	1880	Liste des livres propres à être mis en usage dans les écoles primaires publiques	2
F/17/11656	1885-86	Liste des ouvrages adoptés pour les distributions de prix dans les établissements scolaires de la ville de Paris/Livres de bibliothèques	3
		Total :	**161**

TABLE II.3 – Dossiers relatifs aux travaux des commissions d'examen des livres classiques aux *AN*, décrits par les intitulés exacts reportés par les *AN*, classés par ordre chronologique. Les cotes identiques sont indiquées par une couleur spécifique

Au total, dans l'intervalle de temps considéré, ce sont 161 examens d'ouvrages qui ont été recensés dans l'ensemble des documents disponibles, ce qui représente 95 ouvrages distincts (beaucoup sont traités à plusieurs reprises, à des dates ou par des

Licence CC BY-NC-ND 3.0

commissions différentes), émanant de 84 auteurs ou groupes d'auteurs [28]. L'étude des demandes relatives au système de mise à l'essai décrit dans la section précédente apparaît sous la cote F/17/2784-2785 (voir la section II.1.3 p. 153). Elle comporte 23 « examens », c'est-à-dire 23 ouvrages de géométrie réellement examinés dans cette archive, pour 32 demandes dénombrées dans le tableau II.2 (p. 154), puisque certains ouvrages sont étudiés plusieurs fois par des commissions de différentes académies. La commission des livres classiques fournit un travail particulièrement riche de 1859 à 1864. Les titres mêmes des dossiers indiquent la marche suivie par les auteurs des ouvrages candidats à l'introduction dans les classes. Il s'agit d'abord de solliciter l'approbation du Ministre pour que l'ouvrage soit soumis à l'examen de la commission, puis qu'il se voit examiné par ses membres, avant d'obtenir une décision positive, un refus, ou un ajournement « jusqu'à correction » lorsque des modifications sont exigées. C'est au Conseil Impérial, donc au Ministre, de prendre la décision finale, sur avis de la commission (Choppin, 1986, p. 43). Supprimée en 1865 suite au changement du régime d'autorisation (désormais par *veto*), cette commission est rétablie en 1873 par le ministre Batbie, reformée en 1875 sous le ministère Wallon et remaniée en 1879 par Ferry (Choppin, 1986, p. 47-54). Les travaux de ces dernières commissions figurent dans les fonds d'archives décrites dans les quatre dernières lignes du tableau II.3 (p. 162).

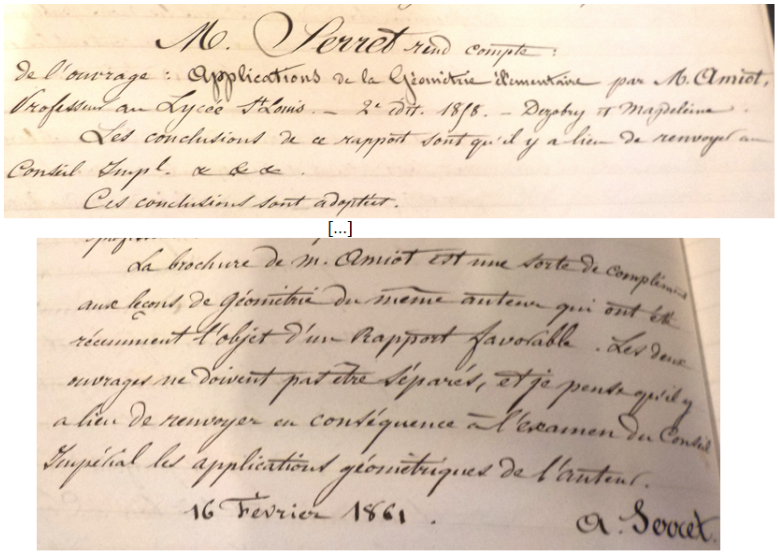
Nous proposons de suivre dans un premier temps plusieurs parcours de manuels à travers les méandres de ce système d'approbation. Le *Traité élémentaire sur les applications de la géométrie et de la trigonométrie* de Molins [29] bénéficie d'éloges qui lui permettent directement d'emporter l'accord ministériel, les inspecteurs généraux Faye et Le Verrier s'accordant pour lui trouver un « plan excellent » (F/17/2789 et F/17/2208-2209-2210). En 1859, le *Traité de géométrie appliquée, d'arpentage et de dessin linéaire* de Dupuis est soumis à l'examen de la commission, puis se voit « reconnu pouvoir être introduit dans les écoles publiques », avec pour précision qu'il est « admis dans les écoles primaires, normales primaires et école industrielles » (F/17/2788, 2789, et 2790). En 1859 et 1864, Catalan propose deux ouvrages, des *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire* et un *Traité élémentaire de géométrie descriptive*, qui seront tous les deux finalement admis en 1875, après avoir été temporairement ajournés « jusqu'à

28. Par exemple, même si Briot est l'un des auteurs, nous comptons comme des groupes d'auteurs distincts Briot seul, Briot et Vacquant, Briot et Bouquet, ou encore Briot et Martin.

29. Nous choisissons dans cette section de ne présenter par quelques éléments biographiques que les personnalités participant à la commission et non tous les auteurs qui leur soumettent leurs ouvrages. Il nous apparaît en effet important de connaître les statuts scientifiques et administratifs des individus décisionnaires dans ce type d'instances. Quant au profil des auteurs, il a été étudié globalement dans la première partie, et les éléments biographiques des rédacteurs des ouvrages du corpus retenu figurent en annexe.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

correction », et « lorsque l'auteur aura fait disparaître de sa préface certains passages signalés par le rapporteur » (F/17/2208-2209-2210, 2787, 2791, 2794, 6684, 6685, 6882). D'autres ouvrages ont des parcours plus accidentés, comme les *Leçons nouvelles sur les applications pratiques de la géométrie et de la trigonométrie* de Bourgeois et Cabart, qui sont examinées en 1859 par la commission avec à l'issue un avis favorable, et qui se voient finalement refusées pour les écoles publiques par la même instance en 1861, toujours dirigée par Le Verrier. Les *Éléments de géométrie* d'Amiot, au contraire, essuient de vifs reproches quant à son organisation, son découpage en leçons étant jugé inadmissible par Joseph-Alfred Serret[30], alors rapporteur de la commission en 1861. Ce dernier souligne cependant que cette mise en forme particulière semble dictée par les programmes officiels pour l'enseignement oral dans les lycées, et que l'ouvrage est par ailleurs grandement supérieur à ceux du même genre, par la simplicité et la rigueur de ses preuves. Il bénéficie de plus d'une bonne réception auprès des professeurs. Le manuel est ainsi renvoyé à l'examen du Conseil Impérial, qui décide d'approuver son usage dans les écoles publiques, accord qui se verra confirmé en 1880 pour les « école supérieures », c'est-à-dire les EPS. En revanche, les *Applications de la géométrie élémentaire* du même auteur seront plus controversées. Renvoyé en 1861 à l'examen du Conseil Impérial, le titre se verra refusé pour l'usage dans les écoles (F/17/2208-2209-2210, 2788, 2791, 6685, 6694, 11655) (voir figure II.5 p. 164).



[...]

M. Serret rend compte :

De l'ouvrage : Applications de la Géométrie élémentaire par M. Amiot, professeur au lycée Saint Louis. – 2e édit. 1858. – Dezobry et Magdeleine.

Les conclusions de ce rapport sont qu'il y a lieu de renvoyer au Conseil Imp[l] [Impérial] & & & [etc.].

Ces conclusions sont adoptées.

[...]

La brochure de M. Amiot est une sorte de complément aux leçons de géométrie du même auteur qui ont été récemment l'objet d'un rapport favorable. Les deux ouvrages ne doivent pas être séparés, et je pense qu'il y a lieu de renvoyer en conséquence à l'examen du Conseil Impérial les applications géométriques de l'auteur.

16 Février 1861.

A. Serret

FIGURE II.5 – Rapport effectué par Serret sur les *Applications de la géométrie élémentaire* d'Amiot en 1861 (extraits)

30. Joseph-Alfred Serret (1819 – 1885) est un astronome et mathématicien français. Il supplée Le Verrier à la chaire d'astronomie physique de la faculté des sciences entre 1856 et 1863, puis est nommé professeur de mécanique céleste au collège de France (François et Wauthier, 2017).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

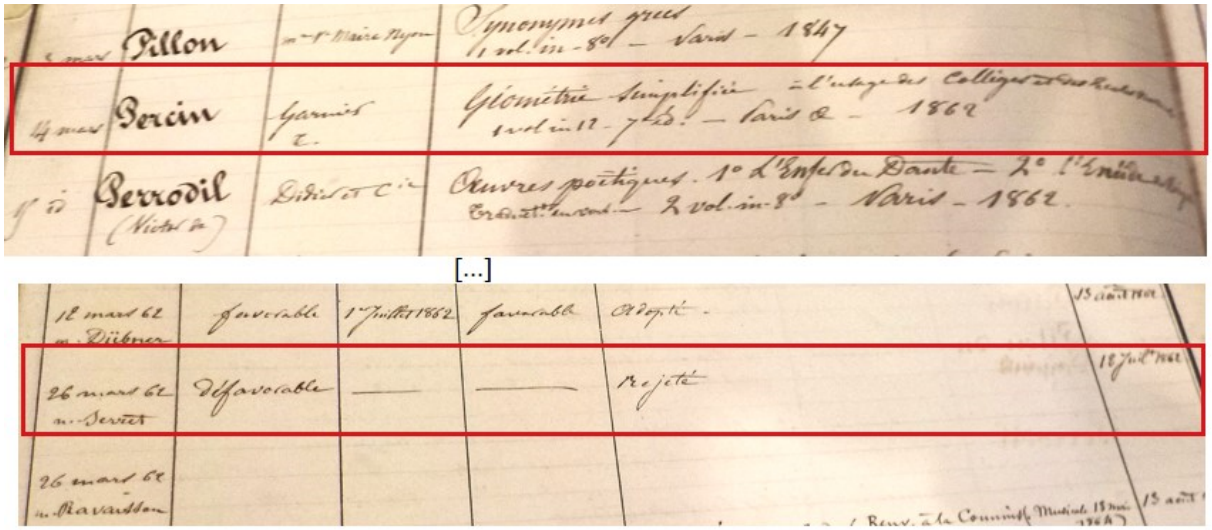
Les refus ne sont pas rares, y compris après des décisions d'ajournement, comme c'est le cas pour le *Cours élémentaire de dessin linéaire et d'arpentage* de Boyer, ajourné en 1859 pour modifications, et finalement refusé par la commission dirigée par Serret en 1863 (F/17/2208-2209-2210, 2787, 2792, et 6892). Les statistiques relatives à des séries de documents le montrent très bien : parmi les 24 « examens d'ouvrages » réalisés entre 1860 et 1864, 18 donnent lieu à un avis exprimé (6 ne sont pas tranchés), dont 4 acceptations, 1 ajournement et 13 refus (plus de 72 % des décisions prises) (F/17/2208-2209-2210). Les procès-verbaux relatifs aux 30 examens d'ouvrages dressés sur cette même période se partagent en 5 accords, un ajournement et 24 avis défavorables (soit 80 % des PV) (F/17/2787 et 6822). La commission se montre alors particulièrement sévère quant aux manuels qu'elle évalue (voir figure II.6 p. 166). Ces refus touchent particulièrement les ouvrages traitant de trigonométrie, avec 5 refus sur 6 propositions. En revanche, les manuels de géométrie pratique, appliquée à l'arpentage ou au dessin linéaire, sont refusés à un peu plus de 70 % (12 refus sur 17 titres proposés), ce qui est comparable au bilan similaire concernant les ouvrages de géométrie théorique, ou encore élémentaire, qui comptent 9 refus sur 13 titres (soit environ 69 % d'entre eux). Concernant les applications de la géométrie, qui renferment souvent de larges parties sur le mesurage des aires, les seuls titres approuvés par la commission à la date de 1864 sont ceux d'Amiot[31], de Molins et de Briot et Vacquant. La commission ne se montre pas clémente envers des auteurs tels que Guilmin ou Puille, dont leurs ouvrages se voient systématiquement écartés des listes officielles[32]. Cela ne les empêche pourtant pas de figurer parmi les auteurs les plus prolifiques de leur époque (voir la section I.2.2 p. 80), aux 3ème (Guilmin) et 14ème (Puille) places des auteurs présentant le plus d'éditions d'ouvrages sur la période d'étude, avec des longévités éditoriales de respectivement 40 et 36 ans (voir tableau I.11 p. 84), et plaçant quatre de leurs ouvrages dans le classement des manuels les plus souvent réédités (voir tableau I.8[33] p. 83). Ces exemples montrent que la reconnaissances institutionnelle accordée par la commission n'est pas forcément nécessaire pour faire d'un ouvrage un succès éditorial.

31. Même si ce dernier s'est vu rebouté ensuite par le Conseil Impérial comme nous l'avons vu p. 164.

32. Les raisons de ces évictions ne sont pas argumentées pour les ouvrages de géométrie, mais les manuels d'arithmétique de Guilmin essuient pour leur part de vives critiques. Le rapporteur Faye lui reproche d'employer « un langage dépourvu de l'élégance et de la précision que comporte tout livre d'enseignement » (F/17/2208).

33. Dans ce classement, le *Cours de géométrie élémentaire* de Guilmin figure en première position, avec 26 (ré-)éditions, son *Cours élémentaire de géométrie* en 3ème position avec 25 (ré-)éditions, les *Leçons normales de géométrie élémentaire* de Puille arrivent en 6ème, avec 20 (ré-)éditions, suivies de son *Cours complet d'arpentage élémentaire*, 12ème avec 18 (ré-)éditions.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



14 mars	Percin		Garnier E.		Géométrie simplifiée à l'usage des collèges 1 vol in 12 – 7e éd. – Paris – 1862

26 mars 62 Mr Serret	défavorable	–	–	rejeté	18 juillet 1862

FIGURE II.6 – Procès-verbal de la commission concernant la *Géométrie simplifiée* de Percin en 1862, décision de rejet après un avis défavorable de Serret

Les listes d'ouvrages autorisés pour être introduits dans les classes se complètent ainsi progressivement, suite aux travaux de la commission, et donnent lieu à des « admissions d'ouvrages » officielles, qui paraissent dans les *Bulletins Administratifs de l'Instruction Publique* (*BAIP*). Ces nouveaux titres sont présentés dans le tableau II.4 (p. 167). Cette liste confirme l'étude réalisée précédemment, puisqu'y figurent les manuels de Molins et Briot et Vacquant, mais aussi les *Éléments de géométrie* d'Amiot, dont nous avons exploré le parcours antérieurement. Les admissions des livres de Briot et Boucquet, Dupuis, et la confirmation de celui de Lacroix, sont traitées dans une autre archive, qui indique bien les avis favorables qu'ils ont reçus de la commission de Le Verrier en 1859 (F/17/2787). Après 1865, le système du « véto » reprend ses droits dans l'enseignement public (voir la figure II.1 p. 149), mais on peut trouver des admissions d'ouvrages dans les *BAIP* concernant l'enseignement spécial de 1866 à 1868, soit juste après la réforme de cet ordre d'enseignement (Belhoste, 1995, p. 413). Les deux ouvrages concernés ont été rajoutés dans le tableau II.4 (p. 167). Finalement, assez rares sont les titres ayant franchi tous les obstacles institutionnels les menant à l'approbation ministérielle, des mises à l'essai des années 1854-58 aux travaux de la commission de 1859 à 1864.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

	Auteur	Année d'auto-risation	Titre	Référence
	Briot C. et Boucquet C.	1860	Leçons nouvelles de trigonométrie	BAIP1 tome 11 n°127, p.213-215
	Dupuis J.	1860	Traité de géométrie appliquée, d'arpentage et de dessin linéaire	
	Amiot A.	1861	Eléments de géométrie	BAIP1 tome 12 n°139, p.120-124
	Lacroix S. F.	1861	Eléments de géométrie	
	Molins H.	1861	Traité élémentaire sur les applications de la géométrie et de la trigonométrie	
	Legendre A. M.	1862	Eléments de géométrie	BAIP1 tome 13 n°152, p.158-163
	Briot C.	1863	Arpentage, lever des plans et nivellement	BAIP1 tome 14 n°163, p.151-156
	Briot C. et Vacquant C.	1863	Eléments de géométrie	
	Olivier T.	1863	Cours de géométrie descriptive	
spécial	Kiaes J	1866	Cours élémentaire de géométrie descriptive	BAIP2 tome 6 n°125, p.711-712
spécial	Bezodis A.	1868	Notions élémentaires sur les courbes usuelles	BAIP2 tome 9 n°170, p.262-263

TABLE II.4 – Liste des ouvrages officiellement admis de 1860 à 1868 (*BAIP*, références précises par admission dans le tableau)

Les travaux ultérieurs à 1873 ne se traduisent pas par des admissions officielles d'ouvrages repérables dans les *BAIP*. Certes, les *Bulletins* comprennent des textes rendant compte du fonctionnement de la commission, mais sans produire de listes telles que celles reportées précédemment. Pourtant, dans un texte de 1875 signé par le ministre Wallon, il est prévu que soient dressées trois listes « des livres en usage », la première « dans les lycées et collèges », la seconde « dans les écoles normales primaires », et la dernière « dans les écoles primaires publiques ». Pour l'enseignement primaire, un catalogue est annexé au décret, dans lequel figure la seule *Géométrie pratique* de Sardan, dont nous n'avons pas la trace dans les documents d'archives consultés (Wallon, 1875). La liste pour les collèges et lycées est manifestement celle qui apparaît sous le titre « Liste des ouvrages admis par la commission des livres classiques, sections "sciences physiques et naturelles" », dans le carton coté F/17/6684. Il y figure 16 ouvrages de géométrie, dont 3 de géométrie descriptive, 4 de trigonométrie et 4 de géométrie analytique, auxquels se rajoutent 5 titres de géométrie élémentaire, théorique et/ou pratique. En plus des ouvrages de Catalan et Lacroix déjà rencontrés dans les périodes précédentes, de nouveaux titres émergent, comme ceux de Vacquant (*Précis de géométrie*), de F. P. B. (*Extrait de l'abrégé de géométrie appliquée au dessin linéaire*), et de Rouché et Comberousse (*Éléments de géométrie*). Deux titres supplémentaires sont recommandés en 1880 pour les écoles primaires supérieures, les *Éléments de géométrie* d'Amiot et les *Éléments de tachymétrie* de Lagout, suivis de la *Géométrie pratique* de Jourdan en 1885 (F/17/11655). Le « Conseil supérieur de l'enseignement secondaire spécial » approuve quant à lui les éléments de Compagnon en 1873 (F/17/6885). Enfin,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

certains ouvrages sont conseillés comme livres de bibliothèque, mais plutôt à l'usage des maîtres, comme le *Nouveau cours de géométrie* d'André et la *Nouvelle géométrie* de Fabre en 1886 (F/17/11655). Il est manifeste, à travers ces derniers travaux, que les avis des instances officielles concernant les ouvrages classiques dépendent très nettement des publics auxquels ils se destinent.

L'offre de manuels de géométrie approuvés par l'administration de l'Instruction Publique s'étoffe donc tout au long de la période, au gré des mouvances de la législation. Dans les méandres du système officiel d'approbation des livres classiques, des auteurs s'en sortent avec brio, passant les étapes successives jusqu'à obtenir l'adoption de leurs ouvrages par l'institution. D'autres voient leur accès aux listes officielles refusé, ce qui ne les empêche pas toujours de bénéficier d'une bonne réception chez leurs confrères enseignants et de rencontrer des succès éditoriaux. À travers les sources consultées, nous sommes à même de mieux comprendre les exigences des commissions des livres classiques quant aux propositions des auteurs en géométrie. L'un des faits marquants est la sévérité globale des décisions de leurs membres, ainsi que le conditionnement de leur approbation ou refus aux publics auxquels se destinent les ouvrages. Dans ce contexte, il nous paraît raisonnable de relativiser cet avis institutionnel, dans la mesure où les rapporteurs, issus des élites scientifiques et/ou administratives, présentent des avis parfois en contradiction avec ceux des usagers (professeurs et élèves) des ouvrages considérés. Nous nous donnons donc la possibilité de retenir pour notre corpus des titres qui n'ont pas toujours reçu d'approbation officielle de la part de ces commissions, mais qui ont néanmoins rejoint les salles de classe pour l'enseignement de la géométrie, comme en témoignent en particulier leurs succès éditoriaux.

En plus des interfaces mises en évidence, lors de l'étude des campagnes de mise à l'essai, entre les auteurs des manuels et les commissions des livres classiques (voir figure II.4 p. 160), nous voyons dans cette section entrer en jeu les usagers des manuels de géométrie. Les interactions entre ces trois groupes d'individus peuvent être synthétisées par le schéma II.7 (p. 169). L'analyse de ces documents présente un autre intérêt, que nous n'avions pas anticipé : elle souligne de nouveau la diversité des courants de l'enseignement de la géométrie. En effet, nous constatons que parmi les ouvrages soumis aux commissions d'admission, les géométries élémentaires et pratiques partagent le tableau avec les géométries descriptives, analytiques, ou encore la trigonométrie. Les sources consultées sont donc des plus précieuses, non seulement pour comprendre les rouages des commissions des livres classiques, et en particulier pour en saisir les enjeux et objectifs, mais également pour cerner les particularités des manuels de géométrie de l'époque. C'est donc l'ensemble de ce travail qui nous

Licence CC BY-NC-ND 3.0

guide dans la sélection de manuels que nous avons à effectuer pour la suite de nos recherches au sujet de la géométrie des aires.

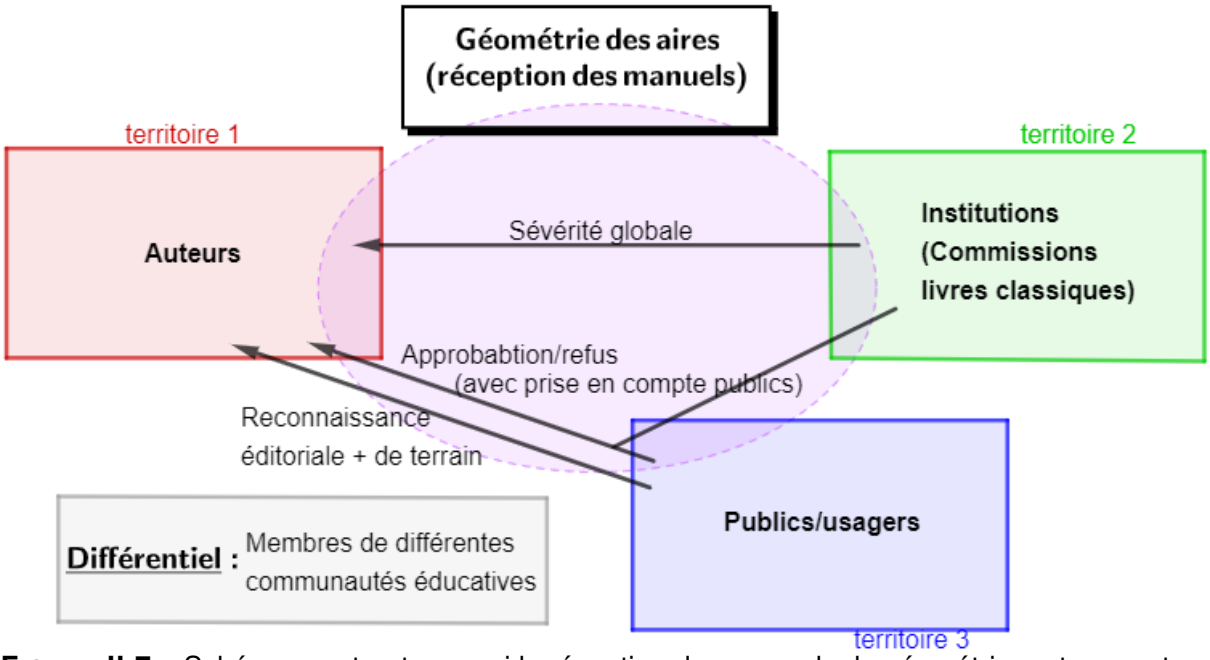


FIGURE II.7 – Schéma montrant en quoi la réception des manuels de géométrie, notamment au sujet des aires des aires, est à l'interface des institutions des livres classiques, des auteurs et des usagers des ouvrages

II.1.5 Listes départementales (1882 – 1889)

Enfin, une grande campagne de recensement des ouvrages « mis entre les mains des élèves » dans l'enseignement primaire a lieu entre 1882 et 1889. Des listes de « livres classiques » sont alors réalisées en conférences cantonales d'instituteurs et centralisées par département pour être transmises au ministère de l'instruction publique[34]. Cette campagne est décrite par Buisson dans un rapport adressé à Ferry en 1879 en ces termes :

> Il faut seulement que cette manifestation de leurs préférences raisonnées [au sujet des livres classiques, N.D.L.R] soit entourée de toutes les garanties d'examen sérieux et, pour cela, qu'elle ait lieu dans les conférences ou réunions générales des instituteurs publics de chaque canton. [...] Ils dresseront donc, dans les meilleurs conditions possibles, la liste provisoire des livres scolaires qu'ils demandent à s'imposer à eux-mêmes[35]. (cité dans

34. Ces listes figurent aux *AN* (cotes F/17/11652, 11653 et 11654).
35. Un règlement du 2 juillet 1875 prévoyait initialement que les enseignants proposent à leur hiérarchie les titres des ouvrages qu'ils souhaitaient utiliser l'année suivante, et que la liste récapitulative alors dressée soit soumise à une commission nationale afin de procéder à d'éventuelles éliminations. Ce

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Choppin, 1992, p. 38)

Le dépouillement complet de ces documents officiels a permis de dénombrer 279 listes, émanant des 90 départements qui composent les 16 académies françaises, incluant la toute jeune académie d'Alger, créée en 1831 suite à l'occupation française de l'Algérie (voir la figure II.8 p. 171). Ces documents, qui n'ont pas à notre connaissance donné lieu à un dépouillement systématique tel que nous le proposons, constituent de bons indicateurs pour la reconnaissance sur le terrain des manuels de géométrie par les enseignants de l'ordre primaire durant le dernier quart de siècle. De plus, alors que le système d'approbation des livres scolaires s'est stabilisé sur le principe du *veto*, les sources officielles au sujet des manuels se font plus rares. Cette étude permet ainsi de compléter les informations recueillies jusqu'alors, à la fois temporellement, puisqu'elle couvre une période non abordée lors de l'examen des travaux des commissions des livres classiques, et également par la nature des documents consultés, puisqu'ils se font l'écho de l'emploi des manuels de géométrie que déclarent les enseignants du primaire sur le terrain. Nous pouvons alors croiser les données relatives à la reconnaissance institutionnelle de certains titres et leurs usages effectifs dans les classes. Un autre point de vue émerge de cette analyse, en complément de ceux précédemment évoqués : il s'agit d'une approche géographique permise par le caractère départemental de la source, qui va nous apporter un éclairage sur la diffusion territoriale des manuels dans les écoles.

---

dispositif s'est vu remplacé très rapidement par la démarche collective et plus locale citée ci-avant (Choppin, 1992, p. 39).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

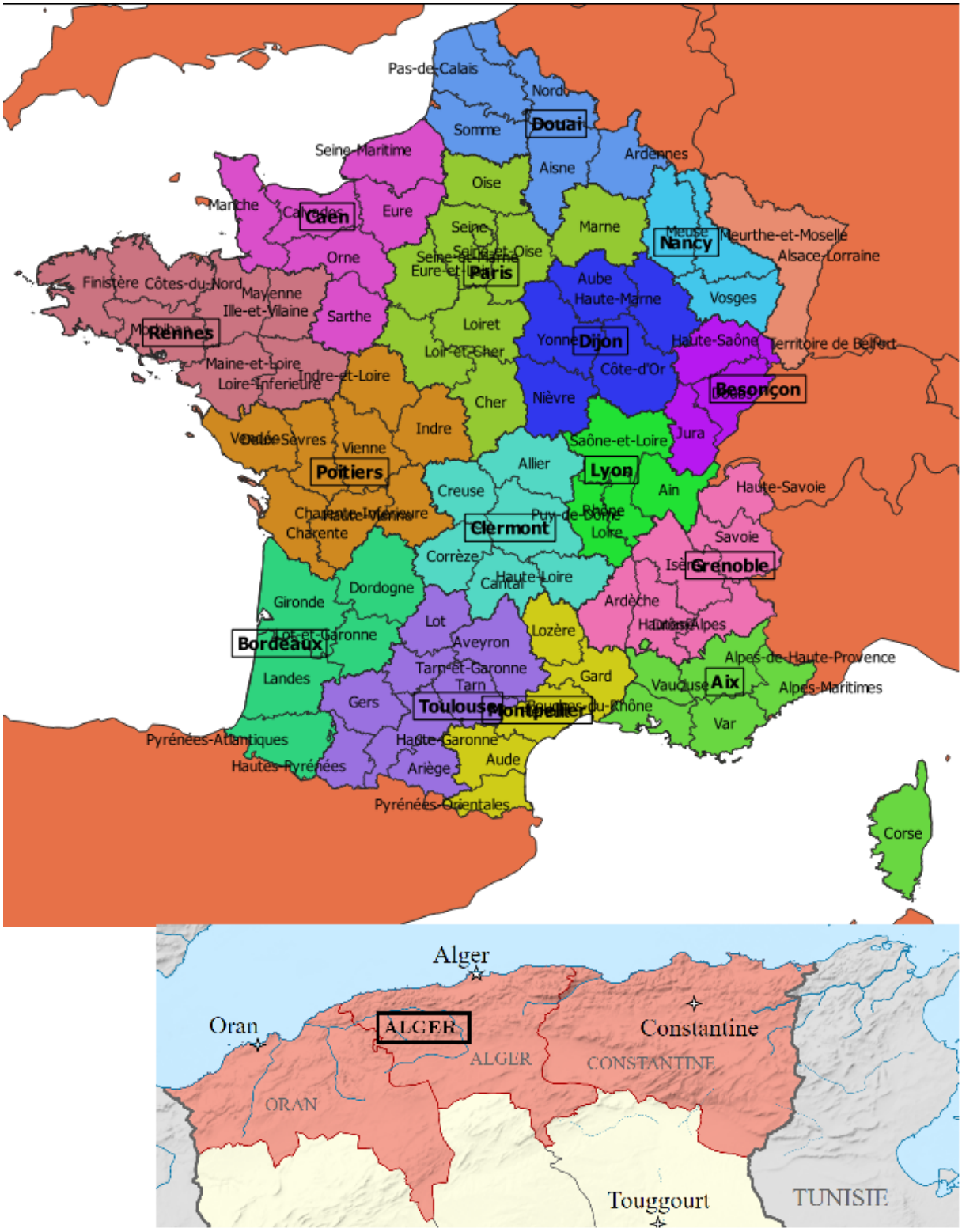
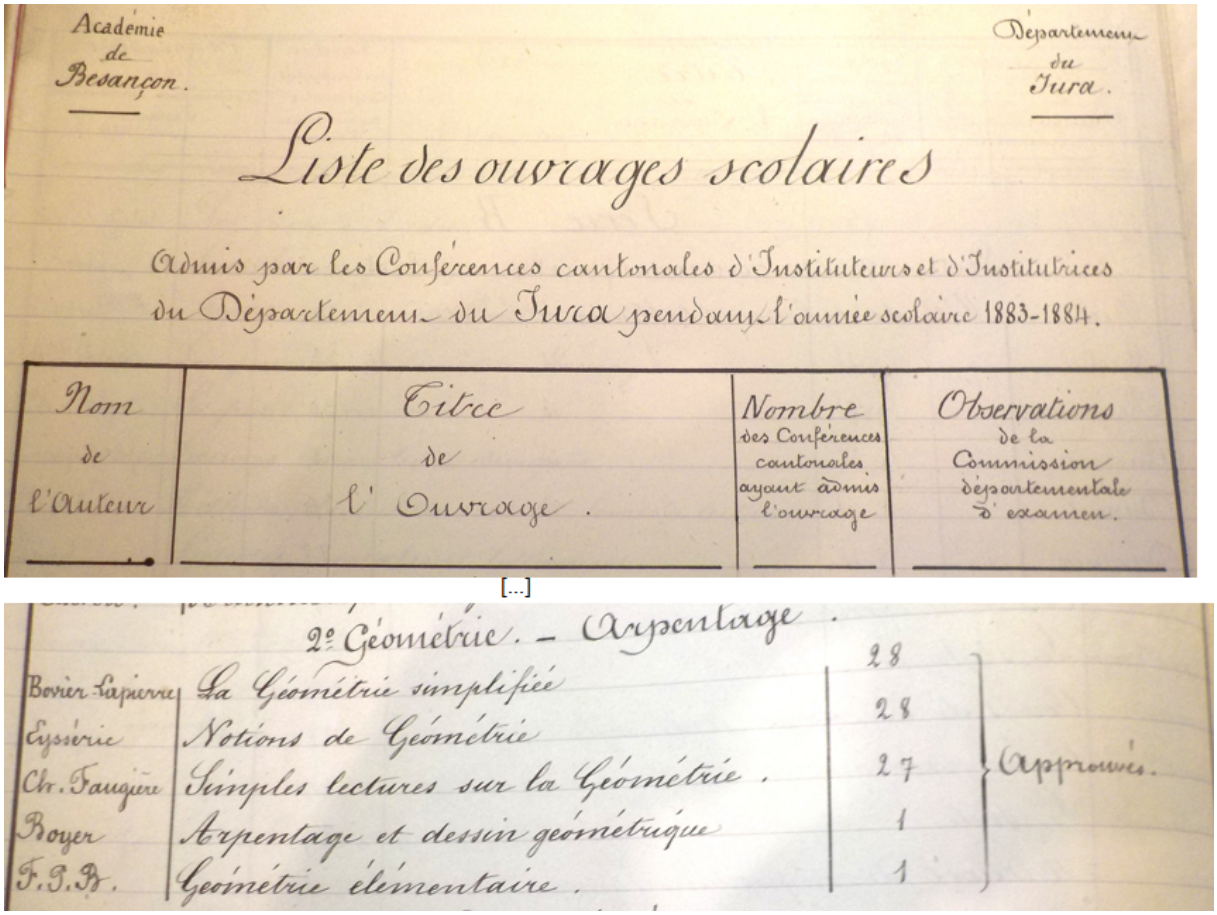


FIGURE II.8 – Carte des académies en France durant le XIXe siècle, réalisée par Sylvain Audel, géomaticien à l'IGN, à partir d'une carte muette des départements français de 1884 (*(France muette)* 1884)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Plus précisément, les données recensées dans ces listes, manuscrites ou dactylographiées, comportent une période (année scolaire où la liste a été dressée), un lieu (département concerné, dans l'académie de référence), des noms d'auteurs et les titres de leurs ouvrages, souvent assez approximatifs, classés par séries de disciplines scolaires [36], parfois une colonne indiquant le nombre de conférences cantonales ayant admis l'ouvrage, suivie d'une autre contenant d'éventuelles « observations de la commission départementale d'examen » (voir figure II.9 p. 172). Certains départements font figurer les noms des éditeurs et/ou les prix des livres, en plus ou à la place des deux dernières colonnes mentionnées (voir figure II.11 p. 174). Enfin, et plus rarement, des informations sur les niveaux des classes concernées par l'ouvrage sont fournies (voir figure II.10 p. 173).



Académie de Besançon.

Département du Jura.

Liste des ouvrages scolaires

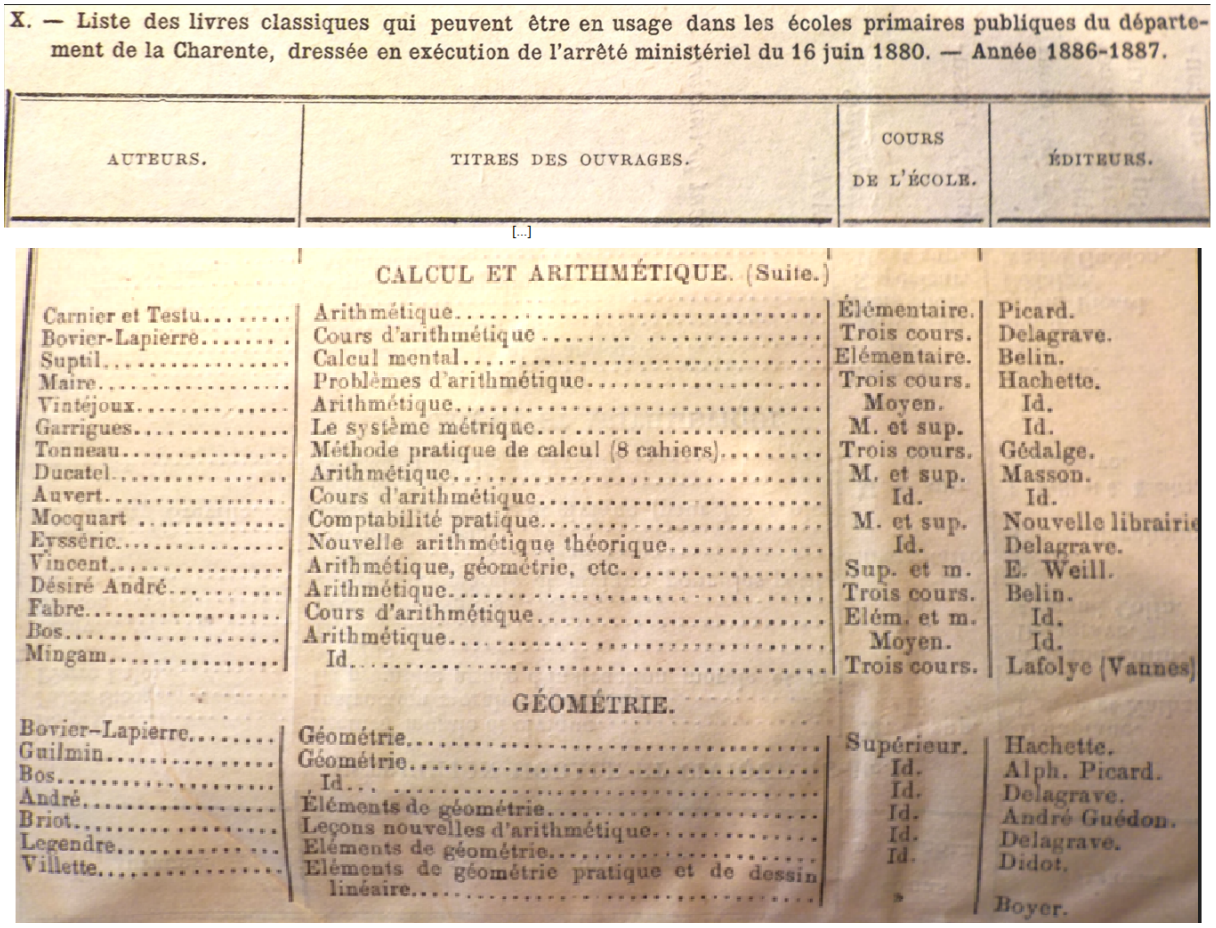
Admis par les Conférences cantonales d'Instituteurs et d'Institutrices du Département du Jura pendant l'année scolaire 1883-1884.

Nom de l'Auteur	Titre de l'Ouvrage.	Nombre des Conférences cantonales ayant admis l'ouvrage	Observations de la Commission départementale d'examen.
[...]			
2e Géométrie. – Arpentage.			
Bovier Lapierre	La Géométrie simplifiée	28	Approuvés.
Eysérie	Notions de Géométrie	28	
Ch. Faugère	Simples lectures sur la Géométrie.	27	
Boyer	Arpentage et dessin géométrique	1	
F.S.B.	Géométrie élémentaire.	1	

FIGURE II.9 – Extrait de la liste des ouvrages scolaires admis par les conférences cantonales du Jura pour l'année scolaire 1883-1884, catégorie « géométrie, arpentage » (F/17/11652)

36. La série qui nous intéresse est la série E qui regroupe les manuels d'« arithmétique, système métrique, arithmétique appliquée, géométrie, arpentage ». Elle est parfois déclinée en sous rubriques comme « calcul et arithmétique » et « géométrie » (voir figure II.10 p. 173).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



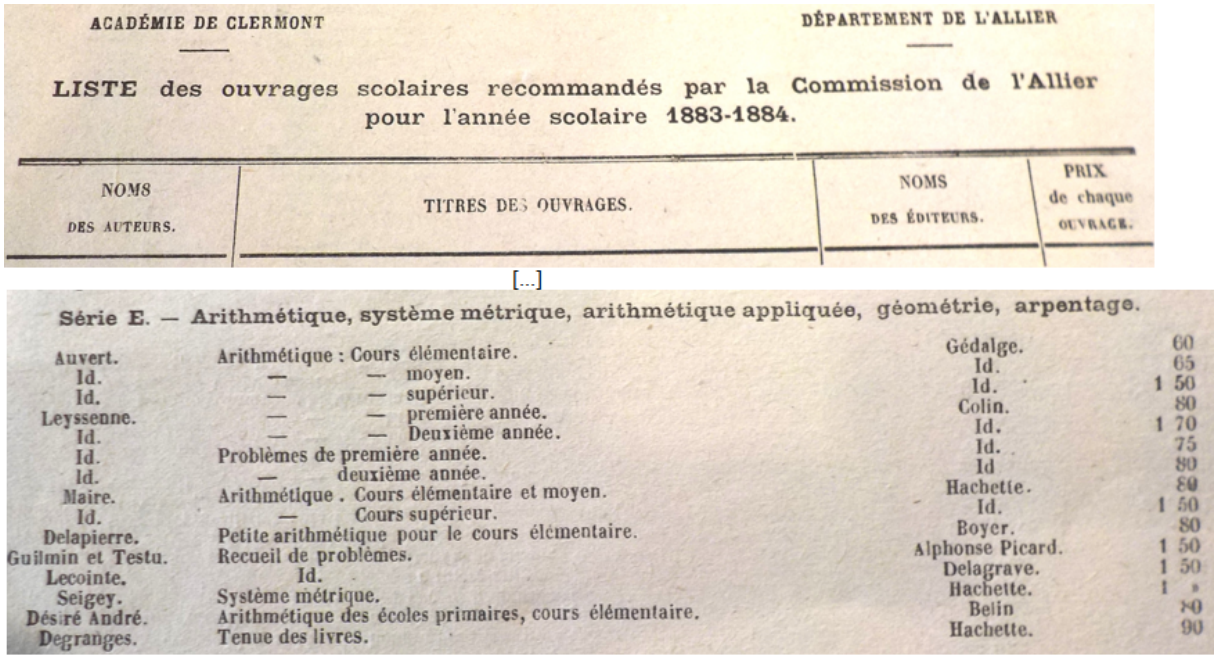
X. — Liste des livres classiques qui peuvent être en usage dans les écoles primaires publiques du département de la Charente, dressée en exécution de l'arrêté ministériel du 16 juin 1880. — Année 1886-1887.

AUTEURS.	TITRES DES OUVRAGES.	COURS DE L'ÉCOLE.	ÉDITEURS.
[...]			
	CALCUL ET ARITHMÉTIQUE. (Suite.)		
Carnier et Testu	Arithmétique	Élémentaire.	Picard.
Bovier-Lapierre	Cours d'arithmétique	Trois cours.	Delagrave.
Suptil	Calcul mental	Elémentaire.	Belin.
Maire	Problèmes d'arithmétique	Trois cours.	Hachette.
Vintéjoux	Arithmétique	Moyen.	Id.
Garrigues	Le système métrique	M. et sup.	Id.
Tonneau	Méthode pratique de calcul (8 cahiers)	Trois cours.	Gédalge.
Ducatel	Arithmétique	M. et sup.	Masson.
Auvert	Cours d'arithmétique	Id.	Id.
Mocquart	Comptabilité pratique	M. et sup.	Nouvelle librairie
Eysséric	Nouvelle arithmétique théorique	Id.	Delagrave.
Vincent	Arithmétique, géométrie, etc.	Sup. et m.	E. Weill.
Désiré André	Arithmétique	Trois cours.	Belin.
Fabre	Cours d'arithmétique	Elém. et m.	Id.
Bos	Arithmétique	Moyen.	Id.
Mingam	Id.	Trois cours.	Lafolye (Vannes)
	GÉOMÉTRIE.		
Bovier-Lapierre	Géométrie	Supérieur.	Hachette.
Guilmin	Géométrie	Id.	Alph. Picard.
Bos	Id.	Id.	Delagrave.
André	Éléments de géométrie	Id.	André Guédon.
Briot	Leçons nouvelles d'arithmétique	Id.	Delagrave.
Legendre	Eléments de géométrie	Id.	Didot.
Villette	Eléments de géométrie pratique et de dessin linéaire	»	Boyer.

FIGURE II.10 – Extrait de la liste des livres classiques qui peuvent être mis en usage dans les écoles de Charente pour l'année scolaire 1886-1887, catégories « calcul et arithmétique » et « géométrie » (F/17/11654)

Certaines listes comportent des dizaines de titres pour la section E, et parfois jusqu'à 20 titres de géométrie (c'est le cas de la liste de la Somme de 1887, sur une liste de 52 titres de mathématiques (F/17/11653)), alors que dans d'autres départements, on se limite à quelques noms et titres, voire aucun, comme dans le Maine-et-Loire en 1882-83 et 1883-84, où il est mentionné qu'« aucun livre ne sera mis entre les mains des élèves » (F/17/11652).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



ACADÉMIE DE CLERMONT — DÉPARTEMENT DE L'ALLIER

LISTE des ouvrages scolaires recommandés par la Commission de l'Allier pour l'année scolaire 1883-1884.

[...]

Série E. — Arithmétique, système métrique, arithmétique appliquée, géométrie, arpentage.

NOMS DES AUTEURS.	TITRES DES OUVRAGES.	NOMS DES ÉDITEURS.	PRIX de chaque OUVRAGE.
Auvert.	Arithmétique : Cours élémentaire.	Gédalge.	60
Id.	— — moyen.	Id.	65
Id.	— — supérieur.	Id.	1 50
Leyssenne.	— — première année.	Colin.	80
Id.	— — Deuxième année.	Id.	1 70
Id.	Problèmes de première année.	Id.	75
Id.	— deuxième année.	Id	80
Maire.	Arithmétique . Cours élémentaire et moyen.	Hachette.	80
Id.	— Cours supérieur.	Id.	1 50
Delapierre.	Petite arithmétique pour le cours élémentaire.	Boyer.	80
Guilmin et Testu.	Recueil de problèmes.	Alphonse Picard.	1 50
Lecointe.	Id.	Delagrave.	1 50
Seigey.	Système métrique.	Hachette.	1 »
Désiré André.	Arithmétique des écoles primaires, cours élémentaire.	Belin	»0
Degranges.	Tenue des livres.	Hachette.	90

FIGURE II.11 – Extrait de la liste des ouvrages scolaires recommandés par la Commission de l'Allier pour l'année scolaire 1883-1884, série E (F/17/11652)

Les données que présente cette source sont très riches et sont de nature à nous servir d'appui pour la composition finale de notre corpus. Nous les avons traitées à la fois quantitativement et qualitativement, en suivant plusieurs approches. La première consiste à mettre l'accent sur les auteurs et leurs titres, afin de déterminer lesquels ont été numériquement les plus cités. Cependant, nous faisons le choix à ce stade de ne pas prendre en compte les valeurs indiquant le nombre de conférences cantonales ayant approuvé les manuels. La première raison est que cette information n'est disponible que pour une partie des listes, et la seconde est de rester à l'échelle des départements, suffisante pour l'analyse globale que nous souhaitons mener. Un autre point de vue est l'angle géographique, avec une synthèse des ouvrages cités par académie, puis une étude des occurrences de certains auteurs sur le territoire français, afin d'observer si des spécificités régionales se dégagent, et si ces dernières sont en lien avec les parcours personnels et professionnels des auteurs. Ensuite, c'est sous une perspective chronologique que nous allons étudier nos données, ce qui nous permettra de déterminer d'éventuelles évolutions dans les manuels cités par les praticiens de l'enseignement primaire. Enfin, nous prendrons en compte d'autres caractéristiques pour guider notre choix final, comme les publics auxquels les livres semblent se destiner, ou encore le lien entre les classements issus de ces listes et ceux des best-sellers ou auteurs prolifiques réalisés précédemment (voir la section I.2.2 p. 80).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Questions :

- **Les listes départementales traduisent-elles l'adhésion des professionnels de l'instruction primaire à des manuels de géométrie par ailleurs préconisés par les institutions (programmes, listes officielles, travaux des commissions des livres classiques) ?**
- **La reconnaissance des enseignants du primaire sur le terrain va-t-elle de pair avec le succès éditorial ?**
- **Les ouvrages qui se distinguent par leur fréquence d'apparition dans les listes départementales sont-ils les mêmes que ceux relevés dans les sources consultées auparavant, et pourquoi ?**

Méthode : Le recensement des données présentes dans les documents décrits ci-avant a permis de dresser les listes de tous les auteurs et titres qui y figurent sur l'ensemble de la période, soit dans la sous-catégorie de la série E « géométrie » lorsqu'elle existe, soit en repérant les mots-clés liés à la géométrie dans les titres consignés dans les listes. En tout, une centaine d'ouvrages de géométrie sont recensés, dont nous avons choisi de présenter ceux qui apparaissent au moins 10 fois dans l'ensemble des ces listes. Dans ce premier tableau, les titres sont relevés aussi précisément que les formulations des listes le permettent. Les titres potentiellement identifiés figurent entre parenthèses, suivis de points d'interrogation. Le second tableau présente le classement des auteurs les plus cités, tous ouvrages confondus. Le nombre d'ouvrages identifiés dans les listes et émanant de ces auteurs figure dans la colonne suivante, ainsi que le nombre moyen d'occurrences par titre, obtenu en divisant le nombre total d'occurrences liées à un auteur par le nombre de ses ouvrages identifiés. Les auteurs apparaissent dans le tableau dans l'ordre décroissant de ce nombre moyen d'occurrences par titre, indicateur qui semble plus pertinent pour rendre comparable leur popularité auprès des enseignants.
Exemple : L'auteur André P. est mentionné 151 fois dans l'ensemble des listes dépouillées, et ce relativement à 3 de ses titres identifiés dans ces listes. En moyenne, chacun de ses ouvrages est donc cité environ 50,3 fois. Premier auteur cité en terme d'occurrences totales, il figure en 3ème position du classement ramené au nombre moyen d'occurrences par titres.
Résultats : Voir les tableaux II.5 p. 176 et II.6 p. 177.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Titre (ou titre supposé)	Auteur	Nombre d'occurrences
Géométrie (élémentaire ?, éléments ?)	André P.	121
Eléments d'arithmétique et de géométrie	Vintéjoux F.	107
Géométrie (simplifiée) 2 cours	Bovier-Lapierre G.	86
Cours de géométrie élémentaire	Guilmin A.	78
Arpentage	Briot C. et Vacquant C.	68
Takymétrie (éléments de)	Dalsème J.	64
Eléments de géométrie (Théorie)	Eysseric A. D. et Pascal J. C.	57
Algèbre et trigonométrie appliquée	Rebière A.	46
Eléments de géométrie	Rebière A.	40
Cours de géométrie	Bourget J.	39
Petite géométrie (notions de géométrie pratique et d'arpentage ?)	Eysseric A. D.	39
Eléments de géométrie	Bert P.	37
Géométrie (élémentaire)	Bos H.	35
Premières notions de géométrie	Hément F.	35
Arithmétique et géométrie	Combette E.	32
Arpentage et nivellement	Puille D.	32
Cours de géométrie	Girod F.	31
Simples lectures sur la géométrie	Faugière C.	28
Eléments de géométrie pratique	Bovier-Lapierre G.	27
Tableaux de géométrie	Leyssenne P. et Bastien	27
Traité de géométrie théorique et pratique	Eysseric A. D. et Pascal J. C.	26
Eléments de géométrie	Legendre A. M. (et Blanchet A.)	25
Premières notions de géométrie	Rebière A.	25
Nouveau cours de géométrie (et arpentage)	André P.	24
Géométrie	Burat E. (et Bos H.)	21
Eléments de géométrie	Amiot A.	20
Géométrie arpentage (traité de géométrie appliquée ?)	Dupuis J.	20
Géométrie	F. P. B. (ou F. J. C.)	20
Géométrie pratique	Legros L.	17
Eléments de géométrie pratique et de dessin linéaire	Villette T.	16
Arithmétique, géométrie ...	Vincent P. et Huguet J.	16
Cours d'arpentage (maths appliquées ?)	Guilmin A.	14
Eléments de géométrie (géométrie élémentaire)	Fabre J. H.	12
Géométrie pratique (takymétrie)	Lagout E.	11
Formulaire mathématique	Pourret L.	10
Cours de géométrie (géométrie théorique et pratique ?)	Sonnet H.	10
Géométrie pratique (petit traité de)	Tarnier E. A.	10

TABLE II.5 – Ouvrages de géométrie recensés dans les listes départementales de 1882 à 1889, et y apparaissant au moins 10 fois

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Auteurs	Nombre total d'occurrences	Nombre de titres identifiés	Occurrence moyenne /titre
Vintéjoux F.	107	1	107.0
Briot C. et Vacquant C.	68	1	68.0
André P.	151	3	50.3
Guilmin A.	92	2	46.0
Eysseric A. D. et Pascal J. C.	83	2	41.5
Eysseric A. D.	39	1	39.0
Rebière A.	111	3	37.0
Bert P.	37	1	37.0
Hément F.	35	1	35.0
Combette E.	32	1	32.0
Puille D.	32	1	32.0
Bovier-Lapierre G.	121	4	30.3
Faugière C.	28	1	28.0
Leyssenne P. et Bastien	27	1	27.0
Dalsème J.	77	3	25.7
Legendre A. M. (et Blanchet A.)	25	1	25.0
Burat E. (et Bos H.)	21	1	21.0
Bourget J.	40	2	20.0
Dupuis J.	20	1	20.0
Bos H.	36	2	18.0
Legros L.	17	1	17.0
Villette T.	16	1	16.0
Vincent P. et Huguet J.	16	1	16.0
Amiot A.	24	2	12.0
Fabre J. H.	12	1	12.0
Lagout E.	11	1	11.0
Girod F.	47	5	9.4
Frères chrétiens (F. P. B., F. I. C. ou F. J. O. P.)	35	4	8.8
Monnet L. F.	13	2	6.5

TABLE II.6 – Auteurs dont les ouvrages présentent le plus d'occurrences dans les listes départementales de 1882 à 1889, classés par ordre décroissant d'occurrence moyenne par titres identifiés dans les listes

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Dans le premier tableau, sept titres apparaissent dans plus de 50 des 279 listes remontées par les commissions départementales, dont deux qui sont mentionnés plus de 100 fois (ceux de André et de Vintéjoux). Quant au second tableau, il confirme la prééminence d'auteurs comme André, premier des auteurs classés en nombre total d'occurrences, 151 fois cité pour ses trois ouvrages de géométrie, ou comme Bovier-Lapierre, figurant en seconde place suivant le même critère, cité 121 fois pour ses 4 titres de géométrie, suivi de près par Rebière, voyant ses 3 ouvrages cités 111 fois.
Néanmoins, en se référant au nombre moyen d'occurrence par titres, d'autres auteurs se démarquent, comme Briot et Vacquant, cités à 68 reprises pour un seul ouvrage identifié à leur actif, ou Guilmin, dont les deux livres sont mentionnés en moyenne 46 fois chacun [37], ou encore Eysseric, seul ou accompagné de son co-auteur Pascal, qui totalise 122 citations pour ses trois ouvrages. Quant aux auteurs comme Dalsème et Girod, ils bénéficient d'une bonne représentation globale de leurs ouvrages dans les listes, même si ces mentions sont relatives à de multiples titres en ce qui les concerne.

Conclusion :

— Peu d'ouvrages ou d'auteurs reconnus par les institutions d'instruction relatives aux livres scolaires se distinguent également dans les listes départementales : si Bovier-Lapierre a participé à la campagne de mise à l'essai, de même que Guilmin et Briot et Vacquant, seuls ces derniers rejoignent finalement les listes officielles pour l'usage dans les classes, aux côtés d'Eysseric et Pascal qui y figurent déjà depuis 1849. Les autres titres et/ou auteurs en tête des classements pour les listes départementales n'apparaissent pas dans les autres sources dépouillées.

— De même, la reconnaissance des instituteurs sur le terrain ne va pas toujours de pair avec le succès éditorial. Certes, des titres comme ceux d'André, Briot et Vacquant, Guilmin ou encore Girod, sont à la fois reconnus par les acteurs de l'enseignement primaire et des succès éditoriaux, mais ce n'est pas particulièrement le cas d'autres ouvrages, comme ceux de Rebière, Vintéjoux ou Dalsème.

37. Dans le détail, son *Cours élémentaire de géométrie* est à lui seul mentionné 78 fois.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Cette divergence partielle entre les analyses des différents types de sources s'explique en grande part par un biais temporel. En effet, des ouvrages plus tardifs s'illustrent à travers les listes départementales, que les autres sources consultées n'ont pas permis de repérer. C'est le cas des ouvrages de Rebière (1886), Dalsème (1880) et Vintéjoux (1883), datant des années 1880, et qui paraissent très vite adoptés par les professionnels de l'enseignement.

— De plus, les listes, émanant de l'ordre primaire, soulignent plus spécifiquement les titres s'adressant aux écoles qu'aux collèges et lycées (ce qui est le cas des titres de Dalsème et Vintéjoux).

— Des ouvrages du début du siècle très souvent réédités ou dont l'auteur est particulièrement prolifique sont pratiquement absents des listes départementales en fin de siècle. Par exemple, l'ouvrage de Lancelot n'apparaît pas une seule fois dans les listes, celui de Lamotte ou de Chardon très peu également (5 occurrences toutes listes comprises), et celui de Sonnet n'est cité que dans 5 départements, alors qu'il s'agit d'ouvrages s'adressant principalement à l'ordre primaire.

Les données recueillies peuvent également être ordonnées par département, puis regroupées par académie afin d'offrir un panorama territorial des ouvrages les plus souvent mentionnés par les maîtres.

Questions :

- **Les ouvrages plébiscités le sont-ils de manière uniforme sur tout le territoire ?**
- **Existe-t-il des manuels qui bénéficient d'une audience plus grande dans certaines académies que dans d'autres ?**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Nous avons testé les occurrences des ouvrages repérés dans les listes par département, puis effectué les fréquences de leurs mentions par académie. Les résultats obtenus sont présentés sous la forme d'une « heatmap ». Il s'agit d'une technique d'analyse bivariée, réalisée à partir du logiciel R, qui fait apparaître des données croisées, initialement présentées à travers une matrice, sous la forme d'une grille dont les couleurs sont fonction des valeurs prises par la variable (ici, la variable est la fréquence des départements d'une académie faisant mention d'un ouvrage). Afin de ne pas alourdir inutilement le graphique, nous n'avons conservé que les ouvrages qui figurent dans les listes d'au moins cinq départements français, afin de ne conserver que les titres les plus significativement présents dans ces dernières. Le classement des académies et des ouvrages est fait automatiquement par le logiciel suivant les proximités plus ou moins grandes entre les données qui leur sont relatives. Le code couleur est le suivant : les ouvrages cités dans 0 à 20 % des départements d'une académie apparaissent en rouge (avec deux nuances pour distinguer ceux qui y figurent dans plus ou moins de 10% des cas, ce qui sera vrai également pour la suite de la graduation), ceux cités dans 20 à 40 % des départements d'une académie sont en nuances d'orange, puis de 40 à 60 %, en jaune, de 60 à 80 %, en vert et enfin, de 80 à 100 % en bleu.
Résultat : Voir figure II.12 p. 181.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

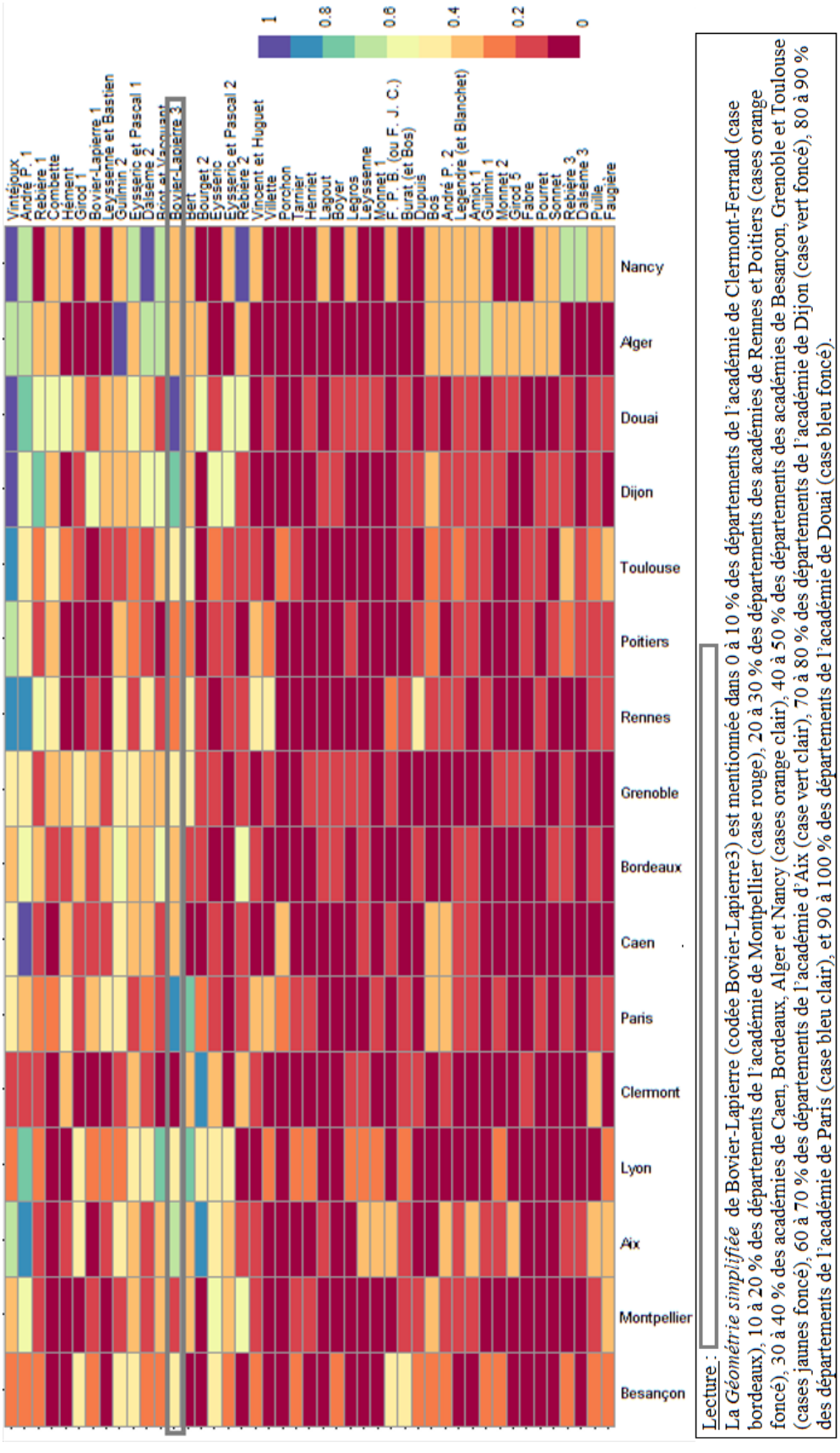


FIGURE II.12 – Répartition des ouvrages de géométrie mentionnés dans les listes départementales (figurant dans les listes d'au moins 5 départements) de 1882 à 1889, par académie

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Le résultat obtenu permet de visualiser une forme d'homogénéité globale des ouvrages mis en avant dans les académies, avec néanmoins quelques zones qui se distinguent. Les manuels de Vintéjoux et d'André sont plébiscités dans presque toutes les académies, mais d'autres titres font l'objet de préférences plus locales.

En effet, dans l'académie de Nancy, les ouvrages de Rebière et de Dalsème sont plus cités que dans les autres académies : les *Éléments de takymétrie* de Dalsème et les *Éléments de géométrie*[38] de Rebière sont mentionnés dans plus de 80 % des départements de cette académie, et les *Premières notions de takymétrie* de Dalsème et les *Premières notions de géométrie* de Rebière dans plus de 60 % d'entre eux. Il en est de même des *Éléments de géométrie* d'Eysseric et Pascal (codés Esseyric et Pascal 1), cités eux aussi dans plus de 60 % des départements.

L'académie d'Alger ne met pas tout à fait en avant les mêmes titres que les autres non plus, avec par exemple l'accent mis sur les ouvrages de Guilmin : son cours de géométrie est cité dans les 3 départements de l'académie et son cours d'arpentage[39]dans 2 des trois départements. Cette académie distingue également de manière plus marquée le manuel de Briot et Vacquant (tout comme Nancy et Lyon), ainsi que les *Éléments de takymétrie* de Dalsème, tous deux mentionnés dans 2 départements sur 3. Dans les académies d'Aix et de Clermont, c'est le *Cours de géométrie* de Bourget qui se distingue davantage qu'ailleurs.

Les académies de Besançon et de Montpellier citent un assez grand nombre d'ouvrages (en moyenne, 10 manuels cités par département dans l'académie de Besançon, et 9 dans celle de Montpellier), mais aucun titre n'est cité dans plus de 60 % de leurs départements, ce qui se traduit par l'absence de cases de couleur verte ou bleue dans leurs colonnes. Enfin, des académies comme Caen, Clermont ou Poitiers listent globalement très peu d'ouvrages de géométrie (en moyenne respectivement 7, 5 et 6,25 titres par département), ce qui apparaît à travers la grande proportion de cases rouges dans les colonnes qui leur sont dédiées.

39. Il s'agit sans doute de son *Cours de mathématiques appliquées : levé de plans, arpentage, nivellement, notions de géométrie descriptive* (Guilmin, 1858).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— Le grand engouement pour les ouvrages de Vintéjoux et André se confirme, dans presque toutes les académies.

— Des particularités locales apparaissent, avec des manuels mis davantage à l'honneur dans certaines académies, comme celles de Nancy (Bos, 1881 ; Dalsème, 1880 ; Eysseric et Pascal, 1850), Alger (Briot et Vacquant, 1862 ; Guilmin, 1854, 1858), Aix ou Clermont-Ferrand (Bourget, 1885).

— Certaines académies mentionnent moins de manuels que les autres (Caen, Clermont-Ferrand, Poitiers), et d'autres ne montrent pas de réelle convergence dans les choix exprimés par leurs différents départements (Besançon, Montpellier).

Pour approfondir l'analyse géographique entreprise ci-avant, nous pouvons mettre en regard la répartition territoriale des ouvrages cités dans les listes avec les origines régionales et départementales de leurs auteurs, qu'il s'agisse de leurs lieux de vie ou des zones où ils ont exercé leurs carrières. Neuf auteurs, parmi ceux dont les manuels sont le plus souvent présents dans les listes, ont particulièrement été choisis pour analyser cet éventuel lien : Rebière, Vintéjoux, Guilmin, Bovier-Lapierre, Eysseric et Pascal, Girod, Bourget, André, et Briot et Vacquant. Ces auteurs — ou groupes d'auteurs — ont la particularité d'avoir des origines géographiques marquées, et/ou des carrières qui se sont déroulées dans des régions identifiables.

Questions :

- **La répartition territoriale par département des manuels mentionnés dans les listes est-elle homogène ?**
- **Peut-on dire que la reconnaissance des manuels de géométrie par les enseignants de terrain sur le territoire français est fonction des parcours personnels et professionnels de leurs auteurs ?**

Méthode : Les cartes, réalisées à l'aide d'un fond de carte des départements français importé sur le logiciel R, montrent le nombre d'occurrences des ouvrages des auteurs concernés par départements. Le nombre « 4 » (en bordeaux) signifie que l'auteur est cité 4 fois dans le département, pour l'un de ses ouvrages, puis de même pour les valeurs « 3 » (en rouge), « 2 » (en orange), « 1 » (en jaune) et « 0 » (en gris).
Résultat : Voir cartes II.13 p. 184.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

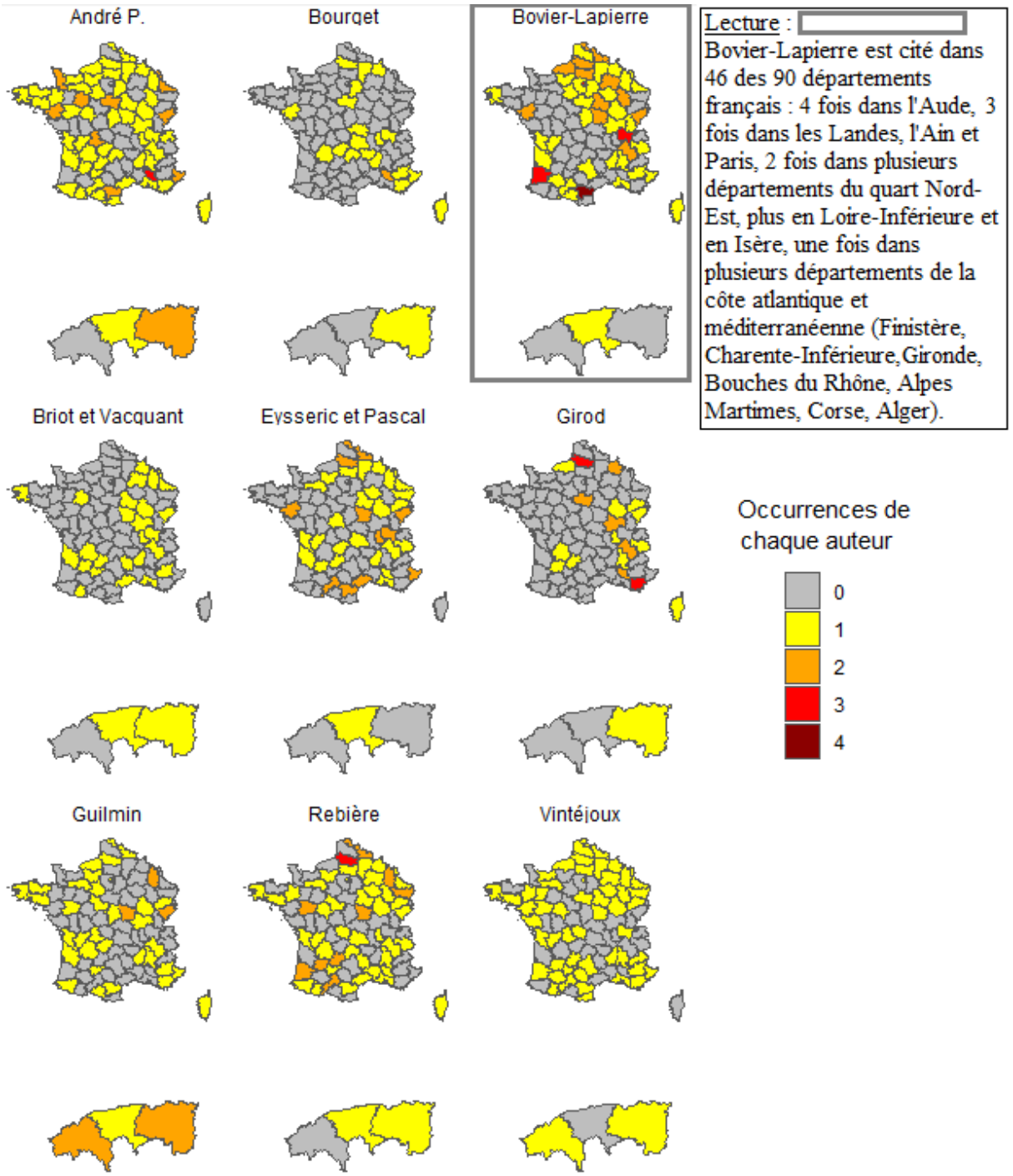


FIGURE II.13 – Répartition géographique des occurrences des ouvrages des auteurs les plus cités dans les listes

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse :

Le cas de Bovier-Lapierre est emblématique d'une vie et d'une carrière qui se déroulent dans une même aire géographique : né à Pont-de-Bonvoison en Isère et mort à Mâcon, en Saône-et-Loire, il enseigne tout d'abord dans le collège de sa ville natale, puis à Saint Marcellin et Vienne, toujours en Isère, avant d'être nommé à Tournon (Ardèche), puis de finir sa carrière à l'EN de l'enseignement spécial de Cluny (Saône-et-Loire) (Dubois, 2002e, p. 44). Même si les départements dans lesquels ses manuels sont cités ne se résument pas à ces quelques localisations, l'implantation professionnelle de Bovier-Lapierre à l'est de la France est confortée par le large usage qui est fait de ses ouvrages dans ce secteur. S'il est cité également par certains enseignants du sud ou de l'ouest, il n'est pas contre jamais mentionné dans l'académie de Clermont, au centre de la France.

Guilmin, originaire de Brest, quitte la Bretagne afin de poursuivre sa carrière à Paris, notamment au lycée Bonaparte, où il enseigne de 1853 à 1861 (Larousse, 1872, p. 1632). Si la carte présentant les occurrences de ses ouvrages dans les listes montre un usage de ses titres réparti sur tout le territoire (39 départements sur 90), il n'est pas oublié dans sa région d'origine, avec trois départements bretons (Finistère, Côtes du Nord et Morbihan) qui le citent.

De même, les carpentrassiens Eysseric et Pascal sont cités dans le Vaucluse, département où ils sont nés et où ils exercent (Eysseric comme professeur de mathématiques au collège et Pascal comme pharmacien), ainsi que dans les Bouches-du-Rhône qui lui sont limitrophes (Vaucluse, 1904, p. 231-232 ; L'Inguimbertine à l'hôtel-Dieu, 2024). Leur audience ne s'arrête pas au seul sud de la France, puisqu'ils sont cités dans 37 des 90 départements français, de la frontière espagnole (Haute-Garonne) à la frontière belge (Nord) et dans le département d'Alger.

En revanche, les corréziens Rebière (né à Tulle en 1842) et Vintéjoux (né au Lonzac en 1833), cités dans respectivement 50 et 54 départements, ne le sont pas dans leur Corrèze d'origine. Ils sont cependant mentionnés dans les départements limitrophes de la Creuse et du Lot, et bénéficient tous les deux d'une forte audience dans le sud-ouest, dans le quart nord-est du pays ainsi qu'en Bretagne. Cela n'est peut-être pas sans lien avec leurs parcours professionnels, Rebière ayant enseignée dans les lycées de Cahors et de Dijon, avant de poursuivre sa carrière à Paris, et Vintéjoux ayant exercé à Brest et à Besançon avant d'intégrer le lycée Saint-Louis à Paris (Grondin, 2010 ; Lemaitre, 2014). Ils sont d'ailleurs tous les deux cités dans le département de la Seine.

Bourget, né en Ardèche en 1822 et mort en 1887 à Clermont-Ferrand, voit ses ouvrages très implantés dans le centre de la France, où il a exercé une bonne partie de sa carrière, comme professeur à la faculté des sciences de Clermont, puis recteur de cette même académie (Dubois, 2002e, p. 88-89).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les manuels de Girod sont mentionnés dans une zone assez localisée à l'est du pays, où il est né et a étudié (il est natif de La Marre dans le Jura et est un ancien élève de l'école normale de Cluny), mais aussi en Seine-Maritime et dans son voisinage (la Somme), où il a enseigné, d'abord comme professeur dans un lycée puis dans une école professionnelle à Rouen (Archives Nationales, 2024).

André, mentionné dans les deux tiers des départements, est manifestement sous-représenté autour de Paris, où il est cité dans 3 départements sur les 9 de l'académie. Le peu d'éléments biographiques dont nous disposons à son sujet nous permettent seulement de savoir qu'il est né en Haute-Marne et qu'il a exercé la fonction de chef d'institution dans ce même département. Il est effectivement cité dans ce département, mais nos données ne nous permettent pas d'interpréter plus avant sa relative absence dans les listes issues de la région parisienne.

Briot et Vacquant sont originaires de l'est (Briot est né en 1817 dans le Doubs et Vacquant en 1829 dans la Meuse) mais ont poursuivi une large partie de leurs carrières dans des hauts postes à Paris. Tous les deux normaliens, ils enseignent dans plusieurs lycées parisiens, avant que Briot ne rejoigne l'enseignement supérieur (École Polytechnique, faculté des sciences de Paris, École Normale Supérieure), et que Vacquant n'accède à l'inspection de l'académie de Paris, puis au rang d'inspecteur général, après avoir enseigné à l'École centrale des arts et manufactures (Havelange et al., 1986f ; Huguet et Noguès, 2024). En dépit de ce brillant parcours parisien, leurs manuels ne sont que très peu cités dans l'académie de Paris,où ils ne sont mentionnés que dans la Marne, alors que les académies de l'est comme celles de Nancy, Dijon ou Lyon les mettent largement en avant.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les faveurs parisiennes ne sont manifestement pas faciles à obtenir, et seul Bovier-Lapierre voit ses ouvrages plébiscités autour de la capitale, avec 8 départements sur 9 qui les citent, dont la Seine (Paris) qui mentionne ses trois titres. Cet exemple montre qu'il n'est pas forcément nécessaire d'appartenir aux réseaux parisiens pour faire reconnaître ses manuels à Paris, puisque paradoxalement, un auteur dont toute la carrière s'est déroulée en province semble pouvoir y parvenir [40].

Conclusion :

— Les listes dépouillées montrent que la réception des manuels par les professionnels de l'enseignement de la géométrie dans l'ordre primaire n'est donc pas homogène sur le territoire français dans les années 1880.

— La répartition territoriale des ouvrages cités ne dépend que partiellement de la provenance géographique de leurs auteurs, et/ou de leurs parcours professionnels à travers les académies. Néanmoins, aucune règle générale ne s'impose à l'issue de l'étude de ces quelques cas particuliers.

— Si la plupart des titres n'ont pas une zone d'audience très localisée, certaines spécificités apparaissent cependant (comme les titres de Girod plutôt cités dans l'est et ceux de Bourget dans le centre), et l'étude du cas de l'académie de Paris montre la difficulté d'emporter l'adhésion autour de la capitale, même pour des auteurs de grande renommée au sein de l'enseignement supérieur parisien.

Afin de mesurer l'impact du temps sur les listes dépouillées, nous avons ensuite répartis les ouvrages recensés en deux sous-parties : l'une allant de 1882 à 1885, et l'autre après cette date et jusqu'à 1889, avec des titres classés par nombre d'occurrences sur chaque période puis globalement [41]. Cette disposition nous permet de comparer les deux périodes, notamment l'émergence de certains titres et auteurs, et d'observer la baisse ou la hausse de leurs rangs dans les classements.

40. Bovier-Lapierre demande à la fin de sa carrière un poste à l'école normale d'instituteurs de la Seine, à Paris, qui lui est refusé faute de diplôme (il n'est ni agrégé ni même licencié). Il part alors à la retraite. Il a en revanche contribué à la rédaction du *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, en y rédigeant notamment les articles « Algèbre », « Courbes usuelles » ou encore « Trigonométrie » (Dubois, 2002e, p. 44).

41. Ce découpage correspond aux deux vagues de remontée des listes départementales des manuels utilisés dans les classes, la seconde faisant suite à une dépêche émanant du Ministre Ferry datée du 10 février 1885 les réclamant.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Questions :

- **Au cours de leurs sept années de parution (1882-1889), les titres cités dans les listes départementales présentent-ils une certaine stabilité ?**
- **Peut-on observer des tendances temporelles dans les ouvrages mentionnés ? En particulier, les listes font-elles apparaître les nouveaux manuels publiés durant l'intervalle de temps où elles sont produites ?**

Méthode : Le premier tableau expose les ouvrages présentant le plus grand nombre d'occurrences dans l'ensemble des listes départementales émises entre 1882 et 1885. Le second tableau montre ce même classement pour la période s'étendant de 1886 à 1889. Un code couleur (cellules pleines colorées) permet de repérer les titres identiques dans les deux classements, alors que les cellules encadrées en couleur mettent en évidence les évolutions les plus significatives entre les deux périodes.
Résultat : Voir tableau II.7 p. 189.

1882-1885		
Titre (ou titre supposé)	Auteur	Nombre d'occurrences
Géométrie (élémentaire ?, éléments ?)	André P.	70
Eléments d'arithmétique et de géométrie	Vintéjoux	55
Géométrie (simplifiée) 2 cours	Bovier-Lapierre	50
Cours de géométrie élémentaire	Guilmin	44
Takymétrie (éléments de)	Dalsème	41
Arpentage	Briot et Vacquant	40
Eléments de géométrie (Théorie)	Eysseric et Pascal	36
Petite géométrie (notions de géométrie pratique et d'arpentage ?)	Eysseric	28
Eléments de géométrie	Rebière	26
Premières notions de géométrie	Hément	21
Algèbre et trigonométrie appliquée	Rebière	21
Géométrie	Bos	20
Arpentage et nivellement	Puille	20
Tableaux de géométrie	Leyssenne et Bastien	18
Eléments de géométrie	Legendre (et Blanchet)	17
Simples lectures sur la géométrie	Faugière	16
Eléments de géométrie pratique	Bovier-Lapierre	15
Premières notions de géométrie	Rebière	15
Eléments de géométrie	Amiot	14
Cours de géométrie	Girod	14
Cours de géométrie	Bourget	13
Traité de géométrie théorique et pratique	Eysseric et Pascal	13
Géométrie	Burat (et Bos)	12
Géométrie	F. P. B. (ou F. J. C.)	12
Géométrie arpentage (traité de géométrie appliquée ?)	Dupuis	11

Licence CC BY-NC-ND 3.0

1886-1889			
Titre (ou titre supposé)	Auteur	Nombre d'occurrences	Evolution remarquable
Eléments d'arithmétique et de géométrie	Vintéjoux	52	
Géométrie (élémentaire ?, éléments ?)	André P.	51	
Eléments de géométrie	Bert	37	Entrée 3ème position
Géométrie (simplifiée) 2 cours	Bovier-Lapierre	36	
Cours de géométrie élémentaire	Guilmin	34	
Arithmétique et géométrie	Combette	29	Remontée + 43
Arpentage	Briot et Vacquant	28	
Cours de géométrie	Bourget	26	Remontée + 13
Algèbre et trigonométrie appliquée	Rebière	25	
Takymétrie (éléments de)	Dalsème	23	
Eléments de géométrie (Théorie)	Eysseric et Pascal	21	
Cours de géométrie	Girod	17	
Géométrie (élémentaire)	Bos	15	
Arithmétique, géométrie ...	Vincent et Huguet	15	
Nouveau cours de géométrie (et arpentage)	André P.	14	
Premières notions de géométrie	Hément	14	Baisse -6
Eléments de géométrie	Rebière	14	Baisse -8
Traité de géométrie théorique et pratique	Eysseric et Pascal	13	
Eléments de géométrie pratique	Bovier-Lapierre	12	
Simples lectures sur la géométrie	Faugière	12	
Arpentage et nivellement	Puille	12	
Petite géométrie (notions de géométrie pratique et d'arpentage ?	Eysseric	11	Baisse -14
Premières notions de géométrie	Rebière	10	
Eléments de géométrie pratique et de dessin linéaire	Villette	10	
Géométrie	Burat	9	

Lecture : Le *Cours de géométrie* de Bourget se positionne à la 8ème place du classement des ouvrages les plus souvent cités dans les listes émises de 1886 à 1889, avec 26 occurrences. Il se situait à la 21ème place dans le classement similaire de 1882 à 1885, et a donc gagné 13 places.

TABLE II.7 – 25 ouvrages de géométrie les mieux classés de 1882 à 1885 puis de 1886 à 1889 et évolution

Lecture et analyse : Huit ouvrages demeurent en tête des classements de la 1ère comme de la 2ème période. Les titres de André, Vintéjoux, Bovier-Lapierre, Guilmin, Briot et Vacquant et l'algèbre de Rebière montrent une stabilité de leurs rangs. Les livres de Dalsème, et Eysseric et Pascal demeurent en tête des titres les plus cités, malgré un léger recul sur la seconde période. Les évolutions les plus remarquables sont les baisses dans le classement des ouvrages de Hément, de Rebière (géométrie) et la « Petite géométrie » d'Eysseric, qui perdent tous les trois entre 6 et 14 rangs dans le classement. En revanche, les titres de Combette et Bourget effectuent de nettes remontées en tête de liste au cours de la période 1886-89. Quant aux *Éléments de géométrie* de Bert, ils se placent directement en 3ème place du classement de la 2ème période. Le succès de cet ouvrage dans les écoles est instantané après sa publication en 1886 et son utilisation se voit immédiatement plébiscitée par les enseignants.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— La stabilité globale des listes entre les deux périodes se confirme avec beaucoup d'ouvrages communs en tête des deux classements.

— Des titres subissent néanmoins des évolutions entre les deux périodes. Ceux à la baisse sont parfois des manuels publiés depuis déjà longtemps, comme les *Notions de géométrie pratiques et d'arpentage* d'Eysseric et Pascal, publiées pour la première fois à la fin des années 1850. Ces derniers perdent du terrain face à des titres plus récents, comme ceux de Bourget et Combette, publiés pour la première fois respectivement en 1884 et 1885, voire nouveaux, à l'instar de l'ouvrage de Bert datant de 1886.

Enfin, d'autres facteurs sont primordiaux pour notre étude, comme le public auquel un ouvrage présent dans une liste est dédié. Seule une partie des documents consultés précise les niveaux concernés par les ouvrages et mentionnent par exemple les cours supérieurs (CS), les cours complémentaires (CC) ou les écoles primaires supérieures (EPS) pour l'usage des ouvrages qui y figurent. Ces données, même si elles ne concernent qu'une part restreinte des listes, méritent d'être traitées spécifiquement afin d'identifier les titres que les maîtres estiment particulièrement adaptés aux élèves des niveaux supérieurs de l'enseignement primaire, et qui les ont utilisés comme tels.

Question : Les listes font-elles apparaître des ouvrages comme étant particulièrement adaptés aux niveaux supérieurs de l'enseignement primaire ?

Méthode : Nous avons recensé tous les cas où les niveaux supérieurs de l'enseignement primaire — CC, CS ou EPS — sont explicitement précisés dans les listes de 1882 à 1889. Dans le tableau dressé avec le recueil de ces informations, les ouvrages sont triés par nombre total d'occurrences dans les listes concernées, avec le détail par niveau scolaire mentionné.
Résultat : Voir le tableau II.8 p. 191.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Titre	Auteur	EPS	CC	CS	Total
Algèbre et trigonométrie appliquée	Rebière A.	8	2	0	10
Géométrie (élémentaire ?, éléments ?)	André P.	3	1	3	7
Géométrie (élémentaire)	Bos H.	2	2	3	7
Cours de géométrie	Girod F.	5	2	0	7
Eléments d'arithmétique et de géométrie	Vintéjoux F.	1	2	4	7
Nouveau cours de géométrie (et arpentage)	André P.	3	3	0	6
Cours de géométrie	Bourget J.	5	1	0	6
Géométrie (simplifiée) 2 cours	Bovier-Lapierre G.	0	1	5	6
Eléments de géométrie pratique	Bovier-Lapierre G.	3	1	1	5
Traité de géométrie théorique et pratique	Eysseric A. D. et Pascal J. C.	2	2	1	5
Arpentage	Briot C. et Vacquant C.	1	2	1	4
Trigonométrie	Girod F.	4	0	0	4
Cours de géométrie élémentaire	Guilmin A.	1	0	3	4
Eléments de géométrie	Monnet L. F.	4	0	0	4
Géométrie appliquée (ou maths appliquées)	Girod F.	2	1	0	3
Eléments de géométrie	Legendre A. M. (et Blanchet)	0	0	3	3
Algèbre et trigonométrie	Monnet L. F.	3	0	0	3
Trigonométrie	André P.	2	0	0	2
Eléments de géométrie pratique et de dessin linéaire	Villette T.	1	0	1	2
Eléments de géométrie	Amiot A.	1	0	0	1
Trigonométrie	Bos H.	1	0	0	1
Algèbre et trigonométrie	Bourget J.	1	0	0	1
Nouveau cours de géométrie (géométrie élémentaire ?)	Bovier-Lapierre G.	0	0	1	1
Takymétrie (éléments de)	Dalsème J.	0	0	1	1
Eléments de géométrie (Théorie)	Eysseric A. D. et Pascal J. C.	0	1	0	1
Cours d'arithmétique et de géométrie	Girod F. et Canonville T.	1	0	0	1
Cours d'arpentage (maths appliquées ?)	Guilmin A.	1	0	0	1
Géométrie descriptive de l'enseignement spécial	Kiaes J.	1	0	0	1
Tableaux de géométrie	Leyssenne P. et Bastien	0	0	1	1
Arithmétique et géométrie	Porchon P.	0	0	1	1
Eléments de géométrie	Rebière A.	0	0	1	1
Premières notions de géométrie	Rebière A.	1	0	0	1
Arithmétique, géométrie ...	Vincent P. et Huguet J.	0	0	1	1
		TOTAL			109

TABLE II.8 – Liste des ouvrages les plus mentionnés pour les niveaux supérieurs de l'enseignement primaire (CS, CC ou EPS) de 1882 à 1889

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : La plupart des titres qui se situent en tête de cette nouvelle liste font déjà partie des auteurs et des ouvrages repérés auparavant, dans la liste ne tenant pas compte des publics visés par les ouvrages (voir tableau II.5 p. 176). Néanmoins, deux nouveaux titres, les cours de géométrie de Bos et de Girod, se distinguent suite à cette nouvelle analyse. Cités dans respectivement 35 et 31 listes en tout, ils apparaissent particulièrement adaptés au plus haut niveau des écoles primaires, mentionnés chacun 7 fois en tout pour les cours supérieures, complémentaires, ou les EPS, juste après les titres de Rebière et de André. En revanche, la takymétrie de Dalsème, en 6ème position de la liste générale des manuels mentionnés avec 64 occurrences, n'est citée qu'une fois comme pouvant être adaptée au cours supérieur des écoles. Ce titre n'est donc manifestement pas considéré par les enseignants de terrain comme pertinent pour leurs classes de niveau plus élevé.

Conclusion :

— Peu d'ouvrages se distinguent comme particulièrement adaptés aux niveaux supérieurs de l'enseignement primaire. Les têtes des deux classements, l'un pour tous les niveaux et l'autre pour ces niveaux spécifiques, demeurent quasiment les mêmes.

— Cependant, quelques ouvrages sont davantage cités pour leur pertinence dans les classes de CS, CC ou EPS, comme ceux de Bos ou de Girod, alors que d'autres sont considérés comme moins adaptés pour ces publics par les professionnels de terrain, comme celui de Dalsème.

Cette campagne de recensement des ouvrages mis entre les mains des élèves entre 1882 et 1889 apporte donc de nombreux renseignements sur la popularité de certains titres et auteurs auprès des instituteurs français au cours de la décennie 1880. Cette étude quantitative, croisée avec des informations plus qualitatives, comme les parcours personnels et/ou professionnels des auteurs, permet là encore de voir se démarquer certains titres ainsi que des personnalités de la fin du siècle, créant un nouveau point d'appui pour la sélection des ouvrages du corpus. Nous trouvons ainsi la confirmation du succès éditorial de certains auteurs et ouvrages, que nous avons mis en évidence en dépouillant les données issues de la *BF* dans la section I.2.2 (p. 80), et qui se double donc d'une bonne reconnaissance de la part des enseignants de terrain. En effet, la *BF* constitue un indicateur éditorial de premier rang, pendant que les listes départementales étudiées dans cette section forment un marqueur de la réception des ouvrages dans la communauté enseignante de l'ordre primaire. Parmi les personnalités qui tiennent le

Licence CC BY-NC-ND 3.0

haut du classement dans les deux études, nous trouvons tout d'abord André, Guilmin, Briot et Vacquant et Girod. Dans une moindre mesure, les succès éditoriaux de Bos, des Frères des écoles chrétiennes, d'Eysseric et Pascal et de Dalsème, se voient confortés par l'adhésion des maîtres de le décennie 1880. Par contre, les bons classements de Sonnet, Dufailly et Catalan du point de vue des publications ne trouvent pas leur écho dans les listes dressées en conférence pédagogique : leurs ouvrages sont pour certains plus anciens, et/ou s'adressent plus spécifiquement à l'ordre secondaire. En revanche, des auteurs comme Bovier-Lapierre, Rebière, Vintéjoux et Bourget ne sont pas parmi ceux qui ont le plus publié sur la période considérée, même s'ils bénéficient d'une reconnaissance auprès des enseignants des écoles sur le terrain [42]. Ceci s'explique par un biais temporel, puisque leurs ouvrages ne sont parus qu'à partir des années 1870-80, et que leur nombre de rééditions est forcément plus limité à la date de 1902, fin de notre intervalle d'étude.

L'analyse réalisée à partir de cette source très riche des listes départementales souligne une fois de plus le rôle d'interface des manuels de géométrie de l'époque entre les professionnels et usagers de l'éducation (auteurs, lecteurs, professeurs, éditeurs, institutions relatives aux livres classiques), ainsi qu'avec les territoires géographiques, tout en mettant en avant des tendances temporelles. Les différents points de vue adoptés dans ce chapitre ont en effet fait émerger de nombreuses interactions entre ces différents territoires, dont nous proposons une synthèse dans le schéma II.14 p. 194. Force est de constater que les informations issues des différentes sources consultées et analysées se répondent et se complètent. L'analyse de ces données forme un tableau des manuels de géométrie et de leur réception auprès de leurs contemporains. Leur reconnaissance peut venir, selon les époques et les territoires, des institutions officielles ou des professionnels de l'enseignement. L'acceptation des instituteurs et la légitimation par les autorités de l'enseignement peut ou non s'accompagner de l'adhésion des lecteurs, manifestée par des succès d'édition.

42. Rebière est néanmoins en fin de classement du nombre de (ré)-éditions du tableau I.8 p. 83 avec 11 rééditions sur une durée de 19 ans.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

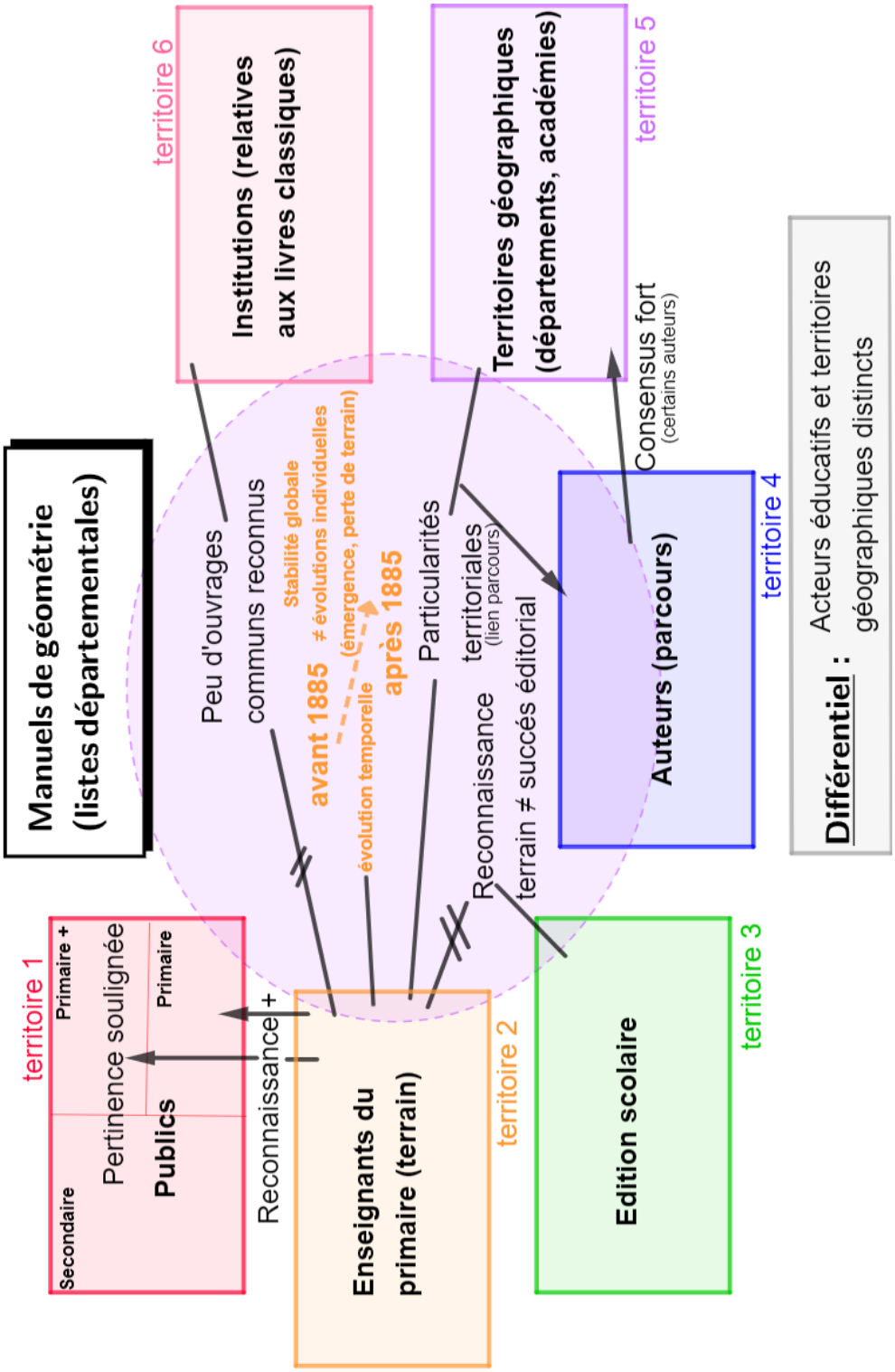


FIGURE II.14 – Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, notamment à travers leurs mentions dans les listes départementales (1882 – 1889), sont à l'interface des professionnels et usagers de l'éducation et des territoires géographiques, avec des tendances temporelles

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.1.6 Conclusion

Les données recueillies au sein des documents consultés sont complémentaires d'un point de vue temporel, puisqu'elles couvrent bien l'ensemble de la période d'étude, mais également par leur nature. Les informations émanant des institutions officielles (programmes, commissions des livres classiques) sont en effet différentes de celles transmises par les acteurs de terrain que sont les instituteurs du pays. Les premières nous renseignent bien entendu sur les manuels préconisés, mais aussi, à travers les échanges durant la campagne de mise à l'essai des ouvrages dans les classes, sur les motivations des auteurs pour la rédaction des livres de géométrie, les contraintes auxquelles ils sont soumis, et la réception qui est faite de leurs travaux par les membres de l'institution. Les mécanismes du processus d'acceptation ou de réfutation d'un ouvrage s'en voient explicités, en lien avec les qualités et défauts des titres proposés. En particulier, l'étude des travaux de la commission des livres classiques apporte des éléments de compréhension des attendus au sujet de la géométrie des aires dans les manuels. Le dépouillement systématique des listes fournies par les départements de 1882 à 1889 vient compléter ces informations, apportant un éclairage différent sur les manuels scolaires en usage dans les classes, pris sous l'angle de l'adhésion des enseignants aux livres qui leurs sont proposés. Ces données ajoutent une dimension géographique à l'étude menée jusqu'alors, qui fait en partie écho aux parcours des auteurs des ouvrages considérés. En revanche, les documents consultés datant au plus tard de 1889, les ouvrages de la toute fin de notre période (de 1890 à 1902) ne sont pas couverts par ces sources, qui devront donc être complétées par d'autres moyens, notamment en ce qui concerne l'enseignement féminin de la géométrie, dont l'instauration officielle est tardive au cours du siècle (voir p. 202).

Les données analysées et croisées dans ce chapitre sont variées, couvrent bien la période d'étude, et apportent chacune un éclairage différent. Les informations que nous en tirons constituent le fondement d'une sélection d'ouvrages d'un corpus restreint, dont nous proposons d'analyser plus finement et qualitativement les contenus sur les aires. Des titres et auteurs se démarquent très nettement de cette analyse des sources officielles, qui complète les données éditoriales issues de la *BF*. Pourtant, tous les titres dont il a été question à plusieurs reprises dans ce chapitre ne sont pas forcément sélectionnés pour la suite, notamment parce que les thèmes qu'ils abordent principalement ne sont pas ceux retenus dans notre travail sur la géométrie des aires. Quoiqu'il en soit, nous sommes à ce stade bien armée pour proposer une sélection de 40 manuels de géométrie à analyser plus précisément, justifiée par les critères et arguments que nous venons de présenter.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La richesse et la complémentarité des sources analysées dans ce chapitre apparaissent aussi à travers les schémas d'interfaces réalisés au cours de l'étude, et qui s'enrichissent progressivement (voir les figures II.4 p. 160, II.7 p. 169 et II.14 p. 194). Les documents relatifs aux campagnes de mise à l'essai des ouvrages dans les classes ont tout d'abord mis en évidence les interfaces entre les institutions et les auteurs des manuels de géométrie, puis le dépouillement des travaux des commissions des livres classiques sur les admissions ou refus des titres qui leur sont soumis ont enrichi nos conclusions en faisant entrer les publics dans la boucle. Ensuite, la diversité des approches que nous avons appliquées aux informations fournies par les listes départementales des années 1882-89 a élargi ces interfaces aux professionnels de l'enseignement primaire sur le terrain, tout en permettant des croisements avec les données éditoriales, et en apportant à nos analyses une dimension à la fois géographique et temporelle. Au-delà de l'objectif de la constitution d'un corpus, c'est donc toutes ces inter-relations entre les professions engagées autour des livres scolaires en géométrie, ainsi que leurs usagers, que les documents consultés ont permis de souligner, en fonction des périodes et des territoires concernés.

II.2 Méthode de sélection d'un corpus et analyse de ses caractéristiques

L'objectif de ce chapitre est désormais de définir le corpus restreint de manuels de géométrie, à sélectionner en fonction des critères de choix que nous nous sommes fixés. Une fois établi, ce corpus fait l'objet d'une étude quantitative, qui a pour finalité d'analyser ses caractéristiques principales et celles de ses auteurs. Nous nous intéressons dans un premier temps à leurs auteurs afin de compléter l'étude des quelques parcours professionnels et géographiques que nous avons pu esquisser dans la section précédente (voir p. 183). Nous examinons les liens qu'ils entretiennent entre eux, à travers leurs textes dans lesquels ils se citent les uns les autres ou expriment des références communes. Le croisement de différentes données statistiques caractérisant les ouvrages sélectionnés, comme le poids du thème des aires dans leurs contenus, leur public, leur longévité et leur reconnaissance institutionnelle, a pour objectif de construire des classifications des manuels considérés, de nature à faire émerger des interfaces entre ces différents facteurs, pour lesquelles le rôle des aires est central. Une entrée dans les contenus à travers une typologie des énoncés sur les aires présents dans les ouvrages donne lieu ensuite à une nouvelle classification du corpus, qui dessine elle aussi des familles d'ouvrages suivant leurs plus ou moins grande similarité.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.2.1 Présentation de la sélection

L'étude des sources officielles pour les livres classiques (voir le chapitre II.1 p. 146) nous a guidée dans le choix des ouvrages du corpus. Cette sélection s'appuie en effet, en plus des critères quantitatifs liés au dépouillement et au traitement statistique de la *BF* (voir la section I.2.2 p. 80), sur des critères liés à l'exploitation des documents officiels précédemment cités et analysés. De plus, une première lecture des manuels et des programmes nous a amenée à identifier des thèmes d'étude récurrents que nous estimons fondamentaux pour l'enseignement des aires au niveau intermédiaire auquel nous nous situons. Ces objets d'étude regroupent l'aire du rectangle dans le cas où ses côtés sont incommensurables, le théorème de Pythagore, et la détermination des aires curvilignes (circulaires, délimitées par des courbes quelconques ou des sections coniques). Nous avons alors repéré dans les ouvrages la présence de ces thèmes, dont l'intérêt pour notre propos nous apparaît *a priori* capital, et nous l'avons retenue comme condition de choix complémentaire. La pertinence d'une étude centrée autour de ces trois thèmes sera argumentée et justifiée plus avant de manière à la fois qualitative et quantitative dans le chapitre II.3 (p. 269). Enfin, une attention particulière a été portée à l'équilibre entre les ordres d'enseignement représentés dans les ouvrages, avec un privilège accordé à des titres visant un public mixte (ordre primaire et secondaire), et assurant également une visibilité à l'enseignement secondaire spécial et à l'enseignement des filles. De même, nous avons pris soin de répartir le plus uniformément possible les ouvrages dans le temps au cours de la période. Enfin, comme nous l'avons déjà évoqué à la page 145, l'idée générale qui nous a guidée tout au long de ce processus de sélection a été celle de réunir à la fois des ouvrages standards pour leur époque dans la discipline, et des titres plus singuliers, représentant les conceptions plus originales de leurs auteurs. Le résultat obtenu figure dans le tableau II.9 (p. 198).

Les ouvrages présentant l'un ou plusieurs des critères quantitatifs (appartenance au groupe des auteurs les plus prolifiques ou à celui des « best-sellers ») sont mis en valeur en rouge dans les deux premières colonnes du tableau. Les titres relevant d'un ou de plusieurs des critères liés aux documents officiels étudiés et disponibles à leur date d'édition sont matérialisés en jaune dans les quatre colonnes suivantes du tableau. Les livres traitant d'au moins deux des quatre thèmes évoqués ci-avant sont surlignés en bleu dans les colonnes suivantes. Enfin, les ouvrages s'adressant à au moins deux des trois systèmes d'enseignement considérés apparaissent en orange dans les deux dernières colonnes du tableau.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Auteur	Titre	Référence	Année	Prol.	Best	Prog.	L. O.	Essai	L. D.	Th. 1	Th. 2	Th. 3	Th. 4	Prim.	Filles	Class.	Spé.
Mauduit A. R.	Leçons de géométrie théorique et pratique	Lacroix, 1790	1790				X				X	X				X	
Lacroix S. F.	Eléments de géométrie	Lacroix, 1808	1808	X	X	X	X			X	X	X				X	
Legendre A. M.	Elémens de géométrie	Legendre, 1823	1823		X		X		X	X	X					X	
Dupin C.	Géométrie et mécanique des arts et métiers	Dupin, 1828	1828	X		X	X				X			X			
Bergery C. L.	Géométrie appliquée à l'industrie	Bergery, 1828	1828			X	X				X	X		X		X	
Terquem O.	Manuel de géométrie	Terquem, 1829	1829				X			X	X		X	X		X	
Lancelot	Nouveau traité d'arpentage	Lancelot, 1833	1833		X							X	X	X			
Desnanot P.	Pratique du toisé géométrique	Desnanot, 1835	1835				X				X	X	X	X			
Lamotte M. L.	Traité élémentaire d'arpentage et du lever des plans	Lamotte, 1839	1839	X	X		X					X		X			
Sonnet H.	Nouvelle géométrie théorique et pratique	Sonnet, 1839	1839	X		X	X			X	X	X	X	X			
L. C. et F. P. B.	Abrégé de géométrie pratique, à l'usage des écoles chrétiennes	L.C. et F.P.B., 1840	1840	X	X		X		X		X		X	X			
Gimelli L.	Leçons d'arpentage et de levée des plans	Gimelli, 1841	1841				X				X	X	X	X			
Percin J.	Géométrie simplifiée	Percin, 1842	1842				X				X	X		X		X	
Idoux A. J.	Nouveaux éléments de géométrie	Idoux, 1842	1842				X			X	X					X	
Vincent A. J. H.	Cours de géométrie élémentaire	Vincent, 1844	1844				X			X	X					X	
Saigey J. F.	Eléments de géométrie d'après Bezout	Bezout, 1848	1848			X	X				X	X				X	X
Eysséric et Pascal	Traité de géométrie théorique et pratique	Eysseric, 1850	1850	X			X		X		X	X	X	X			
Puille D.	Leçons normales de géométrie élémentaire théorique et appliquée	Puille, 1855	1855	X	X				X	X	X	X				X	
Dupuis J.	Traité de géométrie appliquée, d'arpentage et de dessin linéaire	Dupuis, 1857	1857				X		X		X	X		X		X	
Cirodde P. L.	Leçons de géométrie…	Cirodde, 1858	1858				X			X	X	X	X			X	
Briot C.	Arpentage, levé des plans et nivellement	Briot, 1859	1859	X			X		X			X				X	
Amiot A.	Eléments de géométrie (6ème édition)	Amiot, 1860	1860	X	X		X	X	X		X					X	
Briot C. et Vacquant C.	Eléments de géométrie. Application - Théorie	Briot, 1862, Briot, 1863	1862-1863	X	X		X	X	X		X	X				X	
Harant H.	Géométrie appliquée aux arts et aux métiers	Harant, 1863	1863								X	X		X			
Rouché E., Comberousse C.	Traité de géométrie élémentaire	Rouché, 1866	1866	X						X	X		X			X	
Salicis G.	Cours de géométrie (Echo de la Sorbonne)	Salicis 1868	1868								X				X	X	
Tarnier E. A.	Éléments de géométrie pratique	Tarnier, 1872	1872								X	X		X			X
Méray C.	Nouveaux éléments de géométrie	Méray, 1874	1874							X		X		N. R.			
Bos H.	Géométrie élémentaire	Bos, 1875	1875	X	X				X		X	X				X	
André P.	Eléments de géométrie	André, 1879	1879	X	X				X		X	X	X			X	X
Bovier-Lapierre G.	Géométrie élémentaire, exposée dans ses applications à la mesure des surfaces et des volumes	Bovier, 1879	1879						X		X	X	X	X		X	X
Tombeck H. E.	Traité de géométrie élémentaire	Tombeck, 1879	1879	X	X					X	X		X			X	
Dalsème J.	Eléments de takymétrie	Dalsème, 1880	1880	X					X		X			X			
Guilmin A.	Cours de géométrie élémentaire	Guilmin, 1882	1882	X	X				X		X	X	X			X	
Bos H.	Notions de géométrie plane	Bos, 1884	1884	X							X	X			X	X	
Bourget J.	Cours de géométrie	Bourget, 1885	1885						X		X	X		X			X
Bert P.	Premiers éléments de géométrie	Bert, 1886	1886						X			X		X			
Leyssenne P.	Traité de géométrie théorique et pratique	Leyssenne, 1890	1890								X	X		X	X	X	X
Girod F.	Cours de géométrie théorique et pratique	Girod, 1893	1893	X	X				X		X		X			X	
Hue T., Vagnier	Géométrie (écoles de filles)	Hue et Vagnier, 1896	1896								X	X		X	X		

TABLE II.9 – Liste des 40 ouvrages sélectionnés dans le corpus final, avec les critères retenus : « Prol. » et/ou « Best » si l'auteur ou l'ouvrage fait partie de ceux considérés comme tels dans les sections I.2.2.1 et I.2.2.2 (p. 81 et 86), « Prog. », « L. O. », « Essai » et/ou « L. D. » si l'ouvrage est mentionné dans les programmes officiels, s'il appartient aux listes officielles d'ouvrages en usage dans les classes, s'il a participé aux campagnes de mise à l'essai, s'il est mentionné dans les listes départementales de 1882 à 1889 (voir les sections II.1.1 p. 147), II.1.2 p. 148, II.1.3 p. 153 et II.1.5 p. 169), « Th. 1 » (respectivement 2, 3 et 4), s'il contient des développements sur les thèmes 1, 2, 3 ou 4 évoqués dans le paragraphe précédent, « Prim », « Filles », « Class. » et/ou « Spé. » s'il s'adresse au primaire (dont supérieur), à l'enseignement féminin, au secondaire classique et/ou spécial

Carène GUILLET| Thèse de doctorat | Université de Limoges
Licence CC BY-NC-ND 3.0

Plus précisément, la sélection des ouvrages suit une démarche alliant le quantitatif au qualitatif, et procédant par soustraction et par addition. La priorité est mise sur les documents officiels, et nous commençons donc par retenir 5 des 6 ouvrages cités dans les programmes de 1849 – 1852. Le seul non retenu est *Les éléments de géométrie* de Clairaut (1741). En effet, sa première édition a eu lieu en 1741, et son auteur est mort depuis 1765. Il s'agit donc de notre point de vue d'un ouvrage plus représentatif du XVIII^{e} siècle que du XIX^{e}, même s'il est encore en usage dans l'enseignement au XIX^{e} siècle et malgré sa réhabilitation ultérieure par Saigey (Clairaut, 1852). Legendre et Lacroix sont davantage représentatifs de la pensée du début du XIX^{e} siècle. Leurs *Éléments* paraissent initialement respectivement en 1794 et 1798, et ces mathématiciens sont toujours vivants durant les premières décennies du siècle. Quant à Bézout, il n'est plus en vie au début du siècle (il est mort en 1783), mais ses *Éléments de géométrie*, édités pour la première fois en 1766, traversent une grande partie du XIX^{e} siècle, avec en particulier les rééditions de Peyrard, Reynaud, puis Saigey [43]. De plus, la version de 1848 de son ouvrage réimprimée par Saigey joue un rôle conséquent lors de la création de l'enseignement spécial en 1849 (Belhoste, 1995, p. 247).

Dans un second temps, de nouveaux titres ont été sélectionnés parmi les 62 recensés dans les listes officielles d'ouvrages autorisés pour l'enseignement des ordres primaires et secondaires, de 1802 à 1868. Parmi eux figurent deux fois, avec des éditions différentes, les ouvrages de Lacroix et Legendre, déjà sélectionnés. Les trois autres ouvrages cités dans les programmes (Dupin, Bergery, Sonnet) appartiennent également à ce groupe. Ensuite, nous avons procédé par soustraction en retirant les 17 ouvrages qui ne concernent pas spécifiquement l'étude des aires planes, car traitant plus particulièrement de la géométrie dans l'espace, de la trigonométrie, de la géométrie analytique, projective, ou encore descriptive, ainsi que les 3 tableaux et reliefs qui ne sont pas des livres à proprement parler. Parmi les 38 ouvrages restant, nous avons alors examiné leurs contenus, en privilégiant ceux dont les parties sur les aires étaient suffisantes pour mener cette étude, quantitativement comme qualitativement, avec un nombre de pages conséquent traitant le sujet, et une diversité des thèmes abordés. Les ouvrages destinés à l'enseignement primaire supérieur ont également été privilégiés relativement à ceux s'adressant aux écoles primaires élémentaires. C'est la raison pour laquelle, par exemple, nous avons retenu la *Géométrie appliquée à l'industrie* de Bergery (1828), préconisée officiellement pour les EPS, plutôt que sa *Géométrie des écoles primaires* (Bergery, 1837).

43. Pour la synthèse des éditions et rééditions des trois ouvrages de Bézout, Lacroix, et Legendre, ainsi qu'une analyse de leurs contenus dans le contexte du tournant du XIX^{e} siècle, voir (Lamandé, 1993).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

De plus, nous nous sommes laissée guider par le double objectif de repérer des ouvrages aux contenus à propos des aires caractéristiques de leur époque tout en n'excluant pas les propositions plus singulières. Dans cette perspective, nous nous sommes donc efforcée d'éviter les doublons, c'est-à-dire les ouvrages ayant un traitement analogue de cette notion, afin de mettre en évidence la diversité des méthodes d'enseignement la concernant. Pour préciser cette démarche, voici deux exemples d'ouvrages retenus ou non, ainsi que les raisons de nos choix. Tout d'abord pour l'enseignement primaire, le *Manuel de géométrie* de Normand et Rebout (1841) s'est vu écarté au profit des *Leçons d'arpentage et de levée de plans* de Gimelli (1841). En effet, ils traitent tous deux en particulier des aires délimitées par des lignes courbes avec des méthodes comparables (recours aux polygones, triangles et trapèzes), mais le mode d'exposition de Gimelli est plus singulier, menant en permanence les définitions et propositions théoriques avec leurs équivalent sur le terrain, dans une approche très instrumentale. Gimelli propose également des résultats géométriques plus généraux, sur le théorème de Pythagore par exemple ou encore les aires délimitées par des ellipses, plus-value qui a guidé le choix final dans ce cas. Son ouvrage offre donc à la fois des contenus plus variés et une démarche pédagogique particulière, que nous n'avons pas observée dans les autres ouvrages [44]. Dans un second temps, pour l'enseignement secondaire, les *Nouveaux éléments de géométrie* de Idoux (1842) ont été conservés au détriment du *Cours de géométrie* de Mutel (1831). Là encore, les contenus traités sont sensiblement les mêmes sur les aires des polygones et les rapports des aires de figures semblables, mais le traitement qui en est fait par Idoux répond à une approche à la fois plus originale et plus approfondie. À l'issue de ce travail, ce sont 18 ouvrages supplémentaires qui ont été intégrés au corpus (9 pour le secondaire, 5 pour le primaire, 1 pour l'enseignement spécial et 3 s'adressant à la fois au secondaire et au primaire), soit un total de 23 titres à ce stade.

Nous nous sommes ensuite intéressée aux ouvrages concernés par la campagne d'« essai préalable » (voir la section II.1.3 p. 153) tenue de 1855 à 1858. Ces documents regroupent 23 ouvrages, dont 10 ne relèvent pas de domaines qui concernent la présente étude, comme ceux indiqués précédemment. Parmi les 13 titres restant, 2 figurent déjà dans le corpus du fait de leur appartenance aux listes officielles, ainsi que 3 autres (Bovier-Lapierre, Guilmin et Lacroix) qui sont cités dans ces documents, mais pas expressément « recommandés » (la plupart du temps par absence de réponse explicite à la demande). Les 8 ouvrages demeurant en lice contiennent un manuel plus généraliste de préparation au baccalauréat, et 3 traités de mathématiques ou d'histoire

44. De surcroît, nous avons particulièrement à cœur de présenter cet ouvrage, pour le moment inédit parmi les études en histoire de l'enseignement des mathématiques, dont nous estimons le contenu aussi riche dans le fond que dans la forme.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des mathématiques : ces derniers ne répondent pas aux critères pré-établis pour les livres d'enseignement de la géométrie. Enfin, il reste 4 ouvrages : celui d'arpentage de l'abbé Godimus (1857) a reçu dans cette campagne un avis négatif de l'institution et a donc été écarté, de même que l'ouvrage de Lecœur, lui aussi refusé car manuscrit. Enfin, la *Géométrie élémentaire* de Briot et Martin (1853) a recueilli deux avis favorables sur trois [45]. Nous lui avons par conséquent préféré les *Éléments de géométrie - Théorie* de Charles Briot seul (Briot, 1863), qui a fait quant à lui l'unanimité des trois commissions qui l'ont examiné (Bordeaux, Caen et Douai), auquel nous avons adjoint la partie *Application* qu'il a co-écrite avec Vacquant (Briot et Vacquant, 1862), considérant les deux titres comme deux volumes d'un même ouvrage.

Cette dernière admission porte le nombre d'ouvrages retenus à 24. Après consultation des titres les plus cités des listes départementales, nous constatons que sur les 17 premiers, 2 ont déjà été choisis auparavant. Pour les autres, et par raisonnement soustractif, nous avons écarté :

— les titres plus spécifiquement d'arithmétique de Vintéjoux (1883) et de Combette (1886), type d'ouvrages que nous avons choisi de ne pas privilégier dans notre étude,

— celui d'algèbre et de trigonométrie de Rebière (1886), dans la mesure où le sujet principal de ce dernier n'est pas la géométrie, et que la trigonométrie qu'il aborde ne s'avère pas être un axe essentiel pour l'étude de la géométrie des aires,

— un titre d'Eysseric, qui figure déjà dans le corpus en tant qu'auteur d'un autre ouvrage (Eysséric, 1855),

— deux titres de Rebière et Hément (1874) qui ont vu leurs occurrences baisser à partir de 1886, montrant une certaine désaffection des enseignants du primaire à leur égard (voir le tableau II.7 p. 189).

Au terme de cette démarche, 9 titres supplémentaires ont été intégrés au corpus, le portant à 33 titres.

À ce stade, beaucoup des choix effectués se sont trouvés cohérents avec les indicateurs quantitatifs exposés dans la section I.2.2 (p. 80) sur les auteurs les plus prolifiques ou les « best-sellers » : 18 titres sur les 33 retenus répondent à l'un au moins de ces critères. Par cette étude statistique, et en suivant cette fois-ci une démarche additive, nous leur avons alors adjoint des ouvrages que les documents officiels n'avaient pas encore fait émerger, comme le *Nouveau traité d'arpentage* de Lancelot (1833), « best-seller » sur

45. La commission de Dijon a refusé l'ouvrage en le jugeant trop incomplet au niveau des applications et en regrettant de ne pas suffisamment y trouver de preuves de la collaboration de Charles Briot.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la période d'étude, qui vient étoffer le corpus d'ouvrages du primaire en traitant de surcroît plusieurs des thèmes auxquels nous avons choisi de nous intéresser. Ce sont à peu de choses près les mêmes raisons qui ont permis d'inclure le *Traité de géométrie élémentaire* de Tombeck (1879), auteur ayant publié bon nombre d'ouvrages, dont le titre sélectionné figure parmi nos « best-sellers » et aborde plusieurs des thématiques retenues. Il en va de même pour le traité de Rouché et Comberousse (1866).

Le corpus alors établi ne comprend pas de titre pour l'enseignement des filles. En effet, les programmes spécifiquement féminins, dans le primaire comme dans le secondaire, intègrent l'apprentissage de la géométrie tardivement, et la littérature scolaire s'empare peu de ce lectorat. Néanmoins, des ouvrages existent et deviennent plus nombreux à la fin du siècle. Pour les repérer, nous nous sommes appuyée sur le recensement des manuels de géométrie produit par le dépouillement de la *BF* en croisant nos données avec les mots-clés « fille » ou « féminin ». 11 titres seulement sont ressortis de cette recherche, dont quelques uns relatifs à des ouvrages mixant arithmétique et géométrie, comme celui de Pape-Carpentier (1872), écartés de ce fait, et d'autres de géométrie analytique, pour les prétendantes à l'agrégation des jeunes filles. Parmi les 4 titres restant, nous avons choisi, après en avoir consulté les contenus, de conserver les *Notions de géométrie plane* de Bos (1884) [46] et la *Géométrie (écoles de filles)* de Hue et Vagnier (1896). Le mot-clé « institutrice » a fourni quelques résultats supplémentaires, parmi lesquels un ouvrage de Leyssenne, *Traité de géométrie théorique et pratique*, qui s'adresse aux « écoles normales d'instituteurs et d'institutrices, [aux] écoles primaires supérieures, [à] l'enseignement secondaire spécial et [à] l'enseignement secondaire des jeunes filles » (Leyssenne, 1890). La diversité des publics ciblés nous a semblé très intéressant pour cette étude, de même que la richesse du contenu du manuel.

Enfin, un autre document a été adjoint à ce corpus relatif à l'enseignement féminin, avec un cours professé par Salicis à la Sorbonne entre 1868 et 1870. Ce cours n'apparaît pas dans la *BF* puisqu'il n'est publié qu'au sein d'un périodique, *L'écho de la Sorbonne*, qui regroupe toutes les leçons dispensées aux jeunes filles durant cette période (Salicis, 1868, 1869) [47]. Ce dernier paraît dans un contexte particulier, puisqu'en 1867, Duruy, alors ministre de l'Instruction Publique, publie une circulaire fondant l'enseignement

46. De plus, l'ouvrage analogue du même auteur pour l'enseignement masculin, publié en 1875, nous permettra de comparer les contenus proposés aux filles et aux garçons par une même personne dans une période proche.

47. C'est à titre exceptionnel que nous retenons ce document unique en son genre dans notre corpus, car publié dans un périodique et non sous la forme classique d'un ouvrage d'enseignement. Les conditions particulières de l'élaboration et de la diffusion de ce cours à la Sorbonne dans les années 1860, à destination d'un public rarement concerné par les cours de géométrie, justifie d'après nous cette exception.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

secondaire des filles. Sur une durée de trois ou quatre années, les cours sont prévus dans un bâtiment communal, professés par des membres de l'enseignement secondaire et sous la surveillance d'une mère, gouvernante ou maîtresse de pension. Cette décision est très discutée à l'époque et compte des adversaires farouches, comme, parmi les plus connus, Monseigneur Dupanlou (Pottin, 2018). Dans ce contexte, et à l'occasion de l'Exposition universelle parisienne de 1867, Duruy invite Marie Pape-Carpantier, alors responsable du « cours pratique des salles d'asile », à tenir une série de conférences à la Sorbonne devant des instituteurs (Dubois, 2002g). Elle participe également cette année-là, à la fondation de l'Association pour l'enseignement secondaire des filles, et profite de cette mise en lumière pour réclamer l'instruction des femmes et la valorisation du métier d'institutrice. Au cœur de ce mouvement, le succès des cours parisiens à la Sorbonne est réel, et attire à la fois les enfants de la noblesse de l'époque et des professeurs renommés de l'enseignement supérieur (Morey, 1962). La publication du cours en trois années dispensé à la Sorbonne, dont nous avons tiré les leçons de géométrie de Salicis, apparaît dans ce contexte. La guerre de 1870 met un terme à cette expérience d'instauration de cours d'enseignement secondaire pour les jeunes filles, dont le renouveau sera assuré quelques années plus tard grâce à la loi Camille Sée, qui leur donnera à la fois une impulsion et un cadre officiel (Morey, 1962).

L'addition de ces quatre titres supplémentaires porte le total à 37. La constitution du corpus en cours a déjà montré la pertinence du fait de compléter par des considérations qualitatives des arguments de nature statistique, démarche que recommande d'ailleurs vivement Goldstein dans ses travaux sur les méthodes quantitatives (Goldstein, 1999). Dans cette optique, nous faisons le choix d'ajouter trois nouveaux titres pour des raisons d'ordre strictement qualitatif, et parce que leurs contenus et/ou présentations nous sont apparus incontournables pour notre étude :

— La *Géométrie appliquée aux arts et métiers* de Harant (1863), intéressant de par son contenu mathématique en lien avec des applications aux arts et métiers, dans le sillage de Dupin, bien que publié plusieurs décennies plus tard.

— Les *Éléments de géométrie pratique* de Tarnier (1872), pour des raisons analogues et parce qu'il s'adresse explicitement, fait assez rare, aux deux ordres d'enseignement « primaire supérieur » et « spécial ». Il montre de surcroît une approche pédagogique originale.

— Les *Nouveaux éléments de géométrie* de Méray (1874), pour des raisons strictement historiques, en tant qu'ouvrage incontournable pour l'enseignement de la géométrie au XIX^{e} siècle. En effet, sa méthode novatrice d'apprentissage de la géométrie fondée sur le mouvement a été expérimentée à l'école primaire supérieur de Dijon peu avant 1880 puis à l'école normale d'Auxerre à partir de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

1898. Son ouvrage deviendra en quelque sorte le fer de lance des réformateurs de l'enseignement de la géométrie de la fin du XIX^e siècle et sera réédité en 1903 (D'Enfert, 2005). Il est d'ailleurs étonnant que cet auteur soit passé en dessous de tous les radars quantitatifs exposés ci-avant. Il est notamment surprenant qu'il ne soit mentionné dans aucune des listes départementales entre 1882 et 1889, y compris dans les département de la Côte-d'Or et de l'Yonne.

Au terme de ces trois derniers ajouts, le corpus atteint le nombre définitif de 40 titres. La répartition temporelle est satisfaisante, puisqu'à part les deux premiers titres de Mauduit et Lacroix, bien antérieurs à notre période, mais encore utilisés durant le siècle (au moins pendant la première moitié), les autres sont bien échelonnés avec un nombre de 3 à 6 titres par décennie, et même de 4 à 5 dans la plupart d'entre elles[48] (voir frise II.15 p. 204).

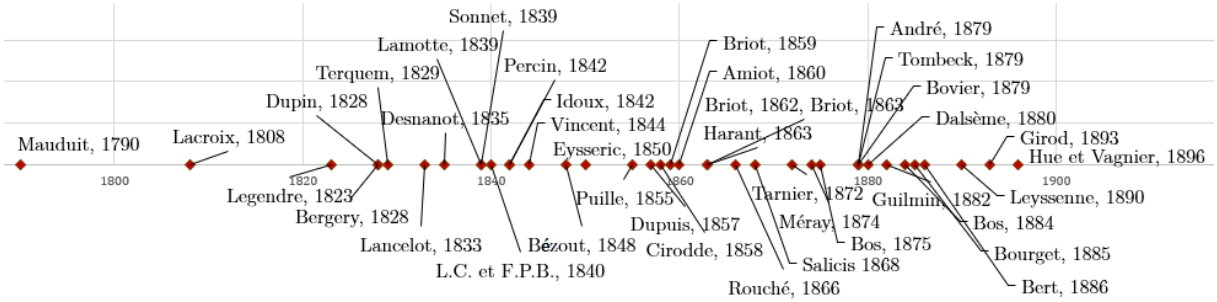


FIGURE II.15 – Frise montrant la répartition temporelle des ouvrages du corpus sur la période d'étude. Cette frise figure en plus grande taille en annexe (p. 666)

Les publics sont bien représentés également, avec 20 livres destinés à l'enseignement primaire (et primaire supérieur), 25 à l'enseignement secondaire, 6 à l'enseignement spécial et 4 à l'enseignement féminin, avec 13 ouvrages s'adressant à plusieurs de ces publics. Enfin, les thèmes retenus sont bien représentés globalement dans les ouvrages, des plus fréquents (thème 2 sur le théorème de Pythagore dans 35 manuels et thème 3 sur les aires curvilignes quelconques dans 28) aux moins courants (thème 1 sur l'aire du rectangle dans le cas incommensurable dans 11 livres, et thème 4 sur les aires délimitées par des sections coniques dans 14). Le nombre d'ouvrages concerné par

48. Les dates d'édition retenues jouent un rôle dans cette répartition, même si elles n'ont pas été choisies dans cet objectif. Le choix des éditions, pour les manuels plusieurs fois réédités, ont été réalisés en fonction de leur usage, en privilégiant les plus couramment utilisées, ou celles plus précisément préconisées par les institutions, lorsque nos sources permettent de le savoir. Parfois, les contenus ont été pris en compte, privilégiant des éditions ultérieures comprenant de nouvelles parties, dont les thèmes abordés nous intéressent particulièrement. C'est par exemple la raison pour laquelle nous avons choisi une édition tardive du *Cours de géométrie élémentaire* de Guilmin (1882), puisqu'apparaît dans cette 22ème édition un chapitre additionnel sur les courbes usuelles, dans lequel il traite des aires délimitées par des sections coniques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

chacun de ces thèmes, toujours supérieur à 10, permet dans tous les cas de mener une étude qualitative sur un échantillon de manuels qui ne se limite pas à quelques titres.

Ce corpus de 40 ouvrages d'enseignement de la géométrie, constitué à partir d'une base de 2328 titres repérés comme tels dans la *BF*, et composé de sorte à offrir un panorama représentatif de l'époque considérée sur la géométrie des aires, est le socle d'une analyse d'abord quantitative, permettant d'en dégager les particularités en termes de part des aires parmi les objets qu'ils présentent, de lectorat, et de reconnaissance institutionnelle, puis qualitative autour des contenus de savoir sur les aires, vus à travers le spectre d'une grille de lecture axée sur trois thèmes principalement retenus.

II.2.2 Caractéristiques du corpus

Dans cette section, nous proposons de mener une étude quantitative des 40 ouvrages du corpus, afin d'en déterminer les principales caractéristiques et d'interroger les liens qu'elles tissent entre elles, suivant des critères aussi variés que le poids du thème des aires dans les manuels, le profil de leurs lectrices et lecteurs, ainsi que la reconnaissance des ouvrages par les institutions et les acteurs de terrain. Nous nous intéressons également aux auteurs, sous l'angle des liens qui apparaissent entre eux à travers leurs réseaux d'intercitations et de citations communes. Une analyse quantitative des contenus est également présentée via des méthodes statistiques, afin d'en décrire une première typologie, débouchant sur une classification possible des ouvrages du corpus.

II.2.2.1 Références des auteurs et réseaux d'intercitations

L'analyse des réseaux est un outil dont s'emparent depuis quelques décennies les historiens en général, et les historiens des sciences en particulier (Lemercier, 2005 ; Louâpre, 2019). Ils permettent de cartographier la toile des relations, de quelque nature qu'elles soient, entre des acteurs d'un collectif, d'en étudier notamment les centralités et les positions occupées par ses membres. Les données traitées pour construire ces réseaux peuvent être de nature biographique, temporelle et géographique, comme des lieux et dates de naissance ou mort, d'obtention d'un diplôme, de participation à des institutions, d'exercice professionnel dans des structures, par exemple (Louâpre, 2019). Une autre possibilité consiste à exploiter les citations que font les auteurs, et d'observer qui cite qui, qui est cité par qui, ou encore qui cite les mêmes personnes, afin de déterminer des réseaux de co-citations (Lemercier, 2005). Nos données étant adaptées à ce type d'analyse, c'est la voie que nous proposons désormais de suivre dans notre étude. En histoire des mathématiques, de telles études ont été menées par Brechenmacher autour de la théorie des matrices par le biais de réseaux de citations

Licence CC BY-NC-ND 3.0

intertextuelles (Brechenmacher, 2010), ou encore par Goldstein et Schappacher à travers des références mutuelles entre les personnalités impliquées dans la naissance et le développement de la théorie des nombres (Goldstein et al., 2007). Ces derniers distinguent des groupes d'articles qui traitent de ce même sujet par l'analyse des références que leurs auteurs se font les uns aux autres. Les citations de nature « positive » entre articles, c'est-à-dire celles montrant une adhésion aux méthodes ou aux résultats des autres, leur permettent de regrouper des articles exprimant des positions proches en théorie des nombres. En revanche, l'absence de références, ou la présence de citations de type « négatif » d'un travail sur un autre leur servent plutôt à les séparer (Goldstein et al., 2007, p. 72-73). Dans notre étude, les intercitations relevées entre auteurs des manuels du corpus n'expriment jamais d'avis négatif : elles sont en faveur de l'ouvrage ou de l'auteur cité, ou alors neutres.

Dans notre corpus, les 40 auteurs de manuels [49] se réfèrent fréquemment à d'autres acteurs scientifiques, contemporains ou antérieurs. Ils les citent pour diverses raisons, qui peuvent être d'ordre scientifique, en faisant appel à l'un de leurs résultats par exemple, d'ordre historique, comme nous le verrons dans la sous-section II.3.2.3 (p. 294) au sujet de Pythagore, ou d'un autre ordre, politique ou social, comme les références de Dupin aux cours ouvriers dispensés en France par nombre de ses confrères (Dupin, 1828, p. 393-405). Ces citations peuvent aussi former de simples renvois à d'autres ouvrages, du même auteur ou d'un autre, et dans ce cadre ou non, se nomment parfois entre eux. L'analyse de ces citations et références nous apparaît essentielle pour mettre en évidence les potentielles appartenances des auteurs à des courants scientifiques ou encore à des mouvements pédagogiques, autrement dit pour déterminer s'ils partagent ou non une forme de culture commune. Cette notion de « culture », récemment développée en histoire des mathématiques et de son enseignement (D'Enfert, 2005 ; Lê, 2016), trouve son écho dans cette partie de nos travaux qui consiste, à travers l'étude de leurs citations et inter-citations, à définir des groupes d'auteurs présentant des références communes ou se référant les uns aux autres. Les résultats de l'analyse qui suit ont vocation à permettre de vérifier, dans le cadre d'une théorie ou encore d'une preuve produite par un auteur, à quelle conception géométrique ou scientifique ce dernier pourrait se référer, et dans quelle culture il pourrait s'inscrire.

49. Nous utiliserons ici le terme « auteur » pour désigner indifféremment un auteur ayant rédigé seul son manuel ou un binôme d'auteurs l'ayant rédigé ensemble, afin de ne pas alourdir nos formulations.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Questions :

- **En citant des personnalités scientifiques dans leurs manuels, les auteurs expriment-ils dans quelle conception géométrique, ou plus généralement scientifique, ils s'inscrivent ? Et si oui, lesquelles ?**
- **Les auteurs se réfèrent-ils à un socle commun de culture géométrique, notamment en mentionnant les mêmes acteurs scientifiques ?**
- **Les personnalités citées dépendent-elles des orientations scientifiques ou pédagogiques propres à chaque ouvrage, suivant les objectifs et les influences de leurs auteurs ?**

Méthode : Nous avons créé une base de données relationnelle en relevant systématiquement, dans les manuels du corpus, les acteurs scientifiques cités par les auteurs[50], dans les parties communes aux ouvrages (introductions, préfaces, postfaces, etc.) et dans les parties relatives aux aires, que nous avons tout particulièrement étudiées. Dans un premier temps, nous avons référencé un premier type de mentions, concernant des acteurs scientifiques externes aux auteurs du corpus, pour lesquelles nous avons relevé si elles étaient relatives au thème des aires ou non.
Les données recueillies ont ensuite été présentées sous forme de réseau biparti, avec à gauche les acteurs scientifiques mentionnés, à droite les auteurs des titres de notre corpus, reliés par des traits en rouge si ces derniers les citent à propos des aires, et en bleu sinon.
Résultat : Voir le diagramme biparti II.16 (p. 209).

50. Le critère pour déterminer si une personnalité citée est un acteur scientifique, est que la personne ait ou ait eu une activité de recherche et/ou d'enseignement dans un domaine scientifique et qu'elle ait écrit et publié à ce sujet. D'autres personnalités peuvent être citées dans les ouvrages, comme par exemple des hommes politiques, mais nous choisissons de ne pas les inclure dans notre étude, qui se concentre sur les influences scientifiques des auteurs.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

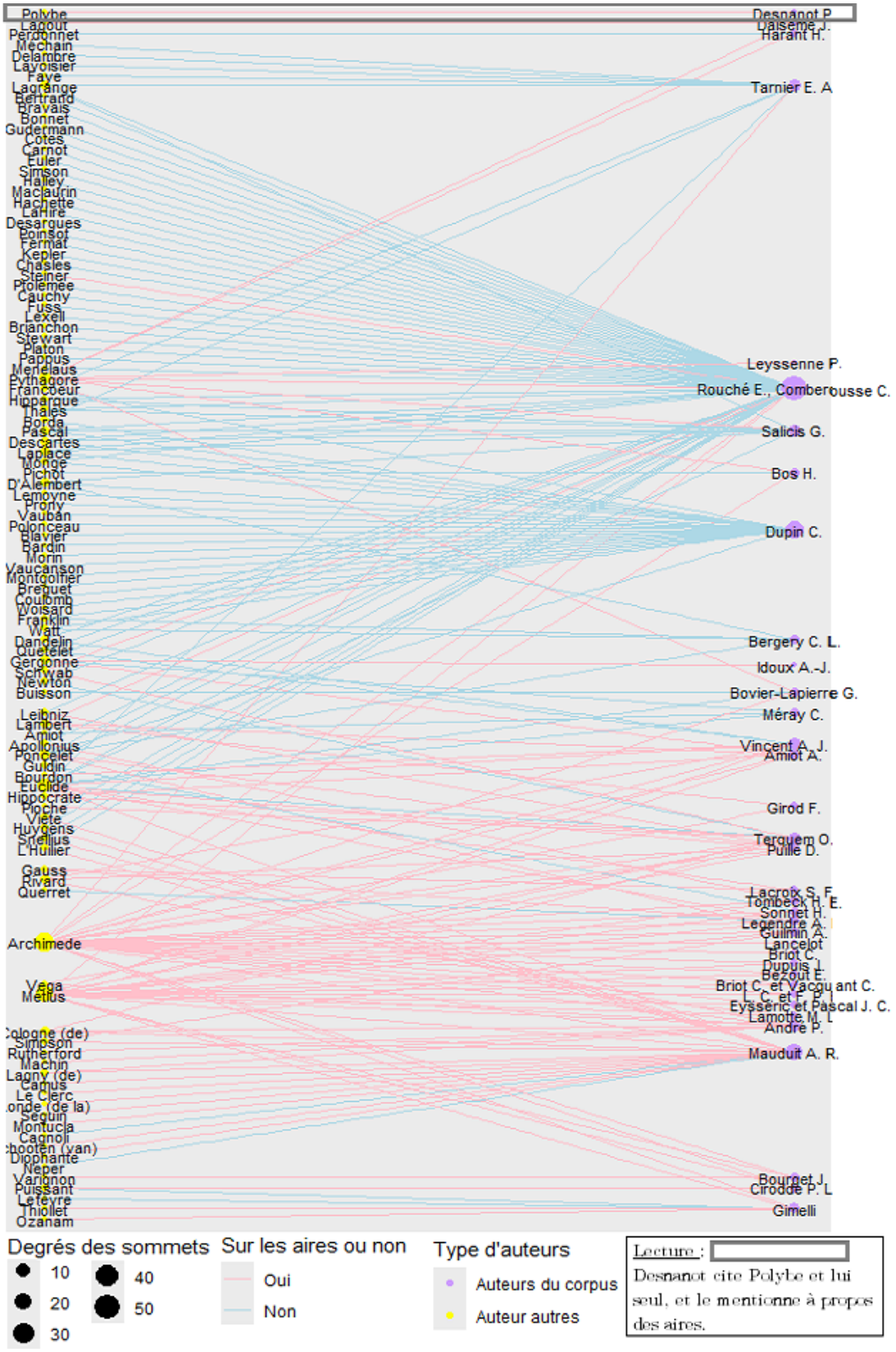


FIGURE II.16 – Diagramme du réseau de citation des auteurs des manuels du corpus vers d'autres acteurs scientifiques, réalisé avec la fonction « bipartite.mapping » du logiciel R

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Sur le diagramme, les auteurs des manuels du corpus qui citent au moins un autre scientifique sont 37, car 3 d'entre eux — Percin (1842), Bert (1886) et Hue et Vagnier (1896) — ne mentionnent personne. Beaucoup de citations vont vers Archimède, et sont à propos des aires, car ce savant joue un grand rôle dans la détermination de l'aire d'un disque et du calcul de π, et se trouve souvent mentionné dans ce cadre. Rouché et Comberousse écrivent un livre avec en introduction l'histoire de la géométrie, d'où les nombreux liens vers d'autres acteurs scientifiques, en bleu car non forcément corrélés au thème des aires. Ce sont d'ailleurs eux qui présentent le plus de citations sortantes (52), suivis de Dupin qui cite 22 personnalités et Mauduit 19. Dupin ne cite globalement pas ces scientifiques à propos des aires pour la raison que nous avons donnée dans un paragraphe précédent. En revanche, les références relevées pour Mauduit sont principalement à ce sujet, ce dernier se référant souvent aux travaux antérieurs des notions qu'il aborde. En moyenne les auteurs des ouvrages du corpus citent 5,3 acteurs scientifiques, ce qui montre, en plus de la visualisation graphique, que les références à d'autres personnalités ne sont pas rares au sein des manuels.

Les citations entrantes apparaissent en quantité plus variée, allant de 1 pour les 67 auteurs cités une seule fois (soit environ les 2/3 des scientifiques cités), à 26 pour Archimède, dont nous avons déjà évoqué le cas. Il est suivi de Métius, mentionné par 20 des auteurs des manuels, toujours dans le même cadre qu'Archimède sur la nature du nombre π en lien avec la mesure de l'aire du cercle, puis d'Euclide (11 fois) et Pythagore (8 fois). La particularité de Pythagore est étudiée dans la sous-section II.3.2.3 (p. 294). Quant à Euclide, le fait que son nom apparaisse seulement 11 fois interroge, mais il faut rappeler que les références ont été cherchées seulement dans les parties générales des manuels et les parties sur les aires, et il est probable que le savant soit évoqué dans les autres parties de certains titres.

Peu de « modernes » des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles sont cités plus de deux fois, mis à part Descartes, Pascal et Laplace, mentionnés trois fois chacun, par le même trio d'auteurs (ou binômes d'auteurs) formé par Dupin, Rouché et Comberousse, et Salicis.

Parmi les plus contemporains aux auteurs du XIX^{e} siècle, les plus cités sont Poncelet — 5 fois dans Dupin (1828), Bergery (1828), Puille (1855), Rouché et Comberousse (1866) et Guilmin (1882) — et Gergonne[51] — 4 fois dans Idoux (1842), Amiot (1859), Rouché et Comberousse (1866) et Méray (1874). Mis à part l'ouvrage de Rouché et

51. Joseph Diez Gergonne (1771 – 1859). Mathématicien français, il enseigne à l'université de Montpel-

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Comberousse, dans lequel beaucoup de personnalités scientifiques sont citées dans l'introduction historique, les références à ces deux derniers savants sont diverses. Puille et Guilmin citent Poncelet dans le cadre de sa formule de calcul des aires curvilignes quelconques (Puille, 1855, p. 137 ; Guilmin, 1882, p. 118), alors que Dupin et Bergery mentionnent respectivement ses cours ouvriers et ses travaux en géométrie projective (Dupin, 1828, p. 1, 400 ; Bergery, 1828, p. vi) [52]. Pour ce qui est de Gergonne, Méray se place, dès la préface de son traité, sous son autorité scientifique pour justifier son choix de fusionner la géométrie plane et la géométrie dans l'espace, principe qui recueille son adhésion (Méray, 1874, p. xi). Les autres mentionnent Gergonne en tant que fondateur des *Annales de mathématiques pures et appliquées*, périodique auxquels ils se réfèrent dans leurs propres travaux.

Conclusion :

— Tous les auteurs ne mentionnent pas d'acteurs scientifiques dans leurs manuels, et si certains en citent beaucoup, d'autres le font beaucoup plus rarement. La pratique consistant à préciser ses références scientifiques, proches ou lointaines, s'exerce donc très diversement suivant les auteurs, notamment à propos des aires.

— Mis à part Métius et Archimède qui sont cités par une majorité d'auteurs du corpus en lien avec les considérations sur les aires, les autres personnalités ne font pas vraiment consensus, y compris les auteurs classiques de l'Antiquité grecque, comme Euclide et Pythagore. En ce sens, à travers leurs citations, il n'apparaît pas de réelle culture en géométrie, et en particulier en géométrie des aires, qui serait commune aux auteurs du corpus.

— Des auteurs mentionnent des personnalités spécifiques, qui leur sont parfois plus contemporaines, en fonction des orientations scientifiques et pédagogiques qu'ils souhaitent donner à leurs ouvrages, et des contextes dans lesquels ils les ont produits.

Cette analyse réalisée, nous décidons désormais de traiter les mêmes données sous un nouvel angle, en déterminant lesquels de nos auteurs citent les mêmes personnes, et dans quel ordre de grandeur. L'idée est alors d'estimer plus précisément quelles seraient leurs éventuelles références communes et de commencer à voir se dessiner

lier avant de devenir recteur de cette académie en 1830. Il fonde en 1810 les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, périodique dans lequel il publiera lui-même de nombreux articles, aux côtés des nombreux scientifiques qui feront usage de cette tribune.

52. Pour les liens, professionnels et d'amitié, que nouent ces trois personnalités, voir (Vatin, 2014).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des groupements d'auteurs partageant une même culture.

Questions :

- **Dans quelle mesure les références que partagent les auteurs du corpus peuvent-elles faire apparaître leur socle de culture commune ?**
- **Les citations que font les auteurs sont-elles plutôt homogènes ou au contraire plutôt dispersées ?**

Méthode : Nous avons dénombré les acteurs scientifiques externes aux auteurs du corpus cités en commun par ces derniers, et représenté les résultats obtenus sous la forme d'un réseau disposé en grille, et valué, c'est-à-dire pondéré, par le nombre de références communes entre auteurs, ces poids apparaissant sous la forme d'un dégradé de couleurs. Cette disposition est symétrique par construction, puisque les relations sont indiquées deux fois, d'un auteur vers un autre et réciproquement, pour une meilleur lisibilité.
Résultat : Voir figure II.17 p. 212.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

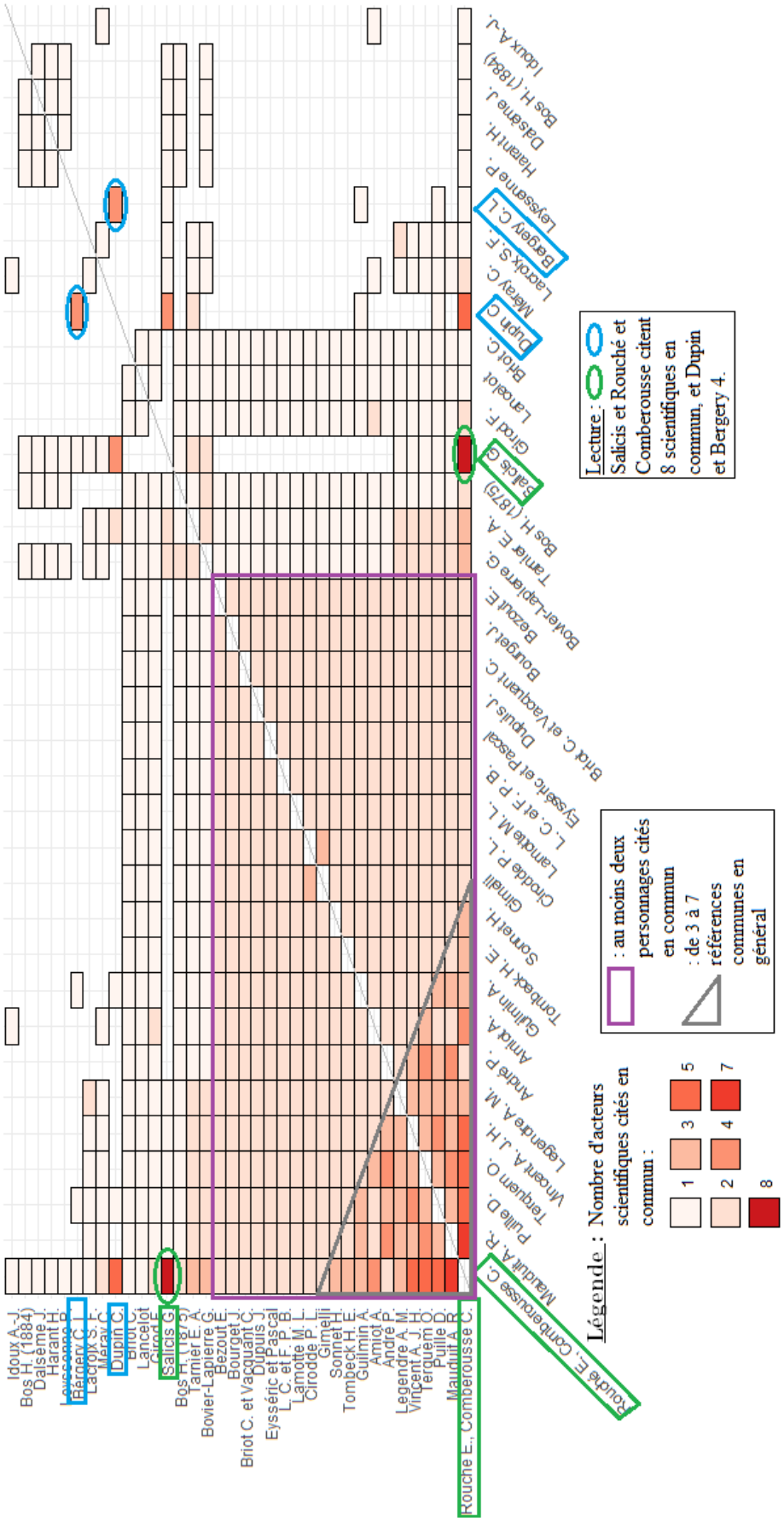


FIGURE II.17 – Diagramme en grilles des citations communes aux auteurs des manuels du corpus, réalisé avec la fonction « ggplot » du logiciel R

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : D'un point de vue global, le premier élément remarquable de ce réseau est le rectangle en violet, qui délimite les auteurs de la moitié du corpus environ, ayant au moins deux références citées en commun. Il s'agit le plus souvent de Métius et Archimède, mentionnés ensemble dans 20 des ouvrages du corpus. L'autre trait saillant est le triangle gris, qui regroupe des auteurs ayant pour beaucoup 3 références en commun avec les autres, ou plus, et ce jusqu'à 7.
Si l'on s'intéresse désormais au détail des références que les auteurs font en commun, nous remarquons que dans le triangle en gris, la plupart des cases matérialisant 3 citations communes sont relatives au trio Archimède/Métius/Euclide. Ceci est cohérent avec le fait que le triangle gris soit inclus dans le rectangle violet, et avec le nombre d'auteurs qui citent Euclide dans leurs manuels, 11, comme le nombre de titres regroupés dans le triangle. Les lignes et colonnes relatives à l'ouvrage de Rouché et Comberousse (1866) sont particulièrement colorées, du fait du très grand nombre de scientifiques cités dans leur manuel (52). Ils ont donc plus de chances d'avoir des références en commun avec les autres, surtout quand ces derniers citent aussi de nombreuses personnalités. C'est ce qui arrive par exemple avec Mauduit, qui lui-même cite 19 acteurs scientifiques, dont 7 en commun avec Rouché et Comberousse. En plus du trio courant Archimède/Métius/Euclide, les deux manuels se réfèrent à l'Huilier pour les figures isopérimètres, ainsi qu'à Snellius, Viète et Huygens. Les citations communes à l'ouvrage de Rouché et Comberousse avec ceux des autres auteurs figurant dans le triangle comportent le trio de savants antiques, complété de divers noms, suivant les orientations des livres concernés, comme Poncelet et Leibniz (avec Puille (1855)), Quételet et Dandelin (avec Vincent (1844)), ou Newton et Schwab (avec Terquem (1829)). Le seul autre ouvrage qui a de nombreuses citations communes avec Rouché et Comberousse, mais pas le même trio antique, est Salicis. Ce dernier, également en introduction de son cours de géométrie, évoque Thalès, Pythagore, Hipparque et Euclide, mais met surtout en avant « ceux dont le temps a consacré le savoir » (Salicis, 1868, p. 589), soit Descartes, Pascal, Laplace, Lagrange et D'Alembert, ce dernier n'étant pas mentionné par Rouché et son co-auteur.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Deux auteurs mentionnent eux aussi des personnalités communes, qui révèlent d'autres liens entre eux. Il s'agit de Dupin et Bergery, contemporains et associés tous deux à la création des cours ouvriers à Paris et à Metz (voir note 52 p. 210), qui publient leurs ouvrages la même année, pour des publics et dans des contextes similaires. Les références communes, Franklin, Watt, D'Alembert et Poncelet, sont très ciblées, et remarquables du fait que certains des noms concernés n'apparaissent pas dans les autres titres du corpus. En localisant les occurrences de ces noms, nous avons remarqué qu'elles figurent toutes dans le préambule de leurs deux ouvrages, qui sont pour Dupin, un discours aux ouvriers français (1828, p. v-viii), et pour Bergery le discours d'ouverture de son cours industriel à Metz, daté du 8 novembre 1825 (Bergery, 1828, p. ix-xviii). Les références ne sont pas le seul point commun aux deux textes, qui reprennent le même argumentaire consistant à exhiber des savants issus du monde ouvrier et de l'artisanat, Franklin étant mentionné comme « garçon imprimeur » chez Dupin et « ouvrier imprimeur » chez Bergery, Watt comme un « raccommodeur d'instruments » de physique ou de mathématiques chez les deux auteurs, et D'Alembert comme ayant fait ses débuts en tant que « vitrier » (Dupin, 1828, p. vii-viii ; Bergery, 1828, p. xi). Une telle proximité dans le propos et le vocabulaire employé ne peut en aucun cas être une coïncidence, d'autant que les deux auteurs mentionnent également Arkwright, à l'origine « perruquier » et inventeur du métier à tisser, et que nous n'avons pas retenu dans nos acteurs scientifiques car il n'a, à notre connaissances, pas publié ses travaux. Il est donc manifeste que l'un des deux s'est très largement inspiré du discours de l'autre en reprenant à son compte ses principaux arguments. L'hypothèse la plus probable est que ce soit Dupin qui ait emprunté les mots de Bergery, ce qui est étayé par la datation (8 novembre 1825) et la localisation précise (Metz) du discours de Bergery, contrairement à celui de Dupin, et par le fait que le discours de Bergery soit beaucoup plus long.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— Le binôme Archimède/Métius forme une base de culture commune pour environ la moitié des auteurs du corpus, et le trio Archimède/Métius/Euclide pour environ un quart d'entre eux.

— Mis à part ces personnalités de l'Antiquité, aucune homogénéité n'apparaît réellement entre les acteurs scientifiques, notamment plus modernes voire contemporains, que les auteurs prennent pour références.

— L'étude révèle un réel socle de culture commune à Dupin et Bergery, qui s'appuient tous les deux strictement sur les mêmes références, formées de savants ayant contribué à l'évolution de l'industrie et des arts, en France et à l'étranger.

Enfin, un dernier aspect de cette analyse des réseaux est celui des intercitations, dans la mesure où les auteurs de manuels du corpus se réfèrent parfois les uns aux autres à travers leurs écrits. Le recueil et le traitement de ces données vise à mettre en évidence les connexions internes à l'ensemble des auteurs du corpus, susceptibles de former des groupes d'influence dans lesquels ils s'insèrent. Nous projetons ensuite d'affiner cette analyse en extrayant des réseaux relatifs à certaines figures particulières prises parmi celles se trouvant le plus souvent citées par les autres, afin de confirmer ou non les groupes d'auteurs se mentionnant les uns les autres repérés au cours de la première analyse.

Questions :

- **L'étude des intercitations montre-t-elle les mêmes groupes d'influence que ceux exhibés par l'analyse des références communes ? En particulier, des auteurs présentant apparemment le même socle de culture commune se citent-ils entre eux ?**
- **Les auteurs liés par des intercitations partagent-ils une même culture de la géométrie et de son enseignement ?**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Les relations d'intercitations entre auteurs peuvent être visualisées à travers un réseau orienté, le sens des flèches indiquant dans quelle direction est effectuée la citation, de l'auteur qui cite vers celui cité, et leur épaisseur correspondant au nombre de ces citations, un auteur pouvant, dans un ouvrage, en mentionner un autre à plusieurs reprises, ce qui a été relevé dans la base de données.
Les réseaux personnels (c'est-à-dire relatifs aux liens de citations avec une personne en particulier) suivants sont centrés autour de Legendre et de Dupin, qui sont les deux auteurs les plus souvent cités par les autres parmi les rédacteurs des manuels du corpus (respectivement 9 fois et 5 fois). Ces réseaux sont dits « d'ordre 2 » car ils montrent les interactions qui se jouent autour de chacune de ces personnes, soit de façon directe, avec les auteurs qui leur sont reliés, soit de façon indirecte, en prenant en compte les liens unissant les auteurs eux-mêmes liés à cette personne. Par exemple, le premier réseau montre un groupe d'auteurs connectés à Legendre, soit parce qu'ils le citent (Legendre ne cite quant à lui aucun des autres auteurs) ou parce qu'ils citent ou sont cités par quelqu'un qui le cite.
Résultat : Voir les diagrammes II.18 p. 217 et II.19 p. 217.

Lecture et analyse : Sur la figure II.18 (p. 217) apparaissent les 42 intercitations d'auteurs du corpus[53]. Les plus grands bénéficiaires en sont Legendre, avec 9 citations entrantes et Dupin avec 5, suivis de Lacroix et Bézout à égalité avec 3 citations chacun. Ces mentions émanent principalement de Terquem, Tarnier, Dupin et Rouché et Comberousse qui se réfèrent chacun à trois ou quatre des autres auteurs. La convergence des flèches vers les quatuor Lacroix-Legendre-Dupin-Bézout peut s'expliquer par des arguments de notoriété (voire d'autorité) puisque ce sont des auteurs reconnus dans leur domaine (géométrie élémentaire ou géométrie pratique), et servant de référence aux géomètres leur succédant. Un biais générationnel est néanmoins probable, qu'il ne faut pas négliger, puisqu'un auteur ne peut citer qu'une personne qui lui est contemporaine ou antérieure. Cela explique en partie que les auteurs, disposés autour du cercle par ordre chronologique de Mauduit à Girod, reçoivent de moins en moins de flèches.

53. 26 références mutuelles distinctes, dont plusieurs multiples, des auteurs en mentionnant d'autres à plusieurs reprises dans leurs ouvrages.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

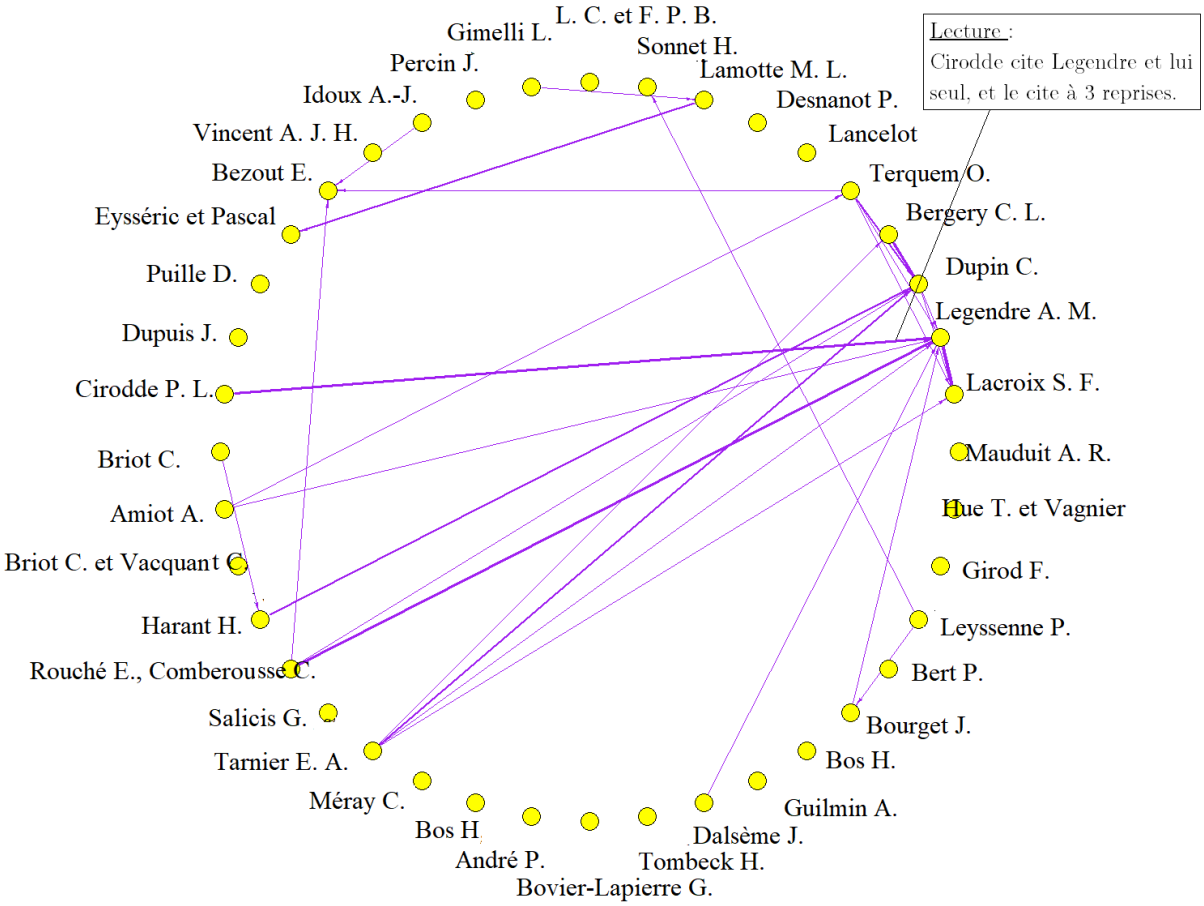


FIGURE II.18 – Réseau en cercle des intercitations des auteurs des manuels du corpus, réalisé avec la fonction « ggplot » et la configuration « layout in circle » du logiciel R

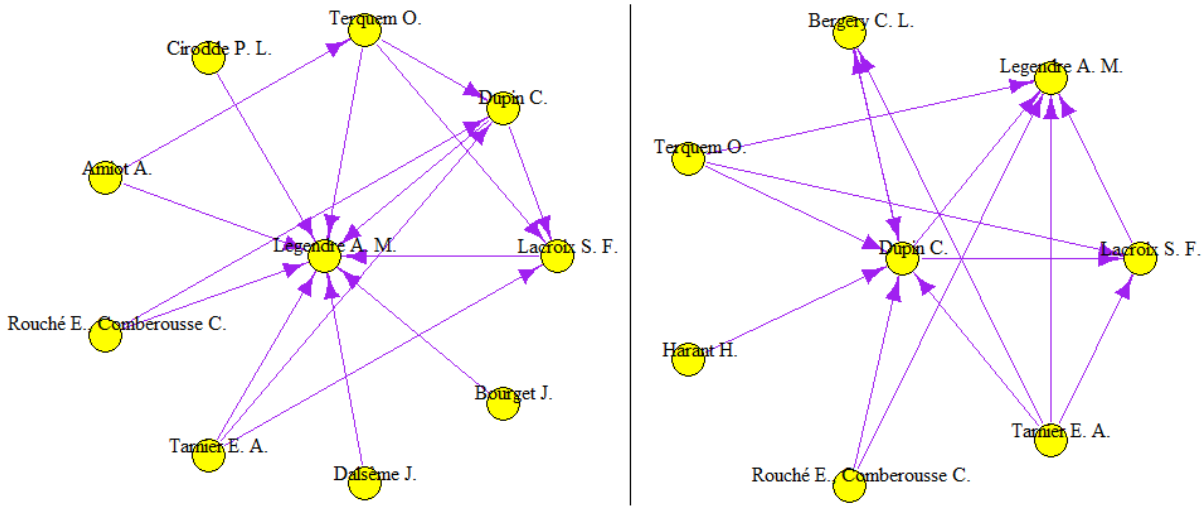


FIGURE II.19 – Réseaux personnels de Legendre et de Dupin, réalisé avec la fonction « make ego graph » du logiciel R

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Le réseau personnel de Legendre englobe neuf personnalités en plus de lui-même, formant un ensemble d'auteurs, hétérogène en terme de période, Bourget (1885) étant le plus tardif, et écrivant très majoritairement pour un public du secondaire. Dupin, Dalsème et Tarnier se distinguent par une approche de l'enseignement de la géométrie plus pratique que théorique, ce dont témoignent les titres de leurs manuels, destinés à un public du primaire. Pourtant, ces derniers demeurent dans un cercle d'intercitation proche de Legendre, dont l'ouvrage est d'un abord plus théorique. Quant à Dupin, son réseau personnel englobe sept personnes en plus de lui-même, davantage situées temporellement au début du siècle, le plus tardif étant Tarnier (1872). Il comprend ses propres références, Legendre, Lacroix et Bergery, mais aussi des auteurs qui le citent comme Bergery, Harant, Rouché et Comberousse, Tarnier et Terquem. La proximité des intentions et publics des ouvrages de Dupin avec ceux de Bergery, Harant, mais aussi Tarnier explique assurément leur appartenance à un réseau commun d'intercitation. En revanche, Terquem et Rouché et Comberousse se situent, au moins en première analyse, dans une géométrie plutôt théorique et consacrée à l'enseignement secondaire, ce qui ne les empêche pas de se référer à Dupin, par ailleurs très reconnu par ses travaux scientifiques, notamment sur les surfaces du second degré [54]. C'est d'ailleurs à ce titre qu'ils le mentionnent, et non en tant que rédacteur d'un ouvrage pour enseigner la géométrie.

Conclusion :
— Cette étude montre que des auteurs déclarant des références communes ne se citent pas forcément entre eux, et réciproquement, même si quelques personnalités appartiennent à tous les groupes exhibés dans cette partie. C'est le cas de Terquem, Rouché et Comberousse, et Legendre, soit parce qu'ils se réfèrent à beaucoup d'acteurs scientifiques, internes ou externes à la cohorte des auteurs des manuels du corpus, soit parce qu'ils représentent eux-mêmes des modèles difficilement contournables.

— Des auteurs appartenant à des mêmes groupes d'influence ne partagent pas forcément pour autant la même vision de l'enseignement de la géométrie, ancré plus dans la théorie ou davantage tourné vers la pratique.

Les références affichées par les auteurs dans leurs textes sont assez unanimes concernant les savants anciens, dont quelques noms ressortent avec une grande fréquence, mais s'avèrent plutôt hétéroclites pour ce qui est de la période moderne, même si

54. Voir à ce sujet les chapitres de Lorenat (2019) et de Belhoste (2009).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

quelques personnalités influentes ressortent de leurs citations. Le socle de culture commune aux auteurs des manuels de notre corpus penche donc davantage vers la géométrie antique que vers les personnalités qui ont marqué les périodes plus contemporaines, qui ne font manifestement pas consensus. L'existence d'une éventuelle culture partagée par des auteurs n'implique pas forcément qu'ils se réfèrent les uns aux autres, sans doute parce qu'ils citent moins aisément des acteurs scientifiques plus proches d'eux dans le temps, et qu'il leur est impossible de mentionner des auteurs qui leur sont ultérieurs. Leurs intercitations révèlent néanmoins une nouvelle fois que la frontière entre les deux conceptions de l'enseignement de la géométrie, d'ancrage plus pratique dans le primaire, et d'orientation plus théorique dans le secondaire (voir la sous-section I.3.1.2 p. 106), est loin d'être étanche, puisque des auteurs partisans de l'une n'hésitent pas à se référer à ceux se réclamant de l'autre. Cette perméabilité a déjà été mise en évidence pour ce qui concerne les deux ordres d'enseignement dans la sous-section I.2.1.5 (p. 75), et se voit ainsi confortée par cette nouvelle analyse. La dernière partie de l'étude centrée sur les deux individus spécifiques — Legendre et Dupin — qui ressortent de l'étude globale des intercitations, souligne particulièrement en quoi les manuels de géométrie se situent à l'interface des approches plutôt théoriques et pratiques de l'enseignement de la géométrie de leurs auteurs, mais aussi des acteurs scientifiques que ces derniers mentionnent dans ce cadre (voir schéma II.20 p. 219).

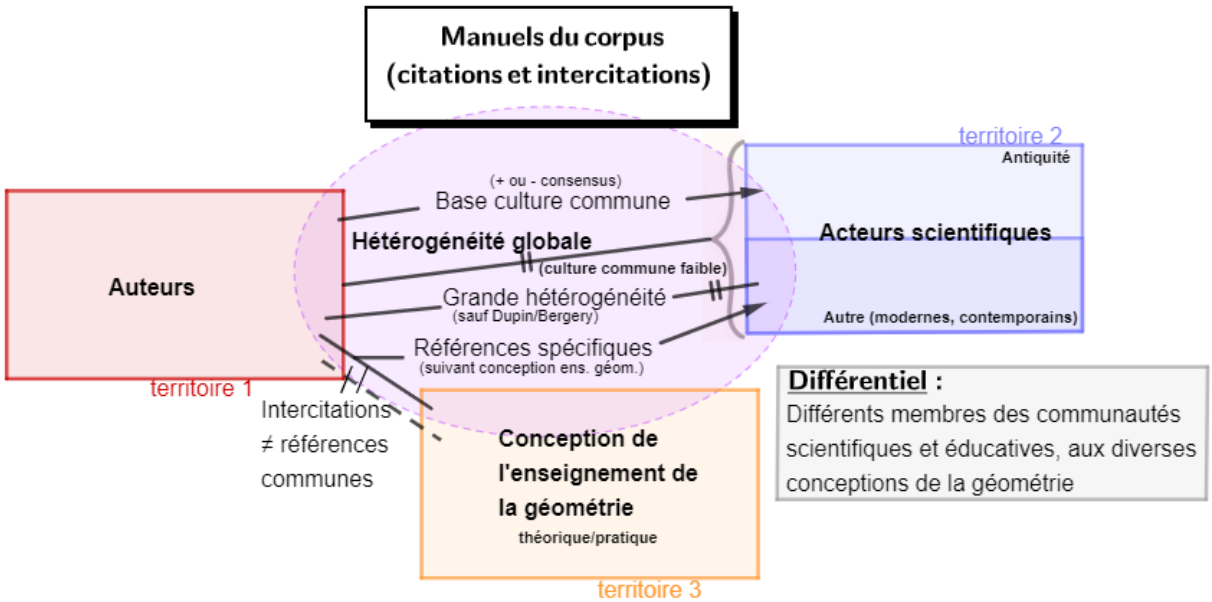


FIGURE II.20 – Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, notamment à travers les citations et intercitations qu'ils contiennent, sont à l'interface des acteurs scientifiques mentionnés, de leurs auteurs et de leurs conceptions de l'enseignement de la géométrie

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.2.2.2 La place des aires dans les ouvrages retenus

Dans son étude des manuels d'arithmétique, Legros mobilise la notion d'« énoncé de savoir » (Legros, 2019, p. 138), qui comprend des définitions, des propriétés, des explications de techniques ou de méthodes, mais aussi des exemples génériques et exclut les énoncés d'exercices et de problèmes. Elle aborde également certaines caractéristiques formelles des manuels, telles que leur taille, et souligne par exemple que certains longs traités sont parfois résumés sous forme abrégée, et que des règles éditoriales qui se normalisent progressivement rendent les ouvrages de plus en plus standardisés (Legros, 2019, p. 133-136, 148). Elle estime également la part de certains thèmes ou concepts (numération, opérations, part des exercices) en comptant le nombre de pages qui leur sont associées (Legros, 2019, p. 184-185, 212-214). Dans le corpus des 40 manuels de géométrie que nous avons constitué, les méthodes de Legros ont été systématisées en recueillant des données quantitatives intrinsèques aux ouvrages, notamment à propos des aires, et en déterminant leurs principaux indicateurs statistiques. L'objectif poursuivi lors de cette analyse est de déterminer s'il existe une forme de prototype, ou profil type, des manuels de géométrie contenant de la géométrie des aires, et aussi d'estimer la part qu'occupe cette géométrie dans les ouvrages considérés [55].

Questions :

- **Les manuels de géométrie comprenant des parties sur les aires présentent-ils un profil commun en termes de volume, de contenus sur les aires et de la part qu'occupe ce thème dans ces ouvrages ?**
- **Existe-t-il un profil type (ou prototype) de ce genre d'ouvrages, d'un point de vue statistique ?**
- **Dans quelle mesure le thème des aires est-il présent dans les ouvrages du corpus, quantitativement parlant ?**

55. Cette étude quantitative a été présentée en grande partie dans notre article pour « Acta Scientiae » paru en 2022 (Guillet, 2022).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Les données collectées sur les 40 manuels du corpus sont : le nombre de pages et de sections (y compris le nombre de celles qui concernent les aires) et le nombre d'« énoncés de savoir » sur ce thème, suivant la même définition que dans le travail de Legros. Nous avons ensuite calculé les principaux indicateurs statistiques de position et de dispersion (moyenne, médiane, quartiles, etc.) , avant de les représenter par des diagrammes en boîte [56].
Résultat : voir les tableaux II.10 p. 222, et II.11 p. 223 et le graphique II.21 p. 223.

Lecture et analyse : Le profil médian d'un manuel de géométrie serait composé de 318 pages et 433 sections, contenant 12 % des pages et 10 % des sections sur les aires, et avec un peu plus de 60 énoncés traitant de ce sujet (voir les lignes en rouge sur le diagramme II.21 p. 223). Le livre le plus proche de ce profil médian est celui de Bourget en 1885 (Bourget, 1885) avec 308 pages dont 13 % sur les aires, 470 sections (10 % sur les aires) et 64 énoncés, que l'on peut considérer comme un prototype de ce genre d'ouvrages. La représentation en diagrammes en boîte montre également une hétérogénéité modérée, car si les fourchettes sont importantes (de 44 à 1158 sections, par exemple), tout comme les écarts inter-déciles, les écarts inter-quartiles (en bleu sur la figure II.21 p. 223) restent faibles. En effet, la moitié des manuels du corpus ont un nombre de pages compris entre 204 et 410, un nombre de sections compris entre 278 et 596, et contiennent entre 9 et 15 % de pages sur les aires (de 8 à 13 % des sections) et de 47 à 78 énoncés sur ce thème. En moyenne, les aires représentent entre 11 et 12 % du volume d'un manuel de géométrie (en pages ou en sections), ce qui représente une proportion significative tout en restant relativement faible. L'étude met également en évidence une forme commune à une grande majorité des livres de géométrie étudiés, malgré des différences plus importantes à la marge. Aux extrêmes, on trouve des ouvrages moins typiques, comme celui de Rouché et Comberousse (776 pages, 1158 sections, 5 % sur les aires, plus de 100 énoncés) (Rouché et Comberousse, 1866), ou celui de Dalsème (65 sections, 60 pages, dont plus d'un quart sur les aires, 24 énoncés) (Dalsème, 1880).

56. Ces diagrammes en boîte sont des modèles standards de représentation des indicateurs statistiques de position et de dispersion que sont les médianes, quartiles et déciles (Larmarange, 2024, p. 268-269).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

	Année d'édition retenue	Année de 1ère édition	Année de dernière édition	Longévité éditoriale	Nombre d'éditions	Rang de l'édition retenue	Nombre de pages (hors préface et planches)	Nombre de pages sur les aires	Proportion de pages sur les aires	Nombre de sections	Nombre de sections sur les aires	Proportion de sections sur les aires	Nombre d'énoncés sur les aires
Mauduit, 1790	1790	1772	1809	38	3	2	542	101	18.6%	663	110	16.59%	109
Lacroix, 1808	1808	1798	1912	115	26	7	256	24	9.4%	322	33	10.25%	41
Legendre, 1823	1823	1794	1823	30	12	12	336	56	16.7%	273	50	18.32%	73
Dupin, 1828	1828	1825	1828	4	2	2	403	11	2.7%	X	X	X	28
Bergery, 1828	1828	1826	1837	12	4	2	405	32	7.9%	598	46	7.69%	82
Terquem, 1829	1829	1829	1838	10	3	1	456	64	14.0%	717	60	8.37%	98
Lancelot, 1833	1833	1827	1840	14	21	8	263	31	11.8%	X	X	X	38
Desnanot, 1835	1835	1827	1835	9	2	2	227	52	22.9%	420	65	15.48%	78
Lamotte, 1839	1839	1833	1875	43	20	5	216	52	24.1%	291	36	12.37%	41
Sonnet, 1839	1839	1839	1888	50	9	1	639	74	11.6%	797	78	9.79%	123
L.C.F.P.B., 1840	1840	1831	1888	58	29	12	180	26	14.4%	517	55	10.64%	59
Gimelli, 1841	1841	1841	1841	1	1	1	177	34	19.2%	234	42	17.95%	69
Percin, 1842	1842	1842	1862	21	7	2	184	23	12.5%	477	38	7.97%	46
Idoux, 1842	1842	1842	1842	1	1	1	357	42	11.8%	588	80	13.61%	101
Vincent, 1844	1844	1826	1844	19	5	5	517	54	10.4%	560	42	7.50%	91
Bezout, 1848	1848	1848	1848	1	1	1	172	20	11.6%	362	31	8.56%	48
Eysseric, 1850	1850	1848	1859	12	9	3	257	30	11.7%	447	48	10.74%	60
Puille, 1855	1855	1855	1887	33	20	1	328	38	11.6%	340	26	7.65%	64
Dupuis, 1857	1857	1857	1878	22	5	1	205	23	11.2%	362	41	11.33%	49
Cirodde, 1858	1858	1836	1858	23	3	3	488	49	10.0%	950	67	7.05%	78
Briot, 1859	1859	1859	1911	53	12	1	240	35	14.6%	263	38	14.45%	46
Amiot, 1860	1860	1855	1897	43	11	6	402	21	5.2%	66	5	7.58%	51
Harant, 1863	1863	1863	1863	1	1	1	280	17	6.1%	148	6	4.05%	46
Briot, 1863	1862	1856	1884	29	8	5	660	36	5.5%	566	29	5.12%	69
Rouché, 1866	1866	1866	1912	47	8	1	776	41	5.3%	1158	63	5.44%	107
Salicis, 1868	1868	1868	1868	1	1	1	199	18	9.0%	766	60	7.83%	51
Tarnier, 1872	1872	1872	1872	1	1	1	352	25	7.1%	414	25	6.04%	56
Méray, 1874	1874	1874	1906	33	3	1	336	12	3.6%	581	19	3.27%	30
Bos, 1875	1875	1875	1915	41	23	1	268	29	10.8%	402	35	8.71%	61
André, 1879	1879	1866	1920	55	38	10	424	66	15.6%	808	112	13.86%	107
Bovier, 1879	1879	1879	1885	7	4	1	174	27	15.5%	192	23	11.98%	52
Tombeck, 1879	1879	1872	1895	24	15	6	500	33	6.6%	87	7	8.05%	68
Dalsème, 1880	1880	1880	1883	4	4	3	60	16	26.7%	65	13	20.00%	24
Guilmin, 1882	1882	1854	1891	38	26	22	404	48	11.9%	541	52	9.61%	72
Bos, 1884	1884	1884	1884	1	2	1	152	23	15.1%	210	27	12.86%	47
Bourget, 1885	1885	1884	1892	9	8	4	308	41	13.3%	470	48	10.21%	64
Bert, 1886	1886	1886	1887	2	2	1	92	20	21.7%	44	10	22.73%	24
Leyssennne, 1890	1890	1890	1907	18	7	1	464	65	14.0%	743	99	13.32%	80
Girod, 1893	1893	1880	1905	26	22	11	386	30	7.8%	898	58	6.46%	73
Hue, 1896	1896	1896	1922	27	18	1	194	30	15.5%	393	45	11.45%	58

TABLE II.10 – Tableau des données quantitatives relevées pour les 40 manuels du corpus

Carène GUILLET| Thèse de doctorat | Université de Limoges
Licence CC BY-NC-ND 3.0

Indicateurs statistiques relatifs aux données quantitatives des ouvrages du corpus

variable	moyenne	ecartype	minimum	Q1	Q2.mediane	Q3	maximum
Nombre total de pages	331.98	159.20	60.00	203.50	318.00	409.75	776.00
Nombre de pages sur les aires	36.73	18.95	11.00	23.00	31.50	48.25	101.00
Fréquence des pages sur les aires	0.12	0.06	0.03	0.09	0.12	0.15	0.27
Nombre total de sections	466.66	264.45	44.00	277.50	433.50	595.50	1,158.00
Nombre de sections sur les aires	45.32	26.47	5.00	27.50	42.00	59.50	112.00
Fréquence des sections sur les aires	0.11	0.04	0.03	0.08	0.10	0.13	0.23
Nombre d'énoncés sur les aires	64.05	24.54	24.00	46.75	60.50	78.00	123.00

TABLE II.11 – Tableau des principaux indicateurs statistiques relatifs aux données quantitatives relevées pour les 40 manuels du corpus

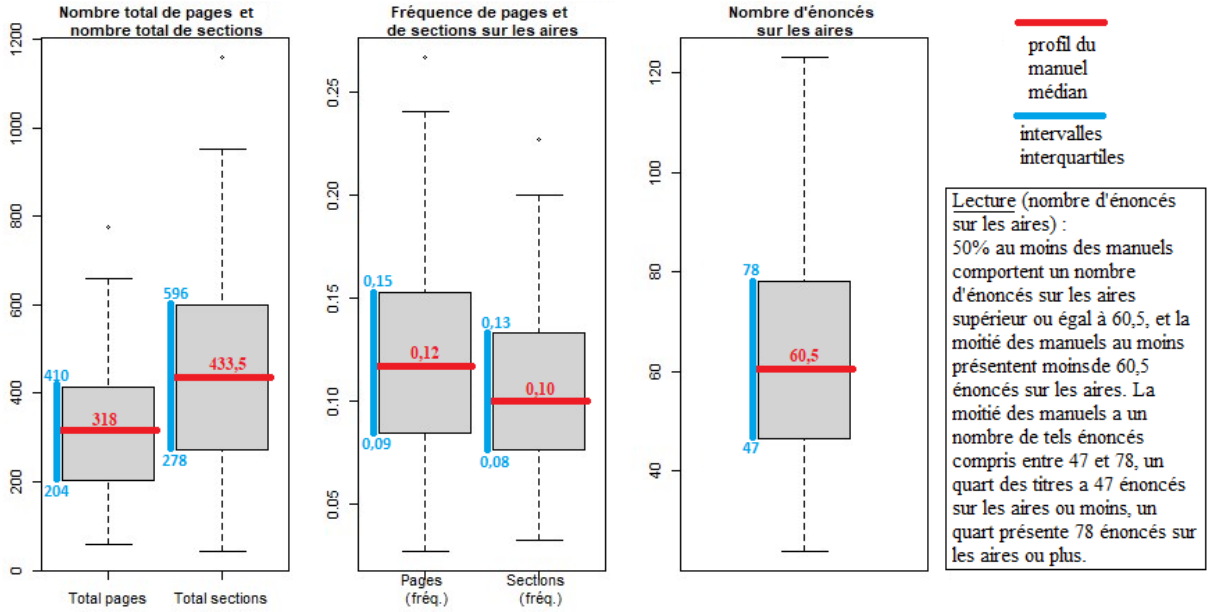


FIGURE II.21 – Diagrammes en boîtes représentant les médianes et quartiles des principales données quantitatives relevées pour les 40 manuels du corpus, réalisés à l'aide de la fonction « boxplot » du logiciel R

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— Il existe un profil type de la forme des ouvrages de géométrie présentant des savoirs sur les aires, commun à la plupart des ouvrages du corpus, même si des titres moins typiques se caractérisent par des données plus éloignées des valeurs médianes.

— Le thème des aires est significativement représenté dans les manuels du corpus sélectionné, en nombre de pages ou sections comme en proportion relative, malgré des écarts notables entre les titres retenus.

La place relative des aires dans les ouvrages que nous venons de mettre en évidence est à mettre en parallèle avec leur importance dans les programmes, elle aussi modérée bien que non négligeable (voir la sous-section I.1.2.3 p. 52). Mais cette donnée mérite également d'être analysée au regard d'autres critères, comme par exemple la longévité éditoriale, pour déterminer si la présence de contenus de savoirs sur les aires dans les manuels a un impact sur la durée de leur notoriété.

II.2.2.3 Analyse croisée du poids du thème des aires et de la longévité éditoriale des ouvrages du corpus

L'analyse des caractéristiques quantitatives étudiées dans la section précédente a permis de dresser une morphologie type des manuels de géométrie, en ce qui concerne leur volume et la part que leurs auteurs consacrent au thème des aires. Pour mesurer l'impact potentiel de la forme des ouvrages sur leur succès d'édition, ainsi que du volume relatif qu'occupent les aires dans leurs contenus, nous avons croisé les données précédemment analysées avec les caractéristiques quantitatives que constituent la longévité éditoriale (différence entre la dernière et la première année de publication du manuel) et le nombre de réimpressions.

Questions :

- **Existe-t-il une corrélation entre le volume des ouvrages, la part que leurs auteurs réservent aux aires et leur succès d'édition ?**
- **Les ouvrages du corpus suivent-ils une (ou des) tendance(s) temporelle(s) relative(s) à ces critères (volume global, part des aires dans les manuels et succès éditorial) ?**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Nous avons utilisé une des techniques de l'Analyse Géométrique des Donnée (AGD), l'Analyse en Composantes Principales (ACP), qui est adaptée aux variables quantitatives. Cette méthode consiste à représenter les variables ainsi que les individus dans un plan et à résumer l'information en deux dimensions, alors que la situation réelle en comporte beaucoup plus. Par exemple, dans l'ACP suivante, chacun des individus, c'est-à-dire chaque manuel du corpus, est caractérisé par 6 variables, et doit donc être représenté en 6 dimensions. Les 6 variables retenues sont dans ce cas le nombre d'éditions, la longévité éditoriale, le nombre total de pages, le nombre d'énoncés sur les aires, les fréquences de pages et de sections sur les aires. Nous n'avons pas retenu le nombre de pages et le nombre de sections sur les aires, car les données similaires exprimées en fréquences caractérisent mieux le poids des aires dans les pages et/ou les sections. Nous n'avons pas non plus conservé la donnée portant sur le nombre de sections. Assez proche de celle sur le nombre de pages et de ce fait redondante, elle nous est apparue comme moins significative du volume global des ouvrages, compte-tenu que tous les manuels ne sont pas découpés en sections (2 sur 40 ne le sont pas).
L'ACP permet de projeter au mieux le nuage de points des individus sur deux axes en maximisant l'inertie, c'est-à-dire en permettant d'apprécier au mieux les distances entre les individus (Larmarange, 2024, p. 586-587). Elle se décline en deux composantes. La première, appelée « plan des variables », montre la disposition vectorielle (sous forme de flèches) en deux dimensions des variables considérées dans l'ACP, suivant des coordonnées proportionnelles à la contribution de ces variables dans la constitution du plan des individus. La seconde est le « plan des individus » , qui présente la répartition des individus statistiques considérés sous la forme d'un nuage de points, dans le même plan que celui des variables. Leurs positions dans le plan peuvent donc être expliquées par les valeurs prises par les variables qui les caractérisent.
Résultat : Voir les figures II.22 p. 226 et II.23 p 227.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

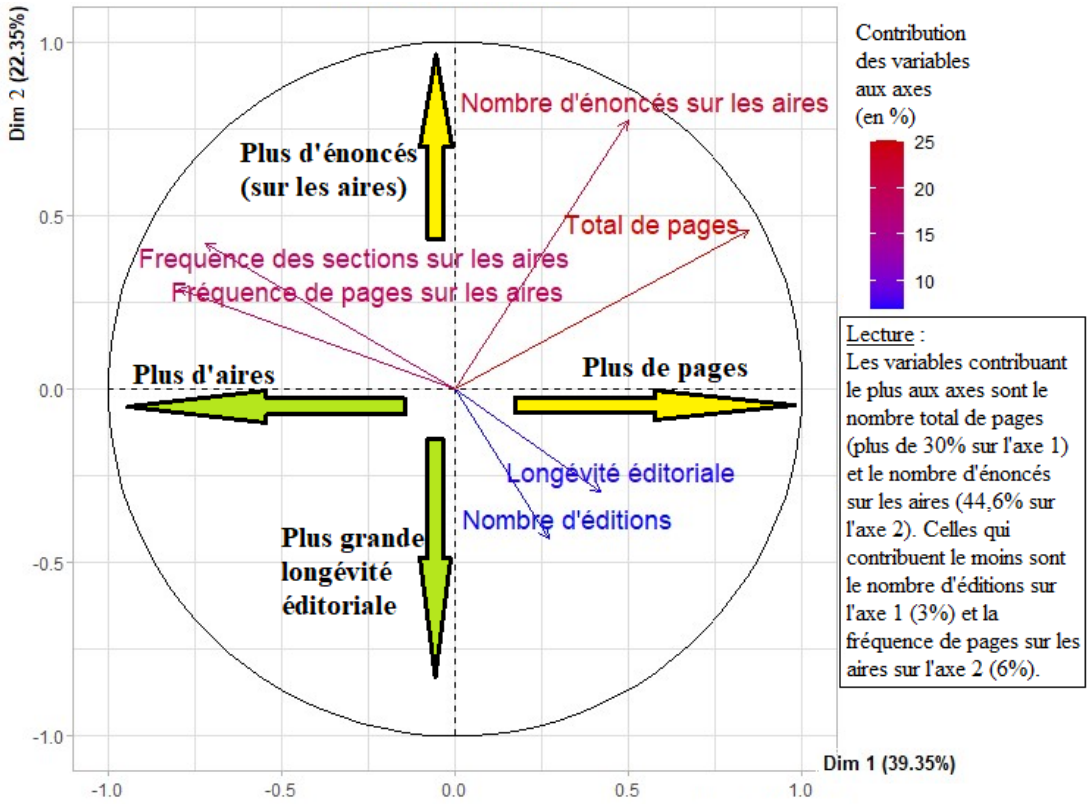


FIGURE II.22 – Plan des variables de l'ACP des données quantitatives associées aux 40 manuels du corpus, réalisé à l'aide de la fonction « PCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra »

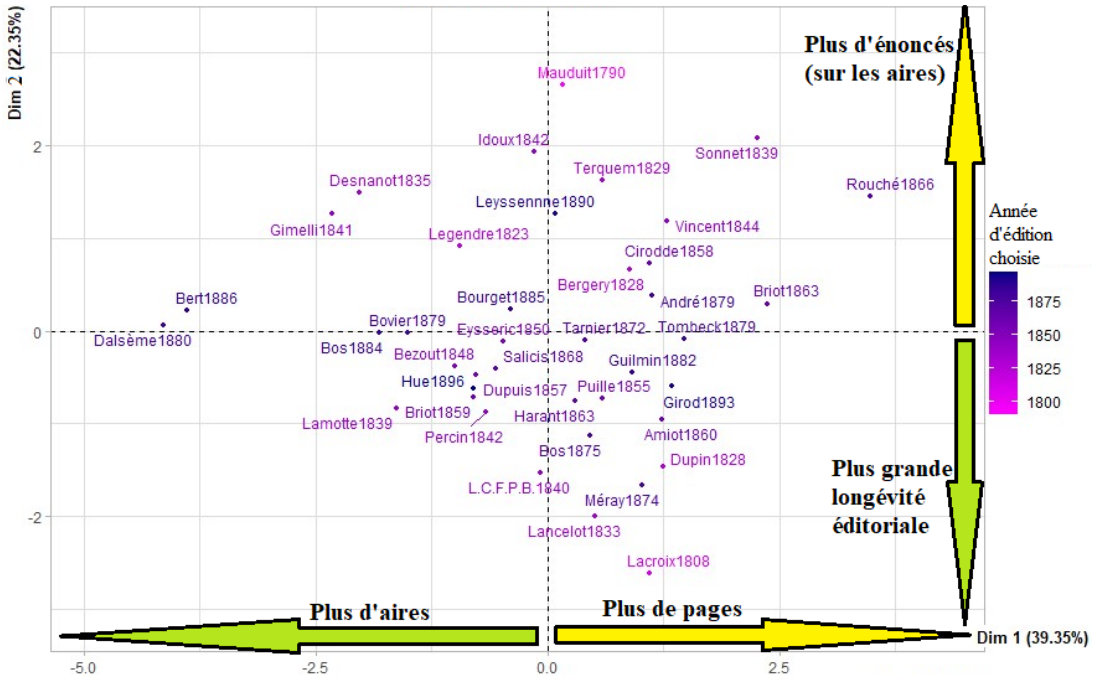


FIGURE II.23 – Plan des individus de l'ACP des données quantitatives associées aux 40 manuels du corpus, réalisé à l'aide de la fonction « PCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra »

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Les pourcentages sur les axes du plan des variables indiquent l'inertie retenue par les axes, en l'occurrence 39,3 et 22,4 %, soit un total de près de 62 %, qui représente la part de l'information résumée par les axes. Nous estimons cette valeur satisfaisante dans le cadre de notre analyse[57]. Les contributions des différentes variables quantitatives considérées aux axes du plan sont mises en évidence par un gradient de couleurs, allant du bleu ou rouge. Les contributions de toutes les variables à chacun des axes forment un total de 100 %. Par exemple, dans le plan des variables, le « total de pages » contribue à l'axe 1 à 30,4 %, et le « nombre d'énoncés sur les aires » contribue à l'axe 2 à 44,6 %. Ce plan des variables montre une double opposition entre les données exprimées sur les axes horizontaux et verticaux. En effet, les livres ayant en proportion le plus de contenus sur les aires sont plus à gauche, tandis que ceux ayant le plus grand nombre de pages sont davantage à droite. De plus, ceux qui contiennent le plus d'énoncés sur les aires sont situés vers le haut, tandis que ceux qui ont une plus grande longévité figurent plus en bas.

Sur le plan des individus (figure II.23 p. 227), nous constatons que le manuel de Rouché et Comberousse (1866), qui est un très gros livre avec beaucoup d'énoncés sur les aires (109), qui présente à la fois un faible nombre d'éditions (8) et un pourcentage de pages sur les aires restreint (environ 5%), est situé à droite et plutôt en haut. De même, l'ouvrage de Mauduit (1790) n'a été réimprimé que trois fois et comporte de nombreux énoncés sur les aires (104), mais ceux-ci représentent 18,8% des pages de l'ouvrage. Ceci explique sa position en haut et plutôt du côté droit. Celui de Lamotte (1839) est un assez petit livre (216 pages) avec beaucoup de pages sur les aires (22%), mais peu d'énoncés sur ce thème (40). En revanche, il a été réimprimé 20 fois et se trouve donc dans le quart inférieur gauche. Les manuels de Bert (1886) et Dalsème (1880) apparaissent du côté gauche du graphique, avec un nombre de pages inférieur à 100 (respectivement 92 et 60), mais comprenant autour de 25% d'entre elles au sujet des aires. Leur centrage vertical s'explique par leur faible nombre d'énoncés sur les aires, associé à une longévité éditoriale courte. Enfin, l'ouvrage de Lacroix (1808) se situe tout en bas du graphique avec 26 réimpressions en 115 ans et un nombre très modeste d'énoncés sur les aires (41).

57. En effet, la représentation obtenue en deux dimensions permet de représenter 62 % de l'information contenue dans le jeu de données, présentant initialement 6 variables. Avant de réaliser l'ACP, deux dimensions correspondent donc au tiers de l'inertie du jeu de données, soit environ 33 %. L'ACP permet donc de passer de 33 % à 62 % de l'information représentable par un graphique en deux dimensions, ce qui nous apparaît satisfaisant.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

L'hypothèse d'une tendance temporelle autour des variables considérées est testée à travers le gradient de couleurs allant du rose au violet suivant les dates d'édition retenues pour les ouvrages (voir l'échelle à droite du plan des individus). Le dégradé de couleurs n'apparaît pas sur le graphique, avec des points plutôt bleus ou plutôt roses très éparpillés dans le plan, ce qui contredit l'idée d'une évolution temporelle des ouvrages suivant leurs caractéristiques quantitatives.

Conclusion :
— Globalement, les plus gros livres sont ceux qui contiennent en proportion le moins de parties (pages ou sections) sur les aires.

— De manière générale, les livres qui présentent le plus d'énoncés sur les aires sont ceux ayant la plus faible longévité éditoriale.

— Aucune tendance temporelle ne se dégage concernant les titres du corpus, relativement aux critères observés.

Au-delà de cette cartographie, qui peut révéler des proximités ou au contraire des différences entre nos individus sur la base de ces critères, cette méthode statistique a soulevé de nouvelles questions : pourquoi les plus gros livres sont-ils ceux qui contiennent proportionnellement le moins de parties sur les aires, et pourquoi les livres qui contiennent le plus d'énoncés sur les aires sont-ils ceux qui présentent globalement la plus faible longévité éditoriale ? À ce stade, nous pouvons avancer les éléments d'explication suivants : les très gros manuels couvrent souvent de vastes domaines de la géométrie, tels que la géométrie dans l'espace, projective ou sphérique, et leurs parties sur les aires planes ne sont par conséquent pas très élevées en proportion. Ces livres n'offrent pas d'approfondissement particulier sur le sujet des aires, mais développent plutôt d'autres aspects de la géométrie, et intègrent par exemple des résultats issus de la géométrie moderne telle qu'elle est décrite chez Lorenat. D'ailleurs, nous retrouvons dans cette catégorie d'ouvrages trois titres qu'elle évoque dans son étude, ceux de Bergery (1828), Terquem (1829) et Vincent (1844) [58].

L'opposition entre longévité et grand nombre d'énoncés sur les aires est plus difficile à interpréter. Néanmoins, la présence de nombreux énoncés indique sans doute des développements de points plus en marge, voire hors des programmes. C'est le cas du manuel d'Idoux, publié une seule fois, qui comporte 102 énoncés sur les aires (Idoux,

58. Elle évoque aussi le travail de Dupin, mais analyse les contenus d'un autre ouvrage que celui de notre corpus (Lorenat, 2019, p. 80-82).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

1842). Il contient des développements sur le minimum ou le maximum des figures isopérimétriques (une vingtaine d'énoncés), notions qui dépassent le cadre des programmes officiels. Cette moindre conformité aux normes des contenus d'enseignement pourrait expliquer que ce type de manuels ne perdure pas dans le temps. Cette dualité nombre d'énoncés sur les aires/longévité demeure moins marquée que la précédente (les contributions de ces variables aux axes sont plus faibles, selon la figure II.22 p. 226), et se trouve contredite par quelques cas individuels, comme celui d'André (1879), réédité 38 fois en 55 ans, et présentant 108 énoncés sur les aires.

Cette méthode d'analyse statistique multivariée s'accompagne d'une technique de classification des individus étudiés au regard des variables considérées. L'application de ce procédé a pour objectif de déterminer des groupes d'ouvrages de géométrie présentant des caractéristiques communes en termes de succès éditorial, de volume global et de part réservée aux aires dans leurs contenus. La classification des manuels du corpus suivant ces critères a vocation à former un socle d'analyse, qui permette aussi bien de comparer des titres appartenant à une même catégorie, qu'au contraire d'examiner en parallèle des ouvrages répondant à des groupes différents.

Questions : Les groupes d'ouvrages constitués dans la classification réalisée, en plus des caractéristiques qu'ils partagent sur leurs succès éditoriaux, leur volume global et la part de savoirs qu'ils exposent au sujet des aires, montrent-ils des interfaces avec :

- **les périodes considérées,**
- **les publics auxquels ils sont destinés,**
- **les approches de l'enseignement de la géométrie qu'ils véhiculent ?**

Méthode : En nous basant sur le poids des aires dans les manuels du corpus, leur volume global et leur longévité, nous avons réalisé, à partir de l'ACP présentée, une CAH (Classification Ascendante Hiérarchique) dont le principe global est de regrouper des individus les plus proches possibles, au sens d'une distance préalablement définie, au sein d'un même groupe (homogénéité intra-classe) tout en formant des groupes les plus dissemblables possibles (hétérogénéité inter-classe) [59]. Cette technique a fourni une première classification de nos manuels en six groupes.
Résultat : Voir figure II.24 p. 230.

59. Pour plus de détails sur la technique des CAH, voir (Larmarange, 2024, p. 609-639).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

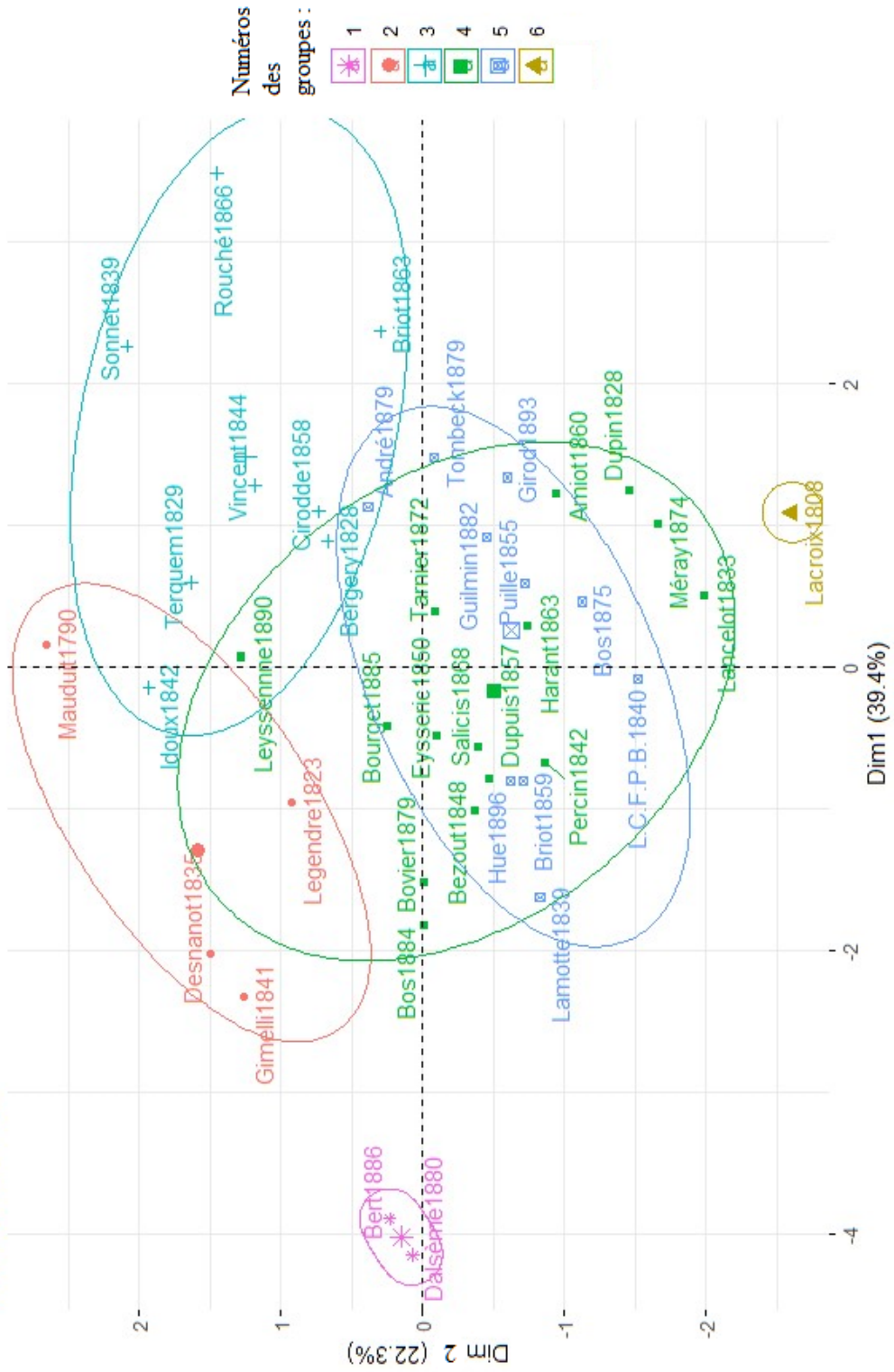


FIGURE II.24 – Regroupement des individus en « clusters » suivant la CAH réalisée à l'aide de la fonction « hclust » du logiciel R à partir de l'ACP des données quantitatives associées aux 40 manuels du corpus

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Ces six groupes sont d'effectif très variable, d'un individu isolé pour le groupe 2, au groupe 3 contenant 15 manuels. Les groupes sont assez facilement identifiables suivant les caractéristiques communes des manuels qui les composent en termes de volume global, de part des aires dans leurs contenus et de longévité éditoriale. Les données chiffrées présentées dans cette description figurent dans le tableau II.10 p. 222.

- **Groupe 1** (en rose) : Les « concentrés d'aires », qui comportent très peu de pages, mais beaucoup sur les aires en proportion. Exemple : (Bert, 1886), 92 pages, 44 sections, dont respectivement 20 et 10 sur les aires, soit en pourcentages respectifs 21,7 et 22,7%. Le profil de Dalsème 1880 est pratiquement identique.
- **Groupe 2** (en rouge) : Ceux « qui ne manquent pas d'aires », quatre ouvrages qui présentent un nombre d'énoncés sur les aires supérieur à la moyenne (égale à 64), compris entre 69 et 109, représentant entre 15 et 20% des sections, et entre 15 et 23% des pages. Il est à noter que ces ouvrages sont du début de la période (avant 1841) et qu'ils ont dans l'ensemble un faible nombre d'éditions, d'une seule pour Gimelli (1841) à 12 pour Legendre (1823). Exemple : (Desnanot, 1835) propose, dans ses 227 pages, 78 énoncés sur les aires, thème abordé dans environ 23% des pages et 15,5% des sections. Il a été édité deux fois, en 1827 et 1835.
- **Groupe 3** (en turquoise) : Les « encyclopédiques », gros ouvrages (plus de 400 pages) et/ou le nombre d'énoncés sur les aires dépasse largement la moyenne (plus de 80 énoncés pour 6 des 8 titres du groupe). Ces ouvrages sont publiés entre 1829 et 1866 et ont dans l'ensemble un nombre d'éditions inférieur à la moyenne (de presque 10), allant d'une seule pour Idoux (1842) à 9 pour Sonnet (1839). Exemple : (Sonnet, 1839) présente, dans ses 639 pages, 123 énoncés sur les aires, ce qui est le maximum constaté dans les manuel du corpus (le thème est alors abordé dans environ 10% des pages et des sections).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— **Groupe 4** (en vert) : Ceux « qui manquent d'aires » sont de plutôt petits ouvrages (3 seulement sur les 15 dépassent nettement les 332 pages, moyenne du corpus) contenant un nombre d'énoncés sur les aires inférieur à la moyenne[60]. Il s'agit majoritairement d'ouvrages plus tardifs, publiés à partir de 1850 (sauf 4 des 15 titres du groupes) et on retrouve dans ce groupe de nombreux ouvrages de géométrie pratique (Tarnier, 1872) et d'arpentage (Lancelot, 1833). Exemple : (Percin, 1842) énonce, dans ses 184 pages, 46 résultats sur les aires, ce qui le situe dans le premier quartile du corpus suivant ces deux critères (voir la figure II.21 p. 223).

— **Groupe 5** (en bleu) : Les « succès éditoriaux » sont des titres marqués par leur grand nombre de rééditions (compris entre 12 et 38) et/ou leur longévité éditoriale (entre 24 et 58 ans). Ils sont par ailleurs très variés par leur volume et la part des aires qu'ils contiennent. En revanche, ils sont globalement assez tardifs dans la période d'étude (8 sur les 10 titres sont publiés à partir de 1855). Exemple : (P. André, 1879) est publié 38 fois sur une durée de 55 ans.

— **Groupe 6** (en kaki) : Le « champion de longévité », seul dans son groupe. Il s'agit de (Lacroix, 1808), publié 26 fois sur une durée de 113 ans, de 1799 à 1912 (pour le détail des (ré-)éditions des *Éléments de géométrie* de Lacroix, voir Lamandé (1993)).

60. Un seul titre fait exception à ce critère. Il s'agit de (Leyssenne, 1890), qui propose 80 énoncés sur les aires, avec un volume total de 464 pages et 743 sections. Il est d'ailleurs surprenant de trouver cet ouvrage dans ce groupe. Il aurait selon nous eu davantage sa place dans celui des « encyclopédiques », preuve de limites que présentent parfois les méthodes quantitatives.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— La classification réalisée par les moyens statistiques que nous avons mis en œuvre a du sens car elle produit des regroupements d'ouvrages qui tiennent bien compte des critères quantitatifs pris en considération, comme la taille des ouvrages, la part des aires dans leurs contenus, ainsi que les critères de longévité.

— La partition produite exprime également un caractère temporel, puisque certains groupes rassemblent des ouvrages relativement contemporains. Les groupes 2 et 4, respectivement plus ancrés dans le début et dans la fin de la période, mettent en évidence une plus grande part des aires dans les ouvrages de la première moitié du siècle que dans la seconde. De même, les « encyclopédiques » (groupe 3), avec leur gros volume et la présentation d'un grand nombre d'énoncés sur les aires, sont produits plutôt autour des décennies 1830 à 1860.

— Des interactions font jour également avec les publics, le groupe 2, riche du thème sur les aires, étant constitué quasi exclusivement d'ouvrages destinés à l'enseignement secondaire, ou aux deux ordres d'enseignement.

— Les approches théoriques ou pratiques de l'enseignement de la géométrie apparaissent également à travers la composition du groupe 4, comprenant de nombreux manuels de géométrie pratique ou d'arpentage, et dans lequel le nombre d'énoncés sur les aires est plus restreint.

Le focus sur le poids des aires dans les manuels de notre corpus est donc révélateur d'interfaces entre les générations d'ouvrages, suivant leurs décennies de parution, la direction vers un enseignement de nature plus théorique ou pratique prise par leurs auteurs, et les publics auxquels ils se destinent. Les interfaces mises en évidence à travers les conclusions de nos deux dernières analyses sont synthétisées sur le schéma II.25 p. 234. Ce schéma global manifeste bien en quoi les manuels de géométrie, à travers leurs caractéristiques telles que leur volume global ou le poids du thème des aires dans leurs contenus, se situent à l'interface de leurs publics, leurs succès éditoriaux et la vision de l'enseignement de la géométrie dans laquelle ils s'inscrivent, tout ceci en fonction de leur période de parution.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

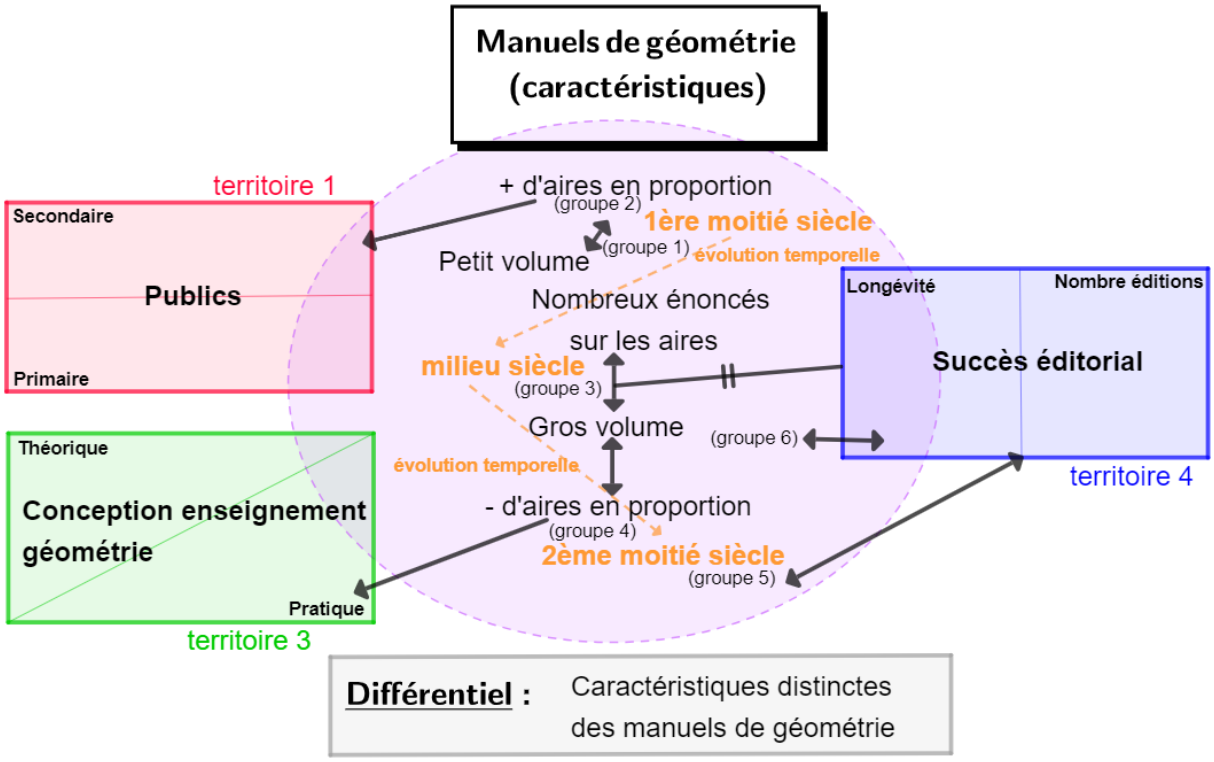


FIGURE II.25 – Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, à travers certaines de leurs caractéristiques (volume global, poids des aires) sont à l'interface de leurs publics, leurs succès éditoriaux, et leur approche de l'enseignement de la géométrie, et l'évolution suivie selon leurs périodes de publication

II.2.2.4 Analyse croisée du public, de la reconnaissance institutionnelle et du « succès » des manuels scolaires

Dans son étude, Legros met en avant plusieurs manuels d'arithmétique à succès destinés au public primaire, comme ceux de Leyssenne, du père Bransiet (des Frères des écoles chrétiennes) et de Mutel (Legros, 2019, p. 164-172). De même, Dhombres met en évidence le quasi-monopole de trois auteurs de manuels de mathématiques sous l'Empire : Lacroix, Bézout et Legendre. Pour ce faire, il s'appuie sur une étude quantitative des ouvrages publiés durant cette période, et notamment sur leur nombre de rééditions (Dhombres, 1985). De plus, nous avons vu que ce succès peut être accentué par une recommandation officielle des autorités de l'enseignement public, comme dans le cas de la *Petite arithmétique* de Vernier (1834). Pour les manuels de géométrie du corpus constitué, nous proposons donc d'observer conjointement les trois caractéristiques que sont le public ciblé, la reconnaissance institutionnelle et le succès éditorial, afin de voir comment elles interagissent.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Questions :

- **La reconnaissance institutionnelle des manuels de géométrie s'accompagne-t-elle d'une reconnaissance des enseignants sur le terrain, et réciproquement ?**
- **Dans quelle mesure ces deux reconnaissances — institutionnelle et de terrain — sont-elles corrélées au succès éditorial des ouvrages ?**
- **La reconnaissance des manuels de géométrie, par les institutions ou les professionnels de l'enseignement, ainsi que leur succès d'édition, dépend-elle des publics auxquels ils s'adressent ?**

Méthode : Nous avons mobilisé des méthodes statistiques multivariées de type AGD, et plus particulièrement une Analyse en Composantes Multiples (ACM), adaptée à des variables de nature qualitative. Le principe global de l'ACM est le même que celui de l'ACP précédemment décrit : il consiste à transposer en deux dimensions un nuage de points correspondant à des individus caractérisés par un grand nombre de variables (ici 10) en maximisant les distances entre les points. La seule différence dans ce cas est la nature des variables traitées, qualitatives, alors qu'elles doivent être quantitatives pour réaliser une ACP. Les diagrammes présentés ci-après sont réalisés avec les fonctionnalités correspondantes du logiciel R. En effet, les données traitées sont ici de nature booléenne, selon que les manuels appartiennent à certaines catégories : mention dans les programmes officiels, inscription dans les listes officielles à utiliser en classe, citation dans les listes départementales d'ouvrages utilisés par les enseignants, participation à la campagne de mise à l'essai dans les classes, best-sellers, auteurs les plus prolifiques, enseignement secondaire classique, enseignement secondaire spécial, enseignement primaire (ou enseignement primaire supérieur), enseignement féminin.
Dans ce cas comme dans celui de l'ACP, les résultats se déclinent sous deux formes : le plan des individus, qui indique la répartition spatiale de tous les manuels du corpus en 2 dimensions, et le plan des variables, qui modélise la contribution de chacune des données prises en compte aux axes du plan.
Résultat : Voir figures II.26 p. 236 (plan des individus) et II.27 p. 237 (plan des variables).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

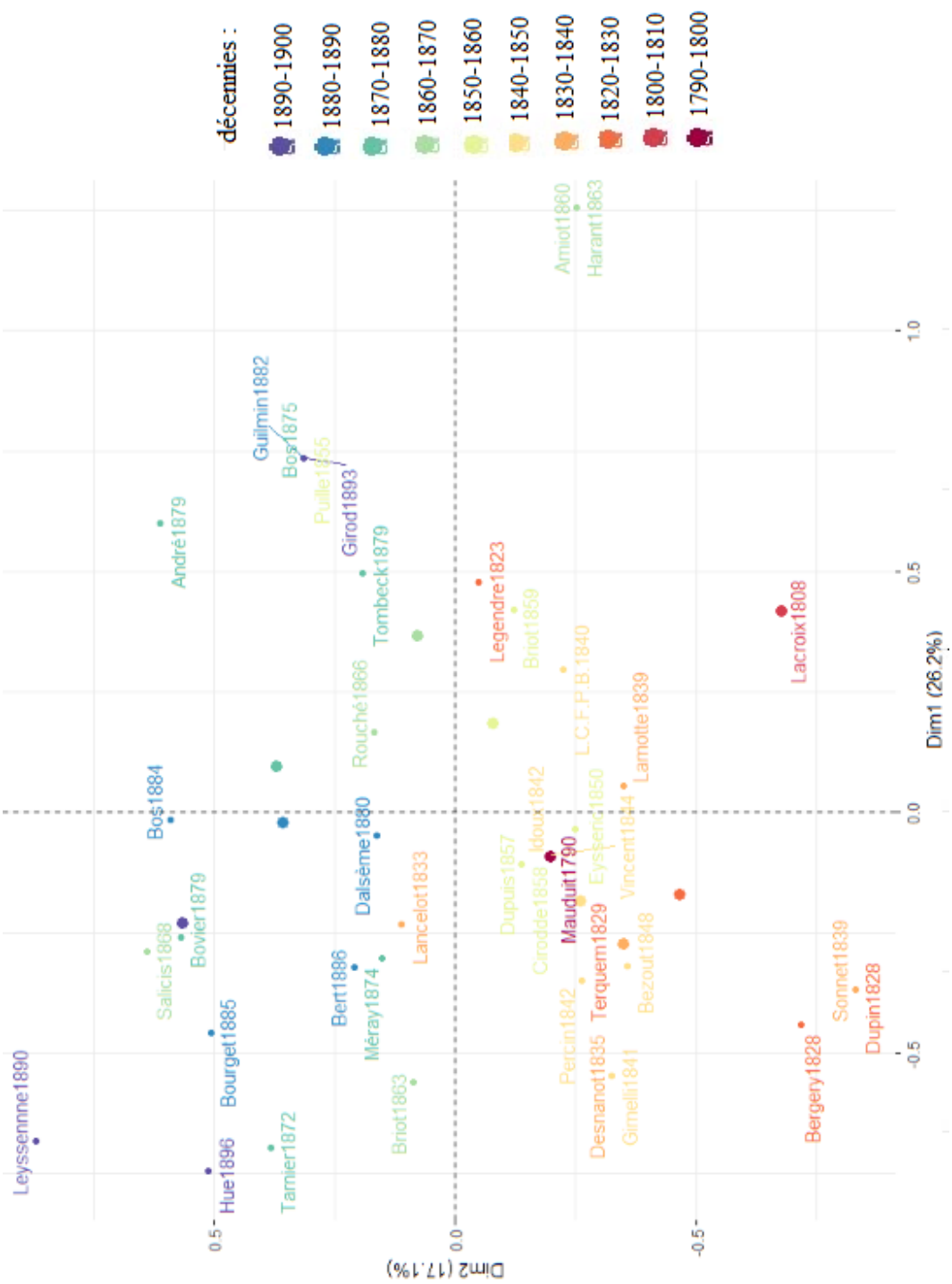


FIGURE II.26 – Plan des individus de l'ACM associées aux 40 manuels du corpus réalisé à l'aide de la fonction « MCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra » – Note : la décennie 1810-1820 n'est pas représentée car aucun titre du corpus n'y a été publié

Licence CC BY-NC-ND 3.0

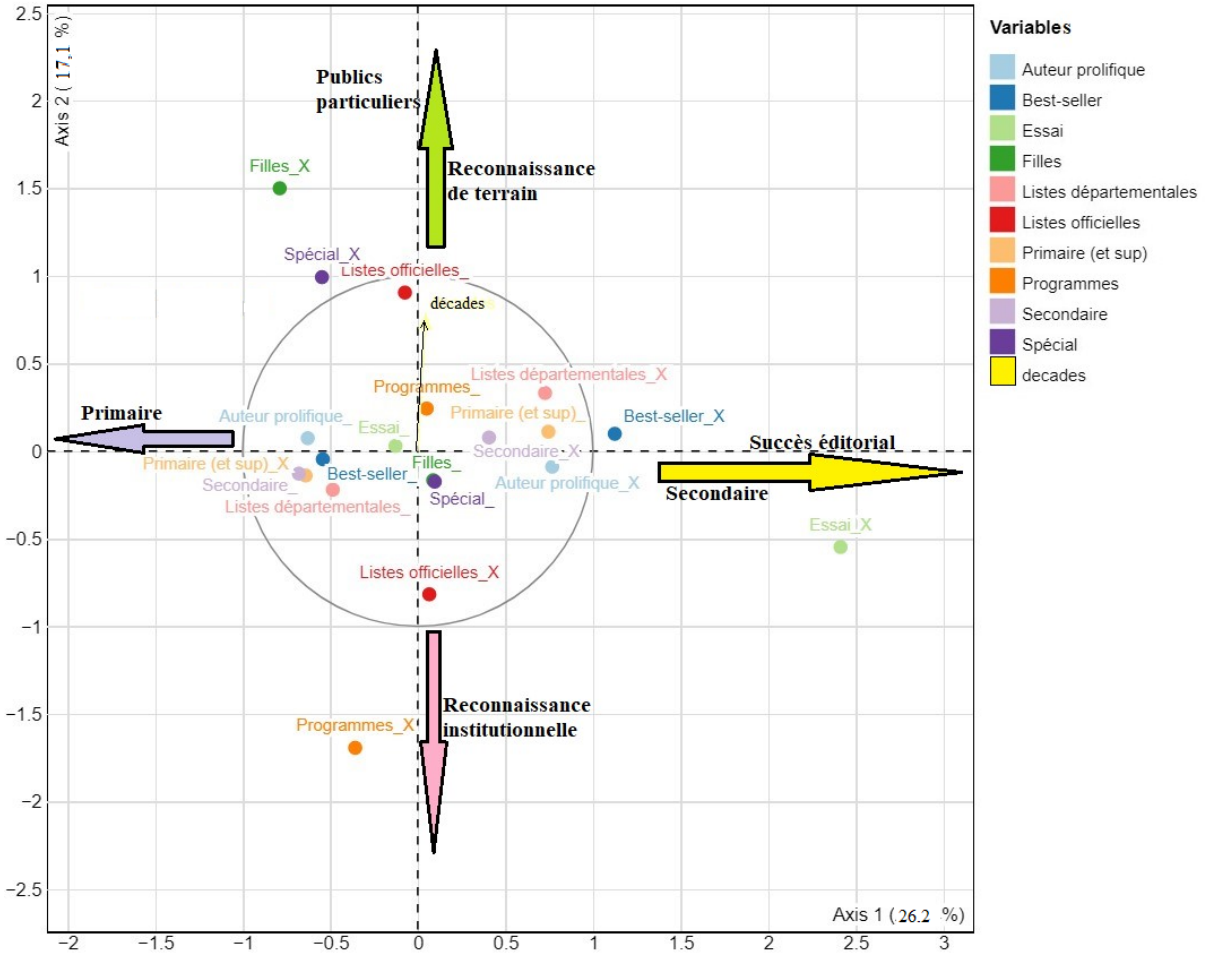


FIGURE II.27 – Plan des variables de l'ACM associée aux 40 manuels du corpus réalisé à l'aide de la fonction « MCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra »

Lecture et analyse : Le plan des individus montre assez clairement une organisation des points par décennies, dans l'ordre chronologique de bas en haut. La représentativité des axes est d'environ 43 %, sensiblement plus faible que dans l'ACP précédente, ce qui peut s'expliquer par le plus grand nombre de variables initiales, générant une perte d'information plus importante lors du passage dans le plan.

Le graphique des variables est alors d'une grande aide pour l'interprétation des axes. En effet, ce diagramme montre le caractère positif des critères éditoriaux sur l'axe horizontal, vers la droite, qui semble corrélé au fait de se destiner à un public du secondaire, variable dirigée dans la même direction, alors que les ouvrages pour le primaire sont sensiblement du côté gauche. Les livres figurant sur les listes officielles et dans les programmes se situent en bas, tandis que ceux figurant sur les listes départementales françaises établies par les enseignants lors de conférences pédagogiques se situent plutôt en haut, de même que les manuels se destinant aux publics spécifiques formés des élèves de l'enseignement spécial et les jeunes filles.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les plus grands succès d'édition sont ainsi dans la même zone que les livres destinés à un public secondaire. Pourtant, l'étude des livres d'arithmétique menée par Legros a mis en évidence des best-sellers pour l'école primaire (Legros, 2019, p. 106, 124). Il semble en aller différemment pour la géométrie, plus largement enseignée dans l'ordre secondaire que dans le primaire, où elle ne concerne pendant longtemps que les programmes des écoles primaires supérieures. De même, la reconnaissance des enseignants exerçant sur le terrain, exprimée par les listes départementales remontées par les instituteurs, ne semble pas plus concerner les ouvrages du primaire que du secondaire puisque sa direction est perpendiculaire à l'axe primaire/secondaire identifié horizontalement. Par contre, cette reconnaissance semble davantage liée aux livres destinés à des publics spécifiques, comme l'enseignement spécial ou féminin. Pourtant, aucun des ouvrages pour les filles sélectionnés dans le corpus ne figure sur ces listes, alors que plusieurs titres pour l'enseignement spécial y sont cités, comme ceux de André (1879), Bovier-Lapierre (1879) et Bourget (1885).

Conclusion :

— L'opposition entre reconnaissance institutionnelle et de terrain est remarquable, mais certainement biaisée par la nature des sources, puisque les listes départementales datent des années 1880 et comprennent plutôt des titres de fin de période, au contraire des listes officielles et programmes, qui n'expriment des recommandations que sur le début de la période.

— Cet axe vertical est donc sans doute plutôt révélateur d'une variable temporelle que de cette opposition supposée, hypothèse qui est d'ailleurs corroborée par la flèche modélisant la variable quantitative supplémentaire « décennie », clairement dirigée vers le haut.

— Les directions très distinctes (horizontale et verticale) prises par les variables relatives au succès éditorial et à la reconnaissance institutionnelle montrent que ce succès ne semble pas dépendre directement des recommandations des autorités. C'est le cas, par exemple, des manuels de Lancelot (1833) ou Rouché et Comberousse (1866), non cités dans les documents officiels consultés mais qui bénéficient pourtant d'une bonne représentation éditoriale.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Les succès éditoriaux concernent davantage les ouvrages pour le secondaire, ce qui apparaît constituer une spécificité de la géométrie, davantage enseignée à ce niveau.

— La reconnaissance des institutions et des professeurs semble s'exercer indifféremment sur les ouvrages des deux ordres d'enseignement. Cependant, les professionnels de l'enseignement distinguent davantage des titres à destination de publics scolaires plus spécifiques, comme les élèves de l'enseignement spécial.

Nous avons là encore accompagné cette analyse statistique mutivariée par une technique de classification des manuels tenant compte des variables considérées. Notre objectif est d'établir des groupements d'ouvrages de géométrie présentant des traits communs en termes de succès, reconnaissance et publics. La répartition des titres dans les classes est ensuite analysée au regard des interfaces qu'elle révèle, et mise en parallèle avec les groupes de la classification précédente, de manière à compléter, confirmer ou infirmer les conclusions énoncées auparavant.

Questions :

- **La nouvelle classification réalisée s'avère-t-elle pertinente au regard des variables considérées ? Regroupe-t-elle bien des titres présentant de réelles caractéristiques communes, et montre-t-elle des interfaces entre elles ?**
- **Dans quelle mesure les données telles que la reconnaissance institutionnelle, celle des professeurs sur le terrain, le succès éditorial et le public ciblé, sont-elles corrélées ? Les liens entre ces données suivent-ils des tendances globales révélées par le regroupement des manuels ?**
- **Les classifications réalisées suivant les deux dernières séries de variables considérées (voir schémas II.24 p. 230 et II.28 p. 240) forment-elles des groupes proches, c'est-à-dire rassemblant globalement les mêmes titres ?**
- **Les groupes d'ouvrages observés dans ces classifications montrent-ils des points communs avec les réseaux d'intercitations et de références communes établies dans la sous-section II.2.2.1 (p. 205) ? Les ouvrages sont-ils regroupés au moins en partie suivant la culture commune de leurs auteurs ?**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : *Via* la même technique de la CAH, nous avons réalisé une seconde classification des ouvrages du corpus en six groupes, sur les critères qualitatifs correspondant à leur succès éditorial, reconnaissance institutionnelle ou de terrain, appartenance aux programmes, listes officielles, départementales ou campagnes de mise à l'essai, et publics auxquels les titres sont dédiés.
Résultat : Voir figure II.28 p. 240.

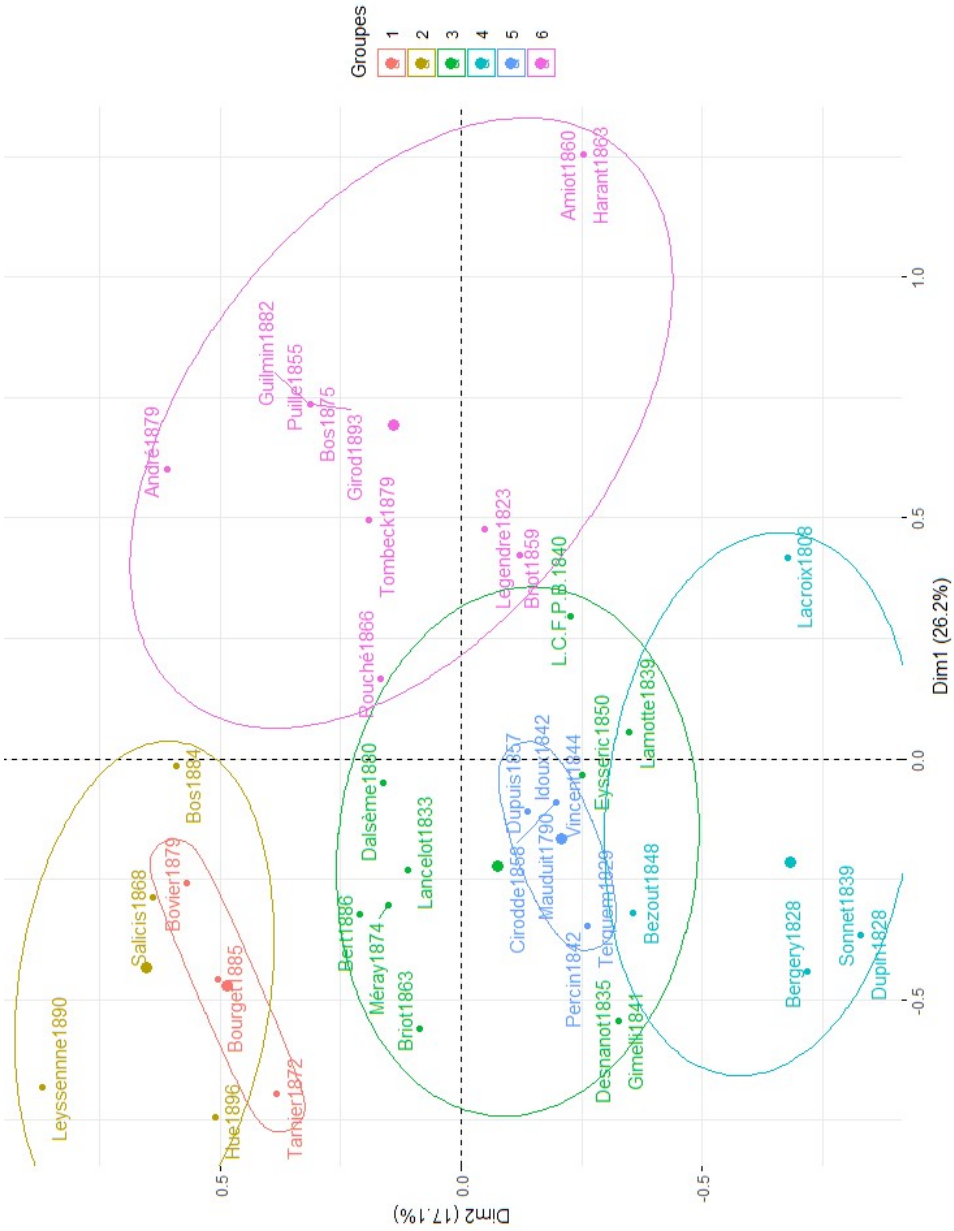


FIGURE II.28 – Regroupement des individus en « clusters » suivant la CAH réalisée à l'aide de la fonction « hclust » du logiciel R à partir de l'ACM des données qualitatives associées aux 40 manuels du corpus

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Dans cette nouvelle cartographie, les groupes ont là aussi des effectifs variables, de 3 individus pour le groupe 1 à 11 pour le groupe 6, mais avec une meilleure répartition globale des ouvrages dans les groupes que dans la classification précédente, qui comportait deux groupes d'un ou deux individus (voir graphique II.24 p. 230). Dans ce cas également, les groupes sont aisément descriptibles en fonction des caractéristiques que partagent les manuels qui les composent en termes de public, de reconnaissance institutionnelle et de succès éditorial (pour les données présentées ci-après, voir le tableau II.9 p. 198).

— **Groupe 1** (en rouge) : Les « primaires spéciaux » regroupent trois manuels destinés à la fois au primaire supérieur et à l'enseignement spécial. Exemples : Les livres de Bovier-Lapierre (1879), Bourget (1885) et Tarnier (1872).

— **Groupe 2** (en kaki) : Les « féminins », quatre ouvrages dédiés à l'enseignement féminin, seulement ou en partie. Exemples : Les cours de Salicis (1868) et de Bos (1884) sont à l'usage de « l'enseignement secondaire des jeunes filles ». Celui de Hue et Vagnier (1896, p. v-vi) cible quant à lui les EPS de filles, alors que Leyssenne (1890) destine son manuel à toutes les structures d'enseignement (EPS, ENP, secondaire, spécial) féminin ou masculin (voir p. 202).

— **Groupe 3** (en vert) : Les « primaires pratiques » rassemblent des titres très majoritairement dédiés à l'enseignement primaire et primaire supérieur, mis à part celui de Briot (1863), prévu pour « l'enseignement scientifique dans les lycées » et celui de Méray (1874) dont le lectorat n'est pas désigné. Ces manuels figurent pour beaucoup (6 titres sur 10) dans les listes officielles de 1850-51, presque tous (6 sur 7) parmi ceux édités au début du siècle. Ces ouvrages partagent une approche pratique, voire expérimentale de la géométrie, et appliquée à des domaines comme l'arpentage. Exemple : Le *Traité d'arpentage* de Lamotte (1839) est à l'usage « des écoles communales élémentaires et supérieures », mais aussi des « propriétaires, cultivateurs, notaires, juges de paix, maires, etc. ». Il figure dans les listes officielles des ouvrages recommandés pour les écoles primaires et pour les ENP (Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1851).

— **Groupe 4** (en turquoise) : Ce sont les cinq seuls livres « recommandés par les programmes ». Ils ne font pas forcément partie des best-sellers et s'adressent à des publics variés. Exemple : (Bézout, 1848) est recommandé dans les programmes officiels de l'enseignement secondaire de 1852 (Belhoste, 1995, p. 324, 336-337). Il figure aussi dans les listes officielles pour l'enseignement secondaire (Giraud, 1851), et a été utilisé pour l'enseignement spécial créé en 1849.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— **Groupe 5** (en bleu) : Les « officiels à faible audience » regroupe des ouvrages figurant dans les listes officielles, principalement pour l'enseignement secondaire (6 sur 7), mais qui ne sont pas identifiés parmi les ouvrages les plus réédités, ou émanant des auteurs les plus prolifiques. Exemples : Le cours de Vincent (1844) figure dans les listes officielles pour l'enseignement secondaire, et le traité de Dupuis (1857) rejoint celle pour le primaire en 1860. En revanche, ces deux auteurs n'ont publié que 9 manuels chacun (rééditions comprises), et leurs ouvrages n'ont été publiés que 5 fois.

— **Groupe 6** (en rose) : Les « succès départementaux », sont constitués des manuels les plus (ré-)édités (8 sur 11), dont les auteurs sont parmi les plus prolifiques (9 sur 11) ou les deux (6 sur 11), et pour beaucoup cités dans les listes départementales pour le primaire (8 sur 11). Exemples : Les leçons de Puille (1855) sont citées de nombreuses fois dans les listes départementales remontées par les instituteurs. Puille figure en outre parmi les auteurs les plus prolifiques, avec 26 ouvrages édités sur la période, et son manuel est un best-seller, réédité 20 fois jusqu'en 1902 (voir la section I.2.2 p. 80). En revanche, nous n'avons pas réussi à déterminer la raison pour laquelle la géométrie de Harant (1863) est incluse dans ce groupe, puisque cet ouvrage ne possède aucune des caractéristiques repérées pour ses membres. Ce titre possède d'ailleurs très peu de caractères positifs : dédié au seul enseignement primaire, il ne bénéficie d'aucune recommandation officielle et ne se distingue pas par son succès éditorial, ce qui le rend assurément difficile à classer..

Les groupes composés dans cette section diffèrent assez nettement de ceux réalisés lors de la précédente classification (voir p. 231), qui prend pour sa part en compte les caractéristiques quantitatives des manuels du corpus (volume global, part des aires, longévité éditoriale). Néanmoins, des individus restent assemblés dans les mêmes groupes dans les deux cas, comme Vincent (1844), Idoux (1842), Terquem (1829) et Cirodde (1858). Classés parmi les « encyclopédiques » (Groupe 3) dans la section précédente, ces ouvrages du début du siècle (le manuel de Cirodde a été publié pour la première fois en 1836) font également partie des « officiels à faible audience » (Groupe 5) repérés dans la seconde classification, ce qui induit l'hypothèse d'une corrélation entre le gros volume de ces ouvrages, riches en énoncés sur les aires, la reconnaissance institutionnelle dont ils bénéficient, mais également l'absence d'un net succès éditorial dans leurs cas. Bergery et Sonnet, également associés dans les deux classifications, et appartenant aussi au groupe 3 de la première d'entre elles, sont un peu dans le même cas. Leur gros volume et la présence de nombreux énoncés sur les aires, ainsi que les recommandations dont ils bénéficient dans les programmes officiels, ne leur garantissent pas forcément un grand succès d'édition.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Deux binômes du groupe 3 de la dernière classification, Bert/Dalsème et Gimelli/Desnanot sont déjà associés dans la précédente, les premiers au sein du groupe 1, qu'ils forment à eux seuls, et les suivants dans le groupe 2 (voir p. 231). Ces deux groupes rassemblent des titres présentant une large part de leurs pages et sections sur les aires. Les quatre ouvrages figurent dans le groupe 3 de la seconde classification, qui rassemble des ouvrages plutôt tournés vers la pratique et les applications, destinés à un public essentiellement primaire. La richesse (au moins quantitative) des contenus sur les aires ne s'oppose donc ni au fait de s'adresser à un public primaire, ni au caractère plus pratique de la géométrie véhiculée par les manuels.

La comparaison entre les groupes constitués et les réseaux de citation ou intercitation traités dans la sous-section II.2.2.1 (p. 205) ne révèle pas, en revanche, de réelle corrélation, si ce n'est dans le groupe 6, les « succès départementaux » dont 7 des 11 membres appartiennent au triangle des auteurs possédant le plus de références communes. Il est à noter que ce groupe comporte majoritairement des ouvrages s'adressant, ou étant reconnus par les enseignants comme adaptés, à un public primaire.

Conclusion :

— Cette classification apparaît comme pertinente, car porteuse de sens relativement aux critères qualitatifs pris en compte dans l'analyse menée, et relatifs au succès éditorial, à la reconnaissance institutionnelle et aux publics ciblés dans les ouvrages du corpus, pour lesquels elle fait apparaître des tendances globales. Par exemple, des catégories relatives aux publics ciblés se distinguent nettement, avec les manuels pour les filles (groupe 2) ou pour le primaire supérieur et le secondaire spécial (groupe 1).

— Elle souligne la tendance, pour une partie des ouvrages, à être à la fois reconnus par les enseignants de terrain, car cités dans les listes départementales, et de bénéficier d'un succès éditorial (groupe 6), alors qu'*a contrario*, l'appartenance aux listes officielles ne garantit pas forcément de succès d'édition, comme le montre le groupe 5. Le groupe 3 montre quant à lui une interface entre un lectorat primaire et une inclinaison vers la géométrie pratique ou appliquée, notamment à l'arpentage. Ces ouvrages bénéficient de plus, pour un grand nombre d'entre eux, de recommandations officielles.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— La comparaison des regroupements suivant les deux classifications met en évidence le fait que les gros ouvrages présentant de nombreux énoncés sur les aires et bénéficiant de la reconnaissance des institutions ne constituent pas pour autant des succès d'édition. En revanche, parmi les ouvrages comprenant beaucoup de contenus sur les aires en proportion, une part significative s'adresse à un public primaire et s'inscrit dans une vision de l'enseignement de la géométrie plutôt pratique.

— Les ouvrages réunis dans des mêmes groupes et dont les auteurs présentent une forme de culture partagée, selon leurs intercitations et références communes, sont plutôt ceux adaptés à un public primaire.

Ces observations révèlent de nombreuses interactions entre les caractéristiques générales des ouvrages, qu'elles soient quantitatives ou qualitatives. Elles mettent en évidence différents types d'interfaces entre des données de nature diverse : volume global des manuels, part qui y est consacrée aux aires, publics ciblés, reconnaissance institutionnelle, longévité ou succès éditoriaux. Ces éléments apparaissent également corrélés au caractère plus théorique ou pratique de la géométrie exposée. Par exemple, les gros livres pour le secondaire, reconnus par les institutions d'instruction, et énonçant de nombreux résultats sur les aires, ne constituent pas toujours des succès éditoriaux. Les manuels plus pratiques, destinés à un public primaire, s'avèrent quant à eux, au moins pour certains, denses en contenus sur les aires. En cela, l'angle d'analyse que constitue la géométrie des aires est bien révélateur d'interfaces entre ces différents traits caractérisant les manuels du corpus. Les interfaces mises en évidence dans la section précédente (voir figure II.25 p. 234) peuvent ainsi être complétées par de nouvelles, qui sont apparues au cours de l'analyse que nous venons de mener, et notamment au cours de la réalisation de la dernière classification des manuels du corpus, et de sa comparaison avec la précédente. La manière dont les manuels de géométrie, à travers une grande partie de leurs caractéristiques, dont certaines concernent directement les aires, se positionnent à l'interface des publics, des conceptions de la géométrie et de son enseignement, de la reconnaissance institutionnelle, éditoriale ou encore de terrain, est schématisée sur la figure II.29 p. 245.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

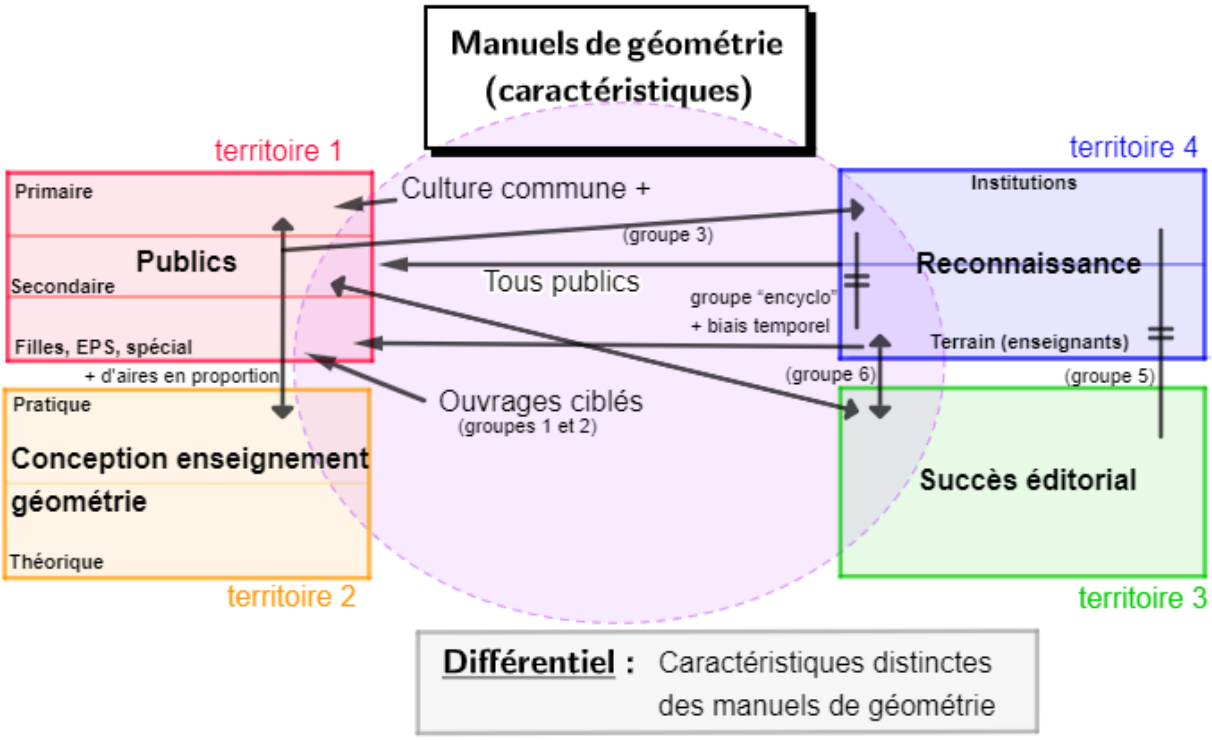


FIGURE II.29 – Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, à travers leurs contenus sur les aires, sont à l'interface des publics, des conceptions de la géométrie et de son enseignement, et de la reconnaissance institutionnelle, éditoriale ou encore de terrain

II.2.2.5 Classification suivant le type d'énoncés de savoir sur les aires

Pour poursuivre et approfondir le travail de classification présenté dans les sections précédentes, nous avons pour nouvel objectif de comparer les livres du corpus constitué à travers leurs contenus sur les aires, au sens des énoncés de savoir définis dans la sous-section II.2.2.2 (p. 220) dans la lignée des travaux de Legros. Tout comme dans son étude au sujet des manuels d'arithmétique, les énoncés de savoir recensés dans notre corpus regroupent des définitions, propositions et théorèmes, ainsi que les applications et exemples qui leur sont liés et excluent en revanche les exercices et problèmes posés dans les ouvrages sans leur résolution. Ces derniers ne sont en effet pas l'objet de notre étude, car ils n'énoncent pas de fait mathématique : un exercice ou un problème donné sans sa correction ne constitue pas l'énoncé d'un savoir, mais une tâche confiée aux élèves dans un objectif de formation. L'étude de tels exercices et problèmes pourrait en revanche donner lieu à un autre travail, comme celui qu'a réalisée Moussard dans sa thèse (Moussard, 2015). Même si diverses preuves seront étudiées dans la partie qualitative de cette thèse (partie III), nous intégrons dans l'analyse quantitative en cours uniquement celles des théorèmes portant sur l'aire du rectangle et sur les théorèmes de Pythagore et de Héron, puisque ces thèmes forment

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en partie le spectre à travers lequel nous proposons d'analyser qualitativement les savoirs sur les aires présentés dans les ouvrages du corpus (voir le chapitre II.3 p. 269).

Notre démarche s'inscrit dans la stratégie appelée « approche comparative »[61] par Bernard et Proust dans l'introduction de leur ouvrage sur les contextes d'enseignement, qui consiste à s'intéresser à un ensemble de sources ayant un contenu, de nature didactique ou pouvant être interprété comme tel, apparemment homogène mais qui présente en réalité une assez grande diversité interne (Bernard et Proust, 2014, p. 12). Dans cette section, nous projetons de mettre en place des outils de comparaison de manuels en termes de contenus d'enseignement sur les aires. Pour ce faire, la première étape consiste à identifier tous les énoncés de savoir à ce sujet présents dans les manuels du corpus considéré, puis d'en dresser une typologie permettant de repérer aisément la nature de leurs contenus.

Question : Que nous apprend le recensement des énoncés de savoir sur les aires présentés dans les manuels du corpus, et la réalisation d'une typologie associée, sur la nature des connaissances à enseigner aux élèves à ce sujet ?

Méthode : Nous avons dans un premier temps identifié tous les énoncés de savoir sur les aires dans chaque manuel du corpus, et construit progressivement une nomenclature d'énoncés-types. Ce travail a produit une liste de 460 énoncés-types distincts, dont une partie figure dans chaque manuel du corpus. Ils sont formulés à l'aide d'expressions-type, contenant des mots-clés permettant de reconnaître instantanément leur nature.
La liste exhaustive des 460 énoncés-types recensés figure en annexe (tableau A.1 p. 677). Nous exposons dans cette section la grille de constitution de cette typologie, ou chaque expression-clé est expliquée et illustrée par un ou plusieurs cas concret(s), puis de présenter la liste des énoncés relevés dans l'un des ouvrages du corpus, à titre d'exemple. Dans le tableau II.12 (p. 249), la colonne « nombre » indique le nombre d'énoncés-types de cette catégorie relevés parmi les 460 du corpus. De par la méthode de construction de cette typologie, chaque énoncé de savoir n'appartient qu'à une seule des catégories.

61. En anglais dans leur texte « comparative approach ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ces tableaux montrent la méthode suivant laquelle nous avons créé cette nomenclature, et la façon dont nous l'appliquons aux manuels du corpus. Aucune des catégories du tableau II.12 (p. 249) ne se recoupe par application d'un principe d'exclusion : par exemple, les constructions particulières de carrés équivalents à d'autres figures ont été regroupés sous l'appellation « Quadrature ». La rubrique « Construction » rassemble donc toutes les autres constructions, à l'exclusion des quadratures.

En outre, la différence entre exemple numérique et application d'un calcul est marquée par la distinction des catégories « Calculer » et « Application calcul ». Dans le cas de Puille, nous pouvons remarquer, aux pages 120 et 121, l'énoncé « Calculer aire rectangle dimensions données (nouvelles mesures) », qui représente un exemple numérique de calcul d'aire de rectangle, suivi de l'énoncé « Application calcul aire rectangle arpentage », qui précise que cette application numérique a lieu dans le cadre du calcul de l'aire d'un terrain en situation d'arpentage.

Le recensement des énoncés présentés par Puille montre que certains d'entre eux peuvent figurer plusieurs fois dans un ouvrage, dans des parties différentes, ou en étant déclinés en plusieurs propositions dans des sections distinctes. Ils ne sont dénombrés qu'une seule fois dans l'étude quantitative réalisée, même si leurs multiples occurrences sont consignées dans les colonnes « pages » ou « sections » du tableau. La colonne « catégorie » indique la nature des énoncés affichée par l'auteur : « T » pour « théorème », « P » pour « proposition », « C » pour « corollaire », « A » pour « application », « E » pour « exemple » et « R » pour « remarque ». Ces informations ne donnent pas lieu à un traitement statistique, car leur utilisation est loin d'être homogène chez les différents auteurs considérés, mais l'information reste accessible si la nécessité d'affiner une analyse à ce sujet se fait sentir.

Résultat : Voir tableaux II.12 p. 249 et II.13 p. 251.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Expression-clé	Explication	Exemple(s)	Nombre
Application calcul	Application d'une méthode ou d'une formule de calcul à un domaine de la vie réelle	Application calcul aire rectangle arpentage	20
Application géométrique	Application d'une méthode géométrique, par exemple d'une technique de construction, à un domaine concret	Application géométrique propriétés figures isopérimètres industrie	7
Calculer	Applications ou exemples numériques d'une formule ou d'une technique de calcul	Calculer aire cercle connaissant rayon	55
Construction	Présentation d'une technique de construction géométrique	Construction carré équivalent somme ou différence carrés	59
Définition	Définition d'un objet relatif aux aires	Définition unités aire agraire (ares, hectares, etc.)	14
Équivalence	Proposition énonçant l'équivalence (c'est-à-dire l'égalité des aires) de deux figures suivant des conditions données	Équivalence rectangles (même produit base par hauteur)	33
Existence	Proposition énonçant l'existence d'un objet	Existence polygones inscrit et circonscrit cercle de différence moindre qu'aire donnée	2
Formule	Formule permettant de calculer une grandeur en fonction de grandeurs données	Formule aire polygone régulier (périmètre, apothème)	53
Max	Proposition énonçant des conditions pour maximiser une grandeur géométrique	Max rectangle isopérimètre = carré (autrement dit, le plus grand rectangle, en aire, de périmètre fixé est celui de forme carrée)	25
Méthode analytique	Méthode de résolution d'un problème géométrique par un calcul algébrique	Méthode analytique partage trapèze parallèle base (parties égales ou rapport donné)	3
Méthode calcul	Méthode de résolution d'un problème géométrique par un calcul numérique	Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (pas régulier)	32
Méthode géométrique	Méthode de résolution d'un problème géométrique par des constructions	Méthode géométrique aire polygone quelconque décomposition triangles (diagonales)	18

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Min	Proposition énonçant des conditions pour minimiser une grandeur géométrique	Min périmètre polygone équivalent au cercle = circonférence	13
Partage	Méthode géométrique de partage d'une figure suivant des conditions données	Partage triangle (rapport et point sur côté donnés)	33
Preuve	Démonstration d'un théorème (ne concerne que les théorèmes relatifs à l'aire du rectangle et au théorème de Pythagore et de Héron (voir le chapitre II.3 p. 269)	Preuve théorème Pythagore (visuelle, carreaux)	19
Principe	Énonciation d'un principe général relatif aux aires, donné sans application	Principe quadrature cercle = rapport circonférence-rayon (énonce le fait que la résolution de la quadrature du cercle dépend de l'élucidation du rapport de la circonférence au rayon)	4
Quadrature	Méthode de construction géométrique d'un carré équivalent (soit d'aire égale) à une figure donnée	Quadrature ellipse	12
Rapport	Proposition énonçant le rapport des aires de deux figures suivant des conditions données	Rapport aires triangles semblables	45
Relation	Exprime une relation entre des grandeurs données	Relation aires carrés côtés et diagonales parallélogramme	8
Table	Tableau de valeurs relatives aux aires	Table aires cercle (suivant rayon)	3
Théorème	Énoncé d'un théorème n'appartenant pas aux catégories précédentes	Théorème aire secteur circulaire = limite aire secteur polygonal régulier	2

TABLE II.12 – Construction de la nomenclature des énoncés de savoir repérés et recensés dans chaque manuel du corpus (classée par ordre alphabétique)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Catégorie	Enoncés	Pages	Sections
	Définition figures équivalentes	2	5
	Définition mesure aires	113	97
	Définition nouvelles unités mesures aires (mètres carrés)	113	98
	Définition unités aire agraire (ares, ha, etc.)	113	
	Définition base hauteur triangle et/ou parallélogramme	113	99
T	Equivalence parallélogramme et rectangle (même base et hauteur)	113	
T	Equivalence triangle et rectangle (moitié hauteur)	114	
C	Equivalence triangle et moitié parallélogramme (même base et hauteur)	115	
C	Equivalence triangles (même base et hauteur)	115	
T	Equivalence trapèze et parallélogramme (même hauteur, base moyenne)	115	
T	Equivalence carrés construits sur côtés triangles rectangles (Pythagore)	116	
	Preuve théorème Pythagore (Euclide)	116	
	Principe décomposition aire polygone quelconque en triangles	119	100
	Preuve formule aire rectangle cas commensurable	119	
	Formule aire rectangle	120	101
A	Calculer aire rectangle dimensions données (nouvelles mesures)	120	
	Application calcul aire rectangle arpentage	121	
C	Formule aire carré	121	
	Formule aire parallélogramme (hauteur base)	121	102
A	Application calcul aire parallélogramme (champ, etc.)	121	
	Formule aire triangle (base, hauteur)	122	103
	Formule Heron	122	
C	Rapport aires triangles (même base ou même hauteur)	123	
A	Calculer aire triangle quelconque (base hauteur)	123	
	Formule aire trapèze rectangle (hauteur, bases)	124	104
	Formule aire trapèze (hauteur, bases)	124	
	Formule aire polygone régulier (périmètre, apothème)	125	105
	Formule aire polygone régulier (nombre de côtés)	126	
	Formule aire secteur polygonal régulier (périmètre, apothème)	126	106
	Méthode géométrique aire polygone quelconque décomposition triangles (diagonales)	127	
	Méthode géométrique aire polygone quelconque décomposition triangles et trapèzes (directrice)	127	
T	Méthode calcul aire polygone quelconque (triangles, trapèzes)	128	

Licence CC BY-NC-ND 3.0

A	Calculer aire terrain polygone	128	
T	Formule aire cercle (circonférence rayon)	128	
	Formule aire cercle (avec pi)	129	
A	Calculer aire cercle connaissant rayon	129	
R	Formule aire secteur cercle (rayon, arc ou angle)	130	
R	Méthode calcul aire segment cercle (différence)	130	
R	Méthode calcul aire couronne	130	
R	Equivalence demi-cercles construits sur triangle rectangle (lunules Hippocrate)	130	
P	Construction triangle équivalent triangle (hauteur ou base donnée)	130	P1
P	Construction triangle équivalent triangle (sommet donné)	131	P2
P	Construction triangle équivalent polygone	133	P3
P	Construction carré équivalent n fois carré (cas particuliers)	133	P4
P	Construction carré équivalent somme ou différence carrés	134, 135	P5, P6
A	Application calcul aire triangle arpentage	135	A1
A	Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (décomposition en polygones)	136	A2
R	Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (Poncelet)	137	
	Application géométrique aire quelconque limitée par courbes arpentage	137	
	Calculer aire quelconque limitée par courbes et/ou droites	137	
A	Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (compensation)	138	A3
A	Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (impénétrable)	139	A4
T	Rapport aires rectangles de même base et/ou hauteur	161	117
	Preuve rapport aires rectangles même base et/ou hauteur (dont cas incommensurable)	161	
T	Rapport aires rectangles (comme produit de leur base par leur hauteur)	162	
T	Rapport aires triangles semblables	162	
T	Rapport aires polygones semblables	163	
C	Rapport aires polygones réguliers même nombre côtés	164	
C	Rapport aires cercles rayons différents	164	
P	Partage triangle parallèle base (parties égales ou rapport donné)	177	P8, P9
P	Partage trapèze par parallèles aux bases (parties égales ou rapport donné)	179	P10
P	Quadrature cercle (méthode approchée)	181	P13
	Principe quadrature cercle = rapport circonférence/rayon	182	
P	Construction cercle équivalent polygone	182	P14

TABLE II.13 – Recensement des énoncés de savoir sur les aires dans l'ouvrage de Puille (1855)

Carène GUILLET| Thèse de doctorat | Université de Limoges
Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Le tableau présentant la typologie retenue fait apparaître 21 catégories, dont certaines sont relatives à la mesure des aires (« Formule ») et d'autres à la comparaison (« Rapport » ou « Équivalence »), certaines davantage tournées vers les constructions (« Quadrature », « Construction » ou « Partage ») et d'autres vers les applications numériques (« Calculer » ou « Application calcul »). Une partie est de nature plus théorique, comme « Définition », « Existence », « Théorème » ou encore « Preuve ». L'exposition de « Méthodes » est également relevée dans les ouvrages, concernant des constructions géométriques comme des techniques de calcul.
La liste des contenus sur les aires recensés chez Puille est constituée de 64 énoncés-types concernant les aires. Il s'agit de la moyenne des énoncés sur les aires dénombrés dans les manuels du corpus (voir II.11 p. 223). Ces énoncés sont de nature diverses et couvrent une grande partie des catégories de la typologie (14 sur 21), exposant des connaissances sur la comparaison des aires, leur mesure, sur des constructions, des calculs ou encore des savoirs théoriques.

Conclusion :
Les directions principales révélées par cette première analyse sont :
— une double vision des aires, suivant l'angle de la mesure ou celui de la comparaison,

— des savoirs articulés autour de résultats théoriques, mais très liés aux techniques de calcul et de construction,

— des méthodes, géométriques ou calculatoires, exposées dans les manuels.

Dans la lignée des travaux de Legros sur les manuels d'arithmétique du XIX^e siècle, nous proposons désormais de réaliser une classification des énoncés de savoir sur les aires présents dans les manuels de notre corpus. C'est ce que cette dernière fait à travers une approche qualitative, en observant les méthodes utilisées dans les manuels d'arithmétique, et en distinguant les connaissances théoriques de ce qui relève des savoirs procéduraux. Dans les premières, dont elle constate qu'elles sont assez rares, elle inclut les définitions, les principes, les théorèmes, les propositions, les démonstrations et les règles. Dans les seconds, beaucoup plus nombreux, elle distingue des procédures de calcul pratiques et des problèmes à résoudre (Legros, 2019, p. 164-173). Cette distinction entre connaissances théoriques et savoir-faire techniques est fréquente en géométrie également, comme le montrent Assude et Gispert dans leur leur analyse de l'entrée « Géométrie » du *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson (Assude et

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Gispert, 2015 ; Leyssenne, 1882a). Les importances respectives de ces deux volants de connaissances sont vraisemblablement différentes en géométrie et en arithmétique, et encore plus si l'on prend en compte un public pas seulement primaire, mais relevant aussi de l'enseignement secondaire. C'est ce que la base de données constituée, relevé exhaustif des énoncés sur les aires présentés dans les manuels du corpus, nous permet d'analyser, sous l'angle spécifique de la géométrie des aires.

Question : Existe-t-il des catégories d'énoncés de savoir sur les aires plus présentes dans les manuels que d'autres, au moins d'un point de vue quantitatif ?

Méthode : La typologie des énoncés de savoir sur les aires constituée et présentée dans le tableau II.12 (p. 249) donne lieu à un premier regroupement des données suivant les 21 catégories déterminées à cette occasion. Les pourcentages d'énoncés relevant de chacune de ces catégories pour les 40 ouvrages du corpus sont rassemblés dans un premier tableau, dans lequel la colonne « total » indique le pourcentage total de tels énoncés recensés dans l'ensemble du corpus. Le total du nombre d'énoncés relevés dans les 40 ouvrages du corpus est de 2564, compte-tenu du fait que les énoncés présents dans plusieurs ouvrages sont comptés plusieurs fois, et par exemple, les énoncés de type « application calcul » sont au nombre de 88 dans l'ensemble du corpus, soit un pourcentage d'environ 3,4 %.
Le tableau suivant indique seulement la répartition totale des énoncés de savoir par type dans l'ensemble des ouvrages du corpus.
Résultat : Voir tableau II.15 p. 254 et II.14 p. 253.

	Analytique	Application calcul	Application géométrique	Calculer	Construction	Définition	Equivalence
Total	0.6%	3.4%	1.3%	9.4%	9.2%	7.4%	6.6%

	Existence	Formule	Max	Méthode calcul	Méthode géométrique	Min	Partage
Total	0.2%	21.3%	2.2%	3.8%	5.5%	0.7%	3.4%

	Preuve	Principe	Quadrature	Rapport	Relation	Table	Théorème
Total	4.9%	1.6%	4.0%	12.9%	1.0%	0.2%	0.3%

TABLE II.14 – Bilan des pourcentages des énoncés de savoir relatifs aux 21 catégories pour l'ensemble du corpus

Licence CC BY-NC-ND 3.0

	Mauduit	Lacroix	Legendre	Dupin	Bergery	Terquem	Lancelot	Desnanot	Lamotte	Sonnet	LCFPB	Gimelli	Percin	Idoux	Vincent	Bezout	Eyssetic	Puille	Dupuis	Cirodde
Analytique	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	2.4%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	1.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.3%
Application calcul	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	4.9%	0.0%	7.9%	1.3%	14.6%	8.1%	0.0%	8.7%	2.2%	3.0%	2.2%	2.1%	1.7%	4.7%	4.1%	2.6%
Application géométrique	0.9%	0.0%	0.0%	3.6%	6.1%	0.0%	2.6%	2.6%	4.9%	1.6%	0.0%	4.3%	0.0%	1.0%	0.0%	0.0%	1.7%	1.6%	4.1%	0.0%
Calculer	7.3%	0.0%	2.7%	0.0%	9.8%	5.1%	31.6%	12.8%	17.1%	8.9%	1.7%	17.4%	0.0%	2.0%	8.8%	10.4%	11.7%	7.8%	4.1%	5.1%
Construction	10.1%	7.3%	15.1%	3.6%	7.3%	14.3%	0.0%	23.1%	0.0%	8.9%	35.6%	5.8%	15.2%	11.9%	9.9%	4.2%	10.0%	9.4%	0.0%	16.7%
Définition	3.7%	14.6%	5.5%	3.6%	7.3%	7.1%	13.2%	5.1%	12.2%	3.5%	3.4%	8.7%	8.7%	6.9%	5.5%	6.3%	6.7%	7.8%	10.2%	3.8%
Equivalence	10.1%	12.2%	12.3%	7.1%	6.1%	9.2%	0.0%	6.4%	0.0%	4.1%	11.9%	5.8%	2.2%	5.9%	12.1%	14.6%	13.3%	10.9%	8.2%	5.1%
Existence	0.0%	4.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	2.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Formule	16.5%	22.0%	21.9%	28.6%	13.4%	23.5%	23.7%	16.7%	14.6%	14.6%	16.9%	14.5%	26.1%	18.8%	25.3%	18.8%	18.3%	20.3%	18.4%	24.4%
Max	11.0%	0.0%	11.0%	10.7%	2.4%	4.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.9%	2.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Méthode calcul	3.7%	2.4%	0.0%	3.6%	3.7%	1.0%	5.3%	7.7%	9.8%	4.9%	5.1%	4.3%	0.0%	0.0%	0.0%	6.3%	1.7%	6.3%	10.2%	3.8%
Méthode géométrique	2.8%	2.4%	0.0%	0.0%	8.5%	2.0%	5.3%	10.3%	12.2%	5.7%	1.7%	7.2%	10.9%	3.0%	0.0%	8.3%	6.7%	7.8%	10.2%	6.4%
Min	1.8%	0.0%	0.0%	0.0%	1.2%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	6.9%	1.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Partage	4.6%	0.0%	0.0%	0.0%	7.3%	0.0%	7.9%	0.0%	12.2%	13.0%	5.1%	15.9%	0.0%	3.0%	0.0%	0.0%	3.3%	3.1%	8.2%	1.3%
Preuve	8.3%	7.3%	5.5%	7.1%	2.4%	3.1%	0.0%	3.8%	2.4%	4.1%	5.1%	1.4%	6.5%	5.0%	4.4%	4.2%	5.0%	4.7%	8.2%	6.4%
Principe	2.8%	2.4%	1.4%	7.1%	1.2%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.6%	1.7%	1.4%	2.2%	1.0%	2.2%	2.1%	3.3%	3.1%	0.0%	1.3%
Quadrature	0.9%	7.3%	4.1%	7.1%	2.4%	3.1%	0.0%	3.8%	0.0%	7.3%	8.5%	0.0%	8.7%	2.0%	4.4%	0.0%	6.7%	1.6%	2.0%	3.8%
Rapport	15.6%	17.1%	13.7%	10.7%	15.9%	23.5%	0.0%	6.4%	0.0%	11.4%	3.4%	4.3%	17.4%	11.9%	17.6%	22.9%	10.0%	10.9%	12.2%	17.9%
Relation	0.0%	0.0%	6.8%	0.0%	0.0%	2.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	4.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Table	0.0%	0.0%	0.0%	7.1%	0.0%	0.0%	2.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Théorème	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%

	Briot	Amiot	Briot2	Harant	Rouché	Salicis	Tarnier	Meray	Bos	Andre	Bovier	Tombeck	Dalsenne	Guilmin	Bos2	Bourget	Bert	Leyssenne	Girod	HueVagnier	Total
Analytique	2.2%	0.0%	2.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.9%	0.0%	1.5%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.2%	2.7%	0.0%	0.6%
Application calcul	6.5%	2.0%	2.9%	0.0%	2.8%	3.9%	3.6%	3.3%	8.2%	3.7%	9.6%	0.0%	0.0%	2.8%	8.2%	1.6%	12.5%	0.0%	1.4%	7.3%	3.4%
Application géométrique	4.3%	0.0%	1.4%	2.2%	0.0%	0.0%	1.8%	0.0%	1.6%	1.9%	1.9%	0.0%	0.0%	1.4%	0.0%	1.6%	4.2%	0.0%	0.0%	0.0%	1.3%
Calculer	17.4%	9.8%	14.5%	6.5%	13.1%	3.9%	21.4%	0.0%	19.7%	9.3%	9.6%	4.4%	12.5%	12.5%	28.6%	6.3%	4.2%	2.4%	5.5%	21.8%	9.4%
Construction	0.0%	5.9%	13.0%	6.5%	9.3%	17.6%	1.8%	0.0%	4.9%	8.4%	7.7%	4.4%	4.2%	4.2%	6.1%	4.7%	0.0%	12.0%	8.2%	1.8%	9.2%
Définition	10.9%	7.8%	7.2%	8.7%	3.7%	9.8%	7.1%	20.0%	11.5%	5.6%	7.7%	4.4%	16.7%	8.3%	12.2%	9.4%	16.7%	6.0%	6.8%	12.7%	7.4%
Equivalence	2.2%	3.9%	4.3%	10.9%	5.6%	5.9%	1.8%	6.7%	6.6%	0.9%	1.9%	7.4%	8.3%	5.6%	8.2%	9.4%	8.3%	1.2%	4.1%	7.3%	6.6%
Existence	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%
Formule	19.6%	23.5%	21.7%	23.9%	20.6%	21.6%	16.1%	26.7%	16.4%	17.8%	30.8%	29.4%	33.3%	27.8%	18.4%	25.0%	25.0%	33.7%	26.0%	20.0%	21.3%
Max	0.0%	0.0%	1.4%	0.0%	11.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	2.2%
Méthode calcul	4.3%	2.0%	2.9%	2.2%	0.0%	2.0%	7.1%	3.3%	3.3%	12.1%	1.9%	1.5%	0.0%	9.7%	2.0%	4.7%	4.2%	3.6%	2.7%	3.6%	3.8%
Méthode géométrique	10.9%	5.9%	7.2%	6.5%	2.8%	3.9%	5.4%	10.0%	6.6%	7.5%	7.7%	4.4%	4.2%	2.8%	4.1%	4.7%	16.7%	6.0%	2.7%	9.1%	5.5%
Min	0.0%	0.0%	0.0%	2.2%	5.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.7%
Partage	13.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	3.6%	0.0%	0.0%	12.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	4.8%	1.4%	0.0%	3.4%
Preuve	2.2%	5.9%	4.3%	4.3%	4.7%	3.9%	7.1%	3.3%	4.9%	2.8%	3.8%	5.9%	8.3%	6.9%	4.1%	7.8%	4.2%	4.8%	6.8%	5.5%	4.9%
Principe	2.2%	0.0%	1.4%	4.3%	0.9%	2.0%	1.8%	6.7%	0.0%	0.9%	0.0%	2.9%	4.2%	0.0%	0.0%	1.6%	4.2%	1.2%	1.4%	0.0%	1.6%
Quadrature	0.0%	5.9%	2.9%	4.3%	2.8%	9.8%	7.1%	0.0%	3.3%	3.7%	9.6%	5.9%	4.2%	0.0%	0.0%	3.1%	0.0%	8.4%	6.8%	5.5%	4.0%
Rapport	4.3%	23.5%	8.7%	17.4%	15.0%	15.7%	12.5%	16.7%	13.1%	10.3%	7.7%	23.5%	4.2%	15.3%	8.2%	10.9%	0.0%	13.3%	20.5%	5.5%	12.9%
Relation	0.0%	3.9%	2.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	2.9%	0.0%	2.8%	0.0%	7.8%	0.0%	0.0%	2.7%	0.0%	1.0%
Table	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.2%	0.0%	0.0%	0.2%
Théorème	0.0%	0.0%	0.0%	1.9%	0.0%	1.8%	3.3%	0.0%	0.0%	0.0%	1.5%	0.0%	0.0%	0.0%	1.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%

TABLE II.15 – Pourcentages des énoncés de savoir relatifs aux 21 catégories établies par ouvrage du corpus

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Les énoncés les plus représentés dans le corpus sont donc très nettement ceux relevant de la dénomination « Formule », avec 21,3 % d'occurrences. Ceci souligne l'importance prise dans les manuels par les formules de calcul pour les aires des différentes figures existantes, chacune donnant lieu à un énoncé de savoir spécifique. Juste après viennent les énoncés de type comparaison, avec les « Rapports » et les « Équivalences », eux aussi très fréquents avec des proportions respectives de 12,9 % et 6,6 % des énoncés apparaissant dans le corpus, soit 19,5 % pris ensemble. Les énoncés qui expriment des résultats sur la mesure des aires sont donc proches, en part prise dans les manuels, des propositions axées sur leur comparaison, elles aussi courantes dans les manuels de l'époque.
Un peu après, avec un peu plus de 12,8 % des énoncés concernés au total, arrivent les exemples et applications numériques (catégories « Calculer » à 9,4 % plus « Application calcul » à 3,4 %) juste derrière les constructions, avec une part globale de 14,5 % si l'on joint les catégories « Construction », « Quadrature » et « Partage ».
Les « Méthodes », géométriques et calculatoires, représentent presque 10 % des énoncés de savoir présentés dans les manuels du corpus, ce qui n'en fait pas un axe majeur des connaissances exposées, mais dont l'importance n'est pour autant pas à négliger. Les « méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie » constituent d'ailleurs l'axe choisi par Moussard pour analyser les ouvrages de géométrie de l'enseignement préparatoire du XIX^{e} siècle.
Les catégories les moins représentées quantitativement sont celles relatives aux savoirs théoriques (« Théorème », « Principe », « Existence » ou encore « Preuve » [62]).

62. Nous sommes consciente du biais effectué en ne prenant en compte que les preuves de certains résultats bien ciblés dans l'analyse quantitative. En effet, tout résultat peut se voir potentiellement démontré dans un manuel de géométrie, et la proportion de preuves doit de fait être bien plus importante que la présente étude ne le laisse apparaître. Pour la suite de notre travail, nous avons néanmoins besoin de données quantifiées relatives aux preuves des théorèmes de l'aire du rectangle, du théorème de Pythagore et de la formule de Héron, ce qui justifie de conserver ces contenus dans notre nomenclature. Néanmoins, les résultats chiffrés quant à cette catégorie ne seront pas considérés comme représentatifs dans cette section.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— Les énoncés de savoir sur les aires qui dominent quantitativement dans les manuels de géométrie du corpus sont ceux sur la mesure, à peu près à égalité avec les propositions concernant la comparaison des aires.

— Les énoncés relatifs aux constructions et aux applications calculatoires arrivent juste après, eux aussi proches en proportion.

— Les méthodes, géométriques ou numériques, forment un axe de connaissance relativement important dans les manuels.

— Les savoirs théoriques sur les aires sont les moins représentés en proportion.

Afin de mettre en évidence et de visualiser plus facilement la répartition des énoncés suivant les catégories préalablement définies et présentée dans le tableau II.14 (p. 253), nous avons choisi d'utiliser de nouveau la technique de représentation appelée « heatmap ». Nous souhaitons ainsi mesurer si la répartition des énoncés sur les aires par catégorie dans l'ensemble des manuels du corpus est plutôt uniformément répartie ou si elle présente des disparités selon les ouvrages concernés.

Questions :

- **Les manuels du corpus présentent-ils une répartition homogène de leurs énoncés de savoir sur les aires suivant les catégories établies ?**
- **Certains d'entre eux se distinguent-ils par des orientations particulières concernant le type de connaissances que leurs auteurs choisissent d'exposer ?**

Méthode : La heatmap réalisée à l'aide du logiciel R propose une représentation visuellement plus lisible et exploitable des données. Elle a pour autre effet de regrouper les individus par leur ressemblance globale quant aux variables considérées, ce qui souligne les parentés éventuelles entre eux [63]. L'ordre suivant lequel les manuels apparaissent sur l'axe des abscisses est d'ailleurs fonction des ressemblances ou proximités que le logiciel calcule lors de l'élaboration du graphique.
Résultat : Voir la figure II.30 p. 257.

63. Pour plus de détails sur la technique des « heatmap » sur R, voir (Galili et al., 2018).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

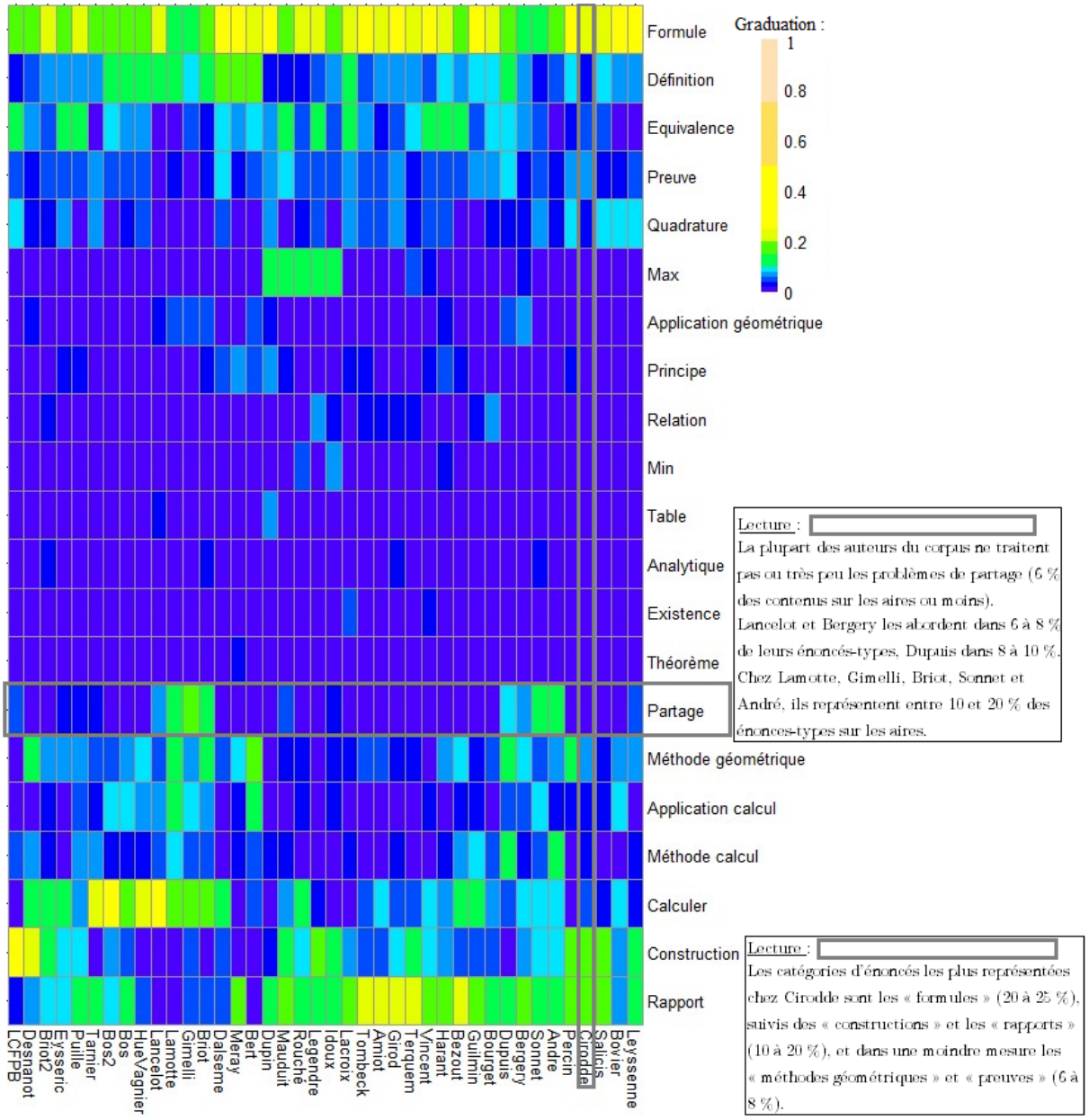


FIGURE II.30 – Heatmap des catégories d'énoncés de savoir recensés dans les manuels du corpus (en %), réalisée à l'aide de la fonction « pheatmap » du package du même nom sur le logiciel R

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Sur ce diagramme, des particularités apparaissent concernant des groupes de manuels. Certains d'entre eux sont plus que les autres tournés vers les énoncés de comparaison des aires de type « Rapport », avec entre 20 et 50 % d'énoncés de cette nature, représentés en jaune sur la figure (ouvrages de Tombeck (1879), Girod (1893), Amiot (1859), Terquem (1829) et Bézout (1848)). Les titres de Desnanot (1835) et L. C. et F. P. B. (1840) sont quant à eux plus riches en constructions, alors que Tarnier (1872), Bos (1884), Hue et Vagnier (1896) et Lancelot (1833) présentent davantage que leurs confrères d'exemples numériques. Les problèmes de partage sont abordés plus particulièrement dans un groupe de manuels constitué de (Lamotte, 1839), (Gimelli, 1841), (Briot et Vacquant, 1859), (Sonnet, 1839) et (P. André, 1879), représentant entre 10 et 20 % des énoncés qu'ils exposent. Un groupe d'auteurs se distingue également par ses énoncés sur les maximum et minimum, souvent liés à une théorie des figures isopérimètres, constitué de Dupin (1828), Mauduit (1790), Rouché et Comberousse (1866), Legendre (1823) et Idoux (1842). Ce thème occupe 10 à 20 % de leurs énoncés sur les aires. Des nuances apparaissent également dans les catégories « Équivalence », « Définition » et « Formule », sur lesquelles nous reviendrons le cas échéant.

Conclusion :

— Des orientations assez nettes concernant le type de savoirs sur les aires qu'ils exposent sont prises par les auteurs d'une partie des manuels et sont identifiables sur le graphique.

— Ces partis-pris sont en faveur des énoncés de comparaison des aires pour un groupe d'ouvrages, des constructions pour un autre, de calculs numériques pour un troisième.

— Des connaissances sur les aires sont exposées plus minoritairement, et sont traitées spécifiquement par des petits groupes d'auteurs, comme les problèmes de partages ou les figures isopérimètres.

— Ces orientations n'apparaissent pas, en première analyse, sans lien avec les publics auxquels les auteurs s'adressent et avec la conception de l'enseignement de la géométrie dans laquelle ils s'inscrivent. Par exemple, deux des manuels riches en exemples numériques sont destinés aux filles, ceux traitant des partages sont principalement des manuels de géométrie pratique et/ou d'arpentage, et ceux abordant les figures isopérimètres sont presque exclusivement à l'usage de l'enseignement secondaire.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Afin de déterminer les tendances encore plus globales que suivent les auteurs dans leurs manuels à travers les énoncés de savoir sur les aires, nous avons choisi de les regrouper dans des catégories encore plus grandes, relevant pour les unes de la théorie, et pour d'autres de la pratique. En effet, dans la section I.3.2 (p. 124), nous avons exhibé 114 manuels de géométrie dont les titres comportent des références explicites à la théorie et à la pratique et ou aux applications (voir figure I.20 p. 132). C'est également le cas de 7 des 40 ouvrages sélectionnés dans notre corpus, qui annoncent dans leurs titres cette double approche de l'enseignement de la géométrie, à la fois théorique et pratique. Ce constat est partagé par Legros au sujet des livres d'arithmétique, puisque 10 titres d'arithmétique sur les 63 de son corpus énoncent ce double intérêt pour la théorie et la pratique, soit à peu près la même proportion de 1 pour 6 que dans notre propre corpus (Legros, 2019).

Questions :

- **Les auteurs orientent-ils leurs manuels vers une conception plus théorique ou plus pratique de l'enseignement de la géométrie ? Dans ce dernier cas, favorisent-ils plutôt les calculs ou les constructions ?**
- **Ces orientations sont-elles en lien avec les intentions que les auteurs affichent dans les titres de leurs ouvrages ?**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : La rubrique « Théorie » constituée rassemble les définitions, théorèmes et principes généraux, et concerne donc les neuf catégories précédentes « Définition », « Équivalence », « Rapport », « Min », « Max », « Existence », « Théorème », « Preuve », et « Principe ». Pour ce qui concerne la pratique, nous avons fait le choix de la subdiviser en deux parties, l'une relative aux nombres et aux calculs, et l'autre aux constructions. La première est appelée « Calcul » et regroupe les sept catégories « Formule », « Relation », « Table », « Analytique », « Application calcul », « Calculer », et « Méthode calcul ». La suivante est nommée « Construction » et est constituée des cinq rubriques « Construction », « Quadrature », « Partage », « Méthode géométrique », et « Application géométrique ». Un nouveau tableau de répartition des énoncés des manuels du corpus suivant ces trois grandes catégories a été réalisé, donnant lieu à une seconde « heatmap » permettant de mieux visualiser les données obtenues.
Résultat : Voir la figure II.31 p. 260.

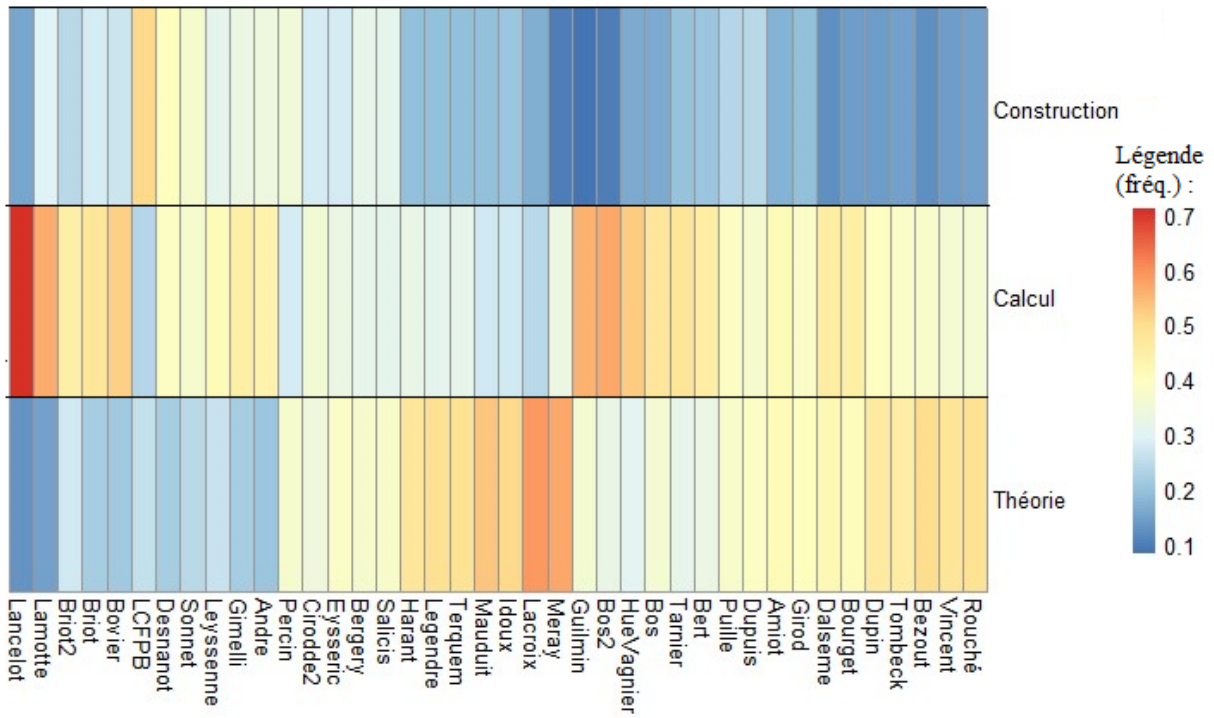


FIGURE II.31 – Heatmap des énoncés de savoir recensés dans les manuels du corpus (en %) suivant leur caractère théorique ou pratique (calcul ou construction) réalisée à l'aide de la fonction « pheatmap » du package du même nom sur le logiciel R

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : La heatmap fait apparaître un assez bon équilibre global entre les deux aspects — théorique et pratique — de l'enseignement de la géométrie au sein des manuels du corpus. Les ouvrages majoritairement théoriques apparaissent en nuances de orange dans la ligne « théorie », les plus marqués dans cette direction étant ceux de Méray (1874), Lacroix (1808) et Mauduit (1790). Des ouvrages offrent une approche plus calculatoire, comme les manuels d'arpentage de Lamotte (1839) et Lancelot (1833), ainsi que les titres de Guilmin (1882) et Bos (1884), dans sa version pour les jeunes filles. Des ouvrages comme ceux de Lacroix (1808) et L. C. et F. P. B. (1840) sont plus pauvres en résultats calculatoires que les autres manuels. Quant aux constructions, elles sont quasiment absentes chez Méray (1874), Guilmin (1882) et Bos (1884) (entre 8 et 10 % des énoncés seulement les concernent), mais représentent plus de la moitié des énoncés chez L. C. et F. P. B. (1840). Une série d'ouvrages se distingue par un bon équilibre entre les trois aspects, formée par (Percin, 1842), (Cirodde, 1858), (Eysseric et Pascal, 1850), (Bergery, 1828) et (Salicis, 1868), et contenant entre 25 et 40 % d'énoncés de chaque type. Pourtant, mis à part l'ouvrage d'Eysseric et Pascal (1850), il ne s'agit pas des manuels affichant les deux aspect théorique et pratique dans leurs titres. Parmi ces derniers, mis à part l'ouvrage de Mauduit, à tendance très théorique, et celui de Sonnet (1839), à tendance très pratique, et ce en dépit des intentions affichées dans leurs titres, les autres partagent leurs caractères plus spéculatifs avec des applications plutôt numériques que centrées sur les constructions (Briot et Vacquant, 1859 ; Girod, 1893 ; Leyssenne, 1890 ; Puille, 1855).

Conclusion :

— Une bonne partie des ouvrages se caractérise par un équilibre global de leurs énoncés de savoir relatifs aux aspects théoriques et aux pratiques calculatoires et de construction à propos des aires.

— Pour les autres titres, le curseur est nettement placé vers l'une des dominantes (théorie, pratiques de calcul ou pratiques de construction).

— Ces dominantes parfois marquées ne sont pas forcément liées directement avec les intentions ou orientations affichées dans les titres.

Pour compléter ces éléments d'analyse, nous utilisons les données brutes du recensement des énoncés de savoir sur les aires et la technique de la CAH pour produire une nouvelle classification des ouvrages du corpus. Cette nouvelle classification a vocation

Licence CC BY-NC-ND 3.0

à être mise en parallèle avec les deux précédentes obtenues sur la base d'autres critères : données quantitatives relatives au volume global, au poids du thème des aires et à la pérennité éditoriale pour la première (voir la sous-section II.2.2.3 p. 224), et données qualitatives sur les publics ciblés, la reconnaissance institutionnelle et le succès d'édition pour la seconde (voir la sous-section II.2.2.4 p. 234). La confrontation des résultats obtenus en regroupant les ouvrages suivant ces différentes séries de critères est de nature à mettre en évidence des interfaces entre tous ces paramètres autour de la notion d'aire dans les manuels du corpus.

Questions :

- **Le regroupement des manuels en fonction de leurs contenus de savoir sur les aires offre-t-il des similarités avec ceux produits par les autres modes de classification suivis ?**
- **Quelles interfaces la comparaison de ces classifications révèle-t-elle autour de la notion d'aire entre les publics ciblés, les périodes de publication, et les orientations globales que leurs auteurs suivent quant à l'enseignement de la géométrie ?**

Méthode : Les données analysées sont potentiellement très vastes, puisque chaque individu est représenté par un point à 460 dimensions, chacune de ces 460 données booléennes indiquant s'il contient ou non l'énoncé correspondant. Or, les techniques statistiques de classification se heurtent à des limites d'interprétation pour des données de dimension aussi grande. Nous avons donc choisi de ne conserver que les énoncés les plus significatifs, en ne gardant que ceux présentant au moins 10 occurrences parmi les 40 manuels du corpus. Cette démarche a permis de réduire le nombre de données par individu à 80, soit le nombre des énoncés recensés qui apparaissent dans au moins 10 des 40 ouvrages sélectionnés. La classification générée, obtenue à partir d'une CAH réalisée sur l'AFC des données brutes, est matérialisée par un diagramme appelé « dendrogramme ».
Nous avons de surcroît dressé un tableau bilan des trois classifications réalisées au cours de la sous-section II.2.2.1 (p. 205), qui résume l'appartenance de chacun des titres du corpus aux divers groupes qui les constituent.
Résultat : Voir la figure II.32 p. 263 et le tableau A.2 p. 667.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

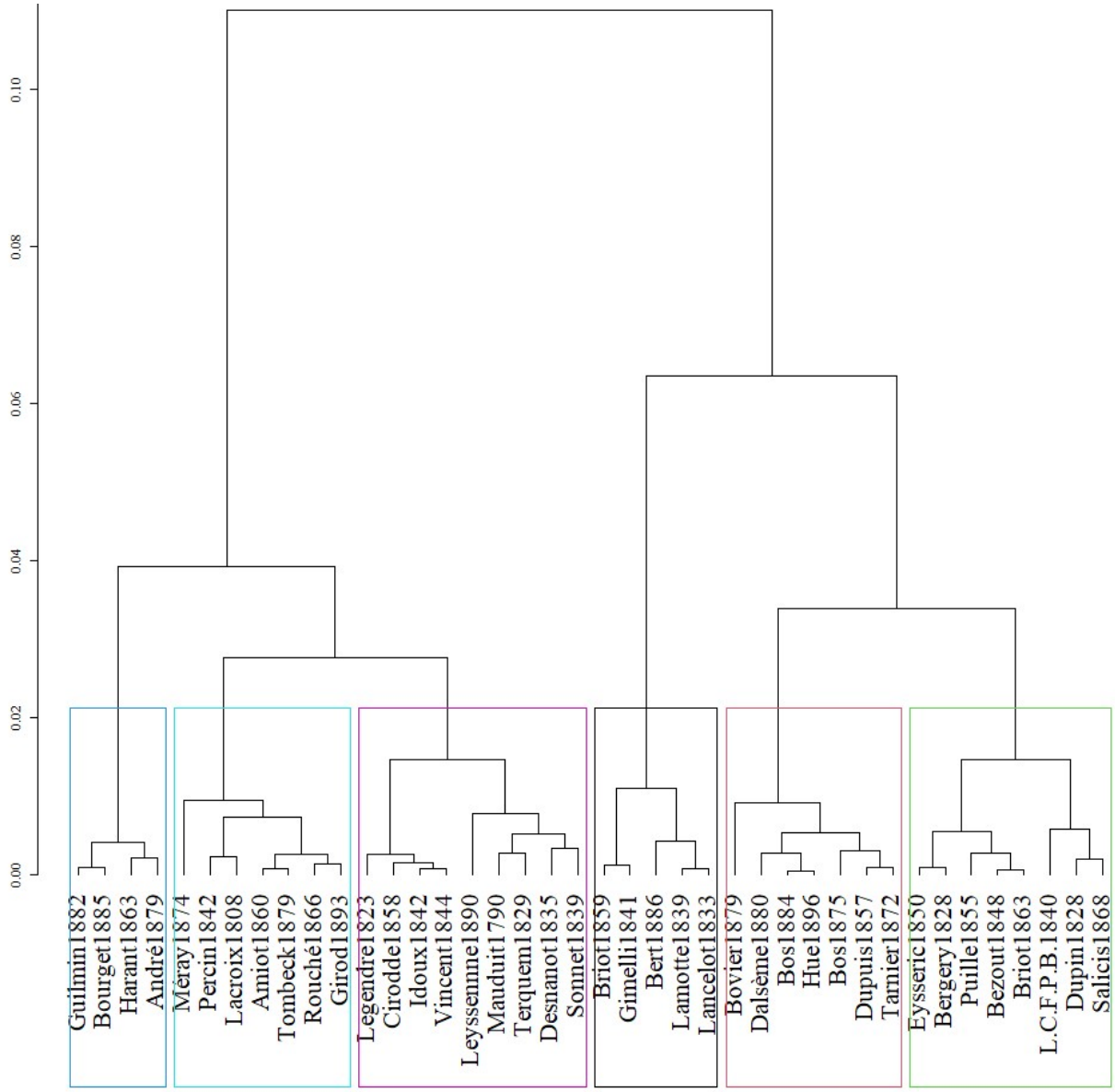


FIGURE II.32 – Dendrogramme et classification générés suivant les énoncés sur les aires présents dans les manuels (d'occurrences supérieures ou égales à 10), réalisés par AFC puis CAH sur le logiciel R

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Cette nouvelle classification fait apparaître différents traits communs aux groupes constitués :

- **Groupe 1** (en bleu) : Les « tardifs mixtes » regroupent quatre manuels destinés à des publics variés publiés tardivement. Ils ont en commun le fait de privilégier une approche calculatoire dans leurs contenus sur les aires. Exemple : (Bourget, 1885) est destiné à des publics du primaire supérieur et de l'enseignement spécial. Environ 45 % des énoncés sur les aires qu'il présente sont axés sur une approche calculatoire (voir tableau II.31 p. 260).
- **Groupe 2** (en rose) : Les « théoriques pour le secondaire » regroupent des ouvrages dont l'approche sur les aires est principalement théorique et destinés à un public secondaire. Une grande partie de ces ouvrages sont des succès éditoriaux. Ces ouvrages ne sont pas situés dans le temps : leurs années d'édition s'étalent de 1808 à 1893. Exemple : Les *Éléments de géométrie* de Lacroix (1808) comportent plus de 58 % d'énoncés théoriques sur les aires. Utilisé pour l'enseignement secondaire, il a été édité 26 fois en 115 ans.
- **Groupe 3** (en turquoise) : Les « officiels du début du siècle » rassemblent des titres reconnus par les institutions, publiés dans la première moitié du siècle (à l'exception de Leyssenne 1890). Beaucoup font partie du groupe des *encyclopédiques* de la première classification réalisée à partir des variables quantitatives (voir p. 231). Ils sont presque tous à destination de l'enseignement secondaire, mais n'ont pas forcément été des succès d'édition. Leur approche sur les aires n'est pas homogène, mais est centrée principalement autour de la théorie et du calcul. Exemple : (Terquem, 1829) figure dans les liste officielles pour le secondaire (mais aussi pour les EPS). C'est un gros livre avec beaucoup de sections et d'énoncés sur les aires (presque 100). Il n'a été édité que 3 fois en 10 ans. Environ 50% de ses énoncés sur les aires sont de nature théorique, et plus de 30 % sont calculatoires.
- **Groupe 4** (en noir) : Les « arpenteurs et expérimentaux ». Ce sont cinq ouvrages traitant principalement d'arpentage, ou de « géométrie expérimentale » (Bert, 1886). Leur géométrie est plus pratique que théorique, privilégiant les aspects calculatoires et les constructions. Ils s'adressent principalement à un public du primaire supérieur. Exemple : Les *Leçons d'arpentage* de Gimelli (1841) figurent dans les listes officielles pour l'enseignement primaire (Giraud, 1851). Près de 45 % de ses énoncés sur les aires traitent de calcul, 33 % de constructions, et le reste seulement – 22 % – de théorie.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— **Groupe 5** (en rouge) : Les « tardifs appliqués » sont des ouvrages de la fin du siècle, publiés à partir de 1872 (à l'exception de Dupuis 1857), et tournés vers une approche géométrique essentiellement appliquée à d'autres domaines, comme les arts, l'industrie ou l'arpentage. Ils s'adressent à des publics variés, mais assez spécifiques, comme par exemple les élèves de l'enseignement spécial et les filles. Exemple : (Tarnier, 1872) est à l'usage des EPS et de l'enseignement spécial. Son caractère « pratique » est annoncé dans son titre. Un peu moins de la moitié des énoncés qu'il présente sur les aires sont calculatoires, et un tiers environ théoriques.

— **Groupe 6** (en vert) : Les « théorique et pratique du début du siècle » rassemblent des manuels publiés jusqu'en 1855, à l'exception de Salicis 1868, qui allient les caractères théoriques et pratiques dans leur géométrie. Ils s'adressent à des publics variés. Exemple : (Bergery, 1828) est à l'usage des EPS comme du secondaire. Le titre annonce que la géométrie qui y est exposée est « appliquée à l'industrie ». Ses énoncés sur les aires suivent une répartition presque homogène : 37 % de théorie, et 32 % de calculs ainsi que de constructions.

Nous voyons apparaître de nouvelles parentés entre les ouvrages, et le découpage en groupes est encore différent de ceux réalisés lors des deux précédentes classifications. Néanmoins, quelques points de ressemblance sont à souligner. Le groupe 4 des « arpenteurs et expérimentaux », nouvellement formé, est pratiquement inclus, à l'exception de Briot (1859), dans le groupe 3 de la classification précédente, regroupant les « primaires pratiques », ce qui confirme la position de l'arpentage comme partie intégrante de la géométrie appliquée, tout particulièrement pour l'enseignement primaire. Le groupe 3, nous l'avons vu, comprend cinq ouvrages du groupe des « encyclopédiques » de la première classification, mais il regroupe aussi 5 manuels du groupe 5 des « officiels à faible audience » de la seconde [64]. Finalement, 4 de ces auteurs sont rassemblés dans toutes les classifications élaborées. (Cirodde, 1858), (Idoux, 1842), (Vincent, 1844) et (Terquem, 1829) forment ainsi un ensemble d'ouvrages similaires suivant tous les critères pris en compte. Presque contemporains (à l'exception de (Cirodde, 1858) mais dont la première édition, peu différente, date de 1836), ils allient des similarités de fond comme de forme. Gros livres énonçant beaucoup de propositions sur les aires, ils sont reconnus par les institutions, mais gardent un faible succès éditorial, s'adressent à un public secondaire et sont tournés vers la théorie davantage que la pratique. D'autres binômes de manuels, très souvent contemporains, demeurent liés dans tous les groupes, comme (Guilmin, 1882) et (P. André, 1879), (Bézout, 1848) et (Dupin, 1828), (Bovier-Lapierre, 1879) et (Tarnier, 1872), ou encore (Tombeck, 1879) et (Girod, 1893).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— Les groupes constitués lors de cette troisième classification qui prend en compte les contenus de savoir sur les aires des manuels ne sont pas similaires à ceux obtenus à partir d'autres critères.

— Quelques groupes d'ouvrages apparaissent néanmoins corrélés dans plusieurs classifications, voire dans toutes.

— L'analyse de la constitution des groupes de manuels, relativement aux contenus sur les aires qui y sont exposés, montre de nouvelles tendances relatives aux périodes de publication des ouvrages, aux publics visés, à la réception des titres auprès des acteurs éducatifs de l'époque et aux orientations suivies par leurs auteurs pour l'enseignement de la géométrie.

Les tendances révélées par cette nouvelle classification sont de plusieurs types. Elles concernent par exemple les publics auxquels les manuels sont dédiés : les livres plus théoriques du groupe 2 s'adressent au secondaire, les arpenteurs et expérimentaux du groupe 4 au primaire, les ouvrages pour les publics plus spécifiques (filles, enseignement spécial) se développent en fin de période (groupe 5)[65]. D'un point de vue temporel, la première moitié du siècle est marquée par des manuels encyclopédiques, reconnus officiellement, et tournés vers l'enseignement secondaire (groupe 3), mais aussi par des titres plus mixtes en termes d'approche (théorique ou pratique) ainsi que de publics (groupe 6). Le thème des aires abordé dans les manuels, et pris comme angle d'analyse, poursuit donc son rôle de révélateur d'interactions entre les profils des manuels, sur des critères générationnels, de public visé, de réception auprès du monde éducatif, et d'orientations prises quant à l'enseignement de la géométrie. Dans ce cas précisément, nous préférons qualifier ces interactions de « tendances » plutôt que d'interfaces. En effet, il s'agit de liens exhibés entre plusieurs aspects des manuels au sein des groupes d'ouvrages formés, mais qui ne constituent pas des règles applicables de façon générale à tout le corpus. C'est pourquoi les flèches du schéma II.33 (p. 267) figurent en pointillés, ne présentant pas le même statut que les flèches pleines des schémas d'interfaces précédents.

64. Parmi eux, 5 (Mauduit, Terquem, Vincent, Legendre et Sonnet) font également partie du triangle des auteurs présentant le plus de références en commun (voir la sous-section II.2.2.1 p. 205).

65. L'enseignement de la géométrie pour les filles, dans le secondaire ou le primaire supérieur, a été officiellement instauré tardivement, ce qui peut expliquer cette tendance globale. Ce n'est en revanche pas le cas pour l'enseignement spécial qui existe depuis 1849.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

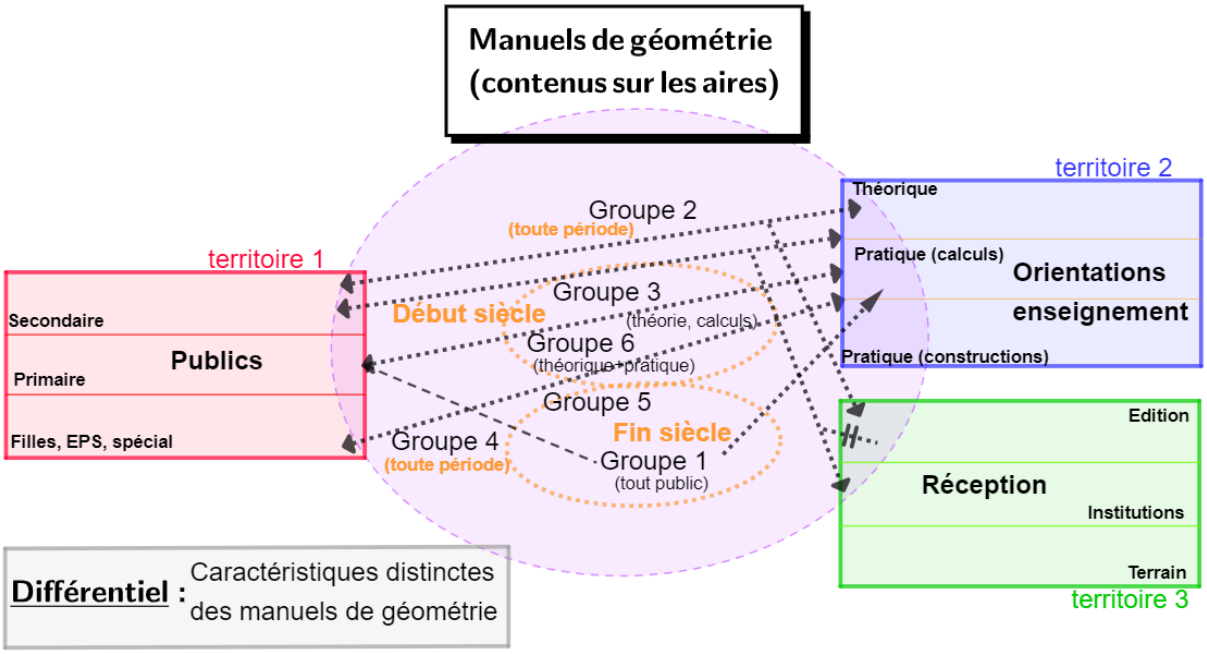


FIGURE II.33 – Schéma montrant les tendances des groupes de manuels de géométrie constitués en termes de publics ciblés, de réception dans le monde éducatif et d'orientations prises par leurs auteurs quant à l'enseignement de la géométrie, avec des tendances temporelles

Conclusion

L'ensemble de cette étude quantitative permet de dépeindre le paysage formé par les manuels de géométrie du corpus et leurs auteurs, aux éléments très variés. En s'inscrivant pleinement dans la démarche « comparative » évoquée en introduction de cette section (voir p. 246), notre étude met en évidence, au-delà de la « caractéristique unificatrice » [66] de nos manuels, qui sont tous des ouvrages que leurs auteurs dédient à l'enseignement de la géométrie au XIX^{e} siècle, leur très grande « diversité interne » [67]. Comme dans les études regroupées dans le livre dirigé par Bernard et Proust, cette diversité réside notamment dans les objectifs visés, les publics auxquels les auteurs destinent leur travail, avec des références plus ou moins communes. Elle se manifeste aussi à travers les contenus présentés, notamment sur le thème des aires, qui constitue l'angle d'analyse de notre étude. La variété du corpus que nous avons établi apparaît ostensiblement à travers les cartographies qui en sont faites, rendues visuellement observables par les techniques d'analyse multivariée et les procédés graphiques associés (réseaux, plans des variables, des individus, « heatmap »). Les parentés et les dissemblances entre les livres, ainsi qu'entre leurs auteurs, se matérialisent alors par des proximités ou des éloignements que l'on peut qualifier de géographiques sur les

66. En anglais « unifying characteristic » qui désigne la (ou une des) propriété(s) commune(s) à tous les individus comparés (Bernard et Proust, 2014, p. 13).
67. En anglais « internal diversity » (Bernard et Proust, 2014, p. 13).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

cartes et plans réalisés. Dans cette cartographie, des manuels apparaissent presque systématiquement associés, et le sont également dans notre étude qualitative à suivre : par exemple, nous retrouvons le binôme Tombeck/Girod dans l'analyse du cas de l'aire de l'ellipse (voir p. 383) et le duo Bovier-Lapierre/Tarnier dans l'étude des techniques de visualisation qu'ils mettent en place pour mettre en évidence la notion de similitude des figures (voir p. 390 et p. 392) ainsi que le théorème de Pythagore (voir p. 410).

La quantification permet de pousser le procédé jusqu'à générer des regroupements par « affinités » [68] des auteurs des ouvrages du corpus au sein de réseaux, de citations communes ou d'intercitations, ainsi que de leurs écrits, faisant émerger, autour de leurs contenus sur les aires, considérés aussi bien quantitativement que qualitativement, des interfaces entre plusieurs de leurs caractéristiques (voir les schémas II.20 p. 219, II.25 p. 234, II.29 p. 245 et II.33 p. 267). Ces interfaces entre leur public, leur période d'édition, leur succès éditorial, leur reconnaissance institutionnelle et/ou de terrain, leurs contenus sur les aires, et leur orientation plus ou moins pratique ou théorique, apportent non seulement une connaissance générale sur l'entité que forment les manuels de géométrie du XIX^{e} siècle, mais permettent surtout de nuancer la représentation globale que l'on peut en avoir. Cette démarche contribue notamment à confirmer ou infirmer des hypothèses posées initialement : l'importance particulière de l'arpentage au cœur de la géométrie pratique enseignée principalement à un public primaire et primaire supérieur s'est vue confirmée, alors que le succès éditorial potentiel de gros ouvrages de type « encyclopédique » destinés à un lectorat du secondaire a été réfuté, en dépit de la reconnaissance institutionnelle dont ils bénéficient. De surcroît, décliner un tableau d'ensemble suivant les diverses caractéristiques, que nos manuels ont ou n'ont pas, et en les traitant en interactions par un croisement des données, fait émerger de nouvelles hypothèses de recherche, qui nécessitent désormais un traitement plus qualitatif.

En particulier, l'orientation plus théorique ou plus pratique des énoncés de savoir relatifs aux aires présents dans les ouvrages demande à être approfondie, en lien avec les périodes, les publics visés, les références et influences des auteurs, mais aussi avec la réception des ouvrages, éditoriale, institutionnelle ou par les professeurs en exercice. La distinction que nous avons créée entre ces deux aspects, théorique et pratique, mérite d'être affinée, puisque la frontière entre les deux, si elle existe, n'est manifestement pas imperméable. En particulier, nous projetons de poursuivre la différenciation déjà engagée entre les énoncés calculatoires et ceux axés sur les constructions. La nécessité de faire des choix pour analyser les contenus qualitativement s'impose, puisqu'il n'est pas envisageable de travailler de façon homogène sur 460 énoncés de savoir distincts.

68. Nous choisissons ce terme ici, utilisé au sens figuré, pour désigner les ensembles de points communs que peuvent présenter des ouvrages quant aux variables prises en compte dans notre analyse.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

C'est pourquoi nous proposons dans le chapitre suivant de nous concentrer sur trois thématiques principales, qui auront vocation à former une grille d'analyse des savoirs sur les aires présentés dans nos ouvrages, en couvrant les interfaces potentielles de la géométrie des aires avec les questions, à la fois transversales et essentielles, des constructions, des calculs, mais aussi du recours à l'analyse infinitésimale.

II.3 Trois résultats mathématiques transversaux

L'analyse quantitative des manuels du corpus a mis en évidence des traits caractéristiques des ouvrages autour de la notion d'aire, comme le poids global qu'elle occupe dans les ouvrages considérés, mais aussi le type d'énoncés suivant lesquels les connaissances qui lui sont relatives se déclinent et en quelle proportion. La mise en relation de ces informations avec d'autres types de données, comme les publics, la reconnaissance institutionnelle ou de terrain, le volume des ouvrages ou encore leur longévité ou succès éditoriaux, a permis de relever des parentés, ou au contraire de nettes différences entre les titres considérés. Les classifications réalisées à partir du croisement de ces différentes variables font émerger des interfaces entre elles, dont nous pouvons considérer que le thème des aires joue le rôle de révélateur. Pour aller plus loin dans cette démarche, nous exposons par la suite une analyse qualitative des énoncés de savoir sur les aires présentés dans les manuels du corpus.

Le nombre de ces énoncés étant très important (460), il est nécessaire d'identifier des thèmes pertinents sur lesquels nous focaliser. À l'issue d'une première lecture des ouvrages du corpus, nous avons repéré trois grands thèmes transversaux qui couvrent bien l'ensemble des formes que peuvent prendre les connaissances sur les aires : il s'agit de la détermination de l'aire du rectangle, du théorème de Pythagore et de l'étude des aires curvilignes. Chacun de ces thèmes, étudié au préalable dans l'ensemble des manuels du corpus dans lesquels il est abordé, nourrit ensuite les questions scientifiques transversales que nous nous posons au sujet des aires et de leur rôle d'interface entre différents domaines mathématiques. Cette partie a pour objectif de justifier le choix de ces trois cas d'étude, en présentant les intérêts à la fois scientifiques et pédagogiques de ces notions, puis en mesurant l'importance qu'elles ont dans les programmes et la place qu'elles occupent dans les manuels de notre corpus.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.3.1 La mesure du rectangle

À travers les ouvrages du corpus, le rôle du rectangle est frappant, comme figure de référence sur laquelle s'appuie toute la théorie des aires planes. Dans la très grande majorité des cas (36 ouvrages sur 40), cette configuration (ou celle du carré, qui en est un cas particulier) apparaît dans les premiers énoncés du chapitre sur les aires, juste après les définitions et parfois quelques considérations simples sur les équivalences de figures. L'étude du rectangle inaugure donc cette partie spécifique des manuels de géométrie, comme cas de mise en œuvre directe des notions établies et définies au préalable : surfaces, aires, équivalence, comparaison, mesure.

Ces énoncés initiaux constituent donc les premiers éléments de réponse aux questions posées, implicitement ou explicitement, par les auteurs au sujet des aires : qu'est-ce qu'une aire ? qu'appelle-t-on des aires égales ? comment compare-t-on des aires ? qu'est-ce que la mesure d'une aire et comment la détermine-t-on ? Les réponses apportées à ces questions sont d'autant plus importantes qu'elles vont servir de pierre angulaire à la théorie des aires rectilignes, puisque la détermination ou la comparaison des aires des autres figures en résultent, théorie qui s'étend jusqu'à la détermination de l'aire des polygones quelconques.

II.3.1.1 Intérêts scientifiques et pédagogiques de la notion, dans le contexte du XIX^{e} siècle

Historiquement, à travers les ouvrages de tout le XIX^{e} siècle que nous avons sélectionnés, un cheminement se dévoile, d'une vision très comparative à la façon d'Euclide, fondée sur la notion d'égalité ou de rapport des figures, chez les auteurs les plus anciens, jusqu'à une approche très numérique et calculatoire, niant même parfois l'idée de comparaison, dans les ouvrages les plus récents. Les deux citations suivantes illustrent bien cette évolution entre le début et la fin de notre période d'étude. La première est de Mauduit, qui exprime, au tournant du XIX^{e} siècle, une conception de la mesure d'une surface par comparaison :

> Une surface est une étendue qui a deux dimensions [...] et qu'il faut toujours connoître pour déterminer son rapport avec une autre surface prise pour mesure ou pour unité. (Mauduit, 1790, p. 69-70)

La deuxième, à la fin du siècle, tirée de l'ouvrage de Hue et Vagnier, montre une rupture assumée avec le principe de comparaison au profit de méthodes calculatoires :

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> La mesure d'une surface ne s'obtient pas en comparant directement la surface donnée à l'unité de surface adoptée. On mesure certaines longueurs et on fait, sur ces longueurs, des calculs qui varient avec la surface à mesurer. (Hue et Vagnier, 1896, p. 113)

L'écart entre ces deux citations illustre l'évolution que nous pouvons constater, en un peu plus d'un siècle, d'une vision essentiellement comparative de l'aire, à une autre, davantage pensée en termes de calculs.

Les deux aspects (mesure ou comparaison) de la question de l'aire du rectangle, mis en évidence dans les citations précédentes, sont issues de traditions géométriques diverses. En effet, l'aire du rectangle constitue un résultat fondamental, étudié et résolu depuis très longtemps, puisque des traces de calcul de l'aire du rectangle apparaissent déjà dans des tablettes mésopotamiennes datant d'il y a plusieurs millénaires [69]. La comparaison des aires des rectangles de même hauteur est présentée par Euclide dans le livre VI de ses *Éléments*, à la suite de la théorie des grandeurs proportionnelles développée dans le livre V. Cette proposition figure même en exergue de ce livre, comme toute première proposition. L'énoncé porte en réalité sur « les triangles et parallélogrammes qui sont sous la même hauteur », mais ce résultat a pour cas particulier celui des rectangles, dont la figure spécifique illustre d'ailleurs la proposition (voir figure II.34 p. 271).

1

Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases.

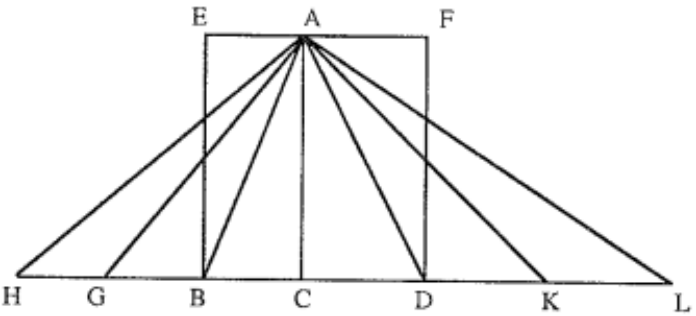


FIGURE II.34 – Rapport des triangles et parallélogrammes (et donc des rectangles) de même hauteur dans le livre VI des *Éléments* d'Euclide (1994, p. 155)

69. Il s'agit de procédures algorithmiques de résolution, en lien avec l'utilisation de tables métrologiques, et parfois rattachées à des problèmes de mesure des terrains. Le cadre de la figure du rectangle peut également donner lieu à des problèmes de recherche de grandeurs manquantes, certaines étant données (Moyon, 2008, p. 18-20 ; Proust et al., 2007, p. 197-198).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans le cadre de la géométrie pratique grecque, et en particulier dans les *Métriques* de Héron d'Alexandrie, au premier siècle de notre ère, le rectangle, parfois désigné par l'expression « domaine oblong », constitue une figure de référence, dont la procédure de calcul de l'aire est donnée dès le début de l'ouvrage, en tant que figure fondamentale à partir de laquelle les autres vont pouvoir être déduites :

> Mais commençons avec les mesures planes [...] puisqu'alors, précisément, toute surface est conçue à partir de deux extensions. Les comparaisons dédites surfaces sont produites relativement à un certain domaine à la fois rectiligne et rectangle. (Heron, 2014, p. 147)

Il poursuit en énonçant le problème I de son premier livre : « Soit un domaine oblong ABΓΔ ayant d'une part AB de 5 unités, d'autre part AΓ de 3 unités. Trouver son aire ». Le raisonnement menant au résultat s'appuie sur la figure d'un rectangle quadrillé avec 3 lignes et 5 colonnes de carreaux identiques (voir figure II.35 p. 272), qui montre que « l'aire de l'oblong sera de 15 unités » (Heron, 2014, p. 151). Ce problème a valeur d'exemple générique, adaptable au cas où le rectangle aurait d'autres dimensions.

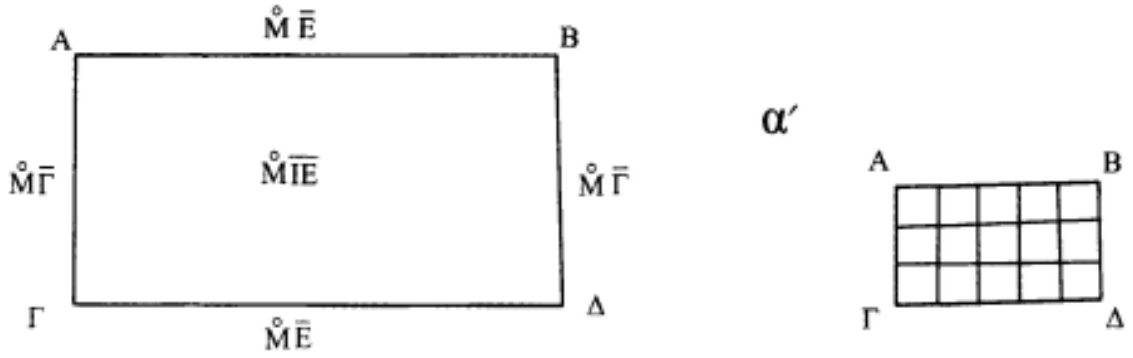


FIGURE II.35 – Figure associée au problème de l'aire du rectangle dans les *Métriques* de Héron d'Alexandrie (2014, p. 150)

Ces résultats sur la comparaison ou la mesure des rectangles sont connus des géomètres du XIX^e^ siècle, et donc des auteurs des manuels [70]. Ces derniers, dans leurs ouvrages, sont amenés à considérer la question primordiale de la preuve de l'énoncé initial sur l'aire du rectangle, que ce soit dans le cas de l'énoncé « formule » ou de l'énoncé « comparaison ». En effet, ce premier énoncé sert de clé de voûte à tout l'édifice construit à sa suite, en cela qu'il permet d'en déduire les résultats sur la détermination ou la comparaison des aires des autres figures rectilignes. Une difficulté se pose alors, en lien avec la nature des nombres : celle de l'incommensurabilité. En effet, si la preuve de l'énoncé de départ reste élémentaire quand les dimensions du

70. Pour la réception et l'influence des *Éléments* d'Euclide dans les livres d'enseignement du XIX^e^ siècle, voir (Baroux et Bühler, 2022).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

rectangle ont une commune mesure, elle s'avère plus complexe dans le cas contraire, et exige de la part des auteurs de recourir à d'autres formes de démonstration, voire d'autres domaines mathématiques. Ce résultat cache donc, derrière une apparente simplicité, une réalité mathématique moins aisément abordable.

L'état des lieux des connaissances et usages au sein de l'enseignement secondaire dans le courant du XIX^e^ siècle à propos du statut des nombres et des grandeurs a été étudiée par Bronner en 1997. Il décrit l'intervalle de temps allant de 1854 à 1947 comme une période « classique » durant laquelle l'enseignement des mathématiques du secondaire s'inscrit dans un environnement conceptuel, fondé sur une théorie de la mesure et des grandeurs incommensurables (Bronner, 1997, p. 50-86). Les auteurs répondent alors à un contrat numérico-géométrique implicite, dans lequel la construction des nombres se fait en lien étroit avec l'élaboration d'une théorie de la mesure, pas encore stabilisée (Chambris, 2008, p. 21). La formalisation des nombres réels est en cours dans les milieux savants à la fin du siècle, et l'institution scolaire doit composer avec ses propres contraintes (intelligibilité, respect des programmes et instructions), les nouveaux savoirs qui se mettent en place, et une culture des rapports héritée des traditions géométriques anciennes (Bronner, 1997, p. 86).

Le traitement dans les manuels de la question de l'aire du rectangle s'inscrit donc dans ce contexte historique, où le géométrique se heurte à des difficultés d'un autre ordre, touchant davantage à la conception des nombres, alors en pleine édification. L'élucidation du lien entre nombre et grandeur n'est pas encore stabilisée, et les auteurs doivent répondre à la double exigence de l'exactitude scientifique et de la clarté pédagogique, l'une comme l'autre demeurant relatives aux publics auxquels ils s'adressent. C'est par l'étude des principaux énoncés de savoir qu'ils proposent à ce sujet dans leurs ouvrages que nous nous employons à comprendre comment ils tentent d'y parvenir. De surcroît, à l'issue de cette analyse, nous observons déjà le rôle possible que peut jouer l'aire du rectangle à l'interface des domaines géométrique et numérique, ainsi qu'entre les motivations des auteurs et les intérêts de leurs lectrices et lecteurs.

II.3.1.2 Place de l'aire du rectangle dans les programmes et les manuels

Le premier constat au regard des programmes d'enseignement du XIX^e^ siècle, à partir de 1833, est très simple : ils évoquent tous la mesure de l'aire du rectangle, à l'exception des deux programmes des écoles primaires supérieures de 1881 et 1885, qui se réfèrent plus généralement à la « mesure des surfaces et des volumes » dans le cadre de l'enseignement du système métrique, ou à l'« évaluation des surfaces » dans le cadre de l'arpentage (D'Enfert, 2003c, p. 195, 223) (voir la sous-section I.1.2.3 p. 52).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans tous les autres cas, la formulation d'usage dans les textes officiels pour désigner cette partie du programme de géométrie est « Mesure de l'aire du rectangle », parfois précisée en « Théorèmes sur la mesure de l'aire du rectangle », ou présentée de façon disjointe sous la forme « Mesures des aires - Aire du (ou des) rectangle(s) » (Belhoste, 1995 ; D'Enfert, 2003c). Cette formulation se retrouve d'ailleurs dans les titres des parties concernant ce contenu dans les manuels du corpus, par exemple chez Dupuis (1857, p. 111) et Amiot (1859, p. 144).

Dans quelques programmes, l'accent est davantage mis sur la mesure que sur la notion d'aire, avec une expression raccourcie en « mesure du rectangle ». C'est le cas dans le programme des 3ème de la section des lettres de 1852 (Belhoste, 1995, p. 273), ainsi que celui des écoles primaires supérieures de jeunes filles de 1893 (D'Enfert, 2003c, p. 275). Cette dénomination apparaît de même dans plusieurs ouvrages du corpus, principalement dans ceux destinés à un public primaire ou féminin (Bovier-Lapierre, 1879, p. 81 ; Dalsème, 1880, p. 8 ; Guilmin, 1882, p. 135 ; Leyssenne, 1890, p. 206), éventuellement sous une forme un peu différente, axée sur l'action de « mesurer un rectangle », exprimée à l'infinitif (Desnanot, 1835, p. 31).

En revanche, d'autres textes officiels soulignent la notion d'aire, sans référence à la mesure, avec un contenu désigné par « aire du rectangle », « calcul de l'aire du rectangle », ou encore « règle pour évaluer l'aire d'un rectangle ». Les programmes concernés sont ceux des classes de 5ème en 1880 et 1902 (Belhoste, 1995, p. 457, 578), de 4ème en 1874 (Belhoste, 1995, p. 445), de 2ème année d'école primaire supérieure de garçons en 1893 (D'Enfert, 2003c, p. 261), ainsi que de seconde (sections C et D, soit les sections scientifiques) de 1902 (Belhoste, 1995, p. 598). Dans ces programmes, avec ce choix de formulation, une attention plus grande semble accordée à l'objet mathématique que représente l'aire, plutôt qu'à l'action de mesurer. Ce possible parti-pris concerne manifestement davantage l'enseignement secondaire, de tout niveau, ainsi que les garçons des école primaires supérieures, là où leurs homologues féminines, la même année, ne voient pas figurer le mot « aire » dans leur programme de géométrie. Là encore, cette manière de désigner ce résultat sur le rectangle est commune à certains ouvrages du corpus, de publics plutôt mixtes (écoles primaires supérieures et/ou écoles normales primaires et/ou collèges et lycées), comme ceux de Terquem (1829, p. 87), d'Eysseric et Pascal (1850, p. 104), et Puille (1855, p. 119).

La question de la mesure de l'aire du rectangle figure donc explicitement dans une très grande majorité des programmes d'enseignement de géométrie de la période étudiée. L'expression retenue pour la décrire est d'ores et déjà révélatrice de parti-pris possibles de la part des auteurs des programmes, que nous retrouvons dans les manuels pour

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des niveaux et des ordres d'enseignement similaires, penchant pour certains davantage vers l'action de mesurer, ou pour d'autres plus vers l'objet mathématique de l'aire. La formulation la plus courante reste néanmoins celle qui allie les deux aspects, et que nous observons également couramment dans les ouvrages de géométrie. Un autre terme apparaît également dans certains livres du corpus, en lien avec l'aire du rectangle : il s'agit de « surface ». Bert titre la partie *ad hoc* de son livre « Mesure de la surface du rectangle » (Bert, 1886, p. 23), et Salicis « Expression de diverses surfaces - Rectangle » (Salicis, 1869, p. 494). Le mot « surface » est dans ces cas-là pris pour synonyme d'« aire », sans tenir compte de la distinction usuelle qui est faite, déjà à l'époque, entre ces deux termes, le premier désignant la forme de la figure considérée, et le second sa grandeur. Enfin, ces désignations, que ce soit dans les programmes ou dans les titres des parties que l'on trouve dans les manuels, laissent dans l'ombre l'aspect « comparaison » des aires des rectangles, à l'exception de Méray, qui au contraire, insiste sur cette perspective en intitulant sa partie « comparaison des rectangles » (Méray, 1874, p. 87).

Il semble raisonnable de penser que le choix des mots et des expressions par les auteurs, dans le cadre d'un programme officiel ou celui d'un manuel d'enseignement, n'a rien d'anodin, et que par conséquent, les tendances lexicales révélées ci-avant relèvent de partis-pris conscients et de visions assumées. Cette étude des contenus des programmes à propos de l'aire du rectangle, mise en regard des titres des parties concernées dans les manuels, et prise sous un angle lexical, fait donc émerger une double approche de la question, par l'objet (l'aire), par l'acte (la mesure ou la comparaison), ou par les deux, en connexion avec le public concerné. Elle pointe également une réelle nécessité de distinguer par un vocabulaire précis des notions comme la surface et l'aire, parfois assimilées. C'est par une entrée plus fine dans les contenus des manuels que nous nous proposons d'explorer ces pistes plus avant.

II.3.1.3 Les énoncés de savoir relatifs au rectangle dans les manuels du corpus : nombre et évolution

La question de la mesure de l'aire du rectangle prend des formes différentes, qu'elle soit envisagée sous l'angle de la comparaison des surfaces ou sous celui d'une formule de calcul portant sur les longueurs de ses côtés. Dans les manuels du corpus, cela se concrétise par un nombre important d'énoncés de propositions ou de théorèmes distincts, mais aussi par des preuves spécifiques, ainsi que par des applications, simplement calculatoires ou en relation avec la vie courante.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Parmi les huit types d'énoncés recensés dans les manuels du corpus peut se distinguer celui, le plus fréquent, correspondant à la formule de calcul de l'aire du rectangle [71], de ceux traitant de la comparaison des rectangles entre eux, par équivalence ou par rapport. Voici la liste de ces énoncés, avec en premier lieu l'énoncé-formule, puis les théorèmes d'équivalence, suivis des théorèmes sur les rapports, des plus communs aux plus rares [72] :

— Énoncé 1 (formule de l'aire du rectangle) : « l'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur ».

— Énoncé 2 (équivalence des rectangles de mêmes dimensions) : « deux rectangles de même base et de même hauteur sont équivalents ».

— Énoncé 3 (équivalence d'un rectangle et d'une somme de rectangles de même base) : « si trois rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier rectangle est équivalent à la somme des deux autres ».

— Énoncé 4 (équivalence de rectangles dont le produit de la base par la hauteur est identique) : « deux rectangles sont équivalents lorsque le produit de leur base par leur hauteur est le même ».

— Énoncé 5 (rapport des aires de rectangles de même base et/ou hauteur) : « deux rectangles de même hauteur (resp. base) sont entre eux comme leurs bases (resp. hauteurs) ».

— Énoncé 6 (rapport des aires de rectangles quelconques) : « deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs ».

— Énoncé 7 (rapport des aires de rectangles semblables) : « deux rectangles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues ».

— Énoncé 8 (rapport des aires de rectangles quelconques - 2ème version) : « deux rectangles quelconques sont entre eux comme le rapport de leurs bases est au rapport inverse de leurs hauteurs ».

Les preuves recensées dans cette étude sont celles de l'énoncé initial sur la mesure du rectangle dans chaque ouvrage, qui peut être soit celui donnant la formule de l'aire en fonction des longueurs des côtés, soit celui comparant les aires des rectangles de même base et/ou hauteur. Les preuves de ces deux résultats peuvent être traitées seulement dans le cas où les dimensions du rectangle ont une mesure commune

71. Nous choisissons de désigner par « formule » toute relation donnant l'aire de la figure considérée en fonction de ses longueurs ou d'autres grandeurs, ainsi que toute procédure algorithmique de calcul équivalente.

72. Les énoncés sont donnés sous leur formulation la plus courante, de façon à pouvoir les identifier mathématiquement.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

et sont alors désignées par l'expression « cas commensurable », ou alors couvrir également le cas où la base et la hauteur n'ont pas de commune mesure. C'est le cas dit « incommensurable ». Enfin, dans l'un des ouvrages, cette preuve initiale n'est traitée que pour les parallélogrammes, puis par déduction sur les rectangles. Ceci nous mène à distinguer finalement cinq modèles de preuves suivants :

— Preuve 1 : Preuve de la formule de l'aire du rectangle dans le cas commensurable.

— Preuve 2 : Preuve de la formule de l'aire du parallélogramme dans le cas commensurable.

— Preuve 3 : Preuve de la formule de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable.

— Preuve 4 : Preuve du rapport des aires des rectangles de même base et/ou hauteur dans le cas commensurable.

— Preuve 5 : Preuve du rapport des aires des rectangles de même base et/ou hauteur dans le cas incommensurable.

Enfin, d'autres énoncés ont été retenus dans cette étude, qui concernent les applications directes de la mesure de l'aire du rectangle, dans des cas numériques simples, ou dans des exemples se référant à des situations concrètes. Nous y avons rajouté des tableaux de calcul des aires de rectangles, ainsi que la construction d'un carré équivalent à un rectangle, communément appelée « quadrature du rectangle ». D'autres énoncés des manuels concernent le rectangle, de façon plus ou moins lointaine, mais nous avons fait le choix de ne conserver que les applications découlant le plus directement de l'énoncé originel de la mesure de l'aire du rectangle. Nous les avons classés en commençant par les applications numériques directes, des plus aux moins répandues, puis les applications pratiques suivant le même ordre, pour finir avec la quadrature et les tableaux de calculs :

— Application 1 : Calculer l'aire d'un rectangle de dimensions données dans les nouvelles unités de mesure (système décimal).

— Application 2 : Calculer l'aire d'un rectangle de dimensions données dans les anciennes unités de mesure.

— Application 3 : Calculer le côté d'un rectangle dont l'aire et l'autre côté sont donnés.

— Application 4 : Calculer le rapport des aires de deux rectangles de dimensions données.

— Application 5 : Calculer l'aire d'un rectangle dans une situation liée à la vie courante (planchers, murs, tableaux, etc.).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Application 6 : Calculer l'aire d'un rectangle dans un contexte spécifique à l'arpentage (champs, terrain, etc.) [73].

— Application 7 : Cas de divisions (ou rapports) d'aires de rectangles dans des situations liées à la vie courante (tuiles, carreaux, etc.) .

— Application 8 : Quadrature du rectangle (construire un carré équivalent à une rectangle donné).

— Application 9 : Tables de calcul d'aires de rectangles (anciennes ou nouvelles unités de mesure).

La présence ou non de ces divers énoncés dans les manuels forme le socle de l'analyse de leurs contenus à propos de la mesure de l'aire du rectangle.

Questions :

— **La question de l'aire du rectangle montre-elle une permanence de son traitement au cours du temps dans les manuels du corpus ?**

— **Peut-on observer des particularités dans la manière d'aborder cette question selon les manuels, liées aux publics auxquels les ouvrages sont destinés, et aux périodes considérées ?**

73. Il nous a semblé important de distinguer ce domaine d'application spécifique compte-tenu de la tradition des agrimenseurs en géométrie pratique et de l'importance culturelle et sociale des pratiques d'arpentage, encore au XIX^{e} siècle (Sonnet, 1887). De plus, ces applications sont distinctes dans les ouvrages de trois auteurs.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode : Nous recensons dans les 40 ouvrages du corpus les 22 énoncés de savoir ainsi sélectionnés (8 énoncés, 5 preuves et 9 applications), données que nous analysons dans un premier temps de façon globale, notamment en examinant le nombre total de tels énoncés dans chacun des ouvrages, classés de façon chronologique. C'est le diagramme semi-temporel (appelé ainsi car l'axe des abscisses n'est pas un axe de temps, mais un axe faisant figurer les ouvrages du corpus, désignés par leurs auteurs, de façon chronologique) obtenu en bleu sur la première figure. Dans les calculs des droites de régression linéaire, chaque auteur est alors remplacé par une abscisse x représentant son rang dans la liste (chronologique) des ouvrages, de 1 à 40.
Nous complétons ce panorama global par une recension plus fine des énoncés présentés dans les ouvrages, qui sert de base à l'étude à suivre, présentée dans le second graphique.
Résultat : Voir les diagrammes II.36 p. 280 et II.37 p. 281.

Lecture et analyse : Sur le premier diagramme, la courbe en bleu montre beaucoup de variations suivant les ouvrages, contenant de 3 à 10 énoncés concernant la mesure du rectangle parmi les 22 retenus dans cette étude. Mais la droite de régression linéaire en pointillés rouges souligne à la fois la stabilité globale de ce type de contenus, du fait d'un coefficient directeur pratiquement nul, ainsi qu'une moyenne un peu au-dessus de 5 énoncés. Quant à la courbe en orange, elle montre l'évolution du nombre de preuves au cours du temps, variant ponctuellement de 0 à 3, mais globalement stable autour d'une valeur moyenne proche de 1.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

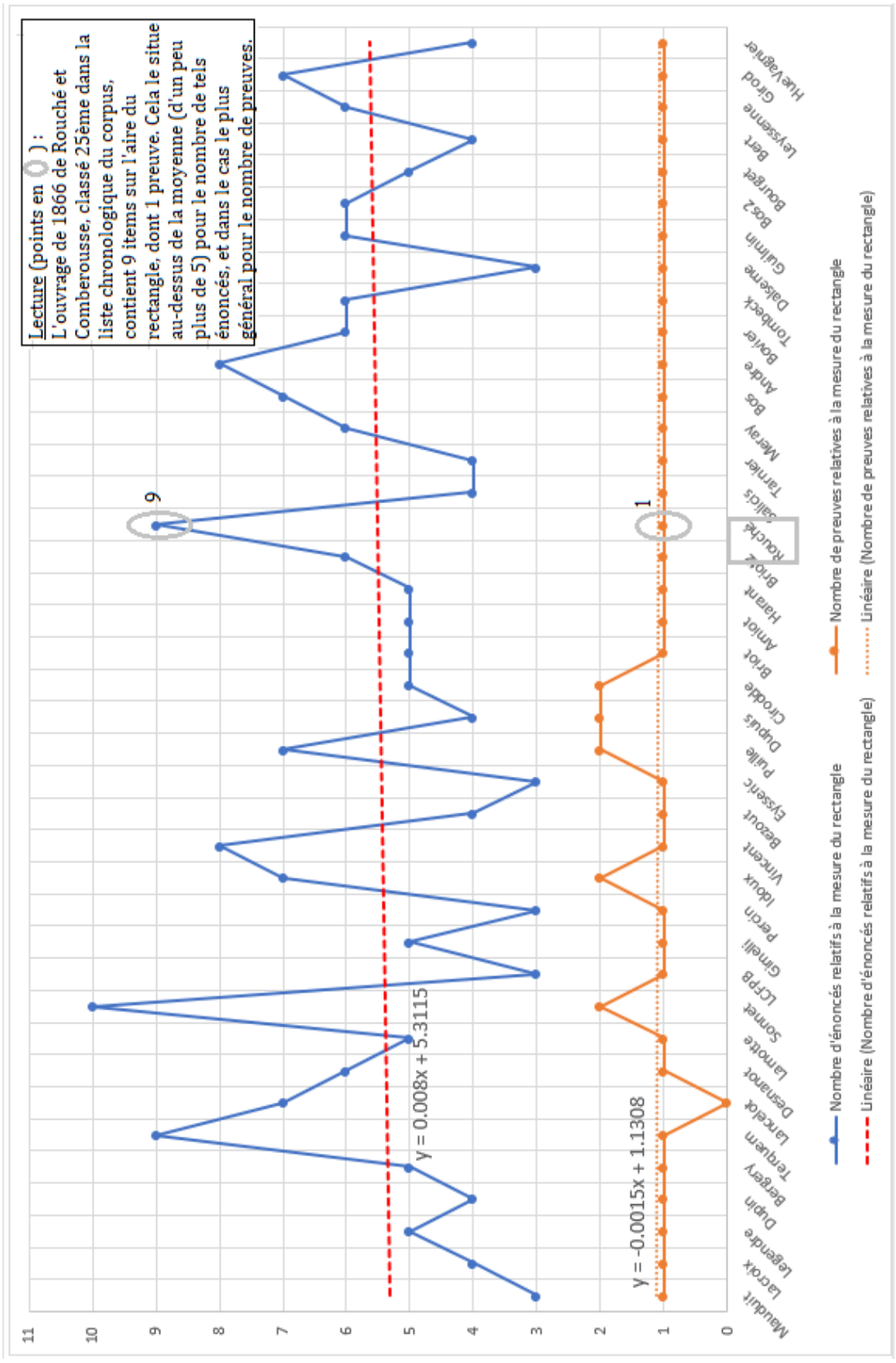


FIGURE II.36 – Diagramme semi-temporel montrant l'évolution du nombre d'énoncés associés à l'aire du rectangle dans les ouvrages du corpus ainsi que le nombre de preuves

Licence CC BY-NC-ND 3.0

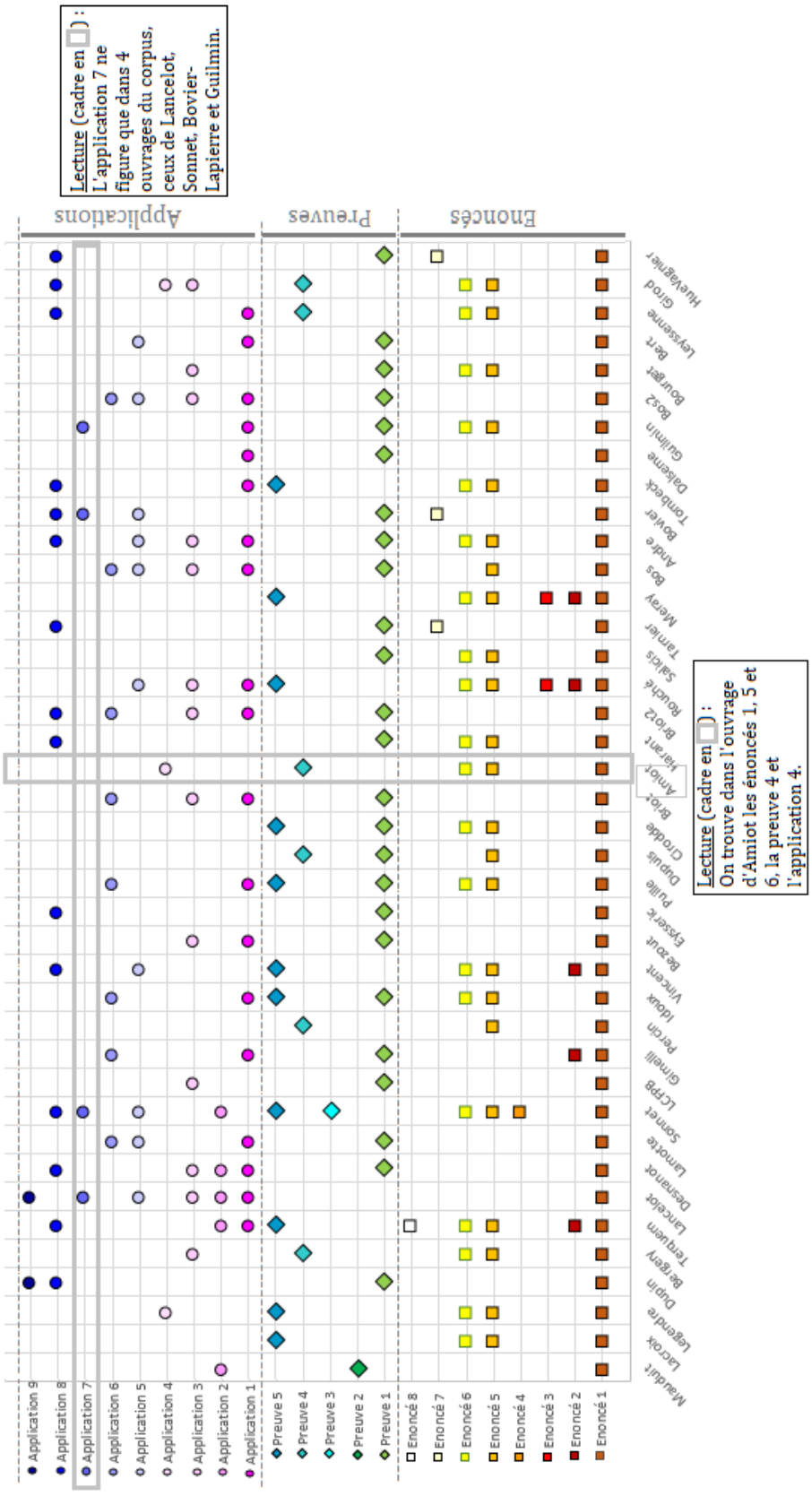


FIGURE II.37 – Diagramme montrant la répartition des items associés à l'aire du rectangle dans les ouvrages du corpus

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Quelques éléments peuvent être relevés à la lecture directe du second graphique. Tout d'abord, certains items sont marqués par leur rareté, alors que d'autres se distinguent par leur présence dans de nombreux ouvrages. Parmi les énoncés, les plus courants sont la formule de l'aire du rectangle (énoncé 1, dans tous les manuels), et les propositions sur les rapports des rectangles de même base et/ou hauteur et de même produit de la base par la hauteur (énoncés 5 et 6, dans la moitié des manuels environ). Les autres sont plus anecdotiques, avec des occurrences dans 1 à 4 livres au maximum. De la même façon, la preuve la plus répandue est celle de la formule de l'aire du rectangle dans le cas commensurable (25 occurrences), suivie par celles du rapport des aires des rectangles de même base et/ou hauteur, dans le cas incommensurable (relevée 11 fois), puis dans le cas commensurable (relevée 6 fois). Les autres preuves ne concernent qu'un ou deux ouvrages. Il est à noter que parmi les auteurs qui choisissent de prouver la formule de l'aire du rectangle comme énoncé de départ, c'est le choix de la preuve dans le cas le plus simple qui est majoritairement choisie, alors que pour ceux qui débutent la théorie par le théorème sur les rapports des aires des rectangles, le choix majoritaire est la preuve dans le cas où les côtés n'ont pas de commune mesure.

En plus de donner des informations sur la fréquence d'apparition de certains énoncés dans le corpus, le graphique montre aussi des tendances temporelles. Parmi les applications du théorème recensées dans cette étude, quelques unes se montrent plus rares que les autres, comme les applications 2, 4, 7 et 9. Celles numérotées 4 et 7 concernent les applications de calcul aux rapports ou divisions de rectangles entre eux. Elles sont peu fréquentes mais apparaissent à n'importe quel moment de la période. En revanche, celles numérotées 2 et 9 sont situées assez précisément dans le temps, avant les années 1840. La 2 correspond au calcul numérique de l'aire d'un rectangle avec les anciennes unités de mesure. Il est donc logique de ne la trouver qu'au début du siècle, puisqu'à partir de 1837, la nouvelle législation impose l'utilisation du nouveau système métrique. La 9, que l'on trouve deux fois seulement, correspond aux tables de calcul des aires de rectangles, et dans l'un des deux livres (celui de Lancelot (1833)), ces tables sont données dans les anciennes unités de mesure. L'autre table, bien plus courte et sans unités de mesure, figure chez Dupin (1828, p. 126). Il s'agit davantage d'une table de multiplication standard, qu'il recommande d'utiliser au besoin dans les ateliers, voire de l'apprendre par cœur. Quoiqu'il en soit, l'usage de telles tables se perd très manifestement au cours du temps, car aucune autre n'est présente dans les ouvrages ultérieurs.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— L'analyse du premier diagramme confirme la stabilité de la présence de l'étude de la mesure de l'aire du rectangle, observée à travers les programmes (voir la sous-section I.1.2.3 p. 52), dans les manuels d'enseignement, sur toute la période et pour tous les publics, puisque les ouvrages du corpus s'adressent aux lectorats de tout ordre et tout niveau d'enseignement.

— Cette analyse semble mettre en lumière deux niveaux de traitement de la question de l'aire du rectangle : un premier qui a pour focale la formule de calcul, accompagné d'une preuve à la portée de tous, et un second centré sur la comparaison des aires, associé à une preuve plus ardue. L'étude de ces deux types de preuve, chacune s'adressant davantage à un public qu'à un autre, est présentée dans une section ultérieure (voir la section III.3.1 p. 599).

— Les pratiques de calcul concernant l'aire du rectangle relatives aux anciennes unités de mesure ou encore à l'usage de tables ne perdurent pas au cours du temps.

La figure du rectangle et son aire sont omniprésents dans les programmes d'enseignement du XIX^{e} siècle, ainsi que dans les manuels du corpus, comme le montre l'analyse quantitative réalisée. En tant que résultat déterminant pour l'établissement des aires des figures rectilignes, la mesure ou la comparaison des rectangles constitue ainsi un spectre pertinent pour analyser les contenus sur les aires que les manuels de notre corpus exposent. De plus, le traitement de cette question bénéficie d'un double héritage, en géométrie spéculative comme en géométrie pratique, la faisant pencher vers une approche par comparaison, ou davantage par le calcul. D'ailleurs, dans les programmes comme dans les manuels, les auteurs choisissent parfois de mettre plutôt le focus sur l'action de mesurer, ou alors sur l'objet mathématique que constitue l'aire. Cette double approche apparaît nettement à travers l'analyse quantitative des contenus, et se trouve manifestement associée à une preuve déclinable selon deux niveaux mathématiques, suivant les publics auxquels les manuels se destinent. En outre, quelques tendances temporelles se dégagent, mises en évidence par le diagramme II.37 (p. 281), comme la présence de la formule de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable, très située dans le temps (au tournant des années 1840), ou le théorème du rapport des rectangles semblables, qui apparaît plus tardivement à partir des années 1870.

Ces premières observations révèlent d'ores et déjà en partie le rôle d'interface joué par la géométrie des aires entre l'approche plus numérique de la mesure et celle plus géométrique de la comparaison, et même entre savoirs, en tant que connaissance

Licence CC BY-NC-ND 3.0

théorique d'une notion, et savoir-faire, comme acquisition de procédures techniques (voir figure II.38 p. 284). Elles restent désormais à mettre en lien avec celles provenant des deux autres thèmes d'étude retenus.

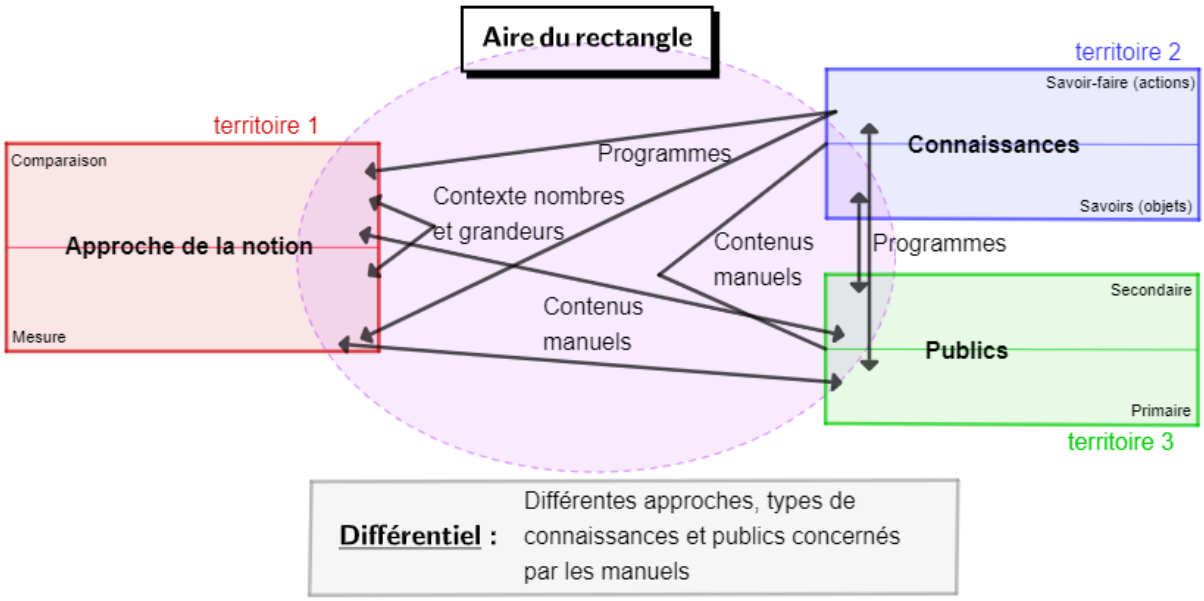


FIGURE II.38 – Schéma montrant en quoi le cas de l'aire du rectangle, à travers son contexte historique, sa place dans les programmes et les contenus associés dans les manuels, est à l'interface des approches qui lui sont réservées, des connaissances qui lui sont liées et des publics concernés

II.3.2 Le théorème de Pythagore

Dans les manuels de géométrie du XIX^e siècle, le théorème qui sera progressivement désigné comme « théorème de Pythagore » [74] est traité de façon abondante et variée. Laissons Salicis, qui dispense le cours de géométrie de l'Association pour l'enseignement secondaire des jeunes filles à la Sorbonne en 1868 [75], en parler :

> Nous avons déduit cette conclusion comme conséquence de la similitude, mais on peut en démontrer directement l'exactitude par une démonstration géométrique.
> Nous croyons bien de le faire ici, parce que la découverte de cette démonstration a marqué dans l'histoire de la philosophie, et que Pythagore est le premier à pouvoir en revendiquer l'honneur.
> Quant à la démonstration elle-même, elle a été faite depuis d'un grand

74. Nous étudions la manière dont les auteurs du XIX^e siècle le désignent, ainsi que la forme sous laquelle il apparaît dans les programmes, dans la sous-section suivante (II.3.2.1 p. 285).
75. Pour le contexte de l'enseignement secondaire de jeunes filles dispensé à la Sorbonne à la fin des années 1860, voir page 202.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> nombre de manières, tout en conservant une sorte de célébrité sous le nom de « démonstration du carré de l'hypoténuse ».
> Celle-ci, la plus simple que je connaisse, est toute récente. (Salicis, 1869, p. 567)

À travers le propos de Salicis apparaît la question de la désignation du théorème, en référence ou non au nom de Pythagore, et de son caractère historique, voire légendaire. La référence aux différentes preuves possibles et à la similitude laisse entendre que ce théorème puisse être exposé dans le cadre de plusieurs théories et prouvé en mobilisant divers domaines mathématiques. Enfin, la recherche d'une preuve à la fois accessible et nouvelle révèle la double préoccupation de l'auteur de prendre en compte les recherches récentes tout en mettant ce théorème à la portée de tous, à l'intersection entre les pratiques de recherche et celles d'enseignement. Le théorème se situe manifestement au carrefour des ces considérations, et potentiellement à l'interface des systèmes théoriques internes à la géométrie, mais aussi des autres domaines des mathématiques. Salicis le présente également comme un pont entre tradition et modernité en géométrie, en tant que résultat connu depuis longtemps, mais encore nouvellement démontré.

Ces différentes pistes sont explorées à travers l'étude du théorème, considéré à travers l'analyse de sa place dans les programmes ainsi que dans les manuels du corpus et examiné sous ses aspects scientifiques et pédagogiques dans le contexte du XIX^{e} siècle.

II.3.2.1 Place et désignation du théorème de Pythagore dans les programmes et les manuels

Le théorème de Pythagore a une longue histoire et a été diversement nommé au cours du temps. Depuis l'Antiquité, il a été entre autres désigné de « pont-aux-ânes » ou encore de « théorème de la jeune mariée », et est aujourd'hui surtout connu comme le « théorème de Pythagore » (Euclide, 1990, p. 110, 284, 310-321). Dans les programmes d'enseignement du XIX^{e} siècle, il porte le plus souvent le nom de « théorème du carré construit sur l'hypoténuse [du triangle rectangle] », (programme de l'enseignement scientifique des lycées, 1865, (Belhoste, 1995, p. 397)) ou une forme proche comme « proposition du carré de l'hypoténuse » (questions de sciences au bac ès lettres, 1849, Belhoste 1995, p. 249), parfois encore abrégée en « carré de l'hypoténuse » (programme de sciences de l'enseignement secondaire des jeunes filles, 1882, (Belhoste, 1995, p. 469)). D'après l'étude des programmes réalisée dans la sous-section I.1.2.3 (p. 52), il apparaît ainsi dans 15 des 25 plans d'étude examinés, dans le secondaire classiques masculin de 1852 à 1874, puis en 1902, dans l'enseignement spécial (puis moderne) à partir de 1882, dans les programmes féminins (secondaire et EPS) des années 1880-90, et dans celui des EPS de garçons de 1893. Il est prévu la plupart du temps de l'enseigner

Licence CC BY-NC-ND 3.0

à des élèves de 14 à 15 ans, soit l'équivalent de la classe actuelle de 3ème (voir tableau I.5 p. 53). Ceci dit, sa présence dans les programmes est parfois difficile à détecter du fait d'une dénomination plus implicite, comme « propriétés particulières du triangle rectangle », qui peut le contenir ou non, le choix étant sans doute laissé à l'appréciation des professeurs. On retrouve par exemple cette formulation dans le programme de l'enseignement des mathématiques préparatoires dès 1833 (Belhoste, 1995, p. 133) ou dans celui des écoles normales primaires dès 1838 (D'Enfert, 2003c, p. 100) [76].

Dans les programmes du secondaire comme du primaire entre 1833 et 1902, il n'est jamais en revanche associé explicitement au nom de « Pythagore ». En revanche, si les désignations mises en évidence précédemment se retrouvent majoritairement dans les manuels du corpus, le nom du savant est avancé dans huit ouvrages (voir p. 209). C'est le cas dans le manuel de Terquem (1829, p. 105), et dans celui de Cirodde, qui exprime le nom et la paternité du théorème en ces termes : « Cette proposition est connue en géométrie sous le nom de théorème de Pythagore, du nom du philosophe qui l'a découverte » (Cirodde, 1836, p. 198), mais aussi de Harant (1863, p. 124), puis de Bovier-Lapierre. Ce dernier précise en note : « Ce théorème est souvent désigné par le nom de *théorème de Pythagore*, parce que ce philosophe grec en avait trouvé la [*sic*] démonstration » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 90). D'autres auteurs désignent ce théorème d'une manière plus originale, comme Tarnier, qui parle de la « propriété fondamentale du triangle rectangle » (Tarnier, 1872, p. 311) et Dalsème qui l'énonce en tant que « Propriété remarquable du triangle » en précisant dans le sommaire de la leçon qu'il s'agit de la « Précieuse propriété de l'équerre » (Dalsème, 1880, p. 15).

Ces diverses désignations ne sont pas seulement de simples différences de langage. En plus d'attribuer ou non la paternité du théorème à Pythagore, elles renferment des conceptions de la proposition parfois très différentes, que nous retrouverons dans l'étude plus spécifique de ses énoncés et de ses preuves.

II.3.2.2 Les énoncés et les preuves relatifs au théorème de Pythagore dans les manuels du corpus : nombre et évolution

La manière d'énoncer le théorème que nous appellerons « de Pythagore » par la suite pour plus de commodité, et conformément à l'usage contemporain dans l'enseignement des mathématiques, varie peu à travers le temps. Il en existe néanmoins une version plus générale incluant les cas des angles obtus et aigus, en plus du cas de l'angle droit. Cette version apparaît explicitement dans certains programmes comme « Relation entre

76. La propriété du « carré de l'hypoténuse » est également mentionnée parmi les questions de mathématiques posées au baccalauréat ès lettres de 1840 et de 1849, dans Belhoste 1995, p. 155, 249.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

le carré construit sur le côté d'un triangle, opposé à un angle droit ou aigu ou obtus, et les carrés construits sur les deux autres côtés » (programme de l'enseignement scientifique des lycées, 1852, classe de 3ème (Belhoste, 1995, p. 285)) ou encore « Théorèmes relatifs au carré du nombre qui exprime la longueur du côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu ou obtus » (programme de l'enseignement scientifique des lycées, 1865 (Belhoste, 1995, p. 397)).

Dans notre étude, ces trois énoncés sont pris en compte et distingués dans le recensement des occurrences du théorème dans les ouvrages du corpus. Ce travail portant sur les aires, nous avons pris soin de ne retenir que les propositions énoncées en termes d'égalité de surfaces (que nous désignerons par la suite de version « aire » du théorème) et non de longueurs de côtés (appelée version « ligne »). En plus de ces énoncés, nous nous intéressons aux types de preuve de la version du théorème dans le cas du triangle rectangle, ainsi qu'à certains de ses corollaires ou applications, détaillés ci-après. Voici la liste des énoncés et corollaires repérés dans les manuels du corpus [77] :

— Énoncé 1 (théorème de Pythagore avec angle droit) : « Le carré construit sur l'hypoténuse [d'un triangle rectangle] est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés ».

— Énoncé 2 (théorème de Pythagore généralisé avec angle aigu) : « Le carré construit sur un côté opposé à un angle aigu est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, diminuée de deux fois le rectangle qui aurait pour dimensions l'un des côtés de l'angle aigu et la projection de l'autre côté sur le premier ».

— Énoncé 3 (théorème de Pythagore généralisé avec angle obtus) : « Le carré construit sur un côté opposé à un angle obtus est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, augmentée de deux fois le rectangle qui aurait pour dimensions l'un des côtés de l'angle aigu et la projection de l'autre côté sur le premier ».

— Corollaire 1 : Utilisation du théorème de Pythagore pour prouver la formule de Héron [78] (pas d'énoncé type, formule permettant de calculer l'aire d'un triangle connaissant seulement les longueurs de ses trois côtés, sans calcul préalable d'une (ou des) hauteur(s) (Heron, 2014)).

77. Les énoncés sont donnés sous la formulation la plus courante, de façon à pouvoir les identifier mathématiquement. La question du vocabulaire employé, assez variable, sera étudiée plus précisément dans la sous-section III.2.2.4 p. 495.

78. Cette dénomination correspond à celle en usage actuellement, mais le résultat n'est pas désigné ainsi dans les livres du corpus. Aucun auteur ne cite d'ailleurs Héron d'Alexandrie dans son ouvrage.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Corollaire 2 (théorème de Pythagore généralisé aux polygones) : « Le polygone construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des polygones construits sur les deux côtés de l'angle droit ».

— Corollaire 3 (théorème de Pythagore par différence) : « Le carré construit sur l'un des côtés de l'angle droit est égal à la différence des carrés construits sur les deux autres côtés ».

— Corollaire 4 (théorème de Pythagore dans un triangle isocèle ou sur la diagonale d'un carré) : « Le carré construit sur la diagonale d'un carré est double de celui-ci ».

Quant aux preuves repérées dans les manuels, nous en avons distingué neuf types, identifiées et désignées suivant les pré-requis ou la description du procédé qu'elles utilisent (des précisions mathématiques sur ces procédés seront données lors de l'étude de certaines de ces démonstrations). Nous les présentons dans l'ordre chronologique d'apparition dans les manuels du corpus, et dans l'ordre de ses pages, si elles figurent dans un même livre[79] :

— Preuve 1 : Preuve dans un cercle avec les propriétés des cordes (si deux cordes se coupent en un point à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cercle, elles se coupent en parties inversement proportionnelles, résultat appliqué à un diamètre et à une corde qui lui est perpendiculaire).

— Preuve 2 : Preuve par la théorie des triangles semblables (la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse partage le triangle rectangle en deux autres triangles rectangles semblables, puis exploitation des relations sur les côtés homologues).

— Preuve 3 : Preuve par la théorie des triangles semblables et une propriété des proportions (même début que la preuve 2, mais utilise pour conclure une proposition indiquant que si les carrés sont proportionnels aux longueurs, l'égalité d'une longueur avec la somme des deux autres implique la même égalité sur les carrés).

— Preuve 4 : Conséquence de la propriété d'égalité de la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme et de la somme des carrés de ses côtés, dans le cas où le parallélogramme est un rectangle.

— Preuve 5 : Conséquence du théorème de Ptolémée[80] dans le cas où le parallélogramme est un rectangle.

79. Par exemple, le type de preuve n°1 apparaît dans le livre de Mauduit (1790), et c'est la première preuve du théorème rencontrée dans l'ordre des pages de son ouvrage. Dans ce même manuel, les preuves 2 à 6 se suivent dans cet ordre.

80. Désigné ainsi à l'heure actuelle, mais pas dans les ouvrages de l'époque, il affirme qu'un quadrilatère non croisé est inscriptible dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Preuve 6 : Même début que la preuve 2, puis utilisation du rapport des aires des triangles semblables (comme les carrés de leurs côtés homologues).

— Preuve 7 : Preuve d'Euclide (proposition 47, livre I) reposant sur les cas d'égalité des triangles.

— Preuve 8 : Preuve par la méthode des « puzzles », par assemblage et déplacement de pièces, ou encore par découpage et recomposition.

— Preuve 9 : Preuve visuelle ou encore par quadrillage.

Le recensement des énoncés, corollaires et preuves listés dans le paragraphe précédent a donné lieu à une première analyse statistique, qui a pour objectif de mesurer la place du théorème dans les manuels, sa permanence au cours du temps, et les formes diverses que peuvent prendre les connaissances qui lui sont relatives dans les ouvrages du corpus.

Questions :

— **Dans quelle mesure le théorème de Pythagore est-il abordé dans les manuels du corpus, et suivant quelle évolution temporelle ?**

— **Le traitement du théorème (forme de ses énoncés, corollaires possibles et preuves proposées) diffère-t-il selon les manuels considérés, en lien avec les publics auxquels les ouvrages se destinent, et évolue-t-il au cours du temps ?**

Méthode : Le premier diagramme décrit le nombre d'énoncés et de preuves présents dans les ouvrages du corpus de 1790 à 1900. La série en bleu représente le nombre d'occurrences des énoncés, corollaires et preuves dans chacun des ouvrages, repérés en abscisses par les manuels du corpus, classés chronologiquement, et la série en orange uniquement le nombre de types de preuves présents dans chaque manuel. Les droites d'ajustement linéaire permettent de voir si la tendance globale de chacune des séries est à la hausse (quand le coefficient directeur est positif), ou à la baisse (quand il est négatif), et d'estimer les valeurs moyennes.
La seconde figure offre une vision globale de la présence des différents énoncés, corollaires ou types de preuves, relatifs au théorème dans les ouvrages étudiés, de façon chronologique. Ces différents énoncés de savoir et ces diverses preuves sont matérialisées par des points.
Résultat : Voir diagrammes II.39 p. 290) et II.40 p. 291.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Carène GUILLET| Thèse de doctorat | Université de Limoges
Licence CC BY-NC-ND 3.0

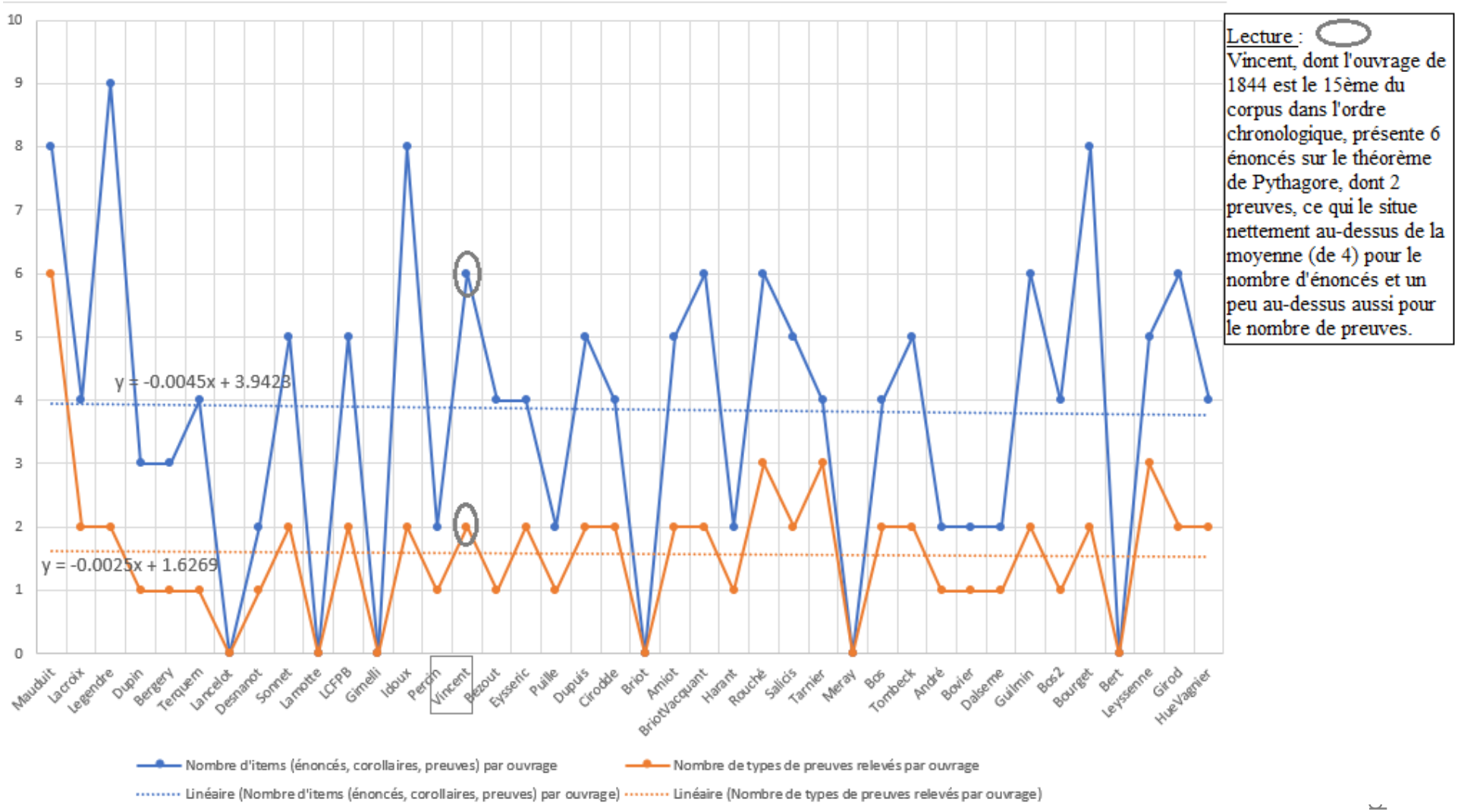


FIGURE II.39 – Évolution du nombre d'énoncés et de types de preuves concernant le théorème de Pythagore dans les livres du corpus en fonction du temps

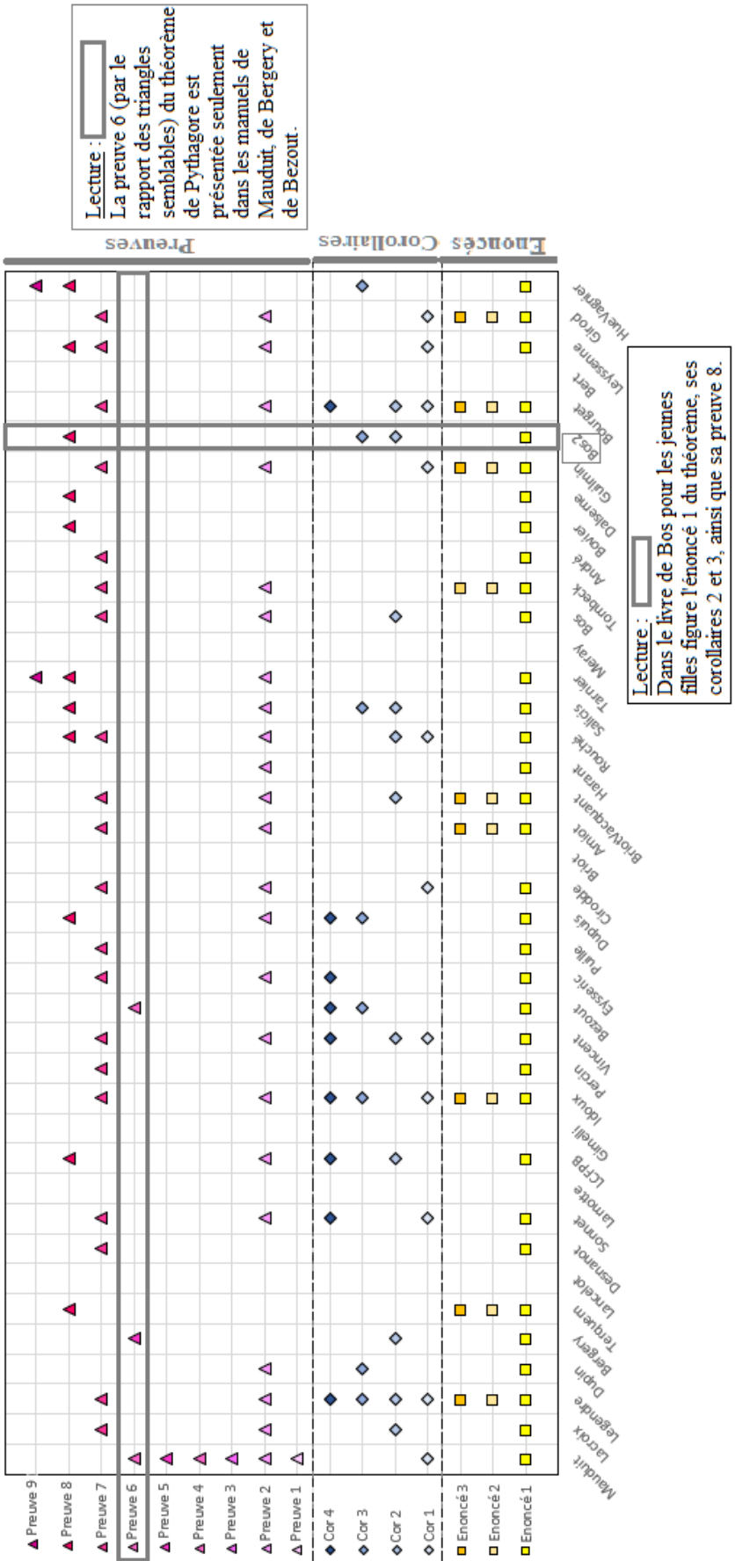


FIGURE II.40 – Recensement des énoncés, corollaires et preuves du théorème dans les livres du corpus qui traitent du théorème, en fonction des auteurs et du temps – Note : « Cor » est l'abréviation pour « corollaire »

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : Sur le premier diagramme, nous pouvons constater la relative stabilité de la présence du théorème dans les manuels au fil du temps, car les deux droites ont des coefficients directeurs très proches de 0. Une petite tendance à la baisse apparaît néanmoins à l'examen des droites d'ajustement linéaire, mais de façon peu significative car leurs pentes sont très légèrement négatives.
Le second diagramme confirme cette permanence de l'étude du théorème sur la période considérée, ainsi que de ses conséquences, et ce pour tous les ordres et niveaux d'enseignement. La plupart des énoncés et preuves ne montrent pas de tendance temporelle, si ce n'est le corollaire 4 (cas particulier d'un triangle isocèle), principalement exposé dans la première moitié de la période, et la preuve 9 (par quadrillage ou visuelle), qui apparaît en fin de période.
Les deux figures mettent en évidence six ouvrages, sur les quarante du corpus considéré, n'évoquant pas du tout ce résultat, visualisables en tant que points de la figure II.39 d'ordonnée 0 et par des colonnes sans point sur la figure II.40. Dans le détail, les livres dans lesquels le théorème n'est pas du tout évoqué sont principalement les livres d'arpentage ou d'applications de la géométrie (au lever de plans, au nivellement ou encore à la triangulation) comme ceux de Lancelot (1833), Lamotte (1839), de Gimelli (1841) ou encore de Briot (1859). Le sujet plus spécifique de ces livres peut justifier en soi le fait que le théorème n'y soit pas présenté, en tout cas sous sa version « aire », car trop éloigné du propos. Il ne figure pas non plus dans le livre de géométrie expérimentale de Paul Bert. En effet, ce dernier fait le choix de ne pas présenter ce théorème, sans doute estimé trop difficile par rapport au niveau des contenus qu'il propose, puisque son projet est de fournir à « la masse des enfants des écoles primaires » qui n'ont à leur « disposition que quelques leçons, une demi-année, pour apprendre un peu de Géométrie » un manuel « se suffisant à lui-même » (Bert, 1886, p. viii).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Le dernier ouvrage de nature différente que ceux évoqués ci-avant, et qui ne présente pas le théorème non plus, est celui de Charles Méray (1874). Le public visé par son manuel n'est pas explicitement désigné mais il a été utilisé dans des écoles primaires supérieures ou normales dans les alentours de Dijon (D'Enfert, 2005, p. 253). Son ouvrage est marqué par un caractère délibérément innovant, par sa rupture avec les axiomes euclidiens et l'abandon de la distinction entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace (Méray, 1874, p. xi-xii). S'il ne présente pas le théorème sous sa version « aire » dans la partie « mesure des aires planes » de son ouvrage, il l'énonce néanmoins sous sa version « ligne » dans la partie « propriétés fondamentales des triangles », chapitre « triangles rectangles ». L'absence de ce théorème sous sa forme relative aux comparaisons des aires est difficile à expliquer dans le contexte de l'enseignement de la géométrie de son époque, où il constitue une sorte de « classique », mais répond néanmoins à une tendance générale de son livre. En effet, Méray s'occupe très peu de la mesure ou de la comparaison des aires dans son manuel : ce thème occupe juste un peu plus de 3% des sections et des pages, avec seulement 30 énoncés relatifs à ce sujet, ce qui est proche des valeurs minimales relevées dans tout le corpus (voir le tableau II.10 de la sous-section II.2.2.2 p. 220).

Conclusion :

— L'analyse du premier diagramme confirme la stabilité de la présence du théorème de Pythagore dans les manuels d'enseignement sur toute la période.

— Le théorème de Pythagore est présenté dans une très grande majorité des manuels de géométrie du corpus, et ce pour tous les publics.

— Le traitement de cette question est assez uniforme dans le temps, puisque la plupart des énoncés, corollaires et preuves sont présents sur l'ensemble de la période d'étude. Deux exceptions sont à noter néanmoins : le cas particulier du triangle rectangle isocèle est explicité en début de période et les preuves visuelles ou par quadrillage voient le jour à la fin.

La permanence du théorème dans les manuels au cours de la période est à rapprocher de sa présence dans pratiquement tous les programmes de l'enseignement secondaire depuis 1852, et un peu plus tardivement pour l'enseignement primaire supérieur (voir p. 286). Cependant, même si le théorème ne figure pas explicitement dans les programmes de l'enseignement primaire (et primaire supérieur) avant 1893 (voir tableau I.5 p. 53), cela n'empêche pas de nombreux auteurs de l'inclure dans leurs manuels pour

Licence CC BY-NC-ND 3.0

cet ordre d'enseignement avant cette date. Son importance pour l'enseignement de la géométrie en général, et de la géométrie des aires en particulier, est donc indéniable pour les deux ordres d'enseignement, au moins quantitativement. Nous proposons désormais de mesurer son intérêt pédagogique pour tous les publics scolaires à travers ce qu'en disent les auteurs dans leurs ouvrages, ainsi que son intérêt scientifique dans le contexte de recherche de l'époque.

II.3.2.3 Intérêts scientifiques et pédagogiques du théorème, dans le contexte du XIXe siècle

Comme nous venons de le voir dans la sous-section II.3.2.2 (p. 286), le théorème de Pythagore est remarquable par son omniprésence dans les manuels et dans les programmes, tout au long du siècle et pour tous les publics. Cette permanence dans l'enseignement est manifestement le fruit de son intérêt pédagogique, comme le soulignent tout particulièrement deux de nos auteurs, qui citent le théorème dès leur introduction, comme un exemple emblématique de la méthode qu'ils proposent. Tarnier l'évoque longuement dans son « exposé de la méthode », préambule à son ouvrage, pour distinguer les procédés relevant de sa nouvelle « géométrie pratique » comparativement à la géométrie théorique habituelle (Tarnier, 1872, p. viii-x). Quant à Bovier-Lapierre, il présente dans son introduction les vertus de la méthode intuitive en géométrie, qui d'après lui permet de faire appréhender aux enfants les vérités géométriques, y compris celles « qui ne se manifestent pas avec la même spontanéité. [...] Nous n'en exceptons pas même le théorème si important du carré de l'hypoténuse » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 6). Ces propos mettent l'accent sur la valeur éducative du théorème pour les auteurs, augurant de son importance dans leurs manuels.

Cette importance, qui s'ajoute à sa beauté, est soulignée par de nombreux auteurs. En 1829, Terquem l'exprime ainsi : « Ce théorème célèbre, que l'antiquité [*sic*] attribue à Pythagore, porte le nom de ce philosophe ; il énonce une des plus belles et des plus importantes propriétés de l'espace. » (Terquem, 1829, p. 105). Ce propos fait écho à bien d'autres au fil du siècle. Sonnet décrit cette proposition comme « une des plus fécondes de la Géométrie » (Sonnet, 1839, p. 134), expression reprise presque à l'identique par Harant en 1863, voyant le théorème comme « une des propositions les plus importantes de la géométrie » (Harant, 1863, p. 96). Vincent et Percin vantent de leur côté son « importance et sa fécondité », tandis que Bézout souligne sa « très grande utilité » (Bézout, 1848, p. 72). Dalsème, quant à lui, précise le champ d'application possible de la proposition en indiquant que « cette vérité est l'une des plus utiles que l'on puisse apprendre dans les ateliers » (Dalsème, 1880, p. 17). Néanmoins, ni lui ni

Licence CC BY-NC-ND 3.0

aucun autre de ces auteurs ne donne explicitement d'exemple d'application pratique possible, notamment pour les travailleurs.

Enfin, ce théorème est également présenté, de par son ancienneté et sa célébrité, comme incontournable dans l'histoire des mathématiques. Nous l'avons vu, la découverte du résultat et de sa preuve sont à plusieurs reprises attribuées à Pythagore, désigné comme un « philosophe » par Terquem, Cirodde et Bovier-Lapierre (voir la sous-section II.3.2.1 p. 285). Dalsème va plus loin qu'une simple remarque sur l'origine du théorème dans son évocation historique. Il écrit en note : « Pythagore, philosophe grec, qui dans un éclair de génie, découvrit cette vérité, la trouva si belle, qu'il courut, dit-on, remercier les dieux par un sacrifice de cent bœufs faits de farine et de miel » (Dalsème, 1880, p. 17). Nous avons alors cherché à quoi cette affirmation pouvait faire référence, et nous avons trouvé dans des sources anciennes qu'il s'agit du récit légendaire et controversé de la découverte du théorème. Proclus relaie en effet le nom de « sacrificateur de bœuf » donné à Pythagore (Proclus, 1948, p. 362), puis Cicéron remet cette légende en doute en argumentant sur la volonté idéologique du philosophe de ne pas répandre le sang (Cicéron, 1839, p. 413). Enfin, Porphyre tranche en écrivant : « Pendant qu'il sacrifiait aux dieux, il se gardait de les offenser ; il les honorait en effet par des sacrifices de farine, de gâteaux, d'encens, de vin doux, mais jamais d'êtres vivants, sauf, à l'occasion, des poules et des cochons de lait. S'il lui arriva de sacrifier un bœuf, ce fut, disent les sources les plus fiables, un bœuf en pâte, lorsqu'il eut découvert que le carré de l'hypoténuse du triangle rectangle était égal à la somme des carrés de ses côtés. » (Porphyre et al., 1983, section 3, n°36) [81]. Une partie des auteurs du XIX^e siècle alimente ainsi le mythe que représente le personnage de Pythagore, ainsi que les légendes autour des circonstances de la découverte de son théorème [82].

Dans les ouvrages du corpus, nous pouvons observer que les références historiques ou légendaires deviennent plus nombreuses et se précisent au cours du temps, confirmant le statut particulier qu'acquiert progressivement ce théorème. D'un point de vue mathématique, il constitue un résultat que presque tous les auteurs présentent, tout au long du siècle et à tous les publics, et son intérêt à la fois pratique et pédagogique est souligné par bon nombre d'entre eux. La multiplicité des preuves, soulignée par Salicis (voir p. 285), en est l'une des raisons, offrant diverses approches possibles pour

81. Voir également à ce sujet la note « Sur Pythagore et le "théorème de Pythagore" » de Vitrac, qui reprend les éléments de la légende de Pythagore et de l'attribution du théorème au savant (Euclide, 1990, p. 309-321).

82. La notion de « mythe » en histoire des sciences est interrogée depuis quelques décennies par une partie des chercheuses et des chercheurs, en particulier pour parvenir à la déconstruire et/ou la dépasser. Voir à ce propos (Ehrhardt, 2010 ; Goldstein et Ritter, 1994) et les travaux du Centre François Viète à Nantes à ce sujet (Teissier et Le Lay, 2024).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

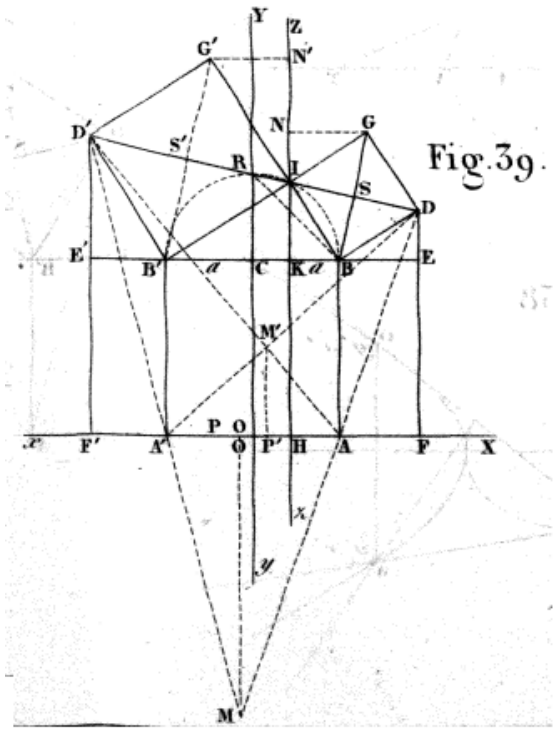
l'enseigner aux élèves. Mais le théorème intéresse plus généralement les scientifiques du siècle, au-delà de ceux qui enseignent et/ou rédigent des manuels, par la diversité de ses démonstrations en plus de son intérêt pédagogique et de son caractère historique.

Pour nous en assurer, nous avons recensé, parmi les articles disponibles sur le site numdam.org (*Numdam* s. d.), ceux qui portent sur le théorème de Pythagore, ou le carré de l'hypoténuse, durant la période allant de 1810 à 1900[83]. Quelques articles, qui abordent des développements mathématiques possibles du théorème original, émergent de cette recherche. Il s'agit des travaux de Umpfenbach[84] (1849) et Sacchi (1862), publiés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, sur la « généralisation du théorème de Pythagore » (qui traitent de l'égalité $a^n+b^n=c^n$), ou celui de Güdermann en 1852 à propos du « théorème de Pythagore sphérique », qui énonce l'équivalent de la proposition en géométrie sphérique (Gudermann, 1852). Henri André, en 1846, écrit « quelques observations relatives à la figure du carré de l'hypoténuse », dans lesquelles il étudie en particulier les lieux des points M et M', intersections respectives des droites (DA) et $(D'A')$ et (DA') et $(D'A)$, à l'aide d'outils d'algèbre et d'analyse (H. André, 1846) (voir figure II.41 p. 297).

83. Le site numdam.org (*Numdam* s. d.) recueille les contributions à plusieurs revues et journaux mathématiques, comme par exemple les *Annales de mathématiques pures et appliquées* ou les *Nouvelles Annales de Mathématiques* sur une période allant de 1810 à nos jours. Les *Annales*, des mots-mêmes de leur créateur Gergonne, sont « principalement consacrées aux *Mathématiques pures*, et surtout aux recherches qui [ont] pour objet d'en perfectionner et d'en simplifier l'enseignement » (Gergonne, 1810-1811, p. ii). Quant aux *Nouvelles Annales* créées par Terquem et Gerono en 1842, elles ont plutôt vocation à promouvoir les progrès de l'enseignement, là où le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville est plus axé sur le progrès des mathématiques. Ces revues sont dites « intermédiaires », parce qu'elles sont destinées à la fois aux étudiants et aux enseignants, et parce qu'elles se situent entre les publications de recherche avancée, destinées aux spécialistes, et les ouvrages pédagogiques plus élémentaires. Elles sont donc un lieu à la fois d'échanges pédagogiques et de recherche scientifique (Boucard, 2020 ; Ehrhardt, 2018 ; Verdier, 2009).

84. Dans ce paragraphe et les suivants, nous choisissons de ne pas présenter individuellement les scientifiques mentionnées afin de ne pas alourdir notre propos. Certains sont très connus et d'autres beaucoup moins. Nous laissons le soin au lecteur d'aller chercher de plus amples informations sur une personnalité qui l'intéresserait en particulier. Le site numdam.org en fournit d'ailleurs certaines. Par exemple, Umpfenbach y est désigné comme « professeur à Giessen ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Éliminant x' et y' entre ces trois équations, on trouvera :

$$y^3(9x^3-a^3)-9(x^3-a^3)^3=0,$$

équation du quatrième degré qu'il s'agit de discuter. Cette équation ne renfermant que des puissances paires d'x et d'y, la courbe qu'elle représente est rapportée à son centre comme origine ; par conséquent il suffit de faire croître x et y positivement. Résolvons-là par rapport à y, on trouve :

$$y=\pm\frac{3(a^3-x^3)}{\sqrt{a^3-9x^3}},$$

$x=0$..... $y=3a$.

x augmente $<\frac{a}{3}$..... y augmente.

$x=\frac{a}{3}$..... $y=\infty$.

Ce tableau nous montre que la courbe est comprise entre deux parallèles menées à des distances de Yy égales à $\frac{a}{3}$, et qu'elle a ses droites pour asymptotes. Le coefficient angulaire de sa tangente

$$-\frac{9xy^3+18x(a^3-x^3)}{(9x^3-a^3)y}$$

devient nul pour $x=0$; donc aux points s et s' la tangente est horizontale ; d'ailleurs chacune des branches est constamment convexe vers l'axe des X ; car à cause de la symétrie du lieu, si l'une d'elles était sinueuse, la courbe pourrait être coupée par une ligne droite en plus de quatre points.

FIGURE II.41 – Extrait de l'article de Henri André sur la « figure du carré de l'hypoténuse », publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, (H. André, 1846)

Dans le cadre de la recherche pour l'enseignement des mathématiques, certains articles font état de publications de fond sur le sujet dans des revues étrangères, comme la « nouvelle démonstration du théorème de Pythagore » de A. Sykora dans les *Archiv der Mathematik und Physik* (Darboux et al., 1878), ou encore, d'un point de vue plus pédagogique, les « quelques observations sur l'enseignement du théorème de Pythagore » de Davide Besso dans le périodique italien *Periodico di scienze matematiche e naturali per l'insegnamento secondario*, consacré à l'enseignement secondaire des mathématiques (Darboux et Houël, 1874). Le théorème intéresse également d'un point de vue historique et plusieurs articles sont consacrés à son origine et son développement au cours du temps. Par exemple, dans un résumé et commentaire d'une étude de P. Treutlein portant sur la « contribution à l'histoire de la géométrie grecque » présentée dans la revue allemande *Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik*[85] en 1883, l'auteur reprend l'histoire du théorème, et l'origine de sa découverte par Pythagore, en amont de sa preuve géométrique par Euclide. D'après le rapporteur, de grands mathématiciens se sont penchés sur la question de

85. L'objectif de la revue est de promouvoir les mathématiques appliquées et de répondre aux besoins d'enseignement et d'apprentissage des universités techniques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la méthode par laquelle le savant aurait pressenti son résultat, parmi lesquels Röth, Cantor, Günthern et Bretschneider (Darboux et al., 1884).

Parmi les auteurs de notre corpus, un en particulier se distingue par l'intérêt historique qu'il porte à la proposition de Pythagore. Il s'agit de Vincent, qui publie en 1852 dans les *Nouvelles Annales* une « lettre sur le théorème de Pythagore », à la demande du rédacteur et à destination des « jeunes lecteurs ». Il y reprend l'histoire mythique et controversée du théorème, à travers les écrits de Clavius, Cicéron, Proclus ou encore Porphyre (voir p. 295). Son article historiographique apporte également des contributions bibliographiques en terme de recherche mathématique, puisqu'il se réfère aux travaux de plusieurs auteurs du XVIII^{e} et du XIX^{e} siècles, qui « s'occupent presque exclusivement de démontrer le théorème par divers moyens », en présentant de quinze à trente-cinq preuves dans leurs ouvrages (Vincent, 1852). En note, il précise également les développements actuels du théorème sous la forme du problème de « décomposition d'un nombre carré en deux autres nombres carrés », en discutant les résultats obtenus à ce propos par Biot, Chasles et Poinsot.

L'activité de recherche autour du théorème de Pythagore apparaît donc comme loin d'être épuisée, et ce dernier intéresse encore la communauté mathématique de l'époque, que ce soit en termes de production de preuves ou de résultats dérivés, en matière d'enseignement, ou d'un point de vue historique. La vigueur de son intérêt scientifique, jumelée à son importance pour l'enseignement, relevée par les auteurs-mêmes de notre corpus, en fait un théorème incontournable à son époque. Il est d'ailleurs présenté par la majeure partie des auteurs de notre corpus, à tous les types de publics sans distinction. Son rayonnement historique est souligné par les références que font les auteurs à sa beauté et à son importance, vertus auxquelles se rajoute la richesse que procure la diversité de ses preuves en termes de méthodes d'enseignement. Tout ceci justifie sa grande valeur en tant qu'angle d'analyse des contenus sur les aires dans les manuels de notre corpus, à l'interface des préoccupations scientifiques, pédagogiques, et même historiques de leurs rédacteurs, ainsi qu'à l'intersection des publics concernés (voir schéma II.42 p. 299).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

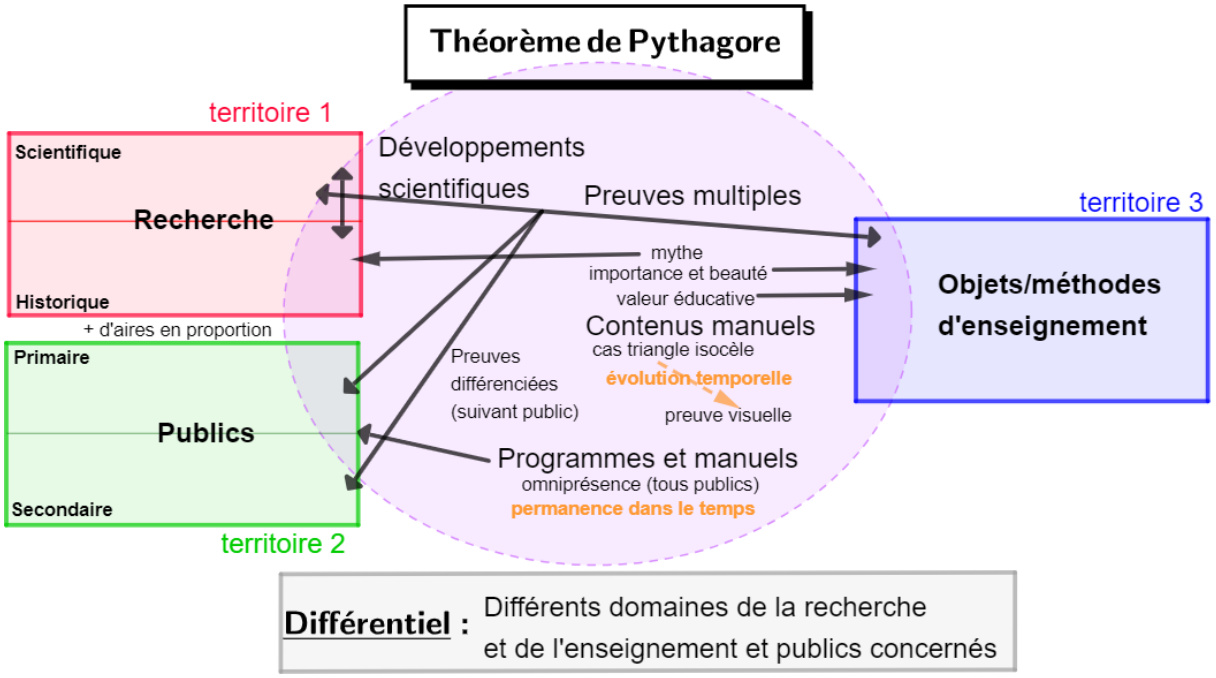


FIGURE II.42 – Schéma montrant en quoi le théorème de Pythagore, à travers sa place dans les programmes et les contenus associés dans les manuels, est à l'interface des activités de recherche et d'enseignement, ainsi que des publics concernés, avec des tendances temporelles

II.3.3 Les aires curvilignes

Dans la géométrie grecque, le cercle constitue une figure fondamentale. Forme du cosmos chez Anaximandre, il est avec la ligne droite la base de toutes les constructions proposées par Euclide dans ses *Éléments*, alors qu'Archimède consacre un livre entier à sa mesure (Goldstein, 1989). De façon plus générale, les courbes sont des objets qui appartiennent historiquement à la géométrie élémentaire. Tout comme pour le cercle, les savants antiques ont consacré des travaux conséquents à certaines d'entre elles, comme les coniques (Apollonius, Pappus), les spirales (Archimède) ou autres conchoïdes (Nicomède) (Tournès, 2001).

Dans la géométrie des aires du XIX^{e} siècle, des parties substantielles des ouvrages sont consacrées aux comparaisons et aux mesures des surfaces qu'elles délimitent, quasi unanimement pour le cercle, plus rarement pour les courbes quelconques, et quelquefois pour les sections coniques, en adéquation avec les programmes en vigueur à ce sujet. L'intérêt de ces savoirs sur le plan mathématique est grand, car ils mettent en jeu des connaissances graphiques, numériques — techniques de calcul, d'approximation, et nature des nombres mobilisés — ainsi que de possibles considérations sur l'infini. Dans cette section, nous proposons d'étudier la place des aires curvilignes dans les programmes, puis de mesurer la part qu'elles occupent dans la géométrie des

Licence CC BY-NC-ND 3.0

aires abordée dans les manuels du corpus, ainsi que son évolution. Nous analysons également le rôle spécifique que ce thème joue, au cours du XIX^e siècle, à l'interface de nombreux domaines mathématiques, comme la géométrie des figures, l'arithmétique et l'étude des nombres, ou encore l'analyse infinitésimale.

II.3.3.1 Intérêts scientifiques et pédagogiques des aires curvilignes, dans le contexte du XIX^e siècle

La détermination de l'aire d'un cercle est une question géométrique complexe, pour qui veut l'établir avec rigueur. Pour autant, les savants antiques n'ont pas éludé cette difficulté, puisque d'une part, Euclide a déterminé dans ses *Éléments* quel était le rapport des aires de deux cercles de rayons différents, et d'autre part, dans son traité *De la mesure du cercle*, Archimède a prouvé que cette aire était égale à celle d'un triangle rectangle de côtés le rayon et la circonférence rectifiée. Au tournant du XIX^e siècle, des mathématiciens s'inscrivent plus ou moins dans le sillage de ces travaux pour proposer leurs preuves de la mesure du cercle (circonférence et aire), exprimant ainsi leurs visions de la géométrie et de son enseignement (Lamandé, 1990).

Quant à la question de la quadrature du cercle, elle n'est pas scientifiquement fixée pendant la majeure partie du XIX^e siècle, puisque la preuve formelle de son impossibilité, en lien avec la nature particulière du nombre π, n'est produite par Ferdinand von Lindemann [86] qu'en 1882. Pourtant, le monde savant de l'époque s'investit largement dans ce problème, et les tentatives de résolution sont si nombreuses, que l'Académie des Sciences décide même, en 1775, de ne plus perdre son temps à examiner toutes celles soumises par des mathématiciens amateurs (Jacob, 2005). La vivacité de ce domaine de recherche demeure pourtant grande au cours du siècle suivant, puisque nous comptons 73 mémoires ou ouvrages dont le titre contient explicitement l'expression « quadrature du cercle » dans la base de données constituée à partir de la *BF*, répartis de 1811 à 1895. Malgré tout, de nombreux auteurs de manuels de géométrie s'accordent pour dire qu'il s'agit là d'une « question oiseuse » (Legendre, 1823, p. 123 ; Sonnet, 1839, p. 260 ; Puille, 1855, p. 182), d'une recherche « puérile » (Bergery, 1828, p. 403) ou encore « chimérique » (Harant, 1863, p. 140), qui ne saurait « occuper » un géomètre (Legendre, 1823, p. 123 ; Terquem, 1829, p. 220 ; Puille, 1855, p. 182), suivant des expressions alors couramment utilisées.

86. Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939). Mathématicien allemand, il est passé à la postérité pour avoir démontré la transcendance de π. Il a enseigné dans les universités de Königsberg et de Münich et a dirigé les thèses de nombreux étudiants, dont celle de Hilbert.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La figure du cercle et la détermination de son aire occupent également une grande place dans les débats autour des méthodes analytiques ou synthétiques pour l'enseignement de la géométrie (voir p. 115 de la sous-section I.3.1.3), de même que les aires délimitées par des sections coniques, qui relèvent plutôt de la géométrie analytique que de la géométrie élémentaire. Pour mettre ces résultats à la portée des élèves, les auteurs de manuels pour l'enseignement intermédiaire (secondaire ou primaire supérieur) se heurtent donc à des difficultés mathématiques ainsi qu'à des contraintes de programmes, puisque l'analyse et la géométrie analytique ne sont pas enseignées aux niveaux auxquels ils s'adressent. C'est également le cas pour les techniques d'évaluation des aires délimitées par des courbes quelconques, question pourtant centrale dans l'apprentissage de l'arpentage. Les constructions apparaissent également comme des objectifs pratiques à acquérir, concernant les aires des domaines délimités par des courbes quelconques. En effet, ces connaissances apparaissent dans beaucoup de programmes sous l'angle de la mesure des terrains, et par conséquent, au moins dans ce contexte éducatif, dans le cadre de l'initiation à l'arpentage. Ces dernières sont officiellement prescrites dans l'enseignement primaire depuis la loi Guizot de 1833 comme application de la géométrie, ainsi que présentes dans les programmes du secondaire depuis le début du siècle (voir la sous-section II.3.3.2 p. 302). Il s'agit non seulement de « fournir une application intéressante des notions de géométrie » acquises à l'école, mais aussi, d'offrir aux futurs instituteurs « un moyen de se rendre utiles plus tard dans les communes, et de se créer ainsi une ressource à ajouter [à leur] modeste traitement » (Sonnet, 1887, p. 120). En cela, il ne s'agit donc pas d'« une étude purement théorique ; c'est surtout au point de vue pratique que l'arpentage doit être enseigné » (Sonnet, 1887, p. 120), en partie afin de contribuer à pourvoir aux besoins de la société dans ce domaine.

Le problème des aires curvilignes recoupe ainsi de nombreuses préoccupations à la fois scientifiques et pédagogiques du XIX^{e} siècle, la complexité de la résolution mathématique de ces questions venant rencontrer la résolution des auteurs de manuels à en offrir une présentation accessible au plus grand nombre. Ces savoirs se trouvent eux aussi à l'interface des constructions géométriques, des calculs, de la nature des nombres, mais aussi de l'analyse infinitésimale, et en cela, ont toute leur place dans la grille d'analyse que nous nous proposons de construire pour l'étude des contenus sur les aires des manuels du corpus. Avant d'entrer précisément dans les énoncés qui caractérisent ces savoirs, nous proposons de mesurer la place qu'ils occupent, à la fois dans les programmes et dans les manuels du corpus.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.3.3.2 Place des aires curvilignes dans les programmes et les manuels

Les aires curvilignes planes enseignées dans les collèges, lycées, cours supérieurs et écoles primaires supérieures, peuvent être partagées en trois catégories : la mesure (ou la comparaison) de l'aire du(des) cercle(s), la détermination des aires des domaines délimités par des courbes quelconques et ceux délimités par des sections coniques (parabole, ellipse, hyperbole).

Parmi les programmes d'enseignement des deux ordres entre 1833 et 1902, presque tous mentionnent explicitement l'aire du cercle et des figures qui en découlent, la plupart du temps sous l'angle de la mesure. En 1852, dans le programme de 3ème section Sciences, on peut lire : « aire d'un polygone régulier, d'un cercle, d'un secteur et d'un segment de cercle » (Belhoste, 1995, p. 285). Le même trio « cercle, secteur et segment » apparaît dans le programme de la 2ème année des écoles primaires supérieures de garçon en 1893 (D'Enfert, 2003c, p. 261). Quelques textes officiels évoquent également les propriétés de comparaison, avec notamment le « rapport des aires de deux cercle de rayons différents » (Duruy, 1863a, p. 243), principalement dans les programmes du secondaire (classique ou spécial). Les seuls plans d'études dans lesquels le cercle n'est pas explicitement cité sont ceux des écoles primaires supérieures de 1881 et 1885, très peu détaillés et dans lesquels une simple indication concerne l'apprentissage des « notions élémentaires de géométrie » et leurs « applications à la mesure des surfaces et des volumes » (D'Enfert, 2003c, p. 195, 223). Cette dénomination est suffisamment large pour recouvrir en particulier la question de la mesure du cercle, ce que viendra confirmer l'analyse des contenus des ouvrages d'enseignement du primaire supérieur de cette période. La mesure du cercle n'est pas non plus au programme des écoles primaires supérieures de filles de 1893, ce qui n'empêche pas ce résultat de figurer, par exemple, dans le manuel de Hue et Vagnier de 1896 destiné à ce public (Hue et Vagnier, 1896).

L'étude de « l'aire approchée d'une figure limitée par une courbe quelconque » (ou autre formulation proche) est prescrite dans six programmes de l'enseignement secondaire, classique ou spécial, entre 1849 et 1902, ainsi que dans celui des écoles primaires supérieures (de filles et de garçons) de 1893 (Belhoste, 1995, p. 229, 287, 446, 479, 595 ; Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1866, p. 712 ; D'Enfert, 2003c, p. 262, 275). Dans plusieurs de ces textes, cette notion est rattachée au domaine de l'arpentage, alors formulée avec des expressions du type : « Mesurer la surface d'un terrain [...] limité par une courbe irrégulière » (D'Enfert, 2003c, p. 262) ou « Cas où le terrain serait limité, dans une de ses parties, par une ligne courbe » (Belhoste, 1995, p. 287). Il est également question dans certains documents de la méthode des

Licence CC BY-NC-ND 3.0

quadrillages pour « évaluer approximativement une aire quelconque », en conseillant de la figurer « à une échelle convenable, sur du papier quadrillé » (D'Enfert, 2003c, p. 275) et « en comptant les carrés contenus à l'intérieur de la courbe » (Belhoste, 1995, p. 595). Le programme des EPS de filles de 1893 va même plus loin en proposant une méthode d'évaluation par pesée, obtenue « en découpant les figures dessinées sur un papier suffisamment épais et en les pesant successivement » (D'Enfert, 2003c, p. 275). La permanence du traitement de cette question dans les manuels au cours du siècle, et la grande diversité des méthodes engagées pour le faire, se verront confirmées dans l'étude suivante. Elles montrent l'intérêt et la richesse de ce savoir-faire, qui, même quand il n'est pas formellement cité dans les textes officiels, demeure un implicite de la géométrie des aires, notamment à travers les questions d'arpentage.

Les aires délimitées par des sections coniques demeurent plus anecdotiques dans les programmes, et se trouvent plus souvent préconisées pour l'enseignement secondaire spécial, puis moderne. En 1849, dans le programme de la 3ème année de l'enseignement spécial, dans le cadre du cours d'« application de l'algèbre à la géométrie », figurent la « surface de l'ellipse », la capacité à « mesurer la superficie renfermée entre une portion de l'une des branches de l'hyperbole et une corde, ou entre les deux branches et deux cordes », ainsi que la détermination de la « surface d'un secteur de parabole » (Belhoste, 1995, p. 242). Le trio « superficie de l'ellipse », « aire d'une partie d'hyperbole » et « aire d'un segment parabolique » se retrouve aussi dans le programme analogue de 1866, en 2ème année, dans la catégorie « courbes usuelles » (Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, 1866, p. 717). L'aire de la parabole figure enfin dans le programme de la classe de philosophie en 1902, mais avec une approche tout autre puisque liée au calcul différentiel, introduit pour la première fois dans l'enseignement secondaire, en la voyant comme « la limite commune de deux sommes de rectangles dont l'une est inférieure, l'autre supérieure à l'aire cherchée », ou encore en tant que « problème inverse de la recherche d'une dérivée » (Belhoste, 1995, p. 595). Il est à noter que plusieurs programmes préconisent l'étude des « courbes usuelles », mais sans que le texte ne mentionne des savoirs sur les aires des domaines qu'elles délimitent.

Les programmes offrent donc une large part à la question des aires curvilignes, dans les deux ordres, à tous les niveaux, et durant tout le siècle. C'est le cercle qui occupe naturellement la place la plus importante dans les apprentissages des élèves, mais les aires délimitées par des courbes quelconques sont elles aussi fréquemment étudiées, notamment en lien avec les problèmes d'arpentage. Les savoirs sur les aires relatives aux sections coniques sont les moins préconisés, vraisemblablement car ils nécessitent des outils d'analyse infinitésimale qui dépassent les programmes alors en vigueur.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

En lien avec les préconisations officielles des programmes, les manuels d'enseignement de la géométrie du XIX^e siècle abordent la question des aires curvilignes, qui font même parfois l'objet de sections ou paragraphes qui leur sont explicitement dédiés. Un chapitre du *Manuel de géométrie* de Terquem de 1829 s'intitule « Lignes courbes semblables, propriétés des cercles comparés » (Terquem, 1829, p. 172). On y trouve en particulier le théorème du rapport des aires de deux cercles de rayons différents. Bien plus tard en 1886, Bert titre une des partie de son ouvrage « mesure des surfaces planes terminées par des lignes courbes » (Bert, 1886, p. 49). Il y traite de la mesure de l'aire du cercle, mais aussi de celle des domaines délimités par des courbes quelconques. Si ces contenus ne sont pas toujours mentionnés par des titres aussi explicites, ils n'en restent pas moins courants dans les ouvrages de l'époque, pour tous types de public[87], et aussi bien sous l'angle de la comparaison, comme chez Terquem, que de la mesure, comme chez Bert.

Quantitativement, ces chapitres représentent une part non négligeable des ouvrages. Parmi ces manuels, nous avons pu lister 134 énoncés concernant les aires curvilignes, sur 460 énoncés distincts sur les aires au total (soit une proportion de 29,1 %). Ces énoncés se partagent ainsi : 95 concernent le cercle (20,3 %), 29 les aires délimitées par des courbes quelconques (6,3 %), et 10 les coniques (2,2 %). Les 460 énoncés sur les aires présentent 2497 occurrences dans l'ensemble des 40 ouvrages du corpus. Parmi elles, 601 sont à propos des aires curvilignes (soit 24,1 %), et dans le détail, 455 traitent du cercle (18,2 %), réparties dans 39 des 40 livres du corpus, 119 des aires délimitées par des courbes quelconques (4,8 %) disséminées dans 27 livres de notre sélection, et 27 des coniques (1,1 %), présentes dans 13 de nos ouvrages.

Ces quelques chiffres, recueillis sur un échantillon d'ouvrages construit pour être représentatif de la période, montrent que dans le thème des aires planes, la part des aires curvilignes est conséquente, d'un quart à un tiers suivant le point de vue, avec une prépondérance observée pour l'aire du cercle, puis dans une moindre mesure pour les aires délimitées par des courbes quelconques. Ces données concordent avec les observations réalisées sur les programmes, avec une présence importante de l'aire du cercle, puis des aires curvilignes quelconques. Les aires délimitées par des coniques sont plus anecdotiques dans les ouvrages, de la même façon qu'elles apparaissent plus sporadiquement dans les programmes de l'époque. Ces constats corroborent aussi l'idée que les auteurs des manuels se conforment aux contenus des

87. Le manuel de Terquem est revendiqué par son auteur comme destiné « à l'usage des personnes privées des secours d'un maître », mais semble avoir été plutôt utilisé dans l'enseignement secondaire, notamment pour la préparation des candidats aux écoles du gouvernement (Lorenat, 2019, p. 88-89). Les *Premiers éléments* de Bert sont très explicitement dédiés aux élèves des écoles primaires (Bert, 1886, p. v-viii).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

programmes pour le choix des connaissances qu'ils présentent dans leurs ouvrages. L'étude plus détaillée des énoncés de savoir relatifs aux aires curvilignes vise, en plus de confirmer les rapports de présence entre les trois sous-thèmes considérés (cercle, courbes quelconques et coniques) dans les manuels, à mesurer plus finement l'impact des programmes dans la composition des ouvrages, ainsi qu'à mettre en évidence des parentés entre ouvrages, liées à d'éventuelles influences entre leurs auteurs.

II.3.3.3 Les énoncés de savoir sur les aires curvilignes dans les manuels du corpus : nombre et évolution

Les aires curvilignes, conformément à ce qu'indiquent les programmes, occupent indéniablement une place importante dans la géométrie des aires du XIX^{e} siècle. Mais les contenus d'apprentissage associés présentent-ils une stabilité dans le temps, ou évoluent-ils en fonction des périodes considérées ? Afin d'étudier cette évolution temporelle, et pour la suite de l'analyse des contenus également, nous avons réalisé une sélection d'énoncés de savoir parmi les 134 relatifs aux aires curvilignes. En effet, ce très grand nombre d'énoncés regroupe des connaissances essentielles sur ce thème, et d'autres moins fondamentales, très diverses et difficiles à analyser conjointement.

Le choix effectué porte sur des critères qualitatifs, en lien avec la nature mathématique des énoncés. Dans un premier temps, nous avons opté pour les principaux théorèmes de mesure des aires de ces différentes figures : la formule de l'aire d'un cercle (à partir de sa circonférence et son rayon, puis avec le nombre π), la formule de l'aire de l'ellipse et celle d'un segment parabolique. À cela, nous avons ajouté les théorèmes de comparaison des aires, comme le rapport des aires des cercles de rayons différents, et le rapport des aires d'un cercle et d'une ellipse de diamètres communs. Nous avons complété ces énoncés théoriques par deux énoncés de « principe » : le premier permettant de voir une courbe comme la limite d'un polygone inscrit ou circonscrit, et le second indiquant le lien entre le problème de la quadrature du cercle et la question du rapport entre sa circonférence et son diamètre. Les énoncés de construction les plus usuels ont été également choisis : les quadratures du cercle, de l'ellipse et d'une figure curviligne quelconque, la construction d'un cercle équivalent à un carré, d'une ellipse équivalente à un cercle (ou réciproquement), par méthodes exactes ou approchées, ainsi que les méthodes géométriques destinées à déterminer une aire curviligne quelconque, et leurs applications à l'arpentage. Enfin, des savoirs-faire relatifs aux calculs des aires de ce type de figures ont été sélectionnés, concernant le cercle (aire connaissant rayon ou circonférence, rayon connaissant aire, applications concrètes de ces calculs et tables de valeurs), l'hyperbole (méthode de calcul approchée d'une portion d'hyperbole) et l'ellipse (exemples de calculs numériques d'aires d'ellipses), ainsi que les méthodes,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

exemples et applications des calculs des aires curvilignes quelconques. Au cours de cette sélection, nous avons pris soin d'opter pour les principaux énoncés relatifs aux trois domaines — constructions géométriques, nombres et du calcul, analyse infinitésimale — à l'interface desquels nous souhaitons exhiber le rôle de la géométrie des aires curvilignes. La sélection retenue figure dans le tableau ci-après (voir tableau II.16 p. 306), accompagnée de la dénomination abrégée qui sera utilisée dans cette étude.

Calculer aire cercle connaissant rayon	Cercle calcul 1
Calculer aire cercle connaissant circonférence	Cercle calcul 2
Calculer aire cercle connaissant rayon (comparaison méthodes approchées)	Cercle calcul 3
Calculer rayon cercle aire donnée	Cercle calcul 4
Application calcul aire cercle (bassin, pièce, etc.)	Cercle calcul 5
Table aires cercle	Cercle calcul 6
Construction cercle équivalent carré (approché)	Cercle constr 1
Quadrature cercle (méthode approchée)	Cercle constr 2
Formule aire cercle (circonférence rayon)	Cercle énoncé 1
Formule aire cercle (avec pi)	Cercle énoncé 2
Rapport aires cercles rayons différents	Cercle énoncé 3
Méthode calcul aire portion hyperbole (approchée)	Conique calcul 1
Calculer aire ellipse	Conique calcul 2
Construction ellipse équivalente cercle (et réciproque)	Conique constr 1
Quadrature ellipse	Conique constr 2
Formule aire domaine délimité par arc parabole et corde (dimensions rectangle données)	Conique énoncé 1
Formule aire ellipse	Conique énoncé 2
Rapport aires ellipse et cercle	Conique énoncé 3
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes	Curv calcul 1
Calculer aire quelconque limitée par courbes et/ou droites	Curv calcul 2
Application calcul aire quelconque limitée par courbes (navires, etc.)	Curv calcul 3
Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes	Curv constr 1
Application géométrique aire quelconque limitée par courbes arpentage	Curv constr 2
Quadrature figure quelconque	Curv constr 3
Principe aire quelconque limitée par courbes = limite aire polygone inscrit	Curv énoncé 1

TABLE II.16 – Tableau des 25 énoncés retenus parmi les 134 relatifs aux aires curvilignes, et dénominations abrégées

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Questions :

- **Dans quelle mesure les aires curvilignes sont-elles abordées dans les manuels du corpus, et le sont-elles de manière permanente au cours du temps ?**
- **Le thème des aires curvilignes est-il plus ou moins présent dans les manuels du corpus suivant les ouvrages considérés, en lien avec les publics auxquels ils se destinent et les programmes correspondants ?**

Méthode : Une fois cette sélection effectuée, nous avons représenté l'évolution dans le temps du nombre de tels énoncés dans les ouvrages, tout d'abord globalement, puis par catégorie de figures (cercle, courbes quelconques, coniques) sous la forme d'un diagramme semi-temporel.
Le second diagramme recense les énoncés sélectionnés dans les 40 ouvrages du corpus et les matérialise par des points en forme de rond (cercle), losange (coniques) ou carré (aires curvilignes quelconques).
Le troisième diagramme est le même que le second, mais sur lequel nous avons mis en évidence des tendances temporelles en entourant en couleur une partie des points, lorsqu'ils concernent une période identifiée.
Résultat : Voir les figures II.43 p. 308, II.44 p. 309 et II.45 p. 310.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

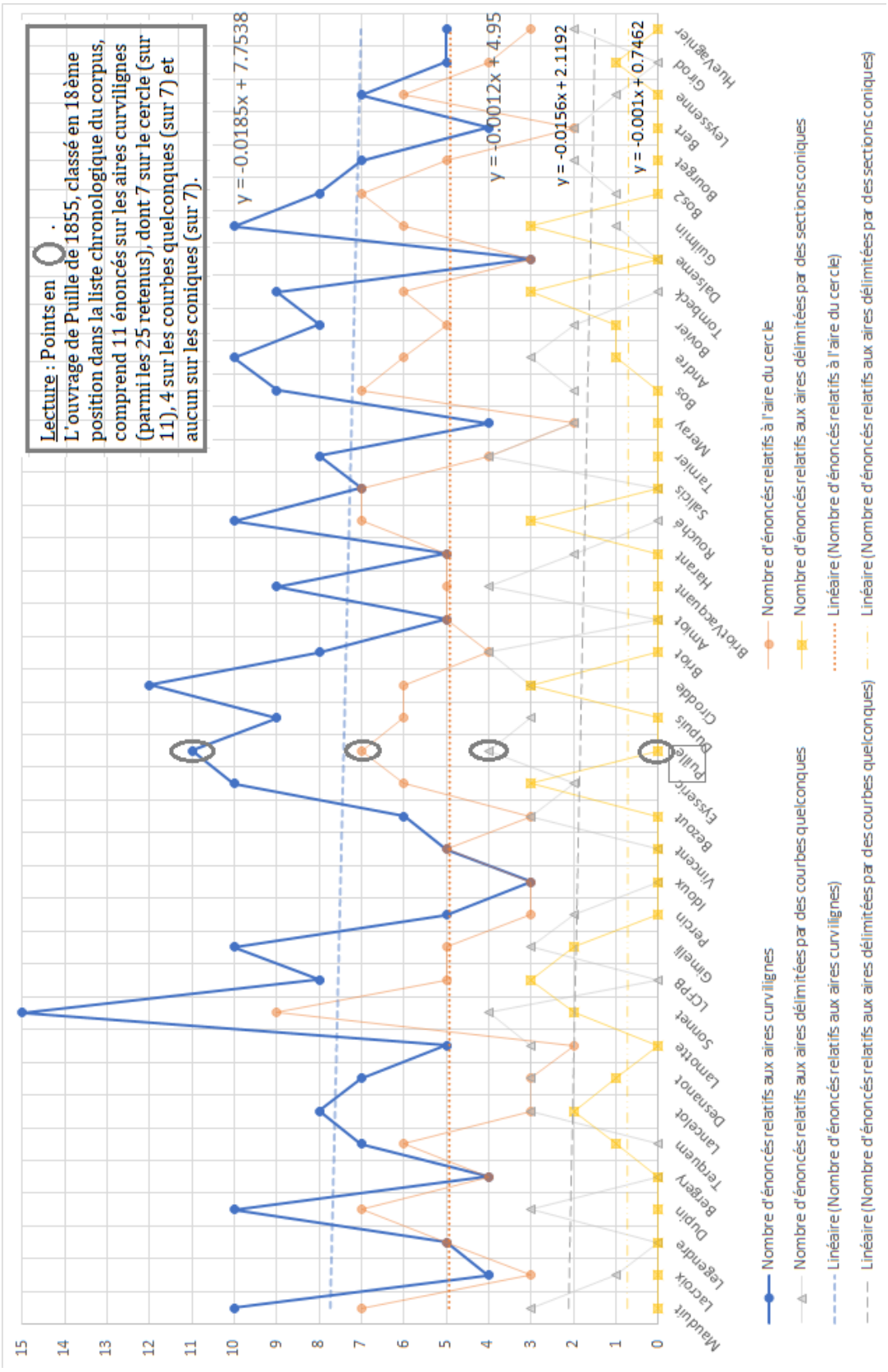


FIGURE II.43 – Diagramme semi-temporel montrant l'évolution du nombre d'énoncés associés aux aires curvilignes dans les ouvrages du corpus, par catégorie de figures

Licence CC BY-NC-ND 3.0

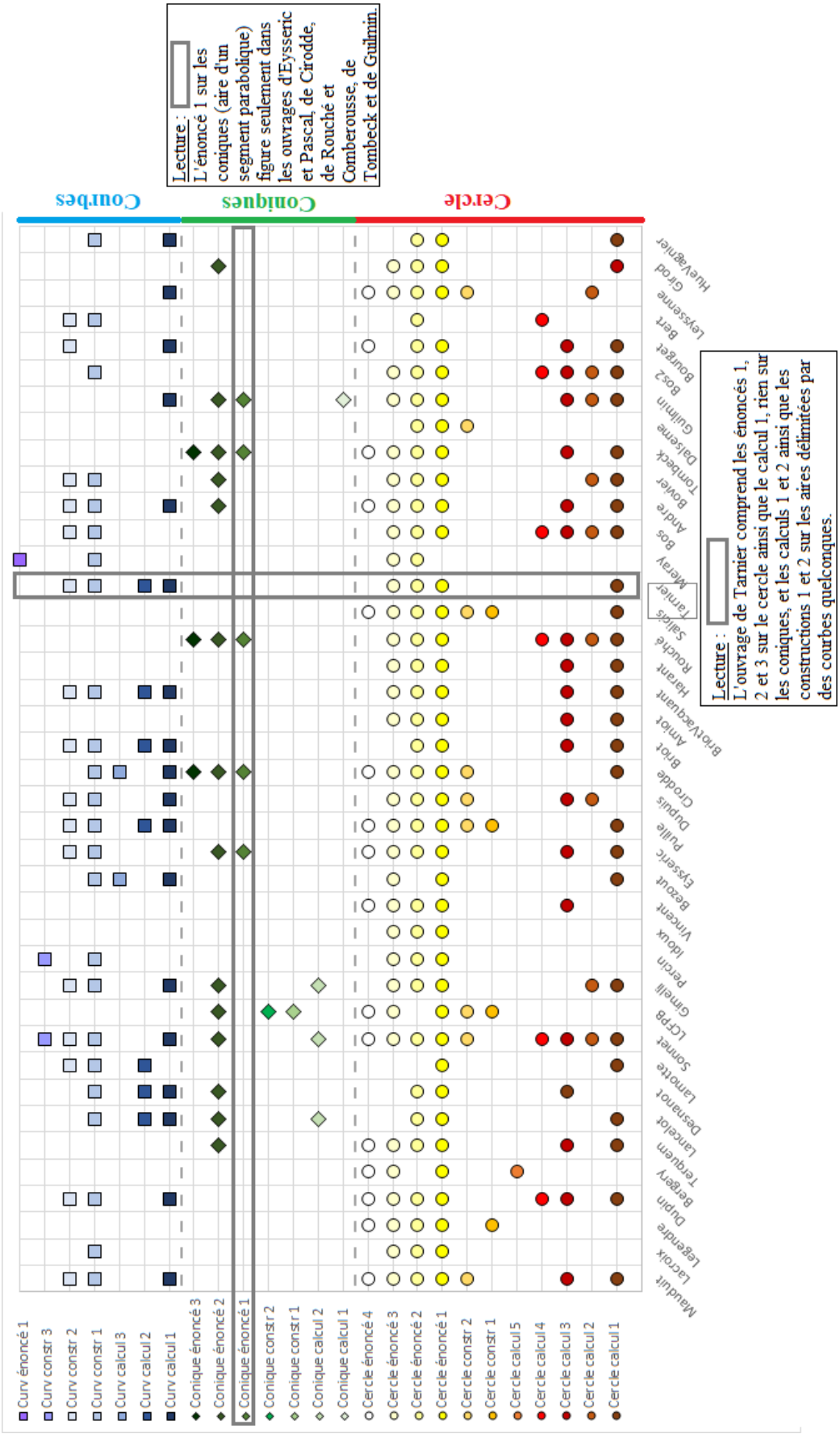


FIGURE II.44 – Diagramme montrant la répartition des énoncés associés aux aires curvilignes dans les ouvrages du corpus, par catégorie de figures – Note : « Curv. » est l'abréviation pour « curviligne » et « constr. » pour « construction »

Licence CC BY-NC-ND 3.0

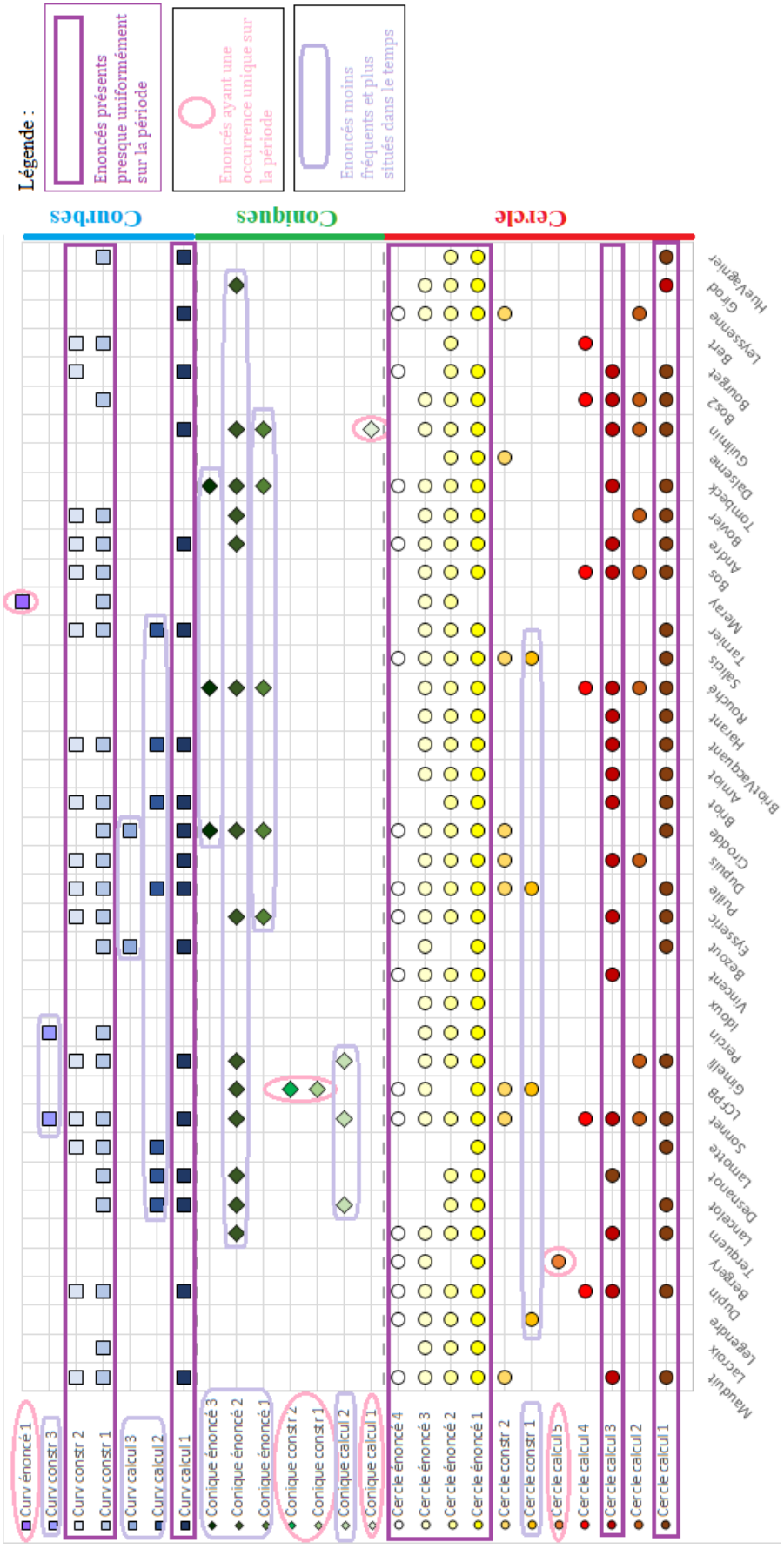


FIGURE II.45 – Répartition des énoncés associés aux aires curvilignes dans les ouvrages du corpus, avec indication sur leur fréquence ou leur rareté dans le temps parmi les ouvrages du corpus – Note : « Curv. » est l'abréviation pour « curviligne » et « constr. » pour « construction »

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lecture et analyse : La courbe en bleu montre de grandes variations concernant le nombre d'énoncés sur les aires curvilignes en général, suivant les ouvrages. Ce nombre fluctue de 3 à 15, avec une moyenne autour de 7,5. La droite de régression linéaire en pointillés bleus montre une relative stabilité de ce nombre d'énoncés au cours du temps, avec un coefficient directeur assez proche de 0. Néanmoins, une légère tendance à la baisse est mise en évidence par le signe négatif de ce coefficient directeur ($-0{,}0185$), même si elle reste peu significative. La courbe en orange matérialise l'évolution du nombre d'énoncés sur l'aire du cercle, parmi les 11 retenus dans la sélection. Des variations importantes apparaissent, d'un minimum de 2 à un maximum de 9, avec une moyenne d'environ 5. La droite de régression linéaire associée, en pointillés oranges, est pratiquement horizontale (son coefficient directeur $-0{,}0012$ est très proche de 0), ce qui montre la stabilité de ces savoirs. Le cas des aires délimitées par des courbes quelconques apparait en gris. Le nombre d'énoncés correspondants varie de 0 à 4, sur les 7 retenus, avec une moyenne approximative de 2 en début de période, et de 1,5 à la fin. Cette baisse globale est caractérisée par le coefficient directeur négatif ($-0{,}0156$) de la droite de régression linéaire associée, en pointillés gris. Quant aux coniques, le nombre des énoncés qui traitent de leurs aires est représenté en jaune. Beaucoup de valeurs sont nulles, puisque seulement 14 ouvrages sur les 40 du corpus les abordent. Le nombre maximal d'énoncés concernés par ouvrage est de 3, et la moyenne est un peu au-dessus de 0,5. Encore une fois, la droite de régression en pointillés jaune est quasiment constante et montre une bonne stabilité globale, avec une très légère tendance à la baisse du fait d'un coefficient directeur faiblement négatif ($-0{,}001$).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les diagrammes II.44 et II.45 (p. 309 et 310) soulignent des tendances temporelles. Tout d'abord, ils permettent d'opposer les énoncés présents du début à la fin de la période et presque uniformément répartis dans le temps, à d'autres plus ponctuels et qui apparaissent dans un seul des titres du corpus. Le groupe des énoncés omniprésents sur la période dans le corpus forme le socle des connaissances fondamentales sur le sujet. Pour le cercle, il regroupe la formule de son aire, du rapport entre deux cercles, du principe de sa quadrature, en lien avec le rapport de la circonférence au diamètre, du calcul de son aire connaissant le rayon et réciproquement. Pour les aires curvilignes quelconques, ce socle comprend la méthode géométrique et la méthode de calcul relatives à ce type de domaines, ainsi que leurs applications à l'arpentage. *A contrario*, seul Méray (1874, p. 95) énonce formellement le principe qui exprime l'aire délimitée par une courbe comme la limite des polygones qui lui sont inscrits et circonscrits. De même, les Frères des écoles chrétiennes sont les seuls à proposer les constructions approchées d'un carré équivalent à une ellipse et d'une ellipse équivalente à un cercle (L.C. et F.P.B., 1840, p. 106). Guilmin présente quant à lui le calcul de l'aire d'une portion d'hyperbole, et Dupin (1828, p. 129) une table de valeurs des aires des cercles en fonction de leurs rayons, ce que ne font pas leurs confrères.

Certains énoncés moins fréquents ne se trouvent que dans deux ou trois ouvrages, publiés à des dates proches. Dans les années 1830-40, Lancelot (1833, p. 41), Sonnet (1839, p. 229) et Gimelli (1841, p. 45) présentent tous les trois des exemples numériques de calcul de l'aire d'une ellipse. Au tournant des années 1840, Sonnet énonce le résultat permettant de quarrer les figures curvilignes quelconques, suivi de près par Percin. Quant à Cirodde (1858, p. 194), il semble emprunter aux *Éléments* de Bézout, écrits et publiés au siècle précédent, mais réédités en 1848, ses applications du calcul des aires curvilignes aux aires des sections des coques de navire (1848, p. 65). D'autres énoncés moins rares apparaissent un peu plus tardivement dans le corpus, comme la formule de l'aire de l'ellipse, énoncée en premier par Terquem (1829, p. 370), ou le calcul de l'aire d'un cercle connaissant sa circonférence, présent dans les manuels à partir de l'ouvrage de Sonnet (1839, p. 224). D'autres propositions disparaissent au contraire du corpus au fil du temps, comme la construction approchée d'un cercle équivalent à un carré, dont la dernière occurrence se trouve chez Salicis (1869, p. 566-567). Enfin, certains énoncés perdurent seulement pendant quelques décennies, tels que le rapport des aires d'un cercle et d'une ellipse de diamètre commun (de 1858 à 1879), la formule de l'aire d'un segment de parabole (1850 à 1882) et les exemples numériques de calculs des aires curvilignes quelconques (1829 à 1872).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion :

— Malgré des fluctuations d'un ouvrage à un autre, la présence du thème des aires curvilignes est globalement stable dans les ouvrages au cours de la période.

— De grandes disparités apparaissent entre les manuels concernant le traitement de ce thème : quelques ouvrages sont particulièrement riches de ce type de contenus, comme ceux de Sonnet (1839) et de Cirodde (1858), alors que d'autres présentent très peu d'énoncés le concernant, comme celui de Idoux (1842) et de Dalsème (1880). Plus globalement, cette étude souligne des parentés entre ouvrages, souvent dans des ères temporelles proches.

— Les contenus présentés dans les ouvrages au sujet des aires curvilignes semblent dépendre largement des programmes en vigueur, eux-mêmes étant en lien avec les publics concernés.

Au-delà des tendances relevées sur certaines périodes, cette étude préalable souligne d'ores et déjà de grandes ressemblances entre certains ouvrages, souvent dans des périodes proches, ouvrant la porte à une hypothèse selon laquelle les auteurs s'inspireraient les uns des autres, ou subiraient l'influence de ceux dont la légitimité et la reconnaissance sont les plus fortes. Pour autant, les analyses d'intercitations ou de citations communes réalisées dans la sous-section II.2.2.1 (p. 205) ne mettent pas en évidence de liens de références, directs ou indirects, entre des auteurs dont nous avons constaté la grande proximité des contenus de savoirs sur les aires curvilignes, tels que Sonnet et Percin, ou encore Cirodde et Bézout. Ces auteurs n'apparaissent pas non plus dans les mêmes groupes au sein des classifications réalisées dans les sous-sections II.2.2.3, II.2.2.4 et II.2.2.5 (p. 224, 234 et 245), mis à part Lancelot et Gimelli, du groupe des « arpenteurs expérimentaux » de la 3ème classification (voir tableau A.2 p. 667). L'analyse spécifique de certains contenus est donc de nature à révéler des liens entre les auteurs à travers leurs écrits qu'un point de vue plus externe ne permet pas de repérer. Parallèlement, cette analyse distingue également des auteurs présentant des contenus plus singuliers, dont les ouvrages seront étudiés plus spécifiquement de manière qualitative.

Le thème des aires curvilignes se décline donc en trois sous-catégories, composées de l'aire du cercle, des aires délimitées par des courbes quelconques, et de celles des sections coniques, présentées dans notre propos par ordre décroissant d'importance, à la fois dans les programmes et dans les manuels du corpus. Notre étude quantitative

Licence CC BY-NC-ND 3.0

souligne que la situation chronologique d'une partie de ces savoirs est manifestement corrélée aux programmes en vigueur, comme le montre par exemple le cas de la formule de l'aire d'un segment parabolique. Ceci corrobore l'hypothèse que nous avons émise selon laquelle les contenus présentés sur ce thème le soient grandement en conformité avec les programmes officiels. Ces figures spécifiques sont liées, toutes ou en partie, à des problématiques scientifiques fortes, en lien avec la nature des nombres, les calculs, les constructions, et même l'analyse infinitésimale. En cela, les contenus de savoirs sur les aires curvilignes se positionnent à l'interface des domaines de la géométrie, de l'arithmétique et de l'analyse (voir le schéma II.46 p. 314). Cet aspect de l'interface constituée par ce thème spécifique n'est pas apparu lors des analyses des thèmes du rectangle et du théorème de Pythagore. Il s'agit donc manifestement d'une caractéristique originale de ce thème en particulier. En revanche, tout comme dans le cas du théorème de Pythagore, nous avons pu observer une stabilité global du thème, malgré des tendances temporelles dans le détail des contenus. En ce qui concerne les publics, le bilan est poche de celui énoncé pour les deux autres thèmes : les contenus des manuels sont adaptés à leur lectorat et en lien avec les programmes d'enseignement dont ils dépendent.

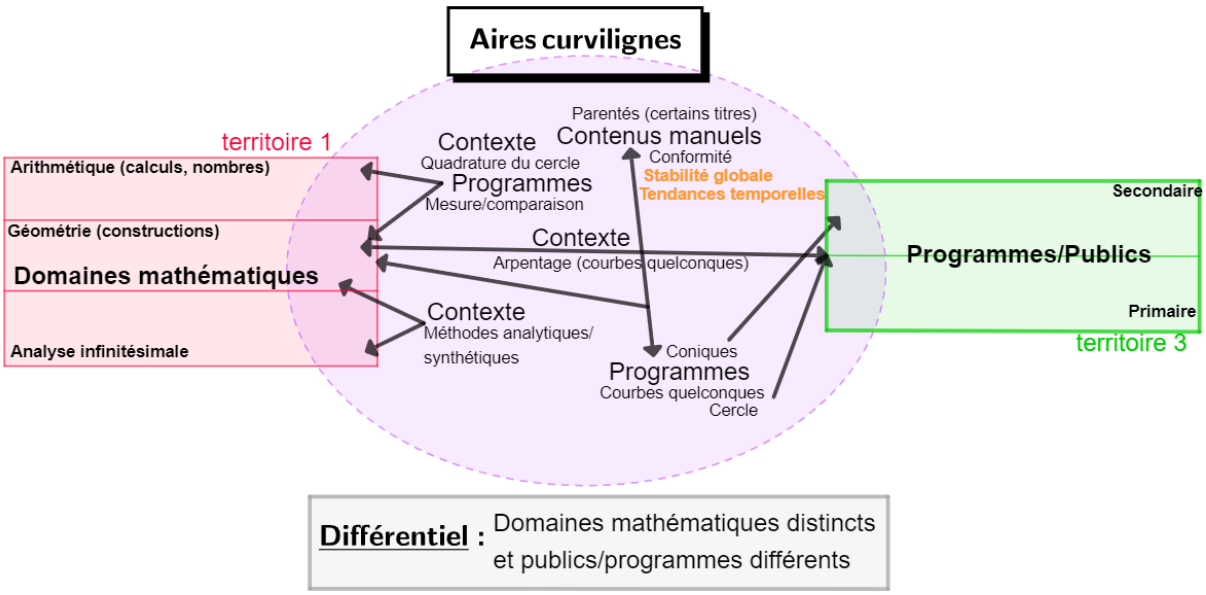


FIGURE II.46 – Schéma montrant en quoi les aires curvilignes, à travers leur place dans les programmes et les contenus associés dans les manuels, sont à l'interface des domaines mathématiques et des publics concernés, en lien avec les programmes d'enseignement dont ils dépendent

En ne facilitant pas leur accès au plus grand nombre, les obstacles mathématiques potentiels rencontrés lors de l'apprentissage des aires curvilignes font de l'établissement et de la présentation des résultats qui leur sont associés des défis pédagogiques. Les

Licence CC BY-NC-ND 3.0

premiers éléments d'analyse à leur sujet mettent également en avant des aspects de la tâche des auteurs de manuels, comme la contrainte de se conformer aux programmes, mais aussi les influences et inspirations plus ou moins directes qu'ils exercent entre eux au cours de la production de leurs contenus. Ce thème spécifique offre donc manifestement une richesse d'analyse toute particulière pour la suite de notre étude.

Conclusion

C'est en première lecture des manuels que nous avons pressenti l'intérêt intrinsèque des trois thèmes examinés dans cette section. L'analyse à la fois qualitative et quantitative que nous avons menée vient confirmer leur importance scientifique, curriculaire, et leur place substantielle dans les manuels. Nous sommes par conséquent à même de valider désormais le choix des ces trois thèmes principaux pour approfondir l'analyse qualitative des ouvrages du corpus. Plus précisément, ces trois notions sont remarquables par leur présence dans les programmes et les manuels, de manière unanime pour ce qui est des aires du rectangle et du cercle, très fréquente concernant le théorème de Pythagore, et un peu plus disséminée quant aux aires curvilignes quelconques et à celles des sections coniques. Toutes les trois s'inscrivent dans des enjeux de leur époque, tant scientifiques que pédagogiques : la détermination des aires du rectangle et du cercle renvoie à la nature des nombres et aux calculs, alors que le théorème de Pythagore, avec ses multiples preuves, stimule la créativité pédagogique des auteurs, en lien avec les courants du siècle sur les méthodes d'enseignement (voir la sous-section I.3.1.4 p. 117). La résolution des aires curvilignes, le cercle y compris, questionnent notamment l'usage de l'analyse infinitésimale en géométrie élémentaire. Ces trois grands thèmes relatifs aux aires jouent donc manifestement un rôle d'interface entre des connaissances mathématiques issues de divers domaines de la discipline, entre les pratiques de recherche et les différentes approches, méthodes et contenus d'enseignement, et également entre les périodes et les publics considérés (voir les schémas II.38, II.42 et II.46 p. 284, 299 et 314).

Plus généralement, l'étude de la géométrie des aires, considérée à travers ces trois angles particuliers, pose des questions transversales sur la conception de contenus adaptés à des publics précis, et en particulier sur la production de preuves dans divers contextes d'enseignement et en conformité avec les consignes officielles. À travers cette analyse, c'est également le rôle des auteurs de manuels et les relations qu'ils entretiennent que nous tenons à souligner, dans un travail exigeant à l'interface des pratiques scientifiques et pédagogiques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.4 Conclusion

Dans le travail que nous venons de mener, la richesse des sources consultées a joué un grand rôle, permettant de partir des considérations les plus générales sur les manuels de géométrie, à d'autres bien plus particulières à propos du corpus qu'elles ont contribué à constituer. Elles s'avèrent très complètes, tant chronologiquement que par leur nature, et offrent en particulier une lecture de la réception des manuels par les institutions, comme par les acteurs de terrain (chapitre II.1 p. 146). Ces documents officiels aussi nombreux que variés, associés au recensement des ouvrages d'enseignement de la géométrie permis par le dépouillement de la *BF* (sous-section II.2.2.5 p. 245), sont le fondement du corpus de 40 manuels sélectionnés pour l'étude qualitative de la troisième partie. Ce corpus, conformément à notre projet initial, offre une sélection de titres dont une grande partie montre une conformité aux attentes des acteurs éducatifs de l'époque, en termes de fond comme de forme, mais ne néglige pas les propositions plus singulières d'une partie des auteurs, exposant des contenus ou des méthodes d'enseignement relevant de choix plus personnels.

Dans la section II.2.2 (p. 205), une étude quantitative multi-critères a fait ressortir des caractéristiques des manuels, et également fait émerger à plusieurs reprises des hypothèses nouvelles.

— L'étude des réseaux de citations et intercitations des auteurs du corpus (sous-section II.2.2.1 p. 205) a mis en évidence une culture géométrique antique commune, mais aucun consensus sur des références partagées dans la période moderne. Les groupes d'auteurs appartenant aux même réseaux d'intercitations dégagés dans cette analyse montrent en outre une mixité entre ceux s'adressant plutôt au primaire ou au secondaire, ainsi que ceux suivant une approche d'enseignement davantage tournée vers la théorie ou la pratique. Les mondes relatifs aux deux ordres d'enseignement, et les pratiques pédagogiques qui leur sont fréquemment associées, ne présentent donc pas l'étanchéité que l'on pourrait supposer au premier abord.

— Les deux premiers volants de l'analyse quantitative des manuels du corpus (II.2.2.2 et II.2.2.3 p. 220 et 224) ont mis en évidence des situations paradoxales non envisagées initialement : les aires occupent peu de place en proportion dans les ouvrages de gros volume, et les titres présentant un grand nombre d'énoncés de savoir sur les aires montrent une faible pérennité. L'un des groupes de la première classification représentatif de cette situation est celui des « encyclopédiques ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— L'étude quantitative suivante intègre des critères de reconnaissance institutionnelle, de succès éditorial et de publics ciblés (sous-section II.2.2.4 p. 234). Les résultats obtenus dans ce cadre soulignent une forme de corrélation entre les publics primaires (élémentaires ou supérieurs) et des orientations plutôt pratiques pour l'enseignement, ce que montre par exemple la constitution du groupe 3 dans la seconde classification. Cette analyse met également en lumière le fait que les succès d'édition sont plutôt corrélés à la reconnaissance des acteurs de l'enseignement sur le terrain plutôt qu'à celle des institutions. La composition des groupes 5 et 6 de la seconde classification en témoigne particulièrement.

— La dernière partie de l'analyse quantitative (sous-section II.2.2.5 p. 245) s'attache aux contenus spécifiques des manuels en termes d'énoncés de savoir sur les aires. Elle révèle un équilibre entre les énoncés relatifs à la mesure et à la comparaison des aires, ainsi qu'entre ceux abordant les calculs et les constructions. Les orientations choisies par les auteurs en termes de types de contenus, axées sur une approche plus théorique ou plus pratique, sont fonction des publics auxquels ils s'adressent. De plus, la classification obtenue à l'issue de ce travail met à jour des tendances temporelles, avec par exemple, les ouvrages plus encyclopédiques situés en début de période, alors que ceux dédiés à des publics plus spécifiques paraissent plutôt à la fin.

— Finalement, ces trois classifications, résumées dans le tableau A.2 (p. 667) constituent un outil d'analyse pour la suite de notre travail. Nous pouvons y trouver rapidement les principales caractéristiques d'un ouvrage selon les critères pris en compte lors de la mise en place des classifications, et situer de la même manière ce manuel parmi ses pairs.

Les problématiques dégagées à l'issue du volant « quantitatif » de notre étude s'articulent autour de trois axes, au centre desquels la géométrie des aires semble jouer le rôle d'interface : les constructions géométriques, la nature des nombres et les calculs, et enfin l'analyse infinitésimale. Ces questions transversales sont mises en évidence par le choix des trois thèmes principaux que nous avons retenus pour mener notre étude, à savoir l'aire du rectangle, les aires délimitées par des courbes quelconques et celles délimitées par des sections coniques (chapitre II.3 p. 269). Pressentis comme féconds en première lecture des manuels, ils ont finalement été retenus, à la fois pour leur intérêt scientifique, pédagogique et leur impact possible dans des questions de société (comme par exemple les aires curvilignes dans l'arpentage), ainsi que pour leur présence forte et stable dans les programmes et dans les manuels. Ces qualités ont été confirmées par les analyses engagées dans ce chapitre (II.3 p. 269). Le cas de l'aire du rectangle montre de surcroît deux échelles de traitement possibles,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

avec des preuves à deux niveaux selon les publics ciblés. Le théorème de Pythagore manifeste plutôt une uniformité de traitement, mais met en évidence les interactions entre les pratiques de recherche et d'enseignement des auteurs de manuels. Les aires curvilignes sont diversement abordées, surtout déclinées suivant les objets qu'elles regroupent (cercle, coniques, courbes quelconques), et révèlent quant à elles des flux de connaissances possibles entre les domaines mathématiques de la géométrie, de l'arithmétique et de l'analyse infinitésimale.

L'analyse qualitative à venir a vocation à confirmer et à affiner la position de la géométrie des aires, à l'interface des autres pans de la géométrie et des sciences mathématiques en général, comme la géométrie des figures, l'arithmétique, l'analyse, et même l'algèbre. Ce faisant, c'est également la double exigence, scientifique et pédagogique, de la tâche qui incombe aux auteurs de manuels, que nous cherchons à mettre en valeur, en montrant comment ces derniers s'emploient à présenter les savoirs de la géométrie des aires dans un souci de rigueur comme d'intelligibilité.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III

La géométrie des aires : des contenus et des méthodes à l'interface des domaines mathématiques

Sommaire

Introduction **322**
III.1 La géométrie des aires comme géométrie des constructions **325**
III.1.1 La figure et sa construction, étapes intrinsèques au raisonnement et à la preuve 330
III.1.1.1 Les figures de l'« empilement » et de la « grille » pour déterminer l'aire du rectangle 332
III.1.1.2 De multiples figures au fondement des preuves possibles du théorème de Pythagore 343
III.1.1.3 Construire pour démontrer : le cas du cercle chez Legendre 367
III.1.1.4 La figure dans l'espace comme support d'une preuve dans le cas des coniques 376
III.1.1.5 Conclusion 384

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.1.2 La figure comme médiation entre un savoir géométrique et sa représentation . . . 387
III.1.2.1 Une approche graphique de la similitude . . . 388
III.1.2.2 Dupliquer des carrés, agrandir, réduire . . . 395
III.1.2.3 Les « images figuratives » au service de la géométrie des aires . . . 403
III.1.2.4 Conclusion . . . 414
III.1.3 La construction comme savoir-faire à maîtriser . . . 415
III.1.3.1 La quadrature des polygones . . . 417
III.1.3.2 La quadrature du cercle . . . 427
III.1.3.3 Du terrain au papier, et vice-versa . . . 434
III.1.3.4 Conclusion . . . 441
III.2 Nombres et calculs dans la géométrie des aires . . . **446**
III.2.1 De la comparaison à la mesure des aires, les cas du rectangle et du cercle . . . 450
III.2.1.1 Le cas du rectangle . . . 451
III.2.1.2 Le cas du cercle et de l'ellipse . . . 462
III.2.2 Entre comparaison et mesure, le rôle des proportions et de l'unité . . . 465
III.2.2.1 Proportions et unités dans la détermination de l'aire du rectangle . . . 465
III.2.2.2 Figures semblables, proportions et théorème de Pythagore . . . 473
III.2.2.3 Le langage des unités comme médiateur entre grandeurs et nombres : le cas du rectangle . . . 484
III.2.2.4 Le théorème de Pythagore : le langage comme médiateur entre les théories . . . 495
III.2.3 Aspects opératoires : procédures de calcul et formules algébriques . . . 499
III.2.3.1 Le système métrique et la mutation des unités . . . 501
III.2.3.2 Les interactions entre le géométrique et le numérique en géométrie pratique . . . 514
III.2.3.3 Techniques de calcul et gestion des erreurs à propos de l'aire du disque . . . 523
III.2.3.4 L'apport de l'algèbre à la géométrie des aires . . . 541
III.2.4 La nature des nombres en question . . . 570
III.2.4.1 La nature de $\sqrt{2}$ en conséquence du théorème de Pythagore . . . 571

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.2.4.2 L'incommensurabilité dans le cas de l'aire du rectangle 575
III.2.4.3 La nature de π au cœur du problème de la quadrature du cercle 586
III.3 La méthode infinitésimale en géométrie des aires **597**
III.3.1 Les limites comme réponse à l'incommensurabilité 599
III.3.1.1 La théorie des grandeurs proportionnelles 599
III.3.1.2 L'analyse : infiniment petits et passage à la limite . . 606
III.3.2 Infiniment petits et limites pour la détermination des aires curvilignes 616
III.3.2.1 Le cas du cercle 616
III.3.2.2 Les aires curvilignes quelconques 629
III.3.2.3 Les coniques 641
Conclusion générale **655**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Introduction

En étudiant les contenus relatifs à la géométrie des aires dans les manuels du corpus, ce sont les enjeux et processus de la production de tels supports d'enseignement que nous souhaitons mettre au jour, en lien avec le développement de la géométrie. Au tournant du XIX^{e} siècle, à une période de restructuration complète des structures éducatives, le rôle des auteurs, à l'interface entre la production de savoirs scientifiques et de contenus d'enseignement, est souligné par certains de leurs contemporains. Un premier témoignage dans ce sens émane de l'auteur anonyme d'un article rédigé pour un périodique intitulé *La décade Philosophique, littéraire et politique* en 1796, à l'occasion de la critique d'un manuel de calcul :

> L'auteur d'un livre élémentaire se met au rang des inventeurs, lorsqu'il dispose, le premier, les élémens dans l'ordre le plus convenable, le plus simple, le plus clair ; lorsqu'il débarrasse la science de tout échafaudage technique ; lorsqu'après chaque pas il montre l'espace parcouru, de manière que l'élève sache toujours bien où il est. (cité dans Schubring 1987, p. 43, 2019, p. 130)

Une analyse proche de la première, dont l'auteur n'est pas non plus identifié, figure dans les *Procès-verbaux des séances de l'Académie* l'année suivante, à propos d'un rapport d'expertise d'un manuel de calcul différentiel de Lacroix [1] :

> Présenter avec clarté des théories difficiles, les lier avec d'autres théories connues, dépouiller quelques unes de la partie systématique ou erronée, dont elles ont pu être obscurcies à leur naissance, répandre sur le tout un

1. Pour plus de précisions, voir (Schubring, 1987, p. 49).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> égal degré de lumière et de précision, en un mot, faire un ouvrage qui soit à la fois élémentaire et à la hauteur de la science, tel est le but que s'est proposé le Cn [citoyen] Lacroix, et qu'il n'a pu remplir sans s'engager dans de profondes recherches et marcher souvent de front avec les inventeurs. (cité dans Schubring 1987, p. 43, 2019, p. 130)

Ces deux extraits relèvent la difficulté de la tâche qui incombe aux rédacteurs d'ouvrages d'enseignement, vus comme des sortes de funambules marchant sur une corde tendue entre la simplicité et la clarté de leur propos et sa précision ou sa rigueur scientifique, cette technicité les érigeant au rang d'inventeurs[2]. La virtuosité dont il est question ici réside assez clairement dans l'art de ce que Chevallard appelle la « transposition didactique », et qui consiste à transformer un contenu de savoir (« savoir savant ») en savoir à enseigner. Chevallard adapte en effet en 1985 le concept créé en 1975 par le sociologue Verret à la didactique des mathématiques en indiquant[3] :

> Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail » qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique. (Chevallard, 1985, p. 39).

Les historiennes et historiens des mathématiques et de leur enseignement ne sont pas sans souligner l'ampleur et l'exigence de ce travail. À propos de l'enseignement de l'arithmétique dans le primaire, Decayeux-Cuvilliers montre que l'école, à la fin du XIX^e siècle, a produit « un contenu mathématique "enseignable", s'attachant d'abord aux connaissances, aux contenus, à la finalité instructive, choisissant même de privilégier certains domaines (l'arithmétique par exemple) et ensuite à l'aspect éducatif » (Decayeux-Cuvillier, 2019, p. 263). Son analyse met en évidence les aspects principaux de cette démarche : le choix, dans des domaines spécifiquement identifiés, de contenus et de connaissances à enseigner, préalablement à leur transformation en objet d'enseignement, et en relation étroite avec les objectifs (instruction et/ou éducation) de cet enseignement. Pour le secondaire, et plus particulièrement en rapport avec les manuels scolaires et leurs auteurs, Lorenat exhibe ce processus, consistant à

2. Au sujet de Lacroix et de sa pratique de rédaction des manuels, Ehrhardt souligne qu'« elle réside dans le choix raisonné d'une source et son adaptation à un nouveau contexte d'enseignement ». Pour elle, il s'agit d'un travail intellectuel exigeant, « articulant l'expérience du métier et la mise à l'épreuve par l'usage, les exigences normatives sur ce qui constitue la bonne méthode pédagogique à diffuser parmi les professeurs, l'épistémologie issue de la pratique des mathématiques savantes [...], et la connaissance et la maîtrise de l'actualité mathématique qui autorisent l'incorporation de celle-ci au sein des contenus traditionnels » (Ehrhardt, 2009, p. 16).

3. Plus récemment, Hofstetter et Schneuwly explorent encore ce même processus des « savoirs en (trans)formation » chez l'ensemble des professionnels de l'enseignement et de la formation (Hofstetter et Schneuwly, 2009).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

sélectionner, organiser et présenter des objets mathématiques (dans ce cas, ceux de la « géométrie moderne » qui se développe au XIX^e siècle), qu'elle rattache à la démarche d'« élémentarisation » définie par Schubring (Lorenat, 2019, p. 104).

Ce dernier recourt en particulier aux idées de D'Alembert pour décrire et cerner cette « élémentarisation », consistant à bâtir des « livres élémentaires » pour enseigner à partir des « éléments » d'une science, c'est-à-dire « les propositions ou vérités générales qui servent de base aux autres, et dans lesquelles celles-ci sont implicitement renfermées » (cité dans Schubring 2019, p. 127). Pour D'Alembert, ces éléments forment des germes à partir desquels toute la connaissance de la science concernée peut être développée, l'objectif des ouvrages « élémentaires » produits étant de mettre ces savoirs « à la portée de tout le monde et sans obscurité » (cité dans Schubring 2019, p. 128). Le processus d'élémentarisation n'est pas sans lien avec le développement de la science elle-même, puisqu'en plus de constituer un support d'enseignement, les « éléments » fixent également « l'état des connaissances en mathématiques ou dans l'une de ses branches pour un certain temps et une certaine période » [4] (Schubring, 2019, p. 126-127).

L'étude des contenus sur les aires dans nos ouvrages se situe au cœur de ces questions de transposition didactique et d'élémentarisation d'une science. De surcroît, en plus des qualités d'ordre, de clarté et même de pureté requises, un autre aspect de la production de manuels scolaires transparaît dans les citations présentées en exergue de cette introduction, à travers l'évocation du lien « avec d'autres théories connues » (voir p. 322). Il s'agit en effet, pour les auteurs, de présenter leurs savoirs en tissant une toile qui les relie aux autres branches de la géométrie, des mathématiques ou même des sciences en général. De fait, au XIX^e siècle, les mathématiques ne forment pas encore une discipline unifiée, surtout dans le contexte de l'enseignement primaire. D'Enfert fait un état des lieux de l'utilisation du terme « mathématiques » dans les documents officiels régissant l'enseignement primaire, où son usage est loin d'être courant, les auteurs des textes privilégiant « au contraire une énumération des différentes matières enseignées : arithmétique, géométrie, algèbre, etc. » (D'Enfert, 2003c, p. 18). C'est également le résultat de l'analyse du *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson par Assude et Gispert, dans laquelle les autrices évoquent, à propos des mathématiques, « un territoire fractionné » entre « arithmétique », « géométrie », « algèbre », mais aussi « problèmes » ou encore « comptabilité » dans la première édition de 1882, territoire qui apparaît en revanche plus « unifié » sous l'entrée « mathématiques » dans la seconde édition de 1911 (Assude et Gispert, 2015). Le cas du secondaire est différent, dans

4. En anglais dans le texte « the state of knowledge of mathematics or of one of its branches for a certain time and period ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

lequel les mathématiques constituent une discipline reconnue comme telle dans les documents officiels depuis le début du siècle, même si elles apparaissent quelquefois sous la dénomination plurielle de « sciences mathématiques » (Belhoste, 1995). Quoiqu'il en soit, dans les manuels de géométrie à destination des deux ordres, une partie des connaissances présentées par les auteurs apparaissent comme connectées aux savoirs d'autres domaines, internes ou non aux sciences mathématiques, en amont ou en aval, parce qu'elles en constituent des pré-requis ou des applications. Dans ce cadre, la notion d'interface que nous mettons en avant pour l'analyse des contenus en géométrie des aires est toute indiquée, puisqu'elle est de nature à rendre compte de la situation et du rôle de ces savoirs à l'intersection des nombreux territoires des mathématiques.

Dans ce contexte général, où la rédaction de manuels de géométrie va de pair avec la création de contenus enseignables, en particulier sur les aires, le processus de transposition des savoirs engagé par les auteurs peut être analysé à l'aune de leurs productions dans les ouvrages d'enseignement. À la jonction entre pratique scientifique et pédagogique, leur rôle réside aussi dans la mise en place de liens que les publics auxquels ils s'adressent doivent tisser entre les connaissances de leurs différents domaines d'apprentissage. En ce sens, la nature des contenus de savoir sur les aires, et leur rôle à l'interface des connaissances mathématiques et scientifiques, est analysé dans cette partie sous les trois angles suivants : la géométrie des constructions, la nature des nombres et les calculs, et l'analyse infinitésimale, avec pour principal matériau les résultats sur les aires exhibés dans le chapitre II.3 (page 269), soit l'aire du rectangle, le théorème de Pythagore et les aires curvilignes.

III.1 La géométrie des aires comme géométrie des constructions

Nous avons vu que Chasles, au mitan du XIX^e^ siècle, distingue la géométrie des figures de la géométrie de la mesure, l'une s'intéressant aux propriétés des configurations géométriques, alors que l'autre vise à mesurer les longueurs des lignes, les aires des surfaces et les volumes des corps (voir page 112 dans la sous-section I.3.1.3). Cette séparation remonte aux origines de ces géométries, la première s'inscrivant dans la tradition euclidienne (Barbin, 1990), et l'autre davantage dans la lignée archimédienne, ainsi que celle des agrimenseurs médiévaux et de la science du mesurage développée en pays d'islam (Moyon, 2008, 2017). Elle fait écho à la dualité géométrie théorique/géométrie pratique courante au XIX^e^ siècle, et visible notamment dans les titres mêmes des ouvrages de géométrie de l'époque (voir la section I.3.2 p. 124). Ces

Licence CC BY-NC-ND 3.0

deux facettes renvoient également au double objectif que se donne alors l'enseignement de la géométrie, et dont le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson témoigne : représenter des objets géométriques et les mesurer (Assude et Gispert, 2015).

Les figures, objets constitutifs de l'étude de la géométrie, présentent elles aussi un statut pluriel et discuté, entre la figure idéale, « pur objet de pensée ayant pour fonction de servir de support à des raisonnements abstraits » (Tournès, 2001, p. 117), et la figure sensible, matérialisation d'une pratique gestuelle, voire instrumentale. Ces deux conceptions n'entrent néanmoins pas en opposition, mais ont plutôt vocation à se compléter, comme le précise Tournès, qui bat en brèche la prétendue aversion de Platon pour le caractère sensible des représentations géométriques. Au contraire, selon le philosophe, l'accès à la connaissance d'un objet passe par plusieurs facteurs, dont l'un est « l'image représentée ». C'est par la manipulation des figures « que l'on dessine et que l'on efface » que l'on accède à « la compréhension de leurs propriétés par la pensée pure » (Tournès, 2001). Entre les deux étapes, l'idéal et le sensible, se trouve la construction géométrique, activité pratique intermédiaire, sorte de médiation entre un concept et sa représentation. Pour Netz, le diagramme lettré, figure géométrique caractéristique de l'Antiquité grecque, ne constitue ni la représentation, mentale ou imaginée, d'un objet mathématique idéal ni l'« instanciation »[5], via une construction pratique effective, d'une situation géométrique. Il se situe entre les deux, et représente un « ersatz », ou « faux-semblant »[6] de l'objet qu'il est censé représenter, lui étant en tout point similaire, fonctionnellement identique, et n'étant jamais remis en question au cours du processus de preuve[7] (Netz, 2009, p. 54-56).

Le statut des figures et des constructions est toujours discuté au XIX^e siècle, particulièrement en lien avec l'enseignement de la géométrie. Dans la mouvance des idées de géomètres suisses et allemands tels que Steiner[8], von Staudt[9], ou encore Hilbert[10],

5. « instantiation » en anglais dans le texte, qui signifie, d'après le *Cambridge dictionary* : « something that represents or is an example of something else, or the act of producing something like this » (« quelque chose qui représente ou qui est un exemple de quelque chose d'autre, ou l'acte de produire une telle chose. »). Le terme en français est plutôt utilisé en informatique, au sens de « réplication » ou de « clonage », désignant le processus de création d'un nouvel objet à partir d'un modèle ou d'un objet existant.

6. « make-believe » en anglais dans le texte.

7. En anglais dans le texte : « it is similar to the intended object ; it is functionally identical to it ; [...] it is never questioned » (Netz, 2009, p. 56).

8. Steiner Jakob (1796 – 1863), mathématicien suisse connu pour ses travaux en géométrie synthétique, il a exercé ses fonctions de professeur de géométrie en Allemagne, notamment à Berlin.

9. von Staudt Karl Christian (1798 – 1867), mathématicien bavarois qui a développé une géométrie dite « de position ».

10. Hilbert David (1862 – 1943), mathématicien allemand célèbre, entre d'autres nombreux travaux, pour son ouvrage décisif concernant l'axiomatisation de la géométrie, ainsi que pour l'énoncé de 23 problèmes à la Sorbonne en 1900, dont certains ne sont toujours pas résolus.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

l'abandon du recours systématique aux figures est en effet préconisé par certains auteurs, particulièrement en géométrie dans l'espace, au profit du développement de « la puissance intrinsèque de la représentation mentale » (en allemand le « Vorstellungskraft ») (Lorenat, 2020). Cette géométrie sans, ou avec moins de figures, se développe notamment dans le contexte de l'émergence de la statique graphique [11], dont Culmann et Reye [12] sont les porte-drapeaux outre-rhin. En effet, inscrivant leurs travaux dans le sillage de l'ouvrage de von Staudt, qui constitue d'après eux un véritable pré-requis pour leurs cours, Culmann et Reye ne s'interdisent pas le recours aux figures dans leurs livres, mais incitent leurs lecteurs à parvenir à s'en passer, notamment en réalisant leurs propres constructions (Lorenat, 2020). L'objectif est dans un premier temps de se détourner de l'intuition en géométrie et de produire des preuves totalement indépendantes des figures, ce qui marque un pas vers une approche plus axiomatique de la géométrie, qui se verra formalisée par Hilbert. Un autre objectif est l'appropriation des savoirs par les élèves à travers leur construction personnelle des figures.

En France, la géométrie descriptive occupe une place très importante dans l'enseignement supérieur, notamment à l'École Polytechnique. Ceci explique sans doute en partie le point de vue différent exprimé par Gergonne au sujet des constructions de figures en 1826. Ce dernier suggère aux lecteurs de ses *Annales de mathématiques pures et appliquées* de « construire et façonner à [leur] gré » les figures relatives au texte qu'ils ont sous les yeux, estimant les figures en géométrie dans l'espace « plus embarrassantes qu'utiles » (cité dans Lorenat 2020) [13]. La difficulté de lecture des figures dans l'espace est reprise par Méray dans l'introduction de ses *Nouveaux éléments de géométrie* en 1874, qui préfère « renoncer à adjoindre des figures en perspective » à son texte, afin de ne pas ajouter à la difficulté des commençants « celle toute gratuite de déchiffrer des dessins plans construits d'après des conventions qui ne leur sont pas familières » (Méray, 1874, p. xii). D'ailleurs, il précise en note dès la première page de son ouvrage que « le lecteur est expressément invité à suivre les démonstrations sur des figures qu'il tracera lui-même, soit d'après les planches, soit d'après les indications du texte » (Méray, 1874, p. 1). L'idée générale est ainsi de s'appuyer davantage sur une représentation mentale que sur une figure et de pratiquer la construction géométrique comme un exercice révélant la bonne compréhension d'une preuve, car, selon von Staudt, « ce n'est qu'après

11. Il s'agit d'un domaine appliqué pour lequel les techniques géométriques sont utilisées pour l'étude des forces en équilibre.

12. Karl Culmann (1821 – 1881), est un ingénieur et mathématicien allemand, et Theodore Reye (1838 – 1919) un mathématicien allemand. Pour se faire une idée de leurs travaux respectivement en statique graphique et géométrie de position, voir (Lorenat, 2020).

13. La tendance à insérer moins d'images dans les revues mathématiques françaises et allemandes au cours du siècle est également expliquée par des raisons d'ordre éditorial et typographique par Verdier dans (Verdier, 2015).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

avoir construit la figure d'une démonstration, par lui-même et sans idée préconçue, que nous croyons que le lecteur peut supposer qu'il la maitrise » (cité dans Lorenat 2020).

Par sa présence ou son absence, la figure géométrique montre son importance dans le processus d'appropriation des raisonnements mathématiques, comme un support de réflexion sensible ou imaginaire, et tous les mathématiciens ne partagent visiblement pas la même culture de lecture des figures géométriques. Mais au XIX^{e} siècle, une autre caractéristique des figures est interrogée : celle des tracés et des constructions. En effet, les problèmes de construction restent très présents dans les manuels de l'époque, comme l'indique Moussard dans sa thèse (Moussard, 2015). Néanmoins, ils ne présentent pas le même rôle et le même statut que dans la géométrie euclidienne, où « l'ordre déductif [...] impose [...] que les figures soient construites avant d'établir les théorèmes qui s'y réfèrent, théorèmes qui à leur tour sont utilisés pour construire de nouvelles figures » (Moussard, 2015, p. 111) [14]. Dans les trois traités de référence en géométrie au tournant du siècle, les problèmes de construction jouent des rôles assez différents : applications des propositions théoriques chez Bézout, avec pour objectif leur mise en pratique dans le cadre de l'art militaire, corollaires annexés aux théorèmes, isolés à la fin de chaque livre, et qui en illustrent la mise en œuvre chez Legendre, ou encore occasions de s'exercer au tracé géométrique, en alternance avec les théorèmes dont ils permettent d'approfondir la compréhension chez Lacroix (Moussard, 2015, p. 132). Suivant les cas, les constructions graphiques sont requises ou non comme solutions des problèmes posés. Quand l'analyse algébrique (au sens cartésien) est mobilisée, un problème de construction peut se solutionner par le résultat d'un calcul. La construction de la ligne obtenue à la règle et au compas peut alors être considérée comme facultative, comme chez Lacroix, ou donner lieu à un tracé effectif systématique, comme chez Bézout (Moussard, 2015, p. 49, 55). La question des constructions de tracés géométriques ne concerne pas que l'enseignement secondaire et est même au cœur des considérations de ceux qui ont pour mission d'« inventer une géométrie pour l'école primaire au XIX^{e} siècle » (D'Enfert, 2003a). En effet, la création d'un enseignement de la géométrie pour les écoles primaires supérieures, institué par Guizot en 1833, s'effectue conjointement au développement du dessin linéaire, qui doit « préparer au cours de géométrie auquel il est étroitement lié, mais sert en même temps à appliquer les notions théoriques étudiées » (D'Enfert, 2003a). La nécessité de maîtriser, en plus du dessin à main levée, le « tracé géométrique » avec des instruments (règle et compas), relie même cet enseignement avec celui du « travail manuel », puisqu'il s'agit bien alors d'acquérir de la précision et de la sûreté dans le geste.

14. Dans le contexte de la géométrie euclidienne, les constructions s'entendent forcément réalisées à la règle et au compas.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

L'art de la construction géométrique apparaît donc comme le pendant pratique de la capacité à raisonner à partir d'une figure, qu'elle soit idéale ou sensible. Mais une autre fonction de la figure prend de l'ampleur au cours du siècle, en lien avec les avancées des techniques d'impression : celle de l'illustration, qui, dans le cas de la géométrie, joue le rôle de facilitateur de la compréhension des élèves en proposant une représentation visuelle ou mentale d'un savoir. Dans leur étude des illustrations dans les manuels d'arithmétique du XIX^e siècle, Frizzarini et Legros distinguent les « schémas », qui ont valeur de généralité, des « dessins » à valeur simplement illustrative (Legros et Boen Frizzarini, 2018, p. 9). Dans les parties relatives à la géométrie des manuels de la fin du siècle, les schémas sont de plus en plus nombreux, et d'autant plus que le niveau du lectorat est élevé [15]. Les schémas géométriques constituent « une aide très précieuse pour conceptualiser le savoir mathématique et en permettre l'appropriation par l'élève », puisqu'ils accompagnent le chemin vers l'abstraction par le support sensoriel que forme l'image (Legros et Boen Frizzarini, 2018, p. 9). Cette dimension pédagogique de la figure géométrique s'inscrit ainsi dans le contexte de l'émergence de nouvelles méthodes d'enseignement au cours du siècle, recourant de plus en plus à l'intuition, aux sens et même à l'expérimentation (voir la sous-section I.3.1.4 p. 117).

Le rôle et le statut des figures et des constructions apparaissent donc sous trois formes dans le contexte de l'enseignement de la géométrie du XIX^e siècle : tout d'abord comme un maillon constitutif du raisonnement, voire son objet même, en tant que figure sensible ou simplement imaginée ; ensuite comme la médiation entre un savoir géométrique et sa représentation, permettant d'en saisir les propriétés par la perception visuelle ; enfin comme le fruit d'un savoir-faire technique, le tracé géométrique [16]. Ces fonctions ne sont pas nouvelles et sont déjà présentes, au moins pour les deux premières, dans la géométrie grecque, comme l'a montré Netz. La dernière renvoie à la conception newtonienne, selon laquelle l'apprentissage de ces constructions ne relève pas de la géométrie, et que la maîtrise des tracés qu'elle suppose demeure une activité pratique, externe et préalable à la géométrie :

> La géométrie ne nous apprend pas à tracer des lignes, elle les suppose tracées ; il est donc nécessaire qu'avant de commencer la géométrie, on apprenne comment tracer les lignes de façon précise, on peut alors voir comment ces opérations permettent de résoudre les problèmes. Les constructions de lignes droites et de cercles sont des problèmes, mais non des

15. D'après les auteures de l'étude, les schémas atteignent 82 % des illustrations du manuel dans la *Deuxième année d'arithmétique* de Leyssenne en 1895 (Legros et Boen Frizzarini, 2018, p. 9).

16. Cette question du tracé est également centrale dans les enseignements de dessin sur modèle à l'École Polytechnique dans le premier XIX^e siècle, comme le montre Brechenmacher (2022). L'un des enjeux de cet apprentissage dans l'enseignement intermédiaire est donc également d'assurer la continuité des compétences de dessin avec le supérieur.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> problèmes de géométrie. La solution de ces problèmes relève de la mécanique et ceux-ci résolus, la géométrie en montre l'usage. [...] Ainsi la géométrie est fondée sur la mécanique pratique, elle n'est rien d'autre que cette partie de la mécanique universelle qui précisément s'occupe de l'art de mesurer.[17] (cité dans Dhombres 1993, p. 284)

Les liens entre figure idéale et figure sensible sont donc étroits dans le cadre de l'apprentissage de la géométrie, et forment un tout dans lequel le pratique répond au théorique et réciproquement, avec le geste de la construction comme intermédiaire. Autour de la figure géométrique se jouent les processus cognitifs d'apprentissage fondés sur le développement de la capacité d'abstraction et de raisonnement à travers le geste et le support visuel, réel ou imaginé.

Explorer le rôle des figures et des constructions en géométrie ne nous éloigne pas de la question de la mesure ou de la comparaison des aires. Au contraire, cette investigation donne justement l'occasion de nous interroger sur les relations que peuvent avoir ces deux pans de la géométrie, et s'il est possible de considérer également la géométrie des aires comme une géométrie des constructions. L'étude à suivre propose donc d'explorer cette question en examinant les savoirs relatifs à la géométrie des aires sous les trois angles abordés dans cette introduction, afin de déterminer le rôle joué par la construction géométrique dans les énoncés sur les aires, en tant qu'arguments entrant dans les raisonnements et preuves, en tant que support intermédiaire entre un concept et sa représentation, permettant d'en faciliter la compréhension, ou encore comme un geste technique à savoir réaliser, enjeu à part entière de l'enseignement des aires.

III.1.1 La figure et sa construction, étapes intrinsèques au raisonnement et à la preuve

Dans son analyse de « la figure dans le discours géométrique », Dhombres dresse un panorama par petites touches du rôle des figures dans les preuves en géométrie à travers l'histoire. Il met en évidence notamment deux fonctions particulièrement à même d'être mobilisées dans le cadre de notre travail : « la figure comme superposition » et « la figure portant le discours géométrique » (Dhombres, 1993, p. 51, 76). Pour ce

17. En anglais dans le texte : « Geometry does not teach us to draw these lines, but requires them to be drawn, for it requires that the learner should first be taught to describe these accuralely before he enters upon geometry, then it shows how by these operations problems may be solved, To describe right lines and circles are problems, but not geometrical problems. The solution of these problems is required from mechanics, and by geometry these use of them, when so solved is shown. [...] Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but the part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring » (Newton, 1962, p. xvii).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

qui est de la première, il se réfère à Proclus, commentateur d'Euclide, pour lequel la construction est l'une des six parties constitutives de toute proposition, positionnée après l'énoncé, l'exposition et la détermination, et avant la démonstration et la conclusion (Dhombres, 1993, p. 51-52 ; Vitrac, 2012, p. 10). D'après Dhombres, la phase d'exposition (description de la situation géométrique initiale) porte déjà en elle-même le tracé d'une figure, « effectué en simultanéité avec le parcours énonciatif des données » (Dhombres, 1993, p. 51), en reportant les noms des éléments de la proposition. La détermination (constatation de ce qui découle de cette situation géométrique) quant à elle est une forme d'expression de ce qui peut être lu sur la figure ainsi constituée. La phase de construction qui suit « ajoute au donné ce qui manque pour obtenir le cherché », c'est-à-dire prépare le raisonnement en rajoutant les tracés, points et autres éléments permettant sa compréhension. Durant ces trois étapes, le rôle de la figure est donc central, et montre le résultat de ces trois paliers successifs sous une forme finale exprimant la « superposition des données », où les nouveaux tracés se placent sur la figure initiale comme une sorte de calque (Dhombres, 1993, p. 51-53). Dans le cas d'une figure « portant le discours géométrique », il emprunte comme exemple les figures relatives à la quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent au XVII^e siècle, montrant que les deux figures proposées par l'auteur en vis-à-vis se répondent et présentent une réelle « dynamique démonstrative ». Si les périodes qu'il considère et les exemples qu'il exhibe ne sont pas toujours reliés au fond de notre étude, le cadre général qu'il dépeint nous apparaît comme pertinent et applicable dans le contexte de notre travail sur la géométrie des aires, d'autant que comme Dhombres l'écrit en note, « au cours des siècles, depuis l'imprimé à tout le moins, la définition "euclidienne" de la figure a influencé la pratique des figures illustratives » (Dhombres, 1993, p. 83).

Ces deux visions des figures et des constructions, étapes intrinsèques à la formation du raisonnement au cours d'un processus de preuve, et participant même parfois au caractère dynamique d'une démonstration, trouvent leur écho dans les cas auxquels nous nous intéressons en géométrie des aires au XIX^e siècle, en particulier relativement à la mesure du rectangle et du cercle, mais aussi dans le cadre des preuves du théorème de Pythagore et de l'aire de l'ellipse. Dans tous ces cas, la construction géométrique, véritable « élément constitutif » (Dhombres, 1993, p. 59) de la preuve, se situe en effet, à travers son produit final qu'est la figure, à l'interface entre l'abstrait (le texte et son sens mathématique) et le concret (les lignes tracées). De surcroît, la figure s'avère complémentaire au texte écrit, en portant des informations qui ne sont pas explicites dans l'énoncé, et se substitue même parfois presque entièrement au texte. C'est ce rapport à la fois riche et varié qu'entretiennent la construction et la figure avec les textes des preuves que nous nous proposons de questionner tout particulièrement dans le cadre de la géométrie des aires.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.1.1.1 Les figures de l'« empilement » et de la « grille » pour déterminer l'aire du rectangle

De nombreux auteurs (30 sur les 40 ouvrages du corpus) font le choix de traiter la preuve de leur premier énoncé sur l'aire du rectangle, qu'il s'agisse du théorème de mesure ou de comparaison [18], uniquement dans le cas où les longueurs en jeu ont une commune mesure (voir la sous-section II.3.1.3 p. 275) [19]. Dans ce contexte, deux figures reviennent systématiquement lors des preuves produites : celle que nous nommons « empilement » dans le cas du rapport des aires des rectangles de même base ou hauteur, et celle de la « grille », dans le cas de la formule de l'aire du rectangle.

Cinq auteurs prouvent d'abord le théorème de comparaison des aires des rectangles de même base ou hauteur et mobilisent la figure que nous désignons par « empilement » [20] comme support au raisonnement nécessaire à leur preuve. Bergery (1828, p. viii) et Leyssenne (1890, p. 206) présentent cette figure disposée à l'horizontale, alors que chez Percin (1842, pl. 2), Amiot (1859, p. 145) et Girod (1893, p. 182), elle apparaît avec une disposition verticale (voir figure III.1 p. 333) [21]. Dans tous ces cas, les auteurs traitent la question à travers un cas générique, c'est-à-dire avec un rapport fixe donné (comme un rapport de 3 à 2 pour Bergery, de 3 à 4 pour Percin ou encore de 5 à 2 pour Girod), qui pourra être généralisé à tout autre rapport de même nature.

Observons les rouages de la preuve chez Bergery. Après avoir énoncé que « le rapport de deux rectangles $ABCD$, $EFGH$ qui ont même hauteur AD ou EH, est égal à celui de leurs bases CD, GH », le géomètre s'attache particulièrement au cas où « $CD : GH :: 3 : 2$ » [22], et commence la preuve en écrivant :

> Si l'on partage CD en trois parties égales et GH en deux parties égales, les premières auront même longueur que les secondes. Par les points de division I, K, L, soient élevées IM, KN, LO perpendiculairement sur les

18. Il s'agit soit de l'énoncé 1 « l'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur » ou de l'énoncé 5 « deux rectangles de même hauteur (resp. base) sont entre eux comme leurs bases (resp. hauteurs). ».

19. Le lien entre la géométrie des aires et la nature des nombres sera exploré dans la section III.2.4 p. 570. Dans cette section, c'est le rôle spécifique des figures et des constructions qui est l'objet de notre analyse. Nous précisions néanmoins que ces dernières sont issues de situations où les dimensions des rectangles ont pour rapports des quotients d'entiers.

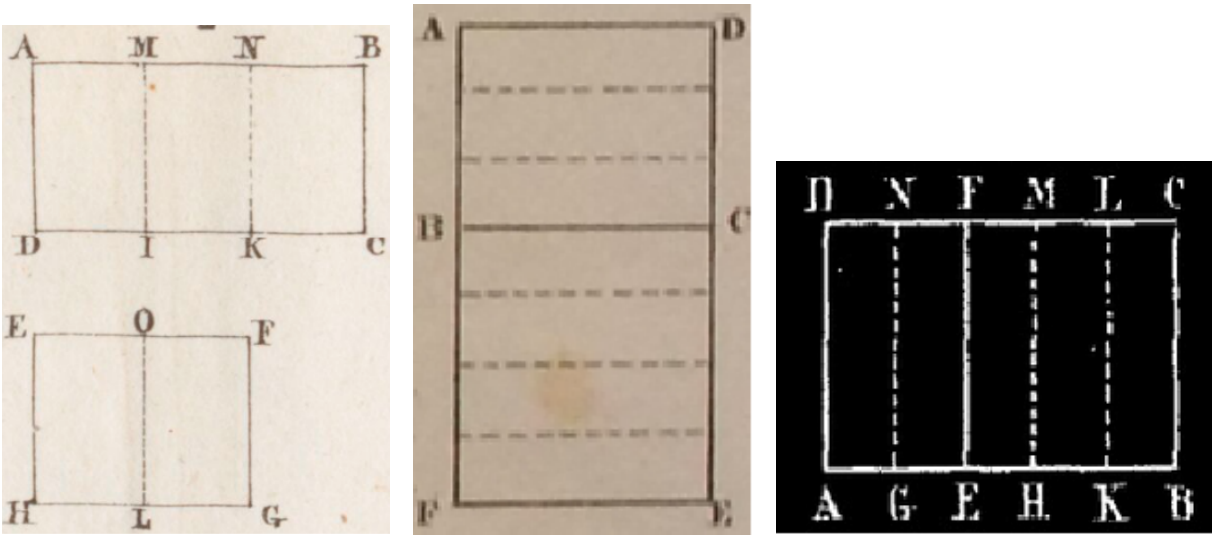
20. Cette expression et les suivantes indiquées entre guillemets, représentent également la manière dont nous avons choisi de les décrire et non les formulations des auteurs.

21. Il est à noter que la disposition horizontale ou verticale de la figure dépend de la dimension fixée dans l'énoncé, les bases étant systématiquement représentées horizontalement, et les hauteurs verticalement. Le traitement mathématique de la question demeure néanmoins similaire dans les deux cas.

22. Ce qui se lit : « CD est à GH comme 3 est à 2 ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> bases CD, GH ; il en résultera des rectangles $ADIM$, $IKNM$, $CKNB$, $HLOE$, $LOFG$ dont les bases seront égales et qui auront même hauteur. Ces cinq rectangles seront donc équivalens. Or, $ABCD$ en contiendra trois, $EFGH$ en contiendra deux ; le petit rectangle sera donc les deux tiers du grand. (Bergery, 1828, p. 207)



(a) chez Bergery (1828, p. viii) **(b)** chez Percin (1842, pl. 2) **(c)** chez Girod (1893, p. 182)

FIGURE III.1 – Figure de l'empilement des rectangles

Dans cet extrait apparaît bien l'entremêlement des éléments de construction avec les arguments géométriques. Les actions relatives aux tracés nécessaires à la figure semblent avoir des conséquences géométriques directes, le partage des lignes CD et GH en respectivement deux ou trois parties égales impliquant immédiatement l'égalité des segments ainsi formés, puis les perpendiculaires élevées sur les bases générant de manière directe des rectangles équivalents (car ayant la même base et la même hauteur). La « contenance » des grands rectangles découle manifestement de la figure obtenue puisque l'affirmation « $ABCD$ en contiendra trois, $EFGH$ en contiendra deux » n'est étayée par aucun argument supplémentaire. La conclusion s'impose alors. La preuve, qui est intégrée à la construction de la figure, a pour argument explicite l'égalité des rectangles obtenus en découpant les rectangles initiaux, et l'additivité sous-jacente des aires comme argument implicite. La démonstration est courte, et son efficacité tient à son appui direct sur la figure construite pas à pas, qui constitue un argument déductif en soi. Les démonstrations des quatre autres auteurs qui l'effectuent dans le même cas sont très sensiblement identiques à celle de Bergery, présentant les mêmes arguments et le même mélange entre preuve et construction. En revanche, la généralisation du résultat à d'autres cas numériques, la plupart du temps sous-entendue, ne l'est pas

Licence CC BY-NC-ND 3.0

chez Bergery, qui indique en définitive qu'« on sent bien qu'il en serait de même pour tout autre rapport des bases » (Bergery, 1828, p. 207).

Parmi les 23 auteurs qui démontrent la formule de l'aire du rectangle dans le seul cas où les côtés ont une commune mesure, et en tant que première preuve au sujet de l'aire du rectangle, 21 s'appuient sur la figure de la grille. Parmi les deux qui restent, seul Desnanot, dont nous analyserons la preuve ultérieurement (p. 337), fonde son raisonnement sur d'autres figures (Desnanot, 1835). Quant à Salicis, il décrit cette figure, et s'en sert de support de pensée, mais sans la représenter concrètement dans son texte, laissant le soin à ses lectrices de le faire (Salicis, 1869, p. 494).

Pour illustrer le type de raisonnement relatif à la figure de la grille (voir figure III.2 p. 334), lisons ce qu'explique Dupin dans sa *Géométrie et mécanique des arts et métiers* en 1828 (Dupin, 1828, p. 124-215) :

> Divisons MQ, en parties égales au côté AB du quarré $ABDC$ pris pour unité. Par les points de division, menons des droites parallèles à MN ; elles partageront le rectangle en bandes ayant toutes MN pour longueur, et même largeur que le quarré. Chaque bande contient la superficie d'autant de quarrés $ABDC$, que MN contient de fois AB. Donc, MN étant exprimée par des nombres, lorsque AB est l'unité, le nombre de quarrés $ABDC$ que le rectangle $MNPQ$ contient, est représenté par la base MN multipliée par la hauteur MQ.

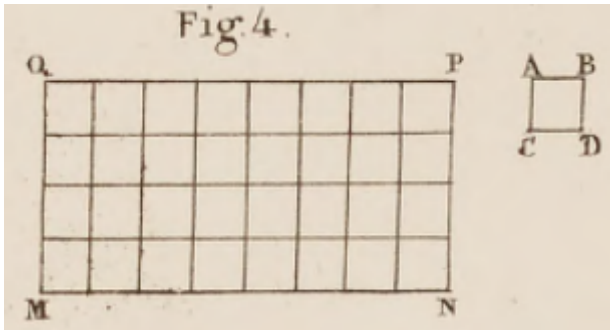


FIGURE III.2 – Figure de la grille chez Dupin (1828, pl. vie leçon)

Comme dans le cas de l'empilement, la démonstration présente presque exclusivement des étapes constructives, sous formes de diverses divisions et partages par des lignes parallèles. Les arguments géométriques relèvent alors de l'égalité des longueurs des segments obtenus et des « contenances » [23] des bandes rectangulaires formées. La

23. En référence au verbe « contenir » de la preuve.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

construction n'est pas seulement la réalisation de la figure qui soutient le raisonnement : la tracer étape par étape participe pleinement à l'argumentaire consistant à dénombrer les carrés unités de la grille et à faire le parallèle avec une situation multiplicative. L'exposé semble suffisamment explicite pour les élèves auxquels les auteurs s'adressent pour qu'il ne nécessite pas de développement supplémentaire. Cette figure, qui contient pratiquement entièrement le raisonnement de la preuve, forme un standard, qui se retrouve presque littéralement dans chacun des ouvrages considérés dans cette section.

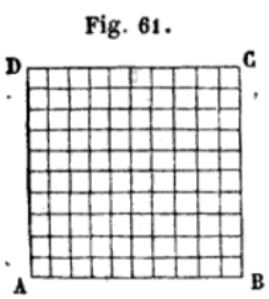
Dès les ouvrages classiques de Lacroix et Legendre, la force de conviction d'une figure comme celle de la grille est déjà mise en évidence. Lacroix, quand il énonce la formule de l'aire du rectangle, indique que « la vérité de la proposition précédente résulte de l'inspection seule de la figure » (Lacroix, 1808, p. 114), en se référant à une figure ordinaire de pavage du rectangle par des carrés, en grille de quatre lignes et six colonnes[24]. Quant à Legendre, il argumente, dans une « scholie », le choix du carré comme unité de surface, en précisant : « le nombre 30, par lequel nous avons mesuré le rectangle A, représente 30 unités superficielles, ou 30 de ces quarrés [*sic*] dont le côté est égal à l'unité : c'est ce que la fig. 102 [grille de 3 lignes et 10 colonnes] rend sensible. » (Legendre, 1823, p. 66). Lacroix et Legendre développent par ailleurs des preuves mathématiques formelles des propositions énoncées, et ces considérations relèvent pour eux davantage du complément d'explication. Ils cherchent par ce biais à rendre les résultats théoriques préalablement démontrés plus accessibles et perceptibles pour les élèves. Leur démarche est, en cela, très éloignée de celle de Mathieu Bransiet, frère des écoles chrétiennes, qui, à la question qu'il pose dans son ouvrage « Quelle est la surface du rectangle ? », propose comme seule réponse : « C'est le produit de l'un des grands côtés par son adjacent. Qu'on divise le rectangle $ABCD$ de la même manière que la figure précédente, et on verra la preuve de cette règle. » (L.C. et F.P.B., 1840, p. 51). Cette affirmation est accompagnée d'une figure de grille de 5 lignes et 4 colonnes, qui fait ici office de preuve, montrant que pour certains auteurs, le discours accompagnant la figure est dispensable, l'image schématisée constituant un argument suffisant.

La figure de la grille est également mobilisée dans l'un de ses cas particuliers, celui de la grille carrée. Des auteurs, à l'instar de Briot et Vacquant, s'appuient sur cette figure pour expliquer le système d'unités décimales pour les surfaces (voir figure III.3 p. 336), et les relations entre elles, comme par exemple le fait que « l'hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés ou 10 000 mètres carrés ; le kilomètre carré vaut 100 hectomètres

24. Nous choisissons dans cette section de ne pas montrer systématiquement les figures des grilles, qui sont toutes similaires à la figure III.2 (p. 334), au nombre de lignes et de colonnes près (que nous précisons par ailleurs).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

carrés ou un million de mètres carrés, [...] le décimètre carré est la centième partie du mètre carré, le centimètre carré la centième partie du décimètre carré » (Briot et Vacquant, 1859, p. 49). Sur cette base, ils peuvent ensuite exprimer les dimensions décimales d'un rectangle donné dans une unité inférieure, afin de les ramener au cas des dimensions entières, préalablement établi, ce qui revient simplement à faire usage d'une grille plus fine.



L'unité fondamentale de surface est le *mètre carré*; c'est un carré dont le côté a un mètre de longueur.

Viennent ensuite d'une part : le *décamètre carré*, l'*hectomètre carré*, le *kilomètre carré*, le *myriamètre carré*. Ce sont des carrés qui ont un décamètre, un hectomètre, un kilomètre, un myriamètre de côté.

D'autre part : le *décimètre carré*, le *centimètre carré*, le *millimètre carré*. Ce sont des carrés qui ont un décimètre, un centimètre, un millimètre de côté.

FIGURE III.3 – Explicitation des unités de surface dans le système décimal chez Briot et Vacquant à travers la figure de la grille carrée (Briot et Vacquant, 1859, p. 48)

L'extension du principe de la grille aux rectangles de dimensions non entières est observable chez Cirodde [25]. Ce dernier illustre la formule de l'aire du rectangle, établie à partir des théorèmes de comparaison, par un exemple étendu à des dimensions exprimées comme des fractions décimales (voir figure III.4 p. 337) afin de « rendre cette proposition évidente » (Cirodde, 1858, p. 175). Son idée repose sur la décomposition des dimensions du rectangle en partie entière et partie fractionnaire, induisant un découpage du rectangle en parties de base et hauteur entières, et d'autres qui en représentent des portions. Bien entendu, la figure est dans ce cas un support, construit de la même façon que les grilles évoquées précédemment, mais ne se suffit pas à elle-même puisqu'elle est accompagnée de calculs relatifs aux aires de chaque partie du rectangle décomposé [26] afin de garantir la validité du résultat dans un tel cas. Néanmoins, la lecture de la preuve est très grandement facilitée par la figure construite à cet effet.

Le principe d'étendre la formule de l'aire du rectangle au cas où les dimensions ne sont pas entières mais décimales, avec pour support argumentatif un outil de visualisation,

25. Dans une section ultérieure consacrée au recours au matériel de classe et aux images figuratives (sous-section III.1.2.3 p. 403), nous retrouvons cette extension de l'aire des rectangles au cas où leurs dimensions ne sont pas entières chez Bert, qui pour cela assemble des dominos, dont certains sont coupés en deux (voir p. 412).

26. Nous rappelons que les aspects relatifs à la nature des nombres et aux calculs ne sont pas l'objet de ce chapitre.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

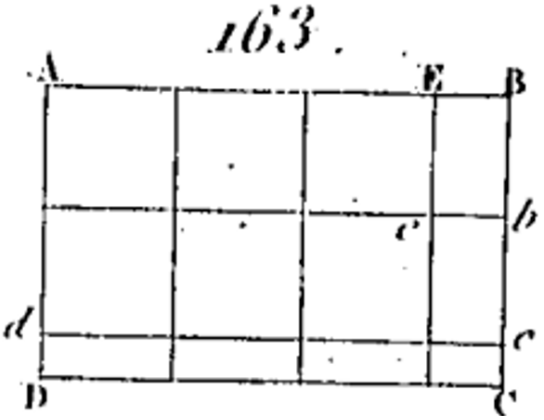


FIGURE III.4 – Figure de la grille rectangulaire étendue aux dimensions non entières (mais décimales) chez Cirodde (1858, pl. viii)

est développé d'une manière originale par Desnanot (1835) dans un ouvrage qu'il dédie à la pratique du « toisé géométrique ». Il propose en effet un raisonnement guidé, par étapes, pour faire découvrir à la fois mentalement et visuellement le résultat de l'aire du rectangle. Il présente des figures évolutives, en parallèle de calculs qui leur sont associés, tout d'abord des bandes rectangulaires de largeur 1 et de longueurs respectives 4, 4,3 et 4,35 (47 à 49 sur la figure III.5 p. 337) puis des rectangles présentés en empilements, de longueurs identiques à celles des figures précédentes, et de largeurs respectives 3, 3, 3,1 et 3,8 (50 à 53 sur la figure III.5 p. 337[27]).

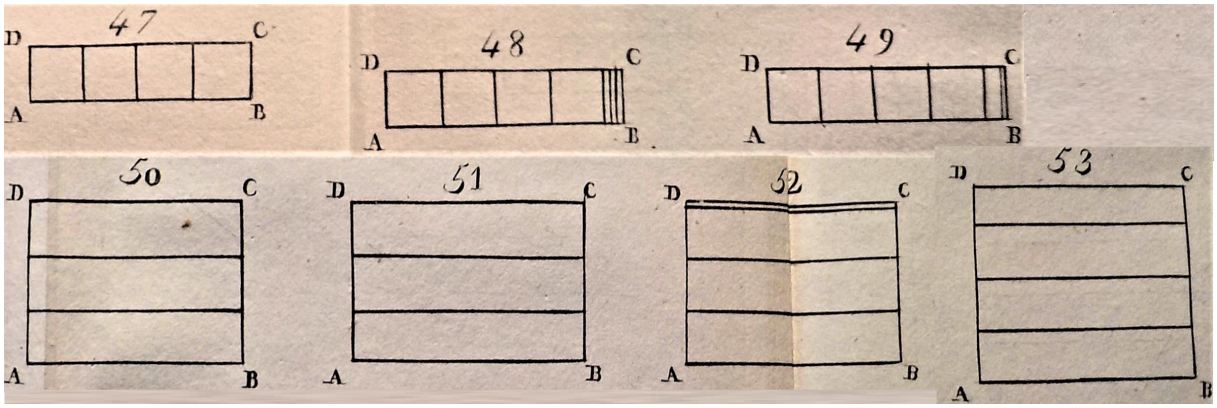


FIGURE III.5 – Figures évolutives des rectangles chez Desnanot (1835, pl. ii)

La présence d'aussi nombreuses figures pour justifier le théorème de l'aire du rectangle n'est pas usuelle dans les manuels de l'époque, et cette séquence de schémas est même unique dans les ouvrages du corpus. Pour mieux comprendre la démarche de

27. Dans le livre de Desnanot, ces figures numérotées de 47 à 53 figurent sur une planche située à la fin du livre. Les sept figures sont alignées horizontalement.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Desnanot, nous avons reconstitué l'extrait original de la planche en rajoutant quelques codages pour prendre en compte les dimensions de chacun des rectangles, et un code couleur pour repérer les égalités d'une figure à une autre. Ces aménagements ont été reconstitués en suivant pas à pas la lecture de texte de Desnanot (voir figure III.6 p. 338). Ce dernier énonce tout d'abord la règle selon laquelle « pour toiser un rectangle, on mesure la longueur et la largeur, on multiplie les deux nombres de mesures, et le produit exprime la superficie de la figure » (Desnanot, 1835, p. 31). En guise de démonstration, il annonce que « les exemples suivans [*sic*] confirmeront la règle » (Desnanot, 1835, p. 31), à la suite de quoi il décline 10 exemples numériques de calculs d'aires de rectangles.

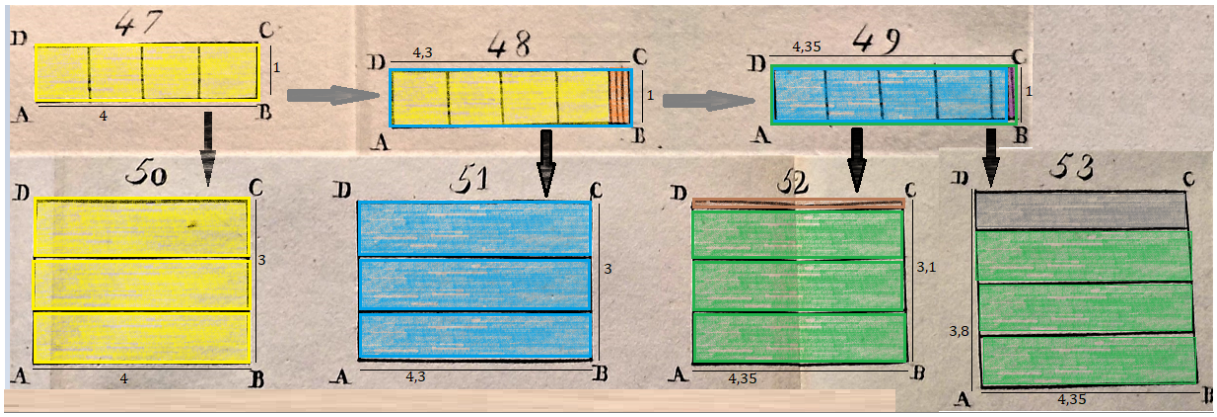


FIGURE III.6 – Codage des figures évolutives des rectangles chez Desnanot (1835)

— Le premier, qui correspond à la figure 47 est le cas d'un rectangle de longueur $4\,m$ et de largeur $1\,m$, qui « contient 4^{mm} [*sic*], parce que l'unité carrée peut être appliquée 4 fois sur le rectangle » (Desnanot, 1835, p. 31).

— Le second est le même, mais avec cette fois-ci $4,3\,m$ de longueur. Sur la figure 48 qui lui est associée, se trouvent donc les 4 carrés unités précédents (en jaune), plus $\frac{3}{10}$ de carrés supplémentaires (en orange). L'auteur affirme : « je vois que le rectangle contient $4^{\text{mm}},3$, c'est clair, la figure le montre » (Desnanot, 1835, p. 31).

— Le 3ème exemple est le rectangle de longueur $4,35\,m$ et de largeur $1\,m$. La figure 49 le représente identique au rectangle précédent (encadré en bleu), mais avec $\frac{5}{100}$ du carré unité en plus (soit la moitié d'$\frac{1}{10}$ème) (en violet). Cette fois encore, Desnanot conclut que « le rectangle contient $4^{\text{mm}},35$. La figure le montre clairement » (Desnanot, 1835, p. 31).

— Le 4ème cas concerne un rectangle de dimensions $4\,m$ sur $3\,m$, représenté sur la figure 50, dans lequel le géomètre voit « trois rectangles égaux [en jaune] [...] ayant chacun 4^{mm} », de quoi il conclut que $ABCD$ a pour mesure $12\,m^2$.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

— Il poursuit avec un rectangle de même largeur mais de longueur $4,3\,m$ (figure 51), regroupant trois rectangles égaux à ceux de la figure 48 (en bleu), et par conséquent d'aire totale $4,3 \times 3 = 12,9\,m^2$, puis enchaîne avec celui de la figure 52, dont la longueur est désormais $4,35\,m$ et la largeur $3,1\,m$ et qui compte donc « trois rectangles, chacun de $4^{\text{m}},35$ [en vert], plus un autre rectangle qui est la 10e partie de l'un des trois [en marron] » (Desnanot, 1835, p. 32).

— Le cas n° 7 est une variante du précédent avec une largeur de $3,8\,m$ (figure 53) et c'est le dernier exemple illustré par une figure.

De proche en proche, et uniquement par des égalités d'aires visualisables sur des figures, Desnanot parvient à la règle de calcul de l'aire pour des rectangles dont les deux dimensions sont décimales, et qui a valeur d'exemple générique, puisque le raisonnement suivi resterait valable pour d'autres valeurs numériques. Les exemples suivants ne sont d'ailleurs plus visuels, mais seulement calculatoires, et le lecteur doit comprendre qu'il peut alors se détacher de la figure pour se concentrer sur le seul calcul, puisque le résultat général a été établi.

L'alternance entre les arguments graphiques, révélés par le recours à de nombreuses expressions visuelles comme « je vois », « c'est clair », « la figure le montre », et les résultats calculatoires, est caractéristique d'un mode de raisonnement où la construction géométrique accompagne pas à pas la genèse d'une généralité numérique, finalisée par une formule de calcul. Nous pouvons même remarquer que dans la présentation de Desnanot, la construction précède le calcul, lui servant de support argumentatif. L'enchaînement des figures, connecté à l'élaboration progressive des calculs, forme une preuve présentant, comme dans l'un des modèles exhibé par Dhombres, une grande « dynamique démonstrative ». Certes, cette argumentation ne s'inscrit pas dans les codes des preuves géométriques classiques au sens euclidien, mais constitue de notre point de vue une forme réelle de démonstration [28], dont un ressort constitutif majeur est la construction de figures et leur « monstration » [29].

28. Pour une présentation de différents types de preuves possibles et une discussion sur leurs statuts, voir (Rouche, 1990).

29. Le terme de « monstration » est emprunté à plusieurs auteurs, comme Chauviré dans un article sur la *Perception visuelle et [les] mathématiques*, qui reprend les théories au sujet des images en mathématiques de Pierce et Wittgenstein (Chauviré, 2003, p. 214), mais aussi à Jacquier, qui emploie abondamment cette appellation dans son ouvrage *La géométrie avec les yeux*, qui traite des preuves visuelles en géométrie (Jacquier, 2017). Même si ce terme n'est pas défini ni utilisé par les auteurs du XIXe siècle, nous emploierons cette dénomination pour toutes les preuves qui font principalement appel aux yeux, pratiques argumentatives qui ne s'avèrent pas si rares à cette époque, où l'« éducation par l'œil et la main » (Tarnier, 1872, p. v-vi) est préconisée par une partie des pédagogues européens, notamment pour l'enseignement de la géométrie (voir la sous-section I.3.1.4 p. 117).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ce premier résultat fondamental sur la mesure ou la comparaison de l'aire des rectangles est donc établi en fort appui sur une figure (l'empilement ou la grille), dont les étapes de construction jouent un rôle argumentatif majeur dans la preuve, qu'elle soit déductive ou inductive. Ce constat souligne le rôle de la visualisation et de l'acte de construction comme support de la pensée. Nous retrouvons les éléments du cadre proposé par Dhombres, puisque les deux figures analysées sont bien conçues comme des « superpositions », en cela qu'elles intègrent, à partir de la situation initiale donnée (un rectangle à mesurer ou deux rectangles à comparer), de nouveaux tracés qui permettent d'établir le résultat cherché. Certes, la position intermédiaire de la construction, décrite précisément par Proclus entre les étapes d'énonciation, exposition puis détermination d'une part et la démonstration d'autre part, est moins marquée dans les textes du XIX^e^ siècle, dans lesquels certaines de ces étapes ont tendance à se fondre. Néanmoins, le rôle charnière de la construction entre la description de la situation géométrique initiale et la conclusion que l'on souhaite obtenir, demeure manifeste, insérée au cœur même de l'appareil argumentatif. Chez Desnanot, une dimension supplémentaire apparaît avec une série de figures « portant » vraisemblablement « le discours », l'enchaînement des constructions géométriques, liées directement aux différents cas numériques énumérés, provoquant une réelle « dynamique démonstrative » allant jusqu'à l'établissement du résultat généralisé par induction (voir l'introduction de la section III.1.1 p. 330).

À ce stade, nous pouvons nous demander si la construction effective des figures par les élèves, qui les traceraient à la main avec des instruments, est une étape nécessaire à leur compréhension, ou si la simple observation des figures déjà présentées suffit. Dans ses *Leçons d'arpentage*, Gimelli apporte la réponse suivante, après avoir expliqué le principe de la décomposition « en carrés et portions de carrés » d'un rectangle de dimensions non entières : « Nous engageons les instituteurs à exiger que les élèves puissent démontrer en la comprenant cette proposition qui est la base des mesures de toutes les surfaces. Il devront pour cela les exercer sur d'autres nombres que ceux que nous avons pris pour exemple » (Gimelli, 1841, p. 36). La référence aux nombres ne doit pas masquer que le calcul repose sur une figure dûment construite, et nous comprenons que l'exercice des élèves porte autant sur la construction que sur le calcul qui l'accompagne. Les étapes de construction soutenant les calculs sont reconstituées et codifiées sur la figure suivante, telles qu'elles pourraient être réalisées par un élève, présentant l'original à gauche et le schéma annoté à droite (voir figure III.7 p. 341).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

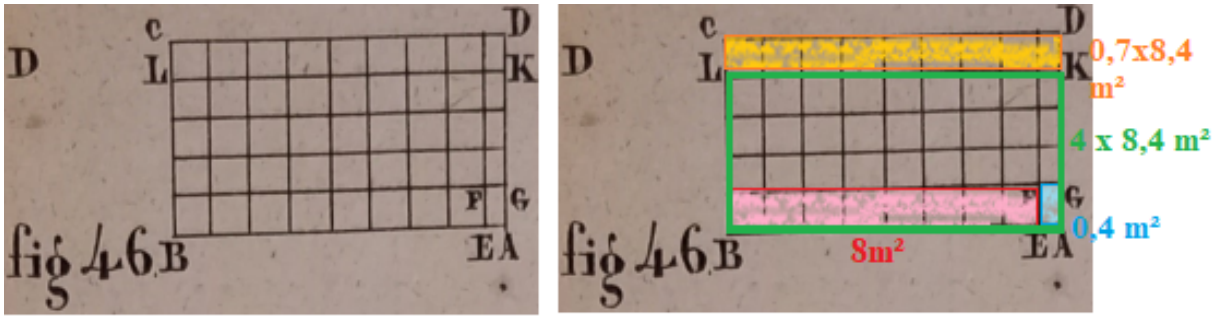


FIGURE III.7 – Calcul de l'aire d'un rectangle par bandes chez Gimelli (1841, 35-36, pl. 2)

L'hypothèse d'une telle démarche initiée par leurs maîtres est étayée par la présence de figures très proches dans des cahiers d'élèves, comme dans celui de Desvoisins au cours du XIX^e siècle[30] (voir figure III.8 p. 341).

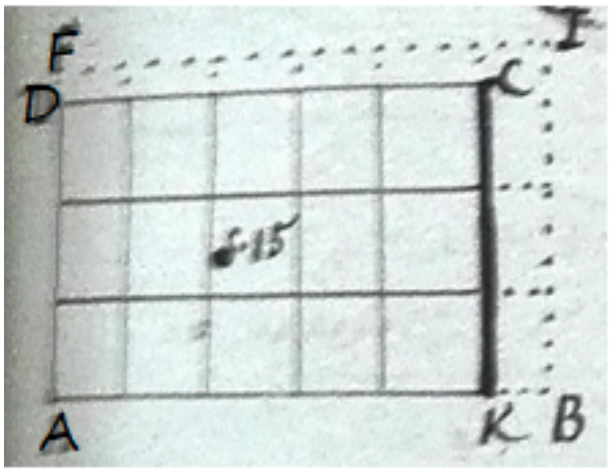


FIGURE III.8 – Figure de décomposition de l'aire d'un rectangle en bandes dans un cahier d'élève au XIX^e siècle (Desvoisins, cahier de géométrie manuscrit, CALAMES 1R208280)

Dans le cas que nous venons d'étudier et dans les précédents, la géométrie des aires apparaît bien à l'interface des constructions et du raisonnement géométrique. Ce rôle d'interface est manifeste, notamment à travers le principe de superposition de tracés supplémentaires à la figure initiale, qui portent en eux-mêmes, ou au minimum supportent, la démarche de la preuve (voir schéma III.9 p. 342). La dynamique démonstrative produite par l'enchaînement des figures chez Desnanot participe à cette fonction d'interface de la géométrie des aires entre constructions et raisonnement, de même

30. Le document est un cahier de géométrie manuscrit appartenant à un élève consulté à la Bibliothèque Diderot de Lyon, dont la cote est 1R208280 dans le catalogue « CALAMES », qui recense les archives et manuscrits de l'enseignement supérieur. Il est signé « Desvoisins », mais n'est pas daté plus précisément que « XIX^e siècle ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

que l'entremêlement des arguments et des tracés géométriques liés à la figure de l'empilement et à la preuve associée. Dans tous ces cas, la visualisation joue un rôle clé dans l'appréhension et la compréhension du résultat, accompagnant les raisonnements de type inductif ou déductif. En suivant ces démarches, les élèves sont amenés à s'approprier la teneur d'une preuve à travers les tracés observés ou réalisés.

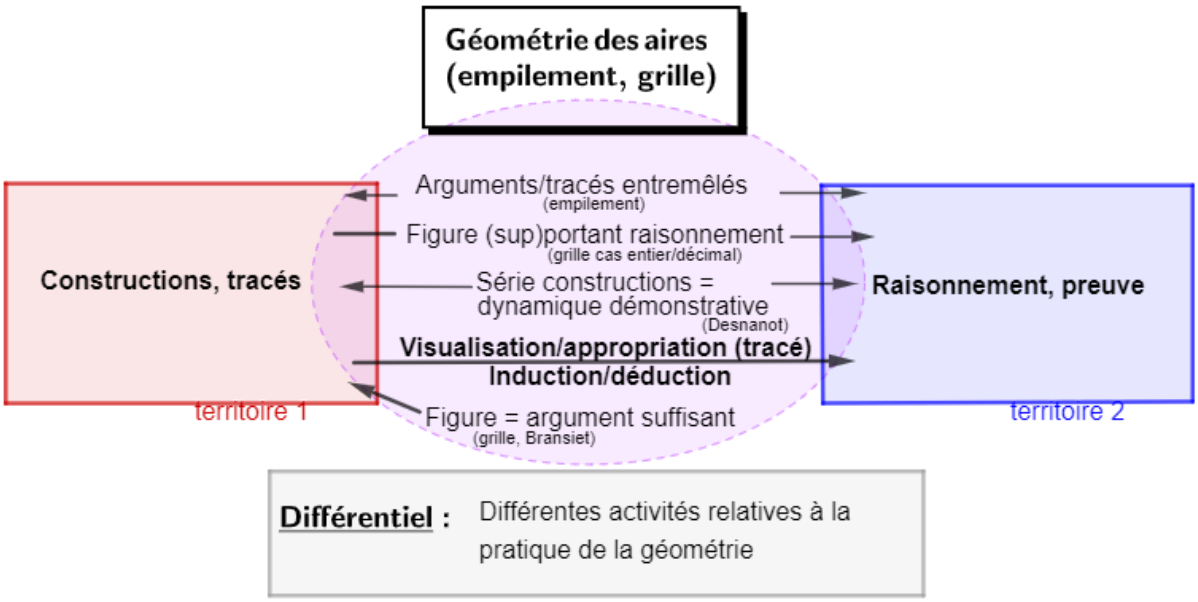


FIGURE III.9 – Schéma montrant en quoi les preuves de l'aire du rectangle par empilement ou avec une grille sont à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement

Cette analyse s'inscrit dans la question plus générale du processus de preuve, de son statut et de sa validation, dans un contexte d'enseignement, développée en particulier par Barbin sous l'angle de la distinction entre « convaincre » et « éclairer » (Barbin, 1987), ou encore par Bkouche sur la place de l'induction et de l'expérience dans l'acte de démontrer (Bkouche, 1990b). Par ailleurs, le rôle de la figure et des constructions au sein de la démonstration est souligné par Rouche dans un article dans lequel il se demande ce que signifie « prouver » (Rouche, 1990). D'après lui, la figure est en fait un représentant de l'ensemble des figures similaires possibles, ensemble auquel on accède par l'imagination. Par conséquent, les « évidences immédiates » que l'on tire de l'observation d'une figure peuvent être étendues par induction à « la famille infinie des figures parentes » (Rouche, 1990, p. 24). L'exemple des figures de l'empilement ou de la grille en sont des illustrations, puisqu'en voyant l'une d'entre elles, on peut percevoir que tous les cas issus d'autres situations numériques suivent une règle analogue. Si pour lui les maillons de la preuve s'appuient réellement sur « la figure, sur des constructions, sur des gestes » (Rouche, 1990, p. 22), il n'en reste pas moins que le passage au discours s'impose *in fine*. Rouche affirme néanmoins que « montrer ne s'oppose pas à

Licence CC BY-NC-ND 3.0

démontrer : toute "monstration"[31] qui contribue à l'univocité du sens est un instrument de la rigueur » (Rouche, 1990, p. 24). Le dernier mot est représentatif de l'enjeu : la preuve produite (par exemple celle présentée par Desnanot) est-elle rigoureuse ? Rouche explique que la question est à relativiser et que la rigueur, loin d'être un concept absolu, dépend plutôt des contextes dans lesquels les preuves sont produites, et des étapes auxquelles une personne se trouve dans son apprentissage de la démonstration (Rouche, 1990, p. 36)[32]. C'est certainement la raison pour laquelle les preuves que nous étudions prennent des formes si différentes les unes des autres, en cela qu'elles s'adressent à des publics qui ne se situent pas au même stade d'apprentissage de la géométrie. La diversité des preuves, et des constructions qui leur sont associées, est justement un trait caractéristique du traitement du théorème de Pythagore dans les manuels, sur lequel nous proposons de nous pencher.

III.1.1.2 De multiples figures au fondement des preuves possibles du théorème de Pythagore

Multiplicité et optimisation des preuves

L'exploration de ce qu'est une preuve, de ses ressorts, de son statut et de ses relations avec les figures et constructions, se poursuit donc à travers le théorème de Pythagore, dont nous avons vu qu'il est un incontournable des programmes et des manuels de géométrie au XIX^{e} siècle (voir la section II.3.2 p. 284). Ce théorème se distingue par sa longue histoire, mais aussi par le fait qu'il en existe de multiples démonstrations (Euclide, 1990, p. 310-321 ; Plane, 2003). Plane distingue, parmi les centaines de preuves produites pour le démontrer[33], trois catégories :

> — celles reposant uniquement sur des surfaces d'aires équivalentes et non calculées,
> — celles usant du calcul de ces aires et d'autres propriétés géométriques,
> — celles faisant nettement appel à du calcul algébrique. (Plane, 2003, p. 17)

Dans cette section centrée sur le rôle des figures et des constructions dans les processus de preuve, nous ne nous intéresserons qu'à celles du premier type.

31. Voir note 29 p. 339.
32. La notion de rigueur est également discutée dans l'ouvrage consacré à l'action de « justifier en mathématiques » dirigé par Flament et Nabonnand (Flament et Nabonnand, 2011).
33. La motivation à chercher des preuves du « théorème le plus célèbre des mathématiques » ne s'émousse visiblement pas au cours du temps, puisque Gerwig publie en 2021 un livre entier en comprenant 365 démonstrations (Gerwig, 2021).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Le théorème est inséparable de la référence euclidienne, puisque comme l'écrit Mauduit, il s'agit de « la fameuse 47ème proposition d'Euclide » (Mauduit, 1790, p. 170), soit l'avant-dernière proposition du livre I des *Éléments* d'Euclide (la 48ème et dernière est sa réciproque). Comme nous l'avons vu dans la sous-section I.3.1.1 (p. 103), le modèle que constitue les *Éléments* d'Euclide est encore très prégnant dans l'enseignement de la géométrie au XIXe siècle, même s'il est périodiquement remis en question (Moktefi et al., 2013). Dans ce contexte, les auteurs de manuels peuvent choisir de présenter la preuve à la façon d'Euclide, de suivre d'autres voies démonstratives, ou même d'en proposer plusieurs versions à leurs lecteurs. Le choix qu'ils réalisent alors parmi la multiplicité des démonstrations possibles répond forcément à un critère, plus ou moins explicite. En effet, l'exigence imposée par la rédaction d'un manuel d'enseignement, en termes de rigueur scientifique et de clarté pédagogique, influence manifestement ce choix en direction de la « meilleure » preuve possible, en fonction du lectorat envisagé. C'est justement ce que questionne Dhombres dans un article en 2009, dans lequel il explore la notion de « multiplicité » des démonstrations [34]. Il expose en quoi cette multiplicité est révélatrice de différents styles, de la variété des structures mathématiques sous-jacentes, et des parcours historiques dans lesquelles les preuves ont été créées [35].

Comme le rappelle Tarnier, « on s'est ingénié à démontrer d'une foule de manières la propriété fondamentale du triangle rectangle » (Tarnier, 1872, p. 311). Cette culture des preuves multiples du théorème, avérée par l'histoire des mathématiques, est également mise en pratique par les auteurs des manuels de géométrie du XIXe siècle. Dans notre corpus, cette multiplicité s'exprime diversement. Parmi les 34 auteurs qui présentent le théorème, 22 le démontrent plusieurs fois, et 18 d'entre eux en présentent exactement deux démonstrations. La paire de preuves très majoritaire (14 occurrences) est celle de la démonstration par les triangles semblables, en plus

34. Il discute à cette occasion le caractère d'inutilité de cette multiplicité, d'après lui souvent admis en mathématiques, sans vraiment préciser par qui. Il en explique néanmoins la raison en la cherchant du côté de la métaphysique et de la logique aristotélicienne, selon laquelle les mêmes effets proviennent forcément des mêmes causes (Dhombres, 2009, p. 60).

35. Au passage, il explicite la différence qu'il fait entre « preuve » et « démonstration », la première représente un processus ou un discours permettant de convaincre un auditeur ou un lecteur de la validité d'un résultat, alors que la démonstration est la partie plus formelle de la preuve, qui expose objectivement et sans défaut ses arguments (Dhombres, 2009, p. 60-61). Les auteurs de notre corpus font usage des deux termes, même s'ils utilisent bien plus fréquemment le terme « démonstration ». Ils évoquent une « preuve », soit dans le sens courant, soit comme un synonyme de « démonstration ». Par exemple, dans leur définition d'un théorème, Eysseric et Pascal écrivent : « Le théorème est une proposition vraie en elle-même , mais dont l'évidence ne devient sensible qu'au moyen d'un raisonnement ou preuve, qu'on nomme démonstration. » (Eysseric et Pascal, 1850, p. 13). Quant au terme « démonstration », il peut être utilisé aussi bien dans des situations de discours argumentatifs formels que dans des cas de preuves plus informelles, comme les « démonstrations par l'aspect » de Tarnier (1872, p. 9). Pour ces raisons, nous choisissons de ne pas distinguer les deux termes dans notre étude.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

<table>
<tr><td colspan="4">Présentent le théorème de Pythagore</td><td>Ne le présentent pas</td></tr>
<tr><td>1 preuve</td><td colspan="3">Preuves multiples</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">12</td><td colspan="2">2 preuves</td><td>Plus de 2 preuves</td></tr>
<tr><td>Eucl/sembl.</td><td>Autre</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>14</td><td>4</td></tr>
</table>

TABLE III.1 – Tableau récapitulant le nombre d'ouvrages présentant le théorème de Pythagore, une preuve simple ou multiple, avec 2 démonstrations ou plus, et lesquelles

de celle à la façon d'Euclide, traitées dans des parties différentes de l'ouvrage[36]. Trois auteurs prouvent le théorème trois fois. Quant à Mauduit, il est l'auteur le plus représentatif de cette tradition de démontrer de plusieurs façons le théorème, proposant six preuves différentes du résultat.

Au XIX^e siècle, deux manières d'évaluer une preuve sont envisagées : l'une qualitative et l'autre quantitative. La première est présentée en 1851 par Cournot, dans son *Essai sur les fondements de nos connaissances*, en ces termes :

> Quiconque est un peu versé dans les mathématiques distingue, parmi les différentes démonstrations que l'on peut donner d'un même théorème, toutes irréprochables du point de vue des règles de la logique et rigoureusement concluantes, celle qui donne la vraie raison du théorème démontré. (cité dans Dhombres 2009, p. 69)

Cette recherche de la « vraie raison » ferait de cette meilleure preuve celle qui met en lumière la « cause profonde » du théorème. Mais cette notion n'est pas objective, et dépend de nombreux facteurs évoqués ci-avant : « la pratique de chaque mathématicien, sa culture aussi, son inscription dans une communauté particulière et surtout [...] son insertion dans une histoire » (Dhombres, 2009, p. 70).

Une autre façon d'évaluer une preuve, plus quantitative, se trouve formalisée à la fin du siècle par un géomètre, Émile Lemoine[37], polytechnicien ayant exercé des fonctions à la fois de professeur et d'ingénieur civil. Ce dernier, qui dans son parcours a beaucoup pratiqué la construction des figures à la règle et au compas dans des cadres applicatifs, présente un concept de mesure de la simplicité d'une proposition ou d'une procédure en 1888 :

36. Les quatre autres cas de double preuve sont, pour trois d'entre eux, la preuve par les triangles semblables, couplée à une preuve par découpage et recomposition (ou « puzzle »), et le dernier des quatre ouvrages présentant une preuve par puzzle associée à une autre par quadrillage.

37. Sur Émile Lemoine (1840 – 1912) et ses travaux, notamment en géométrie du triangle, voir (Romera-Lebret, 2009).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> Une vérité mathématique, une proposition prise en soi, n'est ni simple ni compliquée ; elle est. Ce qui nous la fait paraître simple ou compliquée, c'est le chemin que notre esprit a dû parcourir pour arriver à sa connaissance. Si le chemin est court, nous disons que la proposition est simple ; s'il est long, qu'elle est compliquée.
> Celui qui cherche de nouvelles propositions, c'est-à-dire qui cherche à énoncer des vérités mathématiques non encore mises en lumière, ne s'occupe guère, pendant la recherche, de la nature ni de la longueur du chemin qu'il parcourt, pourvu qu'il arrive ; plus tard, lui ou d'autres sauront aplanir la route et trouveront des raccourcis.
> Dans l'*exposition didactique de la science*[38], au contraire, la nature et la brièveté des routes suivies prennent une importance primordiale. (cité dans Schwer 2022, p. 226).

Le critère de simplicité mis en avant par Lemoine va de pair avec la brièveté, et il distingue l'importance de cette idée dans la pratique d'enseignement, comparativement à celle de la recherche, où elle n'est pas primordiale. Il publie ensuite un système axiomatisé de description d'une construction à la règle et au compas, dénombrant le nombre d'opérations élémentaires qu'elle requiert, le total représentant sa « simplicité ». Les opérations élémentaires à la règle et au compas sont : « R_1 Placer le bord d'une règle par un point placé. R_2 Tracer une ligne en suivant les bords de la règle. C_1 Mettre une pointe du compas sur un point placé. C_2 Mettre une pointe du compas en un point indéterminé d'une ligne tracée. C_3 Tracer le cercle » (Schwer, 2022, p. 229). Dans ce système, le tracé élémentaire d'une droite passant par deux points donnés est symbolisé par $2R_1 + R_2$ et est de simplicité 3, et le tracé d'un cercle quelconque, décrit par $C_2 + C_3$ est de simplicité 2. Ce système, auquel il rajoute une notion d'exactitude[39], lui permet d'évaluer des constructions, solutions de problèmes classiques, comme celui des trois cercles d'Apollonius, et de dégager la plus simple d'entre elles suivant ses critères quantitatifs[40].

Les idées de Lemoine bénéficient d'une réception mitigée à son époque[41]. Certes, ses travaux profitent d'une large audience, relayée par plusieurs dizaines de publications à la fin du XIX^e^ siècle et sont même utilisés dans les cours de certains auteurs

38. En italique dans le texte.
39. C'est le nombre d'opérations de positionnements (R_1, C_1 ou C_2), les autres étant des opérations de dessin. Plus ce nombre est élevé plus la figure est potentiellement inexacte.
40. Il conclut que la « célèbre et didactiquement élégante » solution de Bobilliers et Gergonne est la « moins bonne » construction avec une simplicité de 356 et une exactitude de 224, la meilleure étant celle de Mannheim, de simplicité 192 et d'exactitude 126 (Schwer, 2022, p. 231).
41. D'ailleurs, il n'est cité par aucun des auteurs de notre corpus, y compris les plus tardifs, qui lui sont contemporains. Voir partie II.2.2.1 p. 205.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

comme Rouché (Schwer, 2022, p. 232-233). Néanmoins, sa théorie possède aussi ses détracteurs, pour lesquels le critère d'optimisation d'une construction n'est pas forcément révélateur d'une « simplicité géométrique » (Schwer, 2022, p. 232). En effet, les théoriciens préfèrent parfois une solution simple et élégante à l'efficacité d'une autre, plutôt privilégiée dans la pratique. Dans le cadre de notre étude, l'idée de Lemoine nous apparaît comme intéressante, non pas parce qu'elle est représentative de notre période d'étude : Lemoine publie ses travaux tard dans le siècle et sa pensée garde un caractère plutôt original parmi ses contemporains. C'est plutôt l'idée globale qui retient notre attention : celle de mesurer *via* un indicateur quantitatif la simplicité d'une construction. En effet, la relative complexité des figures qui supportent la preuve du théorème de Pythagore peut constituer un argument expliquant leur usage plus ou moins important dans les manuels. En revanche, nous choisissons de ne pas retenir strictement le critère de Lemoine, mais de proposer notre propre indicateur de simplicité : la figure initiale étant donnée (un triangle rectangle dans le cas de Pythagore), nous dénombrerons les constructions additionnelles nécessaires à l'argumentaire de la preuve, suivant le principe de « superposition » évoqué précédemment (voir la section III.1.1 p. 330), c'est-à-dire le nombre de points nommés et de lignes construites supplémentaires.

Nous partons ainsi d'un premier postulat selon lequel la simplicité des tracés additionnels réalisés sur une figure rendrait compte de la simplicité de la démarche démonstrative. Mais nous prenons soin de mettre ce critère en parallèle d'arguments plus qualitatifs, afin de nuancer les analyses réalisées. Nous envisageons par conséquent d'examiner les diverses preuves du théorème de Pythagore présentes dans les manuels suivant ces deux approches, quantitative et qualitative, à travers l'examen des figures et constructions qui leur servent de support. Chacune d'entre elles se voit analysée sous l'angle de la « vraie raison » ou « cause profonde » du résultat qu'elle peut ou non porter, ainsi que dans la perspective de la mesure de la simplicité de sa construction. Parmi les neuf types de preuves du théorème dénombrés au sein des ouvrages du corpus (voir la sous-section II.3.2.2 p. 286), nous nous intéressons dans cette section aux preuves 7 et 8, qui ne font pas intervenir de considérations numériques [42].

La preuve euclidienne

Comme nous l'avons rappelé, la preuve qui fait référence concernant le théorème de Pyhtagore est indéniablement celle qu'Euclide expose dans son livre I (voir p. 344). Les chiffres relatifs à notre corpus le confirment, puisque sur les 34 manuels qui présentent le théorème, 12 voient leurs auteurs citer explicitement Euclide, et 20 exposent une preuve semblable à la sienne. Ces deux façons de se référer à Euclide

42. Les autres se verront analysées dans la sous-section III.2.2.2 (p. 473).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ne sont d'ailleurs pas complètement corrélées, puisque, si parmi eux, 7 auteurs font les deux, 13 auteurs démontrent la proposition à sa manière sans explicitement l'écrire, mais plus étonnamment, 5 le citent sans présenter sa preuve. C'est le cas par exemple de Mauduit, qui vante en introduction de son cours les vertus de la méthode euclidienne, pourtant décriée par les partisans de la méthode analytique et regrette « qu'on eût formé le dessein de proscrire la marche adoptée depuis Euclide jusques à nous, et de bannir des éléments cette géométrie ancienne, si belle par sa simplicité, si féconde dans ses conséquences » (Mauduit, 1790, p. vi). Pourtant, ce même auteur propose par la suite six preuves du théorème de Pythagore, mais pas celle d'Euclide.

Dans les 20 manuels où la preuve est présentée suivant le modèle euclidien, le raisonnement s'appuie sur la même figure, similaire à celle des *Éléments*. Le livre I d'Euclide, entièrement consacré à l'étude des figures égales en aires, se termine en effet par les propositions 47 et 48, énonçant le théorème dit de Pythagore ainsi que sa réciproque en ces termes (d'après la traduction de Vitrac) : « Dans les triangles rectangles, le carré [décrit] sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit » et « Si dans un triangle le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les deux côtés restants du triangle est droit. » (Euclide, 1990, p. 282-287). La figure associée à la proposition 47 est la suivante :

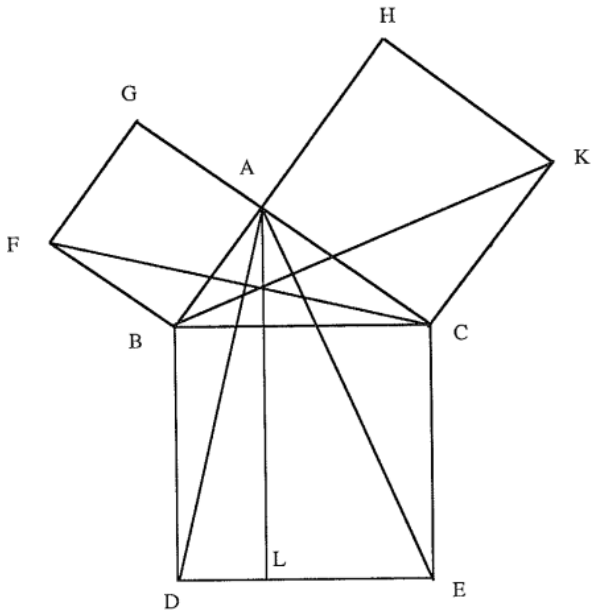


FIGURE III.10 – Figure associée à la proposition 47 des *Éléments* d'Euclide (1990, p. 283)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Appliquons notre indicateur de simplicité à cette figure : le triangle rectangle ABC étant donné, nous dénombrons 9 lignes et 6 points nommés supplémentaires, issus de la construction des carrés de côtés respectifs AB, AC et BC, puis le point L et la ligne AL, ainsi que les lignes AD, AE, FC et BK. Au total, nous arrivons à 14 lignes et 7 points, soit une mesure de simplicité de 21. Cette valeur sert pour le moment de référence pour comparer en simplicité les figures que nous étudierons par la suite. Quelques points sont d'ores et déjà remarquables à ce stade. D'après la formule de Lemoine, et selon nos calculs, une telle construction présente une simplicité de 74, ce qui en fait une figure loin d'être triviale. Il remarque déjà, dans son ouvrage, que la construction d'un carré sur un côté donné présente une simplicité de 21 [43], opération qui est répétée trois fois pour obtenir la configuration attendue. Cette étape est d'ailleurs mise en évidence chez Euclide, puisqu'il s'agit de la proposition 46, qui figure juste avant l'énoncé du théorème, et qui explique justement comment « décrire un carré sur une droite donnée » (Euclide, 1990, p. 279). Dans le texte d'Euclide, la construction intervient d'ailleurs seulement au moment où elle devient nécessaire pour l'établissement d'une proposition. C'est cette étape de construction des carrés qui matérialise le résultat énoncé comme une égalité en aire, rendue apparente sur la figure. Les lignes supplémentaires tracées à partir de la figure du triangle, augmentée des trois carrés, jouent quant à elles un rôle majeur dans le raisonnement, fondé sur les égalités des triangles et des rectangles qu'elles délimitent.

Analysons ce que font deux de nos auteurs du début du siècle — Legendre et Lacroix — de cette preuve et de la construction associée dans leurs propres *Éléments de géométrie*. Legendre présente le théorème en termes d'aires en énonçant : « Le quarré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés » (Legendre, 1823, p. 71). Il propose une construction pratiquement équivalente à celle figurant dans le traité d'Euclide, à la seule exception qu'elle fait apparaître un point nommé de plus, le pied D de la hauteur issue de A dans le triangle ABC (voir figure III.11 p. 350). Le fait de nommer ce point ne joue pas un rôle déterminant dans la preuve, il permet juste à l'auteur de nommer les rectangles $BDEF$ et $CDEG$ par leurs sommets, là où Euclide les désigne par leurs diagonales (suivant la traduction retenue et conformément aux standards de la géométrie grecque). La simplicité de la figure de Legendre est donc de 22 suivant notre propre critère, un de plus que celle d'Euclide (et serait aussi égale à 74 suivant l'indicateur de Lemoine). Le rôle des nouvelles lignes ajoutées à la figure initiale, en plus des carrés construits sur les côtés, est déterminant, puisque ces dernières délimitent des polygones d'aires égales : les triangles ABF et HBC, suivant l'un des cas d'égalité des triangles (un angle égal compris entre deux côtés égaux), puis par voie de conséquence le rectangle $BDEF$ et

43. Dans notre cas, c'est un peu moins pour les carrés construits sur AB et AC puisqu'un côté de chacun d'entre eux est dans le prolongement de ces segments.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

le carré $HBAL$ qui sont leurs doubles [44], puis, par symétrie, non pas de la figure, mais de la situation, les triangles ACG et IBC, et donc le rectangle $DCGE$ et le carré $AKIC$ (voir figure III.11 p. 350). La somme des carrés $HBAL$ et $AKIC$ est donc égale à la somme des rectangles $BDEF$ et $DCGE$, donc au carré $BCGF$, ce qui prouve l'égalité énoncée. Cette preuve est la même que celle d'Euclide, puisqu'elle en suit à la lettre tous les arguments géométriques [45]. Dans les deux cas, la situation à droite de la figure n'est pas détaillée comme celle à gauche. Il est simplement indiqué qu'« on démontrera de même que le rectangle $CDEG$ est équivalent au quarré AI » (Legendre, 1823, p. 72).

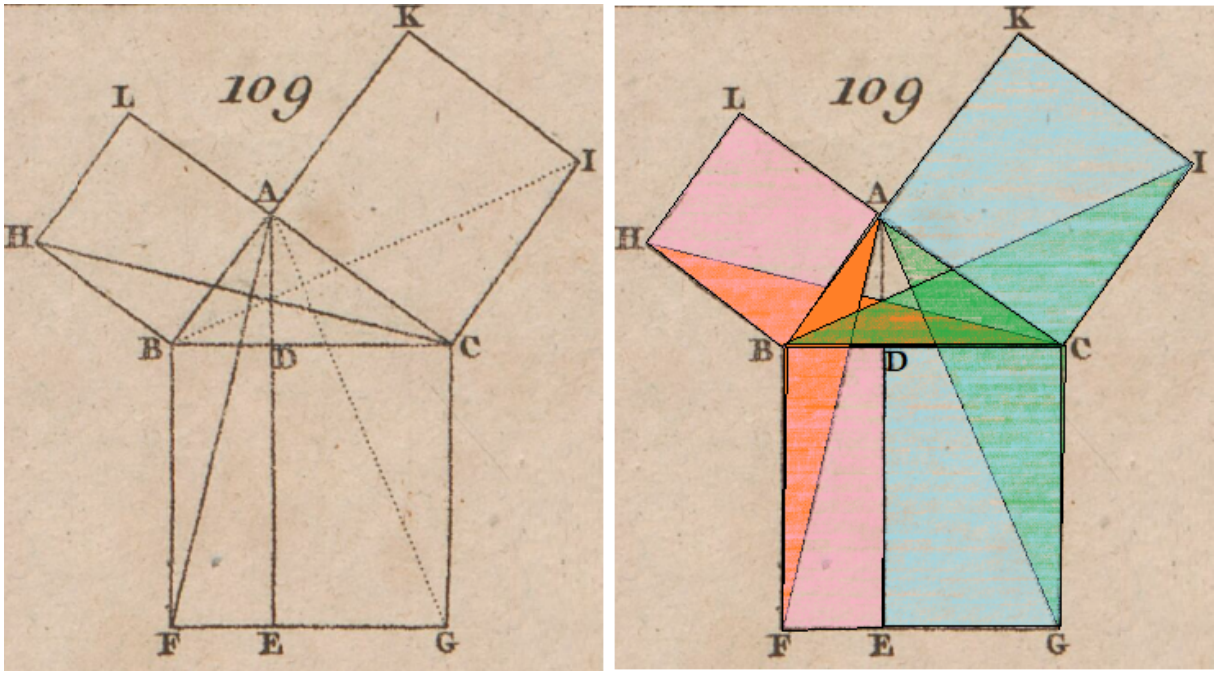


FIGURE III.11 – Figure associée à la preuve du théorème de Pythagore chez Legendre (1823, pl. iv), sous sa forme initiale à gauche, et sous forme annotée par nos soins à droite

L'énoncé et la preuve proposés par Lacroix sont très proches, même si quelques éléments diffèrent de la version de Legendre. Lacroix énonce aussi le théorème en termes de « quarrés construits sur l'hypoténuse », présentant bien la proposition comme une égalité en aire. Mais avant de procéder à la démonstration à la manière euclidienne, il précise :

> On serait en droit de conclure cette proposition de celle du n° 75, puisqu'il a été prouvé dans ce numéro que $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, et que d'après le n° 169, numéro que $\overline{AB}^2$, $\overline{BE}^2$ et $\overline{AE}^2$, sont les mesures respectives des carrés

44. En effet, le triangle HBC, de même base et compris entre les mêmes parallèles que HBA, lui est équivalent, de même que BAF et BDF pour les mêmes raisons. Voir les détails dans (Legendre, 1823, p. 71-72).

45. Pour consulter la preuve d'Euclide et les commentaires de Vitrac à son sujet, voir (Euclide, 1990, p. 282-287).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> $ABCD$, $BEFG$ et $AEHL$, mais ces considérations, supposant les lignes et les aires rapportées à des nombres, j'ai jugé convenable de démontrer la proposition immédiatement sur les aires, ainsi qu'Euclide l'a fait, et sans employer les rapports de lignes. (Lacroix, 1808, p. 119)

En effet, il a déjà procédé à la démonstration du théorème exprimé en lignes, c'est-à-dire comme une égalité de carrés de longueurs de segments, dans le cadre de la théorie sur les triangles semblables, avant de la reprendre sous la forme citée ci-avant dans une partie intitulée « De l'aire des polygones et de celle du cercle ». Il pourrait alors se contenter de relier le théorème en ligne et celui en aire par le simple chaînon consistant à assimiler le carré d'un nombre à l'aire d'un carré, mais il choisit pourtant de présenter la preuve euclidienne, sans lien avec les nombres ni les proportions. Sans doute s'inscrit-il ainsi dans un contexte de l'enseignement de la géométrie au début du XIX^e^ siècle, encore largement dominé par l'influence des *Éléments* d'Euclide (Moktefi et al., 2013), et dans lequel il ne serait pas envisageable de ne pas présenter la preuve euclidienne. Ou peut-être suit-il l'idée aristotélicienne du refus de mélanger les genres, estimant qu'un théorème de nature numérique doit être démontré par les nombres et un théorème de type géométrique doit l'être par la géométrie [46]. Quoiqu'il en soit, sa démonstration est en tout point conforme à celles d'Euclide et Legendre, et la figure qu'il lui associe est très proche des leurs également (voir figure III.12 p. 351).

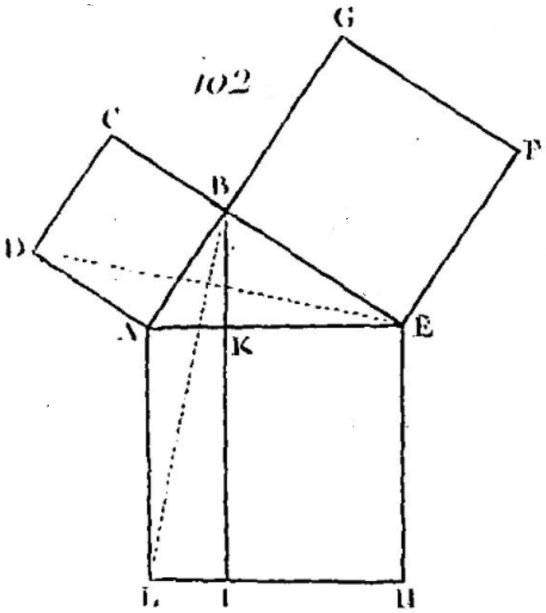
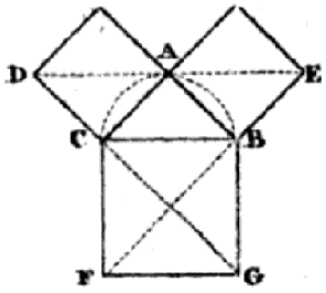


FIGURE III.12 – Figure liée à la preuve du théorème de Pythagore chez Lacroix (1808, pl. vi)

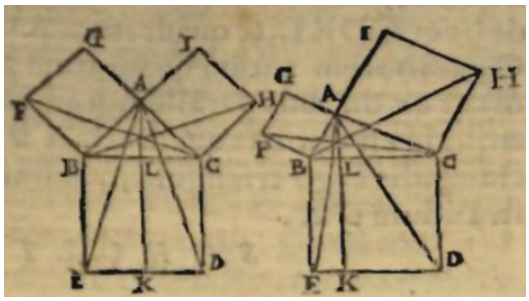
46. Cette idée est encore présente au XIX^e^ siècle, notamment chez un auteur comme Legendre. Cette posture de refus de l'usage du numérique en géométrie est décrite par Gagatsis comme un « archaïsme », à une époque où « la modernité scientifique [...] s'est construite sur le mélange des genres » (Gagatsis, 1994, p. 54).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

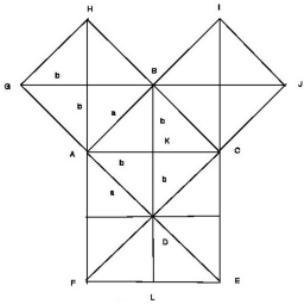
La seule différence est qu'il élude deux tracés de lignes à droite de la figure, AP et BH, puisque la preuve n'est réellement présentée que d'un côté et étendue à l'autre par analogie. Cette simplification de la figure se traduit numériquement par un indice de simplicité, suivant notre critère, réduit à 20, car comprenant 12 lignes et 8 points nommés supplémentaires à la figure initiale[47]. Cet allègement de la figure peut être motivé par un souci de clarification et de simplification de la situation pour les lecteurs. Néanmoins, nous sommes en droit de nous demander si cette simplification graphique contribue, pour les lecteurs, à améliorer la compréhension de la preuve, si l'on revient au critère qualitatif évoqué en préambule de cette étude (voir p. 343). En effet, la validation d'une preuve censément « meilleure » que les autres se ferait selon qu'elle révèle plus ou moins bien la « cause profonde » du théorème. Or, les historiennes et historiens des sciences ont beaucoup travaillé à retrouver cette « vraie raison » du théorème de Pythagore dans sa preuve euclidienne. D'après Dhombres, « ils ont cherché le principe de ce théorème, auquel la démonstration ne pourvoyait pas un accès évident, et de ce principe ils ont fait une cause », et ont fait apparaître cette preuve comme « la mise en œuvre d'une théorie ou procédure, celle de l'"application des aires" » (Dhombres, 2009, p. 64). Effectivement, cette démonstration à la façon d'Euclide n'est généralement pas perçue par ses lecteurs ultérieurs comme celle montrant la vérité du théorème le plus directement qui soit, estimée plus « convaincante » qu'« explicative »[48] (Mancosu, 2001, p. 98-99). Pourtant, comme le suggère Dhombres, sa cause profonde pourrait se nicher dans le cas particulier du théorème lorsque le triangle est isocèle rectangle, cas dans lequel la symétrie n'est plus une symétrie de situation, mais une symétrie géométrique réelle. Ce passage par un cas particulier avant d'aborder le cas général est attribué à Clavius à la fin du XVIe siècle (Dhombres, 2009, p. 67).



(a) dans le cas d'un triangle rectangle isocèle chez L.C. et F.P.B. (1840, pl. 9)



(b) dans le cas d'un triangle rectangle isocèle puis quelconque chez Clavius (1574, p. 229)



(c) figure reconstituée dans le cas isocèle par Dhombres (2009, p. 66)

FIGURE III.13 – Figures associées à la preuve du théorème de Pythagore

47. L'indice de simplicité de Lemoine est pour sa part réduit à 68.
48. En anglais « convincing » more than « explanatory ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans notre corpus, cette figure spécifique est visible dans le manuel des Frères des écoles chrétiennes de 1840, sans la figure générale pour les triangles rectangles quelconques. D'ailleurs, ils ne prouvent la propriété que dans ce cas spécifique, éludant le cas général. Effectivement, la figure III.13a (p. 352) donne à voir avec facilité pourquoi le grand carré est la somme des deux autres : le découpage en triangles de base, similaires à ABC, à travers les lignes pointillées, suggère que le grand carré est formé de quatre d'entre eux alors que les petits carrés en contiennent deux chacun. Le résultat est alors « évident ». La figure est également simplifiée, avec un indicateur égal à 17 suivant notre critère (13 lignes dont un arc de cercle et 4 points nommés). Là encore, le rôle des lignes additionnelles en pointillés est prépondérant, puisque ce sont elles qui délimitent les triangles d'aires égales, permettant de saisir les relations entre les surfaces d'un seul coup d'œil. Pour Dhombres, cette figure préalable porterait en elle la cause profonde du théorème exprimé en aires, puisqu'elle préparerait le lecteur au cas général en remplaçant la symétrie géométrique de la première figure à une symétrie « intellectuelle » dans la seconde, au sens d'une analogie de situation entre la gauche et la droite. Néanmoins, cette hypothèse reste à questionner, car tout d'abord, rien dans la figure de L. C. et F. P. B. n'est fait pour induire un cas général, qui d'ailleurs n'est pas traité, l'axe de symétrie n'apparaissant même pas sur leur figure. De plus, la double représentation de l'ouvrage de Clavius (voir figure III.13b p. 352), qui met quant à elle en évidence cette symétrie réelle qui devient une symétrie de pensée, ne matérialise pas en revanche le découpage des aires montrant l'évidence de leurs égalités, comme dans le manuel des Frères des écoles chrétiennes.

Enfin, la figure proposée par Dhombres (voir figure III.13c p. 352), qui regroupe les arguments des deux sources mises en comparaison dans notre analyse, fait bien apparaître à la fois les aires égales par un découpage habile, et la propriété de symétrie du cas isocèle. Mais il s'agit, de notre point de vue, d'une reconstruction *a posteriori*, qui ne correspond ni à ce qui est montré dans le manuel, ni dans le document de Clavius censé présenter la « vraie raison » du théorème. À ce stade, l'hypothèse de la symétrie de la situation comme fondement de l'explication de la cause réelle du théorème paraît hasardeuse, même en passant par la situation intermédiaire du triangle isocèle. Nous notons d'ailleurs que les auteurs des manuels du corpus ne font jamais ce choix, puisque le cas isocèle n'est présenté de manière spécifique qu'une seule fois (L.C. et F.P.B., 1840, 66, pl. 9), et sans être suivi du cas général qu'il pourrait induire. Néanmoins, cette analyse, si elle met plutôt en lumière l'absence d'évidence du théorème présenté sous cette forme, souligne le rôle clé de la hauteur issue du sommet de l'angle droit du triangle, manifestement primordial.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La preuve euclidienne n'apparaît donc pas, selon les deux points de vue retenus pour notre étude, comme la « meilleure » preuve possible parmi la multiplicité existante. La figure qui lui sert de support présente en effet une complexité certaine (selon l'indice de simplicité retenu), et le discours argumentatif, s'il est convaincant lorsqu'on le suit pas à pas, ne semble pas de nature à éclairer le lecteur de la raison véritable de la validité du résultat [49]. Pourtant, sur les 34 qui énoncent et démontrent le théorème de Pythagore, 20 des auteurs du corpus présentent cette preuve, dans tous les cas accompagnée de la même figure. Sept proposent de surcroît une figure euclidienne, parfois un peu simplifiée, sans la démonstration qui l'accompagne, même s'ils suivent d'autres voies pour démontrer le théorème. La figure sert alors davantage d'illustration de la proposition exprimée comme une égalité en aire de carrés. La démonstration d'Euclide continue donc à faire autorité, avec une très large diffusion dans les manuels de géométrie du début à la fin du siècle.

Les constructions alternatives

D'autres constructions permettant de démontrer le théorème de Pythagore apparaissent au fil des pages et du temps, se démarquant de la figure euclidienne.

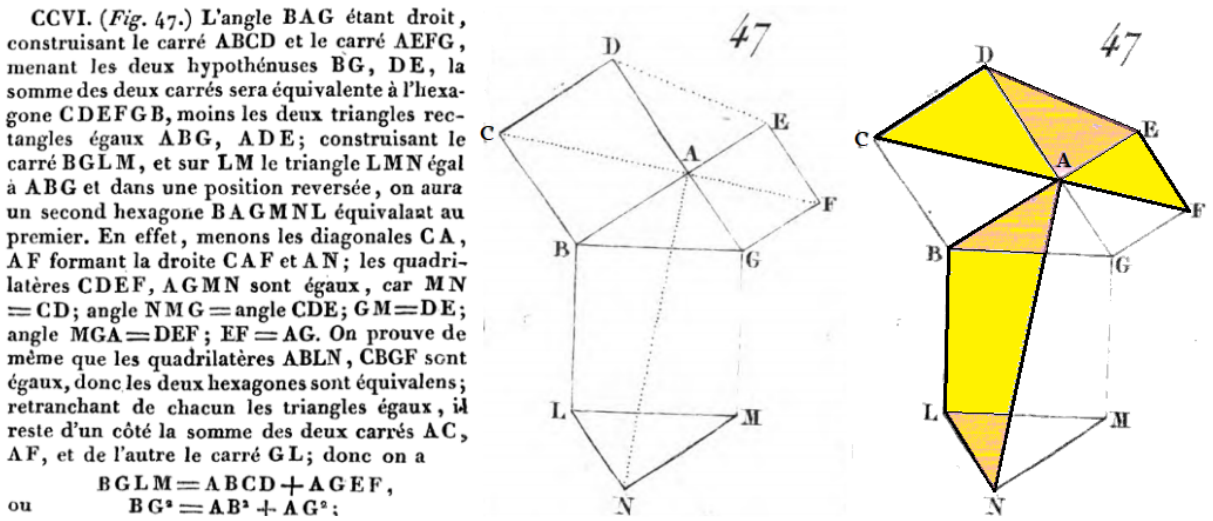
La première est celle de Terquem en 1829. Ce dernier, en plus d'être professeur, est investi dans la recherche en mathématiques ou son enseignement, notamment en tant que créateur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* en 1842 avec Gerono. Sa preuve du théorème de Pythagore est vraisemblablement sa création puisqu'il précise qu'il la croit « nouvelle » (Terquem, 1829, p. 105). Elle consiste en une simple « transposition de figures, telle qu'on l'exécute dans le jeu des énigmes chinoises ». Le principe, comme chez Euclide, réside dans des égalités de figures, mais il s'agit ici d'hexagones et non de triangles, rectangles ou carrés (voir figure III.14 p. 355). La simplicité du stratagème, et sa représentation visuelle par glissement et retournement d'une pièce hexagonale, n'empêche en rien la rigueur mathématique de la preuve exposée. En revanche, la preuve de Terquem n'est pas si nouvelle que cela, car elle semble être créditée à Léonard de Vinci par des historiens postérieurs, vraisemblablement à tort (Lemmermeyer, 2014) [50]. Mais il n'est pas exclu que Terquem l'ait découverte indépendamment de toute connaissance d'une preuve antérieure. Dans notre corpus, sa preuve

49. Pour la distinction entre une preuve pour « convaincre » et une preuve pour « éclairer », voir (Barbin, 1987). Voir aussi la note sur la distinction faite par Dhombres entre « preuve » et « démonstration » p. 344.

50. Lemmermeyer reconstitue le cheminement qui a fait entrer cette référence à De Vinci dans l'histoire, et émet l'hypothèse qu'il s'agit d'une erreur de Max Simon au début du XX^e siècle, reprise par ses successeurs. Cette preuve émanerait selon lui de Tobias Mayer en 1772, que Terquem aurait redécouverte sans la connaître en écrivant son *Manuel de géométrie*. Il indique en revanche la date de 1838 pour cette redécouverte, alors que nous en avons trouvé la trace dans l'édition antérieure de 1829 (Lemmermeyer, 2014 ; Terquem, 1829, p. 104-105).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

est reprise par Leyssenne à la fin du siècle comme 3ème des quatre démonstrations qu'il expose. Comme pour les trois autres preuves qu'il propose, il n'en précise pas la source.



CCVI. (*Fig.* 47.) L'angle BAG étant droit, construisant le carré ABCD et le carré AEFG, menant les deux hypothénuses BG, DE, la somme des deux carrés sera équivalente à l'hexagone CDEFGB, moins les deux triangles rectangles égaux ABG, ADE; construisant le carré BGLM, et sur LM le triangle LMN égal à ABG et dans une position reversée, on aura un second hexagone BAGMNL équivalant au premier. En effet, menons les diagonales CA, AF formant la droite CAF et AN; les quadrilatères CDEF, AGMN sont égaux, car MN = CD; angle NMG = angle CDE; GM = DE; angle MGA = DEF; EF = AG. On prouve de même que les quadrilatères ABLN, CBGF sont égaux, donc les deux hexagones sont équivalens; retranchant de chacun les triangles égaux, il reste d'un côté la somme des deux carrés AC, AF, et de l'autre le carré GL; donc on a

$$BGLM = ABCD + AGEF,$$

ou

$$BG^2 = AB^2 + AG^2;$$

47

47

FIGURE III.14 – Extrait de la preuve du théorème de Pythagore par Terquem (1829, 104, pl. II), figure associée initiale, puis figure avec mise mise en évidence des égalités d'aires en couleur par nos soins (à droite)

La simplicité du dispositif, mesurée sur la construction additionnelle à l'aide de notre indicateur, est assez équivalente à la figure initiale d'Euclide, avec 14 lignes supplémentaires et 7 points nommés, soit un total de 21, contre 22 pour celle d'Euclide[51]. Quant au critère qualitatif, revenant à évaluer si cette preuve mettrait plus en évidence la cause profonde du théorème, il est là encore assez proche, de notre point de vue, de celui évoqué pour la démonstration euclidienne. Certes, la figure, accompagnée du discours, est convaincante, et l'égalité des polygones est assez aisément visualisable. Par contre, le lien entre la construction, les égalités d'aires des pentagones, et les aires des carrés n'est pas si facile à se représenter, et demande une certaine gymnastique intellectuelle : il faut imaginer l'aire du triangle DAE répartie entre les moitiés des triangles BAG et LMN, pour en déduire par complément que la moitié du carré $BGML$ est égal aux deux moitiés des carrés $ABCD$ et $AEFG$, ce qui donne l'égalité attendue en doublant leurs aires. La lectrice ou le lecteur peut être convaincu de la validité du raisonnement et du résultat à l'issue de la démonstration, mais aura-t-il saisi « pourquoi » le grand carré vaut la somme des deux autres ? Nous n'en sommes pas certaine, dans la mesure ou le raisonnement met l'accent sur les pentagones et fait ainsi perdre de vue les carrés.

51. Mesurée avec le critère de Lemoine, cette simplicité est de 72, alors que celle d'Euclide était estimée à 74, ce qui est là encore sensiblement identique.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

D'autres auteurs proposent des preuves fondées sur la configuration initiale d'Euclide, soit trois carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle, mais faisant intervenir, comme celle que nous venons d'analyser, des égalités de figures différentes. C'est le cas de Percin en 1842, qui démontre d'abord « cette importante proposition » par similitude des triangles, puis en propose une version plus géométrique par la méthode des aires (Percin, 1842, p. 70-71). Le principe est de construire, en prolongeant les lignes DE et BG, un parallélogramme $ABMN$ équivalent au rectangle $BDEG$ mais également au carré $AIHB$, ces deux derniers quadrilatères étant par conséquent forcément égaux entre eux. Les arguments majeurs sont donc les cas d'égalité des triangles, puisqu'on prouve au passage que les triangles ABC et MBH sont égaux, et la propriété d'équivalence des quadrilatères de même base compris entre deux mêmes parallèles (et donc de même hauteur). L'opération est ensuite renouvelée à gauche avant de conclure.

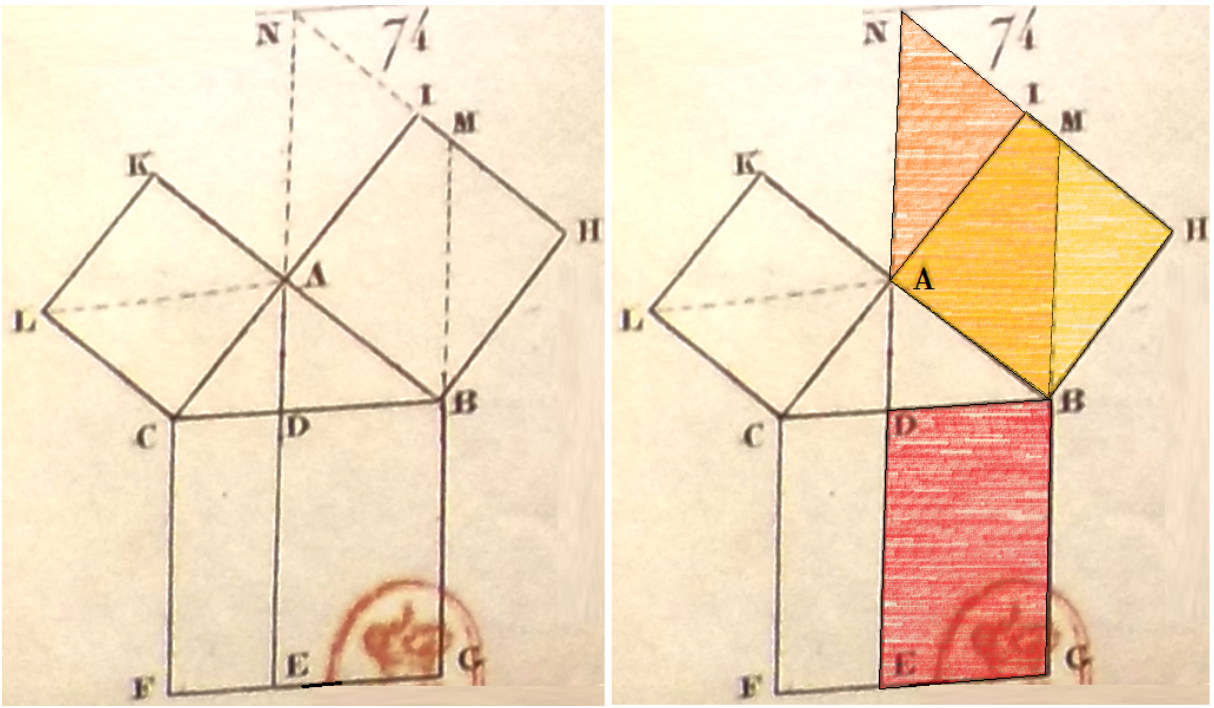


Figure III.15 – Figure associée à la preuve du théorème de Pythagore par Percin (1842, pl. 2), avec mise mise en évidence des égalités d'aires en couleur par nos soins (à droite)

La construction de Percin comporte 11 lignes additionnelles, les droites passant respectivement par A et D, B et G et H et I ne comptant que pour une ligne chacune, et 10 points nommés. La ligne AL doit être retirée de notre calcul car elle n'intervient pas dans la preuve, mais dans un corollaire ultérieur sur le rapport de la diagonale au côté dans un carré. Cela porte l'indice de simplicité de la figure à 20, un peu moins que la

Licence CC BY-NC-ND 3.0

figure euclidienne de référence [52]. Mais c'est surtout en termes qualitatifs que la preuve gagne en clarté, car dans ce cas, l'égalité des aires du rectangle et du carré est rendue perceptible par l'intermédiaire de ce parallélogramme, construit dans le prolongement des côtés des deux figures à égaler, et dont l'égalité en aire avec l'une et l'autre apparait assez clairement. Même si le mécanisme sous-jacent de sa preuve est très proche de celui d'Euclide, reprise par de nombreux auteurs, Percin, en suivant des choix différents de constructions additionnelles, en propose une amélioration conséquente en termes d'accessibilité pour ses jeunes lectrices et lecteurs. L'égalité des aires n'est pas immédiate à l'œil et passe par un intermédiaire, mais ce dernier est suffisamment bien choisi pour que la « raison » de l'égalité apparaisse clairement à l'esprit. Un pas est nettement franchi vers la clarté, sans perdre en conviction, et Percin se rend digne des ambitions qu'il affiche dans le titre et sous-titre de sa *Géométrie simplifiée*, qu'il rédige d'une manière « propre à en faciliter l'étude » (Percin, 1842). Dans la préface, il annonce en effet vouloir simplifier « la plupart des théories, sans que la rigueur des démonstrations [ne soit] sacrifiée » et ce « dans le but de faciliter aux commençants une étude si utile à tous » (Percin, 1842, p. i). Cette adaptation de la preuve classique d'Euclide, qui apparaît pour la première fois dans notre corpus dans le manuel de Percin, est un exemple représentatif de la volonté d'une partie des auteurs de mettre la géométrie à la portée de tous les élèves. La simplification revendiquée par Percin est à l'œuvre et s'appuie sur des figures plus épurées, et surtout plus porteuses de sens, facilitant la compréhension des résultats géométriques correspondant. Pour aller dans ce sens, le choix des constructions géométriques les mieux adaptées apparaît donc comme essentiel.

À la fin du siècle, Leyssenne propose quatre preuves du théorème de Pythagore, récapitulant de cette façon les diverses versions proposées par les auteurs antérieurs dans les manuels, même s'il n'en cite aucun. Avant de présenter la démonstration de Terquem, il débute par la preuve historique d'Euclide, à partir d'une figure légèrement modifiée (voir figure III.16 p. 358). Cette figure comporte autant de lignes additionnelles que celle d'Euclide (14), et trois points nommés de plus que celle d'Euclide (soit 10), ce qui porte son indice de simplicité à 24, contre 21 pour la preuve euclidienne [53]. Les tracés supplémentaires ne sont en revanche pas les mêmes que dans la figure initiale : si les lignes AD, FC et AN sont bien présentes dans le raisonnement euclidien, les lignes IA et CL sont rajoutées à l'initiative de Leyssenne. Elles n'apparaissent pas non plus dans les preuves de Legendre et Lacroix. Ces lignes ont vocation à mettre en évidence les hauteurs communes du triangle ABD et du rectangle $BMND$, ainsi

52. Son indice de simplicité suivant Lemoine serait alors de 62 au lieu de 74, du fait que beaucoup de lignes jouent plusieurs rôles dans la figure.

53. Il effectue pourtant la simplification graphique de Lacroix consistant à ne mener les diagonales, dans ce cas AD et FC, que d'un côté de la figure et non en symétrie, ce qui réduit de deux le nombre de lignes tracées.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

que du triangle CBF et du carré $ABFG$. Cette explicitation des hauteurs communes manifeste vraisemblablement le fait que les élèves de la fin du siècle ne sont pas tous à même de remarquer que deux triangles de même base compris entre des mêmes parallèles sont égaux (Prop. I.37, voir Euclide 1990, p. 264). L'auteur estime en effet nécessaire d'exhiber les hauteurs pour permettre à ses jeunes lectrices et lecteurs de visualiser ces égalités d'aires. Il est même probable que l'explicitation des hauteurs fasse référence implicitement aux formules de calcul de ces aires. Ces tracés complémentaires sont censés apporter de l'aide à la lecture de la figure et donc à la compréhension du raisonnement. D'ailleurs, Leyssenne s'appuie dessus dans sa preuve en précisant par exemple que « le triangle ABD a même base BD que le rectangle $BDMN$, et même hauteur $AI = BM$ » pour justifier que le triangle a une aire moitié de celle du rectangle. Néanmoins, en chargeant sa figure avec des lignes supplémentaires, l'auteur risque de brouiller l'appréhension globale de la figure, en faisant apparaître au passage des rectangles $FLCG$ et $AIDN$ qui, n'ayant rien à voir avec l'égalité à montrer, peuvent en parasiter la compréhension. Le dispositif ne nous apparaît donc pas réellement convaincant, ni suivant le critère quantitatif, avec une construction plus complexe que celles de ses prédécesseurs, ni suivant le point de vue de la recherche de la « cause profonde » du théorème, qui semble se perdre encore un peu plus dans cette configuration.

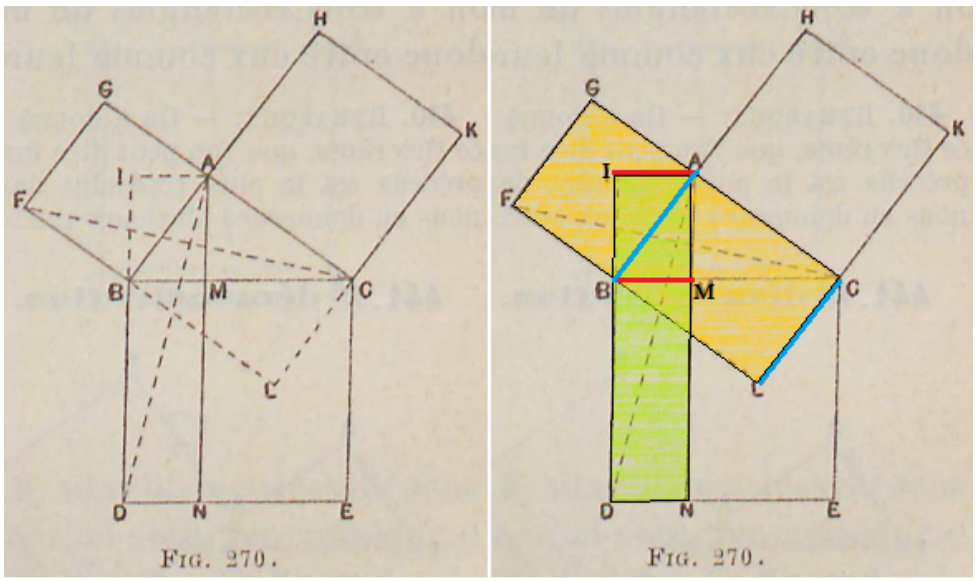


Figure III.16 – Figure associée à la première preuve du théorème de Pythagore par Leyssenne (1890, p. 249), avec mise en évidence des égalités de hauteur et des rectangles « parasites » introduits en couleurs par nos soins (à droite)

Leyssenne propose ensuite une autre démonstration qui s'appuie sur une nouvelle figure. Proche de la figure de référence d'Euclide, avec ses carrés construits sur les

Licence CC BY-NC-ND 3.0

côtés du triangle et la hauteur issue de A, elle en diffère néanmoins par quelques lignes menées différemment. Il s'agit de FI, parallèle à BC passant par F, et DL, parallèle à AB passant par D (voir figure III.17 p. 359). Construire ces lignes lui permet de montrer l'égalité du carré $ABFG$ et du parallélogramme $FICB$ d'une part, et du rectangle $BDNM$ avec le parallélogramme $ABDL$ d'autre part. Les deux parallélogrammes étant eux-mêmes égaux, cela prouve donc bien l'équivalence du carré et du rectangle, qui donne, par extension au côté droit, l'égalité attendue. Ce dispositif est assez proche de celui de Percin évoqué ci-avant (voir p. 356), qui fait également intervenir un parallélogramme intermédiaire pour montrer l'équivalence du carré et du rectangle. La différence est que Leyssenne en fait intervenir deux, là où Percin n'en introduit qu'un. En termes de simplicité de la construction, la figure de Leyssenne comporte 12 droites additionnelles et 10 points nommés supplémentaires, soit une simplicité qui s'élève à 22. C'est un peu moins que la figure qu'il présente juste avant (figure III.16 p. 358), mais un peu plus que la figure de Percin [54].

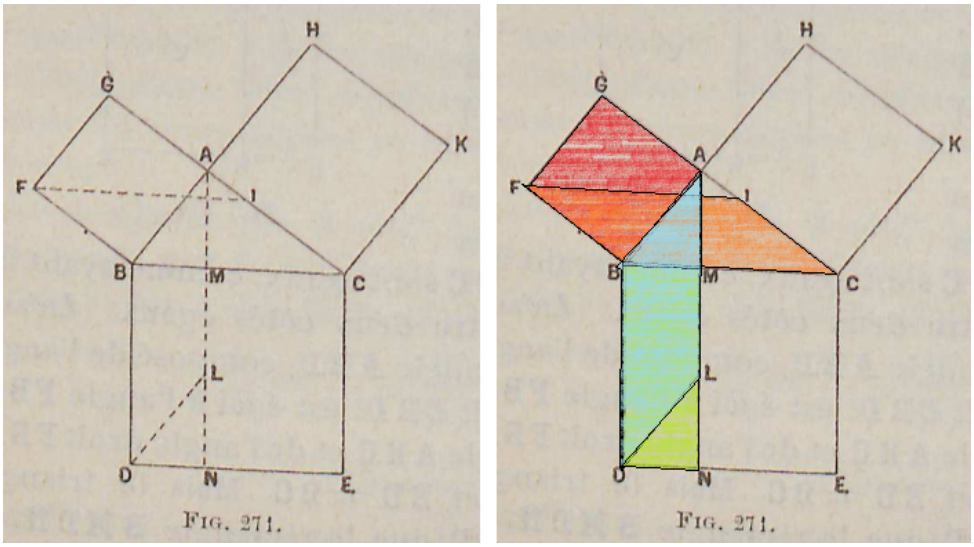


Figure III.17 – Figure associée à la seconde preuve du théorème de Pythagore par Leyssenne (1890, p. 250), avec mise en évidence en couleurs des égalités des quadrilatères par nos soins

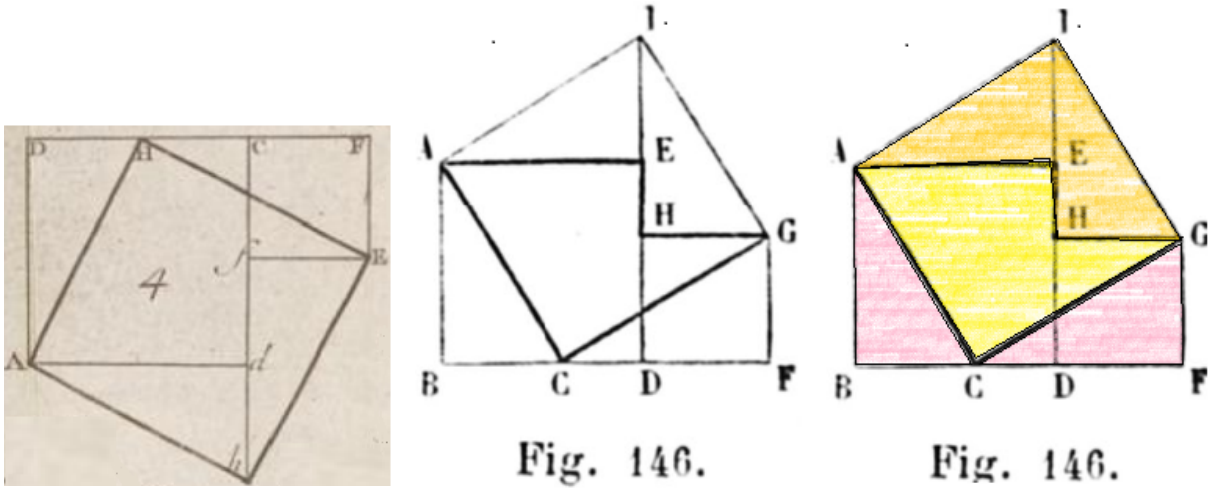
Concernant la manière dont cette construction met en évidence la « vraie raison » du théorème, nous estimons qu'elle souligne plutôt mieux les égalités d'aires entre les carrés et rectangles d'une part, et les parallélogrammes associés d'autre part, que ne le fait la preuve d'Euclide. Cette présentation a notamment l'avantage d'éviter la difficulté de comparer des triangles à des quadrilatères, par des jeux de double et de moitié.

54. Suivant le critère de Lemoine, sa simplicité serait de 76, ce qui est un peu plus que celle de la figure initiale d'Euclide, égale à 74. Cela est lié au « coût » en opérations graphiques élémentaires du tracé d'une parallèle à une droite passant par un point donné.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

En revanche, en doublant le nombre de parallélogrammes intermédiaires, elle met en évidence l'égalité carré-rectangle moins directement que la construction de Percin [55].

En 1857, pour la première fois dans notre corpus, un auteur rompt avec la construction euclidienne (trois carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle) pour démontrer le théorème de Pythagore. Il s'agit de Dupuis (1857, p. 122), qui propose une figure que l'on retrouve par la suite chez Rouché et Comberousse (1866, p. 290), Tarnier (1872, p. 311) et Bovier-Lapierre (1879, p. 90). Sur cette figure (voir figure III.18 p. 360), les éléments constitutifs du théorème ne sont pas disposés de la même manière : à partir du triangle rectangle initial sont tracés les deux petits carrés côte à côte, le grand carré égal à leur somme étant quant à lui construit sur des lignes diagonales dûment choisies. Cette configuration est celle utilisée par Clairaut dans ses *Éléments de géométrie* pour résoudre le problème consistant à « faire un quarré égal à la somme de deux quarrés inégaux » (Clairaut, 1741, p. 87-90) [56]



(a) dans les *Éléments de géométrie* de Clairaut (1741, pl. vii)

(b) par Dupuis (1857, p. 122), plus figure accompagnée d'un code couleur pour mettre en évidence les égalités d'aires

FIGURE III.18 – Figures associées à la preuve du théorème de Pythagore

La preuve de Dupuis commence par la construction effective de la figure : « Soit ABC un triangle rectangle, $ABDE$ le carré de AB et $DFGH$ le carré de BG. Prolongeons

55. La dernière preuve de Leyssenne, identique à celle que propose Salicis plus de vingt ans auparavant, est présentée à la p. 362.

56. Fidèle à sa démarche d'aborder la géométrie par des résolutions de problèmes, il traite d'abord cette question et démontre que l'aire du grand carré ainsi construit est bien égale à celle des deux autres, puis indique en conséquence qu'« on découvrira bientôt cette fameuse propriété des triangles rectangles, que le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés ». (Clairaut, 1741, p. 90). Cette configuration est aussi celle que présente le mathématicien arabe Thabit Ibn Qurra (836-901) neuf siècles auparavant dans son *Épître sur la preuve attribuée à Socrate au sujet du quarré et de sa diagonale* (Baroux et Bühler, 2020 ; Djebbar, 2018 ; Moyon, 2008).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

DE d'une distance $EI = CB$ et joignons AI, GI, CG » (Dupuis, 1857, p. 122). L'égalité des quatre triangles rectangles ABC, CFG, GHI et AEI est amenée comme une conséquence de la construction, qui s'inscrit directement dans un cas d'égalité des triangles, qui ont en effet « un angle égal, l'angle droit, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun » (Dupuis, 1857, p. 122). C'est l'un des arguments qui, jumelé avec la détermination d'un de ses angles, va permettre de déduire que le quadrilatère $ACGI$ ainsi construit est un carré. Il ne reste plus ensuite qu'à considérer le polygone $ACGHE$ (en gras sur la figure), auquel on ajoute d'une part les deux triangles AIE et GHI pour former le carré $ACGI$, et d'autre part les triangles ABC et CGF pour former les deux carrés $ABDE$ et $DFGH$ et conclure avec l'égalité souhaitée.

Si la preuve utilise globalement des arguments très similaires aux autres en termes d'égalité des triangles et de composition des aires, elle repose sur une figure plus simple par son nombre de tracés, puisqu'il ne faut que 8 lignes et 6 points nommés de plus pour la construire à partir du triangle rectangle initial. Son indicateur de simplicité, alors égal à 14, est très nettement inférieur à celui des autres figures analysées jusqu'alors pour prouver le même théorème [57]. La construction, par conséquent aisément réalisable par les lectrices et lecteurs, donne par ailleurs un accès immédiat à la « raison » de l'égalité des aires du grand carré et des deux petits, dès lors que l'on visualise la forme $AEHGC$, à laquelle on vient ajouter des triangles rectangles égaux de deux manières différentes (sur la figure III.18b p. 360, aire jaune + orange = aire jaune + rose, puisque orange = rose). La simplicité des tracés géométriques et de la figure qui en découle se traduit bien aussi par une plus grande facilité de compréhension du théorème, en soulignant plus clairement pourquoi le grand carré est égal en aire à la somme des deux autres. Les arguments théoriques nécessaires à la qualité et à la rigueur de la preuve géométrique, explicités par la figure elle-même, sont de fait rendus plus accessibles à la compréhension des élèves. Même si cette preuve, existant déjà dans des sources historiques plus ou moins anciennes, n'est pas nouvelle au XIX^{e} siècle, son introduction dans les manuels de géométrie semble l'être puisque nous n'en trouvons pas trace dans notre corpus avant 1857. Elle est en revanche adoptée dans trois autres titres du corpus, de 1866 à 1879. Cette présentation, fondée sur une figure qui tranche plus franchement avec celle d'Euclide, apparaît donc comme une alternative recevable, que plusieurs auteurs n'hésitent pas à mobiliser pour faciliter l'accès au théorème et à sa preuve à leur jeune public.

57. L'indicateur de Lemoine est ici de 43, ce qui est également très inférieur aux valeurs dépassant 70 pour les diverses variantes de la figure euclidienne.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Enfin, une dernière construction fait son apparition dans notre corpus en 1868 dans le cadre de la démonstration du théorème de Pythagore[58]. Elle survient dans le cours de l'enseignement secondaire de jeunes filles professé et publié par Salicis à la Sorbonne entre 1868 et 1870 (voir p. 202). Son principe est celui de la construction de deux carrés construits sur « deux lignes égales à $AC + AB$ », et par conséquent forcément égaux. Sur le premier, la construction se poursuit avec les carrés $AB'I'F$ et $AKJC'$, qui délimitent comme surfaces restantes deux rectangles dont l'auteur justifie qu'ils sont égaux. Sur le second, ce sont quatre triangles rectangles qui sont construits, laissant au centre un quadrilatère $A''P''Q''R''$, dont Salicis montre que c'est un carré (voir figure III.19 p. 362). Par construction, et puisque les quatre triangles rectangles ont ensemble la même aire que les deux rectangles, ce carré a une aire égale à la somme des deux autres carrés. Enfin, ce carré étant construit sur l'hypoténuse du triangle rectangle donné initialement, le théorème est démontré (Salicis, 1869, p. 567).

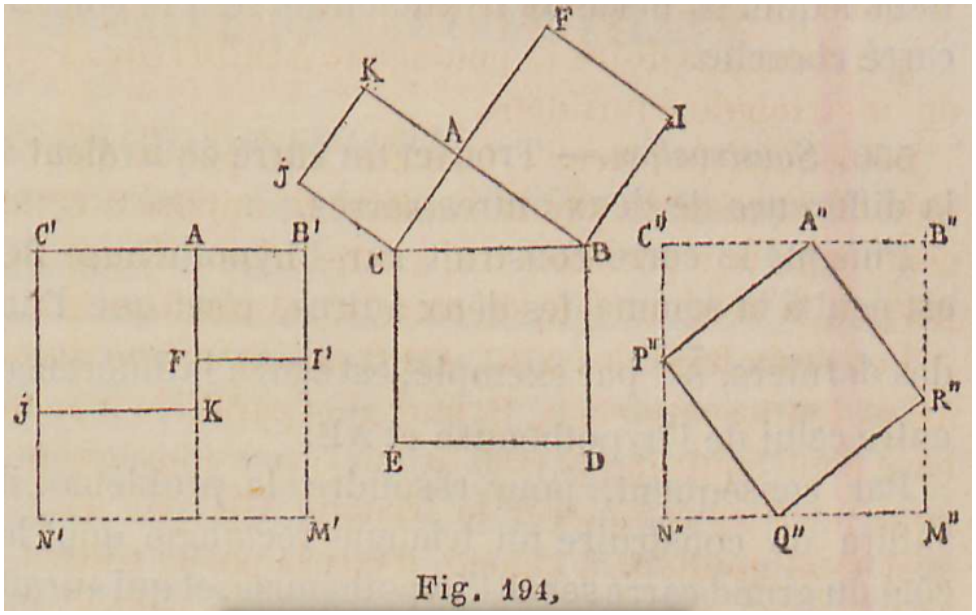


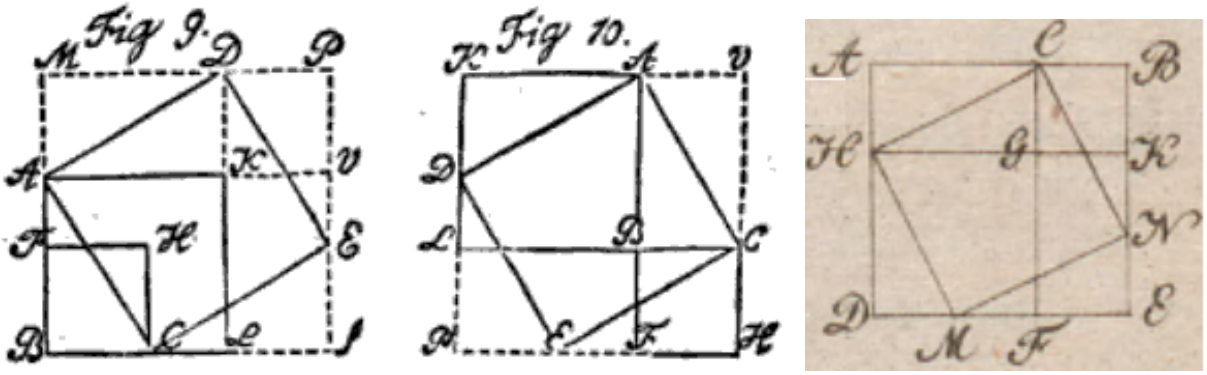
FIGURE III.19 – Configuration permettant de prouver le théorème de Pythagore chez Salicis (1869, p. 567)

En plus d'être « la plus simple qu'il connaisse », Salicis précise qu'il s'agit d'une preuve « toute récente » du théorème (Salicis, 1869, p. 567) (voir l'introduction de la section II.3.2 p. 284). Et en effet, la configuration qui sert d'appui à cette preuve n'apparaît pas dans les sources les plus anciennes que cite Vincent dans sa lettre écrite à ce sujet

58. Ces deux dernières configurations — de Salicis et la précédente repérée chez Dupuis — apparaissent également chez d'autres auteurs sous des formes différentes, en lien avec les objets de la classe, leur représentation figurée et leur potentielle manipulation. Ces cas seront analysés spécifiquement dans la sous-section III.1.2.3 (à partir de la page 409).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en 1852 (voir p. 298). En revanche, elle figure dans des ouvrages du début du XIX^e siècle qu'il mentionne, comme ceux de Müller[59] (1819) et de Hoffmann[60] (1821). Ce dernier explique d'ailleurs qu'il l'a découverte, sous une forme un peu différente, dans un ouvrage antérieur de 1808, lui-même inspiré d'un manuel anglais de 1733. Il s'attribue donc le crédit de la preuve fondée sur sa nouvelle disposition (voir figure III.20b p. 363) (Hoffmann, 1821, p. 11-13). La disposition des carrés et des rectangles proposée par Salicis est encore un peu différente de celle des auteurs plus anciens, et il est probable que, ces démonstrations ayant été produites (ou relayées) en Allemagne, elles n'aient été connues en France qu'un peu plus tardivement. Il est d'ailleurs vraisemblable que la lettre de Vincent dans les *Nouvelles Annales* ait favorisé la diffusion de ces connaissances en France, et justifie quoiqu'il en soit que Salicis présente ce mode de démonstration comme récent.



(a) chez Hoffmann (1821, p. 12-13) **(b)** chez Müller (1819, pl.)

FIGURE III.20 – Configurations permettant de prouver le théorème de Pythagore

Cette configuration présente une simplicité de 17 si l'on prend comme référence la figure de Müller/Hoffmann, avec les triangles rectangles, et les carrés et rectangles apparaissant conjointement sur la même figure par superposition (figure III.20b p. 363), avec 9 lignes et 8 points nommés supplémentaires au triangle rectangle initial. C'est un peu plus que l'indice de 14 obtenu par la construction de Dupuis (voir p. 361). Si l'on considère la double figure de Salicis, le résultat est bien supérieur, avec 7 lignes et 6 points nommés pour la première figure, et 7 lignes et 5 points pour la seconde, soit un total de 25, même si chacune des deux figures présente un indice de simplicité faible (respectivement 13 et 12). Pourtant, c'est bien ce choix qui est confirmé par les auteurs de manuels ultérieurs, qui reprennent pour quatre d'entre eux la double construction de Salicis, et non sa version superposée comme chez Hoffmann ou Müller.

59. Johann Wolfgang Müller (1765 – 1828), professeur de mathématiques et de français à Nuremberg. Il a publié des livres d'astronomie.

60. Johann Joseph Hoffmann (1777 – 1866). Professeur de mathématiques allemand, il occupe également des postes administratifs à l'université et rédige des ouvrages mathématiques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les quatre ouvrages du corpus dans lesquels cette preuve est présentée, en plus de celui de Salicis, sont publiés de 1880 à 1896 et se caractérisent par une orientation revendiquée vers la géométrie pratique — comme l'ouvrage de takymétrie de Dalsème (1880) ou le *Traité de géométrie théorique et pratique* de Leyssenne (1890) — et/ou un public essentiellement ou en partie féminin. C'est le cas de l'ouvrage de Leyssenne cité ci-avant, qui s'adresse notamment aux « écoles normales d'institutrices [...] et [à] l'enseignement secondaire des jeunes filles » (Leyssenne, 1890, couv.), de celui de Bos destiné exclusivement à l'enseignement secondaire féminin (Bos, 1884), et de celui de Hue et Vagnier, écrit pour l'usage des EPS de filles (Hue et Vagnier, 1896) [61].

Il est donc manifeste que le choix opéré par les auteurs d'une construction plutôt qu'une autre pour la preuve du théorème de Pythagore est particulièrement lié au public auquel ils s'adressent. En effet, les autres manuels du corpus de la même période, destinés à des lecteurs de l'enseignement secondaire masculin, classique ou spécial, optent quant à eux pour la configuration euclidienne dans leurs preuves (Tombeck, 1879, p. 22 ; P. André, 1879, p. 143 ; Guilmin, 1882, p. 148 ; Bourget, 1885, p. 94 ; Girod, 1893, p. 194). Ce constat se trouve encore conforté par la comparaison de deux titres de Bos, auteur de nombreux livres classiques dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle, parmi lesquels sa *Géométrie élémentaire* (Bos, 1875) de 1875 pour l'enseignement secondaire masculin et son pendant féminin, les *Notions de géométrie*, en 1884 (Bos, 1884). Dans l'ouvrage pour les classes de lettres, le théorème de Pythagore est démontré à la façon d'Euclide, alors que dans son homologue pour les jeunes filles, il est prouvé avec la méthode présentée par Salicis, lui-même auteur d'un cours pour l'enseignement féminin. Pourtant, rien dans les programmes n'indique le mode de démonstration qui doit être suivi, et il s'agit donc bien là d'un choix délibéré de l'auteur en fonction de son lectorat. Les programmes de géométrie pour les jeunes filles sont récents au moment où les manuels correspondants sont édités, et les auteurs qui écrivent pour ce public suivent unanimement le choix de la configuration que propose Salicis. C'est sans doute qu'elle leur apparaît comme plus compréhensible que la preuve euclidienne pour des élèves moins entraînées à la pratique géométrique. Il s'agit là encore d'une option alternative, qui certes ne gagne pas vraiment en simplicité en termes de coût graphique de construction des figures, mais dont l'accessibilité pour des débutantes en géométrie semble admise par les auteurs. Et en effet, la double disposition dans le format « puzzle » est certainement plus familière aux élèves, parlant davantage à leurs sens, et la preuve qui lui est associée plus facile à appréhender que la version classique de la démonstration d'Euclide.

61. Il est remarquable que la plupart (4 sur 6) des manuels qui présentent ces deux dernières constructions « alternatives » (celles de Dupuis et de Salicis) appartiennent au groupe des « tardifs appliqués » (groupe 5) de la 3ème classification que nous avons construite (voir tableau A.2 p. 667).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Comparaison des preuves : un premier bilan

Les différentes constructions et figures associées au théorème de Pythagore et à sa preuve affichent donc une grande diversité dans les ouvrages du corpus, conformément à ce que la multiplicité des démonstrations possibles peut laisser présager. Ces configurations géométriques suivent une évolution à travers le siècle, que nous nous proposons de résumer, dans un premier temps, suivant le critère de simplicité retenu pour cette analyse. Les principaux résultats obtenus dans l'étude précédente figurent dans le tableau III.2 p. 365.

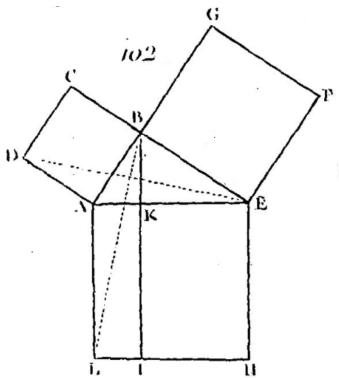
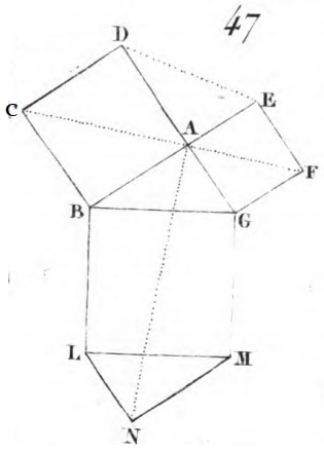
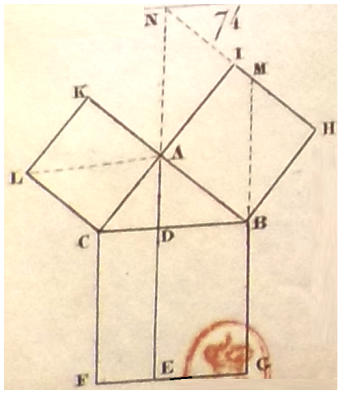
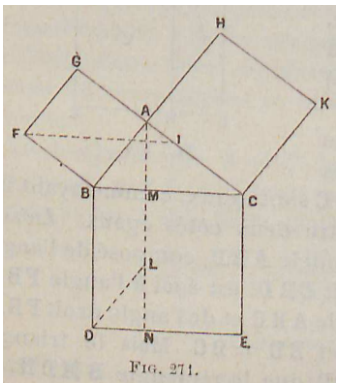
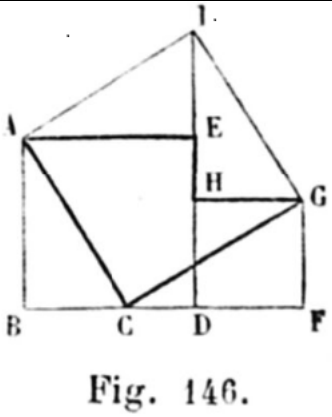
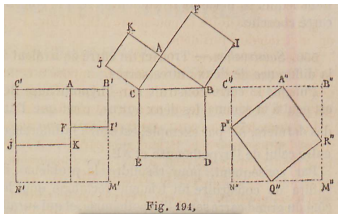
Figures			
Simplicité	20-24	21	20
Effectif	23	2	1
Dates	1808-1893	1829 et 1890	1842
Figures			
Simplicité	22	14	25 (13 + 12)
Effectif	1	4	5
Dates	1890	1857-1879	1868-1896

TABLE III.2 – Tableau récapitulatif des diverses constructions mobilisées pour la preuve du théorème de Pythagore, avec leur indice de simplicité, le nombre de manuels du corpus dans lesquels elles apparaissent (effectif), et les dates d'édition correspondantes

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Cette étude met en évidence le processus de simplification à l'œuvre dans les manuels de géométrie au cours du siècle concernant la présentation et la preuve du théorème de Pythagore. L'analyse des constructions et de leur simplicité, mesurée à l'aide d'un indicateur quantitatif établi pour l'occasion, montre un allègement sensible des figures au cours du temps, d'un indice de simplicité entre 20 et 24 suivant les différentes versions de la figure euclidienne, à un indice de 14, et même de 12 et 13 pour la double figure qui apparaît à la fin du siècle. Ces constructions, de plus en plus limitées en nombre de lignes et de points nommés additionnels, s'avèrent également centrées sur un accès visuel plus direct à la « cause profonde ». En effet, les dispositifs graphiques mis en place, non seulement soutiennent efficacement le raisonnement théorique qu'ils accompagnent, mais vont de surcroît de plus en plus vers des techniques de visualisation des aires entrant en jeu et de leurs égalités. Cette double évolution marque une forme de progrès dans les manuels, s'améliorant dans « l'art de présenter les choses » à leurs lecteurs. C'est en effet l'objectif que se fixent explicitement certains auteurs, comme Puille, qui dans l'« Avertissement » préalable à ses *Leçons*, présente son projet éditorial en ces termes :

> Tout en exposant des vérités dont nous n'avons pas la prétention d'avoir doté la science, nous avons essayé de trouver des ressources nouvelles dans le *choix des matières* et dans *l'enchaînement des idées*, dans la *simplification de la méthode* ; en un mot, dans l'art de présenter les choses sous le jour qui nous a paru le plus propre à obtenir des succès certains[62]. (Puille, 1855, p. vii)

Puille évoque des points cruciaux de notre analyse, comme les choix que les auteurs sont amenés à opérer, en lien avec la production scientifique et dans un souci de simplicité. Dans le cadre du théorème de Pythagore, nous constatons alors que la multiplicité des preuves possibles, loin de constituer une difficulté, est une réelle source de richesse, puisqu'elle permet aux auteurs de réaliser les choix qu'ils estiment optimaux en termes d'efficacité pédagogique, mais aussi de proposer plusieurs preuves, notamment lorsqu'ils s'adressent à plusieurs types de publics, graduant ainsi les niveaux de lecture. Enfin, ces démonstrations, à travers les constructions variées qu'elles mettent en jeu, sont parfois nombreuses, comme chez Mauduit (6) ou chez Leyssenne (4), et apparaissent de surcroît comme des outils pour stimuler la curiosité, mais aussi l'ingéniosité ou la créativité des jeunes géomètres auxquels les manuels s'adressent.

L'étude du cas du théorème de Pythagore souligne ainsi bien le rôle de la construction géométrique et de son produit final que constitue la figure, pas seulement comme support du raisonnement mathématique, mais comme un élément qui lui est intrinsèque,

62. Les expressions reportées en italiques le sont également dans le texte original.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

puisqu'au bout du compte, chacune nouvelle figure est constitutive d'une nouvelle démonstration. Les analyses menées ci-avant mettent en évidence le rôle du théorème de Pythagore, à travers ses démonstrations par les aires, à l'interface de l'acte de construire une figure et de celui de démontrer (voir schéma III.21 p. 367). Le processus de simplification des figures mis en œuvre au cours du temps vient servir de nouveaux raisonnements, plus directs, et qui font apparaître avec plus de netteté la raison pour laquelle la proposition est vraie.

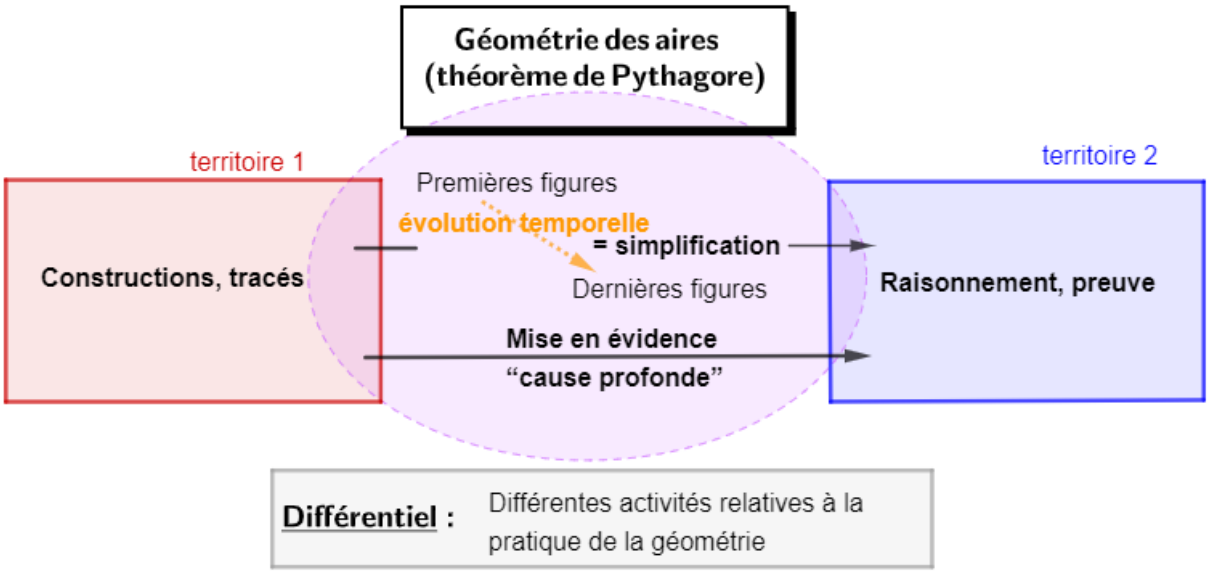


FIGURE III.21 – Schéma montrant en quoi les preuves du théorème de Pythagore par égalité d'aires sont à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement

Le rôle fondamental de la construction et de la figure dans les preuves s'exprime également dans le cadre de la géométrie des aires curvilignes, et en particulier dans l'étude de l'aire du cercle et des sections coniques, que nous proposons désormais d'explorer.

III.1.1.3 Construire pour démontrer : le cas du cercle chez Legendre

Les questions relatives à l'aire du cercle sont réputées très épineuses, comme en témoigne la persistance dans le temps de l'expression « C'est la quadrature du cercle », désignant un problème dont on sait par avance qu'il n'a pas de solution. La construction d'un cercle d'aire égale à celle d'un carré donné n'est pas la seule question délicate en la matière. Celle de la détermination de l'aire d'un cercle ou de la comparaison des aires des cercles entre eux l'est tout autant. Les savants antiques n'ont toutefois pas éludé cette difficulté. Du point de vue de la comparaison, Euclide a déterminé dans ses *Éléments* quel était le rapport des aires de deux cercles de rayons différents. Dans

Licence CC BY-NC-ND 3.0

son traité *De la mesure du cercle*, Archimède a pour sa part prouvé que cette aire était égale à celle d'un triangle rectangle de côtés le rayon et la circonférence rectifiée. Certains auteurs des manuels du XIX^e siècle s'inspirent de ces savants pour bâtir des preuves, accessibles à des élèves ne possédant que des connaissances de géométrie élémentaire. Au tournant du siècle en particulier, les stratégies mathématiques et pédagogiques sont diverses pour aborder les démonstrations délicates autour de l'aire du cercle, comme l'analyse Lamandé à propos des ouvrages de Bézout, Peyrard, Legendre et Lacroix (Lamandé, 1990).

La méthode que choisit Legendre pour établir le résultat sur l'aire du cercle suit la voie synthétique des Anciens, ce qui est remarquable dans notre corpus, car il est le seul des auteurs à procéder ainsi [63]. Il faut probablement en chercher la raison en direction de l'héritage euclidien de sa géométrie, qui a déjà été souvent commenté. En effet, le mathématicien propose au tournant du siècle un ouvrage proche de la doctrine d'Euclide, se réclamant même de ses méthodes et de celles des savants antiques, vantant en particulier les mérites du raisonnement par l'absurde, « qui approche le plus de la perfection, et qui convient le mieux aux démonstrations de la géométrie » (Legendre, 1794, p. vi). Le texte de Legendre est néanmoins empreint des spécificités de son époque : il y intègre des résultats mathématiques récents, et associe des nombres aux grandeurs, arithmétisant ainsi le discours géométrique. Il structure également son traité en rompant avec l'architecture euclidienne (Lamandé, 1990 ; Preveraud, 2017).

La proposition XI du livre IV de Legendre énonce que « les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les quarrés [*sic*] des rayons » (Legendre, 1823, p. 118), la partie sur les aires faisant écho à la proposition XII.2 d'Euclide. La mise en parallèle des trois premières étapes de la constitution de ce théorème (énoncé ou proposition, exposition et détermination) dans les deux textes d'Euclide et Legendre montre la similarité de leurs formes comme de leurs contenus [64] (voir table III.3 p. 369).

63. Ceci s'explique en partie par le fait que ce soit l'un des ouvrages les plus anciens de notre corpus.
64. Le texte d'Euclide a été pris sous la traduction de Vitrac (Euclide, 2001, p. 263-271).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Étapes	Euclide	Legendre
Proposition	Les cercles sont l'un relativement à l'autre comme les carrés sur leurs diamètres.	Les surfaces des cercles sont entre elles comme les carrés des rayons.
Exposition	Soit les cercles $ABCD$ et $EFGH$, et que leurs diamètres [soient] BD, FH.	Désignons, pour abréger, par $circ.CA$ la circonférence qui a pour rayon CA.
Détermination	Je dis que comme le cercle $ABCD$ [est] relativement au cercle $EFGH$, ainsi est le carré sur BD relativement au carré sur FH.	Je dis qu'on aura [$surf.CA : surf.OB :: CA^2 : OB^2$] [a]
Démonstration (début)	Car si ça n'est pas le cas [...], alors comme le carré sur BD est relativement à celui sur FH, ainsi sera le cercle $ABCD$ soit relativement à une certaine aire plus petite que le cercle $EFGH$, soit relativement à une plus grande. Qu'il le soit d'abord relativement à une plus petite, S.	Car si cette proportion n'a pas lieu, [CA^2 sera à OB^2] comme [$surf.CA$] est à un quatrième terme plus grand ou plus petit que [$surf.OB$]. Supposons-le plus petit, et soit, s'il est possible, [$CA^2 : OB^2 :: surf.CA : surf.OD$].

TABLE III.3 – Trois premières étapes du théorème de comparaison des aires des cercles, chez Euclide et chez Legendre

a. Nous avons retranscrit cette partie dans le cas des surfaces, puisque Legendre ne traite dans sa preuve que celui des circonférences, indiquant ensuite simplement qu'« un raisonnement et une construction entièrement semblables serviront à démontrer que les surfaces des cercles sont comme les quarrés [*sic*] de leurs rayons ». Les notations et le vocabulaire choisis pour adapter cette transcription, dans les étapes de détermination comme de démonstration, l'ont été conformément aux termes utilisés dans l'énoncé de la proposition, ainsi que dans la suite de l'ouvrage.

Quelques observations découlent directement de cette mise en parallèle. Tout d'abord, le texte de Legendre reprend formellement la structure du texte antique, avec des étapes mises en évidence par Proclus bien identifiables (voir p. 331), et des éléments de langage communs ou équivalents (« je dis que », ou « désignons » à la place de « soit », « Car, si cette proportion n'a pas lieu » à la place de « Car, si ça n'est pas le cas »). Ensuite, l'énoncé, l'exposition, la détermination comme le début de la preuve, ont naturellement des contenus de même valeur mathématique, puisqu'il s'agit du même théorème, prouvé *via* la même méthode par l'absurde, mais exprimés sous des formes différentes. Legendre évoque les carrés des rayons en tant que carrés de nombres (la suite du texte le confirme), là où Euclide évoque les figures géométriques des « carrés [construits] sur leurs diamètres ». L'approche de Legendre, conformément aux usages dans la géométrie de son époque, s'appuie sur des grandeurs rapportées à des nombres, alors que le texte euclidien sépare strictement le géométrique du numérique.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

L'autre point de divergence repose dans le formalisme, car aucune écriture symbolique n'est utilisée par Euclide, qui ne se sert que des lettres désignées sur la figure, tandis que Legendre recourt à des écritures abrégées à l'aide de symboles pour rendre son texte plus concis, notamment en maniant la notation $a : b :: c : d$ correspondant à l'égalité des rapports de a à b et de c à d, issue de la théorie des proportions, alors en usage.

La suite des deux textes montre davantage de divergences, même si les deux s'appuient sur une construction. Dans le texte d'Euclide, les étapes de construction alternent avec les déductions logiques. La première est l'inscription d'un carré $EFGH$ dans le premier cercle, puis la circonscription d'un carré autour de ce même cercle (ces constructions sont possibles, car établies dans des propositions préalables). De ces étapes découle une première déduction : le carré inscrit est supérieur à la moitié du cercle. Euclide revient ensuite à la construction, inscrivant désormais un octogone régulier $KLMN$ dans $EFGH$, puis en disposant des parallélogrammes sur les tangentes au cercle en K, L, M, N dont un côté est une corde FE, EH, etc. Une nouvelle affirmation est déduite de cette construction, indiquant que chacun des triangles EFK, FGL, etc. est supérieur à la moitié du segment de cercle dans lequel il se trouve inscrit (voir figure III.22 p. 370).

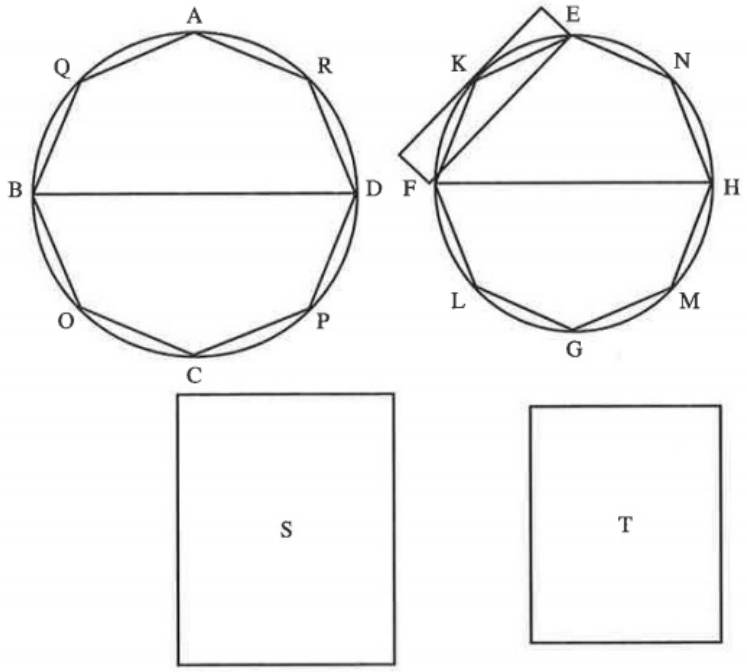


FIGURE III.22 – Figure associée à la preuve de la propositon XII.2 des *Éléments* d'Euclide (2001, p. 265)

La suite ne repose plus sur une construction « en acte », mais sur une itération « en puissance » de ce procédé, jusqu'à ce que les excès des segments de cercle sur les triangles deviennent inférieurs à l'excès du cercle $EFGH$ sur la surface S. L'issue possible

Licence CC BY-NC-ND 3.0

de ces constructions successives est assurée par la proposition X.1 qu'Euclide a démontrée auparavant, exprimant le principe de l'« indéfinie divisibilité » des grandeurs [65]. Cette méthode est communément appelée par les historiens des mathématiques « méthode d'exhaustion », tout comme celle qu'emploie Archimède pour montrer l'équivalence du cercle avec un triangle rectangle de côtés le rayon et la circonférence [66].

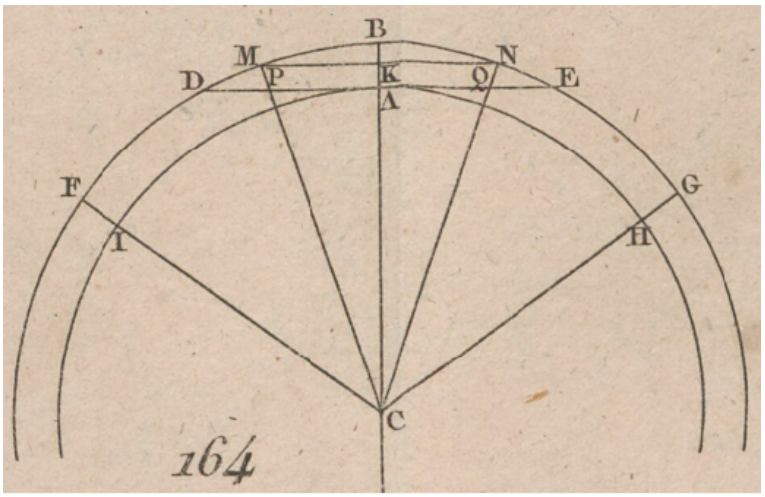


FIGURE III.23 – Figure associée à la preuve du lemme IV.10. des *Éléments* de Legendre (1823, pl. 765)

La preuve de Legendre bifurque du sillon de celle d'Euclide après l'enclenchement de la démonstration par l'absurde (voir table III.3 p. 369). Lui aussi fait reposer son raisonnement déductif sur une figure, mais dont la construction est traitée en amont dans un lemme, énoncé comme proposition 10 du livre IV, et accompagné de la figure 164 (voir figure III.23 p. 371) :

> Deux circonférences concentriques étant données, on peut toujours inscrire dans la plus grande un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite, et on peut aussi circonscrire à la plus petite un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus grande ; de sorte que dans l'un et l'autre cas les côtés du polygone décrit sont renfermés entre les deux circonférences. (Legendre, 1823, p. 116-118)

La preuve de cette affirmation, qui énonce la possibilité d'une telle construction, consiste à dresser la liste des opérations graphiques à effectuer pas à pas pour obtenir le résultat

65. Cette proposition s'exprime ainsi : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une [grandeur] plus grande que sa moitié puis du reste une [grandeur] plus grande que sa moitié et que ceci soit toujours poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée. ». Pour des compléments sur cette proposition et l'usage qu'en fait Euclide dans sa preuve de la proposition XII.2, voir (Euclide, 1998, p. 87-94).

66. Au sujet de la « méthode d'exhaustion » chez Euclide, voir la note de Vitrac (Euclide, 2001, p. 237-259).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

escompté. La figure III.24 (p. 372), réalisée à la main à partir de deux circonférences concentriques quelconques, suit ces étapes de construction successives :

1. Mener la tangente à la plus petite circonférence en A et nommer D et E ses intersections avec le grand cercle.
2. Inscrire un polygone régulier dans la grande circonférence (commençons par exemple par un carré dont un sommet est B).
3. Diviser les arcs obtenus en deux parties égales de sorte à obtenir un polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double du précédent : nous obtenons un octogone régulier dont un sommet est B.
4. Poursuivre la « bissection des arcs » jusqu'à obtenir « un arc plus petit que DBE » : c'est le cas de l'hexadécagone régulier de somme B obtenu après une nouvelle bissection.

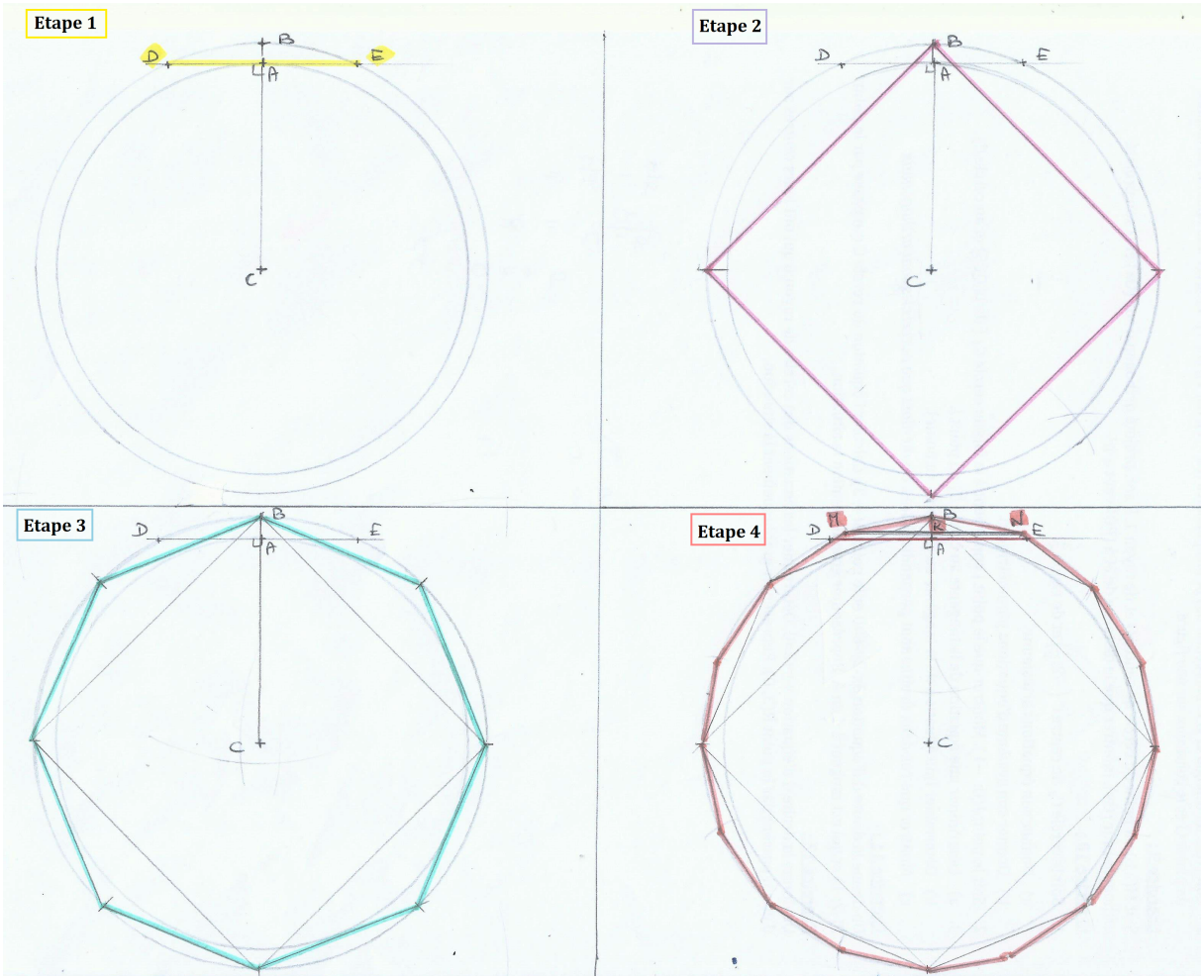


FIGURE III.24 – Construction pas à pas, réalisée à la main par nos soins, de la figure associée à la preuve du lemme IV.10. des *Éléments* de Legendre

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Le choix de réaliser la construction à la main à partir de deux cercles concentriques quelconques présente l'avantage de mieux éclairer, à travers le geste de construction, les ressorts et arguments de la preuve de Legendre, mais aussi de souligner certaines faiblesses du raisonnement théorique qui lui est associé. En effet, le tracé réalisé pas à pas montre qu'en divisant les arcs en deux un nombre suffisant de fois, on peut parvenir à un arc inférieur à $\widehat{DE}$. Néanmoins, Legendre n'en donne aucune justification formelle. Plus encore, il exprime son argument final, qui lui permet de conclure sa preuve, ainsi : « il est clair que la corde MN sera plus éloignée du centre que DE, et qu'ainsi le polygone régulier dont MN est le côté ne saurait rencontrer la circonférence dont CA est le rayon » (Legendre, 1823, p. 117). Le dernier pas à franchir est donc d'admettre que, puisque la distance de MN à C est plus grande que celle de DE à C, alors le polygone régulier de côté MN ne touchera pas le cercle intérieur. L'inégalité sous-jacente est matérialisée sur la figure par la présence du point K, intersection de la corde MN avec le rayon CB, qui de fait, est plus loin que le point A du centre C, d'où $CA < CK$. Mais cette relation n'est pas explicitement exprimée par Legendre, et encore moins démontrée, et le point K n'est même pas cité dans le texte de la preuve. Tout laisse à croire que sa présence sur la figure a pour fonction de créer un support visuel facilitant la compréhension qu'aurait le lecteur de ce dernier argument. De la même façon, le fait que si ce côté MN est au-delà de la corde DE par rapport au centre des deux cercles, cette corde étant tangente au cercle intérieur, alors le polygone de côté MN ne touchera pas ce cercle, n'est pas explicité par Legendre et laissé à l'appréciation des lecteurs. La formulation « il est clair que » utilisée montre qu'il considère ce dernier point comme une évidence sensible.

Une fois ce lemme établi, Legendre l'utilise efficacement dans sa preuve de la proposition XI, puisque l'existence de ce polygone régulier inscrit dans l'une des circonférences et ne touchant pas l'autre constitue le ressort principal de son raisonnement par l'absurde. Il suppose en effet que[67] $CA^2 : OB^2 :: surf.CA : surf.OD$ avec $surf.OD < surf.OB$ (voir tableau III.3 p. 369), puis inscrit dans le cercle de rayon OB un polygone régulier qui ne rencontre pas celui de rayon OD. Il inscrit ensuite un polygone régulier semblable au précédent dans le cercle de rayon CA (voir figure III.25 p. 374). En considérant alors le rapport de ces deux polygones entre eux, il montre d'une part qu'il est égal au rapport des aires des deux cercles de rayons OA et OD, et d'autre part qu'il lui est forcément strictement inférieur, ce qui n'est pas possible. Il obtient la même impossibilité en prenant pour hypothèse $surf.OD > surf.OB$, « en

67. Dans ce qui suit, l'abréviation $surf.$ signifie « surface du cercle construit sur le rayon ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

renversant les rapports », et conclut alors que les surfaces sont entre elle comme les carrés des rayons[68] (Legendre, 1823, p. 118-119).

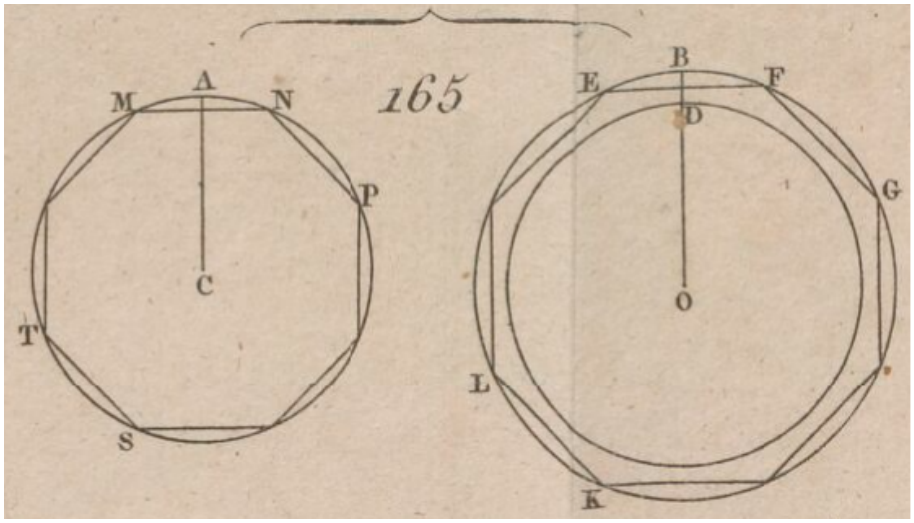


FIGURE III.25 – Figure associée à la preuve du théorème IV. 11. des *Éléments* de Legendre (1823, pl.7)

Le lemme X joue donc un rôle crucial dans la preuve de la proposition IV.11. La possibilité de construire un polygone régulier inscrit dans un cercle, et qui ne touche pas un cercle concentrique de rayon inférieur, en constitue l'argument principal. C'est donc bien une construction qui se trouve au cœur de la démonstration de ce résultat fondamental sur l'aire du cercle. La figure du polygone que l'on peut construire forme l'argument théorique majeur du raisonnement, mais cette construction « en puissance » est elle-même justifiée par des arguments sensibles dont seule la construction « en acte » sait réellement nous convaincre, puisqu'elle repose en dernier lieu sur une forme d'évidence sensible (une corde est « plus éloignée » du centre que celle formée sur la tangente au cercle intérieur, donc ce polygone « ne saurait [le] rencontrer »). Ce résultat évite à Legendre de faire appel à des considérations sur l'indéfinie divisibilité, et son lemme X présente *in fine* l'avantage de lui permettre de contourner la proposition X.1, dont Euclide fait quant à lui usage.

Legendre mobilise à nouveau son lemme X dans la preuve de la proposition suivante, la IV.12, qui énonce que « l'aire du cercle est égale au produit de sa circonférence

68. Nous rappelons ici que la preuve de Legendre concerne en réalité seulement le rapport des circonférences, et que celle portant sur les surfaces n'est pas explicitement rédigée par l'auteur, qui considère que cette dernière démonstration serait semblable à la précédente (voir la note du tableau III.3 p. 369). Les éléments de raisonnement donnés dans cette section sont donc là encore des adaptations de la preuve de Legendre au cas des surfaces.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

par la moitié du rayon » (Legendre, 1823, p. 120). Là encore nichée au cœur de sa démonstration par l'absurde, la construction du lemme X assure l'existence d'un polygone dont le contour est « plus grand que la circonférence inscrite, puisqu'il l'enveloppe de toute part », mais qui *a contrario* est aussi « plus petit, puisqu'il y est contenu » (Legendre, 1823, p. 120-121). Le discours du géomètre s'appuie donc encore, en plus de la construction initiale, sur des arguments de sens commun (envelopper, être contenu) en plus des leviers mathématiques exposés. Pourtant, dans l'introduction à la première édition de ses *Éléments*, ce dernier se déclare hostile à l'intuition comme méthode de démonstration et adresse des reproches aux géomètres qui « se contentent d'invoquer le témoignage des yeux » (Legendre, 1794, p. v). Pour autant, certains de ses arguments relèvent également du sens commun et du sensible. C'est sans doute dans l'objectif de demeurer « clair, exact » et de ne rien dire « de superflu ». De fait, ses démonstrations sont plus directes que celles des géomètres (Euclide et Archimède) dont il se réclame, ce qui répond à ses ambitions de fournir des éléments alliant « la clarté et la brièveté » (Legendre, 1794, p. vii).

Associé aux apports de l'arithmétique (assimilation des grandeurs aux nombres, théorie des proportions) et de l'algèbre (usage des abréviations et des symboles), dont il admet la fécondité en géométrie, le recours aux constructions et à des arguments d'évidence lui permet d'échafauder un style de preuve, synthétique et concis, qui lui est propre. Le rejet des méthodes analytiques, qu'il évoque en citant les méthodes « expéditives » des modernes, s'incarne dans le cas du cercle par le contournement du principe de dichotomie (Euclide X.1), dans lequel interviennent plus ou moins explicitement des considérations sur l'infini. Sa version du traitement de l'aire du cercle témoigne donc de sa volonté d'éviter le recours aux méthodes infinitésimales, leur substituant des procédés purement géométriques fondés sur des constructions « en puissance », dont la réalisation effective est source d'évidences, s'appuyant sur les perceptions et le sens commun. À travers cet exemple, la fonction d'interface de la géométrie des aires apparaît de nouveau, au carrefour des constructions et des raisonnements géométriques (voir schéma III.26 p. 376). Le lemme X est en effet le fruit d'un raisonnement qui énonce la possibilité d'une construction. Et c'est la réalisation effective de la figure qui met en lumière des arguments de type sensible ou de recours au sens commun, qui viennent faciliter la preuve et sa compréhension par le public auquel l'auteur s'adresse dans son ouvrage.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

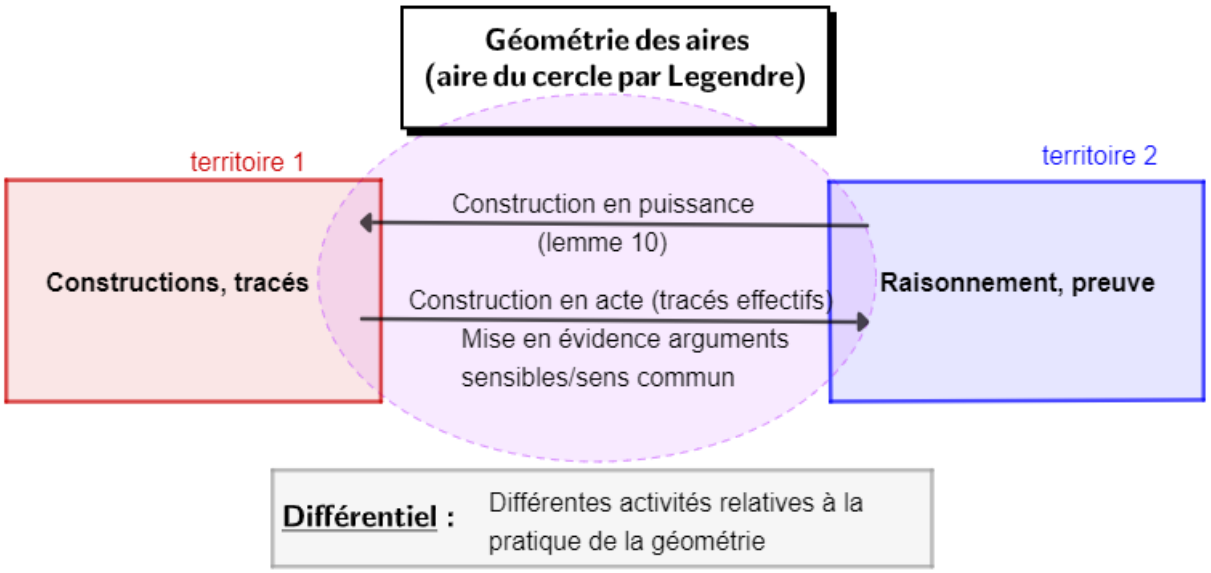


FIGURE III.26 – Schéma montrant en quoi les preuves du théorème de Pythagore par égalité d'aires sont à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement

Chez Legendre, la construction géométrique occupe ainsi une place majeure au cœur du raisonnement et de la démonstration, qui lui permet de proposer une preuve « enseignable » à des élèves du début du XIX^{e} siècle, conservant la rigueur d'une démonstration de géométrie pure, mais en simplifiant néanmoins quelques uns de ses rouages argumentatifs.

III.1.1.4 La figure dans l'espace comme support d'une preuve dans le cas des coniques

Les coniques ont été étudiées par les géomètres depuis l'Antiquité, notamment par Apollonius de Perge, dans son traité *Les coniques*, par Pappus d'Alexandrie, ainsi que par Archimède, qui a consacré un traité au sujet *De la quadrature de la parabole* (Rashed, 2021). Pour établir l'aire d'un segment de parabole, Archimède y procède par la méthode dite d'exhaustion mise en place pour le cercle, produisant une preuve encore plus complexe dans ce cas (M :A.T.H., 1992). Ce bref retour historique donne à comprendre la difficulté, pour les auteurs de manuels, de rester dans le cadre de la géométrie élémentaire pour présenter ces résultats, en demeurant accessibles pour des élèves de niveau débutant ou intermédiaire. D'ailleurs, parmi les 40 ouvrages du corpus, seuls 14 exposent la formule de l'aire d'une ellipse, et parmi eux, 7 seulement en donnent une démonstration (voir tableau III.4 p. 377).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ouvrages qui l'abordent	Public primaire	Public secondaire classique	Public secondaire spécial	Avec Preuve
Terquem, 1829	X	X	—	X
Lancelot, 1833	X	—	—	—
Desnanot, 1835	X	—	—	—
Sonnet, 1839	X	—	—	—
L.C. et F.P.B., 1840	X	—	—	—
Gimelli, 1841	X	—	—	—
Eysseric et Pascal, 1850	X	—	—	—
Cirodde, 1858	—	X	—	X
Rouché et Comberousse, 1866	—	X	—	X
P. André, 1879	—	X	X	X
Bovier-Lapierre, 1879	X	X	X	—
Tombeck, 1879	—	X	—	X
Guilmin, 1882	—	X	—	X
Girod, 1893	—	X	—	X

TABLE III.4 – Tableau indiquant la répartition des manuels du corpus qui abordent l'aire de l'ellipse, avec ou sans preuve, classés chronologiquement et avec indication de leurs publics

Le tableau montre qu'à peu d'exceptions près, les ouvrages de la première moitié du siècle qui évoquent le résultat sur l'aire de l'ellipse sont à destination des élèves de l'ordre primaire, et ne présentent pas de preuve. Sonnet indique d'ailleurs qu'« on démontre que l'aire de l'ellipse a pour mesure le produit de son demi-grand axe par son demi-petit axe, et par le rapport de sa circonférence au diamètre », mais explique ensuite que « les méthodes de calcul employées à cet effet ne sont point du ressort de la Géométrie élémentaire » (Sonnet, 1839, p. 229). Les ouvrages qui énoncent et prouvent cette proposition apparaissent pour leur part durant la seconde moitié du siècle et sont à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire classique et/ou spécial [69].

Les auteurs qui insèrent la démonstration de cette formule dans leurs ouvrages le font avec des stratégies de preuve variées, mobilisant des résultats empruntés à diverses autres théories. Mais auparavant, les sept auteurs qui s'emploient à démontrer ce résultat le font à partir d'une première construction commune. Il s'agit de décrire un cercle dont le diamètre coïncide avec le grand axe de l'ellipse, puis d'élever une série de perpendiculaires sur ce diamètre (voir figure III.27 p. 378). Ces perpendiculaires coupent respectivement l'ellipse et le cercle en deux séries de points au-dessus du diamètre (P,

69. Les exceptions sont ici (Terquem, 1829) et et (Bovier-Lapierre, 1879). Le premier s'adresse à tous les publics et propose une preuve du résultat, bien qu'étant publié dans la première moitié du siècle. Le second, paru à la fin du siècle, s'adresse lui aussi à tous les publics et ne prouve pas le résultat.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

M, etc. et Q, N, etc. sur la figure III.27) ainsi que deux autres en-dessous (P', M', etc. et Q', N', etc.). L'un des arguments indispensables à la poursuite de la preuve est celui du rapport des hauteurs de ces lignes perpendiculaires, qui sont entre elles comme les diamètres de l'ellipse ($SN : SM :: OA : OB$ soit encore $\frac{SN}{SM} = \frac{OA}{OB}$ sur la figure III.27).

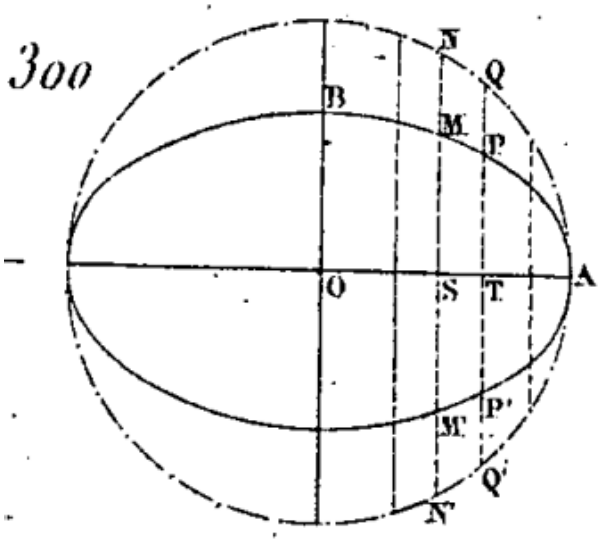


FIGURE III.27 – Figure associée à la preuve de la formule de l'aire de l'ellipse dans l'ouvrage de Cirodde (1858, pl.xii)

Cette égalité de rapports est loin d'être triviale, et découle de l'enchaînement d'un certain nombre de propositions établies dans le cadre de la théorie des courbes coniques. Mais au fondement même des systèmes théoriques construits par les auteurs, ces derniers font le choix de recourir à différents registres géométriques. André s'appuie sur des formules algébriques complexes issues du domaine de l'application de l'algèbre à la géométrie, et mène deux pages de calculs pour établir la proportion requise sur les lignes considérées (P. André, 1879, p. 298-300). Cirodde convoque, en plus de résultats sophistiqués sur les projections des foyers de l'ellipse sur ses tangentes, une théorie des transversales qu'il développe en appendice de son ouvrage (Cirodde, 1858, p. 388-398). Les cinq autres géomètres se plongent dans la géométrie dans l'espace et établissent, de façon plus générale, que « la projection d'une circonférence sur un plan quelconque est une ellipse » (Tombeck, 1879, p. 433).

La preuve de Tombeck commence par une brève description des éléments de la figure :

> Soient donc $AMBA'B'$ cette circonférence, $AmbA'b'$ sa projection. Menons OB perpendiculaire sur AA' et Bb perpendiculaire au plan de projection, puis prenons $OF = OF' = Bb$. (Tombeck, 1879, p. 433)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

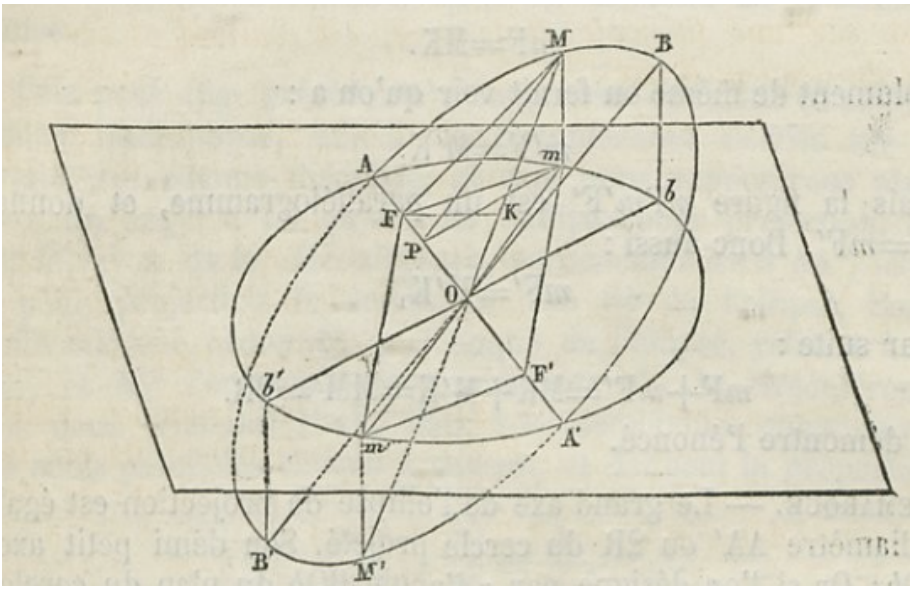


FIGURE III.28 – Figure de l'ellipse comme projection d'un cercle sur un plan (Tombeck, 1879, p. 433)

Cette description porte un certain nombre d'informations implicites, que seule la figure permet de préciser. Tout d'abord, chaque point en majuscule est associé à son projeté en minuscule, sauf A et A' qui sont invariants car il appartiennent au plan sur lequel on projette. De même, chaque point est associé à son symétrique par rapport à O, portant le même nom suivi du symbole « prime » (A' symétrique de A, B' de B, M' de M et m' de m par rapport au centre O). De surcroît, les points F et F' vérifiant l'égalité $OF = OF' = Bb$ ne sont pas explicitement désignés comme étant situés sur l'axe $[AA']$. En cela, la figure fournie constitue un complément à la preuve, lui apportant des informations essentielles pour le raisonnement, bien que non explicitées dans le texte.

La démonstration se poursuit par la construction de nouveaux éléments géométriques (points et lignes) indispensables pour l'argumentaire à suivre. Le point P projeté orthogonal de m sur $[AA']$, le segment $[MP]$, le point K projeté orthogonal de F sur $[OM]$ et le segment $[FK]$ (voir figure III.28 p. 379). Les étapes du raisonnement alors mis en place répondent alors à des configurations classiques de géométrie élémentaire (voir figure III.29 p. 380) :

— Les triangles semblables : il est prouvé que les triangles MmP et BbO d'une part, et POM et FOK d'autre part, sont semblables.

— Les triangles égaux : c'est le cas des triangles MKF et MmF.

— Les quadrilatères : il est indiqué (sans le justifier) que $mFm'F'$ est un parallélogramme.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

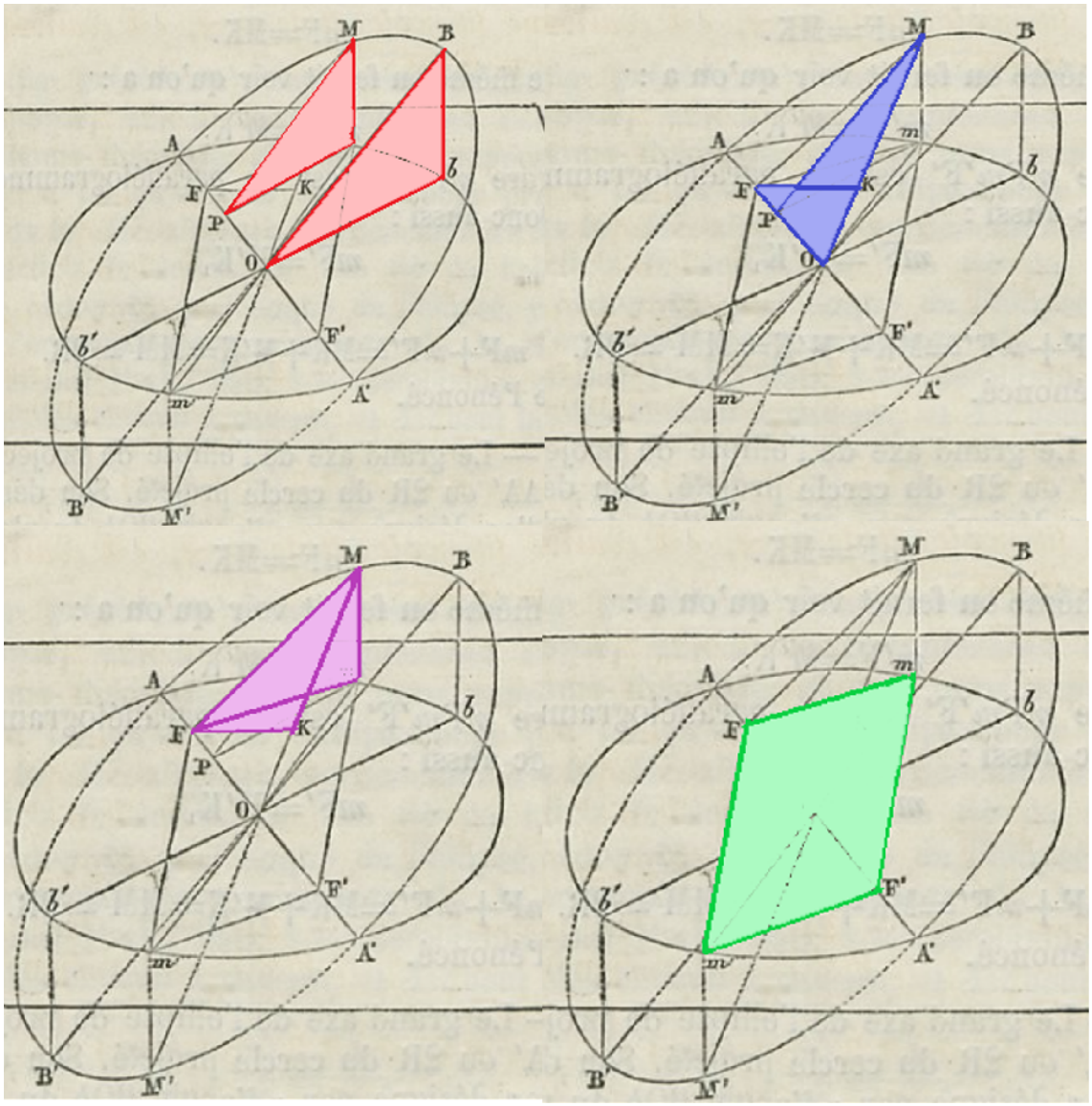


FIGURE III.29 – Configurations utilisées dans la preuve de Tombeck (ellipse comme projection d'un cercle sur un plan)

Certains de ces arguments sont dûment justifiés par les règles établies dans de tels cas : MmP et BbO sont semblables car leurs côtés sont « parallèles chacun à chacun », MKF et MmF sont égaux comme triangles rectangles possédant « une hypoténuse égale et un côté égal » (Tombeck, 1879, p. 433). Les deux autres propriétés sont énoncées sans justification. Si la nature du quadrilatère $mFm'F'$ demeure plutôt évidente (ses diagonales se coupent en leur milieu, par construction), la similitude des triangles POM et FOK est plus complexe à saisir. Nous avons, pour en comprendre les raisons, choisi de représenter ces deux triangles dans le plan (OMA) auquel ils appartiennent (voir figure III.30 p. 381). Sur la figure, il apparaît que POM et FOK ont

Licence CC BY-NC-ND 3.0

tous leurs angles égaux deux à deux : l'angle droit, l'angle α qui leur est commun, et l'angle β, complémentaire de l'angle α dans les deux triangles rectangles. À partir de ces égalités et similitudes, des égalités de rapports, puis de longueurs, sont établies successivement, menant à la conclusion attendue [70].

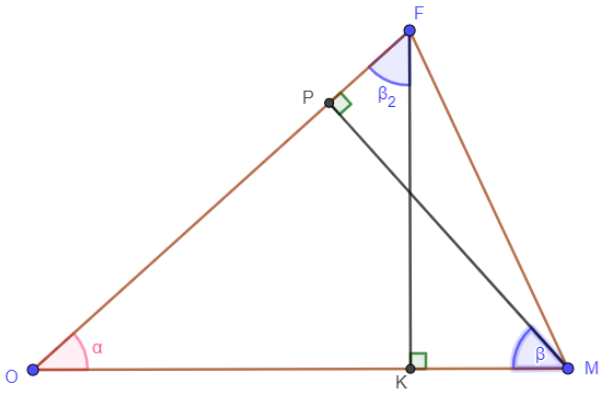


FIGURE III.30 – Figure intermédiaire dans le plan permettant de comprendre un chaînon déductif (similitude des triangles POM et FOK)

La figure joue donc un rôle à plusieurs niveaux dans l'établissement de ce résultat. Au commencement, elle est indispensable pour lever les implicites des notations utilisées dans le texte. Ensuite, comme souvent en géométrie, des tracés de nouvelles lignes et de nouveaux points sont indispensables pour mettre en évidence des configurations qui permettront de démontrer le résultat. Dans ce cas, la figure étant dans l'espace, certains chaînons de raisonnement ne sont pas pour autant « évidents » une fois construits sur la figure, les règles de la perspective ne permettant pas de « voir » directement toutes les propriétés : si la similitude des triangles MmP et BbO est apparente, ainsi que la nature du quadrilatère $mFm'F'$ (la perspective respectant le parallélisme), les similitudes ou égalités des autres triangles ne sont pas perceptibles sans effort, et ont même nécessité, pour l'une d'entre elles, une figure annexe réalisée dans le plan (voir figures III.29 et III.30). Il est à noter également que la figure initiale, donnée dans l'ouvrage et sur lequel le raisonnement est fondé, est en elle-même très difficile à représenter. Sa réalisation nécessite de connaître la proposition qu'elle permet de prouver, puisque le cercle en question, dessiné ici sur le plan de la feuille de papier, est représenté par une ellipse, qui doit elle-même croiser une autre ellipse de diamètre commun. Seule une personne experte en géométrie — ainsi qu'en dessin — dans l'espace, est à même de l'exécuter (voir l'introduction du chapitre III.1 p. 327).

70. Pour les détails de la preuve, voir (Tombeck, 1879, p. 433-434). Les égalités $\frac{Mm}{Bb} = \frac{mP}{bO} = \frac{MP}{BO} = \frac{MP}{R}$ et $\frac{FK}{OF} = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{R}$ impliquent que $\frac{FK}{OF} = \frac{Mm}{Bb}$. Mais $OF = Bb$ donc $FK = Mm$, d'où on tire, par égalité des triangles MKF et MmF, que $Fm = KM$ (et de même que $m'F = M'K$). Enfin, $mF + mF' = mF + m'F = KM + KM' = 2R$, ce qui prouve que M appartient à l'ellipse de foyers F et F'.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans cette proposition, le statut de la figure et de la construction sous-jacente est assez différent de ce que nous avons pu observer chez Legendre. Tout d'abord, elle constitue un réel complément au texte, en cela qu'elle lève des implicites, ce qui est indispensable à la compréhension de la preuve. Ce faisant, elle permet ainsi une plus grande brièveté de la partie textuelle de la démonstration. Ensuite, comme dans toute preuve géométrique, la figure assure une fonction de support du raisonnement, sur laquelle les étapes de construction et de déduction peuvent être suivies pas à pas. Mais dans le cas d'une figure de l'espace, ce rôle est entravé par la difficulté de perception liée à l'usage de la perspective, invisibilisant certaines propriétés des objets en jeu. Quant à la construction en elle-même, elle est dans ce cas initialement complexe, puisque dépendante du résultat qu'elle est censée démontrer, et soumise à l'expertise du dessinateur géomètre, en tant que savoir comme de savoir-faire. Par la suite, les constructions de points et de lignes intermédiaires, pour le moins courantes dans les preuves géométriques, restent indispensable comme préalables à l'argumentaire mis en place. Enfin, la compréhension complète de la démonstration et de chacun des chaînons déductifs passe vraisemblablement pour le lecteur par des constructions intermédiaires dans le plan, comme cela a été nécessaire pour nous (voir figure III.30 p. 381). La figure est donc ici davantage une figure support qu'une figure à construire, même si l'acte de construction engagé dans la preuve s'est avéré aidant. Ces différents aspects du rôle que joue la géométrie des aires, dans le cas de l'aire de l'ellipse, à l'interface des constructions et du raisonnement, sont résumés sur le schéma III.31 (p. 382).

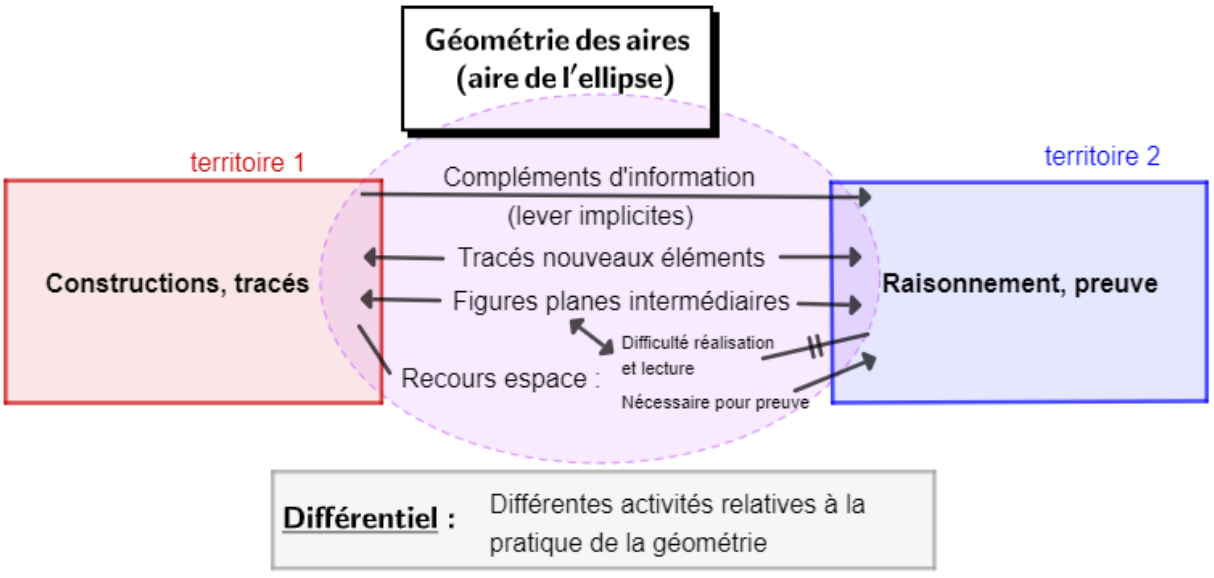


FIGURE III.31 – Schéma montrant en quoi la preuve de l'aire de l'ellipse est à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ce résultat, qui établit une ellipse comme projection d'un cercle sur un plan, est diversement exploité pour prouver la formule de l'aire de l'ellipse. Une de ses conséquences directes est que « le rapport de l'ordonnée d'une ellipse à l'ordonnée correspondante de la circonférence construite sur un de ses axes, est un rapport constant, égal à celui des demi-axes de l'ellipse » (Tombeck, 1879, p. 435). Cet argument est ensuite le levier essentiel de la démonstration de la formule de son aire. En effet, on peut voir sur la figure de l'ellipse et son cercle associé, découpés par des perpendiculaires à leur diamètre commun (voir figure III.27 p. 378), que « chaque élément de la surface de l'ellipse est à l'élément de la surface du cercle, dans le rapport de b à a [petit axe et grand axe]. Toute la surface de l'ellipse est donc à celle du cercle dans le même rapport » (Tombeck, 1879, p. 440). Girod (1893, p. C.68-C.71) et Guilmin (1882, p. 345-348) suivent pas à pas cette démarche, alors que Rouché et Comberousse, de même que Terquem, évoquent un autre argument pour déduire l'aire de l'ellipse du théorème de projection. Tous deux considèrent le rapport $\frac{b}{a}$ des deux axes de l'ellipse comme le cosinus de l'angle V que forme le plan de l'ellipse avec celui du cercle. Ils invoquent alors un résultat selon lequel « on obtiendra alors l'aire de l'ellipse en multipliant l'aire du cercle par $cosV$ » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 663). En toute apparence, la mise en place de ces résultats semble leur garantir, au moins pour cette proposition, de pouvoir rester dans le domaine strict de la géométrie élémentaire, même si la géométrie de l'espace est convoquée pour déterminer une aire plane. Mais à la lecture de la proposition 617 de Terquem, préalable à l'énoncé de la formule de l'aire de l'ellipse (620ème proposition), nous comprenons que le recours à d'autres domaines, comme celui de l'analyse, s'en est juste trouvé déplacé :

> En considérant une figure courbe plane comme un polygone composé d'une infinité de petits côtés, on conclut que l'aire de la projection d'une figure plane quelconque est égale à l'aire de cette figure multipliée par le cosinus de l'angle d'inclinaison. (Terquem, 1829, p. 369)

L'équivalent de cette affirmation figure dans la proposition 720 de Rouché et Comberousse (1866, p. 445). Les infiniment petits se cachent également dans le terme « éléments » de la formulation de Tombeck énoncée précédemment, puisque ces derniers sont des trapèzes curvilignes, de largeur suffisamment petite pour qu'on puisse les considérer comme des trapèzes rectilignes. Le recours aux infiniment petits dans la preuve de l'aire des sections coniques sera étudiée plus généralement dans la sous-section III.3.2.3 (p. 641).

Finalement, la preuve de la formule de l'aire de l'ellipse repose, chez la plupart des auteurs qui la traitent, sur un résultat de géométrie dans l'espace, établi à partir d'une figure de référence complexe, dont les étapes de construction guident solidement la

Licence CC BY-NC-ND 3.0

démonstration. Il n'est pas étonnant de voir apparaître des arguments liés à la géométrie dans l'espace dans ce contexte, puisque les sections coniques sont par essence des objets « solides » (au sens des Anciens), puisque construits par intersection d'un cône et d'un plan. D'ailleurs, dans une partie des ouvrages (Terquem, Rouché et Comberousse, André), les aires des sections coniques sont traitées dans la partie portant sur la géométrie dans l'espace. Dans les autres (Cirodde, Guilmin, Tombeck), elles figurent dans des chapitres traitant spécifiquement des « courbes usuelles », eux-mêmes parfois situés dans la partie « géométrie dans l'espace » (Girod) [71].Les résultats sur les aires de certaines figures requièrent donc, du fait de leur complexité mathématique, des connaissances multiples, qui peuvent être empruntées à d'autres théories géométriques, comme nous venons de l'observer. La géométrie des aires apparaît donc bien, dans de tels cas, comme relevant de la géométrie des figures et des constructions, du plan ou de l'espace.

III.1.1.5 Conclusion

En conclusion de cette analyse des figures et constructions comme étapes intrinsèques au raisonnement et à la preuve, plusieurs points peuvent être dégagés. Tout d'abord, l'articulation entre figure idéale et figure sensible mise en évidence par Tournès et Netz (voir p. 326) apparaît à plusieurs niveaux dans notre travail. Dans un sens, le processus de visualisation de la figure tracée sert de support à la représentation mentale d'une situation donnée. Dans l'autre, une figure imaginée trouve sa concrétisation dans l'acte de construction effective. Les tracés successifs permettent alors à ceux qui les réalisent de s'approprier un résultat et les arguments de sa preuve en constitution. Par exemple, dans le cas du cercle, le lemme X énonce une construction en puissance qui a le statut d'une figure idéale, tant qu'on ne l'effectue pas concrètement en acte. Les étapes nécessaires au tracé de la figure mettent en lumière des arguments de type sensible qui interviennent dans la preuve. Dans le cas de l'ellipse, le passage d'une représentation imaginée à un tracé concret s'accompagne de difficultés techniques de représentation d'une figure de l'espace dans le plan. Les propriétés de la figure exhibées en cours de preuve nécessitant des constructions supplémentaires pour être pleinement appréhendées.

71. Sur les 7 ouvrages dont les contenus ont été discutés dans cette partie, 3 sont des « encyclopédiques » (groupe 3) et 4 des « succès éditoriaux » (groupe 5) de notre 1ère classification. 5 sur 7 sont des « succès départementaux » (groupe 6) selon notre seconde classification (voir tableau A.2 p. 667). Nous pouvons en déduire que les contenus avancés que les auteurs de ces manuels proposent sur les coniques n'entravent ni leur succès d'édition ni la reconnaissance dont ils bénéficient auprès des enseignants sur le terrain.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les fonctions principales des figures au cœur du processus de preuve pointées par Dhombres (voir p. 330) sont également soulignées dans notre étude. Au cours de l'analyse des preuves multiples du théorème de Pythagore, une évolution temporelle émerge. Nous observons dans les premières preuves des « figures comme superposition », telles que les tracés supplémentaires réalisés au cours du raisonnement accompagnent les étapes de la preuve. Puis dans les démonstrations plus récentes, les figures se simplifient techniquement, laissant la place à de nouvelles configurations qui mettent davantage en avant la « vraie raison » du théorème. Ces figures sont, plus que les autres, de nature à porter en elles-mêmes le discours argumentatif, tout comme celles permettant de prouver les résultats relatifs à l'aire du rectangle (« grille » ou présentation « dynamique » de Desnanot). Ces figures « portant le discours géométriques » peuvent à ce titre être qualifiées de réelles « monstrations ». Éléments constitutifs de la preuve, elles sont construites « pour » montrer le résultat, et l'argumentaire associé est entièrement bâti sur ce socle. Notre travail souligne également l'importance des différentes étapes du processus de preuve établies par Proclus et relayées par Dhombres (voir p. 331). La phase d'exposition s'accompagne parfois d'un complément d'information apporté directement par la figure, comme dans le cas de l'aire de l'ellipse. Quant aux étapes de construction et de démonstration, leur entremêlement permanent apparaît manifestement dans le raisonnement par empilement pour prouver la proposition de comparaison des aires des rectangles entre eux.

Ces différentes interactions entre la nature des figures mobilisées dans les preuves de la géométrie des aires, et leurs fonctions principales sont résumées dans le schéma III.32 (p. 386). Notre analyse met ainsi en évidence le rôle d'interface de la géométrie des aires entre les différentes types de figures et leurs rôles possibles, à travers l'étude des processus de démonstration.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

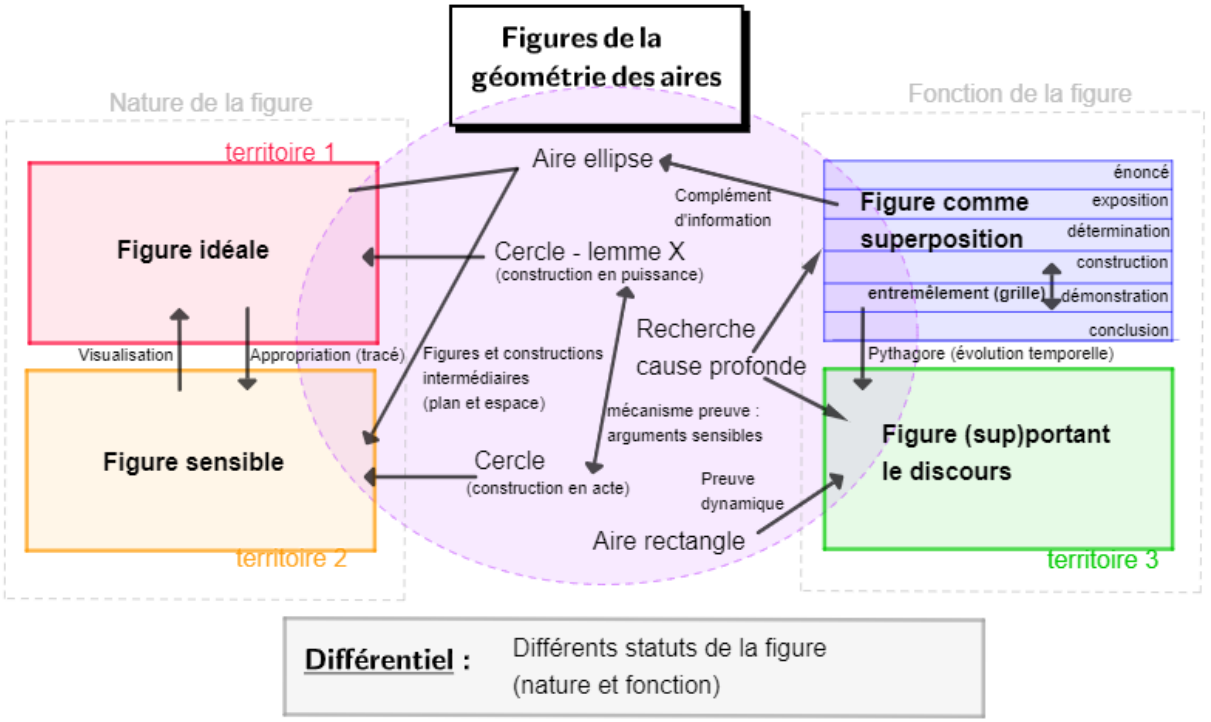


FIGURE III.32 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface de la nature et des fonctions des figures qu'elles engagent

Les techniques mises en œuvre dans ces preuves sont pour beaucoup spécifiques aux aires, puisqu'elles mettent en place des tracés qui révèlent à l'œil et à l'esprit des égalités ou des comparaisons d'aires. Ce sont alors la perception visuelle et le recours aux sens qui interviennent, lorsqu'une construction accompagne une preuve, pour mieux en saisir les étapes déductives. La figure réalisée pas à pas constitue alors un support au raisonnement, aidant l'élève dans sa compréhension et son acquisition de la proposition en train d'être démontrée, parfois difficile d'accès comme la détermination de l'aire d'une ellipse. La construction est donc l'un des atouts que peuvent jouer les auteurs dans leur volonté de simplifier des preuves ardues, en abrégeant des discours par des procédés de visualisation, ou en éludant des arguments jugés trop inaccessibles, comme ceux liés à l'infini. En mettant en œuvre le « principe de superposition », avec des tracés supplémentaires à la figure initiale bien choisis, ou celui de la « dynamique démonstrative », mettant en relation des éléments géométriques d'une ou diverses figures de façon à faire surgir la « cause profonde » d'un résultat, les constructions, quand elles sont employées à bon escient, participent à la volonté des auteurs de simplifier et/ou abréger les démonstrations pour les mettre à la portée de leur lectorat.

En cela, les figures mobilisées dans la géométrie des aires se situent pleinement à l'interface entre le « comprendre » et le « faire », à la croisée du raisonnement et l'acte de construction (voir schémas III.9 p. 342, III.21 p. 367, III.26 p. 376, III.31 p. 382).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Elles jouent de surcroît un rôle majeur dans le processus de production de savoirs en géométrie des aires, participant en grande partie à la transformation de savoirs savants, parfois exigeants et difficilement accessibles, en contenus « enseignables » à des élèves du primaire ou du secondaire au XIX^e siècle.

III.1.2 La figure comme médiation entre un savoir géométrique et sa représentation

Avec le développement des techniques d'imprimerie, les manuels scolaires contiennent de plus en plus d'images au cours du XIX^e siècle. Cette évolution quantitative est néanmoins à nuancer suivant les disciplines, les niveaux et les publics, et à mettre en perspective avec la nature qualitative des images concernées (Perret, 2018). En effet, il convient de distinguer les « photographies », des « dessins » et des « schémas », ces deux dernières catégories se distinguant l'une de l'autre par le caractère « figuratif » des dessins, qui ont vocation à être fidèles à la réalité, là où les schémas, en tant qu'images « abstraites » et « conceptuelles », modifient la réalité pour la rendre plus accessible (Perret, 2018 ; Choppin, 1992, p. 157). Les fonctions reconnues à ces images, appelées souvent « illustrations » dans le contexte des manuels scolaires, sont principalement les suivantes : fonctions « de motivation », « décorative », « d'information », « de réflexion » ou encore « d'exemple » (Choppin, 1992, p. 160-161). Nous reviendrons sur l'identification de ces fonctions à propos des exemples que nous considérons dans l'analyse à suivre.

En géométrie, « le discours textuel est accompagné d'un discours visuel », et les figures, presque toujours estimées comme nécessaires au propos [72], s'avèrent donc très nombreuses dans les manuels correspondants. Au fil du XIX^e siècle, ces figures, d'abord éditées sur des planches présentées sur des feuillets à part (intercalées dans les pages ou à la fin du livre), intègrent progressivement le corps du texte suite à l'amélioration des techniques de gravure (Verdier, 2015). Dans les manuels d'arithmétique pour le primaire de la fin du siècle, Frizzarini et Legros mettent bien en évidence le développement des illustrations dans les manuels, très souvent en lien avec des contenus d'enseignement de la géométrie, et pour la grande majorité (les trois quarts) sous la forme de schémas [73], bien que les dessins soient présents également (un quart des

72. Voir p. 327 dans quels cas les figures ont pu être jugées superflues, voire nocives, en géométrie.

73. Nous retenons le terme « schéma » plutôt que « diagramme » dans le cadre de cette étude pour les raisons suivantes. Considérés comme synonyme dans les dictionnaire d'usage courant (ATILF, 1994b), les deux termes sont le plus souvent distingués en épistémologie et en histoire des mathématiques, un diagramme étant fréquemment vu comme un type particulier de schéma. Par exemple, Netz utilise l'expression « diagramme lettré » (en anglais « lettered diagram ») pour désigner les figures géométriques représentées par les mathématiciens grecs (Netz, 2009). Giardino explore quant à elle le rôle des

Licence CC BY-NC-ND 3.0

illustrations environ) (Legros et Boen Frizzarini, 2018, p. 8-92). D'après elles, les enjeux liés à ces illustrations sont les suivants :

> D'une part, les schémas aident à se représenter mentalement, cognitivement les savoirs mathématiques en jeu. Ceci est particulièrement le cas en géométrie, matière qui demande de se représenter l'espace. D'autre part, les dessins ont pour fonction de restituer, de contextualiser des savoirs mathématiques en les mettant en correspondance avec des objets de la vie quotidienne des élèves. (Legros et Boen Frizzarini, 2018, p. 12)

Qu'il s'agisse de schémas ou de dessins, l'un des objectifs des illustrations dans les manuels de géométrie consiste à « montrer des savoirs », et ainsi d'aider les élèves à comprendre et à s'approprier des concepts mathématiques en levant certaines difficultés d'accès à l'abstraction. Mais ces illustrations, quand elles présentent une dimension figurative, peuvent également créer un lien entre l'environnement direct et concret de l'élève, et les savoirs théoriques auxquels il doit accéder. En cela, les figures et constructions que nous proposons d'analyser dans cette section, se présentent toutes à leur façon comme des médiateurs entre un concept géométrique et la représentation, visuelle ou mentale, que s'en fait la lectrice ou le lecteur concerné.

III.1.2.1 Une approche graphique de la similitude

L'un des domaines dans lesquels les représentations visuelles jouent un rôle important est la similitude des figures. Il s'agit d'une part majeure des connaissances géométriques à enseigner au XIX^e^ siècle, y compris en géométrie des aires. En effet, les programmes du primaire comme du secondaire intègrent très fréquemment des notions sur les « rapports des aires des figures semblables ». D'après le tableau I.5 (p. 53) qui récapitule les contenus des programmes, les connaissances relatives au « rapport des aires des polygones semblables », codées « 4 », sont présentes dans 20 des 25 programmes analysés, et celles en lien avec le « rapport des aires des cercles de rayons différents », codées « 5 », dans 6 d'entre eux.

La tradition géométrique des figures semblables est ancienne et perdure dans l'enseignement de la géométrie du XIX^e^ siècle, formant un ensemble de connaissances théoriques fondamentales à acquérir en même temps qu'un corpus de problèmes à savoir résoudre[74]. Un peu en aval de notre période d'étude, en 1907, Borel conforte la

diagrammes dans le raisonnement mathématique au cours de l'histoire (Giardino, 2017). En revanche, le mot « schéma » est davantage utilisé dans le cadre d'études en histoire de l'éducation, et notamment celles relatives aux manuels scolaires, y compris dans le cas des mathématiques, comme dans (Legros et Boen Frizzarini, 2018).

74. En particulier, des problèmes de constructions de figures semblables à d'autres suivant des contraintes données, que nous retrouvons dans notre corpus de manuels.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

place de la notion de similitude pour tous les niveaux, en expliquant qu'« il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première : c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie ; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur » (cité dans Bkouche 1995, p. 10). En effet, cette « géométrie du semblable », bien qu'initialement bâtie par Euclide dans le livre VI de ses éléments, trouve une résonance particulière dans l'enseignement de la géométrie pratique au XIX^e siècle, à travers les questions de recherche de distances inaccessibles ou d'arpentage (T. Morel, 2020). La référence pour cette forme de géométrie au XIX^e siècle d'un point de vue théorique sont les *Éléments de géométrie* de Legendre, dans lequel l'auteur reprend la définition euclidienne des figures semblables : ce sont celles qui « ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels » (Legendre, 1823, p. 60). En revanche, dans les *Éléments de géométrie* de Clairaut réédités au milieu du XIX^e siècle, ce sont les aspects pratiques des figures semblables qui sont mis en évidence, avec en particulier leur intérêt pour la technique du lever de plan, consistant à représenter un plan sur un papier. Le dessin et l'arpentage forment donc un réel lien entre les connaissances théoriques sur la similitude et les savoir-faire pratiques en géométrie (Chevalarias, 2018, p. 79-81).

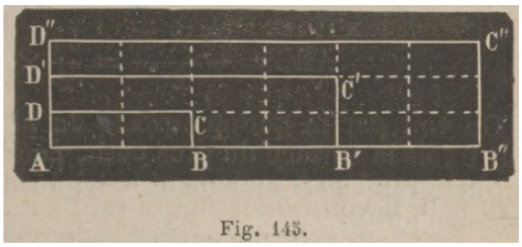
La similitude des figures est intrinsèquement liée à la proportion des grandeurs, proportion elle-même exprimée en nombres [75]. Mais dans cette section, c'est une autre approche que nous allons suivre, dans laquelle ce sont les figures, plutôt que les nombres, qui sont mises en avant. L'objectif est de déterminer comment les constructions seules peuvent permettre aux élèves de saisir le principe fondamental des aires des figures semblables, c'est-à-dire la proportionnalité de leurs mesures aux carrés des lignes homologues, et dans quel contexte ils sont amenés à l'appliquer.

Peu d'auteurs du corpus choisissent de montrer que des rectangles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues, mais dans les trois manuels dans lesquels ce résultat est présenté, il est toujours justifié par un procédé de même nature. Chez Bovier-Lapierre, le raisonnement s'appuie directement sur une construction (voir la figure III.33a p. 390) et s'énonce ainsi : « si on rend les côtés du rectangle deux fois plus grands, le nouveau rectangle $AB'C'D'$ contient quatre fois le premier, comme le montre la figure » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 107). Il poursuit en reprenant la même démarche lorsqu'on triple le côté, avant de généraliser le fait que le rapport des surfaces des rectangles est toujours le carré du rapport de leurs côtés. Il étend encore le résultat en affirmant que « cela a lieu non seulement pour deux rectangles semblables, mais

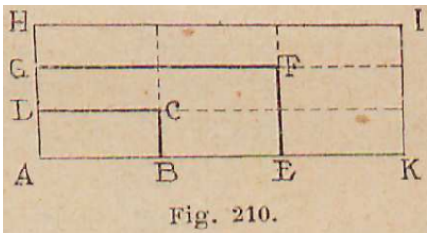
75. Pour plus de détails sur le lien entre le géométrique et le numérique, notamment à propos du théorème de Thalès, l'un des principaux théorèmes de la géométrie des figures semblables, voir (Bkouche, 1995).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

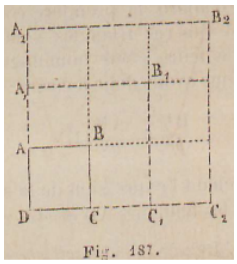
pour deux polygones semblables quelconques », avant d'énoncer le théorème : « Le rapport des surfaces de deux polygones semblables est égal au carré du rapport de leurs côtés homologues » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 107).



(a) chez Bovier-Lapierre (1879, p. 107)



(b) chez Hue et Vagnier (1896, p. 129)



(c) chez Salicis (carrés semblables) (1869, p. 519)

FIGURE III.33 – Figures accompagnant les théorèmes de rapport des aires des rectangles semblables

Dans un tel cas, la figure joue le rôle de support visuel pour comprendre par l'observation la première étape du raisonnement, soit le fait qu'en doublant le côté, la surface obtenue quadruple. En rajoutant une donnée supplémentaire, elle aussi visualisable sur la figure grâce à un dispositif de lignes en pointillés qui décomposent les grands rectangles en petits rectangles élémentaires, on induit une première généralisation : si cela est vrai quand on double ou triple, cela doit être vrai pour tout autre rapport des côtés. La régularité mathématique, logiquement reconnue par l'élève à ce stade, est exprimée en tant que règle en explicitant le rôle-clé du carré du nombre donnant le rapport des côtés. Le pas de généralisation qui suit est plus conséquent. Il n'est pas soutenu par une figure explicative, et demande au lecteur une plus grande capacité d'abstraction, pour comprendre que ceci est vrai également pour les polygones semblables. Ce type de raisonnement par induction est donc presque entièrement porté par la figure, qui présente en elle-même le savoir mathématique à comprendre et à acquérir, aidant l'élève à l'appréhender et le mémoriser en s'en faisant une image mentale. La construction proposée par l'auteur, avec une configuration et des lignes apparentes bien choisies, forme finalement un schéma, qui assure une double fonction, à la fois d'information et de réflexion — on pourrait aussi dire d'exemple ici — selon la typologie proposée par Choppin. En effet, l'image produite porte l'information en mettant en valeur l'essentiel et en présentant une forme d'autonomie « par rapport au texte qu'elle complète ou explicite », et en même temps, elle interroge et constitue un véritable « objet de réflexion » (Choppin, 1992, p. 161).

Le même résultat est présenté d'une façon très proche de celle de Bovier-Lapierre dans l'ouvrage de Hue et Vagnier, comme l'indique déjà la similarité de leurs figures (voir la

Licence CC BY-NC-ND 3.0

figure III.33b p. 390). Quelques étapes supplémentaires sont néanmoins proposées aux jeunes lectrices de Hue et Vagnier, par rapport au texte de Bovier-Lapierre dont ils se sont peut-être inspirés : un cas numérique de plus, sous forme fractionnaire ($\frac{3}{2}$) et donc plus générique, avant d'induire le résultat général, et la formalisation en tant que règle explicitement écrite du résultat intermédiaire sur les rectangles semblables, avant de passer aux résultats généraux, démontrés par voie déductive (Hue et Vagnier, 1896, p. 129-131). La construction diffère un peu également, avec des lignes pointillées moins nombreuses et encore plus centrées sur l'essentiel, puisqu'elles forment un pavage des grands rectangles avec le petit, gagnant encore en efficacité visuelle et cognitive. Enfin, Salicis propose quant à lui une figure très proche dans le cas des carrés semblables (voir la figure III.33c p. 390). Il explique en effet que l'on pourrait, de prime abord, imaginer que les aires des polygones semblables sont dans les rapports de leurs lignes, puisqu'« elles dépendent des périmètres, [qui] les embrassent » (Salicis, 1869, p. 519). Puis il dément cette première intuition en indiquant :

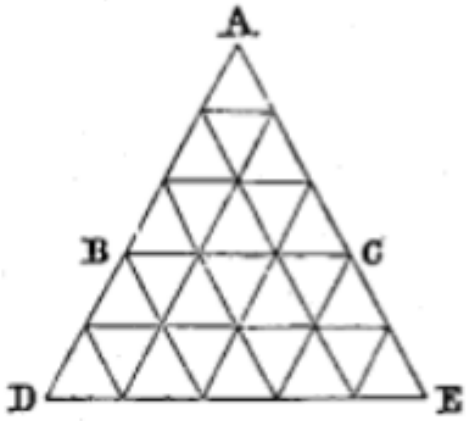
> Lorsqu'il s'agit de surfaces carrées, lesquelles sont toujours semblables, on rencontre cette loi : *que les surfaces sont exprimées par le carré du côté*, et cela signifie que les surfaces carrées [...] loin de conserver le rapport de leurs côtés, sont entre elles comme les carrés des côtés.
> Cela est facile à vérifier sur la figure 187 ci-contre. (Salicis, 1869, p. 519)

Salicis exprime ensuite les rapports numériques des périmètres et des aires des carrés semblables jusqu'à multiplier par 5 le côté, auquel cas « la grande surface ferait vingt-cinq fois la petite » (Salicis, 1869, p. 520). Ce paragraphe sert d'introduction à l'étude générale des « Rapports des surfaces semblables entre elles », puisqu'il termine en écrivant : « Cherchons donc la loi nouvelle qui doit exister entre les surfaces semblables et, selon la méthode, commençons par les triangles » (Salicis, 1869, p. 520). Dans ce cas, la construction que propose Salicis à ses lectrices (voir figure III.33c p. 390) forme la pierre angulaire de ses raisonnements à suivre. En explicitant et en faisant sentir visuellement la propriété sur les carrés, il forge une image mentale convaincante, que ses lectrices pourront mobiliser au cours des résultats et démonstrations suivantes, présentés plus formellement. La construction est donc bien choisie en ce sens, afin de servir d'appui à la pensée et à la réflexion mathématique à venir.

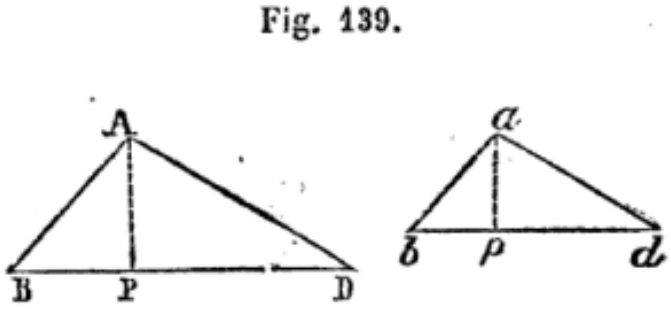
La remarque de Salicis sur les triangles, par l'étude desquels il s'agit de commencer « selon la méthode », fait écho à la constitution des parties des manuels sur les figures semblables, puisque 30 des 40 ouvrages du corpus présentent en effet le cas de similitude des triangles comme préalable à l'étude des polygones semblables, mobilisant au passage le principe de décomposition des polygones en triangles. Tarnier, quant à lui, énonce dans un premier temps le résultat général selon lequel « les surfaces de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

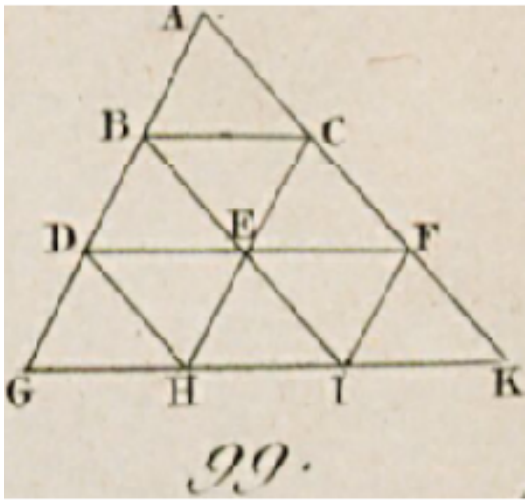
deux figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues », puis commence à le justifier dans le cas des rectangles semblables, tout comme Bovier-Lapierre et Hue et Vagnier, mais sans l'illustrer par une figure (Tarnier, 1872, p. 315). En revanche, le résultat suivant à propos des triangles semblables est justifié par une figure particulière qui « rend le principe manifeste » (voir figure III.34a p. 392).



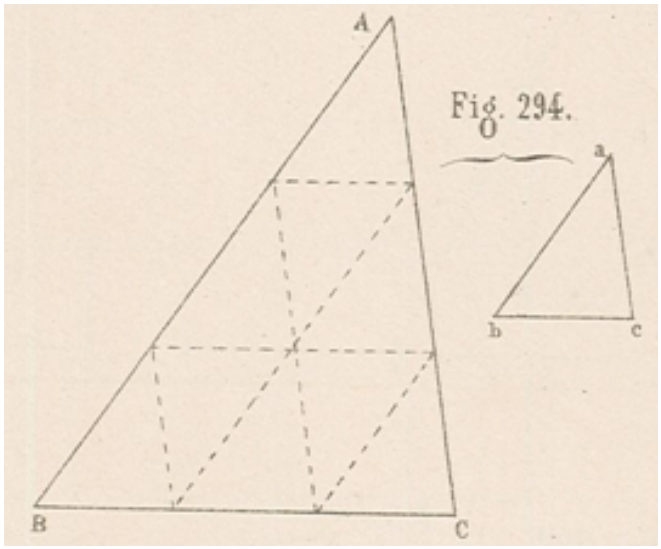
(a) chez Tarnier (1872, p. ix, 315)



(b) chez Eysseric et Pascal (1850, p. 144)



(c) chez Bézout (1848, pl. iii)



(d) chez Harant (1863, pl. 60)

FIGURE III.34 – Figures accompagnant les théorèmes de rapport des aires des triangles semblables

Cette construction tranche avec les représentations graphiques qui accompagnent ce théorème dans la majeure partie des manuels dans lequel il est présenté, où la figure de référence est semblable à celle du manuel d'Eysseric et Pascal (voir figure III.34b p. 392). Seuls les deux ouvrages de Bézout et de Harant proposent une figure pratiquement identique à celle de Tarnier (voir figures III.34c et III.34d p. 392) [76]. Cette figure est le

76. Ces deux ouvrages étant antérieurs à celui de Tarnier, et pour celui de Bézout bien antérieur

Licence CC BY-NC-ND 3.0

résultat d'une construction très particulière, dans laquelle des lignes parallèles aux côtés du grand triangle le décomposent en triangles qui lui sont semblables et qui en forment un pavage. Le procédé est ainsi sensiblement le même que dans le cas du rectangle pour mettre en évidence les rapports de surfaces correspondants. *A contrario*, la figure plus classique que l'on peut observer chez Eysseric et Pascal constitue davantage une illustration, en cela qu'elle ne dit rien du savoir mathématique réellement en jeu.

C'est d'ailleurs ce que souligne Tarnier dans son « exposé de la méthode », préalable à son ouvrage et qui en constitue une introduction. Il prend pour exemple particulier le théorème énonçant que « les aires des triangles semblables varient proportionnellement aux carrés des côtés homologues », et en propose deux traitements, l'un dans le cadre de la « géométrie théorique », qu'il appelle « procédé théorique, démonstration par le raisonnement », et l'autre relatif à la « géométrie pratique » dont il veut développer les méthodes d'enseignement, et qui consiste en un « procédé pratique » de « démonstration par l'aspect » (Tarnier, 1872, p. viii-ix). Il illustre le premier par une figure similaire à celle d'Eysseric et Pascal (voir figure III.34b p. 392), et l'accompagne d'une démonstration formelle reposant sur des arguments de proportionnalité. Le second est en revanche mis en image par la figure III.34a (p. 392), la même qu'il reprend à la fin de l'ouvrage. Le discours argumentatif associé est très différent lui aussi, puisqu'il consiste à remarquer que[77] :

> Les deux triangles semblables ABC, ADE ont, bien visiblement, leurs côtés AB, AD dans le rapport de 3 à 5, tandis que leurs surfaces, décomposées en triangles, tous égaux entre eux, sont dans le rapport de 9 à 25, qui sont les carrés des deux nombres précédents. (Tarnier, 1872, p. ix)

Les ressorts de cette justification sont les aspects visuels de la figure, dont la décomposition fait apparaître « bien visiblement » à la fois les rapports de lignes et les rapports de surfaces associés. L'explicitation préalable de sa méthode lui permet, au moment où il mobilise ce procédé démonstratif dans le cœur de son texte, de ne pas y revenir et de présenter son argumentaire comme une preuve en tant que telle (Tarnier, 1872, p. 315).

Tarnier s'inscrit ainsi dans la lignée de Bézout, dans la mesure où ce dernier, après avoir démontré le résultat général sur les rapports des aires des figures semblables (parallélogrammes ou triangles, puis polygones et cercles) via des manipulations de relations de proportionnalité, précise :

si l'on considère ses multiples rééditions, il est possible que Tarnier ait pris son inspiration chez ses prédécesseurs.

77. Dans cette citation et les suivantes de cette section, nous choisissons de souligner les éléments de langage qui montrent l'importance accordée par les auteurs à la visualisation.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> On voit donc qu'il n'en est pas des surfaces des figures semblables comme de leurs contours ; les contours suivent le rapport simple des côtés ; c'est-à-dire que de deux figures semblables, si un côté de l'une est double, ou triple, ou quadruple, etc., d'un côté homologue de l'autre, le contour de la première sera aussi double, ou triple, ou quadruple du contour de la seconde : mais il n'en est pas ainsi des surfaces ; celle de la première figure serait alors 4 fois, 9 fois, 16 fois, etc., aussi grande que celle de la seconde. On peut rendre cette vérité sensible par les figures 98 et 99. (Bézout, 1848, p. 69-70)

La proximité du discours de Bézout avec celui de Tarnier est manifeste, même si ce dernier lui donne encore plus de lisibilité en confrontant très clairement les deux méthodes (l'une argumentative et l'autre visuelle). Nous reconnaissons également les propos que tient Salicis sur la différence des lois qui régissent les périmètres et les aires des figures semblables. L'influence de Bézout sur ses successeurs s'incarne donc à travers la similarité de leurs arguments. Quant à Harant, il situe son discours entre la démonstration formelle et la seule preuve visuelle, en expliquant :

> En effet, partageons AB en trois parties égales à ab, et par chacun des points de division menons des parallèles jusqu'aux côtés opposés ; faisons de même de ces nouveaux points pour les côtés opposés, et, en définitive, nous aurons partagé le triangle en neuf triangles égaux entre eux et égaux au triangle abc, comme ayant tous un côté égal à Am et les angles égaux à cause des parallèles. Donc ABC contient neuf fois abc. (Harant, 1863, p. 130)

Chez ce dernier, c'est bien la construction pas à pas qui forme le principal ressort argumentatif, et non la seule visualisation d'une figure déjà réalisée. En effectuant les opérations graphiques permettant le partage, la lectrice ou le lecteur s'approprie les caractéristiques de la configuration géométrique, et saisit plus aisément les raisons pour lesquelles les triangles obtenus sont tous égaux entre eux. La conclusion relative aux aires s'impose alors dans le cas particulier considéré, puis dans tous les cas par induction.

Dans les cas évoqués ci-avant[78] , les constructions et les figures qui en sont le produit apparaissent en tant qu'images dans les manuels scolaires, que, comme toutes les figures géométriques par nature, nous pouvons désigner comme « schémas » du fait

78. Nous pouvons remarquer que sur les 7 ouvrages dont les contenus sont discutés dans cette section, 6 appartiennent au groupe de ceux « qui manquent d'aires » (groupe 4) de la première classification, et 6 aux groupes des « tardifs appliqués » (groupe 5) ou des « théoriques et pratiques du début du siècle » (groupe 6) de la troisième (voir tableau A.2 p. 667). Peu riches en contenus sur les aires en proportion, ces ouvrages présentent néanmoins les aires des figures semblables, avec une efficacité visuelle qui semble caractériser les ouvrages d'orientation plus pratique ou appliquée.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

de leur caractère d'abstraction. Mais les constructions relatives aux figures semblables que nous exhibons dans cette analyse vont au-delà, puisqu'elles ne se contentent pas de représenter une situation géométrique, ou même de montrer la suite des tracés supplémentaires nécessaires au raisonnement démonstratif, elles incarnent le savoir mathématique dont elles accompagnent la présentation, en le rendant si évident que le discours en devient accessoire. Contrairement à la figure, courante dans les manuels, illustrant de façon seulement descriptive des triangles semblables (voir figure III.34b p. 392), la représentation alternative choisie par Bézout, Harant et Tarnier, de même que son équivalent pour les rectangles semblables, présente une force explicative qui peut se passer de mots. En cela, les figures de la géométrie des aires peuvent pour certaines, lorsqu'elles ont été construites dans cet objectif, constituer de réels médiateurs entre un concept ou un savoir mathématique et sa représentation.

Dans ce cadre, les figures de la « géométrie du semblable » se situent potentiellement à l'interface d'un concept et du schéma choisi pour le représenter. Ce rôle d'interface se joue dans ce cas autour de deux fonctions principales des figures : celle d'« information », en relation étroite avec le texte qui l'accompagne, et celle de « réflexion », en tant qu'image qui porte le sens de la figure et supporte la démarche inductive des lectrices et lecteurs (voir schéma III.35 p. 395).

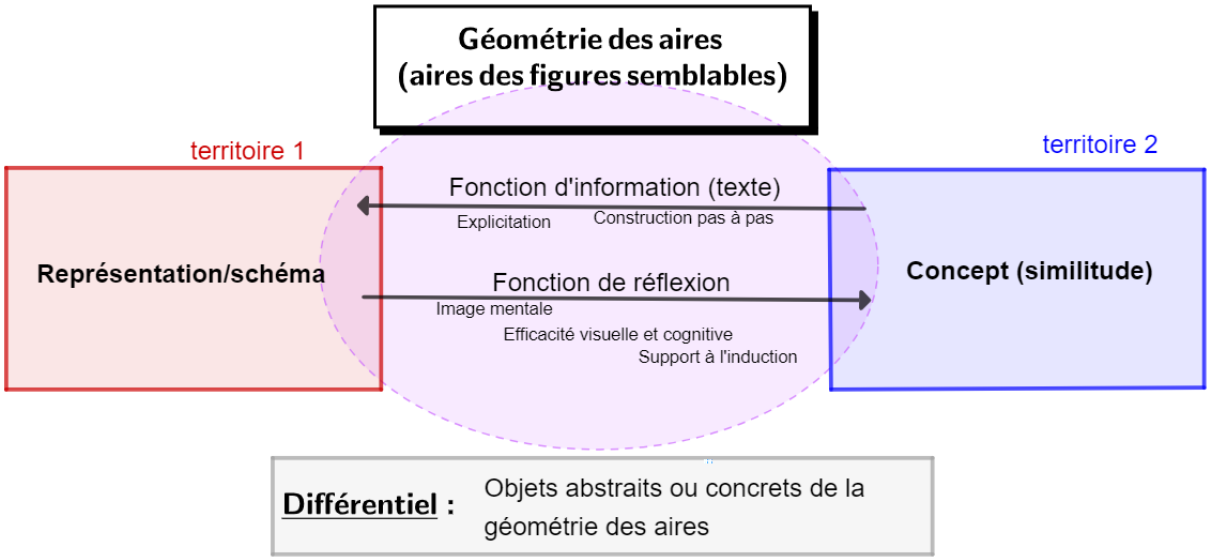


FIGURE III.35 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires des figures semblables est à l'interface des concepts mobilisés et des schémas choisis pour les représenter

III.1.2.2 Dupliquer des carrés, agrandir, réduire

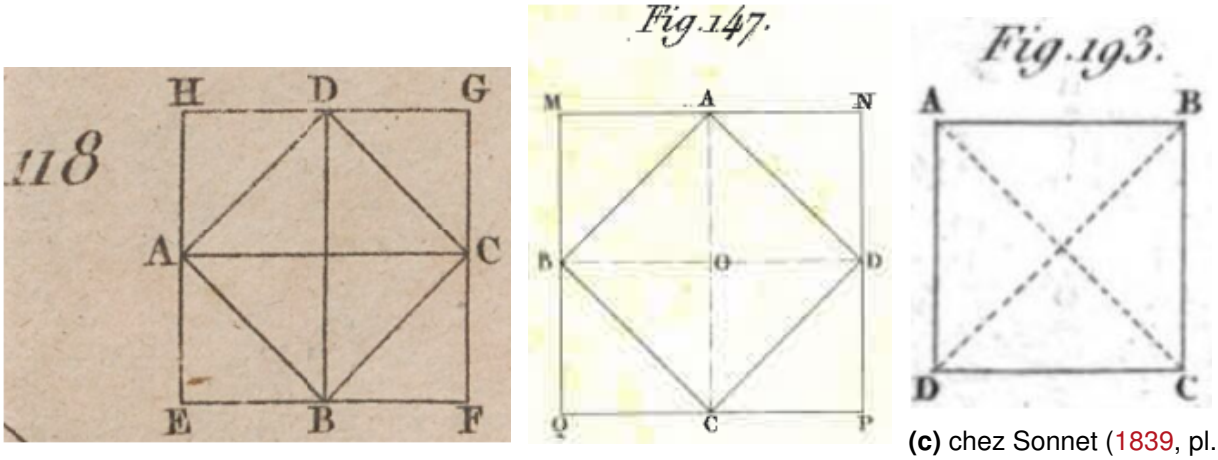
Dès les *Éléments* de Legendre, et bien que l'ouvrage s'inscrive dans la lignée de la géométrie spéculative euclidienne, l'auteur se soucie de la manière dont on peut

Licence CC BY-NC-ND 3.0

« rendre sensible » la proposition, corollaire du théorème de Pythagore, énonçant que, dans un carré $ABCD$, « le quarré fait sur la diagonale AC est double du quarré fait sur le côté AB » (Legendre, 1823, p. 72). En réponse à cette préoccupation, Legendre propose une construction qui permette de visualiser le résultat (voir figure III.36a p. 396).

> On peut rendre sensible cette propriété en menant par les points A et C des parallèles à BD, et par les points B et D des parallèles à AC : on formera ainsi un nouveau quarré $EFGH$ qui sera le quarré de AC. Or, on voit que $EFGH$ contient huit triangles égaux à ABE, et que $ABCD$ en contient quatre ; donc le quarré $EFGH$ est double de $ABCD$. (Legendre, 1823, p. 72)

Il s'agit en réalité de la figure classique qui illustre le problème de la duplication du carré dans le *Ménon* de Platon, que Legendre présente comme une construction à suivre pour obtenir un carré d'aire double d'un autre.



(a) chez Legendre (1823, pl. v) **(b)** chez Vincent (1844, pl. 5) **(c)** chez Sonnet (1839, pl. 13)

FIGURE III.36 – Figure du corollaire du théorème de Pythagore sur la diagonale d'un carré

Parmi les neuf auteurs du corpus qui énoncent cette propriété, en conséquence directe du théorème de Pythagore pour les triangles isocèles rectangles, deux seulement l'associent à cette figure. Le second après Legendre est Vincent, qui affirme :

> Le carré $MNPQ$ construit sur la diagonale BD [ou AC] d'un autre carré $ABCD$, est double de celui-ci :
> Proposition qui se vérifie d'ailleurs facilement d'après la figure. — En effet, les quatre carrés $AOBM$, $AODN$, $BOCQ$, $DOCP$, sont égaux, et respectivement doubles des triangles AOB, AOD, BOC, DOC, dont la somme est égale au carré $ABCD$. (Vincent, 1844, p. 182)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Pour lui aussi, la preuve de cette proposition consiste essentiellement dans la construction effective du carré d'aire double attendu, et dont la figure finale est suffisamment éloquente pour constituer une preuve, et pratiquement se passer de discours, les arguments mis en avant dans les quelques lignes de justification reposant presque entièrement sur des constatations graphiques (voir figure III.36b p. 396). Les sept autres auteurs qui énoncent ce résultat, soit ne l'accompagnent pas d'une figure spécifique, soit le font avec une figure identique à celle de Sonnet (voir figure III.36c p. 396), qui n'apporte aucun élément de compréhension de la « vraie raison » du théorème. La figure du *Ménon* est pourtant un grand classique de la géométrie grecque, qui est très vraisemblablement connue des mathématiciens du XIX^{e} siècle. Elle est à la fois simple et expressive, et est emblématique de la différence entre le « dire » et le « montrer » (Barbin, 1995). Rien n'explique vraiment à ce stade pourquoi la plupart des auteurs font le choix de s'en passer.

Au-delà de la question de doubler un carré, se pose, plus généralement, celle de le multiplier ou diviser, c'est-à-dire de construire un carré qui soit à un autre dans un rapport d'aires donné. Par exemple, Sonnet énonce le problème consistant à « faire un carré qui soit à un carré donné comme m est à n » (Sonnet, 1839, p. 245). Après avoir résolu cette question au moyen des proportions, il poursuit avec une section « applications » dans laquelle il précise la nature de l'utilisation possible des résultats établis : « Cette construction peut devenir utile pour la réduction d'un dessin ». Il expose alors que si l'on souhaite réduire un dessin pour le ramener à une superficie donnée « par la méthode des carreaux », on peut « envelopper le modèle d'un carré quelconque », puis réduire ce carré afin de dessiner le modèle réduit à l'intérieur du nouveau carré obtenu (Sonnet, 1839, p. 244-246). Il s'agit donc d'appliquer ces résultats à l'agrandissement et à la réduction des dessins, ce qu'il illustre par une figure (voir figure III.37 p. 397).

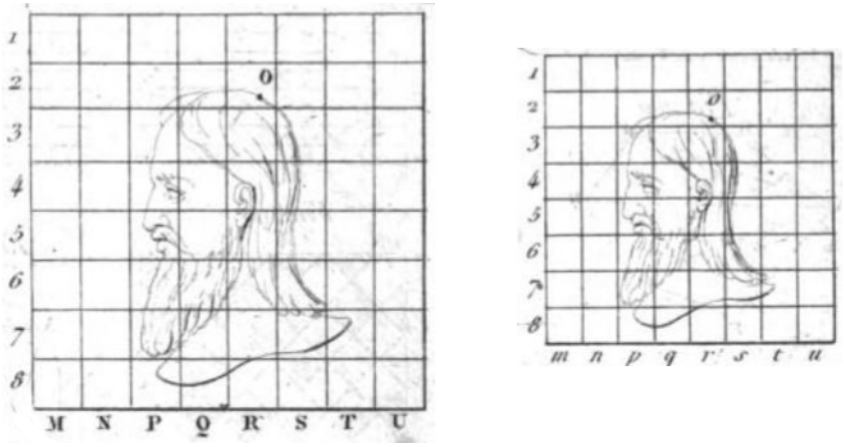


FIGURE III.37 – Figure de l'application de la méthode des carreaux en dessin chez Sonnet (1839, pl. 15)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans ce cas, l'illustration n'a pas le même statut ni la même fonction. Elle est plus figurative (voir la sous-section III.1.2.3 p. 403), et même si nous pouvons considérer qu'elle illustre bien le concept de réduction/agrandissement, elle ne porte pas le sens mathématique du résultat, en cela qu'elle n'explique en rien comment construire cette version réduite du dessin original. D'ailleurs, il s'agit plus d'un « dessin » qu'un « schéma » au sens défini par Choppin (1992, p. 157), car plus proche de la réalité même si elle intègre des éléments géométriques, et qu'elle tend moins vers l'abstraction que les précédentes. Elle occupe donc plus une fonction « de motivation » que « de réflexion » ou « d'information » (Choppin, 1992, p. 160-161), puisqu'elle met l'accent sur les applications possibles du résultat énoncé, et donc sur les raisons pratiques qui nécessitent de le connaître et de le comprendre. Bos utilisera plusieurs décennies plus tard la même figure pour motiver l'apprentissage des figures semblables et le rapport de leurs aires auprès de ses lectrices, qui étudient la géométrie dans l'enseignement secondaire (Bos, 1884, p. 143). Leur programme est en effet davantage tourné vers les applications graphiques et le dessin, et Bos adapte son discours en ce sens, en proposant des contenus, comme « la méthode des carreaux », qui ne figurent pas dans son manuel pour les garçons (Bos, 1884, p. 142). Il présente à la suite une nouvelle figure de réduction d'un dessin d'une feuille et d'une rosace pour appuyer encore son propos (Bos, 1884, p. 144) (voir figure III.38 p. 398).

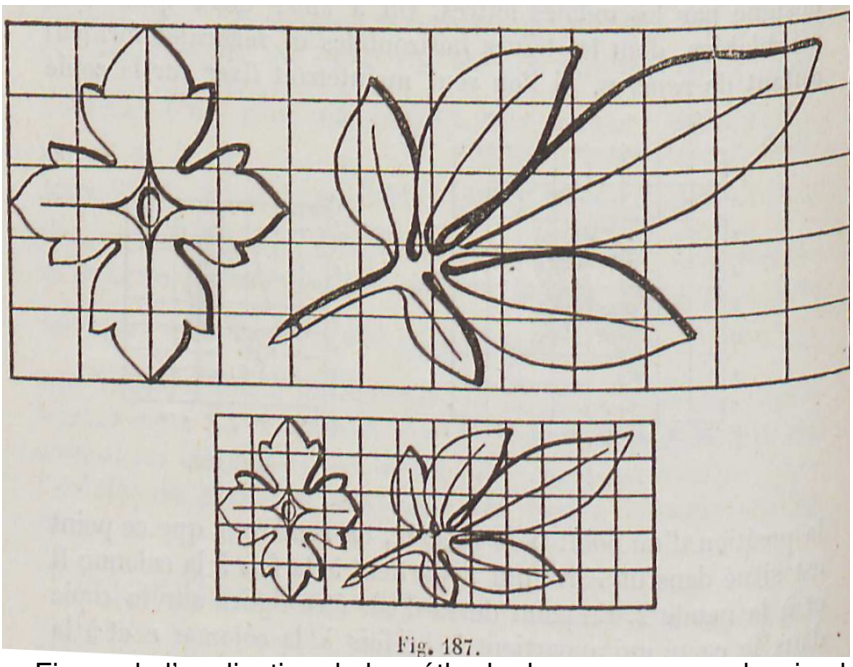


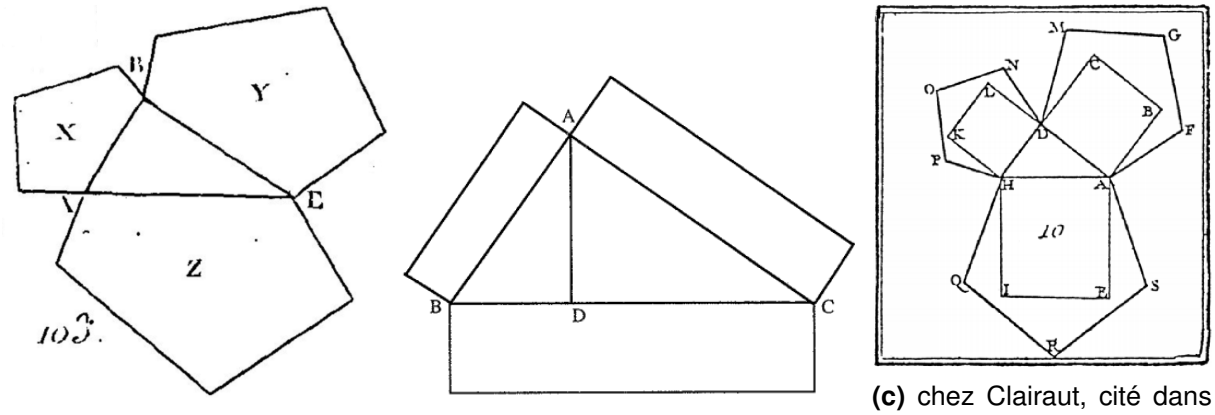
FIGURE III.38 – Figure de l'application de la méthode des carreaux en dessin chez Bos (1884, p. 144)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les opérations graphiques sur les figures semblables ne s'arrêtent pas là, puisque plusieurs auteurs prévoient de montrer comment ajouter ou soustraire des figures semblables. Il s'agit là encore d'une conséquence du théorème de Pythagore, exprimée par Lacroix en ces termes :

> Puisque les aires des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues de ces polygones, si l'on construit sur les côtés de l'angle droit du triangle rectangle ABE, et sur son hypoténuse AE, trois polygones semblables, X, Y et Z, [...] on conclura $X + Y = Z$, c'est-à-dire que le polygone construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des deux autres. (Lacroix, 1808, p. 120-121)

Cette version du théorème de Pythagore généralisée aux polygones semblables quelconques est présentée par 11 des 40 auteurs du corpus, mais Lacroix est le seul à l'accompagner d'une figure (voir figure III.39a p. 399). Pourtant, cette représentation existe dans le livre VI des *Éléments* d'Euclide (sous la forme traduite qu'on leur connaît actuellement), proposition 31 (voir figure III.39b p. 399), ainsi que dans les *Éléments de géométrie* de Clairaut (voir figure III.39c p. 399), deux ouvrages qui sont indéniablement des références au XIX^e siècle. Les trois constructions diffèrent d'ailleurs un peu les unes des autres.



(a) chez Lacroix (1808, pl. vi) **(b)** chez Euclide (1994, p. 236) **(c)** chez Clairaut, cité dans (Dhombres, 2009, p. 65)

FIGURE III.39 – Figures associées à l'énoncé du théorème de Pythagore généralisé aux polygones semblables

La généralisation aux figures semblables [79] induite par Euclide ne s'exprime graphiquement que par un cas particulier où ces figures sont des rectangles, et perd donc en force de généralité. Clairaut superpose quant à lui les carrés et les polygones construits

79. La proposition VI.31 est en effet énoncée en ces termes : « Dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrites » (Euclide, 1994, p. 236).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

sur les côtés du triangle, représentant ainsi en une seule figure la version initiale du théorème avec les carrés et son cas général avec les polygones semblables. Lacroix sépare les deux représentations et ne montre la proposition qu'avec les polygones construits sur les côtés. Seule la figure d'Euclide fait apparaître la hauteur du triangle rectangle issue du sommet de l'angle droit, pourtant cruciale en tant qu'élément explicatif de la similitude des triangles, elle-même au fondement du théorème [80]. Quoiqu'il en soit, la force de généralité d'une telle figure s'apparente à ce que Dhombres appelle une « suggestion d'énoncé par la simple vision » (Dhombres, 2009, p. 65), et même si la seule figure ne fait pas preuve, elle comporte une valeur d'abstraction qui permet au lecteur de saisir la portée du résultat qu'elle soutient. Encore une fois, et pour toutes ces raisons, l'absence d'une telle figure dans tous les manuels du corpus dans lesquels ce résultat est énoncé, sauf un, demeure inexpliquée.

Le théorème de Pythagore généralisé permet donc de « construire un polygone semblable à plusieurs autres et qui soit équivalent à la somme de tous », et en particulier de « faire un carré qui soit équivalent à la somme de quatre carrés » (Bergery, 1828, p. 260) [81]. Cette dernière proposition est jointe à une figure illustrant sa mise en œuvre (voir figure III.40a p. 401). Cette figure nécessite le texte explicatif, qui décrit les étapes successives de la construction, pour être entièrement comprise :

> Au sommet E du carré A , j'élève une perpendiculaire sur le côté EF ; je prends cette perpendiculaire égale au côté du carré B ; je joins F et G, pour avoir le côté du carré équivalent à la somme de A et de B. Au point G, j'élève sur FG, une perpendiculaire GH égale au côté de C. FH est alors le côté d'un carré équivalent à la somme de C et du carré qu'on ferait sur FG, ou équivalent à la somme de A, B, C. Mais, si au point H j'élève sur FH, une perpendiculaire HI égale au côté de D, FI sera le côté d'un carré équivalent à la somme de D et du carré qui serait fait sur FH, ou équivalent à la somme de A, B, C, D. Le carré $FIKL$ construit sur FI, vaut donc la somme des quatre carrés donnés. (Bergery, 1828, p. 260)

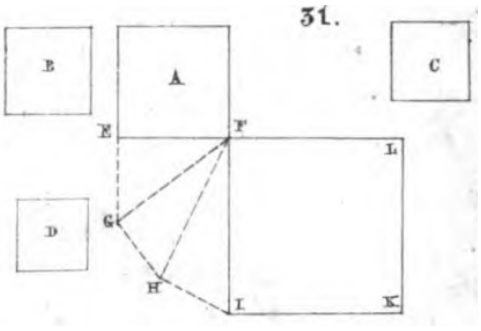
Si elle ne se suffit pas vraiment à elle-même, la figure produite par Bergery a l'avantage de fixer la méthode dans l'esprit des personnes qui l'ont lue. En effet, elle est conçue de sorte à réunir à la fois les objets initiaux et le produit final, tout en y intégrant les traits relatifs aux étapes de construction en pointillés. L'ensemble forme une entité

80. En effet, dans le livre VI, consacré aux figures semblables, Euclide redémontre le théorème de Pythagore dans le cas plus général en utilisant non pas les égalités des figures, mais leur similitude. Pour plus de précision, voir (Euclide, 1994, p. 236-238 ; Dhombres, 2009).

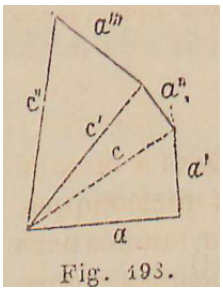
81. Parmi les 40 manuels du corpus, 22 présentent la construction d'un carré équivalent à la somme ou à la différence de deux ou plusieurs carrés, et 8 la construction d'un carré équivalent à n fois un carré donné.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

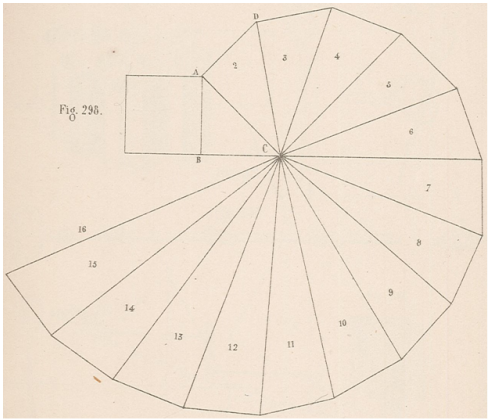
complète et intelligible, qui résume en même temps le résultat et la technique de construction. Il s'agit bien là aussi d'une médiation, efficace en termes pédagogiques, entre un savoir, ainsi qu'un savoir-faire, et la représentation visuelle ou mentale que les lecteurs et lectrices s'en font.



(a) chez Bergery (1828, pl. ix)



(b) chez Salicis (1869, p. 591)



(c) chez Harant (1863, pl. 61)

FIGURE III.40 – Figures associées à la construction de la somme de carrés

Plusieurs décennies plus tard, Harant explique lui aussi comment appliquer plusieurs fois le théorème de Pythagore pour « construire un carré deux, trois, quatre fois plus grand [resp. plus petit] qu'un carré donné ». Dans son explication et sur sa figure (voir figure III.40c p. 401), il itère le processus jusqu'à 13 fois pour obtenir une figure qu'il appelle « limaçon », et dont la dernière ligne est le côté d'un carré 13 fois plus grand que le carré initial (Harant, 1863, p. 133). La méthode est la même que celle décrite par Bergery, même si dans ce cas, les carrés ajoutés sont tous égaux au carré initial. La force de généralisation de la figure du « limaçon » qu'il introduit réside dans le grand nombre d'itérations, matérialisé par une numérotation sur les parties de la construction, et dans l'esthétisme de la forme finale, de nature à marquer les esprits. Enfin, dans son cours à destination des jeunes filles professé à la Sorbonne, Salicis, à la suite du théorème de Pythagore, construit une théorie complète sur les quatre opérations appliquées d'abord aux carrés :

> Addition des carrés - Qu'y a-t-il donc à faire pour construire un carré égal à la somme de deux autres ? [...] Soustraction - Trouver un carré équivalent à la différence de deux autres carrés. [...] Multiplication - Trouver un carré qui soit le multiple d'un autre carré. [...] Division - Trouver un carré qui soit une partie d'un carré donné. (Salicis, 1869, p. 567-568, 590)

Il généralise ensuite ceci aux quatre opérations sur les polygones, tout d'abord par conversion en carrés équivalents, puis en conservant la similitude (pour l'addition, voir

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la figure III.40b p. 401). C'est une véritable proposition d'arithmétisation des surfaces, dont les règles sont données à la fois numériquement et par construction.

L'arithmétisation des aires via les constructions associées n'est pas l'apanage de Salicis. Des résultats similaires, bien que moins complets et pas aussi formalisés, apparaissent chez Bergery quarante ans auparavant. Il expose en effet des méthodes similaires de construction de polygones semblables à d'autres et équivalents à leurs sommes ou différences, en conséquence du théorème de Pythagore généralisé aux polygones, et explicite son projet en écrivant :

> Il est impossible d'étudier et de pratiquer la géométrie, sans faire de continuelles applications des propriétés qui viennent d'être reconnues au triangle rectangle ; ces propriétés sont en quelque sorte pour les surfaces, ce qu'est pour le tracé des lignes, la proportionnalité des droites coupées par des parallèles. (Bergery, 1828, p. 259-261)

Il fait ainsi le parallèle entre le caractère fondamental du théorème dit de Thalès (propriété VI.2 des *Éléments* d'Euclide, (Euclide, 1994, p. 159)), pour la géométrie des lignes, et celui du théorème de Pythagore pour la géométrie des aires. L'idée est donc bien de créer une arithmétique des aires, fondée sur la similitude des figures, dont le théorème de Pythagore constitue le socle pour les opérations de base. Mais ces opérations ne sont pas que numériques, elles sont aussi et surtout des opérations graphiques, c'est-à-dire des constructions associées à chacune des opérations arithmétiques considérées. Dans ce cadre, les figures et constructions proposées aux lectrices et lecteurs jouent un rôle fondamental, puisqu'elles sont à la fois l'un des objets de la théorie échafaudée, et un moyen de la faire comprendre. Les constructions fonctionnent donc dans ce cas encore comme des facilitateurs d'accès à un ensemble conceptuel de connaissances. Les visualiser et/ou en maîtriser la réalisation favorise chez les élèves le processus de conceptualisation de l'arithmétisation des aires exposée par ces deux auteurs.

Dans cette étude apparaissent certaines fonctions des schémas décrites par Choppin, comme la fonction de « motivation », portée par l'objectif d'apprendre à réaliser des dessins à une échelle souhaitée. La fonction de « réflexion » est manifeste quant à elle dans la figure du *Ménon* et dans celle du théorème de Pythagore pour les polygones, qui toutes les deux présentent une grande force de généralité. Ces représentations sont de nature à éveiller la réflexion des jeunes lectrices et lecteurs, et même de l'étayer à travers une image mentale éloquente. Ce support visuel est d'autant plus précieux que ces deux résultats sont au fondement de tentatives d'arithmétisation des aires. Entrent alors en jeu deux types d'opérations, graphiques et numériques, qui se répondent mutuellement autour de constructions adaptées. Tous ces éléments illustrent une nouvelle fois le rôle

Licence CC BY-NC-ND 3.0

d'interface de la géométrie des aires à la croisée de concepts qu'elle mobilise et des schémas construits pour les représenter (voir schéma III.41 p. 403).

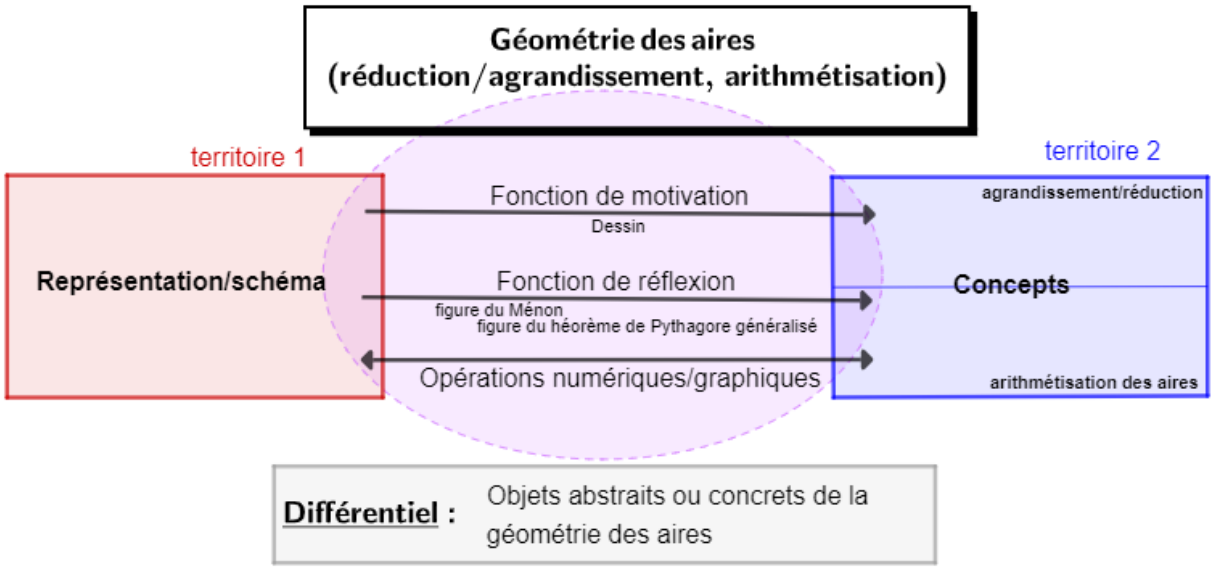


FIGURE III.41 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires, à travers les questions d'agrandissement/réduction et d'arithmétisation des aires, est à l'interface des concepts mobilisés et des schémas choisis pour les représenter

III.1.2.3 Les « images figuratives » au service de la géométrie des aires

Comme nous l'avons vu en introduction de cette section (voir p. 387), les images sont très présentes dans les manuels de géométrie tout au long du siècle même si les techniques pour les éditer et leurs modes de présentation dans les manuels diffèrent au cours du temps (Verdier, 2015). Ce sont principalement les figures géométriques, classées dans les « schémas » ou encore dans les images « abstraites » ou « conceptuelles » qui dominent naturellement pour beaucoup, compte-tenu du sujet spécifique de la discipline (Choppin, 1992, p. 157 ; Perret, 2018, p. 92-93). Néanmoins, les « images figuratives » n'en sont pas totalement absentes non plus. Et quand elles sont présentes, c'est souvent dans l'objectif de « resituer, de contextualiser des savoirs en les mettant en correspondance avec des objets de la vie quotidienne des élèves » et de « faire le lien entre savoirs abstraits et savoir-faire de la vie quotidienne » (Perret, 2018, p. 93). C'est ce que mettent en évidence Frizzarini et Legros dans leur étude des manuels d'arithmétique sous la Troisième République, portant sur quatre manuels d'arithmétique de Leyssenne. Par l'étude de quelques cas, elles montrent que l'image figurative sert parfois à « montre[r] un objet du quotidien des élèves qui exemplifie la notion mathématique », en plus d'aider à « conceptualiser un savoir mathématique » (Legros, 2019, p. 9-11).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Comme nous l'avons vu précédemment, leur travail montre que les images sont situées très majoritairement dans les parties de ces ouvrages qui traitent de la géométrie, et que parmi elles, les trois quart sont des schémas, et un quart des dessins (voir p. 388). Notre étude n'a pas vocation à faire une analyse systématique du nombre de figures présentes dans les manuels de notre corpus, ni d'en déterminer la part des images figuratives parmi elles. Nous favorisons ici une approche qualitative. Néanmoins, pour donner quelques ordres de grandeur, les ouvrages du corpus comprennent plusieurs centaines de figures [82], qu'elles se situent sur des planches à part ou dans le corps du texte, et sont majoritairement des schémas géométriques. Nous pouvons cependant repérer dans quels contextes des images figuratives apparaissent dans les manuels de géométrie : il peut s'agir de dessins d'instruments, notamment de mesure ou de tracé (compas, pinnules, équerres d'arpenteurs par exemple), de dessins de terrains ou pièces de terre à arpenter, ainsi que des éléments d'obstacle qui peuvent se présenter (bâtiments, rivières, etc.), des représentations de pièces architecturales ou ornementales (voûtes, corniches, marqueterie, carrelage entre autres), des objets à mesurer ou à jauger (tonneaux, pièces de bois, etc.), du matériel utilisé ou utilisable dans la classe, comme les dominos, et enfin, des modèles solides pour la géométrie dans l'espace.

Le recours aux images figuratives en géométrie montre les interactions que cette discipline entretient avec d'autres domaines : l'arpentage qui en est une application, mais aussi le dessin (linéaire ou artistique), et les travaux pratiques ou encore leçons de choses, à travers les objets convoqués et les manipulations qui leur sont relatives. Dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, dans la rubrique « Imagerie scolaire », l'auteur rappelle l'accent mis depuis quelques années sur l'« éducation esthétique des yeux » et même sur l'« enseignement par les yeux », auquel l'apprentissage du dessin seul ne peut répondre. Il indique que l'« imagerie scolaire », c'est-à-dire les estampes et photographies distribuées comme bons points, a vocation à développer cette éducation (Gresse, 1882). Deux décennies plus tard, l'auteur de l'article « Image, imagerie » de la nouvelle édition du dictionnaire, prétend que « l'image contribue [...] à instruire le peuple et à former son goût » (Valentino, 1911). C'est bien le projet d'une partie des auteurs de manuels de géométrie du XIX^{e} siècle, notamment ceux dont les ouvrages intègrent des éléments de dessin linéaire, à l'instar de L. C. et F. P. B. qui indiquent dans leur préface vouloir, pour l'élève qui les lit, « contribuer à former son goût et à développer ses facultés » (L.C. et F.P.B., 1840, p. iv). Notre analyse a pour objectif

82. À titre d'exemple, les *Éléments de géométrie* de Legendre (1823) comportent 305 figures éditées sur 14 planches, la *Nouvelle géométrie théorique et pratique* de Sonnet (1839) en compte 621 sur 72 planches, et le *Traité de géométrie théorique et pratique* de Leyssenne (1890) totalise 434 figures dans le corps du texte. C'est sensiblement plus que dans son cours d'arithmétique de deuxième année, dans lequel Frizzarini et Legros ont dénombré 299 figures, sur un nombre total de pages équivalent (410 pour l'ouvrage d'arithmétique, et 464 pour celui de géométrie) (Legros, 2019, p. 8).

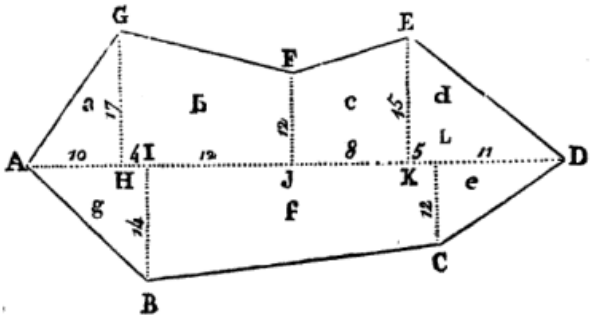
Licence CC BY-NC-ND 3.0

d'établir en quoi les images figuratives dans les manuels de géométrie, et relatives à la géométrie des aires, s'inscrivent dans ce double projet.

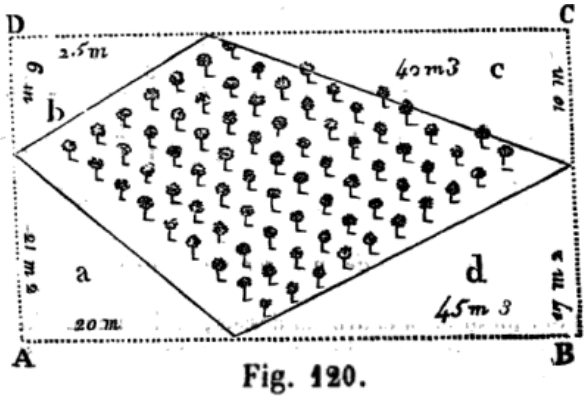
Nous nous intéressons tout d'abord à une première catégorie d'images figuratives, dans les manuels relatifs à la géométrie des aires, que forment les dessins de terrains. Ils apparaissent dans le cadre des savoirs et savoir-faire en arpentage que les élèves doivent acquérir, conformément aux programmes en vigueur. Si beaucoup des représentations graphiques associées à ces connaissances sont de simples figures géométriques, certains auteurs se démarquent en intégrant dans leurs schémas abstraits des dessins d'éléments concrets issus de la réalité du terrain. Par exemple, pour déterminer l'aire d'un terrain polygonal quelconque, l'illustration de la méthode générale, y compris dans un contexte d'arpentage, est systématiquement un polygone uniquement géométrique, qui figure un terrain potentiel sur lequel sont reportées des lignes nécessaires à l'application de la méthode (voir figures III.42a et III.42c p. 406). En revanche, quand il s'agit de faire de même pour un « terrain à l'intérieur duquel on ne peut pénétrer » (Eysseric et Pascal, 1850, p. 116), une partie des auteurs insèrent des dessins matérialisant les obstacles possibles, comme un marais, un étang, ou un bois par exemple (voir figures III.42b et III.42d p. 406).
Le rôle du dessin est bien dans ce cas de relier les savoirs théoriques à des réalités concrètes. Mais une différence est faite par les auteurs entre des cas où le recours à des éléments du monde réel est nécessaire, et d'autres où il ne l'est pas. Se représenter un terrain polygonal simplement sous une forme géométrique ne semble pas poser problème, puisque c'est le choix opéré par l'intégralité des auteurs qui traitent ce point. En revanche, la représentation d'un terrain dans lequel on ne peut pénétrer nécessite une aide visuelle, au moins pour une partie des auteurs (5 sur les 11 qui traitent ce point particulier). C'est pourquoi plusieurs d'entre eux font appel à de petits dessins simples pour figurer ce caractère impénétrable. Le point remarquable est que sur ces figures, les éléments dessinés cohabitent avec les lignes et points géométriques, comme une forme de réalité géométrisée, en une figure pseudo-concrète. Ce point est manifeste également lorsqu'une partie du contour d'un terrain que l'on souhaite arpenter est sinueuse, comme dans le cas d'un chemin ou d'une rivière. De tels cas sont représentés par des figures mixtes, entre dessin et construction géométrique (voir figure III.43 p. 407) [83].
Ces figures sont difficiles à classer suivant la typologie de Choppin, car à mi-chemin entre dessin et schéma. En revanche, leur fonction est assez facilement identifiable

83. Nous retrouvons ce type de figures mixtes, entre dessin et géométrie, dans les illustrations des problèmes de recherche de distances inaccessibles, avec des éléments dessinés qui figurent les obstacles, comme des tours ou autres bâtiments, rivières ou encore ponts.

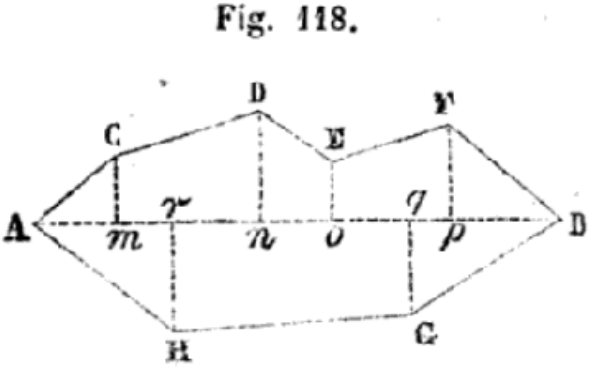
Licence CC BY-NC-ND 3.0



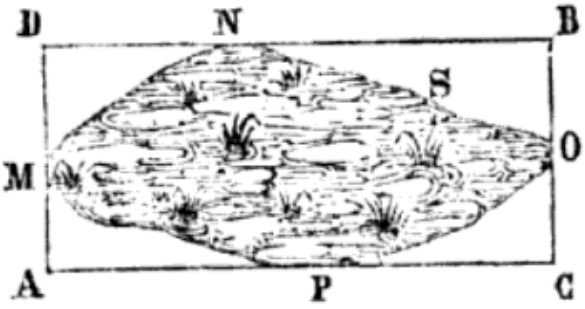
(a) chez Lancelot (1833, p. 36)



(b) dans lequel on ne peut pénétrer chez Lancelot (1833, p. 37)



(c) chez Eysseric et Pascal (1850, p. 115)



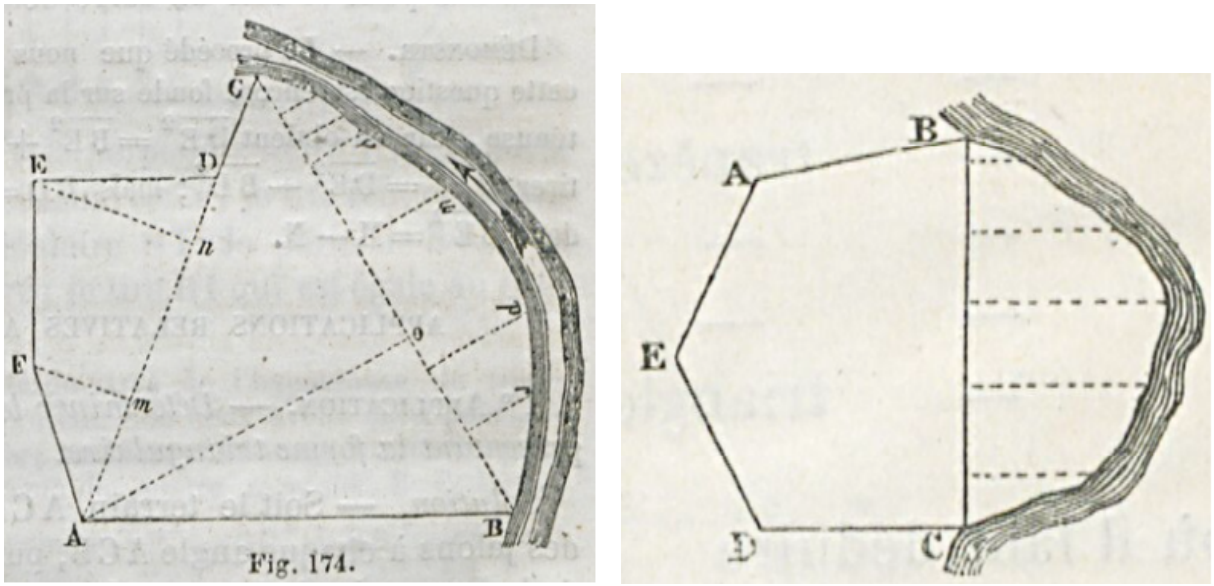
(d) dans lequel on ne peut pénétrer chez Eysseric et Pascal (1850, p. 116)

FIGURE III.42 – Figures associées à l'arpentage d'un terrain polygonal

comme relevant de l'« information » : les parties dessinées (rivière, chemin, etc.) informent la lectrice ou le lecteur qu'il n'est pas possible d'entrer dans le terrain, ce qui justifie l'élaboration d'une méthode différente de celle du cas plus général. Cette information n'est pas seulement donnée dans le texte, elle est repérable d'un seul coup d'œil en observant la figure, ce qui facilite la compréhension globale de l'élève. Le caractère « décoratif » de ce type d'image n'est sans doute pas la motivation première de leur existence. En effet, comme cela est perceptible à travers les quelques exemples présentés, les dessins introduits sont souvent assez rudimentaires, même s'ils peuvent s'avérer un peu plus précis et soignés dans quelques ouvrages, et ne constituent pas un apport esthétique pour le manuel. Leur vocation réelle est de connecter le savoir mathématique qu'ils représentent à la réalité de l'élève, qui comprend vite que l'on ne peut réaliser de mesures dans un bois touffus ou à l'intérieur d'un étang.

Enfin, un dernier cas se présente dans le cadre de l'apprentissage de l'arpentage, sous la forme de problèmes de détermination d'aires de terrains pouvant exister dans la réalité, représentés en pleine page et parfois en couleur. Nous trouvons par exemple ce

Licence CC BY-NC-ND 3.0



(a) chez Puille (1855, p. 136) **(b)** chez Bert (1886, p. 88)

FIGURE III.43 – Figures associées à l'arpentage d'un terrain délimité en partie par une ligne courbe (chemin, rivière)

type d'exercice dans le manuel de Lamotte (voir figure III.44 p. 408), dans lequel ce dernier explique :

> La planche 8 représente un lavis de plan. On y a réuni à dessein des terrains de natures et de teintes conventionnelles différentes. Les élèves le copieront d'abord en triplant les côtés du rectangle, et par conséquent les côtés du polygone, ce qui donnera une surface neuf fois plus grande. Ils laveront avec les teintes conventionnelles, en cherchant à imiter le modèle. Ils pourront ensuite doubler les côtés du rectangle et les côtés du polygone, pour avoir une surface quatre fois plus grande ; enfin ils copieront le plan tel qu'il est représenté dans la planche 8.
> Voici les calculs de la mesure de ce plan. Nous ne donnerons ici que les résultats. On trouvera sur le plan la largeur des côtés et des perpendiculaires. Les exemples qui se trouvent dans le cours de cet ouvrage suffisent pour faire connaître la marche à suivre dans l'arpentage des trapèzes et des triangles. (Lamotte, 1839, p. 137)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

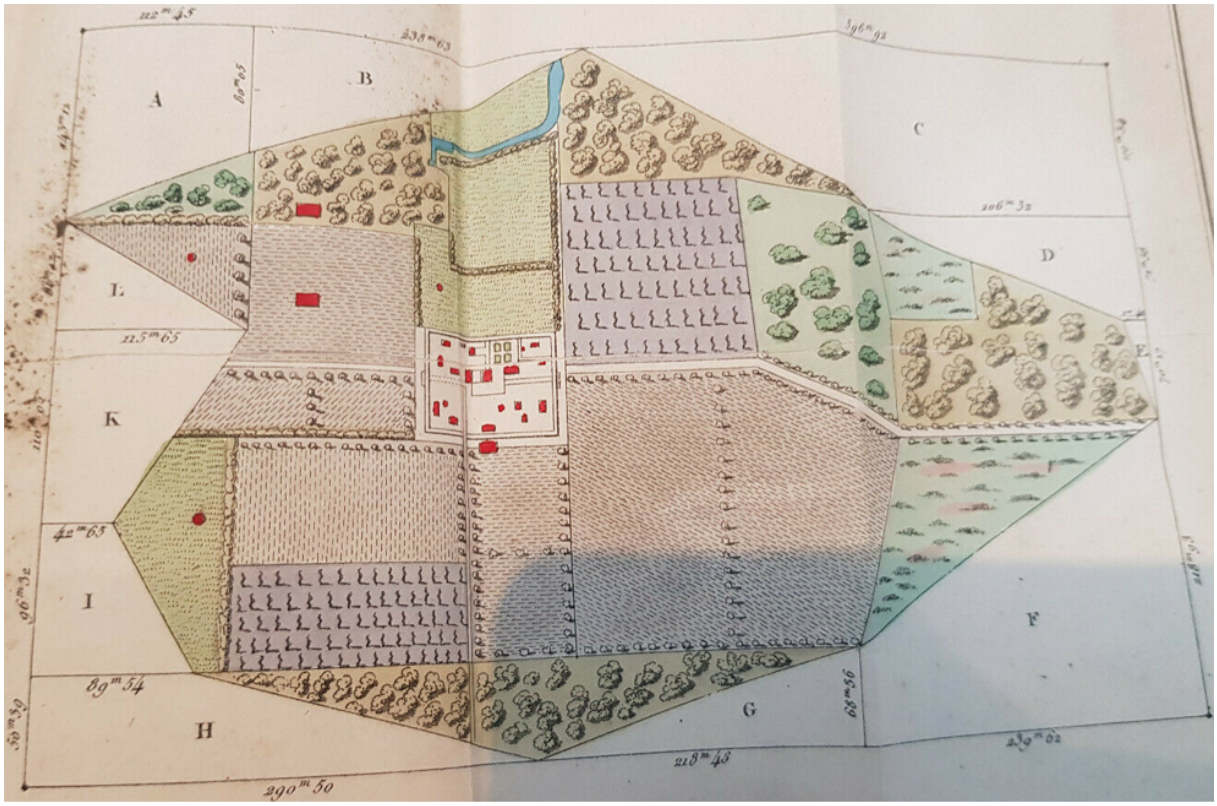


FIGURE III.44 – Planche en couleur d'un terrain objet d'un exercice d'arpentage chez Lamotte (1839, p. 137)

L'exemple présenté est caractéristique du type d'exercice demandé aux élèves, et montre à la fois l'application du principe du rapport des aires des figures semblables en dessin, et la réalisation des calculs numériques de mesure des aires associées à la figure. La question de l'arpentage couvre donc bien ces deux enjeux : représenter (construire géométriquement) et mesurer (calculer l'aire). L'image mobilisée est là encore un mélange entre un dessin et un schéma, puisque des éléments figuratifs tels que les arbres, buissons, rivières, bâtiments, ou encore pieds de vigne vont de pair avec des points nommés, des lignes tracées délimitant des polygones, dont les mesures réelles sont reportées sur la figure [84]. La fonction d'une telle image est bien entendu informative, puisqu'elle comporte énormément de données, mais elle joue d'après nous aussi un rôle « de motivation » (Choppin, 1992, p. 160-161) que renforce la couleur. Cette dernière rend l'image attractive, en plus de lui donner un plus grand réalisme. De plus, en confrontant les élèves à des situations censément concrètes, en

84. Les 5 ouvrages contenant ce type d'images figuratives en lien avec l'arpentage étudiés dans cette section sont pour beaucoup (3 sur 5) dans le groupe des « arpenteurs expérimentaux » (groupe 4), et les autres dans celui des « théoriques et pratiques du début du siècle » (groupe 6) de la dernière classification réalisée (voir tableau A.2 p. 667). L'appartenance à ces groupes est en cohérence avec les contenus précis qu'ils proposent sur la mesure des terrains à travers les images figuratives qu'ils présentent à ce sujet.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

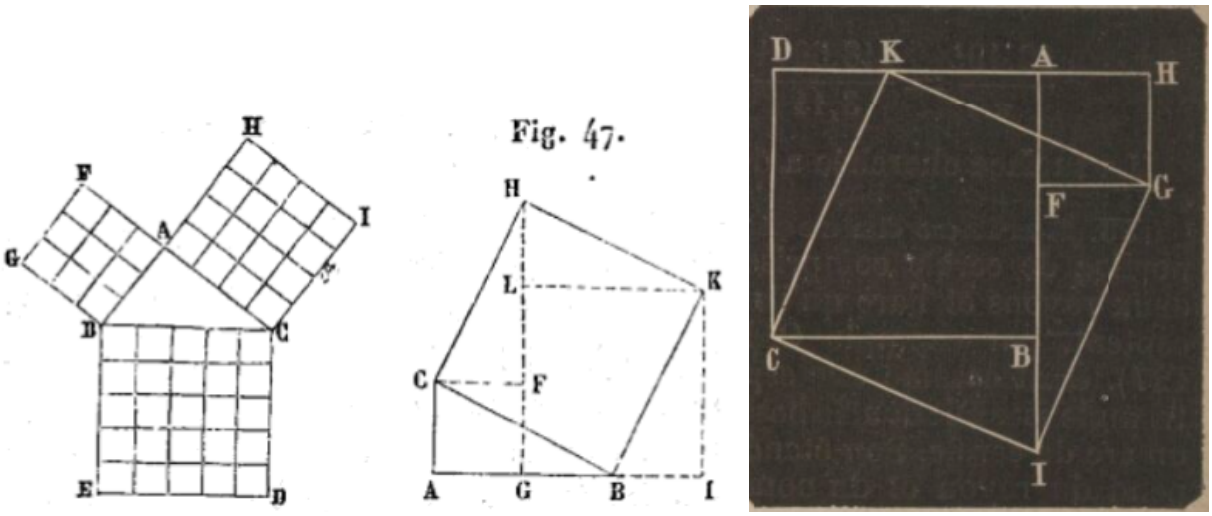
tout cas représentées par des images intégrant des éléments de leur environnement de façon réaliste, le professeur a manifestement pour objectif de stimuler leur envie d'apprendre. D'autant que la présentation de la planche colorisée, très rare dans les manuels de l'époque, peut leur apparaître plaisante. Néanmoins, cette intention de motiver les élèves par des images n'est pas explicitée dans les textes des auteurs que nous avons consultés. Qui plus est, le recours à la couleur dans ce cas, si elle peut avoir pour effet de plaire aux lectrices et lecteurs, s'explique vraisemblablement davantage par des raisons techniques. En effet, la présence de la couleur dans un tel cas est relative à la technique de « lavis des plans », qui associe des coloris spécifiques aux différents types de terrains, que les élèves apprennent conjointement à l'arpentage, et auquel Lamotte fait référence dans sa citation.

Le matériel scolaire et les objets du quotidien trouvent également leur place au sein des figures schématisées de géométrie, pour mettre en évidence certains résultats dans le cadre d'une méthode d'enseignement qui se veut expérimentale (voir p. 121). Ce recours aux images figuratives et à une potentielle manipulation des objets de la classe est particulièrement présent dans les preuves du théorème de Pythagore, présentées par une partie des auteurs du corpus. Les figures que nous exposons ci-après ont déjà fait l'objet d'une analyse dans la sous-section III.1.1.2 (p. 354), mais nous étudions ici les versions de ces preuves dans lesquelles interviennent le matériel de classe et sa représentation figurée.

Tarnier par exemple, recourt à tous les dispositifs de visualisation, au mouvement et à la manipulation d'objets pour faire comprendre les vérités géométriques qu'il expose, et en particulier le théorème de Pythagore. Le geste du dessin est valorisé, et l'auteur recommande de raisonner non pas sur des figures imparfaites et tracées à main levée, mais au contraire sur une « figure rigoureusement dessinée » (Tarnier, 1872, p. viii). Il dresse d'ailleurs quelques pages plus loin une liste du matériel que l'élève doit avoir en sa possession pour pouvoir suivre le cours de géométrie. Dans le cadre de l'« *éducation de l'oeil et de la main* » qu'il préconise, il présente le théorème de Pythagore à l'aide d'une figure faisant apparaître un quadrillage (voir figure III.45a p. 410). Cette figure doit, d'après l'auteur, « parler aux yeux » et permet de « vérifier, à vue, qu'en effet le carré fait sur BC vaut à lui seul les deux autres carrés » (Tarnier, 1872, p. x). L'autre figure est celle de la preuve en puzzle vue également chez Dupuis et Bovier-Lapierre (voir figures III.45a et III.45b p. 410) : elle est présentée comme support à une démonstration proposée en appendice, dans une « Note XXXII » qui a pour objectif d'approfondir et de prouver certains résultats sur la mesure des aires. En plus de son aspect visuel, la preuve repose sur une « simple transposition de parties dans la figure », qui s'accompagne de considérations explicitement liées au mouvement, ou tout

Licence CC BY-NC-ND 3.0

du moins au déplacement : « j'ôte le triangles HFC, KLH, et je transporte le premier en KIB et le second en BAC » (voir figure III.45a p. 410). La manipulation d'objets est préconisée également, Tarnier estimant que « les élèves [feraient] bien de s'exercer à faire cette démonstration avec une figure en carton » (Tarnier, 1872, p. 311-312).



(a) chez Tarnier (1872, p. x, 311) **(b)** chez Bovier-Lapierre (1879, p. 90)

FIGURE III.45 – Figure du théorème de Pythagore avec quadrillage et en puzzle

Si les deux images mobilisées par Tarnier ne sont pas figuratives, au sens où elles ne montrent pas d'objets réels, l'idée de coupler une figure géométrique abstraite à la manipulation d'un matériel concret émerge néanmoins des raisonnements qui leur sont associés. En particulier, les preuves du théorème de Pythagore qui se présentent comme des sortes de puzzle portent implicitement les idées de réagencement des pièces, ou encore de découpage et de recollement. Bovier-Lapierre utilise un vocabulaire spécifique à ce type de manipulations : « Découpons ces deux triangles et portons KDC au-dessous de la figure en appliquant le côté CD sur le côté égal CB » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 90) (voir figure III.45b p. 410). Il n'est toutefois pas évident, à le lire, qu'il envisage le découpage réel de la figure à l'aide de ciseaux, ou si l'expérience de pensée suffit. Dans la note relative à cette même démonstration, Dupuis est plus clair en préconisant de réaliser les rotations des triangles « au moyen de trois petits papiers découpés », afin de visualiser leur égalité (Dupuis, 1857, p. 123) (voir figure III.18b p. 360).

Plusieurs auteurs vont plus loin dans ce sens et incluent du matériel pédagogique au sein même des images qui illustrent les théorèmes. Ces objets sont de deux sortes : les équerres et les dominos. Dalsème énonce en effet le théorème de Pythagore comme la « précieuse propriété de l'équerre » (Dalsème, 1880, p. 17), ramenant un résultat géométrique théorique à la propriété d'un objet. Il en fait d'ailleurs la représentation

Licence CC BY-NC-ND 3.0

figurée avec des équerres dessinées (voir figure III.46 p. 412) [85]. C'est en recourant à ces objets et à leur potentielle manipulation qu'il reprend la preuve proposée par Leyssenne et Salicis, examinée dans la sous-section sur les *constructions alternatives* (p. 362 et suivantes). La disposition des équerres laisse apparaître d'une part un « vide rose » carré, et d'autre part, un « espace rose » qui « se compose de deux carrés ». L'égalité du « vide rose de gauche » et du « vide rose de droite » prouve la relation souhaitée (Dalsème, 1880, p. 18). Une figure strictement identique à celle de Dalsème apparaît dans l'ouvrage de *Géométrie* pour les écoles de filles de Hue et Vagnier (mais en noir et blanc) [86]. Les auteurs accompagnent cette illustration de consignes précises de manipulation, en forme de mode d'emploi : « Réunissons deux équerres par leurs hypoténuses et plaçons le rectangle qu'elle forment à l'un des angles du carré ; disposons de même les deux autres équerres au sommet opposé de ce carré ». Dans ce cas, c'est la manipulation même qui conduit à l'établissement du résultat : « Comme d'un même carré on a retranché, dans les deux cas, deux quantités égales, les quatre équerres, les restes sont équivalents » (Hue et Vagnier, 1896, p. 133).

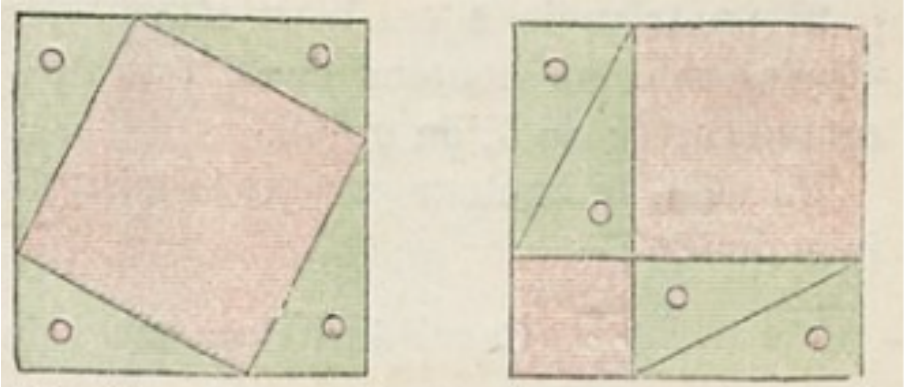


Fig. 37. — Le carré du grand côté.

La somme des carrés des deux autres.

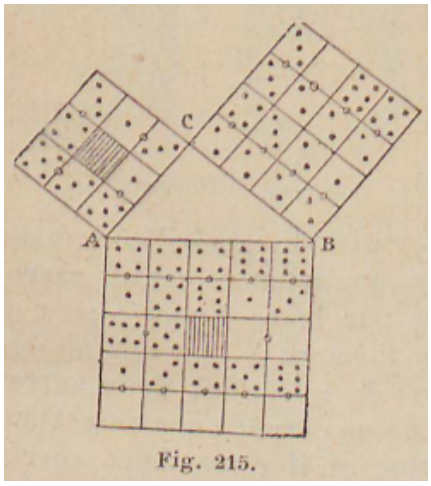
85. Cette méthode des équerres a en réalité été inventée par Lagout dans le cadre de la méthode d'enseignement qu'il crée et baptise « tachymétrie » (voir p. 121). Dalsème, alors professeur à l'École Normale de la Seine, va en faire à la fois la critique et la promotion, avec un ouvrage plus adapté à l'usage scolaire (Leme da Silva et Moyon, 2020). La figure des équerres, emblématique de la méthode de Lagout, figure en couverture de sa *Tachymétrie*, en lien avec le théorème de Pythagore (Lagout, 1874, couv., 20). Elle apparaît également dans *Le prompt savoir* (Lagout, 1878), dans lequel il expose les vertus de sa méthode (voir p. 120). C'est lui qui choisit les couleurs vertes et roses reprises par Dalsème, couleurs des volumes vendus avec son ouvrage dans des boîtes de manipulation, « indispensables pour graver dans l'esprit les vérités nécessaires de la Tachymétrie » (Rey, 1875, p. 433). Ce choix de couleurs est discuté par Casimir Rey, qui commente son ouvrage dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* en écrivant : « M. Lagout préfère les cartons verts et roses [plutôt que les cartons blancs d'usage courant] à cause de son équation du beau » (Rey, 1875, p. 437).

86. Des figures très proches sont présentées dans les manuels de Bos (1884, p. 114) et de Leyssenne (1890, p. 252), mais sans l'élément distinctif de l'objet « équerre » que constitue le petit trou rond situé dans le coin de l'angle droit.

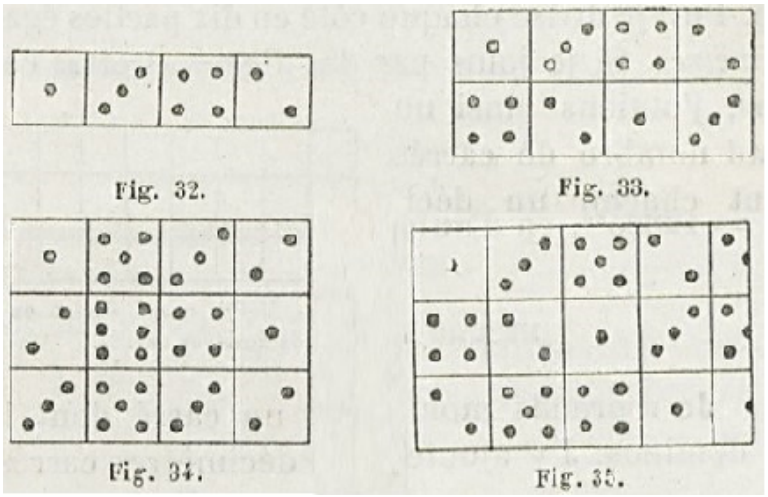
Licence CC BY-NC-ND 3.0

FIGURE III.46 – Illustration de la preuve du théorème de Pythagore par les équerres chez Dalsème (1880, p. 18)

À la suite, Hue et Vagnier proposent une autre façon de « montrer l'exactitude de cette vérité » (Hue et Vagnier, 1896, p. 133). Il s'agit cette fois-ci d'un montage à l'aide de dominos, mettant en évidence la relation entre les carrés des nombres 3, 4 et 5 (voir figure III.47a p. 412). La démarche dans ce cas, proche de celle de Tarnier avec le quadrillage, est davantage de « montrer » le résultat que de le démontrer, c'est-à-dire de permettre de l'appréhender par la vue, mais en plus de se l'approprier par une manipulation préalable. Les dominos sont également mobilisés dans les *Premiers éléments de géométrie expérimentale* de Bert (1886), non pas pour le théorème de Pythagore, qu'il ne présente pas, mais pour la mesure du rectangle. Bert expose la mesure de la surface du rectangle à l'aide du « jeu de dominos [qu'il a] coupés en deux » (Bert, 1886, p. 23), ce qui lui fournit des moitiés, de forme carrée et de côté 1 cm, soit finalement des cm^2. Il forme alors des rectangles en disposant bout à bout ces carrés, en une ligne d'une rangée d'abord, puis en rectangle de plusieurs rangées (voir figure III.47b p. 412). Les trois première figures, issues de potentielles manipulations réalisables avec les élèves, lui permettent d'établir, par induction, que la surface du rectangle est le produit de ses deux dimensions. Il le montre tout d'abord sur la figure 32 dans le cas où l'une des dimensions est 1, puis les figures 32 et 33 mettent en évidence le principe multiplicatif dans le cas de dimensions entières. L'auteur introduit ensuite des « morceaux obtenus en sciant en deux parties égales des demi-dominos » (Bert, 1886, p. 25), ce qui lui permet de généraliser son observation à des dimensions non entières.



(a) du théorème de Pythagore par les dominos chez Hue et Vagnier (1896, p. 134)



(b) de la mesure du rectangle chez Bert (1886, p. 24-25)

FIGURE III.47 – Illustration des preuves

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans les cas des figures intégrant des dessins d'équerres ou de dominos, les objets courants représentés, issus d'un matériel potentiellement disponible dans une salle de classe, induisent la méthode expérimentale, en cela qu'ils suggèrent les manipulations à opérer pour réaliser la construction support du raisonnement. Si les images obtenues peuvent être considérées comme des dessins, dans la mesure où la représentation qui est faite d'une configuration peut correspondre strictement à une disposition d'objets effective, elles n'en restent pas moins des idéalités géométriques, présentant quoiqu'il en soit une vérité abstraite sous les atours d'un matériel concret. Les figures sans objets de Tarnier (voir figure III.45a p. 410) ont quasiment la même portée explicative que celles qui intègrent des dessins, surtout quand le discours qui les accompagne évoque des manipulations matérielles. La fonction de ces nouvelles figures, qui apparaissent dans les deux dernières décennies du siècle [87], est manifestement d'ordre pédagogique : en plus de motiver les élèves dans l'acquisition de savoirs en les mettant au contact d'objets courants, elles portent les informations nécessaires à la compréhension d'un concept, stimulent leur réflexion, tout en les invitant à manipuler le matériel qu'ils ont peut-être à leur portée, suivant l'exemple d'agencement proposé. Selon ces conclusions, la géométrie des aires, à travers les images figuratives qu'elle emploie, se situe à l'interface des concepts — savoirs et savoir-faire — enseignés et des schémas et/ou images qui les illustrent (voir schéma III.48 p. 413).

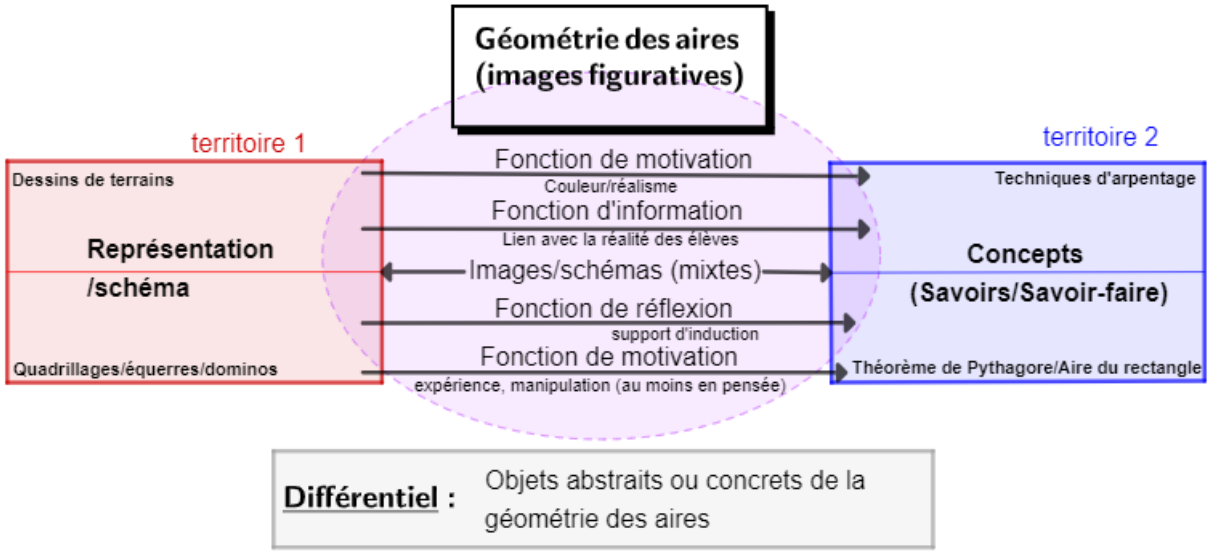


FIGURE III.48 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires, à travers les images figuratives qu'elle emploie, est à l'interface des concepts enseignés et des schémas et/ou images qui les illustrent

87. Les manuels dont les contenus sont discutés dans cette section appartiennent d'ailleurs presque tous (5 sur 6) au groupe des « tardifs appliqués » (groupe 5) de notre 3ème classification (voir tableau A.2 p. 667). Le recours au matériel de classe préconisé dans ces ouvrages témoigne du caractère appliqué de l'enseignement de la géométrie qu'ils proposent.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ces innovations pédagogiques naissent dans des manuels s'adressant à des publics du primaire supérieur, de l'enseignement spécial ou de l'enseignement féminin, plus concernés par les nouveautés de la méthode expérimentale (voir la sous-section I.3.1.4 p. 117). L'apport du dessin d'objets dans les figures géométriques présentées dans les manuels n'est de notre point de vue pleinement bénéfique que s'il s'accompagne d'une modification des pratiques de classe associées.

III.1.2.4 Conclusion

Finalement, une figure abstraite bien choisie peut porter un concept et en cela former un support solide à l'acquisition et à la compréhension d'un savoir par les élèves, comme nous l'avons constaté pour la similitude. Maîtriser des constructions, c'est-à-dire les voir, les comprendre ou même les réaliser, permet de s'approprier un ensemble conceptuel de connaissances complexes comme l'arithmétisation des aires. Les dessins figuratifs intégrés aux schémas géométriques en une figure mixte ont pour effet d'informer de manière directe les élèves d'une situation (impénétrabilité, sinuosité) et de motiver leur apprentissage d'une méthode en montrant comment elle intervient dans la vie courante. Sans compter que le caractère esthétique de certaines images, notamment en couleur, rend les savoirs à acquérir plus attractifs. L'introduction du matériel de classe (dominos, équerres) dessiné au cœur des figures géométriques est significatif de l'essor de la géométrie expérimentale pour certains publics en fin de siècle, et prend tout son sens si l'on imagine que les pratiques de classe correspondantes les accompagnent.

En conclusion, les images, dessins, figures ou encore constructions qui apparaissent dans les manuels dans le cadre de la géométrie des aires constituent de réelles interfaces entre les savoirs conceptuels et la représentation, visuelle et/ou mentale, que les élèves s'en font, en les mettant parfois en relation avec leur quotidien, domestique ou scolaire (voir schémas III.35 p. 395, III.48 p. 413 et III.41 p. 403). Les fonctions de ces figures sont multiples. Elles permettent de motiver les enfants en leur présentant des situations concrètes, ou en leur donnant à voir des images esthétiquement attractives. Elles portent les informations nécessaires à l'établissement du résultat qu'elles représentent, les résument ou les synthétisent parfois. Elles constituent des exemples, en montrant une disposition finale que l'on peut obtenir en manipulant des objets, permettant de comprendre en acte le théorème de Pythagore. Elles forment un socle pour la réflexion des apprentis géomètres, les accompagnant dans l'acquisition de notions aussi complexes que celle de similitude ou d'arithmétisation des aires. Les formes variées que prennent les figures en géométrie des aires suivant les époques et les domaines

Licence CC BY-NC-ND 3.0

de savoir sont la manifestation de leurs rôles multiples, et mettent en évidence en quoi elles constituent un support précieux pour les apprentissages des élèves.

III.1.3 La construction comme savoir-faire à maîtriser

La construction en géométrie en général, et en géométrie des aires en particulier, constitue souvent une étape nécessaire au raisonnement et à l'élaboration de la preuve, à travers des tracés supplémentaires qui font apparaître des configurations intrinsèques à la figure initiale. En cela, cette action de tracer et de construire appartient au domaine de la démonstration, en servant un objectif théorique, qui est de prouver les propositions que l'on affirme. Les figures produites peuvent alors, suivant les choix qui ont guidé leur construction, constituer de réels médiateurs entre un concept géométrique et la compréhension qu'un jeune lecteur (ou lectrice) en a. Mais la construction géométrique peut également être vue comme une fin en soi, en tant que savoir-faire technique à maîtriser dans la lignée de la pensée newtonienne[88] (voir citation p. 330). Ce dernier objectif plus utilitaire que théorique revêt une importance particulière au XIX^{e} siècle dans le double contexte de l'apprentissage du dessin linéaire au niveau intermédiaire et de la géométrie descriptive dans le supérieur.

Que l'on s'accorde ou non à considérer les tracés de droites et de cercles comme une activité interne à la géométrie, ou comme une activité pratique, externe et préalable à cette discipline, l'importance de tels savoir-faire pour l'aborder n'en est pas moins primordiale. C'est ce que souligne d'ailleurs Newton, qui met en évidence un aspect fondamental de l'activité géométrique, celui de la résolution de problèmes. Même si pour lui, les problèmes de construction relèvent davantage de la « mécanique pratique », il restent d'importance, puisque « la géométrie en montre l'usage ». D'ailleurs, dans les programmes de 1838 de l'enseignement secondaire (classe de troisième), et des ENP, il est préconisé[89] :

88. Même si Newton n'est pas cité un grand nombre de fois par les auteurs du corpus (seulement par Terquem (1829, p. v, 424, 438) et par Rouché et Comberousse (1866, p. ix, x), voir le diagramme II.16 p. 209 de la sous-section II.2.2.1), il est mentionné en particulier pour sa vision de la géométrie synthétique développée dans ses *Principes de la philosophie naturelle*, dont la citation à laquelle nous faisons référence à propos du tracé géométrique est issue. Le propos du paragraphe suivant montre en outre que l'importance qu'il accorde à l'activité du tracé géométrique reste d'actualité au XIX^{e} siècle.

89. Les deux textes officiels, publiés respectivement les 9 et 26 octobre de la même année, sont pratiquement identiques. D'Enfert indique, en préambule du texte à destination des ENP, que « l'administration ministérielle reprend presque mot pour mot le programme des classes de quatrième, troisième et seconde de l'enseignement secondaire du 9 octobre 1838, mettant ainsi en parallèle, peut-être involontairement, l'enseignement mathématique des écoles normales et celui des collèges » (D'Enfert, 2003c, p. 95-96).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> Pour exercer les élèves au maniement de la règle, du compas et de l'échelle, on exigera d'eux la construction de vingt à trente figures, choisies en partie parmi les problèmes du programme. Il sera bon que les données soient, autant que possible, exprimées en nombres, et que ces nombres et les résultats soient rapportés sur le cahier d'épures que chaque élève devra conserver. (Belhoste, 1995, p. 152)

Outre les aspects calculatoires relevés dans ce propos, et que nous étudierons dans le chapitre III.2 (p. 446 et suivantes), l'accent est bien mis également ici, dans les deux ordres d'enseignement, sur la maîtrise technique de la construction géométrique et de l'usage des instruments courants. Quelques années plus tôt, le programme d'admission à l'École Polytechnique prévoyait d'ailleurs que les élèves aient « été exercés, avant leur entrée à l'École, à construire, avec la règle et le compas, quelques problèmes de géométrie élémentaire et de géométrie descriptive » (Belhoste, 1995, p. 123). Ces préconisations sont particulièrement importantes pour préparer les élèves au dessin sur modèle, largement pratiqué dans cette école en marge des cours de géométrie descriptive impulsés par Monge, mais aussi à l'École royale des ponts et chaussées et à l'École royale du génie de Mézières, par exemple (Brechenmacher, 2022, p. 66). Il s'agit d'apprendre à représenter des modèles en trois dimensions sur une feuille en deux dimensions, processus pendant lequel l'élève exerce à la fois « son intelligence et l'adresse de ses mains » (Belhoste et al., 1990, p. 99). Si, dans l'enseignement secondaire, l'entraînement aux constructions prépare les élèves à l'enseignement ultérieur de la géométrie descriptive, c'est avec le cours de dessin linéaire que ces compétences entrent en interaction dans l'ordre primaire. Initiée par Francœur, cette discipline a vocation à « exercer l'œil et la main, à développer la précision et le sens de l'observation » (D'Enfert, 2003a) et exerce une double fonction : celle de préparer les élèves au cours de géométrie, mais aussi de leur en fournir un champ d'application. Dans les programmes des EPS de filles de 1893, il est également précisé que l'objectif est « de familiariser les élèves avec quelques formes géométriques simples et de leur apprendre à effectuer quelques constructions élémentaires de dessin linéaire » (D'Enfert, 2003c, p. 273). Dans le secondaire également, il est prévu de faire résoudre aux jeunes filles des « problèmes de construction » dans les programmes qui leur sont dédiés en 1882 et 1897 (Belhoste, 1995, p. 470, 564).

Maîtriser des activités graphiques en géométrie figure donc bien dans les programmes d'enseignement des deux ordres au cours du siècle. Et en ce qui concerne la géométrie des aires, ce sont deux types de problèmes qui occupent les géomètres du XIX^{e} siècle, par leurs aspects théoriques, comme utilitaires et pratiques : celui des quadratures,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

exactes pour les polygones, et approchées pour le cercle, et l'estimation des aires délimitées par des courbes quelconques, dans l'arpentage ou dans les arts [90].

III.1.3.1 La quadrature des polygones

La référence euclidienne, nous l'avons vu, demeure un incontournable pour les auteurs de manuels de géométrie du XIX^e siècle, malgré des périodes de remise en question (voir la sous-section I.3.1.1 p. 103). Concernant la quadrature des polygones, c'est-à-dire la question de comment construire un carré équivalent à un polygone donné, Euclide trace une voie qui va de son livre I à la quatorzième et dernière proposition du livre II qui indique comment « construire un carré égal à une figure rectiligne donnée » (Euclide, 1990, p. 361). Établir ce résultat nécessite au préalable d'avoir démontré la proposition 45 du livre I, qui consiste, « dans un angle rectiligne donné, [à] construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée » (Euclide, 1990, p. 277), qu'il utilise dans le cas d'un « parallélogramme rectangle » [91]. Il ne reste plus ensuite qu'à réaliser la quadrature du rectangle, ce que fait Euclide en s'appuyant sur la proposition II. 5 [92]. Cette démarche est caractéristique de la méthode euclidienne de l'« application des aires », consistant à « construire une aire équivalente à une figure donnée sur une droite [ou dans un angle] donné[e] » (Euclide, 1990, p. 377-385). Elle s'inscrit dans une conception des aires tournée vers les constructions, dont les méthodes et les résultats sont établis indépendamment de toute considération de nombre ou de proportion [93].

Pourtant, au tournant et au début du XIX^e siècle, ce n'est pas la voie que suivent les auteurs d'éléments de géométrie tels que Mauduit, Lacroix ou Legendre. En effet, ces derniers ne présentent pas le résultat de la « rectangulation » des polygones, ni de la quadrature du rectangle, tout comme 22 autres auteurs du corpus [94]. La construction

90. Un autre cas pourrait trouver sa place dans cette étude, celui du partage des figures, mais nous choisissons de ne pas le traiter dans ce cadre, lui ayant déjà consacré une étude spécifique dans (Moyon et Guillet, 2025).

91. Cette étape est parfois nommée « rectangulation » d'une figure rectiligne. Pour l'utilisation de ce terme et l'analyse de la preuve euclidienne de la proposition II. 14, voir (Guichard, 2022).

92. « Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite » (Euclide, 1990, p. 333). Pour plus de détails sur cette preuve, voir (Euclide, 1990, p. 361-365 ; Guillet et Moureau, 2022).

93. Pour le développement d'une telle approche des aires dans l'histoire, ainsi que son application possible dans les classes de collège et lycée actuelles, voir (Guillet et Moureau, 2022).

94. Dans les programmes, ces questions ne sont pas faciles à identifier. Elles peuvent apparaître sous les intitulés « Exercices et problèmes sur la comparaison des aires » ou « Figures équivalentes », repérés dans 7 des 25 programmes consultés, principalement pour l'enseignement spécial ou féminin (voir tableau I.5 p. 53), mais peuvent aussi être traitées plus généralement en lien avec les aires des polygones ou encore l'arpentage. Il est à noter que le mot « quadrature » n'apparaît dans aucun texte officiel en mathématiques sur la période considérée, parmi ceux présentés par Belhoste (1995) et D'Enfert (2003c).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

d'un carré équivalent à un rectangle donné n'apparaît en effet que dans 15 des manuels considérés, et presque toujours en lien avec la notion de « moyenne proportionnelle » [95]. Pour ces auteurs, c'est un nouveau point de divergence avec la structure de l'édifice euclidien, dans lequel la présentation de ce type de constructions est séparée de tout caractère relatif aux nombres et aux proportions. La liaison avec la notion de « moyenne proportionnelle » prend néanmoins des formes très variées suivant les auteurs. Elle peut se faire de manière intermédiaire, par référence à une proposition antérieure la concernant (Dupin, 1828, p. 119-120, 125), ou encore être indiquée en parallèle d'une méthode de construction purement géométrique, en tant que problème équivalent comme chez Terquem :

> PROBLEME XXXVI. (Fig. 55.) Étant données la base AP, la hauteur PC d'un rectangle, trouver le côté du carré équivalent ?
> Solution. Portez AP, PC à la suite l'un de l'autre, sur la longueur AC comme diamètre ; décrivez une demi-circonférence ; élevez en P la perpendiculaire BP ; elle est le côté cherché du carré équivalent.
> PROBLEME XXXVII. Trouver une longueur moyenne proportionnelle entre deux longueurs données AP, PC ?
> Solution. La même que pour le probl. XXXVI. (Terquem, 1829, p. 137-138)

De la même manière, Desnanot donne la marche à suivre pour « construire un carré équivalent à un rectangle » puis précise que la ligne BF alors construite comme « côté du carré demandé » est nommée « moyenne proportionnelle » entre les côtés du rectangle initial, avant de faire le lien avec la relation d'égalité des rapports, puis d'égalité des produits, que cette construction induit (Desnanot, 1835, p. 151). Presque tous les auteurs ultérieurs indiquent que la quadrature du rectangle se ramène à la détermination d'une moyenne proportionnelle entre ses côtés, qu'ils proposent de réaliser par construction, par le calcul, ou les deux.

Quadrature du rectangle abordée			Non abordée
15			25
Figure absente	Figure d'Euclide	Autre	
4	9	2	

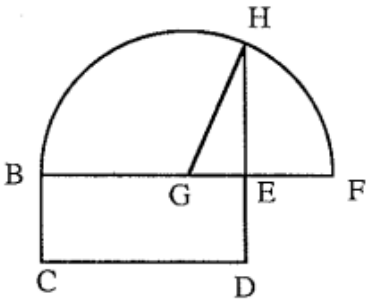
TABLE III.5 – Tableau récapitulant le nombre d'ouvrages présentant la quadrature du rectangle, et avec quelles figures

Quant aux figures qui accompagnent leurs raisonnements, plusieurs situations sont possibles (voir tableau III.5 p. 418). Conformément à nos observations ci-avant, elles

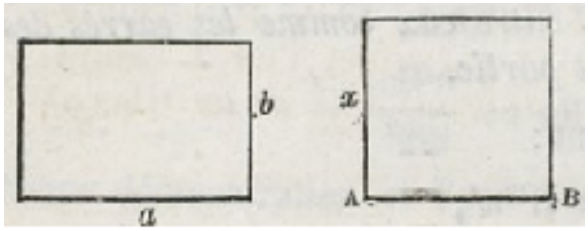
95. La moyenne proportionnelle de deux grandeurs a et b est une grandeur c telle que a est à c comme c est à b, ce qui s'écrit encore, avec les notations des proportions $a : c :: c : b$, ou avec les égalités de rapports actuelles $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, ce qui est équivalent à $c^2 = a \times b$.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

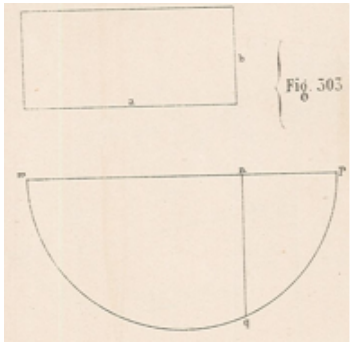
peuvent être totalement absentes quand la construction n'est pas présentée dans ce cadre (dans 4 des 15 ouvrages), il peut s'agir d'une figure similaire à celle d'Euclide (voir figure III.49a p. 419), dans 9 cas sur 15, avec ou sans les traits de construction (figures III.49d et III.49c p. 419), ou encore d'une figure se présentant comme un schéma descriptif de la situation mais qui n'indique rien de la construction à effectuer (figure III.49b p. 419, 2 cas sur 15).



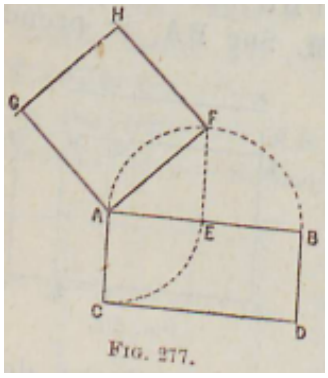
(a) chez Euclide (1990, p. 361)



(b) chez Tombeck (1879, p. 240)



(c) chez Harant (1863, pl. 62)



(d) chez Leyssenne (1890, p. 256)

FIGURE III.49 – Figures associées à la quadrature du rectangle

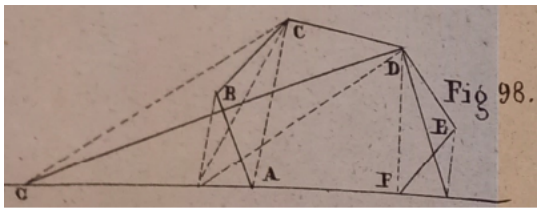
La construction est la plupart du temps décrite et expliquée, sauf dans le manuel de Girod qui indique que sa « figure montre clairement la construction [...] du carré cherché » (Girod, 1893, p. 192) [96].

L'autre chemin pour traiter la question de la quadrature des polygones quelconques passe par la construction d'un triangle équivalent à un polygone donné. 27 auteurs [97] énoncent cette proposition, et deux de plus en formulent une, peu différente, montrant comment construire un polygone équivalent à un polygone donné d'un côté de moins, qui itérée suffisamment de fois, produit un résultat identique. Ce résultat aboutit ensuite, par transformation d'un triangle en un carré d'aire égale, à la quadrature des polygones

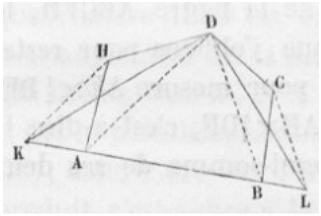
96. Sa figure est similaire à celle de Leyssenne (voir figure III.49d p. 419).
97. Parmi eux, 13 énoncent aussi le résultat sur la quadrature du rectangle.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

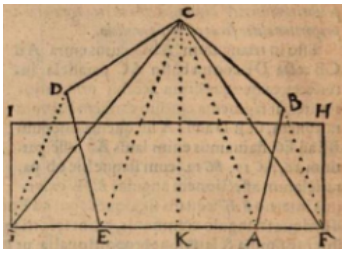
quelconques. Dans le cas de cette proposition, c'est une construction strictement géométrique qui est proposée, sans recours à des notions d'arithmétique ou d'algèbre. La figure associée est très ressemblante dans tous les manuels du corpus dans lesquels elle est présentée, constituant une solution standard à ce problème de construction (voir figures III.50a et III.50b p. 420).



(a) chez Gimelli (1841, pl. 3) (cas d'un hexagone)



(b) chez Amiot (1859, p. 150) (cas d'un pentagone)



(c) chez Van Ceulen (1615, p. 48) (cas d'un pentagone)

FIGURE III.50 – Figures associées à la construction d'un triangle équivalent à un polygone quelconque donné

La technique repose sur l'égalité des triangles de même base compris entre les mêmes parallèles, qui fait que dans la figure du milieu, le triangle DAH est équivalent au triangle ADK, de même que le triangle DBC et le triangle DBL, ce qui, en rajoutant leurs aires à celle du triangle ADB, prouve l'égalité en aire du polygone $ABCDH$ et du triangle DKL. Cette construction ne figure pas dans les éléments de référence de l'époque, soit ceux d'Euclide ou de Clairaut. En revanche, elle est présentée par Ludolf van Ceulen dans ses *Fundamenta arithmetica et geometrica* en 1615, répondant au problème II de la proposition 30, « Transformer un pentagone donné en un parallélogramme rectangle » [98] (Ceulen, 1615, p. 48) (voir figure III.50c p. 420). Nous n'avons pas trouvé de trace de cette construction antérieure à cette source, et nous ne pouvons affirmer avec certitude que les auteurs des manuels du XIX^e^ siècle s'appuient sur ce texte pour présenter cette méthode, mais plusieurs — Mauduit, Terquem et André — citent van Ceulen pour ses travaux concernant les décimales de π, ce qui montrent qu'ils connaissent au moins en partie ses textes.

Si la construction de la quadrature du rectangle analysée auparavant voit son intérêt justifié « dans les arts, [où] il faut souvent trouver un quarré dont la surface soit équivalente à celle d'un rectangle » (Dupin, 1828, p. 125), cette dernière construction trouve plutôt son application dans l'arpentage, car comme l'explique Gimelli, après avoir exposé les différentes façons de décomposer un polygone en triangles afin d'en déterminer l'aire :

98. Ce qui apparait ainsi en latin dans le texte : « Datum quinquangulum in parallelogrammum rectangulum transformare ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> Lorsqu'on a tout un polygone à mesurer sur le papier, la décomposition en figures élémentaires est encore assez longue. Voici un procédé que nous recommandons aux élèves, comme infiniment plus rapide et non moins rigoureux que le premier. (Gimelli, 1841, p. 85)

Ce procédé consiste en une méthode de tracé réalisée à l'équerre qui a selon lui pour vertu de réduire le nombre de droites à construire :

> Faisant coïncider le côté d'une équerre avec la base AF, ajustez aux deux points C et A l'une des branches d'une seconde équerre, l'autre branche s'appuyant sur la base ; puis faites glisser cette dernière vers la gauche, jusqu'à ce que la branche CA rencontre le point B ; vous déterminerez la droite BK parallèle à CA, et sur la base le point K ; menez CK ; vous aurez ainsi le pentagone $KCDEF$ égal en surface à l'hexagone. (Gimelli, 1841, p. 85)

Il explique ensuite comment renouveler l'opération pour construire les points G et I [99] donnant un triangle DGI d'aire égale à celle de l'hexagone initial (voir figure III.50a p. 420). Il conclut en mesurant le coût de la construction en opérations graphiques :

> Dans cette opération, sur huit droites que la construction géométrique semble exiger, deux seulement sont nécessaires pour obtenir ce triangle.
> Les lignes ponctuées indiquent celles que l'on peut se dispenser de tracer. (Gimelli, 1841, p. 86)

Chez Gimelli comme chez Lemoine, l'efficacité d'une construction semble se mesurer au nombre d'opérations de tracé nécessaires pour la réaliser. Même si cet auteur est le seul de notre corpus qui exprime explicitement cette préoccupation, l'apparition de ce souci de réduire le nombre des tracés et de simplifier les constructions conforte le choix que nous avons effectué dans ce sens dans la sous-section III.1.1.2 (p. 345). De plus, tout comme Lemoine, Gimelli montre que dans la pratique, le recours à l'équerre réduit de beaucoup le nombre de tracés de lignes nécessaires à une construction.

Sonnet va également dans ce sens : il distingue d'abord les aspects théoriques de la quadrature des polygones, en expliquant comment construire un polygone d'un côté de moins qu'un polygone donné, et qui lui soit équivalent, puis explique :

> En répétant l'opération précédente un nombre suffisant de fois, on pourra toujours réduire le polygone donné à n'avoir que trois côtés. Or, on sait trouver un carré équivalent à un triangle donné ; la quadrature d'un polygone quelconque peut donc s'effectuer par une suite d'opérations rigoureuses (abstraction faite des erreurs graphiques). (Sonnet, 1839, p. 252-253)

99. Les points I et K intervenant dans la méthode décrite ne sont pas nommés sur la figure III.50a (p. 420). Il s'agit des deux points d'intersection des lignes en pointillés avec la droite (AF).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Nous pouvons remarquer au passage que Sonnet distingue bien, en mentionnant les opérations « rigoureuses », c'est-à-dire les intersections de droites et de cercles comme dans la géométrie grecque, la « figure idéale », qui est la solution théorique au problème donné, de la« figure sensible » que forme la construction effective, dans laquelle des « erreurs graphiques » peuvent venir se glisser (voir l'introduction du chapitre III.1 p. 325). Mais Sonnet poursuit par des aspects plus pratiques encore, en expliquant qu'« en répétant la construction précédente autant de fois qu'il est nécessaire pour convertir le polygone en un triangle, il en résulte un peu de confusion dans les lignes. Mais plusieurs de ces lignes peuvent être omises » (Sonnet, 1839, p. 253), avant de proposer une construction allégée, mais dans son cas, sans équerre.

Les auteurs sont donc à la fois à la recherche d'une solution théorique aux différents problèmes de transformation des polygones en polygones équivalents, mais aussi des meilleurs procédés de construction pour la pratique, en terme de simplicité des tracés au sens défini préalablement. Amiot résume les intérêts des différentes stratégies de quadrature des polygones suivant les situations, et replace la méthode de transformation d'un polygone en triangle équivalent parmi elles. Pour lui, « lorsque le polygone dont on demande la mesure est tracé sur le papier, on peut le transformer en un triangle équivalent, et mesurer ensuite la surface de ce triangle », alors que quand on opère directement sur le terrain, la méthode dite des « directrices » lui est préférable « à cause de la facilité avec laquelle ou trace des perpendiculaires, sur le terrain, au moyen de l'instrument appelé équerre d'arpenteur » (Amiot, 1859, p. 150-151).

Passer par un triangle équivalent pour réaliser la quadrature d'un polygone, plutôt que suivre la voie euclidienne de la rectangulation associée à la quadrature du rectangle, se justifierait donc par les usages en arpentage, dont l'importance au XIX^{e} siècle est accentuée par l'intégration de ces savoir-faire aux programmes d'enseignement de la géométrie. Cette hypothèse se voit néanmoins remise en question par le fait que sur les 13 ouvrages qui ne présentent pas la construction d'un triangle équivalent à un polygone, nombre réduit à 11 si l'on compte également ceux qui présentent le résultat analogue de réduction à un polygone d'un côté de moins, 4 sont des livres dédiés explicitement à l'arpentage, 2 aux arts et métiers (Dupin, 1828 ; Harant, 1863), et 2 autres à la géométrie expérimentale (Bert, 1886 ; Dalsème, 1880). De plus, parmi les 5 ouvrages du corpus qui présentent le mot « arpentage » dans leurs titres, seul Gimelli présente ce résultat. Les autres, (Briot et Vacquant, 1859 ; Dupuis, 1857 ; Lamotte, 1839 ; Lancelot, 1833) ne le font pas (voir le tableau récapitulatif de la situation dans le tableau III.6 p. 423). La présentation d'une telle méthode aux élèves apprenant la géométrie ne fait donc pas consensus parmi les auteurs de manuels davantage tournés vers les aspects pratiques de la discipline.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Triangulation (ou résultat équivalent) abordée</td><td colspan="4">Triangulation non abordée</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Quadrature du rectangle abordée</td><td colspan="2">13</td><td colspan="4">2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Quadrature du rectangle non abordée</td><td colspan="2">16</td><td colspan="4">9</td><td>25</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="2">29</td><td colspan="4">11</td><td>40</td></tr>
<tr><td>Dont (dans le titre)</td><td>"Arpentage"</td><td>Non "arpentage"</td><td>"Arpentage"</td><td colspan="3">Non "arpentage"</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">28</td><td rowspan="2">4</td><td>"Arts et métiers"</td><td>Géométrie expérimentale</td><td>Autre</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

TABLE III.6 – Tableau récapitulant le nombre d'ouvrages présentant la construction d'un triangle équivalent à un polygone ou non, la quadrature du rectangle ou non, en lien avec les orientations des titres vers l'arpentage et les autres domaines d'application de la géométrie

Finalement, les différentes voies que peut prendre la résolution de la quadrature des polygones est résumée par Amiot, après avoir présenté la méthode de quadrature d'un triangle, en recourant lui aussi à la notion de « moyenne proportionnelle » et à sa construction :

> Si la surface du polygone proposé a pour mesure le produit de deux lignes droites connues, comme il arrive pour le parallélogramme et le trapèze, on démontre, par un raisonnement analogue au précédent, que le côté du carré équivalent à ce polygone est moyenne proportionnelle entre les deux lignes dont le produit exprime la mesure de sa surface.
> Lorsque l'aire du polygone proposé ne s'exprime pas immédiatement par le produit de deux lignes droites, je transforme ce polygone en un triangle équivalent [...], et je construis ensuite le carré équivalent à ce triangle. (Amiot, 1859, p. 151-152)

Selon lui, la technique de construction d'un triangle équivalent à un polygone n'est nécessaire que lorsque le problème ne peut se ramener à celle d'une moyenne proportionnelle. Il apporte ainsi un autre éclairage, plus théorique, sur le rôle de cette construction, qui trouve de ce fait naturellement sa place dans les ouvrages élémentaires de géométrie [100].

Leyssenne, dans une partie qu'il dédie aux « problèmes et constructions graphiques », propose de « transformer un rectangle en un carré », puis poursuit avec le parallélogramme, le triangle et le trapèze, avant de finir par « transformer un polygone quelconque en un triangle équivalent » (Leyssenne, 1890, p. 256-257). Les méthodes

100. Ses arguments suivant l'ordre des figures, commençant par le cas du triangle, puis des figures dont l'aire est le « produit de deux lignes », puis par celui des polygones quelconques, sont repris parfois presque mot pour mot par une partie de ses successeurs, dont André (1879, p. 158-159).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

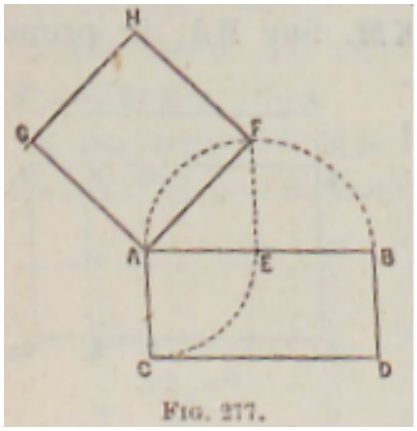


Fig. 277.

(a) quadrature du rectangle avec traits de construction ayant valeur de méthode (en pointillés)

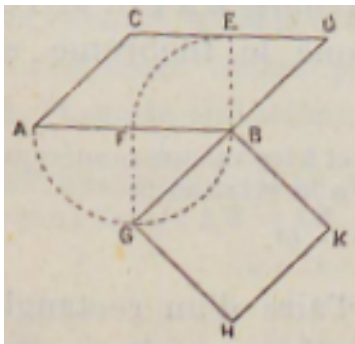


Fig. 278.

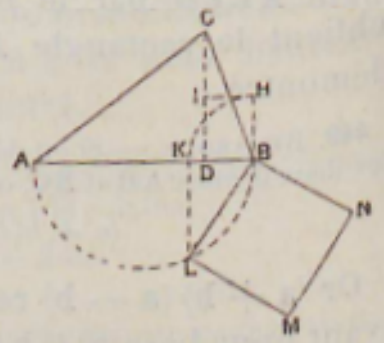


Fig. 279.

(b) quadratures du parallélogramme et du triangle avec traits de construction ayant valeur de méthode (en pointillés)

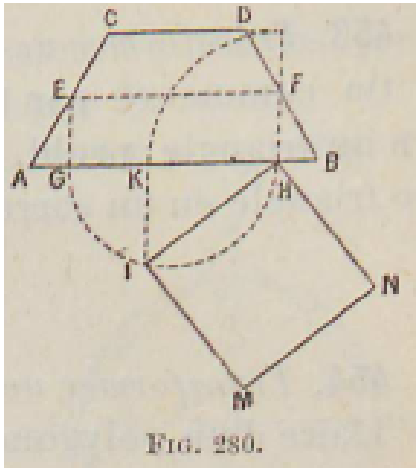


Fig. 280.

(c) quadrature du trapèze avec traits de construction ayant valeur de méthode (en pointillés)

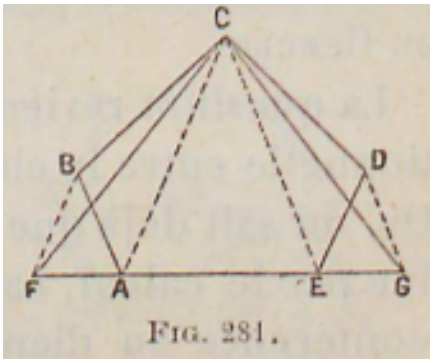


Fig. 281.

(d) construction d'un triangle équivalent à un polygone donné, avec traits de construction ayant valeur de méthode (en pointillés)

Figure III.51 – Figures associées aux quadratures et constructions de figures équivalentes chez Leyssenne (1890, p. 256-257)

successives sont illustrées par des figures dont les étapes de tracés sont explicitées par des lignes en pointillés. Ces schémas sont conçus pour pouvoir réaliser les constructions en se passant d'un discours explicatif (voir figure III.51 p. 424).

Par exemple, il accompagne la figure III.51b (p. 424) de la simple indication : « AB étant la base du parallélogramme $ABCD$, et BE ou BF la hauteur, BG sera le côté du carré équivalent » (Leyssenne, 1890, p. 256). La figure qui concerne la construction analogue pour le triangle ne bénéficie quant à elle d'aucun commentaire, pas même descriptif. Il clôt la question des quadratures des polygones juste après en affirmant que pour « transformer un polygone quelconque en un carré », « on commence par transformer le

Licence CC BY-NC-ND 3.0

polygone donné en un triangle, puis on transforme ce triangle en un carré » (Leyssenne, 1890, p. 258). Les méthodes particulières relatives aux figures « produits de deux lignes » mentionnées à part par certains de ses collègues auteurs sont dans son ouvrage présentées sous forme de figures spécifiques, ayant valeur de modèles.

Enfin, dans la dernière décennie du siècle, Girod synthétise les diverses étapes permettant de réaliser les quadratures des polygones en une seule construction (voir figure III.52 p. 425), après avoir expliqué comment « construire un carré équivalent à un rectangle » (Girod, 1893, p. 192). Il explique, comme dans les autres cas précédemment étudiés, les étapes de construction permettant d'obtenir un triangle GDF d'aire égale au pentagone $ABCDE$, ce que « la figure montre », puis conclut en affirmant que « si l'on construit maintenant un carré $FHLK$ équivalent au triangle GDF, il sera équivalent au polygone donné » (Girod, 1893, p. 193). Cette dernière étape n'est pas commentée, et seuls les traits de construction de la figure laissent entendre la méthode, d'autant que Girod n'a pas présenté en amont la quadrature du triangle, mais seulement celle du rectangle (voir la figure III.77 dans la sous-section III.2.2.1, p. 470). Pour reprendre sa formulation, « la figure montre » qu'il réalise cette quadrature à partir de la ligne GF, base du triangle, et de NP, sa demi-hauteur, ce qui indique qu'il réalise implicitement la quadrature d'un rectangle équivalent au triangle, ayant la même base et une hauteur moitié de la sienne.

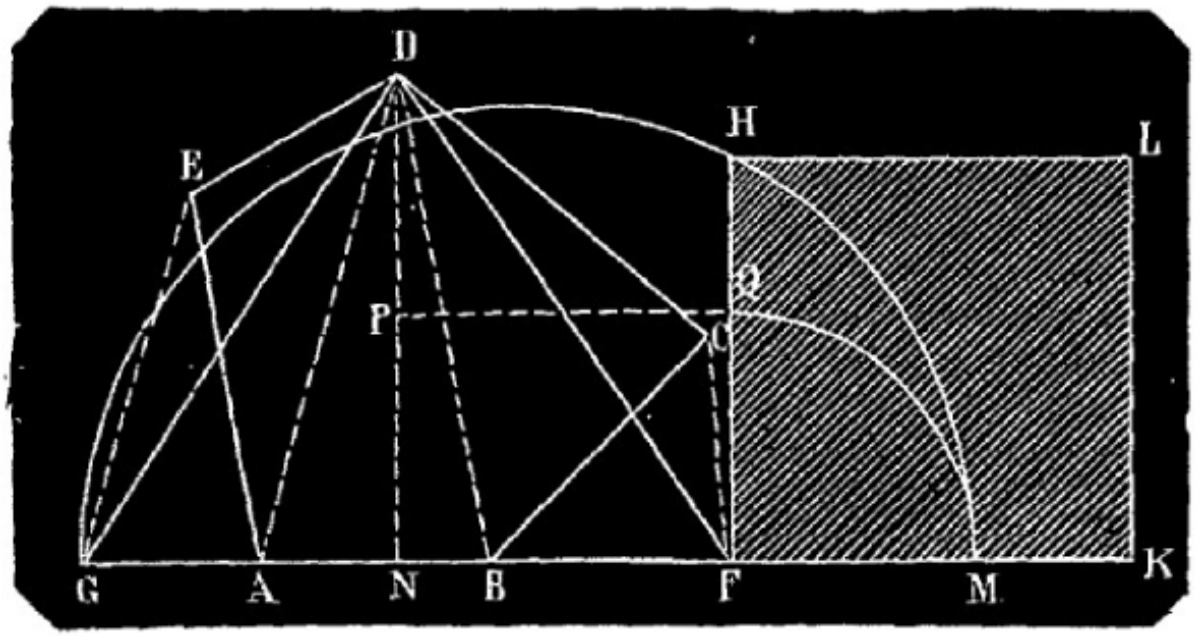


FIGURE III.52 – Figure associée à la quadrature d'un polygone quelconque chez Girod (1893, p. 192), les étapes de construction étant matérialisées par des lignes en pointillés

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Le passage par la construction d'un triangle équivalent à un polygone donné pour résoudre la question de la quadrature des polygones quelconques, adopté par une grande majorité des auteurs de notre corpus, se justifie pour plusieurs raisons. Elle permet d'éviter de recourir à la méthode euclidienne de la rectangulation des polygones (proposition I. 45), dont la preuve pourrait poser des difficultés à des géomètres en formation (Euclide, 1990, p. 277-279). Cette méthode n'est d'ailleurs jamais présentée en l'état dans les manuels étudiés [101]. En cela, cette construction, peut-être issue du travail de van Ceulen, constitue une bonne alternative théorique au résultat d'Euclide, plutôt difficile d'accès. En outre, cette construction présente des atouts pratiques que ne manquent pas de relever une partie des auteurs, notamment dans le cadre de l'arpentage. Comme nous l'avons mentionné précédemment, cette technique est présentée comme particulièrement pertinente quand on opère sur le papier. Son efficacité peut d'ailleurs être augmentée en recourant à des instruments autres que la règle et le compas, comme l'équerre, comme le souligne Gimelli. Pourtant, cette construction ne fait pas entièrement consensus, y compris dans le groupe d'auteurs s'occupant plus précisément d'arpentage et de géométrie pratique. Mais en analysant plus précisément les contenus des ouvrages dans lesquels elle ne figure pas, nous observons que ce sont des titres qui ne traitent pas des problèmes de construction de figures équivalentes de manière générale.

Quoiqu'il en soit, pour résoudre la quadrature des polygones quelconques, il n'est pas possible d'échapper, *in fine*, à la question de la quadrature de la figure réduite obtenue, qu'il s'agisse d'un rectangle ou d'un triangle. 15 auteurs, nous l'avons vu (voir tableau III.6 p. 423), présentent la quadrature du rectangle, et 22 la quadrature du triangle (11 présentent les deux). Parmi les 27 qui exposent la construction d'un triangle équivalent à un polygone, peu font donc l'économie de cette ultime étape, et ces derniers ne proposent finalement pas de méthode de quadrature des polygones, mais déduisent de ce qu'ils ont établi auparavant une méthode simplifiée de calcul de l'aire d'un polygone, sortant alors des problèmes de constructions. Pour les autres, la question de la quadrature du triangle passe systématiquement par la détermination, par le calcul et/ou par construction, d'une moyenne proportionnelle (comme nous l'avons vu par exemple chez Girod sur la figure III.52 p. 425). En-dehors de la voie euclidienne pour la quadrature des figures rectilignes, il ne semble donc pas y avoir, pour les auteurs des manuels de géométrie du XIX^{e} siècle, d'autre alternative que le recours aux considérations de proportions, même si la construction intermédiaire d'un

101. Le seul auteur qui mentionne une méthode pour transformer un polygone en un rectangle équivalent est Desnanot, qui passe par l'intermédiaire du triangle suivant la construction étudiée dans cette section, lui même transformé en rectangle par la suite (Desnanot, 1835, p. 151).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

triangle équivalent lève momentanément une partie des difficultés, en plus d'avoir un usage manifeste dans l'arpentage.

Même si les programmes ne sont pas très explicites quant aux problèmes de transformation de figures en figures équivalentes (voir note 94 p. 417), les auteurs s'en emparent en très grande partie et les traitent en y intégrant divers éléments de leurs connaissances, qu'elles concernent les constructions pures ou l'usage des proportions. Plus de la moitié finissent par proposer un édifice dans lequel la question de la quadrature des polygones quelconques est totalement élucidée, avec des méthodes à l'interface du géométrique et du numérique, point sur lequel nous reviendrons dans un chapitre qui y sera consacré (III.2 p. 446). C'est à la suite de l'exposition de cette théorie que beaucoup d'entre eux abordent la question de la quadrature du cercle, par essence différente, puisque :

> D'après ce qui précède, la construction d'un carré équivalent à une figure plane terminée par des lignes droites, ou la quadrature d'une telle figure, est toujours possible. La quadrature d'un cercle donné ne peut se faire qu'approximativement, en construisant une moyenne proportionnelle entre la longueur approchée de sa circonférence et la moitié de son rayon. (Amiot, 1859, p. 159)

C'est à cette nouvelle question que nous allons nous intéresser désormais, afin d'analyser comment elle est abordée par les différents auteurs de nos manuels.

III.1.3.2 La quadrature du cercle

Pendant la majeure partie du XIX^e^ siècle, la question de la quadrature du cercle — à la règle et au compas — n'est pas scientifiquement fixée, puisque la preuve formelle de son impossibilité n'est produite par von Lindemann qu'en 1882. Pourtant, ce problème a tenu en haleine le monde savant de l'époque, et les tentatives de résolution ont été si nombreuses, que l'Académie des Sciences avait même décidé, en 1775, de ne plus perdre son temps à examiner toutes celles soumises par des mathématiciens amateurs (Jacob, 2005). La vivacité de ce domaine de recherche demeure pourtant grande au cours du siècle suivant, puisque nous comptons 73 mémoires ou ouvrages dont le titre contient explicitement l'expression « quadrature du cercle » dans la base de données constituée à partir de la *BF*, répartis de 1811 à 1895. Malgré tout, de nombreux auteurs de manuels de géométrie s'accordent pour dire qu'il s'agit là d'une « question oiseuse » (Legendre, 1823, p. 123 ; Sonnet, 1839, p. 260 ; Puille, 1855, p. 182), d'une recherche « puérile » (Bergery, 1828, p. 403) ou encore « chimérique » (Harant, 1863, p. 140), qui ne saurait « occuper » un géomètre (Legendre, 1823, p. 123 ; Terquem, 1829, p. 220 ; Puille, 1855, p. 182), suivant des expressions alors couramment utilisées. En 1890,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

alors que l'impossibilité de la construction s'est vue officiellement établie, Leyssenne ne semble pas au fait de cette découverte puisqu'il indique que « jusqu'à ce jour, il n'a été trouvé aucune solution graphique de ce problème, bien qu'il n'ait pas été démontré non plus que le problème soit impossible » (Leyssenne, 1890, p. 258-259).

Ce dernier propose en revanche deux constructions approchées d'un carré d'aire équivalente à celle d'un cercle, empruntées à deux de ses homologues, Bourget et Sonnet (Leyssenne, 1890, p. 259). Sur l'ensemble du corpus considéré, sept auteurs en plus des trois précédemment cités exposent une telle méthode de construction, en étant presque tous conscients qu'il s'agit seulement d'une approximation. En 1858, Cirodde fait le point sur le problème mathématique inhérent à cette construction en ces termes :

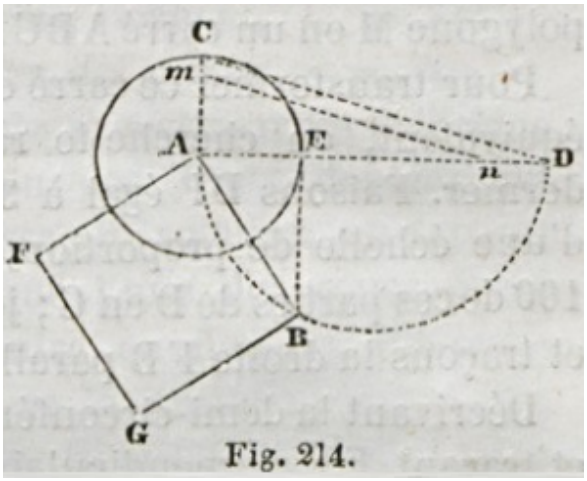
> Pour trouver la quadrature du cercle, c'est-à-dire pour construire un carré équivalent à un cercle donné, il ne s'agit que de chercher une moyenne proportionnelle entre la moitié de la circonférence de ce cercle et son rayon [...]. Mais comme nous n'avons pas de moyen géométrique pour rectifier la circonférence, il s'ensuit que nous n'en avons pas non plus pour trouver la quadrature du cercle. (Cirodde, 1858, p. 186)

L'auteur exprime bien que le problème est facilement résoluble numériquement, mais qu'il est néanmoins impossible en tant que construction, car il dépend d'un autre problème, lui aussi irrésoluble géométriquement, celui de la rectification du cercle. Il précise ensuite que l'impossibilité supposée (puisque non encore démontrée) de cette résolution ne vaut que si l'on se restreint à n'employer que la règle et le compas, puis propose une méthode « si l'on veut trouver approximativement le côté d'un carré équivalent [à un] cercle » (Cirodde, 1858, p. 186).

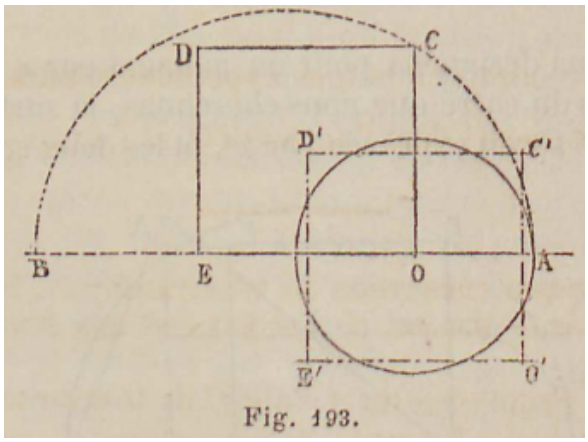
Une autre contrainte mise en évidence par certains des auteurs concernés est celle de l'utilisation de la mesure, et donc des nombres ou des proportions. Nous présentons dans un premier temps les propositions des auteurs qui recourent aux nombres et aux proportions, et dans un second temps les méthodes de ceux qui font le choix de s'en passer.
En effet, si Sonnet estime qu'« à défaut d'une solution graphique rigoureuse de la question, [il] a cherché des solutions approchées qui permissent, en cas de besoin, d'éviter de recourir aux mesures », il n'est pas suivi dans cette démarche par tous ses collègues auteurs. Certains d'entre eux exposent des procédés de quadrature approchée très liés aux nombres, aux mesures, et nécessitant des instruments adaptés [102]. Ainsi, Puille décrit une méthode utilisant une échelle de proportion pour prendre

102. Techniquement, le fait de partager un segment en n parties égales est toujours possible à la règle et au compas, en utilisant la propriété de Thalès : il suffit de tracer une droite supplémentaire sur

Licence CC BY-NC-ND 3.0



(a) chez Puille (1855, p. 181))



(b) chez Salicis (1869, p. 566)

FIGURE III.53 – Figures accompagnant la méthode de quadrature du cercle approchée

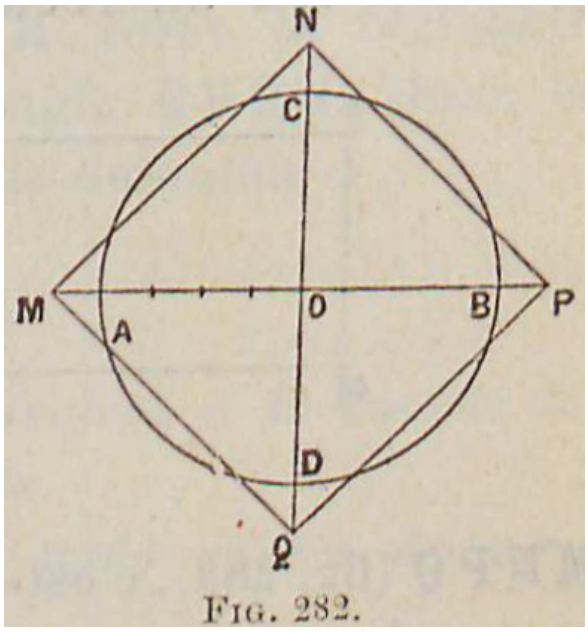
les $\frac{314}{100}$ d'un segment (Puille, 1855, p. 181-182), Dupuis en donne une autre faisant intervenir des lignes de longueurs respectivement égales à $1,7$ et $0,5$ fois le rayon (Dupuis, 1857, p. 138-139), pendant que Dalsème propose de construire un carré sur les $\frac{8}{9}$ du diamètre du cercle (Dalsème, 1880, p. 27), et que Salicis construit une moyenne proportionnelle entre le rayon r du cercle et une autre ligne de longueur $r \times 3,1415$ (Salicis, 1869, p. 566). Certains, comme Puille et Salicis, accompagnent leur description d'une figure (voir figure III.53 p. 429).

Une construction de Bourget, exposée dans le manuel de Leyssenne de 1890, porte également sur des nombres, mais demeure aisément réalisable sans instrument autre que la règle et le compas. Il s'agit de partager les rayons du cercle en quatre parties identiques, puis de prolonger chaque rayon d'un quart de sa longueur, pour obtenir les sommets d'un carré presque équivalent (voir figure III.54a p. 430). Même si elle fait intervenir les quarts des rayons, cette méthode a l'avantage de pouvoir être réalisée simplement, sans outil de mesure ni de proportion, puisqu'il est possible de partager un segment en deux en construisant une médiatrice, puis de renouveler l'opération pour le partager en quatre. Sonnet, malgré sa volonté affichée d'« éviter de recourir à la mesure » vue précédemment, présente néanmoins une construction dans laquelle un segment OI est pris « égal à la sixième partie du rayon OB » (Sonnet, 1839, p. 262). De ce centre I, un cercle de rayon double du diamètre du cercle coupe sa tangente

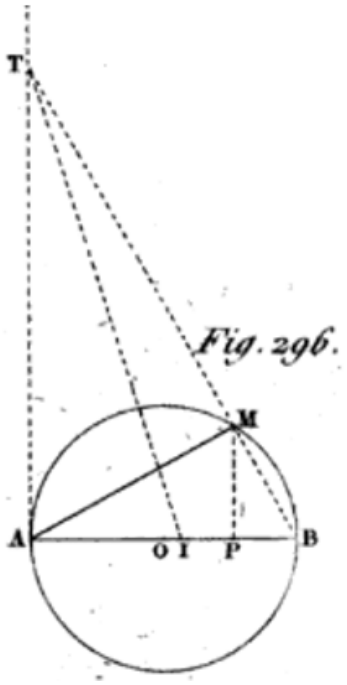
laquelle on reporte n segments égaux, qui permettra, par un jeu de parallèles, de découper le segment voulu. Néanmoins, cette opération devient fastidieuse si le nombre de parties considérées devient grand. C'est pourquoi, dans de tels cas, nous estimons que ce découpage nécessite l'utilisation d'instruments spécifiques, comme une règle graduée ou un compas de proportion.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

au point T, qui, relié à B, coupe le cercle en M, produisant le côté AM d'un carré presque équivalent au cercle (voir figure III.54b p. 430).



(a) par la méthode de Bourget, exposée par Leyssenne (1890, p. 259)



(b) par la méthode de Sonnet (1839, pl. 23)

FIGURE III.54 – Figures accompagnant la quadrature approchée du cercle

Dans cette démarche, Sonnet insiste sur l'aspect instrumental, en décrivant les gestes techniques à réaliser, en écrivant par exemple : « du point I comme centre, avec une ouverture de compas égale au double du diamètre AB, décrivons un arc de cercle qui coupera la tangente en un point T » (Sonnet, 1839, p. 262). Cette étape est bien explicitée d'un point de vue pratique, contrairement à celle consistant à prendre $\frac{1}{6}$ du rayon, pour laquelle il ne donne pas d'indication précise. Comme tous les auteurs qui, comme lui, proposent une quadrature approchée, il fait suivre des calculs montrant la précision de la figure obtenue, et la proximité de l'aire du carré construit avec celle du cercle initial (mais l'analyse de ces calculs n'est pas l'objet de cette section). Il remarque ensuite que le segment $[AP]$ mis en évidence au cours de la construction est quasiment égal au quart de la circonférence, faisant ainsi le lien avec la question de la rectification, qui se trouve ici également résolue de façon approchée.

D'autres auteurs présentent en revanche des constructions ne recourant pas aux nombres. Mauduit, par exemple, évoque la possibilité de réaliser une telle quadrature approchée en « prenant une surface moyenne géométrique entre celles d'un polygone inscrit, et d'un autre polygone circonscrit au même cercle, et d'un même nombre de côtés » (Mauduit, 1790, p. 211). Même s'il s'agit plus d'une figure en puissance qu'en

Licence CC BY-NC-ND 3.0

acte, la théorie nous indique que ces constructions (polygones respectivement inscrit et circonscrit au cercle, moyenne proportionnelle) sont toutes réalisables par intersection de droites et de cercles. Cirodde, enfin, réalise comme construction préalable une rectification approchée de la circonférence, correspondant sur la figure III.55 (p. 431) au segment $[GI]$, de longueur environ égale à la moitié de la circonférence. Ce segment est obtenu à partir de constructions élémentaires : construire une corde de longueur donnée ($[AB]$ de longueur le rayon du cercle), puis sa perpendiculaire et le diamètre associé ($[CI)$, puis une tangente au cercle au point C, son intersection F avec le prolongement du rayon $[OA]$, puis le point G obtenue par report de trois fois le rayon sur cette même tangente. Quelques pages plus tard, la même construction sert de base à la résolution approchée de la quadrature du cercle, de la façon suivante :

> On décrira sur GI comme diamètre une demi-circonférence ; on rabattra le rayon OI en IO' ; on élèvera la perpendiculaire $O'M$ sur IG, et en joignant IM, on aura à fort peu près le côté du carré demandé. (Cirodde, 1858, p. 186)

Le vocabulaire employé, et notamment les verbes d'action « décrire », « rabattre », « élever », « joindre », appartiennent au lexique de la géométrie élémentaire classique, et ne font pas référence à des mesures ou des nombres. Cette méthode peut en cela être considérée comme purement géométrique, en plus d'être, selon son auteur, d'une « exactitude presque indéfinie » (Cirodde, 1858, p. 186).

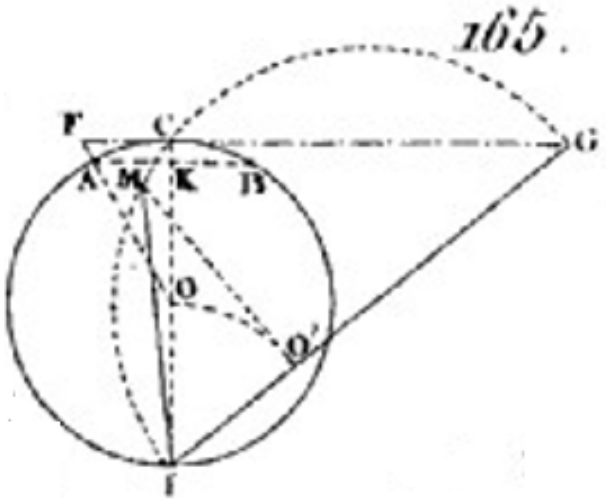


FIGURE III.55 – Quadrature approchée du cercle par la méthode de Cirodde (1858, pl. vii)

Pour finir, une autre méthode strictement géométrique est produite par les Frères des écoles chrétiennes, dans leur « Abrégé de géométrie ». Cependant, dans cet ouvrage,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la présentation catéchistique (c'est-à-dire sous formes de questions-réponses), ne permet pas clairement de comprendre qu'il s'agit d'une méthode approchée. En effet, il y est écrit :

> *Que faut-il faire pour réduire le cercle à un carré qui lui soit égal en superficie ?*
> Couper le cercle donné par un diamètre AB ; tirer le rayon DC perpendiculaire à AB ; de l'extrémité A décrire l'arc EF ; et tirer la corde FG qui est le côté du carré G égale en superficie au cercle. (L.C. et F.P.B., 1840, p. 105)

Non seulement le terme « égal » employé tend à penser que le résultat est énoncé avec le statut d'une quadrature exacte, ce qui est bien entendu faux. Mais de plus, même si elle était considérée comme une approximation, la figure fournie est très loin d'être satisfaisante (voir figure III.56 p. 432). Les auteurs de cet ouvrage ne réalisent pas de calcul d'incertitude pour justifier leur construction, comme le font leurs homologues, mais en le reconstituant à partir de la figure, on obtient une approximation de π aux alentours de $3,12$, ce qui est vraiment loin des très faibles marges d'erreur des autres manuels. Les frères ne s'arrêtent pas là, puisqu'ils proposent une construction réciproque plutôt originale, d'un cercle d'aire égale à celle d'un carré donné (voir figure III.56 page III.56). Cependant là encore, ils n'en donnent pas de justification et laissent croire à leurs lecteurs que ce résultat serait exact.

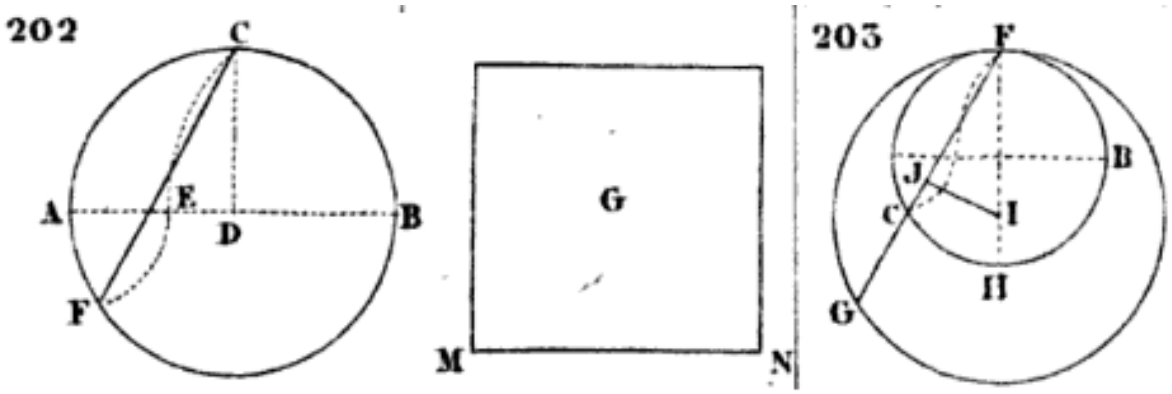


FIGURE III.56 – Quadrature approchée du cercle (202) et construction d'un cercle équivalent à un carré (203) chez les Frères des écoles chrétiennes (L.C. et F.P.B., 1840, pl. 16)

Qu'elles soient présentées de façon purement géométrique ou à l'aide d'instruments supplémentaires, et avec un statut assumément approché ou non, la construction d'un carré d'aire presque égale à celle d'un cercle intéresse un nombre non négligeable d'auteurs des manuels de géométrie du XIX^e siècle. Cet intérêt peut s'expliquer sous un angle théorique, comme matérialisation pratique du problème de la quadrature du cercle. En effet, comme nous l'avons déjà évoqué, cette question a constitué un tel phénomène de société que l'Académie des Sciences a refusé de traiter les mémoires

Licence CC BY-NC-ND 3.0

le traitant à partir de 1775 (voir p. 427). Au XIX^e siècle, le sujet demeure néanmoins populaire puisque nous pouvons dénombrer, dans notre corpus d'ouvrages de géométrie extrait de la *BF*, 70 propositions de résolution de ce problème de la part de nombreux « quadrateurs » entre 1811 et 1895. À l'occasion de l'exposé de la méthode permettant de construire un carré d'aire approximativement égale à celle d'un cercle donné, la majeure partie des auteurs font le point sur les connaissances acquises à ce sujet, et complètent cet état des savoirs par un savoir-faire plus technique. Cependant, l'importance accordée à ces constructions approchées peut également être considérée d'un point de vue plus pratique. En effet, comme le précise Sonnet au sujet de cette quadrature, « en supposant [...] d'ailleurs sa solution rigoureuse possible, elle ne conduirait pas dans la pratique, vu les erreurs graphiques inévitables, à une approximation plus grande que celle à laquelle on peut parvenir » (Sonnet, 1839, p. 261). Autrement dit, si la résolution théorique exacte reste impossible, la construction pratique demeure suffisamment précise, relativement aux erreurs inhérentes à tout tracé graphique. Sous cette perspective, la quadrature du cercle peut donc être considérée comme « graphiquement » réalisée. Dans les manuels consultés, aucun auteur n'évoque un domaine d'application concret de ce résultat, ce qui en justifierait l'importance dans la pratique. Bergery mentionne comme application du calcul du rayon d'un cercle de superficie donnée un édifice circulaire devant occuper une surface déterminée, ce qui n'est pas à proprement parler une mise en pratique de la construction étudiée (Bergery, 1828, p. 404). Il est néanmoins possible d'y voir une ouverture vers des adaptations d'une telle construction en architecture ou dans les arts en général.

Finalement, la question de la quadrature du cercle, comme d'autres résultats de la géométrie des aires tels que la quadrature des polygones considérée ci-avant (voir la sous-section III.1.3.1 p. 417), est une situation dans laquelle se révèlent des interfaces entre le géométrique et le numérique. Ceci apparaît dans le choix qu'opèrent les auteurs entre des solutions « purement géométriques », réalisables à l'aide de la règle et du compas seulement, et d'autres liées aux nombres et proportions, nécessitant l'usage d'instruments supplémentaires. Les deux options possibles, entre des solutions strictement géométriques et des alternatives plus numériques, se retrouvent dans l'exposition de la quadrature des polygones. Dans ce chapitre qui traite de la place et du rôle des constructions dans la géométrie des aires, les aspects numériques ne sont pas développés. À ce stade, notre analyse met toutefois en évidence la position d'interface de ces deux problèmes de la géométrie des aires — quadrature des polygones et quadrature approchée du cercle — entre les domaines numériques et géométriques, développée ultérieurement dans un chapitre dédié (III.2 p. 446)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.1.3.3 Du terrain au papier, et vice-versa

Les constructions apparaissent également comme des objectifs pratiques à acquérir, concernant les aires des domaines délimités par des courbes quelconques. En effet, ces connaissances apparaissent dans beaucoup de programmes sous l'angle de la mesure des terrains, et donc dans le cadre de l'initiation à l'arpentage, officiellement prescrite dans l'enseignement primaire depuis la loi Guizot de 1833 comme application de la géométrie, ainsi que présent dans les programmes du secondaire depuis le début du siècle (voir la sous-section II.3.3.2 p. 302). Il s'agit non seulement de « fournir une application intéressante des notions de géométrie » acquises à l'école, mais aussi, d'offrir aux futurs instituteurs « un moyen de se rendre utiles plus tard dans les communes, et de se créer ainsi une ressource à ajouter [à leur] modeste traitement » (Sonnet, 1887, p. 120). En cela, il ne s'agit donc pas d'« une étude purement théorique ; c'est surtout au point de vue pratique que l'arpentage doit être enseigné » (Sonnet, 1887, p. 120), en partie afin de contribuer à pourvoir aux besoins de la société dans ce domaine. Dans les manuels d'arpentage, les « tensions entre théorie et pratique » se manifestent particulièrement, et il est souvent délicat de passer « des bancs sur le terrain » (Desjonquères et T. Morel, 2020) [103].

Les auteurs de notre corpus abordent eux aussi cette branche de la géométrie en alliant les savoirs aux savoir-faire, suivant un double objectif, utilitaire et éducatif, s'engageant dans un « processus dialectique permanent et générateur de sens entre problèmes pratiques et théories abstraites » (Tournès, 2001, p. 128). Sur les 40 ouvrages du corpus considéré, 25 abordent les méthodes géométriques pour déterminer les aires délimitées par des courbes quelconques, et parmi eux, 16 en exposent également les applications à l'arpentage, soit en les traitant à part, soit en décrivant directement la méthode dans le contexte de la mesure des terrains. Si les connaissances qu'ils présentent sont assez homogènes, leurs exposés diffèrent grandement par leur forme, exprimant une sensibilité plutôt du côté du terrain ou du papier, privilégiant une approche plus technique ou davantage géométrique.

Pour mettre ces différences formelles en évidence, nous pouvons par exemple observer des figures très proches présentes dans des manuels différents, qui se trouvent accompagnées de discours assez divergents. C'est le cas notamment dans les manuels d'Eysseric et Pascal, et de Puille, contemporains car édités à cinq années d'intervalle

103. Dans leur article, Desjoncquères et Morel illustrent les tensions entre théorie et application dans le domaine de l'arpentage. A travers l'étude des ouvrages de trois auteurs — Lacroix, Hogard et Vasserot — ils montrent que certains d'entre eux privilégient une approche plus théorique, tandis que d'autres adoptent un point de vue plus pragmatique. Ils mettent en avant également l'importance du lien que font les auteurs des ouvrages avec l'usage des instruments sur le terrain (Desjonquères et T. Morel, 2020).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

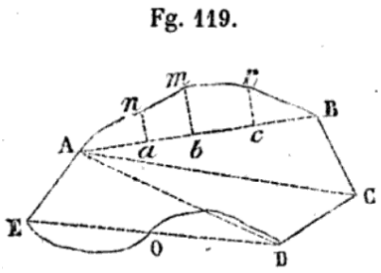
(Eysseric et Pascal, 1850 ; Puille, 1855). Eysseric et Pascal, dont l'ouvrage est principalement destiné aux élèves des écoles industrielles et primaires supérieures, énoncent le problème suivant : « mesurer un terrain en partie curviligne », dans un chapitre dédié à la « mesure des surfaces planes » et un paragraphe intitulé « problèmes sur l'arpentage » (Eysseric et Pascal, 1850, p. 115). Ils situent donc bien ce savoir dans un contexte de géométrie pratique, appliquée à la mesure des terrains, conformément aux programmes en vigueur. Puille, quant à lui, propose de « déterminer la surface d'un terrain borné d'un côté par un chemin ou une rivière », dans les « applications relatives à l'arpentage » d'un chapitre consacré à la « mesure des polygones » (Puille, 1855, p. 136) [104]. La première différence notable est dans l'emploi du vocabulaire. Là où Eysseric et Pascal emploient le terme théorique « curviligne », même s'il désigne ici un terrain, Puille convoque dans sa formulation un lexique plus concret, avec le mot « borné », qui fait référence au vocabulaire de l'arpentage, et introduit des éléments des paysages naturels, comme le « chemin » ou la « rivière ».

En revanche, les figures qu'ils présentent pour illustrer leurs problèmes sont géométriquement très semblables, et font apparaître beaucoup d'éléments communs. Tout d'abord, nous pouvons noter la présence d'une droite reliant les extrémités de la partie curviligne, souvent appelée « directrice » par les auteurs d'ouvrages, et sur laquelle des perpendiculaires sont menées à partir de différents points de la courbe. Le reste de la surface du terrain est décomposé en polygones élémentaires, comme les triangles et/ou les trapèzes. Enfin, une ligne menée d'un point E à un point D sur la figure 119 coupe la ligne courbe en un point O, de la même façon que les lignes AB, BC, etc. de la figure 176 semblent couper les lignes courbes qu'elles rencontrent (voir figure III.57 p.436). Cette technique consiste à remplacer une ligne courbe par une ligne droite « qui établisse une compensation entre la portion détachée [...] et la portion [...] ajoutée » au terrain, lorsque « les courbures sont en sens inverse » (Eysseric et Pascal, 1850, p. 116). Elle est très souvent évoquée par les auteurs, et presque toujours qualifiée de méthode « de compensation ».
Ces deux figures, ainsi que les textes qui les accompagnent, sont représentatifs des contenus sur le sujet des aires des terrains délimités par des lignes courbes, particulièrement homogènes chez les auteurs qui le traitent. Déjà en 1790, Mauduit indique, dans une scholie, le procédé à suivre dans un tel cas :

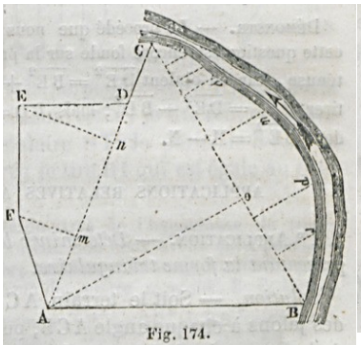
> On commencerait par tracer dans la figure un polygone irrégulier et rectiligne dont on trouverait la surface, en le décomposant en triangles. Ensuite, on mesurerait les petits segments extérieurs au polygone [...] ; sauf à ne tenir aucun compte des parties ou segments qui pourraient se compenser,

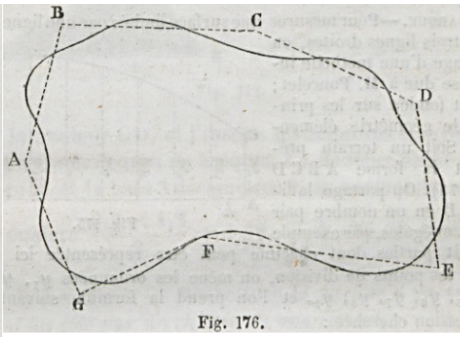
104. Voir aussi la sous-section III.1.2.3 p. 405.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



(a) chez Eysseric et Pascal (1850, p. 115)





(b) chez Puille (1855, p. 136)

FIGURE III.57 – Figure pour arpenter un terrain délimité en partie par une courbe

> lorsqu'ils seraient égaux, et que l'un se trouverait au-dedans du polygone, et l'autre au-dehors. Cette proposition renferme presque toute la pratique de l'arpentage. (Mauduit, 1790, p. 130)

Les ingrédients incontournables de cette pratique sont donc, manifestement, la décomposition en polygones, suivant une directrice ou non, complétée le cas échéant par une méthode de compensation. En revanche, la présentation de ces résultats et le vocabulaire employé ne sont pas aussi homogènes que les contenus mathématiques sous-jacents. La mise en parallèle de deux extraits des solutions proposées à ce même problème dans les manuels d'Eysseric et Pascal et de Puille peut nous en convaincre :

Eysseric et Pascal	Puille
Soit le champ $ABCDE$. Pour la partie curviligne AmB, on suppose menée la droite AB, qui joint les extrémités de la courbe, l'on divisera AmB en parties An, nm, etc., sensiblement droites, et sur la base AB, on élèvera des perpendiculaires an, bm, etc., qui détermineront des petits triangles et trapèzes [...] dont on évaluera la surface.	Je plante des jalons aux différents angles du terrain, ainsi qu'aux endroits de la courbe où les sinuosités sont plus sensibles. [...] Soit le terrain représenté par la figure 176, on peut arpenter cette superficie en la décomposant de plusieurs manières ; [...] la seconde décomposition, que nous indiquons ici pour la figure, est employée quand on veut seulement calculer avec rapidité la contenance de la pièce de terre.

TABLE III.7 – Comparaison des extraits des textes d'Eysseric et Pascal et de Puille relatifs aux figures III.57 (p. 436)

Dans le tableau III.7 (p. 436), les termes soulignés sont ceux appartenant au champ lexical de la géométrie, et ceux en gras au domaine de l'arpentage. Les verbes d'action relèvent du domaine du tracé géométrique ou du calcul pour l'un (« mener », « joindre », « élever des perpendiculaires », « diviser »), et des opérations sur le terrain pour l'autre

Licence CC BY-NC-ND 3.0

(« planter », « arpenter »), de même que les noms et adjectifs, avec des « droites », « triangles », « trapèzes », parties « curvilignes » d'une part, et des « terrains », « jalons », « pièces de terre » et « sinuosités » d'autres part. Quant aux aires dont il est question, elles sont nommées « surfaces » dans le texte d'Eysseric et Pascal, alors que Puille les désigne comme des « superficies », ou encore « contenances » [105].

Cette analyse tend à montrer que, malgré un objet d'étude commun, celui des aires curvilignes appliquées à l'arpentage, les auteurs présentent leurs textes suivant le domaine dans lequel ils se sentent les plus compétents et légitimes : le papier ou le terrain. En effet, Eysseric est un professeur de mathématiques au collège de Carpentras, et rédige son ouvrage de géométrie avec Pascal, pharmacien de sa ville. Il publie également des manuels de géographie. Puille (David, dit « d'Amiens ») se présente en couverture de son ouvrage comme « professeur de mathématiques et de sciences physiques à Paris » (il enseigne notamment au lycée Charlemagne), ainsi que comme « auteur de plusieurs ouvrages classiques ». Il a notamment revu et corrigé l'ouvrage de dessin linéaire de Thénot en 1851 (Thénot, 1851), puis publié des manuels en algèbre, géométrie, arithmétique, physique, chimie et même zoologie, mais aussi en agriculture, arpentage et géodésie (division des terrains) (*BNF - Catalogue général* 2023). Dans l'introduction de l'un de ses ouvrages traitant de ce dernier point, il indique : « C'est à l'aide de ce travail que nous avons opéré pendant quinze années, et c'est par lui aussi que nous avons formé un certain nombre de Géomètres-arpenteurs qui nous sollicitent, aujourd'hui » (Puille, 1857, p. vi). Il se considère et se présente donc comme un praticien de l'arpentage et de la géodésie, en plus d'un formateur dans ces domaines. Pour preuve de ce statut, nous avons pu consulter une carte topographique, cartographiée par Puille en 1851 (Puille, 1851).

Au-delà des différences de forme observées pour présenter les aires curvilignes appliquées aux terrains, l'étude réalisée met en évidence les interactions possibles entre une approche géométrique et une plus opératoire, tournée vers la pratique de l'arpentage. Les mondes du « papier » et du « terrain » ne sont pas imperméables, et entrent en relation à travers les écrits des auteurs des ouvrages, induisant des questionnements nouveaux sur l'action de « construire ». En effet, est-ce la même chose de « construire » géométriquement ou d'« opérer » sur le terrain ? L'action engagée sur le papier est-elle de même nature que celle effectuée dans les champs, ces deux pratiques s'influencent-elles mutuellement, et si oui, comment ? Nous sommes en droit de nous demander

105. Dans un *Cours d'arpentage* publié ultérieurement, Puille commente un peu différemment sa figure 174 (voir figure III.57 p. 436), en employant encore plus de vocabulaire technique. Il précise que l'on peut prendre plus de points si nécessaire, et que c'est « à l'opérateur [d'en] juger », puis indique que les pieds des perpendiculaires peuvent être déterminés avec l'« équerre d'arpenteur » (Puille, 1876, p. 194-195).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

si ce sont les géomètres qui offrent leurs solutions théoriques, notamment à travers des constructions, aux problèmes des arpenteurs, ou si c'est la géométrie qui extrait ses connaissances des usages pratiques des professionnels.

Dans son ouvrage, relativement à sa figure 174 (voir figure III.57b p. 436), Puille précise explicitement ce mouvement du terrain vers le papier, en écrivant, juste après l'étape où il indique comment planter les jalons : « Je trace le croquis de la figure, puis je décompose le polygone [...] » (Puille, 1855, p. 136). Après cela, la démarche menant à la mesure du terrain s'effectue via les constructions géométriques observées précédemment (décomposition en polygones, tracés de perpendiculaires à une directrice issues de points de la courbe, etc.), complétées des calculs *ad hoc*. L'opération commencée sur le terrain se prolonge donc ainsi directement sur le papier, après avoir levé le plan de la parcelle à arpenter. Dans ses *Leçons d'arpentage*, Gimelli suit une démarche similaire. Il préconise, « ayant parcouru [le] terrain », d'en tracer « le canevas », sur lequel les constructions définies précédemment se verront réalisées (Gimelli, 1841, p. 49). Il poursuit même en précisant que « les élèves pourront s'exercer sur la figure 61, en affectant à toutes les lignes qui y sont tracées, des valeurs quelconques » (Gimelli, 1841, p. 49-50) (voir la figure III.58 p. 438).

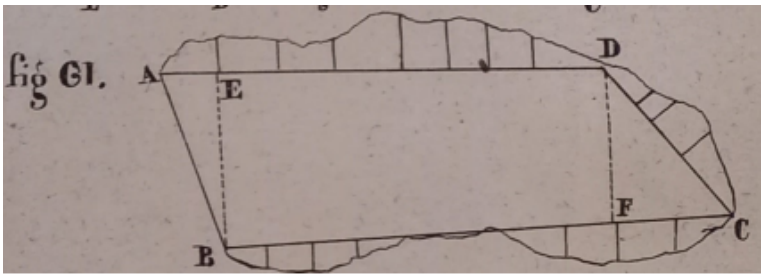


FIGURE III.58 – Figure pour arpenter un terrain délimité par une ligne courbe chez Gimelli (1841, pl. 2)

Lamotte présente en quelque sorte le cheminement inverse, en exposant sa résolution du problème de mesure d'« un terrain dont le contour est composé de lignes courbes » (Lamotte, 1839, p. 68). Partant d'un champ dont la forme $ABCDF$ est donnée par la figure III.59 (p. 439), il propose de tirer des lignes droites respectant le principe de compensation, puis de déterminer les surfaces des polygones ainsi construits. Néanmoins, il exprime clairement les limites de la méthode géométrique, puisque d'après lui, « la géométrie élémentaire ne fournit pas les moyens de mesurer [cette] surface ». Il estime même que le procédé qu'il donne pour le faire n'est « pas rigoureux ». *A contrario*, il justifie l'emploi de cette méthode par les usages sur le terrain, en précisant que si « la direction des lignes est abandonnée entièrement à l'intelligence de l'arpenteur »,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

alors on pourra s'approcher « autant qu'il est possible d'une mesure exacte », car « l'arpenteur habile ne s'écarte pas beaucoup de la véritable mesure ». Dans ce cas, c'est donc le savoir-faire pratique développé par le professionnel qui assure à la méthode géométrique sa légitimité et sa potentielle précision.

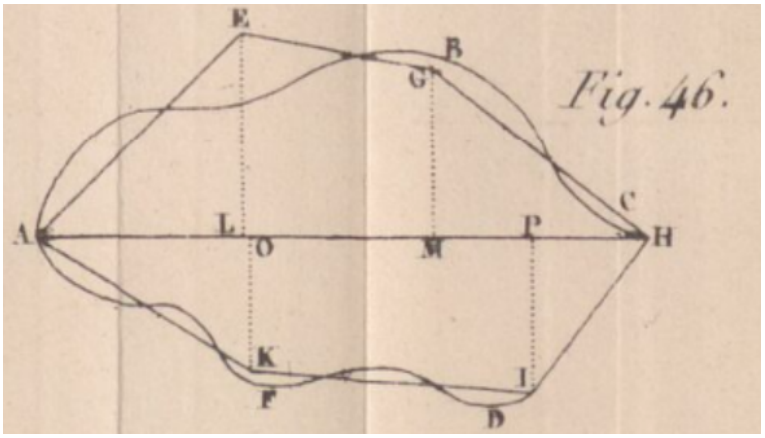


FIGURE III.59 – Figure pour arpenter un terrain délimité par une ligne courbe chez Lamotte (1839, pl. 3)

Quant à Sonnet, il donne également sa vision des liens entretenus par la géométrie et les pratiques de terrain en indiquant que « pour évaluer pratiquement l'aire d'une figure terminée par une ligne courbe quelconque, on emploie une méthode analogue à celle dont on se sert dans l'arpentage » (Sonnet, 1839, p. 229). Il décrit alors les techniques de décomposition en triangles et trapèzes suivant une directrice, que nous avons déjà évoquées, mais en considérant que ces dernières sont directement héritées du monde des arpenteurs et de leurs usages. Il poursuit en évoquant un « moyen plus expéditif », adapté lorsque « la courbe n'offre pas de changements de courbure trop brusques ou trop multipliés » consistant à partager la directrice en parties égales (afin de limiter le nombre d'opérations de calcul à effectuer) (Sonnet, 1839, p. 230). Enfin, dans la section suivante, il revient aux considérations liées aux pratiques de terrain en décrivant « une méthode plus prompte encore que celle [qu'il vient] d'indiquer, mais, à la vérité, moins approximative ». Il s'agit de la méthode par compensation, présentée par beaucoup d'autres auteurs, dont il estime qu'elle permet d'exprimer l'aire demandée « avec d'autant plus d'exactitude que le choix des côtés du polygone a été fait d'une manière plus heureuse, et que l'arpenteur est plus exercé » (Sonnet, 1839, p. 231). Sonnet dépeint donc les méthodes géométriques pour évaluer une aire curviligne comme importées de la pratique de l'arpentage, tout en y contribuant par la théorie en proposant une simplification des calculs. Il met pourtant davantage en avant les compétences des arpenteurs, exerçant leurs perceptions (les compensations se faisant « à vue d'oeil ») et acquérant une fiabilité dans leurs savoir-faire en accumulant de l'expérience.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les constructions géométriques se situent donc au cœur de l'activité des arpenteurs, comme un reflet sur le papier des opérations menées sur le terrain. Il se forme alors un échange entre les problèmes issus de la pratique et les solutions théoriques trouvées, ou réciproquement. Les difficultés concrètes qui se présentent aux arpenteurs lorsqu'ils opèrent sont largement décrites par les auteurs les plus sensibles à l'aspect technique du problème, et sont la source de nouvelles solutions géométriques possibles. Bergery dresse la liste de toutes les complications pouvant être rencontrées durant l'arpentage, comme lorsque « quelques-unes des sinuosités sont trop prononcées », quand « les arpenteurs ont à mesurer un terrain dans l'intérieur duquel ils ne peuvent opérer », ou encore pour estimer la superficie d'un terrain en pente (Bergery, 1828, p. 406). Ces situations donnent lieu à de nouvelles stratégies géométriques, matérialisées par de nouveaux tracés. Bergery explicite les méthodes possibles dans de tels cas en partant du terrain, et en détaillant les techniques employées par les arpenteurs, munis du matériel approprié. Par exemple, quand ils ne peuvent entrer dans le terrain à arpenter, « ils l'environnent soit d'un rectangle, soit d'un trapèze rectangulaire, soit d'un triangle rectangle, qu'ils figurent par quatre ou trois jalons et qu'ils forment au moyen de l'équerre d'arpenteur » (Bergery, 1828, p. 406). La solution proposée est certes géométrique, mais à réaliser directement sur le sol, et le texte de Bergery n'est pas accompagné d'une figure pour illustrer les constructions envisagées.

Parallèlement, l'ouvrage de Cirodde est manifestement plus ancré dans la géométrie théorique que pratique, et la partie sur les aires curvilignes n'est même pas abordée en lien avec la mesure des terres. Pourtant, les cas particuliers évoqués par Bergery, issus des difficultés qui peuvent se rencontrer sur le terrain, sont tous examinés dans ce manuel, et résolus à travers des constructions géométriques appropriées, comme une réponse de la théorie aux problèmes de la pratique. Ces particularités transparaissent dans la structure logique du propos, comportant de nombreuses formulations conditionnelles s'apparentant à des disjonctions de cas : « Si l'une ou plusieurs parties du périmètre de la surface plane à mesurer étaient courbes, on distinguerait encore les deux cas suivant que l'on pourrait pénétrer dans l'intérieur de la figure ou qu'on ne le pourrait pas » (Cirodde, 1858, p. 193), « cette règle comprend évidemment, comme cas particulier, celui où les deux extrémités de la courbe, ou l'une d'elles seulement, se trouveraient sur la base du segment », « si la surface à mesurer est terminée de toute part par une ligne courbe » (Cirodde, 1858, p. 194), etc. Ces différents cas donnent lieu à une grand nombre de figures et de tracés spécifiques (voir figure III.60 p. 441).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

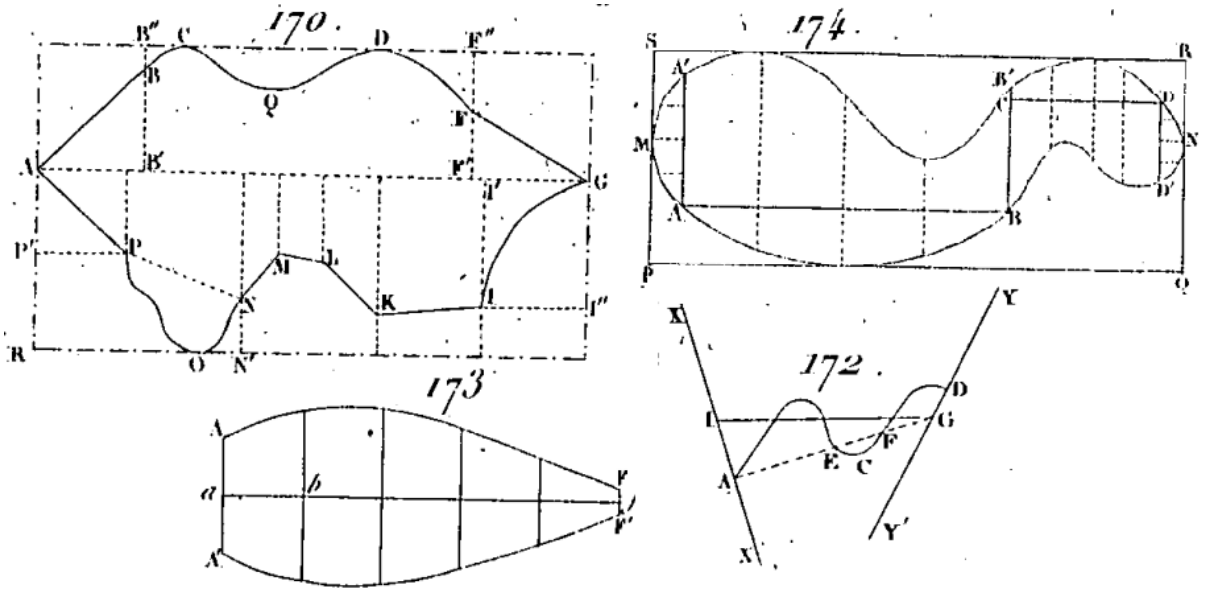


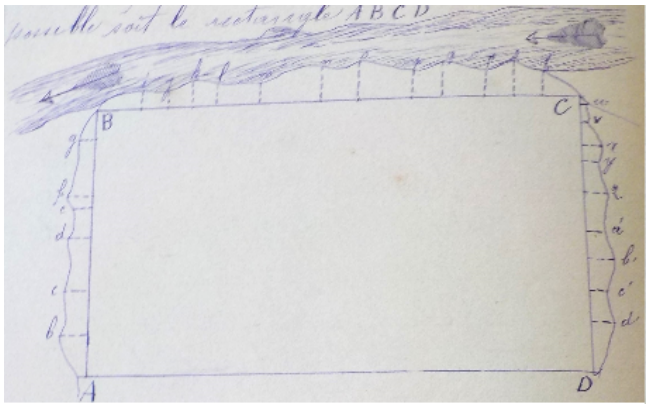
FIGURE III.60 – Différentes figures pour évaluer une surface délimitée par une ligne courbe, suivant ses particularités, chez Cirodde (1858, pl. vii)

Dans les instructions relatives aux programmes, il est précisé que « le professeur devra montrer pratiquement aux élèves comment on trouve la surface d'un terrain », et même si l'« on conçoit qu'à moins de circonstances exceptionnelles, le professeur de mathématiques ne pourra pas conduire tous ses élèves dans la campagne pour leur faire faire les exercices d'arpentage qui doivent compléter son cours », il est préconisé, que « le jeudi, toutes les fois que le temps le permettra, on emploiera quelques heures sur le terrain aux opérations pratiques » (Belhoste, 1995, p. 229, 422-423). Ces recommandations semblent suivies des faits, comme en témoignent des cahiers d'élèves de la période, dans lesquels figurent des représentations de parcelles existantes, parfois accompagnées du nom du propriétaire et de l'adresse, et qui illustrent bien la mise en application dans le monde réel des principes appris dans les cours de géométrie (voir figure III.61 p. 442).

III.1.3.4 Conclusion

Finalement, dans le cas de la mesure des surfaces délimitées par des courbes quelconques, les constructions sur le papier, effectuées avec des instruments de géométrie, trouvent leurs équivalents sur le terrain, réalisés à l'aide du matériel d'arpentage. Que les auteurs choisissent d'ancrer leurs propos sur le terrain d'abord, ou plutôt sur des opérations graphiques réalisées sur le papier, le passage d'un contexte à l'autre nourrit des aspects plus théoriques, ou au contraire s'en inspire. En particulier, les géomètres puisent dans la pratique des arpenteurs pour traiter cette question et résoudre des problèmes qui ne relèvent pas de leurs savoirs, tout en produisant également des solutions

Licence CC BY-NC-ND 3.0



(a) Cahier d'Eugène Poudenas en 1885. La figure présente une grande ressemblance avec la figure III.58 (p. 438) visible dans l'ouvrage de Gimelli.



(b) Cahier de Gustave Boyveau en 1856. L'élève reprend la technique de Cirodde (voir figure III.60 p. 441) quand il s'agit de « mesurer un marais, un bois ou un terrain qu'on ne peut traverser », suivant l'intitulé lisible au-dessus de la figure dans le cahier.

FIGURE III.61 – Représentations de parcelles arpentées dans des cahiers d'élèves – Source : Musée de l'Education à Rouen. Cotes respectives : 1996.01702 (Poudenas) et 1979.31015 (Boyveau)

théoriques transposables en pratique sur le sol. Ils se placent ainsi naturellement à l'interface des pratiques de terrain et des réalisations sur le papier (voir schéma III.62 p. 442). Il s'agit donc bien ici d'une mise en œuvre du processus dialectique entre problèmes concrets et théories abstraites que nous avons évoqué à la p. 434.

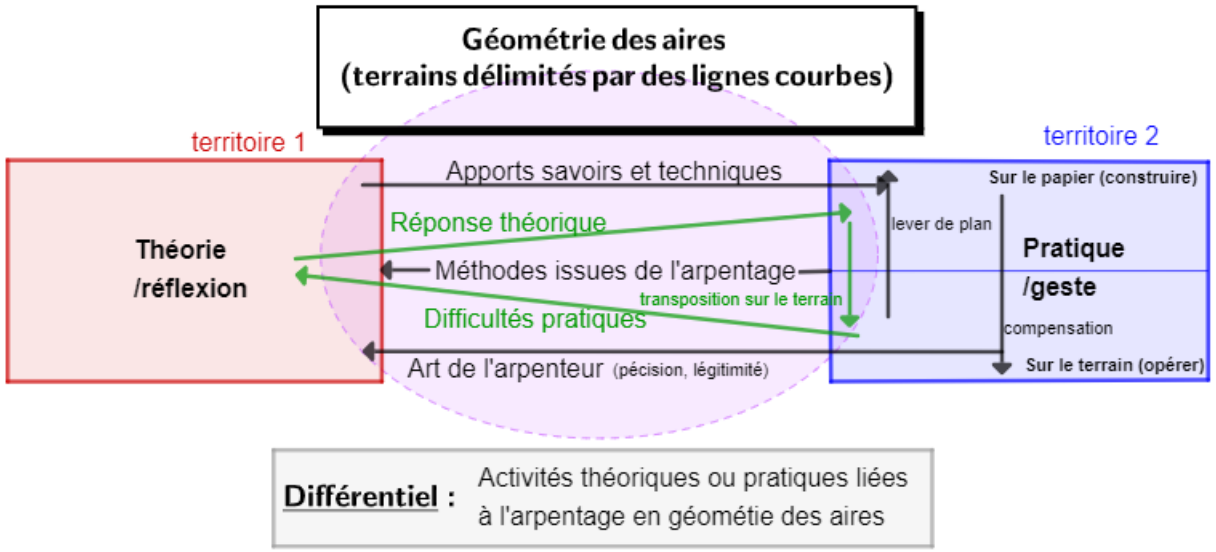


FIGURE III.62 – Schéma montrant en quoi la mesure des aires des terrains délimités par des lignes courbes est à l'interface des activités théoriques et pratiques de la géométrie des aires, sur le terrain ou sur le papier

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Plus généralement, dans les deux cas évoqués ci-avant — les quadratures et la détermination des aires délimitées par des lignes courbes — la construction constitue une fin en soi. Elle apparaît comme une activité technique, qui peut être vue comme extérieure à la géométrie, dans le sens défini par Newton. La maîtriser nécessite de l'habileté, de l'expérience, et un certain « art » que les auteurs n'hésitent pas à reconnaître aux arpenteurs. Cette technicité dans la construction et le tracé des lignes géométriques est d'ailleurs travaillée, extérieurement à la géométrie, dans plusieurs contextes d'enseignement de l'époque (voir p. 416). Les préconisations officielles dans les deux ordres d'enseignement insistent sur l'importance de l'entraînement au geste du tracé, sans toutefois la mettre en opposition avec la pensée plus abstraite nécessaire pour comprendre la réalisation en cours. Il est donc manifeste qu'opposer le geste à la réflexion n'a pas de sens, et que les savoirs et savoir-faire entrent en interaction permanente dans la pratique de la géométrie.

Conclusion

En définitive, les constructions de la géométrie des aires relèvent tout autant de savoir-faire pratiques que de connaissances théoriques. En effet, tracer une figure fait partie intégrante de l'acte de démontrer. Dans certains cas, la construction facilite la preuve dans son ensemble, en rendant sensible la proposition entière, comme dans le cas du théorème de Pythagore ou de la similitude des triangles et rectangles. Dans d'autres, elle permet de contourner des obstacles (le recours à l'infini par exemple) et rend de ce fait certains des chaînons du raisonnement plus accessibles. Les preuves de l'aire du cercle et de l'ellipse sont caractéristiques de l'usage des constructions, au cœur de l'argumentaire démonstratif, pour éviter les difficultés liées à l'infini. Plus généralement, les constructions sont à même d'aider l'élève à franchir un saut d'abstraction vers une connaissance ou un ensemble de savoirs théoriques, l'accompagnant vers une meilleure appréhension et compréhension d'un concept géométrique, comme nous l'avons observé concernant les cas de similitudes ainsi que les propositions d'arithmétisation des aires. Mais *a contrario*, en géométrie des aires, la théorie vient aussi nourrir la pratique, lui permettant d'échafauder des techniques de construction plus efficaces ou plus précises. C'est le cas par exemple pour les procédés de quadrature des polygones, pour lesquels la construction d'un triangle équivalent à un polygone donné offre une alternative à la quadratures euclidienne. Cette méthode s'avère plus performante dans la pratique, surtout suivant les instruments utilisés. Pour la quadrature du cercle, la théorie permet là encore de bâtir des solutions approchées plus précises, suivant les contraintes de réalisation fixées.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Cet aller-retour entre théorie et pratique, l'une se nourrissant de l'autre et réciproquement, est particulièrement manifeste dans l'arpentage, comme nous l'avons étudié dans la section III.1.3.3 « du terrain au papier » (p. 434). Mais les figures et constructions de la géométrie des aires sont également, pour les élèves, au carrefour du monde réel et de celui des savoirs auxquels ils sont confrontés à l'école. À travers les dessins ou images figuratives qui illustrent les manuels, une passerelle est en effet tendue entre la réalité concrète de l'enfant et les connaissances géométriques qu'il a à acquérir, qu'elles concernent l'arpentage ou des propositions plus théoriques, comme l'aire d'un rectangle ou encore le théorème de Pythagore. Par la médiation de l'image, l'enfant fait le lien entre son environnement direct et les savoirs qu'on lui montre, le motivant à apprendre pour mieux pouvoir mettre en application les nouvelles connaissances acquises. Les constructions, qui intègrent pour certaines des objets ou éléments du quotidien, sont alors à la fois vecteurs de motivation et porteuses de sens, surtout lorsqu'elles s'accompagnent du geste de la manipulation.

Mais la géométrie des aires et ses constructions sont également centrales dans le processus d'écriture des auteurs de manuels, à l'interface entre la production scientifique et la création de contenus pour l'enseignement. En effet, la transformation de connaissances géométriques en savoirs enseignables, appelée de nos jours transposition didactique (voir p. 323) est à l'œuvre dans les études que nous avons menées, et notamment à travers l'usage que les auteurs font des constructions dans le cadre de la géométrie des aires. L'optimisation et la simplification des preuves, observées à propos du théorème de Pythagore à travers les multiples constructions qui en sont proposées, en est un exemple caractéristique : la création ou la redécouverte de « nouvelles » preuves permet à certains auteurs d'améliorer sensiblement, suivant une perspective à la fois qualitative et quantitative, « l'art de présenter les choses » (Puille, 1855, p. vii) (voir p. 366). Les auteurs peuvent aussi s'avérer créatifs ou novateurs pour se démarquer d'Euclide, présentant des versions alternatives de certaines de ses preuves, en éludant, par recours à des constructions, des passages théoriques plus délicats pour des lectrices et lecteurs du XIX^{e} siècle. C'est ce que nous avons pu observer dans les démonstrations de la mesure du cercle de Legendre, et de celle de l'ellipse.

Dans la même préoccupation de mettre les résultats de la géométrie des aires à la portée du plus grand nombre, les auteurs font parfois appel à d'autres cadres pour la production de leurs contenus d'enseignement, comme la géométrie dans l'espace, dans le cas de l'aire de l'ellipse, mais aussi en mettant en relation les connaissances à transmettre avec l'apprentissage du dessin ou des travaux pratiques, à travers les images figuratives associées aux savoirs concernés. Plus généralement, le recours à la visualisation, associée ou non à la manipulation trouvent leur place dans l'élaboration des

Licence CC BY-NC-ND 3.0

contenus d'enseignement de la géométrie des aires, comme des savoirs « à montrer ». C'est le cas de la présentation que font une partie des auteurs des résultats sur les aires des figures semblables ou encore de la preuve du théorème de Pythagore. Enfin, l'enjeu pour les auteurs est aussi de bâtir des solutions techniques adaptées pour les opérations de tracé que les élèves auront à savoir réaliser, dans les arts ou sur le terrain, qu'il s'agisse des quadratures, exactes ou approchées, des réductions ou agrandissements en dessin, ou encore d'estimer l'aire d'un terrain délimité par une ligne courbe. La grande diversité des contenus proposés à ce sujet, prenant la forme de constructions variées, montre l'implication des auteurs dans la recherche des meilleurs procédés.

En tout cela, la géométrie des aires s'inscrit bien dans une géométrie des figures et des constructions, ces dernières jouant dans ce cadre un rôle aussi bien théorique que pratique, et ce dans une double perspective de production scientifique et de création de contenus enseignables pour les auteurs des manuels. Les figures et constructions en géométrie des aires se situent par conséquent à l'interface du monde réel, de la production scientifique et des savoirs à enseigner aux élèves (voir schéma III.63 p. 446). Les interactions entre savoirs théoriques et savoir-faire pratiques se manifestent à travers le rôle des figures comme acte intrinsèque à la preuve et soutien du discours argumentatif, mais aussi par le recours à la théorie pour optimiser les opérations de tracés géométriques. La connexion avec le monde dans lequel évoluent les élèves passe par des images figuratives, dans un contexte de mesure des terrains, ou dans le cadre de résultats plus théoriques, nourris par des allusions ou recours au matériel de classe. La réalité de l'élève intervient également au cours du processus de transposition didactique, nécessaire à la transformation de savoirs scientifiques en contenus enseignables. Les auteurs de manuels s'appuient en effet sur les fonctions de motivation, d'information et de réflexion portées par les images et figures, parfois accompagnées des manipulations qu'elle sous-tendent, pour construire des savoirs accessibles aux publics auxquels ils s'adressent.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

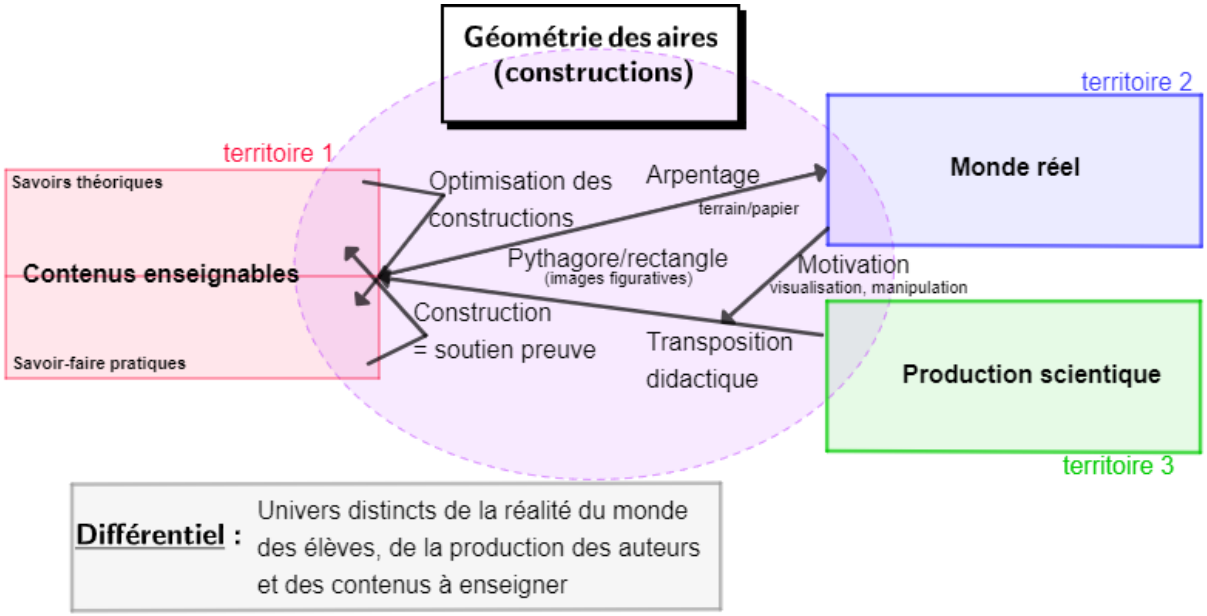


FIGURE III.63 – Schéma montrant en quoi les constructions de la géométrie des aires sont à l'interface du monde réel, de la production scientifique et des savoirs enseignables à des élèves

Mais la géométrie des aires ne se résume pas non plus à cela. Nous avons dans ce chapitre très peu parlé de mesure, puisque tel n'était pas l'objet de notre analyse en cours. Nous avons néanmoins vu poindre ça et là quelques interactions avec les nombres, les calculs et les proportions, chose que nous projetons d'explorer plus précisément dans le chapitre à suivre.

III.2 Nombres et calculs dans la géométrie des aires

En mathématiques, « le géométrique rencontre constamment le numérique », en particulier autour de la notion de grandeur (Bkouche, 1995). Mais cette rencontre ne s'est pas faite sans obstacles dans l'histoire, et la notion de « grandeur » porte son lot de questionnements épistémologiques. En effet, dès l'Antiquité, Aristote distingue la « quantité » de la « qualité » comme étant « divisible en deux ou plusieurs éléments [...] », puis définit la « grandeur » comme une « multiplicité [...] mesurable », contrairement à la quantité qui est une « multiplicité [...] nombrable » (Benzécri, 1988, p. 134), marquant ainsi la séparation entre le discret et le continu. Dans ses *Éléments de géométrie*, Euclide [106] échafaude une théorie des grandeurs, mais sans en donner de définition (voir Vitrac dans Euclide 1994, p. 13-14 et 1994, p. 35). Lorsqu'il traite des grandeurs, il peut s'agir de longueurs, d'aires, de volumes, d'angles, ou encore d'arcs de cercle, conçus comme des objets géométriques et non numériques. Il expose dans le livre V

106. Même s'il peut s'agir plutôt de Eudoxe de Cnide suivant certains historiens (Euclide, 1994, p. 14)).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

une théorie du rapport des grandeurs, défini comme « la relation, telle ou telle, selon la taille, (qu'il y a) entre deux grandeurs du même genre », puis définit les grandeurs « en proportion », ou suivant le vocabulaire actuel, les grandeurs proportionnelles (Euclide, 1994, p. 36, 41 ; Barbin, 2007). Dans son ouvrage, les grandeurs sont traitées totalement indépendamment des nombres, dans des livres distincts (Friedelmeyer, 2001).

Un autre aspect remarquable dans l'évolution de la notion de grandeur est le processus d'« arithmétisation », qui s'est vu développé pendant plusieurs siècles par Descartes et divers autres savants [107], et qui permet de mettre deux types d'opérations en relation directe : les opérations géométriques (c'est-à-dire les constructions de figures) et les opérations arithmétiques (ajouter, soustraire, multiplier, diviser). Cette arithmétisation fait suite à la « numérisation » des grandeurs, qui consiste à associer une grandeur à un nombre (Barbin, 2007). À la fin du XIX^{e} siècle, les tentatives de théorisation des grandeurs servent d'appui pour étendre la notion de nombre. Cauchy, Dedekind et Cantor [108] entre autres, bâtissent des cadres théoriques pour les nombres rationnels et irrationnels, qui aboutiront à la définition du concept de nombre réel (Rouche, 1994 ; Chambris, 2008 ; Bronner, 1997). Mais même si les grandeurs ont servi de matériau à l'élaboration des nombres dans toute leur généralité, et si peu à peu, l'isomorphisme entre les grandeurs et les nombres est montré (Bronner, 1997, p. 44), les grandeurs et les nombres sont des objets distincts, et la distinction entre les trois niveaux d'objets que constituent la figure, la grandeur, et la mesure de la grandeur (soit le nombre) suscite des débats au début du XIX^{e} siècle.

Pourtant, les auteurs des manuels de géométrie du XIX^{e} siècle, connaissent et utilisent la notion de grandeur, qui, traitée dans les livres d'arithmétique de l'époque, appartient à leur cadre conceptuel (Bronner, 1997, p. 44). Elle est définie dans un registre intuitif avec pour définition sommaire « tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution », de même que l'action de « mesurer une grandeur », qui consiste à « s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît, et avec laquelle on est déjà familiarisé » (cité dans Bronner 1997, p. 65). Dans les programmes officiels, pour le primaire comme le secondaire, cette notion apparaît principalement en arithmétique. Les programmes de 1833 et 1838 de cette discipline en 4ème mentionnent de commencer par des « notions sur les grandeurs »

107. Voir les propositions d'arithmétisation des aires par Salicis et Bergery rencontrées à la p. 402.
108. Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) est un mathématicien français, polytechnicien, dont les travaux mathématiques ont été extrêmement prolifiques, notamment en analyse ; (Julius Wilhelm) Richard Dedekind (1831 – 1916) est un mathématicien allemand dont le travail a porté entre autres sur l'axiomatisation de l'arithmétique ; Georg Cantor (1845 – 1918) est un mathématicien allemand, connu notamment pour être le créateur de la théorie des ensembles. Pour une idée de leurs travaux sur la construction des nombres réels, voir (Bronner, 1997).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

(Belhoste, 1995, p. 131, 150), puis les programmes ultérieurs de 3ème en 1852 et 1865 préconisent d'étudier plus précisément, après avoir abordé les opérations élémentaires, les « rapports des grandeurs concrètes » (Belhoste, 1995, p. 282, 396, 446), auxquels viennent s'ajouter en 1874, l'étude des « grandeurs proportionnelles » et les problèmes qui leur sont relatifs (Belhoste, 1995, p. 446). Mais la notion apparaît également dans quelques programmes d'algèbre, dans lesquels « l'emploi des lettres pour représenter les grandeurs » (Belhoste, 1995, p. 250, 461) est recommandé, d'abord en question pour le baccalauréat en 1849, et ramené en classe de 3ème en 1880. Ces aspects théoriques s'accompagnent de considérations plus pratiques dans les instructions qui entourent les programmes, comme en 1854 où il est conseillé aux professeurs, pour traiter « des questions du genre de celles qu'on résout tous les jours dans le commerce ou dans l'industrie » de « ne jamais prendre au hasard les valeurs numériques elles-mêmes » et de prendre « dans la nature » les grandeurs considérées (Belhoste, 1995, p. 362).

Dans le primaire, les programmes d'arithmétique des ENP de 1838 prévoient l'étude de « notions sur les grandeurs », avancée en classe de CM en 1868, cette fois dans le cadre des programmes de « système métrique », sous une dénomination à la fois atténuée en « notions très élémentaires sur la mesure des grandeurs », et plus spécifiquement orientée vers la mesure (D'Enfert, 2003c, p. 97, 157). Les programmes d'arithmétique des EPS de garçons et de filles des années 1880-1890 mettent officiellement à l'étude les « grandeurs proportionnelles », avec la précision fréquente « directement ou inversement » (D'Enfert, 2003c, p. 223, 261, 282, 284). Dans l'article que rédige l'inspecteur Rapet en 1855 au sujet de la direction que doit prendre l'enseignement primaire (voir la sous-section I.3.1.4 p. 118), il évoque le lien entre l'apprentissage de la notion de grandeur et la réalité des enfants en indiquant :

> Au besoin même un mètre seulement, avec une ficelle ou un ruban de fil, nous suffiront pour habituer nos élèves à mesurer presque toutes les grandeurs, à trouver la surface d'un champ, d'un jardin, d'une cour, d'un mur, à trouver le volume d'un tas de terre, de sable ou de fumier. (cité dans D'Enfert 2003c, p. 140)

Il préconise de plus l'évaluation de telles grandeurs concrètes « à l'œil ou à la main », formulation qui sera reprise dans les programmes de géométrie du cours élémentaire en 1882, évoquant des « exercices fréquents de mesure et de comparaison des grandeurs par le coup d'œil » (D'Enfert, 2003c, p. 218). Ces recommandations apparaissent également dans les programmes de dessin de 1893 pour les EPS de filles, pour lesquelles il est prévu, parmi les « exercices d'observation », de réaliser l'« évaluation, [la] comparaison à vue d'œil de grandeurs variées » (D'Enfert, 2003c, p. 276).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les grandeurs se présentent donc dans les programmes des deux ordres, non seulement dans le cadre de l'apprentissage de l'arithmétique, mais en interaction avec les connaissances et savoir-faire relatifs au système métrique, à l'algèbre, à la géométrie ou encore au dessin. La notion, ancrée dans le concret et indissociable de celle de mesure, est en relation étroite avec la géométrie en général, et celle des aires en particulier. Les contenus des programmes à ce sujet forment donc un socle de savoirs, présentés dans les manuels qui leur sont consacrés, sur lequel les élèves étudiant les aires peuvent s'appuyer, de même que les auteurs d'ouvrages de géométrie. Mais les aires figurent au cœur d'un questionnement qui leur est plus spécifique, comme la conception et l'usage d'une unité de mesure pour les surfaces, le lien entre les opérations physiques de mesurage (report d'une unité étalon) et les opérations sur les nombres, ou encore, en tant que « situation multiplicative », l'entrée en jeu de la bidimensionnalité (De Varent, 2018). Sur ces points, les aires se distinguent des longueurs et répondent à des problématiques qui leur sont particulières.

Finalement, à travers le spectre de la notion de grandeur, la géométrie des aires apparaît bien à l'interface du géométrique et du numérique, ainsi qu'à l'intersection de plusieurs domaines de l'enseignement des sciences mathématiques, comme l'arithmétique, la géométrie, le système métrique, le dessin et même l'algèbre (voir schéma III.64 p. 450). Cette position centrale de la grandeur « aire » nécessite, pour maîtriser la notion et les techniques qui lui sont associées, des flux de connaissances d'un contexte disciplinaire à l'autre, en plus des interactions nécessaires entre les savoirs théoriques ou scolaires et la perception intuitive qu'ont les élèves des grandeurs dans le monde réel. À travers des exemples tirés de l'étude de l'aire du rectangle, du théorème de Pythagore et des aires curvilignes, nous nous proposons d'explorer en quoi la géométrie des aires est à l'interface du géométrique et du numérique, et quelle est la nature des transferts de connaissances induits, dans son apprentissage, avec la notion de nombre et les techniques de calcul en arithmétique. En particulier, nous nous intéressons à l'opposition ou à la complémentarité de deux approches concernant les aires : la première axée sur la comparaison, et la seconde sur la mesure. Puis c'est le rôle des proportions et de l'unité que nous interrogeons, avant de nous pencher sur l'usage des calculs numériques et formules algébriques dans la pratique de la géométrie des aires. Enfin, nous analysons les implications des questionnements de l'époque sur la nature des nombres dans la géométrie des aires, et réciproquement.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

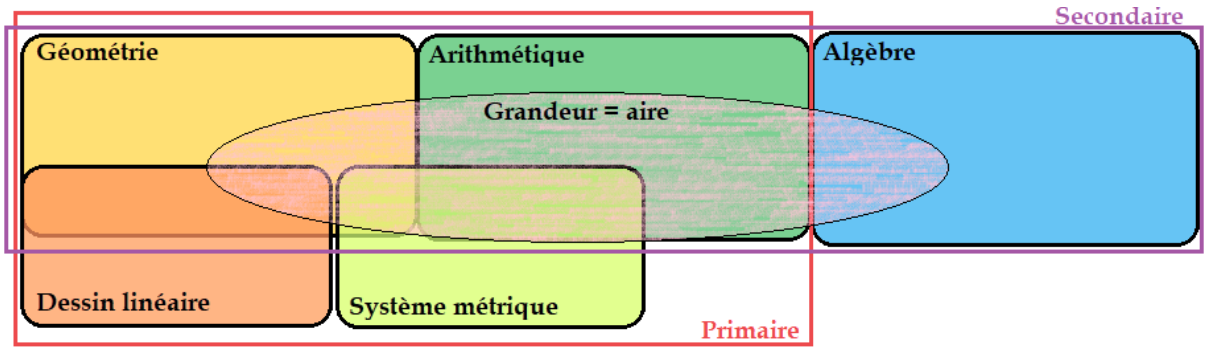


FIGURE III.64 – Schéma montrant la position de la grandeur « aire » à l'interface des différents domaines des programmes de mathématiques du primaire et du secondaire

III.2.1 De la comparaison à la mesure des aires, les cas du rectangle et du cercle

Concernant les grandeurs en général, et les aires en particulier, deux voies sont possibles, comme nous l'avons vu précédemment dans la sous-section II.3.1.1 (p. 270) à propos du rectangle : celle de la comparaison, et celle de la mesure. La définition très généraliste d'une grandeur, comme quantité pouvant augmenter ou diminuer (voir p. 447), n'est pas de nature à nous guider dans l'une ou l'autre direction. En revanche, au début du XIX^{ème} siècle, dans son *Traité élémentaire d'arithmétique*, Lacroix apporte la précision suivante :

> La comparaison des divers objets qui tombent sous nos sens, nous fait bientôt apercevoir, dans tous ces objets, un attribut (ou qualité), par lequel on peut les concevoir susceptibles d'augmentation et de diminution : cet attribut est la *grandeur*. (Lacroix, 1807a, p. 1)

Dans cette définition, la comparaison joue un rôle immédiat, comme élément intrinsèque à la notion de grandeur, avant même qu'il ne soit question de mesure, puisque nous pouvons comparer deux grandeurs directement par nos perceptions sensorielles, sans recours à une quantification.

Plus spécifiquement, en ce qui concerne cette grandeur particulière qu'est l'aire, Idoux affirme : « Il y a deux choses à considérer dans l'étendue [109] : sa grandeur, c'est-à-dire le plus ou le moins d'espace qu'elle occupe, et sa figure, c'est-à-dire la forme qu'affecte cette étendue » (Idoux, 1842, p. 1). Dans cette phrase, l'idée de comparaison s'exprime par les locutions « le plus » et « le moins ». Mais si les aires sont susceptibles d'être comparées, à quoi les confronte-t-on ? À des objets de même nature (ou des

109. Il définit au préalable l'« espace » comme « l'univers, abstraction faite des corps qui s'y trouvent » et l'« étendue » comme « une portion d'espace » (Idoux, 1842, p. 1).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

« grandeurs de même genre » (Euclide, 1994, p. 36)) ou à une autre grandeur prise pour référence ou étalon ? Guilmin, dans son cours d'arithmétique de 1853, écrit :

> *Mesurer* une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. (Guilmin, 1853, p. 76)

La mesure et la comparaison sont donc par essence intriquées, et la question n'est donc pas tellement celle de leur ordre d'exécution, mais plutôt de comment elles s'articulent. C'est ce que nous proposons d'analyser plus précisément dans le cas de deux figures de référence : le rectangle et le cercle [110].

III.2.1.1 Le cas du rectangle

Concernant le rectangle et son aire, nous avons observé à la p. 276 que l'énoncé initial exposé peut prendre la forme d'un résultat sur sa mesure, ou sur la comparaison des rectangles entre eux. Les théorèmes de comparaison ont la particularité de s'exprimer dans un cadre géométrique, en portant sur les grandeurs elles-mêmes, et en les mettant en relation, notamment dans le cas de rectangles de même base et/ou de même hauteur. Cette approche des aires par comparaison permet de s'abstraire, au moins momentanément, de la notion de nombre. Finalement, pour ce qui est des longueurs, par l'acte même du mesurage qui consiste à rapporter une grandeur à une autre grandeur donnée prise pour référence, la comparaison précède forcément la mesure. Pourquoi n'en serait-il pas de même pour les aires ?

Dans les programmes du XIX^{e} siècle, la référence à la comparaison des aires n'est pas si fréquemment formulée, malgré la présence très courante de propositions qui s'y rapportent dans les manuels de géométrie. Le terme « comparaison » est explicitement cité dans le programme de seconde de la section des sciences en 1863 sous la forme « Exercices et problèmes sur la comparaison des aires » (Duruy, 1863a, p. 251), alors que dans le programme de 4ème année de l'enseignement secondaire des jeunes filles en 1882, la mention « problèmes sur les aires » reste plus implicite (Belhoste, 1995, p. 470). Dans l'enseignement primaire, on trouve la formulation « comparaison des aires » dans les programmes de l'école normale primaire de Chaumont en 1876, et celui de la 2ème année des écoles primaires supérieures de garçons de 1893 (D'Enfert, 2003c, p. 176, 262).

110. L'analyse de la figure du cercle sera accompagnée, dans une moindre mesure, de celle de la figure de l'ellipse, même si cette dernière est abordée dans un nombre moins grand d'ouvrages.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Contrairement à celui concernant la mesure du rectangle, les énoncés relatifs à la comparaison des aires des rectangles dans diverses situations ne sont pas clairement mentionnés, sauf celui concernant les rectangles semblables, inclus dans le libellé « Rapport des aires des figures (ou des polygones) semblables », présent dans pratiquement tous les programmes d'enseignement du siècle. Et pourtant, ces propositions sont bien présentes dans une grande majorité d'ouvrages, si l'on prend pour témoin les manuels du corpus.

Mauduit	**Lacroix**	**Legendre**	**Dupin**	**Bergery**	**Terquem**	**Lancelot**	**Desnanot**	**Lamotte**	**Sonnet**
Preuve 2	Enoncé 5	Enoncé 5	Enoncé 1	Enoncé 5	Enoncé 2	Enoncé 1	Preuve 1	Enoncé 1	Preuve 3
Enoncé 1	Preuve 5	Preuve 5	Preuve 1	Preuve 4	Enoncé 5	Application 1	Enoncé 1	Preuve 1	Enoncé 1
Application 2	Enoncé 6	Enoncé 6	Application 8	Enoncé 6	Preuve 5	Application 2	Application 1	Application 1	Application 5
	Enoncé 1	Enoncé 1	Application 9	Enoncé 1	Enoncé 8	Application 3	Application 2	Application 6	Enoncé 5
		Application 4		Application 3	Enoncé 1	Application 5	Application 8	Application 5	Preuve 5
					Enoncé 6	Application 7	Application 3		Application 7
					Application 1	Application 9			Enoncé 6
					Application 2				Application 2
					Application 8				Enoncé 4
									Application 8
LCFPB	**Gimelli**	**Percin**	**Idoux**	**Vincent**	**Bezout**	**Eysseric**	**Puille**	**Dupuis**	**Cirodde2**
Enoncé 1	Enoncé 1	Enoncé 5	Enoncé 5	Enoncé 2	Preuve 1	Preuve 1	Preuve 1	Enoncé 1	Enoncé 5
Preuve 1	Preuve 1	Preuve 4	Preuve 5	Enoncé 5	Enoncé 1	Enoncé 1	Enoncé 1	Preuve 1	Preuve 5
Application 3	Application 1	Enoncé 1	Enoncé 6	Preuve 5	Application 1	Application 8	Application 1	Enoncé 5	Enoncé 6
	Application 6		Enoncé 1	Enoncé 6	Application 3		Application 6	Preuve 4	Enoncé 1
	Enoncé 2		Preuve 1	Enoncé 1			Enoncé 5		Preuve 1
			Application 1	Application 8			Preuve 5		
			Application 6	Application 5			Enoncé 6		
				Application 7					
Briot	**Amiot**	**Harant**	**Briot2**	**Rouché**	**Salicis**	**Tarnier**	**Meray**	**Bos**	**Andre**
Preuve 1	Enoncé 5	Enoncé 1	Preuve 1	Enoncé 2	Enoncé 1	Application 8	Enoncé 5	Enoncé 1	Preuve 1
Enoncé 1	Preuve 4	Preuve 1	Enoncé 1	Enoncé 3	Preuve 1	Enoncé 1	Preuve 5	Preuve 1	Enoncé 1
Application 1	Enoncé 6	Enoncé 6	Application 1	Enoncé 5	Enoncé 6	Preuve 1	Enoncé 3	Application 1	Enoncé 6
Application 6	Application 4	Enoncé 5	Application 3	Preuve 5	Enoncé 5	Enoncé 7	Enoncé 2	Application 6	Enoncé 5
Application 3	Enoncé 1	Application 8	Application 6	Enoncé 6			Enoncé 6	Application 5	Application 8
			Application 8	Enoncé 1			Enoncé 1	Application 3	Application 3
				Application 1				Enoncé 5	Application 5
				Application 3					
				Application 5					
Bovier	**Tombeck**	**Dalseme**	**Guilmin**	**Bos2**	**Bourget**	**Bert**	**Leyssenne**	**Girod**	**HueVagnier**
Preuve 1	Enoncé 5	Preuve 1	Enoncé 1	Enoncé 1	Preuve 1	Preuve 1	Enoncé 5	Enoncé 5	Enoncé 1
Enoncé 1	Preuve 5	Enoncé 1	Preuve 1	Preuve 1	Enoncé 1	Enoncé 1	Preuve 4	Preuve 4	Preuve 1
Application 5	Enoncé 6	Application 1	Enoncé 6	Application 1	Enoncé 6	Application 1	Enoncé 6	Enoncé 6	Enoncé 7
Application 7	Enoncé 1		Enoncé 5	Application 6	Enoncé 5	Application 5	Enoncé 1	Application 4	Application 8
Enoncé 7	Application 1		Application 1	Application 5	Application 3		Application 1	Enoncé 1	
Application 8	Application 8		Application 7	Application 3			Application 8	Application 3	
								Application 8	

TABLE III.8 – Tableau listant les énoncés relatifs à l'aire du rectangle dans les manuels, dans leur ordre d'apparition dans le texte, avec mise en évidence de l'énoncé 1 en rouge (mesure), et des énoncés 5 et 7 en jaune (comparaison)

Dans le tableau tableau III.8 p. 452, nous avons listé les différents items recensés dans la sous-section II.3.2.2 (p. 286), dans leur ordre d'apparition dans les ouvrages concernés. Certains énoncés ont été mis en couleur pour pouvoir observer tout particulièrement leur présence dans les manuels, ainsi que leurs positions relatives dans les textes : l'énoncé 1 (formule de l'aire), relatif à la mesure du rectangle, et les énoncés 5 et 7

Licence CC BY-NC-ND 3.0

(rapport des aires des rectangles de même base ou hauteur, et rapport des aires des rectangles semblables), relatifs à la comparaison des aires [111].

Un premier point peut être observé à partir de ce tableau : 14 ouvrages ne contiennent pour énoncé que celui de la formule de l'aire du rectangle, sans se référer, avant ou après, à des résultats sur la comparaison des aires de telles figures. Parmi ces ouvrages, beaucoup sont spécialisés dans la géométrie présentée comme « pratique » (Eysseric et Pascal, 1850 ; L.C. et F.P.B., 1840) ou encore dans la « takymétrie » (Dalsème, 1880), d'autres dans l'arpentage (Gimelli, 1841 ; Lamotte, 1839 ; Lancelot, 1833), les arts et métiers (Dupin, 1828) ou le toisé (Desnanot, 1835), ce qui peut expliquer le parti-pris de ne présenter qu'une formule à pouvoir appliquer directement. D'autres relèvent d'un enseignement de la géométrie de niveau plus modeste, comme l'ouvrage pour les jeunes filles de Bos (1884), ou même élémentaire, comme les *Premiers éléments* de Bert (1886), où là encore, la simplicité de la seule formule peut être estimée suffisante. Dans d'autres cas, l'absence de ce contenu est moins aisément explicable, comme pour les *Éléments de géométrie* de Bézout (1848) et de Briot (1863), pourtant destinés à des lecteurs de l'enseignement secondaire (spécial pour la réédition de l'ouvrage de Bézout de 1848) [112]. Quant à Mauduit, la relative pauvreté de son ouvrage concernant le rectangle masque le fait qu'il ait choisi la figure du parallélogramme comme point de départ pour développer sa théorie sur les aires. Mais en définitive, avec ou sans raison exprimée, ces cas montrent que la question de l'aire du rectangle peut être traitée sous le seul angle de la mesure, indépendamment de l'idée de comparaison, en particulier dans des objectifs pédagogiques plus utilitaires que théoriques et/ou dans des manuels à destination de publics moins avancés en géométrie.

En revanche, dans les autres ouvrages, soit 26 des 40 titres du corpus, les considérations sur la mesure sont accompagnées de propositions sur la comparaison des aires, dans un ordre ou dans l'autre. Dans notre corpus, les deux alternatives — de la comparaison vers la mesure ou de la mesure vers la comparaison — sont utilisées pratiquement le même nombre de fois, avec un très léger avantage à la première. En effet,

111. En réalité, les énoncés de comparaison sont tous les énoncés du numéro 2 au numéro 8, puisqu'ils concernent tous les équivalences ou les rapports d'aires de rectangles. Mais les énoncés 2 et 3, plus rares, sont davantage utilisés comme axiomes de construction d'une théorie sur les rapports des aires des rectangles. L'énoncé 4, tout comme le 8, n'apparaît que dans un livre, comme conséquence directe des énoncés 5 et 6. L'énoncé 6, quand il apparaît, est toujours à la suite de l'énoncé 5. Les énoncés 5 et 7 sont donc des marqueurs suffisants de la présence de théorèmes de comparaison dans les ouvrages.

112. Les 13 ouvrages mentionnés ci-avant font d'ailleurs partie des groupes des « arpenteurs expérimentaux » (groupe 4), des « théoriques et pratiques du début du siècle » (groupe 6) ou encore des « tardifs appliqués » (groupe 5) de la 3ème classification réalisée (voir le tableau A.2 p. 667), à une exception près (Desnanot, 1835). Ce dernier appartiennent par ailleurs au groupe des « primaires pratiques » (groupe 3) de la seconde classification, tout comme 7 autres des 13 manuels considérés.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

14 des 26 auteurs concernés (ceux pour lesquels le jaune est au-dessus du rouge dans le tableau III.8 p. 452), font la liaison dans ce sens, alors que les 12 autres font le choix inverse. Dans chacun de ces deux cas, nous pouvons analyser plus précisément, à la lecture des contenus des ouvrages, comment s'effectue la liaison d'un type d'énoncé (formule ou mesure) à un autre (comparaison). Déjà, le choix de partir de la formule pour arriver aux comparaisons est globalement plus tardif dans le siècle. Mis à part Sonnet, qui opte pour cette présentation le premier, en 1839 (Sonnet, 1839), les autres sont publiés entre 1855 (Puille, 1855) et 1896 (Hue et Vagnier, 1896). *A contrario*, les livres dans lesquels la comparaison précède la mesure s'étalent tout au long du siècle, de Lacroix (1808) à Girod (1893). Ceci montre la permanence d'une forme de tradition dans le choix de cet ordre, dont les référents sont sans doute les ouvrages de Lacroix et Legendre, édités pour la première fois au tournant du siècle (Lamandé, 1993).

Pour analyser plus précisément les relations en jeu entre les divers énoncés des ouvrages, mais aussi leurs preuves et leurs applications, nous avons choisi de recourir à des « schémas déductifs », comme les désigne Vitrac dans ses commentaires aux *Éléments* d'Euclide (1990, p. 518). Ces schémas sont organisés suivant deux axes : le premier, horizontal, sépare les énoncés relatifs à la comparaison (zone en jaune) de ceux relatifs à la mesure (en vert), et l'autre, vertical, partage les items en énoncés de théorèmes ou propositions (en bleu), des preuves (en violet) et enfin des applications (en rouge). Seuls les items présents dans chacun des ouvrages apparaissent en couleur, les autres sont grisés. Des flèches relient ces éléments entre eux, suivant la structure déductive suivie dans l'ouvrage : entre énoncés de propositions et théorèmes, les flèches en trait plein représentent des déductions logiques (un énoncé en implique un autre), les énoncés 1 et 5 sont reliés à leurs preuves par une flèche en pointillés, signifiant « admet pour preuve », et les énoncés sont reliés aux applications par des flèches en tirets, voulant dire « a pour application ». De plus, l'énoncé (1 ou 5) initial [113] sur lequel s'appuie la théorie de la mesure des aires des rectangles, est encadré en noir (voir par exemple la figure III.65 p. 455).

113. Le fait que les propositions 1 et 5 découlent d'autres énoncés (comme par exemple l'énoncé 2 dans certains cas) est inévitable dans le cadre d'un enchaînement logique de propositions géométriques. Nous choisissons de désigner spécifiquement ces deux propositions d'« énoncés initiaux » dans la mesure où ils servent de fondement à la théorie de l'aire du rectangle, en termes de mesure ou de comparaison.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

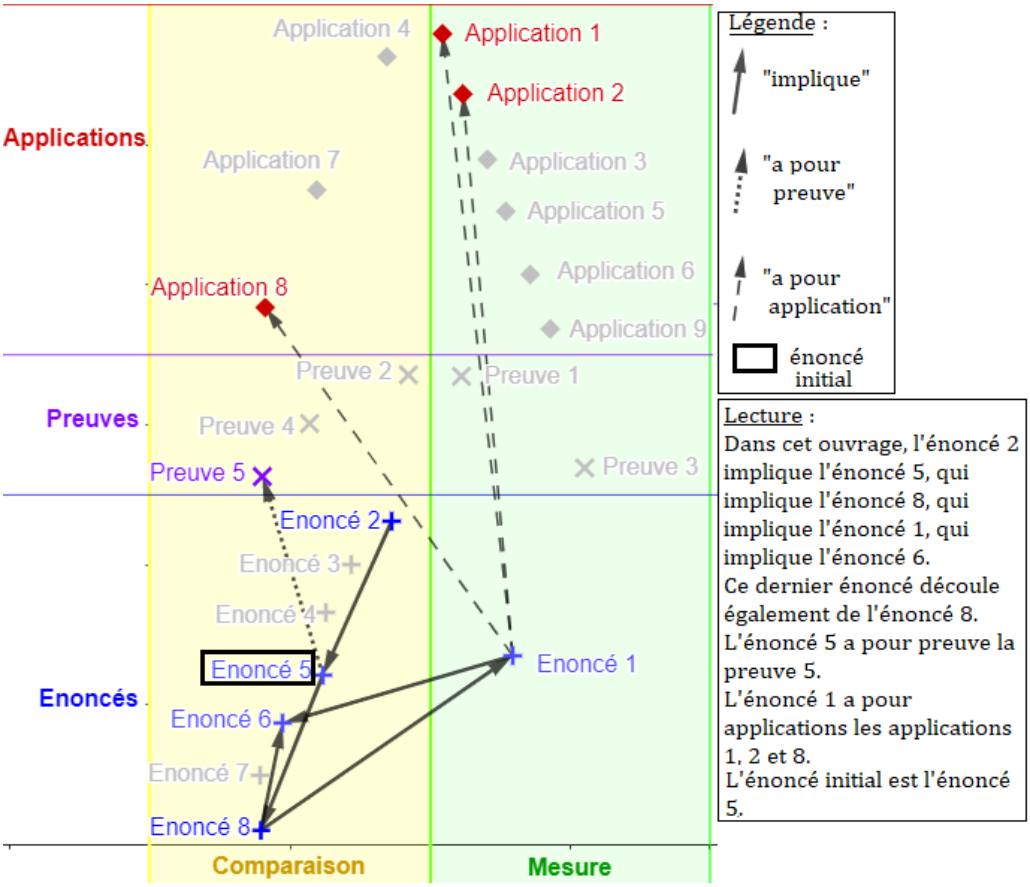


FIGURE III.65 – Schéma déductif concernant l'aire du rectangle chez Terquem (1829), avec légende

L'analyse du schéma déductif de Terquem (voir figure III.65 p. 455) montre que l'énoncé 2, soit l'équivalence des rectangles de même base et même hauteur, joue le rôle d'axiome préalable à l'énoncé 5, qui stipule que des rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs. Ce résultat est prouvé y compris dans le cas où leurs hauteurs sont incommensurables (preuve qui sera vue en détails dans la section III.2.4.2 p. 575 et suivantes). Ce résultat a pour conséquence l'énoncé 8, qui compare les aires de deux rectangles quelconques et affirme que « l'aire du premier [rectangle] est à celle du second, comme la première base, divisée par la seconde, est à la seconde hauteur, divisée par la première ; ou comme le rapport direct des bases au rapport renversé ou inverse des hauteurs » (Terquem, 1829, p. 89). Cette proposition intermédiaire est la seule a être formulée de la sorte parmi les ouvrages du corpus. Elle conduit Terquem à affirmer que l'aire d'un rectangle est le produit de sa base par sa hauteur (énoncé 1), puis que les rectangles quelconques sont entre eux comme le produit de leurs bases par leurs hauteurs (énoncé 6), tout en remarquant que « c'est aussi ce qu'on peut conclure directement » (Terquem, 1829, p. 91) à partir de l'énoncé 8. Un lien d'intercausalité apparaît donc ici entre les propositions des énoncés 5, 6,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

8 et 1, mais avec comme preuve initiale celle du rapport des rectangles de même base, y compris dans le cas où leurs hauteurs sont incommensurables. Par la suite, Terquem exploite la formule de calcul de l'aire du rectangle dans diverses situations : des applications numériques de calculs d'aires, avec des longueurs exprimées à la fois dans l'ancien et dans le nouveau système métrique, puis, dans une partie ultérieure, à la quadrature du rectangle, par construction d'une troisième proportionnelle (Terquem, 1829, p. 137). Ce schéma est parmi ceux qui mettent en jeu le plus d'items sur l'aire du rectangle parmi la nomenclature retenue. C'est le plus complet de ceux dont la théorie s'appuie initialement sur le théorème de comparaison des aires des rectangles, et il constitue, à ce titre, un élément de référence pertinent pour analyser les structures des autres ouvrages sur ce sujet.

Parmi les ouvrages ayant pour preuve initiale celle du théorème d'énoncé n°5, nous en avons sélectionné trois, dont la structure déductive est suffisamment complexe pour être étudiée, mise en regard des deux autres, et avec pour référence celle de l'ouvrage de Terquem. Il s'agit des manuels de Vincent (1844), de Rouché et Comberousse (1866) et de Girod (1893). Leurs schémas, mis côte à côte, sont présentés en figure III.66 (p. 457). La mise en parallèle de ces trois schémas met en évidence un enchaînement commun entre les énoncés 5, 6 et 1, dans le même ordre. Il s'agit manifestement du cœur du raisonnement permettant de déduire la formule de l'aire des rectangles à partir de leur comparaison. Cette double implication admet parfois comme préalable l'énoncé 2 et/ou 3. Les preuves sont réalisées par Vincent, ainsi que Rouché et Comberousse dans le cas incommensurable, alors que Girod, à la fin du siècle, ne l'effectue que dans le cas où les hauteurs sont égales et les bases ont une commune mesure, « si petite qu'elle soit » (Girod, 1893, p. 183) (voir p. 580). Les applications diffèrent un peu suivant les auteurs et les époques : Vincent propose un problème de tapisserie en lien avec la vie courante [114], Rouché et Comberousse panachent des exercices numériques, certains sans contexte, et d'autres dans une situation concrète (de la tapisserie également), alors que Girod expose un calcul de rapport de rectangles de dimensions données, sans en montrer l'intérêt dans une situation réelle. Vincent comme Girod présentent la construction du carré équivalent à un rectangle donné, par la méthode des moyennes proportionnelles. Même si des décennies les séparent et si les contenus de leurs ouvrages diffèrent un peu, notamment sur la nature des preuves et des applications, ces trois auteurs partagent une façon de présenter les aires des rectangles dans une structure logique commune, allant de leur comparaison à leur mesure.

114. Le problème est le suivant : « On demande le nombre de rouleaux de papier qu'il faut employer pour tapisser une pièce rectangulaire qui a $15^{m},76$ de longueur, $8^{m},24$ de largeur. La hauteur de l'appartement est de $4^{m},87$; mais celle du lambris est égale à $0^{m},37$. Enfin chaque rouleau de papier a une longueur de 10 mètres, et la largeur du papier est de $0^{m},6$. » (Vincent, 1844, p. 265).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

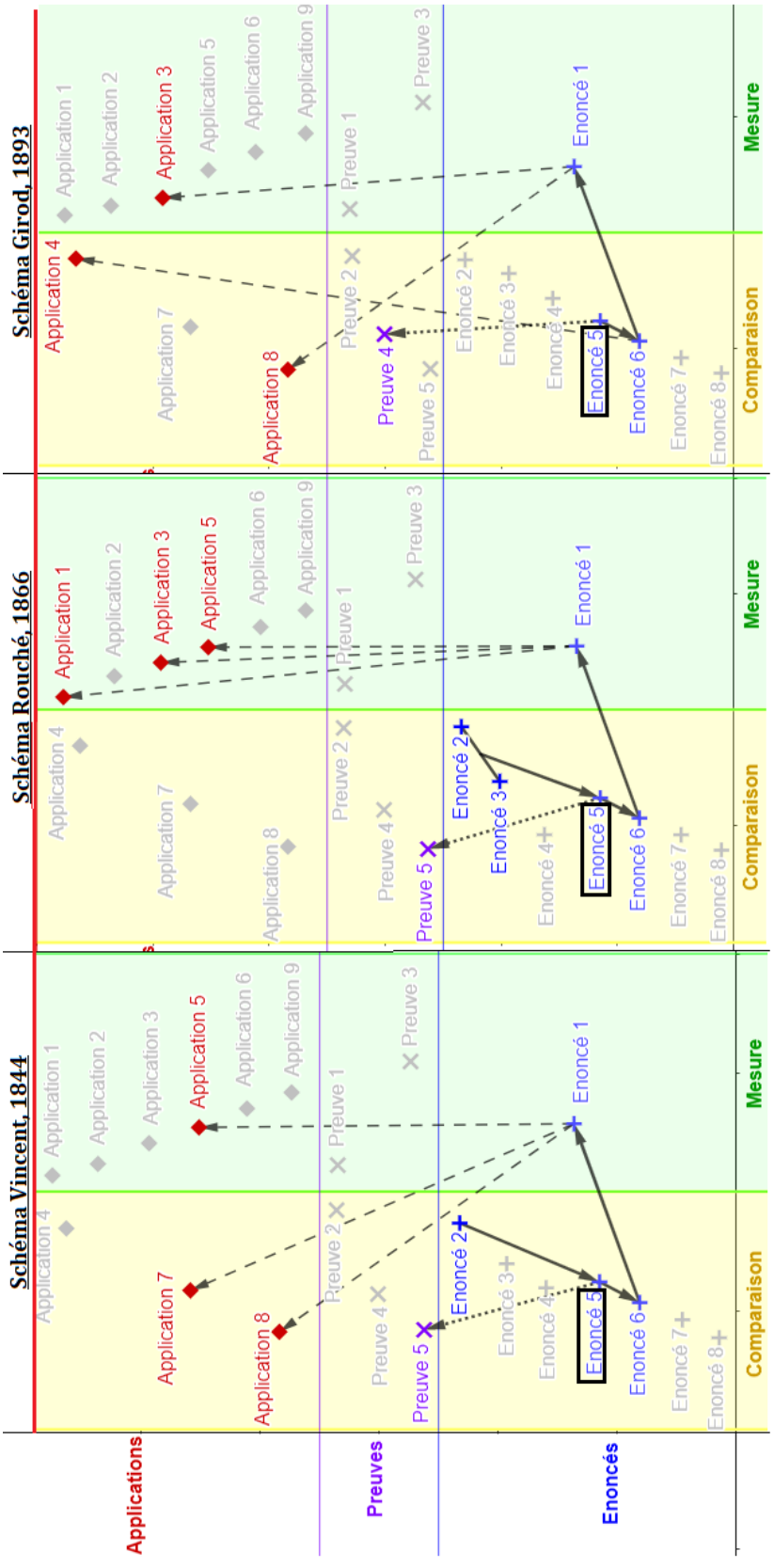


FIGURE III.66 – Mise en regard des schémas déductifs concernant l'aire du rectangle de Vincent, Rouché et Girod (1893 ; 1866 ; 1844) - Le segment entre les énoncés 2 et 3 dans le schéma de Rouché et Comberousse indique que l'énoncé 5 découle dans ce cas des énoncés 2 et 3 pris conjointement

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans sa *Nouvelle géométrie*, Sonnet (1839) prend le parti inverse et introduit l'aire du rectangle directement par la formule permettant de calculer sa mesure (énoncé 1), dans le chapitre VII intitulé « De la mesure des aires », et prouve ce résultat dans le cas où les dimensions du rectangle sont incommensurables (Sonnet, 1839, p. 209-211) (voir figure III.67 p. 458). Dans le chapitre suivant, « De la comparaison des aires », il énonce les propositions relatives à la comparaison des aires des rectangles, avec en premier lieu le cas où ils ont même base ou hauteur (énoncé 5). Il précise alors qu'« on pourrait déduire ce théorème de la mesure du rectangle, mais [qu']on peut aussi le démontrer directement » (Sonnet, 1839, p. 231).

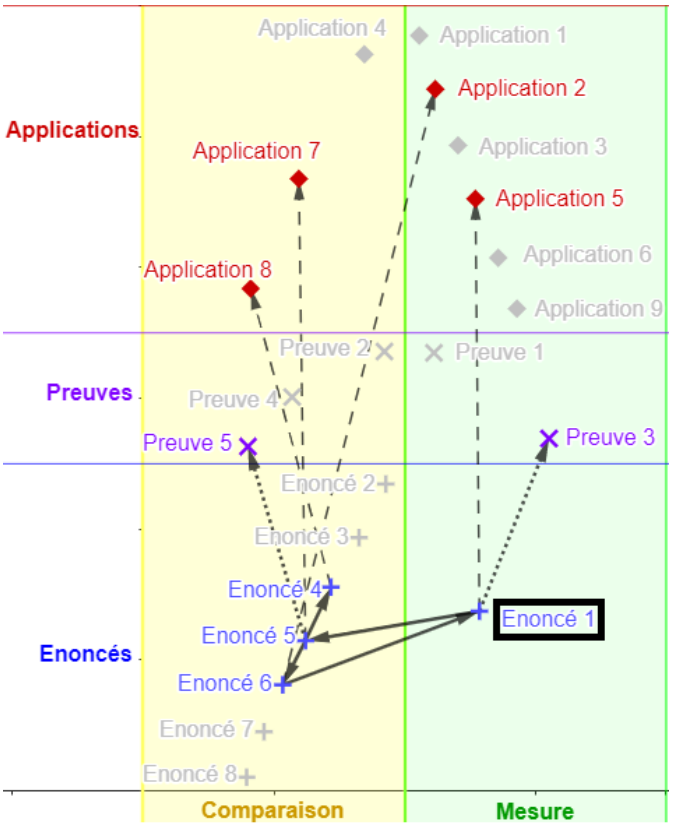


FIGURE III.67 – Schéma déductif concernant l'aire du rectangle chez Sonnet (1839)

Il propose alors une preuve de ce résultat dans les cas où les bases des rectangle ont, ou n'ont pas, de commune mesure, puis en déduit deux corollaires, celui du rapport des aires des rectangles quelconques, comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs (énoncé 6), et celui de l'équivalence des rectangles dont ce produit est le même (énoncé 4). Il relie également le premier corollaire (énoncé 6) à la formule de l'aire du rectangle (énoncé 1) en prenant comme second rectangle un carré unité. Il est remarquable aussi que dans sa démarche, chaque résultat énoncé est immédiatement accompagné de son application propre (application 5 pour l'énoncé 1, application 7 pour le 5, 2 pour le 6 et 8 pour le 4). En procédant ainsi, Sonnet développe finalement

Licence CC BY-NC-ND 3.0

deux théories, qui peuvent être appréhendées indépendamment, avec leurs preuves propres, celle de la mesure, et celle de la comparaison des aires. Mais il prend soin d'exhiber les passerelles qui les relient dans un sens comme dans l'autre, puisque l'énoncé 1 implique le 5 et qu'il peut se déduire du 6.

D'autres auteurs font le choix de partir de l'énoncé 1, avec des stratégies globales plus ou moins proches de celle de Sonnet. Nous avons sélectionné Puille (1855), André (1879) et Bovier-Lapierre (1879) pour mener les études en parallèles de leurs organisations structurelles autour de l'aire du rectangle. Leurs schémas déductifs sont présentés sur la figure III.68 (p. 460). Parmi les manuels des auteurs ayant fait le choix de placer l'énoncé 1 avant l'énoncé 5 ou 7, apparaît une plus grande diversité de structures logiques. En effet, les énoncés 1, 5 et 6 ne sont plus aussi systématiquement liés, comme c'était le cas pour les auteurs commençant par la comparaison. Le lien entre ces trois propositions se retrouve chez André, ainsi que nous l'avons observé chez Sonnet. En revanche, l'ordre diffère un peu puisque André déduit de la formule de l'aire du rectangle que le rapport des aires des rectangles quelconques est comme celui des produits de leur base par leur hauteur, avant d'en tirer le résultat sur le rapport des aires des rectangles de même base ou hauteur.

Les deux autres schémas, respectivement des livres de Puille et de Bovier-Lapierre, montrent un traitement séparé entre les résultats relatifs à la comparaison et à la mesure. En effet, chez Puille, le théorème n°1 est énoncé et démontré (dans le cas commensurable) dans un paragraphe titré « mesure des polygones » (Puille, 1855, p. 119), alors que l'énoncé 5 apparaît au début de la partie « Rapport des aires de deux polygones semblables » (Puille, 1855, p. 161), inclus dans un chapitre sur les lignes proportionnelles, avec une preuve indépendante de la partie précédente (et y compris dans le cas où il y a incommensurabilité). Il précise d'ailleurs en note que ces théorèmes (énoncés 5 et 6) « doivent précéder la mesure des polygones », et qu'il a choisi de les placer ici « comme complément, ou pour maintenir [sa] classification, car dans ces théorèmes, il y a des *lignes proportionnelles* » (Puille, 1855, p. 161). Puille prend donc quelques libertés avec l'ordre logique des propositions, par souci de clarté dans son plan et sans doute également pour ne pas perdre les lecteurs avec des preuves trop complexes, reportées ultérieurement à titre de complément. Dans l'ouvrage de Bovier-Lapierre, la séparation comparaison/mesure est encore plus nette, puisque le seul énoncé 1, prouvé dans le cas le plus élémentaire, nourrit toute sorte d'applications, numériques, pratiques ou encore de construction dans la partie « mesure des surfaces » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 82-83), alors que l'énoncé 7 se trouve isolé dans la théorie des polygones semblables, avec une preuve bien spécifique menée par induction (Bovier-Lapierre, 1879, p. 107) (voir la sous-section III.1.2.1 p. 388).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

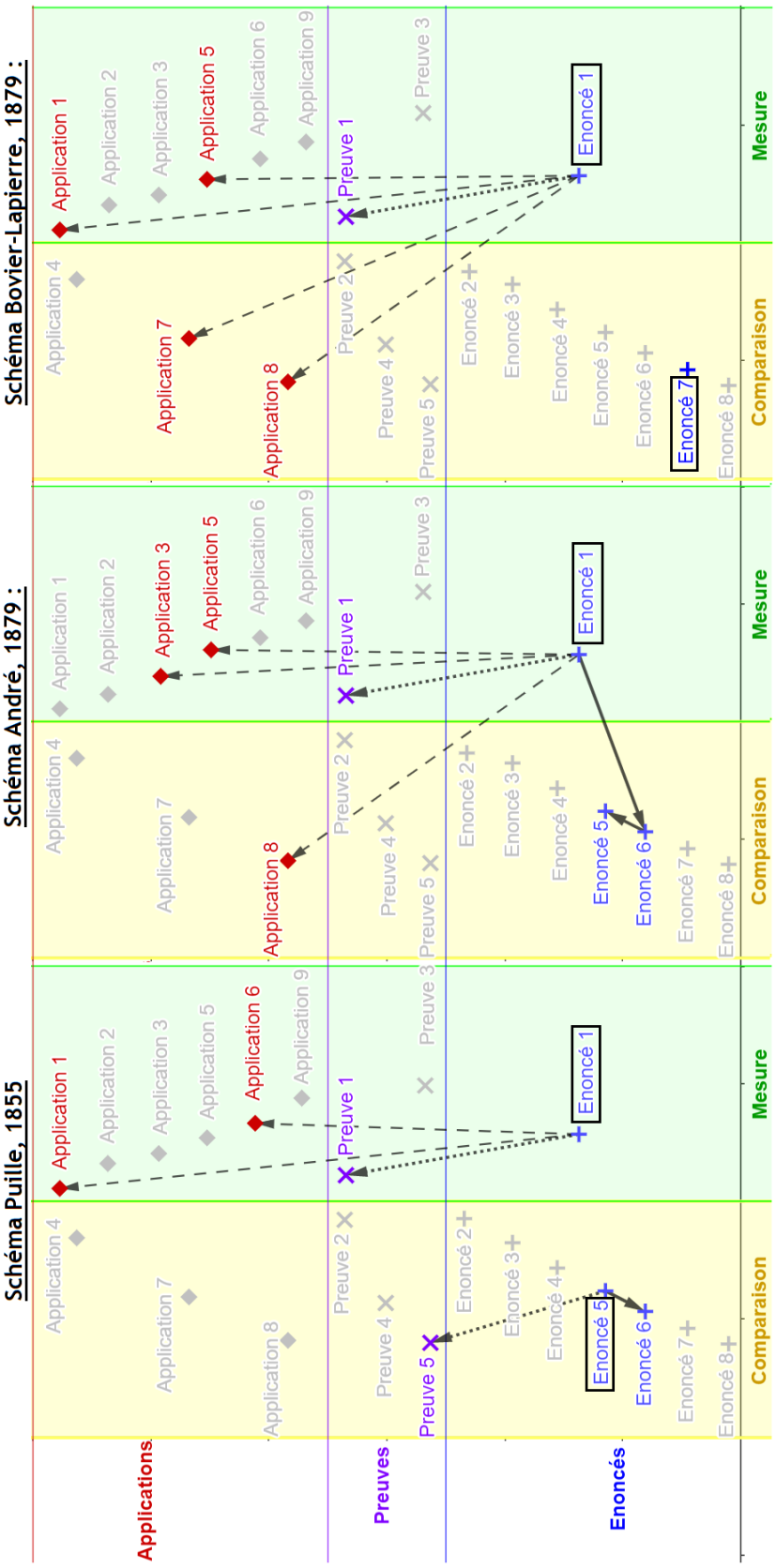


FIGURE III.68 – Mise en parallèle des schémas déductifs concernant l'aire du rectangle de Puille, André et Bovier-Lapierre

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Cette analyse met en évidence les liens complexes entre comparaison et mesure à travers le cas de l'aire du rectangle au sein des manuels du corpus, à l'interface entre ces deux approches possibles (voir figure III.69 p. 461). La voie de la comparaison n'est pas suivie par tous, même si la tradition euclidienne affiche une permanence au cours de la période, avec une partie des auteurs qui comparent avant de mesurer, à l'instar de Terquem, Vincent, Rouché et Comberousse, ou Girod (voir schémas III.65 p. 455 et III.66 p. 457). D'autres préfèrent la piste de la mesure, davantage dans le sillage de la tradition des géométries pratiques. Parmi eux, une partie traite la question exclusivement sous cet angle, comme les auteurs des manuels dont les objectifs sont plus explicitement pratiques (Bovier-Lapierre, 1879 ; Puille, 1855). Les autres déduisent les propriétés de comparaison de celles relatives à la mesure, comme dans une partie des titres plus tardifs (P. André, 1879) (voir schéma III.68 p. 460). Une autre possibilité est de traiter en parallèle les deux versions du résultat, tout en exhibant les connexions entre elles, comme le fait Sonnet (voir schéma III.67 p. 458). Les applications mises en avant par les auteurs concernent aussi bien la mesure que la comparaison, mais peuvent être issues de théorèmes de l'une comme de l'autre.

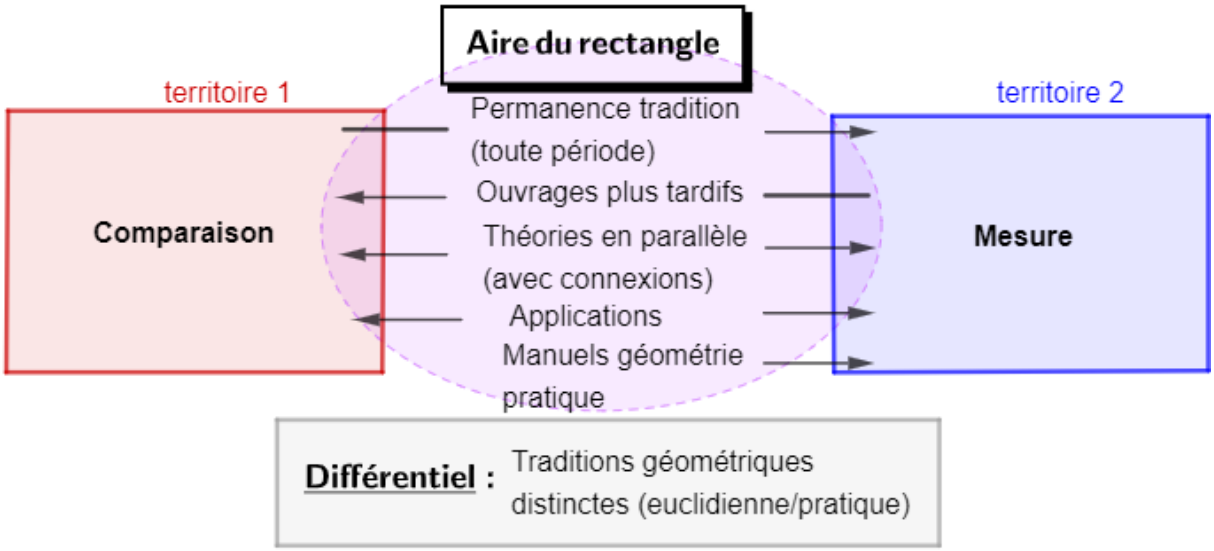


FIGURE III.69 – Schéma montrant en quoi l'aire du rectangle est à l'interface des traditions géométriques de la comparaison et de la mesure

Les liens logiques entre les théorèmes montrent quoiqu'il en soit des transferts de l'approche par comparaison à celle par la mesure, et inversement. Nous analysons plus en détails dans la section III.2.2 (p. 465) les chaînons de raisonnement permettant ces échanges et flux au sein des preuves.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.2.1.2 Le cas du cercle et de l'ellipse

Concernant l'aire du rectangle, les énoncés de comparaison et de mesure, lorsqu'ils sont tous les deux présents dans les ouvrages, peuvent donc être présentés dans deux ordres différents, débutant par des théorèmes établissant les rapports d'aires de figures entre elles, puis en déduisant leurs formules directes de calcul, ou réciproquement. Il en est de même en ce qui concerne l'aire du disque, même si un large consensus s'établit, parmi les auteurs qui proposent les deux versions des énoncés, pour présenter la formule de l'aire du cercle en amont de la comparaison des aires des cercles de rayons différents. C'est en effet ce que font 29 des 32 auteurs qui énoncent les deux types de résultats (comparaison et mesure) [115].

Néanmoins, trois auteurs du début du siècle énoncent et démontrent en premier lieu la proposition indiquant que « deux cercles ont pour rapport de leurs surfaces, celui des quarrés [*sic*] de leurs diamètres ou celui des quarrés de leurs rayons » (Bergery, 1828, p. 258), avant de donner la formule de calcul de l'aire du cercle quelques pages plus loin. Les trois manuels qui offrent cette présentation sont ceux de Legendre (1823), Bergery (1828) et Terquem (1829), tous les trois publiés (ou réédités) avant 1830. Les preuves de Legendre, aussi bien de l'énoncé de comparaison que de celui de la mesure, sont menées par l'absurde, dans la lignée euclidienne, comme nous l'avons étudié dans la section III.1.1.3 (p. 367). Celles de Bergery et Terquem se présentent comme des conséquences de la théorie des similitudes. Terquem écrit par exemple que « les circonférences sont des courbes semblables ; en effet, on peut placer ces circonférences de manière à ce qu'elles soient concentriques ; alors le centre est évidemment un centre de similitude, et les rayons des circonférences sont des rayons homologues ». Sans argument supplémentaire, il en tire directement, entre autres conséquences, que « les aires des cercles sont entre elles comme les carrés des rayons » (Terquem, 1829, p. 174), puisque ce résultat a été préalablement établi, de façon plus générale, dans le cadre des figures semblables. Bergery a quant à lui une approche légèrement différente, puisqu'il assimile deux cercles à deux polygones semblables « d'un très-grand nombre de très-petits côtés » (Bergery, 1828, p. 253), ce qui lui permet de leur appliquer le résultat établi sur le rapport des aires de deux polygones semblables, qui est « le même que celui des quarrés [*sic*] correspondants ou des quarrés de deux diagonales correspondantes » (Bergery, 1828, p. 258). Quelques autres auteurs établissent la formule de l'aire du cercle avant ce résultat, mais le démontrent néanmoins en utilisant le même type d'arguments (comme Puille (1855, p. 164-165) ou Bos (1875, p. 144)).

115. Ce large consensus explique pourquoi nous ne choisissons pas de traiter la question de manière aussi approfondie que pour le rectangle (pour lequel l'ordre de présentation des résultats est bien plus contrasté) en faisant notamment usage des schémas de structure déductive. Nous optons en revanche pour l'étude spécifique des cas d'auteurs qui n'entrent pas dans ce choix très majoritaire.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Pour ce qui est de l'aire de l'ellipse, l'énoncé classique de la formule (dans 14 manuels) s'accompagne assez rarement (3 fois) de son équivalent exprimé par comparaison au(x) cercle(s), indiquant que cette aire est « moyenne proportionnelle entre les aires des cercles décrits sur les deux axes comme diamètres » (Cirodde, 1858, p. 372). Mis à part Cirodde, Rouché et Comberousse (1866, p. 662) et Tombeck (1879, p. 440) présentent également leur énoncé sous cette variante, qui diffère de l'énoncé usuel davantage par sa forme que par son fond, puisque les deux sont équivalents. Chez Tombeck par exemple, il s'agit simplement d'une remarque faisant suite au théorème selon lequel « les deux axes d'une ellipse étant représentés par $2a$ et $2b$, la surface de l'ellipse est mesurée par le produit πab », et qui précise que la « moyenne géométrique » des mesures des deux cercles décrits sur les axes de l'ellipse est $\sqrt{\pi a^2 \times \pi b^2}$, ou πab, ce qui justifie le résultat énoncé en termes de moyenne proportionnelle.

La tendance qui s'impose naturellement pour les aires du cercle et de l'ellipse, au fil du siècle, est donc bien de mettre en avant la mesure plutôt que la comparaison. Mais même si les résultats sur les comparaisons des aires se voient progressivement rétrogradés en deuxième position dans l'ordre logique des traités, leur permanence dans les ouvrages est significative de l'importance qu'ils revêtent dans la construction d'une pensée au sujet des aires (voir par exemple la constance dans le temps de l'énoncé sur le rapport des aires des cercles de rayons différents — « cercle énoncé 3 » — sur la figure II.16 p. 306). Quoiqu'il en soit, à l'issue de cette étude, les liens entre comparaison et mesure sont manifestement plus complexes qu'une simple relation d'ordre ou même de causalité. Dans le cas de ces deux figures, les positions des auteurs sont plus uniformes que dans le cas du rectangle : ils s'accordent presque tous pour présenter la formule de l'aire du cercle avant d'énoncer la proposition sur le rapport des aires des cercles de rayons différents, et l'ellipse est très majoritairement présentée sous le seul angle de la mesure et non de la comparaison. Les aires curvilignes (cercle, ellipse) forment donc une interface entre mesure et comparaison différente que dans le cas du rectangle (voir schéma III.70 p. 464).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

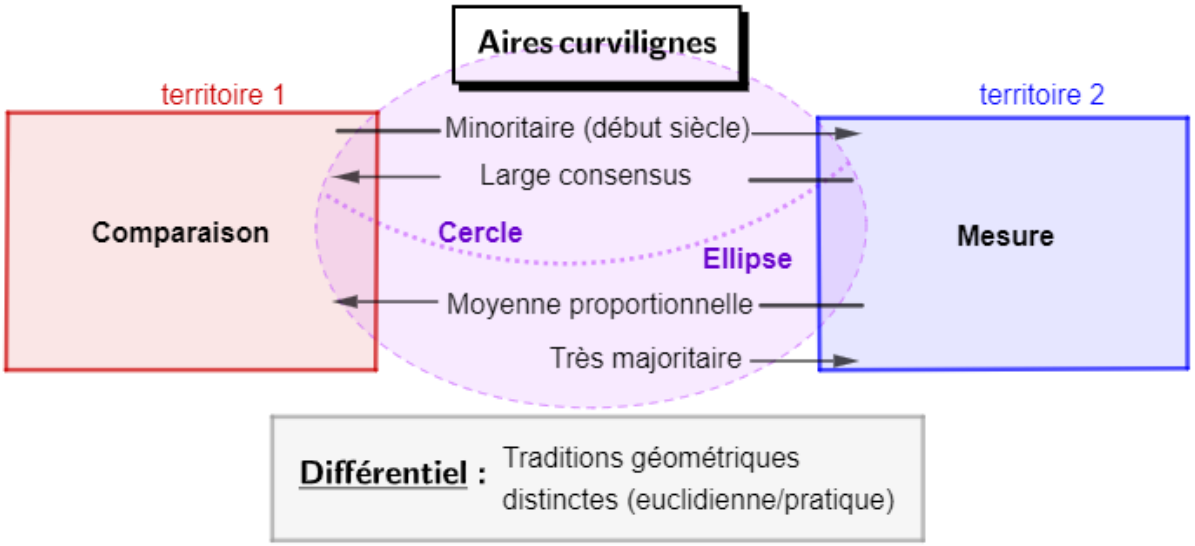


FIGURE III.70 – Schéma montrant en quoi les aires curvilignes (cercle, ellipse) sont à l'interface des traditions géométriques de la comparaison et de la mesure

La figure du rectangle reste en effet particulière dans l'édifice de la géométrie des aires, puisqu'elle sert de fondement à tout le reste de la théorie, et il convient de faire les bons choix de départ pour assurer la solidité de l'édifice. Les approches par la comparaison ou la mesure sont dans ce cas choisies presque équitablement par les auteurs, montrant que les deux options peuvent s'avérer pertinentes dans un contexte d'enseignement. En revanche, si une partie des auteurs met expressément en avant les liens entre les deux systèmes, dans un sens comme dans l'autre, d'autres les abordent au contraire de manière très cloisonnée. Enfin, il est à noter que si une assez large partie des auteurs choisit de n'aborder que la mesure sans parler de comparaison, que ce soit pour le rectangle (14 sur 40), l'ellipse (11 sur 14), et dans une moindre mesure, le cercle (6 sur 38), aucun ne fait le choix contraire, c'est-à-dire n'expose les résultats de comparaison sans donner les formules permettant de les mesurer. La question de « mesurer » s'impose donc comme un objectif en soi, qu'elle s'accompagne ou non de la question de « comparer », en amont, en aval, ou de manière séparée.

Au cœur des théories sur les aires en général, et sur celle du rectangle en particulier, nous nous proposons désormais d'étudier les maillons des chaînes déductives analysées ci-avant, en mettant l'accent sur les objets et raisonnements permettant le passage d'un énoncé à un autre.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.2.2 Entre comparaison et mesure, le rôle des proportions et de l'unité

Les ouvrages étudiés au sein du corpus sont organisés de manière diverse, mais avec des points communs à la plupart d'entre eux. Dans 35 d'entre eux, la géométrie plane est distinguée de la géométrie dans l'espace, qui lui succède [116], trois sont des ouvrages qui ne traitent que de la géométrie plane (Bos, 1884 ; Briot et Vacquant, 1859 ; Tarnier, 1872), et deux mènent indistinctement les considérations sur les surfaces et les corps dans des parties communes (Dalsème, 1880 ; Méray, 1874). Dans le plan, les chapitres ou sections sont déclinés plus ou moins explicitement en termes de lignes, puis de surfaces, alors que les objets d'étude dans l'espace incluent également les solides (appelés aussi les « corps »). C'est le cas par exemple de l'ouvrage de Bézout, partagé en trois sections, une première intitulée « Des lignes », une seconde « Des surfaces » et la dernière « Des solides » (Bézout, 1848). Dans le même esprit, la géométrie de Sonnet se présente en deux parties, géométrie plane puis dans l'espace, avec chacune deux sections, « des lignes » et « des figures planes » pour la première, « des surfaces et des lignes » et « des corps » pour la seconde (Sonnet, 1839). Cet ordre convient également pour des ouvrages moins théoriques, leurs auteurs organisant leurs contenus plus appliqués suivant cette même structure, comme Bergery, qui décline son texte en « Tracé des lignes », « Formation et combinaison des surfaces » pour finir par la « formation et combinaison des corps » (Bergery, 1828). Souvent, le traitement de la mesure des aires planes est présenté à la fin de la section sur les surfaces.

Dans ce contexte, la théorie des figures semblables et/ou des proportions précède généralement celle de la mesure des aires. Il existe de rares exceptions, comme dans le livre III des *Éléments* de Legendre, où la théorie des équivalences de figures précède celle de la similitude (Legendre, 1823), de même que dans le traité d'Eysseric et Pascal (1850). Les cas de similitudes et l'usage des grandeurs proportionnelles, préalablement établis, sont donc à même de se voir convoqués pour l'établissement des résultats fondamentaux sur les aires, comme la mesure (ou la comparaison) de l'aire des rectangles et le théorème de Pythagore.

III.2.2.1 Proportions et unités dans la détermination de l'aire du rectangle

Concernant le cas de l'aire du rectangle analysé dans la section III.2.1.1 (p. 451), deux articulations majoritaires ont été mises en avant dans l'enchaînement logique des propositions. L'une conduit de l'énoncé 5 au 6, puis au 1 (de la comparaison à la mesure), et l'autre, un peu moins répandue et globalement plus tardive dans le siècle,

116. Il peut figurer en dernier lieu, après ces deux grandes parties, une partie spécifique sur les courbes.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

du 1 au 6, puis au 5 (de la mesure à la comparaison). Ces séquences nécessitent des chaînons de raisonnement intermédiaires, que nous allons désormais examiner.

Dans le premier des cas que nous venons d'évoquer, deux types d'éléments permettent la transition d'un énoncé vers celui qui en découle : les figures et les calculs, qui peuvent parfois coexister au sein des preuves concernées. Pour montrer que des rectangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, connaissant le rapport des aires des rectangles de même base ou hauteur, une figure spécifique sert de charnière, que l'on trouve par exemple chez Legendre (voir figure III.71 p. 466). Cette configuration est le support du raisonnement suivant : si l'on considère les rectangles $ABCD$ et $AEGF$, et qu'on les complète en prolongeant leurs côtés en un rectangle $AEHD$, alors $AEHD$ et $ABCD$ ont la même hauteur, donc sont entre eux comme leurs bases, alors que $AEHD$ et $AEGF$ ont la même base, donc sont entre eux comme leurs hauteurs. En composant ces proportions, ou en multipliant les rapports obtenus, on obtient bien le résultat escompté. Cette figure est visible dans des manuels comme (Bergery, 1828 ; Percin, 1842 ; Vincent, 1844) jusqu'au milieu du siècle environ, après quoi elle ne s'y trouve plus. Cirodde, en 1858, évoque une telle figure, mais sans la représenter, en écrivant : « Construisons un troisième rectangle R'' qui ait la même base b que le premier, et la même hauteur h' que le second » (Cirodde, 1858, p. 173), et poursuit en en déduisant les égalités de rapports *ad hoc*.

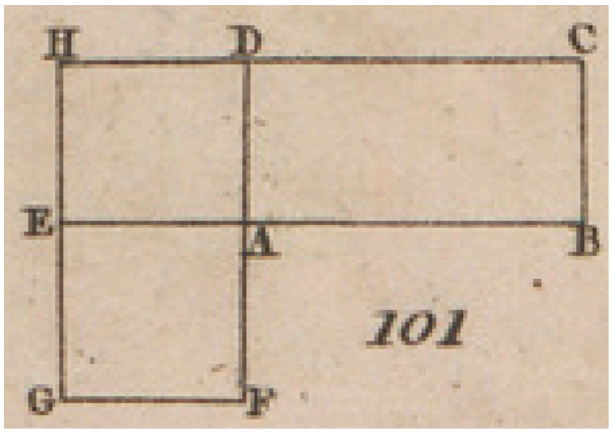


FIGURE III.71 – Figure de Legendre accompagnant la preuve de l'énoncé 6 (les rectangles sont entre eux comme les produits de leurs longueurs par leurs largeurs) à partir du 5 (Legendre, 1823, pl. 4)

Cette formulation est proche de celles d'autres auteurs, comme Idoux (1842, pl. iv), Amiot (1859, p. 145) ou Girod (1893, p. 183), qui accompagnent leur description d'une figure qui joue davantage le rôle d'illustration que d'une construction menant à un résultat, et concluent par le même argument de produit des rapports (voir figure III.73 p. 467).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

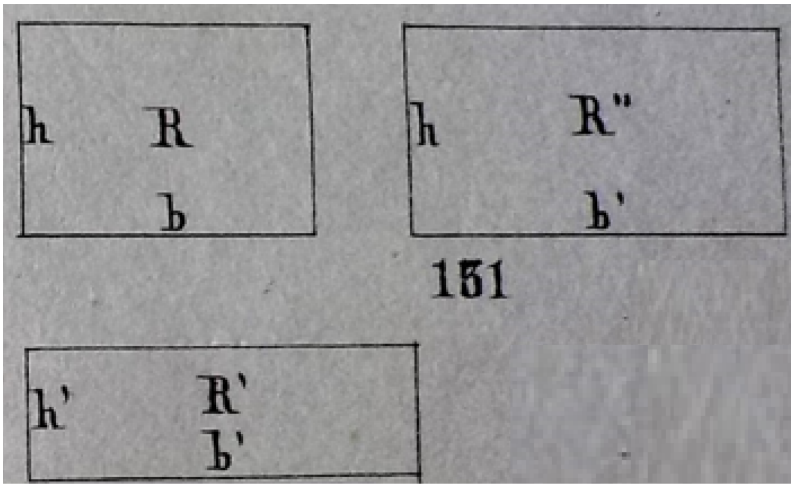
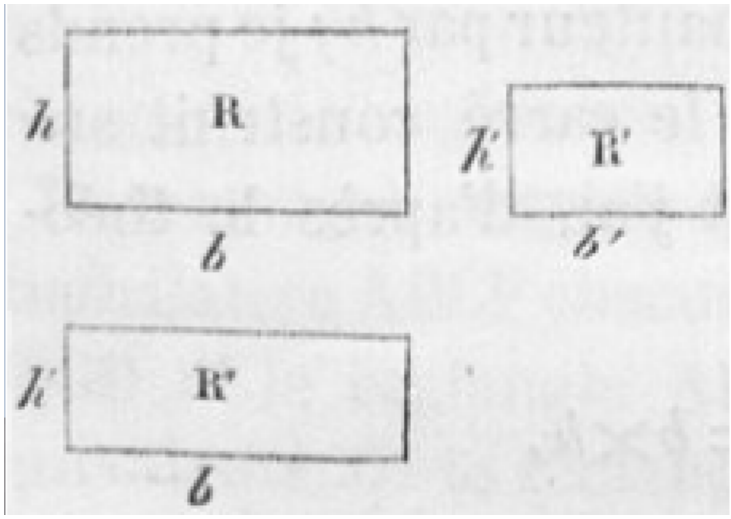


FIGURE III.72 – (c) chez Idoux (1842, pl. iv)



(a) chez Amiot (1859, p. 145)

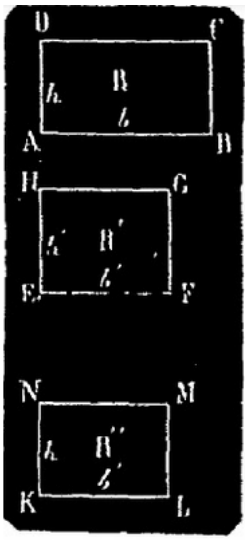


Fig. 299.

(b) chez Girod (1893, p. 183)

FIGURE III.73 – Figures illustrant la preuve de la proposition de l'énoncé 6

En effet, en prenant les notations de la figure d'Idoux, en comparant les rectangles deux à deux, on obtient que : R'' est à R comme b' est à b, soit en notations modernes :

$$\frac{R''}{R} = \frac{b'}{b},$$

et R' est à R'' comme h' est à h, soit :

$$\frac{R'}{R''} = \frac{h'}{h}.$$

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Donc par produit de rapports :

$$\frac{R'}{R} = \frac{b' \times h'}{b \times h}.$$

Vincent, en 1844, propose une figure identique, mais en rajoutant un élément permettant de franchir l'étape suivante, le carré unité, représenté sur sa figure n° 139 par $abcd$ (voir figure III.74 p. 468). Il le dispose à côté de la configuration précédente, reliée à elle par une accolade, comme il est d'usage sur les planches de figures de l'époque. Il écrit : « Mais le carré étant la plus simple de toutes les figures, on prend ordinairement pour unité de surface *le carré construit sur l'unité linéaire* » (Vincent, 1844, p. 172). Et en effet, la relation d'égalité des rapports des deux rectangles, établie précédemment, devient la formule de l'aire du rectangle à condition de remplacer R, b et h par 1, en considérant le rectangle du dénominateur égal au carré unité.

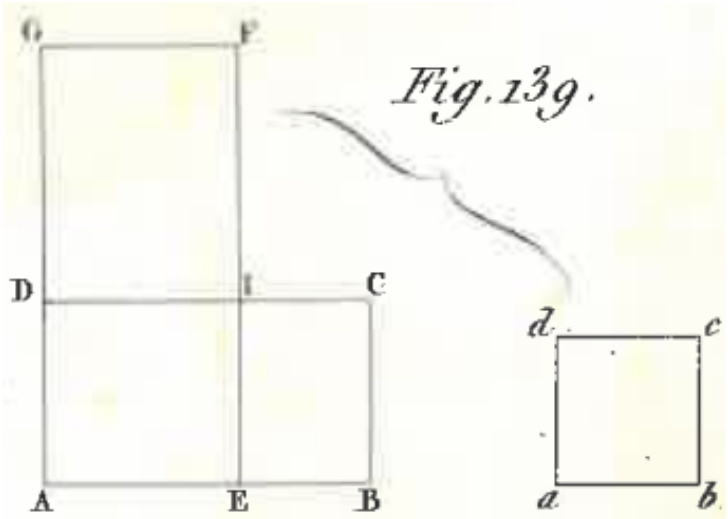


FIGURE III.74 – Figure illustrant les preuves des propositions des énoncés 6 et 1 chez Vincent (1844, pl. vii)

Cette voie, pour déduire la formule de l'énoncé 1 à partir de la proposition de l'énoncé 6, est couramment employée par les auteurs qui vont de la comparaison à la mesure, mais sans forcément accompagner leur raisonnement d'une figure. Dans une scholie, Vincent fait référence à l'extension possible de ce résultat « à deux parallélogrammes qui auraient *les mêmes angles* » (Vincent, 1844, p. 171). Cette version plus large correspond à la proposition 23 du livre VI d'Euclide (voir figure III.75 p. 469) [117].

117. Chez Euclide, la proposition de l'énoncé 6 sur les rapports des aires des rectangles quelconques n'apparaît pas explicitement, mais est directement déductible de la proposition VI. 23 dans le cas où l'angle commun aux parallélogrammes est l'angle droit.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

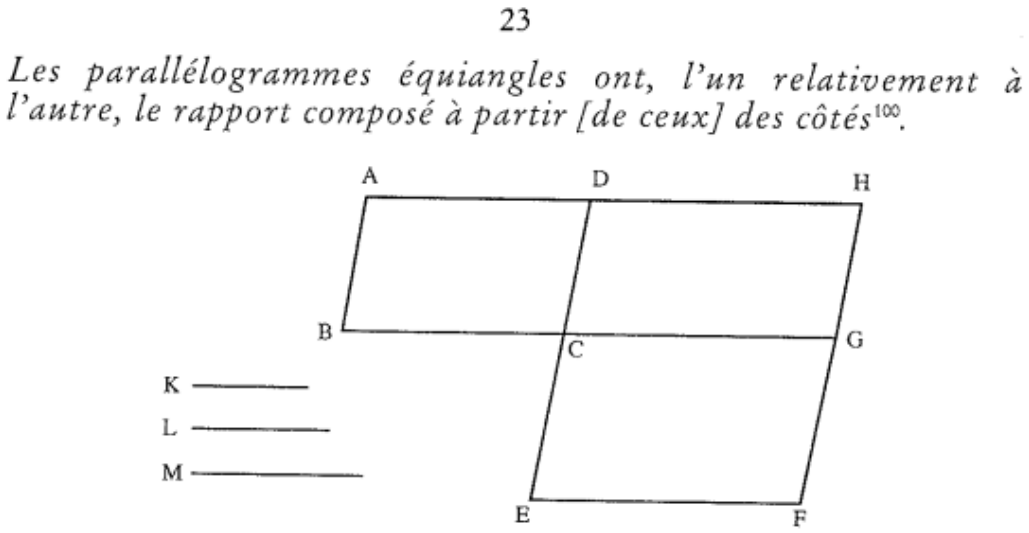


FIGURE III.75 – Proposition 23 du livre VI des *Éléments* d'Euclide (1994, p. 214)

Enfin, dans sa *Géométrie simplifiée* en 1842, Percin propose un moyen direct de déduire de l'énoncé 5 la formule de l'énoncé 1, sans passer par le résultat intermédiaire de l'énoncé 6, en combinant les deux procédés analysés ci-avant, c'est-à-dire en mettant directement en relation (géométrique comme numérique) un rectangle donné R avec un carré Q « pris pour unité superficielle » (Percin, 1842, p. 63). La représentation sur laquelle il s'appuie est la figure III.76 (p. 469), à partir de laquelle il effectue les calculs réalisés à la p. 467, avec le second rectangle (en fait un carré) égal à 1 ainsi que ses dimensions.

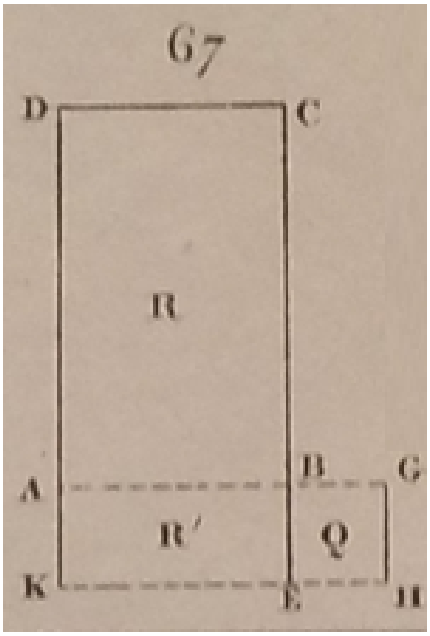


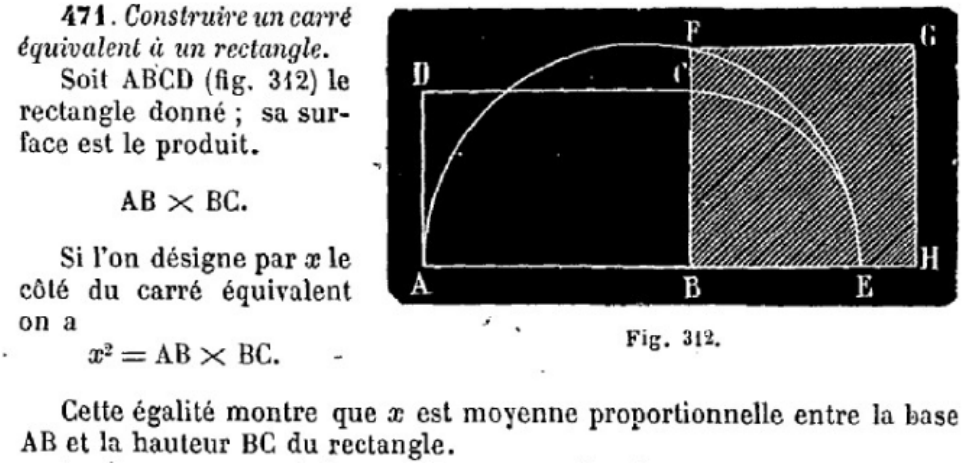
FIGURE III.76 – Figure permettant de déduire l'énoncé 1 de l'énoncé 5 chez Percin (1842, pl. 2)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans tous ces cas, la figure du carré, et notamment du carré unité, joue un rôle essentiel dans l'articulation des propositions, notamment entre l'énoncé 6 et la formule de l'aire du rectangle (énoncé 1). La figure du carré est d'ailleurs mise en relation avec celle du rectangle dans un autre résultat, celui de sa quadrature, puisqu'il s'agit d'une méthode de construction d'un carré équivalent à un rectangle donné (voir figure III.77 p. 470). Mais cette proposition ne permet pas d'obtenir la formule de l'aire du rectangle, car, même si les moyennes proportionnelles employées dans ce cas expriment l'égalité :

$$x^2 = AB \times BC,$$

où x est le côté du carré à construire (Girod, 1893, p. 192), il faudrait d'abord savoir que x^2 correspond à l'aire du carré, pour pouvoir en déduire que le produit des longueurs est l'aire du rectangle. Or, le résultat sur la mesure de l'aire du carré n'est pas plus trivial à obtenir que le calcul de l'aire du rectangle, et est souvent établi et prouvé conjointement à ce dernier[118].



471. *Construire un carré équivalent à un rectangle.*

Soit ABCD (fig. 312) le rectangle donné ; sa surface est le produit.

$$AB \times BC.$$

Si l'on désigne par x le côté du carré équivalent on a

$$x^2 = AB \times BC.$$

Fig. 312.

Cette égalité montre que x est moyenne proportionnelle entre la base AB et la hauteur BC du rectangle.

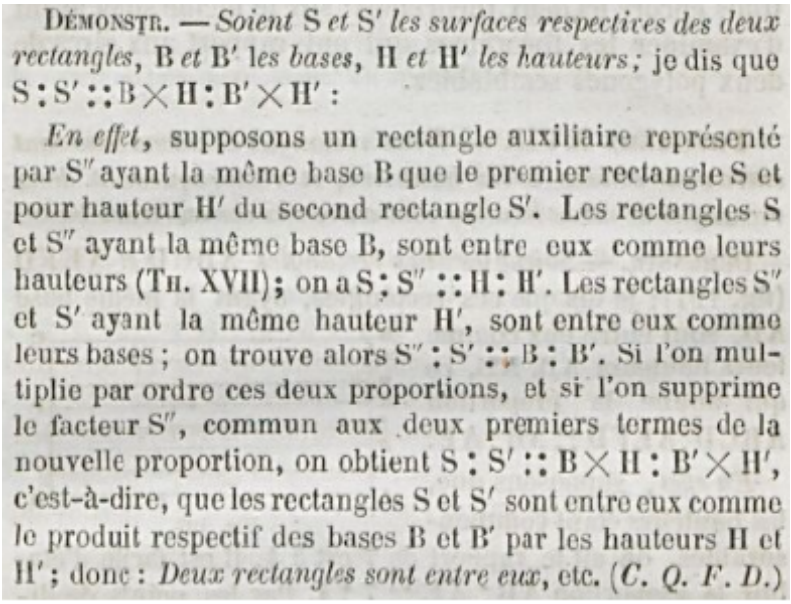
FIGURE III.77 – Énoncé et figure de la quadrature du rectangle chez Girod (1893, p. 192)

Ces transitions géométriques d'un énoncé à un autre pour établir la formule de l'aire des rectangles, en partant de leur comparaison, sont très situées dans le temps, et ne perdurent pas après 1850. Dans le corpus, nous observons la formation d'un consensus, manifeste à partir de Puille en 1855, pour présenter ces passages uniquement par des égalités et des produits de rapports, dans lesquels on peut remplacer certaines

118. Dans cet exemple, comme dans 14 des 15 ouvrages qui abordent la quadrature du rectangle, les formules des aires du carré et du rectangle sont un préalable à la construction du carré équivalent. Mais réciproquement, il est possible, à partir de la configuration présentée ici, d'établir par des propositions géométriques cette relation. Notre propos est de préciser que, même si cette égalité était prouvée, elle ne nous apprendrait quelque chose sur le lien entre le produit des dimensions et l'aire du rectangle, que si cette même relation était établie pour le carré.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

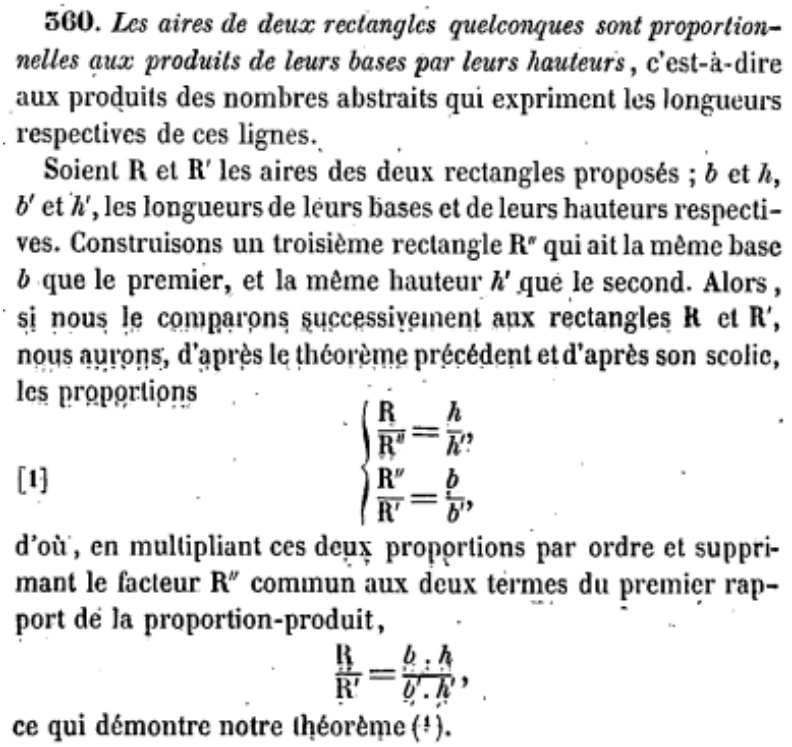
données par 1, sans référence à une configuration géométrique quelle qu'elle soit. Ces preuves sont parfois présentées avec les notations des ratios, et d'autres avec l'écriture fractionnaire (voir figure III.78 p. 472). La figure III.71 (p. 466) et ses dérivées n'apparaissent plus dans les manuels du corpus à partir de cette date.



DÉMONSTR. — *Soient* S *et* S′ *les surfaces respectives des deux rectangles*, B *et* B′ *les bases*, H *et* H′ *les hauteurs ;* je dis que S : S′ :: B × H : B′ × H′ :

En effet, supposons un rectangle auxiliaire représenté par S″ ayant la même base B que le premier rectangle S et pour hauteur H′ du second rectangle S′. Les rectangles S et S″ ayant la même base B, sont entre eux comme leurs hauteurs (TH. XVII) ; on a S : S″ :: H : H′. Les rectangles S″ et S′ ayant la même hauteur H′, sont entre eux comme leurs bases ; on trouve alors S″ : S′ :: B : B′. Si l'on multiplie par ordre ces deux proportions, et si l'on supprime le facteur S″, commun aux deux premiers termes de la nouvelle proportion, on obtient S : S′ :: B × H : B′ × H′, c'est-à-dire, que les rectangles S et S′ sont entre eux comme le produit respectif des bases B et B′ par les hauteurs H et H′ ; donc : *Deux rectangles sont entre eux*, etc. (*C. Q. F. D.*)

(a) chez Puille (1855, p. 162) (ratios)



360. ***Les aires de deux rectangles quelconques sont proportionnelles aux produits de leurs bases par leurs hauteurs***, c'est-à-dire aux produits des nombres abstraits qui expriment les longueurs respectives de ces lignes.

Soient R et R′ les aires des deux rectangles proposés ; b et h, b' et h', les longueurs de leurs bases et de leurs hauteurs respectives. Construisons un troisième rectangle R″ qui ait la même base b que le premier, et la même hauteur h' que le second. Alors, si nous le comparons successivement aux rectangles R et R′, nous aurons, d'après le théorème précédent et d'après son scolie, les proportions

$$[1] \qquad \begin{cases} \frac{R}{R''} = \frac{h}{h'}, \\ \frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}, \end{cases}$$

d'où, en multipliant ces deux proportions par ordre et supprimant le facteur R″ commun aux deux termes du premier rapport de la proportion-produit,

$$\frac{R}{R'} = \frac{b \cdot h}{b' \cdot h'},$$

ce qui démontre notre théorème (1).

(b) chez Cirodde (1858, p. 173-174) (quotients)

FIGURE III.78 – Preuves de l'énoncé 6 par l'utilisation de ratios et par produit de rapports

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Pour ce qui est des manuels dans lesquels la mesure précède la comparaison, la transition entre les énoncés 1 et 6 se fait directement par quotient de produits, puis le passage du 6 au 5 s'effectue en posant, dans l'égalité de rapports ainsi effectuée, les bases (ou les hauteurs) égales. Autrement dit, puisque $R = B \times H$ et $R' = B' \times H'$, on a d'abord :

$$\frac{R}{R'} = \frac{B \times H}{B' \times H'},$$

puis, dans le cas où $B = B'$:

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'}.$$

Seul Dupuis propose une alternative en montrant directement l'énoncé 5 à partir de la formule de l'énoncé 1 par un raisonnement inductif, qu'il explique dans une remarque : « Si la base d'un rectangle devient 2, 3, 4,... fois plus grande, sa hauteur ne changeant pas, sa surface devient aussi 2, 3, 4,... fois plus grande ; donc deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases » (Dupuis, 1857, p. 112).

Finalement, l'analyse des chaînons de raisonnement permettant de passer des résultats de comparaison des aires des rectangles à ceux de leurs mesures, a révélé des procédés s'appuyant tantôt sur des configurations géométriques spécifiques, mettant notamment en jeu la figure du carré (en particulier le carré unité), tantôt sur des raisonnements numériques faisant intervenir des égalités et des opérations sur des rapports. Une évolution temporelle est d'ailleurs remarquable, ce chaînon s'appuyant sur une figure caractéristique au début du siècle, qui disparait peu à peu pour laisser place à des manipulations de rapports à la fin (voir schéma III.79 p. 473). Cette progression, d'un raisonnement sur figure à un raisonnement calculatoire, est révélatrice de la prépondérance croissante du calcul et du nombre sur les figures et les grandeurs dans l'enseignement de la géométrie.

Cette double facette comparaison/mesure met l'accent sur le fait qu'il est difficile de traiter la question des aires, et en particulier celle du rectangle, d'un point de vue strictement géométrique, en s'extrayant des calculs et des considérations sur les nombres, dans un contexte d'arithmétisation croissante des grandeurs. La question de l'aire du rectangle se situe donc à la croisée de la géométrie et des nombres, et y joue son rôle d'interface, en cela qu'elle mobilise des interactions permanentes entre le domaine des grandeurs géométriques et celui des calculs numériques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

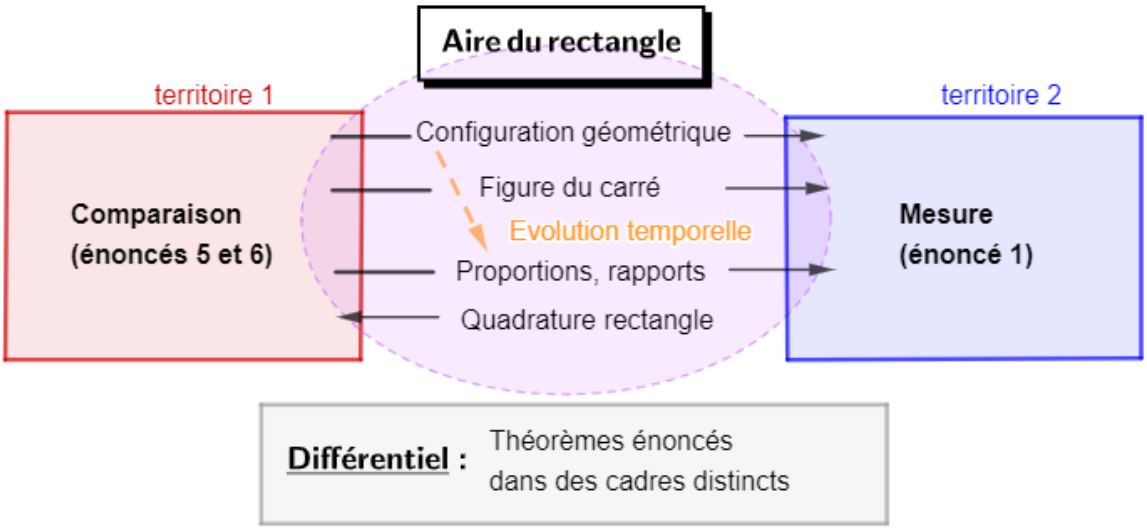


FIGURE III.79 – Schéma montrant en quoi les énoncés concernant l'aire du rectangle sont à l'interface des approches par comparaison et par le mesure

III.2.2.2 Figures semblables, proportions et théorème de Pythagore

Les différentes théories évoquées quand il s'agit du théorème de Pythagore sont principalement celle de la similitude, ou plus spécifiquement des triangles semblables (incluant la théorie des proportions), et celle de la mesure ou de la comparaison des aires (en particulier la théorie des équivalences, s'intéressant aux figures d'aires égales, dans l'esprit du livre I des *Éléments* d'Euclide, voir la sous-section I.3.1.1 p. 103). Parfois implicites, ces cadres théoriques sont néanmoins désignés très clairement par certains auteurs. Bourget indique dans son *Cours de géométrie* : « Nous retombons ainsi sur le théorème du carré de l'hypoténuse au moyen de la théorie des triangles semblables, qui est indépendante de la mesure des aires planes et qui pourrait la précéder » (Bourget, 1885). Il distingue ainsi les théories dans lesquelles se situe la proposition, et discute leur mise en relation, ainsi que l'ordre possible entre elles. Idoux développe quant à lui le théorème dans le cadre de la « mesure des surfaces planes », en lien avec la théorie des triangles semblables, puis en propose une autre preuve « où l'on n'emploie pas les proportions » dans son « supplément à la géométrie plane » (Idoux, 1842, p. 228). Pour sa part, Mauduit évoque la proposition dans de nombreuses parties de son ouvrage, relatives à des théories variées, et notamment celle, de façon unique dans le corpus, des « lignes qui se coupent au-dedans ou au-dehors du cercle » (Mauduit, 1790, p. 164).

Parmi les 34 manuels du corpus dans lesquels figure le théorème de Pythagore exprimé en aires, 25 abordent sa preuve par des questions de similitude, en lien avec les triangles semblables (preuves 2 et 3) ou le rapport de leurs aires (preuve 6), 20 présentent la preuve euclidienne (preuve 7), et 16 proposent les deux (voir le tableau II.40 p. 291 de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la sous-section II.3.2.2). La démarche majoritaire est donc de passer par la similitude des triangles, et même parmi les 16 qui y adjoignent la preuve euclidienne, 12 le font seulement après avoir démontré le théorème par les triangles semblables [119] (voir tableau récapitulatif III.9 p. 474).

Preuve par...	...similitude proposée	...similitude non proposée	Total
...méthode euclidienne proposée	16 (dont 12 preuve euclidienne après similitude)	4	20
... méthode euclidienne non proposée	9	5	14
Total	25	9	34

TABLE III.9 – Tableau récapitulatif des types de preuves du théorème de Pythagore proposées dans les manuels du corpus

Lacroix, par exemple, commence par présenter une preuve dans le cadre des triangles semblables, avant de présenter la démonstration d'Euclide (pour l'étude de cette seconde preuve, voir p. 350). Celle-ci s'appuie sur une configuration sommaire : un triangle rectangle dont la perpendiculaire issue du sommet de l'angle droit est abaissée sur l'hypoténuse. Cette droite partage le triangle en deux autres triangles, semblables entre eux ainsi qu'au premier. La relation de similitude exprimée en rapports de longueurs donne presque immédiatement le résultat (voir figure III.80 p. 475).

74. *Théorème.* Si de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on nomme *hypoténuse*, 1°. cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux :

2°. Elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou *segmens*, tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent, et l'hypoténuse entière :

3°. La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypoténuse.

Démonstration. Le triangle *ABC fig.* 44, étant supposé rectangle en *B*, et *BD* étant perpendiculaire sur *AC*, les triangles *ABC* et *ABD* seront semblables (65); car ils auront, chacun à chacun, deux angles égaux, savoir : l'angle *A*, qui leur est commun à tous deux, et l'angle droit *ABC*, dans le premier, égal à l'angle droit *ADB*, dans le second. Le triangle *BDC* est, par les mêmes raisons, semblable au triangle *ABC*, puisque l'angle *C* leur est commun, et que l'angle *BDC* de l'un est droit, ainsi que l'angle *ABC* de l'autre.

Si on compare successivement chacun des deux triangles *ABD* et *BDC*, avec le triangle *ABC*, en observant que les angles *ABD* et *CBD* sont respectivement égaux aux angles *C* et *A*, on trouvera, entre leurs côtés homologues, ces proportions :

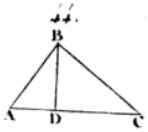
$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC,$$

qui constituent la seconde partie de la proposition.

Comparant ensuite les triangles *ABD* et *BCD* l'un à l'autre, on aura

$$AD : BD :: BD : CD,$$

ce qui forme la troisième partie de l'énoncé ci-dessus.



75. *Corollaire.* Il suit du théorème précédent, que les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse, est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.

En effet les proportions

$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC,$$

donnent

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{AC}, \quad CD = \frac{\overline{BC}^2}{AC};$$

et en ajoutant *AD* avec *CD*, on a

$$AC = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{AC} \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

FIGURE III.80 – Preuve de Lacroix par les triangles semblables (Lacroix, 1808, p. 47-48)

119. Pour l'étude de différents exemples où le théorème de Pythagore est abordé comme une conséquence de la théorie des triangles semblables, voir (Chevalarias, 2012).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Contrairement à sa preuve euclidienne, dans laquelle il mobilise un vocabulaire caractéristique de la géométrie des aires mettant en œuvre des équivalences de figures (voir p. 350), sa preuve par les triangles semblables s'inscrit dans la théorie des « lignes proportionnelles », avec des égalités de rapports, qui, par opération arithmétique (ici la somme), produisent le résultat escompté. Le lien entre les deux est justifié par le discours intermédiaire de Lacroix (voir citation p. 350), et assuré par le fait que les carrés (en nombre) des longueurs, sont les mesures des aires des carrés (en tant que figures géométriques). Ce double mécanisme, à la fois de langage et de fondement mathématique, permet de relier les connaissances du domaine de l'arithmétique à celles de la géométrie (ou réciproquement). Nous ne présentons pas d'étudier les 22 autres preuves proposées dans les manuels du corpus par la voie des triangles semblables, qui sont sensiblement identiques à celle de Lacroix : les arguments géométriques comme arithmétiques sont les mêmes, et les seuls écarts entre les démonstrations sont formels et relatifs à la présentation des calculs, comme l'usage des fractions à la place des rapports (voir par exemple à la fin du siècle la preuve de Girod 1893, p. 126-127).

Avant d'analyser, dans la section à suivre, les éléments de langage qui accompagnent ce changement de cadre, de la théorie des proportions en lien avec la similitude des triangles, vers la géométrie des aires, nous pouvons estimer l'apport d'une telle méthode pour l'enseignement de la géométrie au XIX^e siècle. En effet, à condition que les élèves aient été initiés au préalable à l'usage des rapports de grandeurs et des proportions, ce que prévoient les programmes d'arithmétique (voir p. 447), la théorie des triangles semblables est assez simple à mettre en œuvre. Les cas de similitude sont aisément repérables et exploitables, surtout dans les triangles rectangles où un seul angle commun en plus de l'angle droit suffit à les mettre en évidence. La preuve est ensuite transférée du côté de l'arithmétique, et même de l'algèbre, où une simple manipulation sur les produits des égalités permet de conclure. D'après Dhombres, cette preuve, qui existe aussi dans les *Éléments* d'Euclide (proposition VI. 31, voir (Euclide, 1994, p. 236-238) et figure III.39b p. 399) pour la version du théorème généralisée à des figures polygonales construites sur les côtés du triangle rectangle, pourrait porter une autre « cause » au théorème : la similitude des figures (Dhombres, 2009, p. 64). Pour les apprentis géomètres du XIX^e siècle, cette preuve constitue donc une alternative encore différente à celle qu'Euclide propose dans son livre I. Non plus axée sur des figures faisant apparaître des aires et leurs égalités (voir la sous-section III.1.1.2 p. 343), mais sur la théorie des similitudes et des grandeurs proportionnelles : elle apparaît, du fait même de ce changement de cadre, plus accessible aux élèves en termes de simplicité, reposant alors sur l'exploitation de quelques égalités de produits, tout en faisant apparaître une autre « raison véritable » au théorème sous la perspective des figures semblables.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Nous nous intéressons désormais au cas particulier de Mauduit, car il s'agit de l'auteur de notre corpus qui présente le plus de preuves du théorème de Pythagore (il en propose 6). Analyser la manière dont il expose ces preuves, et les liens qu'il tisse entre elles est de nature à mettre en évidence des interfaces entre différents aspects mis en jeu dans ce théorème. Mauduit situe le théorème de Pythagore dans de nombreux recoins de son édifice géométrique. Il exprime néanmoins sa préférence envers la théorie des triangles semblables « à laquelle on peut réduire toute la géométrie » (Mauduit, 1790, p. 82), faisant écho au propos de Legendre : « ainsi les propositions fondamentales de la géométrie se réduisent, pour ainsi dire, à celle-ci seule, que les triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels » (Legendre, 1823, p. 85). La « force » estimée de ces différentes théories n'empêche en rien leurs interactions, que l'on peut examiner particulièrement dans le cas où le théorème se trouve exposé dans de multiples cadres. Avant de nous pencher sur les contenus-mêmes de ses preuves, nous pouvons déjà observer comment Mauduit piste le théorème à travers ses autres résultats, comme conséquence du théorème de Ptolémée, de la théorie des triangles semblables ou celle du rapport de leurs aires. Il énumère ses preuves de « nouvelle » (Mauduit, 1790, p. 179) à « 3ème démonstration » (Mauduit, 1790, p. 180), avant qu'il ne « retombe encore dans la 47ème d'Euclide » (Mauduit, 1790, p. 186). Il annonce ensuite la « nouvelle et dernière » preuve (Mauduit, 1790, p. 187), mais ne résiste pas quelques pages plus loin à tirer « encore de ce théorème [les aires de polygones semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues] une nouvelle démonstration de la 47ème d'Euclide » (Mauduit, 1790, p. 221).

Il disperse ses six preuves du théorème dans son ouvrage, ce qui pose la question de l'ordre dans lequel il traite ces propositions, comme nous l'avons vu à travers le propos de Bourget un peu auparavant (p. 473). Tarnier regrette qu'en géométrie théorique « les *théorèmes* se succèdent, comme les anneaux d'une chaîne, dans l'ordre didactique, avec lequel il faut se familiariser, sous peine de faire des *cercles vicieux* », alors que dans la géométrie pratique qu'il propose, les parties sont suffisamment indépendantes pour ne pas avoir à imposer des « *tours de force de mémoire* » aux élèves (Tarnier, 1872, p. vii). L'ordre qu'il appelle didactique semble être assimilé ici à un ordre répondant à la logique mathématique, dans laquelle l'enchaînement des propositions ne doit pas produire de contradiction. Son propos fait écho à celui que tient Legendre bien avant lui : « Ce qui caractérise particulièrement les théorèmes de géométrie, et ce qui est une preuve invincible de leur certitude, c'est qu'en les combinant ensemble d'une manière quelconque, pourvu qu'on raisonne juste, on tombe toujours sur des résultats exacts. » (Legendre, 1823, p. 85). Ce qui importe n'est donc pas l'ordre, en partie arbitraire, selon lequel on choisit de présenter des théorèmes, mais la cohérence interne de l'édifice

Licence CC BY-NC-ND 3.0

obtenu [120]. Il est donc légitime de se demander si Mauduit, à force de tours et détours, ne se contredit pas ou ne fait pas de « cercles vicieux ».

Pour le savoir, nous choisissons de réaliser un « schéma de structure déductive » des preuves (au sens de Vitrac, voir note 120 p. 477) relatives aux six énoncés du théorème de Pythagore, en remontant aux propositions dont elles découlent le plus immédiatement (voir figure III.81 p. 478). La liste des propositions qui entrent le plus directement en jeu dans les six preuves du théorème de Pythagore présentées par Mauduit, montre une diversité des contextes géométriques desquels elles sont issues, ce qui apparaît également dans les intitulés des chapitres dans lesquels elles sont situées (voir tableau III.10 p. 480). Il peut s'agir de considérations sur les angles, les aires de diverses figures (triangles, carrés, rectangles), les lignes proportionnelles, ou encore les figures semblables. Parmi les 20 propositions recensées, certaines sont identifiables en tant que propositions remarquables pour leur portée mathématique, ou essentielles, quand de nombreux résultats de géométrie s'appuient dessus. Nous pouvons repérer entre autres la formule de l'aire d'un triangle (144 [121]), la comparaison des aires des triangles de même base ou hauteur (146), le critère de reconnaissance des triangles semblables par les angles homologues (202), des identités remarquables géométriques (235, 236), la formule de Héron [122] (263), le théorème du parallélogramme, que l'on peut voir comme le théorème de Pythagore généralisé aux parallélogrammes (264), le théorème dit « de Ptolémée » [123] (266), le rapport des triangles comportant un angle commun (296), et le rapport des aires des triangles semblables (300). Parmi ces 20 propositions, 10 sont en lien avec les rapports de grandeurs, la proportionnalité et/ou les figures semblables (146, 202, 239, 249, 254, 256, 258, 296, 300, 305).

120. Cette idée d'ordre nécessaire des propositions est explicitée par Vitrac dans ses commentaires au sujet du livre I des *Éléments* d'Euclide, dont la structure hypothético-déductive contraint l'agencement des propositions. Il propose d'ailleurs un modèle de « schémas de structures déductives » pour expliciter l'ordre logique des propositions à l'intérieur des livres, et met en évidence la structure plus linéaire du livre I par rapport aux autres livres (Euclide, 1990, p. 513, 518-519). Gosztonyi (2022) aborde l'analyse des *Éléments de géométrie* de Clairaut sous l'angle de la structure interne également, mobilisant une modélisation à l'aide de graphes codés pour son étude. Lamandé fait usage du même type de modèles dans l'analyse des traités de Legendre et Lacroix (Lamandé, 1993, p. 272, 273, 276).

121. Ce nombre entre parenthèses, ainsi que les suivants, désigne(nt) le(s) numéro(s) des sections dans lesquelles figurent les résultats considérés.

122. Cette dénomination correspond à celle en usage actuellement, mais le résultat n'est pas désigné ainsi dans les livres du corpus. Aucun auteur ne cite d'ailleurs Héron d'Alexandrie dans son ouvrage. Il s'agit d'une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle connaissant seulement les longueurs de ses trois côtés, sans calcul préalable d'une (ou des) hauteur(s) (Heron, 2014, p. 164-169).

123. Désigné ainsi à l'heure actuelle, mais pas dans les ouvrages de l'époque, il affirme qu'un quadrilatère non croisé est inscriptible dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

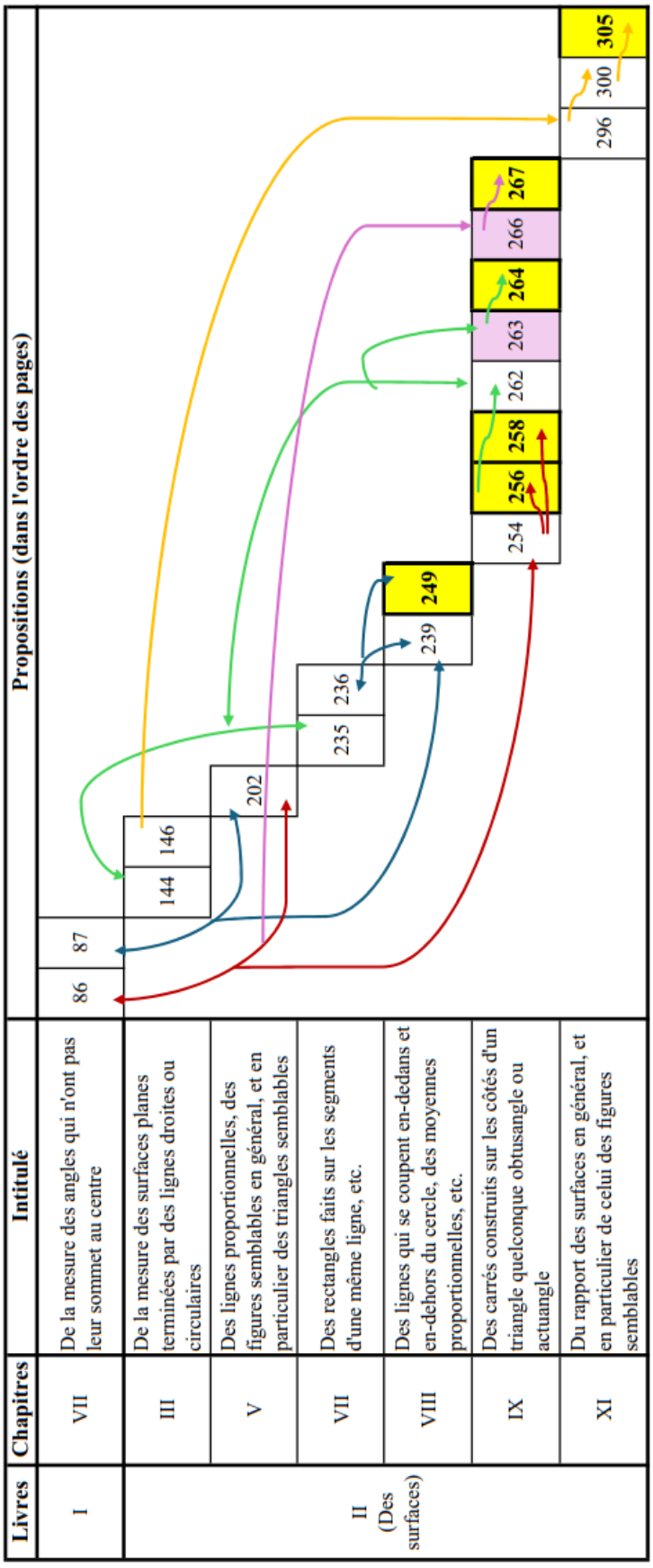


FIGURE III.81 – Schéma déductif des propositions menant aux six preuves du théorème de Pythagore chez Mauduit (1790) : les doubles flèches désignent des propositions qui, connectées entre elles, en impliquent d'autres, les flèches simples correspondent à des implications, les cases en jaune aux différentes expressions du théorème de Pythagore, et celles en rose aux théorème respectivement de Héron (263) et Ptolémée (266). Chaque proposition est alignée horizontalement avec le titre du chapitre dans lequel elle figure

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Numéros	Pages	Description de la proposition
86	56	Un **angle** quelconque BAD qui a son **sommet** à un point quelconque **au-dedans ou au-dehors du cercle**, a pour mesure dans le premier cas la demi-somme des arcs BD, bd ; et dans le second, la demi-différence des mêmes arcs, compris entre ses côtés prolongés s'il est nécessaire
87	57	Si un **angle** BAD a son **sommet** dans la **circonférence même du cercle**, il aura pour mesure la moitié de l'arc BD, compris entre ses côté
144	97	On aura l'**aire d'un triangle**, en multipliant l'unité superficielle par la moitié du produit des nombres qui expriment le rapport de la base et de la hauteur du triangle à la base et à la hauteur de l'unité
146	98	Deux **triangles** qui ont **même base** ou des bases égales, sont entre eux comme leurs hauteurs ; et s'ils ont **même hauteur**, ou des hauteurs égales, ils sont entre eux comme leurs bases
202	140	Deux **triangles** BAC, bac, sont **semblables** lorsqu'ils ont deux angles b, c, égaux respectivement à deux angles B, C sur des bases quelconques BC, bc
235	161	La **différence de deux quarrés** quelconques $ABCD$, $OICH$ est égale à un seul rectangle qui aurait pour cotés contigus la somme des côtés de ces quarrés et la différence des mêmes lignes
236	162	Si une ligne droite AB est divisée en deux parties égales en C et en deux parties inégales en D, le **rectangle** des parties inégales $AD \times BD$ sera égal au **quarré** de la moitié de cette ligne, **moins le quarré** de la partie moyenne CD, si le point D tombe entre les points A et B ; ou le même rectangle $AD \times BD$ sera égal au quarré de la ligne CD, moins le quarré fait sur la moitié de la ligne AB ainsi divisée
239	164	Si **deux lignes** droites AB, MN **se coupent** dans un point quelconque O, au-dedans ou au-dehors d'un cercle, elles s'y couperont en **parties réciproquement proportionnelles**
249	169	Supposant toujours les droites MN, mn, $m'n'$ **perpendiculaires au diamètre** AB qui les coupe toutes en deux également, on aura $PM^2 = AP \times PB$ ou $PM^2 = CA^2 - CP^2$
254	176	Soit un **diamètre** AB, et une ligne droite Dd, qui lui soit **perpendiculaire**, et soient menées les **cordes** AD, BD [...] ; si d'un point K [...] quelconque pris sur cette même ligne au-dedans ou au dehors du cercle, on mène les droites AKL, BKG [...] ; je dis que chaque corde, comme AD, BD, sera **moyenne proportionnelle** entre les lignes AL, AK, ou BG et BK, qui lui répondent
256	178	À cause des **proportions** continues $AB : AD :: AD : AF$, et $AB : BD :: BD : BF$, on aura $AB \times AF = AD^2 = AB \times BF = BD^2$; ajoutant les premiers et seconds membres de ces égalités, on aura [...] donc $AB^2 = AD^2 + BD^2$

Licence CC BY-NC-ND 3.0

258	180	Les **quarrés** AB, AD et BD ont entre eux les **mêmes rapports** que les **lignes** AB, AF et BF ; et réciproquement que ces mêmes lignes sont entre elles comme les quarrés qui leur répondent ; et de plus , parce que l'on a $AB = AF + FB$; qu'on aura aussi $AB^2 = AD^2 + BD^2$
262	183	Dans les triangles BDA et CFA, rectangles l'un en D, l'autre en F, on a [...] $4AB^2 \times CF^2 = 4AB^2 \times AC^2 - (BC^2 - AB^2 - AC^2)^2$
263	184	La **surface d'un triangle quelconque** obtusangle ou acutangle est égale à la racine quarrée d'un produit de quatre dimensions, fait de la demi-somme des trois côtés du triangle par les trois différences de chaque côté à la demi-somme
264	186	Dans tout **parallélogramme**, comme $ABCD$, la **somme des quarrés des diagonales** équivaut à celle des quarrés des **quatre côtés** de ce même parallélogramme. [...] Si le parallélogramme est rectangle, les diagonales seront égales, et l'on retombe encore dans la **47ème d'Euclide**
266	187	Dans tout **quadrilatère inscrit au cercle**, le **produit des diagonales** est égal à la **somme des produits des côtés** opposés du même parallélogramme [124]
267	187	Si le quadrilatère devient un **parallélogramme rectangle**, les deux diagonales sont égales, ainsi que les côtés opposés, ce qui donne $BD^2 = BC^2 + CD^2$
296	216	Deux **triangles** BAC, DAF ; qui ont un **angle commun** en A, sont entre eux **comme les produits des cotés** qui renferment cet angle
300	218	Les **aires de deux triangles semblables** sont entre elles **comme les quarrés** de leurs cotés homologues
305	221	[Comme] une perpendiculaire DF, abaissée du sommet d'un triangle rectangle AFB sur sa base AB, le divise en deux triangles aussi rectangles semblables entre eux et au grand triangle ; et [...] que les triangles semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues, on aura $ADB : AFD : DFB :: AB : AD : BD$; donc, puisque le premier triangle vaut à lui seul les deux autres, **le premier quarré sera aussi égal à la somme des deux autres**

TABLE III.10 – Tableau récapitulatif des propositions mobilisées pour la preuve du théorème de Pythagore, avec leur numérotation dans l'ouvrage, les pages correspondantes, et la formulation retenue pour chacune par Mauduit (identifiables plus aisément à l'aide les mots-clés typographiés en gras par nos soins)

Les voies empruntées par Mauduit pour démontrer le théorème de Pythagore sont représentées par des réseaux de flèches de couleur sur la figure III.81 (p. 478) :

— La voie en bleu s'appuie sur une propriété des angles dont un sommet est sur la circonférence d'un cercle (87) pour établir une similitude de triangles (202), qui ensemble permettent de montrer un théorème donnant le rapport de deux cordes se coupant à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cercle (239). Cette dernière, appliquée

124. Il s'agit d'une erreur de Mauduit : il faut lire « quadrilatère » à la place de « parallélogramme ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

à une configuration plus spécifique (où l'une des cordes est un diamètre $[AB]$ et l'autre sa perpendiculaire $[MN]$), et associée à une identité remarquable exprimée géométriquement (236), fournit la relation demandée (249) [125].

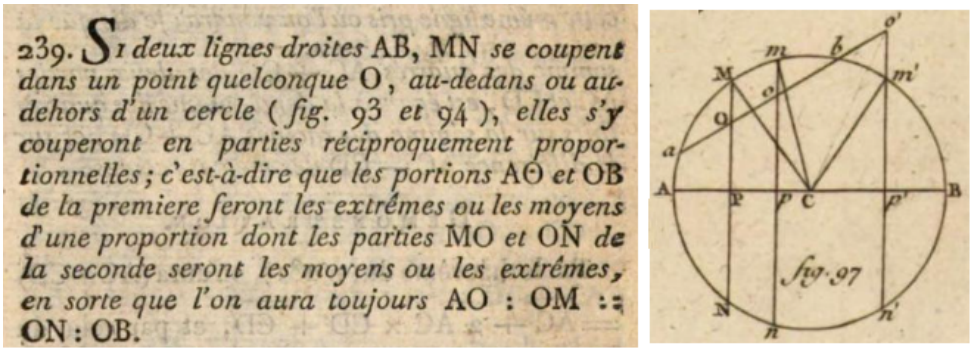


FIGURE III.82 – Énoncé de la propriété des cordes permettant la preuve du théorème de Pythagore et figure associée à cette preuve chez Mauduit (1790, p. 164, 176).

— La voie en rouge commence de manière similaire, en associant un résultat sur les angles (86) à un critère de similitude des triangles (202) pour mettre en évidence une relation de moyenne proportionnelle entre des cordes tracées à partir d'un diamètre du cercle, de sa perpendiculaire et d'un point situé dessus (254). Ces relations, dans le cas où le point placé sur la perpendiculaire est sur la base $[AB]$, donnent les relations entre les côtés d'un triangle et les segments formés sur sa base par le pied de la hauteur issue du sommet opposé, qui, exprimées en produits (par l'équivalence de l'égalité des rapports et de celle des produits en croix) et ajoutées membre à membre, donnent la relation du théorème de Pythagore (256). Plus précisément, si ABD est un triangle rectangle et F le pied de sa hauteur issue de D, les deux relations $AD^2 = AF \times AB$ et $BD^2 = BF \times AB$, obtenues à l'aide du théorème 254 dans le cas où F est sur le segment $[AD]$, donnent bien, ajoutées membre à membre, la relation $AB^2 = AD^2 + BD^2$. En conservant les égalités sous forme de rapports, Mauduit prouve également que les relations sur les carrés sont les mêmes que celles sur les lignes qui les portent, et par égalité d'une ligne avec la somme des deux autres, en déduit l'égalité correspondante sur les carrés (258) [126].

— La variante en rose part de la même manière que la voie en rouge (86 et 202), mais bifurque vers un résultat portant sur les quadrilatères inscrits dans un cercle, dont Mauduit, par un jeu de proportionnalités de longueurs induites par des séries de triangles semblables, montre que le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés (266, théorème dit de Ptolémée). Ce dernier

125. Voir la proposition 239 et la figure 97 associée à la proposition 249 sur la figure III.82 p. 481.
126. Voir la figure III.80 p. 475 : c'est la preuve sur laquelle Mauduit retombe à ce stade.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

résultat appliqué au cas d'un « parallélogramme rectangle » donne le théorème de Pythagore.

— En orange, le résultat du rapport des aires des triangles de même base ou hauteur (146) permet d'établir le rapport des aires des triangles comprenant un angle commun (296), « entre eux comme les produits des côtés qui renferment cet angle » (Mauduit, 1790, p. 216). Cette proposition a pour conséquence que les aires des triangles semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues (300). Par similitude des triangles rectangles construits à partir de l'abaissement de la hauteur issue d'un sommet sur le côté opposé dans un triangle rectangle initial (voir la configuration correspondante sur la figure III.80 p. 475), la proposition implique encore une fois le théorème de Pythagore (305).

— La voie en vert débute par la formule de l'aire du triangle, connectée avec une identité remarquable géométrique (différence de deux carrés), adjointes toutes les deux à une relation algébrique valable dans des triangles rectangles (262), elle-même justifiée par le théorème de Pythagore établi précédemment (256). De tout cela, Mauduit en déduit la formule de Héron (263) (voir note 122 p. 477). Il en déduit la propriété de la somme des carrés des diagonales dans un parallélogramme (264), qui appliquée au cas où le parallélogramme est rectangle, donne le théorème de Pythagore.

Les voies possibles pour démontrer le théorème de Pythagore sont nombreuses, et Mauduit en exploite différentes versions, jouant la carte de la multiplicité afin de montrer la force des raisonnements et des imbrications logiques. Il le fait de surcroît avec un plaisir à peine dissimulé, comme en témoignent ses formulations du type « et l'on retombe encore dans la 47ème d'Euclide » (Mauduit, 1790, p. 186), par lesquelles il manifeste ce que nous identifions comme de l'enthousiasme. Toutes les voies explorées passent par des étapes concernant les proportions, rapports de grandeurs ou similitudes de figures, à un stade ou à un autre. En revanche, la question de l'ordre logique à respecter pour ne pas générer de cercles vicieux ne résiste pas à l'approche multiple de Mauduit. En effet, dans la voie verte, il redémontre le théorème à partir de la proposition 263, elle-même déduite de la 262, qu'il a préalablement établie en utilisant le théorème de Pythagore. Sa preuve de la proposition 262 commence en ces termes : « Puisque dans les triangles BDA et CFA, rectangles l'un en D, l'autre en F, on a, par la 47ème d'Euclide, $BA^2 = BD^2 + AD^2$ et $AC^2 = AF^2 + CF^2$ ». L'égalité alors prouvée est intégrée à part entière dans l'établissement de la formule de Héron, de laquelle il déduit de nouveau le théorème de Pythagore, son raisonnement finissant donc bien par se mordre la queue.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Pour démontrer le théorème de Pythagore dans un contexte de similitude des figures, en faisant usage des rapports de grandeurs et des proportions, les possibilités sont nombreuses, même si la plus courante est celle passant par la configuration d'un triangle rectangle partagé en deux triangles rectangles semblables par sa hauteur, correspondant à la preuve de Lacroix et à la voie en rouge chez Mauduit. Les preuves élaborées dans ce cadre sont caractéristiques du rôle d'interface que joue le théorème de Pythagore, entre des propositions du registre de la géométrie des figures, qui ne sont pas relatives aux rapports, proportions et similitudes, et d'autres qui dépendent directement de ces notions. Prouver le théorème de Pythagore de diverses manières, comme le fait Mauduit, met en évidence comment les arguments des deux types entrent en interaction et se complètent au sein de raisonnements démonstratifs. En cela, la géométrie des aires et la « géométrie du semblable » (voir p. 389) sont loin d'être étanches, et les connaissances qui leur sont relatives entrent au contraire pleinement en interaction à l'occasion de certains types de preuves du théorème de Pythagore (voir schéma III.83 p. 483). L'exploitation de la richesse mathématique de ces interactions permanentes entre les deux cadres — géométrie des figures, et notion de similitude/usage des rapports — vise manifestement à apporter, pour les auteurs qui en usent, une richesse pédagogique supplémentaire.

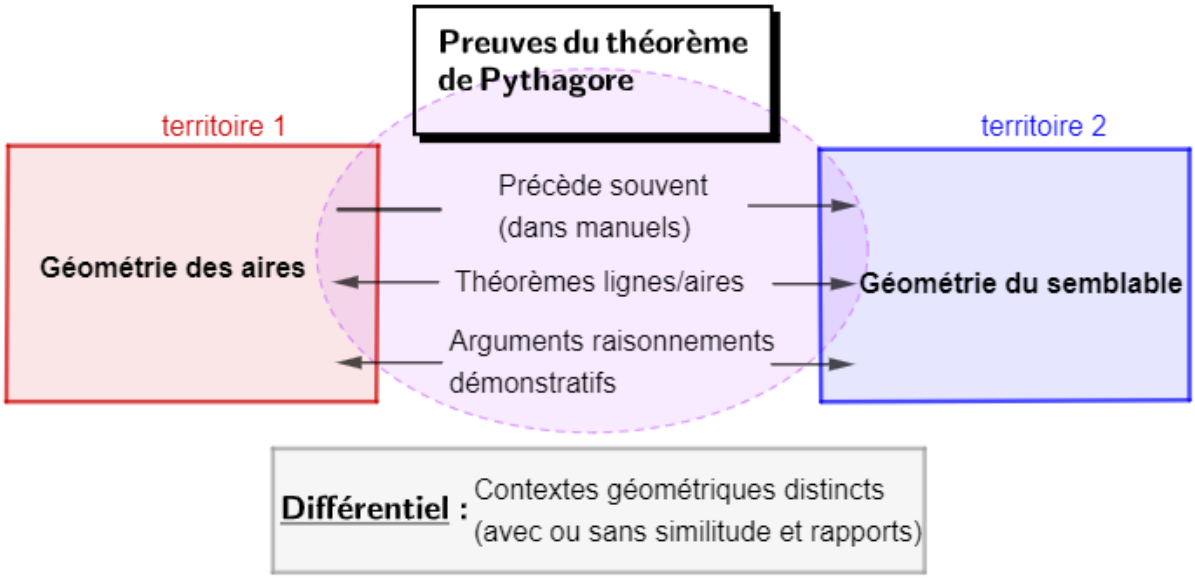


FIGURE III.83 – Schéma montrant en quoi les diverses preuves du théorème de Pythagore sont à l'interface de la géométrie des aires et de la géométrie du semblable

Un autre aspect apparaît également au cours de l'analyse que nous avons menée : le théorème de Pythagore a un double statut, en tant que théorème sur les lignes, mais qui s'exprime aussi sur les aires. Le cas de Mauduit est d'ailleurs représentatif de ce double aspect, car il exprime souvent la proposition, et celles qui lui sont associées, sous la

Licence CC BY-NC-ND 3.0

forme d'un résultat portant sur les lignes, comme lorsqu'il écrit, dans la proposition 249 « le quarré du côté CM opposé à l'angle droit, et que l'on nomme hypoténuse vaut à lui seul les quarrés des deux autres côtés » (Mauduit, 1790, p. 170). Cette proposition apparaît de surcroît dans un chapitre consacré à « des lignes qui se coupent en-dedans et en-dehors du cercle » (Mauduit, 1790, p. 164). Pourtant, le lien avec la proposition équivalente sur les aires, si elle n'est jamais vraiment explicitée par l'auteur, est évoquée à travers les intitulés des chapitres dans lesquels le théorème figure également, notamment le chapitre IX qui en comprend quatre versions, sous la dénomination générale : « Des carrés construits sur les côtés d'un triangle quelconque obtusangle ou actuangle » (Mauduit, 1790, p. 176). La distinction ou au contraire l'assimilation entre les deux théorèmes, inclus dans une théorie des lignes d'une part, et une théorie des aires d'autre part, sont indiquées par l'emploi du vocabulaire, et donc par des éléments de langage, que nous nous proposons désormais d'analyser.

III.2.2.3 Le langage des unités comme médiateur entre grandeurs et nombres : le cas du rectangle

Dans la section III.2.2.1 (p. 465), l'étude des liens de déduction entre les propositions a mis en évidence des termes ou des expressions qui restent à définir explicitement, comme « unité linéaire », « unité de surface » (p. 468) ou encore « unité superficielle » (p. 469). Et en effet, ce qui est caractéristique du résultat sur la mesure de l'aire du rectangle, et souligné par une majorité d'auteurs du corpus, c'est que l'emploi des mots a une grande importance pour bien comprendre ce qui est en jeu dans cette formule, simple en apparence. Cette nécessité de travailler le sens du calcul qui relie l'aire du rectangle à la longueur de ses dimensions, et de l'expliciter via un discours adapté, est également relevée dans des études contemporaines en histoire et didactique des mathématiques, comme celle de de Varent (2018, p. 200-202) ou de Douady et Perrin-Glorian (1983, p. 82-85). La clé de cette compréhension, qui constitue un enjeu réel exprimé par les auteurs de manuels du XIX^{e} siècle, tourne autour du fait de bien saisir la notion d'« unité » [127].

Le constat initial au tournant du siècle : Mauduit et Bézout

En 1790, dans ses *Leçons de géométrie*, et juste après avoir énoncé et démontré le théorème donnant la mesure de l'aire d'un parallélogramme, Mauduit manifeste des réserves face à la formulation de ce résultat par certains de ses contemporains. Il écrit :

127. L'importance de la notion d'unité et son évolution au cours du temps sont également analysées sous l'angle de l'apprentissage de la proportionnalité dans les manuels d'arithmétique à la fin du XIX^{e} et au début du XX^{e} siècle par Chambris et Visnovska (2022).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> Quoique tous les auteurs élémentaires aient donné des règles sûres pour trouver la surface d'un parallélogramme quelconque, il est vrai néanmoins que la plupart se sont exprimés d'une manière peu rigoureuse, lorsqu'ils ont établi *qu'un parallélogramme rectangle ou non rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur*. (Mauduit, 1790, p. 96)

Dans cette « scholie », il explique en effet les règles admises à l'époque en arithmétique pour la multiplication [128]. D'après lui, celles-ci indiquent que le multiplicande et le produit doivent avoir la même unité de mesure, et que le multiplicateur doit être un nombre abstrait [129], ce qui n'est pas compatible avec une formule du type : $aire = base \times hauteur$, dans laquelle, si l'on choisit par exemple la $base$ comme multiplicande et la $hauteur$ comme multiplicateur, $base$ et $aire$ ne sont pas homogènes (c'est-à-dire ne s'expriment pas dans la même unité), et la $hauteur$ n'est pas un nombre abstrait (soit un nombre sans unité). Mauduit s'étonne alors que « des méthodes aussi vicieuses dans leur énoncé n'entraînent aucune erreur dans la pratique » (Mauduit, 1790, p. 96-97). Puis il propose une autre explication : si l'on considère le rapport de la $hauteur$ (respectivement de la $base$) avec celle de la « hauteur de l'unité » (Mauduit, 1790, p. 97), et que l'on multiplie par l'aire de la surface unité, la cohérence avec la règle arithmétique est respectée. Cela donnerait alors une formule du type :

$$aire = \textit{unité de surface} \times \frac{base}{\textit{base de l'unité}} \times \frac{hauteur}{\textit{hauteur de l'unité}}.$$

Le multiplicande (*unité de surface*) a ainsi bien la même unité que le produit ($aire$), et le multiplicateur est un nombre abstrait, comme produit de deux rapports.

Ces précautions génèrent alors l'énoncé suivant, relatif au triangle, mais adaptable à l'aire d'un parallélogramme, rectangle ou non : « on aura l'aire d'un triangle, en multipliant l'unité superficielle par la moitié du produit des nombres qui expriment le rapport de la base et de la hauteur du triangle à la base et à la hauteur de l'unité » (Mauduit, 1790, p. 97). Il règle ainsi selon lui, non sans lourdeur, les états d'âme de « Mr Camus » [130], qui « avait [...] cru qu'on ne pouvait concilier la règle [...] avec celle de la multiplication » et qui avait par conséquent « jugé à propos de faire une exception

128. Pour l'analyse historique du problème de la multiplication des quantités lié à l'usage des « nombres complexes » aux XVIII^e^ et XIX^e^ siècles, voir (Ferreira et Schubring, 2022).

129. Pour l'analyse de l'usage des nombres abstraits et concrets dans les manuels d'arithmétique au XIX^e^, voir Chambris (2022). En opposition à un nombre concret, dont la nature de l'unité est désignée, un nombre abstrait représente une accumulation d'unités non spécifiées, comme un « nombre de fois » (Chambris et Visnovska, 2022, p. 101).

130. Charles Étienne Louis Camus (1699-1768), prédécesseur de Mauduit à la chaire de mathématiques de l'École Royale d'architecture, où il a exercé jusqu'en 1768 et auteur de l'ouvrage issu de son cours (Baudez, 2011 ; Camus, 1750).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

à des principes d'une généralité métaphysique » (Mauduit, 1790, p. 96). Un peu plus loin, Mauduit finit par alléger son discours, considérant qu'il a « posé d'une manière invincible les fondements de la mesure des surfaces », et adopte la formulation « un parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur » (Mauduit, 1790, p. 98).

À la fin du XVIII^e siècle, la question de l'homogénéité dans les calculs n'est donc pas encore stabilisée, et les considérations de Mauduit font écho au propos que nous pouvons lire dans les *Éléments* de Bézout (1848). En effet, dans cette section, nous considérons le texte de Bézout comme quasiment contemporain de celui de Mauduit, puisque la première édition de son *Cours de mathématiques à l'usage du corps royal de l'artillerie* date de 1770 (Bézout, 1770), et Saigey, responsable de la réédition posthume de 1848, n'a pas effectué, selon ce qui est mentionné sur la couverture d'« autre modification que l'introduction du système métrique et la substitution des nouvelles mesures aux anciennes. » (Bézout, 1848, couv.). Les citations reportées ici figurent d'ailleurs textuellement dans l'édition de 1770. :

> En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'est prendre un certain nombre de fois, de sorte que quand on multiplie une ligne, on ne peut jamais avoir qu'une ligne, et quand on multiplie une surface, on ne peut jamais avoir qu'une surface. (Bézout, 1848, p. 59)

Alors comment, dans ce cas, envisager sereinement la formule de l'aire du rectangle comme produit de sa base par sa hauteur ? La réponse de Bézout est qu'on doit regarder cette dernière comme « une expression abrégée, dans laquelle on sous-entend le *nombre* des carrés correspondants aux parties de la base, et le *nombre* des parties de la hauteur » (Bézout, 1848, p. 59). Il précise un peu plus loin qu'il est néanmoins possible d'exprimer une surface par le produit de deux lignes, en entendant par là que :

> dans le vrai, on dût dire le *nombre* des parties d'une ligne multiplié par le *nombre* des parties d'une autre ligne exprime le nombre des parties carrées contenues dans le parallélogramme qui aurait une de ces lignes pour hauteur, et l'autre ligne pour base. (Bézout, 1848, p. 59)

Finalement, l'explicitation par les mots suit celle par les figures, puisque quelques pages auparavant, Bézout décrit déjà comment mesurer la surface d'un rectangle, en déterminant « combien elle contient de carrés tels que $abcd$, ou de rectangles tels que $abcd$ », et en accompagnant son propos de la figure du pavage d'un rectangle par des carrés (voir figure III.84 p. 487), qui sert de base à la preuve de l'aire du rectangle dans le cas où ses côtés ont une commune mesure.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

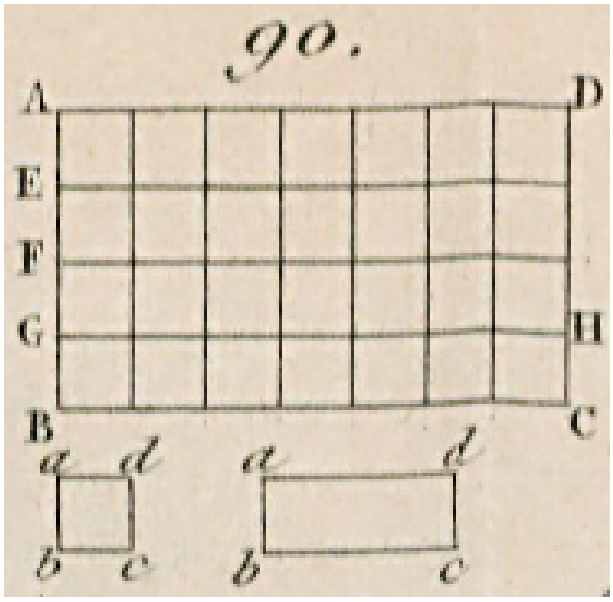


FIGURE III.84 – Figure illustrant la formule de l'aire du rectangle chez Bézout (1848, pl. iii)

Ces deux exemples soulignent une difficulté probable, au tournant du XIX^e^ siècle et dans un contexte d'enseignement, d'écrire, et donc également de dire, une telle formule. L'énoncer semble bousculer les principes d'usage des grandeurs et de leurs opérations établis en arithmétique. L'expression « produit de la base par la hauteur » retenue en dernier lieu, qui deviendra progressivement la formulation type, est plus lourde de sens qu'elle n'y parait au premier abord, et nécessite pour les auteurs, à toutes les époques, de lever les sous-entendus qu'elle comporte.

Première période : jusqu'aux années 1850

Les auteurs de la première moitié du siècle cherchent toujours leurs marques pour formuler, de façon à la fois claire, concise et rigoureuse, le résultat sur la mesure de l'aire d'un rectangle. Les difficultés mises en évidence à la fin du siècle précédent subsistent, auxquels s'ajoutent de nouveaux obstacles, qu'ils s'efforcent de franchir dans un souci à la fois d'exactitude et d'intelligibilité.

Lacroix, en 1808, précise dans sa démonstration du théorème de l'énoncé 6, qu'il a utilisé la « multiplication par ordre », c'est-à-dire un produit membre à membre de deux égalités de rapports. Cette démarche peut selon lui poser aux lecteurs des difficultés de compréhension liées à l'appréhension de l'homogénéité, puisque dans ce raisonnement « il semble qu'il faut multiplier des aires entre elles ». Il règle cet obstacle potentiel en explicitant chacun des rapports de grandeurs homogènes (de longueur ou d'aires) comme des nombres que l'on peut se permettre sans mal de multiplier entre eux. Il indique par exemple : « Cette difficulté cessera si l'on imagine que ces aires, pour être

Licence CC BY-NC-ND 3.0

comparées entre elles, sont rapportées à une certaine aire prise pour mesure commune ou pour unité » (Lacroix, 1808, p. 113). Une fois cette explication posée, il peut ainsi poursuivre la démonstration et parvenir, dans le cas où le rectangle de référence est le carré unité, au résultat de la formule de l'aire du rectangle.

Chez Bergery (1828), la formule de l'aire des rectangles découle algébriquement de leur comparaison, en transitant par la notion d'« unité de longueur ». Il pose en effet R un rectangle, L et L' ses dimensions, puis C un carré, et l son côté. Le théorème de comparaison des rectangles quelconques, comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, établi au préalable et appliqué ici à R et C, fournit directement l'égalité (Bergery, 1828, p. 395) :

$$\frac{R}{C} = \frac{L \times L'}{l^2}.$$

Puis en considérant que l est l'unité de longueur, il obtient la formule :

$$\frac{R}{C} = L \times L'.$$

Dans ce cas, l'expression explicite en français succède à la formule, et il décrit ce qu'il vient d'obtenir en ces termes : « Le rapport d'un rectangle à son unité de mesure C, est donc le produit de ses deux dimensions mesurées avec le côté du carré. La mesure du rectangle est donc ce même produit » (Bergery, 1828, p. 395-396). Bergery s'appuie sur le théorème de comparaison et sur des manipulations algébriques pour expliciter avec efficacité la signification complète de l'affirmation « un rectangle est égal à sa base multipliée par sa hauteur » (Bergery, 1828, p. 396).

Bergery introduit sa formulation définitive du résultat de la mesure de l'aire du rectangle par l'expression « Voilà pourquoi l'on dit que » (Bergery, 1828, p. 396), et c'est bien de cela dont il est question : que dit-on quand on dit qu'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur ? En plus d'un problème mathématique, notamment de définition de ce qu'est une unité et de comparaison d'une longueur et d'une aire à une même grandeur de référence, c'est donc bien d'une question de langage qu'il s'agit. Des auteurs se penchent clairement sur cette question de l'implicite, comme par exemple Lacroix et Terquem.

Lacroix commence par énoncer son résultat en écrivant :

> Le rectangle $ABCD$ contient le rectangle $abcd$, ou l'aire prise pour unité, comme le produit du nombre d'unités linéaires contenues dans sa base AB,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> multiplié par le nombre d'unités linéaires contenues dans sa hauteur BC, contient l'unité numérique. (Lacroix, 1808, p. 114)

Si d'après lui, l'exactitude de cette formulation est indéniable, puisqu'il s'agit d'égalités de rapports, et donc d'égalités de nombres, il lui substitue tout de même l'expression abrégée « l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur ». Mais il met le lecteur en garde, qui doit « toujours être en état de restituer, d'après la première, ce qu'on a sous-entendu dans la seconde » (Lacroix, 1808, p. 114).

Cette mention du « sous-entendu » de la formule est présent chez Terquem quelques décennies plus tard. Ce dernier évoque l'expression abrégée de la règle de calcul de l'aire du rectangle en précisant que c'est une « locution elliptique [...] adoptée pour toutes les évaluations des surfaces » (Terquem, 1829, p. 91), dans laquelle l'utilisation du mot « base » sous-entend le nombre indiquant « combien de fois l'unité linéaire (le mètre) est contenue dans la base » (Terquem, 1829, p. 90).

Beaucoup d'auteurs s'impliquent de la sorte dans ce travail d'expression du résultat sur l'aire du rectangle, avec parfois plusieurs niveaux de reformulations, présentant tous des spécificités. Dans son ouvrage, Vincent commence par écrire le théorème : « Un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur » (Vincent, 1844, p. 172). Cette affirmation énoncée sous l'angle de la mesure, est directement suivi d'une autre, présentée à travers l'objet mathématique de l'aire : « - *en d'autres termes*, - L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur » (Vincent, 1844, p. 172). La question de l'homogénéité des grandeurs et du sens de la multiplication demeure préoccupante, puisqu'il explique juste après :

> On doit entendre par ces deux énoncés, que le nombre abstrait qui exprime le rapport du rectangle à *l'unité de surface*, ou *la mesure* du rectangle, est égal au produit des nombres abstraits qui expriment les rapports respectifs de sa base et sa hauteur à *l'unité linéaire*. (Vincent, 1844, p. 172)

Nous trouvons donc ici trois niveaux de formulation : une que l'on peut qualifier d'« explicite » (la dernière citée), et deux formes simplifiées, l'une présentée sous l'angle de la mesure, que nous désignons d'« abrégée (mesure) », et l'autre mettant en jeu la notion d'aire, que nous appelons « abrégée (aire) ». Par ces désignations, nous pourrons identifier ces formulations, présentes, au moins en partie, dans les autres ouvrages. Enfin, Vincent précise en note que la formule énoncée, « pour avoir un sens raisonnable, exige que la base et la hauteur du rectangle étant rapportées à une *même unité linéaire*, le rectangle lui-même soit rapporté au *carré construit sur cette unité linéaire* » (Vincent, 1844, p. 172-173). Cette dernière phrase peut être rangée dans une catégorie « condition de validité », qui complète le discours type que nous pouvons identifier autour du

Licence CC BY-NC-ND 3.0

théorème de l'aire du rectangle. Ce discours apparaît, particulièrement chez Vincent, à la fois riche, puisqu'il fait intervenir deux énoncés abrégés, auxquels se rajoutent deux formes d'explicitations, et très soigné, puisque le vocabulaire fait l'objet d'une attention toute particulière, comme le souligne l'emploi des italiques dans le texte original.

La compréhension complète de l'énoncé sur la mesure de l'aire du rectangle repose donc beaucoup sur l'explicitation des unités de longueur et de surface. De plus, les précisions nécessaires à l'intelligibilité de l'énoncé sont formulées à cette occasion, puis considérées comme acquises. Vincent explique qu'on ne doit « pas perdre de vue » la condition de validité qu'il a exprimée en note (Vincent, 1844, p. 172). Cette expression est utilisée exactement dans le même contexte chez Bézout, qui indique une fois pour toutes qu'« on ne doit pas perdre de vue que ce n'est qu'une manière abrégée de parler » (Bézout, 1848, p. 59). Idoux prévient quant à lui qu'« il faut se souvenir que la hauteur et la base *sont alors des nombres* exprimant les rapports des droites b et h à l'unité de longueur, et ce sera toujours ainsi que nous l'entendrons » (Idoux, 1842, p. 106) [131].

L'usage répandu de ces précautions de langage durant la première moitié du siècle s'explique doublement, d'une part par la complexité mathématique réelle d'une formule que la brièveté apparente masque, et d'autre part par le fait que ce résultat soit celui par lequel le lecteur entre dans la théorie des aires, et qu'il est donc nécessaire qu'il le fasse dans les meilleures conditions de compréhension possibles. Le choix des expressions et des mots qui les composent est très manifestement réalisé avec soin, puisque ce discours initial, autour d'un résultat qui sert de fondement à la théorie sur les aires, pose les bases de la compréhension des formulations à venir.

Deuxième période : à partir de 1850

Concernant la question du langage autour des unités, un changement apparaît assez nettement dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle [132]. En 1855, et pour la première fois dans notre corpus, Puille rompt avec l'usage des précautions, à la fois mathématiques et de langage, relativement à l'énoncé de l'aire du rectangle, en écrivant, sans plus de

131. Les manuels considérés dans cette section ne sont pas seulement proches d'un point de vue temporel, ils ont également des profils très proches si l'on en croit nos classifications : 4 d'entre eux (sur 5) sont dans le groupe des « encyclopédiques » (groupe 3) de la première classification, et 3 d'entre eux — Terquem, Vincent et Idoux — sont dans les mêmes groupes (3, 5 et 3) dans toutes les classifications réalisées (voir tableau A.2 p. 667), ce qui peut contribuer à expliquer la proximité des discours que tiennent leurs auteurs.

132. Il est à noter que les manuels du corpus dont les éditions retenues sont datées après 1850 ont presque tous des premières éditions parues à partir de 1848, la seule exception étant celui de Cirodde (1858) dont la première édition date de 1836. Mis à part cet ouvrage, nous pouvons donc bien considérer, pour tous les autres, que ce sont des titres de la seconde moitié du siècle.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

formalités : « L'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur » (Puille, 1855, p. 119). Il n'explicite pas davantage ce qu'il entend par là, ni en termes de nature des nombres ni de sens des opérations. En revanche, après sa preuve, il rajoute la règle suivante (en gras dans le texte) : « **Pour avoir la surface d'un Rectangle, on multiplie la longueur de la base par celle de la hauteur** » (Puille, 1855, p. 120). Puis il inscrit :

> **FORMULE**. – En appelant S la *surface*, B la *base* et H la *hauteur*, la règle précédente s'exprimera d'une manière abrégée par $S = B \times H$.

Cette organisation du texte, déclinée en un énoncé, suivi d'une démonstration, puis d'une règle et enfin d'une formule, est mise en place dans toute la partie de l'ouvrage traitant de la « mesure des polygones » (Puille, 1855, p. 119), offrant au lecteur une présentation très pédagogique. Ces étapes sont suivies également d'une application, avec une question à résoudre, accompagnée de sa solution rédigée. Dans le cas de ce manuel, le seul énoncé est celui désigné précédemment par « abrégé (aire) », dont la forme encore plus abrégée est la formule littérale. Il précise d'ailleurs ce qu'il entend par « formule » en note de bas de page : « Nous avons dit qu'une *formule* est l'expression abrégée d'une règle particulière qui indique les opérations à effectuer pour obtenir un résultat » (Puille, 1855, p. 120) [133]. L'approche de Puille est manifestement opératoire, ce qui justifie le peu de précautions qu'il prend à expliciter le sens géométrique de la formule. Sa démarche est davantage dans l'esprit des traités d'arithmétique, avec l'énonciation d'une règle de calcul, suivie d'une formule algébrique exprimant la généralité des opérations à effectuer, puis illustrée d'une application numérique avec une correction.

Dans les ouvrages postérieurs à celui de Puille, de nombreux auteurs vont également se contenter de la formulation abrégée du résultat, et s'autoriser tout comme lui à s'affranchir de l'expliciter [134]. Nous en avons dénombré 9 sur 22 entre 1857 et 1902. Il s'agit principalement de manuels à destination de publics primaires ou professionnels, comme la *Géométrie élémentaire* de Bovier-Lapierre (1879) ou la *Géométrie appliquée aux arts et métiers* de Harant (1863). Mais il reste encore des auteurs qui montrent des scrupules à utiliser cette seule formulation abrégée, sans plus de précaution.

133. Puille n'est pas le premier des auteurs du corpus à utiliser explicitement une formule pour énoncer le résultat. Mais cet usage ne semble pas très répandu encore, puisque parmi les auteurs du corpus qui lui sont antérieurs, seuls trois présentent leurs résultats sous cette forme : 1) Lamotte inscrit dans son texte « $B \times H$ est ce que l'on appelle une formule », avant de donner de telles « formules » pour les aires de toutes les figures qu'il rencontre (Lamotte, 1839, p. 40) ; 2) Idoux note en-dessous de l'énoncé de chacun des théorèmes sur les aires « Formule : $S = b.h$ », ou encore, dans son texte, « $R = b \times h$ » (Idoux, 1842, p. 106) ; 3) Eysseric et Pascal concluent chaque paragraphe sur l'aire du polygone par une expression de la forme « Ce que l'on indique par la formule suivante : $R = B \times H$ » (Eysseric et Pascal, 1850, p. 105). Les autres écrivent la relation littéralement par des phrases. Puille fait, comme Eysseric et Pascal, un usage systématique des formules, mais de façon encore plus formelle que ces derniers.

134. Néanmoins, aucun de ces auteurs ne se réfère explicitement à Puille ni à un autre auteur qui lui serait contemporain à ce sujet.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Un premier groupe d'auteurs adopte la formulation abrégée du résultat, mais en prenant soin de préciser sa condition de validité. Par exemple, à la fin de la preuve de son théorème, énoncé sous la forme abrégée (aire), Briot indique en remarque :

> On voit par là que, dans tous les cas, le nombre qui exprime l'aire du rectangle est égal au produit des nombres qui expriment la base et la hauteur, ce que l'on énonce en disant : l'aire d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions. Mais il faut avoir bien soin de prendre pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur. (Briot, 1863, p. 152)

La condition nécessaire sur le choix des unités est parfois reprise dans l'énoncé même. Amiot écrit par exemple le théorème suivant : « L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur, si l'on prend pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur » (Amiot, 1859, p. 146). Ce nouvel énoncé, que l'on peut désigner par l'appellation « abrégé (condition) », se retrouve quelques années plus tard mot pour mot, ou presque, dans les manuels de Tombeck, Bourget, Leyssenne et Girod (Tombeck, 1879, p. 219 ; Bourget, 1885, p. 87 ; Leyssenne, 1890, p. 208 ; Girod, 1893, p. 184) [135]. Cette dernière formulation devient ainsi progressivement une phrase type dans les manuels de géométrie pour énoncer succinctement le résultat en assurant son exactitude mathématique.

Enfin, quelques auteurs de la seconde moitié du siècle continuent à s'interroger sur des questions d'homogénéité, du sens d'un produit de grandeurs, ou encore sur la nécessité d'un choix pertinent des unités. Cirodde écrit en note, à la suite de la preuve du théorème de l'énoncé 6 [136] :

> Dans les proportions [$\frac{R}{R''} = \frac{h}{h'}$ et $\frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}$], on pourrait bien regarder les lettres R, R', R'' comme représentant des rectangles, et b, b', h, h' comme représentant des lignes, puisque les deux termes de chaque rapport sont alors des quantités homogènes ; mais que, pour pouvoir multiplier ces proportions par ordre, il devient indispensable de regarder ces lettres comme représentant les nombres abstraits qui expriment les rapports de chacune de ces quantités à l'unité de son espèce. Il serait absurde, en effet, de prétendre multiplier un rectangle par un autre rectangle. (Cirodde, 1858, p. 174-175)

135. Ces ouvrages sont pourtant de profils très distincts car appartenant à des groupes variés de nos trois classifications (voir tableau A.2 p. 667). Ils s'adressent de surcroît à des publics divers.
136. Cette note figure déjà dans l'édition de 1836 (1836, p. 194), et n'a pas été modifiée ni supprimée dans la version de 1858, ce qui montre que la préoccupation de l'auteur à ce sujet perdure au-delà de 1850.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les préoccupations de Cirodde sur l'homogénéité des grandeurs en jeu dans les relations qu'il manipule, et sur la validité mathématique des opérations qu'il leur applique, rejoint celles, antérieures, de Lacroix (p. 487). Quant à Bos, dans ses *Notions de géométrie plane*, il précise le sens de la multiplication de deux lignes ainsi : « Pour abréger le langage, nous représentons par $AB \times BE$ le produit des nombres qui expriment les mesures des longueurs AB et BE, ces longueurs étant mesurées avec la même unité » (Bos, 1884, p. 104). Cette précision, dans un ouvrage à destination des jeunes filles de l'enseignement secondaire, ne figure pas dans son équivalent pour les garçons de 1875, où le sens d'un tel produit demeure implicite, sans doute car son usage est plus habituel pour des jeunes hommes plus familiers de la géométrie.

La condition indiquant que la longueur prise pour unité doit être la même pour mesurer la base et la hauteur est néanmoins discutable, et Rouché et Comberousse s'affranchissent de cette règle pour donner une version plus générale du théorème sur l'aire du rectangle, qui « est encore égale au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité d'aire le rectangle ayant pour base la longueur prise pour unité de base, et pour hauteur la longueur prise pour unité de hauteur » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 278). Ce ne sont pas les premiers qui se posent cette question d'un élargissement possible du cadre de la formule, puisqu'en 1844, Vincent remarquait déjà :

> Le rapport d'un rectangle à un autre rectangle quelconque pris pour *unité*, ou la mesure du premier rectangle, est égal *au produit des rapports respectifs* de sa base à celle du second prise pour *unité de base*, et de sa hauteur à celle du second prise à son tour pour *unité de hauteur* ; c'est-à-dire que, dans ce cas, on aurait *deux* unités linéaires *différentes* pour la base et pour la hauteur. (Vincent, 1844, p. 172)

Il argumente ensuite le choix de prendre la même unité de base et de hauteur en indiquant : « le *carré* étant la plus simple des figures, on prend ordinairement pour unité de surface le *carré construit sur l'unité linéaire* » (Vincent, 1844, p. 172). Trois décennies plus tard, Méray prend le soin de justifier lui aussi cet usage ordinaire d'unité de surface, en écrivant :

> Le choix du carré construit sur l'unité de longueur pour unité de surface, simplifie autant les formules pour la mesure des surfaces quelconques, que celle relative au rectangle. Aussi on *adopte exclusivement cette unité d'aire*, et il faut noter soigneusement que, sauf les cas fort rares où le contraire est spécifié, les formules dont il s'agit impliquent l'adoption préalable de cette unité. (Méray, 1874, p. 90)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ces auteurs explicitent donc également, en plus du sens géométrique de la formule en termes de grandeurs, le choix de prendre le carré pour unité de surface. Tout en mettant en évidence le fait que ce n'est pas le seul choix possible, ils justifient néanmoins que c'est le plus commode.

Durant cette dernière période, les auteurs des manuels rompent avec la complexité du discours entourant la mesure de l'aire du rectangle, embarrassé de considérations sur les grandeurs, leur homogénéité et les opérations que l'on effectue dessus. Ils tendent vers une formulation plus compacte, qui gagne en efficacité en restant mathématiquement correcte, via l'expression d'une condition de validité du résultat. Néanmoins, les questions de fond persistent et restent traitées par quelques auteurs [137], qui pointent d'autres voies pour gérer l'homogénéité (notamment dans les opérations sur les rapports de grandeurs), ou questionnent le choix du carré comme unité d'aire, parmi d'autres possibilités. L'évolution globale du traitement de cette question en amont et au cours du siècle est synthétisée sur la frise chronologique III.85 p. 494.

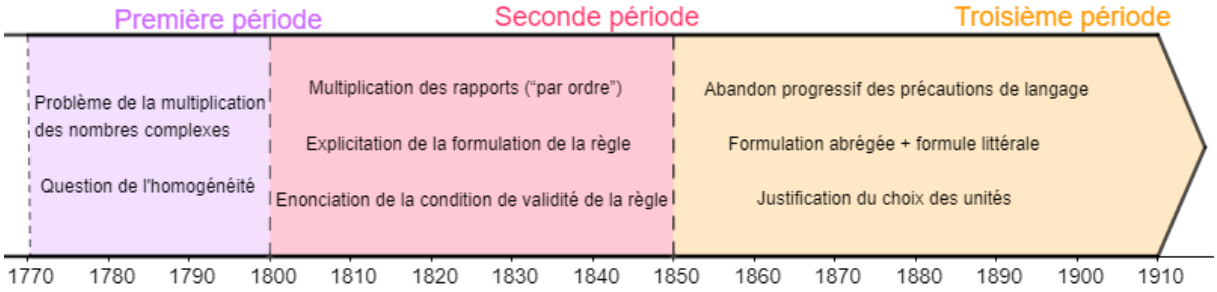


FIGURE III.85 – Frise résumant les caractéristiques des différentes périodes concernant la formulation de la règle de calcul de l'aire du rectangle

Finalement, le cas du rectangle montre que de façon manifeste, au XIX^e siècle, la mesure d'une aire dépend de l'unité que l'on se fixe, et que le choix de cette unité de surface est lié au celui des unités linéaires associées. Ce constat est très différent de celui issu de l'analyse des tablettes mésopotamiennes réalisée par de Varent, qui conclut pour sa période que « le systèmes d'unités de mesure de longueur et d'aire existent indépendamment » et qu'« ils ne sont pas construits complètement l'un en fonction de l'autre » (De Varent, 2018, p. 60). En revanche, elle indique que « géométriquement, les unités de mesure ne seraient pas toutes carrées si elles étaient représentées » (De Varent, 2018, p. 60), ce qui est également le cas dans notre corpus, même si cette possibilité reste exprimée de manière minoritaire. Pour elle, dans ce

137. Il s'agit principalement d'auteurs de manuels aux caractères officiels et théoriques : 3 (sur 5) sont dans le groupe des « encyclopédiques » (groupe 3) de la première classification, et 4 dans le groupe des « théoriques pour le secondaire » (groupe 2) ou celui des « officiels du début du siècle » (groupe 3) de la dernière classification (voir tableau A.2 p. 667).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

contexte, les unités d'aire font potentiellement davantage écho au « report d'un étalon lié à une surface de dimension 2 (et donc au mesurage), qu'à l'unité de mesure de longueur » (De Varent, 2018, p. 60). Mesurer une aire peut alors être assimilé à une opération de report d'une surface étalon sur une surface donnée, qui peut se matérialiser graphiquement sous la forme d'une grille, figure que nous trouvons encore dans nombre de manuels du XIX^{e} siècle. Les auteurs de notre corpus exploitent les unités linéaires pour ramener la question de l'aire à une opération de multiplication, et ne vont pas plus loin dans l'exploitation pédagogique de l'idée de pavage, inhérente à la figure de la grille. Certains utilisent des quadrillages ou pavages pour figurer des résultats (voir la représentation du théorème de Pythagore par Tarnier sur la figure III.45a p. 410), pour montrer des similitudes (voir la sous-section III.1.2.1 p. 388) ou encore pour estimer des aires curvilignes. En revanche, très peu proposent des pavages de surfaces par des figures quelconques avant le recours au carré unité comme étalon unique, idée qui se développera un bon siècle plus tard dans la pédagogie des années 1980 (Douady et Perrin-Glorian, 1983).

L'étude de la notion d'unité au cœur du langage employé dans la détermination de l'aire du rectangle montre bien en quoi la mesure est liée à la comparaison. Chez Bergery, même l'aire du disque peut être vue comme une comparaison à une surface unité, prise pour échelon, puisqu'il explique, après avoir rappelé l'impossibilité de « mesurer exactement un cercle, avec un carré pris pour unité de mesure », qu' :

> On obtiendrait des mesures exactes, si l'on employait comme unités, une circonférence dont le rayon fût un pied, par exemple, et la surface renfermée dans cette circonférence. Mais, de tels mesurages auraient des inconvénients dans la pratique. (Bergery, 1828, p. 403)

Et il est effectivement difficile de concevoir comment, techniquement, mesurer un cercle à l'aide d'un autre cercle pris pour surface étalon. C'est donc bien la commodité qui finit par dicter le choix du carré unité comme surface de référence, et ce tout particulièrement dans le contexte du développement du système métrique décimal, que nous analysons dans la section III.2.3.1 (p. 501).

III.2.2.4 Le théorème de Pythagore : le langage comme médiateur entre les théories

C'est désormais dans le cadre de l'établissement du théorème de Pythagore dans des cadres théoriques variés que nous proposons d'étudier le rôle central du langage [138].

138. Le terme « langage » désigne dans cette section la manière qu'ont les auteurs de s'exprimer à l'écrit. Il ne s'agit pas d'une étude au sens linguistique du terme.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

En effet, après avoir énoncé la propriété de Pythagore en ces termes « Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés », Briot indique que « ce théorème est la traduction géométrique du théorème XV du livre III » (Briot, 1863, p. 166), lui-même exprimé ainsi au préalable : « Le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés » (Briot, 1863, p. 106). La nuance entre les deux énoncés peut paraître minime, mais elle est en réalité fondamentale, car le terme « construit » inséré dans le premier (ou le second suivant l'ordre du livre) en fait un théorème sur les aires, alors que l'autre porte sur les lignes. Dans le cadre de cette étude, ce sont les aires qui nous intéressent, d'où la nécessité de distinguer clairement les deux formulations du théorème par les dénominations « Pythagore-ligne » et « Pythagore-aire » (voir page II.3.2.2). Les résultats sur les lignes ne sont donc pas au cœur de notre travail, mais les liens et transferts entre les deux formes du théorème sont néanmoins incontournables, notamment par les interactions entre les domaines de la géométrie et de l'arithmétique qu'ils révèlent.

Dans 23 ouvrages sur les 34 étudiés qui présentent le théorème de Pythagore en aire, la théorie des lignes proportionnelles précède celle de la mesure des aires planes [139]. Par conséquent, « Pythagore-ligne » est majoritairement énoncé en amont de « Pythagore-aire » [140]. Le passage de l'un à l'autre s'effectue principalement, comme l'indiquent déjà les formulations de Briot précédemment citées, par des éléments de langage. Mais ce sont bien des mathématiques qui se cachent derrière l'emploi des mots. Dans son *Traité de géométrie élémentaire*, Tombeck écrit :

> Dire que le carré du nombre qui représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des nombres qui mesurent les deux autres côtés, c'est dire que la surface du carré construit sur l'hypoténuse est équivalente à la somme des surfaces des carrés construits sur les deux autres côtés. (Tombeck, 1879, p. 228)

Certes, l'emploi des termes « surface » et « équivalent » assure la transition entre la propriété des lignes et celles des aires, mais avec comme résultat sous-jacent le fait que la mesure de l'aire du carré soit égale au carré de la longueur de son côté. Ce résultat, ainsi que son homologue sur l'aire du rectangle, impliqué dans le théorème généralisé dans les triangles d'angle aigu ou obtus (voir énoncés 2 et 3

139. Dans le cas contraire, tous les auteurs qui commencent par traiter la mesure des aires y reviennent, après l'étude des lignes proportionnelles et des figures semblables, pour énoncer les résultats sur les rapports des aires des figures semblables.

140. Contrairement à l'ordre des *Éléments* d'Euclide, dans lesquels le livre I sur les équivalences d'aires est bien antérieur aux livres V et VI sur les proportions et les similitudes.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

dans la sous-section II.3.2.2 p. 286), forme le chaînon mathématique implicite entre les deux versions d'un même énoncé.

L'autre notion indispensable à la transition entre les deux formes d'énoncés est celle de nombre, de manière plus ou moins implicite suivant les auteurs. La passerelle entre le carré en tant que nombre et le carré en tant que figure géométrique est assurée par Cirodde en ces termes : « l'aire du carré construit sur une droite [a] pour mesure le carré du nombre abstrait qui exprime la longueur de cette droite » (Cirodde, 1836, p. 215). Cette notion de « nombre abstrait » se retrouve au fil du siècle et des auteurs, des plus anciens comme Mauduit ou Bézout, à d'autres plus tardifs comme Guilmin (voir note 129 p. 485). Le « nombre abstrait » représente ici une quantité considérée en faisant abstraction de sa nature, en opposition implicite au « nombre concret » pour lequel on indique la nature de l'unité. En quelques sortes, le « nombre concret » est une grandeur quand le « nombre abstrait » est une quantité arithmétique. La formulation un peu complexe de Cirodde en termes de « nombres abstraits » lui permet d'éviter le recours à une autre notion, celle de l'unité de mesure.

En effet, pour pouvoir établir des rapports ou des relations dans un cadre géométrique, encore faut-il que les grandeurs entrant en jeu soient « rapporté[e]s à une unité commune » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 291) ou « exprimées en nombres, au moyen d'une commune mesure » (Bergery, 1828, p. 258). À cette condition, le transfert entre relations numériques et propriétés géométriques est possible, comme l'indiquent Rouché et Comberousse : « De ces relations [les relations numériques entre les divers éléments d'un triangle] résultent immédiatement autant de théorèmes sur les aires, et l'on pourrait inversement donner des démonstrations directes de ces derniers théorèmes et en déduire ensuite les relations numériques correspondantes » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 291). La correspondance entre la proposition exprimée en nombre et celle vue géométriquement est réversible, il est donc également envisageable de passer « du point de vue *abstrait* au point de vue *concret* en remplaçant les aires des carrés par leurs mesures respectives » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 290-291). Les sens direct et réciproque de la traduction d'une forme à l'autre des énoncés est garanti par des éléments de langage fréquemment utilisés, comme « on représente le carré [MACN] par [AC^2] » ou « le nombre qui exprime » (Puille, 1855, p. 117).

Finalement, une traduction terme à terme d'un résultat peut en produire un nouveau, comme l'explique Cirodde avec l'exemple suivant. L'énoncé « *Le carré de la somme ou de la différence de deux* ***nombres*** *est* ***égal*** *à la somme des carrés* ***de ces nombres*** *augmentée ou diminuée de leur double* ***produit*** » devient, par ajout (ou par remplacement) de quelques termes propres au domaine de la géométrie « *Le carré* ***construit***

Licence CC BY-NC-ND 3.0

sur** la somme ou la différence de deux **droites** est **équivalent** à la somme des carrés **construits sur ces deux droites** augmentée ou diminuée du double **du rectangle qui aurait l'une d'elle pour base et l'autre pour hauteur » (Cirodde, 1836, p. 216) [141]. Cirodde qualifie son premier résultat d'énoncé « d'algèbre », tout comme Vincent qui explique que des « formules d'algèbre, [...] étant traduites en langage géométrique, donnent lieu à de nouveaux théorèmes sur les aires » (Vincent, 1844, p. 183). Par les questions de langage, un lien manifeste apparaît ainsi également entre la pratique de l'algèbre et l'établissement de théorèmes de géométrie.

Le théorème de Pythagore, de par sa double énonciation en termes de lignes et d'aires, constitue un objet d'étude privilégié, à l'interface des théories développées par les auteurs des ouvrages de géométrie, et en particulier celles des lignes proportionnelles et de la mesure des aires. Qu'il soit présenté sous ses différentes formes, dans un ou plusieurs systèmes théoriques, et suivant un ordre ou un autre, son traitement révèle des connexions entre des branches distinctes de la géométrie, et également au-delà, exprime un lien réel avec l'arithmétique et ses usages, dans lequel le langage joue un rôle de médiateur en assurant une passerelle entre le vocabulaire des aires et celui des nombres, unités et opérations.

En définitive, les théorèmes étudiés dans cette section (aire du rectangle et Pythagore) expriment des résultats sur les lignes et/ou les aires, ou encore mélangent les deux, puisque l'aire du rectangle finit par être vue comme le produit de deux lignes. Par conséquent, l'établissement de ces résultats se heurte à des questions essentielles, comme la définition de l'unité, chaînon permettant la connexion entre comparer et mesurer des grandeurs, mais aussi celle de l'homogénéité des grandeurs et de la légitimité des opérations arithmétiques qui les concernent, parmi lesquelles la multiplication. Les notions de rapport et de proportionnalité arrivent alors au centre de la question, comme éléments de réponses en tant que causes possibles des résultats, tel que le théorème de Pythagore, justifiable au moyen de la similitude des triangles, ou en tant que moyen de leur donner une validité, dans le cas de la formule de l'aire du rectangle. Les contextes géométriques et numériques apparaissent donc en perpétuel échange à travers ces deux cas emblématiques de la géométrie des aires. L'un se nourrit de l'autre, avec des opérations de calcul redéfinies dans le domaine des grandeurs et de leur mesure, en cohérence avec les règles de l'arithmétique, et des théorèmes sur les aires qui matérialisent des résultats sur les lignes, eux-mêmes s'appuyant sur les notions de rapports, de produits, et même parfois sur des relations algébriques.

141. Nous avons choisi de faire figurer en gras les termes qui se correspondent dans les deux citations. Ce résultat est proche des énoncés 2 et 3 décrits dans la sous-section II.3.2.2 (p. 286), mais avec des hypothèses différentes, sans référence ici aux triangles d'angle aigu ou obtus.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Entre comparaison et mesure, la géométrie des aires apparaît donc clairement à l'interface de la géométrie, de l'arithmétique et de l'algèbre, sous l'angle des concepts qu'elle mobilise comme des pratiques de langage qu'elle met en œuvre (voir schéma III.86 p. 499). Les liens entre les trois domaines mathématiques mis à jour à travers cette analyse se prolongent dans la pratique même de la géométrie des aires, au cœur de laquelle les techniques de calcul, arithmétiques comme algébriques, jouent manifestement un grand rôle.

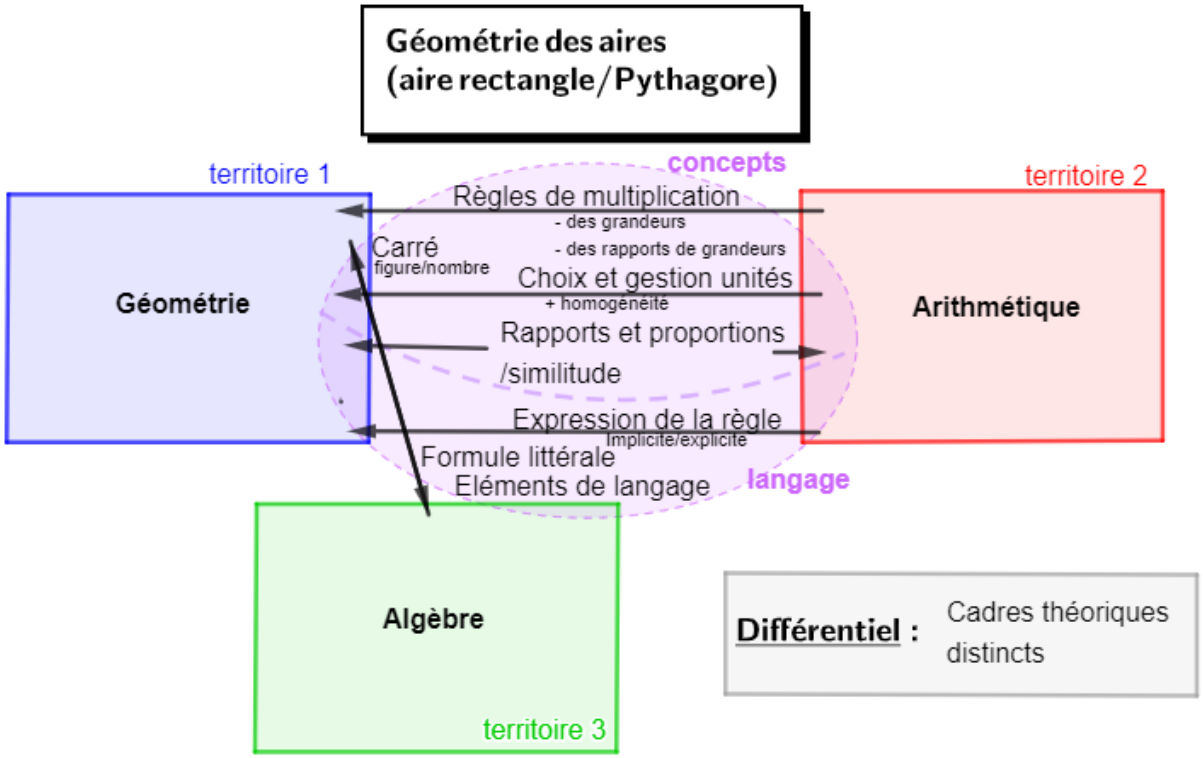


FIGURE III.86 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface de la géométrie, de l'algèbre et de l'arithmétique, à travers les concepts et le langage qu'elle mobilise

III.2.3 Aspects opératoires : procédures de calcul et formules algébriques

Au-delà du lien entre le géométrique et le numérique dans la théorie, les calculs sont également omniprésents dans les pratiques de la géométrie des aires. Dans son étude des problèmes dans les manuels de géométrie du secondaire au XIX^{e} siècle, Moussard met en évidence une distinction, faite par bon nombre d'auteurs, entre les problèmes théoriques ou spéculatifs, et les problèmes de type pratique, qui se divisent en deux catégories : les problèmes graphiques (ou de construction) et les problèmes

Licence CC BY-NC-ND 3.0

numériques (Moussard, 2015, p. 136-139). Ces deux derniers types de problèmes s'entremêlent d'ailleurs un peu lorsqu'un problème de construction est résolu par le calcul d'une grandeur indéterminée. Les « énoncés relatifs à la mesure des aires et des volumes » sont fréquents dans les manuels, et également préconisés dans le programme de Fortoul pour l'enseignement secondaire en 1852 (Belhoste, 1995, p. 341). Des questions de calcul numérique sur les mesures de grandeurs intègrent par ailleurs aussi les questions du baccalauréat ès sciences de l'enseignement classique au cours du siècle, ce dont témoignent des recueils de sujets tombés à l'examen (Moussard, 2015, p. 496).

Les intentions exprimées à ce sujet sont clairement d'apporter un caractère pratique dans l'enseignement de la géométrie, que ce soit dans les programmes ou les manuels. Sonnet, alors professeur à l'École centrale des arts et manufactures, revendique le caractère à la fois théorique et pratique de son ouvrage (Sonnet, 1839), qui répond selon lui aux besoins de l'enseignement industriel en cours de développement. Il estime son manuel « complet sous le rapport de la théorie » tout en étant « riche en applications importantes » (Sonnet, 1839, p. v). Dans ce cadre, les problèmes calculatoires qu'il propose sont soit de simples « exercices numériques sur les théorèmes relatifs aux mesures », soit des exemples « empruntés au dessin linéaire [...] au levé des plans, à l'arpentage et au partage des terres, à la mesure des bois de construction, aux procédés du jaugeage, à la gnomonique et à la perspective » (Sonnet, 1839, p. vii). Sarazin, un autre auteur d'ouvrages de géométrie, explique bien en quoi ces problèmes relèvent d'une mise à disposition du calcul numérique pour l'application d'une théorie géométrique, qui « consiste en ce qu'on y prend les théorèmes pour points de départ de calculs purs ». Finalement, leur objectif est de « transporter dans la langue de l'arithmétique les vérités de la géométrie, [...] et nullement la manifestation de propriétés nouvelles » (cité dans Moussard 2015, p. 253).

Mais la fonction des calculs numériques en géométrie, et notamment en géométrie des aires, ne se réduit pas à ce seul rôle d'application. Elle entre également pleinement dans la démarche d'appropriation et de compréhension des théories enseignées. C'est ce que précise Fortoul dans ses « instructions pour la mise à exécution du plan d'études des lycées » (Belhoste, 1995, p. 321) en 1854, qui écrit :

> Les exercices numériques commenceront à l'occasion des relations qui existent entre les côtés d'un triangle et les sommets formés par les perpendiculaires abaissées des sommets. On exercera les élèves à faire des applications des formules [...] c'est le seul moyen d'en faire bien comprendre le sens, de les fixer dans l'esprit des élèves. [Quant aux] énoncés relatifs à la mesure des aires et des volumes, [...] on les fera mieux saisir en insistant

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> sur leurs applications par un grand nombre d'exemples. (Belhoste, 1995, p. 341)

Quoiqu'il en soit, les problèmes numériques se développent davantage dans les ouvrages pour les élèves qui se destinent aux arts ou à l'industrie, notamment dans le cadre de l'enseignement spécial (Moussard, 2015, p. 487). Dans l'enseignement primaire, les programmes de géométrie de 1838 prévoient aussi d'« exercer [...] les élèves aux applications numériques » (D'Enfert, 2003c, p. 101). D'ailleurs, Assude et Gispert, à travers leur analyse du *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, relaient les intentions qui y sont exprimées en 1882 pour la géométrie enseignée à l'école primaire :

> La géométrie se rattache à l'enseignement des écoles primaires par le système métrique et la mesure des surfaces et des volumes. [...]. Il suffit alors qu'ils [les élèves] sachent calculer et qu'ils aient dans leur mémoire les règles, les formules qu'ils doivent appliquer. (cité dans Assude et Gispert 2015)

Le calcul comme objectif final de l'apprentissage de la géométrie s'exprime d'ailleurs également par la formulation « applications du système métrique à la mesure des surfaces et des volumes », que l'on peut lire dans certains programmes relatifs au système métrique, comme celui du Cours Supérieur en 1868 (D'Enfert, 2003c, p. 159).

Les calculs numériques forment donc une partie des enjeux de l'enseignement de la géométrie des aires au XIX^e^ siècle, dans le primaire comme le secondaire, en tant que champ d'application, d'objectif d'enseignement en soi, ou de support à l'assimilation de résultats plus théoriques. Ces pratiques de calcul dans le cadre de la géométrie des aires vont nécessiter des ressources techniques tirées de l'arithmétique et de l'algèbre, montrant encore de nouvelles connexions entre ces différents domaines des mathématiques, et confortant le rôle d'interface joué par la géométrie des aires à leur intersection.

III.2.3.1 Le système métrique et la mutation des unités

Qu'elles soient appelées linéaires, de longueur, superficielles, de surface, d'aire ou encore de mesure[142], l'étude menée dans la section III.2.2.3 (p. 484 et suivantes) montre que les unités et leur définition jouent un rôle fondamental dans la construction du résultat de la mesure de l'aire du rectangle, et dans la clarification nécessaire de

142. Un relevé statistique réalisé dans les ouvrages du corpus montre que les expressions les plus courantes sont « unité de surface » (dans 25 ouvrages sur 40) et « unité de longueur » (29 ouvrages), suivies de « unité superficielle » (13) et « unité linéaire » (14). Aucune tendance temporelle réelle ne se dégage, puisque nous pouvons trouver ces expressions à tout moment de la période étudiée. Seule « unité d'aire » (9) est un peu plus rare et globalement plus tardive. L'expression « unité carrée » apparaît quant à elle 4 fois, et « unité de mesure » 12 fois, avant 1874.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

son énonciation. De plus, presque tous les manuels du corpus, se réfèrent au système d'unités de mesures courantes à leur époque, des « toises » ou « toises quarrées » chez Mauduit (1790), au mètre, chez tous les autres, à la seule exception de Méray [143].

Or, la période étudiée est une période charnière quant à la question des unités de mesure, puisqu'à l'orée du XIX^e siècle, la réforme du système des poids et mesures initiée lors de la Révolution française vient de donner naissance, en 1799, au mètre-étalon (Débarbat et Ten, 1993, p. 137-138). Les unités métriques sont alors employées, durant plusieurs décennies, en parallèle d'unités de mesure adaptées à diverses situations sociales et locales. En 1837, la diffusion du nouveau système de mesure est assurée par une loi imposant l'obligation d'utiliser exclusivement le système métrique décimal (Débarbat et Ten, 1993, p. 37). Les manuels scolaires suivent la même évolution. Les ouvrages publiés au tournant du siècle présentent des calculs dans les unités métriques et/ou les unités antérieures, selon les contextes d'application envisagés. Puis suite à l'injonction de 1837, ils adaptent leurs contenus en conséquence et se conforment à l'usage préconisé du système métrique. À travers l'étude de la mesure du rectangle, c'est cette transition entre les anciennes et les nouvelles mesures que nous nous proposons d'observer, sous le point de vue des techniques opératoires, et notamment de la multiplication [144]. Notre corpus d'ouvrages, s'étalant de 1790 à 1896, révèle en effet les évolutions des pratiques calculatoires relatives au calcul des aires à cette période charnière.

La complexité des anciens systèmes de mesure

Dans l'ouvrage de 1790 de Mauduit (1790), le plus ancien de notre corpus, les unités du système décimal de poids et mesures ne peuvent figurer puisqu'elles sont en cours de constitution et par conséquent, pas encore fixées. En revanche, il y est largement question de calculs d'aires dans le système plus anciens des toises, pouces, etc., et en particulier, comme exemple fondamental, dans le cas de l'aire du rectangle. Le chapitre VII de son livre, traite du « toisé », du nom, comme il l'explique en introduction, de la mesure nommée la « toise », et qui selon lui « est une mesure fixe et déterminée, censée invariable par toute l'étendue du royaume » (Mauduit, 1790, p. 350). Cette mesure se décline en unité de mesure pour les longueurs, la « toise linéaire », pour les surfaces, la

143. Ce dernier fait le choix original de proposer un ouvrage qui ne considère la mesure et les unités que dans leur généralité, sans recourir à un système spécifique. Il faut dire également que son livre est parmi ceux qui contiennent, en proportion, le moins de parties et de pages sur les mesures d'aires, représentant 3,6% de ses pages et 3,3% des sections (voir les tableaux II.10 et II.11 de la sous-section II.2.2.2 p. 220).

144. Les techniques opératoires liées à la nature « complexe » des nombres dans les anciens systèmes de mesure sont également étudiées par Ferreira 2022 dans le cadre des manuels d'arithmétique au tournant du XIX^e siècle.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

« toise quarrée », et pour les volumes, la « toise cube » (Mauduit, 1790, p. 350). Les subdivisions de ces unités ne sont pas décimales, mais à base de multiples ou diviseurs de 6 ou de 12, récapitulées dans le tableau suivant (voir figure III.87 p. 503) :

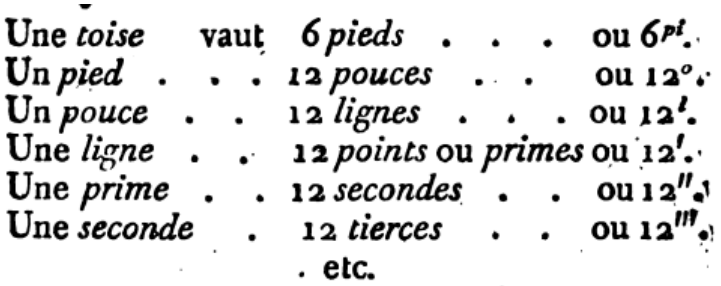

Une *toise* vaut 6 *pieds* . . . ou 6^{pi}.
Un *pied* . . . 12 *pouces* . . . ou 12^{o}.
Un *pouce* . . 12 *lignes* . . . ou 12^{l}.
Une *ligne* . . 12 *points* ou *primes* ou 12^{p}.
Une *prime* . . 12 *secondes* . . ou $12^{''}$.
Une *seconde* . 12 *tierces* . . ou $12^{'''}$.
. etc.

FIGURE III.87 – Tableau indiquant les relations entre la toise et ses subdivisions chez Mauduit (1790, p. 351)

Il en déduit les relations entre les mesures de surfaces, en multipliant ou en élevant au carré des rapports de correspondance des mesures précédentes, et obtient ainsi le nouveau tableau III.88 :

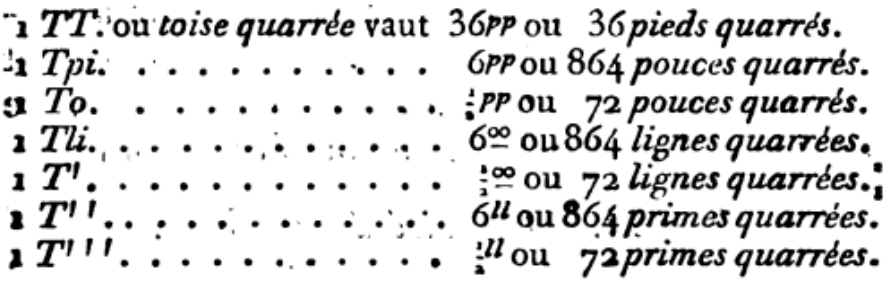

1 *TT.* ou *toise quarrée* vaut 36PP ou 36 *pieds quarrés.*
1 *Tpi.* . . . . . 6PP ou 864 *pouces quarrés.*
1 *To.* . . . . . $\frac{1}{6}$PP ou 72 *pouces quarrés.*
1 *Tli.* . . . . . 6^{m} ou 864 *lignes quarrées.*
1 *T'.* . . . . . $\frac{1}{6}^{m}$ ou 72 *lignes quarrées.*
1 *T''.* . . . . . $6^{''}$ ou 864 *primes quarrées.*
1 *T'''.* . . . . . $\frac{1}{6}^{''}$ ou 72 *primes quarrées.*

FIGURE III.88 – Tableau indiquant les relations entre la toise carrée et ses subdivisions chez Mauduit (1790, p. 352)

Il présente ensuite, comme premier exemple numérique de toisé, celui d'un rectangle « qui auroit [*sic*] 457 toises 5 pieds 8 pouces 9 lignes 6 points de long, sur 8 toises 5 pieds 7 pouces 10 lignes de haut » (Mauduit, 1790, p. 353). Il explique dans de longs paragraphes la démarche lui permettant d'obtenir le résultat, en le montrant finalement sous la forme d'une opération posée (voir figure III.89). La compréhension de ce calcul, pour des lecteurs non initiés, est loin d'être aisée, et Mauduit distille des éléments d'explication dans son texte pour les guider. Il explique par exemple qu'il considère la longueur du rectangle comme le multiplicande, qu'il dispose en haut du calcul, et comme multiplicateur le « rapport abstrait de la hauteur du rectangle à la toise », soit cette hauteur elle-même en termes de nombre, disposée en-dessous. Ensuite, le principe consiste à obtenir « un premier produit qui sera égal au multiplicande considéré comme toises quarrées pris huit fois ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

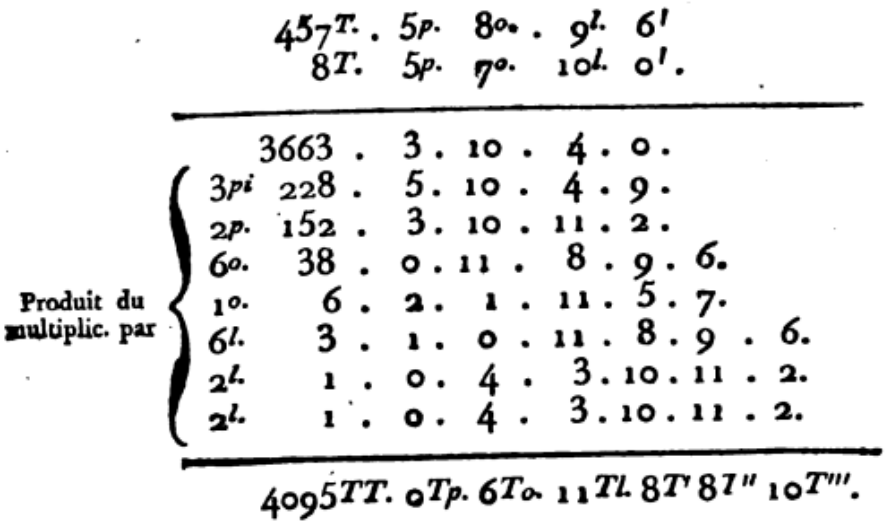


FIGURE III.89 – Opération posée permettant le calcul de l'aire d'un rectangle dans les anciennes unités de mesure chez Mauduit (1790, p. 353)

Cette première ligne est reconstituable, en considérant les opérations successives suivantes : je multiplie 8 par 6, j'obtiens 48 ; 48 a pour quotient 4 et reste 0 dans la division par 12 (puisqu'une ligne vaut 12 primes) ; je pose donc 0 toise-prime (T') et je retiens 4 ; je multiplie 8 par 9, j'obtiens 72, auquel j'ajoute 4 (la retenue), ce qui donne 76 ; 76 a pour quotient 6 et pour reste 4 dans la division par 12 (un pouce vaut 12 lignes) ; je pose donc 4 toises-lignes (TL) et je retiens 6 ; je multiplie 8 par 8, j'obtiens 64, auquel j'ajoute 6 (la retenue), ce qui donne 70 ; 70 a pour quotient 5 et pour reste 10 dans la division par 12 (un pied vaut 12 pouces) ; je pose donc 10 toises-pouces (To) et je retiens 5 ; je multiplie 8 par 5, j'obtiens 40, auquel j'ajoute 5 (la retenue), ce qui donne 45 ; 45 a pour quotient 7 et pour reste 3 dans la division par 6 (une toise vaut 6 pieds) ; je pose donc 3 toises-pieds (Tp) et je retiens 7 ; je multiplie 8 par 457, j'obtiens 3656, auquel j'ajoute 7 (la retenue), ce qui donne 3663 toises carrées (TT).

La suite est plus complexe encore, et peu explicite en suivant le texte de Mauduit, qui indique : « passant ensuite aux subdivisions de la toise dans ce multiplicateur, je les décomposerai en parties aliquotes de la toise, et ensuite en parties aliquotes les unes des autres ; ce qui me donnera autant de produits particuliers » (Mauduit, 1790, p. 354). Ces produits ont alors pour somme le résultat attendu. La complexité de cette dernière étape, accompagnée d'une explication pour le moins expéditive, rend le raisonnement difficilement compréhensible. Mais sans doute l'est-il davantage pour un lecteur contemporain de Mauduit et familier de ces questions. C'est dans un texte un peu ultérieur, celui de Terquem, que se trouvent de plus amples éclaircissements.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

En effet, dans son *Manuel de géométrie*, Terquem illustre dans un premier temps le théorème donnant la mesure de l'aire du rectangle par un exemple numérique dans le nouveau système métrique, établi et en usage depuis quelques décennies (Terquem, 1829, p. 93). Puis dans un paragraphe intitulé « Ancien système métrique ; surfaces », il revient sur le système exposé par Mauduit de toises, pieds , pouces, lignes, etc., accompagnées des mesures de surfaces associées. Il expose alors un exemple de calcul d'aire d'un rectangle dans ce système de mesure : « Supposons maintenant qu'il s'agisse d'évaluer l'aire d'un rectangle ayant : $10^{t}.4^{p}.6^{p}.3^{l}.2^{pts}$ h^{teur} ; $3^{t}.4^{p}.O^{p}.7^{l}.11^{pts}$ b^{se} » (Terquem, 1829, p. 94). Il reprend la même méthode de calcul que Mauduit, reposant sur « l'emploi si commode des parties aliquotes » (Mauduit, 1790, p. 94), en la détaillant. La première étape, puisque le multiplicateur contient 5 « espèces d'unités », est de décomposer le rectangle « en 5 rectangles, ayant même hauteur que le rectangle total, et pour bases : » (voir figure III.90 p. 505) (Terquem, 1829, p. 95)

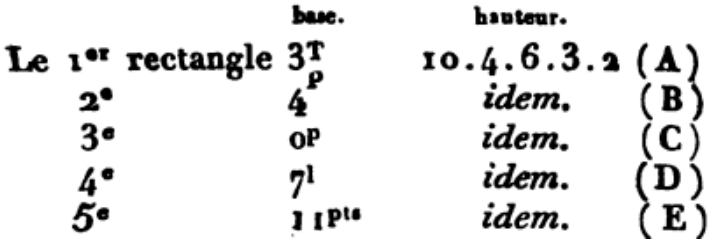
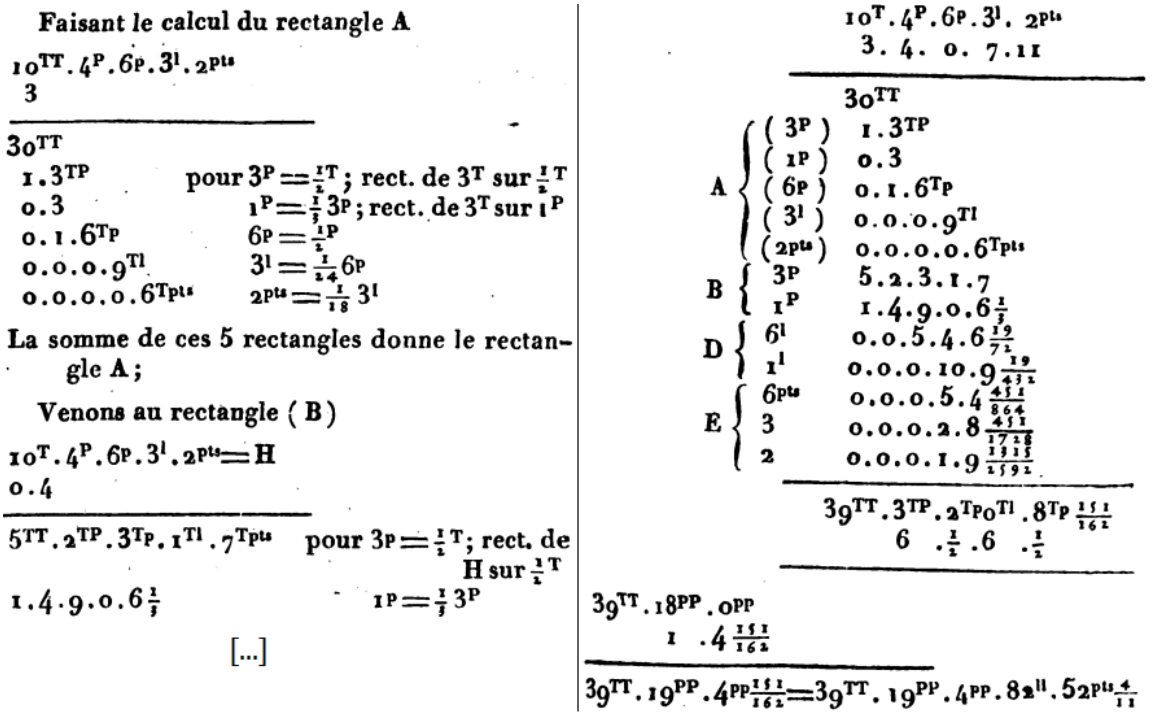


FIGURE III.90 – Principe de décomposition du rectangle à toiser chez Terquem (1829, p. 95)

Il détaille ensuite les calculs ligne par ligne, avant de les regrouper dans une même opération posée et synthétique (voir figure III.91 p. 506).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Faisant le calcul du rectangle A

$10^{TT}.4^{P}.6^{P}.3^{l}.2^{Pts}$
3

30^{TT}

1.3^{TP} pour $3^{P} = \frac{1}{2}{}^{T}$; rect. de 3^{T} sur $\frac{1}{2}{}^{T}$
0.3 $1^{P} = \frac{1}{3}3^{P}$; rect. de 3^{T} sur 1^{P}
$0.1.6^{Tp}$ $6^{P} = \frac{1}{2}{}^{P}$
$0.0.0.9^{Tl}$ $3^{l} = \frac{1}{24}6^{P}$
$0.0.0.0.6^{Tpts}$ $2^{Pts} = \frac{1}{18}3^{l}$

La somme de ces 5 rectangles donne le rectangle A ;

Venons au rectangle (B)

$10^{T}.4^{P}.6^{P}.3^{l}.2^{Pts} = H$
0.4

$5^{TT}.2^{TP}.3^{Tp}.1^{Tl}.7^{Tpts}$ pour $3^{P} = \frac{1}{2}{}^{T}$; rect. de H sur $\frac{1}{2}{}^{T}$
$1.4.9.0.6\frac{1}{3}$ $1^{P} = \frac{1}{3}3^{P}$

[...]

$10^{T}.4^{P}.6^{P}.3^{l}.2^{Pts}$
$3.4.0.7.11$

30^{TT}

A
- (3^{P}) 1.3^{TP}
- (1^{P}) 0.3
- (6^{P}) $0.1.6^{Tp}$
- (3^{l}) $0.0.0.9^{Tl}$
- (2^{Pts}) $0.0.0.0.6^{Tpts}$

B
- 3^{P} $5.2.3.1.7$
- 1^{P} $1.4.9.0.6\frac{1}{3}$

D
- 6^{l} $0.0.5.4.6\frac{19}{72}$
- 1^{l} $0.0.0.10.9\frac{19}{432}$

E
- 6^{Pts} $0.0.0.5.4\frac{451}{864}$
- 3 $0.0.0.2.8\frac{451}{1728}$
- 2 $0.0.0.1.9\frac{1915}{1592}$

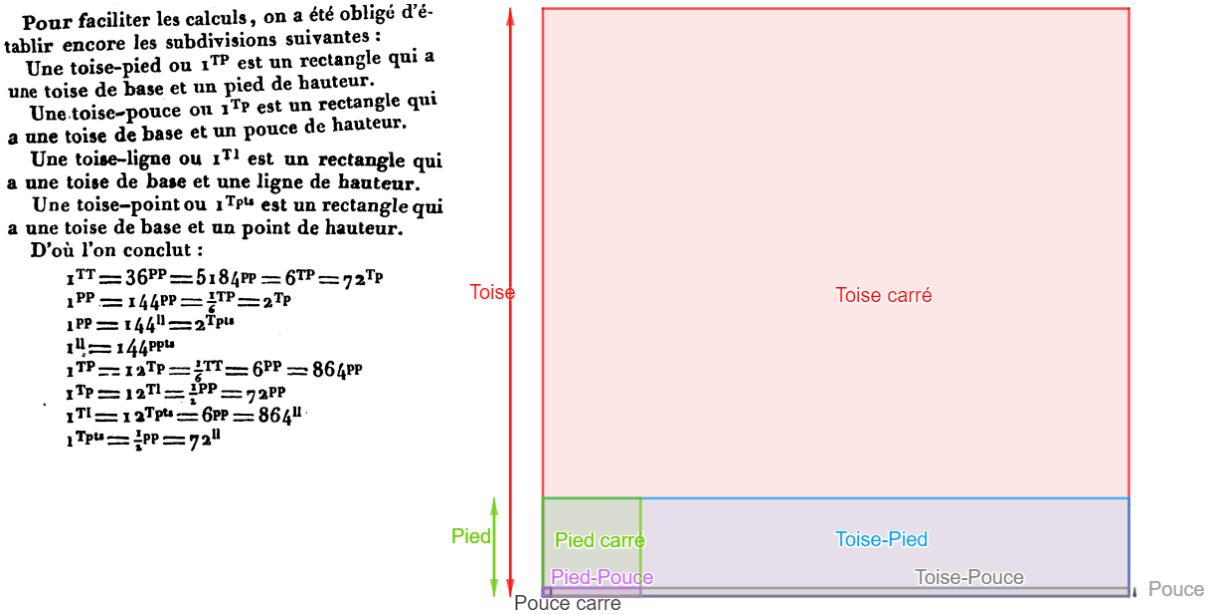
$39^{TT}.3^{TP}.2^{Tp}0^{Tl}.8^{Tp}\frac{151}{162}$
$6 \quad .\frac{1}{2}.6 \quad .\frac{1}{2}$

$39^{TT}.18^{PP}.0^{PP}$
$1 \quad .4\frac{151}{162}$

$39^{TT}.19^{PP}.4^{PP}\frac{151}{162} = 39^{TT}.19^{PP}.4^{PP}.82^{ll}.52^{Pts}\frac{4}{11}$

FIGURE III.91 – Opération détaillée ligne par ligne puis posée chez Terquem (1829, p. 96-97)

Mais cette dernière opération fait intervenir des unités intermédiaires, qu'il a préalablement définies, et que nous présentons accompagnées d'un schéma que nous avons réalisé pour en expliciter les relations (voir figure III.92 p. 506), et pouvoir comprendre les dernières conversions :



Pour faciliter les calculs, on a été obligé d'établir encore les subdivisions suivantes :

Une toise-pied ou 1^{TP} est un rectangle qui a une toise de base et un pied de hauteur.

Une toise-pouce ou 1^{Tp} est un rectangle qui a une toise de base et un pouce de hauteur.

Une toise-ligne ou 1^{Tl} est un rectangle qui a une toise de base et une ligne de hauteur.

Une toise-point ou 1^{Tpts} est un rectangle qui a une toise de base et un point de hauteur.

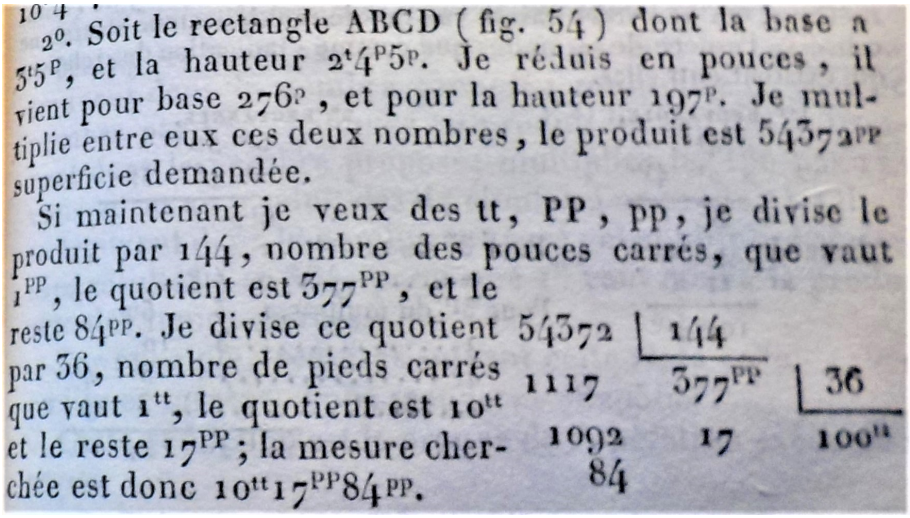
D'où l'on conclut :

$1^{TT} = 36^{PP} = 5184^{pp} = 6^{TP} = 72^{Tp}$
$1^{PP} = 144^{pp} = \frac{1}{6}{}^{TP} = 2^{Tp}$
$1^{PP} = 144^{ll} = 2^{Tpts}$
$1^{ll} = 144^{ppts}$
$1^{TP} = 12^{Tp} = \frac{1}{6}{}^{TT} = 6^{PP} = 864^{pp}$
$1^{Tp} = 12^{Tl} = \frac{1}{2}{}^{PP} = 72^{PP}$
$1^{Tl} = 12^{Tpts} = 6^{PP} = 864^{ll}$
$1^{Tpts} = \frac{1}{2}{}^{pp} = 72^{ll}$

FIGURE III.92 – Unités intermédiaires et conversions chez Terquem (1829, p. 93-94), avec schéma explicatif

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La présentation des calculs que réalise Terquem est plus pédagogique, en cela qu'elle expose les étapes de façon isolée et détaillée, avant d'en faire la synthèse. Il n'empêche que l'opération nécessaire pour toiser un simple rectangle demeure très fastidieuse. Desnanot, dans sa *Pratique du toisé géométrique* (Desnanot, 1835) publié quelques années plus tard, propose également de nombreux exemples de calculs d'aires de rectangles dans le même système d'unités de mesure, suivant une méthode très similaire à celles de Mauduit et de Terquem. Mais il présente également des variantes ou alternatives à ce type de procédures. Il évoque notamment une méthode que Terquem élude dans son ouvrage, et qui consiste à réduire les deux facteurs du produit dans une unité commune, par exemple le « point », puis à « multiplier les nombres ensemble, et on aura pour produit des points carrés » (Terquem, 1829, p. 94), ce résultat demeurant ensuite à exprimer dans les unités de surface carrées *ad hoc*. Terquem décrit cette méthode par divisions successives brièvement tout en la définissant d'« extrêmement pénible à cause des grands nombres qu'il faut multiplier ensemble et des fréquentes divisions qu'il faut faire » (Terquem, 1829, p. 94). Desnanot ne partage visiblement pas cet avis, puisqu'il présente cette procédure au même titre que les autres, d'une façon claire et succinte (voir figure III.93 p. 507).


2°. Soit le rectangle ABCD (fig. 54) dont la base a 5t5p, et la hauteur 2t4p5p. Je réduis en pouces, il vient pour base 276p, et pour la hauteur 197p. Je multiplie entre eux ces deux nombres, le produit est 54372pp superficie demandée.

Si maintenant je veux des tt, PP, pp, je divise le produit par 144, nombre des pouces carrés, que vaut 1PP, le quotient est 377PP, et le reste 84PP. Je divise ce quotient par 36, nombre de pieds carrés que vaut 1tt, le quotient est 10tt et le reste 17PP; la mesure cherchée est donc 10tt17PP84PP.

54372 | 144
1117 377PP | 36
1092 17 100tt
84

FIGURE III.93 – Méthode de calcul de l'aire du rectangle par réduction à l'unité commune chez Desnanot (1835, p. 47)

Desnanot propose également des variantes à ce type de calculs peu communes dans notre corpus, dont l'usage effectif pour de potentiels utilisateurs dans un cadre professionnel n'est pas précisé. Il s'agit par exemple d'« évaluer un rectangle en toises carrées et fractions décimales de toises carrées » (Desnanot, 1835, p. 46). Le mélange entre l'unité de la toise et ses subdivisons décimales est surprenant, puisque les subdivisions naturelles, ou pour le moins culturelles, de cette unité de mesure ne

Licence CC BY-NC-ND 3.0

sont pas du tout décimales, mais à base de multiples de 6 ou 12. Desnanot explore également d'autres systèmes de mesure, dans lesquels il expose des calculs d'aire de rectangles. Il propose ainsi de « mesurer un rectangle en cannes carrées », la canne se décomposant en « pans », « menus premiers », « menus seconds », etc., suivant une base 8 (Desnanot, 1835, p. 50-51). Il reprend le même type de procédé pour mesurer cette figure en « arpents des eaux et forêts » (Desnanot, 1835, p. 50-51), ou quand « l'unité de mesure est le journal composé de 20 lattes, la latte de 20 escats » (Desnanot, 1835, p. 52). Il évoque ainsi un cortège d'unités de mesure locales, dont l'existence est fonction des besoins des territoires, comme la « salmée » ou le « dextrex » (Desnanot, 1835, p. 53). S'il précise à chaque fois la valeur équivalente de ces unités ramenées aux toises, pieds ou pouces, il n'en donne pas, par contre, le domaine de la vie courante dans lequel ces mesures sont en usage.

Durant cette période, où l'emploi des anciennes unités de mesure n'est pas encore légalement proscrit (Débarbat et Ten, 1993), quelques auteurs font donc le choix de détailler les procédures de calcul complexes[145] liées à la structure non décimale de ces unités, alors que la majorité travaille déjà exclusivement avec le mètre et ses subdivisions. Lancelot, en 1833, présente son *Nouveau traité d'arpentage* avec ce parti-pris, mais propose néanmoins dans ses pages un tableau de conversion des surfaces en « perches », « arpents communs » et en « arpents de Paris » dans les unités de surface dérivées du mètre que sont les hectares, ares, et centiares, dans un sens comme dans l'autre (Lancelot, 1833, p. 18-29). Il manifeste ainsi la volonté d'assurer une transition entre les anciens systèmes et le nouveau, tout en ne s'encombrant pas des calculs fastidieux liés à l'usage des anciennes mesures. À sa suite, et même après la promulgation de la loi de 1837, quelques auteurs s'attachent également à accompagner leurs lecteurs dans cette mutation.

Le reliquat des « mesures porteuses de sens »

En 1839, deux années seulement après l'abolition légale des anciens systèmes de mesure, deux auteurs y font néanmoins référence dans leurs ouvrages : celui de Lamotte (1839), inspecteur de l'instruction primaire, est une 5ème édition d'un titre initialement paru en 1833, alors que celui de Sonnet (1839), professeur à l'École centrale des arts et manufactures, est une première édition. Le premier est un traité d'arpentage destiné aux écoles primaires, EPS, et aux « propriétaires, cultivateurs, notaires, juges de paix, maires, etc. » (Lamotte, 1839, couv.). Le second s'adresse aux EPS, aux écoles industrielles et aux ENP (Sonnet, 1839, p. viii). Tous les deux situent l'usage de

145. Pour l'analyse des techniques de multiplication avec des nombres « complexes » au tournant du XVIIIe siècle, voir Ferreira et Schubring (2022).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ces mesures dans un contexte professionnel spécifique, ce qui justifie leur choix de continuer à les évoquer en tant que « mesures porteuses de sens », comme les appelle Martin (O. Martin, 2020, p. 38). Cette formulation décrit le « caractère significatif » d'une unité de mesure, du fait qu'elle possède son sens « propre, spécifique au contexte de la mesure, aux protagonistes engagés dans la mesure, et à la nature des produits mesurés » (O. Martin, 2020, p. 38).

C'est ce que décrit Sonnet quand il explique dans quel contexte s'utilise encore la toise :

> Ce système s'est néanmoins conservé dans quelques branches d'industrie, et notamment pour l'évaluation des surfaces de sciage. Le travail du sciage des bois de construction se paie en raison de l'étendue des surfaces mises au jour par la scie : les lignes qui terminent ces surfaces continuent, malgré l'adoption des mesures décimales, à s'exprimer le plus souvent en toises, pieds, pouces et lignes ; c'est pour cela que leurs superficies s'évaluent en toise-toises, toise-pieds , toise-pouces et toise lignes. Dans l'évaluation des surfaces de sciage, la toise carrée prend aussi le nom de brasse. (Sonnet, 1839, p. 236)

Quant à Lamotte, il rappelle :

> Il existait en France, dans le siècle dernier, un nombre prodigieux de mesures dont les dénominations variaient d'un village à l'autre : il en résultait de graves inconvénients pour le commerce. [...]
> Aujourd'hui le Système légal des Poids et Mesures est le seul reconnu par le gouvernement, et bientôt il sera le seul en usage. Son extrême simplicité et la facilité du calcul le rendent bien préférable aux nombres complexes. (Lamotte, 1839, p. 8)

Il justifie de présenter néanmoins la « conversion des anciennes mesures en nouvelles, et des nouvelles en anciennes » (Lamotte, 1839, p. 16) dans son ouvrage en expliquant :

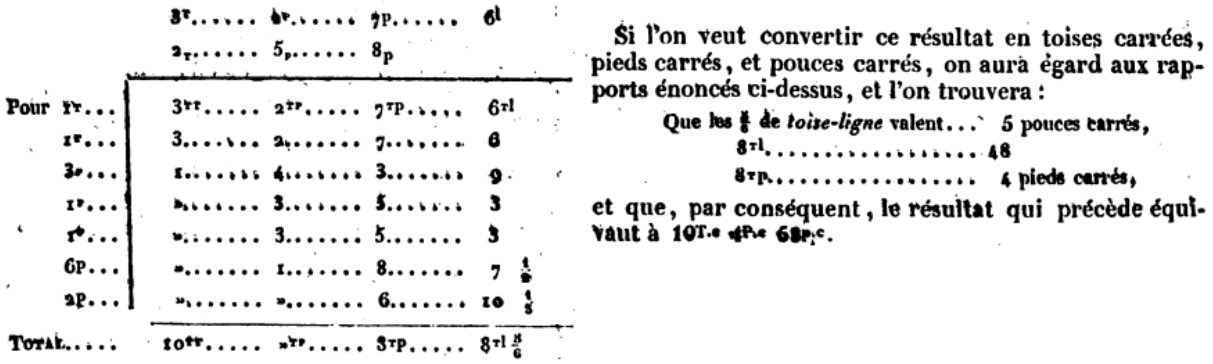
> Malgré la simplicité du système métrique, malgré ses immenses avantages, il faut avouer qu'il n'est pas encore généralement répandu dans toute la France, où les habitudes routinières ont prévalu longtemps. Nous serons heureux si cet ouvrage, destiné aux écoles, peut contribuer à faire apprécier par la classe industrielle la clarté du système métrique. Que les instituteurs surtout comparent la promptitude et la facilité du système décimal appliqué au système métrique avec la lenteur et la difficulté des opérations sur les nombres complexes ! Ils peuvent rendre un important service à leur pays en enseignant aux élèves le système décimal et le système métrique. C'est par les instituteurs seulement que le vœu des hommes instruits sera réalisé

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> et que le système légal des poids et mesures triomphera d'une routine de plusieurs siècles. (Lamotte, 1839, p. 16)

Dans l'ouvrage de Sonnet, ce dernier développe, en application du théorème sur la mesure de l'aire du rectangle, la théorie des unités dérivées de la toise, carrées ou rectangulaires, avant d'en justifier l'usage. Il en fait même un cas d'utilisation pratique du résultat de comparaison des aires des rectangles de même base, en énonçant que « si l'on compare la *toise-pied* au pied carré, on voit que ces deux rectangles ont un pied pour base et sont, par conséquent, entre eux comme leurs hauteurs, ou comme la toise est au pied ; c'est-à-dire qu'une *toise-pied* vaut 6 pieds carrés » (Sonnet, 1839, p. 234). Il détaille ensuite de la même façon ce que sont les « toises-pouces » et les « toises-lignes ».

Sonnet déroule son raisonnement, en expliquant que ces subdivisions rectangulaires de l'unité de surface ont pour but « de simplifier autant que possible le calcul des nombres complexes » (Sonnet, 1839, p. 235), avant d'en donner une illustration sur un exemple numérique. Il s'agit toujours de la « méthode des parties aliquotes » (Sonnet, 1839, p. 235) rencontrée chez Mauduit, Terquem et Desnanot, mais présentée sous une forme encore plus lisible et synthétique (voir figure III.94 p. 510).



Si l'on veut convertir ce résultat en toises carrées, pieds carrés, et pouces carrés, on aura égard aux rapports énoncés ci-dessus, et l'on trouvera :

Que les $\frac{5}{6}$ de *toise-ligne* valent . . . 5 pouces carrés,
8^{tl} 48
8^{tp} . . . . . 4 pieds carrés,

et que, par conséquent, le résultat qui précède équivaut à $10^{T.e}$ $4^{P.e}$ $6^{8p.c}$.

FIGURE III.94 – Calcul de l'aire du rectangle par la méthode des parties aliquotes chez Sonnet (1839, p. 235)

Rien n'indique dans le texte de Sonnet la réalité de l'usage de ce type de calcul par les professionnels du sciage, même si l'ouvrage est destiné à un public d'EPS et d'écoles industrielles (Sonnet, 1839, p. viii). Ceci laisse penser que le contexte décrit n'est pas seulement un prétexte à l'exposé d'une méthode, qui présente par ailleurs une richesse mathématique de par le fait qu'elle mette en œuvre les théorèmes de comparaison des rectangles. Nous estimons néanmoins possible que l'intérêt pédagogique de la question vienne rejoindre son utilité pratique, ce qui expliquerait pourquoi Sonnet persiste à présenter ces anciennes unités de mesure, même après l'interdiction légale alors en vigueur.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Lamotte, quant à lui, ne propose pas ce type d'application numérique à la suite du théorème donnant la formule de l'aire du rectangle. Ses exemples sont plus classiquement donnés dans la nouvelle mesure officielle, le mètre, ses subdivisions, et ses déclinaisons en ares, centiares, etc (Lamotte, 1839, p. 39-41). Il propose néanmoins, en amont de la présentation des calculs des aires des figures usuelles, des cas de conversion des anciennes mesures en nouvelles, et réciproquement, sous forme d'exemples numériques et de tableaux, accompagnés d'un mode d'emploi (Lamotte, 1839, p. 16-30). Il met ainsi en relation le système de mesures en ares/centiares, avec celui en arpents/perches, ainsi que celui des toises/pieds/pouces. Cette partie lui permet d'évacuer le problème des unités de mesure multiples et de ne traiter les calculs de surfaces que dans l'unité devenue officielle, le lecteur pouvant ensuite se référer aux tableaux pour retrouver un résultat exprimé dans un autre système.

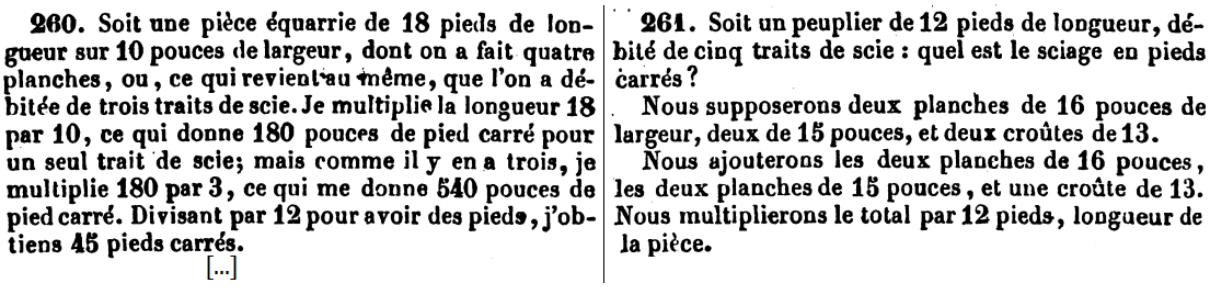
Dans la dernière partie de son traité d'arpentage consacrée à la « mesure des hauteurs et des volumes », Lamotte s'intéresse au problème du calcul des volumes des bois de charpente, mais aussi à la « mesure du sciage des bois » (Lamotte, 1839, p. 168). Tout comme Sonnet, il évoque cette pratique professionnelle et son principe mais de façon beaucoup plus détaillée :

> Lorsqu'on exploite des bois, des peupliers, par exemple, on fait scier les arbres dans le sens de la longueur, c'est ce qu'on appelle les débiter à la scie.
> Il faut savoir calculer ce que l'on doit pour le sciage, qui se paie ordinairement au pied carré.
> Chaque trait de scie divise une pièce en deux parties, et donne deux superficies égales.
> On peut faire observer ici que, lorsqu'une pièce de bois est débitée, le nombre de planches ou bordages qui résulte du sciage excède toujours d'un le nombre des traits de scie ; ainsi, avec un trait vous faites deux planches, avec deux traits vous faites trois planches, etc. , etc.
> Carrer le sciage, c'est chercher combien les superficies contiennent de pieds et de parties de pied. (Lamotte, 1839, p. 168-169)

Il s'agit donc bien ici d'un problème de mesure de surface, à multiplier par le nombre de planches obtenues, lui-même égal au nombre de traits de scie plus un. Il présente ensuite deux exemples numériques, le premier dans lequel la pièce de bois est « bien équarrie », et les planches sont donc toutes de dimensions égales, et un second dans lequel « les superficies ne sont plus égales : car les planches prises au cœur de l'arbre

Licence CC BY-NC-ND 3.0

sont sensiblement plus grandes que celles attenant à l'écorce, et qu'on appelle des *croûtes* » (Lamotte, 1839, p. 169) (voir figure III.95 p. 512).



260. Soit une pièce équarrie de 18 pieds de longueur sur 10 pouces de largeur, dont on a fait quatre planches, ou, ce qui revient au même, que l'on a débitée de trois traits de scie. Je multiplie la longueur 18 par 10, ce qui donne 180 pouces de pied carré pour un seul trait de scie; mais comme il y en a trois, je multiplie 180 par 3, ce qui me donne 540 pouces de pied carré. Divisant par 12 pour avoir des pieds, j'obtiens 45 pieds carrés.

[...]

261. Soit un peuplier de 12 pieds de longueur, débité de cinq traits de scie : quel est le sciage en pieds carrés ?

Nous supposerons deux planches de 16 pouces de largeur, deux de 15 pouces, et deux croûtes de 13.

Nous ajouterons les deux planches de 16 pouces, les deux planches de 15 pouces, et une croûte de 13. Nous multiplierons le total par 12 pieds, longueur de la pièce.

FIGURE III.95 – Deux problèmes de sciage de bois, l'un avec une pièce bien équarrie (260) et l'autre non (261) chez Lamotte (1839, p. 169-170)

Toute cette partie est exprimée dans les unités de mesure spécifiques au domaine d'activité concerné, et Lamotte indique que les marchands achètent le bois en « brasse », qui désigne pour eux la toise carrée (Lamotte, 1839, p. 171). Ces cas pratiques sont vraisemblablement issus de pratiques professionnelles réelles, car les détails qui figurent dans le texte sont particulièrement réalistes. Cette impression est confirmée quelques pages plus tard par l'auteur lui-même, qui précise :

> Les explications dans lesquelles nous sommes entrés sur la mesure des bois sont d'une assez haute importance et d'une application assez fréquente, surtout à la campagne, pour faire excuser la longueur de ce chapitre. (Lamotte, 1839, p. 172)

Il explique aussi que ces développements étaient nécessaires pour bien se faire comprendre des « jeunes élèves » auxquels l'ouvrage est destiné. Puis il termine en affirmant :

> La complication de ces mesures anciennes fera mieux apprécier aussi l'admirable simplicité du nouveau système des poids et mesures. (Lamotte, 1839, p. 172)

En cela, il est rejoint par d'autres auteurs qui, ayant éprouvé les complications de l'ancien système de mesure, font la promotion de la simplicité du nouveau, comme Terquem, qui affirme qu'« il est facile de juger, d'après cet exemple, combien est pénible le calcul des aires d'après l'ancien système ; tandis qu'il ne présente aucune difficulté dans le nouveau système » (Terquem, 1829, p. 98), et invite même, si le lecteur devait effectuer des opérations dans un ancien système de mesure, à les convertir au préalable dans le système métrique décimal pour opérer dessus. Sonnet conclut lui aussi la présentation des calculs de la figure III.94 (p. 510) par ce constat : « Ce mode de subdivisions, quelque commode qu'il puisse paraître, est loin d'offrir la simplicité

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des mesures métriques, où toutes les conversions d'unités, soit de longueur, soit de superficie, s'opèrent par un simple transport de virgule » (Sonnet, 1839, p. 236).

Même si les nouvelles unités métriques semblent moins « porteuses de sens », notamment pour certaines branches du monde professionnel[146], la simplicité du nouveau système métrique fait l'unanimité en termes calculatoires, y compris et surtout chez les usagers des anciens systèmes, qui ont dû déployer des trésors d'ingéniosité pour rendre la complexité des calculs qu'ils génèrent accessibles à leurs lecteurs. Dans les années autour de 1837, la diffusion du système métrique, déjà imposé par la loi, trouve ainsi ses ambassadeurs chez les auteurs de manuels scolaires, notamment de géométrie, qui en mesurent l'efficacité dès les premiers calculs de surfaces, donc dès qu'ils abordent le cas du rectangle.

Les pratiques calculatoires de la géométrie des aires se modifient donc et se simplifient très nettement suite à l'abandon des anciens systèmes de mesure. Leur enseignement s'en voit facilité, ce dont se félicitent les auteurs de manuels de géométrie. Néanmoins, durant une période intermédiaire, la présentation des techniques de calcul liées aux anciens systèmes demeurent, pas seulement pour mesurer les avantages des nouvelles unités, déjà largement utilisées, mais aussi pour proposer des techniques opératoires qui restent au plus proche de certains corps de métiers (comme celui du bois), en vue de la formation de leurs éventuels futurs travailleurs.

Le calcul des aires des rectangles se situe donc à l'interface de l'ancien et du nouveau système d'unités de mesure, qui se différencient par des techniques opératoires très distinctes, compte-tenu de la spécificité du système numérique décimal, par rapport aux nombres exprimés dans d'autres bases. Si le principe global de la multiplication posée reste le même dans le nouveau système, et que les techniques de conversion des unités de mesure permettent de passer de l'un à l'autre, la présentation des calculs dans les anciennes unités de mesure apporte un argument de simplicité aux auteurs pour promouvoir le nouveau système décimal. Mais elles mettent également en évidence la possibilité d'une perte de sens induite par le système métrique décimal dans certains domaines, où les unités anciennes sont caractéristiques des pratiques de terrain. Les différents flux caractérisant cette interface sont schématisés sur la figure III.96 p. 514.

146. Mehaye nomme les domaines dans lesquels survivent d'anciens systèmes de mesure après l'instauration officielle du système métrique décimal, des « niches métrologiques », parmi lesquelles il cite explicitement l'industrie du bois (Méhaye, 2006).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

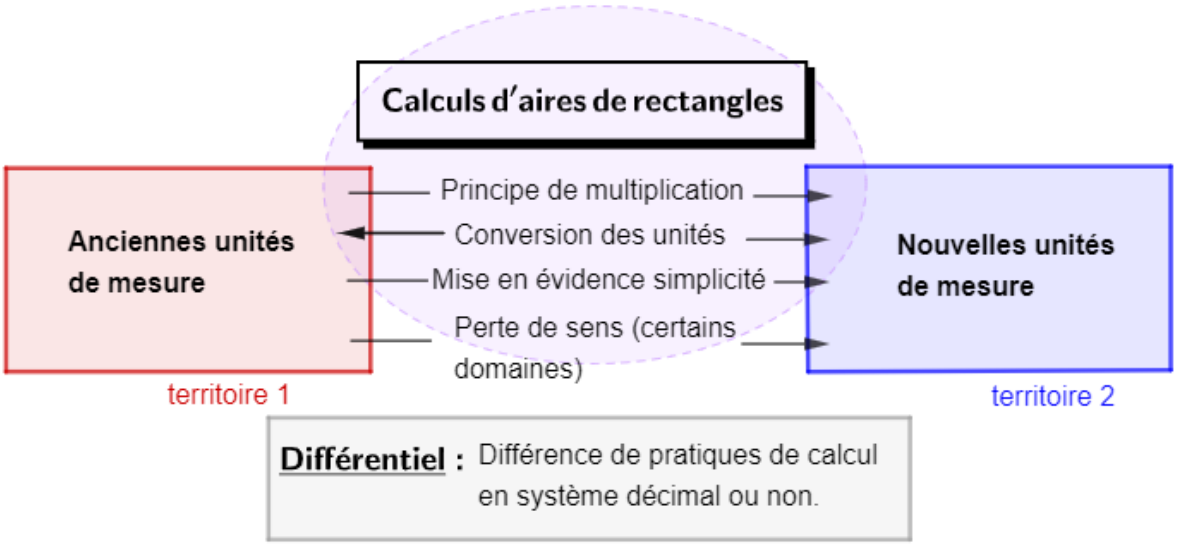


FIGURE III.96 – Schéma montrant en quoi les calculs d'aires de rectangle sont à l'interface de l'ancien et du nouveau système de mesure

III.2.3.2 Les interactions entre le géométrique et le numérique en géométrie pratique

Dans une partie des ouvrages de géométrie pratique, les applications numériques intègrent le cœur des argumentaires des preuves, comme dans le cas de celle du théorème de Pythagore, ou encore mobilisent conjointement des arguments liés aux constructions à des calculs effectifs, notamment dans des situations d'arpentage. Dans ces deux situations, les démonstrations de propositions ou explications de méthodes entremêlent les raisonnements géométriques à des pratiques opératoires, mettant une nouvelle fois la géométrie des aires à l'interface du géométrique et du numérique.

Preuves arithmético-géométriques du théorème de Pythagore

Concernant le théorème de Pythagore, il existe des preuves qui mettent pleinement en interaction les domaines de l'arithmétique et de la géométrie. Reposant sur la configuration d'Euclide et les équivalences entre les aires, elles intègrent dans le cœur du raisonnement des arguments issus de la similitude des triangles. Classées dans les preuves euclidiennes du fait de leur ressort principal (les équivalences des aires), ces démonstrations pourraient néanmoins être distinguées en tant que preuves que nous désignerons d'« arithmético-géométriques ». Elles se trouvent dans quatre ouvrages des années 1830-1840, ceux de Desnanot (1835), de Sonnet (1839), de Percin (1842)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

et de Eysseric et Pascal (1850) [147].

Dans son ouvrage traitant du « toisé géométrique » [148], Desnanot démontre le théorème de Pythagore dans un chapitre sur les « propriétés du triangle rectangle ». Il énonce d'abord que « dans un triangle rectangle, le carré de l'un des côtés est équivalent au rectangle construit sur l'hypoténuse et le segment adjacent ; le carré de la perpendiculaire est équivalent au rectangle des deux segmens [149] » (Desnanot, 1835, p. 123). Ce résultat, découlant de la similitude des triangles ABC, ABD et ADC démontrée auparavant (voir figure III.97 p. 515), est explicitement exprimé en termes d'aires.

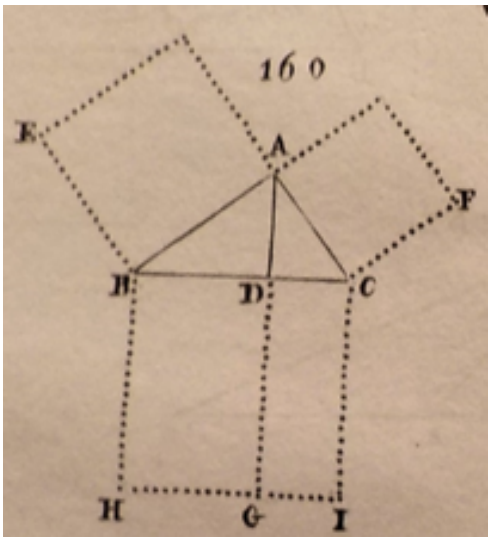


FIGURE III.97 – Construction en lien avec la preuve du théorème de Pythagore chez Desnanot (1835, pl. vii).

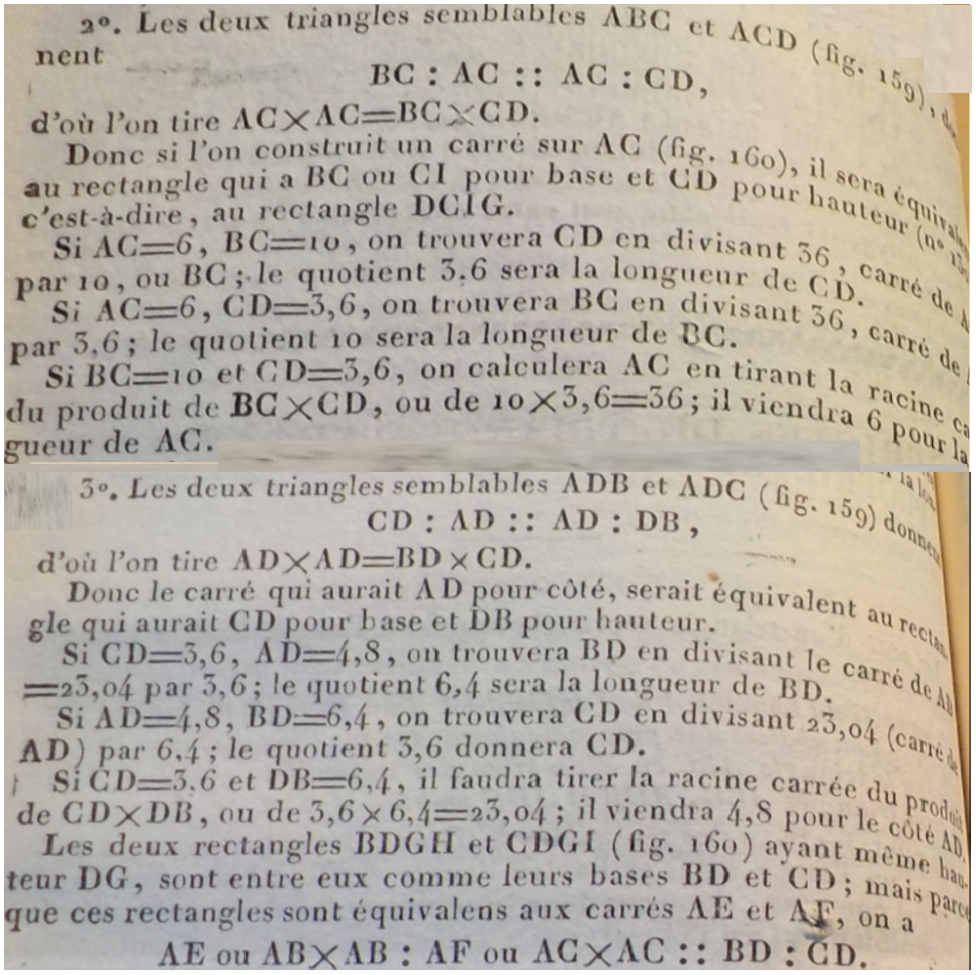
Il est en revanche démontré à partir de l'égalité des rapports des côtés homologues des triangles, exprimée sous forme d'une égalité de produits obtenus par la propriété des produits en croix. Le lien est ensuite fait avec l'équivalence des figures, par exemple le carré construit sur AB et le rectangle $BDGH$. À la suite, il présente des applications numériques de longueur de l'un des segments en jeu quand on connaît les deux autres, par produit, division ou extraction de racine carrée (voir figure III.98 p. 516).

147. Dans la suite, seule la preuve de Desnanot va être étudiée. Celles des autres auteurs cités utilisent le même enchaînement d'arguments tantôt arithmétiques tantôt géométriques, en lien avec la configuration d'Euclide, avec une présentation légèrement différente.

148. Initialement, le toisé désigne le mesurage à la toise, et plus largement le mesurage des surfaces et des volumes. Dans ses « Notions préliminaires », Desnanot définit le « toisé géométrique » comme « l'art de mesurer l'étendue, ou d'évaluer en mesures reçues les lignes, les surfaces ou superficies, les solides ou volumes » (Desnanot, 1835, p. 1).

149. Les segments dont il est question sont les parties de l'hypoténuse divisée par la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



2°. Les deux triangles semblables ABC et ACD (fig. 159), donnent

BC : AC :: AC : CD,

d'où l'on tire AC×AC=BC×CD.

Donc si l'on construit un carré sur AC (fig. 160), il sera équivalent au rectangle qui a BC ou CI pour base et CD pour hauteur (n° 1[illegible]), c'est-à-dire, au rectangle DCIG.

Si AC=6, BC=10, on trouvera CD en divisant 36, carré de [illegible] par 10, ou BC; le quotient 3.6 sera la longueur de CD.

Si AC=6, CD=3,6, on trouvera BC en divisant 36, carré de [illegible] par 3,6; le quotient 10 sera la longueur de BC.

Si BC=10 et CD=3,6, on calculera AC en tirant la racine carrée du produit de BC×CD, ou de 10×3,6=36; il viendra 6 pour la longueur de AC.

3°. Les deux triangles semblables ADB et ADC (fig. 159) donnent

CD : AD :: AD : DB,

d'où l'on tire AD×AD=BD×CD.

Donc le carré qui aurait AD pour côté, serait équivalent au rectangle qui aurait CD pour base et DB pour hauteur.

Si CD=3,6, AD=4,8, on trouvera BD en divisant le carré de AD=23,04 par 3,6; le quotient 6,4 sera la longueur de BD.

Si AD=4,8, BD=6,4, on trouvera CD en divisant 23,04 (carré de AD) par 6,4; le quotient 3,6 donnera CD.

Si CD=3,6 et DB=6,4, il faudra tirer la racine carrée du produit de CD×DB, ou de 3,6×6,4=23,04; il viendra 4,8 pour le côté AD.

Les deux rectangles BDGH et CDGI (fig. 160) ayant même hauteur DG, sont entre eux comme leurs bases BD et CD; mais parce que ces rectangles sont équivalens aux carrés AE et AF, on a

AE ou AB×AB : AF ou AC×AC :: BD : CD.

FIGURE III.98 – Extrait de la preuve de Desnanot du théorème de Pythagore (Desnanot, 1835, p. 124)

Après cette preuve entrecoupée d'exemples de calculs numériques, il déduit que « le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés », soit le théorème de Pythagore exprimé en lignes. Il le démontre cependant par l'addition des deux rectangles $BDGH$ et $DCIG$, égaux respectivement aux carrés formés sur AB et AC, et dont la somme correspond au carré construit sur BC (figure III.97 p. 515). Une première lecture de cet exposé montre d'ores et déjà l'imbrication continuelle entre des arguments de type numérique et d'autres de nature géométrique, sur les lignes comme sur les aires. La démarche globale peut être synthétisée par le schéma suivant, dans lequel les flèches noires indiquent des relations d'implication, alors que les flèches en pointillés désignent des étapes annexes, non nécessaires pour suivre le raisonnement[150] :

150. Il est à noter que dans l'étape 3°, à gauche de l'image de la figure III.98 (p. 516), deux étapes de plus sont présentes : un argument supplémentaire sur les rapports des aires des figures, suivi par sa traduction comme égalité de rapports. Ces étapes ne figurent pas dans les étapes 1 et 2, structurées toutes deux de la même façon.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

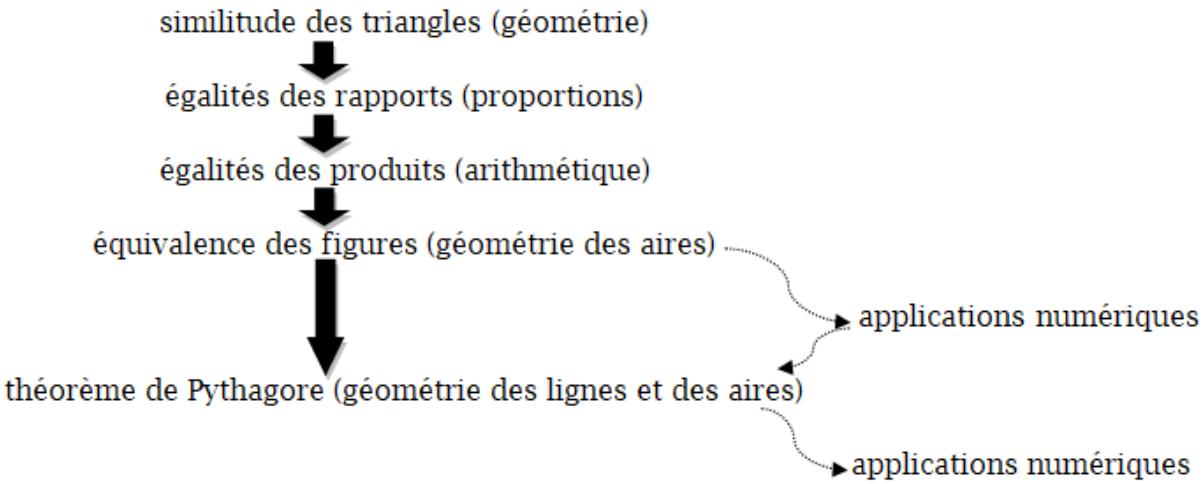


FIGURE III.99 – Schéma résumant les liens logiques dans la preuve arithmético-géométrique de Desnanot

Dans le raisonnement de Desnanot, plusieurs éléments auraient pu être raccourcis. En effet, les deux premiers points de la preuve mènent aux égalités $AB^2 = BC \times BD$ et $AC^2 = BC \times CD$, qui, ajoutées entre elles, fournissent la relation souhaitée (c'est d'ailleurs la démarche suivie par tous les auteurs qui présentent la preuve par les triangles semblables, sans appui sur la configuration euclidienne). Le retour systématique à l'interprétation en termes d'aires est donc étonnant puisqu'il est évitable dans le raisonnement, de même que les calculs numériques des longueurs manquantes. Plusieurs explications sont possibles pour justifier cette preuve arithmético-géométrique, présentant apparemment plus de complexité que le strict nécessaire.

Tout d'abord, la démarche de l'auteur repose sur la configuration d'Euclide, et se réfère à l'équivalence des figures, même si cela ne constitue pas le principal chaînon déductif. Comme chez Lacroix, il semble qu'il ne soit pas si facile pour Desnanot de prendre de la distance par rapport aux *Éléments* (voir p. 350). À l'époque de parution de son ouvrage, la norme pour l'enseignement de la géométrie demeure la référence euclidienne (voir la sous-section I.3.1.1 p. 103), pas encore remise en question par l'usage possible des *Éléments* de Clairaut. Même dans un cadre de géométrie plus pratique, il est probable que la légitimité de l'auteur d'un ouvrage d'enseignement en géométrie soit dépendante de sa connaissance, et de son usage, de l'œuvre d'Euclide.

Ensuite, l'ouvrage de Desnanot est « pratique » et traite du « toisé géométrique ». Le caractère pratique s'observe en particulier dans les exemples numériques très détaillés et nombreux (chacun des cas est traité *via* un exemple générique), ainsi que dans les applications du théorème aux mesures de lignes partiellement inaccessibles ou à la construction d'un « angle droit sans compas dans les arts » (Desnanot, 1835, p. 125).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Le toisé s'inscrit quant à lui dans la tradition des arpenteurs, et l'auteur, à travers cette preuve, ne s'éloigne pas vraiment de son sujet principal : la mesure des surfaces. D'ailleurs, le théorème le mène un peu plus loin à démontrer « très simplement » « le moyen de calculer la superficie d'un triangle, connaissant les trois côtés » (Desnanot, 1835, p. vi). Un objectif essentiel de son ouvrage est donc bien de savoir calculer les aires, conformément à ce qu'une partie des programmes et instructions officielles préconisent (voir l'introduction de la section III.2.3 p. 500).

D'autant plus que Desnanot a longtemps enseigné, et il ambitionne que son ouvrage puisse devenir pour les élèves « presque un manuel pour les diriger et les conduire ». Construit sur plusieurs niveaux de lecture possibles, identifiables grâce à un jeu typographique et de tailles de caractères (voir figure III.100 p. 518), il est délibérément accessible à « ceux qui n'ont d'autres connaissances que les quatre règles de l'arithmétique pratique » (Desnanot, 1835, p. v).

était plus [illegible]

106. *Construire un triangle* abc *égal au triangle* ABC *(fig. 96), dont les trois côtés sont donnés.*

Regardez les trois côtés du triangle ABC comme trois lignes données M, N et P, et construisez le triangle *abc* avec ces trois lignes; les deux triangles seront égaux, puisqu'ils auront les trois côtés égaux (nº 40).

107. *Construire un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont donnés, l'un égal à M et l'autre égal à N (fig. 97).*

Tirez la droite AB que vous ferez égale à M; élevez au point A la perpendiculaire AC que vous ferez égale à N; tirez BC, vous aurez le triangle rectangle demandé.

Sur le terrain la construction est la même.

108. *Construire un triangle rectangle qui ait l'un des côtés égal à M et l'hypothénuse égale à N (fig. 98).*

Prenez une droite *ab* que vous ferez égale à M; élevez au point *a* la perpendiculaire *ad;* du point *b* comme centre et avec un rayon égal à N, décrivez un arc qui coupe la perpendiculaire *ad* en *c;* tirez *bc*, et le triangle *abc* sera le triangle demandé.

* L'arc que l'on décrirait du point *b* comme centre, couperait encore la droite *da* sur son prolongement en *e*, comme on le voit; mais le triangle que l'on formerait en menant une droite *be* au second point d'intersection, donnerait un autre triangle *abe* égal au premier,

FIGURE III.100 – Extrait du manuel de Desnanot (partie « contruction des figures égales ») avec la section 106 en caractères de taille normale (niveau de lecture ne nécessitant que les règles élémentaires d'arithmétique), les sections 107 et 108 en petits caractères (niveau de lecture intermédiaire avec comme pré-requis supplémentaires la proportionnalité et la racine carré), et la remarque précédée d'un astérisque, d'un niveau de lecture supérieur (les pré-requis ne sont pas précisés par l'auteur) (Desnanot, 1835, p. 75)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La partie sur le théorème de Pythagore que nous venons de présenter est typographiée en caractères de petite taille, mais sans astérisque, ce qui la situe à un niveau de lecture intermédiaire, nécessitant comme pré-requis supplémentaires « les règles de trois et l'extraction de la racine carré » (Desnanot, 1835, p. vi). Dans ce contexte, le recours aux opérations élémentaires du calcul, même s'il semble au premier abord alourdir le raisonnement et donc le propos, répond donc sans doute dans ce cadre à une préoccupation d'intelligibilité, de même que les renvois réguliers aux interprétations en termes d'aires qui, pouvant se visualiser sur la figure, concrétisent la preuve en permettant aux lecteurs de mieux se repérer.

L'intervention de l'arithmétique dans le traitement de problèmes de géométrie, et dans les ouvrages qui leur sont dédiés, est d'usage courant et est loin d'être exclusive du théorème de Pythagore [151]. Cependant, l'exemple détaillé ci-avant montre le rôle particulier que joue ce théorème au sein de la géométrie, par ses modes de démonstration et ses applications, et notamment à l'interface des pratiques de calcul et du raisonnement géométrique. La bivalence de son énoncé sous forme d'aires ou de longueurs, ajoutée aux choix d'une démonstration qui, quelle qu'elle soit, est non triviale, en font une proposition nichée au cœur des interactions entre les réflexions et les techniques de l'arithmétique et les raisonnements et procédés géométriques. Dans ce type de preuve, les arguments géométriques d'équivalence des aires nourrissent des applications numériques, produisant en particulier des calculs effectifs de longueurs inconnues. En revanche, les applications numériques, menées en parallèle de la preuve, ne sont pas mobilisées en retour dans l'argumentaire de la démonstration. Néanmoins, les calculs numériques et les raisonnements géométriques participent conjointement à la recherche de clarté et d'intelligibilité pour les élèves, qui peuvent alternativement se référer à un cadre numérique (les calculs) ou géométrique (la figure). L'impossibilité d'un « mélange des genres » semble dans ce cas bien dépassée, et, loin d'être un frein dans les apprentissages des élèves, cette imbrication entre arithmétique et géométrie pourrait plutôt se montrer de nature à les faciliter (voir schéma de l'interface en figure III.101 p. 520).

151. C'est le cas également par exemple d'un autre théorème célèbre, celui dit « de Thalès ». Voir à ce sujet l'article de Bkouche « Autour du théorème de Thalès » dans lequel il étudie notamment « les liens entre le géométrique et le numérique » dans les preuves de ce théorème par Lacroix et Legendre (Bkouche, 1995).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

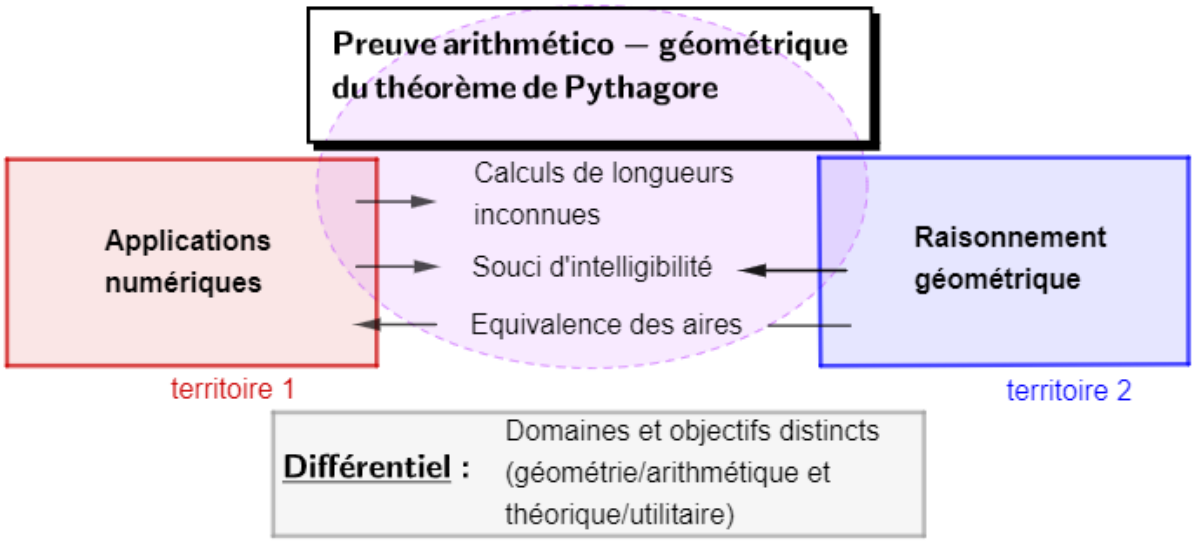


FIGURE III.101 – Schéma montrant en quoi la preuve arithmético-géométrique de Desnanot est à l'interface des applications numériques et du raisonnement géométrique

Méthodes arithmético-géométriques pour l'arpentage

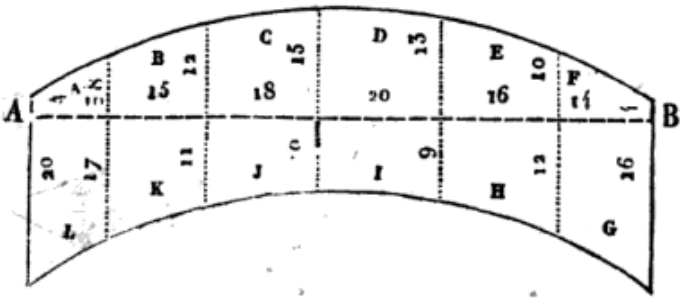
Dans les manuels du corpus, nous avons recensé les énoncés de savoir relatifs aux applications à l'arpentage de méthodes de constructions géométriques ou de calculs numériques sous les appellations « application géométrique » ou « application calcul », faisant apparaître le mot « arpentage » dans la suite de l'expression (voir le tableau II.12 p. 249) [152]. Par exemple, les énoncés que nous désignons par « application géométrique aire quelconque limitée par courbes arpentage » expriment l'application d'une méthode géométrique de décomposition d'une aire curviligne quelconque au contexte de la mesure des terrains. « Application calcul aire polygone quelconque arpentage » regroupe les énoncés évoquant la mise en pratique d'une méthode de calcul de l'aire d'un polygone quelconque, lorsque cette forme est celle d'une pièce de terre à mesurer. Quantitativement, ces énoncés sont présents dans de nombreux ouvrages du corpus (29 sur 40), totalisant 26 occurrences d'énoncés de type « application géométrique » et 52 de la forme « application calcul ». Surtout, ces deux types d'énoncés sont souvent associés, puisque 16 manuels présentent des résultats des deux types. Par conséquent, nous pouvons affirmer que les questions d'arpentage, d'une part sont traitées dans une large partie du corpus, et pas seulement limitées aux cinq ouvrages qui affichent cette notion dans leur titre, et d'autre part sont fréquemment abordées sous le double aspect calculatoire et géométrique. Dans la section III.1.3.3 (p. 434), nous avons inventorié les constructions géométriques mobilisées dans la détermination des aires curvilignes. Nous proposons désormais de mettre cette analyse en parallèle

152. Il existe 8 énoncés distincts de cette sorte en catégorie « calcul » et 3 de type « géométrique ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des pratiques calculatoires qui leur sont associées au sein des manuels du corpus dans des situations d'arpentage.

Nous considérons en particulier les applications numériques relatives à des parcelles de terrain, dont au moins un partie est limitée par une ligne courbe. Les auteurs qui présentent des résolutions de ces questions le font sous la forme d'un calcul effectif sur un terrain particulier, l'exemple générique s'érigeant ensuite en méthode. Les opérations sont disposées sous la forme de tables de calcul, comme par exemple chez Lancelot, relativement à un schéma côté dont la décomposition repose sur des perpendiculaires à une directrice d'écarts irréguliers (voir figure III.102 p. 521), ou chez Lamotte, les calculs étant opérés à partir de tracés effectués par compensation (voir p. 435 et figure III.59 p. 439). Briot et Vacquant, quant à eux, arpentent une prairie dont le plan a été levé en mélangeant les techniques précédemment évoquées : par compensation, décomposition sur des directrices, avec des pas réguliers ou irréguliers, suivant les caractéristiques des portions de la ligne courbe qui la délimite (voir figure III.103 p. 522). Les calculs s'étendent sur deux pages, d'où la nécessité du report du total précédent au début de la seconde page. Une présentation peu différente des calculs chez Lancelot est suivie du commentaire de l'auteur : « on est en état maintenant d'arpenter toute espèce de terrain avec la chaîne métrique, l'équerre d'arpenteur et les jalons » (Lamotte, 1839, p. 69-70). Cette affirmation confirme à la fois le caractère très pratique de ce type d'opérations (dans le double sens d'opération sur le terrain et de calcul) et leur statut d'exemples génériques, tenant lieu de méthode générale.



Opération.

a	10^{m}	×	06	00	=	0^{ares}60^{c}
b	15	×	10	00	=	1 50
c	18	×	13	50	=	2 43
d	20	×	14	00	=	2 80
e	16	×	11	50	=	1 84
f	14	×	07	90	=	0 98
g	14	×	14	00	=	1 96
h	16	×	10	50	=	1 68
i	20	×	09	50	=	1 90
j	18	×	10	50	=	1 89
k	15	×	14	00	=	2 10
l	10	×	18	50	=	1 85
					Produit. . .	21 53

FIGURE III.102 – Calcul de l'aire d'un terrain délimité par une ligne courbe chez Lancelot (1833, p. 38)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

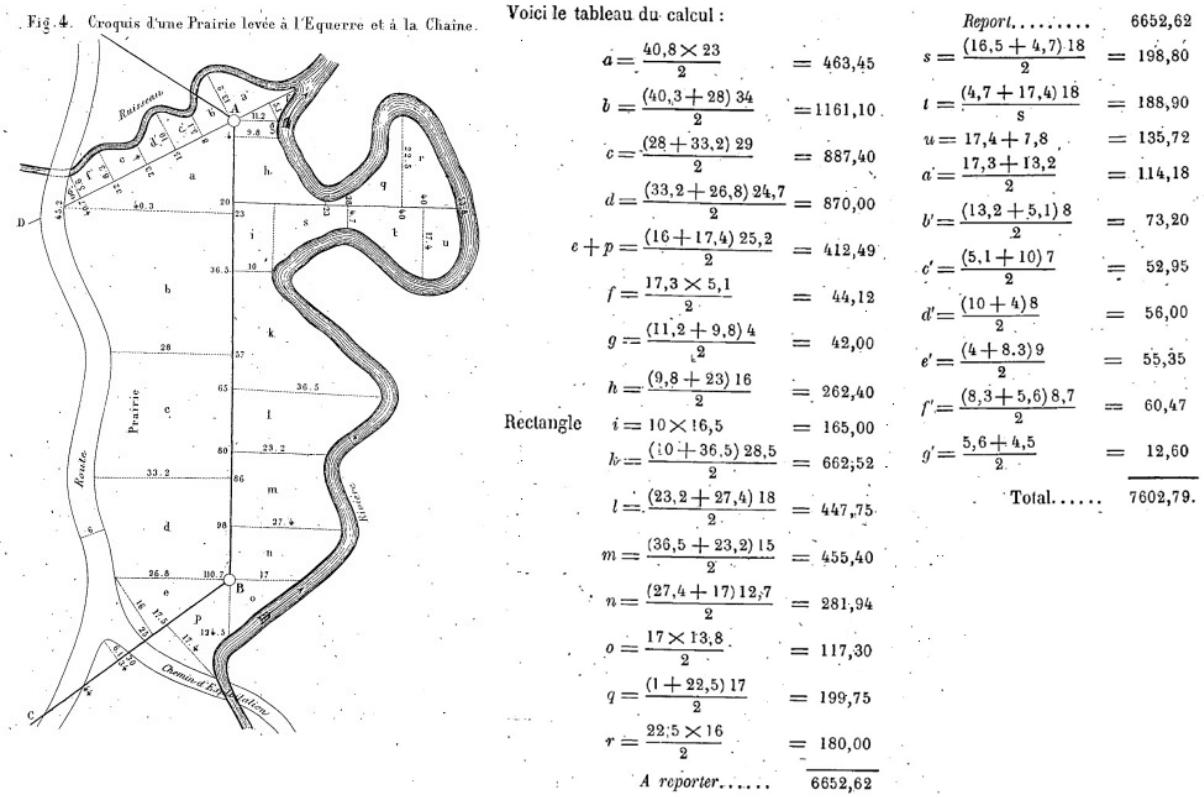


Fig. 4. Croquis d'une Prairie levée à l'Equerre et à la Chaîne.

Voici le tableau du calcul :

	$a = \frac{40{,}8 \times 23}{2}$	$= 463{,}45$		*Report*.....	6652,62
	$b = \frac{(40{,}3 + 28)\,34}{2}$	$= 1161{,}10$	$s = \frac{(16{,}5 + 4{,}7)\,18}{2}$		$= 198{,}80$
	$c = \frac{(28 + 33{,}2)\,29}{2}$	$= 887{,}40$	$t = \frac{(4{,}7 + 17{,}4)\,18}{s}$		$= 188{,}90$
	$d = \frac{(33{,}2 + 26{,}8)\,24{,}7}{2}$	$= 870{,}00$	$u = 17{,}4 + 7{,}8$		$= 135{,}72$
	$e + p = \frac{(16 + 17{,}4)\,25{,}2}{2}$	$= 412{,}49$	$a' = \frac{17{,}3 + 13{,}2}{2}$		$= 114{,}18$
	$f = \frac{17{,}3 \times 5{,}1}{2}$	$= 44{,}12$	$b' = \frac{(13{,}2 + 5{,}1)\,8}{2}$		$= 73{,}20$
	$g = \frac{(11{,}2 + 9{,}8)\,4}{2}$	$= 42{,}00$	$c' = \frac{(5{,}1 + 10)\,7}{2}$		$= 52{,}95$
	$h = \frac{(9{,}8 + 23)\,16}{2}$	$= 262{,}40$	$d' = \frac{(10 + 4)\,8}{2}$		$= 56{,}00$
Rectangle	$i = 10 \times 16{,}5$	$= 165{,}00$	$e' = \frac{(4 + 8.3)\,9}{2}$		$= 55{,}35$
	$k = \frac{(10 + 36{,}5)\,28{,}5}{2}$	$= 662{,}52$	$f' = \frac{(8{,}3 + 5{,}6)\,8{,}7}{2}$		$= 60{,}47$
	$l = \frac{(23{,}2 + 27{,}4)\,18}{2}$	$= 447{,}75$	$g' = \frac{5{,}6 + 4{,}5}{2}$		$= 12{,}60$
	$m = \frac{(36{,}5 + 23{,}2)\,15}{2}$	$= 455{,}40$		Total.....	7602,79.
	$n = \frac{(27{,}4 + 17)\,12{,}7}{2}$	$= 281{,}94$			
	$o = \frac{17 \times 13{,}8}{2}$	$= 117{,}30$			
	$q = \frac{(1 + 22{,}5)\,17}{2}$	$= 199{,}75$			
	$r = \frac{22{,}5 \times 16}{2}$	$= 180{,}00$			
	A reporter.....	6652,62			

FIGURE III.103 – Calcul de l'aire d'un terrain délimité par une ligne courbe chez Briot et Vacquant (1862, 67-68, pl. ii)

Les techniques opératoires et l'organisation des calculs dans les ouvrages de géométrie, relatifs aux calculs des aires curvilignes, laissent donc apparaître de réelles interactions entre les apprentissages réalisés en arithmétique et les savoir-faire géométriques, notamment en termes de construction. Savoir calculer est certes un préalable évident à l'exécution des formules issues de la géométrie des aires, mais *a contrario*, cette dernière fournit des applications pratiques variées des techniques de calcul assimilées, et offre de ce fait un matériau propre à stimuler la motivation des apprentis géomètres. Résoudre les questions d'arpentage demande de mener de front deux activités mathématiques distinctes : réaliser les tracés géométriques appropriés d'une part et les mesures associées, et mener les calculs en posant les opérations nécessaires d'autre part. Cette double pratique, géométrique et numérique, ne requiert pas de résultats théoriques autres que la connaissance des formules des aires des polygones usuels, mais exerce les élèves à effectuer des opérations élémentaires dans les deux registres simultanément, avec fiabilité, efficacité, et en faisant preuve d'un certain sens de l'organisation. La géométrie des aires se situe donc, dans ce contexte également, à l'interface des pratiques de la géométrie et du calcul (voir schéma figure III.104 p. 523).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

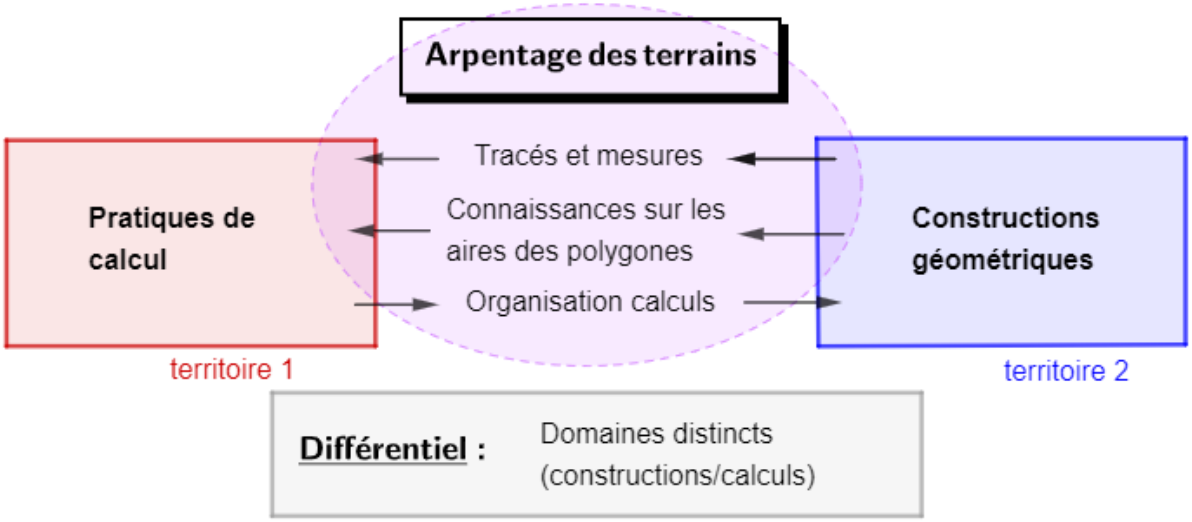


FIGURE III.104 – Schéma montrant en quoi les techniques d'arpentage des terrains sont à l'interface des calculs numériques et des constructions géométriques

III.2.3.3 Techniques de calcul et gestion des erreurs à propos de l'aire du disque

Les calculs effectifs des aires curvilignes se heurtent à des difficultés du fait que leur détermination ne dépend pas toujours des résultats de la géométrie élémentaire, comme c'est le cas des surfaces délimitées par des lignes courbes quelconques, ou qu'elle dépend d'un nombre qui « ne peut être évalué que par approximation » (Guilmin, 1882, p. 122), par exemple dans le cas du cercle. Des techniques calculatoires adaptées sont mises en place dans les manuels, nécessitant un choix de valeurs numériques et d'opérations arithmétiques pertinentes, en fonction de l'objectif fixé. Des critères de précision ou encore d'efficacité émergent, relativement aux domaines dans lesquels ces calculs vont se voir appliquer.

Les valeurs approchées de π

Dans les manuels du corpus, la mesure du cercle est donnée dans un premier temps comme « égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon » (Guilmin, 1882, p. 152), puis exprimée à l'aide du « rapport de la circonférence au diamètre » (Guilmin, 1882, p. 128), dont il est démontré en amont qu'il est constant. Ce rapport fixe est par conséquent un nombre qui, multiplié par le carré du rayon, donne l'aire du cercle. Tous les auteurs du corpus mentionnent ce résultat, plus ou moins directement, et en nommant ou non par la lettre grecque π le rapport considéré. Jusqu'au début des années 1840, cette lettre n'apparaît que rarement dans les manuels (avant 1840, seuls Legendre, Lacroix, Terquem et Sonnet empruntent cette notation), puis son usage se généralise de telle manière que tous les auteurs publiant leurs ouvrages à partir de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

1841 l'emploient [153]. Plusieurs auteurs soulignent l'origine étymologique de cette lettre utilisée comme symbole, en précisant qu'il s'agit de « la première lettre du mot grec *périphéreia* qui signifie circonférence » (Dupuis, 1857, p. 135).

Pour évaluer l'aire du cercle, il est donc nécessaire de connaître une valeur approchée de π, puisque son incommensurabilité [154] fait qu'« on ne peut l'obtenir qu'avec une approximation plus ou moins grande » (Cirodde, 1858, p. 169). Les auteurs géomètres se réfèrent alors à des estimations déterminées par leurs prédécesseurs, souvent sous forme fractionnaire. Sur les 40 manuels, 32 voient le rapport $\frac{22}{7}$ donné comme valeur approchée de π, presque toujours explicitement attribué à Archimède (30 fois sur 32). Le quotient $\frac{355}{113}$ est également cité avec une grande fréquence (dans 24 manuels), et clairement affecté à Métius (dans 21 cas sur 24). Quatre auteurs mentionnent la valeur $\frac{333}{106}$, et parmi eux, trois en désignent la paternité à Rivard [155]. Plus marginalement, Mauduit cite un certain « M. Seguin, architecte très instruit dans toutes les parties de son art » et qui « a donné le rapport de 1521 à 484 » (Mauduit, 1790, p. 121), alors que Lacroix évoque « celui de 3927 à 1250, consigné dans un ouvrage des Bramines, intitulé *Ayeen Akbery* » et révélé par des chercheurs anglais en Inde (Lacroix, 1808, p. 104). Quant à Terquem, il indique que « M. Pioche, statuaire de la ville de Metz, a fait l'ingénieuse observation qu'on avait à très peu près $\pi = \frac{1}{2}(3 + \frac{3}{8} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\sqrt{1+9}) = 3,1415926536$ » (Terquem, 1829, p. 218). Les professionnels usagers des mathématiques contribuent donc à fournir des approximations de π , complétant celles de Métius ou Archimède, historiquement plus célèbres.

L'utilisation effective dans les calculs des approximations de π par des fractions sont situées de manière très ciblée dans le temps. Parmi les 27 auteurs qui présentent des exemples de tels calculs, les 9 qui le font à partir des rapports d'Archimède et/ou de Métius sont principalement ceux qui publient leurs textes avant 1840. Les trois exceptions sont : la réédition de Bézout de 1848, mais issue d'une version bien antérieure (Bézout, 1848, p. 62-63) ; les *Éléments de géométrie pratique* de Tarnier en 1872, dans lesquels il fait le choix de ne pas parler du tout du nombre π (Tarnier, 1872, p. 309) ; la 22ème réédition en 1882 du cours de Guilmin (la version initiale datant de

153. Sauf Bézout, dont le manuel de 1848 est une réédition, sans changement mises à part les unités de mesure, de la version initiale de la fin du XVIIIe siècle (Bézout, 1848).

154. Bronner indique que les enseignants du secondaire, au cours de ce qu'il appelle la période « classique » (1854 – 1947), sont dans un environnement conceptuel fondé sur la théorie de la mesure et des grandeurs incommensurables (voir p. 273). Nous ne pouvons néanmoins pas être certains que tous nos auteurs, dont certains ne sont pas des mathématiciens professionnels, soient au fait de l'incommensurabilité de π, démontrée depuis 1761 seulement. Plus généralement, les postures de nos auteurs vis à vis de la question de l'incommensurabilité sont résumées dans le tableau III.11 p. 576.

155. Dominique-François Rivard (1697 - 1778), auteur d'*Élémens de mathématiques* dans lesquels il expose et utilise ce rapport (Rivard, 1752).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

1854), dans un complément duquel il expose en parallèle les calculs effectués avec comme valeurs approchées $3,1415$ et $\frac{22}{7}$, pour les comparer (Guilmin, 1882, compl. 26-27). Les auteurs plus anciens réalisent leurs calculs d'aire de cercles à l'aide du rapport $\frac{22}{7}$, comme Bézout (1848, p. 63), Terquem (1829, p. 220) ou Lancelot (1833, p. 39-40), de $\frac{355}{113}$, comme Bergery (1828, p. 403), ou des deux, à l'instar de Mauduit (1790, p. 125), Lamotte (1839, p. 45-46) ou encore Sonnet (1839, p. 223). À partir des années 1840, l'usage est plutôt de déterminer et d'utiliser des valeurs décimales de π, avec un plus ou moins grand nombre de chiffres significatifs.

Parmi les valeurs non plus fractionnaires, mais décimales de π, certaines sont célèbres, et citées par une partie des auteurs, comme $3,14158$ obtenue par Thomas Simpson [156] et évoquée par Mauduit (1790, p. 205-206), ou celle de van Ceulen (voir p. 420), comprenant 35 chiffres après la virgule, mentionnée également par ce même auteur (Mauduit, 1790, p. 121), mais aussi par Terquem (1829, p. 218) et André (1879, p. 124). Calculer des décimales de π semble constituer une véritable performance mathématique, et dont les résultats se précisent avec le temps. Les auteurs des manuels en témoignent, en évoquant des approximations à 140, puis à 154 , 155, 208, et même 600 décimales [157]. Des bilans historiques sont parfois dressés pour témoigner des avancées scientifiques dans ce domaine, comme le fait par exemple André, qui raconte que « le Hollandais Van Ceulen a poussé le calcul jusqu'à 35 décimales, l'Anglais Machin à 72, le Français Lagny à 127, l'Autrichien Véga à 139, et l'Anglais Rutherford à 208 » (P. André, 1879, p. 124). Dans les calculs, les auteurs utilisent des valeurs approchées allant du simple $3,14$ à deux décimales jusqu'à d'autres précisées à 4 ou 5 décimales.

Le choix des approximations de π utilisées dans les calculs d'aire est motivé par les auteurs par des arguments de divers ordres :

— Le premier tient à la simplicité et à la facilité, à la fois d'usage et de mémorisation. Lamotte commence en effet par indiquer que le rapport $\frac{22}{7}$ d'Archimède est « le plus ordinairement employé », et qu'« il a été adopté dans les arts et dans les états industriels à cause de son extrême simplicité » (Lamotte, 1839, p. 45). Le rapport $\frac{355}{113}$ de Métius est quant à lui « facile à retenir » car « les trois premiers chiffres impairs 1, 3, 5 étant chacun écrits deux fois de suite 11 33 55, on prend la première moitié des six chiffres, pour le second terme du rapport, et la seconde pour le premier » (Bergery, 1828, p. 393-394). Ce moyen mnémotechnique est

156. Thomas Simpson (1710 – 1761). Mathématicien anglais, il est connu pour ses travaux en analyse, mais aussi en algèbre, géométrie ainsi qu'en probabilités.
157. Références : pour 140 décimales (Legendre, 1823, p. 123 ; Terquem, 1829, p. 218 ; Sonnet, 1839, p. 199 ; Vincent, 1844, p. 224), pour 154 (Puille, 1855, p. 19 ; Cirodde, 1858, p. 170), pour 155 (Idoux, 1842, p. 128), pour 208 (P. André, 1879, p. 124), et pour 600 (Leyssenne, 1890, p. 203).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

d'ailleurs mentionné dans pratiquement tous les ouvrages qui présentent ce rapport. Bergery indique comme autre valeur $\frac{3142}{1000}$, dont « bien des personnes font usage [...] à cause de la facilité qu'elles trouvent à diviser ou à multiplier par 1000 » (Bergery, 1828, p. 394), et dont il donne aussi une technique pour la retenir aisément.

— Un autre argument est celui de la précision. Si le rapport d'Archimède est adapté « quand on n'a pas besoin d'une extrême exactitude », celui de Métius est au contraire crédité d'une telle « grande exactitude » (Terquem, 1829, p. 217-218). Cette volonté de précision dépend des usages, et Briot remarque même que parfois, remarquer que « ce rapport est un peu plus grand que 3 » peut suffire et que « pour un premier aperçu, on se contente de cette évaluation rapide » (Briot et Vacquant, 1859, p. 55). Le rapport $\frac{22}{7}$ est pour sa part « commode dans les applications graphiques » (Bourget, 1885, p. 157), il est considéré comme assez exact « pour en faire usage dans la pratique » (L.C. et F.P.B., 1840, p. 55), et suffit donc « dans presque toutes les applications des arts » (Sonnet, 1839, p. 199). D'ailleurs, si le rapport d'Archimède est « trop fort », de même que celui de Métius, c'est sans doute ce qui a contribué « à le maintenir parmi les ouvriers » (Lamotte, 1839, p. 46), qui semblent avoir intérêt à surévaluer leurs mesures. Pour les calculs en revanche, « il est plus commode de se servir du rapport exprimé en décimales » (Briot et Vacquant, 1859, p. 56), et pour les applications numériques, « le nombre 3,14 suffit habituellement, on n'a que très rarement besoin de prendre 3,1416 » (Bourget, 1885, p. 158).

— Enfin, des arguments plus théoriques d'ordre géométrique sont également avancés. Mauduit accorde au rapport $\frac{1521}{484}$ une vertu liée au fait qu'il est le carré de $\frac{39}{22}$, et qu'en tant que tel, il permet facilement d'« assigner le côté d'un quarré [*sic*] sensiblement égal au cercle ». Il suffit dans ce cas de multiplier le rayon par $\frac{39}{22}$ pour obtenir le côté du carré cherché (Mauduit, 1790, p. 124-125). Dans le même ordre d'idées, Terquem reconnaît à la valeur $\frac{1}{2}(3+\frac{3}{8}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\sqrt{1+9})$ exhibée par Pioche le même type d'avantage, puisqu'elle permet « de fournir une construction facile pour faire, à peu de choses près, une ligne de même longueur qu'une circonférence donnée », c'est-à-dire d'obtenir une rectification approchée du cercle (Terquem, 1829, p. 218-219). Bergery, quant à lui, met en parallèle les différents quotients qui approchent π avec les polygones réguliers inscrits et circonscrits qui fournissent ces approximations :

> Si vous voulez un résultat plus exact, il faut multiplier la longueur du diamètre par 22 et diviser le produit par 7 : cela donne le contour du polygone régulier inscrit qui a 96 côtés. Vous approcherez encore davantage de la vraie longueur d'une circonférence, en multipliant celle

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> du diamètre par 355 et en divisant le produit par 113 : vous aurez alors le contour d'un polygone régulier inscrit de 8192 côtés. Enfin, vous obtiendrez une longueur qui pourra être regardée comme la véritable, si vous multipliez la longueur du diamètre par 31 415 926 et si vous divisez le produit par 10 000 000 ; car vous aurez le contour du polygone inscrit ou du polygone circonscrit de 32 768 côtés égaux. (Bergery, 1828, p. 393)

Cette dernière citation de Bergery laisse entrevoir les techniques utilisées dans les manuels pour déterminer ces valeurs approchées. En effet, parmi les 40 ouvrages du corpus, 24 contiennent des parties consacrées à « trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre » (Legendre, 1823, p. 125) ou, exprimé plus simplement, dédiées au « calcul de π » (Tombeck, 1879, p. 165). Ces méthodes ne sont pas l'objet de la présente étude, car elles ne reposent pas sur des aires, mais sur des périmètres. Il s'agit de la méthode dite « des périmètres » ou « des polygones inscrits », mais aussi d'une autre méthode, dite « des isopérimètres » (Tombeck, 1879, p. 165) [158]. Ce sont les calculs effectifs d'aires, et notamment ceux réalisés à l'aide des valeurs numériques exposées ci-avant, que nous nous proposons désormais d'analyser.

Parmi les 40 ouvrages du corpus apparaissent des calculs numériques effectifs d'aires de surfaces curvilignes, concernant le cercle (dans 27 ouvrages, calculs de l'aire connaissant le rayon et/ou la circonférence, et/ou calcul du rayon connaissant l'aire), des domaines limités par des courbes quelconques (dans 7 manuels), et de l'ellipse (dans 3 livres). Ces calculs sont l'occasion d'analyser quelles sont les connaissances et les techniques mobilisées afin de les réaliser et de mettre ainsi en évidence le rôle d'interface des aires avec le domaine de l'arithmétique.

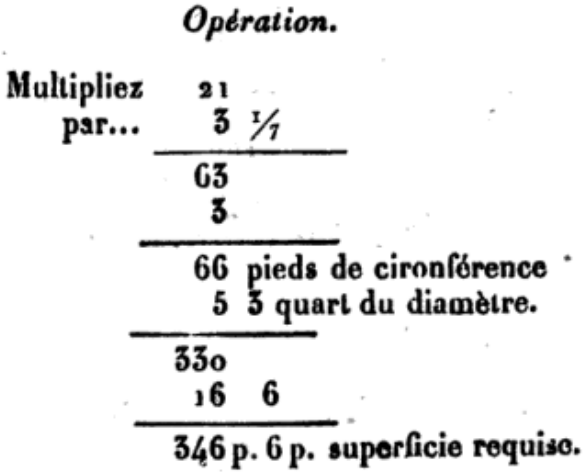
Les opérations posées

Tout d'abord, il est clair que le calcul de l'aire d'une surface curviligne, qu'elle soit délimitée par un cercle, une ellipse ou une courbe quelconque, nécessite de multiplier. Ces multiplications sont souvent écrites en ligne et effectuées implicitement, avant que le résultat en soit simplement donné. Mais certains auteurs s'attardent sur la technique opératoire en présentant des opérations posées. C'est le cas par exemple de Lancelot, qui propose, dans les années 1830, de telles présentations qu'il titre « opérations »

158. Pour la première, il s'agit d'inscrire et/ou de circonscrire à un cercle de rayon fixé des polygones réguliers dont le nombre de côtés augmente et de considérer le rapport de leurs périmètres au double de leurs apothèmes comme valeur approchée de π. Dans la seconde, la démarche est sensiblement la même, mais c'est la circonférence du cercle qui est fixée *a priori*. L'exposé le plus complet de ces méthodes figure dans (Tombeck, 1879, p. 165-178).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

(Lancelot, 1833, p. 39). Dans cette opération, il multiplie d'abord le diamètre par le rapport $\frac{22}{7}$ utilisé comme valeur approchée de π, puis multiplie par le quart du diamètre 21, ce qui donne 5 pieds et 3 pouces (puisqu'un pied vaut 12 pouces). Il obtient 330 pieds plus 16 pieds et 6 pouces, c'est-à-dire 346 pieds et 6 pouces (voir figure III.105 p. 528). Dans cet exemple, l'opération posée expose une démarche que l'on peut suivre pas à pas, et qui tient compte des difficultés induites par les unités de mesure alors en vigueur. Il est à noter que dans cet ouvrage, les unités de surface ne sont pas distinguées des unités de longueur (pieds et pouces, et non pieds-carrés et pouces-carrés, comme il arrive de les rencontrer).


Opération.

Multipliez par... 21 / 3 1/7

63
3

66 pieds de circonférence
5 3 quart du diamètre.

330
16 6

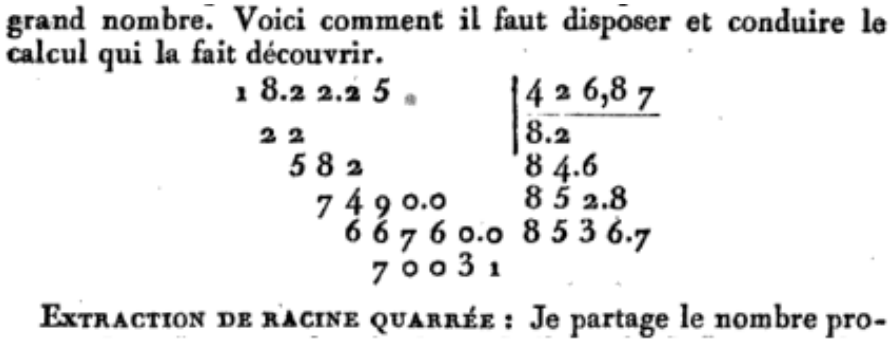
346 p. 6 p. superficie requise.

FIGURE III.105 – Opération posée pour calculer l'aire d'un cercle de diamètre 21 pieds chez Lancelot (1833, p. 39)

Dans un ouvrage un peu antérieur, Bergery ne présente pas les multiplication posées, mais expose en revanche les extractions de racines carrées, requises pour la résolution de certains problèmes liés à la mesure du cercle, comme la recherche du rayon d'un cercle d'aire donnée. Bergery indique la marche à suivre ainsi que les résultats obtenus à la suite de chaque opération. Il s'agit tout d'abord de « diviser [...] par le rapport de la circonférence au diamètre, ou ce qui revient au même », multiplier par le « rapport renversé » $\frac{113}{355}$, puis d'extraire la racine. Cette dernière étape est détaillée car le lecteur a alors à « extraire la racine d'un nombre qui contient des décimales », ce qui n'est pas *a priori* évident. Bergery se réfère à un exemple d'extraction de racine, situé quelques pages en amont dans son ouvrage (voir figure III.106 p. 529). Les instructions relatives à cette opération délicate sont déclinées sur plusieurs pages, que Bergery conclut par la remarque : « Il importe extrêmement que les ouvriers s'habituent à faire des extractions de racine quarrée. Un grand nombre de problèmes de pratique ne peuvent être résolus qu'au moyen de cette opération » (Bergery, 1828, p. 393). Il confirme d'ailleurs l'importance de cet usage quelques pages plus tard en posant et en résolvant le problème suivant (Bergery, 1828, p. 404) : « Un édifice circulaire

Licence CC BY-NC-ND 3.0

doit occuper une superficie de 160 mètres carrés ; quel rayon doit on employer, pour tracer la circonférence de ses fondations ? ».


grand nombre. Voici comment il faut disposer et conduire le calcul qui la fait découvrir.

1 8.2 2.2 5 . | 4 2 6,8 7
2 2 | 8.2
5 8 2 | 8 4.6
7 4 9 0.0 | 8 5 2.8
6 6 7 6 0.0 | 8 5 3 6.7
7 0 0 3 1

EXTRACTION DE RACINE QUARRÉE : Je partage le nombre pro-

FIGURE III.106 – Opération posée pour extraire une racine carrée chez Bergery (1828, p. 391)

Savoir multiplier et extraire une racine sont, pour la plupart des auteurs, des compétences que doivent posséder leurs lecteurs, issues de la connaissance de l'arithmétique, préalable à l'étude de la géométrie [159].

Néanmoins, deux auteurs plus tardifs exposent des méthodes particulières de calcul à l'occasion de la détermination pratique de l'aire d'un cercle, ou de son rayon connaissant son aire. Le premier, Guilmin, utilise les techniques opératoires tirées de son *Cours complet d'arithmétique* (Guilmin, 1853), la multiplication, la division et l'extraction de racine carrée « abrégées » (Guilmin, 1882, p. 154) [160]. Ces méthodes de calcul sont mises en œuvre par un seul des autres auteurs du corpus, Bourget, qui fait notamment usage de la multiplication abrégée pour le calcul de l'aire d'un cercle de rayon donné (voir figure III.107 p. 530) [161], la multiplication abrégée se réalise ainsi :

159. Lorsque des savoir-faire spécifiques issus de l'arithmétique sont requis, les auteurs se réfèrent ordinairement à des ouvrages d'arithmétique, considérés en général, ou au contraire dont le titre est spécifié. Les auteurs ayant écrits des manuels d'arithmétique en plus de celui de géométrie renvoient à leurs propres textes, comme Bézout, Cirodde ou Guilmin, ou à un titre de la même collection, comme Terquem qui renvoie au manuel d'arithmétique de la collection Roret (Terquem, 1829, p. 9).

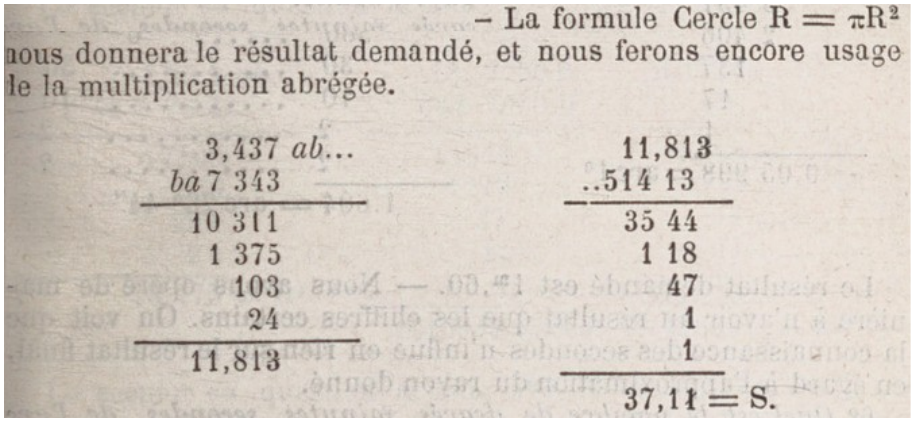
160. Les multiplications et divisions abrégées sont mentionnées dans une version bien antérieure de son *Cours de géométrie élémentaire* de 1854 (Guilmin, 1854), mais l'appendice, dans lequel il développe les théories relatives à ces techniques opératoires, apparaît seulement dans les versions plus tardives que nous avons pu consulter, comme celle de 1882.

161. L'invention de la méthode de multiplication abrégée est attribuée à William Oughtred (1574 - 1660), mathématicien britannique, par ailleurs inventeur de la règle à calcul (Thomas, 2014, p. 34-35). Il expose sa méthode de multiplication abrégée, appelée communément « règle d'Oughtred », dans son *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio* en 1631 (Bouillet, 1866, p. 1402). Cette méthode apparaît dans des livres d'arithmétique au XIX^{e} siècle, comme ceux de Guilmin et Bourget précédemment mentionnés, mais aussi dans celui de Paul Serret (1827 – 1898), qui cite son auteur, démontre sa règle et développe ses applications (J. A. Serret, 1852, p. 256-265). Au XX^{e} siècle encore, le mathématicien français André Sainte-Lagüe (1882 - 1950) s'y réfère dans plusieurs ouvrages, comme (Sainte-Lagüe, 1913) et (Sainte-Lagüe et Masson, 1949).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> On écrit le multiplicande comme à l'ordinaire puis on met le chiffre des unités du multiplicateur au-dessous du chiffre du multiplicande [...], on écrit ensuite les autres chiffres du multiplicateur dans l'ordre inverse de l'ordre ordinaire.

Les produits sont alors effectués en négligeant certains chiffres significatifs. Sur la figure III.107 (p. 530), à gauche, on reconnaît ainsi le calcul du carré du rayon $3,437$, dans lequel le multiplicateur est écrit à l'envers 7343, puis à droite, le produit de ce carré par π, écrit lui aussi à l'envers 51413 dans la 2ème ligne de l'opération.

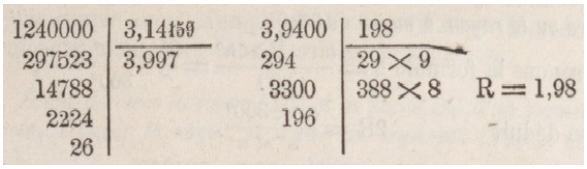

– La formule Cercle $R = \pi R^2$
nous donnera le résultat demandé, et nous ferons encore usage
le la multiplication abrégée.

3,437 *ab*...
ba 7 343
10 311
1 375
103
24
11,813

11,813
..514 13
35 44
1 18
47
1
1
37,11 = S.

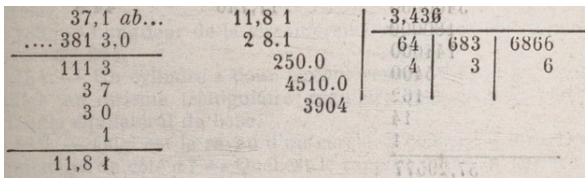
FIGURE III.107 – Multiplication abrégée chez Bourget pour déterminer l'aire d'un cercle (Bourget, 1885, p. 159)

Les deux auteurs mènent le calcul du rayon d'un cercle connaissant son aire de la même manière, toujours en usant des procédés de calcul abrégés. Leurs deux démarches présentent certes des ressemblances, mais se distinguent néanmoins en quelques points : Guilmin divise la surface par π alors que Bourget la multiplie par la valeur approchée usuelle de $\frac{1}{\pi}$, $0,3183$, et l'extraction de racine n'est pas organisée suivant le même schéma[162] (voir figure III.108 p. 530).


1240000 | 3,14159
297523 | 3,997
14788
2224
26

3,9400 | 198
294 | 29 × 9
3300 | 388 × 8 R = 1,98
196

(a) chez Guilmin (1882, compl. 29)


37,1 *ab*... 11,8 1 | 3,436
.... 381 3,0 2 8.1 | 64 | 683 | 6866
111 3 250.0 | 4 | 3 | 6
3 7 4510.0
3 0 3904
1
11,8 1

(b) chez Bourget (1885, p. 159)

FIGURE III.108 – Calcul du rayon d'un cercle d'aire donnée par les opérations abrégées

Il est à noter que ce type de calculs se développe à partir des années 1850, puisqu'on peut en trouver des présentations dans d'autres « arithmétiques » (par exemple, dans Comberousse 1860), et que ces procédés sont même indiqués dans certains

162. Nous n'entrons pas ici dans les détails des techniques opératoires mises en jeu, qui ne sont pas l'objet de notre étude. Pour de plus amples informations, voir (Guilmin, 1854).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

programmes, comme celui des lycées en 1854 (Belhoste, 1995, p. 331), ou celui pour l'enseignement professionnel en 1863 (Duruy, 1863b). La méthode fait même l'objet d'un article dans le *Grand dictionnaire universel du* XIX*e siècle* de Larousse en 1874 (1874, p. 684). Cet exemple montre bien la mobilisation de savoirs spécifiques à l'arithmétique dans le domaine de la géométrie des aires, et souligne par conséquent le rôle d'interface qu'elle joue, à la croisée de ces deux disciplines, engageant dans les actes des flux de connaissances et de techniques entre leurs espaces d'applications.

Comparaisons des méthodes et des résultats

Les calculs liés aux aires curvilignes peuvent parfois être menés de plusieurs manières, soit en suivant des séquences de calcul différentes, soit par l'emploi de valeurs numériques approchées distinctes. Les auteurs n'hésitent pas à proposer plusieurs versions de ces calculs, en pesant les avantages et les inconvénients des uns et des autres, et en comparant à la fois leur précision et leur efficacité.

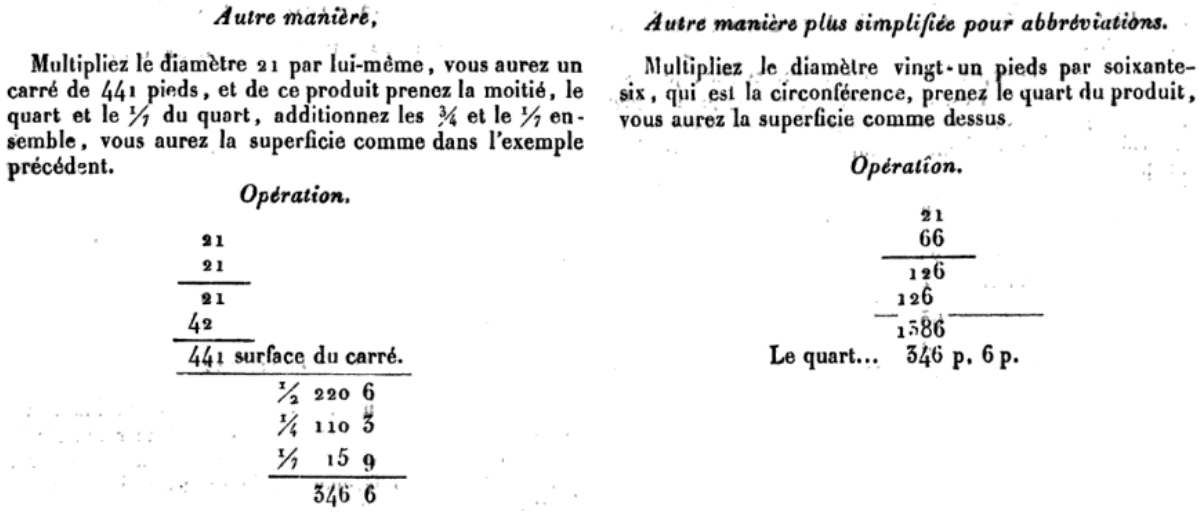
Le calcul de l'aire d'un cercle peut en effet être réalisé en effectuant le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon, ou, ce qui revient au même quand on connaît le calcul de la circonférence en fonction du rayon, en multipliant le carré du rayon par π, rapport de la circonférence au diamètre. Jusqu'aux années 1850, les auteurs pratiquent généralement cette double application numérique, vérifiant qu'elle mène bien au même résultat, à l'instar de Bergery qui explique :

> Si par exemple, on veut trouver en pieds carrés, la surface d'un cercle qui a 6 pieds de rayon ou 12 pieds de diamètre, on obtiendra $\frac{4260}{113}$ pieds pour la longueur de la circonférence, et en multipliant par 3 moitiés du rayon, on aura $\frac{12780}{113}$ pieds carrés, division dont le quotient est $113\frac{110}{113}$ pieds carrés. Qu'au lieu de procéder ainsi, on multiplie $\frac{355}{113}$ par 36 pieds carrés, mesure du carré construit sur le rayon, on trouvera encore pour la surface du cercle, $\frac{12780}{113}$ pieds carrés. (Bergery, 1828, p. 403)

Lancelot va encore plus loin, en proposant trois versions de ce même calcul. En plus des opérations présentées en figure III.105 (p. 528), qui consistent à multiplier la circonférence par le quart du diamètre, il expose deux « autres manières » d'obtenir cette aire (voir figure III.109 p. 532). La première variante revient à faire le produit du carré du diamètre avec $\frac{22}{28}$, décomposé en $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ pris comme approximation de $\frac{\pi}{4}$. La seconde revient à prendre le quart du produit du diamètre par la circonférence. Cette dernière version est décrite par Lancelot comme « simplifiée » et abrégée (il écrit « pour abbréviations [*sic*] »). En effet, les unités de mesure alors en vigueur et leurs subdivisions en base 12 sont particulièrement compatibles avec les opérations de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

moitié ou de quart auxquelles il cherche à se ramener. Dans la lignée de ces calculs, Lancelot propose également une méthode pour calculer l'aire d'une ellipse, produit de ses deux diamètres par le quart de π, qu'il prend égal au « rapport de 7 à 22 ». Techniquement, cette opération revient à multiplier le produit des diamètres par 11 et diviser le résultat par 14, puisque le quart de $\frac{22}{7}$ est $\frac{11}{14}$.



Autre manière,

Multipliez le diamètre 21 par lui-même, vous aurez un carré de 441 pieds, et de ce produit prenez la moitié, le quart et le ⅐ du quart, additionnez les ¾ et le ⅐ ensemble, vous aurez la superficie comme dans l'exemple précédent.

Opération.

21
21
21
42
441 surface du carré.

½ 220 6
¼ 110 3
⅐ 15 9
346 6

Autre manière plus simplifiée pour abbréviations.

Multipliez le diamètre vingt-un pieds par soixante-six, qui est la circonférence, prenez le quart du produit, vous aurez la superficie comme dessus.

Opération.

21
66
126
126
1386
Le quart... 346 p. 6 p.

FIGURE III.109 – Calcul de l'aire d'un cercle de deux autres manières chez Lancelot (1833, p. 40)

Au début du siècle, l'usage des anciennes unités de mesure produit des calculs plus techniques (voir la sous-section III.2.3.1 p. 502), que tous les auteurs ne règlent pas de la même manière : Bergery ne travaille pas avec les subdivisions des « pieds carrés » et exprime ses résultats en fractions de cette unité de surface, alors que Lancelot, dans une perspective encore plus pratique, exprime ses résultats en « pieds » et « pouces », ce qui l'amène à modifier un peu les séquences de calcul pour se ramener à des opérations plus aisées à effectuer dans un système duodécimal. Les auteurs ultérieurs ne rencontrent pas ces problèmes, réglés par la généralisation et l'obligation légale, depuis 1837, d'utiliser le système métrique décimal unifié (voir la sous-section III.2.3.1 p. 501).

En 1839, Sonnet publie son manuel au tournant des deux systèmes, et expose certains calculs en mètres et mètres carrés, et d'autres dans les anciennes unités (voir p. 508). Dans ses « applications » à la mesure du cercle, il commence par calculer la superficie d'un « bassin à forme circulaire à $21^{\mathrm{m}},6$ [*sic*] de diamètre », puis demande « quel rayon [il faut] donner à un cercle pour que sa superficie soit de $5^{\mathrm{t.c}}28^{\mathrm{p.c}}108^{\mathrm{p.c}}$ », ce qui signifie 5 toises carrées, 28 pieds carrés et 108 pouces carrés (Sonnet, 1839, p. 223). Le premier calcul proposé consiste à élever le rayon au carré et à le multiplier par le rapport de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Métius [163]. Le second, plus complexe, nécessite au préalable de convertir la superficie donnée en pouces carrés, puis de diviser cette valeur par π, qu'il prend égal au rapport d'Archimède, ce qui revient à multiplier par $\frac{7}{22}$, avant d'extraire la racine carrée, cette dernière étape n'étant pas explicitée. Sonnet ne s'arrête pas là dans ses applications pratiques et énonce le problème : « Quelle est, en lieues carrées, l'aire du cercle qui a pour circonférence l'équateur ? » (Sonnet, 1839, p. 223-224). Cette dernière question est délicate si l'on ne fait pas usage de l'algèbre. La démarche que propose Sonnet est alors de diviser la circonférence par π, qu'il prend approximativement égal à $3,1415926$, pour obtenir le diamètre, de diviser le résultat par 2 pour avoir le rayon, puis de multiplier le résultat par la circonférence, et de reprendre la moitié du produit (puisque l'aire du cercle est égale au demi-produit de la circonférence par le rayon). Nous verrons dans la section suivante comment la manipulation algébrique des formules rend la solution de cette question plus immédiate (voir p. 555 de la sous-section III.2.3.4).

Si les séquences de calcul peuvent être comparées, notamment en termes d'efficacité pour résoudre des problèmes, les différentes valeurs approchées de π employées dans les calculs donnent lieu également à des comparaisons, relatives à la commodité des calculs ou à la précision des résultats produits. Dès 1790, Maudit s'emploie à ce type de raisonnement, et indique que :

> Si l'on me demande l'aire d'un cercle qui ait 56 pieds de rayon, je multiplie son quarré par $\frac{22}{7}$ [...] et je trouve pour cette surface 9856. En se servant du rapport de Métius, on eût trouvé pour la même surface $9852\frac{4}{113}$, un peu moindre que la véritable. En faisant usage du rapport $\frac{1521}{484}$, on eût d'abord pour côté du quarré très à peu près égal au cercle $\frac{28\times39}{11}$, dont le quarré donne $9855\frac{9}{121}$, pour la surface du même cercle qui diffère très peu des expressions précédentes de la même surface. (Mauduit, 1790, p. 125)

De même, après avoir posé et effectué les deux opérations correspondantes en parallèle, Lamotte compare les résultats obtenus avec les deux rapports, en précisant que « la surface du cercle avec le rapport de Métius sera de 54 m. carrés 9 décimètres carrés 52 centimètres carrés ; avec le rapport d'Archimède, elle sera de 54 mètres carrés 11 décimètres carrés 60 centimètres carrés » (Lamotte, 1839, p. 46). Terquem, quant à lui, ne compare pas les résultats des aires calculées avec les deux rapports, mais directement leurs valeurs. De $\frac{22}{7}$, il dit qu'il « est trop fort : si on en soustrait $\frac{1}{4970}$, il devient trop faible ». Et il précise, de façon très pratique : « Sur un diamètre de mille mètres, la circonférence, calculée d'après ce rapport, est trop longue, de plus de 1 mètre » (Terquem, 1829, p. 217). Bézout l'exprime pour sa part dans des termes équivalents

163. Quelques pages plus tard, il calcule l'aire d'une ellipse de diamètres donnés, en mètres, en effectuant le produit des demi-diamètres par π, mais qu'il prend cette fois ci égale à $\frac{22}{7}$ (Sonnet, 1839, p. 229).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en indiquant qu'« il faudrait que le cercle n'eût pas moins de 800 mètres de diamètre pour que la circonférence [déterminée avec ce rapport] fût fautive de 1 mètre » (Bézout, 1848, p. 62). Quant au rapport de Métius, il est tel que « pour un diamètre d'un million de mètres, de près de 250 lieues de longueur, la circonférence est trop petite de 1 mètre » (Terquem, 1829, p. 218) [164], ce qui est confirmé dans l'ouvrage de Bézout (1848, p. 62). Il s'agit bien ici d'indications sur les ordres de grandeur des erreurs commises. Elles concernent les circonférences, et non les aires, mais ont vocation à donner une idée concrète, directement reliée à l'expérience sensible, de l'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée obtenue.

Les considérations sur la précision des résultats obtenus sont donc manifestement déjà présentes dans la première moitié du XIX^e siècle. Cependant, elles vont prendre une autre dimension dans la seconde partie du siècle, lorsqu'une véritable théorisation du calcul des erreurs va naître.

À la recherche de la précision

Dès l'ouvrage de Vincent en 1844, des indications du type « à un dix-millième près » (Vincent, 1844, p. 268) viennent succéder aux résultats numériques obtenus, en particulier dans le cadre de la mesure du cercle. Si une partie des auteurs donne uniquement ces indications de précision en aval des calculs réalisés sans en donner la justification (c'est le cas par exemple de Briot et Vacquant, Rouché et Comberousse, ou encore Bos), d'autres explicitent les choix que nécessite l'obtention d'une précision donnée. Cirodde explique par exemple que si l'on veut calculer l'aire d'un cercle de 3 mètres de rayon à moins d'un cm², il faut, « conformément à la règle donnée au n° 342 de l'*Arithmétique*, prendre la valeur de π à moins de $\frac{1}{900000}$ ». Ainsi, la valeur exacte 9π de l'aire recherchée a pour valeur approchée $3,141592 \times 9 = 28,274328$, soit $28,2743$ m^2, à moins d'un cm² près (Cirodde, 1858, p. 185). Dans son *Arithmétique*, cette règle indique que dans les multiplications, « si un seul des facteurs est incommensurable, il faudra que l'erreur commise sur ce facteur, multipliée par le produit P de tous les autres, soit plus petite que $\frac{1}{\delta}$; donc ce facteur doit être exact à moins de $\frac{1}{P\delta}$ », où $\frac{1}{\delta}$ est la précision souhaitée (Cirodde, 1853, p. 285). La question de l'incommensurabilité de π n'atteint donc pas seulement les problèmes de construction, mais impacte également la gestion des applications numériques.

164. Cette affirmation va à l'encontre de celle de Mauduit qui explique qu'une valeur obtenue avec le rapport de Métius est « moindre que la véritable ». C'est ce dernier qui fait une erreur dans son analyse de ce rapport approché de π, qui lui est effectivement supérieur.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Guilmin, ancien professeur et directeur d'institution qui se consacre à l'écriture de manuels scolaires depuis 1861, développe quant à lui une véritable théorie sur le calcul des erreurs dans une partie du « complément » à son cours de géométrie intitulée « applications des formules qui renferment le nombre π ». Il exprime très clairement son intention en préambule de ce chapitre en déclarant [165] :

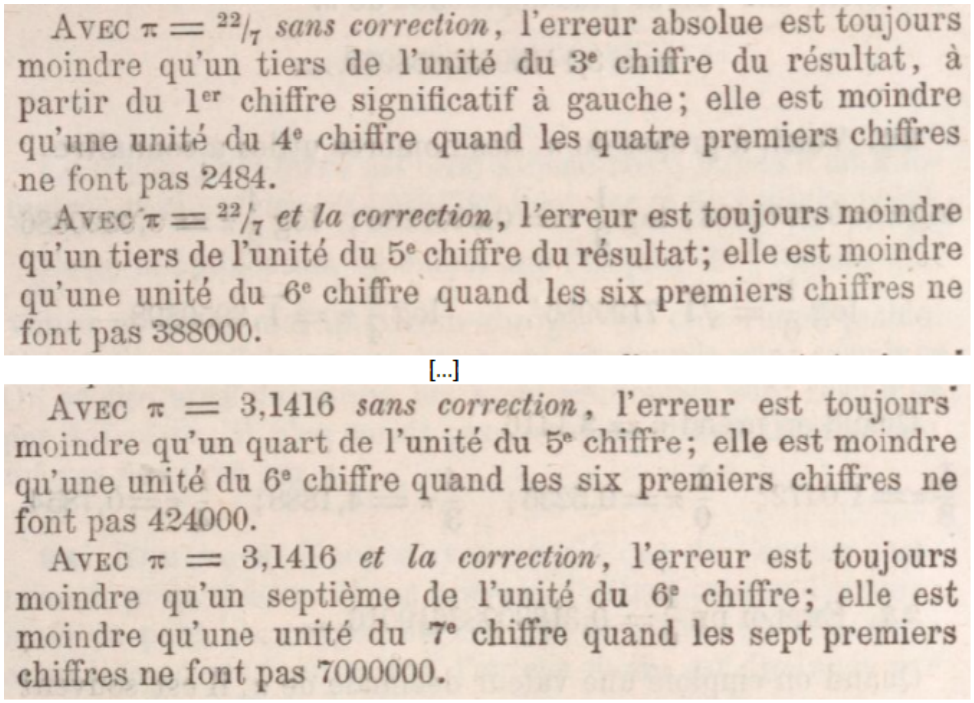
> Ces formules sont nombreuses et d'une application très-fréquente. Elles présentent une difficulté qui vient de ce que l'on ne peut employer que des valeurs approchées du nombre π. Il faut donc choisir parmi ces valeurs pour la plus grande simplicité du calcul, et en vue d'une certaine approximation du résultat. (Guilmin, 1882, compl. 21)

La problématique est particulièrement claire, et consiste à choisir au mieux les valeurs approchées de π pour réussir à allier la simplicité du calcul et l'exactitude du résultat, relativement à la nature des problèmes posés. Guilmin propose ensuite deux approximations de π possibles, $\frac{22}{7}$ d'une part et $3,1416$ d'autre part, dont il décrit les « erreurs relatives » en les ramenant à des proportions sur des grandeurs perceptibles dans la réalité. Par exemple, la valeur $\frac{22}{7}$ « est trop grande ; l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{2484}$. ». En ramenant cette erreur dans le contexte d'un calcul de capacité « l'erreur est moindre qu'un litre tant que cette capacité est inférieure à 2484 litres » (Guilmin, 1882, compl. 21). Dans la lignée de Bézout et de Terquem, ces indications permettent au lecteur de se rendre compte concrètement de l'ordre de grandeur des erreurs commises, en plus de valider l'usage de l'approximation employée dans un cadre appliqué. Guilmin conclut en effet que le rapport $\frac{22}{7}$ « suffit dans beaucoup de cas », et que pour cette raison, on l'utilise « dans un grand nombre d'applications vulgaires » (Guilmin, 1882, compl. 21-22).

Chaque valeur est ensuite soumise à une règle de « correction du résultat », dans le cas où l'approximation ne serait pas suffisante. Pour ce qui est du rapport $\frac{22}{7}$, cette correction consiste à augmenter ou diminuer le résultat « des $0,0004$ de sa valeur » suivant que l'on a multiplié ou divisé par $\frac{22}{7}$, et alors « le résultat corrigé est le nombre cherché avec une erreur moindre que la 388000ième partie de sa valeur » (Guilmin, 1882, compl. 22). Des calculs réalisés en note de bas de page viennent confirmer ces affirmations. À l'issue de ces explications, Guilmin dresse un bilan des erreurs commises pour chacune des deux valeurs approchées considérées, avec et sans correction, effectué « d'après le 2e principe fondamental de la théorie des erreurs relatives » [166]. Ses conclusions sont données sur la figure III.110 (p. 536).

165. Cette partie concernant le calcul des erreurs liées à la valeur approchée de π employée apparaît dès la 5ème édition du *Cours* de Guilmin en 1859 (1859).
166. Pour justifier ce principe, il renvoie à nouveau à son livre d'arithmétique (Guilmin, 1882, compl. 22).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Avec $\pi = {}^{22}/_{7}$ *sans correction*, l'erreur absolue est toujours moindre qu'un tiers de l'unité du 3e chiffre du résultat, à partir du 1er chiffre significatif à gauche; elle est moindre qu'une unité du 4e chiffre quand les quatre premiers chiffres ne font pas 2484.

Avec $\pi = {}^{22}/_{7}$ *et la correction*, l'erreur est toujours moindre qu'un tiers de l'unité du 5e chiffre du résultat; elle est moindre qu'une unité du 6e chiffre quand les six premiers chiffres ne font pas 388000.

[...]

Avec $\pi = 3{,}1416$ *sans correction*, l'erreur est toujours moindre qu'un quart de l'unité du 5e chiffre; elle est moindre qu'une unité du 6e chiffre quand les six premiers chiffres ne font pas 424000.

Avec $\pi = 3{,}1416$ *et la correction*, l'erreur est toujours moindre qu'un septième de l'unité du 6e chiffre; elle est moindre qu'une unité du 7e chiffre quand les sept premiers chiffres ne font pas 7000000.

Figure III.110 – Bilan des erreurs relatives suivant l'approximation de π, avec et sans correction, chez Guilmin (1882, compl. 23)

Ces considérations sur les erreurs relatives concernent directement la détermination des aires curvilignes, puisque l'auteur les applique aux calculs effectifs d'aires de cercle, en comparant les résultats suivant le choix effectué pour approcher π, et en appliquant les principes de correction établis au préalable. Pour le calcul de l'aire d'un cercle de rayon $2,567$, les calculs sont représentés sur la figure III.111 (p. 537). Guilmin conclut en précisant que « les 5 premiers chiffres sont communs au trois résultats ». Ses méthodes fournissent donc dans ce cas une valeur approchée de l'aire recherchée au millième, ce qui confirme que $\frac{22}{7}$ ou $3,1416$ « sont les valeurs qu'il faut généralement employer dans les applications » (Guilmin, 1882, compl. 27-28).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

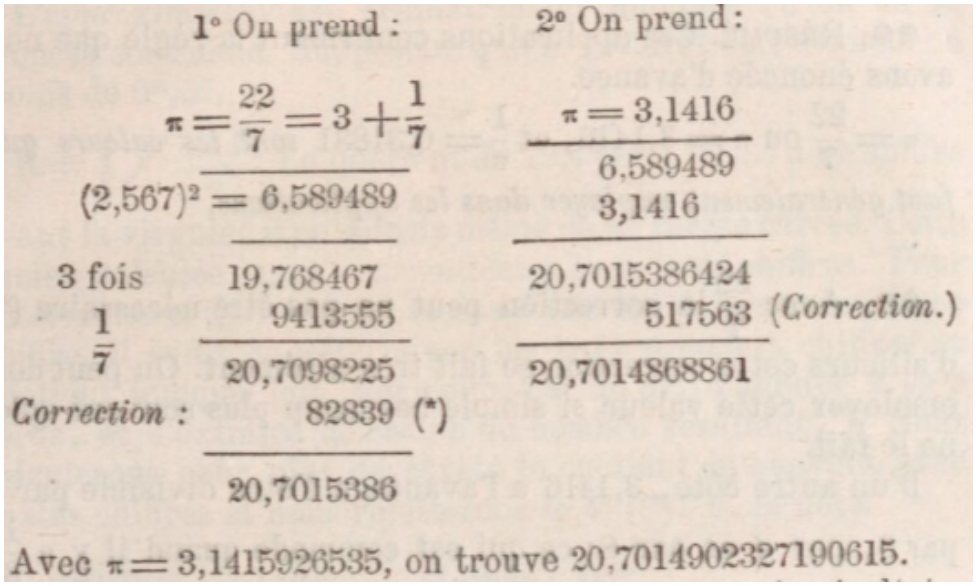
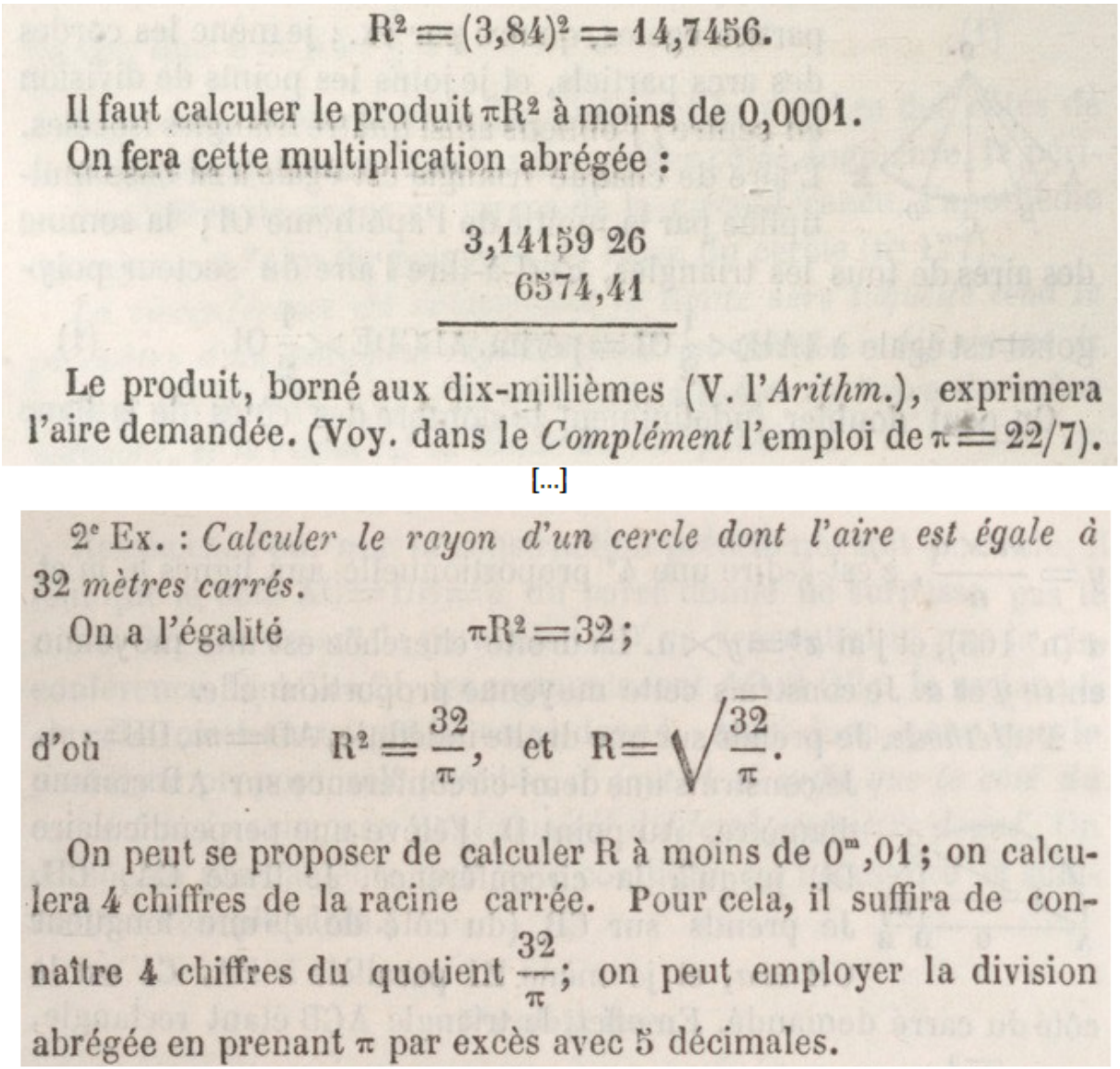


FIGURE III.111 – Comparaison de deux calculs d'aires d'un cercle de rayon $2,567$ chez Guilmin (1882, compl. 26)

Dans la partie principale de son texte, Guilmin se réfère à la théorie développée dans l'appendice pour justifier les valeurs approchées des résultats qu'il obtient. Ses énoncés de problèmes incluent d'ailleurs directement des consignes à propos de la précision requise, comme par exemple : « Le rayon d'un cercle est $3^{m},84$ [*sic*] ; calculer l'aire de ce cercle à moins d'un centimètre carré » (Guilmin, 1882, p. 154). L'auteur combine alors l'usage de la multiplication abrégée et les résultats de sa théorie sur les erreurs relatives pour choisir les valeurs approchées sur lesquelles opérer ainsi que le degré de précision à respecter concernant le nombre de chiffres significatifs. Le résultat produit est présenté sur la figure III.112 (p. 538). Guilmin produit le même type de démarche pour calculer le rayon d'un cercle d'aire donnée. Il applique alors les règles sur les valeurs approchées des racines carrées, extraites de son arithmétique, et pose la division abrégée relative à ce calcul avec l'approximation de π appropriée pour fournir la précision attendue (voir figure III.112 p. 538).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



$R^2 = (3{,}84)^2 = 14{,}7456.$

Il faut calculer le produit πR^2 à moins de 0,0001.
On fera cette multiplication abrégée :

3,14159 26
6574,41

Le produit, borné aux dix-millièmes (V. l'*Arithm.*), exprimera l'aire demandée. (Voy. dans le *Complément* l'emploi de $\pi = 22/7$).

[...]

2e Ex. : *Calculer le rayon d'un cercle dont l'aire est égale à 32 mètres carrés.*

On a l'égalité $\pi R^2 = 32$;

d'où $R^2 = \frac{32}{\pi}$, et $R = \sqrt{\frac{32}{\pi}}$.

On peut se proposer de calculer R à moins de $0^m,01$; on calculera 4 chiffres de la racine carrée. Pour cela, il suffira de connaître 4 chiffres du quotient $\frac{32}{\pi}$; on peut employer la division abrégée en prenant π par excès avec 5 décimales.

FIGURE III.112 – Calcul de l'aire d'un cercle de rayon $3,84\ m$ (en haut), puis du rayon d'un cercle d'aire donnée (en bas) chez Guilmin (1882, p. 154-155)

Une autre théorie des approximations apparaît en filigrane dans le *Cours de géométrie* de Bourget. Ce normalien, ancien professeur de mathématiques devenu recteur de l'académie de Clermont, développe ses idées à ce sujet, en lien avec la nature des rapports de grandeurs. Il affirme tout d'abord que « dans la nature, dans le monde des applications pratiques, il n'y a pas de grandeurs incommensurables entre elles », puisque « dans les applications, quand on veut trouver le rapport de deux grandeurs qu'on sait mesurer, [...] on les mesure chacune avec une unité suffisamment petite pour qu'on puisse négliger les restes ». Dans ce cas, le rapport des grandeurs considérées peut être obtenu « avec l'approximation que l'on désire, approximation qu'on peut augmenter en prenant une unité plus petite encore » (Bourget, 1885, p. 60-61). Dans

Licence CC BY-NC-ND 3.0

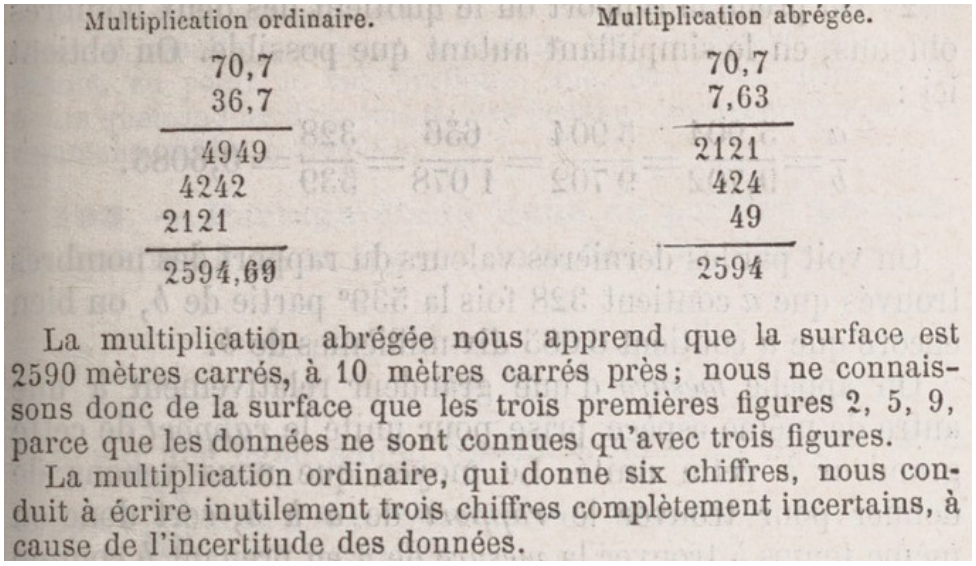
une remarque ultérieure concernant les lignes proportionnelles, il précise son idée :

> Il est absolument impossible de mesurer une grandeur exactement ; on ne peut donc pas non plus évaluer exactement le rapport de deux grandeurs. L'approximation qu'on peut obtenir dans la mesure des grandeurs dépend de la précision des instruments employés et des précautions prises par l'opérateur. On peut poser ce principe général.
> *Les grandeurs mesurées peuvent être évaluées facilement avec TROIS figures exactes, plus difficilement avec QUATRE figures, très rarement avec CINQ*. Nous appelons *figures* les chiffres *significatifs*, à partir du premier à gauche autre que zéro ; nous ne tenons aucun compte de la place de la virgule, ni des zéros placés à gauche. (Bourget, 1885, p. 112)

Ainsi, le quotient de deux grandeurs comportant quatre chiffres significatifs ne doit s'exprimer qu'avec quatre chiffres significatifs. Il reprend alors son idée selon laquelle, « puisqu'il est impossible de mesurer exactement une grandeur, [...] toute grandeur est commensurable avec l'unité, au point de vue pratique » et par conséquent, « deux grandeurs quelconques de même nature peuvent être regardées comme commensurables entre elles » (Bourget, 1885, p. 113).

Comme chez son confrère Guilmin, ces principes trouvent leurs applications dans le cadre de la mesure du cercle, que ce soit le calcul direct de l'aire connaissant le rayon, ou celui du rayon d'un cercle d'aire fixée. Dans le premier cas, il précise au préalable : « Nous supposerons ce rayon *mesuré* et connu, à moins d'une unité du dernier ordre conservé » (Bourget, 1885, p. 159). Après avoir posé les opérations *ad hoc* sous forme de multiplications et de divisions abrégées (voir figures III.107 p. 530 et III.108b p. 530), il conclut le premier calcul en écrivant que « la surface demandée est $37^{\text{mq}}, 1$; elle est connue avec trois chiffres seulement », et le second en indiquant que « le rayon cherché est $3, 44$; il est connu avec trois figures » (Bourget, 1885, p. 159-160). L'usage qu'il fait des chiffres significatifs, et les simplifications qu'il opère sur certaines décimales (barrées sur les figures III.107 et III.108b) sont expliqués en amont, lorsqu'il expose les principes de la multiplication abrégée (voir figure III.113 p. 540). Il montre à cette occasion la suffisance de l'opération abrégée, qui produit un résultat conforme, en termes d'ordre de grandeur, aux données initiales, et qui ne saurait être plus précis que ces dernières.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Multiplication ordinaire.

70,7
36,7
4949
4242
2121
2594,69

Multiplication abrégée.

70,7
7,63
2121
424
49
2594

La multiplication abrégée nous apprend que la surface est 2590 mètres carrés, à 10 mètres carrés près; nous ne connaissons donc de la surface que les trois premières figures 2, 5, 9, parce que les données ne sont connues qu'avec trois figures.

La multiplication ordinaire, qui donne six chiffres, nous conduit à écrire inutilement trois chiffres complètement incertains, à cause de l'incertitude des données.

FIGURE III.113 – Principe de la multiplication abrégée expliquée sur un exemple chez Bourget (1885, p. 111)

Ces deux exemples de théorisation des calculs d'erreurs et des approximations, montrent que le calcul des aires curvilignes, et tout particulièrement celle de l'aire du cercle, met en jeu de réelles interactions entre les connaissances de géométrie et celles d'arithmétique. La nature incommensurable de π en est l'une des raisons, mais ce n'est pas la seule. Les calculs réalisés doivent en effet présenter une exactitude relative à celles des grandeurs initiales, fournies par la mesure, elle-même soumise à une précision qui dépend de la pratique et des instruments de mesurage. Calculer une aire au dix-millième à partir de données exprimées au centième n'a en effet guère de sens dans la pratique. Les techniques opératoires proposées sont ainsi adaptées à ces contraintes de terrain : elles sont plus simples, donc plus rapides à exécuter, et produisent néanmoins des résultats d'une précision bien suffisante par rapport à la nature des données en jeu.

Les théories de l'arithmétique, que ce soit pour choisir les valeurs approchées à utiliser, poser les opérations, comparer les résultats, ou encore gérer les erreurs, servent donc directement à simplifier les usages de la géométrie pratique, notamment pour déterminer des aires avec une précision donnée. *A contrario*, la géométrie des aires curviligne offre un champ d'application concret de ces techniques de calcul, à même de motiver les apprentissages des élèves à ce sujet. En cela, la géométrie des aires curvilignes se situe bien à l'interface de la géométrie et de l'arithmétique, cristallisant des échanges de connaissances et de savoir-faire entre les deux disciplines (voir le schéma de la figure III.114 p. 541).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

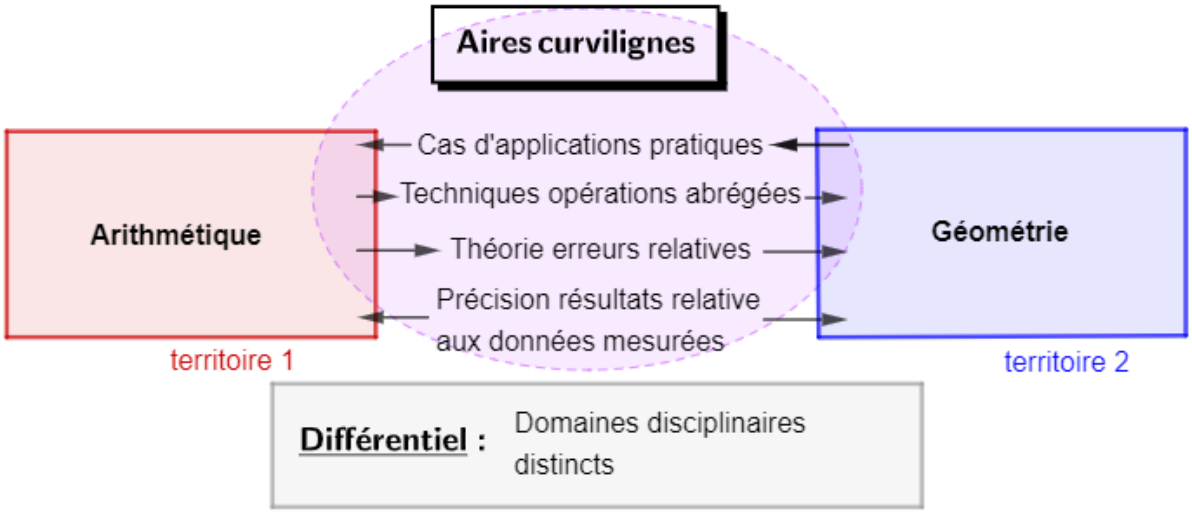


FIGURE III.114 – Schéma montrant en quoi la détermination des aires curvilignes est à l'interface de l'arithmétique et de la géométrie

III.2.3.4 L'apport de l'algèbre à la géométrie des aires

L'usage controversé de l'algèbre en géométrie au XIXe siècle

Au début du XIXe et tout au long du siècle, la question du recours au calcul algébrique en géométrie se pose, au cœur du débat entre géométrie synthétique et analytique (voir la sous-section I.3.1.3 p. 112). En effet, Chasles précise, dans son discours d'introduction à son cours de géométrie supérieure en 1847, que pour les géomètres, le « terme analyse a changé de sens, et signifie aujourd'hui l'emploi du calcul algébrique » pendant qu'on appelle « synthèse » la géométrie des Anciens « parce qu'on y raisonne directement sur les propriétés des figures, sans faire usage des notations et des transformations algébriques » (Chasles, 1847, p. 17). Dans l'enseignement, cette question se heurte par ailleurs à une contrainte curriculaire car même si, au tournant du siècle, les mathématiciens préconisent presque unanimement comme ordre d'étude l'arithmétique, l'algèbre, puis la géométrie, ce souhait n'est pas suivi d'effets dans les programmes du secondaire, où la géométrie est commencée bien avant l'algèbre. Les élèves semblent néanmoins s'habituer progressivement à calculer avec des lettres, acquisition qui devient un préalable à l'étude de la géométrie (Lamandé, 1993, p. 266). Dans le primaire, l'algèbre n'apparaît officiellement dans les programmes qu'au moment des lois Ferry, même si dans la pratique, elle semble avoir été enseignée auparavant dans une part non négligeable des écoles primaires supérieures et écoles normales primaires, notamment dans l'objectif de résoudre plus facilement certains problèmes (Assude et Gispert, 2015). Dans ce contexte, la question de la place et du rôle de

Licence CC BY-NC-ND 3.0

l'algèbre en géométrie préoccupe donc également les auteurs d'ouvrages d'enseignement. En effet, la littérature classique propose à la même période des traités d'algèbre, parmi lesquels ceux de Lacroix (1804) et de Garnier (1836), ainsi que des manuels spécialisés dans ce que l'on appelle alors l'« application de l'algèbre à la géométrie », comme ceux de Bourdon (1825), de Lacroix (1807b) ou de Ritt (1857). Cette dernière branche des mathématiques figure au programme d'admission à l'École Polytechnique, ainsi que dans les classes supérieures des lycées dès le début du siècle (année de philosophie et classe de mathématiques spéciales) (Belhoste, 1995). Par conséquent, le recours à des connaissances algébriques, réputées de niveau plus élevé, dans les ouvrages de géométrie élémentaire, fait débat.

Plusieurs postures sont observables vis-à-vis de cette question [167]. La première est celle du refus d'utiliser l'algèbre, ou du moins d'en exiger des connaissances de la part des lectrices et des lecteurs. C'est le cas de Mauduit qui indique dans sa préface qu'il n'a pas souhaité présenter certains résultats pour lesquels « il faudroit supposer à ceux auxquels il est destiné, des connaissances de calcul algébrique que je n'ai point voulu exiger » (Mauduit, 1790, p. xii). Pourtant, l'auteur n'hésite pas à vanter les mérites de Descartes, qui

> dans sa géométrie, enseigne à pratiquer sur les lignes les opérations de multiplication et de division ; idée heureuse qui fait une partie de l'application de l'algèbre à la géométrie, et pour laquelle il fût blâmé par quelques géomètres de son temps, qui, probablement, ne l'entendoient point. (Mauduit, 1790, p. 148) [168]

167. Le nom « algèbre » ou l'adjectif « algébrique » est employé dans 15 ouvrages du corpus. Dans aucun de ces textes, l'emploi des termes ne donne lieu à une définition formelle, mais leur usage permet d'en dessiner l'acceptation qu'ils en font dans leur ensemble. Il est souvent question des « opérations » (Terquem, 1829, p. iv) ou « transformations » algébriques (Sonnet, 1839, p. 282) ou littérales, tout comme les « règles » (Legendre, 1823, p. 62) ou les « formules » de l'algèbre (Vincent, 1844, p. 166). L'aspect symbolique est souligné par le recours à des « signes abréviatifs » empruntés à l'algèbre (Sonnet, 1839, p. vi). Dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, l'article « Algèbre » rédigé par Sonnet commence par cette définition : « Cette partie des mathématiques [...] est une sorte d'arithmétique plus générale qui permet de faire entrer dans le calcul les quantités inconnues comme si elles étaient connues » (Sonnet, 1882, p. 46). Les outils et procédés qui lui sont liés sont ensuite détaillés (opérations, signes abréviatifs, etc.).

168. Les références à Descartes comme celle que fait Mauduit sont très peu nombreuses dans les ouvrages du corpus. Il est cité dans l'introduction historique de Rouché et Comberousse comme créateur de la géométrie analytique, « nouvelle doctrine, si séduisante par son caractère d'universalité », qui fut une « véritable révolution dans la science et porta un coup funeste à la géométrie pure » (Rouché et Comberousse, 1866, p. ix). D'autres auteurs, comme Vincent, se réfèrent très explicitement à sa « méthode analytique », commençant par « supposer le problème résolu », puis poursuivant en déterminant les « relations qui lient entre elles les données aux inconnues », mais sans en nommer le fondateur (Vincent, 1844, p. 107) (voir la sous-section II.2.2.1 et en particulier la p. 213).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Loin de constituer un discrédit de l'idée même d'appliquer l'algèbre à la géométrie, le refus d'en faire usage est principalement justifié par le public auquel l'ouvrage s'adresse, pas forcément formé à l'algèbre. Ce souci des « élèves qui ignorent l'algèbre » (Cirodde, 1836, p. 322) est partagé par d'autres auteurs, qui traitent la question sous des angles variés.

Par exemple, Lacroix, lui-même auteur de manuels d'algèbre et d'application de l'algèbre à la géométrie, fait de simples références à ses autres ouvrages quand la situation l'exige, de même que Legendre, qui préconise : « en cas de difficulté, il sera bon de consulter les livres d'algèbre » (Legendre, 1823, p. 62). Ce recours à l'algèbre, mais sous certaines conditions, se retrouve chez des auteurs qui souhaitent *a minima* utiliser les « signes et notations algébriques » et introduisent des « préliminaires d'algèbre réduits à la connaissance des notations algébriques et à quelques transformations très simples et très souvent usitées » afin que tout élève « puisse suivre les démonstrations de toutes les théories et en tirer parti » (Harant, 1863, p. vii). D'autres encore préfèrent reporter en fin d'ouvrage des résultats « pour les élèves qui savent un peu d'algèbre », comme Sonnet qui développe en note la formule de Héron (Sonnet, 1839, p. 282).

Enfin, deux auteurs préconisent un recours à l'algèbre en géométrie de façon particulièrement assumée. Dans sa préface, Terquem prévoit d'« introduire dans les Traités de géométrie les opérations algébriques et le calcul par équations » en abandonnant la méthode dite, à tort, « des anciens », car d'après lui, ces derniers faisaient également « de l'algèbre en géométrie » [169]. Il explique ensuite que dans ses *Éléments*, Euclide fait « de l'algèbre parlée », puisque dans cinq de ses livres, il emploie « des proportions, des puissances et des racines [...] sans signes, mais en phrases » (Terquem, 1829, p. iv). Il encourage donc les géomètres à se saisir des outils que sont la « méthode algébrique » et le « calcul littéral » sans sombrer dans la « superstition archéologique » qui

169. Dans son article, « Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes », Vitrac discute la pertinence de l'hypothèse selon laquelle il y aurait déjà une forme d'algèbre chez les savants de l'Antiquité. Il étudie pour cela un corpus de textes d'Euclide, de Héron d'Alexandrie et de Diophante. Il considère la question sous différents points de vue : lexical, historiographique, disciplinaire et définitionnel. Sa conclusion est que, même si certains éléments des travaux algorithmiques grecs apparaissent proches de l'algèbre, comme de considérer une égalité ou une équation comme un objet mathématique en soi, ou de calculer avec des nombres indéterminés à base de manipulations-types, le pas vers l'algèbre n'a alors pas été franchi. En effet, cette étape demandait de dépasser le clivage entre les objets « nombre » et « grandeur » définis dans les cadres distincts de l'arithmétique et de la géométrie. C'est ce que les algébristes arabes ont fait en constituant un domaine propre, celui des équations, en amont des territoires de l'arithmétique et de la géométrie, et pouvant indifféremment s'y appliquer. Il est à noter que dans le point historiographique qu'il dresse, Vitrac précise que la thèse d'une « algèbre grecque » a longtemps perduré, notamment soutenue par Tannery à la fin du XIX^{e} siècle, et n'a été vraiment remise en cause que dans les années 1920, puis plus tard dans la décennie 1970. Il n'est donc pas étonnant d'en trouver une résonance dans certains manuels de notre corpus (Vitrac, 2005).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

les inciterait à repousser de tels instruments (Terquem, 1829, p. v). Terquem n'est pas le seul à assumer pleinement l'usage de l'« art algébrique » (Terquem, 1829, p. vii) en géométrie. Il est rejoint notamment par Guilmin, qui indique : « chacune des égalités [...] est ce qu'on nomme en algèbre une formule. [...] Les calculs qu'on fait pour établir les théorèmes suivants sont de véritables opérations algébriques » (Guilmin, 1882, p. 93).

Le recours à l'algèbre pour les théorèmes de Pythagore et de Héron

Le traitement réservé au théorème de Pythagore s'inscrit dans ce contexte, avec un recours plus ou moins important à l'algèbre, notamment dans ses versions plus générales (Énoncés 2 et 3 définis dans la sous-section II.3.2.2 p. 286), ainsi que dans son application pour démontrer la formule de Héron (Corollaire 1). Alors que certains auteurs font le choix de prouver la propriété du carré construit sur un côté opposé à un angle aigu ou obtus par la méthode euclidienne, d'autres vont plus directement au résultat par la voie de l'algèbre. La preuve géométrique repose sur le même type d'arguments d'égalité de figures que celle du théorème de Pythagore, à la nuance près que chacun des rectangles qui forment le grand carré est respectivement égal à chacun des rectangles inclus dans, ou comprenant, les petits carrés. La différence est alors la somme des deux petits rectangles en surplus, ou en moins (voir figure III.115 p. 544).

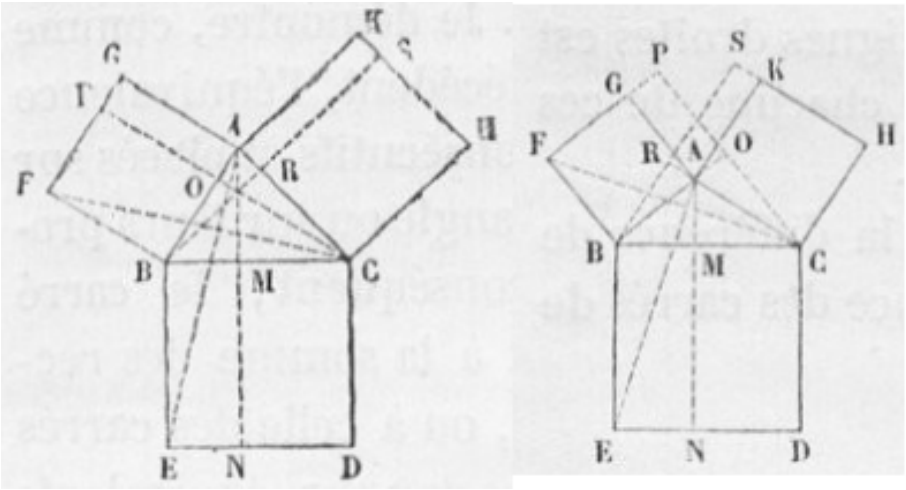
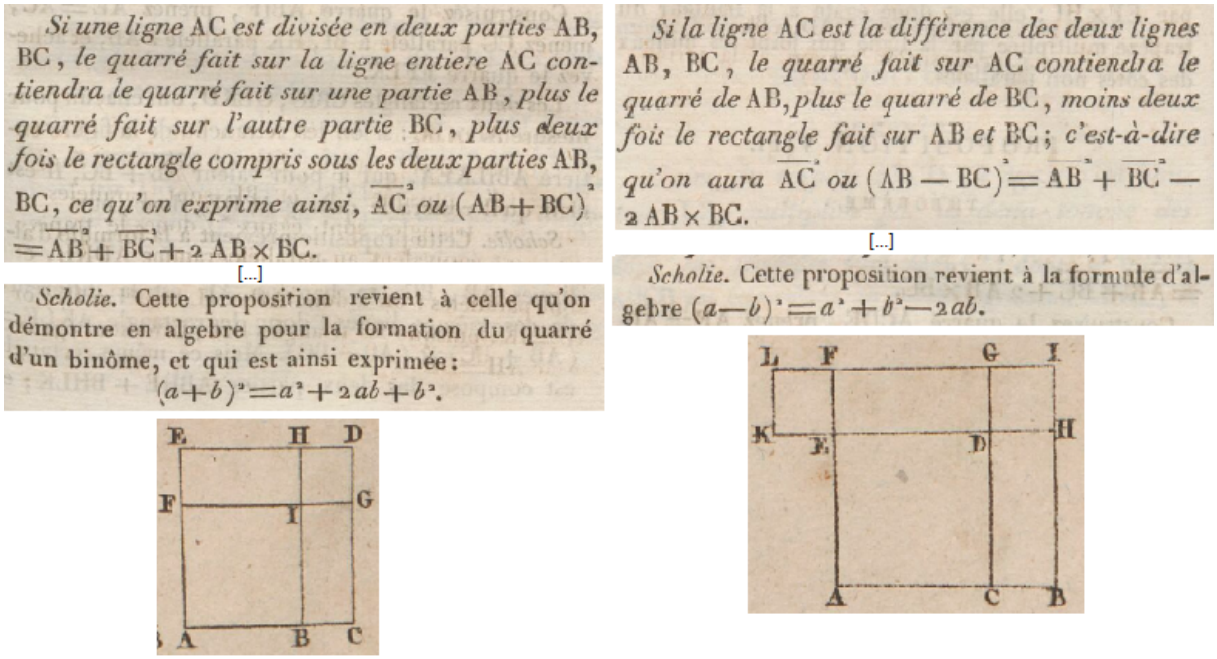


FIGURE III.115 – Figures illustrant les preuves des théorèmes généralisés dans les triangles d'angles aigus et obtus (Amiot, 1859, p. 157)

La preuve algébrique se fonde, quant à elle, sur l'application des identités remarquables $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, interprétées géométriquement. Comme l'indique Vincent, ces « deux formules d'algèbre étant traduites en langage géométrique, donnent lieu à de nouveaux théorèmes sur les aires » (Vincent, 1844, p. 183). Il énonce à la suite les théorèmes d'équivalence des carrés construits sur la somme ou la différence de deux lignes. Chez Legendre, à l'inverse, ces propositions sont démontrées

Licence CC BY-NC-ND 3.0

géométriquement à l'instar de la démarche d'Euclide dans le livre II, avant qu'il ne les relie aux formules d'algèbre qui leur correspondent (voir figure III.116 p. 545) [170].



Si une ligne AC *est divisée en deux parties* AB, BC, *le quarré fait sur la ligne entiere* AC *contiendra le quarré fait sur une partie* AB, *plus le quarré fait sur l'autre partie* BC, *plus deux fois le rectangle compris sous les deux parties* AB, BC, *ce qu'on exprime ainsi,* $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$.

[...]

Scholie. Cette proposition revient à celle qu'on démontre en algebre pour la formation du quarré d'un binôme, et qui est ainsi exprimée :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Si la ligne AC *est la différence des deux lignes* AB, BC, *le quarré fait sur* AC *contiendra le quarré de* AB, *plus le quarré de* BC, *moins deux fois le rectangle fait sur* AB *et* BC ; *c'est-à-dire qu'on aura* $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB-BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC$.

[...]

Scholie. Cette proposition revient à la formule d'algebre $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

FIGURE III.116 – Enoncés, scholies et figures relatives aux propositions des carrés construits sur des sommes ou différences de lignes chez Legendre (1823, 69-70, pl. IV)

Des manipulations algébriques, faisant intervenir le théorème de Pythagore et les identités remarquables que nous venons d'évoquer, suffisent à démontrer le théorème généralisé aux triangles d'angles aigus ou obtus. Les ouvrages dont les auteurs n'expriment cette relation qu'en termes de lignes n'ont pas été examinés dans cette étude, qui porte ouvertement sur le théorème de Pythagore — et ses théorèmes plus généraux associés — exprimé(s) en aires. Les autres, que nous nous proposons d'étudier, l'énoncent aussi, ou parfois même seulement, comme une égalité en aire. C'est le cas de Briot, qui écrit : « Dans tout triangle, le carré construit sur le côté opposé à un angle aigu [resp. obtus] est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, moins [resp. plus] deux fois le rectangle ayant pour base l'un ce des côtés, et pour hauteur la projection du second sur le premier » (Briot, 1863, p. 168-169). Briot explique que « ce théorème est la traduction géométrique de la relation numérique » (Briot, 1863, p. 169) établie au préalable algébriquement. Il prend ensuite le soin de produire une autre démonstration axée sur les équivalences d'aires, avant de préciser

170. Sur l'interprétation des propositions du livre II comme identités remarquables et l'analyse de leurs preuves, voir le travail de Vitrac dans (Euclide, 1990, p. 329-340). On retrouve en proposition IV la première configuration et le premier résultat de Legendre (carré d'une somme). La preuve euclidienne diffère de celle de Legendre car il montre que les quadrilatères construits sur la diagonale du grand carré sont eux-mêmes des carrés. L'identité suivante (carré d'une différence) figure sous forme additive chez Euclide en proposition VII, avec une configuration géométrique différente, de même que la preuve.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en remarque : « Il importe de bien saisir la correspondance qui existe entre les relations numériques et les propriétés géométriques des figures, qui n'en sont en quelque sorte que la représentation. Cette correspondance permet de démontrer par l'algèbre un grand nombre de théorèmes de géométrie » (Briot, 1863, p. 170).

Guilmin, quant à lui, a démontré dans son livre III traitant des « relations numériques entre les lignes de diverses figures » la proposition : « L'angle C du triangle ABC étant obtus, on a [...] $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 + 2\overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{CD}}$ » (Guilmin, 1882, p. 146), dont résulte le théorème correspondant sur les aires. Au sujet des « formules [...] démontrées à la fois par le calcul et par des considérations géométriques », il précise : « Bien qu'aucune vérification des résultats obtenus par le calcul ne soit nécessaire, la concordance des deux méthodes ne pourra que donner au lecteur plus de confiance dans l'application du calcul à la géométrie » (Guilmin, 1882, p. 146). Il semble donc envisageable d'employer les techniques de l'algèbre au sein des preuves géométriques, même si ces démonstrations sont souvent doublées de preuves par des raisonnements de géométrie pure. Le théorème considéré, que l'on peut désigner de Pythagore généralisé aux triangles non rectangles, en est un exemple représentatif, puisque ses démonstrations mêlent des arguments d'égalité des aires et des formules algébriques, comme les identités remarquables, elles-mêmes interprétables (et démontrables) en termes d'aires. Néanmoins, même si la légitimité mathématique de telles méthodes ne semble pas contestée, leur acceptation par le public auquel les ouvrages se destinent (voir la sous-section III.2.3.4 sur l'usage de l'algèbre en géométrie p. 541) apparaît comme discutable, puisqu'il apparaît nécessaire de consolider la « confiance » dans l'application de ces méthodes à la géométrie.

Un autre résultat, conséquence du théorème de Pyhtagore, met en lumière les liens entre algèbre et géométrie. Il s'agit de la proposition que nous nommons de nos jours « formule de Héron », présentée le plus fréquemment sous la forme d'un problème suivant : trouver l'aire d'un triangle dont on connaît les trois côtés (voir corollaire 1 dans la sous-section II.3.2.2 p. 286) [171]. La formule est parfois présentée et énoncée sans preuve. Cependant, quand elle est démontrée, elle ne l'est pas à la façon géométrique de Héron (Heron, 2014, p. 165-169), mais à l'aide de manipulations algébriques très calculatoires. Puille expose la formule en note de bas de page, à destination de « ceux qui ont étudié l'algèbre », tout en prévenant : « Nous ne donnerons pas ici toute la démonstration de cette formule ; elle appartient à la géométrie analytique » (Puille, 1852, p. 122).

171. Même si cela n'est pas explicité dans les ouvrages du corpus, il s'agit bien, comme chez Héron, de « trouver l'aire d'un triangle quelconque, les trois côtés étant donnés, sans [utiliser] une hauteur » (Heron, 2014, p. 165).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Parmi les onze auteurs mettant en œuvre cette preuve dans leur manuel [172], trois le font dans une période proche, située entre 1836 et 1844 [173], avec quelques petites variations. Cirodde, tout d'abord, présente une preuve très détaillée, en expliquant précisément la démarche, et en l'agrémentant de simplifications algébriques. Il note a, b, c et h les cotés et la hauteur du triangle dont il cherche l'aire et explique que « si l'on connaissait l'un des segments de la base [...], on pourrait, au moyen du théorème de Pythagore, calculer cette hauteur, et obtenir ainsi l'aire de notre triangle » (Cirodde, 1836, p. 198). Il mobilise ensuite le théorème généralisé aux triangles non rectangles pour calculer le segment de la base, puis développe ses calculs en prenant soin de les expliquer par des phrases, en indiquant par exemple qu'« on démontre dans l'algèbre que la différence des carrés de deux quantités est égale à la somme de ces quantités multipliée par leur différence ». Le raisonnement se déroule entre formules algébriques et propos explicatifs, jusqu'à la formule finale, elle-même traduite par une phrase : « pour calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés, il faut du demi-périmètre du triangle retrancher successivement chacun de ses côtés, multiplier les trois restes entre eux et par le demi-périmètre, et extraire la racine carrée du produit » (Cirodde, 1836, p. 200).

Mais $2ac + c^2 + a^2 = (a+c)^2$: ainsi la quantité comprise dans la première parenthèse revient à $(a+c)^2 - b^2$, c'est-à-dire à $(a+c+b)(a+c-b)$, puisqu'elle est la différence des carrés de $(a+c)$ et de b. La seconde parenthèse $2ac - c^2 - a^2 + b^2$, peut être considérée comme ce qui reste, lorsque de b^2 on retranche $a^2 + c^2 - 2ac$, c'est-à-dire le carré de $(a-c)$: elle est donc la différence des carrés de b et de $(a-c)$, et revient par conséquent à

$$(b+a-c)(b-a+c).$$

D'après ces transformations la valeur trouvée pour h^2 deviendra :

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}.$$

FIGURE III.117 – Extrait de la preuve de la formule de Héron chez Cirodde (1836, p. 199)

Quelques années plus tard, Sonnet propose également sa version de la démonstration. Il choisit, comme nous l'avons vu, de la reporter en fin d'ouvrage, dans une « note relative à l'aire du triangle » (Sonnet, 1839, p. 282-284) (voir figure III.118 p. 548). Lui aussi entremêle les arguments textuels avec les manipulations algébriques associées,

172. Il s'agit de Mauduit, Legendre, Sonnet, Idoux, Vincent, Cirodde, Rouché et Comberousse, Guilmin, Bourget, Leysenne et Girod.

173. Pour cette section, nous avons choisi de prendre une édition antérieure de l'ouvrage de Cirodde, datant de 1836, et figurant dans le corpus complémentaire. Les mêmes éléments se retrouvent dans Cirodde 1858, mais nous avons préféré privilégier ici l'édition originale, pour comparer des textes proches dans le temps.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

pour arriver à l'expression de la hauteur h en fonction des côtés du triangle, qui produit *in fine* la formule attendue.

Faisons, pour abréger, BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$, AD $= h$, BD $= m$, DC $= n$.

Le triangle ABD donnera

$$c^2 = h^2 + m^2, \text{ d'où } h^2 = c^2 - m^2. \quad \ldots\ldots (1)$$

Le triangle ACD donnera

$$b^2 = h^2 + n^2, \text{ d'où } h^2 = b^2 - n^2.$$

Égalons les deux valeurs de h^2, nous aurons

$$c^2 - m^2 = b^2 - n^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Mais on a aussi

$$m + n = a, \text{ d'où } n = a - m,$$

et par conséquent

$$n^2 = a^2 + m^2 - 2am.$$

D'après cela, l'égalité (2) devient

$$c^2 - m^2 = b^2 - a^2 - m^2 + 2am,$$

ou

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2am,$$

d'où

$$m = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

L'égalité (1) devient à son tour

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$\text{et } h = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2a}.$$

FIGURE III.118 – Extrait de la preuve de la formule de Héron chez Sonnet (1839, p. 282-283)

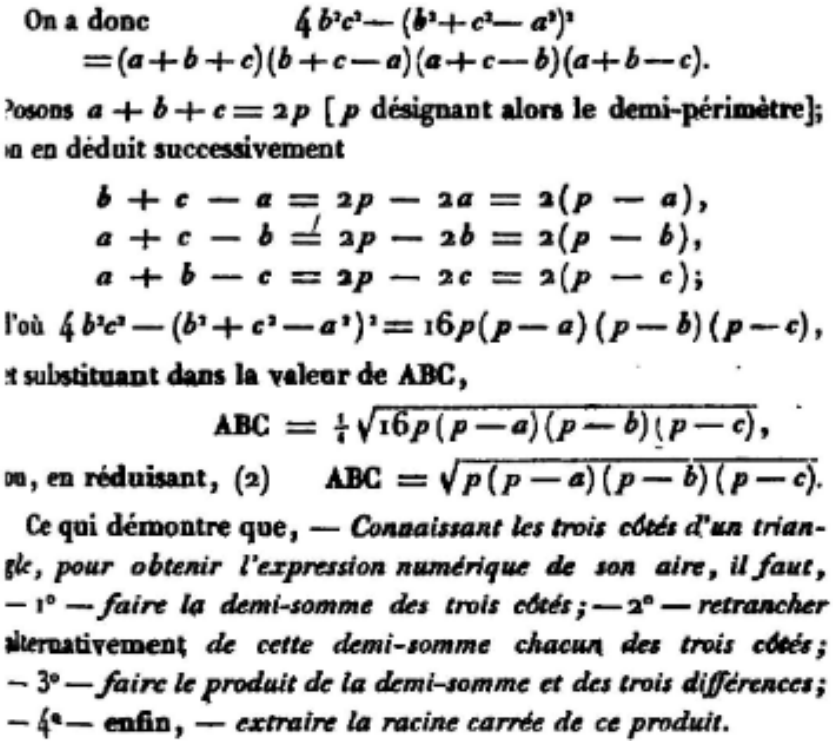
Vincent introduit quant à lui une preuve très algébrisée de la formule de Héron dans la 5ème édition de son *Cours* (1844), après avoir simplement exposé le résultat sans le démontrer dans la 2ème édition de 1832 (Vincent, 1832) [174]. D'ailleurs, le virage algébrique qu'il semble prendre au tournant de la décennie 1840 est vraisemblablement plus général, comme en atteste le relevé des termes « algèbre » et « algébrique » dans ces deux ouvrages. Cinq occurrences apparaissent en 1832, dont deux références à un ouvrage écrites sous la forme : « Voyez l'Algèbre » (Vincent, 1832, p. 237, 497), qui font certainement référence aux *Éléments d'algèbre* de Bourdon (Bourdon, 1831),

174. Les éditions intermédiaires n'ont pas pu être consultées.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

mentionnés en amont de son cours (Vincent, 1832, p. ii) [175]. En 1844. on trouve 15 occurrences de ces termes, alors que les références à l'*Algèbre* de Bourdon ont disparu.

La démonstration de la formule de Héron présentée par Vincent est très proche de celle de Sonnet, et contrairement à celle de Cirodde, peu bavarde en explications (voir pages 548 et 547). L'expression obtenue pour la hauteur en cours de preuve, identique à celle établie par Sonnet (voir figure III.118 p. 548) pourrait suffire à conclure car, elle permet à Vincent de montrer que $ABC = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$, expression qui « ne renferme que les trois côtés a, b, c du triangle » (Vincent, 1844, p. 262). Il poursuit néanmoins les transformations algébriques, en faisant intervenir la variable p désignant le demi-périmètre du triangle, jusqu'à obtenir une formule concise et mémorisable pour son aire (voir figure III.119 p. 549).



On a donc $4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

Posons $a+b+c = 2p$ [p désignant alors le demi-périmètre];
on en déduit successivement

$$b+c-a = 2p-2a = 2(p-a),$$
$$a+c-b = 2p-2b = 2(p-b),$$
$$a+b-c = 2p-2c = 2(p-c);$$

d'où $4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$,

et substituant dans la valeur de ABC,

$$ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ou, en réduisant, (2) $$ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ce qui démontre que, — *Connaissant les trois côtés d'un triangle, pour obtenir l'expression numérique de son aire, il faut,* — 1° — *faire la demi-somme des trois côtés;* — 2° — *retrancher alternativement de cette demi-somme chacun des trois côtés;* — 3° — *faire le produit de la demi-somme et des trois différences;* — 4° — **enfin,** — *extraire la racine carrée de ce produit.*

FIGURE III.119 – Extrait de la preuve de la formule de Héron chez Vincent (1844, p. 263)

La fin de la preuve de Vincent montre bien les aspects calculatoires spécifiques aux méthodes algébriques, dans l'organisation des calculs, la substitution des variables, les simplifications. La formule finale est donnée en notation symbolique, puis présentée sous forme d'algorithme de calcul en quatre points. Ces éléments se retrouvent chez

175. Louis Bourdon (1779 – 1854), l'auteur de cet ouvrage, est également co-auteur avec son gendre Vincent d'un *Précis de géométrie élémentaire* (Vincent et Bourdon, 1837) et d'un *Abrégé du cours de géométrie* (Vincent et Bourdon, 1844), tous deux dérivés du cours initial de Vincent. Bourdon est à cette époque inspecteur de la ville de Paris.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Sonnet, suivis d'une application numérique (1839, p. 283), de même que chez Cirodde (1836, p. 200). C'est par les voies de l'algèbre que ces auteurs parviennent à énoncer et à démontrer une formule plus courte, plus simple à retenir, et plus facilement interprétable en termes d'algorithme de calcul.

Cet exemple montre bien les interactions en jeu entre les domaines de l'algèbre et de la géométrie, et confirme les liens de cette dernière avec l'arithmétique, au sein des ouvrages de géométrie. L'usage du calcul algébrique n'est pas validé par tous, notamment pour des raisons d'accessibilité des ouvrages à leur public, pas forcément initié à cet art. Dans les années 1830-40, certains auteurs assument plus aisément cet outil, qui leur permet de démontrer des résultats non triviaux sur les aires, comme la très utile formule de Héron [176]. La mise en jeu de techniques et de connaissances algébriques est abordée diversement, en marge du traité ou au cœur de l'ouvrage, accompagnée d'un plus ou moins grand nombre d'explications.

La formule de Héron se trouve toujours présentée en lien direct avec le théorème de Pythagore, chaînon indispensable à sa démonstration. C'est un exemple qui met également en avant les liens entre la géométrie des lignes et celle des aires, puisque le théorème de Pythagore, initialement théorème sur les aires, est mobilisé ici en termes de lignes, afin de démontrer un nouveau théorème sur les aires. Cet aller-retour s'accompagne d'arguments algébriques, puis de calculs arithmétiques, voire d'outils d'analyse (les logarithmes) pour l'application numérique finale. Établir ce résultat, tout comme celui de Pythagore généralisé aux triangles non rectangles, donne l'occasion aux auteurs d'exprimer la façon dont ils envisagent les liens entre algèbre et géométrie, dans le discours qu'ils tiennent comme dans le raisonnement mathématique mis en place à cette occasion.

De manière plus générale, les preuves du théorème de Pythagore généralisé ou de la formule de Héron présentées dans cette section se situent manifestement à l'interface des domaines de l'algèbre et de la géométrie (voir le schéma III.120 p. 551). En effet, dans la première démonstration, les identités remarquables forment un trait d'union entre les deux domaines, exposant un même contenu de savoir dans les deux langages, l'un algébrique et l'autre géométrique. De plus, la manipulation d'expressions algébriques contribue à l'élaboration des preuves de ces deux résultats géométriques, tandis qu'*a contrario*, la géométrie apporte une interprétation des relations obtenues à travers des

176. Nous remarquons à ce stade que les 3 ouvrages concernés par les développements algébriques conséquents sur la formule de Héron appartiennent au groupe des « encyclopédiques » (groupe 3) de notre première classification et font partie des ouvrages « officiels » (groupe 5 de la seconde classification et/ou 3 de la dernière).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

figures. Les deux systèmes de connaissances se répondent donc, l'un apportant un supplément de sens à l'autre et réciproquement, cet échange constituant une réelle valeur ajoutée pour l'élève dans ses apprentissages. L'acquisition de savoirs en algèbre est alors motivée par l'établissement de nouveaux résultats en géométrie, dont l'intérêt pratique est manifeste (formule de Héron), tandis que les figures de la géométrie des aires fournissent un support de compréhension efficace pour les relations algébriques à connaître (identités remarquables).

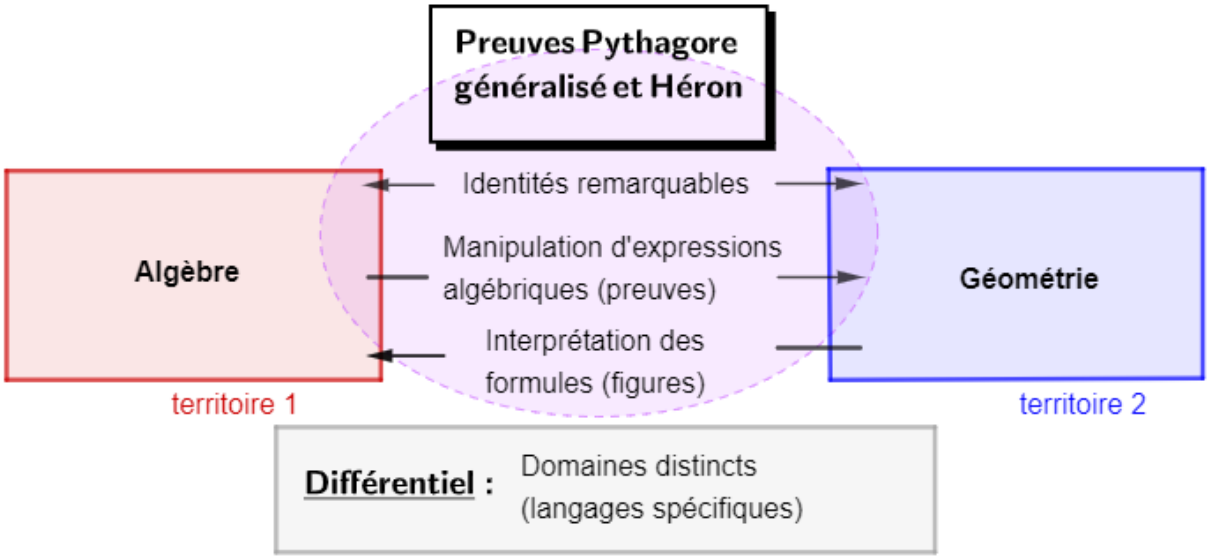


FIGURE III.120 – Schéma montrant en quoi les preuves du théorème de Pythagore généralisé et de la formule de Héron sont l'interface de l'algèbre et de la géométrie

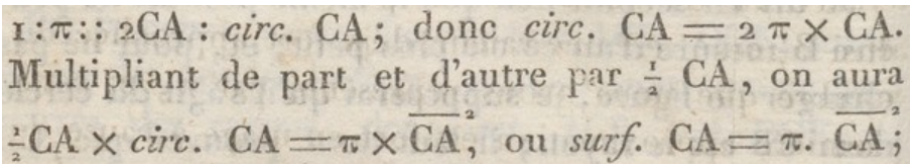
Formules, manipulations algébriques et simplifications pour les aires curvilignes

Concernant les aires curvilignes, l'apport des pratiques algébriques est manifeste au cours de la période étudiée, avec une mise en place progressive des usages de l'algèbre en géométrie, comme l'utilisation des écritures symboliques et les manipulations de formules littérales, tout comme nous avons pu l'observer pour l'établissement de la formule de Héron ou le théorème de Pythagore généralisé. Certaines de ces techniques calculatoires tendent à disparaître au cours du temps tandis que d'autres, au contraire, s'imposent progressivement dans les manuels jusqu'à devenir une norme. En plus de la validité scientifique de leurs textes, les auteurs cherchent une meilleure efficacité pédagogique, qui passe pour une partie d'entre eux par l'assimilation de l'algèbre et de ses techniques, dans un objectif de simplification de leurs propos et des méthodes engagées.

En particulier, au début du siècle, les propositions donnant la formule de l'aire du cercle sont généralement énoncées textuellement, sous la forme : « La surface du

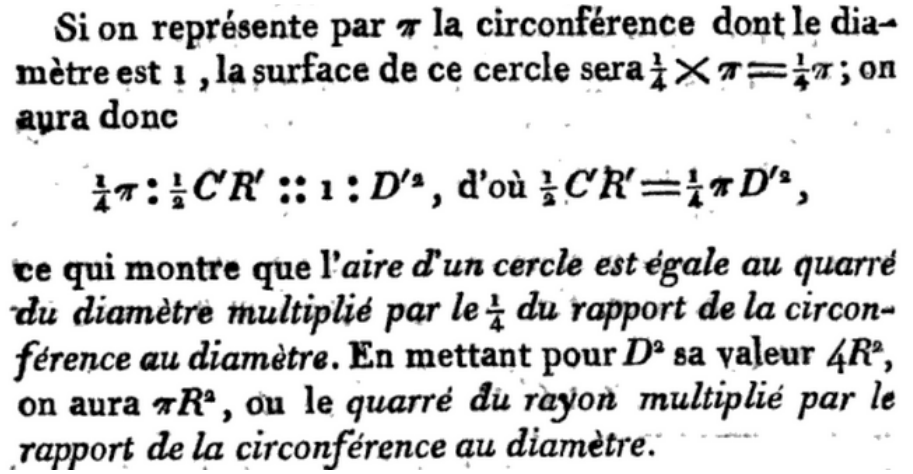
Licence CC BY-NC-ND 3.0

cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié de son rayon, ou à sa demi-circonférence multipliée par son rayon » (Dupin, 1828, p. 128), ou encore : « la surface d'un cercle quelconque est égale au quarré de son rayon, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre » (Mauduit, 1790, p. 122). Déjà chez Legendre et Lacroix, une algébrisation commence à apparaître, notamment à travers le chaînon entre les deux propositions énoncées ci-avant, qui consiste à remplacer la circonférence par son expression en fonction du rayon et de π dans le calcul de l'aire du cercle (voir figures III.121 page III.121).



1 : π :: 2CA : *circ.* CA ; donc *circ.* CA = 2 π × CA. Multipliant de part et d'autre par $\frac{1}{2}$ CA, on aura $\frac{1}{2}$CA × *circ.* CA = π × $\overline{\text{CA}}^2$, ou *surf.* CA = π. $\overline{\text{CA}}^2$;

(a) chez Legendre (1823, p. 122)



Si on représente par π la circonférence dont le diamètre est 1, la surface de ce cercle sera $\frac{1}{4} \times \pi = \frac{1}{4}\pi$; on aura donc

$$\frac{1}{4}\pi : \frac{1}{2}C'R' :: 1 : D'^2, \text{ d'où } \frac{1}{2}C'R' = \frac{1}{4}\pi D'^2,$$

ce qui montre que l'*aire d'un cercle est égale au quarré du diamètre multiplié par le* $\frac{1}{4}$ *du rapport de la circonférence au diamètre*. En mettant pour D^2 sa valeur $4R^2$, on aura πR^2, ou le *quarré du rayon multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre*.

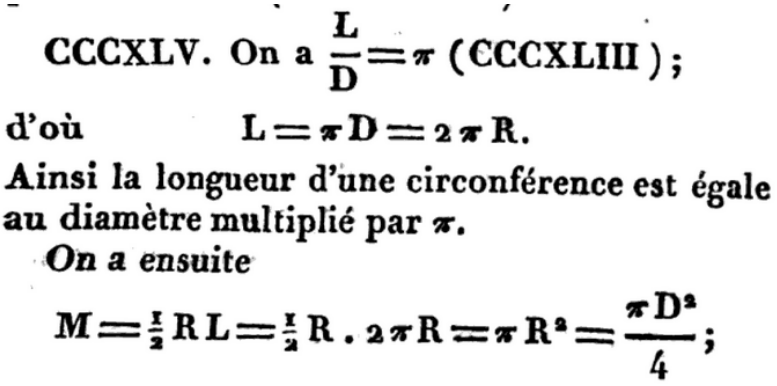
(b) chez Lacroix (1808, p. 126)

FIGURE III.121 – Début d'algébrisation de la proposition donnant l'aire du cercle

Quelques années plus tard, Terquem propose un ouvrage très algébrisé, où la manipulation des formules est totalement assumée [177] et dans lequel les rapports sont tantôt exprimés par des proportions, ou alors, comme dans le cas de l'aire du cercle, par des fractions. Il inaugure ainsi une pratique qui va se généraliser et devenir la norme. Dix ans plus tard, Sonnet donne également sa version de ce calcul algébrique, dans un manuel où, là aussi, les notations fractionnaires coexistent avec les notations des proportions (du type $a : b :: c : d$) (voir figures III.122 p. 553).

177. Dans sa préface, Terquem fait d'ailleurs très clairement l'éloge de la « méthode algébrique », qui est d'après lui plus « favorable aux découvertes » que la méthode synthétique des anciens. Il vante également les mérites du « calcul littéral », instrument de la science algébrique, et affirme être favorable à son enseignement dans les écoles primaires (Terquem, 1829, p. v-vi).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



CCCXLV. On a $\frac{L}{D} = \pi$ (CCCXLIII);

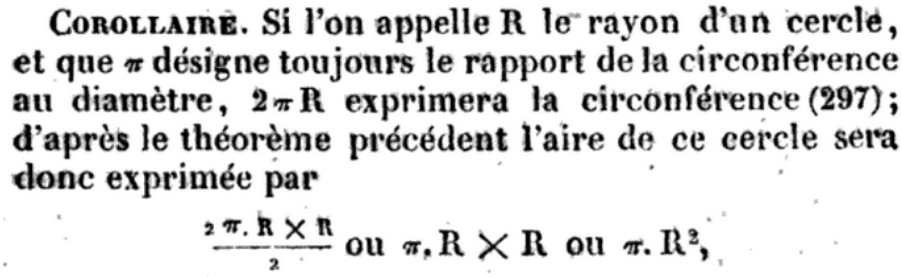
d'où $L = \pi D = 2\pi R$.

Ainsi la longueur d'une circonférence est égale au diamètre multiplié par π.

On a ensuite

$$M = \tfrac{1}{2} R L = \tfrac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4};$$

(a) chez Terquem (1829, p. 219)



Corollaire. Si l'on appelle R le rayon d'un cercle, et que π désigne toujours le rapport de la circonférence au diamètre, $2\pi R$ exprimera la circonférence (297); d'après le théorème précédent l'aire de ce cercle sera donc exprimée par

$$\frac{2\pi . R \times R}{2} \text{ ou } \pi . R \times R \text{ ou } \pi . R^2,$$

(b) chez Sonnet (1839, p. 223)

Figure III.122 – Manipulations algébriques de la formule de l'aire du cercle

Encore un peu après, Vincent mixe également les notations des proportions avec celles des fractions, en passant par l'intermédiaire des produits en croix, alors qu'un peu plus tard, en 1855, Puille montre une version très détaillée de cette même démarche algébrique, dans un souci manifeste d'intelligibilité et de pédagogie (voir III.123 p. 554). Les étapes de simplification sont les mêmes dans les deux cas, mais mises en évidence chez Puille par un vocabulaire spécifique à la pratique du calcul littéral, qui obtient une « expression abrégée », ou encore une « formule » en effectuant les actions de « remplacer » ou encore de « réduire ». Les procédés propres à l'algèbre se voient donc clairement explicités chez ce dernier. Plus tardivement, dans l'ouvrage de Bovier-Lapierre plus spécifiquement destiné à l'enseignement primaire, la formule de l'aire du cercle est induite à partir du cas particulier où le rayon vaut 5, puisqu'alors « le diamètre sera 5×2 et la circonférence $5 \times 2 \times \pi$ ou $2\pi \times 5$ », et ainsi, « on aura pour la surface S du cercle $S = 2\pi \times 5 \times \frac{5}{2}$, ou en simplifiant $S = \pi \times 5^2$ ». L'auteur termine par une généralisation induite du cas particulier : « Si l'on représente le rayon par r, cette règle sera exprimée par la formule suivante : $S = \pi r^2$ » (Bovier-Lapierre, 1879, p. 88). Les méthodes algébriques sont donc ici mises à la portée des élèves les moins aguerris au calcul littéral via le procédé d'induction à partir de valeurs numériques.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

N° 250. — Scolie II. — Soient R, C, et S, le rayon, la circonférence, et l'aire d'un cercle quelconque.

La proportion $\pi : 1 :: C : 2R$ donne $C = 2\pi R$, d'où, en multipliant par $\frac{1}{2}R$, $C \times \frac{1}{2}R = S = \pi R^2$;

ce qui démontre que, pour obtenir *la longueur de la circonférence*, il faut *multiplier par* le nombre constant π *la longueur du rayon* de cette circonférence [ce rayon étant évalué en unités linéaires quelconques]; — quant à l'*aire du* même *cercle*, il faut *multiplier par* π *le carré du rayon*.

(a) chez Vincent (1844, p. 210-201)

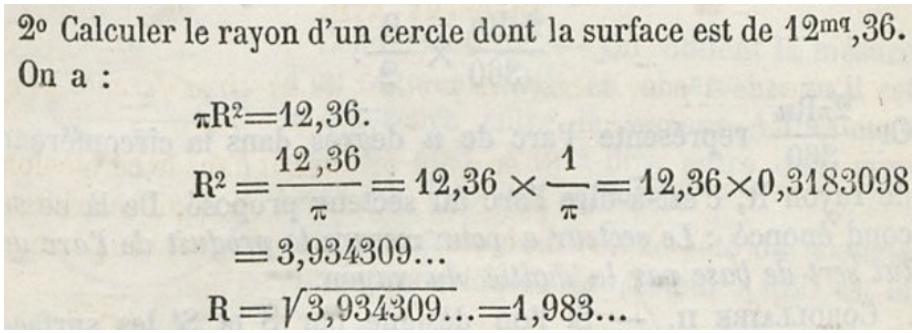
FORMULE. — Appelant S la surface du *cercle*, C la circonférence qui l'enveloppe et R le rayon, on exprimera la règle précédente par l'expression abrégée $S = C \times \frac{R}{2}$; mais comme on peut remplacer C par l'expression $2R\pi$, on obtient la nouvelle formule $S = \frac{2R\pi \times R}{2}$ qui se réduit à $S = \pi R^2$; c'est-à-dire qu'on trouve encore la surface du cercle *en multipliant le carré du rayon par le rapport* π.

(b) chez Puille (1855, p. 129)

FIGURE III.123 – Manipulations algébriques de la formule de l'aire du cercle

L'algèbre sert aussi à résoudre des questions moins immédiates, en se servant d'une expression littérale pour en déduire une autre, en isolant la donnée que l'on cherche à exprimer par des opérations adaptées. C'est ainsi que la recherche du rayon connaissant l'aire du cercle est abordée par plusieurs auteurs. Là où Terquem énonce de but en blanc la solution de ce problème sous les traits d'une simple formule $R = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$, dans laquelle M représente l'aire donnée, sans la justifier (Terquem, 1829, p. 221), Eysseric et Pascal posent le problème sous la forme d'une équation, en l'occurrence $\pi R^2 = 69,4$, qu'il résout en divisant par π puis « en extrayant la racine carrée » (Eysseric et Pascal, 1850, p. 114). Les deux versions de cette solution, par une formule générale ou via une résolution d'équation, perdurent tout au long du siècle, alternativement employées par les auteurs successifs (voir figure III.124 p. 555).

Licence CC BY-NC-ND 3.0


2° Calculer le rayon d'un cercle dont la surface est de 12mq,36.
On a :

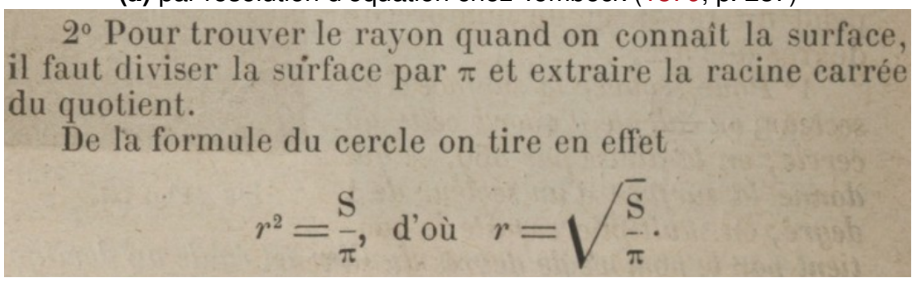
$$\pi R^2 = 12{,}36.$$

$$R^2 = \frac{12{,}36}{\pi} = 12{,}36 \times \frac{1}{\pi} = 12{,}36 \times 0{,}3183098$$

$$= 3{,}934309\ldots$$

$$R = \sqrt{3{,}934309\ldots} = 1{,}983\ldots$$

(a) par résolution d'équation chez Tombeck (1879, p. 237)


2° Pour trouver le rayon quand on connait la surface, il faut diviser la surface par π et extraire la racine carrée du quotient.

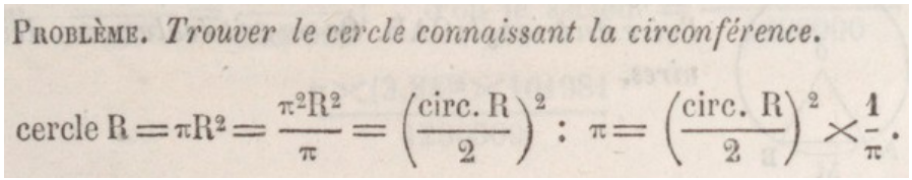
De la formule du cercle on tire en effet

$$r^2 = \frac{S}{\pi}, \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

(b) par une formule générale chez Bovier-Lapierre (1879, p. 88)

FIGURE III.124 – Détermination du rayon d'un cercle connaissant son aire

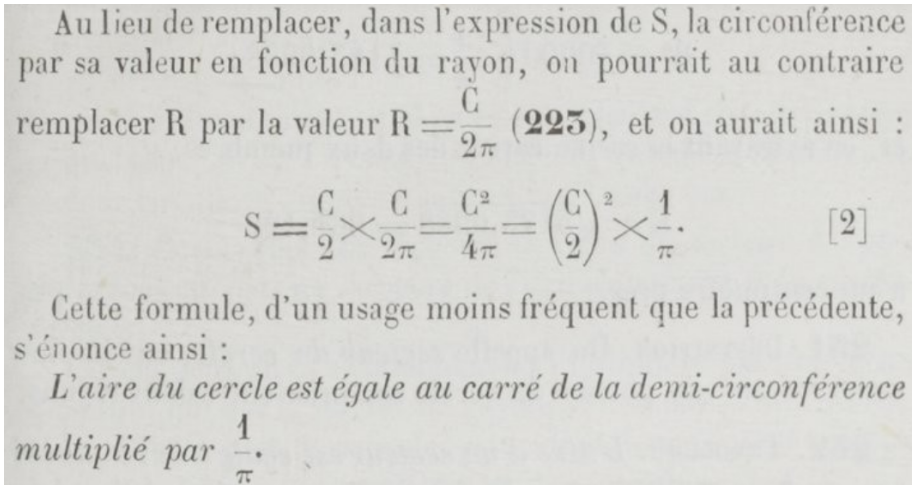
Un autre problème que l'algèbre aide à élucider est celui du calcul de l'aire d'un cercle connaissant sa circonférence. Nous avons analysé comment Sonnet mène son calcul numérique dans un tel cas (voir p. 533). Cependant, l'usage des techniques algébriques simplifie grandement le problème et lui en donne même une solution générale applicable dans tous les cas. Rouché et Comberousse expliquent en effet, que, partant des relations $S = C.\frac{1}{2}R$ et $C = 2\pi R$, « si, au lieu d'éliminer C [...] on élimine R, on trouve la formule $S = \frac{C^2}{4}.\frac{1}{\pi}$ ». Ils précisent alors que cette formule « qui permet de calculer directement la surface connaissant la circonférence, ou la circonférence connaissant la surface, [...] est beaucoup moins usuelle que les précédentes » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 294-295). Et en effet, dans les ouvrages de notre corpus, il s'agit bien là de la première occurrence d'une telle formule. Les versions suivantes sont un peu différentes et émanent en particulier de Bos et Guilmin, qui détaillent plus ou moins les étapes du calcul littéral en jeu (voir figure III.125 p. 556).


PROBLÈME. *Trouver le cercle connaissant la circonférence.*

$$\text{cercle R} = \pi R^2 = \frac{\pi^2 R^2}{\pi} = \left(\frac{\text{circ. R}}{2}\right)^2 : \pi = \left(\frac{\text{circ. R}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{\pi}.$$

(a) chez Guilmin (1882, p. 153)

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Au lieu de remplacer, dans l'expression de S, la circonférence par sa valeur en fonction du rayon, on pourrait au contraire remplacer R par la valeur $R = \frac{C}{2\pi}$ (**223**), et on aurait ainsi :

$$S = \frac{C}{2} \times \frac{C}{2\pi} = \frac{C^2}{4\pi} = \left(\frac{C}{2}\right)^2 \times \frac{1}{\pi}. \qquad [2]$$

Cette formule, d'un usage moins fréquent que la précédente, s'énonce ainsi :

L'aire du cercle est égale au carré de la demi-circonférence multiplié par $\frac{1}{\pi}$.

(b) chez Bos (1875, p. 139)

FIGURE III.125 – Détermination de l'expression de l'aire du cercle en fonction de sa circonférence

À la fin du siècle, la détermination des relations algébriques entre toutes les données entrant en jeu dans la question de l'aire du cercle prend une autre ampleur. Dans son ouvrage de géométrie destiné à l'enseignement secondaire des jeunes filles, Bos reprend l'essentiel du calcul présenté dans la version masculine de son manuel (voir figure III.125 p. 556), mais en détaillant beaucoup plus les étapes successives. Il justifie chaque manipulation littérale par une phrase du type : « on remplace C par cette valeur », « on peut diviser par 2 les deux termes de la fraction du second membre ». Il explique même que l'on peut écrire R^2 à la place de $R \times R$. La comparaison entre les deux ouvrages montre que leur auteur s'adapte à son public, et qu'il explicite davantage les procédés de calcul pour les jeunes filles, sans doute moins habituées et entraînées à l'algèbre. Le jeu des formules se veut même parfois quasiment exhaustif. Dans l'ouvrage de Girod, les variables se trouvent chacune exprimée en fonction de toutes les autres, et la forme sous laquelle se présentent ces calculs ressemble presque à la résolution d'un exercice d'algèbre (voir figures III.126 et III.127 pages 557 et 558). En plus de l'utilité potentielle des formules obtenues, le problème de la mesure du cercle offre donc un terrain d'application aux connaissances et techniques algébriques apprises par ailleurs.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

170. Remarque. — Désignons comme précédemment le rayon du cercle par R, la longueur de sa circonférence par C, et soit S l'aire de ce même cercle; le théorème précédent nous donne

$$S = \frac{C \times R}{2}.$$

Mais nous savons d'autre part (**150**) qu'on a

$$C = 2\pi R.$$

Si dans l'expression de S on remplace C par cette valeur, on aura

$$S = \frac{2\pi R \times R}{2};$$

on peut diviser par 2 les deux termes de la fraction du second membre, ce qui donne

$$S = \pi R \times R;$$

mais $R \times R$ est ce qu'on appelle le carré du nombre R (voy. l'*Arithmétique*) et on le représente par R^2; on écrira donc enfin

$$S = \pi R^2, \qquad [1]$$

égalité qui s'énonce ainsi :

L'aire du cercle est égale au carré de son rayon multiplié par le nombre π.

On peut encore trouver une autre expression de l'aire du cercle. Reprenons l'égalité

$$S = \frac{C \times R}{2},$$

et remplaçons-y R par sa valeur en fonction de la circonférence, $R = \frac{C}{2} \times \frac{1}{\pi}$ (**151**); nous aurons

$$S = \frac{C}{2} \times \frac{C}{2} \times \frac{1}{\pi} = \left(\frac{C}{2}\right)^2 \times \frac{1}{\pi}. \qquad [2]$$

Donc *l'aire du cercle est égale au carré de la demi-circonférence multiplié par* $\frac{1}{\pi}$.

Figure III.126 – Manipulations algébriques autour de l'aire du cercle chez Bos (1884, p. 110-111)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Désignons par R, C et S, le rayon, la circonférence et l'aire d'un cercle ; on a la formule

$$S = C \times \frac{R}{2}. \qquad (1)$$

497. Remarque. — Pour avoir l'aire du cercle en fonction du rayon seul, je remplace dans la formule (1) C par $2\pi R$, et j'ai

$$S = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2. \qquad (2)$$

Donc, *l'aire d'un cercle est égale au carré de son rayon multiplié par* π.

Si l'on remplace dans la formule (2) R par $\frac{D}{2}$, c'est-à-dire par la moitié du diamètre, on a

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \qquad (3)$$

Par conséquent, *l'aire d'un cercle est égale au quart du produit du carré du diamètre par* π.

Si l'on veut obtenir l'aire du cercle en fonction de sa circonférence, on n'a qu'à remplacer dans la formule (1) R par $\frac{C}{2\pi}$, et il vient

$$S = C \times \frac{C}{4\pi} = \frac{C^2}{4\pi}. \qquad (4)$$

D'où il résulte que l'*aire d'un cercle est égale au carré de sa circonférence divisé par* 4π.

Des formules (2), (3), (4), on tire les relations

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}, \quad C = \sqrt{4\pi S}$$

qui permettent de calculer le rayon, le diamètre et la circonférence d'un cercle dont la surface est donnée.

FIGURE III.127 – Manipulations algébriques autour de l'aire du cercle chez Girod (1893, p. 207-208)

Enfin, l'algèbre a aussi pour vertu de simplifier des formules de calcul alambiquées, ce que l'on peut observer relativement au problème de la détermination des aires curvilignes quelconques. En effet, nous avons étudié précédemment les techniques de décomposition des surfaces en figures élémentaires (voir la sous-section III.1.3.3 p. 434), ainsi que les calculs associés, permettant d'évaluer la surface des terrains (voir p. 520), mais l'algèbre ajoute aussi sa pierre à l'édifice en permettant la mise au point des formules générales de calcul, sous une forme la plus simple possible.

Au début du siècle, les propositions portant sur ces techniques de calcul, exprimées textuellement, ne sont de fait pas vraiment limpides. Bergery énonce par exemple que pour évaluer une aire délimitée par une courbe quelconque, « on mesure toutes les perpendiculaires à AB, comme dans le cas précédent ; on fait la somme de tous les nombres obtenus tant d'un côté de AB que de l'autre, et l'on multiplie cette somme par la longueur de AC , une des parties égales de AB. Le produit est le nombre de mesures carrées contenues dans le terrain » (Bergery, 1828, p. 406) (voir figure

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.128 p. 559). Si la règle reste aisément compréhensible, en revanche, l'explication est plus délicate à suivre :

> Cela résulte de ce que la moitié de CC' et celle de CC entrent dans les produits qui donnent les surfaces des triangles ACC', ACC", et de ce que ces mêmes moitiés servent à former les produits qui fournissent les superficies des trapèzes $CC'D'D$, CC"D". De même, les moitiés de DD' et de DD" doivent être employées chacune pour la mesure de deux trapèzes, et par conséquent les longueurs totales de ces perpendiculaires doivent être multipliées par AC, hauteur commune et des trapèzes et des triangles. (Bergery, 1828, p. 406)

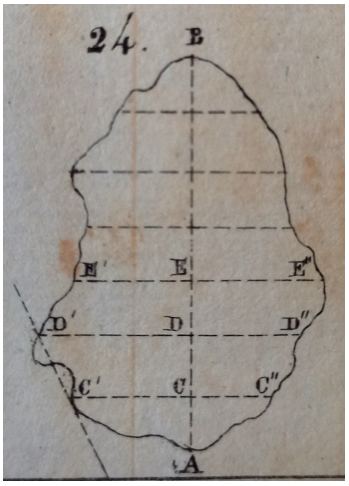


FIGURE III.128 – Figure relative au calcul de l'aire d'un domaine délimité par une courbe quelconque chez Bergery (1828, pl. xiv)

Plus tardivement, des auteurs emploient la méthode algébrique pour simplifier à la fois le résultat final mais aussi l'explication, comme le propose Sonnet (voir figure III.129 p. 560). Le résultat qu'il énonce est le même que celui de Bergery, mais les notations algébriques rendent le propos plus lisible, et la forme simplifiée de l'expression du calcul final est justifiée par des arguments propres au calcul littéral, comme par exemple le fait de remarquer que « e est un facteur commun ». L'emploi de la notation indiciaire est elle aussi caractéristique des procédés de l'algèbre.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Pour fixer les idées, supposons que la directrice A B (fig. 277) ait été divisée en six parties égales. Nommons e l'une de ces parties, et h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 les perpendiculaires élevées sur la directrice par ses points de division et terminées de part et d'autre à la courbe.

On a d'abord à évaluer l'aire d'un triangle mAn; cette aire a pour valeur $\frac{e \times h_1}{2}$.

Vient ensuite un trapèze dont l'aire a pour expression

$$\frac{e \times (h_1 + h_2)}{2},$$

puis successivement trois autres trapèzes ayant respectivement pour mesure

$$\frac{e \times (h_2 + h_3)}{2}, \quad \frac{e \times (h_3 + h_4)}{2}, \quad \frac{e \times (h_4 + h_5)}{2},$$

enfin un triangle eBp dont l'aire a pour valeur $\frac{e \times h_5}{2}$.

Si l'on réunit toutes ces aires, et qu'on nomme A l'aire totale de la figure, on aura, en observant que e est un facteur commun,

$$A = \frac{e \times (h_1 + h_1 + h_2 + h_2 + h_3 + h_3 + h_4 + h_4 + h_5 + h_5)}{2},$$

$$\text{ou } A = e \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5),$$

c'est-à-dire que *pour obtenir l'aire de la figure, il faut multiplier l'une des parties de la directrice par la somme de toutes les perpendiculaires que l'on a élevées.*

Fig. 277.

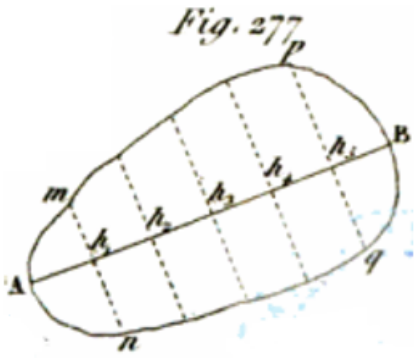


FIGURE III.129 – Formule simplifiée de l'aire d'un domaine délimité par une courbe quelconque chez Sonnet (1839, 230-231, pl. 21)

Dans les années 1860, deux manuels présentent sensiblement les mêmes formules, mais dans un cas qui diffère un peu de celui de Sonnet et Bergery, puisqu'il ne s'agit pas de courbes fermées, mais de portions terminées par des perpendiculaires à la directrice (dans celui de Harant, il ne s'agit que du calcul de l'aire du domaine délimité par la ligne courbe CD). Les calculs varient de ce fait un peu, puisqu'il ne s'agit que de la somme des trapèzes, sans les deux triangles situés aux extrémités que nous avions dans les cas précédents. Les auteurs proposent, via des méthodes communes de factorisation, regroupements de termes et simplifications par 2, deux versions distinctes d'un même résultat, l'un (Briot) effectuant la somme de toutes les perpendiculaires et en retranchant la moyenne des extrêmes, et l'autre (Harant) ajoutant toutes les perpendiculaires, sauf les extrêmes, et ajoutant ensuite la moyenne des extrêmes, ce qui bien entendu revient au même (voir figure III.130 p. 561). Briot et Vacquant poussent encore l'algébrisation un peu plus loin en posant une variable Y supplémentaire, représentant la somme de toutes les perpendiculaires. Cette dernière opération a pour effet de simplifier encore la formule finale et de la rendre plus facile à retenir.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Elle est égale en effet à

$$\tfrac{1}{2}h(y_1+y_2)+\tfrac{2}{2}h(y_2+y_3)+\tfrac{1}{2}h(y_3+y_4)\ldots+\tfrac{1}{2}h(y_{n-1}+y_n),$$

ou, ce qui revient au même, à

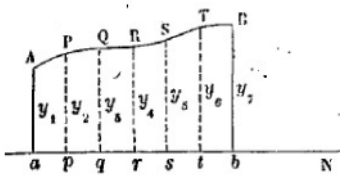
$$\tfrac{1}{2}h(y_1+y_2+y_2+y_3+y_3+y_4+y_4\ldots+y_{n-1}+y_{n-1}+y_n),$$

ou $\tfrac{1}{2}h[2(y_1+y_2+y_3\ldots+y_n)-(y_1+y_n)]$.

Si l'on désigne par Y la somme de toutes les perpendiculaires, l'expression précédente devient

$$h\times\left[Y-\frac{y_1+y_n}{2}\right]$$

Fig. 63.



(a) chez Briot et Vacquant (1862, p. 68-69)

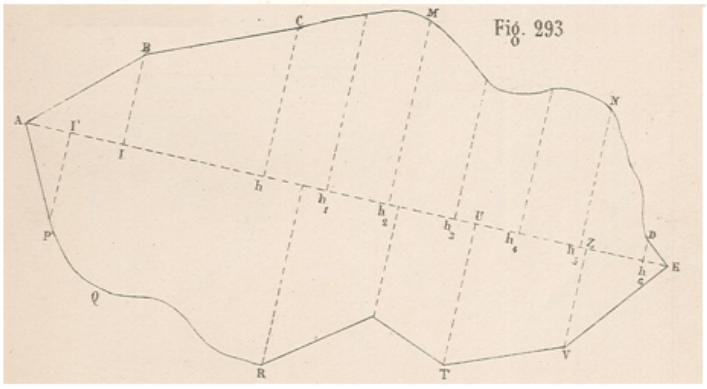
Si la distance du pied des ordonnées est a, la surface de la partie courbe sera donnée par la formule :

$$S=\frac{a}{2}(h+h_1+h_1+h_2+h_2+h_3+h_3+h_4+h_4+h_5+h_5+h_6),$$

ou

$$\frac{a}{2}(h+h_6+2h_1+2h_2+2h_3+2h_4+2h_5)$$

$$=a\left(\frac{h+h_6}{2}+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5\right).$$



(b) chez Harant (1863, 129, pl.59)

FIGURE III.130 – Formules simplifiées de l'aire d'un domaine délimité par une ligne courbe

Enfin, dans son ouvrage destiné principalement aux écoles primaires, ainsi qu'à l'en-

Licence CC BY-NC-ND 3.0

seignement spécial, Tarnier procède par induction, comme le fait Bovier-Lapierre pour établir la formule générale de l'aire du cercle (voir p. 553 et la figure III.131 p. 562). Il mène les calculs à partir de valeurs numériques données, et effectue les opérations de regroupement par factorisation et de simplification non pas algébriquement, mais en employant les termes de l'arithmétique, auxquels ses lecteurs sont plus familiers. Il n'évoque pas de « facteur commun », mais un « multiplicateur commun », auquel on peut multiplier « la somme des multiplicandes ». La règle générale n'est pas donnée sous la forme d'une formule algébrique, mais textuellement : « la surface à mesurer est alors égale à la somme des parallèles multipliées par l'intervalle compris entre deux d'entre elles » (Tarnier, 1872, p. 315). Cette démarche évite à l'auteur de recourir formellement à l'algèbre, et le cas particulier prend dans son texte la valeur d'un exemple générique.

Soit (*fig.* 50, Appendice) à évaluer la surface plane ANG.

Fig. 50.



Partagez AN en parties égales, en six par exemple; par chaque point de division élevez une perpendiculaire sur AN; mesurez ces perpendiculaires et l'intervalle qui les sépare, puis appliquez la règle énoncée ci-dessus.

Données : $AH = 4^m$; $HB = 4^m,6$; $IC = 5^m$; $KD = 4^m,4$; $LE = 5^m,5$; $MF = 6^m,4$; $NG = 6^m,6$.

Surface demandée :

$$\frac{1}{2} \times 4,6 \times 4 + \frac{1}{2}(4,6+5) \times 4 + \frac{1}{2}(5+4,4) \times 4 + \frac{1}{2}(4,4+5,5) \times 4$$
$$+ \frac{1}{2}(5,5+6,4) \times 4 + \frac{1}{2}(6,4+6,6) \times 4 + \frac{1}{2} \times 6,6 \times 4.$$

Le multiplicateur 4 étant le même dans toutes ces multiplications, on peut faire la somme des multiplicandes, et la multiplier par le multiplicateur commun. On obtiendra ainsi :

$(4,6+5+4,4+5,5+6,4+3,3) \times 4$, conformément à la règle que nous avons énoncée.

Calcul effectué, on trouve 116,8, en sorte que la surface cherchée est de $116^{mq},8$, ou de 1 are 16 centiares et 8 dixièmes.

FIGURE III.131 – Formule induite de l'aire d'un domaine délimité par une ligne courbe chez Tarnier (1872, p. 314-315)

Dans le domaine des aires curvilignes, l'algèbre fonctionne comme un facilitateur, mais son usage nécessite une habitude préalable chez les élèves auxquels les manuels s'adressent. Suivant leur lectorat, une partie des auteurs fait le choix de prendre les techniques de calcul littéral comme un pré-requis, alors que d'autres préfèrent

Licence CC BY-NC-ND 3.0

contourner leur emploi par des méthodes penchant du côté de l'arithmétique. La réduction des procédés de calcul en une formule littérale, plus concise et certainement plus commode à retenir, peut constituer un objectif de l'utilisation de l'algèbre en géométrie des aires. Mais d'un autre côté, il apparaît également que les manipulations requises par la résolution de certaines questions posées par les aires forment un terrain propice à montrer l'efficience de ces méthodes en illustrant directement leur portée. Ces techniques calculatoires littérales, mobilisées sur le terrain de la géométrie, servent alors d'exercice d'entraînement pour mieux les assimiler. La géométrie des aires, et en particulier des aires curvilignes, peut alors être vue comme une ambassadrice de l'emploi de l'algèbre, et peut-être même, pour des élèves non encore initiés, comme une introduction à ses méthodes (voir le schéma III.132 p. 563).

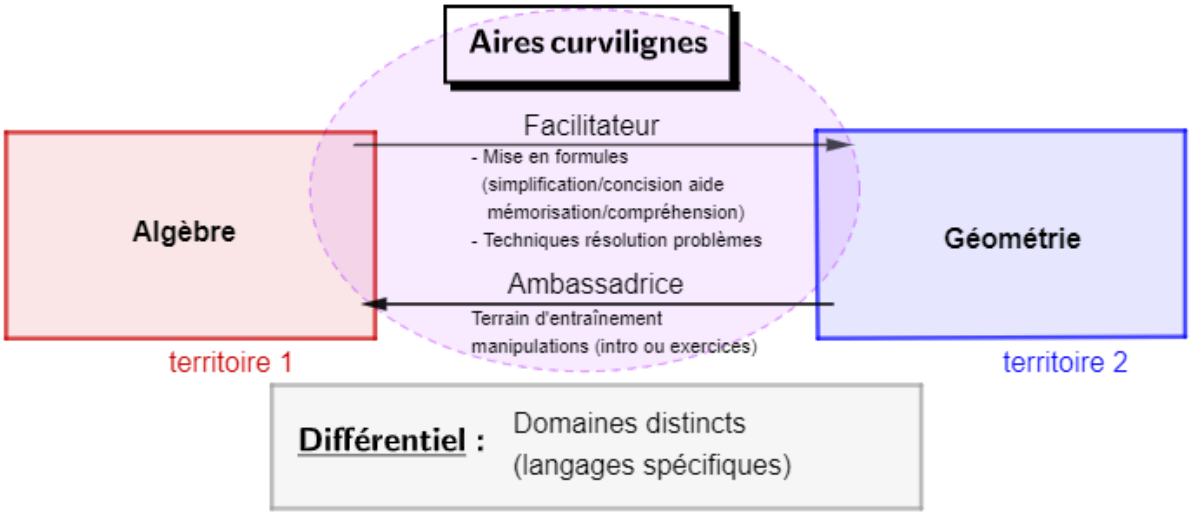


FIGURE III.132 – Schéma montrant en quoi les aires curvilignes sont à l'interface de l'algèbre et de la géométrie

Avec ou sans logarithmes

Le cas des logarithmes et de leur utilisation dans les manuels est particulier, puisque ceux-ci sont mobilisés par les auteurs en début de siècle, puis progressivement délaissés. Le sort de cet objet mathématique dans les ouvrages suit globalement celui que les programmes leur réservent. Les logarithmes sont tout d'abord introduits au programme du concours d'admission à l'École Polytechnique au début du XIX^{e} siècle — en particulier dans le cadre de la « résolution des triangles » (Belhoste, 1995, p. 76-77, 122) — puis sont par conséquent progressivement intégrés dans les programmes du secondaire, au sein du cours d'algèbre ou de géométrie, mais souvent postérieurement à l'étude des aires [178]. Dans les années 1850, les instructions officielles recommandent

178. En seconde dans les programmes des collèges royaux de 1838 (Belhoste, 1995, p. 148-152) et en 2ème année de l'enseignement spécial en 1849 (Belhoste, 1995, p. 233).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

leur usage en interaction avec le cours de géométrie. En plus de leur utilisation pour extraire plus facilement les racines cubiques (notamment dans le cadre des calculs de capacités et de volumes), cette outil d'« abréviation des calculs » doit simplifier les applications numériques du cours de géométrie, mais *a contrario*, un usage fréquent des logarithmes en géométrie doit faciliter l'acquisition de cette notion. Pour cela, le professeur doit « en prescrire fréquemment l'emploi dans l'exécution des calculs réclamés pour la résolution complète des questions » (Belhoste, 1995, p. 322). En revanche, dès 1865, leur étude est reléguée en fin de lycée, avant qu'ils ne reviennent dans les programmes de seconde lors de la réforme de 1902 (Belhoste, 1995, p. 402, 598). Dans l'ordre primaire, le mouvement est sensiblement le même : préconisés au début du siècle pour les programmes des écoles normales primaires et des écoles primaires supérieures, notamment pour réaliser les « opérations de l'arpentage » (D'Enfert, 2003c, p. 82), ils en disparaissent pendant plusieurs décennies, amorçant leur retour dans les années 1880, mais dans un objectif différent, celui de se voir appliquer aux « intérêts composés et aux annuités ». (D'Enfert, 2003c, p. 173). L'usage d'une table de logarithmes est même autorisée pour la composition de mathématiques du brevet de capacités à partir de 1887 (D'Enfert, 2003c, p. 239).

Dans notre corpus, les logarithmes apparaissent sous la forme d'une simple mention, de valeurs numériques, ou par leur utilisation effective dans les calculs, dans 15 des 40 ouvrages. Lamotte remarque que les tables logarithmiques peuvent être employées dans la résolution des triangles (comme nous l'avons vu dans les programmes), mais que cet usage est « trop difficile pour les personnes qui emploieront ce traité élémentaire » (Lamotte, 1839, p. 97). De même, les Frères des écoles chrétiennes les évoquent concernant les opérations de nivellement, mais en précisant qu'il ne leur semble pas « à propos d'en parler dans cet abrégé uniquement destiné au bas âge » (L.C. et F.P.B., 1840, p. 127). Sonnet explique lui aussi le principe de l'usage de telles tables pour résoudre les triangles, mais en indiquant que « la science qui enseigne cette méthode de calcul se nomme la *Trigonométrie* » (Sonnet, 1839, p. 132). Ces trois auteurs citent donc les logarithmes comme un objet mathématique d'importance pour certains types de calcul, mais ne les traitent pas dans le cadre de leur géométrie élémentaire, destinée à un public inadapté à son usage. Ils rejoignent en cela l'avis des inspecteurs Dinet et Bourdon, qui, dans leur rapport sur les cours préparatoires de mathématiques dispensés en classe de seconde et de rhétorique en 1829, estiment que « la théorie des progressions et des logarithmes [...] [leur] parait étrangère au cours de mathématiques préparatoires » (Belhoste, 1995, p. 125).

Au début du siècle, et conformément au programme d'admission à l'École Polytechnique, trois auteurs, Mauduit, Legendre et Bézout, utilisent les logarithmes dans leurs ouvrages,

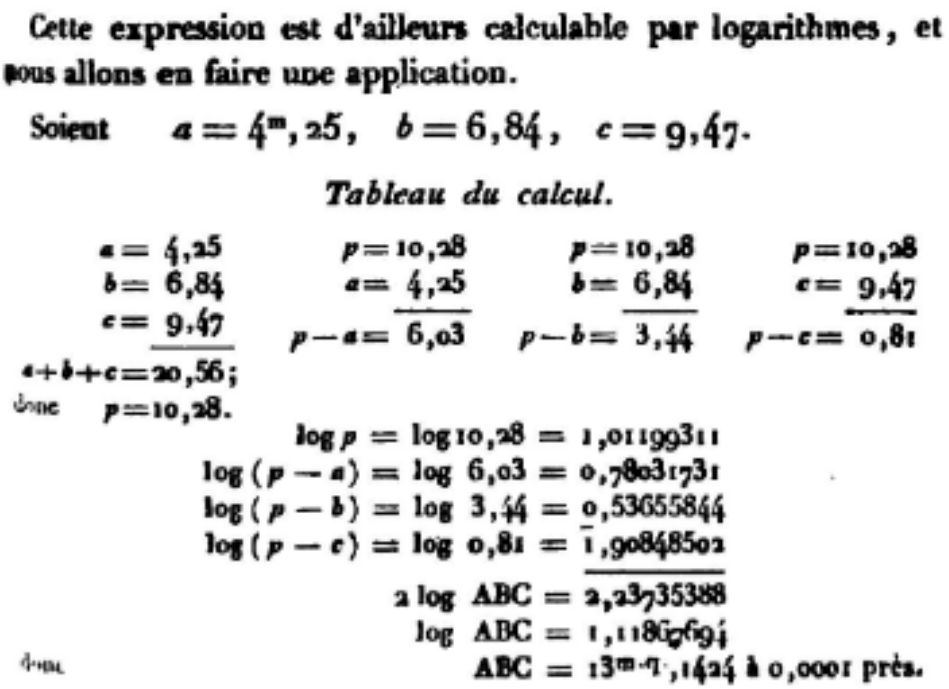
Licence CC BY-NC-ND 3.0

dans le cadre de la résolution des triangles, y compris sphériques (Mauduit, 1790, p. 408-426, 496-501 ; Legendre, 1823, p. 365-382, 427-428 ; Bézout, 1848, p. 126-135, 155-169). Guilmin, davantage dans le sillage des instructions de 1854 pour le secondaire, s'en sert pour résoudre des problèmes de volumes et de capacités (Guilmin, 1882, compl. 38, compl. 48-54). Plusieurs auteurs [179] mentionnent la valeur approchée de $\log(\pi)$ parmi d'autres valeurs remarquables (comme par exemple $\frac{1}{\pi}$), mais sans en faire usage dans leurs textes.

Nous avons vu précédemment comment Vincent fait usage des manipulations algébriques pour démontrer la formule de Héron (voir p. 549), mais il indique une autre raison pour laquelle il souhaite transformer l'expression de l'aire d'un triangle, en plus de la forme simple et aisée à retenir sous laquelle il la présente. Il recherche en effet à opérer « une transformation qui la [la formule de Héron] rende particulièrement propre au calcul logarithmique » (Vincent, 1844, p. 262). Les calculs suivants, menant à une forme factorisée de l'expression, sont ainsi justifiés par l'utilisation pratique des logarithmes dans l'application de la formule. En effet, les propriétés algébriques des logarithmes pour les produits et les racines, données par les formules suivantes, $log(a \times b) = log(a) + log(b)$ et $log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}log(a)$ permettent de substituer les opérations de produit et de racine carrée à des sommes et des moitiés de logarithmes. Vincent se démarque donc de ses contemporains (Sonnet et Cirodde, voir p. 547) par l'intervention des logarithmes dans son application numérique, qui lui permettent de trouver le résultat par addition et moitié au lieu de multiplier et prendre la racine (voir figure III.133 p. 566). Ces calculs, effectués à l'aide de tables de logarithmes, sont d'usage courant à l'époque.

179. Puille (1855, p. 172), Cirodde (1858, p. 170), Amiot (1859, p. 130), Rouché (1866, p. 191) et André (1879, p. 0).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Cette expression est d'ailleurs calculable par logarithmes, et nous allons en faire une application.

Soient $a = 4^m,25$, $b = 6,84$, $c = 9,47$.

Tableau du calcul.

$a = 4,25$	$p = 10,28$	$p = 10,28$	$p = 10,28$
$b = 6,84$	$a = 4,25$	$b = 6,84$	$c = 9,47$
$c = 9,47$	$p - a = 6,03$	$p - b = 3,44$	$p - c = 0,81$

$a + b + c = 20,56$;

donc $p = 10,28$.

$$\log p = \log 10,28 = 1,01199311$$
$$\log (p-a) = \log 6,03 = 0,78031731$$
$$\log (p-b) = \log 3,44 = \bar{1},53655844$$
$$\log (p-c) = \log 0,81 = \bar{1},90848502$$
$$2 \log ABC = 2,23735388$$
$$\log ABC = 1,11867694$$

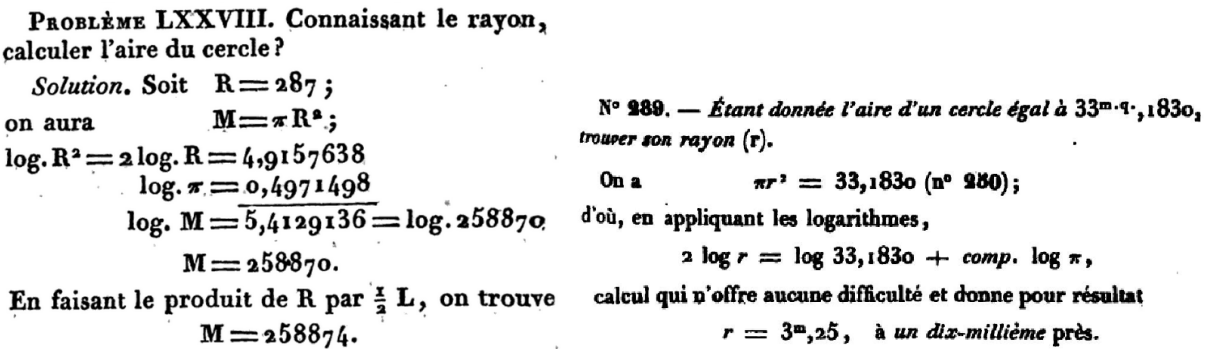
donc $ABC = 13^{mq},1424$ à 0,0001 près.

FIGURE III.133 – Application numérique avec logarithmes de la formule de Héron chez Vincent (1844, p. 263)

Trois auteurs (ou groupes d'auteurs) de notre corpus — Terquem, Vincent et Briot et Vacquant — utilisent les mêmes logarithmes dans le cadre de la mesure du cercle, en plus d'en faire usage pour mener des calculs de trigonométrie ou de résolution des triangles. Les deux premiers sont Terquem et Vincent, qui mobilisent de nouveau cet outil pour calculer l'aire d'un cercle de rayon donné, ou le rayon d'un cercle d'aire donnée (voir figure III.134) [180]. Le principe général des deux calculs est le même et repose sur le fait que $\log(\pi R^2) = 2log(R) + log(\pi)$, ce qui présente l'avantage de remplacer, via l'utilisation des valeurs d'une table logarithmique, les opérations de produit et de mise au carré par des doubles et des additions. Le calcul de Terquem découle directement de cette formule. Il le compare au résultat obtenu par la méthode directe, et constate la faiblesse de l'erreur commise (due aux arrondis des valeurs de la table). Celui de Vincent est indirect et procède par opérations réciproques. Le double de $\log(R)$ est obtenu par différence (d'où l'usage de $comp.\log\pi$, équivalent de $-\log\pi$ à droite), puis en prenant la valeur correspondant à la moitié du résultat obtenu par lecture inverse de la table. Ces applications numériques, ainsi que celles relatives à la résolution de triangles, sont dans l'esprit de ce qui sera préconisé quelques années plus tard dans les programmes et instructions de l'année 1854 (voir p. 564).

180. Nous constatons une nouvelle fois, à travers l'étude de leurs contenus, la proximité des profils des deux ouvrages de Vincent et Terquem, appartenant aux trois mêmes groupes (respectivement 3, 5, et 3) dans les classifications réalisées dans la seconde partie. Le manuel de Briot est quant à lui aussi un « encyclopédique » (groupe 3 de la première classification) : voir tableau A.2 p. 667.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



PROBLÈME LXXVIII. Connaissant le rayon, calculer l'aire du cercle ?

Solution. Soit $R = 287$;

on aura $M = \pi R^2$;

$\log. R^2 = 2 \log. R = 4,9157638$

$\log. \pi = 0,4971498$

$\log. M = 5,4129136 = \log. 258870$

$M = 258870.$

En faisant le produit de R par $\frac{1}{2}$ L, on trouve

$M = 258874.$

(a) chez Terquem (1829, p. 220-221)

N° 289. — *Étant donnée l'aire d'un cercle égal à* $33^{m.q.},1830$, *trouver son rayon* (r).

On a $\pi r^2 = 33,1830$ (n° 280) ;

d'où, en appliquant les logarithmes,

$2 \log r = \log 33,1830 + comp. \log \pi,$

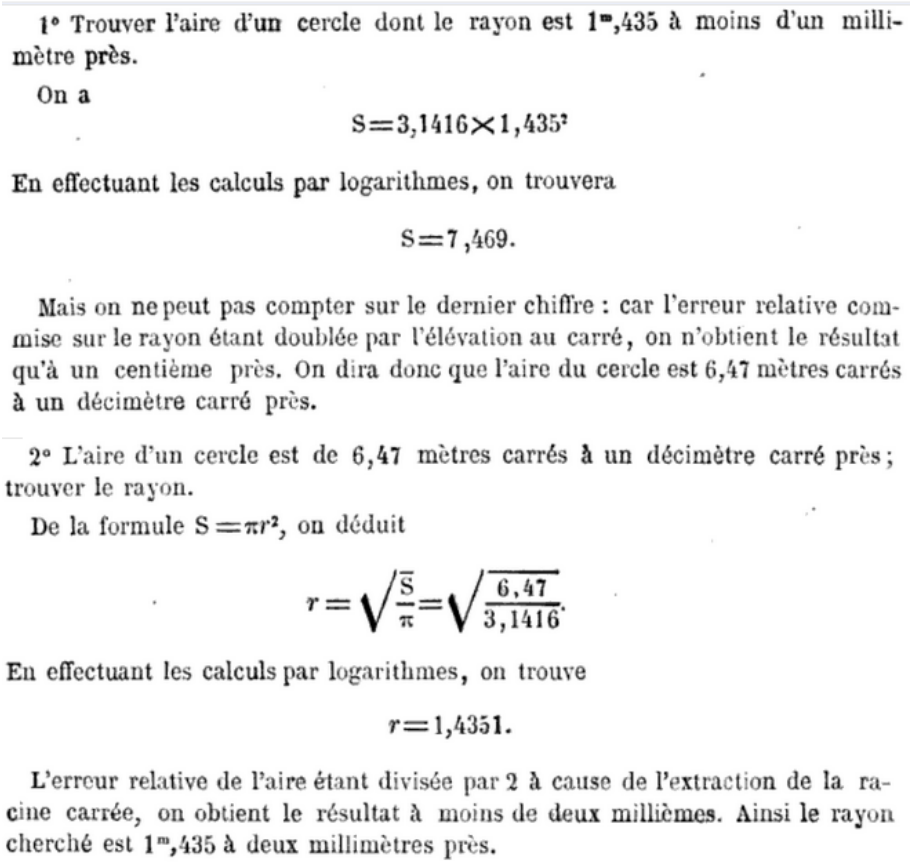
calcul qui n'offre aucune difficulté et donne pour résultat

$r = 3^m,25$, à *un dix-millième* près.

(b) chez Vincent (1844, p. 267-268)

FIGURE III.134 – Calculs relatifs à l'aire du cercle par les logarithmes

Dans un troisième ouvrage, les auteurs Briot et Vacquant emploient eux aussi les logarithmes dans le cadre de la mesure du cercle, en aval des instructions de 1854. Il le font néanmoins sans en exposer explicitement les étapes opératoires (voir figure III.135 p. 567).



1° Trouver l'aire d'un cercle dont le rayon est $1^m,435$ à moins d'un millimètre près.

On a

$$S = 3,1416 \times 1,435^2$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouvera

$$S = 7,469.$$

Mais on ne peut pas compter sur le dernier chiffre : car l'erreur relative commise sur le rayon étant doublée par l'élévation au carré, on n'obtient le résultat qu'à un centième près. On dira donc que l'aire du cercle est 6,47 mètres carrés à un décimètre carré près.

2° L'aire d'un cercle est de 6,47 mètres carrés à un décimètre carré près ; trouver le rayon.

De la formule $S = \pi r^2$, on déduit

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{6,47}{3,1416}}.$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouve

$$r = 1,4351.$$

L'erreur relative de l'aire étant divisée par 2 à cause de l'extraction de la racine carrée, on obtient le résultat à moins de deux millièmes. Ainsi le rayon cherché est $1^m,435$ à deux millimètres près.

FIGURE III.135 – Calculs relatifs à l'aire du cercle par les logarithmes chez Briot et Vacquant (1863, p. 162)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

En revanche, les résultats qu'ils présentent sont demandés avec une précision fixée (« à un millimètre près » pour le premier), qu'ils s'emploient à respecter en justifiant les erreurs relatives commises pour évaluer la validité des chiffres du résultat. L'utilisation des logarithmes induit des règles nouvelles sur le calcul de l'erreur, « doublée par l'élévation au carré » et « divisée par deux à cause de l'extraction de la racine carrée » (Briot, 1863, p. 162).

Ainsi, comme le prévoient les programmes des années 1850, les logarithmes servent à la fois d'outil de simplification pour la réalisation pratique des calculs d'aires (notamment du cercle ou des triangles quelconques *via* la formule de Héron), tandis que ces dernières servent en retour de cas concrets d'application des règles opératoires vues dans le cours d'algèbre ou d'arithmétique. Réduire la complexité d'une opération issue d'un problème de géométrie élémentaire peut alors constituer une motivation pour l'apprentissage d'une nouvelle notion, qui servira ensuite d'outil logistique dans les résolutions de problèmes. De plus, l'emploi de ce nouvel objet remet en perspective la théorie des erreurs relatives, dont les conclusions s'adaptent à cette nouvelle démarche calculatoire. Là encore, les calculs d'aires, mobilisent des interactions factuelles conséquentes entre les apprentissages réalisés dans les divers domaines des mathématiques que sont l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie. Ils sont à l'interface de ces trois systèmes théoriques, les règles de l'algèbre servant de facilitateur aux calculs arithmétiques à réaliser, eux-même simplifiant les applications numériques des problèmes liés aux aires. Dans l'autre sens, la géométrie des aires sert d'ambassadrice à l'acquisition des connaissances sur les logarithmes, tant d'ordre algébrique (manipulation des règles de calcul) que d'ordre arithmétique (usage des tables et calculs effectifs), d'une grande utilité pour la résolution de certaines questions qui lui sont relatives (voir le schéma III.136 p. 569).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

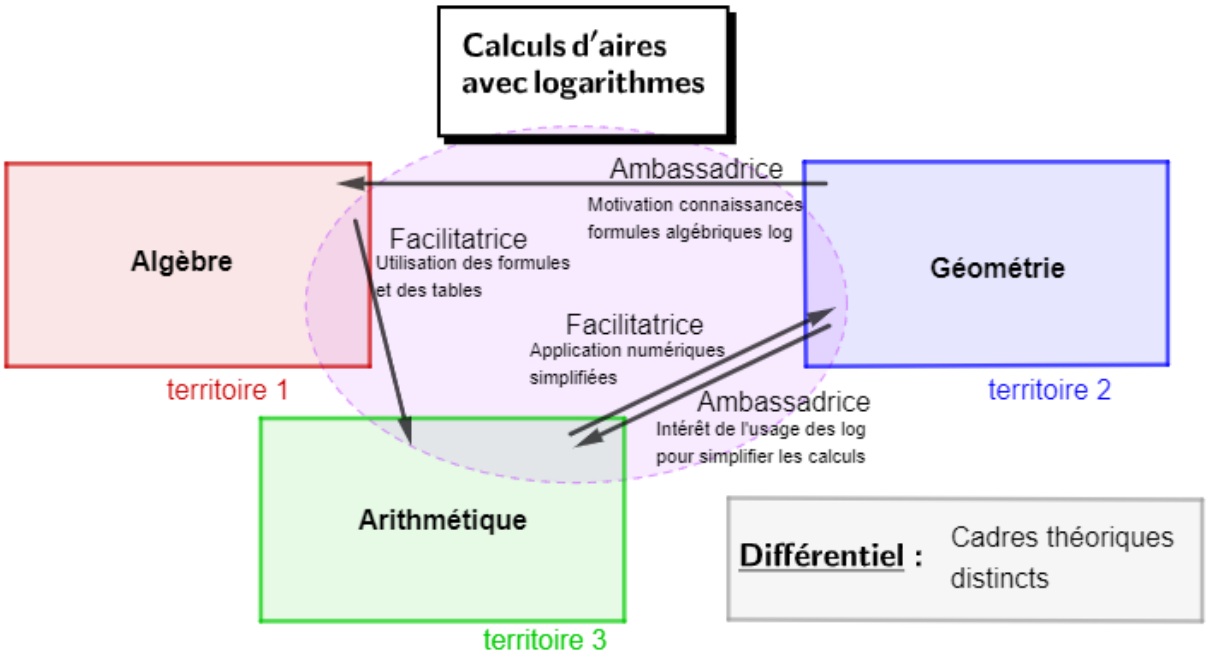


FIGURE III.136 – Schéma montrant en quoi les calculs d'aires avec logarithmes sont à l'interface de l'algèbre, de l'arithmétique et de la géométrie

L'image de la géométrie des aires ambassadrice de l'algèbre, et de ce dernier facilitateur de la géométrie, synthétise bien l'analyse que nous avons menée dans cette section. En effet, l'enseignement de la géométrie des aires profite des acquisitions des élèves en algèbre et motive leurs apprentissages, en constituant un terrain d'application de ces savoirs. Quant aux règles de l'algèbre, elles viennent à la fois faciliter la compréhension et la mémorisation des lois géométriques en permettant de les exprimer par des formules concises, mais aussi simplifier les applications numériques nécessaires par la méthode des logarithmes. Ces flux de connaissances entre les deux domaines intègrent également la maîtrise de l'arithmétique comme chaînon intermédiaire. Ces interactions s'ajoutent au constat initial présentant les figures géométriques comme l'expression visuelle de certaines relations algébriques, et *a contrario* des manipulations algébriques comme arguments dans des preuves géométriques. Les interactions entre algèbre et géométrie au sein de la géométrie des aires s'avèrent donc fécondes pour les apprentissages des élèves, et ont d'ailleurs perduré au cours du temps, en prenant des formes néanmoins un peu différentes : des démonstrations des théorèmes de Pythagore généralisés et de la formule de Héron dans la première moitié du siècle, à l'usage des logarithmes qui s'étend jusque dans les années 1860. C'est ensuite dans le contexte des aires curvilignes que les expressions et techniques algébriques confirment leur rôle jusqu'à la fin de la période considérée.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.2.4 La nature des nombres en question

Comme nous l'avons précédemment évoqué, la notion de « grandeur » appartient au cadre conceptuel des auteurs de géométrie au tournant du XIX^e siècle. Elle est notamment étudiée dans les ouvrages d'arithmétique, conjointement aux théories sur les nombres et les proportions. Ces théories permettent en particulier de donner une définition aux rapports de grandeurs, dont les rédacteurs de manuel de géométrie peuvent se saisir (voir p. 447). Cette période est caractérisée, selon Lamandé, par une « identification empirique des nombres et des grandeurs » (Lamandé, 1993, p. 261), puisque la correspondance bijective entre les deux ne sera établie formellement que plus tard (voir p. 447). Dans ce contexte, la question des grandeurs incommensurables, c'est-à-dire qui ne possèdent pas de commune mesure, connue depuis l'Antiquité, est diversement abordée par les auteurs d'ouvrages de géométrie : Bézout ne l'évoque presque pas dans ses *Éléments de géométrie* (Bézout, 1848)[181], Legendre assimile quant à lui nombre et grandeur en s'appuyant sur la notion d'unité et distingue les nombres rationnels et irrationnels dans ses démonstrations (Lamandé, 1993, p. 264-265), tandis que Lacroix justifie l'identification entre nombre et grandeurs par anthyphérèse au début de sa géométrie, et en déduit la définition de l'égalité de deux grandeurs quelles qu'elles soient (Lamandé, 1993, p. 265). Les trois auteurs (Peyrard, Legendre et Lacroix) distinguent tous le commensurable de l'incommensurable, notamment dans le cadre de la preuve que dans un cercle, les angles au centre sont entre eux comme les arcs qu'ils interceptent (Lamandé, 1993, p. 266).

Cet état des lieux du début du siècle est complété par l'étude de Bronner, qui s'intéresse à l'histoire de la construction des nombres réels, en lien avec la notion de grandeur, notamment dans la période qu'il appelle « classique » allant de 1854 à 1947 (Bronner, 1997). Il montre que l'héritage grec conduit les auteurs d'ouvrages d'arithmétique comme de géométrie de cette époque à considérer des grandeurs incommensurables, cette notion évoluant progressivement vers celle de « nombres incommensurables » à travers la définition et l'usage de l'objet numérique « racine carrée ». Cette catégorie de nombres est alors définie de manière négative comme des nombres n'étant pas rationnels (Bronner, 1997, p. 65-69). Chevalarias montre également comment intervient la notion d'incommensurabilité des grandeurs dans la construction d'une théorie des proportions, en lien avec la question de la similitude des figures en géométrie, chez plusieurs auteurs de notre période d'étude, comme Legendre, Rouché et Comberousse, ou encore Méray (Chevalarias, 2012, p. 27-28, 72, 107-108). Quant à la notion de

181. Il s'agit de la version réimprimée par Saigey, à laquelle ce dernier n'a rien modifié sauf « l'introduction du système métrique et la substitution des nouvelles mesures aux anciennes » (Bézout, 1848, couv.). La version de 1812 étudiée par Lamandé, « revue et augmentée » par Peyrard, contient quant à elles des développements sur les rapports de grandeurs, rajoutés par ce dernier (voir Lamandé 1993, p. 261-264).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

nombre transcendant, elle prend forme dans le monde des mathématiques savantes au cours du siècle — de la démonstration de leur existence par Liouville [182] en 1844, aux preuves de la transcendance de e et de π par respectivement Hermite [183] en 1873 et von Lindemann (voir note 86 p. 300) en 1882 (Serfati, 1992). Cette notion demeure néanmoins quasiment absente des ouvrages d'enseignement de la géométrie de l'époque, mis à part (et assez rarement) dans le cadre du problème de la quadrature du cercle, comme propose de le mettre en évidence l'étude à venir.

La nature des nombres entre donc en grande partie dans les considérations des auteurs des manuels de géométrie du XIX^e^ siècle, et en particulier en relation avec le traitement de la géométrie des aires. Cette question se pose notamment au cœur de chacun des trois thèmes d'étude envisagés, à travers la nature de $\sqrt{2}$ en conséquence du théorème de Pythagore, à travers la question du cas où ses côtés sont incommensurables pour la détermination de l'aire d'un rectangle, et au cours des questionnements sur la quadrature du cercle, qui interrogent également la nature du nombre π. Dans ces trois cas, nous proposons de montrer en quoi la géométrie des aires se situe à l'interface des problèmes géométriques et de questions plus théoriques concernant la nature des nombres.

III.2.4.1 La nature de $\sqrt{2}$ en conséquence du théorème de Pythagore

Parmi les 34 auteurs du corpus qui abordent le théorème de Pythagore exprimé en aires, 9 présentent également son corollaire dans le cas d'un triangle isocèle rectangle. Dans 5 de ces 9 cas, un lien direct est fait avec la nature du rapport obtenu, dans lequel intervient nécessairement le nombre $\sqrt{2}$.

Chez Legendre, cette conséquence du théorème est représentée par la figure du *Ménon* de Platon (voir p. 396), accompagnée de l'affirmation :

> Puisque $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, on a, en extrayant la racine quarrée, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; donc la diagonale d'un quarré est incommensurable avec son côté. C'est ce qu'on développera davantage dans une autre occasion. (Legendre, 1823, p. 72)

182. Joseph Liouville (1809 – 1882). Mathématicien français dont les travaux ont touché à des très nombreux domaines mathématiques, il est polytechnicien et a enseigné à l'École Centrale ainsi qu'à l'École Polytechnique. Il fonde, en 1836, le *Journal de mathématiques pures et appliquées* appelé également *Journal de Liouville*, dans lequel il publie de nombreux articles aux côtés de ses confrères mathématiciens.

183. Charles Hermite (1822 – 1901). Mathématicien français dont les recherches portent principalement sur la théorie des nombres et les équations algébriques, il a enseigné à l'École Normale Supérieure, à l'École Polytechnique ainsi qu'à la Sorbonne. Voir (Goldstein, 2011).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Legendre convoque donc ici la notion de grandeurs incommensurables, d'usage courant à l'époque comme nous l'avons précisé auparavant. Le développement dont il est question dans sa dernière phrase se trouve quelques pages plus loin, et consiste à « trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté d'un quarré » (Legendre, 1823, p. 104). Legendre traite la résolution de cette question par le procédé de l'anthyphérèse, lui aussi connu depuis l'Antiquité [184]. Il conclut en affirmant comme il se doit que :

> De là on voit que l'opération ne sera jamais terminée, et qu'ainsi il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré : vérité qui était déjà connue par l'arithmétique (puisque ces deux lignes sont entre elles $:: \sqrt{2} : 1$), mais qui acquiert un plus grand degré de clarté par la résolution géométrique. (Legendre, 1823, p. 105)

La référence à l'arithmétique montre que Legendre fait la connexion entre l'incommensurabilité des grandeurs considérées et la nature irrationnelle de $\sqrt{2}$. S'il n'emploie pas littéralement le terme « irrationnel » à cette occasion, il en fait usage dans une note ultérieure, dans laquelle il démontre que π et son carré sont irrationnels (preuve à laquelle nous reviendrons dans la section III.2.4.3 p. 586). Toutefois, il précise encore le lien avec l'arithmétique dans la scholie suivante, dans laquelle il propose une méthode d'approximation de ce rapport par des fractions continues, après avoir précisé qu'« il n'est donc pas possible non plus de trouver en nombres [185] le rapport exact de la diagonale au côté du quarré ; mais on peut en approcher tant qu'on voudra » (Legendre, 1823, p. 106). La méthode géométrique est ainsi mise en avant par Legendre, qui lui accorde le bénéfice d'une plus grande clarté, tout en ne négligeant pas les aspects numériques, en exhibant la nature de la valeur $\sqrt{2}$ et en proposant une technique pour l'approcher avec n'importe quelle précision donnée.

Bézout aborde la question de manière similaire, quoique plus littérale, en écrivant :

> Puisque le carré de l'hypoténuse vaut la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, il s'ensuit que si le triangle rectangle est isocèle, comme il arrive par exemple dans un carré lorsqu'on tire la diagonale AC, alors le carré de l'hypoténuse sera double du carré d'un de ses côtés : donc la surface d'un carré est à celle du carré fait sur la diagonale comme 1 est à 2 ; donc (*Arithm.*,

184. L'anthyphérèse consiste, pour deux grandeurs inégales, à enlever la plus petite de la plus grande, et à itérer le processus, jusqu'à obtenir une mesure qui leur soit commune, si elle existe. Si le processus se poursuit indéfiniment, c'est que les grandeurs sont incommensurables. Voir pour plus de détails la proposition VII. 2 d'Euclide et les commentaires de Vitrac associés dans Euclide 1994, p. 291-296.

185. L'expression est soulignée par nos soins, afin de la comparer aux expressions, très similaires, des auteurs qui suivent dans notre analyse. Les expressions équivalentes sont elles aussi présentées en caractères gras dans les citations suivantes.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> 192) le côté d'un carré est à sa diagonale comme 1 est a la racine carrée de 2 ; et comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'ensuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un carré à sa diagonale, c'est-à-dire que la diagonale est incommensurable, ou n'a aucune commune mesure avec son côté. (Bézout, 1848, p. 72)

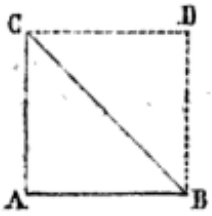
Exprimés avec un peu moins de formalisme (sans employer par exemple la notation des ratios $a : b :: c : d$), les arguments de Bézout sont cependant les mêmes que ceux de Legendre, aboutissant à une conclusion similaire. Ils utilisent tous les deux la même expression « en nombres » pour expliquer que l'on ne peut pas avoir de valeur numérique de ce rapport exact écrite sans racine carrée. La différence est dans le contexte général de l'ouvrage, puisque Legendre définit en amont la notion d'incommensurabilité (Legendre, 1823, p. 58), puis la relie brièvement à la notion de proportion, en rappelant à ce sujet quelques règles de base (Legendre, 1823, p. 61-62). Il renvoie aux ouvrages d'arithmétique pour de plus amples détails, mais fait néanmoins les quelques observations nécessaires « pour l'intelligence de ce livre et des suivants » et pour « dissiper toute obscurité, soit dans l'énoncé, soit dans les démonstrations » des propositions (Legendre, 1823, p. 61). Il mobilise cette notion à plusieurs reprises dans son ouvrage, alors que Bézout ne la mentionne qu'à cette seule occasion. Nous retrouverons cette différence fondamentale entre les deux auteurs lors de l'étude de la preuve de la formule de l'aire du rectangle, que Bézout ne traite que dans le cas où ses dimensions ont une commune mesure, alors que Legendre aborde le cas où elles sont incommensurables (voir la sous-section III.2.4.2 p. 575).

Dans les années 1840-50, des auteurs et groupes d'auteurs — Idoux, ainsi qu'Eysseric et Pascal — présentent les mêmes arguments à la suite du théorème de Pythagore exprimé en aires dans leurs manuels respectifs (Idoux, 1842, p. 117 ; Eysseric et Pascal, 1850, p. 103) (voir figure III.137 p. 574). La différence avec les cas étudiés précédemment est que le rapport des grandeurs BC et AC n'y est pas exprimé comme un rapport, mais comme un nombre simple, $\sqrt{2}$, qualifié de « racine incommensurable ». Idoux l'exprime sensiblement de la même manière en notant que « le rapport du côté du carré inscrit au rayon est $\sqrt{2}$, donc il est incommensurable » (Idoux, 1842, p. 117). Dans ces deux situations, le rapport des grandeurs est donc bien vu comme un nombre, qualifié d'« incommensurable ». L'évolution constatée par Bronner de la notion de « grandeurs incommensurables » entre elles vers celle de « nombre incommensurable », soit dans notre vocabulaire actuel, de nombre irrationnel, est donc manifeste dans notre corpus, en lien avec l'objet « racine carrée » (voir p. 570).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

163. ***Observation.*** Dans le cas particulier où le triangle-rectangle serait en même temps isocèle (*fig.* 107) le carré de l'hypoténuse BC vaudrait le double de celui de AC. D'un autre côté l'hypoténuse alors se trouve la diagonale du carré ACDB construit sur le côté de l'angle droit ; or, dans ce cas, l'on a l'égalité

Fig. 107.



$$\overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2, \text{ qui donne } \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} = 2$$

$$\text{et par suite } \frac{BC}{AC} = \sqrt{2}$$

C'est-à-dire que le rapport de la diagonale au côté d'un carré est exprimé par une racine incommensurable : ***Donc la diagonale et le côté d'un carré ne peuvent pas avoir de commune mesure.***

FIGURE III.137 – Théorème de Pythagore dans le cas d'un triangle rectangle isocèle et conséquence sur la nature du nombre $\sqrt{2}$ chez Eysseric et Pascal (1850, p. 103)

Enfin, plus tardivement, un dernier auteur de notre corpus, Bourget, évoque le rapport de la diagonale au côté du carré à la suite du théorème de Pythagore, et l'exprime sous une forme plus algébrisée, conformément aux usages qui se généralisent à la fin du siècle (voir la sous-section III.2.3.4 p. 541). Désignant par a le côté du carré et d sa diagonale, Bourget déduit de l'égalité « $d^2 = 2a^2$ » la relation « $d = a\sqrt{2} = a \times 1,414...$ ». Il remarque alors que « le rapport entre la diagonale et le côté du carré est exprimé par $\sqrt{2}$ » et que « ces deux lignes sont donc incommensurables entre elles au point de vue théorique » (Bourget, 1885, p. 95). L'auteur revient donc à la formulation en termes de lignes incommensurables entre elles et n'évoque pas de nombre ni de racine incommensurable. En revanche, son expression « d'un point de vue théorique », que nous avons soulignée, met en évidence l'intérêt seulement spéculatif de la notion, puisque pour les applications, on sera à même d'approcher ce rapport autant que l'on veut. Ce point de vue est d'ailleurs conforté par la présentation formelle de son résultat, dans lequel il fait apparaître la valeurs approchée 1,414 de $\sqrt{2}$, avec des points de suspension qui laissent entendre que l'approximation peut être menée avec n'importe quelle précision souhaitée.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La question du rapport de la diagonale au côté d'un carré est souvent considérée par les historiennes et historiens des mathématiques comme un contexte de « la rencontre avec le problème de l'incommensurabilité » (Bronner, 1997, p. 26). Les auteurs des manuels de géométrie du XIX^e siècle continuent, pour certains, à s'inscrire dans cette tradition, et profitent de cette occasion pour évoquer la nature des grandeurs associées, et celle du nombre $\sqrt{2}$. La notion d'incommensurabilité n'apparaît même chez certains auteurs, comme Bézout, que dans cette seule situation. Le théorème de Pythagore est en effet la « niche principale de surgissement des racines » (Bronner, 1997, p. 82), et ses applications offrent l'opportunité de discuter la nature de ces nombres particuliers que sont les racines carrées, incommensurables ou non.

III.2.4.2 L'incommensurabilité dans le cas de l'aire du rectangle

La gestion de la question de l'incommensurabilité dans les manuels

Au cours du XIX^e siècle, les postures que tiennent les auteurs d'ouvrages d'enseignement de la géométrie de notre corpus vis à vis de l'incommensurabilité sont diverses. 25 auteurs traitent ouvertement la question, parmi lesquels 11 proposent une démonstration de la formule de l'aire d'un rectangle dans le cas où ses dimensions sont incommensurables. Dans les 14 autres manuels dans lesquels la question est abordée, 7 en présentent une définition préliminaire, suivie de développements éventuels concernant la diagonale et le côté d'un carré, le rapport de la circonférence au diamètre, ou encore les rapports des angles interceptant des arcs dans des cercles, 5 proposent la totalité ou une partie de ces développements, sans définition, et 2 évoquent seulement des « nombres incommensurables », parmi lesquels π et $\sqrt{2}$. Les 15 autres, soit ne l'évoquent pas du tout pour 11 d'entre eux, soit mentionnent, comme les 4 derniers, l'idée d'une « commune mesure », éventuellement sous forme négative, mais sans citer véritablement l'« incommensurabilité » ni la traiter de manière théorique. La répartition de ces ouvrages suivant les postures décrites est synthétisée dans le tableau III.11 p. 576.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Non abordée		Abordée			
15		25			
Pas du tout	« Commune mesure »	Définition (et plus)	Développements	Nombres	Rectangle
11	4	7	5	2	11
Dupin, 1828	Bergery, 1828	Percin, 1842	Mauduit, 1790	Guilmin, 1882	Lacroix, 1808
Lancelot, 1833	Lamotte, 1839	Eysseric et Pascal, 1850	Bézout, 1848	Bos, 1884	Legendre, 1823
Desnanot, 1835	Dupuis, 1857	Amiot, 1859	Briot, 1863		Terquem, 1829
L.C. et F.P.B., 1840	Briot et Vacquant, 1859	Harant, 1863	Bourget, 1885		Sonnet, 1839
Gimelli, 1841		Bos, 1875	Leyssenne, 1890		Idoux, 1842
Salicis, 1868		P. André, 1879			Vincent, 1844
Tarnier, 1872		Girod, 1893			Puille, 1855
Bovier-Lapierre, 1879					Cirodde, 1858
Dalsème, 1880					Rouché et Comberousse, 1866
Bert, 1886					Méray, 1874
Hue et Vagnier, 1896					Tombeck, 1879

TABLE III.11 – Tableau indiquant la répartition des manuels du corpus concernant la position affichée par leurs auteurs vis à vis de la question de l'incommensurabilité

Les onze auteurs qui font le choix de ne pas évoquer du tout cette question se placent systématiquement dans des cas où les grandeurs considérées ont une mesure commune (voir colonne « Pas du tout » du tableau III.11 p. 576). Quatre auteurs évoquent seulement au passage des grandeurs possédant ou non une « commune mesure », mais sans développer davantage la question (Dupuis, 1857, p. 75 ; Briot et Vacquant, 1859, p. 75-78 ; Bergery, 1828, p. 384 ; Lamotte, 1839, p. 45) (voir colonne « Commune mesure » du tableau III.11 p. 576). Ces 15 ouvrages ont en commun d'être destinés à des publics de l'enseignement primaire, professionnel, spécial ou féminin, et poursuivent manifestement des objectifs plus utilitaires que théoriques [186]. Le caractère non nécessaire de l'étude des cas d'incommensurabilité dans un tel cadre est confirmé par Leyssenne [187] dans une partie dédiée à l'étude des lignes proportionnelles :

186. Ils sont d'ailleurs tous dans les groupes des « arpenteurs expérimentaux » (groupe 4), des « tardifs appliqués » (groupe 5) ou des « théoriques et pratiques du début du siècle » (groupe 6) de la 3ème de nos classifications, sauf le manuel de Desnanot, qui figure par ailleurs dans le groupe des « primaires pratiques » de la 2ème, tout comme 5 autres des manuels considérés (voir tableau A.2 p. 667).

187. Leyssenne est néanmoins classé dans la catégorie « Développements » des manuels dans lesquels

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> Les deux lignes AD et DB peuvent être incommensurables ; mais nous admettons qu'on peut toujours prendre une ligne assez petite pour qu'elle soit contenue, sans erreur sensible, un même nombre de fois dans chacune des droites AD et DB. (Leyssenne, 1890, p. 115)

Une partie des auteurs, qui pourtant ne développent pas réellement cette notion dans le cadre de la géométrie des aires, et notamment celle du rectangle, le font par ailleurs à propos des arcs et des angles, du rapport du côté et de la diagonale d'un carré, comme nous l'avons observé précédemment chez Bourget, ou de celui du diamètre à la circonférence d'un cercle (voir colonne « Développements » du tableau III.11 p. 576). L'incommensurabilité des grandeurs donne parfois lieu à une définition plus formelle dans une partie préliminaire (voir colonne « Définition (et plus) » du tableau III.11 p. 576), avant d'être mobilisée dans les contextes évoqués ci-avant, comme chez Eysseric et Pascal, qui indiquent :

> Quand on applique le procédé ci-dessus à la recherche de la commune mesure de deux lignes, il peut arriver ou que l'on obtienne le résultat après un certain nombre d'opérations, et l'on dit alors que les lignes sont *commensurables* ; ou bien il peut se faire que l'opération ne puisse se terminer, quelque loin qu'on la prolonge, les lignes dans ce cas sont dites *incommensurables*. (Eysseric et Pascal, 1850, p. 35)

Le lien avec la nature des nombres est plus explicité chez Amiot, qui écrit en préambule de sa 15ème leçon :

> Si deux grandeurs de même espèce A et B sont commensurables entre elles, leur rapport est un nombre entier ou fractionnaire qu'on obtient en divisant l'un par l'autre les deux nombres qui expriment combien de fois ces grandeurs contiennent leur commune mesure M. [...] Réciproquement, lorsque le rapport de deux grandeurs A et B est un nombre entier ou fractionnaire, ces grandeurs sont commensurables entre elles. (Amiot, 1859, p. 55-56)

Nous reconnaissons là le contrat numérico-géométrique évoqué par Bronner, dans lequel la théorie sur les nombres se fonde sur celle des grandeurs géométriques et leur mesure (voir p. 273).

Enfin, parmi les deux auteurs qui évoquent simplement des « nombres incommensurables » (voir colonne « Nombres » du tableau III.11 p. 576), l'un nous renseigne sur

la notion d'incommensurabilité est « Abordée » (voir tableau III.11 p. 576), car il exprime la possibilité que les grandeurs soient incommensurables dans plusieurs contextes, comme les lignes proportionnelles et l'aire du rectangle, même s'il ne traite pas réellement ce cas de figure dans les faits.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la différence de discours quant à l'incommensurabilité suivant les publics auxquels il s'adresse. Il s'agit de Bos, dont il est possible de comparer les ouvrages de 1875 et de 1884, respectivement destinés à l'enseignement secondaire classique masculin et à celui des jeunes filles. Dans l'ouvrage pour les garçons, l'incommensurabilité est évoquée à diverses reprises (rapports d'arcs, de lignes, nombres dits « incommensurables ») (Bos, 1875, p. 44, 95, 128, 129, 132, 164). Dans son homologue pour les jeunes filles, et dans les parties correspondantes, ces mentions ont disparu, sauf une qui demeure pour indiquer que le nombre π est « comme on dit, *incommensurable* » (Bos, 1884, p. 91), sans explication supplémentaire du terme employé. Il apparait donc que Bos allège le contenu pour les filles de cette notion complexe, dont il estime sans doute qu'elle ne leur est d'aucune utilité. Cette analyse confirme l'hypothèse émise sur le groupe des 15 ouvrages dans lesquels la notion n'est pas ou très peu abordée, dont nous avons constaté qu'ils étaient destinés à des publics plus intéressés par les aspects utilitaires de la géométrie que par son caractère théorique.

Postures face à l'incommensurabilité dans la preuve de l'aire du rectangle

Les postures des auteurs de notre corpus vis à vis de l'incommensurabilité au sein de la preuve initiale du théorème de l'aire du rectangle (formule ou comparaison) prennent quatre formes distinctes : ils peuvent l'« affronter », la « nier », l'« éluder » ou encore l'« approcher » [188]. Dans la colonne « Rectangle » du tableau III.11 p. 576 figurent les 11 auteurs qui « affrontent » l'incommensurabilité, en cela qu'ils présentent une preuve dans le cas où les dimensions ne possèdent pas de commune mesure. Les 29 autres le font dans le seul cas commensurable, en ne traitant ou n'évoquant pas tous de la même façon la question qui se pose lorsque les dimensions en jeu n'ont pas de commune mesure.

Une très large majorité (23 sur 29) « nie » cette notion : ils n'en parlent pas du tout et raisonnent comme s'il était toujours possible de réduire les deux dimensions concernées à une unité commune. Parmi eux, plusieurs auteurs comme Eysseric et Pascal, Briot et Vacquant, André, Bourget, et Hue et Vagnier proposent la même démarche, consistant à : 1° montrer le résultat dans le cas où les côtés sont entiers ; 2° induire le résultat dans le cas où les côtés sont exprimés sous forme décimale en changeant l'unité de référence (voir preuves dans la partie III.1.1.1 p. 332) ; 3° conclure de façon générale par une formulation type « donc, dans tous les cas » (Eysseric et Pascal, 1850, p. 105 ; Briot et Vacquant, 1859, p. 50 ; P. André, 1879, p. 136 ; Bourget, 1885, p. 86 ; Hue et Vagnier, 1896, p. 115). Bos est plus modéré en affirmant seulement, à l'issue des

188. Ces quatre termes sont choisis par nos soins pour regrouper des types de postures similaires, et sont repris dans la suite de l'étude.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

étapes 1° et 2°, que « l'aire s'obtient donc encore dans ce cas en multipliant les nombres qui représentent la base et la hauteur du rectangle » (Bos, 1875, p. 73). Il n'en conclut pas moins son exposé par un « C. Q. F. D. » indiquant que son théorème est démontré, même si rien n'indique qu'il reste vrai quand la base et la hauteur sont incommensurables. Dalsème et Bert mettent quant à eux en avant le fait que « c'est donc bien une règle générale que l'on obtient » (Bert, 1886, p. 25), en dépit du fait qu'ils ne la justifient que dans le cadre de dimensions entières ou décimales.

« Éluder », par définition, signifie éviter avec adresse : c'est ce que font trois auteurs à propos du cas d'incommensurabilité du théorème de l'aire du rectangle. Bergery, à l'issue du raisonnement montrant que deux rectangles sont entre eux comme leurs bases, dans le cas où ce rapport est celui de deux entiers, avance qu'« on sent bien qu'il en serait de même pour tout autre rapport des bases » (Bergery, 1828, p. 207). Amiot développe sa preuve de l'énoncé 5[189] dans le cas où les bases ont « une commune mesure BG » (Amiot, 1859, p. 145), mais précise dans une leçon antérieure, en complément à la définition de deux grandeurs « incommensurables entre elles », que :

> pour démontrer que le rapport de deux grandeurs de même espèce A et B égale celui de deux autres grandeurs de même espèce C et D, le programme prescrit de ne considérer que des valeurs de ces grandeurs qui soient commensurables entre elles. (Amiot, 1859, p. 56)

La référence au programme lui permet donc de justifier institutionnellement le choix de ne traiter que le cas des grandeurs commensurables dans sa preuve. Puille, pour sa part, affronte partiellement cette même difficulté en se référant rapidement à une preuve analogue présente en amont dans son ouvrage, dans la remarque suivante :

> Si les rapports sont *incommensurables*, on pourra démontrer le théorème [énoncé 5] par un raisonnement analogue à celui du th. XIX, ch. II. (Puille, 1855, p. 161)

Le théorème en question est celui indiquant que dans un cercle, « les angles au centre sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés » (Puille, 1855, p. 36), qu'il prouve par passage à la limite, en réduisant les écarts des rapports autant que possible (voir p. 609).

Enfin, trois auteurs s'« approchent » de l'idée de l'incommensurabilité en évoquant des quantités aussi petites que possible, dans l'esprit de la preuve de Puille sur les angles au centre et les arcs de cercles. Guilmin précise, directement après la démonstration de son énoncé 1 réalisée dans le cas où les dimensions du rectangle sont entières ou décimales, que :

189. Pour rappel, les énoncés relatifs au rectangle sont référencés dans la section II.3.1.3 p. 275.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> Cette démonstration réussit, quelque petite que soit la subdivision de l'unité qui sert de mesure à l'un et à l'autre dimension du rectangle ; nous pouvons donc dire en général, dans le sens indiqué : *Un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*. (Guilmin, 1882, p. 136)

L'idée d'une commune mesure, mais que l'on peut prendre aussi petite que l'on souhaite, est reprise par Girod, qui exprime en remarque que « ce théorème [énoncé 5] étant démontré pour le cas où les bases ont une commune mesure, si petite qu'elle soit, doit être vrai dans tous les cas » (Girod, 1893, p. 183). Enfin, dans le même contexte que Girod, Leyssenne précise en remarque, tout comme il l'avait fait concernant les lignes proportionnelles (voir p. 577), que :

> Les deux droites AC et EG peuvent être incommensurables. Mais nous admettons qu'on peut toujours prendre une longueur assez petite pour qu'elle soit contenue, sans erreur sensible, un nombre de fois exact dans chacune des droites AC et EG. (Leyssenne, 1890, p. 206-207)

Dans ce dernier cas, la validation de la preuve lorsque les grandeurs sont commensurables passe par la minimisation de l'erreur produite. Et en effet, dans le cadre de l'apprentissage d'une géométrie qui suivrait un objectif pratique plutôt que théorique, le résultat montré quand les dimensions ont une mesure commune suffit, puisque la précision des instruments de mesure ramène forcément à une telle situation [190].

S'adressant à des publics de niveaux divers, une très grande partie des auteurs (29 sur 40) fait ainsi le choix de ne parler que du cas commensurable concernant la mesure du rectangle, sans doute dans un objectif global plutôt utilitaire de l'enseignement de la géométrie. Souvent niée, parfois éludée ou approchée, la question de l'incommensurabilité affleure plus ou moins clairement dans certains de leurs ouvrages. Les onze autres auteurs abordent quant à eux ce sujet de front, offrant alors des preuves plus complexes à leurs lecteurs, potentiellement plus aguerris [191]. Il est par conséquent manifeste que la question de l'incommensurabilité se situe à l'interface des différents lectorats des manuels de géométrie, en relation étroite avec les objectifs pédagogiques

190. Cette idée est clairement exprimée par Vincent dans une note de son ouvrage de 1844 : « Comme ces opérations s'exécutent à l'aide du compas, il arrive que les deux branches se ferment de plus en plus, et finissent par se joindre de telle manière, qu'il devient physiquement impossible de les rapprocher davantage. La distance qui reste alors entre les deux pointes, distance plus ou moins petite suivant le degré de perfection de l'instrument, est bien encore mesurable par la pensée ; mais il n'en est pas moins impossible de continuer effectivement l'opération, quoique les deux lignes puissent être incommensurables entre elles » (Vincent, 1844, p. 86).

191. Ces 11 manuels sont d'ailleurs en grande partie (10 sur 11) des ouvrages « officiels » et/ou « théoriques pour le secondaire » (groupes 2 et 3) dans notre 3ème classification, et 6 d'entre eux sont par ailleurs classés parmi les « encyclopédiques » (groupe 3) dans la première (voir tableau A.2 p. 667). Ils présentent donc des profils assez homogènes, en plus de leurs publics d'usage, en termes de reconnaissance institutionnelle et d'exhaustivité de leurs contenus sur les aires.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

poursuivis, plus utilitaires ou plus théoriques (voir le schéma de l'interface en figure III.138 p. 581). Contrairement à la plupart des interfaces ouvertes considérées dans notre travail, caractérisées par des flux entre les territoires interfacés, celle-ci est fermée (voir p. 26), ce que nous avons schématisé par une frontière à l'intérieur de l'interface en violet. En effet, la notion d'incommensurabilité marque une séparation, à la fois entre les publics et les objectifs éducatifs qui leur sont relatifs. L'absence, ou la presque absence, de la notion dans certains manuels, dans lesquels l'aire du rectangle n'est traitée que dans le cas où ses dimensions ont une commune mesure, tranche nettement avec les ouvrages dans lesquels la question est abordée. Dans ces derniers, l'incommensurabilité peut donner lieu à une définition, à des applications dans des cadres théoriques propices (aire du rectangle, mais aussi rapport de la diagonale au côté d'un carré ou angles au centre), être mise en relation avec la nature des nombres (comme par exemple $\sqrt{2}$), et à une preuve de l'aire du rectangle, y compris quand ses dimensions n'ont pas de commune mesure. L'étanchéité entre les deux systèmes est mise en évidence par le cas de Bos, qui traite très différemment la question dans ses ouvrages respectifs pour les garçons ou les filles, dans des objectifs pédagogiques très distincts, comme nous l'avons observé ci-avant.

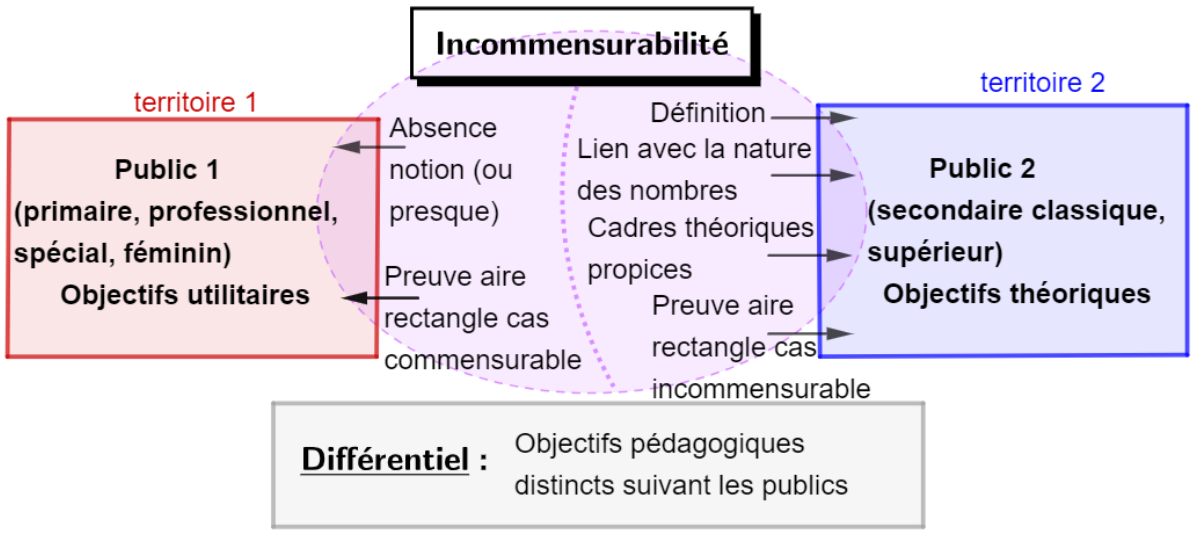


FIGURE III.138 – Schéma montrant en quoi l'incommensurabilité est à l'interface des publics des manuels de géométrie et de leurs objectifs pédagogiques

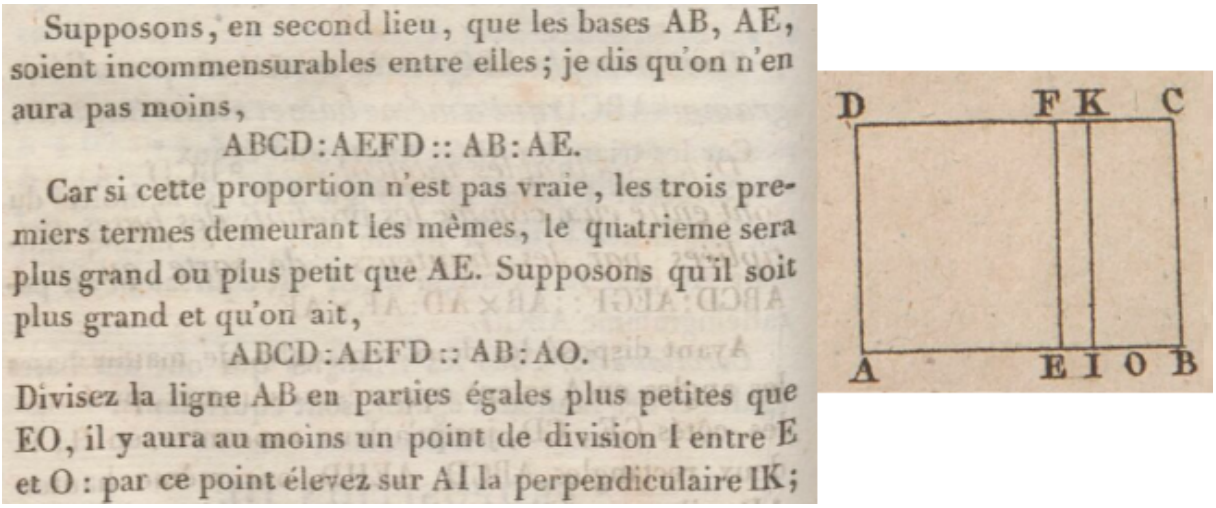
Dans la suite de notre étude, nous proposons d'analyser les preuves de l'aire du rectangle fournies dans le cas incommensurable, afin de mieux comprendre en quoi elles se situent à l'interface des cadres numériques et géométriques, et comment elles mettent les connaissances qui leur sont associées en interaction pour mettre ce résultat

Licence CC BY-NC-ND 3.0

à la portée des apprentis géomètres de l'époque [192]. Les preuves de deux des auteurs du corpus — Legendre et Lacroix — qui ne font pas intervenir de considérations sur l'infini, sont examinées dans la section à suivre. Les autres donneront lieu à une analyse dans le chapitre relatif aux interactions entre géométrie et analyse infinitésimale (voir la section III.3.1 p. 599 et suivantes).

Une preuve dans le style des Anciens

Au début du siècle, Lacroix et Legendre prouvent de façon analogue le résultat de l'énoncé 5 dans le cas où les bases et hauteurs des rectangles sont commensurables, puis incommensurables. Le premier cas est traité comme nous l'avons étudié dans la section III.1.1.1, avec comme support la figure de l'« empilement ». Pour le cas où les bases n'ont pas de commune mesure, ils procèdent tous deux par l'absurde, dans un style proche de celui des Anciens [193] (voir figure III.139) [194].


Supposons, en second lieu, que les bases AB, AE, soient incommensurables entre elles; je dis qu'on n'en aura pas moins,

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Car si cette proportion n'est pas vraie, les trois premiers termes demeurant les mêmes, le quatrième sera plus grand ou plus petit que AE. Supposons qu'il soit plus grand et qu'on ait,

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Divisez la ligne AB en parties égales plus petites que EO, il y aura au moins un point de division I entre E et O : par ce point élevez sur AI la perpendiculaire IK;

FIGURE III.139 – Début de la preuve de l'énoncé 5 dans le cas incommensurable par Legendre (1823, 64, pl. 4)

192. Cette relation entre mesure de l'aire et grandeurs incommensurables figure, de façon plus contemporaine, au cœur d'un dispositif pédagogique élaboré par Thomas-Van Dieren et Rouche consistant à introduire les irrationnels dans une classe de troisième à travers le problème du pavage d'un rectangle par des carrés (Van Dieren et Rouche, 1985). À travers cette proposition, ils mettent en valeur la richesse des interactions entre les savoirs sur les nombres et les connaissances géométriques dans cette situation d'apprentissage, ainsi qu'entre les aspects théoriques et pratiques du problème.

193. La preuve diffère sensiblement de celle figurant dans les *Éléments* d'Euclide pour comparer des rectangles de même hauteur, puisqu'Euclide mobilise la notion bien spécifique des équimultiples qu'il a définie au préalable (voir p. 271). En revanche, le principe de la preuve de Legendre pour les rectangles ressemble à celle permettant de comparer les aires des cercles de rayons différents, largement inspirée de celle d'Euclide comme nous l'avons analysé p. 369. En effet, il s'agit dans les deux cas de montrer une égalité de rapports par double démonstration par l'absurde, en considérant et en excluant les deux cas d'inégalités (supérieure et inférieure).

194. Les deux preuves étant identiques, nous nous appuierons par la suite sur le texte de Legendre pour notre analyse, aisément transposable au texte de Lacroix.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

L'expression « car si cette proposition n'est pas vraie » marque le début du raisonnement par l'absurde. Legendre suppose que l'égalité des rapports $\frac{ABCD}{AEFD}$ et $\frac{AB}{AE}$ n'est pas respectée, ce qui implique qu'en fixant les trois termes $ABCD$, $AEFD$, et AB de l'égalité, le quatrième soit différent de AE. Il le nomme AO et affirme qu'il est alors soit (strictement) supérieur, soit (strictement) inférieur, à AE. Il traite ensuite le cas où $AO > AE$, en indiquant un peu plus loin que le raisonnement serait analogue si $AO < AE$. Legendre considère alors le surplus EO de AO sur AE et demande de découper le segment AB en parties égales inférieures à EO (que nous nommerons K dans la suite de notre explication). La possibilité de réalisation de cette étape est assurée par la propriété archimédienne, qui indique qu'étant données deux grandeurs inégales, il existe un multiple de la plus petite qui dépasse la plus grande [195]. Le fait que EO soit supérieur à K garantit l'existence d'un point de division entre E et O, que Legendre note I. AB et AI étant alors commensurables, le résultat démontré dans ce cas peut s'appliquer aux rectangles $ABCD$ et $AIKD$. Les égalités de rapports

$$\frac{ABCD}{AIKD} = \frac{AB}{AI}$$

et

$$\frac{ABCD}{AEFD} = \frac{AB}{AO}$$

mènent à la nouvelle égalité

$$\frac{AIKD}{AEFD} = \frac{AI}{AO}.$$

Mais comme $AI < AO$, alors $ADKI < AECD$, ce qui est absurde (Legendre, 1823, p. 64-65).

La preuve de Legendre (et de Lacroix) s'inscrit dans la continuité de la géométrie des Anciens par sa forme (démonstration par l'absurde), présentant l'avantage d'éviter le recours à l'infini, et dans le fond, puisqu'elle s'appuie sur l'axiome d'Archimède [196]. En revanche, elle diffère beaucoup de la preuve du résultat analogue réalisée par Euclide dans la proposition I du livre VI de ses *Éléments* (voir la sous-section II.3.1.1 p. 270). En effet, ce dernier prouve le résultat sur des triangles de même hauteur, avant de le généraliser aux parallélogrammes (et donc aux rectangles). Pour cela, il

195. Sur le lien entre l'axiome d'Archimède et la définition 4 du livre V des *Éléments* d'Euclide, voir la note de Vitrac dans (Euclide, 1994, p. 135-141).

196. Plus tard, en 1899, Hilbert montrera d'ailleurs qu'il est impossible de prouver que deux parallélogrammes de même base et même hauteur sont d'aires égales sans recourir à cet axiome (Hilbert, 1900, p. 54).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

démultiplie les bases respectives BC et CD de ses deux triangles ou parallélogrammes (voir figure II.34 p. 271), puis raisonne en s'appuyant sur sa définition de l'égalité des rapports de grandeurs (V. 5.) :

> Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante. (Euclide, 1994, p. 41)

Euclide applique cette définition aux équimultiples CH et CL des bases BC et CD, et AHC et ALC, des triangles ABC et ACD, en montrant que la première et la troisième tantôt dépassent, tantôt sont égales, et tantôt inférieures, à la seconde et la quatrième [197]. Il conclut alors que « comme la base BC est relativement à la base CD, ainsi [est] le triangle ABC relativement au triangle ACD » (Euclide, 1994, p. 156), avant d'en déduire un résultat analogue sur les parallélogrammes et les rectangles.

Pourtant très imprégnés de la culture géométrique d'Euclide, Legendre et Lacroix se distinguent du savant grec, en produisant une démonstration rigoureuse et demeurant assez accessible pour les élèves auxquels ils s'adressent (Baroux et Bühler, 2022, p. 21-22). Le recours à la démonstration par l'absurde et à l'axiome d'Archimède permet d'éviter le concept euclidien des égalités de rapports par les équimultiples, remplacé par une présentation plus moderne des grandeurs proportionnelles. En revanche, leur preuve nécessite la distinction entre les cas commensurables et incommensurables, là où Euclide propose une théorie des grandeurs valable de façon plus générale (Euclide, 1994, p. 35-41). Finalement, Lacroix et Legendre, pourtant antérieurs à la période « classique » décrite par Bronner (voir p. 273), entrent eux aussi dans le cadre d'un environnement où les grandeurs sont ramenées à des nombres par la mesure et dans lequel ils travaillent sur des grandeurs potentiellement incommensurables (Baroux et Bühler, 2022, p. 21). Ces deux auteurs renvoient aux ouvrages d'arithmétique pour préciser le sens des opérations sur les grandeurs, mais donnent néanmoins quelques éléments d'explication dans leur traité de géométrie :

> Si on a la proportion $A : B :: C : D$, on sait que le produit des extrêmes $A \times D$ est égal au produit des moyens $B \times C$. Cette vérité est incontestable pour les nombres ; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple, si A, B, C, D, sont des lignes,

197. Pour la preuve détaillée et commentée de cette proposition, voir (Euclide, 1994, p. 155-159).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors A, B, C, D, représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes A, B, C, D, devient une proportion de nombres. (Legendre, 1823, p. 61)

Legendre et Lacroix, à travers la preuve du théorème sur le rapport des aires des rectangles de même base ou hauteur, font ainsi le lien entre la théorie des grandeurs et celle des proportions pour les nombres, en suivant un chemin différent de la voie euclidienne. C'est également ce que constate Lamandé qui écrit que si, chez ces deux auteurs, la méthode démonstrative globale reste inchangée, en revanche :

> le livre V est remplacé par le passage commensurable/incommensurable et la conception même de rapport induit des preuves où les méthodes euclidiennes sont métamorphosées. (Lamandé, 1993, p. 267)

À travers cet exemple, c'est le lien entre la résolution des problèmes de grandeurs et l'élucidation de la nature des nombres qui est interrogée, au cœur duquel la géométrie des aires sert encore d'interface. Entre les deux pôles que forment ces deux objets — grandeurs et nombres — explorés traditionnellement dans les cadres théoriques séparés de l'arithmétique et de la géométrie, les figures et la mesure jouent le rôle de chaînons, permettant des transferts d'un domaine à l'autre. Le rapport de la diagonale au côté d'un carré s'incarne dans la figure associée, et peut tout aussi bien s'envisager comme un rapport de nombres en considérant les longueurs mesurées. Le traitement des rapports de grandeurs trouve sa correspondance dans l'étude des proportionnalités des nombres. Quant à l'axiome d'Archimède, il permet de justifier, par une propriété des nombres, l'existence de constructions géométriques. De même le procédé de l'anthyphérèse appliqué aux grandeurs géométriques permet de relier la question de l'incommensurabilité des grandeurs à l'irrationalité des nombres, et ainsi d'identifier ces deux notions, censément séparées (voir schéma III.140 p. 586).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

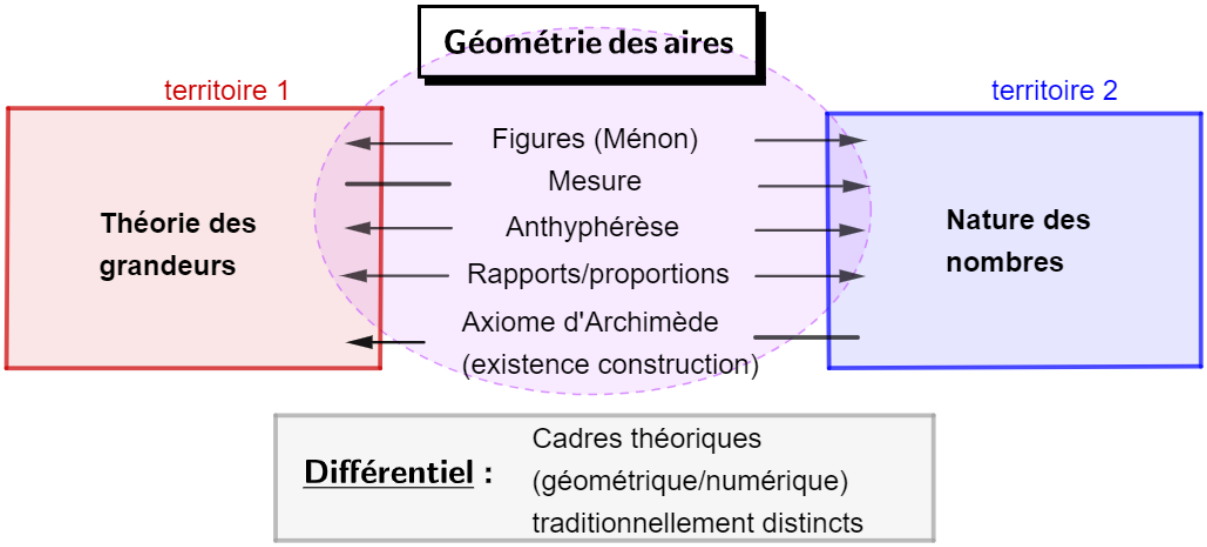


FIGURE III.140 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des grandeurs et des nombres

La question du lien entre problèmes géométriques et nature des nombres ne concerne pas que la mesure du rectangle, y compris en géométrie des aires, mais est également sensible dans le cadre de la quadrature du cercle, que nous abordons dans la section suivante.

III.2.4.3 La nature de π au cœur du problème de la quadrature du cercle

Dans le cas du cercle, le lien ténu entre mesure et comparaison s'exprime par la question de sa quadrature, puisqu'il s'agit précisément de « mesurer exactement un cercle, avec un carré pris pour unité de mesure » (Bergery, 1828, p. 403). En présentant le problème sous cet angle, Bergery fait le lien entre la comparaison et la mesure, comme nous l'avons fait pour le rectangle, via le chaînon du carré unité. Néanmoins, le cas du cercle diffère notoirement de celui du rectangle, puisque dans ce cas, une telle mesure s'avère impossible à réaliser. Bergery évoque une autre difficulté, liée à la première et de même nature, celle de « mesurer exactement une circonférence, avec un ligne droite pour unité » (Bergery, 1828, p. 403), c'est-à-dire le problème de la rectification du cercle. La mesure est donc bien vue chez Bergery comme une comparaison à une unité, prise pour étalon, que ce soit pour une aire ou pour une ligne (voir citation p. 495). Mais les deux problèmes — quadrature et rectification — qu'il évoque se heurtent à la même difficulté.

En amont ou en aval de la détermination de l'aire du cercle, les auteurs traitent la question du « rapport de la circonférence au diamètre » (Terquem, 1829, p. 205), dont ils énoncent qu'il est constant, et le désignent presque tous par la lettre grecque π (voir

Licence CC BY-NC-ND 3.0

p. 523). Ce nombre, de par sa nature, joue un rôle bien particulier dans l'impossibilité de résoudre la quadrature du cercle. Puille explique en effet que :

> Si le nombre π pouvait se calculer exactement et non par approximation, [...] cela reviendrait à trouver un carré qui fût un certain nombre de fois plus grand qu'un carré dont le côté serait R [le rayon], problème que nous savons résoudre ; mais comme on l'a vu par la méthode que nous venons d'employer, [...] le nombre π ne peut pas être calculé exactement. La longueur de la circonférence n'a point de rapport exact avec le diamètre ou le rayon.(Puille, 1855, p. 139)

L'impossibilité de la quadrature du cercle tiendrait donc au caractère forcément approché de la détermination de π, mais plus encore, au fait qu'il n'ait pas de « rapport » avec le rayon ou le diamètre. C'est l'idée que développe Terquem lorsqu'il écrit : « L'aire M [celle du cercle] dépend de π ; or, il est démontré qu'on ne peut trouver ce rapport exactement ; donc aussi M est incommensurable à l'égard du rayon : il est donc impossible de trouver un carré exactement équivalent au cercle » (Terquem, 1829, p. 220). Pour Terquem, le caractère « incommensurable » du nombre π est précisément ce qui empêche la réalisation de cette construction.

Pourtant, la relation mathématique liant le problème de la nature de π, la rectification du cercle et sa quadrature, n'est pas si simple. Sonnet indique bien que « si l'on savait trouver rigoureusement une droite de même longueur que la circonférence [...] on aurait le côté du carré équivalent à l'aire du cercle » (Sonnet, 1839, p. 260). Néanmoins, la réciproque n'est pas forcément vraie, comme le précise Vincent, qui mentionne « un exemple de figures planes curvilignes qui peuvent être carrées exactement bien qu'on n'ait pas le moyen de rectifier rigoureusement les lignes courbes qui les terminent » (Vincent, 1844, p. 247) [198]. Ce contre-exemple montre que si la rectification du cercle est une condition suffisante pour que la quadrature du cercle soit possible, ce n'est pas une condition nécessaire. C'est pour cette raison que les arguments mis en place ne permettent pas encore, à cette époque, de justifier l'impossibilité de la quadrature exacte.

Ces considérations sur la nature de π et le double problème de rectification et de quadrature du cercle figurent déjà dans les *Éléments* de Legendre au début du siècle. Ce dernier va néanmoins plus loin, puisqu'il prouve dans une note que « le rapport de la circonférence au diamètre et son quarré [*sic*] sont des nombres irrationnels ». Il transpose ainsi la question géométrique de l'incommensurabilité des grandeurs (circonférence et diamètre d'un cercle), en un problème de nombre, dont il semble

198. Dans la suite de son texte, nous n'avons pourtant pas trouvé de résultat de cette nature.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

nécessaire de préciser la nature [199]. Mais à l'issue de sa preuve, Legendre fait part d'une conjecture selon laquelle il serait « probable que le nombre π [ne soit] même pas compris dans les irrationnelles algébriques », même s'il paraît très difficile de démontrer rigoureusement cette proposition. (Legendre, 1823, p. 296). Et en effet, son intuition est la bonne, puisque ce résultat, qui signifie que π n'est la solution d'aucune équation algébrique finie à coefficients rationnels, se verra démontré formellement par von Lindemann en 1882.

À la fin du siècle, bien que la question de la nature du nombre π soit scientifiquement élucidée, les considérations autour de son lien avec le problème de la quadrature demeurent. En 1890, Leyssenne dresse le bilan des connaissances autour de cette question, qui a suscité tant d'émois et de remous depuis deux siècles. Précisant que le problème « revient à trouver une moyenne proportionnelle entre la circonférence et la moitié du rayon », il explicite ensuite :

> On sait déjà que cette question ne peut être résolue par le calcul, car on a vu que le rapport de la circonférence au diamètre [...] est incommensurable ; que par conséquent on ne peut avoir la longueur exacte de la circonférence en fonction du rayon. On ne doit pas cependant conclure de là que le problème soit graphiquement insoluble ; car la géométrie enseigne à construire des lignes, dont les valeurs numériques renferment des nombres incommensurables, comme la diagonale du carré. [...] Mais à ce jour, il n'a été trouvé aucune solution graphique de ce problème, bien qu'il n'ait pas été démontré non plus que le problème soit impossible. (Leyssenne, 1890, p. 258-259)

Leyssenne est donc bien conscient du fait que l'incommensurabilité de π n'implique pas l'inconstructibilité, à la règle et au compas, d'un carré équivalent exactement à un cercle. C'est en revanche au caractère constructible ou non de π qu'il fait référence, en évoquant les « solutions graphiques ». Mais les développements de la théorie des nombres montrent, déjà à l'époque, que tout nombre constructible (à la règle et au compas) est algébrique, en tant que solution d'une équation finie à coefficients rationnels et de degré une puissance de 2 [200]. Pour prouver que π n'est pas constructible, il suffit donc de prouver qu'il n'est pas algébrique, c'est-à-dire qu'il est transcendant. Il n'est pas

199. Legendre reprend la preuve de Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) de 1761 pour l'irrationalité de π, suivant le principe de « descente infinie » des fractions continues (Legendre, 1823, p. 295). La preuve de l'irrationalité de π^2 semble être de sa création. Elle est du moins reconnue comme telle par Rouché et Comberousse, qui créditent Legendre de ce résultat dans leur traité (Rouché et Comberousse, 1866, p. 190).

200. Pour en savoir plus sur l'élaboration historique de ce résultat, voir (Bühler, 2004), ainsi que l'article de Pierre-Laurent Wantzel (1814 – 1848), dans lequel il démontre qu'un nombre algébrique n'est constructible que si il est racine d'un polynome de degré égal à une puissance de 2 (Wantzel, 1837).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

certain que Leyssenne soit conscient de l'intégralité du problème mathématique sous-jacent à ce qu'il exprime dans son texte. Il soulève néanmoins la véritable question, là où ses prédécesseurs se limitaient à évoquer l'incommensurabilité de π comme raison à l'impossibilité de la construction.

Legendre, au tournant du siècle, avait quant à lui déjà exposé ses recherches sur la nature de π, et évoqué la possibilité de sa transcendance, mais en dehors de la question de la quadrature du cercle. La dernière remarque de Leyssenne montre également que le résultat de von Lindemann, pourtant rendu public huit années avant la parution de son ouvrage, n'est pas encore parvenu jusqu'à lui. La diffusion du résultat est pourtant assurée par certains réseaux scientifiques, notamment via les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, puisque Rouché, lui aussi auteur de manuel de géométrie, rédige en 1883 une *Note sur l'impossibilité de la quadrature du cercle*, qui reprend les avancées de von Lindemann à ce sujet (Rouché, 1883). Ceci s'explique peut-être par le fait que Rouché et Leyssenne ne sont pas issus des mêmes milieux : le premier est parisien, a fréquenté les écoles du gouvernement, et est actif dans le domaine scientifique, pendant que le second, issu de province (Haute-Vienne), va progressivement orienter sa carrière vers la pédagogie et devenir un cadre de l'Instruction Publique[201]. Au-delà de ces deux exemples, il est remarquable que les auteurs mentionnent presque tous l'incommensurabilité ou l'irrationalité de π, alors que presqu'aucun n'évoque sa transcendance, supposée ou démontrée. Ceci s'explique naturellement par le fait que cette notion n'en est alors qu'à un stade de découverte et de développement, avec l'exhibition des premiers nombres de cette nature par Liouville en 1844, et la preuve de la transcendance de e par Hermite en 1873 (Serfati, 1992). L'imbrication entre le développement des savoirs scientifiques au sujet de la nature de π, en lien avec la question de la quadrature du cercle, et l'évolution des contenus des manuels à ce sujet, est synthétisée sur la frise III.141 (p. 590). Cette approche chronologique met en évidence l'impact des nouveautés scientifiques sur l'écriture des manuels de géométrie pour un public intermédiaire, avec des auteurs qui connaissent plus ou moins les derniers résultats produits, et qui les prennent en compte ou non dans la production des savoirs à enseigner.

201. Plus précisément, Rouché est polytechnicien et son activité scientifique se reflète dans un grand nombre de publications dans les *Nouvelles Annales* durant toute la seconde moitié du siècle. Leyssenne présente quant à lui un tout autre profil. Après avoir enseigné durant des années dans le secondaire, libre ou public, il rejoint le corps d'inspection de l'Instruction Publique en 1880. Son engagement est plus politique et pédagogique que scientifique. Se réclamant de Jules Simon, il promeut l'idée d'une instruction publique gratuite et laïque pour tous dans le journal *La Défense Républicaine de la Haute-Vienne* qu'il crée au tout début des années 1870. Il devient également un proche de Jules Ferry au début des années 1880 (Moyon et Legros, 2017, p. 59-62).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

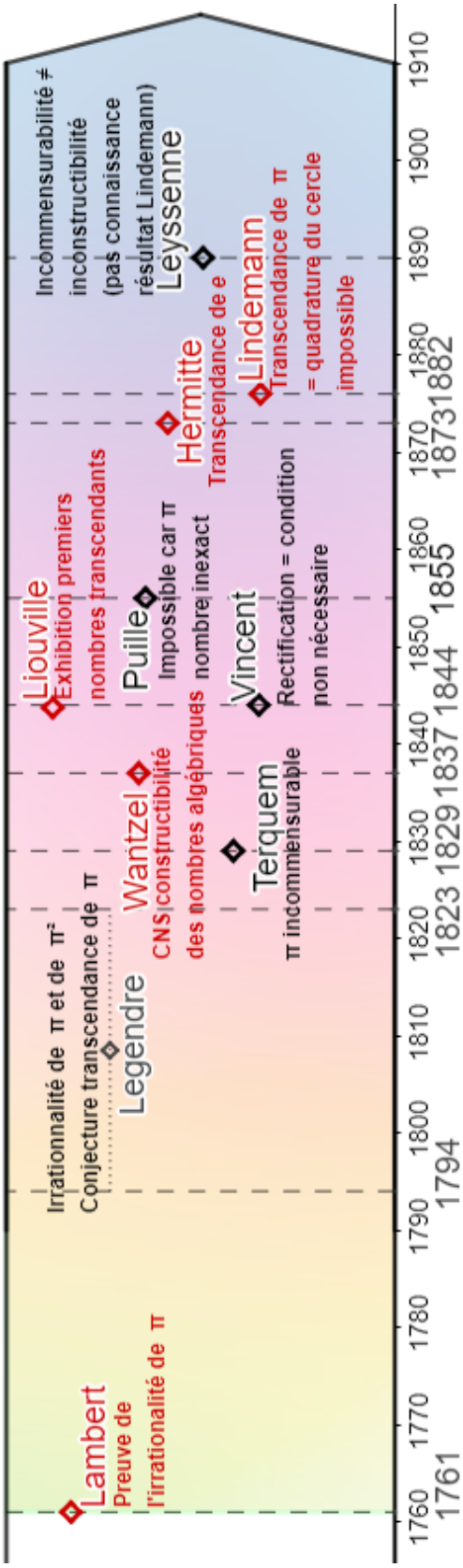


FIGURE III.141 – Frise résumant l'évolution des contenus liés à la question de la quadrature du cercle et de la nature de π dans les manuels du corpus, parallèlement aux développements scientifiques de ces notions

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La nature de π, en plus de la question historique qu'elle soulève en termes de développement et de diffusion du savoir scientifique au XIX^{e} siècle, participe à la position de la géométrie des aires à l'interface de l'arithmétique et de la géométrie. En effet, le lien entre le caractère commensurable ou non, algébrique ou non, et même constructible ou non, de ce nombre, entre en relation avec les problèmes très classiques de constructions géométriques que constituent la rectification et la quadrature du cercle. En effet, ces problèmes géométriques se ramènent à la question de la nature du rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle, et motivent les recherches à ce sujet. Dans l'autre sens, l'élucidation progressive de la nature de ce nombre participe à l'élaboration d'une preuve de l'impossibilité des deux constructions. De plus, ces questions posent des difficultés aux auteurs dans la production de leurs contenus d'enseignement, à propos de notions qui ne sont scientifiquement pas encore complètement stabilisées. Si certains auteurs se réfèrent aux récents développements de ces théories mathématiques, et même y contribuent, d'autres paraissent ne pas être totalement au fait des récentes avancées en la matière. En cela, les questions d'aires liées à la nature de π se trouvent également à l'interface des pratiques d'enseignement et de recherche en mathématiques (voir schéma III.142 p. 591).

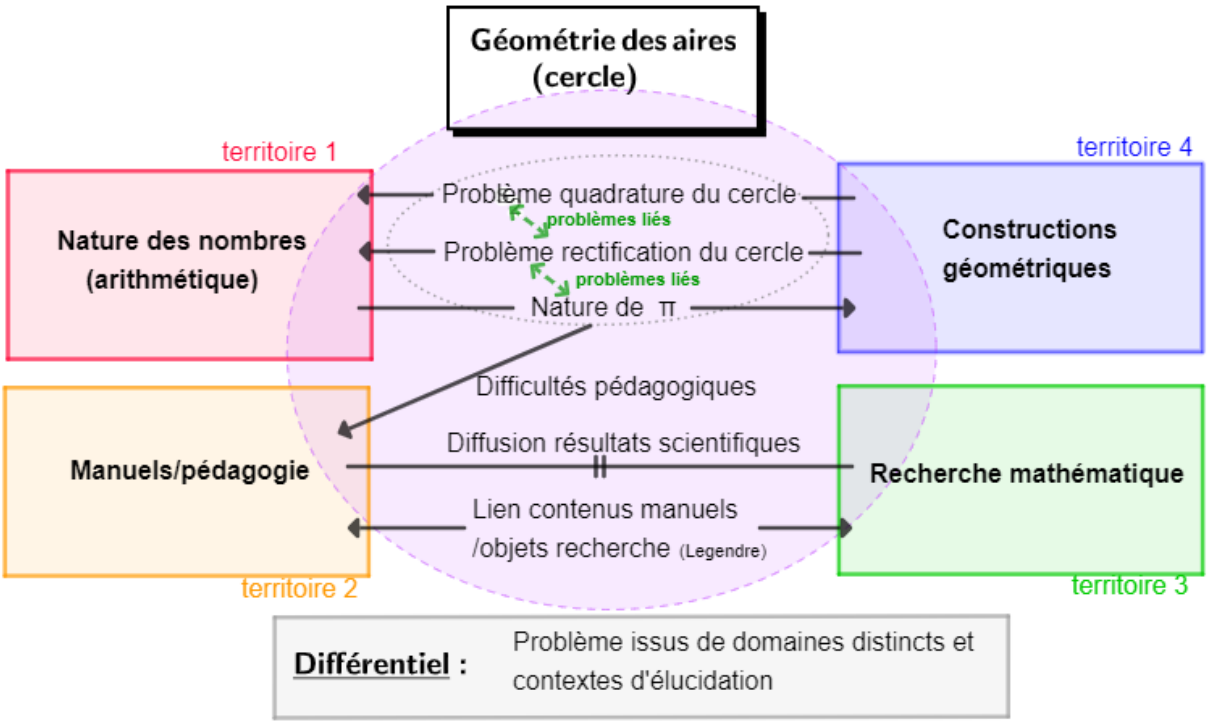


FIGURE III.142 – Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des problèmes de nature des nombres et de construction géométrique, ainsi qu'à l'interface des pratiques de recherche et d'enseignement

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Que ce soit relativement à la question de l'incommensurabilité des dimensions d'un rectangle, de la nature de $\sqrt{2}$ dans le cadre du théorème de Pythagore, ou de celle de π en lien avec la quadrature du cercle, la géométrie des aires se situe bien à l'interface des domaines de l'arithmétique et de la géométrie (voir les schémas III.138 p. 581, III.140 p. 586 et III.142 p. 591). Elle est également à l'interface des différents publics concernés, répondant à des objectifs pédagogiques différents, ainsi que des domaines de la recherche et de l'enseignement, à travers la diffusion des découvertes sur π et la quadrature du cercle. Cette question, plus théorique qu'utilitaire, reste néanmoins liée aux problèmes pratiques de construction et de calcul, comme nous l'avons étudié dans les sous-sections III.1.3.2 (p. 427) et III.2.3.3 (p. 523). Ces différents aspects des questions relatives à la nature des nombres en géométrie des aires sont de surcroît en évolution sur la période, suivant les avancées de la recherche mathématique sur la notion d'incommensurabilité, sur les racines carrées, ou encore sur les nombres transcendants. Au cours du siècle, la géométrie des aires participe ainsi bien à la transformation en cours du paradigme numérique (sous-section III.2.3.4 p. 541).

Conclusion

Écrire un manuel de géométrie au XIX^{e} siècle est à la fois un exercice de rigueur scientifique et de clarification pédagogique (voir p. 323). La question de l'intervention du numérique en géométrie met les auteurs à l'épreuve sous ces deux aspects, puisqu'ils sont amenés à aborder des points mathématiques non entièrement résolus, en cherchant néanmoins à le faire avec la plus grande simplicité. En cela, leur rôle est très grand dans la diffusion de la science en cours, mais aussi dans l'organisation et la rationalisation des connaissances de l'époque, auxquelles ils contribuent (voir p. 324).

Au cours du siècle, l'« arithmétisation des grandeurs » décrite par Barbin (2007) est à l'œuvre dans les ouvrages de géométrie, permettant notamment un transfert de l'approche des aires par comparaison à la détermination de leurs mesures (section III.2.2 p. 465). Les questions de la transposition des opérations et théories de l'arithmétique aux grandeurs géométriques sont encore en discussion, comme nous l'avons observé à propos de la multiplication des grandeurs ou de leurs rapports dans le cadre de la mesure du rectangle. Les auteurs, et notamment ceux du tournant et du début du siècle, montrent bien que l'homogénéité et la définition des unités sont toujours des sources de difficulté, qu'il s'agit de surmonter au mieux pour les présenter aux apprentis géomètres (sous-section III.2.2.3 p. 484). Cette arithmétisation est suffisamment avancée pour que les techniques de calcul de l'arithmétique — opérations posées, opérations abrégées,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

approximations, gestion des erreurs commises — se voient pleinement employées pour les calculs d'aires, notamment celle du cercle (sous-section III.2.3.3 p. 523).

En plus de cette arithmétisation, notre étude montre une algébrisation progressive des contenus géométriques, notamment pour les publics les plus avancés. Cette tendance apparaît en particulier à travers l'étude du théorème de Pythagore, pour lequel les éléments de langage et l'assimilation du carré en nombre et du carré géométrique permettent de transférer les propriétés des figures vers des propriétés algébriques et réciproquement (sous-section III.2.2.4 p. 495). Ce double mouvement, bien matérialisé dans les schémas d'interfaces réalisés à ce sujet (voir figure III.86 p. 499), répond à la double logique d'« algébrisation de la géométrie » et de « géométrisation de l'algèbre » exhibée par Bkouche (1990a, p. 98). L'intervention de l'algèbre est également manifeste pour prouver les théorèmes de Héron et de Pythagore généralisé aux triangles quelconques, pour lesquels les auteurs choisissent de ne pas présenter de preuve purement géométrique. L'algébrisation touche également le domaine des aires curvilignes, avec un processus de réduction des règles de calcul en formules, de plus en plus simplifiées, ainsi que des procédés de résolution algébrique des problèmes géométriques posés, comme par exemple trouver le rayon d'un cercle d'aire donnée (sous-section III.2.3.4 p. 541).

La « numérisation » des grandeurs évoquée par Barbin (2007), consistant à assimiler une grandeur à un nombre, est peut-être finalement la marche la plus difficile à franchir, à une période où la construction des nombres réels n'est pas achevée et où les questions sur la nature des nombres sont vives (section III.2.4 p. 570). Comme le fait remarquer Bronner, la notion d'incommensurabilité des grandeurs entre elles se transforme progressivement en incommensurabilité de leur rapport exprimé en nombre, synonyme d'irrationalité (voir p. 570), ce que nous avons pu observer à travers le cas de $\sqrt{2}$, en conséquence du théorème de Pythagore dans un carré (sous-section III.2.4.1 p. 571). Le « contrat numérico-géométrique » (voir p. 273) en cours au XIX^{e} siècle consiste bien à construire les nombres en même temps que se développe la théorie de la mesure, et notamment celle des aires. Cette construction en parallèle rencontre des obstacles, qui apparaissent dans notre corpus à travers la question de la quadrature du cercle et de la nature de π, au sujet desquelles les auteurs ne présentent pas un discours unanime, et ce même à la fin du siècle, alors que le problème est scientifiquement résolu (sous-section III.2.4.3 p. 586). Quant à la détermination de l'aire du rectangle lorsque ses deux dimensions sont incommensurables, elle soulève des difficultés, que Legendre et Lacroix résolvent à la manière des Anciens, mais pour lesquelles leurs successeurs vont mobiliser des outils d'analyse infinitésimale (voir la section III.3.1 p.599).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans ce chapitre, nous avons pu observer le rôle d'interface de la géométrie des aires à plusieurs occasions, entre des domaines mathématiques représentés dans les programmes, du primaire comme du secondaire (voir figure III.64 p. 450), à l'intersection de la géométrie et de l'arithmétique et/ou de l'algèbre (voir schémas III.86 p. 499, III.101 p. 520, III.104 p. 523, III.114 p. 541, III.120 p. 551, III.132 p. 563, III.136 p. 569, III.140 p. 586, III.142 p. 591), mais aussi en relation avec le système métrique ou le dessin linéaire. Des interfaces internes à la géométrie se sont révélées également, par exemple entre les approches par la comparaison ou la mesure (voir figures III.69 p. 461, III.70 p. 464, III.79 p. 473), ou encore entre la géométrie des aires et la géométrie du semblable (voir schéma III.83 p. 483). De même, au sein du système métrique, la géométrie des aires, à travers le cas du rectangle, a révélé sa fonction d'interface entre l'ancien et le nouveau système d'unités (voir schéma III.96 p. 514). Des interfaces ont encore émergé entre les publics auxquels se destinent les manuels, en fonction des objectifs d'enseignement qui leur sont liés (voir schéma III.138 p. 581). Ces différentes interfaces sont regroupées dans le schéma global suivant, reprenant la partition des programmes dressée en introduction (voir p. 450) et y intégrant des sous-parties, ainsi que les interfaces mises en évidence dans notre analyse, mentionnées par les situations géométriques qu'elles concernent (voir figure III.143 p. 596).

La géométrie des aires apparaît donc très manifestement à l'interface des principaux domaines mathématiques enseignés dans les deux systèmes, primaire et secondaire, au XIX^{e} siècle. Elle s'inscrit également, dans une perspective plus historique, au cœur des évolutions de la recherche et de l'enseignement des mathématiques au fil de la période. Nous avons montré en effet que l'approche des aires par comparaison cède peu à peu la place à un focus plus important sur la mesure, même si la préoccupation de comparer des aires conserve une permanence au cours du temps (section III.2.1 p. 450). Le remplacement des anciennes unités de mesure par les nouvelles induit des très grands changements dans les pratiques de calcul, allant vers une technique opératoire nettement simplifiée (sous-section III.2.3.1 p. 501). L'arithmétisation de la grandeur « aire » est de plus en plus mise en pratique, phénomène dont un exemple emblématique est l'abandon de la figure charnière entre les énoncés de comparaison et de mesure de l'aire du rectangle, au profit de calculs sur les rapports de grandeurs (sous-section III.2.2.1 p. 465). Le langage autour de la notion d'unité transforme progressivement l'énonciation de la règle de la mesure du rectangle, d'une expression explicite à une nouvelle formulation plus abrégée, voire à une formule littérale, dont les conditions de validité sont tues petit à petit. Les techniques de l'algèbre sont mobilisées tout au long du siècle, certaines prenant de l'importance, comme l'utilisation du calcul littéral pour synthétiser les règles de calcul, et d'autres en perdant, tel que l'usage des logarithmes pour les calculs d'aires. Enfin, les questions autour de la nature des nombres liés à

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des problèmes géométriques se modifient en fonction des avancées scientifiques à ce sujet, de la notion d'incommensurabilité des grandeurs vers celle d'irrationalité, et même de transcendance des nombres (sous-section III.2.4 p. 570).

Les interactions entre le géométrique et le numérique sont donc denses en ce qui concerne la question des aires, explorée à travers les manuels d'enseignement, et évoluent au cours du siècle. La géométrie des aires joue pleinement son rôle d'interface entre les différents domaines des mathématiques examinés jusqu'alors — la géométrie, l'arithmétique, l'algèbre, et le système métrique — mais une étude plus approfondie de certains résultats et preuves, comme celle de la mesure du rectangle dans le cas où ses dimensions sont incommensurables, ou encore de celle des aires curvilignes (cercle et coniques) est à même de montrer que cette interface s'étend au domaine de l'analyse infinitésimale, ce qui est l'objet du chapitre suivent.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

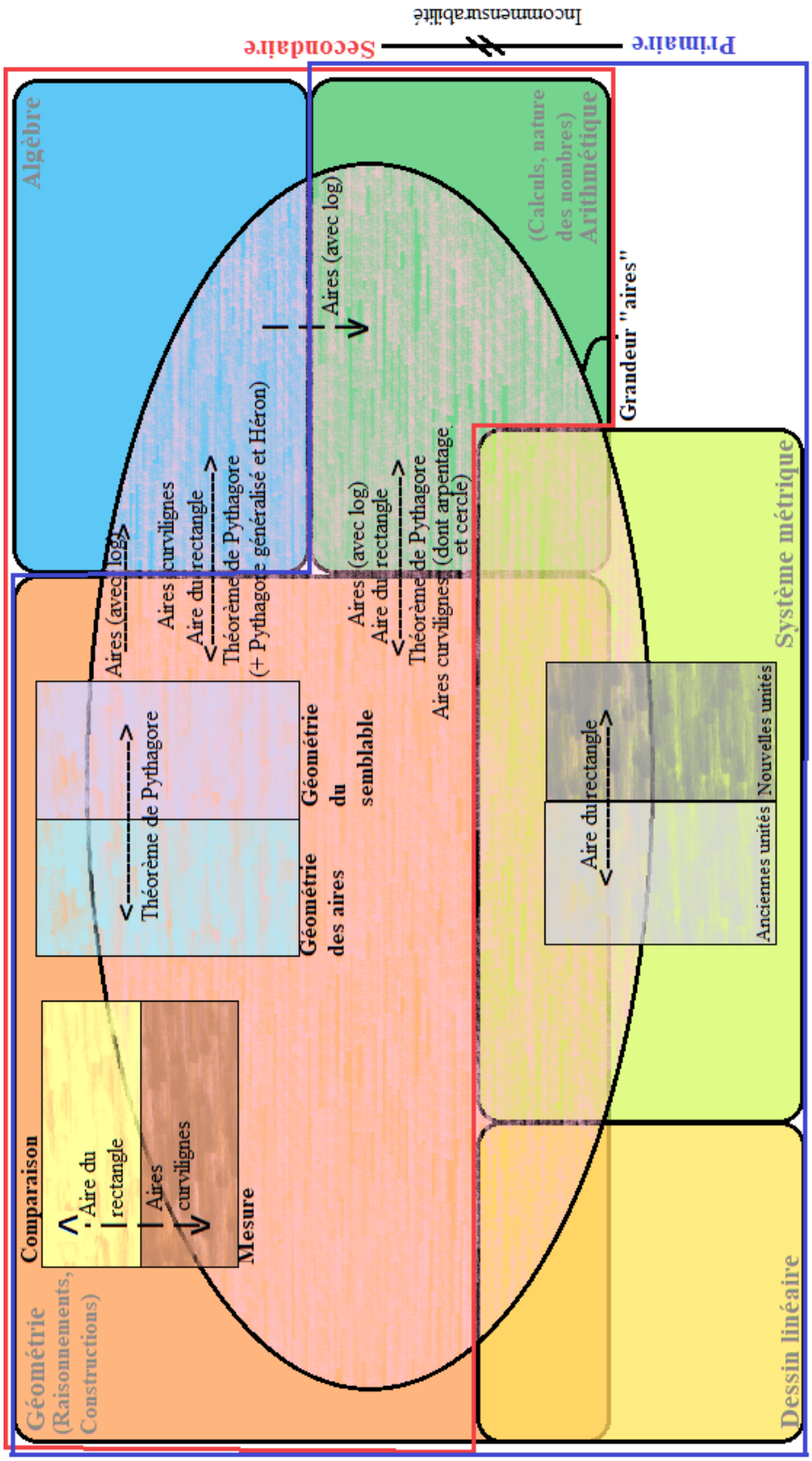


FIGURE III.143 – Schéma reprenant l'ensemble des interfaces présentées dans le chapitre III.2

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.3 La méthode infinitésimale en géométrie des aires

Dans la section I.3.1.3 (p. 112), nous avons présenté le contexte de l'introduction de la méthode des infiniment petits dans l'enseignement de la géométrie pour le secondaire, et les débats qui l'ont accompagnée. Partagés entre partisans et détracteurs, les auteurs de manuels de géométrie font usage ou non de cette méthode dans leurs ouvrages, en fonction de leurs sensibilités, de leurs opinions, du public auquel ils s'adressent, et également des programmes officiels en vigueur.

Au tournant du siècle, les auteurs des trois grands traités de géométrie étudiés par Lamandé (1993) n'ont pas la même posture face à l'usage de l'infini dans leurs ouvrages. Legendre reste strictement dans le cadre de la géométrie synthétique et évite tout recours à l'infini en démontrant ses résultats par l'absurde (Lamandé, 1993, p. 255). Peyrard, dans sa version revue et commentée du texte de Bézout[202] mobilise la notion de limite géométrique de Maclaurin (Lamandé, 1993, p. 262-264). Quant à Lacroix, il échafaude une notion de limite, que Lamandé estime située « à mi-chemin entre le concept géométrique largement usité au dix-huitième siècle et celui que Cauchy utilisera à partir du début des années 1820 » (Lamandé, 1993, p. 265-268). Néanmoins à cette époque, la portée des méthodes infinitésimales dans l'enseignement secondaire est limitée, notamment par le programme d'admission à l'École Polytechnique de 1800, qui précise que « la considération de l'infini ne sera point admise dans les lignes proportionnelles, ni dans la mesure du cercle » (Belhoste, 1995, p. 77).

Les lignes bougent après l'introduction officielle de la méthode des infiniment petits dans les programmes en 1837. Sonnet, par exemple, alors professeur suppléant au collège Saint-Louis et répétiteur de mécanique à l'École centrale des arts et manufactures, publie dès 1839 une géométrie « rédigée d'après la méthode des infiniment petits », selon son sous-titre (Sonnet, 1839, couv.). La méthode, mobilisée en effet à plusieurs reprises dans son manuel, lui permet d'aborder les lignes courbes, considérées comme des polygones « d'un nombre infini de côtés infiniment petits » (Sonnet, 1839, p. 111) ainsi que les surfaces et volumes associés. L'ouvrage est pourtant principalement destiné aux EPS, ENP et écoles industrielles, même s'il convient également « aux élèves des classes inférieures de mathématiques dans les collèges » (Sonnet, 1839, couv.). Quelques années plus tard, ce sont Eysseric et Pascal qui dressent un premier bilan de cette nouveauté en estimant :

202. Dans l'édition des *Éléments de géométrie* de Bézout retenue dans notre étude, simplement réimprimés par Saigey « sans autre modification que l'introduction du système métrique et la substitution des nouvelles mesures aux anciennes » (Bézout, 1848, couv.), n'apparaît aucune notion de limite, et l'expression « infiniment petit » n'apparaît que deux fois dans le cadre de l'étude de la sphère, et est donc loin d'être d'usage courant (Bézout, 1848, p. 86, 95).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> On reconnait aujourd'hui les avantages incontestables de la méthode du retournement [203] et des infiniment petits : l'adoption de ce double mode nous a permis de classer les matières d'après un ordre naturel et logique qui rend l'enseignement beaucoup plus simple et plus clair. Cette méthode est celle que nous avons publiée en 1835 [204], pour la première fois, et que divers auteurs ont depuis lors introduite dans leurs cours. (Eysseric et Pascal, 1850, p. 6)

Les auteurs font donc explicitement référence à la méthode des infiniment petits, qui est d'après eux de nature à simplifier et clarifier l'enseignement de la géométrie. Tout comme l'ouvrage de Sonnet, le leur est destiné à un public mixte – EPS, ENP, écoles industrielles et élèves préparant le baccalauréat – d'un niveau auquel cette méthode apparaît adaptée.

Par la suite, l'intérêt pour la méthode infinitésimale en géométrie élémentaire se maintient auprès des auteurs de manuels de géométrie, notamment chez Duhamel ou encore Desboves (Moussard, 2023, p. 175). Ce dernier explique d'ailleurs, en préambule de son ouvrage, que :

> On pourrait penser que la [méthode infinitésimale] ne devrait pas trouver place dans un ouvrage élémentaire. Mais je me suis assuré, par l'expérience d'un long enseignement, que, dans les limites où je l'ai renfermée, elle est très bien comprise et fort goûtée des élèves, qui en font souvent d'ingénieuses applications. (Desboves en 1880, cité dans Moussard 2023, p. 175)

La confiance dans les vertus de cette méthode pour l'enseignement de la géométrie, même au niveau élémentaire, se confirme donc chez les auteurs, confortée par leurs expériences en tant que professeurs.

La géométrie des aires est particulièrement concernée par les méthodes infinitésimales, entre autres pour ce qui concerne les aires curvilignes (cercle, courbes quelconques

203. Cette méthode est absente des textes officiels sous la formulation « méthode du retournement », ainsi que des autres ouvrages de géométrie consultés. Dans un ouvrage nettement ultérieur des frères de écoles chrétiennes, l'auteur mentionne que « l'emploi des figures symétriques constitue la méthode par duplication ou par retournement » (F.J., 1896, p. 62) et indique en note de bas de page se référer pour cette méthode à l'ouvrage que Serret a publié en 1855 sur les méthodes en géométrie (P. Serret, 1855). Cette méthode est évoquée et attribuée également à Serret par Moussard dans (Moussard, 2023). Elle consiste à « faire tourner une portion d'une figure autour d'une certaine droite, pour lui donner, par rapport à l'axe de rotation, une position symétrique de celle qu'elle occupait d'abord » (P. Serret, 1855, p. 6). En revanche, aucune source n'a permis d'identifier l'existence et l'usage de cette méthode antérieurement à l'ouvrage d'Eysseric et Pascal de 1850.

204. Il s'agit du *Cours de géométrie élémentaire* rédigé par Pascal (1835).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

et coniques), qui ne sont pas toujours aisées à déterminer par les seules méthodes de la géométrie élémentaire (voir p. 115). Déjà au tournant du siècle, les postures des géomètres pour résoudre la question de l'aire du cercle sont très diverses, de Bézout qui utilise une notion très intuitive de limite, à Lacroix qui la formalise, en passant par Peyrard et Legendre qui demeurent fidèles aux méthodes synthétiques des anciens (Lamandé, 1990, 1993). Les infiniment petits sont également convocables pour traiter « les problèmes relatifs au tracé des tangentes, à la détermination des aires ou des longueurs des arcs de courbes » (Salmon, cité dans Moussard 2015, p. 374), et notamment des coniques, que l'on peut difficilement traiter dans le cadre de la géométrie élémentaire. Mais ils sont également, avec la notion de limite qui les accompagne ou les remplace, d'un grand secours pour la résolution du problème de l'incommensurabilité dans le cadre de la détermination de l'aire du rectangle, comme nous proposons de le montrer dès à présent.

III.3.1 Les limites comme réponse à l'incommensurabilité

III.3.1.1 La théorie des grandeurs proportionnelles

Durant les décennies 1860 et 1870, deux ouvrages, dont huit années séparent les publications, se distinguent par la présentation qu'ils offrent de la théorie des grandeurs proportionnelles, directement applicable au cas de l'aire du rectangle. Ils émanent de trois auteurs d'une même génération, Rouché, associé à Comberousse, et Méray, respectivement diplômés de l'École Polytechnique (en 1852), de l'École centrale (en 1850) et de l'École Normale Supérieure (en 1854, où il a terminé premier) [205]. Tous les trois sont de brillants mathématiciens de leur époque. Ils écrivent des mémoires scientifiques et des articles dans les *Nouvelles Annales* portant sur de nombreux domaines des sciences mathématiques. Rouché accède même au grade de docteur ès sciences en 1858 après avoir présenté une thèse en analyse. Au fil de leurs carrières, ces trois personnages enseignent dans des facultés (Lyon et Dijon pour Méray), des lycées (à Nantes et au lycée Charlemagne pour Rouché), des classes préparatoires (mathématiques spéciales à Chaptal pour Comberousse), ou encore des écoles spéciales (centrale pour Rouché, Arts et Métiers pour Comberousse). Leurs ouvrages semblent donc, même si leur public cible n'est pas explicitement cité, s'adresser aux élèves de l'enseignement secondaire et aux aspirants aux écoles spéciales [206].

205. Pour les références de ce paragraphe, voir les notices biographiques des auteurs en annexe.
206. Leurs manuels appartiennent d'ailleurs tous les deux au groupe des « théoriques pour le secondaire » (groupe 2) de notre dernière classification (voir tableau A.2 p.3 667).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La particularité de leur approche commune de la question de l'aire du rectangle est qu'elle repose sur une théorie des grandeurs proportionnelles exposée au préalable. Dans l'ouvrage de Rouché et Comberousse, cette théorie est exposée dans le livre II traitant de la circonférence du cercle, dans un paragraphe dédié à la mesure des angles, sous la forme de « notions préliminaires ». Les auteurs précisent en note de bas de page que « la mesure de l'étendue étant l'un des principaux objets de la Géométrie, il [leur] a paru indispensable de traiter ici d'une manière succincte la question générale de la mesure des grandeurs », puis indiquent que les commençants peuvent dans un premier temps sauter les passages en petits caractères, qui concernent les cas où les grandeurs considérées sont incommensurables. À la suite, ils expliquent qu'ils vont étendre la notion de nombres entiers, reposant sur des « objets distincts et semblables », à d'autres nombres à travers le problème de la mesure des grandeurs. Ils procèdent à une véritable arithmétisation des grandeurs, définissant sur ces dernières l'égalité, l'addition, puis les multiples et diviseurs (appelés « parties aliquotes »), avant d'aboutir à la distinction entre les grandeurs commensurables, celles qui contiennent un nombre entier d'unités ou de parties aliquotes de l'unité, et les autres, dites incommensurables (Rouché et Comberousse, 1866, p. 65-66). Ces notions sont reliées à la nature des nombres qui expriment les grandeurs dont il est question : nombres entiers et « fractionnaires » pour les grandeurs commensurables (on dit alors « nombres commensurables »), et « nombres incommensurables » pour les autres[207]. La nature de ces derniers n'est pas nommée, et le terme « irrationnel » n'apparaît pas dans leur texte (Rouché et Comberousse, 1866, p. 66-67). Ils définissent ensuite le rapport de deux grandeurs A et B[208] puis leur proportionnalité :

> Lorsque deux grandeurs de nature différente ont une dépendance telle, que le rapport de deux valeurs quelconques de la première soit égal au rapport des valeurs correspondantes de la seconde, on dit que ces deux grandeurs sont proportionnelles. (Rouché et Comberousse, 1866, p. 69)

Enfin, ils expriment une condition (nécessaire et suffisante) pour que deux grandeurs données soient proportionnelles :

> Deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre si, à deux valeurs quelconques, mais égales, de la première grandeur, répondent deux valeurs égales de la seconde ; et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première répond une valeur qui soit la somme des deux

207. Nous reconnaissons à ce stade le contexte numérique de la période que Bronner appelle « classique », voir p. 570.

208. Ce rapport est le nombre par lequel il faut multiplier B pour obtenir A. Ils démontrent ensuite que ce rapport est le nombre qui mesure A lorsque B est pris pour unité, en distinguant le cas où ce rapport est entier, fractionnaire, puis incommensurable (Rouché et Comberousse, 1866, p. 67-68).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> valeurs correspondantes de la seconde. (Rouché et Comberousse, 1866, p. 69)

Cette condition, démontrée dans le sens direct, puis réciproque, repose donc sur deux hypothèses : la correspondance dans l'égalité et la correspondance dans la somme.

Chez Méray, cette même théorie est développée dans le cadre du chapitre V traitant des segments rectilignes, dans une partie portant sur les « relations entre les segments découpés sur deux droites quelconques par des droites ou des plans parallèles » (Méray, 1874, p. 34). Il élabore donc sa théorie sur des objets géométriques spécifiques, les segments, puis en affirme la généralité dans une note en écrivant :

> Il convient encore de bien retenir les deux dernières parties de sa démonstration ; car elles se reproduisent textuellement, dans les cas fort nombreux où l'on a à prouver que le rapport de deux grandeurs d'une nature donnée, est égal à celui de deux autres correspondantes d'une autre nature, sachant : 1º que la somme de plusieurs grandeurs d'une même espèce, a pour correspondante la somme des grandeurs correspondantes de l'autre espèce ; 2º que l'égalité de deux grandeurs dans une espèce, entraîne celle des grandeurs correspondantes dans l'autre. (Méray, 1874, p. 37-38)

Même si son exposé porte sur des segments et est, de fait, moins général que celui de Rouché et Comberousse, Méray pousse la démarche d'axiomatisation un peu plus loin, en prenant le principe de correspondance dans l'addition comme un axiome, à partir duquel il prouve que le second principe, celui de la correspondance dans l'égalité, est forcément vrai. Il indique au passage ce qu'il entend par « axiome » en affirmant que « cette proposition [le principe de correspondance dans l'addition] est une sorte d'axiome, car elle énonce un fait dont l'évidence ne peut être augmentée par aucune considération » (Méray, 1874, p. 36). De même que ses contemporains, il montre alors que si ces principes (et même seulement le premier) sont respectés par des grandeurs données, alors elles sont proportionnelles, ce qui, dans le cas de droites coupées par des parallèles, s'exprime par le fait que « le rapport $\frac{AB}{CD}$ des segments découpés sur l'une, est égal au rapport $\frac{A'B'}{C'D'}$ des segments correspondants découpés sur l'autre » (Méray, 1874, p. 36).

Les preuves dans les deux ouvrages possèdent de nombreuses similarités, mais diffèrent également sur quelques points. Rouché et Comberousse distinguent trois étapes : le cas où le rapport des grandeurs est entier, puis fractionnaire, puis incommensurable, là où Méray ne traite que deux cas, commensurable ou non. Les preuves dans le cas entier ou commensurable s'appuient sur la correspondance des multiples, conséquence de la correspondance dans la somme (voir figure III.144(a) p. 603). Le raisonnement dans

Licence CC BY-NC-ND 3.0

le cas incommensurable est mené par encadrement, un rapport incommensurable étant supposé pouvoir être toujours encadré par deux rapports fractionnaires, de différence aussi petite que l'on puisse souhaiter (voir figure III.144(b) p. 603), puis par passage à la limite. Rouché et Comberousse emploient un vocabulaire proche de l'analyse en annonçant que « par suite, les deux rapports $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$ étant compris entre deux nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$ qui, pour n assez grand, diffèrent aussi peu qu'on veut, ne sauraient avoir aucune différence assignable » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 70). Méray quant à lui utilise encore plus explicitement le vocabulaire des limites en écrivant que « le rapport soit de AB à CD, soit de $A'B'$ à $C'D'$, est la limite vers laquelle tend la fraction $\frac{m}{n}$ quand n augmente indéfiniment ; donc ces rapports sont égaux » (Méray, 1874, p. 37).

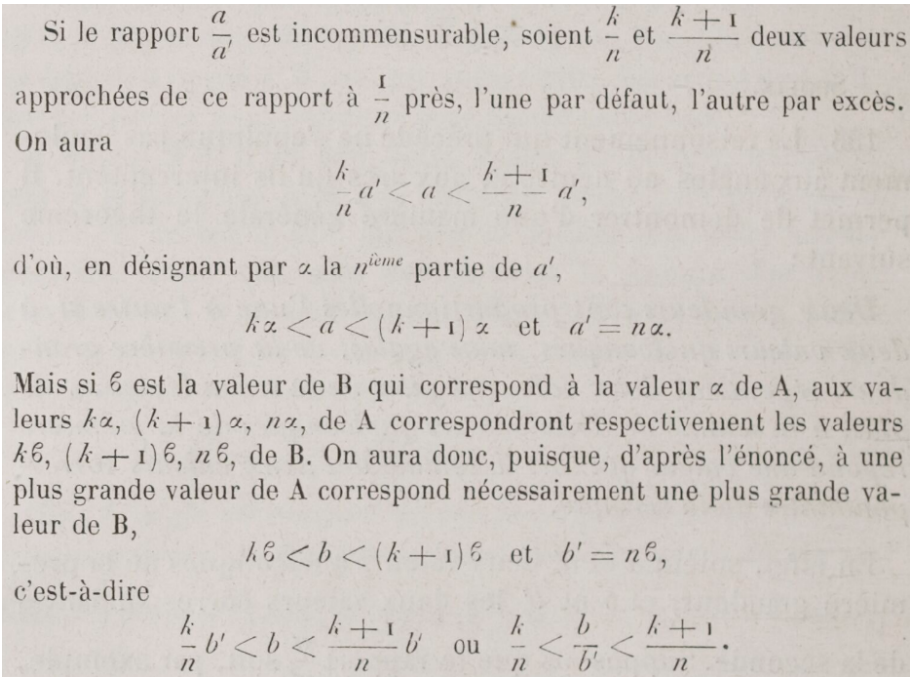
3° **Cela posé, la démonstration s'achève comme il suit.**

Si le rapport $\frac{AB}{CD}$ (*fig.* 13) est commensurable, et égal à la fraction $\frac{m}{n}$, le rapport correspondant $\frac{A'B'}{C'D'}$ est aussi égal à $\frac{m}{n}$.

En effet, si l'on divise AB en m parties égales, et CD en n parties égales, ces $m+n$ segments partiels sont par hypothèse tous égaux entre eux. Considérons maintenant leurs correspondants sur la droite A'B'C'D' ; ils sont égaux entre eux (2°), et en outre la somme des m premiers est égale à A'B', segment correspondant à AB, somme de leurs correspondants (1°) ; pour la même raison, la somme des n derniers est égale à C'D'. Donc A'B' contient m fois la $n^{\text{ième}}$ partie de C'D' ; en d'autres termes, le rapport $\frac{A'B'}{C'D'}$ est bien aussi égal à $\frac{m}{n}$ (97).

(a) chez Méray (1874, p. 37)

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Si le rapport $\frac{a}{a'}$ est incommensurable, soient $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ deux valeurs approchées de ce rapport à $\frac{1}{n}$ près, l'une par défaut, l'autre par excès. On aura

$$\frac{k}{n}a' < a < \frac{k+1}{n}a',$$

d'où, en désignant par α la $n^{ième}$ partie de a',

$$k\alpha < a < (k+1)\alpha \quad \text{et} \quad a' = n\alpha.$$

Mais si $\mathcal{B}$ est la valeur de B qui correspond à la valeur α de A, aux valeurs $k\alpha$, $(k+1)\alpha$, $n\alpha$, de A correspondront respectivement les valeurs $k\mathcal{B}$, $(k+1)\mathcal{B}$, $n\mathcal{B}$, de B. On aura donc, puisque, d'après l'énoncé, à une plus grande valeur de A correspond nécessairement une plus grande valeur de B,

$$k\mathcal{B} < b < (k+1)\mathcal{B} \quad \text{et} \quad b' = n\mathcal{B},$$

c'est-à-dire

$$\frac{k}{n}b' < b < \frac{k+1}{n}b' \quad \text{ou} \quad \frac{k}{n} < \frac{b}{b'} < \frac{k+1}{n}.$$

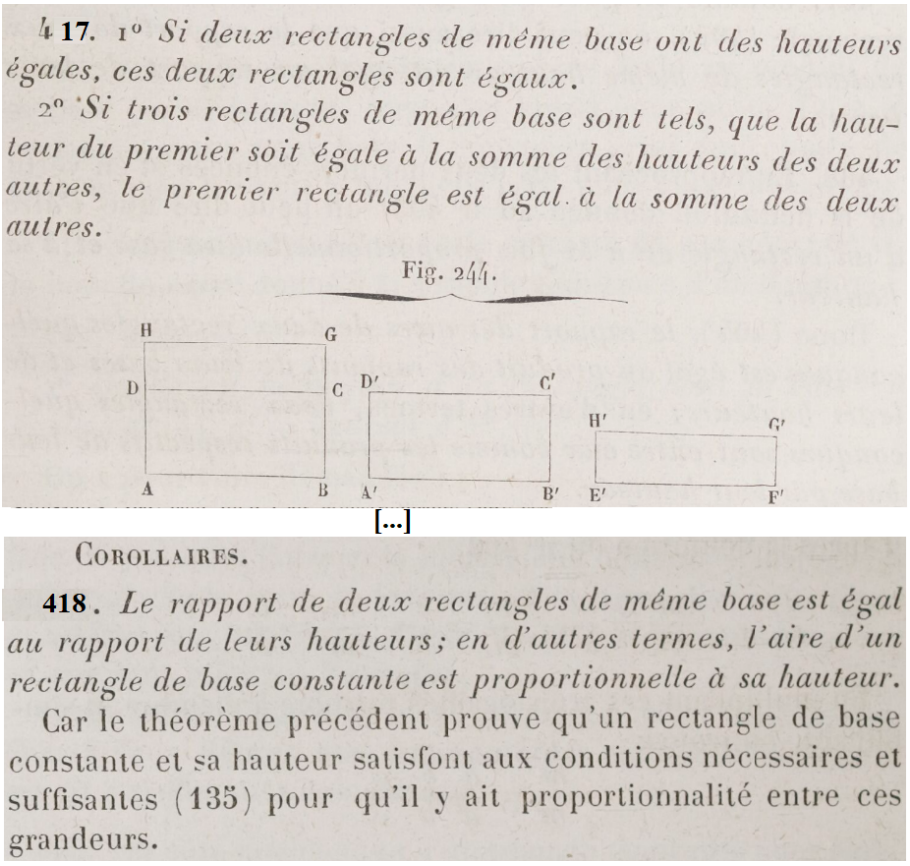
(b) chez Rouché et Comberousse (1866, p. 70)

FIGURE III.144 – Extraits des preuves de la propriété des grandeurs proportionnelles

Une fois ces obstacles surmontés, la preuve de l'énoncé 5 sur les rapports des aires des rectangles de même base devient évidente, comme application directe de la proposition démontrée plus généralement sur les grandeurs, puisque des rectangles de même base sont des grandeurs respectant les deux principes de correspondance dans la somme et dans l'égalité. Méray l'exprime ainsi : « si des rectangles ont une dimension commune, leurs autres dimensions et leurs aires forment deux séries de grandeurs correspondantes, ce mot ayant le sens que nous lui avons donné au nº 105[209]. Par conséquent ces grandeurs sont proportionnelles les unes aux autres » (Méray, 1874, p. 89). De la même façon, Rouché et Comberousse exploitent la condition nécessaire et suffisante de proportionnalité des grandeurs qu'ils ont établie antérieurement pour conclure (voir figure III.145 p. 604).

209. La définition donnée dans cette section est exprimée en ces termes : « Nous disons [...] que deux segments pris respectivement sur les droites données sont correspondants, quand ils peuvent être considérés, comme découpés l'un et l'autre par deux sécantes parallèles » (Méray, 1874, p. 36).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



417. 1° *Si deux rectangles de même base ont des hauteurs égales, ces deux rectangles sont égaux.*

2° *Si trois rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier rectangle est égal à la somme des deux autres.*

Fig. 244.

[...]

COROLLAIRES.

418. *Le rapport de deux rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs; en d'autres termes, l'aire d'un rectangle de base constante est proportionnelle à sa hauteur.*

Car le théorème précédent prouve qu'un rectangle de base constante et sa hauteur satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes (135) pour qu'il y ait proportionnalité entre ces grandeurs.

FIGURE III.145 – Extrait de la preuve de l'énoncé 5 chez Rouché et Comberousse (1866, p. 276-277)

L'étude de cette preuve met en évidence les liens étroits qu'entretiennent la géométrie, l'arithmétique, et même l'analyse, au sein de la théorie des grandeurs en général, et des aires en particulier, dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie. Le traitement de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable se situe ainsi à l'interface de la géométrie, de l'arithmétique et de l'algèbre. En effet, la théorie des grandeurs proportionnelles vient directement nourrir la preuve géométrique chez Rouché et Comberousse. Méray, quant à lui, échafaude sa théorie à partir de grandeurs géométriques — les segments — avant de lui donner une valeur de généralité. Leur démarche relève pleinement de l'arithmétisation des grandeurs. Dans un premier temps, ils définissent effectivement les relations d'égalité et les opérations élémentaires sur les grandeurs géométriques. Puis ils appliquent les théories et notions échafaudées sur des grandeurs particulières, comme les aires. Enfin, l'analyse contribue à l'édifice en apportant la notion de limite, mobilisée dans les preuves figurant dans les deux ouvrages, dans l'un concernant les rapports de segments, et dans l'autre les rapports de grandeurs (voir figure III.146 p. 605).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

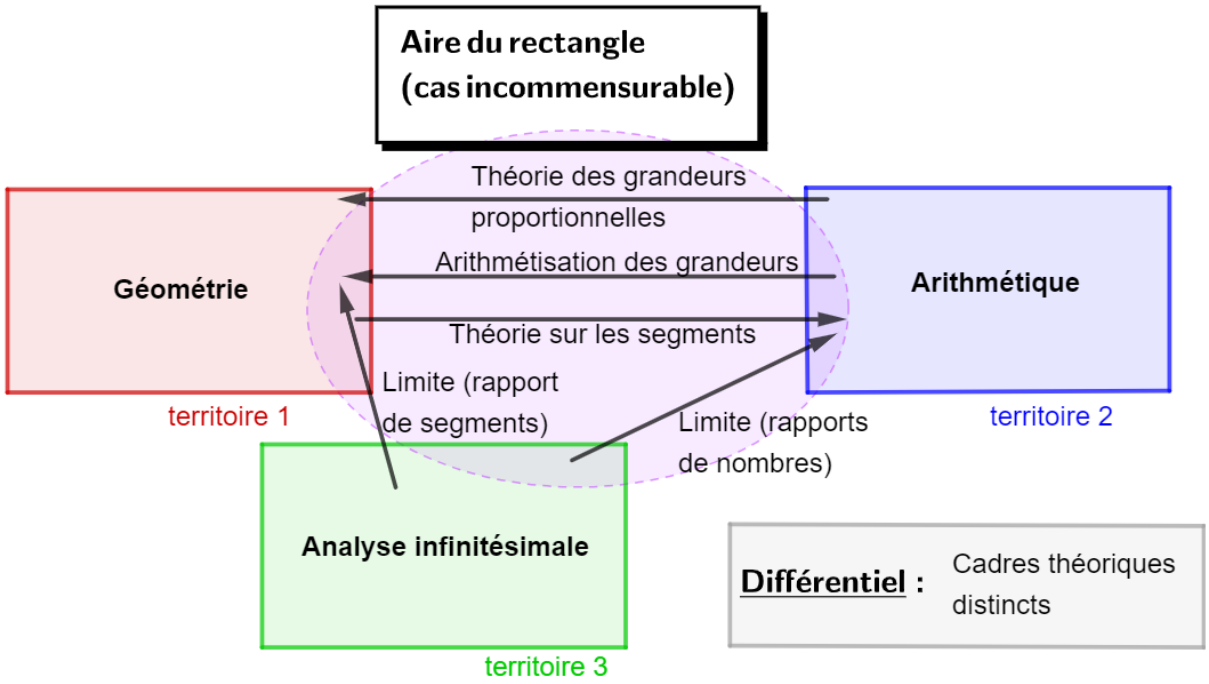


FIGURE III.146 – Schéma montrant en quoi la preuve de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable est à l'interface de la géométrie, de l'arithmétique et de l'analyse

La démarche des auteurs des deux ouvrages que nous avons analysés ont en commun de se référer à un système conceptuel plus large — la théorie des grandeurs proportionnelles — pour ne pas avoir à traiter plusieurs fois des questions géométriques liées à la mesure. De plus, les problèmes concernés, et dans lesquels ces systèmes théoriques sont mobilisés, portent sur des rapports de grandeurs non triviaux, lorsqu'on prend en compte le cas où les dimensions en jeu sont incommensurables. C'est une façon de traiter les problèmes de manière plus structurelle, non pas individuellement, mais par série de problèmes de même nature, ou présentant des caractéristiques communes[210]. Cette démarche se verra confirmée et légitimée par le travail d'axiomatisation de la géométrie par Hilbert dans ses travaux de 1899 (Hilbert, 1900).

L'étude de ces preuves joue également un rôle de marqueur historique pour examiner la relation au numérique des auteurs d'ouvrages d'enseignement, et également pour observer l'extension du concept de nombre et sa diffusion au cours du XIX^{e} siècle. En effet, l'explicitation du lien mathématique entre grandeurs et nature des nombres apparaît de façon quasi axiomatisée chez Rouché et Comberousse. Le travail de Méray participe aussi à cette élucidation. En revanche, aucun d'entre eux n'emploie le terme « irrationnel » dans son ouvrage, en dépit du fait qu'entre leurs deux publications, Méray ait donné une existence légitime et une définition officielle à ces nombres dans

210. Dans cet ordre d'idées, voir aussi les travaux de Gosztonyi sur les séries de problèmes dans la géométrie de Clairaut (Gosztonyi, 2022).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

son mémoire de 1869 (Dugac, 1970). La communication de tels résultats au plus grand nombre, en particulier à des jeunes lecteurs dans un contexte d'enseignement, demande manifestement davantage de temps et de précautions.

III.3.1.2 L'analyse : infiniment petits et passage à la limite

Dans l'« avertissement » placé en exergue de leur ouvrage de 1858, les fils de Paul-Louis Cirodde, Alfred et Ernest, précisent que dans cette nouvelle édition posthume des *Leçons* de leur père, ils ont « remplacé autant que possible par des démonstrations directes les démonstrations dites *par la réduction à l'absurde* » et que « la méthode infinitésimale a été seule conservée pour établir les expressions des aires et des volumes » (Cirodde, 1858, Av.). Et en effet, cette adaptation répond aux injonctions institutionnelles suite à la prescription en 1837 de la méthode des infiniment petits dans les programmes de géométrie du secondaire, offrant l'avantage « de simplifier les démonstrations [et] celui de préparer au cours supérieurs de sciences mathématiques » (Belhoste, 1995, p. 148).

Les effets dans les manuels scolaires pour les collèges et lycées sont manifestes, et les nouvelles preuves produites se réfèrent davantage aux *Éléments de géométrie* de Bézout ou de Lacroix qu'à ceux de Legendre, qui s'emploie à ne pas faire usage de l'infini. Dans le texte de Bézout, on peut lire :

> Une surface ne peut avoir d'autres éléments que des surfaces, et, quoiqu'on dise souvent que le parallélogramme $ABCD$ peut être considéré comme composé d'autant de lignes égales et parallèles à BC qu'il y a de points dans la hauteur EF, on doit sous-entendre que ces lignes ont une largeur infiniment petite (car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas composer une surface) ; et alors chacune de ces lignes est une surface qui, étant répétée autant de fois que sa hauteur est dans la hauteur AE, donne la surface $ABCD$. (Bézout, 1848, p. 59)

Dans cet extrait, Bézout fait assez ouvertement allusion aux indivisibles qui forment une surface, ce qui est confirmé par une affirmation plus tardive dans l'ouvrage, au sujet cette fois-ci des volumes : « On peut considérer la surface de la sphère comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits » (Bézout, 1848, p. 95). Malgré cette référence, il ne fait pas usage de cette notion pour établir l'aire du rectangle, qu'il ne prouve que dans le cas où ses dimensions sont commensurables (voir tableau III.11 p. 576).

Dans la nouvelle édition de l'ouvrage de Cirodde, « mise en harmonie avec les derniers programmes officiels » (Cirodde, 1858, couv.) par ses fils, la preuve de l'aire du rectangle

Licence CC BY-NC-ND 3.0

(énoncé 5) diffère nettement de celle de 1836. Conformément à ce que préconisent les programmes, elle est plus directement axée sur la notion de limite, et en particulier sur la limite des « rapports variables » (Cirodde, 1858, p. 39, 173), dénomination qui est par ailleurs absente de l'édition de 1836. Dans celle-ci, et contrairement à la version de 1858, la preuve de l'énoncé 5 n'est pas explicitement menée dans le cas incommensurable : elle repose sur la recherche d'une commune mesure entre les hauteurs des rectangles de même base par des reports successifs [211], mais n'évoque pas clairement le cas où cette commune mesure ne peut être obtenue (voir figure III.147a p. 608 en bas). Pour conclure, l'auteur se réfère à l'égalité de deux séries de quotients, définie de façon peu explicite, et à une proposition antérieure caractérisant des rapports de grandeurs égaux par la recherche de leur mesure commune (voir la figure III.147 p. 608, proposition 37).

Dans l'édition dirigée par les deux fils, la proposition est démontrée en distinguant le cas où les hauteurs des rectangles à comparer sont commensurables ou non. La figure de l'édition antérieure illustre le cas incommensurable (voir les numéros 214 et 162 de la figure III.147a p. 608), alors que le cas commensurable s'appuie sur une nouvelle figure (voir le numéro 161 de la figure III.147a p. 608). Quand les hauteurs ont une commune mesure, la preuve est menée sur le modèle de l'empilement vu dans la section III.1.1.1 (p. 332). Dans l'autre cas, le raisonnement repose sur le fait que les limites de ce que les auteurs appellent « rapports variables », « constamment égaux » dans cette situation (Cirodde, 1858, p. 173), sont aussi égales (voir figure III.147b p. 608 en bas).

Les auteurs ne se réfèrent pas ouvertement à une proposition antérieure, même si leur idée fait écho à la définition donnée préalablement du rapport de deux grandeurs incommensurables, comme « limite vers laquelle tendent les rapports successifs que l'on obtient, lorsqu'on remplace ces grandeurs par des quantités commensurables qui en approchent indéfiniment » (Cirodde, 1858, p. 10) (voir figure III.147b p. 608). Le terme de « limite » est également mentionné dans la version de 1836, au cours de la définition des égalités de rapports de grandeurs, mais demeure vague à travers l'expression « limite des fractions que l'on obtient », ou encore « une quantité qui s'approche d'aussi près que l'on voudra de » (Cirodde, 1836, p. 14). Dans l'édition plus tardive, la formalisation de l'idée de limite apparaît plus clairement, à la fois dans la définition et dans la preuve, avec par exemple la mention de « quantités variables qui sont d'autant plus petites que le reste K [...] lui-même plus petit, et qui ont par conséquent *zéro* pour limite » et la mention explicite de la notion de convergence (Cirodde, 1858, p. 10). À ce stade, et dans un ouvrage de géométrie, le symbolisme des suites n'est toutefois pas encore assumé, mais l'idée de limite fait son chemin dans

211. Il s'agit de l'algorithme d'Euclide pour les grandeurs, appelé également « anthyphérèse » (Euclide, 1998, p. 95-101), voir p. 572.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

le sillage du travail de Cauchy (1821), et sa formalisation se précise, y compris dans un manuel d'enseignement pour le secondaire. L'injonction des programmes est en cela respectée, donnant à la méthode infinitésimale une place non négligeable dans l'établissement de résultats fondamentaux en géométrie.

37. Il suit de là que *si en cherchant la plus grande commune mesure de deux autres quantités homogènes* A′ *et* B′, *on trouve la même série de quotiens que ceux auxquels a conduit la recherche de la plus grande commune mesure des droites* A *et* B, *on devra en conclure que les deux rapports* $\frac{A'}{B'}$ *et* $\frac{A}{B}$ *sont égaux, et qu'on a la proportion*

$$A' : B' :: A : B.$$

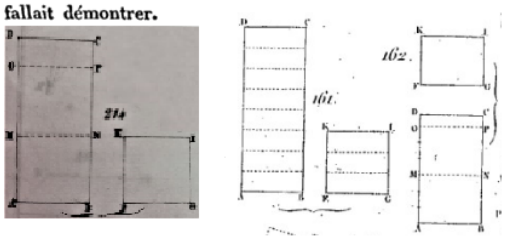
En effet, le rapport $\frac{A}{B}$ étant la limite des fractions que l'on obtient en regardant successivement chaque reste de la première série d'opérations comme la commune mesure des quantités A et B, le rapport $\frac{A'}{B'}$ est aussi la limite de ces mêmes fractions. On peut donc trouver une quantité qui approche d'aussi près que l'on voudra des deux rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$: donc il ne peut pas y avoir de différence entre eux.

[...]

On voit donc que le rectangle AC contient le rectangle FI autant de fois que la hauteur AD contient la hauteur FK, et que le rectangle restant OC a pour hauteur le reste OD. Par conséquent, si l'on porte à son tour OD sur FK, et que par les points de division on mène des parallèles à FG, on verra que le rectangle FI contiendra le rectangle OC autant de fois que la hauteur FK contiendra la hauteur OD, et que le rectangle restant aura pour hauteur la partie restante de FK; et ainsi de suite si l'on continue d'effectuer sur les hauteurs AD et FK, et sur les rectangles AC et FI, les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux premières quantités et celle des deux autres. Les deux séries de quotiens que l'on trouvera ainsi seront donc les mêmes : donc le rapport des deux rectangles AC et FI est le même que celui de leurs hauteurs AD et FK (37); donc on a la proportion

$$AC : FI :: AD : FK,$$

ce qu'il fallait démontrer.



(a) dans l'édition de 1836 (Cirodde, 1836, 14, 193, pl. vii), plus figure de l'édition de 1858 (Cirodde, 1858, pl. vii)

Quelle idée faut-il alors se faire du rapport de ces droites? Supposons qu'en négligeant un reste quelconque on regarde le précédent, que je désignerai par K, comme la commune mesure des deux droites A et B, et admettons que ces droites contiennent p fois et q fois la droite K avec des restes respectifs α et β moindres que K. On aura $A - \alpha = pK$ et $B - \beta = qK$: donc le rapport $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ est égal à $\frac{p}{q}$. Or α et β sont deux quantités variables qui sont d'autant plus petites que le reste K, auquel on s'est arrêté, est lui-même plus petit, et qui ont par conséquent *zéro* pour limite (*Arith.*, 236) (1); donc le rapport $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ tend vers une certaine limite, et comme ses deux termes convergent respectivement vers A et B, cette limite est ce qu'on appelle le rapport de A à B. Donc LE RAPPORT DE DEUX GRANDEURS INCOMMENSURABLES *est la limite vers laquelle tendent les rapports successifs que l'on obtient, lorsqu'on remplace ces grandeurs par des quantités commensurables qui en approchent indéfiniment.*

[...]

2° *Supposons actuellement que les hauteurs* AD *et* FK (fig. 162) *soient incommensurables.* Je partage FK en un nombre quelconque de parties égales, et je porte l'une de ces parties sur AD autant de fois qu'elle pourra y être contenue. Soit DO le reste que je trouve ainsi; je tire OP parallèlement à AB, et, comme les droites AO et FK sont commensurables, j'aurai

$$\frac{AP}{FI} = \frac{AO}{FK}.$$

Or, le rectangle AP et sa hauteur AO sont deux quantités variables qui tendent respectivement vers le rectangle AC et sa hauteur AD, à mesure que le nombre des parties dans lesquelles on a divisé la droite FK est plus grand; car le point O pourra ainsi s'approcher du point D d'aussi près que l'on voudra. Donc les rapports variables $\frac{AP}{FI}$ et $\frac{AO}{FK}$ ont pour limites respectives $\frac{AC}{FI}$ et $\frac{AD}{FK}$; mais ces rapports variables sont constamment égaux, donc leurs limites sont égales; donc

$$\frac{AC}{FI} = \frac{AD}{FK},$$

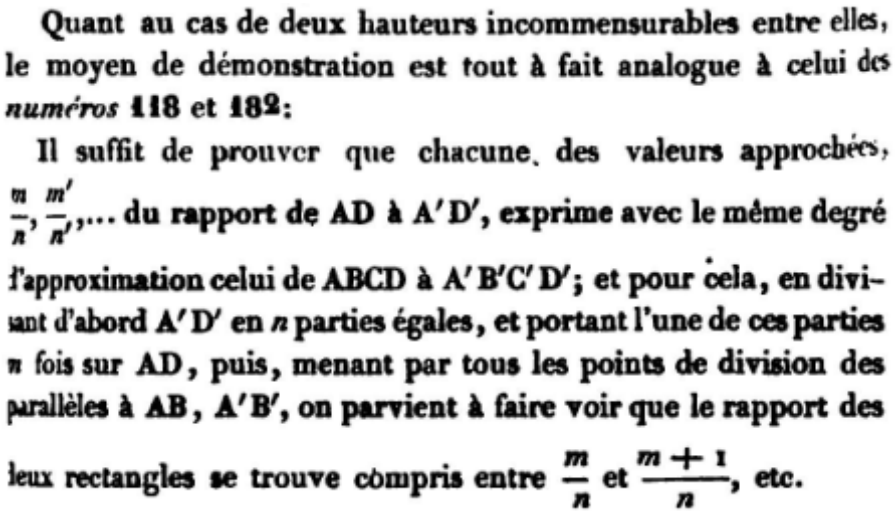
(b) dans l'édition de 1858 (Cirodde, 1858, p. 10, 173)

FIGURE III.147 – Extraits de la définition des rapports de grandeurs incommensurables et de la preuve de l'énoncé 5 chez Cirodde

Entre les deux éditions des *Leçons* de la famille Cirodde, deux auteurs abordent le théorème de comparaison des aires de rectangles de même base dans le cas incommensurable, par la voie des infiniment petits. Vincent et Puille se réfèrent à cette occasion tous les deux à des preuves déjà réalisées dans d'autres contextes en

Licence CC BY-NC-ND 3.0

suivant la même méthode : le premier concernant le rapport entre les arcs et angles d'un cercle ainsi que la division des trapèzes par des parallèles à leurs bases, le second seulement dans le cadre des arcs et des angles. Le fait d'avoir préalablement mis en place des preuves, qui s'appuient elles-mêmes sur des théories au sujet de la proportionnalité de grandeurs incommensurables, établies en amont dans leurs ouvrages respectifs, explique la brièveté de leurs arguments lors de la preuve de l'énoncé 5, quelques lignes chez Vincent (voir figure III.148 p. 609), et une simple remarque chez Puille (voir citation p. 579).



Quant au cas de deux hauteurs incommensurables entre elles, le moyen de démonstration est tout à fait analogue à celui des *numéros* **118** et **182**:

Il suffit de prouver que chacune des valeurs approchées, $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots$ du rapport de AD à A′D′, exprime avec le même degré d'approximation celui de ABCD à A′B′C′D′; et pour cela, en divisant d'abord A′D′ en n parties égales, et portant l'une de ces parties n fois sur AD, puis, menant par tous les points de division des parallèles à AB, A′B′, on parvient à faire voir que le rapport des deux rectangles se trouve compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, etc.

FIGURE III.148 – Extrait de la preuve de l'énoncé 5 dans la cas incommensurable chez Vincent (1844, p. 170-171) - La section 118 mentionnée traite de la proportionnalité des angles au centre avec les arcs qui leur correspondent (Vincent, 1844, p. 87-88), et la section 182 du partage d'un trapèze par une parallèle à sa base en segments proportionnels (Vincent, 1844, p. 144)

Néanmoins, en allant chercher ce qui se cache derrière cette apparente simplicité, la théorie sous-jacente qui se met à jour est plus complexe. Vincent cherche en effet à expliciter l'expression « rapport numérique de deux grandeurs incommensurables entre elles » et le fait que « deux grandeurs incommensurables entre elles sont proportionnelles à deux autres grandeurs incommensurables entre elles », ce qui est loin d'être immédiat (Vincent, 1844, p. 86). Il convoque deux autres domaines des mathématiques, indispensables d'après lui à cette compréhension :

> Pour comprendre ces expressions, il faut observer d'abord que l'arithmétique et l'algèbre fournissent des méthodes pour évaluer approximativement un nombre incommensurable quelconque [...] par une série de nombres commensurables $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ... qui diffèrent de moins en moins du nombre à évaluer ; en sorte que celui- ci est successivement compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ et $\frac{m'+1}{n'}$, ..., les différences $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{n''}$, ... décroissant indéfiniment jusqu'à 0. (Vincent, 1844, p. 86)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les connaissances de l'arithmétique et de l'analyse (qu'il désigne pour sa part par « algèbre ») entrent donc en pleine interaction avec une partie des savoirs géométriques, qui nécessitent leur mobilisation pour pouvoir être démontrés. Vincent n'hésite d'ailleurs pas à employer le vocabulaire spécifique de l'analyse, en précisant que « les nombres approximatifs $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ... ont pour limite le nombre incommensurable proposé » et que deux grandeurs sont dites incommensurables entre elles « lorsque [leurs] rapports approximatifs convergent vers un pareil nombre ». Quant à l'extension de la notion de proportionnalité aux grandeurs incommensurables, elle s'exprime de la sorte :

> Le rapport de deux grandeurs quelconques A, B, est égal au rapport de deux autres A', B', quand on peut démontrer que les nombres $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ... sont à la fois des valeurs approchées successives du rapport de A à B et du rapport de A' à B', rapports étant exprimés tous deux au même degré d'approximation. (Vincent, 1844, p. 87)

La preuve détaillée qui suit cette méthode pour montrer la proportionnalité des angles au centre et des arcs compris entre leurs côtés, est donc adaptable au résultat concernant les aires des rectangles de même base, même si elle ne figure pas sous forme rédigée dans le texte de Vincent.

Chez Puille ne figure pas de définition générale des grandeurs incommensurables proportionnelles similaire à celle de Vincent. Toutefois, au cours de la démonstration concernant les angles à laquelle il se réfère pour prouver l'énoncé 5 dans le cas incommensurable, il commence par diviser l'angle considéré en 10 parties égales, puis conclut que les deux rapports (celui des arcs et celui des angles), « ne diffèrent pas de $\frac{1}{10}$ ». Puis il généralise en affirmant que s'il l'avait divisé en « 100, 1000, 10000 parties égales », les rapports différeraient de moins de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$. Il conclut en énonçant qu'« il serait alors facile de montrer que leur différence est moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit » (Puille, 1855, p. 37). L'idée principale reste donc la même que chez Vincent, mais exprimée de manière moins théorique, avec des rapports numériques qui remplacent les expressions algébriques, et une référence aux limites et à la convergence plus implicite.

Parmi les auteurs qui traitent le cas incommensurable dans le cadre de la mesure du rectangle, plusieurs se réfèrent donc à un passage à la limite, de manière plus ou moins explicite et assumée. En 1839, un peu avant l'ouvrage de Vincent, et juste après la promulgation officielle de la méthode infinitésimale dans les programmes, Sonnet évoque cette idée sans en employer les termes précis, mais en la décrivant par des périphrases. Par exemple, à la fin de la preuve de l'énoncé 1, il écrit : « Si la base et la hauteur sont incommensurables, on pourra toujours mesurer l'une et l'autre avec

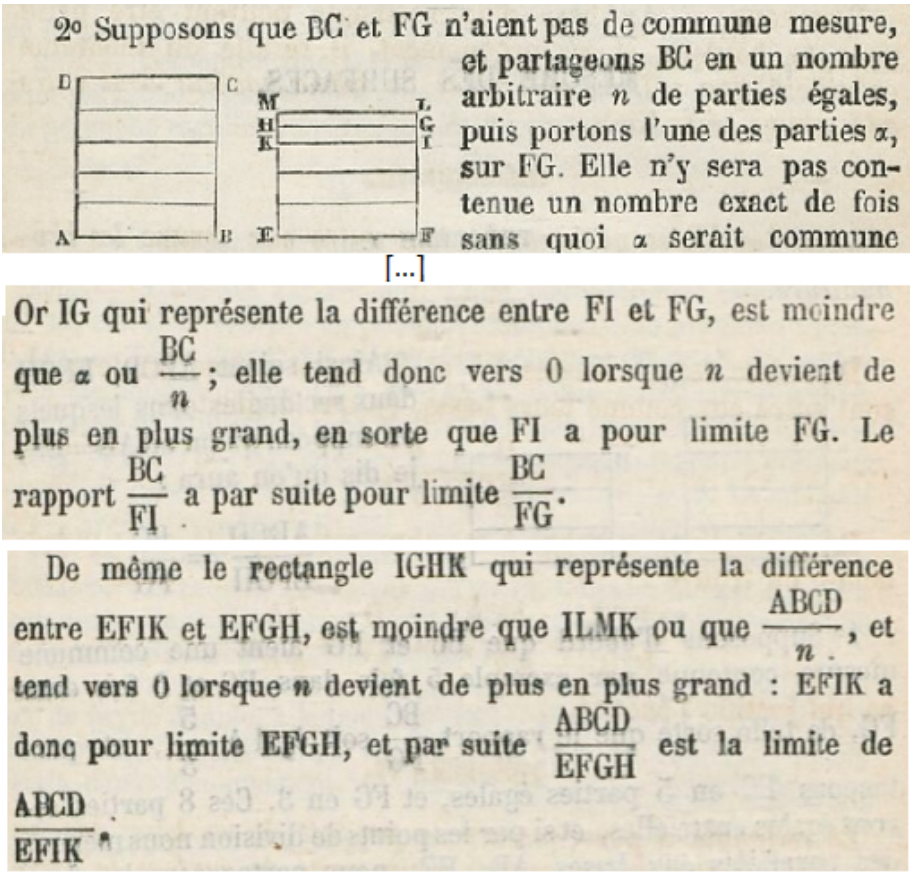
Licence CC BY-NC-ND 3.0

un degré d'approximation, tel que l'erreur soit inappréciable, c'est-à-dire les rapporter à une unité de longueur assez petite, pour que cette unité soit contenue un nombre exact de fois dans chacune d'elles, à cela près d'un reste inappréciable » (Sonnet, 1839, p. 211), puis, à la fin de la preuve de l'énoncé 5 : « On arriverait au même résultat, quelque petite que fût la commune mesure entre les bases [...]. La proportion ci-dessus subsisterait donc encore, si cette commune mesure était infiniment petite, c'est-à-dire si les deux bases étaient incommensurables » (Sonnet, 1839, p. 232).

Quarante années plus tard, dans le traité de Tombeck, les quantités « infiniment petites », les « erreurs inappréciables » ou autres « différences inassignables » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 70) ont laissé place à un plein usage des limites et de leur vocabulaire, notamment au sein de la preuve de l'énoncé 5 (voir figure III.149 p. 612). Cette méthode, très analytique [212], permet à Tombeck de traiter avec efficacité les preuves dans lesquelles il est nécessaire de distinguer le cas commensurable du cas contraire. S'appuyant sur la première situation, il en déduit la seconde en partageant la grandeur concernée en n subdivisions, puis en faisant tendre n vers l'infini, ce qui revient à faire tendre la largeur des subdivisions vers 0. C'est ce qu'il fait notamment dans la preuve de l'aire du rectangle, en coupant la hauteur BC de l'un des rectangles en portions infiniment petites et en étudiant dans un tel cas les limites des rapports d'aires ou de longueurs en jeu dans la démonstration. Cette démarche est courante dans son ouvrage. Il l'emploie, en géométrie plane, pour montrer la proportionnalité entre les arcs et les angles dans le cercle, et pour traiter le découpage d'un triangle par des parallèles à sa base [213]. Cette méthode systématique, produisant des preuves à la fois brèves et intelligibles, lui évite de recourir à une théorie globale sur la proportionnalité des grandeurs incommensurables, comme l'ont fait certains de ses prédécesseurs [214].

212. Au sens actuel de l'analyse infinitésimale.
213. En géométrie dans l'espace, il l'utilise également pour traiter les angles dièdres, le rapport des volumes des parallélépipèdes rectangles, et le rapport des fuseaux dans une sphère.
214. Cirodde, Rouché et Comberousse et Méray, comme étudié antérieurement.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



2° Supposons que BC et FG n'aient pas de commune mesure, et partageons BC en un nombre arbitraire n de parties égales, puis portons l'une des parties α, sur FG. Elle n'y sera pas contenue un nombre exact de fois sans quoi α serait commune

[...]

Or IG qui représente la différence entre FI et FG, est moindre que α ou $\frac{BC}{n}$; elle tend donc vers 0 lorsque n devient de plus en plus grand, en sorte que FI a pour limite FG. Le rapport $\frac{BC}{FI}$ a par suite pour limite $\frac{BC}{FG}$.

De même le rectangle IGHK qui représente la différence entre EFIK et EFGH, est moindre que ILMK ou que $\frac{ABCD}{n}$, et tend vers 0 lorsque n devient de plus en plus grand : EFIK a donc pour limite EFGH, et par suite $\frac{ABCD}{EFGH}$ est la limite de $\frac{ABCD}{EFIK}$.

FIGURE III.149 – Extrait de la preuve de l'énoncé 5 dans le cas incommensurable avec passage à la limite chez Tombeck (1879, p. 218)

En 1832, en amont de l'entrée officielle de la méthode infinitésimale dans les programmes, Vincent en vantait déjà les mérites relativement aux méthodes plus anciennes :

> La méthode désignée par les anciens géomètres sous le nom de méthode d'exhaustion, et dont l'usage est presque généralement répandu, est celle qu'à l'exemple de la plupart des auteurs, j'avais employée pour les démonstrations relatives aux *incommensurables* ; mais convaincu maintenant, par les critiques fondées auxquelles cette application a donné lieu, comme par ma propre expérience, que ce mode d'argumentation, lorsqu'il a pour objet de démontrer l'égalité des rapports incommensurables, est alors un véritable paralogisme, [...] j'y ai substitué une méthode qui m'avait été communiquée depuis plusieurs années, ainsi qu'à diverses autres personnes, par M. Ampère. (Vincent, 1832, p. viii)

Cette remarque, formulée dès la préface de son ouvrage, témoigne d'une certaine chronologie dans les étapes de l'intervention de l'analyse infinitésimale et de la notion de limite pour traiter le cas de l'incommensurabilité dans les ouvrages de géométrie.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

En amont de l'officialisation de la méthode des infiniment petits dans les programmes en 1837, la situation des grandeurs ne présentant pas de commune mesure n'est pas forcément prise en compte, même chez des auteurs parlant par ailleurs de quantités infiniment petites, comme Bézout. La citation de Vincent ci-avant, en 1832, met en évidence les difficultés que pose l'incommensurabilité en géométrie, que les méthodes anciennes ne permettent pas de régler avec toute la rigueur souhaitée à cette époque, et la nécessité de recourir à d'autres voies. En 1836, Cirodde commence à explorer le traitement des grandeurs incommensurables par l'entremise des limites. En aval, les auteurs commencent à investir la notion de limite, comme Sonnet qui traite en 1839 les cas incommensurables des énoncés 1 et 5 en convoquant cette idée, mais sans le vocabulaire associé et sans formalisme spécifique. Vincent et les fils Cirodde (en 1844, puis 1858) suivent une même démarche visant à théoriser les rapports et la proportionnalité des grandeurs incommensurables via des limites de séries de nombres commensurables, avec une algébrisation manifeste des notations. Rouché et Comberousse en 1866, ainsi que Méray en 1874, fondent une théorie globale et axiomatisée des grandeurs incommensurables, et les limites interviennent en dernier lieu des raisonnements fondés sur ce système, de façon plus ou moins formelle et explicite. Enfin, Tombeck met au point, en 1879, un raisonnement type, très ouvertement bâti sur la notion de limite, qui lui permet de régler efficacement et de manière concise, les preuves des résultats géométriques faisant intervenir les grandeurs incommensurables, comme celui de l'aire du rectangle (voir figure III.150 p. 614).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

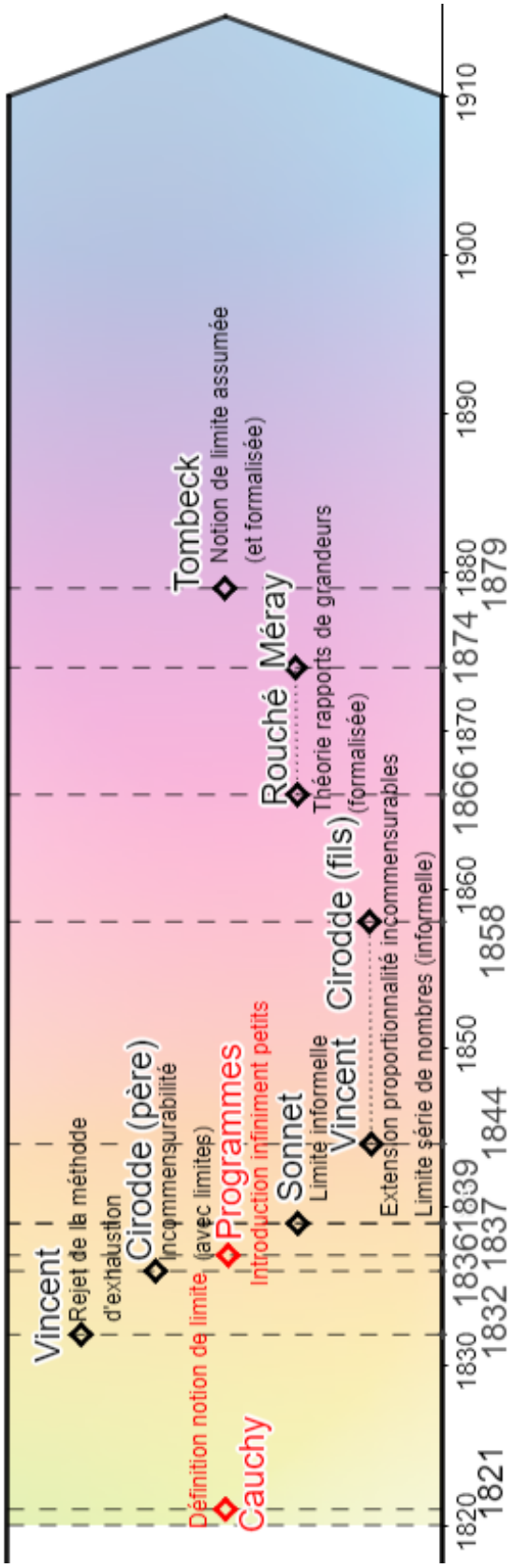


FIGURE III.150 – Frise résumant l'évolution des notions d'infiniment petits et de limites relativement à l'aire du rectangle dans le cas incommensurable dans les manuels du corpus, avec comme repères la définition de la notion de limite par Cauchy (1821) et l'introduction de la méthode des infiniment petits dans les programmes

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Au XIX^e siècle, la séparation entre grandeurs et nombres, que l'on peut trouver notamment chez Euclide, semble bien dépassée, ce dont témoigne l'étude des preuves du théorème de l'aire du rectangle, en lien étroit avec la nature des rapports des grandeurs, mais aussi des nombres qui leur sont associés. Ce résultat et sa démonstration forment par conséquent un territoire où s'expriment les considérations sur les grandeurs et les nombres incommensurables, chez les auteurs qui font le choix de ne pas éviter cette question. Les preuves de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable, produites par ces auteurs, se situent également à l'interface de la géométrie, de l'arithmétique et surtout de l'analyse infinitésimale, puisque de nombreux flux de connaissances sont mis en jeu à cette occasion. L'abandon progressif de la méthode d'exhaustion se fait au profit d'un usage plus généralisé des infiniment petits, la notion de limite des rapports variables permet d'approfondir la définition de la proportionnalité des grandeurs géométriques. Plus généralement, les limites s'invitent dans le discours démonstratif en géométrie, d'abord implicitement puis sous une forme de plus en plus assumée. L'arithmétique prend le relais chez certains auteurs en proposant une version plus empirique des rapports variables pris sous une forme numérique. Au cours de ce processus, l'analyse offre également à l'arithmétique une méthode pour étendre la notion de proportionnalité aux grandeurs incommensurables (voir figure III.151 p. 615).

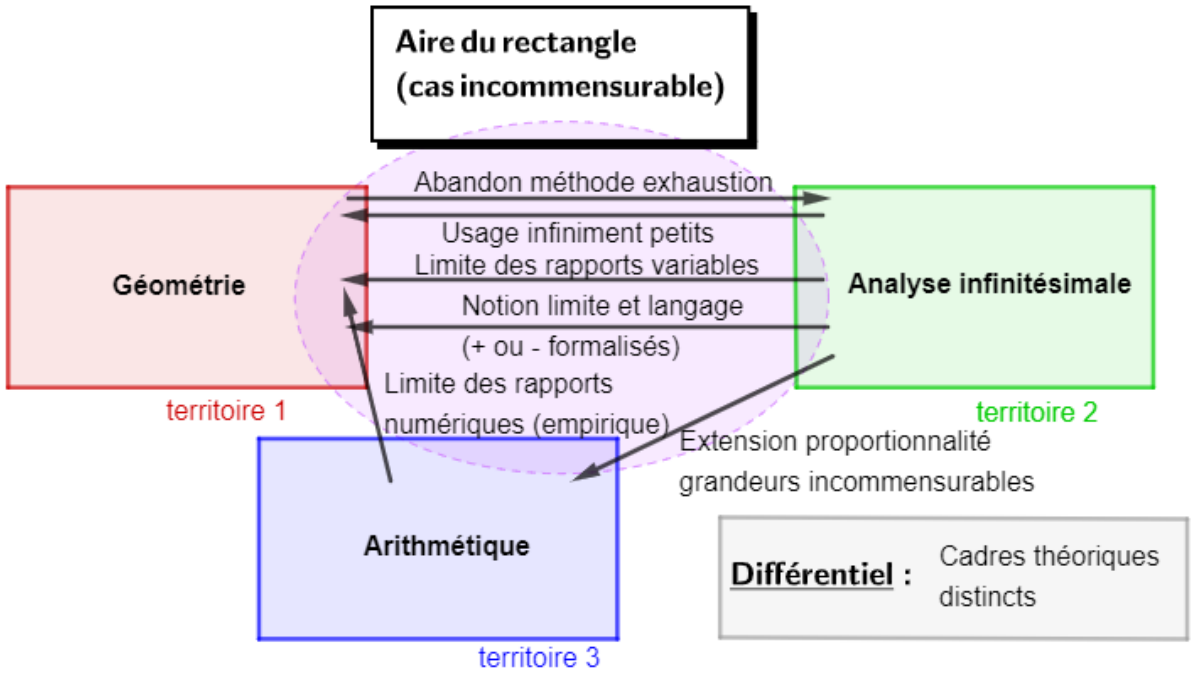


FIGURE III.151 – Second schéma montrant en quoi la preuve de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable est à l'interface de la géométrie, de l'arithmétique et de l'analyse

Dans des ouvrages essentiellement destinés à l'enseignement secondaire et supérieur, les auteurs se confrontent au problème épineux de présenter à des élèves des

Licence CC BY-NC-ND 3.0

résultats mettant en jeu des notions complexes, tout en restant intelligibles. Leur tâche est d'autant plus ardue que les connaissances d'arithmétique, d'algèbre et d'analyse qui interviennent dans ces questions ne sont pas encore totalement fixées dans le monde scientifique de l'époque, comme la correspondance entre grandeurs et nombres, ou la construction des nombres irrationnels, puis réels. Les textes des manuels que nous venons d'analyser accèdent donc légitimement au statut de production mathématique savante, car ils montrent les liens que leurs auteurs entretiennent avec les développements scientifiques en cours, tout en manifestant une grande ingéniosité pour clarifier des notions encore instables et les transposer en des contenus d'enseignement pertinents pour la géométrie à un niveau intermédiaire. Certains auteurs ont d'ailleurs le double rôle d'enseignant et de scientifique, actifs dans les recherches de leur temps, à l'instar de Rouché, qui a entre autres donné son nom à un théorème d'analyse complexe, ou Méray qui a notamment, parmi tous ses travaux, très largement contribué à la fondation des nombres irrationnels.

III.3.2 Infiniment petits et limites pour la détermination des aires curvilignes

III.3.2.1 Le cas du cercle

La mesure de l'aire du cercle n'est pas une question triviale, comme nous avons pu l'observer auparavant. Le recours à l'infini, s'il parvient à être évité par des auteurs, s'impose néanmoins au cours du siècle, ce dont témoigne l'évolution des programmes, principalement de l'enseignement secondaire, à propos du cercle. En effet, dès 1833, les programmes de mathématiques pour les collèges royaux prévoient d'étudier les cercles, dans le cadre de la « mesure des aires », comme les « polygones réguliers d'un nombre infini de côtés » (Belhoste, 1995, p. 133). La consigne est précisée en 1847 dans les programmes du même niveau, indiquant que « les théorèmes relatifs à la circonférence et à l'aire du cercle seront démontrés par la considération des infiniment petits », tout comme, d'ailleurs « les théorèmes relatifs aux surfaces et aux volumes des trois corps ronds [sphère, cône, cylindre] » (Belhoste, 1995, p. 225). Cette formulation en termes d'infiniment petits, perdure pour l'ordre secondaire jusqu'aux années 1850, et se retrouve, pour l'enseignement primaire, uniquement dans le programme pour les écoles normales primaires de 1838, qui indiquent comme leçon à étudier : « Rapport des circonférences considérées comme des polygones d'une infinité de côtés » (D'Enfert, 2003c, p. 99). À partir de 1852, la même idée est reprise sous la perspective de la notion de « limite », qui s'est vue entre temps développée et définie formellement par Cauchy, dans les années 1820. Les programmes de 3ème de 1852, puis de seconde en 1865 préconisent par exemple de considérer la circonférence du cercle « sans démonstration,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polynôme inscrit dans cette courbe, à mesure que ses côtés diminuent indéfiniment » (Belhoste, 1995, p. 285, 397).

Le cercle vu comme limite des polygones inscrits et circonscrits

Dans les manuels, les auteurs suivent en grande partie ces préconisations. Mis à part quelques exceptions, dont Legendre fait partie, qui n'emploient que la méthode synthétique et se refusent à utiliser des considérations sur l'infini (voir la sous-section III.1.1.3 p. 367)[215], les géomètres proposent presque tous de « regarder [la] circonférence [...] comme le périmètre d'un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits », considération qui « s'accorde d'ailleurs avec le point de vue sous lequel on envisage en général toutes les lignes courbes » et qui « conduit à des résultats importants » (Sonnet, 1839, p. 189). Voir le cercle sous cet angle relève pour certains de la définition, c'est-à-dire d'un pré-requis que l'on s'accorde à admettre. D'autres le justifient comme un principe que l'on se doit d'expliquer, même de manière plus informelle. Une autre partie des auteurs, plus minoritaire, démontre ce principe en utilisant des outils mathématiques adaptés.

Mauduit, par exemple, énonce directement le problème suivant : « Considérant le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, trouver sa surface » (Mauduit, 1790, p. 118), sans donner d'explication spécifique à la première partie de sa phrase. Dans le même esprit, Bézout présente une configuration géométrique fondée sur deux polygones réguliers semblables, respectivement inscrits dans deux cercles concentriques (voir figure III.152 p. 618). De cette figure et du discours qui l'accompagne, Bézout tire trois propositions :

> 1° On peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés ; 2° Les cercles sont des figures semblables ; 3° Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons, ou comme leurs diamètres. (Bézout, 1848, p. 48-49)

La similitude des polygones est démontrée par leur décomposition en triangles deux à deux semblables, puis celle des cercles en découle en faisant augmenter le nombre de côtés indéfiniment :

> Comme cette similitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu lorsque le nombre des côtés de chacun sera multiplié à l'infini : or dans ce cas on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence et le polygone inscrit. (Bézout, 1848, p. 48)

215. Voir (Lamandé, 1990) pour les études comparées de trois preuves relatives à l'aire du cercle au tournant du XIX^e siècle, dont celles de Legendre et Lacroix. Il est à noter de plus que l'ouvrage de Legendre est écrit et édité avant la parution des instructions officielles mentionnées ci-avant.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Le fait de voir le cercle comme la limite d'un polygone inscrit n'est donc pas démontré, mais utilisé comme argument implicite pour justifier le rapport des circonférences, qui sont entre elles « comme leurs rayons », avant d'être formalisé par une phrase de type proposition dans l'un des trois points de la conclusion. Cette affirmation est ainsi intégrée à un discours argumentatif et accède au statut d'énoncé propositionnel quoique n'ayant pas été formellement démontrée, puisqu'elle aurait alors servi à se démontrer elle-même.

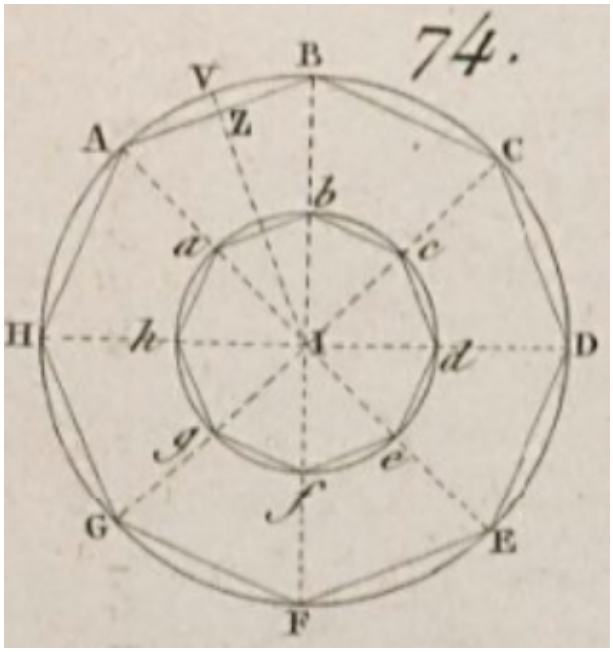


FIGURE III.152 – Figure servant de support à la proposition sur le cercle vu comme limite d'un polygone chez Bézout (1848, pl. ii)

Sonnet, quant à lui, développe des propositions sur la construction des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle, d'un nombre de côtés qui augmente en doublant. À l'issue de cette présentation, il en déduit :

> Nous avons vu que si l'on inscrit à un cercle un polygone régulier, et qu'on lui circonscrive un polygone semblable, la circonférence de ce cercle est toujours plus grande que le périmètre du polygone inscrit, et moindre que périmètre du polygone circonscrit. Nous avons vu en outre que si l'on double le nombre des côtés de ces polygones, le périmètre du polygone inscrit augmente, tandis que le périmètre du polygone circonscrit diminue. À mesure que le nombre des côtés augmente, ces deux périmètres approchent donc de plus en plus l'un de l'autre ; et puisque la circonférence du cercle est comprise entre eux, chacun d'eux approche de plus en plus d'être égal à cette circonférence. (Sonnet, 1839, p. 188-189)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Même si le vocabulaire employé peut rétrospectivement faire penser à la notion de suites adjacentes, Sonnet n'emploie pas de concept d'infiniment petits ni de limite dans son raisonnement, qui reste au stade d'une preuve moins formalisée, car exprimée en langage naturel. La proximité du texte de Sonnet avec celui de Lacroix est remarquable, lorsque ce dernier exprime la même propriété[216] :

> Puisque, d'après ce qui précède, les contours des polygones circonscrits diminuent sans cesse à mesure qu'ils approchent de la circonférence du cercle, tandis que ceux des polygones inscrits augmentent toujours dans la même circonstance, il est visible que la circonférence du cercle est moindre que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit. Cette circonférence différera donc moins de l'un quelconque de ces contours, qu'ils ne diffèrent entre eux ; et l'on pourra par conséquent trouver un polygone, soit inscrit, soit circonscrit, tel que la différence entre son contour et la circonférence du cercle, soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit. (Lacroix, 1808, p. 98)

Les éléments de langage communs mettent en évidence le fait que ces principes sont exprimés de façon quasiment identique (si ce n'est l'utilisation du terme « contour » chez Lacroix, repris en « périmètre » chez Sonnet). Cela laisse également apparaître en quoi les énoncés diffèrent, particulièrement en relation avec la notion de limite. Sonnet mentionne cette idée via l'expression « s'approcher de plus en plus », là où Lacroix est beaucoup plus précis, en évoquant des « grandeurs » qui « diffèrent » entre elles de telle sorte que cette « différence » devienne « moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit ».

La démarche globale des deux auteurs est également très proche[217]. Tous deux étudient les inscriptions et circonscriptions de polygones réguliers dans des cercles, en théorie comme en pratique, en doublant le nombre des côtés et en traitant de nombreux cas particuliers (polygones réguliers à 3, 6, 12, 24, 48, puis 5, 10, 20, 40 côtés par exemple). Néanmoins, en termes de preuve, le texte de Lacroix est plus riche puisque ce dernier démontre les inégalités relatives au fait que la circonférence soit moindre ou plus grande que les contours des polygones inscrits et circonscrits. Surtout, il prouve formellement, par des manipulations de rapports, que la différence $P - p$ des périmètres

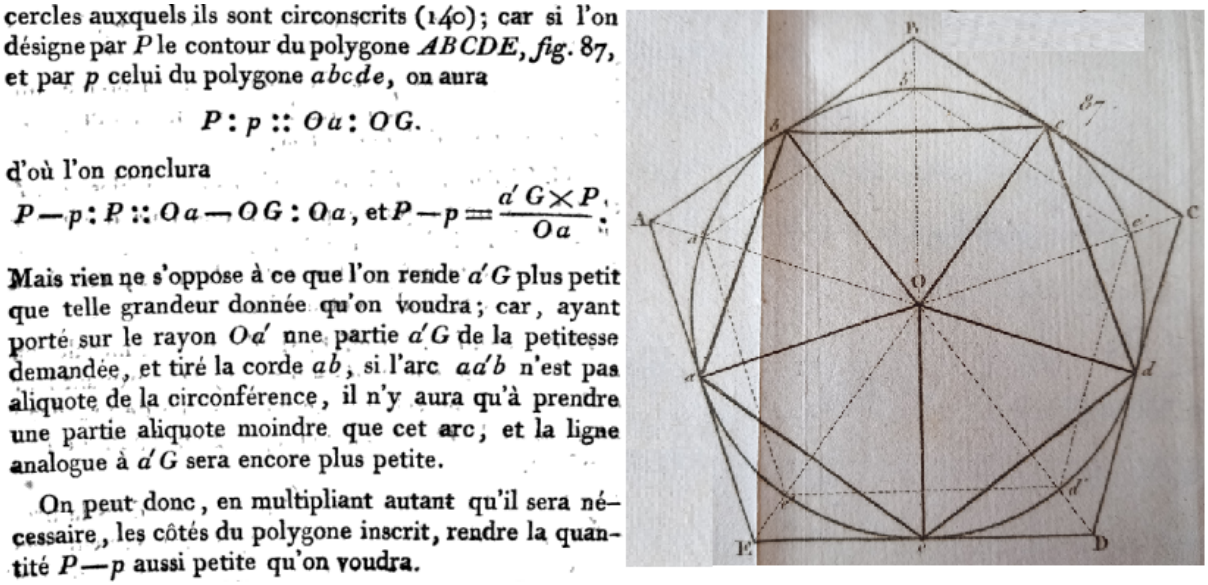
216. Nous choisissions de souligner les termes identiques à ceux employés par Sonnet afin de mettre en évidence la grande proximité entre les deux extraits.

217. Lacroix et Sonnet se réfèrent tous les deux à Archimède, et font partie des 26 auteurs de manuels qui citent ce savant, tout comme Mauduit et Bézout que nous avons évoqués auparavant (voir dans la sous-section II.2.2.1 le diagramme II.16 p. 209). En revanche, Sonnet ne mentionne pas le travail de Lacroix, malgré la proximité de son texte avec le sien (voir p. 215 et suivantes, notamment le graphique II.18 p. 217).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

des polygones peut être rendue « aussi petite qu'on voudra » (voir figure III.153 p. 620), avant d'énoncer « un théorème qui pourra s'appliquer à toutes les propositions du genre de celle [qu'il a] à démontrer ». Ce théorème s'énonce ainsi :

> Si deux grandeurs invariables A et B sont telles qu'on puisse prouver que leur différence $A - B$ est moindre qu'une troisième grandeur δ, quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles. (Lacroix, 1808, p. 98)



cercles auxquels ils sont circonscrits (140); car si l'on désigne par P le contour du polygone $ABCDE$, *fig.* 87, et par p celui du polygone $abcde$, on aura

$$P : p :: Oa : OG.$$

d'où l'on conclura

$$P - p : P :: Oa - OG : Oa, \text{ et } P - p = \frac{a'G \times P}{Oa}.$$

Mais rien ne s'oppose à ce que l'on rende $a'G$ plus petit que telle grandeur donnée qu'on voudra; car, ayant porté sur le rayon Oa' une partie $a'G$ de la petitesse demandée, et tiré la corde ab, si l'arc $aa'b$ n'est pas aliquote de la circonférence, il n'y aura qu'à prendre une partie aliquote moindre que cet arc, et la ligne analogue à $a'G$ sera encore plus petite.

On peut donc, en multipliant autant qu'il sera nécessaire, les côtés du polygone inscrit, rendre la quantité $P - p$ aussi petite qu'on voudra.

FIGURE III.153 – Le cercle comme limite des polygones inscrits et circonscrits chez Lacroix (1808, 97, pl. v)

C'est donc une théorie sur les égalités de grandeurs établies par les infiniment petits que Lacroix propose de mettre en œuvre dans la suite de son traité. Ce dernier marche dans les pas d'Archimède, qu'il cite en indiquant que le savant a déterminé le rapport de la circonférence au diamètre par de tels procédés. Il est lui-même suivi par Sonnet trente années plus tard, qui s'inspire manifestement de l'enchaînement de ses propriétés et de l'esprit de sa démarche, tout en se démarquant par une volonté de plus grande simplicité, en s'éloignant d'une idée de limite formalisée. Sonnet adapte son discours au public auquel son livre s'adresse, soit « aux écoles primaires supérieures, aux écoles industrielles, [...] aux écoles normales primaires », mais également « aux élèves des classes inférieures de mathématiques dans les collèges » (Sonnet, 1839, p. viii) et propose ce compromis : justifier que le cercle peut être vu comme un polygone d'une infinité de côtés, mais sans entrer dans les détails d'une théorie sur les limites construite formellement [218].

218. Sonnet, tout comme Bézout et Lacroix, a son ouvrage recommandé par les programmes officiels (groupe 4 de la seconde classification : voir tableau A.2 p. 667) et se conforme ainsi aux dernières recom-

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Plusieurs décennies plus tard, l'assimilation de la notion de limite par les auteurs des manuels de géométrie est manifeste, en particulier relativement à la question du cercle vu comme limite de polygones réguliers. Cette évolution vers une plus grande rigueur apparaît de manière très sensible chez Rouché et Comberousse, qui énoncent comme une définition que « la longueur d'une circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier qui y est inscrit et dont le nombre des côtés croît indéfiniment », avant de préciser que « pour justifier cette définition, il faut prouver que cette limite existe et quelle est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître le nombre des côtés » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 188). Nous n'entrerons pas dans les détails de cette preuve, qui ne traite pas des aires à proprement parler. Nous remarquons néanmoins qu'elle figure en petits caractères dans leur ouvrage, ce qui indique qu'elle est de niveau plus avancé que les programmes officiels et qu'elle convient davantage aux élèves se destinant aux écoles spéciales du gouvernement. Elle se présente en deux parties, l'une démontrant l'existence de la limite, et l'autre son unicité, ce qui indique une réelle appropriation de la théorie des limites élaborée au cours du siècle, notamment par Cauchy.

Conséquences sur la détermination de l'aire du cercle

Le cercle peut donc être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits, ou sous une autre formulation, comme la limite d'une suite de polygones réguliers inscrits et circonscrits, lorsque leur nombre de côtés croît indéfiniment. Ce fait, qu'il soit admis, justifié ou démontré formellement, sert d'appui à la détermination de l'aire du cercle. Mais bien entendu, entre la circonférence et l'aire, il existe un saut à franchir, que là encore, tous les auteurs n'effectuent pas de la même manière.

Le raisonnement proposé par Puille peut être décrit comme reposant sur l'assimilation. Il considère préalablement le cercle comme « un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits », et en tant que tel, en lui appliquant le théorème sur la mesure des polygones réguliers établi auparavant, il déduit que son aire est « égale à son périmètre multiplié par la moitié de la ligne abaissée du centre sur le milieu d'un de ses côtés ». Il désigne cette ligne comme « l'apothème, qui se confond essentiellement avec le rayon », pendant que « le périmètre d'un cercle n'est rien d'autre que la circonférence ». Il conclut de cette double assimilation (apothème = rayon, périmètre = circonférence) que l'aire du cercle est « le produit de sa circonférence par la moitié de

mandations des textes officiels de 1838 sur l'usage des infiniment petits pour l'étude des circonférences (Belhoste, 1995, p. 151).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

son rayon » (Puille, 1855, p. 129). Deux décennies plus tard, le discours exposé par Bos repose sur les mêmes leviers, même si le vocabulaire a un peu évolué :

> Supposons que dans le cercle donné on inscrive un polygone régulier d'un très-grand nombre de côtés ; l'aire de ce polygone différera très-peu de celle du cercle, le périmètre de ce polygone différera de même très-peu de la circonférence, et l'apothème sera très-voisin du rayon du cercle ; et si l'on augmente de plus en plus le nombre des côtés du polygone régulier, il se rapprochera indéfiniment du cercle, son périmètre tendra à devenir égal à la circonférence et l'apothème différera du rayon aussi peu qu'on voudra. On peut donc regarder le cercle comme un polygone régulier d'un nombre illimité de côtés, ayant pour périmètre la circonférence, et pour apothème le rayon. (Bos, 1875, p. 138)

Bos assimile lui aussi rayon et apothème, et périmètre et circonférence, mais en utilisant un vocabulaire des infiniment petits, ou plutôt des quantités « très-petites », puisqu'il s'évertue à ne pas réellement mentionner l'infini dans sa formulation. Il l'évoque seulement implicitement à travers des périphrases du type « augmenter de plus en plus », « très-voisin » ou encore « nombre illimité de côtés ». Sa conclusion est bien entendu la même que celle de Puille, et dans ces deux cas, le procédé d'assimilation polygone régulier/cercle, apothème/rayon, périmètre/circonférence, soutient le passage de l'énoncé sur l'aire des polygones réguliers à celui sur la mesure du cercle. Cette assimilation repose sur le concept de ligne courbe vue « comme un assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite, ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit » (L'Hospital, 1696, p. 3), tel que le véhicule la théorie des infiniment petits.

En 1850, Eysseric et Pascal donnent une version intermédiaire de la preuve du cercle « considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés ». Le concept sous-jacent mobilisé est dans leur cas, comme chez Puille et Bos, celui des infiniment petits, et le principe argumentatif global est le même que celui vu chez Sonnet ci-avant — les polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés double successivement se rapprochent indéfiniment de la circonférence — mais en augmentant le discours de considérations plus précises sur les surfaces et les limites des grandeurs en jeu :

> Les surfaces des polygones successifs iront en augmentant pour se rapprocher de celle du cercle. [...] Ces polygones réguliers successifs seront toujours décomposables en triangles isocèles de plus en plus nombreux et plus petits, dans lesquels l'apothème allant toujours en augmentant tendra

Licence CC BY-NC-ND 3.0

> sans cesse à égaler le rayon. En sorte qu'à la limite, le périmètre du polygone [...] se confondra avec la circonférence et l'apothème avec le rayon[219]. (Eysseric et Pascal, 1850, p. 88-89)

Les arguments de décomposition des polygones en triangles, et de la limite de leurs circonférences et apothèmes forment le chaînon principal entre les théorèmes sur le cercle en tant que ligne et celui sur la mesure de son aire. Eysseric et Pascal expriment cette transition en indiquant que le cercle peut être considéré comme la réunion d'une infinité de triangles isocèles formés sur « de petits éléments rectilignes » et dont le sommet est le centre, et que par conséquent « la surface entière du cercle sera composée de l'ensemble de ces triangles élémentaires, dont la hauteur commune ne différera pas du rayon de ce cercle », avant d'en déduire la formule de l'aire du cercle (Eysseric et Pascal, 1850, p. 108). Dans le même esprit, Salicis s'adresse aux jeunes filles qui suivent son cours de géométrie à la Sorbonne en précisant que « le cercle n'est qu'un polygone régulier d'un nombre de côtés si considérable que nous ne saurions les compter », mais que « quelques petits que soient ces côtés, nous pouvons toujours admettre par la pensée que chacun d'eux soit la base d'un triangle infiniment petit » (Salicis, 1869, p. 518). Comme ses prédécesseurs Eysseric et Pascal, mais dans un style différent, il s'appuie sur l'image mentale du cercle composé d'une infinité de triangles de bases infiniment petites pour donner à comprendre à ses lectrices le parallèle qu'il fait ensuite entre l'aire des polygones réguliers et celle du cercle.

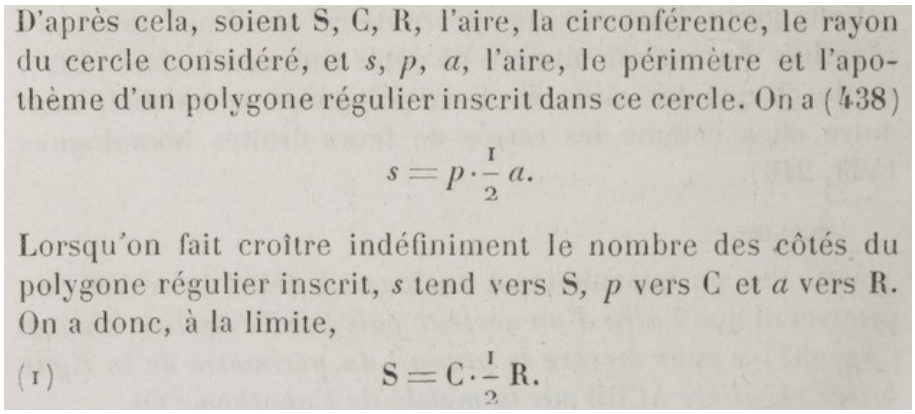
La transition entre le cercle en tant que ligne et la détermination de son aire repose unanimement sur la mesure des polygones réguliers, accompagnée de considérations sur l'infini. Dans la première moitié du siècle et un peu au-delà, le paradigme en vigueur semble être celui des infiniment petits, comme les exemples précédents tendent à le montrer. Néanmoins, c'est la « méthode des limites » (voir p. 115) qui va s'imposer progressivement, en accord avec les recommandations des programmes, jusqu'à produire des discours très simplifiés par cet usage à la fin du siècle, lorsque les auteurs n'hésitent pas à l'appliquer « franchement » (voir p. 115). Par exemple, dans le manuel de Leyssenne, ce dernier écrit : « Nous avons vu que, lorsqu'on double indéfiniment le nombre de côtés du polygone régulier inscrit dans un cercle, son périmètre s'approche de plus en plus de la circonférence, et qu'il a pour limite cette circonférence. On conçoit de même que l'aire du polygone s'approche de plus en plus de l'aire du cercle, et a pour limite cette aire, pendant que l'apothème a pour limite le rayon du cercle ». Il met ensuite en parallèle la formule de l'aire d'un polygone régulier, « produit de son périmètre par

219. Le mot « limite » employé ici n'est pas représentatif d'une pensée issue de la théorie des limites, puisque le terme n'est employé qu'une seule fois dans ce sens dans leur ouvrage, et de surcroît au sein de l'expression presque courante « à la limite ». Le texte montre davantage de références au vocabulaire et aux formulations de la théorie des infiniment petits.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la moitié de son apothème », avec celle du cercle, « produit de la circonférence par la moitié du rayon », obtenue « à la limite » (Leyssenne, 1890, p. 236-237).

Bien qu'ayant rigoureusement démontré que la circonférence d'un cercle est la limite de la suite des périmètres de polygones inscrits dont le nombre de côté augmente indéfiniment (voir p. 621), Rouché et Comberousse affirment ultérieurement, sans qu'une preuve y soit associée, que « l'aire du cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits dont le nombre des côtés croît indéfiniment » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 292). Ils procèdent alors par passage à la limite directement à partir de la formule de l'aire d'un polygone régulier pour obtenir l'aire du cercle. Cette présentation de la preuve est visible ultérieurement dans d'autres ouvrages, comme celui d'André (voir figure III.154 p. 624).



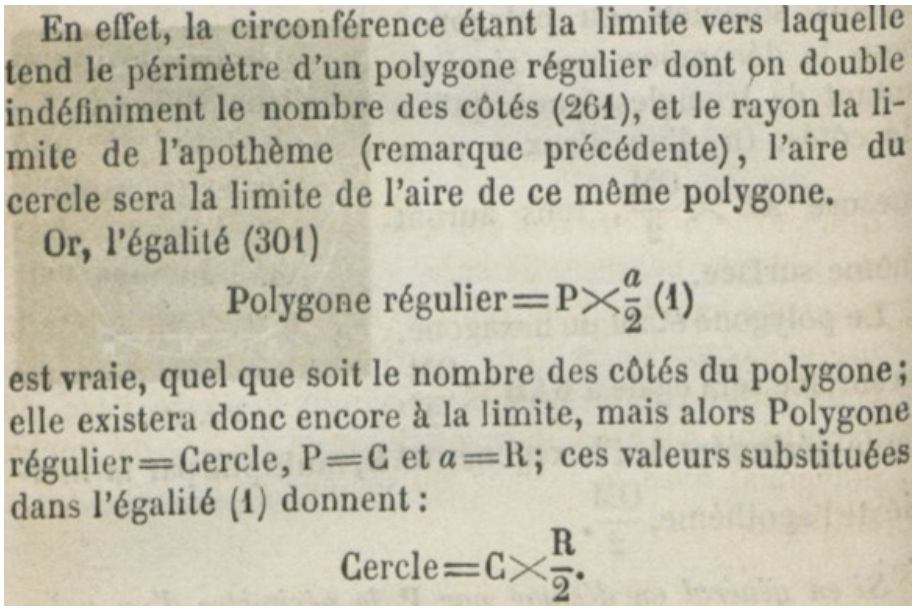
D'après cela, soient S, C, R, l'aire, la circonférence, le rayon du cercle considéré, et s, p, a, l'aire, le périmètre et l'apothème d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle. On a (438)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier inscrit, s tend vers S, p vers C et a vers R. On a donc, à la limite,

(1) $$S = C \cdot \frac{1}{2} R.$$

(a) chez Rouché et Comberousse (1866, p. 292)



En effet, la circonférence étant la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier dont on double indéfiniment le nombre des côtés (261), et le rayon la limite de l'apothème (remarque précédente), l'aire du cercle sera la limite de l'aire de ce même polygone.

Or, l'égalité (301)

$$\text{Polygone régulier} = P \times \frac{a}{2} \quad (1)$$

est vraie, quel que soit le nombre des côtés du polygone; elle existera donc encore à la limite, mais alors Polygone régulier = Cercle, $P = C$ et $a = R$; ces valeurs substituées dans l'égalité (1) donnent :

$$\text{Cercle} = C \times \frac{R}{2}.$$

(b) chez André (1879, p. 146)

FIGURE III.154 – Formule de l'aire du cercle obtenue par passage direct à la limite

Licence CC BY-NC-ND 3.0

En effet, dans le texte d'André, le lien entre la circonférence comme limite du périmètre des polygones et l'aire du cercle comme limite de leurs aires, est explicitement mentionné de manière directe, sans preuve ni justification. La formulation d'André diffère néanmoins un peu de celle des deux autres auteurs, qui utilisent l'expression « tendre vers », alors que ce dernier substitue les valeurs limites aux grandeurs en jeu, en les écrivant sous forme d'égalités. Dans ces deux cas, il est manifeste que l'usage du concept de limite est maîtrisé, de même que son vocabulaire, et que cet emploi permet aux auteurs de fournir à leurs jeunes lecteurs un résultat aussi efficacement que simplement.

Néanmoins, que ce soit au début ou à la fin du siècle, tous les auteurs n'emploient pas la méthode des limites aussi directement. Trois d'entre eux détaillent, dans le cadre de la détermination de l'aire du cercle, leurs propres théories des limites, à l'instar de Lacroix dans ses *Élémens*. Nous avons étudié à la page 620 l'outil théorique qu'il met en place pour démontrer que deux grandeurs sont égales. Il le complète par une nouvelle proposition, qu'il démontre en se servant de la première : « Si trois grandeurs A, B, X, sont telles que la première A, que l'on suppose variable, mais néanmoins surpassant toujours chacune des deux autres B, X, qui ne changent point, puisse approcher de toutes deux en même temps, aussi près qu'on voudra, on aura nécessairement $B = X$ » (Lacroix, 1808, p. 124). Il applique ensuite cette proposition aux trois grandeurs $\frac{1}{2}PR$ (où P désigne le périmètre du polygone circonscrit et R le rayon) prise pour A (grandeur variable), $\frac{1}{2}CR$ (où C désigne la circonférence du cercle) prise pour B, et l'aire réelle du cercle prise pour X (grandeurs fixes), et prouve par des jeux de comparaison qu'étant « dans les mêmes circonstances que les quantités A, B, X du numéro précédent », alors $B = X$, ce qui démontre le résultat attendu.

Une vingtaine d'années plus tard, Terquem développe le même type d'argumentaire sur les limites des quantités variables, en énonçant et démontrant deux principes. Le premier indique que « lorsque deux quantités sont comprises entre les mêmes limites, la différence des deux quantités est toujours plus petite que celle des deux limites » [220], et le second que « si deux quantités A et B sont comprises entre les mêmes limites, et si la différence peut devenir plus petite qu'aucune quantité assignable, les quantités A et B sont égales » [221] (Terquem, 1829, p. 54-55). Tout comme Lacroix, il démontre le second par l'absurde à partir du premier. Plus loin dans son *Manuel*, il fait usage de ces propositions pour établir la formule de l'aire du cercle. Il note L la longueur de

220. Nous pouvons transcrire la première ainsi : soient deux quantités A et B et deux limites L et L'. Si $L < A < B < L'$, alors $L' - L > B - A$. Terquem démontre ceci en expliquant que $L' - L = (A - L) + (B - L) + (L' - B)$ et qu'en tant que somme de ces trois différences, cette quantité les surpasse toutes.

221. La transcription de ce second principe, avec les mêmes notations que le premier, peut être : si $L < A < B < L'$ et si $L' - L$ tend vers 0, alors $A = B$.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la circonférence d'un cercle et M son aire, P le périmètre d'un polygone inscrit et Q celui d'un polygone circonscrit. Par des considérations géométriques, il montre que les quantités $\frac{1}{2}RL$ et M sont comprises entre les mêmes limites $A = \frac{1}{2}PR\cos(\frac{1}{2}C)$ et $B = \frac{1}{2}QR$, leur différence pouvant devenir plus petite « qu'aucune quantité assignable » (Terquem, 1829, p. 215). En vertu du principe énoncé plus tôt, il conclut donc que $M = \frac{1}{2}RL$ (voir figure III.155 p. 626). À l'issue de sa démonstration, Terquem remarque toutefois qu' « on parvient à ce même résultat en considérant la circonférence comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits » et précise que « cette considération est un moyen commode de se rappeler promptement le résultat ». Il fait ainsi référence à la méthode employée par bon nombre de ses collègues auteurs, tout en la reléguant au simple statut de moyen mnémotechnique.

CCCXLI. Soit **L** la longueur de la circonférence exprimée en unités linéaires, soit en mètres.

M la surface du cercle exprimée en unités superficielles, soit en mètres carrés.

L sera toujours plus petit que le périmètre **Q** du polygone circonscrit qui enveloppe la circonférence, et plus grand que le périmètre **P** du polygone inscrit (CVI); donc $\frac{1}{2}$ **RL** sera aussi compris entre $\frac{1}{2}$ **QR** et $\frac{1}{2}$ **PR**; c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{RL} > \frac{1}{2}\,\mathrm{PR}$$
$$\frac{1}{2}\,\mathrm{RL} < \frac{1}{2}\,\mathrm{QR};$$

donc, à plus forte raison,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{RL} > \frac{1}{2}\,\mathrm{PR}\cos.\frac{1}{2}\mathrm{C}\ (\text{p. 212}),$$

car $\cos.\frac{1}{2}$**C** est une quantité au-dessous de l'unité; mais $\frac{1}{2}$**QR**=**B** et $\frac{1}{2}$**PR** $\cos.\frac{1}{2}$**C**=**A** (CCCXXVII), $\frac{1}{2}$**RL** est donc renfermée entre les deux limites **A** et **B**; mais **M** est évidemment compris entre les mêmes termes; et comme leur rapport peut devenir plus petit qu'aucune quantité assignable, il s'ensuit qu'on doit avoir (CXLIII)

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\,\mathrm{RL};$$

donc l'aire du cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.

FIGURE III.155 – Preuve de la formule de l'aire du cercle chez Terquem (1829, p. 215)

À la fin des années 1870, Tombeck apporte sa pierre à l'édifice de l'usage explicite des limites pour déterminer l'aire du cercle. Il commence par démontrer que « le cercle est la limite des surfaces des polygones réguliers inscrits et circonscrits, lorsqu'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés » en procédant à un véritable calcul de limite (voir

Licence CC BY-NC-ND 3.0

figure III.156 p. 627). Il explique en effet que dans l'expression obtenue pour $S' - S$, OC'^2 reste invariable, S' diminue, et que CB tend vers 0 lorsque le nombre de côtés des polygones augmente. Il écrit alors que « pour ces raisons, le second membre de l'égalité [...] tend vers 0 quand n [nombre de côtés] devient de plus en plus grand. La différence $S' - S$ peut donc être rendue aussi petite qu'on veut » (Tombeck, 1879, p. 236).

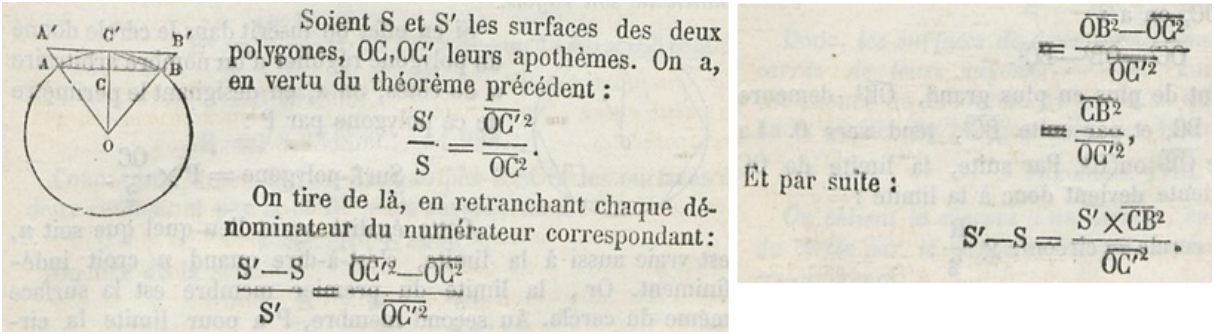


FIGURE III.156 – Extrait de la preuve du cercle vu comme limite des polygones inscrits et circonscrits chez Tombeck (1879, p. 235)

Il en déduit alors que « le cercle a pour mesure le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon » (Tombeck, 1879, p. 236). Pour le démontrer, il use du même type d'arguments, établissant des égalités entre grandeurs via des arguments géométriques, et observant les limites des quantités en jeu lorsque le nombre n de côtés tend vers l'infini (voir figure III.157 p. 628). Il montre en particulier que OC tend vers R dans de telles circonstances, et obtient une nouvelle relation « à la limite » de l'égalité précédente.

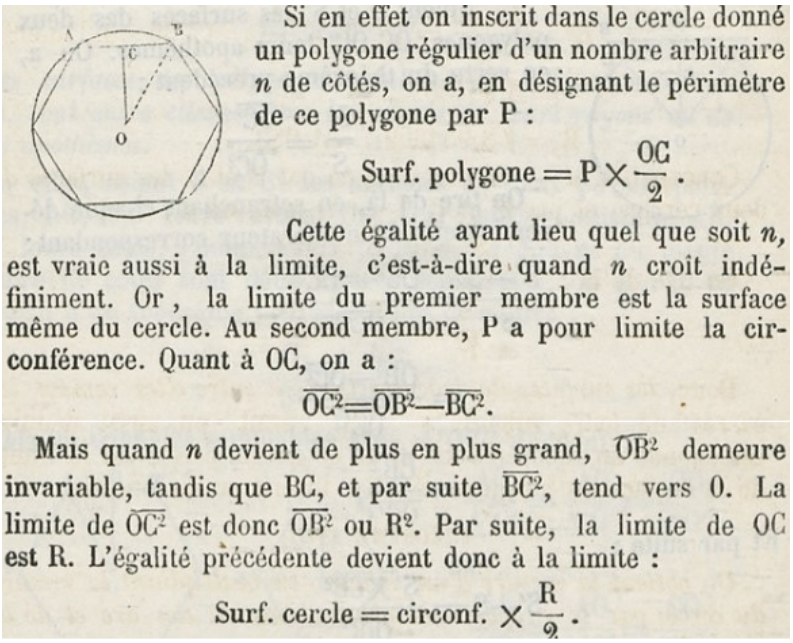


FIGURE III.157 – Extrait de la preuve de la formule de l'aire du cercle chez Tombeck (1879, p. 236)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

À travers le cas de l'aire du cercle, il apparaît donc nettement que les auteurs des manuels de géométrie intègrent progressivement les idées de la méthode infinitésimale, par l'usage des infiniment petits dans un premier temps, puis en employant les limites par la suite. Cette évolution est conforme à la périodisation observée dans les programmes et instructions officielles, où la méthode des limites vient remplacer peu à peu, après 1850, celle des infiniment petits (voir p. 616). Pourtant, la façon dont ces notions sont appliquées sont remises en question en 1854 dans les *Instructions pour la mise à exécution du plan d'études des lycées* rédigées par Fortoul, et le Verrier pour la partie relative aux mathématiques. Il est en effet largement question de l'étude du cercle dans ce texte :

> Au lieu de considérer purement et simplement le cercle comme la limite d'une suite de polygones réguliers, dont le nombre des côtés augmente jusqu'à l'infini, et de regarder comme acquise au cercle toute propriété démontrée pour les polygones, on a inscrit et circonscrit au cercle deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés ; et l'on a prouvé que, par la multiplication du nombre des côtés de ces polygones, la différence de leurs aires pouvait devenir plus petite que toute quantité donnée. C'est-à-dire qu'on a enlevé à la méthode des limites tous ses avantages de simplicité en ne l'appliquant pas franchement, comme n'ont cessé de le demander en ces termes mêmes Prony et Poisson, conformément aux idées de Leibniz. [...] C'est ce principe dont on doit faire l'application la plus simple dans les démonstrations relatives à la mesure du cercle et des corps ronds. Et parce qu'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son contour par le rayon du cercle inscrit, et qu'on le démontre *ita ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus* [qu'on puisse la mener sans tenir compte du nombre des côtés], on doit conclure immédiatement, avec Leibniz, que cette propriété peut être étendue au cercle. (Belhoste, 1995, p. 340-341)

Là encore, ces recommandations semblent suivies des faits, puisque les auteurs abandonnent progressivement les théories intermédiaires sur les polygones inscrits et circonscrits pour adopter la méthode des limites, qui relie très directement l'aire des polygones réguliers à celle du cercle. Cet outil importé de l'analyse, qui n'est pourtant pas enseignée à ce niveau intermédiaire, facilite grandement l'accès des jeunes lecteurs à la compréhension de résultats non triviaux ainsi que de leurs preuves, à condition d'être progressivement familiarisés avec ce type de procédés. La détermination de l'aire du cercle est donc l'occasion d'échanges de connaissances entre les domaines de l'analyse et de la géométrie, mais aussi de l'algèbre. L'analyse apporte ses outils sur les infiniment petits aux preuves géométriques, avec une évolution dans le temps vers la méthode des limites, plus directe et préconisée par les programmes de la seconde

Licence CC BY-NC-ND 3.0

moitié du siècle. Le cercle est alors vu comme un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, et son aire peut alors être perçue comme formée de triangles isocèles eux aussi infintésimaux. La formule algébrique mise en place pour l'aire des polygones réguliers, associée à un passage à la limite des grandeurs variables en jeu lorsque le nombre de côtés augmente indéfiniment, produisent la formule de l'aire du cercle recherchée. Cette question de la géométrie des aires se situe donc bien une nouvelle fois à l'interface des domaines mathématiques enseignés à un niveau intermédiaire (voir schéma III.158 p. 629).

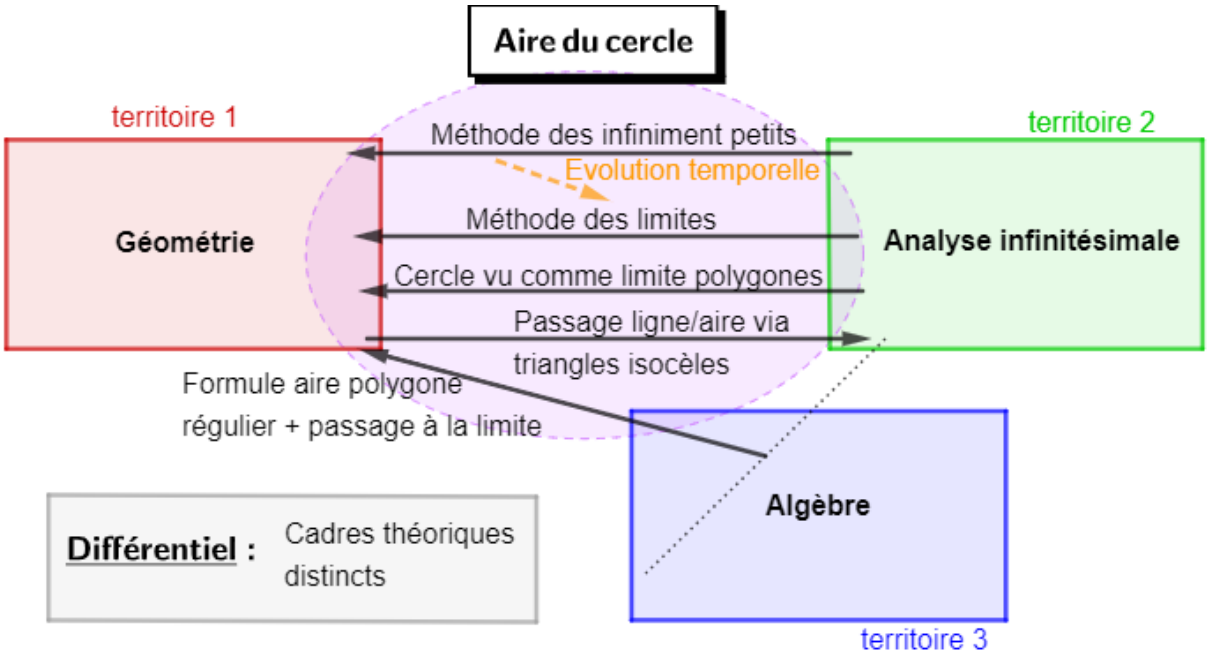


FIGURE III.158 – Schéma montrant en quoi l'aire du cercle est à l'interface de la géométrie, de l'analyse infinitésimale et de l'algèbre

III.3.2.2 Les aires curvilignes quelconques

Contrairement au cercle, la détermination des aires des domaines délimités par des courbes quelconques ne donne pas souvent lieu à des préconisations de méthodes, infinitésimales ou non, dans les programmes officiels. Les instructions pour l'enseignement primaire supérieur des filles de 1893 font néanmoins exception, en prescrivant, pour « évaluer approximativement une aire quelconque », de la figurer « sur du papier quadrillé », ou encore de procéder « en découpant les figures dessinées sur un papier suffisamment épais et en les pesant successivement » (D'Enfert, 2003c, p. 275). C'est d'ailleurs ce que proposent Hue et Vagnier dans leur *Géométrie* à destination des écoles de filles en 1896. Il indiquent tout d'abord une première méthode : « On dessinera sur du papier quadrillé une surface exactement semblable à la surface donnée [...]. Il suffira alors de compter les carrés contenus dans l'intérieur de la figure pour avoir

Licence CC BY-NC-ND 3.0

la surface approximative cherchée » (Hue et Vagnier, 1896, p. 131)[222]. La seconde méthode consiste à représenter sur une même feuille la surface à évaluer et un carré unité, puis à découper « bien exactement les deux figures ainsi obtenues », que l'on « pèsera successivement », et alors « le quotient du poids de la surface semblable par le poids du carré sera le nombre d'unités de surface contenues dans la surface à mesurer » (Hue et Vagnier, 1896, p. 132).

En 1902, la méthode d'évaluation par quadrillage fait son entrée dans les programmes pour l'enseignement secondaire masculin, avec comme précision supplémentaire : « limite de l'erreur fournie par le nombre des carrés que traverse la courbe ; cette erreur peut être rendue très petite en employant un quadrillage très fin » (Belhoste, 1995, p. 595). L'apparition de l'expression « limite de l'erreur » au tournant du XX^{e} siècle est symptomatique de l'évolution du traitement du sujet des aires curvilignes quelconques au cours de la période. En effet, une méthode va progressivement s'imposer pour ce type de problèmes, reposant sur le découpage de la surface à évaluer en triangles et trapèzes, le plus souvent avec un pas régulier. Cette technique porte en elle la notion de limite, puisqu'alors, l'aire à évaluer peut être vue comme la valeur vers laquelle tend la somme des aires des triangles et trapèzes quand le pas de subdivision devient très petit (ou, ce qui revient au même, quand les subdivisions deviennent très nombreuses). La conception de cette évaluation en tant que limite demeure implicite durant une grande partie du siècle, puis devient plus explicite dans un second temps, prenant progressivement la forme observable dans le programme de 1902.

Des aires comme limites implicites ou explicites

Parmi les ouvrages du corpus, 19 présentent une méthode de calcul des aires délimitées par des courbes quelconques, et parmi eux, 16 le font à partir d'une configuration commune, en élevant des perpendiculaires sur une directrice à des distances égales, décomposant ainsi la surface à évaluer en triangles et trapèzes dont un côté est une portion de courbe (voir figure III.129 p. 560). Les discours qui accompagnent cette figure commune s'avèrent eux aussi assez uniformes, évoquant des subdivisions ou des perpendiculaires qui doivent être suffisamment petites, nombreuses, proches, ou encore rapprochées, afin que les arcs ou portions de courbes soient sensiblement

222. Le texte décrivant cette méthode n'est pas accompagnée d'une figure, c'est pourquoi il n'en a pas été question dans la section sur la visualisation (III.1.2 p. 387). Le recours au papier quadrillé pour estimer des aires est indiqué dans plusieurs programmes d'enseignement du tournant du XX^{e} siècle (voir p. 303), mais les ouvrages consultés ne proposent pas de représentation visuelle de l'usage qui peut en être fait dans ce cadre, telles que celles que nous avons pu examiner pour l'agrandissement et la réduction des figures (figures III.37 et III.38 p. 397 et 398).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

rectilignes (ou droits). Les quelques citations suivantes donnent un aperçu de cette cohérence lexicale des textes analysés [223] :

> Il faut mesurer sur la plus grande droite AB, des parties égales [...] assez petites pour que les portions de courbes [...] comprises entre les perpendiculaires [...] puissent être regardées sans erreur sensible, comme des droites. (Bergery, 1828, p. 405)

> On peut abréger le calcul en formant des trapèzes de même hauteur, et en rapprochant assez les perpendiculaires, de manière que dans chaque trapèze, le côté opposé à la hauteur soit sensiblement une ligne droite. (Desnanot, 1835, p. 59)

> Il faut que les divisions soient assez nombreuses, pour que les arcs compris entre ces perpendiculaires, ainsi que les arcs extrêmes puissent être considérés comme sensiblement rectilignes. (Sonnet, 1839, p. 230)

À ces éléments de langage se rajoutent des considérations sur les erreurs, l'approximation ou l'exactitude du résultat obtenu. Cirodde précise en effet que, « pour évaluer l'aire d'un segment curviligne quelconque, il faut partager sa base en un nombre de parties égales d'autant plus grand que l'on voudra plus d'exactitude » (Cirodde, 1858, p. 194). L'exigence de précision de l'estimation est motivée par des raisons pratiques, puisqu'il est précisé peu après que « telle est la règle que l'on suit pour mesurer l'aire de la section horizontale faite dans la carène d'un vaisseau » (Cirodde, 1858, p. 194) (voir le 173 de la figure III.60 p. 441). De même, le choix du pas sur la directrice peut être motivé par d'autres raisons, et dans le cas où la courbure change de nombreuses fois, il peut être judicieux de mener plusieurs directrices (voir le 174 de la figure III.60 p. 441), et dans le cas où ces lignes posséderaient une commune mesure, celle-ci pourrait tenir lieu de subdivision, ce qui simplifierait les calculs de façon conséquente (Cirodde, 1858, p. 195).

Chez Briot et Vacquant, à condition que l'on ait pris sur la courbe « des points assez rapprochés [...] pour que l'arc de courbe compris entre deux points consécutifs ne s'écarte pas beaucoup de la droite qui les joint », alors on peut substituer « à la surface curviligne [...] la somme des trapèzes rectangles qui en diffère très peu » (Briot et Vacquant, 1859, p. 84-85) (voir figure III.130 p. 561). À travers cet extrait, ainsi que les précédents, se dessine l'image d'une aire curviligne comme valeur limite d'une aire constituée d'un nombre suffisant de trapèzes, dont les bases sont assez petites, pour que l'approximation soit satisfaisante. À cette condition, il est possible de « substituer » l'aire approchée à sa valeur réelle. Le souci de la précision de l'évaluation réalisée

223. Nous avons souligné les éléments de langage mentionnés ci-avant pour les mettre en évidence dans les citations.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

parcourt le siècle, de Gimelli (1841) à Leyssenne (1890). Le premier indique, suite à la présentation de la marche à suivre pour évaluer l'aire d'un terrain, que « plus [les] perpendiculaires seront multipliées, plus la mesure du terrain s'approchera de sa véritable valeur » (Gimelli, 1841, p. 49). Le second estime que « l'erreur commise dans l'évaluation de ces aires [...] sera d'autant plus petite que le nombre des divisions [...] sera plus grand » (Leyssenne, 1890, p. 222).

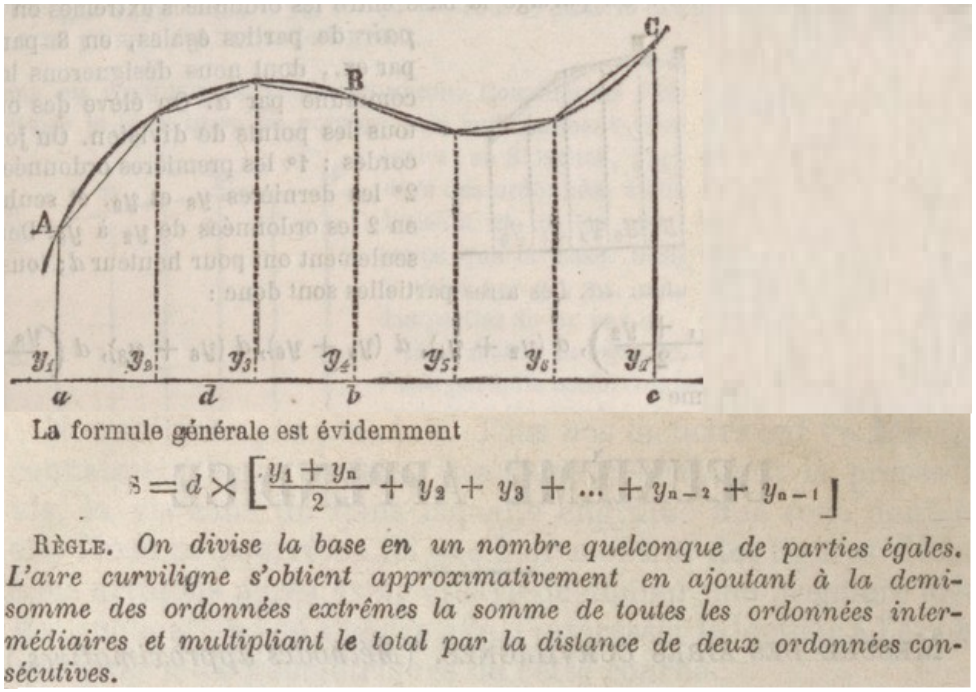
Comparaison des méthodes et limitation des erreurs

Minimiser les erreurs devient un objectif en soi dans l'ouvrage de Guilmin, qui consacre la dernière partie du complément à son *Cours de géométrie élémentaire* à la « mesure des aires curvilignes » par des « méthodes d'approximation » [224]. En introduction, il précise que ces aires ne peuvent être évaluées « d'une manière précise, à l'aide de formules spécialement établies », et que pour les calculer, il faut forcément recourir à des méthodes approximatives (Guilmin, 1882, compl.117). Il décline ensuite trois méthodes de ce type, dont il s'emploie à étudier l'exactitude.

La première est la méthode des trapèzes, brièvement évoquée dans la section précédente. Pour la présenter, il dresse une figure à partir de laquelle il produit une formule algébrique synthétique donnant une évaluation de l'aire considérée (voir figure III.159 p. 633). Au sujet de l'erreur commise dans un tel cas, il indique : « L'aire ainsi calculée est trop petite (approchée par défaut) quand la courbe a sa concavité tournée vers la base, trop grande dans le cas contraire. Les deux cas se présentent à la fois pour notre courbe qui a une inflexion en B ; par suite les erreurs partielles de sens contraires se compensent au moins en partie » (Guilmin, 1882, compl.118).

224. Ce travail s'inscrit dans la lignée de celui mené par le même auteur sur la théorie du calcul des erreurs : voir p. 535. De plus, ce travail n'apparaît qu'à partir de la 20^{éme} édition de son ouvrage, parue en 1880 (Guilmin, 1880), dans le complément.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



La formule générale est évidemment

$$S = d \times \left[\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1} \right]$$

RÈGLE. *On divise la base en un nombre quelconque de parties égales. L'aire curviligne s'obtient approximativement en ajoutant à la demi-somme des ordonnées extrêmes la somme de toutes les ordonnées intermédiaires et multipliant le total par la distance de deux ordonnées consécutives.*

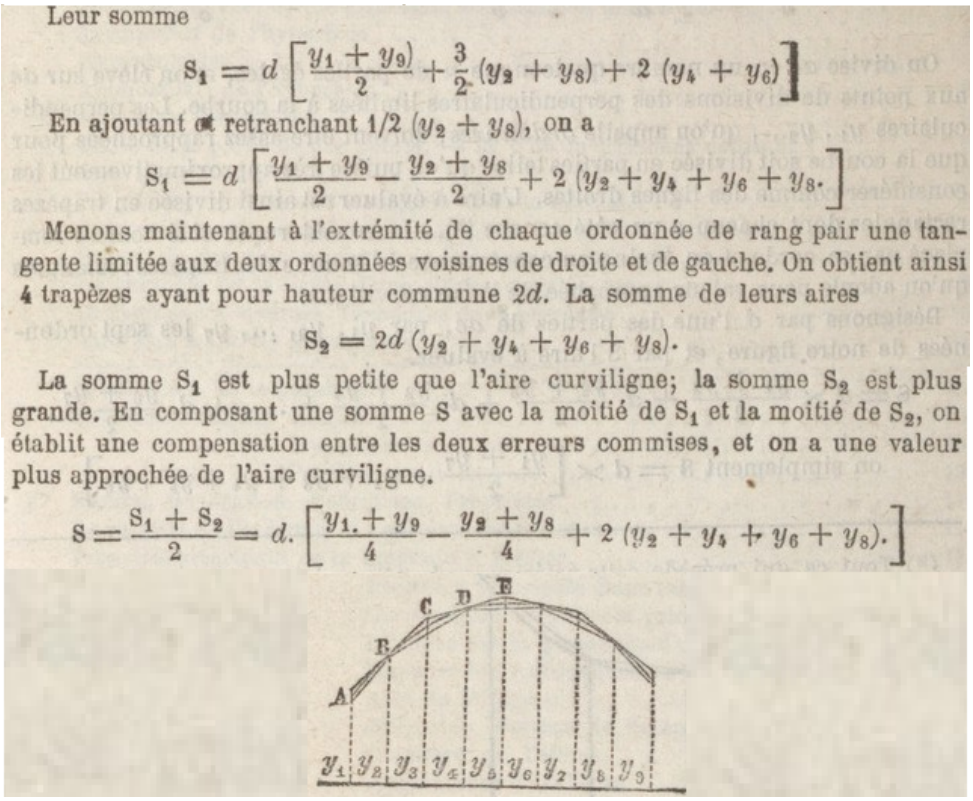
FIGURE III.159 – Détermination d'une aire curviligne quelconque par la méthode des trapèzes chez Guilmin (1882, compl.117-118)

La seconde méthode est celle de Poncelet, que Guilmin désigne comme telle[225]. En effet, Poncelet a présenté son procédé de quadrature d'une surface délimitée par une courbe quelconque dans le cours de mécanique qu'il a professé à la Sorbonne entre 1838 et 1848 (Chatzis, 1998). Il s'agit d'une formule d'approximation fondée sur la moyenne de deux sommes d'aires de trapèzes : la première formée à partir de cordes menées entre des points de subdivision de la courbe, et l'autre obtenue à l'aide de tangentes construites sur certains de ces points (voir la figure III.160 p. 634 pour les détails de la formule). La mise en place de cette formule repose sur des arguments géométriques : après avoir découpé la courbe en un nombre pair de subdivisions par un nombre impair de perpendiculaires à l'axe de référence, la première somme a pour termes les aires des trapèzes formés par les deux premières divisions, les deux dernières, les perpendiculaires de rangs pairs successifs et les cordes associées ; la seconde regroupe les aires des trapèzes situés sous les tangentes aux points de rangs pairs et délimités par les deux perpendiculaires qui les entourent. Le second type d'argument est algébrique, puisque les techniques de calcul littéral sont mobilisées pour

225. Parmi les auteurs du corpus, seuls Puille, ainsi que Rouché et Comberousse la présentent également. Puille indique la formule sans la prouver et renvoie la démonstration à un « ailleurs » qu'il ne précise pas (Puille, 1855, p. 137). Dans la 3ème édition de leur *Traité de géométrie élémentaire*, Rouché et Comberousse traitent quant à eux complètement la « formule de Poncelet », qu'ils démontrent, avant d'en établir « la limite supérieure de l'erreur commise » (Rouché et Comberousse, 1873, p. 294-296). Ces développements ne figurent pas en revanche dans la première édition de 1866 considérée dans ce corpus.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

regrouper judicieusement les termes et factoriser, de manière à obtenir une formule finale synthétique (voir la sous-section III.2.3.4 p. 551) et une règle assez facilement mémorisable : « On divise la base en un nombre pair quelconque de parties égales. Au double de la somme des ordonnées de rang pair, on ajoute le quart de la différence entre la somme des ordonnées extrêmes et la somme des deux ordonnées voisines des extrêmes ; puis on multiplie la somme ainsi obtenue par la distance d de deux ordonnées consécutives » (Guilmin, 1882, p. 119).



Leur somme

$$S_1 = d\left[\frac{y_1 + y_9}{2} + \frac{3}{2}(y_2 + y_8) + 2(y_4 + y_6)\right]$$

En ajoutant et retranchant 1/2 $(y_2 + y_8)$, on a

$$S_1 = d\left[\frac{y_1 + y_9}{2} - \frac{y_2 + y_8}{2} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right]$$

Menons maintenant à l'extrémité de chaque ordonnée de rang pair une tangente limitée aux deux ordonnées voisines de droite et de gauche. On obtient ainsi 4 trapèzes ayant pour hauteur commune $2d$. La somme de leurs aires

$$S_2 = 2d(y_2 + y_4 + y_6 + y_8).$$

La somme S_1 est plus petite que l'aire curviligne; la somme S_2 est plus grande. En composant une somme S avec la moitié de S_1 et la moitié de S_2, on établit une compensation entre les deux erreurs commises, et on a une valeur plus approchée de l'aire curviligne.

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = d.\left[\frac{y_1 + y_9}{4} - \frac{y_2 + y_8}{4} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right]$$

FIGURE III.160 – Présentation de la méthode de Poncelet chez Guilmin (1882, compl.118)

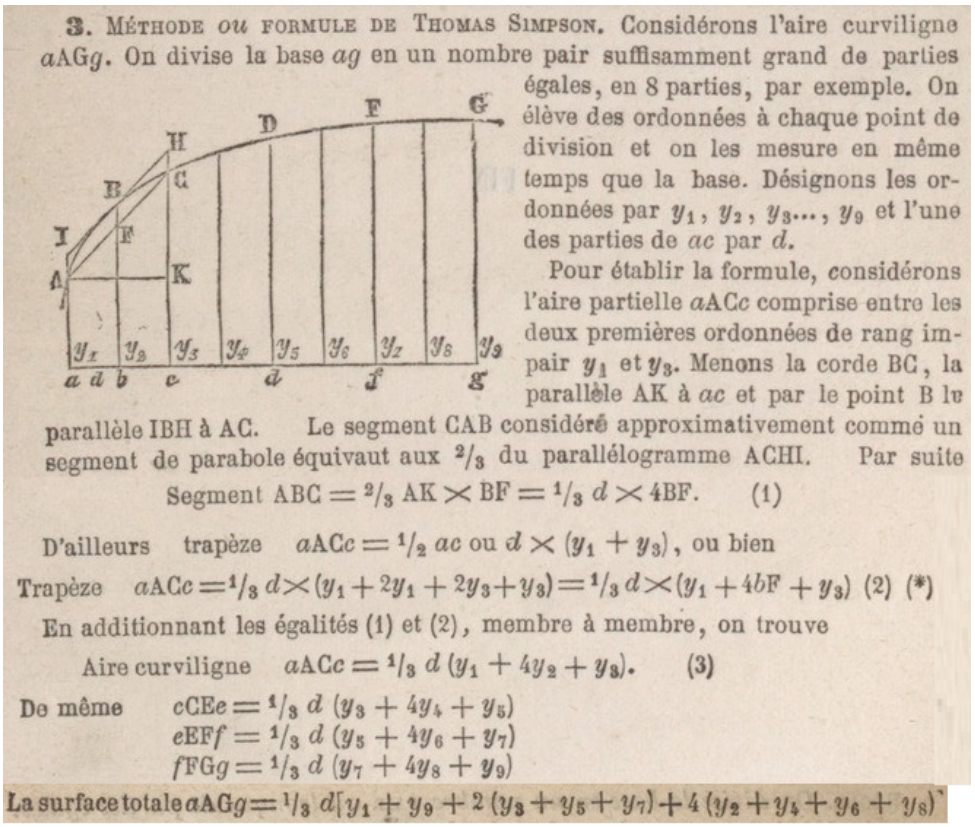
La suite fait davantage référence au domaine de l'analyse puisqu'il y est question de la « limite de l'erreur ». Guilmin explique d'abord que des deux sommes obtenues, la première est « plus petite que l'aire curviligne », alors que la seconde est plus grande, ce qui, en faisant la moyenne des deux, « établit une compensation entre les deux erreurs commises » (Guilmin, 1882, p. 118). Puis dans la partie sur la limite de l'erreur, il précise que, « en réunissant $\frac{1}{2}S_2$ moitié trop forte et $\frac{1}{2}S_1$ moitié trop faible de l'aire curviligne, on commet deux erreurs qui se diminuent mutuellement », et que l'erreur e commise est alors inférieure à $\frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{d}{4}[(y_2 + y_8) - (y_1 + y_9)]$ [226], cette dernière

226. Cette affirmation n'est pas justifiée par Guilmin, mais peut être facilement établie, puisque si l'aire curviligne A est telle que $S_1 < A < S_2$, alors $e = A - \frac{1}{2}(S_2 + S_1) = A - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_1$. Et comme $A < S_2$, alors $e < S_2 - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_1$, soit $e < \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_1$.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

quantité étant aisément estimable, et même déjà calculée pour obtenir la somme finale S. Même si Guilmin ne l'explicite pas, il est manifeste que cette erreur limite sera d'autant moindre que la subdivision d sera prise petite.

Enfin, Guilmin présente une troisième méthode de détermination approchée d'une aire curviligne, qu'il attribue cette fois-ci à Simpson (voir note 156 p. 525). Cette méthode est bien antérieure à celle de Poncelet, puisque le mathématicien britannique l'a publiée dans ses *Essays On Several Curious And Useful Subjects, In Speculative And Mixed Mathematics* en 1740 (Kollerstrom, 1992). D'ailleurs, Poncelet en fait lui-même usage dans son mémoire de 1835 sur le calcul graphique appliqué à la stabilité des voûtes (Poncelet, 1835 ; Tournès, 2022, p. 438). Cette méthode consiste à assimiler un segment de courbe à un segment parabolique, d'aire valant les deux tiers de celle du parallélogramme dans lequel il est inscrit (voir figure III.161 p. 635).



3. Méthode ou formule de Thomas Simpson. Considérons l'aire curviligne $aAGg$. On divise la base ag en un nombre pair suffisamment grand de parties égales, en 8 parties, par exemple. On élève des ordonnées à chaque point de division et on les mesure en même temps que la base. Désignons les ordonnées par $y_1, y_2, y_3 \ldots, y_9$ et l'une des parties de ac par d.

Pour établir la formule, considérons l'aire partielle $aACc$ comprise entre les deux premières ordonnées de rang impair y_1 et y_3. Menons la corde BC, la parallèle AK à ac et par le point B la parallèle IBH à AC. Le segment CAB considéré approximativement comme un segment de parabole équivaut aux $^2/_3$ du parallélogramme ACHI. Par suite

$$\text{Segment ABC} = {}^2/_3\,\text{AK} \times \text{BF} = {}^1/_3\,d \times 4\text{BF}. \quad (1)$$

D'ailleurs trapèze $aACc = {}^1/_2\,ac$ ou $d \times (y_1 + y_3)$, ou bien

$$\text{Trapèze } aACc = {}^1/_3\,d \times (y_1 + 2y_1 + 2y_3 + y_3) = {}^1/_3\,d \times (y_1 + 4bF + y_3) \quad (2)\ (*)$$

En additionnant les égalités (1) et (2), membre à membre, on trouve

$$\text{Aire curviligne } aACc = {}^1/_3\,d\,(y_1 + 4y_2 + y_3). \quad (3)$$

De même

$$cCEe = {}^1/_3\,d\,(y_3 + 4y_4 + y_5)$$
$$eEFf = {}^1/_3\,d\,(y_5 + 4y_6 + y_7)$$
$$fFGg = {}^1/_3\,d\,(y_7 + 4y_8 + y_9)$$

$$\text{La surface totale } aAGg = {}^1/_3\,d[y_1 + y_9 + 2(y_3 + y_5 + y_7) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)]$$

Figure III.161 – Présentation de la méthode de Simpson chez Guilmin (1882, compl.119-120)

Par un jeu de regroupement des termes et de factorisation, Guilmin obtient une nouvelle formule, qu'il exprime textuellement par la règle : « On divise la base en un nombre pair de parties égales. L'aire curviligne s'obtient approximativement en additionnant la somme des ordonnées extrêmes, le double de la somme des autres ordonnées de rang impair et le quadruple de la somme de toutes les ordonnées de rang pair ;

Licence CC BY-NC-ND 3.0

puis, multipliant le total par te tiers de la distance de deux ordonnées consécutives » (Guilmin, 1882, p. 120).

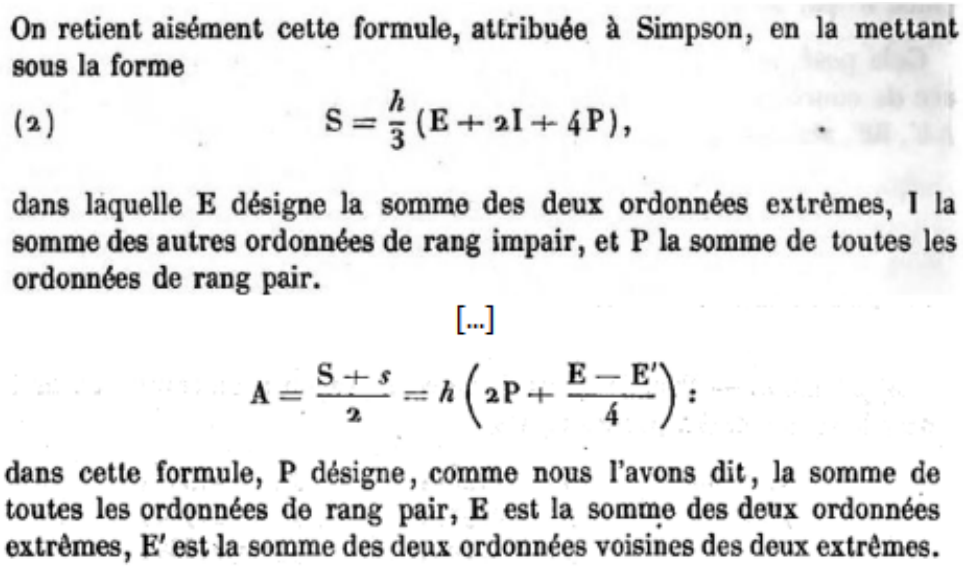
Déjà au tournant du XIX^e siècle, Mauduit évoquait cette méthode, indiquant que pour « trouver la surface d'une figure quelconque, terminée par [...] des courbes qui ne pourraient pas se ramener à des arcs de cercle », il faut mesurer « les petits segments extérieurs au polygone, comme des segments paraboliques, en multipliant leurs bases respectives par les deux tiers de la perpendiculaire abaissée du point le plus élevé de chaque portion de courbe sur la corde qui lui répond » (Mauduit, 1790, p. 130). Mauduit ne mentionne pas explicitement Simpson à ce moment-là, mais le cite à plusieurs reprises dans son ouvrage, montrant ainsi qu'il connaît bien ses travaux. Au contraire de Guilmin presque un siècle plus tard, il n'en déduit pas de formule de calcul, et tout comme ce dernier, n'évalue pas ce mode de calcul en termes d'erreur commise. Ces deux auteurs — Mauduit et Guilmin — sont d'ailleurs les deux seuls de notre corpus qui citent Simpson (voir la sous-section II.2.2.1 p. 205 et suivantes). Cette référence est en lien direct avec les contenus sur les aires curvilignes quelconques qu'ils proposent dans leurs ouvrages respectifs.

En revanche, Rouché et Comberousse développent plus avant ces théories dans la 3^ème édition de leur *Traité*[227]. Tout comme Guilmin, ils expriment les aires approchées calculées à l'aide des méthodes de Simpson, puis de Poncelet, sous une forme littérale très synthétique (voir figures III.162 p. 637). Dans leur démarche, identique à celle de Guilmin, ils emploient explicitement le vocabulaire des limites en désignant la première somme de la méthode de Poncelet comme « limite supérieure », et la seconde comme « limite inférieure du résultat demandé » (Rouché et Comberousse, 1873, p. 294-295). Les auteurs accordent un bénéfice à la formule de Poncelet[228] concernant sa facilité d'exécution puisque « quand le nombre des divisions est grand, [...] il n'y entre que les ordonnées de rang pair et les deux ordonnées extrêmes, ce qui dispense de calculer les ordonnées intermédiaires de rang impair » (Rouché et Comberousse, 1873, p. 295-296).

227. Cette édition est ajoutée au corpus complémentaire afin de pouvoir être analysée, en lien avec l'ouvrage de Guilmin, quant aux techniques d'approximation des aires curvilignes quelconques ainsi qu'au calcul des erreurs. Seulement neuf années séparent les deux textes, que nous considérons donc comme contemporains.

228. Les références à Poncelet concernent cinq auteurs de notre corpus (voir la sous-section II.2.2.1 p. 205), parmi lesquels Puille, Rouché et Comberousse et Guilmin qui présentent sa méthode d'approximation des aires curvilignes. Dupin et Bergery le mentionnent quant à eux dans un cadre plus général, sans lien avec ses travaux sur les aires.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



On retient aisément cette formule, attribuée à Simpson, en la mettant sous la forme

(2) $$S = \frac{h}{3}(E + 2I + 4P),$$

dans laquelle E désigne la somme des deux ordonnées extrêmes, I la somme des autres ordonnées de rang impair, et P la somme de toutes les ordonnées de rang pair.

[...]

$$A = \frac{S + s}{2} = h\left(2P + \frac{E - E'}{4}\right) :$$

dans cette formule, P désigne, comme nous l'avons dit, la somme de toutes les ordonnées de rang pair, E est la somme des deux ordonnées extrêmes, E' est la somme des deux ordonnées voisines des deux extrêmes.

FIGURE III.162 – Formules abrégées de Simpson, en haut, et Poncelet, en bas, chez Rouché et Comberousse (1873, p. 294-295)

Ils calculent ensuite la « limite supérieure de l'erreur commise » avec la formule de Poncelet, et trouvent un résultat équivalent à celui de Guilmin. Ils l'expriment néanmoins différemment, puisqu'ils en donnent une interprétation géométrique :

> La limite supérieure de l'erreur commise s'exprime donc géométriquement par le produit
>
> $$\frac{h}{2}.MN.$$
>
> On peut donc, après avoir tracé la courbe, mener provisoirement les deux premières et les deux dernières ordonnées, ainsi que celle du milieu, en donnant à h une certaine valeur ; puis, avant tout calcul, vérifier, en mesurant MN, si l'approximation demandée est bien obtenue, c'est-à-dire si la valeur choisie pour h est convenable. (Rouché et Comberousse, 1873, p. 296)

Ceci donne le moyen, très concrètement, de maîtriser et contrôler l'exactitude du résultat, en ajustant la valeur de h à la précision demandée (voir figure III.163 p. 638).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

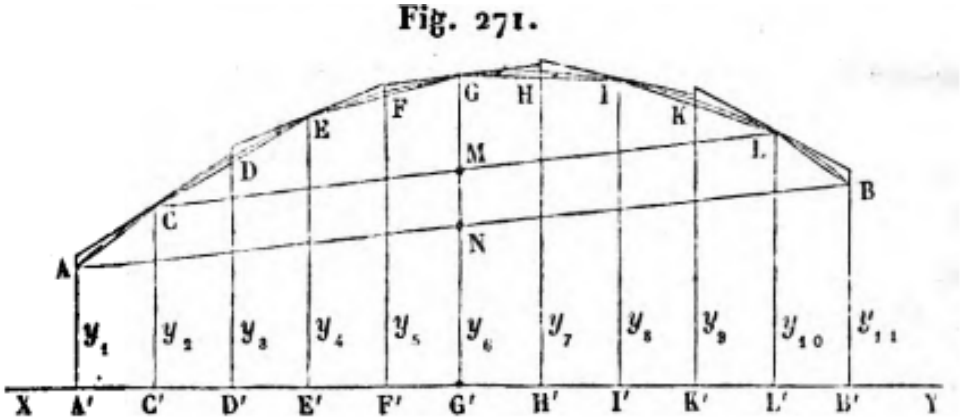


FIGURE III.163 – Figure associée à la formule de Poncelet chez Rouché et Comberousse (1873, p. 294)

Ces exemples montrent que certains auteurs de la 2ème moitié du siècle s'emparent des avancées récentes sur le sujet des approximations dans les calculs d'aires. En effet, suite au travail initial de Poncelet, lui-même inspiré par les recherches de Simpson, des mathématiciens s'emparent de ce sujet, à l'instar de Théodore Parmentier[229], qui publie en 1855 puis en 1876, dans les *Nouvelles Annales*, des articles dont l'objectif est de comparer les formules de quadratures approchées et de les améliorer (Parmentier, 1855, 1876). Ce thème se voit également abordé par Isidore Chevilliet[230] à l'Académie des Sciences, d'après ses comptes-rendus de 1874 et 1875 (Chevilliet, 1874, 1875). Les savoirs savants intègrent ainsi progressivement les contenus de savoirs à enseigner. Cette évolution est résumée dans la frise chronologique III.164 (p. 639).

229. Théodore Parmentier (1821 – 1910). Militaire et polytechnicien, il s'adonne en amateur à la musique et aux mathématiques.
230. Isidore Chevilliet (1822 – 1876). Normalien, il est professeur de mathématiques spéciales au collège de Nevers puis au lycée de Besançon, avant d'enseigner à la faculté des sciences de Besançon.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

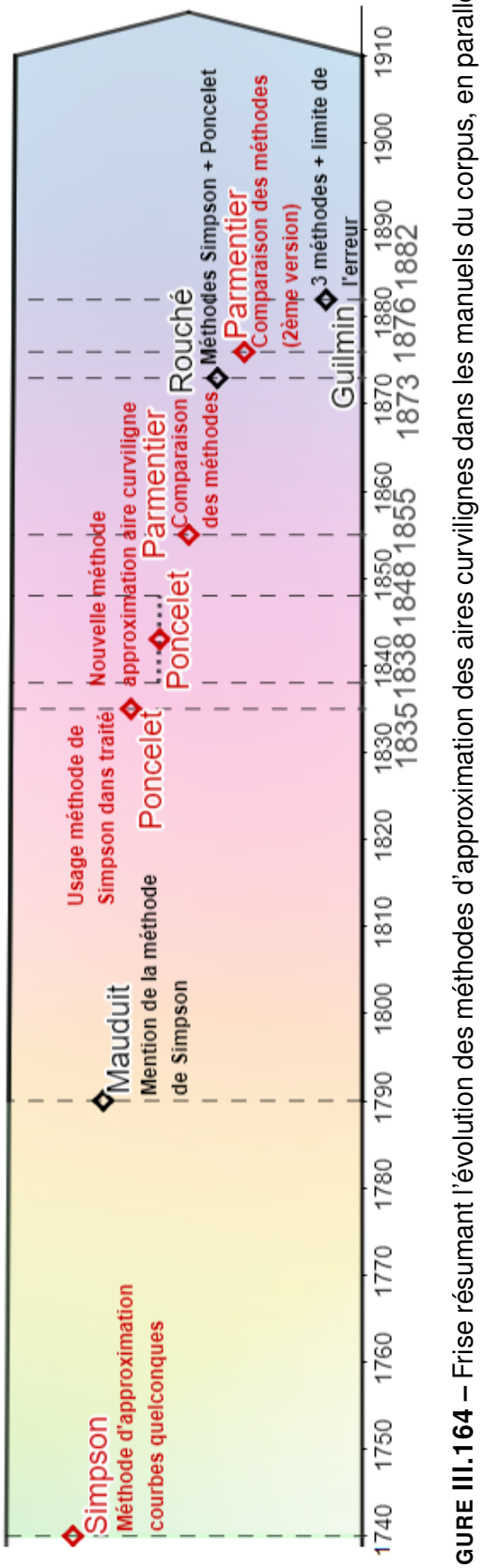


FIGURE III.164 – Frise résumant l'évolution des méthodes d'approximation des aires curvilignes dans les manuels du corpus, en parallèle des avancées du domaine scientifique sur la question

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La détermination des aires délimitées par des courbes quelconques se situent ainsi à l'interface de nombreux domaines mathématiques ou dans leur proximité, comme la géométrie, l'analyse, mais aussi l'arithmétique, l'algèbre ou encore les travaux manuels. En effet, les connaissances et savoir-faire mis en jeu proviennent de ces domaines, ou au contraire leur profitent. Par exemple, les techniques de travaux manuels de découpage/pesage ou l'usage de papier quadrillé permettent d'estimer les surfaces, qui plus est avec une précision que l'on peut se fixer en adjoignant des arguments d'analyse sur les limites des erreurs commises. L'analyse apporte à la géométrie des aires la définition d'une aire comme une limite, implicite ou explicite, de la somme des éléments infinitésimaux qui la composent, et en retour, ce sont des considérations de géométrie pratique qui justifient les niveaux de précision exigés et fournis par l'analyse. Le choix des constructions (trapèzes, tangentes, segments paraboliques) s'accompagnent de formules littérales synthétiques qui leur correspondent, mettant en interaction la géométrie et l'algèbre, et auxquelles l'analyse apporte là encore sa théorie de limitation des erreurs commises. Le choix d'un pas identique lorsqu'il existe une commune mesure entre deux longueurs est importé des considérations d'arithmétique. Des arguments seulement géométriques interviennent aussi, comme les considérations de la courbure ou de la convexité (voir schéma III.165 p. 640).

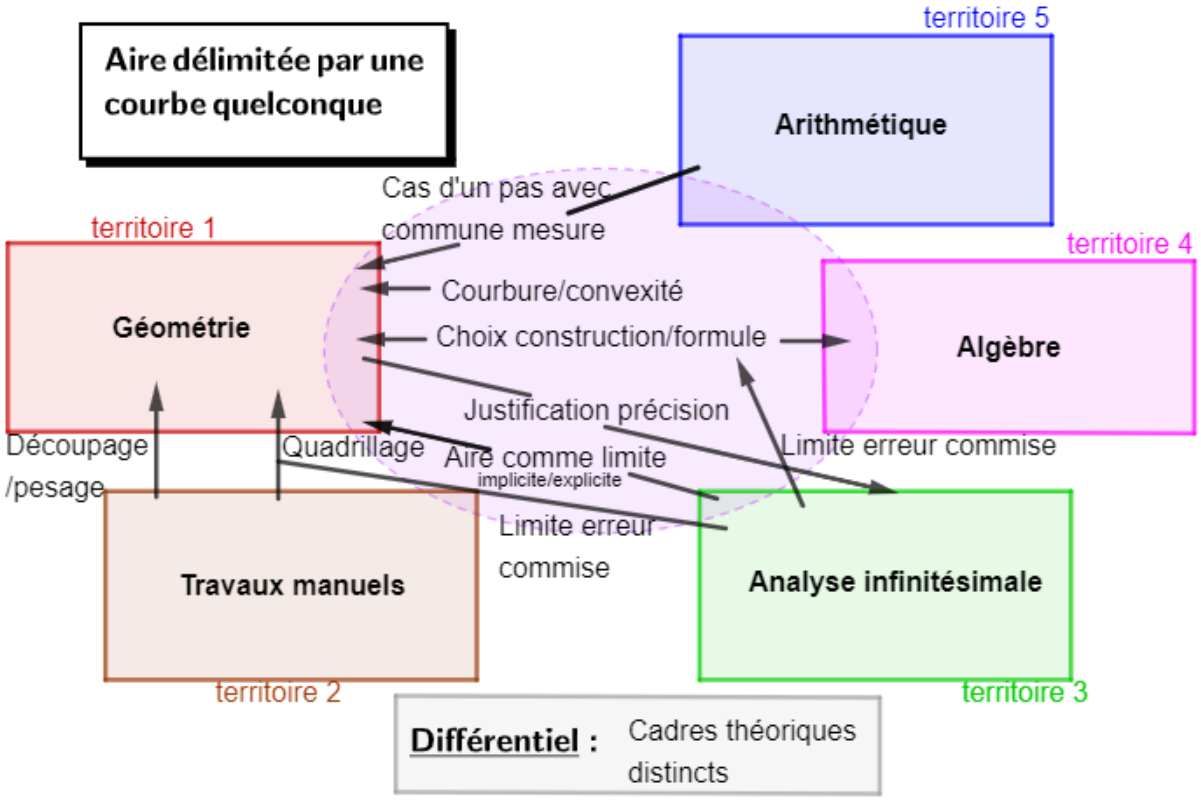


FIGURE III.165 – Schéma montrant en quoi les aires curvilignes quelconques sont à l'interface de la géométrie, des travaux manuels, de l'analyse infinitésimale, de l'algèbre et de l'arithmétique

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Plus généralement, ces deux études montrent en quoi la détermination des aires curvilignes quelconques ouvrent la voie à la notion de limite, au cœur de l'enseignement de la géométrie au niveau intermédiaire, préparant les élèves à des acquisitions théoriques ainsi qu'à des calculs pratiques qu'ils auront à maîtriser dans leur futur cours d'analyse, si toutefois ils poursuivent leurs études. Abordées de manière appliquée, puisqu'en lien avec des considérations très concrètes, comme par exemple dans les domaines de l'arpentage ou de la marine, ces notions et techniques sont à même de prendre davantage de sens pour ces apprentis mathématiciens, aiguisant ainsi à la fois leur intuition et leur motivation. Rajoutées à celles déjà rencontrées à travers l'étude de l'aire du cercle, ces connaissances complètent l'idée de limite que peuvent se faire les jeunes lecteurs, en leur adjoignant les notions de limites supérieures et inférieures, et en les familiarisant avec la gestion de la précision et des erreurs.

III.3.2.3 Les coniques

Au début du siècle, l'étude des sections coniques appartient au domaine de l'« application de l'algèbre à la géométrie », ou encore à celui de la « géométrie analytique » (Belhoste, 1995, p. 86, 193-194). Ces courbes se voient enseignées principalement dans l'ordre secondaire, n'étant abordées que sous l'angle de leur tracé dans les cours de « dessin linéaire » ou « dessin géométrique » de l'ordre primaire (D'Enfert, 2003c, p. 177, 288). À partir de la moitié du siècle, elles sont néanmoins intégrées aux programmes de géométrie sous l'appellation courante « courbes usuelles » (D'Enfert, 2003c, p. 195, 287 ; Belhoste, 1995, p. 480), et entrent dans les manuels sous la même désignation. Dans les ouvrages de notre corpus, 8 auteurs présentent de telles parties : Cirodde, Amiot, Rouché, Tombeck, Guilmin, Bourget, Leyssenne et Girod, dans des ouvrages tous ultérieurs à 1850. Leur autonomisation du domaine de la géométrie analytique laisse la porte ouverte à d'autres méthodes pour les traiter, même si rien n'est indiqué spécifiquement dans les programmes à ce sujet. En particulier, la question de la détermination des aires qu'elles délimitent peut difficilement être traitée en se restreignant strictement aux notions et aux outils de la géométrie élémentaire (voir la sous-section III.1.1.4 p. 376). Les auteurs des ouvrages de notre corpus sont plusieurs à proposer des preuves des formules d'aires délimitées par une ellipse ou un segment parabolique. Celle formée par une portion d'hyperbole est seulement traitée par Guilmin, comme application de la méthode plus générale d'approximation des aires curvilignes quelconques (Guilmin, 1882, compl.87).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

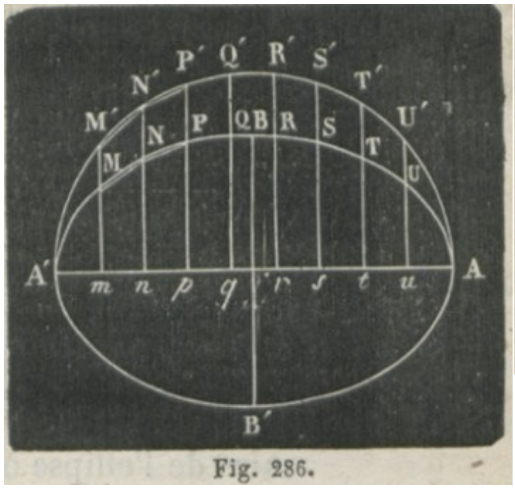
L'aire de l'ellipse

Concernant l'aire délimitée par une ellipse, 7 auteurs s'engagent dans la démonstration de sa formule, et parmi eux, 5 recourent à des méthodes infinitésimales. Les deux, autres, Terquem et Rouché, ont vu leurs preuves étudiées dans la section III.1.1.4 (p. 376), non sans lien, d'ailleurs, avec des considérations plus ou moins masquées sur l'infini (voir p. 383). Les autres s'appuient sur une figure initiale commune (voir III.27 p. 378 et III.166 p. 643), puis sur des décompositions de la surface à estimer en trapèzes ou en rectangles.

Chronologiquement, la première de ces preuves au sein du corpus est celle de Cirodde. Après avoir élevé « une série de perpendiculaires infiniment rapprochées sur le grand axe », l'auteur décompose « l'aire de l'ellipse et celle du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre en tranches infiniment minces » qu'il considère comme des trapèzes. Il montre ensuite, en utilisant une égalité de rapports préalablement démontrée (voir la sous-section III.1.1.4 p. 376), que ces trapèzes sont entre eux comme les diamètres a et b de l'ellipse. Il conclut alors en indiquant que « les éléments correspondants de l'ellipse et du cercle sont entre eux dans le rapport $\frac{b}{a}$; il en sera donc de même de leurs aires totales » (Cirodde, 1858, p. 372). Les « tranches infiniment minces », « éléments » qui composent les figures, ainsi que la mention des « aires totales », dans les mêmes proportions que les éléments, ne sont pas sans faire penser au lexique et aux idées de la géométrie des indivisibles, comme nous l'avions remarqué dans la démonstration de Tombeck (voir p. 383). En tout cas, la preuve de Cirodde (comme celle de Tombeck) fait appel au cadre des infiniment petits, et ne fait pas usage de la notion de limite.

Deux décennies plus tard, André propose sa version de cette preuve. Partant de la même configuration géométrique que Cirodde, il décompose également l'ellipse et le cercle de même diamètre en trapèzes, dont les rapports sont comme ceux des diamètres entre eux. La nuance est dans la formulation finale, puisqu'il précise que « ces égalités existeront, quelques nombreuses soient les perpendiculaires menées de A' en A. Or, à la limite, quand ces perpendiculaires se rapprochent indéfiniment, la somme des numérateurs [...] compose l'aire de la demi-ellipse et la somme des dénominateurs [...] celle du demi-cercle » (P. André, 1879, p. 301-302), ce qui lui permet de conclure (voir figure III.166 p. 643). Deux différences sont à noter par rapport au raisonnement de Cirodde : André emploie le vocabulaire des limites, et il mentionne explicitement le mot « somme » pour passer des propriétés des aires partielles à celle de l'aire totale.

Licence CC BY-NC-ND 3.0



ou

$$\frac{\text{Demi-aire de l'ellipse}}{\text{Demi-aire du cercle}} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{\text{Aire de l'ellipse}}{\text{Aire du cercle}} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{\text{Aire de l'ellipse}}{\pi a^2} = \frac{b}{a},$$

Aire de l'ellipse ou $E = \pi ab$.

FIGURE III.166 – Figure et conclusion de la preuve de l'aire de l'ellipse chez André (1879, p. 301-302)

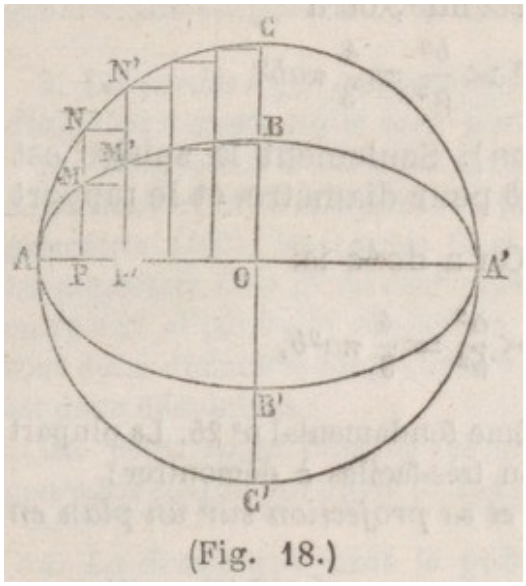
Peu après, Guilmin et Girod livrent des preuves assez similaires du même résultat, comme en témoignent déjà, à première vue, les figures sur lesquelles il s'appuient (voir figure III.167 p. 644). Leurs démonstrations respectives reposent sur des découpages non pas en trapèzes, mais en rectangles. Les rectangles sont proportionnels à leurs hauteurs, qui sont elles-même dans le même rapport que les diamètres a et b de l'ellipse. Les rectangles sont donc également dans ce même rapport. Alors « le rapport de la somme des rectangles inscrits dans l'ellipse à la somme des rapports inscrits dans le cercle est [...] égal à $\frac{b}{a}$ » (Guilmin, 1882, compl.71). La relation $\frac{s}{s_1}$ (où s est la somme des rectangles situés sous l'ellipse et s_1 ceux situés sous le cercle) alors obtenue « a lieu quel que soit le nombre des divisions de MC ; elle est donc encore vraie à la limite, c'est-à-dire quand ce nombre est infiniment grand » (Girod, 1893, p. 348). Ce passage à la limite s'exprime de façon similaire chez les deux auteurs. Guilmin écrit par exemple :

> Mais la limite de la première somme quand le nombre des parties de l'axe augmente indéfiniment est l'aire s de l'ellipse ; la limite de la seconde est l'aire $S = \pi a^2$ du cercle. On a donc à la limite $\frac{s}{S} = \frac{b}{a}$; ou $\frac{s}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$; d'où $s = \pi ab$. (Guilmin, 1882, compl.71)

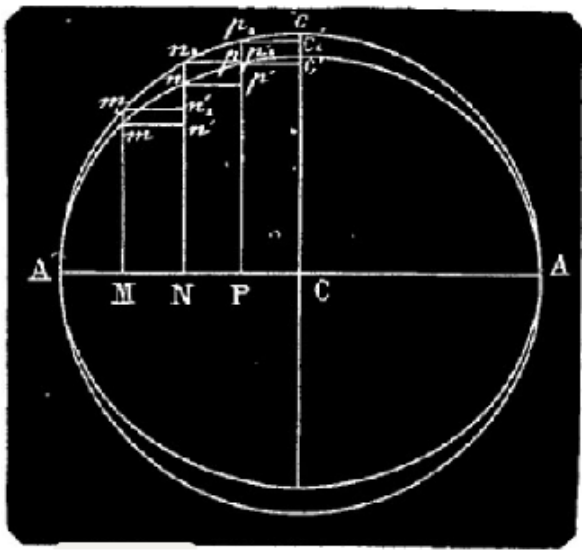
À travers ces deux exemples, il est donc manifeste qu'à la fin du siècle, les auteurs des manuels de géométrie se rapprochent des méthodes de l'analyse infinitésimale pour construire ce type de preuves. Reposant sur des limites de sommes d'aires de rectangles construits sur les ordonnées des courbes dont on souhaite évaluer l'aire, elles s'appuient précisément sur le principe des sommes de Riemann, que ce dernier a formalisées dans son mémoire d'analyse de 1854 [231].

231. (Georg Friedrich) Bernhard Riemann (1826 – 1866). Mathématicien allemand, ses travaux ont porté notamment sur la géométrie, complexe et différentielle et la théorie des nombres. Il a enseigné à l'université de Göttingen. Pour en savoir plus sur son mémoire et la naissance officielle des sommes de Riemann sous la forme qu'on leur connaît actuellement, voir (Hochkirchen, 2003).

Licence CC BY-NC-ND 3.0



(a) chez Guilmin (1882, compl.71)



(b) chez Girod (1893, p. 347)

FIGURE III.167 – Figures associées à la preuve de l'aire de l'ellipse

L'intégration des développements récents des sciences mathématiques est donc effectif chez une partie des auteurs, insérant des résultats d'analyse y compris dans des manuels de géométrie à destination des collèges et lycées [232]. Les aires curvilignes se situent décidément bien à l'interface des domaines mathématiques, constituant en particulier un pont entre les savoirs de géométrie et d'analyse, et offrent un support de diffusion au plus grand nombre de théories issues des recherches scientifiques récentes.

L'aire du segment parabolique

Parmi les auteurs qui présentent et démontrent le résultat relatif à l'aire de l'ellipse, quatre s'attellent également à prouver la formule de l'aire d'un segment parabolique. Ce résultat est lui aussi non trivial, bien que connu depuis l'Antiquité, car ses modes de démonstration reposent soit sur la démonstration par l'absurde associée à la méthode d'exhaustion (méthode d'Archimède) (Archimède, 1807 ; Bathier-Fauvet, 1998), soit sur les principes du calcul infinitésimal.

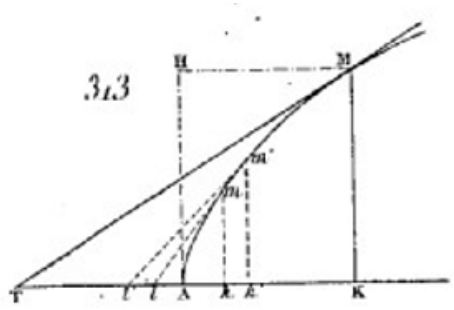
Aucun des auteurs du corpus ne fait le choix de suivre la voie ancienne. Les fils Cirodde, reprenant le travail de leur père décédé depuis l'édition précédente, justifient les choix

232. Ce fait est d'autant plus remarquable que sur les 5 manuels considérés dans cette section, tous sauf celui de Cirodde font partie des groupes « succès éditoriaux » (groupe 5 de la première classification) et « succès départementaux » (groupe 6 de la seconde classification) : voir tableau A.2 p. 667. L'intégration de ces contenus mathématiques avancés n'entrave donc visiblement en rien leur bonne réception auprès de leurs contemporains.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

opérés dans un « avertissement » préalable à leur ouvrage, indiquant que, dans l'objectif de le « mettre en harmonie avec les programmes officiels », ils ont « remplacé autant que possible par des démonstrations directes les démonstrations dites *par la réduction à l'absurde* », et que « la méthode infinitésimale a été seule conservée pour établir les expressions des aires et des volumes » (Cirodde, 1858, Av.). Quatre ans après les instructions de 1854 pour la mise à exécution du plan d'études des lycées, ils s'inscrivent ainsi dans les idées véhiculées par Le Verrier et Fortoul, qui préconisent autant que possible d'éviter « toute démonstration fondée sur ce qu'on appelait la *réduction à l'absurde* », qu'ils estiment défavorable au développement de l'intelligence et qui n'aide pas à « faire de nouveaux pas dans l'étude de la science » (Belhoste, 1995, p. 338).

La preuve présentée dans le manuel de Cirodde est remarquable de concision, puisqu'elle n'occupe qu'une demi-page, sans la figure (voir figure III.168 p. 646). Des trapèzes sont formés à partir de points m et m' pris sur la parabole et des perpendiculaires à son axe issues de ces points. De ces points sont menées des tangentes à la parabole, qui forment des triangles avec son axe. Une propriété bien connue des tangentes à une parabole, démontrée préalablement, indique alors que les distances par rapport au sommet A, Ak et Al, sont égales et qu'ainsi, les trapèzes et triangles formés ont des bases identiques (Cirodde, 1858, p. 379). Les aires des trapèzes sont donc doubles de celles des triangles. Les auteurs indiquent alors qu'« on pourra décomposer le segment parabolique AMK en une infinité de petits trapèzes dont chacun sera le double du petit triangle correspondant, et il est clair que la somme de tous ces petits triangles composera la figure TMA ». La conclusion n'est plus difficile à obtenir après cela, puisque « segment $AMK = 2$ figure $TMA = \frac{2}{3}$ triangle $TMK = \frac{2}{3}AK.MK$ », ce qui prouve que l'aire du segment parabolique « est égale aux deux tiers de l'aire d'un rectangle [...] de même base [...] et de même hauteur [...] » (Cirodde, 1858, p. 383).



Considérons un élément mm' de la parabole, et abaissons sur l'axe les perpendiculaires mk, $m'k'$. Menons les tangentes mt, $m't'$; on aura (768)

$$At = Ak,\ At' = Ak',$$

d'où

$$At' - At \text{ ou } tt' = Ak' - Ak \text{ ou } kk'.$$

Donc l'aire du petit trapèze $mm'k'k$ est double de l'aire du petit triangle $m't't$. Or, on pourra décomposer le segment parabolique AMK en une infinité de petits trapèzes dont chacun sera le double du petit triangle correspondant, et il est clair que la somme de tous ces petits triangles composera la figure TMA ; d'ailleurs TK = 2 AK (768). Donc enfin

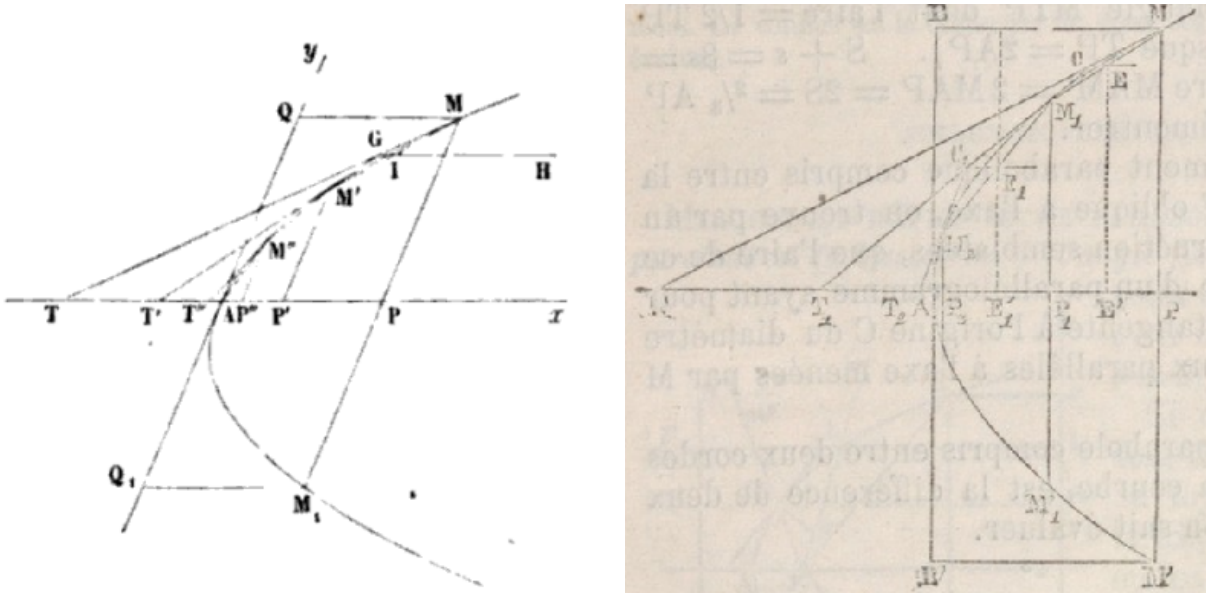
segment AMK = 2 figure TMA = $\frac{2}{3}$ triangle TMK = $\frac{2}{3}$ AK.MK.

FIGURE III.168 – Figure et preuve de l'aire du segment parabolique chez Cirodde (1858, 383, pl.xiii)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

La simplicité apparente de cette preuve, et sa remarquable efficacité, ne doivent pas occulter qu'il s'agit d'un véritable raisonnement d'analyse infinitésimale, fondé sur un résultat essentiel de la géométrie des courbes. Dans le texte, l'aspect analytique se manifeste par la formulation « une infinité de petits trapèzes », qui masque un passage implicite à la limite dans les sommes des trapèzes et des triangles.

Rouché et Comberousse, ainsi que Guilmin plus tardivement, reprennent les mêmes éléments pour rédiger les démonstrations de ce résultat. Les deux aires sont composées pour l'une de trapèzes et pour l'autre de triangles, dont les uns sont les doubles des autres, de sorte que « la somme des trapèzes reste toujours égale au double de la somme des triangles » (Rouché et Comberousse, 1866, p. 664). Le passage à la limite est néanmoins beaucoup plus explicite dans leurs ouvrages respectifs, puisque Guilmin écrit : « Cela est vrai à la limite quand le nombre des points [...] croît indéfiniment. Mais, dans ce cas, la limite de S [somme des aires des trapèzes] est l'aire du demi-segment parabolique MAP ; la limite de s [somme des aires des triangles] est l'aire parabolique extérieure AMT », ce qui mène à la conclusion attendue. Dans ce cas comme dans celui de l'ellipse, le paradigme des limites a progressivement remplacé celui des infiniment petits, et l'apport de l'analyse infinitésimale à la géométrie est conséquent, puisqu'elle permet de produire des preuves alliant la concision, l'élégance et la simplicité.



(a) chez Rouché et Comberousse (1866, p. 663) **(b)** chez Guilmin (1882, compl.101)

FIGURE III.169 – Figures associées à la preuve de l'aire du segment parabolique

Un dernier auteur — Tombeck — s'emploie à démontrer que « l'aire comprise entre l'axe d'une parabole, la courbe elle-même et l'ordonnée d'un point quelconque, est équiva-

Licence CC BY-NC-ND 3.0

lente aux deux tiers du rectangle construit sur l'abscisse et l'ordonnée du même point » (Tombeck, 1879, p. 460). L'auteur commence à algébriser l'énoncé en posant les deux données principales, MP et AP, respectivement égales à x et y, et en formulant ainsi le résultat attendu sous la forme d'une expression littérale synthétique $surf.AMP = \frac{2}{3}xy$. Il se distingue ensuite de ses collègues auteurs en découpant le segment parabolique en rectangles, à partir de la division de AB « en un nombre arbitraire n de parties égales », tout comme Guilmin et Girod l'ont fait pour l'ellipse (voir figure III.167 p. 644). Ce faisant, il forme « une suite de rectangles [...] dont la somme a pour limite la surface AMB, car les triangles curvilignes excédants [...] valent à eux tous moins que le rectangle $BCMG$, qui tend vers zéro quand n tend vers l'∞ » (Tombeck, 1879, p. 461).

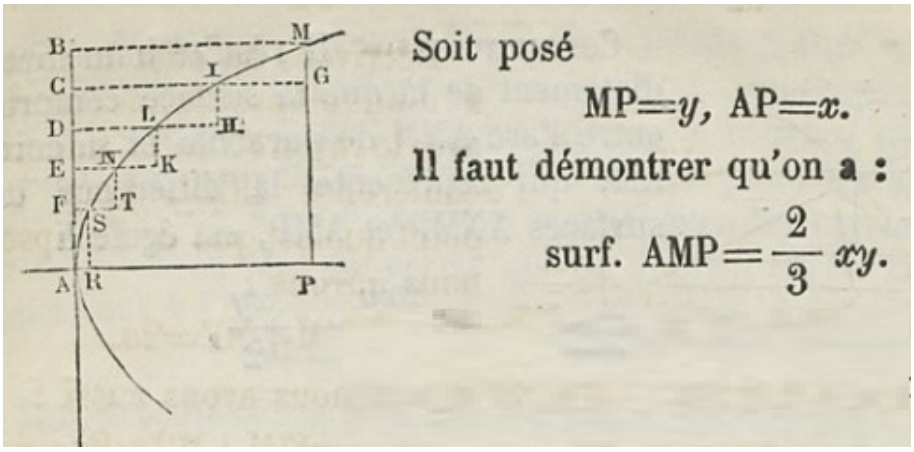
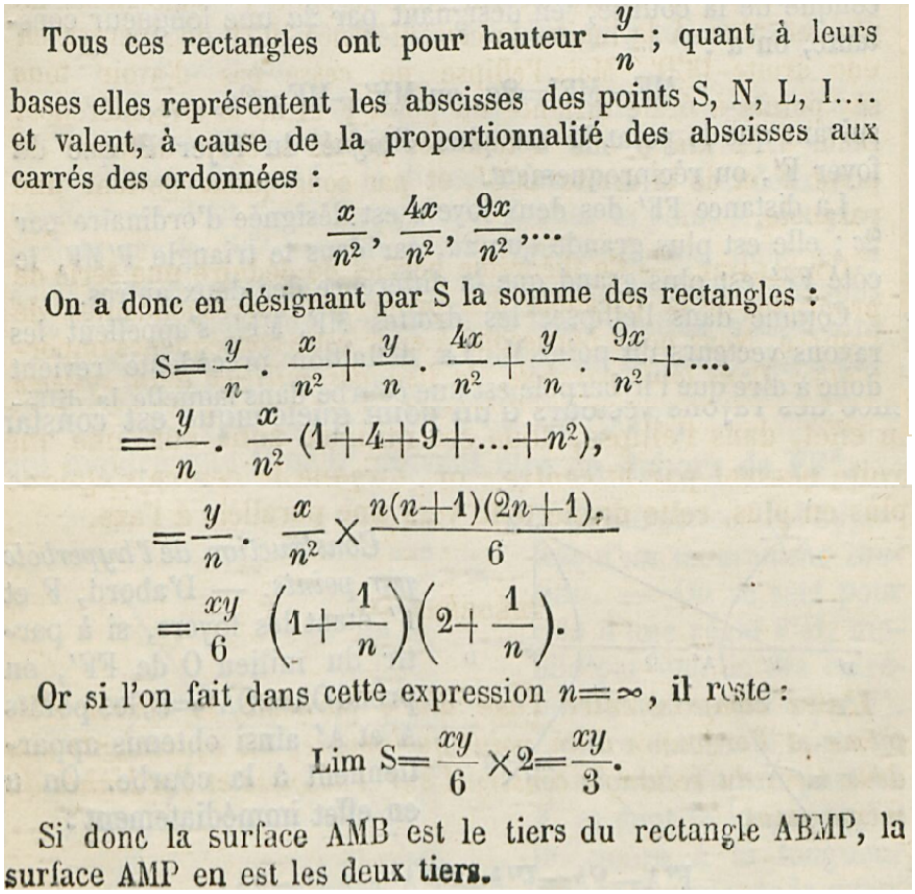


FIGURE III.170 – Figure associée à la preuve de l'aire du segment parabolique chez Tombeck (1879, p. 461)

Il effectue alors la somme des rectangles en fonctions des variables x, y et n, en utilisant « la proportionnalité des abscisses aux carrés des ordonnées », puis des techniques algébriques de factorisation, ainsi qu'un résultat donnant la somme des carrés des n premiers entiers naturels. Par un jeu de regroupement des termes, il fait apparaître des facteurs dont la limite lorsque n tend vers l'infini est aisée à déterminer, avant de conclure (voir figure III.171 p. 648). Dans cette preuve, le recours aux techniques de la géométrie analytique est assumé, et la notion de limite exploitée sans restriction, comme le montre par exemple la formulation « si l'on fait dans cette expression $n = \infty$ ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0



Tous ces rectangles ont pour hauteur $\frac{y}{n}$; quant à leurs bases elles représentent les abscisses des points S, N, L, I.... et valent, à cause de la proportionnalité des abscisses aux carrés des ordonnées :

$$\frac{x}{n^2}, \frac{4x}{n^2}, \frac{9x}{n^2}, \ldots$$

On a donc en désignant par S la somme des rectangles :

$$S = \frac{y}{n} \cdot \frac{x}{n^2} + \frac{y}{n} \cdot \frac{4x}{n^2} + \frac{y}{n} \cdot \frac{9x}{n^2} + \ldots.$$

$$= \frac{y}{n} \cdot \frac{x}{n^2}(1+4+9+\ldots+n^2),$$

$$= \frac{y}{n} \cdot \frac{x}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{xy}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Or si l'on fait dans cette expression $n = \infty$, il reste :

$$\text{Lim } S = \frac{xy}{6} \times 2 = \frac{xy}{3}.$$

Si donc la surface AMB est le tiers du rectangle ABMP, la surface AMP en est les deux tiers.

FIGURE III.171 – Calculs algébriques au cours de la preuve de l'aire du segment parabolique chez Tombeck (1879, p. 461)

Cette preuve ne s'appuie donc pas sur des arguments majeurs d'ordre géométrique, comme celles vues ci-avant, qui reposaient sur la propriété des tangentes aux paraboles, mais sur une propriété algébrique de la courbe considérée, ainsi qu'un usage bien maîtrisé du calcul littéral et des limites. L'évolution des méthodes pour ce type de quadratures est frappante, et cette dernière preuve est emblématique des mutations opérées, vers un recours à l'algèbre, ainsi qu'à l'analyse, bien plus pleinement assumés. Ceci est d'autant plus surprenant que Tombeck change totalement de registre par rapport à la preuve de l'aire de l'ellipse, pour laquelle les indivisibles, ou au moins les infiniment petits, étaient convoqués, sans que la notion de limite ne vienne intervenir directement. Le raisonnement qu'il choisit de présenter pour le segment parabolique se rapproche davantage des preuves de Guilmin et Girod pour l'aire de l'ellipse, axées sur le principe des sommes de Riemann (voir p. 644).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

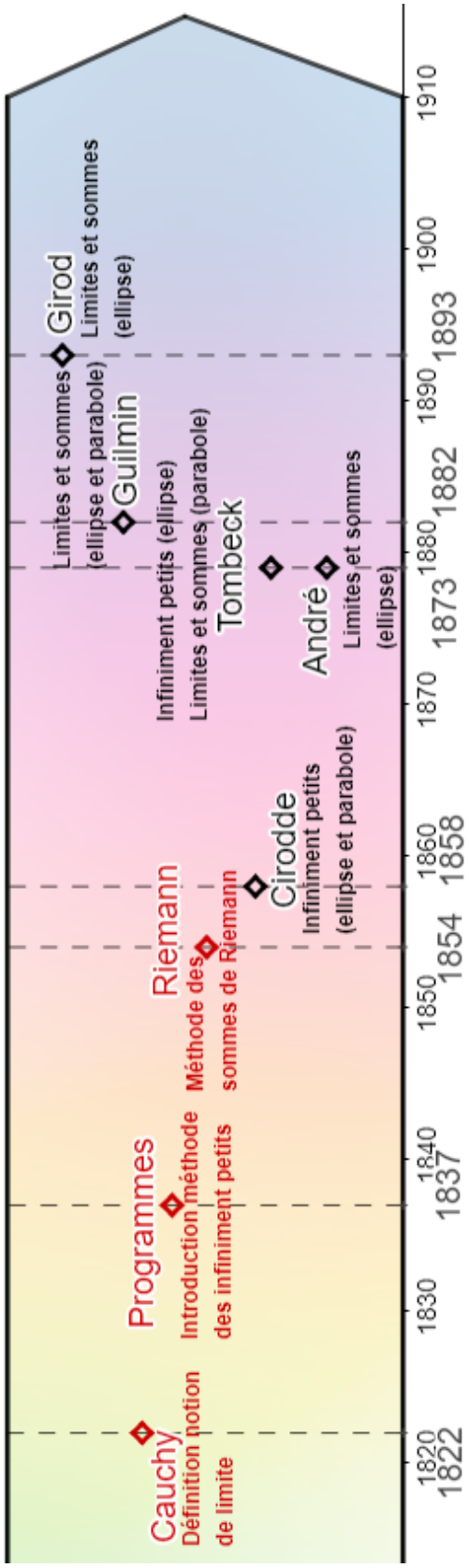


FIGURE III.172 – Frise résumant l'évolution des méthodes de calcul des aires délimitées par des sections coniques dans les manuels du corpus, en parallèle des avancées du domaine scientifique sur la question

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dans le cas de l'ellipse comme dans celui de la parabole, nous observons donc le même mouvement d'assimilation des avancées récentes de la discipline dans la constitution des savoirs à enseigner présentés dans les manuels du corpus. C'est le cas de la notion de limite, progressivement intégrée dans les discours, et ce avec un formalisme de plus en plus assumé, comme nous n'avons déjà analysé à propos des aires curvilignes. Mais dans le cas des coniques, les auteurs se réfèrent à de nouveaux développements de l'analyse, avec l'apparition de figures et de raisonnements que l'on peut aisément identifier comme des sommes de Riemann. De surcroît, l'une des preuves de la formule de l'aire du segment parabolique, dont la première occurrence est repérable chez Cirodde, pourrait s'avérer être originale, n'ayant pas été trouvée dans d'autres sources antérieures à cette époque à ce stade de nos recherches (voir la frise chronologique III.172 p. 649).

En tout cas, la question des aires des sections coniques a pour effet la nécessité de puiser dans des domaines connexes à celui de la géométrie élémentaire, comme la géométrie analytique, à l'intersection de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie. Les savoirs relatifs à ces trois branches des mathématiques entrent, dans les démonstrations concernées, en totale interaction, produisant des preuves à la fois concises et intelligibles, pour des élèves initiés à ces usages, ou qui au contraire les découvrent à travers la présentation de ces résultats. L'algèbre contribue à l'élaboration des formules avec les connaissances sur les sommes, l'utilisation d'inconnues et le recours au calcul littéral, comme chez Tombeck. Les propriétés des courbes et des constructions géométriques intermédiaires, comme les tangentes, sont mobilisées, suivies d'un recours aux infiniment petits dans un premier temps, et de passages plus ou moins explicites à la limite dans un second, pour conclure (voir schéma III.173 p. 651).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

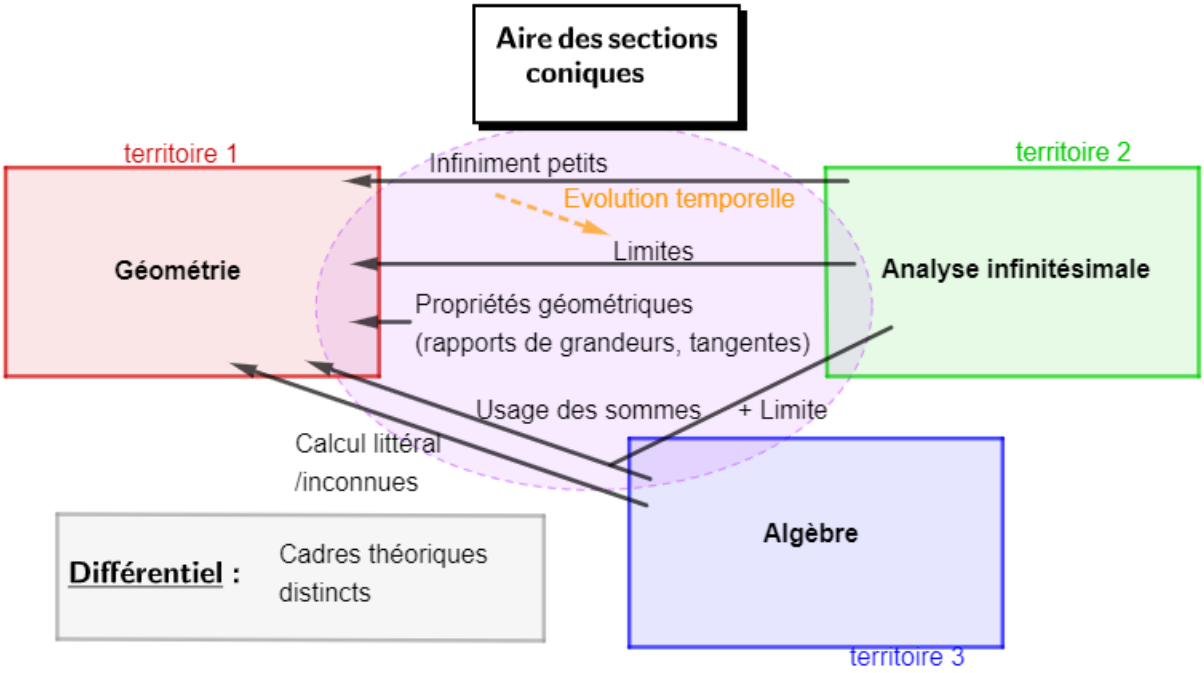


FIGURE III.173 – Schéma montrant en quoi les aires des sections coniques sont à l'interface de la géométrie, de l'analyse infinitésimale et de l'algèbre

Les aires curvilignes se situent aux frontières de la géométrie élémentaire, et la présentation des résultats qui leur sont associés pour un public de niveau intermédiaire nécessite de franchir un pas vers les notions d'infiniment petits ou de limite. Même le cercle, qui constitue une figure plus fondamentale encore que les coniques, pose des difficultés lors de la détermination de son aire, surmontée en le considérant comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits. Les propositions théoriques alors obtenues en mettant en œuvre des connaissances tirées de l'analyse, mais aussi de l'algèbre, s'accompagnent de méthodes plus pratiques, appliquées à la détermination des aires des surfaces courbes quelconques. Ces dernières sont travaillées par des savants comme Simpson ou Poncelet, dans la perspective de développer des mathématiques au service des ingénieurs (Tournès, 2022, p. 437-440). Des méthodes originales apparaissent dans les manuels, notamment pour déterminer les aires des sections coniques, comme les segments de parabole. Certaines d'entre elles, telles que les méthodes de Cirodde, Rouché et Comberousse et Guilmin (voir p. 646 et 646), dont l'origine est difficile à reconstituer, pourraient s'avérer être des créations des auteurs des manuels de géométrie de l'époque. La frontière entre mathématiques savantes et mathématiques enseignées apparaît ainsi encore, dans ce contexte, comme particulièrement ténue.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu observer le rôle d'interface de la géométrie des aires à plusieurs reprises, à l'intersection de la géométrie et de l'arithmétique (voir schémas III.146 p. 605, III.151 p. 615 et III.165 p. 640), mais aussi de l'algèbre (voir schéma III.158 p. 629,III.165 p. 640 et III.173 p. 651) ou des travaux manuels (voir schéma III.165 p. 640). Mais c'est principalement avec le domaine de l'analyse que cette interface s'est vue étudiée, ce que montrent tous les schémas précédemment évoqués. Le fait que l'analyse infinitésimale ne soit pas au programme de l'enseignement intermédiaire (ni secondaire ni primaire supérieur) pour la période considérée n'empêche manifestement pas les interactions mobilisées avec son cadre théorique et ses méthodes, engageant de nombreux flux de connaissances vers la géométrie des aires, et parfois également en sens retour. Nous avons synthétisé ces différentes interfaces dans le schéma global suivant, reprenant la partition des programmes dressée en introduction (voir p. 450), en y ajoutant les travaux manuels, et en mettant à ses côtés le domaine de l'analyse, afin de pouvoir mettre en évidence toutes les interfaces relevées dans notre étude. Elles sont désignées par les situations géométriques qu'elles concernent (voir figure III.174 p. 652).

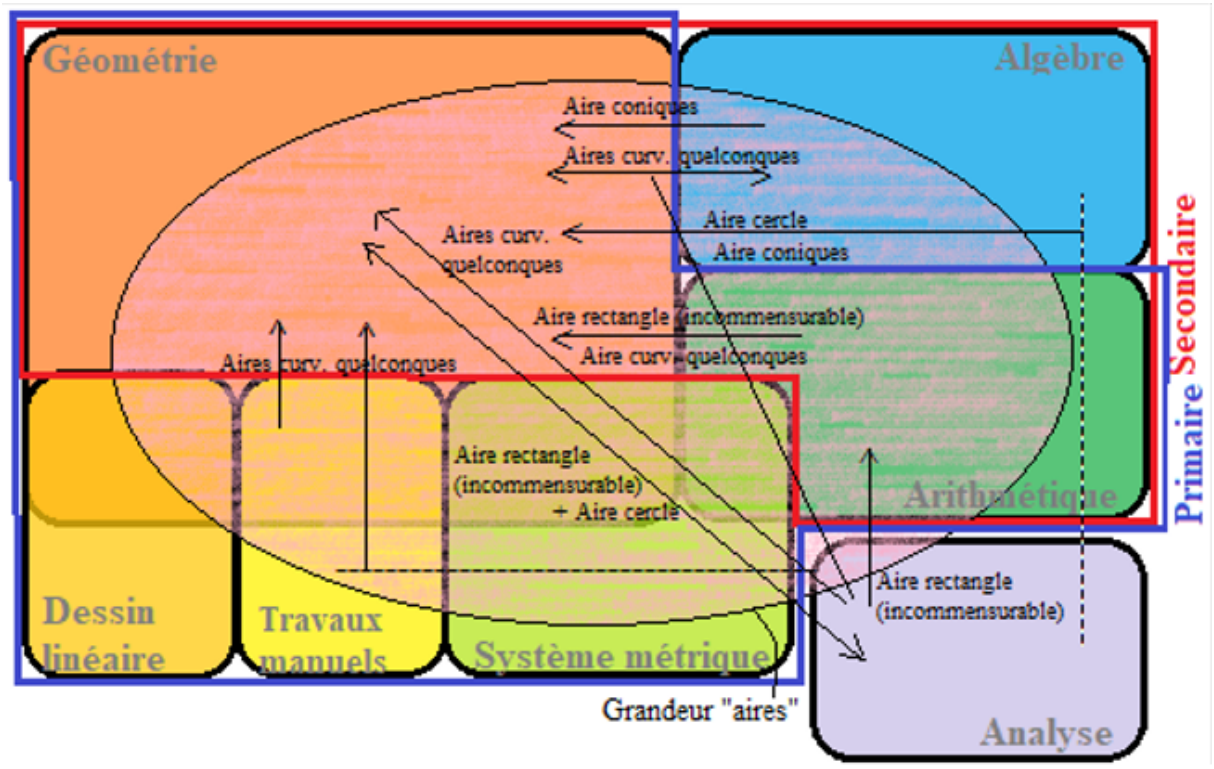


FIGURE III.174 – Schéma reprenant l'ensemble des interfaces présentées dans le chapitre III.3

Les manuels de géométrie du XIX^e siècle sont révélateurs du processus historique d'appropriation des outils de l'analyse en géométrie, y compris élémentaire. Depuis la

Licence CC BY-NC-ND 3.0

situation initiale, au tournant du siècle, décrite par Lamandé (1993), les positions des auteurs ont nettement bougé. Les trois postures des auteurs des *Éléments* les plus célèbres en géométrie — Bézout, Lacroix et Legendre — sont pourtant représentatives de celles que l'on a pu rencontrer par la suite chez les auteurs des manuels du corpus : rejet des méthodes infinitésimales au profit des méthodes synthétiques (Legendre), utilisation d'une notion empirique des infiniment petits (Bézout), ou recours à un concept de limite dûment construit en amont (Lacroix).

La première de ces positions n'est pas étudiée dans ce chapitre, qui traite justement de l'usage des méthodes infinitésimales en géométrie des aires. En revanche, nous avons pu exhiber un certain nombre d'auteurs recourant à des infiniment petits, pour la question de l'incommensurabilité comme des aires curvilignes, plus ou moins formalisés, comme Bergery, Desnanot, Sonnet, Gimelli ou encore Bos. Presque tous ont écrit leurs ouvrages durant la première moitié du siècle. Leurs successeurs Puille, Tombeck, André, Leyssenne ou encore Girod mobilisent quant à eux plus aisément la notion de limite, dans l'un ou l'autre des deux contextes (ou les deux). Enfin, des auteurs abordent, à l'instar de Lacroix, des systèmes théoriques complets en amont de leurs applications à la détermination des aires : Rouché et Comberousse, ainsi que Méray, échafaudent une théorie des grandeurs proportionnelles, Cirodde, Vincent et Terquem étendent la notion de proportionnalité aux grandeurs incommensurables via les limites des rapports (ou quantités) variables, alors que Guilmin théorise la limitation des erreurs commises. Ces démarches montrent la richesse scientifique d'écrits par ailleurs destinés à l'enseignement à un niveau relativement modeste, et prouve une nouvelle fois le talent de ces auteurs, tant dans la production de savoirs, leur organisation que dans leur diffusion au plus grand nombre.

Au cours du temps, et comparativement à la situation au tournant du siècle prise comme point de départ, l'usage des limites et des techniques infinitésimales ne se restreint plus au traitement de l'incommensurabilité, notamment pour l'aire du rectangle, ou à la preuve de l'aire du cercle. Elle s'étend aux aires curvilignes quelconques et aux section coniques, progressivement intégrées dans les programmes et par conséquent dans les manuels. Dans son étude des méthodes dans les ouvrages de géométrie du XIX^{e} siècle, Moussard montre que la méthode des infiniment petits n'est prisée que par quelques auteurs pour la résolution des problèmes géométriques (dont Salmon et Desboves), et que celle-ci ne se restreint pratiquement qu'à l'étude des maxima et des minima (Moussard, 2015, p. 374, 422-427, 2023, p. 175-177). En revanche, il précise que Serret, dans son ouvrage de 1855, ne limite plus l'emploi de ses méthodes, dont une partie relève de la « géométrie infinitésimale », aux seuls problèmes de construction, mais aussi aux démonstrations des théorèmes (Moussard, 2023, p. 161). Dans notre

Licence CC BY-NC-ND 3.0

corpus, moins centré sur la notion de méthode et de résolution de problèmes, c'est bien cette dernière posture que nous retrouvons chez nos auteurs, pour lesquels la notion d'infiniment petits ou de limite intervient directement dans les preuves. Les méthodes infinitésimales permettent ainsi d'établir, avec concision, simplicité, efficacité et parfois élégance, des résultats complexes de géométrie des aires (comme les aires des sections coniques), mais contribuent aussi à la résolution de problèmes plus pratiques de mesure des aires, comme celui de l'estimation des aires curvilignes quelconques, avec la meilleure précision possible.

Notre analyse montre également comment les auteurs intègrent progressivement les nouveautés scientifiques récentes, telles que la notion de limite formalisée par Cauchy au début des années 1820, les sommes de Riemann que ce dernier a définies en 1854, ou encore les méthodes de Poncelet (datant des années 1830-40) et de Simpson (plus ancienne) pour les quadratures approchées (voir les frises III.172 III.164 et III.150 p. 649 639 et 614). Les mondes de la recherche et de l'enseignement, loin d'être étanches, gagnent à être étudiés conjointement, afin de ne pas séparer les conditions de production de savoirs mathématiques de celles de leur reproduction (Belhoste, 1998). Renaud explore dans sa thèse « la fabrication d'un enseignement de l'analyse » au XIX^{e} siècle (Renaud, 2017). Nous estimons que notre étude apporte sa pierre à l'édifice en montrant que la géométrie des aires pour l'enseignement secondaire à la même période, à la fois profite du processus de cette fabrication, en intégrant des éléments de cette analyse infinitésimale dans la géométrie élémentaire, et en même temps y contribue, en proposant des méthodes pratiques et des formalisations théoriques originales, constituant progressivement une forme de géométrie infinitésimale, qui prépare les élèves qui la reçoivent aux techniques et raisonnements analytiques de leurs futurs apprentissages.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Conclusion générale

Au cours de cette étude, nous avons obtenu des résultats substantiels à propos des savoirs sur les aires présents dans les manuels du XIX^e siècle en mettant en œuvre une démarche très spécifique. Cette dernière repose sur le fait qu'à toutes les étapes de notre travail, nous ayons choisi de privilégier une approche systématique, puis d'articuler les analyses quantitatives et qualitatives. En effet, nous avons commencé par identifier d'une manière exhaustive les ouvrages permettant d'enseigner la géométrie des aires dans la *Bibliographie de la France*. À partir de là, la constitution de notre corpus a reposé sur l'analyse complète de sources nous fournissant des données institutionnelles précieuses. Nous avons ensuite procédé au recensement de la totalité des énoncés de savoir sur les aires présents dans notre corpus, en établissant une nomenclature commune. Enfin, notre travail qualitatif s'est appuyé sur l'étude systématique des contenus de savoirs relatifs à trois thèmes, que nous avons pu identifier en cours de processus comme représentatifs de la diversité de la question des aires. C'est le caractère heuristique de cette démarche suivie de bout en bout, et dont nous pensons qu'elle peut constituer un réel apport méthodologique en histoire des mathématiques, qui a permis à l'idée de « la géométrie des aires comme interface » d'émerger et de se confirmer.

Dans ce cadre, nous avons orienté nos analyses dans trois directions. L'une d'entre elles a été de questionner les relations et les pratiques des acteurs de l'époque concernés par les manuels scolaires traitant des aires, comme professionnels impliqués dans leur production, ou comme usagers. Une seconde a porté sur les méthodes proposées par les rédacteurs d'ouvrages pour enseigner au mieux les connaissances relatives à cet objet à un niveau intermédiaire. Enfin, nous avons interrogé la notion d'aire en tant qu'objet mathématique, avec les problématiques épistémologiques liées à son développement et à sa transmission. Nos résultats ont apporté des éclairages spécifiques à chacun de ces trois axes.

Cette étude a été l'occasion d'interroger les pratiques dans lesquelles s'engagent les acteurs de l'époque pour enseigner ou apprendre la géométrie des aires, et les relations

Licence CC BY-NC-ND 3.0

que ces pratiques induisent entre eux. Parmi ceux que nous avons désigné comme les « acteurs éducatifs » se trouvent les auteurs de manuels, qui occupent une place primordiale dans nos analyses, mais aussi les lectrices et lecteurs auxquel·le·s leurs ouvrages s'adressent. Nous avons de surcroît souligné le rôle de plusieurs catégories de professionnels dans l'histoire que nous avons retracée, tells que les enseignants, auxquels les livres sont également destinés, les éditeurs scolaires, les cadres de l'instruction — inspecteurs, membres des commissions des livres classiques — et les membres de la communauté scientifique, et notamment mathématique. Notre travail a eu pour résultat de mieux parvenir à caractériser ces groupes de personnes et les liens qu'ils tissent entre eux, notamment autour de la géométrie des aires.

Les auteurs des manuels traitant de la géométrie, et en particulier de la géométrie des aires, apparaissent comme une catégorie plutôt hétéroclite de personnes qui partagent une même activité. Cette fonction commune — la rédaction de manuels — n'est souvent pas leur seule tâche ni leur principale. Ce groupe des rédacteurs de manuels présente des caractéristiques plutôt hétérogènes. S'il s'agit presque exclusivement d'hommes, et que beaucoup sont issus des métiers relatifs à l'éducation, ce n'est pas le cas de tous, et ces derniers peuvent également provenir d'autres milieux, tels que l'église, l'armée, ou encore les professions de la société civile (ingénieurs, architectes, dessinateurs, etc.). Malgré cette diversité de profils, les auteurs des manuels traitant de la géométrie des aires se distinguent par un socle de culture commune issue de l'Antiquité, et une large majorité se réfère à Archimède, Pythagore ou Euclide. En revanche, leurs références à des savants modernes sont plus disparates, et dépendent des orientations scientifiques qu'ils intentent de donner à leurs ouvrages. Certains d'entre eux en citent d'autres dans leurs pages, parmi leurs contemporains ou les auteurs qui leur sont antérieurs. Pour autant, nous ne pouvons pas considérer qu'il s'agit d'une « communauté », puisqu'ils n'entretiennent pas particulièrement de relations personnelles, et qu'ils n'appartiennent pas à des groupes d'influence communs.

Cette catégorie d'acteurs s'adresse à un public vaste : les usager·ère·s des ouvrages abordant la géométrie des aires sont aussi bien des garçons, des filles, des professionnels ou des élèves, qui peuvent étudier dans des structures de l'ordre primaire comme secondaire. Ce que montre notre étude, c'est que ces publics visés ne sont pas aussi cloisonnés que ce que nous avons pu l'envisager *a priori*, si l'on en croît par exemple la stricte séparation des deux ordres en termes d'organisation de leurs structures à cette époque. Nos résultats confirment en cela des travaux d'historien·ne·s qui exhibent des circulations entre les deux ordres et remettent en question leur stricte étanchéité (Briand et Chapoulie, 2012 ; D'Enfert, 2015 ; Legros, 2019). En effet, les auteurs des manuels s'adressent fréquemment à plusieurs types de lectorat, et notamment à la fois à des élèves de l'enseignement primaire et secondaire. Si une large partie des titres à

Licence CC BY-NC-ND 3.0

destination des jeunes filles leur sont spécifiquement adressés, certains manuels de la fin du siècle s'affichent à l'usage d'un public scolaire mixte, comme celui de Leyssenne (1890). Le décloisonnement relatif entre ordre primaire et secondaire, ainsi qu'entre filles et garçons, observé à travers les manuels de la géométrie des aires est également valable pour ce qui est des lectorats scolaires ou non scolaires. En effet, des manuels à l'usage de professionnels, comme ceux de Dupin et Bergery, ou encore le manuel Roret de Terquem, ont aussi vocation à être utilisés en milieu scolaire, ce dont témoigne leur appartenance aux listes officielles d'ouvrages autorisés dans les classes émanant du ministère. La prise en compte de ces différentes catégories de lectrices et lecteurs par les rédacteurs des ouvrages se manifeste par une forme de différenciation, à la fois des contenus et des méthodes, relatifs à la géométrie des aires. L'enseignement féminin présente des particularités qui poussent certains auteurs, comme Bos, à proposer deux versions assez distinctes de son ouvrage de géométrie, avec des savoirs et des preuves adaptés aux jeunes filles. De la même manière, les ouvrages proposant le plus de méthodes intuitives et/ou expérimentales sont davantage à destination des publics du primaire, du primaire supérieur ou de l'enseignement spécial.

Les succès d'édition de certains manuels scolaires sont un marqueur d'ordre général de l'adhésion d'une population à un ouvrage. Cependant, la réception des manuels auprès des enseignants exerçant sur le terrain se mesure à travers d'autres sources, telles que les listes départementales rassemblées durant la décennie 1880-1890. Ces dernières expriment l'usage que les instituteurs du territoire français font réellement des manuels dans leurs classes, et confirment ou non les informations de nature éditoriale sur le succès des ouvrages. De même, les travaux des commissions des livres classiques révèlent la perception qu'ont une partie des officiels de l'instruction publique des titres proposés pour enseigner la géométrie des aires. La finesse des arguments qu'ils exposent dans ce cadre reflète leur exigence et l'ampleur de leurs attentes envers les rédacteurs de manuels.

Pour répondre aux injonctions institutionnelles ainsi qu'aux besoins des enseignants et de leurs élèves, les auteurs des manuels qui traitent de la géométrie des aires ont à composer avec deux préoccupations majeures. La première est le souci d'intelligibilité : les enseignants et les lectrices et lecteurs qui se saisiront de l'ouvrage doivent en reconnaître la clarté, voire la simplicité. Toutefois, un bon outil d'enseignement doit également répondre à une exigence de rigueur, dans le contexte du développement de la science de son époque. C'est pourquoi dans notre étude, nous avons observé à plusieurs reprises la marche simultanée de la production mathématique académique et de la production de savoirs enseignables pour les manuels. La période du XIX^{e} siècle a la particularité, notamment concernant la géométrie des aires, de poursuivre l'exploration de notions et concepts pas totalement élucidés, mais d'en proposer pourtant

Licence CC BY-NC-ND 3.0

un enseignement à un niveau intermédiaire. Cette situation est manifeste à propos de la question de l'incommensurabilité, en lien avec la construction des nombres réels, de l'aire du cercle, relativement à la nature de π, ou encore à l'établissement des formules d'aires délimitées par des courbes quelconques ou des sections coniques. Ce développement en parallèle des questions scientifiques et de la diffusion des savoirs nous amène à affirmer qu'une partie des auteurs de manuels de géométrie du XIX^{e} siècle proposent des mathématiques « du présent », avec des contenus établis de façon contemporaine ou toute récente, en particulier sur les aires.

Nous avons ainsi pu reconstituer en partie le processus d'élaboration et de diffusion d'un livre de classe à travers les points de vue des acteurs qui y interviennent. Les mathématiciens développent les connaissances liées à la géométrie des aires, que les auteurs de manuels — qui peuvent également participer à la recherche par ailleurs — transposent en contenus enseignables pour des publics de niveau intermédiaire. L'analyse de certains contenus sur les aires (quadrature du cercle, usage des infiniment petits et des limites) révèle particulièrement la connexion entre ces deux étapes. Les titres produits sont alors publiés par des professionnels de l'édition scolaire, avec plus ou moins de succès, comme le montre notre analyse quantitative des « best-sellers » et des auteurs prolifiques. Notre étude du travail des commissions des livres classiques souligne le rôle joué par les cadres de l'instruction dans la validation ou non des ouvrages produits. Ces derniers donnent des arguments qui peuvent être directement liés aux enjeux d'enseignement de la géométrie des aires. Le dépouillement des listes départementales montre pour sa part que les professeurs et instituteurs s'emparent plus ou moins largement de ces ouvrages pour leurs pratiques de classe sur le territoire français. Au cœur de ce dispositif, l'objet de la géométrie des aires est particulièrement révélateur des interactions entre ces groupes d'acteurs, et se situe donc à leur interface.

En second lieu, nous nous sommes penchée sur les méthodes d'enseignement proposées, plus ou moins explicitement, par les auteurs des manuels étudiés. La composition de notre corpus, nous l'avons vu, a été guidée par un double objectif : déterminer une forme de « norme » [233] dans l'enseignement des aires au XIX^{e} siècle, dans le fond comme dans la forme, mais aussi souligner la diversité des propositions offertes aux lectrices et lecteurs à travers des ouvrages plus singuliers.

Cette aspiration a été réalisée, dans la mesure où nous avons pu reconnaître, dans une grande majorité des ouvrages analysés, un lot de connaissances communes sur les

233. Le terme « norme » est employé ici au sens de la « science normale » de Kuhn. Cette expression désigne « la recherche solidement fondée sur un ou plusieurs accomplissements scientifiques passés, accomplissements que tel groupe scientifique considère comme suffisants pour fournir le point de départ d'autres travaux » (Kuhn, 1991, p. 29).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

aires, formant un socle de savoirs fondamentaux que les géomètres en apprentissage doivent acquérir. En effet, presque tous les auteurs s'accordent pour proposer des résultats sur les aires des polygones, l'aire du cercle ou encore le théorème de Pythagore. Parallèlement, les rédacteurs d'une partie des manuels mettent davantage en avant des aspects spécifiques des aires, qu'ils développent de manière plus originale. Ces savoirs peuvent porter sur des notions d'arpentage plus approfondies, incluant parfois des techniques de partages des terrains, des connaissances sur les sections coniques et les aires qu'elles délimitent, ou des questions d'optimisation des aires des figures isopérimètres. Les manuels de géométrie de l'époque présentent donc, et souvent conjointement, aussi bien des contenus standards sur les aires que des énoncés moins courants.

Cette homogénéité relative des contenus s'accompagne d'une certaine uniformité des méthodes présentées. Par exemple, des consensus apparaissent chez des auteurs contemporains pour présenter des résultats sous des formes proches, notamment dans leurs expressions textuelles, tel que nous l'avons observé à propos de la formule de l'aire du rectangle. Les concepts mathématiques mobilisés au fondement des énoncés sur les aires sont eux aussi relativement homologues à des périodes similaires, comme l'usage des rapports de grandeurs pour comparer les aires des figures semblables ou établir le théorème de Pythagore. Les démonstrations analysées montrent que les auteurs qui les produisent s'inscrivent souvent dans des lignées communes : voie euclidienne ou usage de la similitude pour le théorème de Pythagore, double démonstration par l'absurde à la manière des Anciens ou recours aux infiniment petits pour mesurer l'aire du cercle. Des ressemblances fortes apparaissent donc entre des groupes de manuels, à travers leurs développements théoriques et les concepts et méthodes qu'ils mobilisent.

Toutefois, l'uniformité des méthodes est loin d'être absolue, puisqu'à côté d'ouvrages qui proposent des contenus similaires, d'autres titres dévoilent une vision plus originale de l'enseignement de la géométrie, portée par leurs auteurs. L'une de ces conceptions plus singulières porte sur le raisonnement inductif, que nous avons pu observer dans plusieurs ouvrages, notamment à propos du rapport des aires des figures semblables, ou encore à partir du support visuel de la figure de la grille, conçu pour donner à comprendre aux lectrices et lecteurs le résultat le plus général possible pour mesurer l'aire d'un rectangle. Le recours à l'intuition constitue une autre possibilité, mise en œuvre par plusieurs auteurs qui n'hésitent pas à faire appel au sens commun des élèves auxquels ils s'adressent. Dans cette démarche, l'importance des figures et des images est primordiale, tant comme facteurs de motivation que comme supports de réflexion. Les images figuratives/semi-figuratives que nous avons étudiées pour l'apprentissage de l'arpentage ou du théorème de Pythagore jouent effectivement ce double rôle. La

Licence CC BY-NC-ND 3.0

méthode expérimentale regroupe quant à elle les procédés de la visualisation, dont il vient d'être question, et la manipulation de matériel de classe. Cette « éducation de l'œil et de la main » (Tarnier, 1872, p. xi) voit ses vertus vantées, certes minoritairement, par une partie des auteurs de la fin du siècle. Les rédacteurs ne la préconisent pas toujours explicitement, mais l'invitation à faire manipuler du matériel de classe, tel que des dominos ou des équerres, est suffisamment claire dans ce sens.

Nous ne pouvons pas assurer que le corpus constitué est représentatif de toutes les méthodes envisageables pour enseigner les aires. Cependant, notre sélection a montré que des alternatives existent, à côté des contenus plus standards portés par une majorité des ouvrages d'une époque, pour établir et faire comprendre des résultats à ce propos. La grande diversité des preuves du théorème de Pythagore présentées par les auteurs de notre corpus en témoigne, de même, pour prendre un autre exemple, que le nombre important de solutions approchées de la quadrature du cercle que nous avons recensées. L'originalité et la variété de ces propositions ne peuvent être réellement mesurées qu'en les comparant aux contenus plus communément présentés dans les ouvrages de l'époque, identifiés au préalable.

Enfin et surtout, notre étude confirme notre choix des aires en tant qu'objet central dans l'édifice mathématique. En effet, à travers notre étude, nous avons mis en évidence la grande richesse de cette notion, à l'intersection de nombreux domaines mathématiques, et particulièrement adaptée pour montrer les interactions possibles entre eux. De nombreux aspects de cet objet expliquent pourquoi s'intéresser aux aires soulève des questions mathématiques fondamentales.

En premier lieu, l'étude des aires s'inscrit dans la question de la définition des grandeurs et de leurs rapports, de leur lien avec les nombres et avec les opérations. Ce double processus de numérisation et d'arithmétisation des grandeurs (Barbin, 2007) entrepris au cours des siècles précédents est loin d'être trivial et continue à engager la communauté scientifique du XIX^{e} siècle dans des recherches dont l'issue ne se trouve pas fixée à la fin de notre période, en 1902. En témoignent les obstacles rencontrés par les auteurs au sujet de l'usage des proportions dans les cas de similitude, de l'incommensurabilité des dimensions des rectangles, ou à propos de la nature de π. Ces difficultés scientifiques touchent pourtant des résultats communément présentés à des publics scolaires de niveau intermédiaire : le théorème de Pythagore, la mesure de l'aire du rectangle, de celle du cercle, et la discussion sur la possibilité de sa quadrature.

En plus d'être des grandeurs, ce que sont aussi les longueurs, volumes ou encore les masses, les aires ont la particularité d'être bidimensionnelles, comme le fait remarquer à juste titre de Varent. En tant qu'objets géométriques à deux dimensions, les aires

Licence CC BY-NC-ND 3.0

présentent une complexité spécifique en termes de mesure, puisque la comparaison à une unité de surface étalon n'est pas aussi directe qu'un simple report d'une unité de longueur sur une ligne. Notre étude montre que les auteurs du XIX^{e} ont tendance à s'éloigner progressivement de la vision « comparative » des aires issue de la tradition euclidienne, pour se tourner vers une approche plus calculatoire. Cette réorientation ne résout pas pour autant toutes les difficultés mathématiques, car se pose alors la question des pratiques opératoires liées à cette situation multiplicative, dont la complexité demeure parfois grande, surtout avant l'uniformisation des systèmes d'unités de mesure. Les règles d'arithmétique se trouvent alors mobilisées pour simplifier des opérations, pour choisir les meilleures valeurs approchées du nombre π, pour calculer l'aire d'un cercle, ou encore pour estimer les erreurs commises et les contrôler. Les outils de l'algèbre sont également employés afin de simplifier des formules, comme celle des aires délimitées par des courbes quelconques, ou de résoudre des problèmes de données manquantes, tels que la recherche du rayon d'un cercle d'aire donnée. Une partie des auteurs recourt même aux logarithmes, car ils sont de nature à faciliter les opérations, en remplaçant les produits et extractions de racines carrées par des additions et des divisions par deux.

À ces caractéristiques se rajoute le rôle très particulier que jouent les aires dans la géométrie euclidienne, qui influence encore fortement les programmes et instructions de la période, ainsi qu'une partie des auteurs de manuels. Les démonstrations sur et par les aires ont cela de commun qu'elles s'appuient sur les figures et les constructions, qui occupent une fonction centrale dans le discours argumentatif. Les nombreuses preuves du théorème de Pythagore étudiées dans cette thèse en sont la confirmation. Beaucoup d'entre elles fondent leurs argumentaires sur des égalités d'aires que le lecteur peut observer de plus en plus aisément, sur des figures qui vont en se simplifiant au cours du temps. La géométrie inscrite dans la tradition euclidienne n'est pas la seule concernée, puisque les preuves plus complexes de l'aire du cercle ou de l'ellipse mettent en jeu des constructions intermédiaires, dans le plan ou dans l'espace, nécessaires pour appréhender les chaînons déductifs de la démonstration et pour mieux comprendre la configuration étudiée initialement.

Ensuite, les aires sont des objets mathématiques connectés à la vie courante et à la réalité des élèves et autres lecteurs des manuels. Elles interviennent dans des pratiques concrètes et/ou professionnelles, comme l'arpentage, les arts ou l'industrie. En cela, leur apprentissage est un enjeu pour les Français du XIX^{e} siècle, et les manuels témoignent de cette préoccupation de formation forte vers la géométrie des aires appliquée à la mesure ou au partage des terrains, à l'artisanat ou à des problèmes de la vie courante. Ces objectifs plus utilitaires couvrent des savoir-faire de calcul comme de construction, qui interagissent avec les aspects plus théoriques de la discipline. Les

Licence CC BY-NC-ND 3.0

besoins induits par la société motivent ces apprentissages, et la théorie apprise dans les ouvrages offre des solutions adaptables sur le terrain. La mesure des parcelles délimitées par des lignes courbes, ou dans lesquelles on ne peut pénétrer, en est un exemple caractéristique. Les manuels jouent également un rôle dans la transition entre les anciennes et les nouvelles unités de mesure, l'usage du système métrique devenant obligatoire en 1837. En mettant en parallèle des calculs produits dans chacun des deux systèmes, ils soulignent la simplicité du système décimal, tout en reconnaissant encore l'intérêt des anciens systèmes dans le cadre de certaines professions.

Enfin, l'établissement d'une partie des résultats sur les aires est très rapidement soumis à l'intervention de considérations sur l'infini. C'est le cas notamment au sujet des figures curvilignes, mais plus directement, dès le premier résultat énoncé sur les aires à propos du rectangle. Toujours évitable si l'on suit la méthode de double démonstration par l'absurde des Anciens, le recours à l'infini apporte néanmoins des solutions pouvant être considérées comme plus intelligibles pour les lectrices et les lecteurs, parfois novices en géométrie. C'est d'ailleurs l'argument principal avancé par les promoteurs de l'introduction de la méthode des infiniment petits dans les programmes en 1837 puis en 1854 (Belhoste, 1995, p. 147-152, 169-173, 340). L'usage des infiniment petits, puis des limites, se généralise ainsi au fil du siècle dans les pages de manuels, pour déterminer l'aire du cercle, celle des domaines délimités par des courbes quelconques ou des sections coniques. L'introduction de ces méthodes pour le niveau intermédiaire, en particulier dans le cadre de la géométrie du cercle, ouvre la porte à l'enseignement de l'analyse infinitésimale dans le secondaire à partir de 1902.

Toutes ces questions scientifiques, que recoupe l'étude des énoncés sur les aires présents dans les manuels du XIX^{e} siècle, contribuent à déterminer la position et le rôle des aires à l'interface des domaines mathématiques et des problématiques qui leur sont propres. Appréhender les savoirs sur les aires et les savoir-faire associés mobilise en effet des transferts de connaissances entre les différentes parties et théories des sciences mathématiques, telles que la géométrie des constructions, la géométrie du semblable, l'arpentage, l'arithmétique, le système métrique, l'algèbre, l'analyse infinitésimale, ou encore avec des domaines connexes aux mathématiques comme le dessin linéaire ou les travaux manuels.

Les manuels scolaires, ainsi que les sources institutionnelles complémentaires que nous avons consultées, ont montré leur richesse dans l'objectif de mieux comprendre les enjeux et les ressorts de l'enseignement de la géométrie des aires au XIX^{e} siècle. La démarche systématique et l'articulation entre méthodes quantitatives et qualitatives que nous leur avons appliquées a permis d'en tirer le plus grand parti dans ce sens. Nous avons désormais une idée précise des contenus sur les aires présents dans les

Licence CC BY-NC-ND 3.0

manuels, issus des savoirs savants et transposés en savoirs enseignables, ainsi que des méthodes envisagées par les auteurs des ouvrages concernés pour les transmettre aux différents publics auxquels ils s'adressent. Cette connaissance accrue possède néanmoins ses limites, puisque par la nature même de nos sources, nous ne pouvons présager de l'usage réel qui a pu en être fait dans les classes. Cette étude de l'enseignement de la « géométrie des aires » au XIX^{e} siècle ne s'arrête donc pas là. Nous espérons que notre travail forme un nouveau point de départ vers de futures investigations afin d'en poursuivre l'histoire.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

A

Annexes

Sommaire

A.1 Compléments sur le corpus **666**
A.1.1 Chronologie de publication des manuels du corpus 666
A.1.2 Bilan des classifications de la section II.2.2 667
A.1.3 Liste des énoncés-types sur les aires recensés dans les manuels du corpus 669
A.2 Éléments biographiques des auteurs du corpus **678**

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Licence CC BY-NC-ND 3.0

A.1 Compléments sur le corpus

A.1.1 Chronologie de publication des manuels du corpus

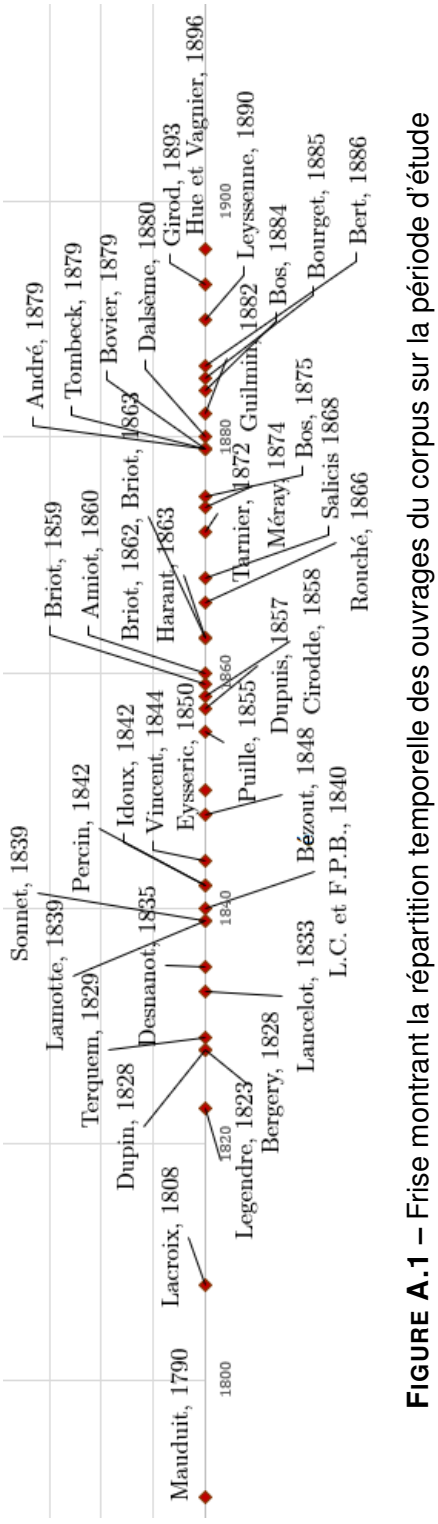
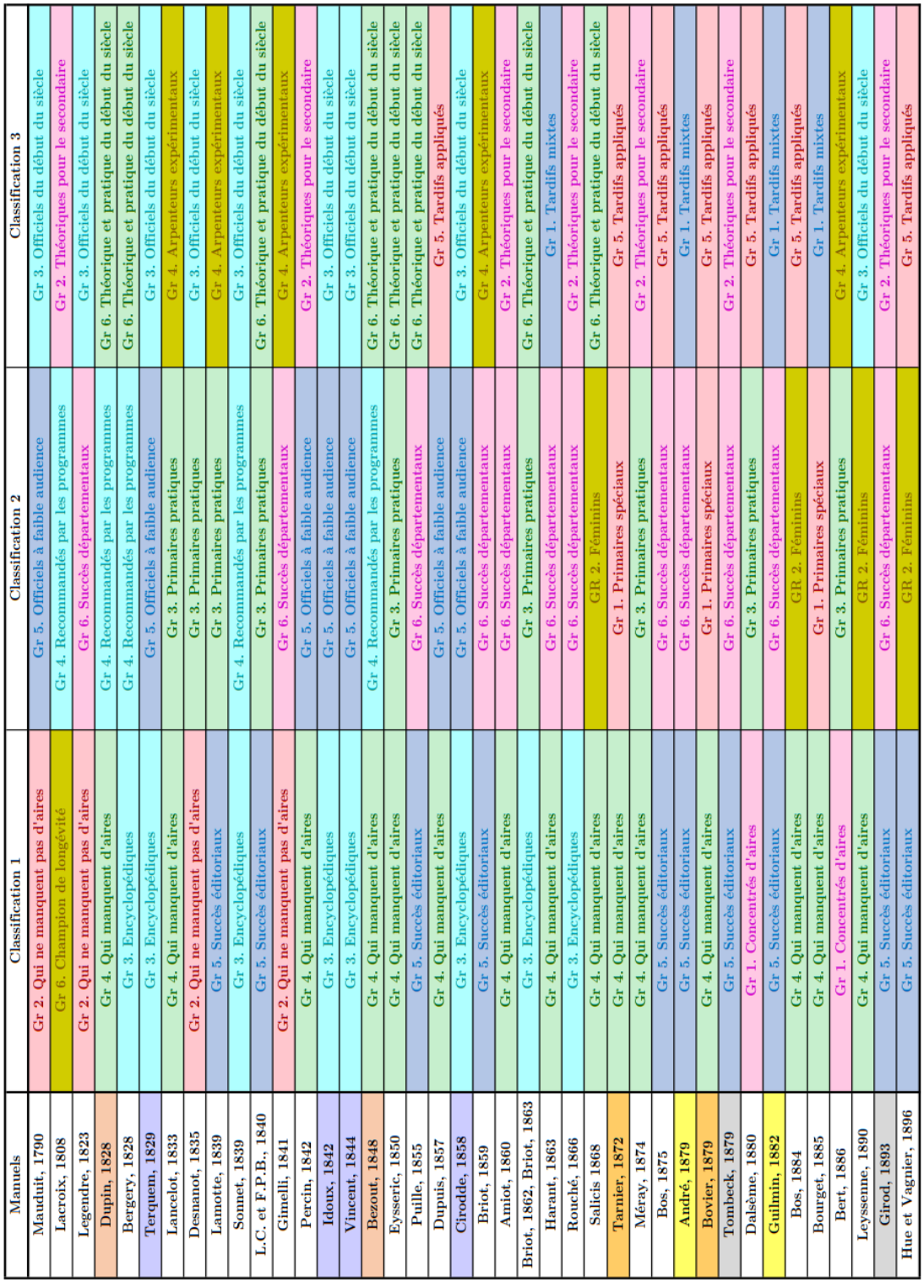


FIGURE A.1 – Frise montrant la répartition temporelle des ouvrages du corpus sur la période d'étude

Licence CC BY-NC-ND 3.0

A.1.2 Bilan des classifications de la section II.2.2



Manuels	Classification 1	Classification 2	Classification 3
Mauduit, 1790	Gr 2. Qui ne manquent pas d'aires	Gr 5. Officiels à faible audience	Gr 3. Officiels du début du siècle
Lacroix, 1808	Gr 6. Champion de longévité	Gr 4. Recommandés par les programmes	Gr 2. Théoriques pour le secondaire
Legendre, 1823	Gr 2. Qui ne manquent pas d'aires	Gr 6. Succès départementaux	Gr 3. Officiels du début du siècle
Dupin, 1828	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 4. Recommandés par les programmes	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Bergery, 1828	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 4. Recommandés par les programmes	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Terquem, 1829	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 5. Officiels à faible audience	Gr 3. Officiels du début du siècle
Lancelot, 1833	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 4. Arpenteurs expérimentaux
Desnanot, 1835	Gr 2. Qui ne manquent pas d'aires	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 3. Officiels du début du siècle
Lamotte, 1839	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 4. Arpenteurs expérimentaux
Sonnet, 1839	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 4. Recommandés par les programmes	Gr 3. Officiels du début du siècle
L.C. et F.P.B., 1840	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Gimelli, 1841	Gr 2. Qui ne manquent pas d'aires	Gr 6. Succès départementaux	Gr 4. Arpenteurs expérimentaux
Percin, 1842	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 5. Officiels à faible audience	Gr 2. Théoriques pour le secondaire
Idoux, 1842	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 5. Officiels à faible audience	Gr 3. Officiels du début du siècle
Vincent, 1844	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 5. Officiels à faible audience	Gr 3. Officiels du début du siècle
Bezout, 1848	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 4. Recommandés par les programmes	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Eysseric, 1850	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Puille, 1855	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 6. Succès départementaux	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Dupuis, 1857	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 5. Officiels à faible audience	Gr 5. Tardifs appliqués
Cirodde, 1858	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 5. Officiels à faible audience	Gr 3. Officiels du début du siècle
Briot, 1859	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 6. Succès départementaux	Gr 4. Arpenteurs expérimentaux
Amiot, 1860	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 6. Succès départementaux	Gr 2. Théoriques pour le secondaire
Briot, 1862, Briot, 1863	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Harant, 1863	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 6. Succès départementaux	Gr 1. Tardifs mixtes
Rouché, 1866	Gr 3. Encyclopédiques	Gr 6. Succès départementaux	Gr 2. Théoriques pour le secondaire
Salicis 1868	Gr 4. Qui manquent d'aires	GR 2. Féminins	Gr 6. Théorique et pratique du début du siècle
Tarnier, 1872	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 1. Primaires spéciaux	Gr 5. Tardifs appliqués
Méray, 1874	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 2. Théoriques pour le secondaire
Bos, 1875	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 6. Succès départementaux	Gr 5. Tardifs appliqués
André, 1879	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 6. Succès départementaux	Gr 1. Tardifs mixtes
Bovier, 1879	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 1. Primaires spéciaux	Gr 5. Tardifs appliqués
Tombeck, 1879	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 6. Succès départementaux	Gr 2. Théoriques pour le secondaire
Dalsème, 1880	Gr 1. Concentrés d'aires	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 5. Tardifs appliqués
Guilmin, 1882	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 6. Succès départementaux	Gr 1. Tardifs mixtes
Bos, 1884	Gr 4. Qui manquent d'aires	GR 2. Féminins	Gr 5. Tardifs appliqués
Bourget, 1885	Gr 4. Qui manquent d'aires	Gr 1. Primaires spéciaux	Gr 1. Tardifs mixtes
Bert, 1886	Gr 1. Concentrés d'aires	Gr 3. Primaires pratiques	Gr 4. Arpenteurs expérimentaux
Leyssenne, 1890	Gr 4. Qui manquent d'aires	GR 2. Féminins	Gr 3. Officiels du début du siècle
Girod, 1893	Gr 5. Succès éditoriaux	Gr 6. Succès départementaux	Gr 2. Théoriques pour le secondaire
Hue et Vagnier, 1896	Gr 5. Succès éditoriaux	GR 2. Féminins	Gr 5. Tardifs appliqués

FIGURE A.2 – Bilan de l'appartenance des manuels du corpus aux groupes des trois classifications de la section II.2.2. Les manuels appartenant aux trois mêmes groupes dans toutes les classifications sont surlignés de la même couleur dans la première colonne

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Licence CC BY-NC-ND 3.0

A.1.3 Liste des énoncés-types sur les aires recensés dans les manuels du corpus

Application calcul aire carré (plancher, etc.)
Application calcul aire cercle (bassin, pièce, etc.)
Application calcul aire parallélogramme (champ, etc.)
Application calcul aire parallélogramme dénombrement boulets
Application calcul aire polygone quelconque (bassin, etc.)
Application calcul aire polygone quelconque arpentage
Application calcul aire polygone régulier
Application calcul aire quadrilatère quelconque arpentage
Application calcul aire quelconque limitée par courbes (navires, etc.)
Application calcul aire rectangle (plancher, mur, champ, etc.)
Application calcul aire rectangle arpentage
Application calcul aire trapèze (toiture, champ, etc.)
Application calcul aire trapèze arpentage
Application calcul aire triangle (champ, etc.)
Application calcul aire triangle arpentage
Application calcul division aires rectangles et/ou parallélogrammes (tuiles, carrelages, etc.)
Application calcul rapport aires polygones semblables arpentage (échelle donnée)
Application calcul rapport aires rectangles même base et/ou hauteur (peinture, etc.)
Application calcul rapport aires triangles semblables arpentage (échelle donnée)
Application calcul rapport aires triangles semblables arpentage (recherche échelle)
Application géométrique aire quelconque limitée par courbes arpentage
Application géométrique aire quelconque limitée par droites et cercle (portes, etc.)
Application géométrique construction rectangle équivalent carré sur segment additifs/soustractifs (sol équations du 2d degré)
Application géométrique construction triangle équivalent polygone arpentage
Application géométrique méthode cutellation (terrain en pente)
Application géométrique partage polygones arpentage
Application géométrique propriétés figures isopérimètres industrie
Calculer aire carré connaissant côté
Calculer aire cercle connaissant circonférence
Calculer aire cercle connaissant rayon
Calculer aire cercle connaissant rayon (comparaison méthodes approchées)
Calculer aire cercle inscrit et circonscrit triangle équilatéral
Calculer aire couronne (rayons donnés)
Calculer aire ellipse
Calculer aire losange (diagonales données)
Calculer aire octogone régulier côté donné
Calculer aire parallélogramme base hauteur données quelconque
Calculer aire polygone quelconque
Calculer aire polygone régulier
Calculer aire quadrilatère quelconque
Calculer aire quelconque limitée par courbes et/ou droites
Calculer aire rectangle dimensions données (anciennes mesures)
Calculer aire rectangle dimensions données (nouvelles mesures)
Calculer aire secteur cercle rayon et angle donnés
Calculer aire segment cercle rayon et arc donnés (tables trigo)
Calculer aire segment rayon et angle donnés
Calculer aire terrain inaccessible
Calculer aire terrain polygone
Calculer aire trapèze bases hauteur données
Calculer aire trapèze côtés donnés (Heron)
Calculer aire triangle équilatéral côté donné
Calculer aire triangle quelconque (base hauteur)
Calculer aire triangle quelconque (côtés donnés)
Calculer aire triangle rectangle (deux côtés donnés)
Calculer angle et rayon aire secteur et arc donné

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Calculer angle pour aire secteur donnée
Calculer angle secteur aire et rayon donnés
Calculer base ou hauteur triangle pour aire donnée
Calculer base trapèze aire, hauteur et autre base données
Calculer côté carré équivalent polygone donné
Calculer côté carré équivalent rectangle donné
Calculer côté carré équivalent triangle donné
Calculer côté différence figures semblables
Calculer côté figure semblable rapport donné
Calculer côté polygone régulier équivalent cercle donné
Calculer côté rectangle et/ou carré et/ou trapèze aire donnée
Calculer côté somme figures semblables
Calculer côté triangle équilatéral équivalent carré donné
Calculer côtés triangle équivalent polygone donné
Calculer côtés triangles rapport et aire donnés
Calculer dimension ajoutée pour augmenter aire rectangle quantité donnée
Calculer échelle réduction (aires données)
Calculer longueur arc secteur aire et angle donnés
Calculer position ligne séparation pour équilibrer deux aires
Calculer rapport aires carrés
Calculer rapport aires cercles
Calculer rapport aires rectangles dimensions données
Calculer rapport aires triangles semblables
Calculer rayon cercle aire donnée
Calculer rayon secteur cercle aire et angle donnés
Calculer segments de rapport égal à celui de deux rectangles (ou polygones) donnés
Calculer valeur approchée pi par aires polygones inscrits circonscrits cercle
Construction carré équivalent n fois carré
Construction carré équivalent n fois carré (cas particuliers)
Construction carré équivalent rectangle sur segments additifs
Construction carré équivalent rectangle sur segments soustractifs
Construction carré équivalent somme ou différence carrés
Construction carré semblable carré (rapport donnée)
Construction carré semblable rectangle (rapport donné)
Construction cercle équivalent carré (approché)
Construction cercle équivalent couronne
Construction cercle équivalent polygone
Construction cercle équivalent somme ou différence deux cercles (ou +)
Construction cercle équivalent triangle (approché)
Construction cercle semblable cercle (rapport donné)
Construction côté figure semblable rapport donné
Construction ellipse équivalente cercle (et réciproque)
Construction ovale équivalent cercle (et réciproque)
Construction polygone angles saillants équivalent polygone angle rentrant
Construction polygone équivalent domaine délimité par courbe
Construction polygone équivalent polygone (un côté de moins)
Construction polygone équivalent polygone (un côté de plus)
Construction polygone équivalent somme (ou différence) plusieurs polygones semblables
Construction polygone équivalent triangle
Construction polygone équivalent triangle et semblable polygone donné
Construction polygone régulier équivalent polygone quelconque
Construction polygone semblable polygone (point et rapport donnés)
Construction polygone semblable polygone (rapport donné avec 3ème polygone)
Construction polygone semblable polygone (rapport donné ou équivalent carré donné)
Construction polygone semblable polygone (rapport donné, cas particuliers)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Construction polygone semblable polygone et équivalent à un autre
Construction polygone semblable polygones et équivalent somme ou différence
Construction polygones réguliers inscrit et circonscrit nombre côtés double
Construction polygones semblables polygone dont aire est la somme (rapports donnés)
Construction rectangle équivalent carré (côté donné)
Construction rectangle équivalent carré sur segments additifs
Construction rectangle équivalent carré sur segments soustractifs
Construction rectangle équivalent losange
Construction rectangle équivalent polygone
Construction rectangle équivalent rectangle (segment donné)
Construction rectangle équivalent somme polygones (côté donné)
Construction rectangle équivalent triangle (côté donné)
Construction rectangle équivalent triangle sur même base
Construction trapèze équivalent carré (lignes données)
Construction triangle aire donnée
Construction triangle équilatéral équivalent cercle (approché)
Construction triangle équivalent carré
Construction triangle équivalent cercle
Construction triangle équivalent n fois triangle
Construction triangle équivalent parallélogramme
Construction triangle équivalent polygone
Construction triangle équivalent quadrilatère
Construction triangle équivalent rectangle (base donnée)
Construction triangle équivalent somme ou différence triangles
Construction triangle équivalent trapèze
Construction triangle équivalent triangle (angle et point donnés)
Construction triangle équivalent triangle (hauteur ou base donnée)
Construction triangle équivalent triangle (sommet donné)
Construction triangle équivalent triangle et semblable à un autre
Construction triangle isocèle équivalent triangle
Construction triangle rectangle équivalent triangle même base
Définition aire plane
Définition anciennes unités mesures aires (toise, toise carrée)
Définition arpentage
Définition base hauteur triangle et/ou parallélogramme
Définition figures équivalentes
Définition géodésie
Définition mesure aires
Définition nouvelles unités mesures aires (mètres carrés)
Définition rapport aires planes
Définition segment curviligne
Définition takymétrie (mesure lignes, surfaces et volumes)
Définition unité mesure surface (généralité)
Définition unités aire agraire (ares, ha, etc.)
Défintion secteur cercle
Equivalence carrés construits sur côté et hypoténuse triangles rectangles (Pythagore différence)
Equivalence carrés construits sur côtés triangles rectangles (Pythagore)
Equivalence carrés construits sur côtés triangles rectangles isocèles (cas particulier Pythagore)
Equivalence carrés et rectangles construits sur côtés dans triangle rectangle
Equivalence cercle et triangle dimensions rayon circonférence
Equivalence demi-cercles construits sur triangle rectangle (lunules Hippocrate)
Equivalence losange et moitié rectangle
Equivalence parallélogramme et rectangle (même base et hauteur)
Equivalence parallélogrammes (base réciproque à hauteur)
Equivalence parallélogrammes (même base et hauteur)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Equivalence parallélogrammes (non si même base alors hauteur différente et réciproque)
Equivalence parallélogrammes (si même base alors même hauteur et réciproque)
Equivalence polygones construits sur côtés triangles rectangles (Pythagore généralisé)
Equivalence rectangle et carré formés sur tangente et portions corde sécante
Equivalence rectangle et parallélogramme construits sur diamètres conjugués ellipse
Equivalence rectangle et somme rectangles (même base et hauteurs ajoutées)
Equivalence rectangles (même base et hauteur)
Equivalence rectangles (même produit base par hauteur)
Equivalence rectangles formés sur portions cordes sécantes
Equivalence secteur et triangle dimensions rayon arc
Equivalence secteurs (angles rapport inverses des carrés des rayons)
Equivalence trapèze et parallélogramme (même hauteur, base moyenne)
Equivalence trapèzes (mêmes base et hauteur)
Equivalence triangle et moitié parallélogramme (même base et hauteur)
Equivalence triangle et moitié rectangle (même base et hauteur)
Equivalence triangle et parallèlogramme angles égaux suppléments
Equivalence triangle et rectangle (moitié hauteur)
Equivalence triangle et triangle isocèle
Equivalence triangle rectangle et moitié rectangle (même base et hauteur)
Equivalence triangles (base réciproque à hauteur)
Equivalence triangles (même base et hauteur)
Equivalence triangles (non si même base alors hauteur différente et réciproque)
Equivalence triangles (si même base alors même hauteur et réciproque)
Existence polygones inscrit et circonscrit cercle de différence moindre qu'aire donnée
Existence polygones inscrit ou circonscrit cercle de différence avec cercle moindre qu'aire donnée
Formule aire carré
Formule aire cercle (avec pi)
Formule aire cercle (circonférence rayon)
Formule aire couronne (rayons)
Formule aire décagone régulier inscrit (rayon donné)
Formule aire dodécagone régulier inscrit (rayon donné)
Formule aire domaine délimité par arc parabole et corde (dimensions rectangle données)
Formule aire ellipse (diamètres conjugués et angle)
Formule aire ellipse (diamètres)
Formule aire entre deux arcs et deux cordes
Formule aire hexagone régulier (inscrit, rayon = coté)
Formule aire losange (côté, distance)
Formule aire losange (diagonales)
Formule aire octogone régulier (côté et ou rayon)
Formule aire parallélogramme (hauteur base)
Formule aire polygone circonscrit à un cercle (périmètre rayon)
Formule aire polygone régulier (nb de côtés)
Formule aire polygone régulier (périmètre, apothème)
Formule aire polygone régulier circonscrit (rayon, angle, nb de côtés)
Formule aire polygone régulier inscrit (rayon, angle, nb de côtés)
Formule aire quadrilatère (diagonales, angle)
Formule aire quadrilatère quelconque (diagonale, hauteurs relatives)
Formule aire rectangle
Formule aire secteur cercle (aire cercle, arc ou angle)
Formule aire secteur cercle (rayon, arc ou angle)
Formule aire secteur polygonal régulier (périmètre, apothème)
Formule aire segment cercle (rayon, arc et/ou angle)
Formule aire segment ellipse
Formule aire segment ellipse (diamètres conjugués et angle)
Formule aire segment parabolique

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Formule aire trapèze (hauteur, bases)
Formule aire trapèze (ligne milieux)
Formule aire trapèze circulaire (hauteur, bases)
Formule aire trapèze rectangle (hauteur, bases)
Formule aire triangle (base, hauteur)
Formule aire triangle (coordonnées, déterminant)
Formule aire triangle (côtés, angle adjacent)
Formule aire triangle (côtés, rayon cercle circonscrit)
Formule aire triangle (périmètre, rayon cercle inscrit)
Formule aire triangle (rayon cercle inscrit tangente)
Formule aire triangle (rayons cercles inscrits et ex-inscrits)
Formule aire triangle équilatéral (côté)
Formule aire triangle équilatéral inscrit (rayon)
Formule aire triangle rectangle (côtés angle droit)
Formule Heron
Formule Heron (cas triangles isocèles)
Formule Heron aire quadrilatère inscrit (côtés)
Formule IR1 géom $(a+b)^2$
Formule IR2 géom $(a-b)^2$
Formule IR3 géom $(a+b)(a-b)$
Formule IR3 géom $(a+b)(a-b)$ (réciproque)
Formule IR4 géom a^2+b^2
Formule reliant aire triangle produit côtés diamètre cercle circonscrit
Max aire domaine arc de courbe même longueur corde commune = arc cercle
Max figures = aire ne peut être agrandie sans changer périmètre
Max figures isopérimètres = cercle
Max figures parties périmètres fixées = arc de cercle
Max périmètres polygones équivalents = triangle
Max polygones côtés donnés = inscriptible dans cercle
Max polygones côtés donnés sauf 1 = inscrit demi-cercle
Max polygones inscrits = cercle
Max polygones isopérimètres = cercle (ou + grand nombre côtés)
Max polygones isopérimètres même nombre côtés = côtés égaux
Max polygones isopérimètres même nombre côtés = inscrit cercle
Max polygones isopérimètres même nombre côtés = régulier
Max polygones même nombre côtés inscrit dans cercle = côtés égaux
Max polygones réguliers isopérimètres = + gd nombre côtés
Max polygones réguliers isopérimètres = cercle
Max rectangle formé sur segment additif = carré
Max rectangle isopérimètre = carré
Max rectangles inscrits dans triangle max = moitié hauteur
Max segment arc de cercle même longueur = demi-cercle
Max trapèzes isopérimètres = isocèle
Max triangle isopérimètre de même base = isocèle
Max triangles 2 cotés donnés = rectangle
Max triangles isopérimètres = équilatéral
Max triangles même base et angle égal = isocèle
Max triangles somme 2 côtés donnée = isocèle rectangle
Méthode analytique partage cercle rapport donnée ou parties égales lignes concentriques
Méthode analytique partage trapèze parallèle base (parties égales ou rapport donné)
Méthode analytique partage triangle parallèle base (parties égales ou rapport donné)
Méthode calcul aire couronne
Méthode calcul aire entre deux arcs et deux cordes parallèles
Méthode calcul aire par multiplication simplifiée
Méthode calcul aire polygone mixte (cordes et tangentes)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Méthode calcul aire polygone quelconque (formule Heron)
Méthode calcul aire polygone quelconque (triangles, trapèzes)
Méthode calcul aire portion hyperbole (approchée)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (calcul erreur)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (comparaison méthodes)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (pas irrégulier)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (pas régulier)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (pesées)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (Poncelet)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (segments paraboliques)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (Simpson)
Méthode calcul aire quelconque limitée par courbes (trapèzes, incorrecte)
Méthode calcul aire segment cercle (approximation segment parabolique)
Méthode calcul aire segment cercle (différence)
Méthode calcul aire segment cercle (trigo)
Méthode calcul aire triangle côtés donnés
Méthode calcul partage domaine parties égales
Méthode calcul partage domaine parties égales (perpendiculaire base)
Méthode calcul partage polygone (ou figure) direction et rapport donnés
Méthode calcul partage polygone parties égales
Méthode calcul partage polygone parties égales (point intérieur)
Méthode calcul partage polygone parties égales (point sur côté)
Méthode calcul partage polygone rapport donné
Méthode calcul partage triangle parties égales
Méthode calcul partage triangle parties égales (perpendiculaire base)
Méthode calcul partage triangle parties égales (point intérieur)
Méthode calcul partage triangle rapport donné
Méthode calcul quadrature figure quelconque
Méthode géométrique aire polygone quelconque (rapport aires triangles angle commun)
Méthode géométrique aire polygone quelconque décomposition triangles (diagonales)
Méthode géométrique aire polygone quelconque décomposition triangles (point intérieur)
Méthode géométrique aire polygone quelconque décomposition triangles et trapèzes (directrice)
Méthode géométrique aire polygone quelconque décomposition triangles, trapèzes ou rectangles
Méthode géométrique aire polygone quelconque impénétrable
Méthode géométrique aire quadrilatère quelconque (décomposition)
Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (compensation)
Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (décomposition en polygones)
Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (entre deux)
Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (impénétrable)
Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (instrument vérificateur)
Méthode géométrique aire quelconque limitée par courbes (quadrillage)
Méthode géométrique aire quelconque limitée par droites et cercles (décomposition)
Méthode géométrique aire trapèze (décomposition)
Méthode géométrique aires limitées par droites et portions cercle (décomposition)
Méthode géométrique aires limitées par portions cercle (décomposition)
Méthode géométrique décomposition parallélogrammes en quatre parallélogrammes dont deux équivalents
Min arc segment de même aire = demi-cercle
Min bases triangles équivalents angle égal = isocèle
Min courbe corde commune même aire = arc cercle
Min courbes domaines équivalents = cercle
Min périmètre polygone équivalent au cercle = circonférence
Min périmètre trapèzes équivalents = isocèle
Min périmètre triangles même base équivalents = isocèle
Min périmètres polygones équivalents même nombre côtés = régulier
Min périmètres polygones réguliers équivalents = + gd nb côté (ou cercle)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Min périmètres triangles équivalents = équilatéral
Min polygones circonscrits = cercle
Min polygones réguliers isopérimètres = triangle équilatéral
Min triangles angle et point donné = hauteur double distance point droite
Partage cercle parties égales demi-ciconférences
Partage cercle rapport donnée ou parties égales ligne centre
Partage domaine en domaines équivalents
Partage domaine en domaines équivalents par courbes semblables
Partage domaine en domaines équivalents par perpendiculaires à côté
Partage figure quelconque en figures semblables avec rapports donnés
Partage ligne dont carrés des parties dans rapport donné
Partage polygone (ou figure) direction et rapport donnés
Partage polygone partie équivalente polygone donné
Partage polygone parties égales (partant de plusieurs points d'un côté)
Partage polygone parties égales (partant d'un point d'un côté)
Partage polygone parties égales (partant d'un point quelconque)
Partage polygone parties égales (partant d'un sommet)
Partage polygone parties égales portions irrégulières
Partage polygone portions données
Partage polygone rapport donné ligne brisée sommets
Partage polygone rapport donné ligne point intérieur
Partage polygone régulier
Partage quadrilatère quelconque (rapport donnée ou parties égales)
Partage rectangle en rectangles semblables par milieu bases
Partage rectangles et/ou parallélogrammes parties égales
Partage rectangles et/ou parallélogrammes rapport donnée
Partage secteur cercle ligne centre (parties égales ou rapport donné)
Partage secteur cercle lignes concentriques (parties égales ou rapport donné)
Partage trapèze par parallèles aux bases (parties égales ou rapport donné)
Partage trapèze par sécantes aux bases (parties égales ou rapport donné)
Partage triangle (rapport et point sur côté donnés)
Partage triangle (rapport et sommet donnés)
Partage triangle à partir point intérieur (parties égales ou rapport donné)
Partage triangle droites direction donnée
Partage triangle parallèle base (parties égales ou rapport donné)
Partage triangle parties égales (lignes partant sommet)
Partage triangle parties égales (point sur côté donné)
Preuve aire parallélogramme (cas commensurable)
Preuve formule aire rectangle cas commensurable
Preuve formule aire rectangle cas incommensurable
Preuve formule Heron (Pythagore/Al Kashi)
Preuve formule Heron (triangles inscrits et ex-inscrits)
Preuve formule Heron (triangles semblables)
Preuve formule Heron (trigo)
Preuve rapport aires rectangles même base et/ou hauteur (cas commensurable)
Preuve rapport aires rectangles même base et/ou hauteur (dont cas incommensurable)
Preuve théorème Pythagore (cercle)
Preuve théorème Pythagore (Euclide avec variante)
Preuve théorème Pythagore (Euclide)
Preuve théorème Pythagore (Ptolémée)
Preuve théorème Pythagore (rapport aires triangles semblables)
Preuve théorème Pythagore (relation carrés côtés diagonales dans parallélogramme)
Preuve théorème Pythagore (tangram)
Preuve théorème Pythagore (triangles semblables + théorie proportions)
Preuve théorème Pythagore (triangles semblables)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Preuve théorème Pythagore (visuelle, carreaux)
Principe aire quelconque limitée par courbes = limite aire polygone inscrit
Principe construction différence figures ou figures dans rapport donnée
Principe décomposition aire polygone quelconque en triangles
Principe quadrature cercle = rapport circonférence/rayon
Quadrature cercle (méthode approchée)
Quadrature ellipse
Quadrature figure quelconque
Quadrature losange
Quadrature parallélogramme
Quadrature polygone quelconque
Quadrature polygone régulier
Quadrature rectangle
Quadrature secteurs cercles
Quadrature somme triangles
Quadrature trapèze
Quadrature triangle
Rapport aires carrés
Rapport aires carrés circonscrit et fait sur rayon
Rapport aires carrés construits sur côté et hypoténuse
Rapport aires carrés construits sur côtés angle droit
Rapport aires carrés inscrit et fait sur rayon
Rapport aires cercle polygones inscrits
Rapport aires cercles comme figures semblables faites sur rayon
Rapport aires cercles rayons différents
Rapport aires dodécagone régulier carré circonscrit au cercle
Rapport aires ellipse et cercle
Rapport aires figures (y compris courbes) semblables
Rapport aires octogone circonscrit carré fait sur rayon
Rapport aires octogone inscrit carré fait sur rayon
Rapport aires parallélogrammes (comme produit de leur base par leur hauteur)
Rapport aires parallélogrammes (même base ou même hauteur)
Rapport aires parallélogrammes angles égaux ou suppléments
Rapport aires parallélogrammes formés sur diagonale d'un même parallélogramme
Rapport aires parallélogrammes semblables
Rapport aires polygones (ou figures) comme carrés rayons de similitude
Rapport aires polygones réguliers inscrits
Rapport aires polygones réguliers inscrits et circonscrits
Rapport aires polygones réguliers inscrits et circonscrits nombre côtés double
Rapport aires polygones réguliers inscrits nombre côtés double
Rapport aires polygones réguliers même nombre côtés
Rapport aires polygones semblables
Rapport aires quatre figures semblables deux à deux
Rapport aires rectangle/parallélogramme et carré
Rapport aires rectangles (comme produit de leur base par leur hauteur)
Rapport aires rectangles bases inverses hauteurs
Rapport aires rectangles de même base et/ou hauteur
Rapport aires rectangles semblables
Rapport aires secteurs (cercles ou courbes) semblables
Rapport aires secteurs et cercle
Rapport aires secteurs même rayon
Rapport aires secteurs polygonaux réguliers
Rapport aires secteurs rayons et angles différents
Rapport aires segments cercle semblables
Rapport aires triangle et carré

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Rapport aires triangles (comme produit de leur base par leur hauteur)
Rapport aires triangles (même base ou même hauteur)
Rapport aires triangles angle commun
Rapport aires triangles angles suppléments
Rapport aires triangles semblables
Rapport aires triangles semblables (réciproque fausse)
Rapport aires trois figures semblables
Relation aires carrés côtés et diagonales parallélogramme
Relation aires dans triangle coupé par bissectrice
Relation aires dans triangle inscrit dans cercle (hauteur diamètre)
Relation aires quadrilatère inscrit (Ptolémée)
Relation aires triangle médiane (différence carrés)
Relation aires triangle médiane (somme carrés)
Relation aires triangle quelconque angle aigu (Pythagore généralisé)
Relation aires triangle quelconque angle obtus (Pythagore généralisé)
Table aires cercle
Table aires rectangles
Table formules aires
Théorème aire cercle = lim inf et/ou sup polygones inscrits et/ou circonscrits
Théorème aire secteur circulaire = limite aire secteur polygonal régulier

TABLE A.1 – Tableau listant les 460 énoncés-types de savoirs sur les aires recensés dans les manuels du corpus par ordre alphabétique

Licence CC BY-NC-ND 3.0

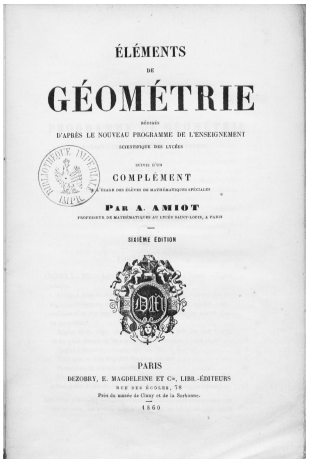
A.2 Éléments biographiques des auteurs du corpus

Les notices biographiques des auteurs de notre corpus présentées dans cette annexe retracent succinctement les étapes de leur vie institutionnelle, scientifique et/ou d'enseignants. Elles n'ont pas vocation à constituer des biographies complètes, et peuvent être enrichies par des lectures des sources secondaires mentionnées au cas par cas, en plus des sites de ressources généalogiques — *GENEANET* et *FILAE* — qui ont servi à les alimenter.

Chacune est illustrée par une image, qui représente soit l'auteur, quand nous avons pu nous procurer un tel portrait, soit à défaut la couverture de l'ouvrage du corpus auquel cet auteurs est associé.

La mention de l'ouvrage du corpus correspondant à chacun des auteurs est mise en évidence en caractères gras, ce qui permet de repérer la parution du manuel durant le parcours de vie de son (ou ses) auteur(s).

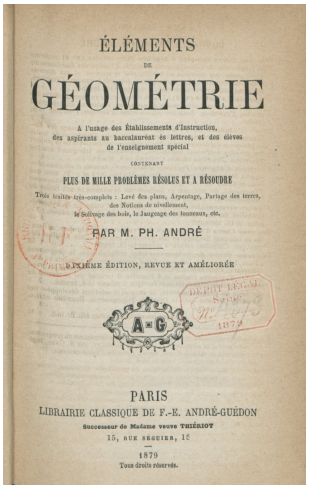
AMIOT Antoine (Alphonse) (1812 – 1865)


ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE
D'APRÈS LE NOUVEAU PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT
COMPLÉMENT
PAR A. AMIOT
SIXIÈME ÉDITION
PARIS
DEZOBRY, E. MAGDELEINE ET Cie, LIBR.-ÉDITEURS
1860

Né à La-Charité-sur-Loire (Nièvre) et mort à Paris (Seine)
Bien qu'ayant échoué le concours d'entrée à l'École Normale Supérieure, il obtient l'agrégation de mathématiques en 1842, puis enseigne dans divers établissement de Dijon puis de Paris (Moussard, 2023, p. 163). Il a notamment exercé en tant que professeur de mathématiques au lycée Bonaparte (actuel lycée Condorcet, Paris 9ème), de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (Paris 6ème) et de géométrie descriptive à l'École impériale des Beaux-Arts (Paris 6ème).
Il est l'auteur d'***Éléments de géométrie*** **(Amiot, 1859)**, ainsi que de *Leçons d'algèbre* plusieurs fois réédités. Il a également rédigé des solutions raisonnées des problèmes de géométrie issus de ses éléments, des leçons de géométrie descriptive, ainsi que des *Applications de la géométrie élémentaire*.
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb12552074c) et (Moussard, 2023).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ANDRÉ Philippe (François) (1831 – ?)


ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE
A l'usage des Établissements d'Instruction, des aspirants au baccalauréat ès lettres, et des élèves de l'enseignement spécial
CONTENANT
PLUS DE MILLE PROBLÈMES RÉSOLUS ET A RÉSOUDRE
Traité très-complet : Levé des plans, Arpentage, Partage des terres, des Notions de nivellement, le Sciérage des bois, le Jaugeage des tonneaux, etc.
PAR M. PH. ANDRÉ
DIXIÈME ÉDITION, REVUE ET AMÉLIORÉE
PARIS
LIBRAIRIE CLASSIQUE DE F.-E. ANDRÉ-GUÉDON
Successeur de Madame veuve THIÉRIOT
15, RUE SÉGUIER, 15
1879
Tous droits réservés.

Né à Genevrières (Haute-Marne) et mort à ?
Professeur de mathématiques, ni agrégé ni normalien, il est l'auteur de nombreux ouvrages d'enseignement élémentaire en géométrie, arithmétique et algèbre (Moussard, 2023, p. 163), ainsi que du *Trésor de la jeunesse*, un recueil de poésies, tous réédités à multiples reprises entre 1861 et 1895.
Nous ne disposons que de très peu d'éléments biographiques le concernant. Sur la couverture des ***Éléments de géométrie*** dont il est l'auteur, il est désigné comme « chef d'institution » **(P. André, 1879)**, mais il apparaît également comme « auteur de divers ouvrages classiques » en couverture de son manuel d'arithmétique, co-écrit avec Alfred Haillecourt (P. André et Haillecourt, 1872). Il est effectivement mentionné comme chef d'institution à Ferrières (Haute-Marne) dans le *Catalogue général de la librairie française* de 1867 (Lorenz et al., 1867, p. 46).
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb17357536r), (Lorenz et al., 1867 ; Moussard, 2023).

BERGERY Claude Lucien (1787 – 1863)

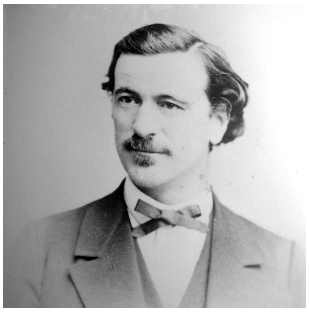


Né à Orléans (Loiret) et mort à Tincry (Moselle)
Admis à l'Ecole Polytechnique en 1806, il achève ses études à l'École d'application de Metz en 1810. Il participe aux campagnes de l'Empire, et démissionne de sa carrière militaire après les Cent-Jours. Il est alors nommé, en 1817, professeur de mathématiques à l'École régimentaire d'artillerie de Metz. Avec son collègue Jean-Victor Poncelet, avec lequel il entre à l'Académie de Metz en 1820, il participe à la création des cours industriels, publics et gratuits, professés à Metz à partir de 1825, et dont il assure le cours de géométrie, dans le même esprit que les cours initiés au début des années 1820 à Paris par Charles Dupin, polytechnicien et professeur de mécanique au conservatoire des arts et métiers.
Bergery s'engage à la fois dans un projet social de promotion ouvrière et un projet pédagogique de rénovation de l'enseignement, en défendant par exemple le projet de création d'une École normale qui ouvre effectivement en 1832, et dont il assure les enseignements d'arithmétique, de dessin linéaire, de physique, de mécanique et d'astronomie. Il devient le maire de Tincry en 1848, où il fait fait ouvrir une école primaire

Licence CC BY-NC-ND 3.0

spéciale pour les filles en 1857.
Il rédige des manuels de géométrie, d'arithmétique, de physique et chimie, de mécanique et d'économie industrielle pour les écoles primaires élémentaire et supérieures, en plus de sa ***Géométrie appliquée à l'industrie*** **(Bergery, 1828)**, tirée de ses cours aux ouvriers messins, mais qui s'inscrit manifestement dans un projet plus global de diffusion de l'enseignement des sciences.
Sources : (Vatin, 2007, 2014 ; Moussard, 2015, p. 93-95 ; Bruneau et Rollet, 2024a), (Lorenat, 2019, p. 86-88) et *Base prosopographique : la France savante* (https://cths.fr/an/savant.php?id=109973). Portrait : Portrait « imaginaire » figurant sur la couverture de (Vatin, 2007).

BERT Paul (1833 – 1886)



Né à Auxerre (Yonne) et mort à Hanoï (Vietnam, ancienne Indochine Française)
Bert suit d'abord les cours de l'École Polytechnique, sans vouloir devenir ingénieur, puis fait des études de droit à Paris et obtient sa licence en droit en 1857. Il se tourne ensuite vers la médecine et les sciences naturelles et obtient successivement sa licence ès sciences naturelles en 1860, son doctorat en médecine en 1863, puis son doctorat ès sciences naturelles en 1866. Il occupe un temps le poste de préparateur de Claude Bernard, puis accède à l'Académie des sciences et enseigne la zoologie et la physiologie comparée à la faculté des sciences de Bordeaux, avant de devenir professeur suppléant à la chaire de physiologie du Muséum en 1867, et de remplacer Claude Bernard à la faculté des sciences de Paris en 1869.
Parallèlement, il s'engage auprès de Victor Duruy en faveur de l'enseignement secondaire féminin, figurant parmi les membres fondateurs de l'Association pour l'enseignement secondaire des filles en 1867. La guerre de 1870 l'oriente vers la politique. Nommé préfet du Nord par son ami Gambetta, il est élu député de l'Yonne (1872) et devient, en 1881-1882, ministre de l'Instruction publique dans le cabinet Gambetta. Il lutte pour défendre les lois de Jules Ferry sur l'enseignement primaire (laïque et obligatoire), sur l'admission des jeunes filles dans le secondaire et sur l'introduction des sciences dans l'enseignement. Il prépare notamment le projet d'où sortira la loi établissant la laïcité du personnel enseignant primaire (loi Goblet, 30 octobre 1886). Par suite des difficultés rencontrées par la colonisation française en Indochine, il est nommé en janvier 1886 gouverneur civil de l'Annam et du Tonkin. Il remplace les militaires par des administrateurs civils, fonde des écoles, négocie avec

Licence CC BY-NC-ND 3.0

les autorités locales, avant d'y périr des suites du choléra. Partisan de la politique coloniale, il prône cependant une expansion pacifique, d'où son vote contre la politique tonkinoise de Jules Ferry, qui provoque la chute du ministère.
Il est l'auteur d'une importante bibliographie comprenant une abondante production scientifique et législative ainsi que de nombreux articles de presse. Il édite *La Revue scientifique* de 1879 à 1885 et publie en 1881 *L'Enseignement laïque*, suivi de plusieurs manuels primaires et secondaires sur les sciences physiques et naturelles, comme son grand succès d'édition, la *Première année d'enseignement scientifique* suivi de la *Deuxième année*, en plus de ses ***Premiers éléments de géométrie expérimentale*** **(Bert, 1886)**. Il a également rédigé des articles dans les différentes versions du *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, dont celui intitulé « Physiologie ».
Sources : *Dictionnaire prosopographique de l'EPHE* (Demignot et Dutour, 2018), article « Bert(Paul) » dans le *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction publique* de Buisson (Buisson, 1911) et dans (Dubois, 2002a). Portrait : Photographie prise par les photographes français Théodore Truchelut et Félix Théodore Valkman dans les années 1860.

Bézout Étienne (1730 – 1783)

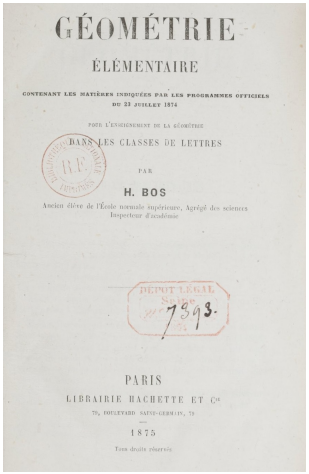


Né à Nemours (Seine-et-Marne) et mort aux Basses-Loges (Seine-et-Marne)
Précocément orphelin, Bézout étudie les mathématiques à Paris, qu'il enseigne également pour gagner sa vie. Sa rencontre avec D'Alembert est déterminante et il écrit deux mémoires (sur la mécanique et les intégrales elliptiques) sous sa direction, ce qui lui donne accès au statut d'adjoint académicien en 1758.
En 1764, il est désigné par Choiseul pour enseigner les mathématiques aux futurs officiers de la Marine Royale et écrit à cette occasion son *Cours de mathématiques* en cinq tomes, qui devient l'ouvrage de référence pour les candidats préparant l'entrée à l'École Polytechnique. Ce cours sera l'objet de multiples rééditions, plus ou moins commentées ou augmentées, par exemple par Peyrard ou Reynaud, et parfois seulement réimprimées en substituant les nouvelles mesures aux anciennes, suite à l'introduction officielle du système métrique. La version de Saigey que nous proposons dans notre corpus se trouve dans ce dernier cas **(Bézout, 1848)**.
Pour des précisions sur mes multiples versions des ***Éléments de géométrie*** de Bézout aux XVIII^e^ et XIX^e^ siècles, voir Lamandé (1993, p. 299).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Bézout se distingue également par sa carrière scientifique. Il a consacré la majeure partie de ses recherches aux équations algébriques, auxquelles il a consacré un mémoire intitulé *Théorie générale des équations algébriques* (Bézout, 1779). Il a laissé son nom à plusieurs résultats relatifs à ce sujet, comme l'identité de Bézout, le théorème de Bézout, et la théorie de l'élimination.
Sources : Bibliographie complète dans (Alfonsi, 2011). Autres sources : (Alfonsi, 2010 ; Lamandé, 1993). Portrait d'auteur inconnu (domaine public).

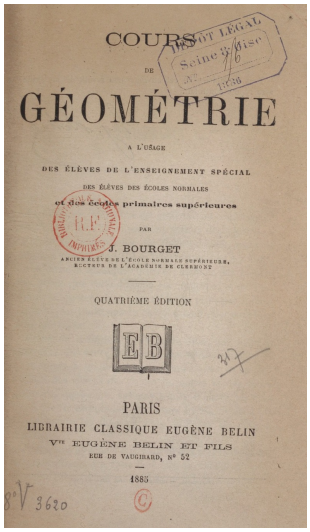
Bos Henri (1830 – 1888)


GÉOMÉTRIE
ÉLÉMENTAIRE
CONTENANT LES MATIÈRES INDIQUÉES PAR LES PROGRAMMES OFFICIELS DU 23 JUILLET 1874
POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE
DANS LES CLASSES DE LETTRES
PAR
H. BOS
Ancien élève de l'École normale supérieure, Agrégé des sciences
Inspecteur d'académie
DÉPÔT LÉGAL
PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie
1875

Né à Grenoble (Isère) et mort à Paris (Seine)
Sorti de l'ENS en 1851, il est affecté dans divers établissement de province ou parisiens en tant que professeur de mathématiques. Il obtient l'agrégation des sciences en 1855. En 1865, il est nommé au lycée Louis le Grand à Paris et est chargé à ce titre, du cours supérieur de mathématiques à l'École commerciale. Il accès par la suite aux fonctions d'inspecteur dans plusieurs académies, puis d'inspecteur général de l'Instruction Publique à partir de 1880.
C'est en tant qu'inspecteur d'académie qu'il rédige et publie sa ***Géométrie élémentaire*** en 1875 **(Bos, 1875)**, à destination des classes de lettres de l'enseignement secondaire, suivie des *Notions de géométrie plane* dédié à l'enseignement secondaire des jeunes filles, qu'il fait paraître alors qu'il est devenu inspecteur général. Il publie en outre plusieurs manuels d'arithmétique et de géométrie dans les années 1870-1880, dont plusieurs sont réservés à l'enseignement secondaire spécial.
Il est également le rédacteur de plusieurs articles concernant les mathématiques dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, dont ceux sur les « Rapports », la « Racine carrée » ou encore la « Racine cubique ».
Sources : (Dubois, 2002b ; Havelange et al., 1986a).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Bourget Justin (1822 – 1887)



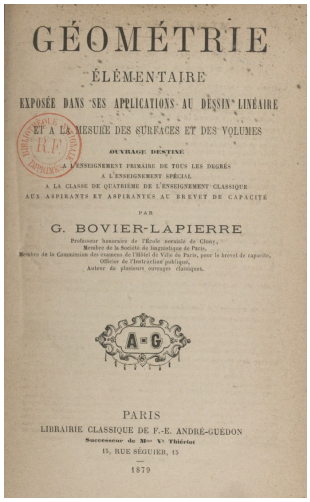
Né à Savas (Ardèche) et mort à Paris (Seine)

Sorti de l'ENS en 1848, il réussit brillamment l'agrégation de mathématiques, classé 3ème au concours, puis obtient son doctorat ès sciences mathématiques en 1852. Il enseigne ensuite les mathématiques dans de nombreux lycées à travers la France (Besançon, Rennes, Lyon, Amiens, Strasbourg), à la suite de quoi il devient professeur à la faculté des sciences de Clermont. Il deviendra recteur de l'académie d'Aix-en-Provence en 1878, puis de Clermont en 1887.

Il est déjà recteur lorsqu'il publie la 4ème édition de son ***Cours de géométrie*** à l'usage des élèves de l'enseignement spécial, des écoles normales et des écoles primaires supérieures **(Bourget, 1885)**. En plus d'un grand nombre d'ouvrages d'enseignement en algèbre et en géométrie, il écrit de nombreux travaux en mécanique céleste. Il dirige également des journaux à destination des étudiants et enseignants, comme les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (de 1868 à 1871), le *Journal de mathématiques élémentaires* (à partir de 1877) et le *Journal de mathématiques spéciales*. Au début des années 1870, il se lie d'amitié avec Gaston Darboux et Jules Houël (Croizat, 2016, p. 41, 426, 761).

Sources : (Condette, 2006e ; Croizat, 2016).

Bovier-Lapierre Gaspard (1823 – 1906)



Né à Pont-de-Beauvoisin (Isère), mort à Mâcon (Saône-et-Loire)

Non diplômé, il enseigne les mathématiques dans divers établissements de province, avant d'être nommé professeur à l'École normale de l'enseignement spécial de Cluny en 1866.

Il est l'auteur d'un grand nombre d'ouvrages d'enseignement des mathématiques, dont sa ***Géométrie élémentaire*** **(Bovier-Lapierre, 1879)**, mais aussi de grammaire, d'un dictionnaire universel et d'ouvrages religieux. Il contribue activement au *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, rédigeant de nombreux articles en lien avec les mathématiques, comme par exemple « Courbes usuelles », « Ellipse » ou « Parabole ».

Il se distingue également par son opposition à la nouvelle forme d'enseignement de la géométrie incarnée par le tachymètre Édouard Lagout, à l'encontre duquel il publie une

Licence CC BY-NC-ND 3.0

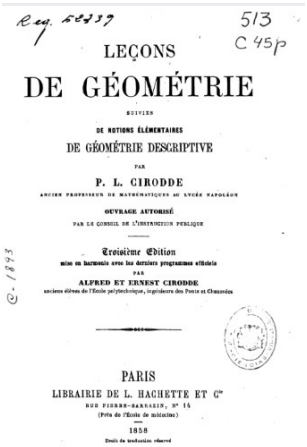
critique virulente dans la *Revue pédagogique* en 1879 (Leme da Silva et Moyon, 2020, p. 193-194).
Sources : (Dubois, 2002c ; Leme da Silva et Moyon, 2020).

Briot Charles (1817 – 1882)



Né à Saint-Hippolyte (Doubs), mort à Ault (Somme)
Il sort de l'ENS en 1841, premier *ex-aequo* à l'agrégation de mathématiques avec Joseph Bertrand. Il obtient le doctorat ès sciences en 1842 avec une thèse en mécanique, puis enseigne dans plusieurs collèges et lycées, avant de devenir professeur suppléant à l'école Polytechnique et à la faculté des sciences de Paris. Il est également maître de conférence à l'École Normale Supérieure en mécanique et astronomie. Parmi ses travaux scientifiques en physique mathématique se trouve la formule de dispersion lumineuse qui porte son nom.
Il est ami avec son camarade de promotion à l'ENS Jean-Claude Bouquet, avec lequel il co-écrit de nombreux manuels de mathématiques, ainsi qu'avec Charles Vacquant et P. Martin. Son manuel d'***Arpentage, levé des plans et nivellement*** paraît en son nom seul en 1859 **(Briot et Vacquant, 1859)**, tout comme la seconde édition de ses ***Eléments de géométrie*** **partie « Théorie »** en 1863 **(Briot, 1863)**, alors qu'il co-écrit le volet **« Applications »** avec Vacquant **(Briot et Vacquant, 1862)**.
Sources : (Felix, 2008 ; O'Connor et Robertson, 2002). Portrait : Extrait de (Vuillier, 1994).

Cirodde Paul-Louis (1749 – 1849)



Né à Issoudun (Indre), mort à Paris (Seine)
Élève brillant du lycée de Bourges, Cirodde commence à enseigner très jeune, dès 1812, comme régent de mathématiques au collège de Châteauroux, puis dans de nombreux établissements de Province. Il est nommé professeur de mathématiques au collège de Dijon en 1820, puis de mathématiques spéciales en 1830, avant d'intégrer le lycée Henri IV en 1837.
Il est par ailleurs l'auteur de leçons d'arithmétique (Cirodde, 1853) et d'autres traités élémentaires, notamment en géométrie (Cirodde, 1836). Ses deux fils, Ernest et Alfred, qu'il compte aussi parmi ses élèves, entrent tous les deux à l'école

Licence CC BY-NC-ND 3.0

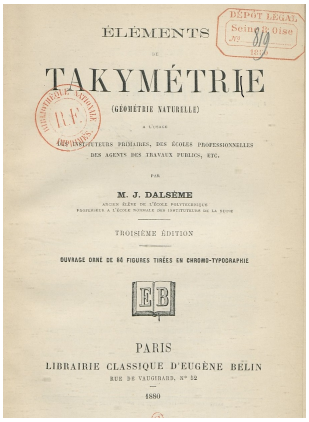
Polytechnique en 1843 puis à l'école des Ponts et Chaussées en 1845. Après sa mort, ce sont eux qui prennent en main la réédition des ***Leçons de géométrie*** de leur père **(Cirodde, 1858)**.
Sources : (Terquem, 1849 ; Moussard, 2023, p. 203).

COMBEROUSSE Charles (de) (1826 – 1897)



Né à Paris (Seine), mort à Paris (Seine)
Charles de Comberousse entre à l'École centrale en 1847. Il est bon élève malgré des faiblesses en dessin. Il entame une carrière dans les chemins de fer en 1850, mais bifurque assez rapidement vers l'enseignement en 1854, année où il devient professeur de mathématiques spéciales au lycée Chaptal. il le restera jusqu'en 1883. Parallèlement, il est répétiteur, puis professeur dès 1865 à l'École centrale, en cinématique et en mécanique.
C'est à cette époque qu'il rédige et publie des traités de mathématiques, dont le ***Traité de géométrie élémentaire*** qu'il co-écrit avec Eugène Rouché **(Rouché et Comberousse, 1866)**. Il est nommé professeur des travaux agricoles et de génie rural aux Conservatoire National des Arts et Métiers en 1882, nomination qu'il doit visiblement plus à sa réputation et à son influence qu'à ses compétences techniques. À la fin de sa vie, il occupe des fonctions administratives à la tête de l'École centrale.
Sources : (Grelon, 1994 ; Moussard, 2023, p. 164). Portrait : (Anonyme, 1870a).

DALSÈME Jules (1845 – 1904)

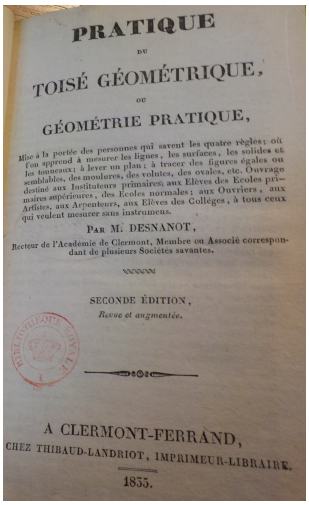


Né à Nice (Alpes-Maritimes), mort à Paris (Seine)
Jules Dalsème entre à l'école Polytechnique en 1865, puis à l'école d'application de Metz, dont il sort avec le grade d'officier d'artillerie. Il bifurque vers l'enseignement peu après, en 1869, débutant sa nouvelle carrière comme répétiteur au lycée Chaptal à Paris, puis comme professeur de mathématiques à l'École Normale d'Instituteurs de la Seine. Dans cet établissement, il enseigne la géométrie selon une méthode intuitive, qu'il appelle « takymétrie », qui consiste à assembler des formes en deux ou trois dimensions pour calculer des périmètres, aires ou volumes.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Cette méthode est au fondement de ses ***Éléments de takymétrie*** **(Dalsème, 1880)**, puis de ses *Premières notions de takymétrie* (Dalsème, 1882). Elle est assez largement inspirée du travail d'Édouard Lagout (Lagout, 1872, 1874, 1878), un ingénieur qui a mis au point une méthode très similaire quelques années auparavant, et que pourtant, Dalsème critique assez vivement. Dalsème rédige même un article à ce propos dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson.
Sources : (Dubois, 2002d ; Greber et Verdier, 2021 ; Leme da Silva et Moyon, 2020).

DESNANOT Pierre (1777 – 1857)


PRATIQUE
DU
TOISÉ GÉOMÉTRIQUE,
OU
GÉOMÉTRIE PRATIQUE,
Mise à la portée des personnes qui savent les quatre règles; où l'on apprend à mesurer les lignes, les surfaces, les solides et les tonneaux; à lever un plan; à tracer des figures égales ou semblables, des moulures, des voûtes, des ovales, etc. Ouvrage destiné aux Instituteurs primaires, aux Elèves des Ecoles primaires supérieures, des Ecoles normales; aux Ouvriers, aux Artistes, aux Arpenteurs, aux Elèves des Collèges, à tous ceux qui veulent mesurer sans instrumens.
PAR M. DESNANOT,
Recteur de l'Académie de Clermont, Membre ou Associé correspondant de plusieurs Sociétés savantes.
SECONDE ÉDITION,
Revue et augmentée.
A CLERMONT-FERRAND,
CHEZ THIBAUD-LANDRIOT, IMPRIMEUR-LIBRAIRE.
1835.

Né à Lévignac-de-Guyenne (Lot-et-Garonne), mort à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)
Desnanot est né de parents agriculteurs et est d'origine modeste. Son instruction lui vient des religieux de sa paroisse. Il enseigne les mathématiques en Dordogne, puis à Limoges, où il devient censeur des études en 1809 avant d'être nommé à la même fonction à Nancy, jusqu'en 1820. Il accède ensuite au poste d'inspecteur d'académie à Nîmes (en 1825), puis à Grenoble (en 1832). C'est donc en qualité d'inspecteur qu'il publie sa ***Pratique du toisé géométrique*** en 1826, qu'il rééditera en 1835 **(Desnanot, 1835)**.
Il sera finalement promu recteur de l'académie de Clermont en 1832, avant de partir à la retraite en 1841. Ancien militaire, Desnanot fait preuve de beaucoup de rigueur, et même d'un peu de raideur, selon ses collègues et supérieurs. Hormis son manuel de géométrie pratique, il publie des ouvrages touchant à des domaines variés, tels que l'arithmétique, l'algèbre, la mécanique, mais aussi traitant des thèmes très spécifiques, comme le jaugeage des cylindres ou encore les fusils de chasse.
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb10236342b), dossiers des membres de l'Académie Stanislas (https://www.academie-stanislas.org/wp-content/uploads/2023/02/desnanot-1.pdf), (Blatin-Mazelhier, 1859 ; Condette, 2006a).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Dupin Charles (1784 – 1873)



Né à Varzy (Nièvre), mort à Paris (Seine)

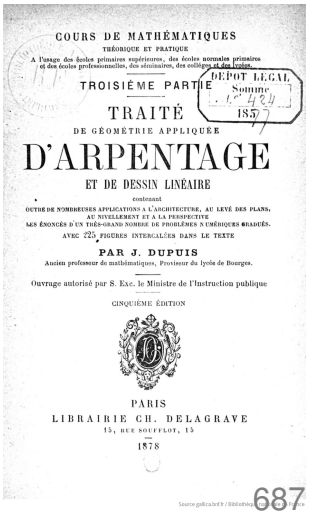
Attiré dès son plus jeune âge vers la géométrie, Dupin entre à l' École Polytechnique en 1801. Il y effectue un parcours brillant, accédant au corps des ingénieurs de la Marine. À Polytechnique, il a pour professeur de géométrie Monge, dont il restera le « disciple » et auquel il rendra hommage à sa mort en 1819 (Belhoste, 2009, p. 1). Il se lie également d'amitié avec Carnot.

Il enseigne la géométrie appliquée aux arts au Conservatoire des Arts et Métiers de 1819 à 1873. Philanthrope, il crée dans ce contexte des cours ouvriers et promeut le développement de tels cours auprès des préfets français à partir de 1826 (Bodé, 2014, p. 29). C'est cette année-là qu'il publie sa ***Géométrie et méchanique des arts et métiers et des beaux-arts***, tirée de ses cours au Conservatoire des arts et métiers, qu'il rééditera en 1828 **(Dupin, 1828)**.

Ses travaux scientifiques sont nombreux et de porté significative. Ses travaux sur les cyclides, menés de 1802 à 1822, se verront développés par de nombreux mathématiciens dans le second XIX^{e} siècle (Belhoste, 2009, p. 11-13). Il travaille également sur les courbures des surfaces du second ordre, en mécanique et en physique mathématique. Il publie des *Développements de géométrie* appliqués à divers domaines des arts (stabilité des vaisseaux, déblais et remblais, optique, etc.) en deux parties — « Théorie » puis « Applications » — en 1813, puis 1822. Dans ces ouvrages, il exprime son souhait de voir la nouvelle géométrie enseignée à tous — chercheurs, étudiants et travailleurs (Lorenat, 2019, p. 80-82).

Sources : (Belhoste, 2009 ; Bruneau et Rollet, 2024b ; Christen et Vatin, 2009 ; Fox, 1994 ; Lorenat, 2019).

Dupuis Jean (1818 – 1903)


COURS DE MATHÉMATIQUES
THÉORIQUE ET PRATIQUE
TROISIÈME PARTIE
TRAITÉ
DE GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE
D'ARPENTAGE
ET DE DESSIN LINÉAIRE
PAR J. DUPUIS
PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
1878

Né à ?, mort à ?

Dupuis a été professeur de mathématiques au lycée d'Angers avant d'exercer des responsabilités administratives (censeur, sous-directeur puis proviseur) à Lorient, Metz, Mulhouse, Versailles et Bourges (Verdier et Gautreau, 2022, p. 48). C'est en tant que « professeur de mathématiques » qu'il publie son ***Traité de géométrie appliquée*** en 1857 **(Dupuis, 1857)**.

Nous ne disposons que de très peu d'éléments biographiques

Licence CC BY-NC-ND 3.0

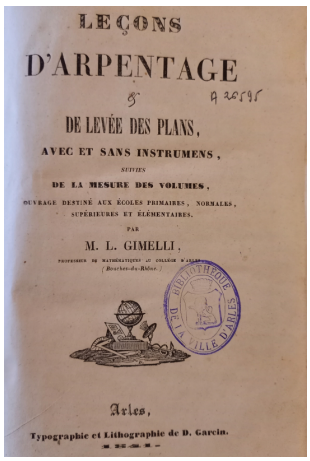
le concernant. Il a produit de nombreuses tables de logarithmes à partir de 1856, certaines rééditées longtemps après sa mort (Catalogue de la BNF). Il est également le premier à avoir traduit les œuvres de Theon de Smyrne du grec au français.
Il s'est intéressé à la mathématique platonicienne au sujet de laquelle il a beaucoup échangé avec Tannery (Verdier et Gautreau, 2022, p. 49).
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb133257250) et (Verdier et Gautreau, 2022).

EYSSÉRIC Antoine-Dominique (1813 – 1892)



Né à Carpentras (Vaucluse), mort à Carpentras (Vaucluse)
Eyssériс est nommé professeur de mathématiques au collège de Carpentras en 1837. Il est l'auteur d'une suite d'ouvrages de mathématiques pour l'enseignement secondaire et primaire, dont un traité d'arithmétique publié en 1843 en collaboration avec un journaliste, Jean-Baptiste Gautier, ainsi que le ***Traité de géométrie théorique et pratique*** qu'il a rédigé avec son collègue carpentrassien Joseph Casimir Pascal **(Eysseric et Pascal, 1850)**. Il a publié également des traités de géographie, cartes et texte.
Sources : Site de la bibliothèque L'Inguimbertine de Carpentras (https://fonds.carpentras.fr/VPCTP/eysseric.aspx). Portrait peint par Denis Bonnet (1789-1877), professeur de dessin au collège de Carpentras.

GIMELLI Louis (1803 – 1885)



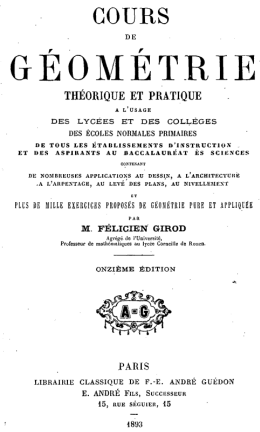
Né à Toulon (Var), mort à Toulon (Var)
Nous disposons de très peu d'éléments biographiques concernant Louis Gimelli. Il est mentionné comme « professeur de mathématiques au collège d'Arles » sur ses ***Leçons d'arpentage*** publiées en 1841 **(Gimelli, 1841)**.
Le site LARRA-Ressources numériques en science de l'éducation mentionne, parmi « les autorisations de cours publics dans les départements français » trois demandes d'ouverture de cours émanant de Gimelli. La première a lieu en 1839, en tant que « régent de seconde au collège de Toulon », la seconde en 1840 sous le statut de « régent de mathématiques au collège

Licence CC BY-NC-ND 3.0

d'Arles » et la troisième en 1848 en qualité d'« ancien régent de mathématiques au collège d'Arles » (Bruter, 2009). Les trois sont refusées, le second refus étant justifié par la mention « influence dangereuse sur la population ».
Sources : site LARRA-Ressources numériques en science de l'éducation (Bruter, 2009).

GIROD Félicien (1846 – 1911)

Né à La Marre (Jura), mort à Paris (Seine)


COURS
DE
GÉOMÉTRIE
THÉORIQUE ET PRATIQUE
A L'USAGE
DES LYCÉES ET DES COLLÈGES
DES ÉCOLES NORMALES PRIMAIRES
DE TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES
CONTENANT
DE NOMBREUSES APPLICATIONS AU DESSIN, A L'ARCHITECTURE
A L'ARPENTAGE, AU LEVÉ DES PLANS, AU NIVELLEMENT
ET
PLUS DE MILLE EXERCICES PROPOSÉS DE GÉOMÉTRIE PURE ET APPLIQUÉE
PAR
M. FÉLICIEN GIROD
Agrégé de l'Université,
Professeur de mathématiques au lycée Corneille de Rouen
ONZIÈME ÉDITION
A-G
PARIS
LIBRAIRIE CLASSIQUE DE F.-E. ANDRÉ GUÉDON
E. ANDRÉ FILS, SUCCESSEUR
15, RUE SÉGUIER, 15
1893

Ancien élève de l'École de Cluny, il devient professeur de mathématiques au lycée Corneille de Rouen, puis professeur à l'École professionnelle de Rouen et, enfin, professeur agrégé de l'université pour l'enseignement spécial en 1869 (Archives Nationales, 2024 ; Moussard, 2023, p. 163).
Il est l'auteur de très nombreux manuels de mathématiques, dont son ***Cours de géométrie théorique et pratique*** multiplement réédité **(Girod, 1893)** et son *Cours de mathématiques appliquées* qu'il publie avec Thomas Canonvile (Girod et Canonville, 1880).
Sources : (Archives Nationales, 2024 ; Moussard, 2023).

GUILMIN Adrien (1812 – 1884)

Né à Brest (Finistère), mort à Paris (Seine)



Guilmin commence ses études à Brest avant d'intégrer l'École normale supérieure en 1836. Il la quitte en 1837 pour des raisons de santé, sans avoir obtenu l'agrégation (Moussard, 2015, p. 250, 492). Il s'installe à Paris, où il donne des leçons particulières de mathématiques, avant d'être nommé professeur au lycée Bonaparte jusqu'en 1853. Il dirige ensuite une institution libre. Il a publié de nombreuses notes dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, principalement en arithmétique ou à propos de la résolution des équations algébriques, de 1842 à 1851. A partir de 1861, il s'occupe uniquement de composer des ouvrages d'enseignement, en arithmétique (Guilmin, 1853), géométrie, algèbre ou cosmographie, à l'usage des écoles primaires, des lycées et des collèges. Certains d'entre eux, comme son ***Cours de géométrie élémentaire***, ont été très souvent et longtemps réédités **(Guilmin, 1882)**.
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/

Licence CC BY-NC-ND 3.0

cb10354854t), site Numdam.org (https://numdam.org) et (Moussard, 2015). Portrait : Photographie de la sépulture de Guilmin à Bourg-la-Reine, prise en 2009 (source : Wikipedia).

HARANT Henri (1821 – 1884)



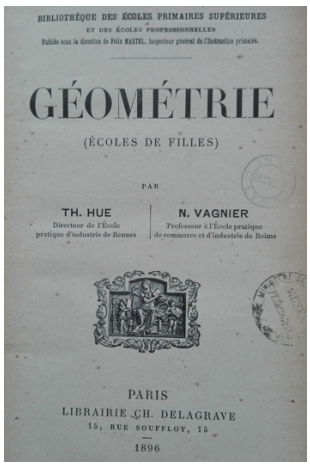
Né à Perpignan (Pyrénées-Orientales), mort à Lion-sur-Mer (Calvados)

Harant est licencié ès-sciences et professeur de géométrie à l'Association polytechnique. C'est un philanthrope, très impliqué dans la *Bibliothèque des Amis de l'instruction et l'Association philotechnique* dont il a été l'un des premiers sociétaires, avant d'en devenir le secrétaire général. Il a également occupé la fonction de chef d'une institution privée. En plus de sa ***Géométrie appliquée aux arts et métiers*** **(Harant, 1863)**, qui reprend le contenu de ses leçons données à l'Association polytechnique, il a rédigé des leçons de cosmographie et de mécanique.

Il devient président du Conseil municipal de Paris et membre du Conseil général de la Seine. Il est capitaine aux volontaires de Montrouge (Hauts-de-Seine), lorsqu'il reçoit sa légion d'honneur en 1871. Sa mort à Lion-sur-Mer est considérée comme suspecte. Une enquête est ouverte pour déterminer s'il s'agit d'un crime ou d'un accident, mais cette dernière hypothèse apparaît comme la plus vraisemblable, puisque Harant était atteint d'aphasie et avait presque complètement perdu la vue.

Sources : (Dosso, 2015). Portait : « Harant, chef d'institution ». Détail de : « Conseil municipal de Paris. Élections du 29 novembre et 6 décembre 1874 » (source : Musée Carnavalet).

HUE Théophile (1856 – ?)



Né à ?, mort à ?

Hue occupe pendant neuf années la direction de l'École pratique d'industrie de Rennes (de 1894 à 1903), puis devient directeur de l'École normale professionnelle de Nantes (actuel lycée Livet) jusqu'en 1912. Il est mentionné comme membre du *Congrès international de l'enseignement technique, commercial et industriel* qui s'est tenu à Paris en 1900, sous la présidence de Mr Bouquet, conseiller d'état.

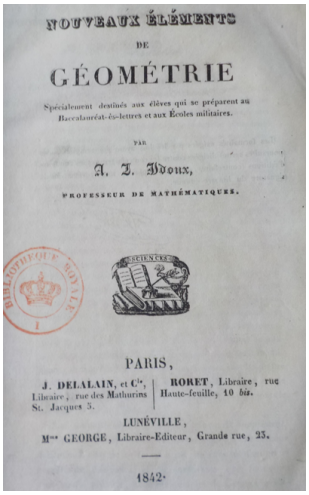
Il a fait paraitre plusieurs ouvrages de géométrie avec son

Licence CC BY-NC-ND 3.0

collègue Narcisse Vagnier, dont leur ***Géométrie*** à l'usage des « écoles de filles » **(Hue et Vagnier, 1896)**, ainsi que des manuels d'algèbre.

Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb10184152g), (Livet de Nantes, 2025).

IDOUX Auguste-Joseph (1804 – 1871)


NOUVEAUX ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE
Spécialement destinés aux élèves qui se préparent au Baccalauréat-ès-lettres et aux Écoles militaires.
PAR
A. I. Idoux,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.
PARIS,
J. DELALAIN, et C^ie^, Libraire, rue des Mathurins St. Jacques 5. | RORET, Libraire, rue Haute-feuille, 10 bis.
LUNÉVILLE,
M^me^ GEORGE, Libraire-Editeur, Grande rue, 23.
1842.

Né à Saint-Dié (Vosges), mort à Lunéville (Meurthe-et-Moselle)
Bachelier ès-sciences et licencié de mathématiques (Moussard, 2015, p. 212), Idoux a d'abord été nommé régent de mathématiques au collège de Saint-Mihiel. Il obtient ensuite le poste de professeur de mathématiques au collège de Lunéville, statut sous lequel il publie ses ***Nouveaux éléments de géométrie*** **(Idoux, 1842)**. C'est à notre connaissance le seul ouvrage qu'il ait publié.

Il est membre associé à l'Académie de Stanislas de 1845 à 1871, et est nommé officier de l'Instruction publique en 1865.

Sources : Site Forez Histoire (https://www.academie-stanislas.org/wp-content/uploads/2023/02/idoux.pdf), (Moussard, 2015).

L. C ET F. P. B [Mathieu Bransiet (frère Philippe Bransiet)] (1792 – 1874)



Né à Apinac (Loire), mort à Paris (Seine)

Bransiet est élu supérieur des Frères des écoles chrétiennes en 1838. Il est le fondateur du pensionnat de Passy (Paris). Il écrit un très grand nombre d'ouvrages d'enseignement pour le primaire, dans des disciplines très variées (grammaire, arithmétique, géométrie, etc.), seul ou en collaboration avec (Claude-)Louis Constantin (1788 – 1838), son prédécesseur à la tête des Frères des Écoles chrétiennes (de 1830 à 1838). Ils écrivent conjointement en 1840 leur ***Abrégé de géométrie pratique*** **(L.C. et F.P.B., 1840)**. La BNF recense près de 400 entrées éditoriales à son nom. Les multiples rééditions de ses ouvrages attestent le succès de diffusion de ses écrits pédagogiques et religieux.

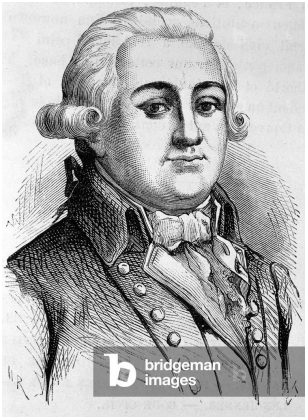
Le frère Philippe Bransiet est le fondateur des premières « écoles du soir » pour adultes

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en 1830. Il dirige en 1835 les écoles municipales de Reims, confiées à la direction de l'institut des Frères des écoles chrétiennes. Il joue un rôle majeur dans la diffusion de l'instruction au XIXe siècle en développant considérablement l'institut.
Sources : (Barou et Bransiet, 1999). Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb13026876w). Site Forez Histoire (http://forezhistoire.free.fr/frere-philippe.html).

LACROIX Sylvestre-François (1765 – 1843)

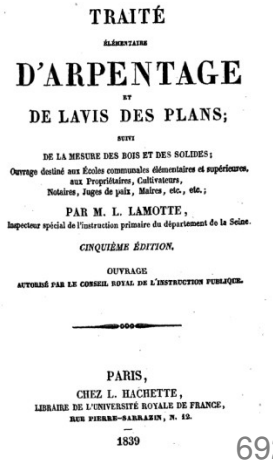
Né à Paris (Seine), mort à Paris (Seine)



Lacroix étudie au collège parisien des Quatre Nations et y suit l'enseignement mathématique de l'abbé Marie. Il enseigne à l'École des gardes de la Marine de Rochefort à partir de 1782, avec l'appui de Monge. Il continue à enseigner jusqu'en 1828, notamment à l'École royale d'artillerie de Besançon, à l'École normale de l'an III, à l'École centrale des Quatre-Nations, au lycée Bonaparte, ou encore à l'École Polytechnique.
Réputé pour être un très bon professeur, il met à profit son expérience d'enseignement pour rédiger une série d'ouvrages formant un cours complet de mathématiques, parmi lesquels se trouvent ses ***Élémens de géométrie*** **(Lacroix, 1808)**. Il expose ses conceptions sur l'enseignement des mathématiques dans son *Essai sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier* en 1805 (Lacroix, 1805). Il est membre de l'Institut depuis 1799. Très au fait des avancées scientifiques de son époque, il s'emploie à mettre dans ses manuels les connaissances les plus actualisées possibles.
Sources : (Ehrhardt, 2009 ; Lamandé, 1990 ; Moussard, 2015 ; Schubring, 1987). Portait de Sylvestre-Francois Lacroix (1765 – 1843), mathématicien français – dans *L'Histoire de France* par Henri Martin, 19ème siècle.

LAMOTTE Louis (1793 – ?)

Né à ?, mort à ?


TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ARPENTAGE
ET
DE LAVIS DES PLANS;
SUIVI
DE LA MESURE DES BOIS ET DES SOLIDES;
Ouvrage destiné aux Écoles communales élémentaires et supérieures, aux Propriétaires, Cultivateurs, Notaires, Juges de paix, Maires, etc., etc.;
PAR M. L. LAMOTTE,
Inspecteur spécial de l'instruction primaire du département de la Seine.
CINQUIÈME ÉDITION.
OUVRAGE
AUTORISÉ PAR LE CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.
PARIS,
CHEZ L. HACHETTE,
LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
RUE PIERRE-SARRASIN, N. 12.
1839

Licencié en droit, Lamotte est tout d'abord désigné comme maître de pension, puis devient directeur du « collège d'industrie », un collège parisien ayant vocation à permettre à ses élèves d'« embrasser honorablement toutes les professions du commerce et de l'industrie » (Dulac et Corby, 1835, p. 295-296 ; Huguet, 2001). En 1835, il accède à la fonction d'inspecteur

Licence CC BY-NC-ND 3.0

spécial de l'enseignement primaire du département de la Seine, poste qu'il occupera jusqu'à sa retraite en 1848.
Lamotte participe à la rédaction de plusieurs ouvrages d'enseignement, seul ou en collaboration. Il aborde plusieurs disciplines, comme la géographie, la grammaire, l'arithmétique et même des manuels complets pour les aspirants au brevet de capacité ou au baccalauréat. Il publie dès 1830 un cours de dessin linéaire « applicable à tous les modes d'enseignement » (Lamotte, 1830) et quelques années plus tard un cours similaire destiné aux jeunes filles, le *Dessin linéaire des demoiselles* (D'Enfert, 2025 ; Lamotte, 1835). Il écrit la première version de son ***Traité élémentaire d'arpentage et de lavis des plans*** en 1831, qui sera réédité de nombreuses fois jusqu'en 1875 **(Lamotte, 1839)**.
Lamotte est influent en tant qu'inspecteur et très impliqué dans un projet de réforme sur la loi de l'instruction primaire au début des années 1840. Avec son collègue Paul Lorain, ils publient des manuels de l'enseignement mutuel, ainsi que de l'enseignement simultané, ce qui les place au cœur des débats qui animent la communauté éducative au sujet de ces des méthodes (Gevaert, 2017, p. 129-133).
Sources : (D'Enfert, 2025 ; Dulac et Corby, 1835 ; Gevaert, 2017 ; Huguet, 2001).

LANCELOT Jean-François (1793 – 1880)


NOUVEAU
TRAITÉ D'ARPENTAGE
ET
DE TOISÉ,
AVEC DES TABLES DE CONVERSIONS DE MESURES ANCIENNES ET NOUVELLES;
SUIVI
DE FIGURES RAISONNÉES SUR L'ARPENTAGE, LE TOISÉ ET LE PARTAGE DES CHAMPS;
DE COMPTES FAITS
Pour le toisé des bâtimens, des pieds en toises et pieds carrés, convertis en mètres, décimètres et centimètres carrés; des mètres carrés en toises, pieds, pouces et lignes carrés; des toises cubes en mètres et décimètres cubes, et des pieds cubes en mètres, décimètres et centimètres cubes;
D'UN TARIF
POUR LA RÉDUCTION DU BOIS CARRÉ ET EN GRUME,
Selon l'ancien système et le nouveau;
D'UN TARIF DES PIEDS DE FER,
Suivant leur épaisseur et largeur, réduits au poids légal du pied de roi et du pied métrique, et des fers ronds depuis une ligne de diamètre jusqu'à vingt-quatre lignes;
TERMINÉ
Par diverses Lois et Formules de procès-verbaux concernant l'arbitrage, l'arpentage et le bornage.
HUITIÈME ÉDITION, ORNÉE DE QUATRE PLANCHES.
A TROYES,
CHEZ LALOY, LIBRAIRE, RUE MOYENNE, N° 57.
1833.

Né à Nevers (Nièvre), mort à Bourges (Cher)
Lancelot se désigne comme « chef d'enseignement » en couverture du manuel de dessin linéaire qu'il commence à publier en 1827, puis de son ***Nouveau traité d'arpentage*** qui paraît pour la première fois en 1830 et bénéficiera de plusieurs rééditions **(Lancelot, 1833)**.
Nous ne disposons que de très peu d'éléments biographiques le concernant. Il est nommé président de la commission de surveillance de l'ENP de Bourges en 1857 (Rouland, 1857) et officier d'académie en 1858 (Rouland, 1858a), et encore commis de l'inspection académique du Cher en 1867 (Duruy, 1867).
Sources : Catalogue de la BNF (`https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb30731424j`). *Bulletin administratif de l'instruction publique*, années 1857, 1858 et 1867.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

LEGENDRE Adrien-Marie (1752 – 1833)



Né à Paris (Seine), mort à Paris (Seine)

Legendre est formé en mathématiques par l'abbé Marie au collège des Quatre Nations. Il enseigne à l'école militaire de Paris de 1775 à 1780, puis occupe la fonction d'examinateur des candidats aux écoles d'officiers de l'Artillerie de 1799 à 1815. Il est cependant davantage impliqué dans la recherche que dans l'enseignement, notamment au sein de l'Académie des Sciences (Lamandé, 1993, p. 252-253).

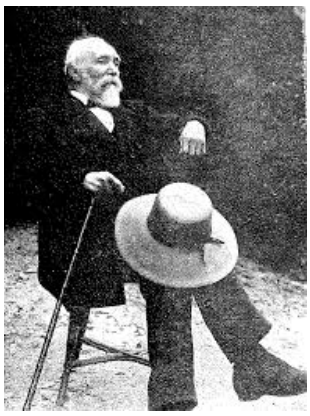
Sa carrière scientifique débute par un mémoire sur les trajectoires des projectiles, pour lequel il reçoit le Grand-Prix de l'Académie des sciences de Berlin en 1782. Il étudie également la mécanique et démontre à cette occasion des résultats mathématiques d'une importance cruciale, à propos de l'équation différentielle et des polynômes qui portent son nom. Il s'implique également dans la mesure du méridien terrestre avec des savants de son époque (Gillispie, 1970, p. 135-143).

Il n'écrit qu'un seul ouvrage d'enseignement, ses célèbres ***Éléments de géométrie*** **(Legendre, 1823)**, qui seront réédités à de multiples reprises entre 1794 et 1879. Dans cet ouvrage, Legendre s'inscrit dans la lignée euclidienne tout en proposant une version réorganisée à sa façon, avec des démonstrations précises et rigoureuses, de l'ouvrage du savant grec. En plus de sa grande audience en France, son livre sera très largement diffusé à l'étranger, comme par exemple en Italie ou aux États-Unis, pour un usage d'enseignement (Menghini, 2007 ; Preveraud, 2017).

Sources : (Gillispie, 1970 ; Lamandé, 1993 ; Menghini, 2007 ; Preveraud, 2017). Site Bibmath (`https://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=legendre`).

Portrait : Caricature du mathématicien réalisée par Louis-Léopold Boilly dans son ouvrage intitulé *Album de 73 portraits-charge aquarellés* tiré du site « Bibmath ».

LEYSSENNE Pierre (1827 – 1916)



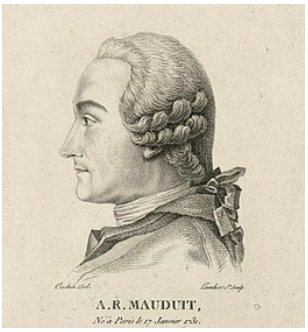
Né à Saint-Germain-les-Belles (Haute-Vienne), mort à Paris (Seine)

Leyssenne n'entre pas à l'École Normale supérieure car ses origines modestes ne lui permettent pas d'obtenir une bourse de préparation à cette école. Il commence sa carrière d'enseignant dans le secondaire dans des collèges (à Magnac-Laval et Rochefort), puis fonde une institution libre en 1851 dans la Haute-Vienne. Il obtient un poste au collège Sainte Barbe, où il

Licence CC BY-NC-ND 3.0

enseigne de 1859 à 1869. En parallèle, il donne des leçons de mécanique pendant 17 ans à l'Association philotechnique pour l'instruction gratuite des adultes (Dubois, 2002f). Après la guerre de 1870, il rejoint les proches de Jules Ferry, alors ministre de l'Instruction publique et président du Conseil, et s'engage en faveur d'un enseignement gratuit et obligatoire. Leyssenne deviendra inspecteur général en 1880 (Moyon et Legros, 2017, p. 61-62).
Leyssenne est l'un des plus importants auteurs de manuels scolaires de la Troisième République. Ses nombreux manuels scolaires ont permis de diffuser très largement une instruction mathématique doublée d'une éducation morale. Il écrit une collection de manuels d'arithmétique dédiée à l'enseignement primaire, ainsi que des manuels pour l'enseignement secondaire, notamment pour la préparation de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat (Moyon et Legros, 2017, p. 62-63). Il a écrit deux articles dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson, l'un portant sur les « Problèmes » (Leyssenne, 1882b) et l'autre sur la « Géométrie » (Leyssenne, 1882a). En 1890, il écrit son ***Traité de géométrie théorique et pratique*** **(Leyssenne, 1890)**, destiné entre autres aux futures institutrices et futurs instituteurs.
Sources : (Dubois, 2002f ; Leyssenne, 1882a,b ; Moyon et Legros, 2017). Portrait : Photographie de Pierre Leyssenne prise en 1911 (auteur inconnu – source : Wikipedia).

MAUDUIT Antoine-René (1731 – 1815)



Né à Paris (Seine), mort à Paris (Seine)
Mauduit est un architecte du Roi, nommé recteur pour la géométrie à l'École gratuite de dessin de Jean-Jacques Bachelier en 1767. S'il en rédige le programme de mathématiques, ce n'est pas lui qui en assure les cours. En 1768, il entre au collège de France à la chaire de mathématiques dite « Ramus ». Cette nomination sans élection est controversée et ne lui attire pas la reconnaissance de ses pairs (Baudez, 2011). C'est cette même année qu'il succède à Camus à la chaire de mathématiques de l'Académie Royale d'architecture. Les ***Leçons de Géométrie théorique et pratique*** **(Mauduit, 1790)** qu'il y délivre jusqu'en 1793 feront l'objet de plusieurs éditions (Baudez, 2011). Il enseigne par la suite dans les écoles centrales et est membre de la Société des sciences et arts de Metz (Jung et Husser, 2017). Durant l'année 1791, il donne des leçons particulières de mathématiques à Jean-Baptiste Biot (Lefort, 1867).
Mauduit est considéré par certains de ses contemporains comme un remarquable pédagogue et a montré son implication dans la vie du Collège de France. En

Licence CC BY-NC-ND 3.0

revanche, sa carrière semble avoir souffert de son caractère ainsi que de ses positions scientifiques jugées rétrogrades, le personnage étant réputé pour railler certains de ses confrères de l'Académie des sciences et pour s'attaquer à toute forme d'innovation dans les sciences (Baudez, 2011 ; Michaud, 1843, p. 307).
Sources : (Baudez, 2011 ; Jung et Husser, 2017 ; Lefort, 1867 ; Michaud, 1843). Portrait : « A. R. Mauduit, né à Paris le 17 janvier 1731 », dessin de Charles-Nicolas Cochin, datée entre 1815 et 1829, collection du château de Versailles (source : Wikipedia).

MÉRAY Charles (1835 – 1911)



Né à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), mort à Dijon (Côte-d'Or)
Méray est un mathématicien, normalien et docteur ès sciences. Il enseigne en lycée, puis à l'Université, principalement à Dijon où il passe la majeure partie de sa carrière (Dugac, 1970). Bien qu'ayant grandement contribué à la recherche mathématique de son époque, ainsi qu'à son enseignement, il n'est pas reconnu à sa juste valeur par ses contemporains. Ses travaux en géométrie comme en analyse laissent pourtant apparaître ses qualités à la fois d'intuition et de rigueur, en plus d'une véritable originalité de pensée (D'Enfert, 2005, p. 252-253 ; Gillispie, 1974, p. 316-317). Dans le domaine de la recherche, ses travaux touchent les domaines de la géométrie, et surtout de l'analyse. Il est connu pour avoir développé une théorie des nombres irrationnels quelques années avant Cantor, et contribué à la construction de la notion de limite en analyse, dans le sillage des travaux de Lagrange et de Cauchy (Dugac, 1970 ; Gillispie, 1974, p. 316-317). Tannery repère et souligne également son goût des généralités et des structures (Dugac, 1970).
Il propose par ailleurs une vision alternative de l'enseignement de la géométrie, menant en parallèle les apprentissages dans le plan et dans l'espace, en alliant à la fois rigueur et intuition (Laisant, 1901 ; Dugac, 1970). Avec leur recours aux déplacements pour instituer les connaissances géométriques, ses ***Nouveaux éléments de géométrie*** **(Méray, 1874)** marquent une rupture avec la tradition euclidienne (Laisant, 1901). Ses tentatives d'application pédagogique sont tout d'abord cantonnées aux écoles primaires supérieures de la région de Dijon, avec un succès confirmé par les professeurs utilisateurs de sa méthode, qui y voient plus de clarté dans les apprentissages des élèves, ainsi qu'une meilleure initiation de ces derniers aux représentations spatiales, les préparant mieux à la géométrie descriptive à venir (D'Enfert, 2005, p. 252-253).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Néanmoins, ces expérimentations se voient empêchées par l'administration de l'Instruction Publique, qui resteront en grande partie ignorées de ses contemporains, comme le regrette a posteriori son défenseur et admirateur Charles-Ange Laisant, dans son article de 1901 visant à « exhumer » les éléments de géométrie oubliés de Méray (Laisant, 1901). Cet ouvrage réhabilité inspirera d'ailleurs la réforme de l'enseignement de la géométrie de 1902.
Mathématicien respecté, Méray ne sera pas de son vivant un savant de premier plan (Gillispie, 1974, p. 316-317). Même en tant que scientifique reconnu, son ouvrage de géométrie passe inaperçu durant plusieurs décennies, et ses leçons d'analyse seront-elles aussi réhabilitées postérieurement à une longue phase d'indifférence (A. Morel, 1899). Les grandes qualités de Méray, « successeur moderne des grands analystes français du siècle » précédent (A. Morel, 1899), n'empêchent pas une forme de dédain de ses contemporains, que le « solitaire de Dijon » (Dugac, 1970) en poursuivant un travail aussi fourni que de qualité.
Sources : (D'Enfert, 2005 ; Dugac, 1970 ; Gillispie, 1974 ; Laisant, 1901 ; A. Morel, 1899). Portrait : Portait de Charles Méray, mathématicien français, daté d'avant 1911 (auteur inconnu) – Source : Wikipedia.

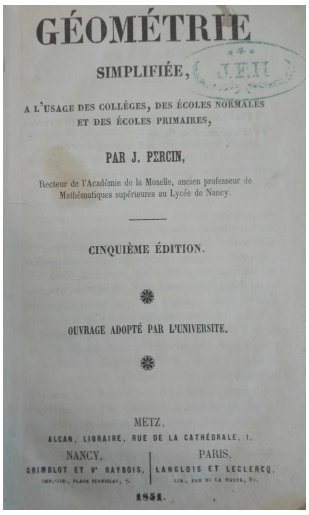
PASCAL Joseph-Casimir (1802 – 1873)



Né à Saint-Saturnin-lès-Apt (Vaucluse), mort à Sorgues (Vaucluse)
Pascal passe son enfance à garder les moutons puis entre au collège d'Apt à 14 ans. Il ne parle alors que le provençal, mais progresse de manière si surprenante, que ses professeurs l'incitent à se présenter au concours de l'École polytechnique. Il échoue en 1821 et part pour Marseille où il devient droguiste. Il obtient son diplôme de pharmacien en 1827 et s'établit peu après à Carpentras.
Il devient ensuite juge de paix, et collabore à la publication des ouvrages d'Eyssériс, tels que le ***Traité de géométrie théorique et pratique*** **(Eysseric et Pascal, 1850)** mais édite également en son seul nom des cours de géométrie et de cosmographie.
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb105736821). Portait : Victor VILLON. *Portrait de Joseph-Casimir Pascal en buste*, 1873, cliché de Christian Chaline (source : site de la bibiliothèque « L'Inguimbertine » de Carpentras, https://fonds.carpentras.fr/vpctp/casimir.aspx?_lg=fr-FR).

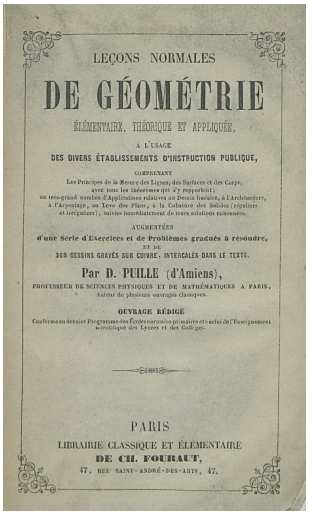
Licence CC BY-NC-ND 3.0

PERCIN (Nicolas) Jules (1804 – 1882)


GÉOMÉTRIE
SIMPLIFIÉE,
A L'USAGE DES COLLÉGES, DES ÉCOLES NORMALES ET DES ÉCOLES PRIMAIRES,
PAR J. PERCIN,
Recteur de l'Académie de la Moselle, ancien professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Nancy.
CINQUIÈME ÉDITION.
OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.
METZ.
ALCAN, LIBRAIRE, RUE DE LA CATHÉDRALE, 1.
NANCY, GRIMBLOT ET Vᵉ RAYBOIS,
PARIS, LANGLOIS ET LECLERCQ,
1851.

Né à Bar-le-Duc (Meuse), mort à Nancy (Meurthe-et-Moselle)
Agrégé de sciences en 1830, Percin enseigne dans divers établissements des alentours de Nancy, notamment comme professeur de mathématiques spéciales au collège royal de Nancy. Il devient ensuite recteur de l'académie de Moselle en 1850, puis de la Meurthe en 1853, et inspecteur d'Académie à Nancy en 1854, jusqu'à sa retraite en 1861. Il est considéré par ses pairs comme un « fonctionnaire honnête, laborieux et dévoué à ses devoirs », mais semble manquer de fermeté et de courage de ses opinions (Condette, 2006d).
En plus de sa ***Géométrie simplifiée*** **(Percin, 1842)**, qui sera rééditée plusieurs fois jusqu'en 1862, il a rédigé deux autres ouvrages de géométrie et d'arpentage.
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb10204995g). (Condette, 2006d).

PUILLE David (dit « d'Amiens ») (? – ?)


LEÇONS NORMALES
DE GÉOMÉTRIE
ÉLÉMENTAIRE, THÉORIQUE ET APPLIQUÉE,
A L'USAGE
DES DIVERS ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION PUBLIQUE,
COMPRENANT
Les Principes de la Mesure des Lignes, des Surfaces et des Corps,
avec tous les théorèmes qui s'y rapportent;
un très-grand nombre d'Applications relatives au Dessin linéaire, à l'Architecture, à l'Arpentage, au Levé des Plans, à la Cubature des Solides (régulaires et irréguliers), suivies immédiatement de leurs solutions raisonnées.
AUGMENTÉES
d'une Série d'Exercices et de Problèmes gradués à résoudre,
ET DE
300 DESSINS GRAVÉS SUR CUIVRE, INTERCALÉS DANS LE TEXTE.
Par D. PUILLE (d'Amiens),
PROFESSEUR DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE MATHÉMATIQUES A PARIS,
Auteur de plusieurs ouvrages classiques.
OUVRAGE RÉDIGÉ
Conformément au dernier Programme des Écoles normales primaires et à celui de l'Enseignement scientifique des Lycées et des Collèges.
PARIS
LIBRAIRIE CLASSIQUE ET ÉLÉMENTAIRE
DE CH. FOURAUT,
47, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 47.

Né à ?, mort à ?
Nous n'avons trouvé aucun élément biographique concernant Puille. D'après les couvertures de ses ouvrages, il se présente tantôt comme « arpenteur », tantôt comme « professeur de sciences physiques et de mathématiques à Paris » ou encore « professeur des sciences mathématiques appliquées ». Il apparaît aussi comme directeur ou fondateur de l'« école centrale du commerce, des arts et de l'industrie » à Paris, école dont nous n'avons pas non plus réussi à retrouver la trace. Il se désigne également sur certains de ses ouvrages comme « préparateur à l'École centrale des Arts et Manufactures et aux diverses Écoles du gouvernement ».
Il se désigne aussi comme « auteur de plusieurs ouvrages classiques », ce dont atteste sa longue bibliographie scolaire sur le catalogue de la BNF. Parmi ces ouvrages se trouvent ses « **Leçons normales de géométrie élémentaire théorique et appliquée » (Puille, 1855)** qui seront rééditées 20 fois entre 1855 et 1887.
Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/

Licence CC BY-NC-ND 3.0

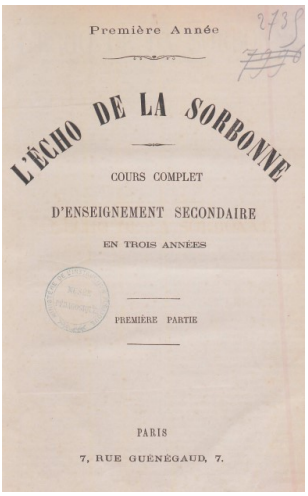
cb12386318z).

Rouché Eugène (1832 – 1910)



Né à Sommières (Gard), mort à Lunel (Hérault)
Mathématicien français, ce polytechnicien de la promotion 1852 a été professeur au lycée de Nantes et au lycée Charlemagne. Il assure également la fonction de répétiteur, puis plus tard examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Il occupe ensuite un poste de professeur de géométrie descriptive à l'École centrale, puis au Conservatoire National des Art et Métiers (Académie des sciences, 2013 ; Moussard, 2023, p. 165).
Il prépare son doctorat et soutient en 1858 deux thèses à la faculté des sciences de Paris. La première, porte sur l'analyse et la seconde sur la mécanique. Les recherches de Rouché sont variées et portent notamment sur la résolution de systèmes d'équations, donnant naissance au théorème de Rouché-Fontené, sur le calcul différentiel et intégral, sur l'analyse complexe, ou encore les probabilités. Enseignant estimé, il est aussi l'auteur de plusieurs livres de cours. En particulier, son ***Traité de géométrie élémentaire*** **(Rouché et Comberousse, 1866)**, co-écrit avec de Comberousse, est un succès éditorial, réédité de nombreuses fois jusqu'à la moitié du XX^{e} siècle.
Sources : (Académie des sciences, 2013 ; Moussard, 2023). Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb17357536r). Portrait : (Anonyme, 1870b).

Salicis Gustave (1818 – 1889)



Né sur l'île d'Aix (Charente-Maritime), mort à Paris (Seine)
Polytechnicien de la promotion 1838, Salicis entre dans l'armée comme capitaine, puis enseigne à l'École navale à partir de 1855, d'abord l'architecture navale, puis l'astronomie et la géodésie. et devient par la suite répétiteur à l'École Polytechnique. Il fonde en 1870 la Société de l'orphelinat de la Seine. Il milite pour faire introduire dans les écoles l'enseignement manuel. En 1881, il est chargé d'élaborer un projet d'école nationale mixte entre enseignement primaire supérieur et professionnel. Au début des années 1880, il est chargé d'une mission d'étude permettant d'introduire le travail manuel dans les ENP, sur le modèle de l'Allemagne et de la Suède. Il est nommé inspecteur général de l'Instruction

Licence CC BY-NC-ND 3.0

publique en 1884, poste auquel il poursuit l'organisation de l'enseignement du travail manuel dans les ENP et les EPS (Dubois, 2002h ; Havelange et al., 1986d ; Matasci, 2015).

En 1867, il appuie la campagne de Duruy pour la création d'un enseignement secondaire féminin, et fonde l'Association pour l'enseignement secondaire des filles, ainsi que les cours associés à la Sorbonne (Dubois, 2002h). Les cours de ***Géométrie élémentaire*** qu'il dispense aux jeunes filles dans ce cadre sont publiés dans le périodique *L'écho de la Sorbonne* **(Salicis, 1868, 1869)**.

Sources : Catalogue (Dubois, 2002h ; Havelange et al., 1986d ; Matasci, 2015).

SONNET Hippolyte (1802 – 1879)



Né à Nancy (Meurthe-et-Moselle), mort à Paris (Seine)

Sonnet étudie au collège royal de Strasbourg, puis entre à l'ENS en 1819, dont il sort agrégé des sciences en 1822. Suite à la suppression de l'École normale où il est en poste, il change de voie et poursuit une carrière dans la musique en tant que chef d'orchestre. Il revient à l'Instruction publique en 1837 en tant que suppléant au collège Saint-Louis (Dubois, 2002i ; Havelange et al., 1986e). Il publie alors sa ***Nouvelle géométrie théorique et pratique***, qui sera rééditée de nombreuses fois jusqu'à la fin du siècle **(Sonnet, 1839)**, ainsi que de nombreux autres ouvrages de géométrie élémentaire, analytique, ou de mathématiques appliquées.

Il obtient son doctorat ès sciences en 1840, et supplée alors Poncelet dans son cours de mécanique appliquée à la Sorbonne tout en enseignant la mécanique et l'analyse à l'École centrale des arts et manufactures. Il devient ensuite inspecteur de l'académie de Paris, de Versailles et de la Seine dans les années 1850, puis est chargé de missions d'inspection générale Louis (Dubois, 2002i ; Havelange et al., 1986e). En plus du *Dictionnaire de mathématiques pures et appliquées* qu'il publie en 1867 et qui comprend « les principales applications des mathématiques » (Sonnet, 1867), il contribue à l'écriture du *Dictionnaire de pédagogie* de Buisson en rédigeant de nombreux articles, notamment celui sur l'« Algèbre » (Sonnet, 1882) et celui sur l'« Arpentage » (Sonnet, 1887).

Sources : Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb12552216r). (Dubois, 2002i ; Havelange et al., 1986e). Portrait : (Anonyme, 1870c).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

TARNIER Étienne Auguste (1808 – 1882)

Né à Paris (Seine), mort à Paris (Seine)


ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE PRATIQUE
CONFORMES
AU PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL
(ANNÉE PRÉPARATOIRE, NUMÉRO),
A L'USAGE
DES ÉCOLES PRIMAIRES ET DES DIVERS ÉTABLISSEMENTS SCOLAIRES,
PAR E.-A. TARNIER,
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
1872

Tarnier est un mathématicien docteur ès sciences. Il occupe la chaire de mathématiques au collège Saint-Louis, qu'il abandonne pour devenir examinateur d'admission à l'école militaire de Saint-Cyr. Il échappe à la révocation suite à la guerre de 1848 grâce à l'appui des étudiants de l'école, et est réintégré à son poste suite à leur pétition (Tarnier, 1879). Il est nommé inspecteur de l'instruction primaire à Paris en 1856, poste qu'il occupera jusqu'à sa retraite en 1877.

A partir de 1850, il publie de nombreux éléments d'arithmétique, d'algèbre et de trigonométrie et fait paraître ses ***Éléments de géométrie pratique*** **(Tarnier, 1872)** en tant qu'inspecteur.

Sources : *BAIP*, (Tarnier, 1879). Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb124037196).

TERQUEM Olry (1782 – 1862)

Né à Metz (Moselle), mort à Paris (Seine)



Issu d'une famille juive, Terquem entre à l'École polytechnique en 1801. Il début sa carrière dans l'enseignement comme répétiteur de mathématiques dans cette école, avant d'être nommé professeur au lycée de Mayence. En 1814, Mayence n'étant plus française, il prend le poste de bibliothécaire du dépôt d'artillerie à Vincennes, qu'il gardera jusqu'à la fin de sa vie (Bruneau et Rollet, 2024c ; Delcourt, 2018).

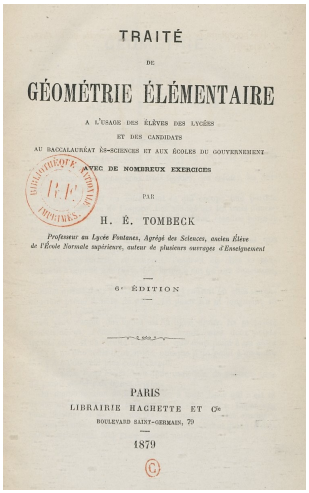
En 1828, il obtient le poste de professeur de sciences appliquées au Dépôt central de l'artillerie de Vincennes, qu'il occupe jusqu'à son décès. De 1828 à 1836, il publie en plusieurs éditions une série de manuels dans la collection Roret, qui regroupe des ouvrages à la fois pratiques et techniques mais aussi d'autres à vocation plus scientifique (Servier-Crouzat, 2020). Il fait paraître dans cette collection un *Manuel d'Algèbre*, un ***Manuel de Géométrie*** **(Terquem, 1829)** et un *Manuel de Mécanique* (Bruneau et Rollet, 2024b). Son ouvrage de géométrie se distingue par la volonté farouche de son auteur de connecter la géométrie élémentaire aux nouvelles notions de la géométrie moderne (Lorenat, 2019, p. 88-90).

Terquem se distingue par ailleurs par une activité mathématique intense. Docteur

Licence CC BY-NC-ND 3.0

en mathématiques dès 1812, il publie des articles dans divers journaux, comme le *Journal de Liouville*. En 1842, il crée avec Camille Gerono, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, revue intermédiaire qui paraît tous les mois jusqu'en 1927. Cette revue est officiellement destinée aux « candidats aux écoles polytechnique et normale » mais elle a en réalité un public bien plus large. Terquem y écrit lui-même de très nombreux articles, commente ceux des autres, et discute sur l'enseignement des mathématiques, tout en veillant à rendre les contenus accessibles pour les lecteurs étudiants (Boucard, 2020 ; Delcourt, 2018 ; Verdier, 2010).
Sources : (Boucard, 2020 ; Bruneau et Rollet, 2024c ; Delcourt, 2018 ; Lorenat, 2019 ; Servier-Crouzat, 2020 ; Verdier, 2010). Portrait : Portrait d'Olry Terquem présenté sur le site de « Maths in Metz » (https://we.ahp-numerique.fr/s/mathsinmetz/media/300).

TOMBECK Henri-Étienne (1827 – 1878)


TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
A L'USAGE DES ÉLÈVES DES LYCÉES
ET DES CANDIDATS
AU BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
AVEC DE NOMBREUX EXERCICES
PAR
H. É. TOMBECK
Professeur au Lycée Fontanes, Agrégé des Sciences, ancien Élève de l'École Normale supérieure, auteur de plusieurs ouvrages d'Enseignement
6e ÉDITION
PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79
1879

Né à Joinville (Haute-Marne), mort à Marseille (Bouches-du-Rhône)
Tombeck commence ses études au collège de Saint-Dizier et les termine au collège royal Charlemagne à Paris. Il entre à l'ENS en 1848, dont il ressort agrégé des sciences mathématiques. Il enseigne au lycée d'Amiens, de Mâcon, puis au lycée Bonaparte à Paris (Fèvre, 1879). En parallèle de sa carrière de professeur de mathématiques, Tombeck s'intéresse également beaucoup à la géologie ainsi qu'à l'astronomie (Fèvre, 1879 ; Véron, 2016).
Les qualités de Tombeck comme professeur de mathématiques sont reconnues par ses pairs. Il écrit de nombreux ouvrages d'enseignement en arithmétique, algèbre, trigonométrie, et géométrie. Son ***Traité de géométrie élémentaire*** publié initialement en 1872 sera réédité de nombreuses fois jusqu'à la fin du siècle **(Tombeck, 1879)**. Les qualités d'enseignant de Tombeck semblent directement liées à la qualité de ses manuels, comme en témoigne un rapport de 1853 indiquant : « Excellent professeur pour l'enseignement, très aimé et respecté des élèves. Son cours est rendu plus facile à suivre à l'aide des livres du professeur qui sont très répandus dans l'enseignement secondaire, surtout dans les établissements du clergé » (cité dans Véron (2016)).
Sources : (Fèvre, 1879 ; Véron, 2016). Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb129912041).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

VACQUANT Charles (Jean Baptiste) (1829 – 1895)



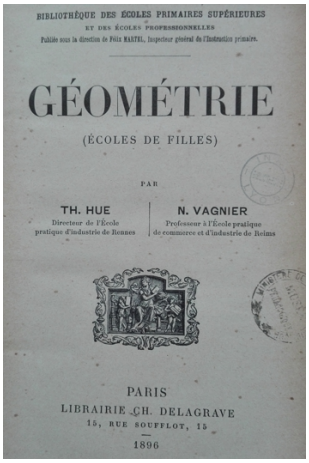
Né à Stenay (Meuse), mort à Paris (Seine)

Vacquant commence ses études en province et les termine au collège Bourbon à Paris. Bachelier ès lettres et ès sciences (1847 et 1849), il entre à l'ENS et en sort trois ans plus tard licencié de mathématiques et de physique. Il prépare alors l'agrégation et l'obtient en 1855, classé premier en sciences. Il commence sa carrière de professeur en tant que répétiteur à Douai, puis en tant que professeur adjoint au lycée Bonaparte, avant d'obtenir un poste en mathématiques spéciales au lycée Napoléon. En 1863, il est affecté au lycée Saint-Louis comme délégué à l'enseignement des mathématiques spéciales. Succédant à Briot à ce poste, il y restera pendant quinze ans. Il enseigne également à l'École centrale des arts et manufactures durant 30 ans et y occupe également la fonction d'examinateur (Havelange et al., 1986f).

Vacquant est l'auteur de nombreux ouvrages d'enseignement, principalement d'algèbre et de géométrie, publiés seul ou en collaboration avec Charles Briot. C'est le cas par exemple de leurs ***Eléments de géométrie*** **(Briot, 1863)**, partie « Application », parus en 1863.

Sources : (Havelange et al., 1986f). Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb121699026). Portrait : (Anonyme, 1870d).

VAGNIER (Jules-) Narcisse (-Henri) (1848 – 1923)



Né à Flize (Ardennes), mort à Angers (Maine-et-Loire)

Vagnier est mentionné comme élève au lycée de Versailles en 1867. Il entre à l'école pratique du commerce et de l'industrie de Reims à sa fondation en 1873, d'abord comme surveillant général et répétiteur de mathématiques, puis comme directeur d'internat. En 1882, il devient professeur de mathématiques dans cette école, chargé du cours spécial de préparation aux écoles d'Arts et Métiers. Il est décrit comme « adoré de ses élèves, aimé de ses collègues et hautement apprécié de ses chefs » (Inconnu, 1905).

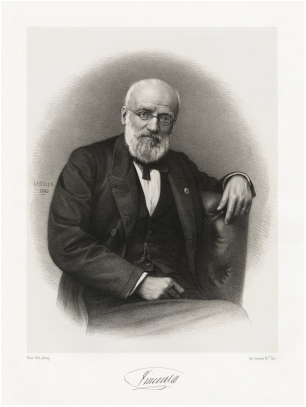
En collaboration avec Théophile Hue, il publie une ***Géométrie*** à l'usage des « écoles de filles » **(Hue et Vagnier, 1896)**. Il sera réédité de nombreuses fois, tout comme les autres manuels de géométrie et d'algèbre qu'ils co-éditent.

Sources : (Inconnu, 1905). Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:

Licence CC BY-NC-ND 3.0

/12148/cb17357536r).

VINCENT Alexandre (Joseph Hidulphe) (1797 – 1868)



Né à Hesdin (Pas-de-Calais), mort à Paris (Seine)

Vincent fait ses études dans des collèges de Douai et d'Amiens, puis obtient l'agrégation de sciences en 1820. A l'École normale, il a des professeurs prestigieux comme Lacroix, Francœur et Hachette. Il enseigne ensuite la physique et les mathématiques au lycée de Reims, puis est nommé à Paris au collège Rollin, puis au collège Bourbon et enfin à Saint-Louis, où il deviendra professeur de mathématiques spéciales et terminera sa carrière.

Mathématicien et musicologue érudit, Vincent participe activement aux séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, dans laquelle il est reçu en 1850 : il est mentionné dans 27 comptes-rendus s'étalant de 1857 à 1867, sur des sujets très divers touchant à la musique, aux mathématiques et à son histoire, notamment à la période antique (site Persée). Il publie également des mémoires mathématiques et des articles dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* puis dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (site Numdam).

Son ***Cours de géométrie élémentaire***, dont la première édition paraît en 1826, rencontre le succès et est réédité de nombreuses fois **(Vincent, 1844)**. L'auteur signale notamment que « plusieurs professeurs [se sont] empressés d'en faire le texte de leurs leçons » (Moussard, 2023, p. 134). Sa particularité en tant qu'auteur est qu'il intègre de nombreux problèmes à résoudre dans ses manuels et qu'il n'hésite pas à y insérer progressivement des nouvelles connaissances développées en géométrie (Lorenat, 2019, p. 84-85).

Sources : (Lorenat, 2019 ; Moussard, 2023). Catalogue de la BNF (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb12169177w), site Persée (https://www.persee.fr/authority/174396), site Numdam (http://www.numdam.org/).

Portrait : « Alexandre Joseph Hidulphe Vincent, 1865-1866 », portrait réalisé par Lasnier, édité par Lemercier, Paris, 1866.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

B

Table des figures

Sommaire

Table des figures 705

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Table des figures

1 Schéma générique expliquant le mode de représentation d'une interface 27

I.1 Cours d'électricité dans une EPS de garçons de Clermont-Ferrand (1899), à gauche (Inconnu, 1899) et cours de physique pour jeunes filles au lycée Racine (1890), à droite (Inconnu, 1890) 45

I.2 Schéma montrant en quoi les objectifs de l'enseignement de la géométrie des aires sont à l'interface des ordres primaire et secondaire 50

I.3 Schéma montrant en quoi les contenus des programmes relatifs à la géométrie des aires sont à l'interface des différents domaines mathématiques 52

I.4 Schéma montrant comment les contenus sur les aires des programmes se situent par rapport aux publics qu'ils concernent 56

I.5 Schéma synthétisant le rôle d'interface de la géométrie des aires entre les domaines mathématiques et les publics au sein des programmes officiels 58

I.6 Exemple de catégories internes à la section « Mathématiques » de la table systématique de la *BF* (Bibliographie de la France, 1811-1990, année 1848) 62

I.7 Entrée pour le *Cours de trigonométrie rectiligne* de Henri-Étienne Tombeck (1827-1878). Source : *BF*, 1898, 85ème année, 2ème série, volume XLII, p. 283 (Bibliographie de la France, 1811-1990, année 1898) 63

I.8 Évolution du nombre de manuels de géométrie français publiés au cours du temps 66

I.9 Répartition des auteurs de manuels de géométrie par statuts professionnels et institutionnels déclarés 70

I.10 Tableau et diagramme de Venn associés à la répartition des manuels suivant les ordres d'enseignement qu'ils concernent 76

Licence CC BY-NC-ND 3.0

I.11 Auteurs ayant le plus d'ouvrages publiés entre 1811 et 1902, longévité et prolificité éditoriales 84
I.12 Ouvrages présentant le plus de rééditions entre 1811 et 1902, dates d'édition et longévité éditoriale 89
I.13 Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie sont à l'interface des catégories de leurs auteurs et publics 92
I.14 Schéma montrant en quoi les contenus sur les aires sont à l'interface des manuels de géométrie d'arpentage, d'arithmétique et de dessin linéaire 100
I.15 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des références, euclidienne ou non, pour les manuels d'enseignement . 105
I.16 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des objectifs pédagogiques, utilitaires ou théoriques, suivant les publics concernés 112
I.17 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des méthodes géométriques, analytique et synthétique 117
I.18 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des méthodes d'enseignement du primaire et du secondaire 123
I.19 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des territoires concernés par les débats sur l'enseignement de la géométrie au cours du siècle 124
I.20 Répartition des titres suivant la mention des termes « théorie », « pratique », « application » et leurs dérivés 132
I.21 Répartition des titres suivant leurs liens exprimés avec des pratiques professionnelles comme l'arpentage, le dessin, la mesure, le système métrique, l'industrie, les arts et métiers 132
I.22 Répartition des titres suivant l'approche géométrique descriptive, projective ou analytique affichée 133
I.23 Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie comprenant notamment des savoirs sur les aires sont à l'interface des approches géométriques, des branches de la discipline, de ses applications au monde professionnel et de ses méthodes d'enseignement 137

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.1 Chronologie des systèmes d'autorisation ou de veto pour les livres classiques des ordres primaires et secondaires de l'enseignement public et privé au XIXe siècle, fondée sur (Choppin, 1986 ; Fortoul, 1855 ; Rouland, 1858b ; Wallon, 1875) 149
II.2 Lettre adressée par Bailly à la commission pour l'admission de sa *Réforme de la géométrie* (extraits d'un lettre de trois pages) (dossier F/17/2784 des *AN*) 157
II.3 Rapport de Sonnet au Ministre après examen de l'ouvrage *Réforme de la géométrie* de Bailly (extraits d'un rapport de deux pages) (dossier F/17/2784 des *AN*) 158
II.4 Schéma montrant en quoi les exigences pesant sur les manuels de géométrie, notamment au sujet des aires, sont à l'interface des institutions des livres classiques et des auteurs des ouvrages. Les doubles flèches matérialisent, dans un sens, les contraintes imposées par les membres des commissions pour la rédaction des ouvrages, et dans l'autre, les réponses que leur apportent les auteurs à travers le fond et la forme de leurs écrits, avec succès ou non. 160
II.5 Rapport effectué par Serret sur les *Applications de la géométrie élémentaire* d'Amiot en 1861 (extraits) 164
II.6 Procès-verbal de la commission concernant la *Géométrie simplifiée* de Percin en 1862, décision de rejet après un avis défavorable de Serret 166
II.7 Schéma montrant en quoi la réception des manuels de géométrie, notamment au sujet des aires des aires, est à l'interface des institutions des livres classiques, des auteurs et des usagers des ouvrages . . 169
II.8 Carte des académies en France durant le XIXe siècle, réalisée par Sylvain Audel, géomaticien à l'IGN, à partir d'une carte muette des départements français de 1884 (*(France muette)* 1884) 171
II.9 Extrait de la liste des ouvrages scolaires admis par les conférences cantonales du Jura pour l'année scolaire 1883-1884, catégorie « géométrie, arpentage » (F/17/11652) 172
II.10 Extrait de la liste des livres classiques qui peuvent être mis en usage dans les écoles de Charente pour l'année scolaire 1886-1887, catégories « calcul et arithmétique » et « géométrie » (F/17/11654) 173

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.11 Extrait de la liste des ouvrages scolaires recommandés par la Commission de l'Allier pour l'année scolaire 1883-1884, série E (F/17/11652) 174
II.12 Répartition des ouvrages de géométrie mentionnés dans les listes départementales (figurant dans les listes d'au moins 5 départements) de 1882 à 1889, par académie 181
II.13 Répartition géographique des occurrences des ouvrages des auteurs les plus cités dans les listes 184
II.14 Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, notamment à travers leurs mentions dans les listes départementales (1882 – 1889), sont à l'interface des professionnels et usagers de l'éducation et des territoires géographiques, avec des tendances temporelles . 194
II.15 Frise montrant la répartition temporelle des ouvrages du corpus sur la période d'étude. Cette frise figure en plus grande taille en annexe (p. 666) 204
II.16 Diagramme du réseau de citation des auteurs des manuels du corpus vers d'autres acteurs scientifiques, réalisé avec la fonction « bipartite.mapping » du logiciel R 208
II.17 Diagramme en grilles des citations communes aux auteurs des manuels du corpus, réalisé avec la fonction « ggplot » du logiciel R . . 212
II.18 Réseau en cercle des intercitations des auteurs des manuels du corpus, réalisé avec la fonction « ggplot » et la configuration « layout in circle » du logiciel R 217
II.19 Réseaux personnels de Legendre et de Dupin, réalisé avec la fonction « make ego graph » du logiciel R 217
II.20 Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, notamment à travers les citations et intercitations qu'ils contiennent, sont à l'interface des acteurs scientifiques mentionnés, de leurs auteurs et de leurs conceptions de l'enseignement de la géométrie 219
II.21 Diagrammes en boîtes représentant les médianes et quartiles des principales données quantitatives relevées pour les 40 manuels du corpus, réalisés à l'aide de la fonction « boxplot » du logiciel R . . . 223
II.22 Plan des variables de l'ACP des données quantitatives associées aux 40 manuels du corpus, réalisé à l'aide de la fonction « PCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra » . 226

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.23 Plan des individus de l'ACP des données quantitatives associées aux 40 manuels du corpus, réalisé à l'aide de la fonction « PCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra » . 226
II.24 Regroupement des individus en « clusters » suivant la CAH réalisée à l'aide de la fonction « hclust » du logiciel R à partir de l'ACP des données quantitatives associées aux 40 manuels du corpus 230
II.25 Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, à travers certaines de leurs caractéristiques (volume global, poids des aires) sont à l'interface de leurs publics, leurs succès éditoriaux, et leur approche de l'enseignement de la géométrie, et l'évolution suivie selon leurs périodes de publication 234
II.26 Plan des individus de l'ACM associées aux 40 manuels du corpus réalisé à l'aide de la fonction « MCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra » – Note : la décennie 1810-1820 n'est pas représentée car aucun titre du corpus n'y a été publié 236
II.27 Plan des variables de l'ACM associée aux 40 manuels du corpus réalisé à l'aide de la fonction « MCA » du logiciel R, associé aux packages « FactomineR » et « factoextra » 237
II.28 Regroupement des individus en « clusters » suivant la CAH réalisée à l'aide de la fonction « hclust » du logiciel R à partir de l'ACM des données qualitatives associées aux 40 manuels du corpus 240
II.29 Schéma montrant en quoi les manuels de géométrie, à travers leurs contenus sur les aires, sont à l'interface des publics, des conceptions de la géométrie et de son enseignement, et de la reconnaissance institutionnelle, éditoriale ou encore de terrain 245
II.30 Heatmap des catégories d'énoncés de savoir recensés dans les manuels du corpus (en %), réalisée à l'aide de la fonction « pheatmap » du package du même nom sur le logiciel R 257
II.31 Heatmap des énoncés de savoir recensés dans les manuels du corpus (en %) suivant leur caractère théorique ou pratique (calcul ou construction) réalisée à l'aide de la fonction « pheatmap » du package du même nom sur le logiciel R 260
II.32 Dendrogramme et classification générés suivant les énoncés sur les aires présents dans les manuels (d'occurrences supérieures ou égales à 10), réalisés par AFC puis CAH sur le logiciel R 263

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.33 Schéma montrant les tendances des groupes de manuels de géométrie constitués en termes de publics ciblés, de réception dans le monde éducatif et d'orientations prises par leurs auteurs quant à l'enseignement de la géométrie, avec des tendances temporelles . 267
II.34 Rapport des triangles et parallélogrammes (et donc des rectangles) de même hauteur dans le livre VI des *Éléments* d'Euclide (1994, p. 155) 271
II.35 Figure associée au problème de l'aire du rectangle dans les *Métriques* de Héron d'Alexandrie (2014, p. 150) 272
II.36 Diagramme semi-temporel montrant l'évolution du nombre d'énoncés associés à l'aire du rectangle dans les ouvrages du corpus ainsi que le nombre de preuves 280
II.37 Diagramme montrant la répartition des items associés à l'aire du rectangle dans les ouvrages du corpus 281
II.38 Schéma montrant en quoi le cas de l'aire du rectangle, à travers son contexte historique, sa place dans les programmes et les contenus associés dans les manuels, est à l'interface des approches qui lui sont réservées, des connaissances qui lui sont liées et des publics concernés 284
II.39 Évolution du nombre d'énoncés et de types de preuves concernant le théorème de Pythagore dans les livres du corpus en fonction du temps 290
II.40 Recensement des énoncés, corollaires et preuves du théorème dans les livres du corpus qui traitent du théorème, en fonction des auteurs et du temps – Note : « Cor » est l'abréviation pour « corollaire » . . 291
II.41 Extrait de l'article de Henri André sur la « figure du carré de l'hypoténuse », publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, (H. André, 1846) 297
II.42 Schéma montrant en quoi le théorème de Pythagore, à travers sa place dans les programmes et les contenus associés dans les manuels, est à l'interface des activités de recherche et d'enseignement, ainsi que des publics concernés, avec des tendances temporelles . 299
II.43 Diagramme semi-temporel montrant l'évolution du nombre d'énoncés associés aux aires curvilignes dans les ouvrages du corpus, par catégorie de figures 308

Licence CC BY-NC-ND 3.0

II.44 Diagramme montrant la répartition des énoncés associés aux aires curvilignes dans les ouvrages du corpus, par catégorie de figures – Note : « Curv. » est l'abréviation pour « curviligne » et « constr. » pour « construction » 309
II.45 Répartition des énoncés associés aux aires curvilignes dans les ouvrages du corpus, avec indication sur leur fréquence ou leur rareté dans le temps parmi les ouvrages du corpus – Note : « Curv. » est l'abréviation pour « curviligne » et « constr. » pour « construction » . 310
II.46 Schéma montrant en quoi les aires curvilignes, à travers leur place dans les programmes et les contenus associés dans les manuels, sont à l'interface des domaines mathématiques et des publics concernés, en lien avec les programmes d'enseignement dont ils dépendent 314

III.1 Figure de l'empilement des rectangles 333
III.2 Figure de la grille chez Dupin (1828, pl. vi^e leçon) 334
III.3 Explicitation des unités de surface dans le système décimal chez Briot et Vacquant à travers la figure de la grille carrée (Briot et Vacquant, 1859, p. 48) 336
III.4 Figure de la grille rectangulaire étendue aux dimensions non entières (mais décimales) chez Cirodde (1858, pl. viii) 337
III.5 Figures évolutives des rectangles chez Desnanot (1835, pl. ii) . . . 337
III.6 Codage des figures évolutives des rectangles chez Desnanot (1835) 338
III.7 Calcul de l'aire d'un rectangle par bandes chez Gimelli (1841, 35-36, pl. 2) 341
III.8 Figure de décomposition de l'aire d'un rectangle en bandes dans un cahier d'élève au XIX^e siècle (Desvoisins, cahier de géométrie manuscrit, CALAMES 1R208280) 341
III.9 Schéma montrant en quoi les preuves de l'aire du rectangle par empilement ou avec une grille sont à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement 342
III.10 Figure associée à la proposition 47 des *Éléments* d'Euclide (1990, p. 283) 348
III.11 Figure associée à la preuve du théorème de Pythagore chez Legendre (1823, pl. iv), sous sa forme initiale à gauche, et sous forme annotée par nos soins à droite 350

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.12 Figure liée à la preuve du théorème de Pythagore chez Lacroix (1808, pl. vi) 351
III.13 Figures associées à la preuve du théorème de Pythagore 352
III.14 Extrait de la preuve du théorème de Pythagore par Terquem (1829, 104, pl. II), figure associée initiale, puis figure avec mise mise en évidence des égalités d'aires en couleur par nos soins (à droite) . . 355
III.15 Figure associée à la preuve du théorème de Pythagore par Percin (1842, pl. 2), avec mise mise en évidence des égalités d'aires en couleur par nos soins (à droite) 356
III.16 Figure associée à la première preuve du théorème de Pythagore par Leyssenne (1890, p. 249), avec mise en évidence des égalités de hauteur et des rectangles « parasites » introduits en couleurs par nos soins (à droite) 358
III.17 Figure associée à la seconde preuve du théorème de Pythagore par Leyssenne (1890, p. 250), avec mise en évidence en couleurs des égalités des quadrilatères par nos soins 359
III.18 Figures associées à la preuve du théorème de Pythagore 360
III.19 Configuration permettant de prouver le théorème de Pythagore chez Salicis (1869, p. 567) 362
III.20 Configurations permettant de prouver le théorème de Pythagore . . 363
III.21 Schéma montrant en quoi les preuves du théorème de Pythagore par égalité d'aires sont à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement 367
III.22 Figure associée à la preuve de la propositon XII.2 des *Éléments* d'Euclide (2001, p. 265) 370
III.23 Figure associée à la preuve du lemme IV.10. des *Éléments* de Legendre (1823, pl. 765) 371
III.24 Construction pas à pas, réalisée à la main par nos soins, de la figure associée à la preuve du lemme IV.10. des *Éléments* de Legendre . 372
III.25 Figure associée à la preuve du théorème IV. 11. des *Éléments* de Legendre (1823, pl.7) 374
III.26 Schéma montrant en quoi les preuves du théorème de Pythagore par égalité d'aires sont à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement 376
III.27 Figure associée à la preuve de la formule de l'aire de l'ellipse dans l'ouvrage de Cirodde (1858, pl.xii) 378

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.28 Figure de l'ellipse comme projection d'un cercle sur un plan (Tombeck, 1879, p. 433) . . . 379
III.29 Configurations utilisées dans la preuve de Tombeck (ellipse comme projection d'un cercle sur un plan) . . . 380
III.30 Figure intermédiaire dans le plan permettant de comprendre un chaînon déductif (similitude des triangles POM et FOK) . . . 381
III.31 Schéma montrant en quoi la preuve de l'aire de l'ellipse est à l'interface des constructions géométriques et du raisonnement . . . 382
III.32 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface de la nature et des fonctions des figures qu'elles engagent . . . 386
III.33 Figures accompagnant les théorèmes de rapport des aires des rectangles semblables . . . 390
III.34 Figures accompagnant les théorèmes de rapport des aires des triangles semblables . . . 392
III.35 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires des figures semblables est à l'interface des concepts mobilisés et des schémas choisis pour les représenter . . . 395
III.36 Figure du corollaire du théorème de Pythagore sur la diagonale d'un carré . . . 396
III.37 Figure de l'application de la méthode des carreaux en dessin chez Sonnet (1839, pl. 15) . . . 397
III.38 Figure de l'application de la méthode des carreaux en dessin chez Bos (1884, p. 144) . . . 398
III.39 Figures associées à l'énoncé du théorème de Pythagore généralisé aux polygones semblables . . . 399
III.40 Figures associées à la construction de la somme de carrés . . . 401
III.41 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires, à travers les questions d'agrandissement/réduction et d'arithmétisation des aires, est à l'interface des concepts mobilisés et des schémas choisis pour les représenter . . . 403
III.42 Figures associées à l'arpentage d'un terrain polygonal . . . 406
III.43 Figures associées à l'arpentage d'un terrain délimité en partie par une ligne courbe (chemin, rivière) . . . 407
III.44 Planche en couleur d'un terrain objet d'un exercice d'arpentage chez Lamotte (1839, p. 137) . . . 408
III.45 Figure du théorème de Pythagore avec quadrillage et en puzzle . . . 410

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.46 Illustration de la preuve du théorème de Pythagore par les équerres chez Dalsème (1880, p. 18) 411
III.47 Illustration des preuves 412
III.48 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires, à travers les images figuratives qu'elle emploie, est à l'interface des concepts enseignés et des schémas et/ou images qui les illustrent 413
III.49 Figures associées à la quadrature du rectangle 419
III.50 Figures associées à la construction d'un triangle équivalent à un polygone quelconque donné 420
III.51 Figures associées aux quadratures et constructions de figures équivalentes chez Leyssenne (1890, p. 256-257) 424
III.52 Figure associée à la quadrature d'un polygone quelconque chez Girod (1893, p. 192), les étapes de construction étant matérialisées par des lignes en pointillés 425
III.53 Figures accompagnant la méthode de quadrature du cercle approchée 429
III.54 Figures accompagnant la quadrature approchée du cercle 430
III.55 Quadrature approchée du cercle par la méthode de Cirodde (1858, pl. vii) 431
III.56 Quadrature approchée du cercle (202) et construction d'un cercle équivalent à un carré (203) chez les Frères des écoles chrétiennes (L.C. et F.P.B., 1840, pl. 16) 432
III.57 Figure pour arpenter un terrain délimité en partie par une courbe . 436
III.58 Figure pour arpenter un terrain délimité par une ligne courbe chez Gimelli (1841, pl. 2) 438
III.59 Figure pour arpenter un terrain délimité par une ligne courbe chez Lamotte (1839, pl. 3) 439
III.60 Différentes figures pour évaluer une surface délimitée par une ligne courbe, suivant ses particularités, chez Cirodde (1858, pl. vii) . . . 441
III.61 Représentations de parcelles arpentées dans des cahiers d'élèves – Source : Musée de l'Education à Rouen. Cotes respectives : 1996.01702 (Poudenas) et 1979.31015 (Boyveau) 442
III.62 Schéma montrant en quoi la mesure des aires des terrains délimités par des lignes courbes est à l'interface des activités théoriques et pratiques de la géométrie des aires, sur le terrain ou sur le papier . 442

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.63 Schéma montrant en quoi les constructions de la géométrie des aires sont à l'interface du monde réel, de la production scientifique et des savoirs enseignables à des élèves 446
III.64 Schéma montrant la position de la grandeur « aire » à l'interface des différents domaines des programmes de mathématiques du primaire et du secondaire 450
III.65 Schéma déductif concernant l'aire du rectangle chez Terquem (1829), avec légende 455
III.66 Mise en regard des schémas déductifs concernant l'aire du rectangle de Vincent, Rouché et Girod (1893 ; 1866 ; 1844) - Le segment entre les énoncés 2 et 3 dans le schéma de Rouché et Comberousse indique que l'énoncé 5 découle dans ce cas des énoncés 2 et 3 pris conjointement 457
III.67 Schéma déductif concernant l'aire du rectangle chez Sonnet (1839) 458
III.68 Mise en parallèle des schémas déductifs concernant l'aire du rectangle de Puille, André et Bovier-Lapierre 460
III.69 Schéma montrant en quoi l'aire du rectangle est à l'interface des traditions géométriques de la comparaison et de la mesure 461
III.70 Schéma montrant en quoi les aires curvilignes (cercle, ellipse) sont à l'interface des traditions géométriques de la comparaison et de la mesure 464
III.71 Figure de Legendre accompagnant la preuve de l'énoncé 6 (les rectangles sont entre eux comme les produits de leurs longueurs par leurs largeurs) à partir du 5 (Legendre, 1823, pl. 4) 466
III.72 **(c)** chez Idoux (1842, pl. iv) 467
III.73 Figures illustrant la preuve de la proposition de l'énoncé 6 467
III.74 Figure illustrant les preuves des propositions des énoncés 6 et 1 chez Vincent (1844, pl. vii) 468
III.75 Proposition 23 du livre VI des *Éléments* d'Euclide (1994, p. 214) . . 469
III.76 Figure permettant de déduire l'énoncé 1 de l'énoncé 5 chez Percin (1842, pl. 2) 469
III.77 Énoncé et figure de la quadrature du rectangle chez Girod (1893, p. 192) 470
III.78 Preuves de l'énoncé 6 par l'utilisation de ratios et par produit de rapports 471

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.79 Schéma montrant en quoi les énoncés concernant l'aire du rectangle sont à l'interface des approches par comparaison et par le mesure . 473
III.80 Preuve de Lacroix par les triangles semblables (Lacroix, 1808, p. 47-48) 474
III.81 Schéma déductif des propositions menant aux six preuves du théorème de Pythagore chez Mauduit (1790) : les doubles flèches désignent des propositions qui, connectées entre elles, en impliquent d'autres, les flèches simples correspondent à des implications, les cases en jaune aux différentes expressions du théorème de Pythagore, et celles en rose aux théorème respectivement de Héron (263) et Ptolémée (266). Chaque proposition est alignée horizontalement avec le titre du chapitre dans lequel elle figure 478
III.82 Énoncé de la propriété des cordes permettant la preuve du théorème de Pythagore et figure associée à cette preuve chez Mauduit (1790, p. 164, 176). 481
III.83 Schéma montrant en quoi les diverses preuves du théorème de Pythagore sont à l'interface de la géométrie des aires et de la géométrie du semblable 483
III.84 Figure illustrant la formule de l'aire du rectangle chez Bézout (1848, pl. iii) 487
III.85 Frise résumant les caractéristiques des différentes périodes concernant la formulation de la règle de calcul de l'aire du rectangle 494
III.86 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface de la géométrie, de l'algèbre et de l'arithmétique, à travers les concepts et le langage qu'elle mobilise 499
III.87 Tableau indiquant les relations entre la toise et ses subdivisions chez Mauduit (1790, p. 351) 503
III.88 Tableau indiquant les relations entre la toise carrée et ses subdivisions chez Mauduit (1790, p. 352) 503
III.89 Opération posée permettant le calcul de l'aire d'un rectangle dans les anciennes unités de mesure chez Mauduit (1790, p. 353) 504
III.90 Principe de décomposition du rectangle à toiser chez Terquem (1829, p. 95) 505
III.91 Opération détaillée ligne par ligne puis posée chez Terquem (1829, p. 96-97) 506
III.92 Unités intermédiaires et conversions chez Terquem (1829, p. 93-94), avec schéma explicatif 506

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.93 Méthode de calcul de l'aire du rectangle par réduction à l'unité commune chez Desnanot (1835, p. 47) 507
III.94 Calcul de l'aire du rectangle par la méthode des parties aliquotes chez Sonnet (1839, p. 235) 510
III.95 Deux problèmes de sciage de bois, l'un avec une pièce bien équarrie (260) et l'autre non (261) chez Lamotte (1839, p. 169-170) 512
III.96 Schéma montrant en quoi les calculs d'aires de rectangle sont à l'interface de l'ancien et du nouveau système de mesure 514
III.97 Construction en lien avec la preuve du théorème de Pythagore chez Desnanot (1835, pl. vii). 515
III.98 Extrait de la preuve de Desnanot du théorème de Pythagore (Desnanot, 1835, p. 124) 516
III.99 Schéma résumant les liens logiques dans la preuve arithmético-géométrique de Desnanot 517
III.100 Extrait du manuel de Desnanot (partie « contruction des figures égales ») avec la section 106 en caractères de taille normale (niveau de lecture ne nécessitant que les règles élémentaires d'arithmétique), les sections 107 et 108 en petits caractères (niveau de lecture intermédiaire avec comme pré-requis supplémentaires la proportionnalité et la racine carré), et la remarque précédée d'un astérisque, d'un niveau de lecture supérieur (les pré-requis ne sont pas précisés par l'auteur) (Desnanot, 1835, p. 75) 518
III.101 Schéma montrant en quoi la preuve arithmético-géométrique de Desnanot est à l'interface des applications numériques et du raisonnement géométrique 520
III.102 Calcul de l'aire d'un terrain délimité par une ligne courbe chez Lancelot (1833, p. 38) 521
III.103 Calcul de l'aire d'un terrain délimité par une ligne courbe chez Briot et Vacquant (1862, 67-68, pl. ii) 522
III.104 Schéma montrant en quoi les techniques d'arpentage des terrains sont à l'interface des calculs numériques et des constructions géométriques 523
III.105 Opération posée pour calculer l'aire d'un cercle de diamètre 21 pieds chez Lancelot (1833, p. 39) 528
III.106 Opération posée pour extraire une racine carrée chez Bergery (1828, p. 391) 529

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.107 Multiplication abrégée chez Bourget pour déterminer l'aire d'un cercle (Bourget, 1885, p. 159) 530
III.108 Calcul du rayon d'un cercle d'aire donnée par les opérations abrégées 530
III.109 Calcul de l'aire d'un cercle de deux autres manières chez Lancelot (1833, p. 40) 532
III.110 Bilan des erreurs relatives suivant l'approximation de π, avec et sans correction, chez Guilmin (1882, compl. 23) 536
III.111 Comparaison de deux calculs d'aires d'un cercle de rayon $2,567$ chez Guilmin (1882, compl. 26) 537
III.112 Calcul de l'aire d'un cercle de rayon $3,84\ m$ (en haut), puis du rayon d'un cercle d'aire donnée (en bas) chez Guilmin (1882, p. 154-155) 538
III.113 Principe de la multiplication abrégée expliquée sur un exemple chez Bourget (1885, p. 111) 540
III.114 Schéma montrant en quoi la détermination des aires curvilignes est à l'interface de l'arithmétique et de la géométrie 541
III.115 Figures illustrant les preuves des théorèmes généralisés dans les triangles d'angles aigus et obtus (Amiot, 1859, p. 157) 544
III.116 Enoncés, scholies et figures relatives aux propositions des carrés construits sur des sommes ou différences de lignes chez Legendre (1823, 69-70, pl. IV) 545
III.117 Extrait de la preuve de la formule de Héron chez Cirodde (1836, p. 199) 547
III.118 Extrait de la preuve de la formule de Héron chez Sonnet (1839, p. 282-283) 548
III.119 Extrait de la preuve de la formule de Héron chez Vincent (1844, p. 263) 549
III.120 Schéma montrant en quoi les preuves du théorème de Pythagore généralisé et de la formule de Héron sont l'interface de l'algèbre et de la géométrie 551
III.121 Début d'algébrisation de la proposition donnant l'aire du cercle . . . 552
III.122 Manipulations algébriques de la formule de l'aire du cercle 553
III.123 Manipulations algébriques de la formule de l'aire du cercle 554
III.124 Détermination du rayon d'un cercle connaissant son aire 555
III.125 Détermination de l'expression de l'aire du cercle en fonction de sa circonférence 556
III.126 Manipulations algébriques autour de l'aire du cercle chez Bos (1884, p. 110-111) 557

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.127 Manipulations algébriques autour de l'aire du cercle chez Girod (1893, p. 207-208) . . . 558
III.128 Figure relative au calcul de l'aire d'un domaine délimité par une courbe quelconque chez Bergery (1828, pl. xiv) . . . 559
III.129 Formule simplifiée de l'aire d'un domaine délimité par une courbe quelconque chez Sonnet (1839, 230-231, pl. 21) . . . 560
III.130 Formules simplifiées de l'aire d'un domaine délimité par une ligne courbe . . . 561
III.131 Formule induite de l'aire d'un domaine délimité par une ligne courbe chez Tarnier (1872, p. 314-315) . . . 562
III.132 Schéma montrant en quoi les aires curvilignes sont à l'interface de l'algèbre et de la géométrie . . . 563
III.133 Application numérique avec logarithmes de la formule de Héron chez Vincent (1844, p. 263) . . . 566
III.134 Calculs relatifs à l'aire du cercle par les logarithmes . . . 567
III.135 Calculs relatifs à l'aire du cercle par les logarithmes chez Briot et Vacquant (1863, p. 162) . . . 567
III.136 Schéma montrant en quoi les calculs d'aires avec logarithmes sont à l'interface de l'algèbre, de l'arithmétique et de la géométrie . . . 569
III.137 Théorème de Pythagore dans le cas d'un triangle rectangle isocèle et conséquence sur la nature du nombre $\sqrt{2}$ chez Eysseric et Pascal (1850, p. 103) . . . 574
III.138 Schéma montrant en quoi l'incommensurabilité est à l'interface des publics des manuels de géométrie et de leurs objectifs pédagogiques 581
III.139 Début de la preuve de l'énoncé 5 dans le cas incommensurable par Legendre (1823, 64, pl. 4) . . . 582
III.140 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des grandeurs et des nombres . . . 586
III.141 Frise résumant l'évolution des contenus liés à la question de la quadrature du cercle et de la nature de π dans les manuels du corpus, parallèlement aux développements scientifiques de ces notions . . . 590
III.142 Schéma montrant en quoi la géométrie des aires est à l'interface des problèmes de nature des nombres et de construction géométrique, ainsi qu'à l'interface des pratiques de recherche et d'enseignement 591
III.143 Schéma reprenant l'ensemble des interfaces présentées dans le chapitre III.2 . . . 596

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.144 Extraits des preuves de la propriété des grandeurs proportionnelles 603
III.145 Extrait de la preuve de l'énoncé 5 chez Rouché et Comberousse (1866, p. 276-277) 604
III.146 Schéma montrant en quoi la preuve de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable est à l'interface de la géométrie, de l'arithmétique et de l'analyse 605
III.147 Extraits de la définition des rapports de grandeurs incommensurables et de la preuve de l'énoncé 5 chez Cirodde 608
III.148 Extrait de la preuve de l'énoncé 5 dans la cas incommensurable chez Vincent (1844, p. 170-171) - La section 118 mentionnée traite de la proportionnalité des angles au centre avec les arcs qui leur correspondent (Vincent, 1844, p. 87-88), et la section 182 du partage d'un trapèze par une parallèle à sa base en segments proportionnels (Vincent, 1844, p. 144) 609
III.149 Extrait de la preuve de l'énoncé 5 dans le cas incommensurable avec passage à la limite chez Tombeck (1879, p. 218) 612
III.150 Frise résumant l'évolution des notions d'infiniment petits et de limites relativement à l'aire du rectangle dans le cas incommensurable dans les manuels du corpus, avec comme repères la définition de la notion de limite par Cauchy (1821) et l'introduction de la méthode des infiniment petits dans les programmes 614
III.151 Second schéma montrant en quoi la preuve de l'aire du rectangle dans le cas incommensurable est à l'interface de la géométrie, de l'arithmétique et de l'analyse 615
III.152 Figure servant de support à la proposition sur le cercle vu comme limite d'un polygone chez Bézout (1848, pl. ii) 618
III.153 Le cercle comme limite des polygones inscrits et circonscrits chez Lacroix (1808, 97, pl. v) 620
III.154 Formule de l'aire du cercle obtenue par passage direct à la limite . 624
III.155 Preuve de la formule de l'aire du cercle chez Terquem (1829, p. 215) 626
III.156 Extrait de la preuve du cercle vu comme limite des polygones inscrits et circonscrits chez Tombeck (1879, p. 235) 627
III.157 Extrait de la preuve de la formule de l'aire du cercle chez Tombeck (1879, p. 236) 627
III.158 Schéma montrant en quoi l'aire du cercle est à l'interface de la géométrie, de l'analyse infinitésimale et de l'algèbre 629

Licence CC BY-NC-ND 3.0

III.159 Détermination d'une aire curviligne quelconque par la méthode des trapèzes chez Guilmin (1882, compl.117-118) 633
III.160 Présentation de la méthode de Poncelet chez Guilmin (1882, compl.118) 634
III.161 Présentation de la méthode de Simpson chez Guilmin (1882, compl.119-120) 635
III.162 Formules abrégées de Simpson, en haut, et Poncelet, en bas, chez Rouché et Comberousse (1873, p. 294-295) 637
III.163 Figure associée à la formule de Poncelet chez Rouché et Comberousse (1873, p. 294) 638
III.164 Frise résumant l'évolution des méthodes d'approximation des aires curvilignes dans les manuels du corpus, en parallèle des avancées du domaine scientifique sur la question 639
III.165 Schéma montrant en quoi les aires curvilignes quelconques sont à l'interface de la géométrie, des travaux manuels, de l'analyse infinitésimale, de l'algèbre et de l'arithmétique 640
III.166 Figure et conclusion de la preuve de l'aire de l'ellipse chez André (1879, p. 301-302) 643
III.167 Figures associées à la preuve de l'aire de l'ellipse 644
III.168 Figure et preuve de l'aire du segment parabolique chez Cirodde (1858, 383, pl.xiii) 645
III.169 Figures associées à la preuve de l'aire du segment parabolique . . 646
III.170 Figure associée à la preuve de l'aire du segment parabolique chez Tombeck (1879, p. 461) 647
III.171 Calculs algébriques au cours de la preuve de l'aire du segment parabolique chez Tombeck (1879, p. 461) 648
III.172 Frise résumant l'évolution des méthodes de calcul des aires délimitées par des sections coniques dans les manuels du corpus, en parallèle des avancées du domaine scientifique sur la question . . . 649
III.173 Schéma montrant en quoi les aires des sections coniques sont à l'interface de la géométrie, de l'analyse infinitésimale et de l'algèbre 651
III.174 Schéma reprenant l'ensemble des interfaces présentées dans le chapitre III.3 652

A.1 Frise montrant la répartition temporelle des ouvrages du corpus sur la période d'étude 666

Licence CC BY-NC-ND 3.0

A.2 Bilan de l'appartenance des manuels du corpus aux groupes des trois classifications de la section II.2.2. Les manuels appartenant aux trois mêmes groupes dans toutes les classifications sont surlignés de la même couleur dans la première colonne 667

Licence CC BY-NC-ND 3.0

C

Références bibliographiques

Sommaire

Documents d'archives 725
Ouvrages du corpus 725
Sources primaires 729
Sources secondaires 744

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Documents d'archives

Dossiers relatifs aux « livres classiques » des *Archives Nationales*. Cotes : F/17/2208-2208-2210, F/17/2784, F/17/2785, F/17/2787, F/17/2788, F/17/2789, F/17/2791, F/17/2794, F/17/6682, F/17/6684, F/17/6694, F/17/6885, F/17/6892, F/17/11652, F/17/11653, F/17/11654 et F/17/11655

Desvoisins, XIX^e^ siècle, cahier de géométrie manuscrit, cote dans le catalogue CALAMES : 1R208280, consulté à la *Bibliothèque Diderot* de Lyon

Poudenas Eugène, 1885, cahier d'élève manuscrit, cote 1996.01702, Musée de l'Éducation (Rouen)

Boyveau, Gustave, 1856, cahier d'élève, cote 1979.31015, Musée de l'Éducation (Rouen)

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Ouvrages du corpus

AMIOT Alphonse (1859), *Éléments de géométrie*, 5e éd., Paris, Dezobry et Magdeleine.

ANDRÉ Philippe (1879), *Éléments de géométrie : à l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréat ès lettres et des élèves de l'enseignement spécial*, 10e éd., Paris, André-Guédon.

BERGERY Claude Lucien (1828), *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers*, 2e éd., Metz, Thiel.

BERT Paul (1886), *Premiers Éléments de géométrie expérimentale appliquée à la mesure des longueurs, des surfaces et des volumes*, Paris, C. Delagrave.

BÉZOUT Étienne (1848), *Éléments de géométrie de Bézout*, Jacques Frédéric SAIGEY (éd.), Paris, Hachette.

BOS Henri (1875), *Géométrie élémentaire : contenant les matières indiquées par les programmes officiels... pour l'enseignement de la géométrie dans les classes de lettres*, Paris, Hachette.

– (1884), *Notions de géométrie plane : conforme aux programmes de 1882, pour l'enseignement secondaire des jeunes filles. 3e année*, Paris, Hachette.

BOURGET Justin (1885), *Cours de géométrie à l'usage des élèves de l'enseignement spécial, des élèves des écoles normales et des écoles primaires supérieures*, 3e éd., Paris, Belin.

BOVIER-LAPIERRE Gaspard (1879), *Géométrie élémentaire exposée dans ses applications au dessin linéaire et à la mesure des surfaces et des volumes*, Paris, André-Guédon.

BRIOT Charles (1863), *Éléments de géométrie. Théorie.* 2e éd., Paris, Hachette.

BRIOT Charles et VACQUANT Charles (1859), *Arpentage, levé des plans et nivellement*, Paris, Hachette.

– (1862), *Éléments de géométrie : application*, 3e éd., Paris, Hachette.

CIRODDE Paul-Louis (1858), *Leçons de géométrie ; suivies de Notions élémentaires de géométrie descriptive*, 3e éd., Paris, Hachette.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

DALSÈME Jules (1880), *Éléments de takymétrie (géométrie naturelle) : à l'usage des instituteurs primaires, des écoles professionnelles, des agents des travaux publics, etc...* 3e éd., Paris, Belin.

DESNANOT Pierre (1835), *Pratique du toisé géométrique, ou Géométrie pratique*, Clermont-Ferrand, Thibaut-Landriot.

DUPIN Charles (1828), *Géométrie et méchanique des arts et métiers et des beaux-arts. Cours normal... professé au Conservatoire royal des arts et métiers. Tome premier : Géométrie*, 2e éd., Paris, Bachelier.

DUPUIS Jean (1857), *Traité de géométrie appliquée, d'arpentage et de dessin linéaire*, 5e éd., Paris, C. Delagrave.

EYSSERIC Antoine-Dominique et PASCAL Joseph-Casimir (1850), *Traité de géometrie theorique et pratique, contenant toutes les questions du programme du Baccalauréat ès-Lettres, suivi de 500 problèmes*, 3e éd., Paris, Langlois et Leclercq.

GIMELLI Louis (1841), *Leçons d'arpentage*, Arles, D. Garcin.

GIROD Félicien (1893), *Cours de géométrie théorique et pratique : à l'usage des lycées et des collèges*, 11e éd., Paris, André-Guédon.

GUILMIN Adrien (1882), *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des lycées et collèges et de tous les établissements d'instruction publique suivi de notions sur les courbes usuelles et renfermant un très grand nombre d'exercices proposés de géométrie pure et appliquée*, 22e éd., Paris, Alphonse Picard.

HARANT Henri (1863), *Géométrie appliquée aux arts et aux métiers*, Paris, Larousse et Boyer.

HUE Th. et VAGNIER N. (1896), *Géométrie (écoles de filles)*, Bibliothèque des écoles primaires supérieures et des écoles professionnelles publié sous la direction de Félix Martel, Paris, C. Delagrave.

IDOUX Auguste-J. (1842), *Nouveaux éléments de géométrie spécialement destinés aux élèves qui se préparent au baccalauréat ès-lettres et aux Écoles militaires*, Paris, J. Delalain.

L.C. et F.P.B. (1840), *Abrégé de géométrie pratique appliquée au dessin linéaire, au toisé et au levé des plans, avec les principes de l'architecture et de la perspective*, 12e éd., Paris, Moronval.

LACROIX Sylvestre-François (1808), *Élémens de géométrie : à l'usage de l'école centrale des quatre-nations*, Paris, Courcier.

LAMOTTE Louis (1839), *Traité élémentaire d'arpentage et de lavis des plans*, 5e éd., Paris, Hachette.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

LANCELOT (1833), *Nouveau traité d'arpentage et de toisé, avec des tables de conversions de mesures anciennes et nouvelles : suivi de figures raisonnées sur l'arpentage, le toisé ...* 8e éd., Troyes, Laloy.

LEGENDRE Adrien-Marie (1823), *Éléments de géométrie, avec des notes*, 12e éd., Paris, Firmin Didot.

LEYSSENNE Pierre (1890), *Traité de géométrie théorique et pratique*, Paris, Armand Colin.

MAUDUIT Antoine-René (1790), *Lecons de Géométrie théorique et pratique*, Paris, chez l'auteur.

MÉRAY Charles (1874), *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, Savy.

PERCIN Jules (1842), *Géométrie simplifiée... suivie de notions de trigonométrie, d'arpentage, accompagnée d'une table des sinus naturels, à l'usage des collèges et des écoles primaires supérieures*, 2e éd., Nancy, Grimblot, Raybois et Cie.

PUILLE David (1855), *Leçons normales de géométrie élémentaire théorique et appliquée*, Paris, Ch. Fouraut.

ROUCHÉ Eugène et COMBEROUSSE Charles de (1866), *Traité de géométrie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars.

SALICIS (1868), « Géométrie élémentaire, Première Année », *L'écho de la Sorbonne : moniteur de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, vol. 1 et 2. Cours complet d'enseignement secondaire en trois années, rédigé conformément au programme des Cours de la Sorbonne, publié en fascicules numérotés de 1 à 156 le mardi, jeudi et samedi de chaque semaine.

– (1869), « Géométrie, Deuxième Année », *L'écho de la Sorbonne : moniteur de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, vol. 3 et 4. Cours complet d'enseignement secondaire en trois années, rédigé conformément au programme des Cours de la Sorbonne, publié en fascicules numérotés de 1 à 156 le mardi, jeudi et samedi de chaque semaine.

SONNET Hippolyte (1839), *Nouvelle géométrie théorique et pratique contenant de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, au lever des plans, à la gnomonique, à la perspective, aux ombres, à la cristallographie, à la mécanique, etc., et les premiers éléments de géométrie descriptive ; suivie d'un appendice sur les centres de gravité et rédigée d'après la méthode des infiniments petits*, Paris, Hachette.

TARNIER Etienne Auguste (1872), *Éléments de géometrie pratique conformes au programme de l'enseignement secondaire spécial*, Paris, Gauthier-Villars.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

TERQUEM Olry (1829), *Manuel de géométrie, ou Exposition élémentaire des principes de cette science ... à l'usage des personnes privées des secours d'un maître*, Paris, Roret.

TOMBECK Henri-Étienne (1879), *Traité de géométrie élémentaire : à l'usage des élèves des lycées et des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles du gouvernement*, 6e éd., Paris, Hachette.

VINCENT Alexandre-Joseph-Hidulphe (1844), *Cours de géométrie élémentaire*, 5e éd., Paris, Bachelier.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Sources primaires

(France muette) (1884), Paris.

AMIOT Alphonse (1850), *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*, Paris, Dezobry et Magdeleine.

– (1859), *Éléments de géométrie*, 5e éd., Paris, Dezobry et Magdeleine.

ANDRÉ Henri (1846), « Quelques observations relatives à la figure du carré de l'hypoténuse », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 5, no 1, p. 324-331.

ANDRÉ Philippe (1875), *Nouveau cours de géométrie*, 7e éd., Paris, André-Guédon.

– (1879), *Éléments de géométrie : à l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréat ès lettres et des élèves de l'enseignement spécial*, 10e éd., Paris, André-Guédon.

– (1895), *Nouveau cours de géométrie*, 22e éd., Paris, E. André fils.

ANDRÉ Philippe et HAILLECOURT Alfred (1872), *Arithmétique à l'usage des classes élémentaires*, 3e éd., Paris, André-Guédon.

ANONYME (1870a), *M. de Comberousse (Cours de mécanique appliquée) : (caricature).* Album de portraits de professeurs de l'École Centrale.

– (1870b), *M. Rouché (Cours de géométrie descritptive) : (caricature).* Album de portraits de professeurs de l'École Centrale.

– (1870c), *M. Sonnet (Cours d'analyse infinitésimale) : (caricature).* Album de portraits de professeurs de l'École Centrale.

– (1870d), *M. Vacquant (Cours d'analyse infinitésimale) : (caricature).* Album de portraits de professeurs de l'École Centrale.

ARCHIMÈDE (1807), « De la quadrature de la parabole », in François PEYRARD (éd.), *Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement, avec un commentaire, par F. Peyrard*, Paris, François Buisson, p. 318-347.

BARDIN G. (1862), *Cours de dessin industriel*, Paris, Lacroix.

BARRÉ Jean-Ambroise (1839), *Géométrie en action, ou Éléments de géométrie appliquée aux arts*, Angers, Cosnier et Lachèse.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

BERGERY Claude Lucien (1828), *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers*, 2e éd., Metz, Thiel.

– (1837), *Géométrie des écoles primaires*, 3e éd., Metz, Thiel.

BERT Paul (1886), *Premiers Éléments de géométrie expérimentale appliquée à la mesure des longueurs, des surfaces et des volumes*, Paris, C. Delagrave.

BÉZOUT Étienne (1770), *Cours de mathématiques, à L'usage du corps royal de L'ertillerie : contenant l'arithmétique, la géométrie & la trigonométrie rectiligne*, Paris, Imprimerie Royale.

– (1779), *Théorie générale des équations algébriques*, Paris, Ph.- D. Pierres.

– (1848), *Éléments de géométrie de Bézout*, Jacques Frédéric SAIGEY (éd.), Paris, Hachette.

BIBLIOGRAPHIE DE LA FRANCE (1811-1990), *Bibliographie de la France : ou Journal général de l'imprimerie et de la librairie*, sous la dir. d'Adrien-Jean-Quentin BEUCHOT, Paris, Pillet.

BLATIN-MAZELHIER (1859), « Éloge historique de M. Desnanot, ancien recteur », *Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Clermont-Ferrand*, vol. 32, p. 141-163.

BOS Henri (1872), *Arithmétique élémentaire à l'usage de tous les établissements d'instruction primaire*, Paris, C. Delagrave.

– (1875), *Géométrie élémentaire : contenant les matières indiquées par les programmes officiels... pour l'enseignement de la géométrie dans les classes de lettres*, Paris, Hachette.

– (1881), *Éléments de géométrie*, Paris, Hachette.

– (1884), *Notions de géométrie plane : conforme aux programmes de 1882, pour l'enseignement secondaire des jeunes filles. 3e année*, Paris, Hachette.

BOUILLET Marie-Nicolas (1866), *Dictionnaire universel d'histoire et de géographie*, vol. 2, Paris, Hachette.

BOURDON Pierre Louis Marie (1825), *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, Bachelier.

– (1831), *Élémens d'algèbre*, 6e éd., Paris, Bachelier.

BOURGET Justin (1885), *Cours de géométrie à l'usage des élèves de l'enseignement spécial, des élèves des écoles normales et des écoles primaires supérieures*, 3e éd., Paris, Belin.

BOVIER-LAPIERRE Gaspard (1879), *Géométrie élémentaire exposée dans ses applications au dessin linéaire et à la mesure des surfaces et des volumes*, Paris, André-Guédon.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

BOYER Auguste (1854), *Cours élémentaire de dessin linéaire et d'arpentage*, 8e éd., Paris, Larousse et Boyer.

BRIOT Charles (1863), *Éléments de géométrie. Théorie.* 2e éd., Paris, Hachette.

BRIOT Charles et VACQUANT Charles (1859), *Arpentage, levé des plans et nivellement*, Paris, Hachette.

– (1862), *Éléments de géométrie : application*, 3e éd., Paris, Hachette.

BUISSON Ferdinand (1878), « L'enseignement intuitif. (Conférence faite à la Sorbonne aux instituteurs délégués à l'Exposition) », *Revue pédagogique*, vol. 2, no 2, p. 447-468.

– (1882), « Intuition et méthode intuitive », *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Partie 2, Tome 1*, p. 1374-1377, réd. par Ferdinand BUISSON.

– (1911), « Bert (Paul) », *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*. Consultation de l'édition électronique : réd. par Ferdinand BUISSON, http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/document.php?id=2173.

BURAT Émile (1875), *Cours d'arithmétique élémentaire, à l'usage des écoles primaires et des classes de grammaire des lycées et collèges*, Paris, Belin.

CAMUS Charles-Étienne-Louis (1750), *Cours de mathématique . Seconde partie. Élémens de géométrie théorique et pratique*, Paris, Auguste Durand.

CAUCHY Augustin-Louis (1821), *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique ; 1re partie. Analyse algébrique*, Paris, Debure frères.

CEULEN Ludolf van (1615), *Fundamenta arithmetica et geometrica*, Lyon, Georgius Abrahami a Marsse.

CHARDON Clair-Adolphe (1859), *Traité pratique d'arithmétique et de géométrie*, 12e éd., Paris, Hachette.

CHASLES Michel (1847), « Sur l'enseignement de la géométrie supérieure. Discours d'introduction au Cours de Géométrie supérieure fondé à la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris. Séance d'ouverture, le 22 décembre 1846 », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 12, p. 1-40.

– (1870), *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris, Imprimerie nationale.

CHEVILLIET Isidore (1874), « Sur le degré d'exactitude de la formule de Simpson, relative à l'évaluation approchée des aires », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 78, p. 1841-1843.

– (1875), « Sur l'erreur de la formule de Poncelet relative à l'évaluation des aires », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 80, p. 823-826.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

CICÉRON Marco Tulio (1839), *Oeuvres complètes de Cicéron : De la nature des dieux*, Paris, C.L.F. Panckoucke.

CIRODDE Paul-Louis (1836), *Leçons de géométrie théorique et pratique : adoptées par l'Université*, Paris, Hachette.

– (1853), *Leçons d'arithmétique*, 11e éd., Paris, Hachette.

– (1858), *Leçons de géométrie ; suivies de Notions élémentaires de géométrie descriptive*, 3e éd., Paris, Hachette.

CLAIRAUT Alexis Claude (1741), *Élémens de géométrie*, Paris, David Fils.

– (1852), *Éléments de géométrie de Clairaut : réimprimés conformément aux indications des nouveaux programmes officiels*, Jacques Frédéric SAIGEY (éd.), Paris, Hachette.

CLAVIUS Christophorus (1574), *Euclidis elementorum libri I*, Rome, Apud Vicentium Accoltum.

COMBEROUSSE Charles de (1860), *Cours de mathematiques. Tome 1, Arithmetique, Algèbre élémentaire*, Paris, Mallet-Bachellier.

– (1862), *Cours de mathematiques. Tome 3, Géométrie analytique plane et dans l'espace, Éléments de géométrie descriptive*, Paris, Mallet-Bachellier.

COMBETTE Eugène Charles (1886), *Arithmétique, système métrique et géométrie usuelle*, Paris, Picard-Bernheim.

D'ALEMBERT Jean le Rond (1757), « Géométrie », *Encyclopédie, ou : Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, vol. 7, p. 629-639, Denis DIDEROT (éd.).

DALSÈME Jules (1880), *Éléments de takymétrie (géométrie naturelle) : à l'usage des instituteurs primaires, des écoles professionnelles, des agents des travaux publics, etc...* 3e éd., Paris, Belin.

– (1882), *Premières notions de takymétrie (géométrie intuitive) : à l'usage des écoles primaires*, Paris, Belin.

DARBOUX Gaston et HOUËL Jules (1874), « Revue des publications périodiques », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, vol. 7, p. 106-141.

DARBOUX Gaston, HOUËL Jules et TANNERY Jules (1878), « Revue des publications académiques et périodiques », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, vol. 2, no 2, p. 5-292.

– (1884), « Seconde partie, revue des publications académiques et périodiques », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, vol. 2, no 8, p. 5-214.

DESNANOT Pierre (1835), *Pratique du toisé géométrique, ou Géométrie pratique*, Clermont-Ferrand, Thibaut-Landriot.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

DOLIVET Charles (1859), *Nouveau manuel du métrage et du cubage des solides et des bois : suivi des comptes faits pour mesurer les bois carrés et les bois en grume*, Saintes, Fontanier.

DULAC Henri et CORBY M. (1835), *Almanach des 25000 adresses des principaux habitans de Paris*, 28e année, Paris, Panckoucke.

DUPIN Charles (1828), *Géométrie et méchanique des arts et métiers et des beaux-arts. Cours normal... professé au Conservatoire royal des arts et métiers. Tome premier : Géométrie*, 2e éd., Paris, Bachelier.

DUPUIS Jean (1857), *Traité de géométrie appliquée, d'arpentage et de dessin linéaire*, 5e éd., Paris, C. Delagrave.

DURUY Victor (1863a), « Arrêté et programmes relatifs à l'enseignement scientifique des lycées », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 14, no 165, p. 235-268.

– (1863b), « Circulaire et programmes pour l'enseignement professionnel », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 14, no 166, p. 325-361.

– (1867), « Personnel du lycée de Bourg ; des collèges de Belfort, Mulhouse, Provins », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 8, no 148, p. 114.

EUCLIDE (1990), *Les éléments*, trad. par Bernard VITRAC, vol. 1, Paris, Presses Universitaires de France. Traduits du texte de Heiberg.

– (1994), *Les éléments*, trad. par Bernard VITRAC, vol. 2, Paris, Presses Universitaires de France. Traduits du texte de Heiberg.

– (1998), *Les éléments*, trad. par Bernard VITRAC, vol. 3, Paris, Presses Universitaires de France. Traduits du texte de Heiberg.

– (2001), *Les éléments*, trad. par Bernard VITRAC, vol. 4, Paris, Presses Universitaires de France. Traduits du texte de Heiberg.

EUDES Alexandre (1856), *Éléments de géométrie. Géométrie appliquée*, Paris, Victor Dalmont.

– (1857), *Éléments de géométrie. Géométrie pure*, Paris, Victor Dalmont.

EYSSERIC Antoine-Dominique et PASCAL Joseph-Casimir (1850), *Traité de géometrie theorique et pratique, contenant toutes les questions du programme du Baccalauréat ès-Lettres, suivi de 500 problèmes*, 3e éd., Paris, Langlois et Leclercq.

EYSSÉRIC Antoine-Dominique (1855), *Notions de géométrie pratique et d'arpentage à l'usage des élèves qui passent de l'école primaire aux champs ou à l'atelier*, Paris, Langlois et Leclercq.

F.J. (1896), *Exercices de géométrie : comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*, 3e éd., Tours, Paris, Alfred Mame et fils, Ch. Poussielgue.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

F.P.B. [BRANSIET] Mathieu (1853), *Nouveau traité d'arithmétique décimale : contenant toutes les opérations ordinaires du calcul, les fractions, l'extraction des racines, le système métrique, divers problèmes sur le titre des monnaies, les changes, les principes pour mesurer les surfaces et la solidité des corps, etc. : enrichi d'un grand nombre de problèmes à résoudre pour servir d'exercice aux élèves*, 42e éd., Tours, Mame et fils.

– (1872), *Extrait de l'abrégé du cours de géométrie appliqué au dessin linéaire*, Paris, Ch. Poussielgue.

FAURE G. (1844), *Éléments de géométrie*, Clermont, impr. de Thibaud-Landriot frères.

– (1845), *Mémoire sur la réforme de l'enseignement de la géométrie ou se trouve la solution de plusieurs questions réputées insolubles*, Paris, Bachelier.

FERRY Jules (1879), « Ouvrages en usage dans les écoles communales », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 22, no 442, p. 431-433.

FÈVRE Justin (1879), « Nécrologie (Henri Tombeck, mathématicien et géologue) », *Revue de Champagne et de Brie : histoire, biographie, archéologie, documents inédits, bibliographie, beaux-arts*, vol. 7.

FILON Gabriel-François (1911), *Turgot (écoles)*, Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire - L'édition électronique, http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/document.php?id=3755 (visité le 20/08/2024).

FINCK Pierre-Joseph-Étienne (1838), *Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment petits*, Strasbourg, Paris, Dérivaux, Mathias, Lagny frères.

FINCK Pierre-Joseph-Étienne et LEFEBURE DE FOURCY Louis (1845), « Correspondance relative aux examens de Strasbourg », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 4, p. 584-587.

FORTOUL Hippolyte (1852), « Programmes annexés au plan d'études des lycées », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 3, no 32.

– (1855), « Règlement pour l'approbation des livres destinés aux établissements publics d'enseignement », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 6, no 72, p. 321-322.

FRANCŒUR Louis-Benjamin (1819), *Le dessin linéaire d'après la méthode de l'enseignement mutuel*, Paris, Louis Colas.

– (1839), *Dessin linéaire et arpentage pour toutes les écoles primaires, quel que soit le mode d'instruction qu'on y suit*, 4e éd., Paris, Louis Colas, et Bachelier.

– (1845), *Traité d'Artithmétique*, Paris, Bachelier.

GARNIER Jean-Guillaume (1836), *Élémens d'algébre*, Dijon, Paris, Douiller, Hachette.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

GERGONNE Joseph Diez (1810-1811), « Prospectus », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, vol. 1, p. i-iv.

GILLET-DAMITTE Jean-Jacques-Julien (1837), *Méthode élémentaire et pratique d'arpentage, de division des terres et de lever des plans*, Paris, Louis Colas.

GIMELLI Louis (1841), *Leçons d'arpentage*, Arles, D. Garcin.

GIRAUD Charles (1851), « Liste chronologique et officielle des ouvrages d'enseignement supérieur et secondaire, approuvés de 1802 au 1er septembre 1850 », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 2, n° 14.

GIROD Félicien (1893), *Cours de géométrie théorique et pratique : à l'usage des lycées et des collèges*, 11e éd., Paris, André-Guédon.

GIROD Félicien et CANONVILLE J. Thomy (1880), *Cours de mathématiques appliquées : à l'usage des élèves des écoles normales primaires, des écoles professionnelles, des écoles primaires supérieures et de l'enseignement spécial*, Paris, André-Guédon.

GODIMUS Zéphir-Joseph (1857), *L'arpentage à sa plus simple expression : contenant des notions élémentaires sur le lever et le lavis des plans et suivi d'une planche coloriée, ouvrage mis à la portée des jeunes gens qui ne suivent pas de cours spéciaux de géométrie*, Paris, Belin.

GRESSE Albert (1882), « Imagerie scolaire », *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Partie 1, Tome 2*, p. 1320-1322, sous la dir. de Ferdinand BUISSON.

GUDERMANN Charles (1852), « Théorème de Pythagore, sphérique », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 1, n° 11, p. 409-412.

GUILMIN Adrien (1853), *Cours complet d'arithmétique à l'usage des lycées et colléges et de tous les établissements d'instruction publique*, 3e éd., Paris, Auguste Durand.

– (1854), *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des lycées et colléges et de tous les établissements d'instruction publique : conforme aux derniers programmes officiels, suivi de notions sur le levé des plans et l'arpentage*, Paris, Auguste Durand.

– (1858), *Cours de mathematiques appliqueés : levé de plans, arpentage, nivellement, notions de geometrie descriptive*, Paris, Auguste Durand.

– (1859), *Cours de géometrie élémentaire a l'usage des lycées et des colléges et de tous les établissements d'instruction publique*, 5e éd., Paris, Auguste Durand.

– (1864), *Cours élémentaire de géométrie, à l'usage des classes de lettres à partir de la quatrième inclusivement,... complété par des notions sur l'arpentage, la mesure des hauteurs et le levé des plans*, 4e éd., Paris, Auguste Durand.

– (1880), *Cours de géométrie élémentaire*, 20e éd., Paris, Alphonse Picard.

– (1882), *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des lycées et collèges et de tous les établissements d'instruction publique suivi de notions sur les courbes usuelles*

Licence CC BY-NC-ND 3.0

et renfermant un très grand nombre d'exercices proposés de géométrie pure et appliquée, 22e éd., Paris, Alphonse Picard.

HARANT Henri (1863), *Géométrie appliquée aux arts et aux métiers*, Paris, Larousse et Boyer.

HÉMENT Félix et DALSÈME Jules (1874), *Premières notions de géométrie*, Paris, C. Delagrave.

HERON d'Alexandrie (2014), *Metrica*, trad. par Fabio ACERBI et Bernard VITRAC, Pise, Fabrizio Serra Editore.

HILBERT David (1900), *Les principes fondamentaux de la géométrie*, trad. par Léonce LAUGEL, Paris, Gauthier-Villars.

HOFFMANN Johann Joseph Ignatz I. (1821), *Der Pythagorische Lehrsatz mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen versehen. 2. verb. u. verm. Ausg*, Mainz, Kupferberg.

HUE Th. et VAGNIER N. (1896), *Géométrie (écoles de filles)*, Bibliothèque des écoles primaires supérieures et des écoles professionnelles publié sous la direction de Félix Martel, Paris, C. Delagrave.

IDOUX Auguste-J. (1842), *Nouveaux éléments de géométrie spécialement destinés aux élèves qui se préparent au baccalauréat ès-lettres et aux Écoles militaires*, Paris, J. Delalain.

INCONNU (1890), *Cours de physique au Lycée Racine.* Les collections du Musée national de l'Éducation.

– (1899), *École primaire supérieure professionnelle de Clermont-Ferrand - Une manipulation d'électricité - Section pratique d'industrie.* Les collections du Musée national de l'Éducation.

– (27 oct. 1905), « Un jubilé », *L'Indépendant rémois*.

JULLY Alexis (1898), *Éléments de Géométrie Expérimentale*, Paris, Belin frères.

L.C. et F.P.B. (1840), *Abrégé de géométrie pratique appliquée au dessin linéaire, au toisé et au levé des plans, avec les principes de l'architecture et de la perspective*, 12e éd., Paris, Moronval.

L'HOSPITAL Guillaume-François-Antoine de (1696), *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, Imprimerie Royale.

LACROIX Sylvestre-François (1804), *Élémens d'algèbre, à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations*, 4ème, Paris, Courcier.

– (1805), *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, Paris, Courcier.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

LACROIX Sylvestre-François (1807a), *Traité élémentaire d'arithmétique, à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations*, 7e éd., Paris, Courcier.
– (1807b), *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, Courcier.
– (1808), *Élémens de géométrie : à l'usage de l'école centrale des quatre-nations*, Paris, Courcier.
– (1855), *Éléments de géométrie*, 17e éd., Paris, Mallet-Bachelier.
LAGARRIGUE Ferdinand (1880), *Notions de mécanique expérimentale et de géométrie pratique*, Paris, P. Dupont.
LAGOUT Édouard (1872), *Panorama de la Géométrie. Tachy-métrie. Géometrie en trois leçons*, 2e éd., Paris, Nogent-sur-Seine, Librairies Scolaires et chez l'auteur.
– (1874), *Tachymétrie géométrie concrète en trois leçons accessible, inaccessible, incalculable : cahier d'un soldat du génie. Rédaction des conférences faites par ordre du ministère de la guerre à l'Ecole régimentaire du génie de Versailles*, Paris, Nogent-sur-Seine, Librairies scolaires et chez l'auteur.
– (1878), *Méthode takimétrique : le prompt-savoir, réforme de l'éducation intellectuelle par les sciences exactes*, 2e éd., Paris, P. Dupont et Dentu.
LAISANT Charles-Ange (1901), « Une exhumation géométrique », *L'enseignement mathématique*, vol. 3.
LAMOTTE Louis (1830), *Cours méthodique de dessin linéaire et de géométrie usuelle applicable à tous les modes d'enseignement*, Paris, Hachette.
– (1835), *Le Dessin linéaire des demoiselles, avec les applications à l'ornement et à la composition, à la broderie, au dessin des schalls, aux fleurs et au paysage*, Paris, Hachette.
– (1839), *Traité élémentaire d'arpentage et de lavis des plans*, 5e éd., Paris, Hachette.
LANCELOT (1833), *Nouveau traité d'arpentage et de toisé, avec des tables de conversions de mesures anciennes et nouvelles : suivi de figures raisonnées sur l'arpentage, le toisé ...* 8e éd., Troyes, Laloy.
LAROUSSE Pierre (1872), *Grand dictionnaire universel du XIXe siècle : français, historique, géographique, mythologique, bibliographique*, vol. 8, Paris, Administration du grand Dictionnaire universel.
– (1874), *Grand dictionnaire universel du XIXe siècle : français, historique, géographique, mythologique, bibliographique*, vol. 11, Paris, Administration du grand Dictionnaire universel.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

LEFEVRE A. (1803), *Nouveau traité géométrique de l'arpentage, à l'usage des personnes qui se destinent à la mesure des terreins et à la levée des plans. Tome premier*, Paris, Duprat.

LEFORT Francisque (1867), « Un savant chrétien — J.-B. Biot », *Le correspondant : recueil périodique : religion, philosophie, politiques, sciences, littérature, beaux-arts*, vol. 72, p. 955-995.

LEFRANC Emile et JEANNIN G. (1876), *Manuel du baccalauréat ès lettres, rédigé d'après les programmes officiels de 1874 prescrits pour les examens*, 45e éd., Paris, J. Delalain et fils.

LEFRANC Émile et JEANNIN G. (1864), *Nouveau manuel des aspirants au baccalauréat ès lettres, rédigé conformément au programme officiel*, 36e éd., Paris, J. Delalain.

LEGENDRE Adrien-Marie (1794), *Éléments de géométrie*, 1re éd., Paris, Firmin Didot.

– (1823), *Éléments de géométrie, avec des notes*, 12e éd., Paris, Firmin Didot.

LEYSSENNE Pierre (1875), *La deuxième année d'arithmétique*, Paris, Armand Colin.

– (1882a), « Géométrie », *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Partie 1, Tome 1*, p. 1162-1166, sous la dir. de Ferdinand BUISSON.

– (1882b), « Problèmes », *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Partie 1, Tome 2*, p. 2440-2447, sous la dir. de Ferdinand BUISSON.

– (1889), *La troisième année d'arithmétique (deuxième semestre)*, Paris, Armand Colin.

– (1890), *Traité de géométrie théorique et pratique*, Paris, Armand Colin.

LORENZ Otto Henri, JORDELL Daniel et STEIN Henri (1867), *Catalogue général de la librairie française*, vol. 1, Paris, O. Lorenz.

MARTIN P. et BRIOT Charles (1853), *Géométrie élémentaire, théorique et pratique, contenant un grand nombre d'applications à l'arpentage*, Paris, Dezobry et Magdelaine.

MAUDUIT Antoine-René (1790), *Lecons de Géométrie théorique et pratique*, Paris, chez l'auteur.

MÉLINGE J.-M. (1875), *Tachymétrie, ou l'Arpentage rapide et facile et la trigonométrie à la portée de tous*, Paris, Boyer.

MÉRAY Charles (1874), *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, Savy.

MICHAUD Louis-Gabriel (1843), *Biographie universelle ancienne et moderne : histoire par ordre alphabétique de la vie publique et privée de tous les hommes*, nouvelle, vol. 27, Paris, Leipzig, Mme C. Desplaces, F. A. Brockaus.

MICHUY G. (1864), *Récréations mathématiques, physiques et chimiques, précédées de la quadrature du cercle, prouvée expérimentalement de huit manières différentes*, Gien, Dubreuil.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES CULTES (1851), « Liste officielle des ouvrages qui ont été autorisés depuis l'année 1802 jusqu'au 1er septembre 1850, pour le service de l'instruction primaire, avec indication de la date de l'autorisation », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 2, nº 17.

– (1866), « Programmes », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 5, nº 104, p. 649-801.

MOREL Auguste (1899), « Bibliographie - Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques », *Le cosmos : revue des sciences et de leurs applications*, Nouvelle série, vol. 41, p. 667-668.

MOUQUET Pierre-Stanislas (1866), *Traité pratique de la mesure des lignes, des surfaces et des volumes, ouvrage renfermant en deux parties 60 problèmes d'application résolus, 400 problèmes à résoudre*, Rouen, Herpin.

MÜLLER Johann Wolfgang (1819), *Systematische Zusammenstellung der wichtigen bisher bekannten Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes*, Nürnberg, J. L. S. Lechnerschen Buchhandlung.

MUTEL Auguste (1831), *Cours de géométrie et de trigonométrie*, Lyon, Périsse.

« Nécrologie » (1867), *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 7, nº 130, p. 61.

NEWTON Isaac (1962), *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World. Volume 1 : The Motion of Bodies*, trad. par Florian CAJORI, Berkeley, Los Angeles, London, University of California Press.

PAPE-CARPANTIER Marie (1872), *Arithmétique. Géometrie appliquée. Système métrique. Avec exercices et problèmes. Édition spéciale pour les filles*, Paris, Hachette.

PARMENTIER Théodore (1855), « Comparaison de quelques méthodes de quadrature et formule nouvelle », *Nouvelles Annales de Mathématiques 1ère série*, vol. 14, p. 370-384.

– (1876), « Simplification de la méthode d'interpolation de Thomas Simpson », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 15, p. 241-251.

PASCAL Joseph-Casimir (1835), *Cours de géométrie élémentaire*, Paris, Bachelier.

PERCIN Jules (1842), *Géométrie simplifiée... suivie de notions de trigonométrie, d'arpentage, accompagnée d'une table des sinus naturels, à l'usage des collèges et des écoles primaires supérieures*, 2e éd., Nancy, Grimblot, Raybois et Cie.

PONCELET Jean-Victor (1822), *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, Bachelier.

– (1835), *Solution graphique des principales questions, sur la stabilité des voûtes, par M. Poncelet,...* Paris, imprimerie de Fain.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

PORPHYRE, SEGONDS Alain Philippe, JOUANNA Jacques et PLACES Edouard Des (1983), *Vie de Pythagore - Lettre à Marcella*, Paris, Les Belles Lettres.

PROCLUS (1948), *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, trad. par Paul VER EECKE, Bruges, Desclée de Brouwer.

PUILLE David (1851), *Topographie. Teintes et signes conventionnels*, sous la dir. de David PUILLE, Jean Baptiste Louis CHARLE et Philippe DUMORTIER, Paris.

– (1852), *Cours complet d'arpentage élémentaire, théorique et pratique à l'usage des divers établissements d'instruction publique*, Paris, Isidore Pesron.

– (1855), *Leçons normales de géométrie élémentaire théorique et appliquée*, Paris, Ch. Fouraut.

– (1857), *Traité complet de la division des champs dans tous les cas, géodésie usuelle*, Paris, Ch. Fouraut.

– (1876), *Cours complet d'arpentage élémentaire, théorique et pratique à l'usage des divers établissements d'instruction publique*, 17e éd., Paris, Ch. Fouraut.

PUISSANT Louis (1807), *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*, Paris, Courcier.

R.L.R.I.P. (1822), *Recueil de lois et règlemens concernant l'instruction publique, depuis l'Edit de Henri IV en 1598 jusqu'à ce jour*, vol. 6, Paris, Brunot-Labbe.

REBIÈRE Alphonse (1886), *Elements d'algèbre et de trigonometrie appliquée*, Paris, Delaplane.

REBOUT A. E. M. et NORMAND Louis Marie (1841), *Manuel de géométrie, de dessin linéaire, d'arpentage et de nivellement, à l'usage des écoles élémentaires*, Paris, Normand aîné.

REY Casimir (1875), « De la tachymétrie », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 14, p. 433-437.

REYNAUD André-Antoine-Louis (1835), *Traité d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent à l'École polytechnique, à la marine, à l'École militaire de Saint-Cyr et l'École forestière*, Paris, Bachelier.

RITT Georges (1857), *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie, avec les solutions développées*, 2ème, Paris, Hachette.

RIVARD Dominique-François (1752), *Élémens de mathématiques*, 4e éd., Paris, J. Desaint et C. Saillant.

ROUCHÉ Eugène (1883), « Note sur l'impossibilité de la quadrature du cercle », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 2, p. 5-16.

ROUCHÉ Eugène et COMBEROUSSE Charles de (1866), *Traité de géométrie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ROUCHÉ Eugène et COMBEROUSSE Charles de (1873), *Traité de géométrie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars.

ROULAND Gustave (1857), « Nomination des commis de l'inspection académique. Organisation générale », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 8, nº 96, p. 292-296.

– (1858a), « Nominations d'officiers de l'instruction publique et d'officiers d'Académie », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, nº 98, p. 8-9.

– (1858b), « Règlement et institution d'une Commission pour l'examen des livre classiques », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. Vol. 9, nº 108, p. 296-297.

SACCHI Joseph (1862), « Note sur la généralisation du théorème de Pythagore », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 2, nº 1, p. 330-331.

SAINTE-LAGÜE André (1913), *Notions De Mathematiques*, Paris, Hermann et fils.

SAINTE-LAGÜE André et MASSON Henri (1949), *L'utilisation pratique des mathématiques - Calculs numériques et graphiques*, vol. 1, Paris, Eyrolles.

SALICIS (1868), « Géométrie élémentaire, Première Année », *L'écho de la Sorbonne : moniteur de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, vol. 1 et 2. Cours complet d'enseignement secondaire en trois années, rédigé conformément au programme des Cours de la Sorbonne, publié en fascicules numérotés de 1 à 156 le mardi, jeudi et samedi de chaque semaine.

– (1869), « Géométrie, Deuxième Année », *L'écho de la Sorbonne : moniteur de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, vol. 3 et 4. Cours complet d'enseignement secondaire en trois années, rédigé conformément au programme des Cours de la Sorbonne, publié en fascicules numérotés de 1 à 156 le mardi, jeudi et samedi de chaque semaine.

SERRET Joseph Alfred (1852), *Traité d'arithmétique*, Paris, Bachelier.

SERRET Paul (1855), *Des Méthodes en géométrie*, Paris, Mallet-Bachelier.

SOCIÉTÉ ARCHÉOLOGIQUE HISTORIQUE (1900), *Bulletin de la Société archéologique, historique, littéraire & scientifique du Gers*, vol. 3-4, Auch, Impr. Th. Bouquet.

SONNET Hippolyte (1839), *Nouvelle géométrie théorique et pratique contenant de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, au lever des plans, à la gnomonique, à la perspective, aux ombres, à la cristallographie, à la mécanique, etc., et les premiers éléments de géométrie descriptive ; suivie d'un appendice sur les centres de gravité et rédigée d'après la méthode des infiniments petits*, Paris, Hachette.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

SONNET Hippolyte (1848), *Géométrie théorique et pratique avec de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, au lever des plans, à la gnomonique, à la perspective, aux ombres*, 3e éd., Paris, Hachette.
– (1867), *Dictionnaire des mathématiques appliquées, comprenant les principales applications des mathématiques*, Paris, Hachette.
– (1880a), *Géométrie théorique et pratique avec de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, au lever des plans, à la gnomonique, à la perspective, aux ombres - Planches*, 8e éd., Paris, Hachette.
– (1880b), *Géométrie théorique et pratique avec de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, au lever des plans, à la gnomonique, à la perspective, aux ombres - Texte*, 8e éd., Paris, Hachette.
– (1882), « Algèbre », *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Partie 1, Tome 1*, sous la dir. de Ferdinand BUISSON.
– (1887), « Arpentage », *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Partie 1, Tome 1*, p. 120-121, sous la dir. de Ferdinand BUISSON.
TARNIER Etienne Auguste (1872), *Éléments de géometrie pratique conformes au programme de l'enseignement secondaire spécial*, Paris, Gauthier-Villars.
– (1877), *Applications de l'arithmétique aux opérations pratiques : recueil de 1.000 questions modèles pour l'enseignement élémentaire*, 4e éd., Paris, Hachette.
– (1879), *Réintégration d'un examinateur pour l'admission à l'Ecole militaire de Saint-Cyr, en 1848*, Angers, Germain et G. Grassin.
TERQUEM Olry (1829), *Manuel de géométrie, ou Exposition élémentaire des principes de cette science ... à l'usage des personnes privées des secours d'un maître*, Paris, Roret.
– (1849), « Biographie », *Nouvelles Annales de Mathématiques 1ère série*, vol. 8, p. 203-206.
THÉNOT Jean-Pierre (1851), *Dessin linéaire, à la règle et au compas, appliqué à l'industrie*, Nouvelle, Paris, Isidore Pesron.
TOMBECK Henri-Étienne (1879), *Traité de géométrie élémentaire : à l'usage des élèves des lycées et des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles du gouvernement*, 6e éd., Paris, Hachette.
TOUSSAINT Claude Jacques (1857), *Nouveau manuel complet de la coupe des pierres : precede des notions de geometrie elementaire et descriptive necessaires et suivi de quelques observations pratiques et d'un vocabulaire*, Paris, Roret.
UMPFENBACH Hermann (1849), « Sur la généralisation du théorème de Pythagore », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 1, no 8, p. 400.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

VALENTINO Henri (1911), « Image, Imagerie », *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, vol. 43, nº 4, sous la dir. de Ferdinand BUISSON.

VAUCLUSE (1904), *Vaucluse : dictionnaire, annuaire et album*, Paris, Flammarion, Néauber.

VERNIER Hippolyte Véron (1834), *Petite arithmétique raisonnée : à l'usage des écoles primaires*, Paris, Hachette.

VINCENT Alexandre-Joseph-Hidulphe (1832), *Cours de géométrie élémentaire*, 2e éd., Paris, Bachelier.

– (1844), *Cours de géométrie élémentaire*, 5e éd., Paris, Bachelier.

– (1852), « Lettre sur le théorème de Pythagore. », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 1, nº 11, p. 5-22.

VINCENT Alexandre-Joseph-Hidulphe et BOURDON Pierre Louis Marie (1837), *Précis de géométrie élémentaire*, Paris, Bachelier.

– (1844), *Abrégé du Cours de géométrie*, Paris, Bachelier.

VINTÉJOUX Félix (1883), *Éléments d'arithmétique et de géométrie à l'usage des écoles primaires*, Paris, Hachette.

WALLON Henri (1875), « Circulaire aux inspecteurs d'académie sur les livres employés dans l'enseignement primaire, Catalogue annexé », *Bulletin administratif de l'instruction publique*, vol. 18, nº 357, p. 168-173.

WANTZEL Pierre-Laurent (1837), « Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 2, p. 366-372.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Sources secondaires

ACADÉMIE DES SCIENCES (2013), « ROUCHÉ Eugène », La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=112840 (visité le 15/01/2025).

ACADÉMIE FRANÇAISE (2024), *On, nous, vous (accord)*, Dictionnaire de l'Académie française - 9e édition, http://www.dictionnaire-academie.fr/article/QDL059 (visité le 08/12/2024).

ALFONSI Liliane (2010), « Un "savant" du siècle des Lumières : Étienne Bézout (1730-1783), mathématicien, académicien et enseignant », *L'approche biographique en histoire des sciences et des techniques : enjeux scientifiques et méthodologiques*, p. 1-13.

– (2011), *Étienne Bézout (1730-1783) : Mathématicien des Lumières*, Paris, Editions L'Harmattan.

ALLARD Paul, FERRIER Jean-Paul, PÉREZ Sandra et LAMPIN-MAILLET Corinne (2010), *Géographie des interfaces : Une nouvelle vision des territoires*, Versailles, Quae.

ARCHIVES NATIONALES (2024), *GIROD Jean Marie Felicien - Légion d'honneur - Base de données Léonore*, https://www.leonore.archives-nationales.culture.gouv.fr/ui/notice/164623 (visité le 04/05/2024).

ASSUDE Teresa et GISPERT Hélène (2015), « Les mathématiques et le recours à la pratique : une finalité ou une démarche d'enseignement ? », in Daniel DENIS et Pierre KAHN (éd.), *L'École républicaine et la question des savoirs : Enquête au cœur du Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson*, Histoire, Paris, CNRS Éditions.

ATILF (1994a), « INTERFACE : Définition de INTERFACE », *TLFI*, http://stella.atilf.fr/Dendien/scripts/tlfiv5/advanced.exe?8;s=2740753770; (visité le 31/12/2024).

– (1994b), « SCHÉMA : Définition de SCHÉMA », *TLFI*, https://www.cnrtl.fr/lexicographie/sch%C3%A9ma (visité le 10/11/2024).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ATILF (1994c), « TERRITOIRE : Définition de TERRITOIRE », *TLFi*, http://stella.atilf.fr/Dendien/scripts/tlfiv5/advanced.exe?8;s=735349875; (visité le 30/10/2024).

BARBIN Évelyne (1987), « La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques », *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, nº 5, p. 1-34.

– (1990), « Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie », *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Villeurbanne, IREM de Lyon, p. 57-79.

– (1995), « Saisir l'Irrationnel - Dire, montrer, faire, toucher, tenir », *APMEP*, Bulletin vert, nº 400.

– (2007), « L'arithmétisation des grandeurs », *Repères-IREM*, nº 68, p. 5-20.

– (2021), « L'écriture de manuels de géométrie pour les Écoles de la Révolution : ordre des connaissances ou « élémentation » », in Armelle LE GOFF et Christiane DEMEULENAERE-DOUYÈRE (éd.), *Enseignants et enseignements au cœur de la transmission des savoirs*, Actes des congrès nationaux des sociétés historiques et scientifiques, Paris, Éditions du Comité des travaux historiques et scientifiques.

BAROU Joseph et BRANSIET Michel (1999), « Mathieu Bransiet (1792-1873), frère Philippe, un Forézien, supérieur général de l'Institut des Frères des Écoles chrétiennes », *Bulletin de la Diana*, vol. 58, nº 4, p. 262-308.

BAROUX Dominique et BÜHLER Martine (2020), *Vivent les cas d'égalité !*, *CultureMath*, https://culturemath.ens.fr/thematiques/college/vivent-les-cas-d-egalite (visité le 13/06/2024).

– (2022), « Les Éléments de géométrie, d'Euclide au début du XIXe : une source d'inspiration pour les enseignants et enseignantes », *Géométries d'hier à demain*, Poitiers, IREM&S de Poitiers.

BARROW-GREEN June (1996), « Britmath Online Database, British Mathematics 1860–1940 ».

BATHIER-FAUVET Michèle (1998), « La méthode des pesées chez Archimède », in *L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes.* Colloque d'histoire des sciences de La Réunion (IUFM-APMEP-ILA), Saint-Denis, IUFM de la Réunion, p. 273-294.

BAUDEZ Basile (2011), « Les mathématiques à l'Académie royale d'architecture dans la seconde moitié du XVIIIe siècle », *Revue de l'Art*, vol. 171, p. 9-15.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

BELHOSTE Bruno (1990), « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », *Revue d'histoire des sciences*, vol. 43, nº 4, p. 371-400.
– (1995), *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789-1914.* Paris, Economica.
– (1998), « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques », *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 4, nº 2, p. 289-304.
– (2009), « Charles Dupin et l'héritage de Monge en géométrie », in CHRISTEN Carole et VATIN François, *Charles Dupin (1784-1873), ingénieur, savant, économiste, pédagogue et parlementaire du Premier au Second Empire*, Rennes, PUR, p. 81-97.
BELHOSTE Bruno, PICON Antoine et SAKAROVITCH Joël (1990), « Les exercices dans les écoles d'ingénieurs sous l'Ancien Régime et la Révolution », *Histoire de l'éducation*, vol. 46, nº 1, p. 53-109.
BENZÉCRI Jean-Paul (1988), « Qualité et quantité dans la tradition des philosophes et en analyse des données », *Les cahiers de l'analyse des données*, vol. 13, nº 1, p. 131-152.
BERNARD Alain (2022), « Les Éléments de géométrie de Clairaut : rupture ou héritage ? », *Philosophia Scientiæ*, vol. 26, p. 19-66.
BERNARD Alain et PROUST Christine (2014), *Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History : problems and perspectives*, Dordrecht, Pays-Bas, Etats-Unis d'Amérique.
BERTRAND Emanuel (2023), « Une passion pour les interfaces. Interactions, intersections, interdisciplinarités », Université Paris Cité.
BKOUCHE Rudolf (1981), « Variations autour de la réforme de 1902/1905 », *La France mathématique*, Paris, SMF, p. 181-213.
– (1990a), « Enseigner la géométrie pourquoi ? », *Repères-IREM*, nº 1, p. 92-102.
– (1990b), « Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth) », *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Villeurbanne, IREM de Lyon, p. 115-127.
– (1995), « Autour du théorème de Thalès : variations sur les liens entre le géométrique et le numérique », *Bulletin inter-IREM premier cycle*, p. 7-67.
BNF - Catalogue général (2023), https://catalogue.bnf.fr/index.do (visité le 25/09/2023).
BODÉ Gérard (2014), « Les cours professionnels pour ouvriers sous la Restauration et la monarchie de Juillet », *Les Études Sociales*, vol. n° 159, nº 1, p. 29-47.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

BOUCARD Jenny (2020), « Number Theory in the *Nouvelles Annales De Mathématiques* (1842-1927) : A Case Study about Mathematical Journals for Teachers and Students », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, vol. 26, nº 1, p. 3.

BOUCARD Jenny et TIRARD Stéphane (2020), « Introduction - Les Cahiers François Viète, acteur et témoin de vingt années d'évolution de l'histoire des sciences et des techniques », *Cahiers François Viète*, vol. III, nº 9, p. 17-36.

BOYÉ Anne (1998), « L'apollonius gallus et le probleme des trois cercles comme defense et illustration de la geometrie synthetique », Thèse de doctorat, Nantes.

BRECHENMACHER Frédéric (2010), « Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques », *Revue de synthèse*, vol. 131, nº 4, p. 569-603.

– (2022), « Knowing by Drawing : Geometric Material Models in Nineteenth Century France », in Michael FRIEDMAN et Karin KRAUTHAUSEN (éd.), *Model and Mathematics : From the 19th to the 21st Century*, Trends in the History of Science, Cham, Springer International Publishing, p. 53-143.

BRIAND Jean-Pierre et CHAPOULIE Jean-Michel (2012), *Les collèges du peuple*, Rennes, PUR.

BRONNER Alain (1997), « Étude didactique des nombres réels : idécimalité et racine carrée », Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BRUNEAU Olivier et ROLLET Laurent (2024a), *Bergery, Claude-Lucien (1787-1863)*, MathsInMetz 1750 – 1870, https://we.ahp-numerique.fr/s/mathsinmetz/item/20 (visité le 17/01/2025).

– (2024b), *Dupin, Charles (1784-1873)*, MathsInMetz 1750 – 1870, https://we.ahp-numerique.fr/s/mathsinmetz/item/127#lg=1&slide=0 (visité le 17/01/2025).

– (2024c), *Terquem, Olry (1782-1862)*, MathsInMetz 1750 – 1870, https://we.ahp-numerique.fr/s/mathsinmetz/item/91#lg=1&slide=0 (visité le 18/01/2025).

BRUTER Annie (2009), *Ressources numériques en histoire de l'éducation*, LARRA-UMR 5190, http://rhe.ish-lyon.cnrs.fr/?q=courspub-record/2067 (visité le 08/01/2025).

BÜHLER Martine (2004), « Nombres constructibles à la règle et au compas », *IREM de Paris*, Mnémosyne, nº 18, p. 59-90.

CHAMBRIS Christine (2008), « Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. », Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII, Paris.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

CHAMBRIS Christine et VISNOVSKA Jana (2022), « On the history of units in French elementary school arithmetic : The case of proportionality », *Historia Mathematica*, Concrete Numbers versus Abstract Numbers, vol. 59, p. 99-118.

CHAPOULIE Jean-Michel (2005), « L'organisation de l'enseignement primaire de la IIIe République : ses origines parisiennes et provinciales, 1850-1880 », *INRP*, Histoire de l'éducation, p. 3-44.

CHATZIS Konstantinos (1er juin 1998), « Jean-Victor Poncelet (1788-1867) ou le Newton de la mécanique appliquée », *Bulletin de la Sabix. Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique*, nº 19, p. 69-97.

CHAUVIRÉ Christiane (2003), « Perception visuelle et mathématiques chez Peirce et Wittgenstein », *Philosophies de la perception*, Travaux du Collège de France, Paris, Odile Jacob, p. 201-217.

CHEVALARIAS Nathalie (2012), « Des figures semblables à la similitude dans l'enseignement secondaire français : 1845 - 1910. Des choix témoins des tensions entre pratique et théorie dans l'enseignement des mathématiques », Mémoire de master, UFR des sciences et techniques, Nantes.

– (2018), « Instruments et méthodes de dessin : de la géométrie pratique vers l'enseignement secondaire au début du XXe siècle », *Les mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations*, Rennes, PUR, p. 79-94.

CHEVALLARD Yves (1985), *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHOPPIN Alain (1980), « L'histoire des manuels scolaires. Une approche globale », *Histoire de l'éducation*, vol. 9, nº 1, p. 1-25.

– (1986), « Le cadre législatif et réglementaire des manuels scolaires. I, De la Révolution à 1939 », *Histoire de l'éducation*, vol. 29, nº 1, p. 21-58.

– (1992), *Les manuels scolaires : histoire et actualité*, Pédagogies pour demain Références, Paris, Hachette éducation.

– (2008), « Le manuel scolaire, une fausse évidence historique », *Histoire de l'éducation*, nº 117, p. 7-56.

CHRISTEN Carole et VATIN François (2009), *Charles Dupin (1784-1873). Ingénieur, savant, économiste, pédagogue et parlementaire du Premier au Second Empire*, Rennes, Presses universitaires de Rennes.

CONDETTE Jean-François (2006a), « 118) DESNANOT Pierre », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 12, nº 2, p. 147-148.

– (2006b), « 141) DUNOYER Charles Marie », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 12, nº 2, p. 165-166.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

CONDETTE Jean-François (2006c), « 150) FAYE Hervé Auguste Étienne Alban », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 12, nº 2, p. 175-176.
– (2006d), « 299) PERCIN Nicolas Jules », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 12, nº 2, p. 313-314.
– (2006e), « 55) BOURGET Justin François », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 12, nº 2, p. 88-89.
– (2006f), « 69) CARESME Benjamin Marie Joseph », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 12, nº 2, p. 100-101.
COUTEL Charles (1995), « Savoir scolaire et élémentarité chez Condorcet », *Spirale - Revue de recherches en éducation*, vol. 15, nº 1, p. 7-29.
CROIZAT Barnabé (2016), « Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur », Thèse de doctorat, Université Lille 1 - Sciences et technologies, Lille.
D'ENFERT Renaud (2003a), « Inventer une géométrie pour l'école primaire au XIXe siècle », *Tréma*, nº 22, p. 41-49.
– (2003b), *L'enseignement du dessin en France : figure humaine et dessin géométrique (1750-1850)*, Paris, Belin.
– (2003c), *L'enseignement mathématique à l'école primaire, de la révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 1 : 1791-1914*, vol. 1, Paris, INRP.
– (2005), « L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire au début du XXe siècle. Vers une culture commune ? », *Bibliothèque de l'Histoire de l'Education, Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire*, nº 28, p. 247-255.
– (2014), « Chapitre 11. Les objets de l'école, xixe-xxe siècles : Une approche matérielle de la culture scolaire », in Jean-François CONDETTE et Marguerite FIGEAC-MONTHUS (éd.), *Sur les traces du passé de l'éducation… : Patrimoines et territoires de la recherche en éducation dans l'espace français*, Épistémologie, Pessac, Maison des Sciences de l'Homme d'Aquitaine, p. 149-162.
D'ENFERT Renaud, MOYON Marc et VALENTE Wagner R. (2017), *Les mathématiques à l'école élémentaire (1880 - 1970) : études France - Brésil*, Limoges, PULIM.
D'ENFERT Renaud (2015), « Circulations mathématiques et offre locale d'enseignement : le cas de Troyes sous la Restauration et la monarchie de Juillet », *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, nº 19, p. 79-94.
– (2025), « "They do not have the same needs" : Mathematics education for girls and young women in France (19th-early 20th century) », *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 78, p. 1-10.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

DE VARENT Charlotte (2018), « Pluralité des concepts liées aux unités de mesure : liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens », Thèse de doctorat, Sorbonne Paris Cité.

DÉBARBAT Suzanne et TEN Antonio E. (1993), *Mètre et système métrique*, Valencia, Universitat de València.

DECAYEUX-CUVILLIER Maryse (2019), *Des Mathématiques pour les filles ? : L'exemple de l'enseignement primaire de la Somme de 1881 à 1923*, Lille, Presses Universitaires Septentrion.

DELCOURT Jean (2018), *Du côté des lettres : une lettre d'Olry Terquem à Eugène Catalan (31 août 1849)*, Images des maths, https://images-archive.math.cnrs.fr/Du-cote-des-lettres-une-lettre-d-Olry-Terquem-a-Eugene-Catalan-31-aout-1849-4497.html (visité le 18/01/2025).

DEMIGNOT Sylvie et DUTOUR Olivier (17 fév. 2018), *Paul Bert*, Dictionnaire prosopographique de l'EPHE, https://prosopo.ephe.psl.eu/paul-bert (visité le 07/09/2024).

DESJONQUÈRES Pierre et MOREL Thomas (2020), « Le Nouveau manuel complet d'arpentage (1845) », *CNRS*, Images des Mathématiques, https://images.math.cnrs.fr/Le-Nouveau-manuel-complet-d-arpentage-1845.

DHOMBRES Jean (1985), « French mathematical textbooks from Bézout to Cauchy », *Historia Scientiarum*, vol. 28, p. 91-137.

– (1993), « La Figure Dans Le Discours Géométrique : Les Façonnages D'un Style », *Theoria : An International Journal for Theory, History and Foundations of Science*, vol. 8, n° 19, p. 51-88.

– (2009), « La preuve mathématique en tant qu'elle est épreuve de mémoire », *Communications*, vol. 84, n° 1, p. 59-84.

DHOMBRES Jean, DAHAN-DALMEDICO Amy, BKOUCHE Rudolf, HOUZEL Christian et GUILLEMOT Michel (éd.) (1993), *Mathématiques au fil des âges*, Treillières, France, Gauthier-Villars.

DJEBBAR Ahmed (2018), « Outils de justification et procédés de résolution dans les mathématiques arabes », *Les cahiers du CRASC*, n° 33, p. 17-79.

DOSSO Diane (2015), *HARANT Henri Raphaël Auguste*, La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=121110 (visité le 10/01/2025).

DOUADY Régine et PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne (1983), *Mesure des longueurs et des aires*, Brochures IREM 48, Paris, IREM de Paris.

DUBOIS Patrick (2002a), « BERT (Paul) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, p. 37.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

DUBOIS Patrick (2002b), « BOS (H.) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, nº 1, p. 42.
– (2002c), « BOVIER-LAPIERRE (G.) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, nº 1, p. 44.
– (2002d), « DALSÈME (J.) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, nº 1, p. 60.
– (2002e), « Le dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire de Ferdinand Buisson : répertoire biographique des auteurs », *Bibliothèque de l'histoire de l'éducation*, vol. 17, nº 1.
– (2002f), « LEYSSENNE (P.) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, nº 1, p. 98-98.
– (2002g), « PAPE-CARPANTIER (Mme Marie) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, nº 1, p. 112-112.
– (2002h), « SALICIS (G.) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, nº 1, p. 130.
– (2002i), « SONNET (H.) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 17, nº 1, p. 133-133.
DUGAC Pierre (1970), « Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite », *Revue d'histoire des sciences*, vol. 23, nº 4, p. 333-350.
EHRHARDT Caroline (2009), « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant. Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) », *Histoire de l'éducation*, nº 123, p. 5-43.
– (2010), « La construction du mythe d'Évariste Galois à la fin du XIXe siècle », *Quadrature*, nº 75, p. 35-42.
– (2018), « A locus for transnational exchanges : European mathematical journals for students and teachers, 1860s–1914 », *Historia Mathematica*, vol. 45, nº 4, p. 376-394.
ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS (2021), *INTERFACES*, Encyclopædia Universalis, https://www.universalis.fr/encyclopedie/interfaces/ (visité le 09/11/2021).
FELIX Lucienne (2008), « Briot, Charles Auguste », *Complete Dictionary of Scientific Biography*, vol. 2, p. 470, https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/briot-charles-auguste (visité le 18/12/2024).
FERREIRA Débora et SCHUBRING Gert (2022), « "Complex numbers" and the problem of multiplication between quantities », *Concrete Numbers versus Abstract Numbers*, vol. 59, p. 119-145.
FLAMENT Dominique et NABONNAND Philippe (2011), *Justifier en mathématiques*, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

FOX Robert (1994), « DUPIN, Charles (1784-1873). Professeur de Mécanique appliquée aux arts (1819-1825), de Mécanique et Géométrie appliquées aux arts (1825-1839), de Géométrie appliquée aux arts et Statistiques (1839-1852), de Géométrie appliquée aux arts (1852-1873) [note biographique] », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 19, p. 469-478.

FRANÇOIS Martine et WAUTHIER Alexandre (2017), *SERRET Joseph-Alfred*, La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=101517 (visité le 25/09/2024).

FRANÇOIS Martine, WAUTHIER Alexandre et BOTTIN Georges-Robert (2018), *LE VERRIER Urbain Jean Joseph*, La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=498 (visité le 25/09/2024).

FRIEDELMEYER Jean-Pierre (2001), « Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond », *Repères-IREM*, nº 44, p. 5-31.

GAGATSIS Athanassios (1994), « Histoire de l'enseignement de la géométrie en Grèce. Influence des géométres français de 1830 à 1884 », *Repères-IREM*, vol. 17, p. 47-69.

GALILI Tal, O'CALLAGHAN Alan, SIDI Jonathan et SIEVERT Carson (2018), « heatmaply : an R package for creating interactive cluster heatmaps for online publishing », *Bioinformatics (Oxford, England)*, vol. 34, nº 9, p. 1600-1602.

GARLOPEAU Ambroise (2006), « La pratique de l'arpentage au XIXe siècle », *Association Française de Topographie*, XYZ, nº 107, p. 51-56.

GÉOCONFLUENCES (2010), *Interface*, http://geoconfluences.ens-lyon.fr/glossaire/interface-1 (visité le 20/08/2021).

GERWIG Mario (2021), *Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen: Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik*, Berlin, Heidelberg, Springer.

GEVAERT Herve (2017), « La loi Guizot du 28 juin 1833, une sortie de l'ancien régime scolaire ? : recherche sur l'organisation pédagogique des classes et les écoles primaires supérieures jusqu'à l'enseignement secondaire spécial de Victor Duruy », Thèse de doctorat, Normandie Université, Caen.

GIARDINO Valeria (2017), « Diagrammatic Reasoning in Mathematics », in Lorenzo MAGNANI et Tommaso BERTOLOTTI (éd.), *Springer Handbook of Model-Based Science*, Cham, Springer International Publishing, p. 499-522.

GILLISPIE Charles Coulston (1970), *Dictionary of scientific biography*, vol. 8, New York, Scribner.

– (1974), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 9, New York, Scribner.

GISPERT Hélène (2017), « Histoire de l'enseignement, histoire des mathématiques : une fécondité réciproque », in D'ENFERT Renaud, MOYON Marc et VALENTE Wagner R.,

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Les mathématiques à l'école élémentaire (1880 - 1970) : études France - Brésil, Limoges, PULIM.

GOLDSTEIN Catherine (1989), « L'un est l'autre : Pour une histoire du cercle », in SERRES Michel, *Éléments d'histoire des sciences*, Paris, Bordas, p. 129-149.

– (1999), « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870–1914) », *New series*, vol. 3.

– (2011), « Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite », in FLAMENT Dominique et NABONNAND Philippe, *Justifier en mathématiques*, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, p. 129-165.

GOLDSTEIN Catherine et RITTER Jim (1994), « Mythes et réalités historiques de l'Europe mathématique », *Revue De Synthèse*, vol. 115, p. 503-511.

GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (2007), *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin, Springer Science & Business Media.

GOSZTONYI Katalin (2022), « Series of problems in Clairaut's Elements of Geometry : interaction between historical analysis and mathematics education research », *Springer*, ZDM – Mathematics Education, vol. 54, p. 1463-1478.

GREBER Jules-Henri et VERDIER Norbert (2021), « Publier des mathématiques en France dans les sociétés savantes de province au XIX^{e} siècle : journaux, circulations, interventions - acteurs », in *Congrès digital SFHST Montpellier 2021*, Montpellier, France.

GRELON André (1994), « COMBEROUSSE, Charles (de) (1826-1897) », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 19, p. 340-342.

GRONDIN Reine-Claude (2010), « La "panthéonisation" ou l'inscription dans l'espace public de la geste coloniale », *L'Empire en province : Culture et expérience coloniales en Limousin (1830-1939)*, Tempus, Toulouse, Presses universitaires du Midi, p. 277-322.

GROUPE DE RECHERCHE « INTERFACES » (2008), « L'interface : contribution à l'analyse de l'espace géographique », *L'Espace géographique*, vol. 37, n^{o} 3, p. 193-207, Laurent CHAPELON et Karine EMSELLEM (éd.).

GUICHARD Jean-Paul (2022), « Rectangulation et quadrature des figures », *Géométries d'hier à demain*, Poitiers, IREM&S de Poitiers, p. 47-73.

GUILLET Carène (2022), « A quantitative study of French 19th century geometry textbooks », *Acta Scientiae*, vol. 24, n^{o} 8, p. 163-201.

GUILLET Carène et MOUREAU Marie-Line (2022), « Aires sans formules », *Géométries d'hier à demain*, Poitiers, IREM&S de Poitiers, p. 29-46.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

HAVELANGE Isabelle, HUGUET Françoise et LEBEDEFF-CHOPPIN Bernadette (1986a), « BOS Henri Ennemond Étienne », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 11, nº 1, p. 179-180.

– (1986b), « COURNOT Antoine Augustin », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 11, nº 1, p. 263-265.

– (1986c), « DUTREY Gabriel Fort », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 11, nº 1, p. 332-334.

– (1986d), « SALICIS Gustave Adolphe », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 11, nº 1, p. 605-606.

– (1986e), « SONNET Michel Louis Hippolyte Joseph », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 11, nº 1, p. 614-616.

– (1986f), « VACQUANT Jean Baptiste Charles », *Publications de l'Institut national de recherche pédagogique*, vol. 11, nº 1, p. 629-630.

HOCHKIRCHEN Thomas (2003), « Theory of measure and integration from Riemann to Lebesgue », in JAHNKE Hans Niels, *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, p. 261-290.

HOFSTETTER Rita et SCHNEUWLY Bernard (2009), « Introduction. Savoirs en (trans)formation. Au cœur des professions de l'enseignement et de la formation », *Savoirs en (trans)formation*, De Boeck Supérieur, p. 7-40.

HUGUET Françoise (2001), « Les pensions et institutions privées secondaires pour garçons dans la région parisienne (1700-1940) », *L'établissement scolaire. Des collèges d'humanités à l'enseignement secondaire (XVIe-XXe siècles)*, Histoire de l'éducation 90, Paris, ENS Éditions, p. 205-221.

HUGUET Françoise et NOGUÈS Boris (2024), *Les professeurs des facultés des lettres et des sciences en France au XIX^e siècle (1808-1880)*, http://facultes19.ish-lyon.cnrs.fr/fiche.php?indice=147 (visité le 04/05/2024).

JACOB Marie (2005), « Interdire la quadrature du cercle à l'Académie : une décision autoritaire des Lumières ? », *Revue d'histoire des mathématiques*, nº 11, p. 89-139.

JACQUIER Yvo (2017), *La géométrie avec les yeux*, Prague, Lulu.

JUNG Marjorie et HUSSER Blandine (2017), *MAUDUIT Antoine-René*, La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=114797 (visité le 04/05/2021).

KARP Alexander et SCHUBRING Gert (2014), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York, Springer.

KOLLERSTROM Nick (1992), « Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation' : an enduring myth », *The British Journal for the History of Science*, vol. 25, nº 3, p. 347-354.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

KUHN Thomas Samuel (1991), *La structure des révolutions scientifiques*, trad. par Laure MEYER, Nouvelle édition augmentée et revue par l'auteur, Champs 115, Paris, Flammarion.

L'INGUIMBERTINE À L'HÔTEL-DIEU (2024), *FONDS ET DONATEURS*, https://fonds.carpentras.fr/vpctp/fonds-et-donateurs.aspx?_lg=fr-FR (visité le 04/05/2024).

LALLEMANT Catherine et FOURMAUX Francine (2024), *FAYE Hervé Étienne Auguste Alban*, La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=112149 (visité le 25/09/2024).

LAMANDÉ Pierre (1990), « Périmètre et surface du cercle dans les manuels français de la fin du 18e siècle : Bézout, Peyrard, Legendre et Lacroix », *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Villeurbanne, IREM de Lyon, p. 425-440.

– (1993), « Trois traités français de géométrie à l'orée du XIXe siècle : Legendre, Peyraud et Lacroix », *Physis. Nuova Serie*, vol. 30, no 2, p. 243-302.

LARMARANGE Joseph (2024), *guide-R - Guide pour l'analyse de données d'enquêtes avec R*, (visité le 09/05/2024).

LÊ François (2016), « Reflections on the Notion of Culture in the History of Mathematics : The Example of "Geometrical Equations" », *Science in Context*, vol. 29, no 3, p. 273-304.

LE PENDEVEN Amélie, JUNG Marjorie et HUSSER Blandine (2018), *ABRIA Jérémie Joseph Benoît*, La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=115365 (visité le 21/09/2024).

LEGROS Valérie (2016), « Représentations des femmes et des hommes dans des manuels d'arithmétique français du XIXe siècle : une approche quantitative », *Revista Diálogo Educacional*, vol. 16, no 49.

– (2019), *Apprendre l'arithmétique dans les manuels scolaires au XIXe siècle*, Limoges, PULIM.

LEGROS Valérie et BOEN FRIZZARINI Claudia Regina (2018), « Montrer des savoirs mathématiques ? Les illustrations dans des manuels scolaires d'arithmétique et de travaux manuels de la Troisième République », *DIversité REcherches et terrains*, no 10.

LELIÈVRE Claude (2011), « Collège », in DURAND-PRINBORGNE Claude, FORQUIN Jean-Claude, HASSENFORDER Jean, ROBERT André D. et SINGLY François de, *Dictionnaire encyclopédique de l'éducation et de la formation*, 3e éd., Paris, Retz, p. 185-187.

LEMAITRE Nicole (2014), *REBIERE Alphonse Michel*, La France savante, cths.fr, https://cths.fr/an/savant.php?id=109582 (visité le 25/09/2024).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

LEME DA SILVA Maria Célia et MOYON Marc (2020), « Tachymetry Production and Circulation Background », *Acta Scientiae*, vol. 22, p. 185-205.

LEMERCIER Claire (2005), « Analyse de réseaux et histoire », *Revue d'histoire moderne & contemporaine*, vol. 52-2, nº 2, p. 88-112.

LEMERCIER Claire et ZALC Claire (2019), *Quantitative Methods in the Humanities*, trad. par Arthur GOLDHAMMER, Charlottesville, University of Virginia press.

LEMMERMEYER Franz (2014), *On Leonardo da Vinci's proof of the Theorem of Pythagoras*, (visité le 11/09/2023).

LIVET DE NANTES Association pour l'histoire du lycée (2025), *Les Directions*, Livet-Histoire.fr, https://www.livet-histoire.fr/article124.html (visité le 10/01/2025).

LORENAT Jemma (2019), « "Je n'ai point ambitionnée d'être neuf" : Modern Geometry in Early Nineteenth-Century French Textbooks », in SCHUBRING Gert, *Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education*, Cham, Springer International Publishing, p. 69-122.

– (2020), « Dessin et imagination : débats sur le rôle des figures dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à trois dimensions au XIXe siècle », *Images des mathématiques*, https://images.math.cnrs.fr/dessin-et-imagination-debats-sur-le-role-des-figures-dans-lenseignement-et-lapprentissage-de-la-geometrie-a-trois-dimensions-au-xixe-siecle/.

LOUÂPRE Muriel (2019), « Des réseaux savants à l'œuvre », *Romantisme*, vol. 183, nº 1, p. 43-55.

LUC Jean-Noël, CONDETTE Jean-François et VERNEUIL Yves (2020), *Histoire de l'enseignement en France. XIXe-XXIe siècle*, Paris, Armand Colin.

LYONS Martyn (1987), *Le triomphe du livre : une histoire sociologique de la lecture dans la France*, Paris, Promodis - Editions du Cercle de la librairie.

M :A.T.H. Groupe (1992), « De la méthode par exhaustion. », *Mnémosyne*, nº 1, p. 17-48.

MANCOSU Paolo (2001), « Mathematical Explanation : Problems and Prospects », *Topoi*, vol. 20, nº 1, p. 97-117.

MARTIN Olivier (2020), *L'empire des chiffres*, Paris, Armand Colin.

MATASCI Damiano (2015), *L'école républicaine et l'étranger : Une histoire internationale des réformes scolaires en France. 1870-1914*, Sociétés, Espaces, Temps, Lyon, ENS Éditions.

MÉHAYE Florent (2006), « Le Système Métrique en pratique. La vérification des Poids et Mesures en France (1840-1870) », *ethnographiques.org*, nº 10.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

MENGHINI Marta (2007), « The *Éléments De Géométrie* of A. M. Legendre », in *History and Epistemology in Mathematics Education Proceedings of the 5th European Summer University*, ESU-5, Prague, Vydavatelský servis, Plzeň, p. 12.

MOKTEFI Amirouche, BARBIN Évelyne et MENGHINI Marta (2013), « Les dernières batailles d'Euclide : Sur l'usage des Éléments pour l'enseignement de la géométrie au XIXe siècle », *Les Ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire : Entre Recherche, Enseignement et Culture*, Limoges, PULIM, p. 57-70.

MOLLIER Jean-Yves (2015), *Une autre histoire de l'édition française*, Paris, Fabrique éditions.

MOREL Thomas (2020), « La géométrie du semblable, pratiques historiques et enseignements actuels », in, Lille, WebTV Université de Lille, https://webtv.univ-lille.fr/video/10781/la-geometrie-du-semblable-pratiques-historiques-et-enseignements-actuels (visité le 16/06/2024).

MOREY Micheline (1962), « Les origines de l'Enseignement secondaire féminin », *Femmes Diplômées*, vol. 43, no 1, p. 20-28.

MOUSSARD Guillaume (2015), « Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891) », Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes.

– (2023), « Des méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie dans les ouvrages de l'enseignement préparatoire au 19e siècle », *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 29, no 2, p. 145-232.

MOYON Marc (2008), « La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage : contribution à l'étude des mathématiques médiévales », Thèse de doctorat, Université de Limoges, Limoges.

– (2017), *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*, Turnhout, Brepols.

MOYON Marc et GUILLET Carène (2025), « The division of plane figures : historical approach and mathematical solutions », *Current Trends, Practices, and Ideas in the History and Epistemology in Mathematics Education*, New York, Springer.

MOYON Marc et LEGROS Valérie (2017), « Instruction arithmétique et éducation morale : un double projet chez Pierre Leyssenne », in D'ENFERT Renaud et VALENTE Wagner R., *Les mathématiques à l'école élémentaire (1880 - 1970) : études France - Brésil*, Limoges, PULIM, p. 59-82.

NABONNAND Philippe, PEIFFER Jeanne, GISPERT Hélène et GREBER Jules-Henri (2019), « Compte-rendu de fin de projet. Projet ANR-14-CE31-0010. Circulations des mathématiques dans et par les journaux : histoire, territoires et publics ».

Licence CC BY-NC-ND 3.0

NETZ Reviel (2009), *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Numdam (s. d.), http://www.numdam.org/.

O'CONNOR J. J. et ROBERTSON E. F. (2002), *Charles Briot - Biography*, Maths History, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Briot/ (visité le 18/12/2024).

PAGNEY BÉNITO-ESPINAL F. (éd.), *Les interfaces : ruptures, transitions et mutations : XI^es Journées de géographie tropicale du Comité national français de géographie*, Espaces tropicaux no 19, Pessac, Presses universitaires de Bordeaux.

PERRET Laetitia (2018), « Places et rôles des images des manuels dans l'évolution des disciplines scolaires », *DIversité REcherches et terrains*, nº 10.

PLANE Henry (2003), « A propos du théorème de Pythagore », *PLOT - Nouvelle série*, nº 1, p. 17-20.

POTTIN Marc-Antoine (2018), « Dupanloup et l'éducation des filles », *Genre & Éducation : Former, se former, être formée au féminin*, Mont-Saint-Aignan, Presses universitaires de Rouen et du Havre, p. 353-365.

PREVERAUD Thomas (2017), « Se déprendre d'Euclide pour enseigner la géométrie : une convergence de pratiques pédagogiques à l'heure des transformations de l'école américaine (1800-1840) », *Histoire de l'éducation*, nº 148, p. 167-194.

PROST Antoine (2008), « De l'enquête à la réforme. L'enseignement secondaire des garçons de 1898 à 1902 », *Histoire de l'éducation*, nº 119, p. 29-81.

PROUST Christine, DONBAZ Veysel, DÖNMEZ Asuman et CAVIGNEAUX Antoine (2007), « Tablettes mathématiques de Nippur », *Publications de l'Institut Français d'Études Anatoliennes*, vol. 18, nº 1.

RASHED Roshdi (2021), « Mathématiques », *Le savoir grec*, Paris, Flammarion, p. 447-469.

RAYNAUD Dominique (2015), *Géométrie pratique. Géomètres, ingénieurs et architectes (XVI^e-XVIII^e siècle)*, Besançon, PUFC.

RENAUD Hervé (2017), « La fabrication d'un enseignement de l'analyse pour l'enseignement secondaire en France au XIX^e siècle : acteurs, institutions, programmes et manuels », Thèse de doctorat, Nantes.

ROBERT André (2005), « Les professeurs des classes élémentaires des lycées et leur représentation », *Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire*, nº 28, p. 317-329.

ROLLET Laurent et NABONNAND Philippe (2012), *Les uns et les autres... Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Nancy, Presses Universitaires de Lorraine.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

ROMERA-LEBRET Pauline (2009), « La nouvelle géométrie du triangle : passage d'une mathématique d'amateurs à une mathématique d'enseignants (1873-1929) », Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes.

ROUCHE Nicolas (1990), « Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ? », *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Villeurbanne, IREM de Lyon, p. 8-38.

– (1994), « Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique », *Repères-IREM*, nº 15, p. 25-36.

SAKAROVITCH Joël (2015), « La géométrie descriptive et l'œuvre de Gaspard Monge », in Dominique RAYNAUD (éd.), *Géométrie pratique : Géomètres, ingénieurs et architectes. XVIe–XVIIIe siècle*, Besançon, Presses universitaires de Franche-Comté, p. 95-118.

SCHUBRING Gert (1987), « On the Methodology of Analysing Historical Textbooks : Lacroix as Textbook Author », *For the Learning of Mathematics*, vol. 7, nº 3, p. 41-51.

– (2019), « Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education », International Studies in the History of Mathematics and its Teaching, Cham, Springer International Publishing.

– (2022), *Analysing Historical Mathematics Textbooks*, International Studies in the History of Mathematics and its Teaching, Cham, Springer International Publishing.

SCHWER Sylviane R. (2022), « La géométrographie : vers un langage de programmation des algorithmes de tracés des figures géométriques », *Géométries d'hier à demain.* Poitiers, IREM de Poitiers, p. 223-240.

SECKEL Raymond-Josué (2011), « La *Bibliographie de la France* », *Revue de la BNF*, vol. 39, nº 3, p. 46-60.

SERFATI Michel (1992), *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes : sur l'histoire des nombres irrationnels et transcendants aux XVIIIe et XIXe siècles*, vol. 4, Fragments d'histoire des mathématiques 86, Paris, APMEP.

SERVIER-CROUZAT Estelle (2020), *Les manuels Roret*, Le blog de Gallica, https://gallica.bnf.fr/blog/01022018/les-manuels-roret?mode=desktop (visité le 29/10/2024).

SZABÓ Árpád (2000), *L'aube des mathématiques grecques*, Paris, Vrin.

TEISSIER Pierre et LE LAY Colette (2024), *Connaître, comprendre et déconstruire les mythes collectifs en histoire des sciences et des techniques*, Centre François Viète, https://cfv.univ-nantes.fr/ressources-pour-lenseignement-secondaire-1 (visité le 13/10/2024).

Licence CC BY-NC-ND 3.0

THOMAS Marc (2014), « La règle à calcul, instrument de l'ère industrielle : le rôle de la France », Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes.

TOURNÈS Dominique (2001), « Figures idéales et figures sensibles. Place des instruments de dessin dans l'histoire et l'enseignement de la géométrie », *Expressions*, n° 18, p. 117.

– (2022), *Histoire du calcul graphique*, Paris, Cassini.

VAN DIEREN Françoise et ROUCHE Nicolas (1985), *Mesures, pavages et nombres irrationnels*, Propositions du GEM 10, Louvain-la-Neuve, GEM.

VATIN François (2007), *Morale industrielle et calcul économique dans le premier XIX^e siècle : Claude-Lucien Bergery*, Paris, Editions L'Harmattan.

– (2014), « Claude-Lucien Bergery et l'enseignement pour ouvriers à Metz (1820-1835) : un projet industriel et social exemplaire », *Les Études Sociales*, vol. 159, n° 1, p. 49-63.

VERDIER Norbert (2009), « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX^e siècle en Europe », *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, n° 13, p. 97-126.

– (2010), « Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1836 – 1885) », *Bulletin de la Sabix. Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique*, n° 45, p. 57-64.

– (2015), « Graver des figures de géométrie au XIX^e siècle : pratiques, enjeux et acteurs éditoriaux », *Textimage*, Illustration et discours scientifiques, n° 7.

VERDIER Norbert et GAUTREAU Aurélien (2022), « Le Bureau des longitudes et ses éditeurs : Didot et ses tables stéréotypées », *Le Bureau des longitudes en société · Les procès-verbaux du Bureau des longitudes*, Collection du bureau des longitudes 12, ANR, p. 41-54.

VÉRON Philippe (2016), *Dictionnaire des Astronomes Français 1850-1950*, https://ohp.osupytheas.fr/dictionnaire-des-astronomes-francais-1850-1950/ (visité le 18/01/2023).

VITRAC Bernard (2005), « Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes ? », *Mirror of Heritage (Ayene-ne Miras)*, vol. 3, p. 1-44.

– (2012), « Les démonstrations par l'absurde dans les Éléments d'Euclide : inventaire, formulation, usages », in *Séminaire d'épistémologie et d'histoire des idées mathématiques*, Paris, France.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

VUILLIER Gaston (1994), *Portraits des mathématiciens Charles Briot, Victor Puiseux, Jean-Claude Bouquet, Charles Hermite et Joseph Bertrand.* Le Centenaire de l'École normale (1795-1895) : Édition du Bicentenaire. Nouvelle édition.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

D

Index des personnalités rencontrées

Nous indiquons dans cet index les noms propres des personnalités rencontrées au cours de cette étude, et qui y sont mentionnées à d'autre titre qu'en tant qu'auteurs de manuels, même si certains d'entre eux le sont également.

Les noms des auteurs de manuels — du corpus ou en-dehors du corpus — se trouvent par ordre alphabétique dans la bibliographie, partie « sources primaires ».

Les noms figurant en gras dans l'index sont ceux qui bénéficient d'une présentation spécifique en note de bas de page.

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Index

Abria, 155
Ampère, 612
Anaximandre, 299
André (Henri), 296, 297
Apollonius, 299, 346, 376
Archimède, 99, 209, 210, 213, 215, 299, 300, 368, 371, 375, 376, 524–526, 533, 583–585, 619, 620, 644
Arkwright, 214
Arnauld, 104

Bailly, 155–160
Bardin, 134, 154, 156, 158
Batbie, 163
Besso, 297
Biot, 298, 695
Borel, 122, 388
Bourdon, 542, 548, 549, 564
Bourlet, 109, 110, 122
Bretschneider, 298
Buisson, 24, 47, 48, 94, 109, 118–120, 122, 169, 187, 252, 324, 326, 404, 501, 542, 681–683, 686, 695, 700

Camus, 485
Cantor, 298, 447, 696
Caresme, 155
Cauchy, 447, 597, 608, 614, 616, 621, 654, 696
Ceulen (van), 420, 426, 525
Chasles, 112, 115, 116, 298, 325, 541
Chevilliet, 638
Cicéron, 295, 298
Clairaut, 102, 104, 105, 117, 118, 122, 125, 147, 199, 360, 389, 399, 420, 477, 517, 605
Clavius, 298, 352, 353
Coménius, 119
Condorcet, 125
Coriolis, 113
Cournot, 155, 345
Culmann, 327

D'Alembert, 21, 114, 125, 213, 214, 324, 681
Dandelin, 213
Dedekind, 447
Desboves, 598, 653
Descartes, 112, 209, 213, 447, 542
Diderot, 21
Diophante, 543
Duhamel, 598
Dunoyer, 155
Dupanloup, 203
Duruy, 148, 202, 203, 680, 700
Dutrey, 155

Ètex, 155, 156

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Euclide, 102–106, 117, 123, 127, 209, 210, 213, 215, 270–272, 289, 297, 299, 300, 331, 344, 345, 347–352, 354–359, 361, 364, 367–371, 374, 375, 389, 399, 400, 402, 417–420, 426, 444, 446, 454, 468, 469, 473–477, 480, 482, 496, 514, 515, 517, 543, 545, 572, 582–584, 607, 615, 656
Eudoxe, 446

Falloux, 39, 46, 55, 70
Faure, 114
Faye, 155, 163, 165
Ferry, 40, 43, 46, 47, 55, 65, 147, 148, 163, 169, 187, 541, 589, 680, 681, 695
Finck, 113, 114
Fortoul, 40, 42, 65, 67, 104, 115, 148, 153, 161, 500, 628, 645
Fourcy (de), 85, 114
Francœur, 93, 98, 99, 133, 416
Franklin, 214

Gergonne, 209, 210, 296, 327, 346
Gerono, 296, 354, 702
Girard, 118
Gréard, 47
Güdermann, 296
Guizot, 23, 37, 40, 41, 46, 64, 65, 99, 108, 110, 301, 328, 434
Günthern, 298

Hachette, 64
Hadamard, 122
Hayward, 118
Hermite, 571, 589
Héron, 96, 98, 245, 249, 255, 272, 287, 477, 478, 482, 543, 544, 546–551, 565, 566, 568, 569, 593
Hilbert, 300, 326, 327, 583, 605
Hipparque, 213
Hoffmann, 363
Huilier (l'), 213
Huygens, 213

Lacomme, 155, 156
Lafaye, 155
Lagny, 525
Lagout, 121, 135, 167, 411, 683, 686
Lagrange, 213, 696
Laisant, 697
Lambert, 588
Laplace, 113, 209, 213
Le Verrier, 114, 117, 163, 164, 166, 628, 645
Leibniz, 213, 628
Lemoine, 345–347, 349, 352, 355, 357, 359, 361, 421
Liard, 121
Lindemann (von), 300, 427, 571, 588, 589
Liouville, 296, 571, 589, 702
Lorain, 99, 693

Machin, 525
Maclaurin, 597
Mayer, 354
Métius, 99, 209, 210, 213, 215, 524–526, 533, 534
Monge, 106, 112, 115, 116, 126, 416, 687, 692
Müller, 363

Newton, 213, 415, 443
Nicomède, 299

Oughtred, 529

Pape-Carpantier, 109, 118, 119, 203

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Pappus, 112, 299, 376
Parmentier, 638
Pascal, 209, 213
Pécaut, 47
Pestalozzi, 119, 121
Peyrard, 127, 199, 368, 570, 597, 599
Pioche, 524, 526
Platon, 326, 396, 571
Poincaré, 122
Poinsot, 298
Poisson, 113, 115, 628
Poncelet, 110, 112, 130, 209, 210, 213, 214, 633–638, 651, 654, 679, 700
Porphyre, 295, 298
Proclus, 295, 298, 331, 340, 369, 385
Prony (de), 113, 115, 628
Ptolémée, 288, 476–478, 481
Pythagore, 33, 55, 57, 97, 103, 104, 144, 146, 197, 200, 204, 206, 209, 210, 213, 245, 249, 255, 268, 269, 284–290, 293–299, 314, 315, 318, 325, 331, 343, 345, 347, 348, 350–352, 354–360, 362–367, 376, 385, 396, 399–402, 409–412, 414, 443–445, 449, 465, 473, 474, 476–478, 480–483, 495, 496, 498, 514–516, 519, 544–547, 550, 551, 569, 571, 573–575, 592, 593, 656, 659–661

Quételet, 213

Rapet, 118, 119, 448
Rendu, 108
Rey, 411
Reye, 327
Reynaud, 93, 199, 681
Riemann, 643, 648, 650, 654
Rivard, 524
Röth, 298
Rouland, 39, 161
Rousseau, 119
Rutherford, 525

Sacchi, 296
Saigey, 152, 199, 486, 570, 597, 681
Sainte-Lagüe, 529
Salmon, 599, 653
Sarazin, 500
Schwab, 213
Sée, 39, 107, 203
Seguin, 524
Serret (J.-A.), 164–166
Serret P., 529, 598, 653
Simon, 589
Simpson, 525, 635–638, 651, 654
Snellius, 213
Staudt (von), 326, 327
Steiner, 326
Sykora, 297

Taiée, 155
Tannery, 105, 122, 543, 688, 696
Thabit ibn Qurra, 360
Thalès, 213, 389, 402, 428, 519
Treutlein, 297

Umpfenbach, 296

Vega, 525
Viète, 213
Vignally, 155
Vinci (de), 354
Vintéjoux, 48, 92, 104, 109, 120, 178, 179, 182, 183, 185, 189, 193, 201

Wallon, 163, 167

Licence CC BY-NC-ND 3.0

Wantzel, 588
Watt, 214

Zévort, 107

Licence CC BY-NC-ND 3.0