

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenance prévue à Aix-Marseille Université
le 8 juin 2022 par

Youssera EL ARCHI

Caractérisation et modélisation des élastomères pour amortir des structures composites

Version Provisoire

Discipline

Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité

Mécanique des solides

École doctorale

ED 353 SCIENCES POUR
L'INGENIEUR : MECANIQUE,
PHYSIQUE, MICRO ET NA-
NOELECTRONIQUE

Laboratoire/Partenaires de recherche

Laboratoire de Mécanique
et d'Acoustique
(LMA - UMR 7031 AMU -
CNRS - Centrale Marseille)
Safran Composites

Composition du jury

Prof. Alexander Lion	Universität der Bundeswehr München	Examineur
Dr. Renald Brenner	Sorbonne Université	Rapporteur
Prof. Stéphane Méo	Université de Tours	Rapporteur
Dr. Lucie Rouleau	CNAM	Examinatrice
Prof. Etienne Balmes	ENSAM	Examineur
Dr. Bastien Tranquart	Safran Composites	Invité
Dr. Alexandre Jouan	Safran Composites	Invité
Prof. Noël Lahellec	Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Dr. Stéphane Lejeunes	CNRS / LMA	CoDirecteur de thèse

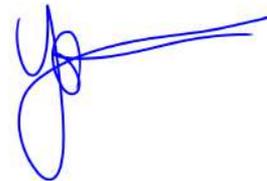


Affidavit

Je soussignée, Youssera El Archi, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Noël Lahellec et Stéphane Lejeunes dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Marseille le 25/03/2022



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Liste de publications et participation aux conférences

Liste des publications réalisées dans le cadre du projet de thèse :

1. *Multiscale simulation and experimental analysis of damping in CFRP structures containing rubber*, Youssera El Archi, Noël Lahellec, Stéphane Lejeunes, Alexandre Jouan, Bastien Tranquart, Composites Structures, Volume 289.

Participation aux conférences et écoles d'été au cours de la période de thèse :

1. *Amortissement de structures composites : modélisation et comparaison de solutions technologiques utilisant de l'élastomère*, Journées Nationales sur les Composites 22, 28-30 juin 2021.
2. *Damping in CFRP Structures : Modelling and Comparison of Technological Solutions Using Elastomer*, 8th ECCOMAS Thematic Conference on the Mechanical Response of Composites (Composites 2021) Online event, 22-27 septembre 2021.
3. *Virtual testing methods of the dynamic behavior of CFRP damped with rubber*, Gumference 2022, 15 février 2022.

Résumé

Dans le cadre de cette thèse cife avec Safran Composites, il est question d'étudier des technologies amortissantes pour les structures tournantes des nouvelles générations de turboréacteurs d'avion afin de minimiser les effets des instabilités vibratoires comme le flottement.

Les technologies d'amortissement envisagées reposent sur l'introduction d'élastomère dissipatif dans la structure soit en surface (patch viscoélastique contraint) soit dans le matériau composite au niveau de la microstructure (fonctionnalisation).

C'est pourquoi la première partie de ce travail est dédiée à la caractérisation expérimentale du comportement mécanique d'un élastomère cible pour cette application. Cette caractérisation a consisté en des essais statiques et dynamiques sur une certaine plage de fréquences et d'amplitudes et pour différents modes de sollicitation.

A partir de ces observations, un modèle de loi de comportement phénoménologique basé sur le modèle de Maxwell généralisé formulé en grandes déformations est proposé et permet de prédire la réponse du matériau de l'étude à différentes sollicitations. Un point particulier est porté sur la prise en compte de l'effet Payne traduisant une dépendance à l'amplitude de chargement dynamique par une approche originale. L'identification des paramètres du modèle à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel est réalisée à l'aide d'une méthode robuste et rapide. L'implémentation de la loi de comportement dans un code de calculs éléments finis a permis de valider l'approche sur des simulations d'essais multi-axiaux.

Puis, une étude numérique comparative de différentes solutions d'amortissement se basant sur l'introduction d'élastomère à l'échelle de la microstructure d'un composite est effectuée dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Les insertions d'élastomère à l'échelle microscopique sont de deux types : la première est une microstructure dans laquelle toutes les fibres de carbone sont enrobées par une fine couche d'élastomère et la seconde est une microstructure dans laquelle il y a coexistence de fibres de carbone et de fibres d'élastomère. On compare ces solutions à une dernière technologie d'amortissement qui est, quant à elle, mise en place à l'échelle macroscopique, le patch d'élastomère contraint.

Mots-clés : élastomères, hyperviscoélasticité, homogénéisation, amortissement des composites

Abstract

Within the framework of this thesis with Safran, this work aims to study damping technologies for the rotating structures of the new generations of aircraft turbojets in order to minimize the effects of vibratory instabilities such as flutter.

Some damping technologies rely on the introduction of dissipative elastomer in the structure either on the surface (constrained viscoelastic patch) or in the composite material at the microstructure level (hybridization).

This is why the first part of this work is dedicated to the experimental characterization of the elasto-dissipative behavior of a target elastomer for this application (a carbon black filled rubber). This characterization consisted of static and dynamic tests over a certain range of frequencies and amplitudes and on different loading types (uni-axial and bi-axial).

From these experimental observations, a phenomenological behavior model based on the generalized Maxwell model is suggested. A particular point is made on the consideration of the Payne effect by an original approach. The identification of the parameters of the model in both the time and frequency domains is performed using a robust and fast method. The model describes fairly well the behavior of the material. The implementation of the behavior law in a finite element code allowed to validate the approach on multi-axial test simulations.

Then, a comparative numerical study of different damping solutions based on the introduction of elastomer at the microstructure scale of a composite is carried out in the framework of linear viscoelasticity. The elastomer inserts at the microscopic scale are of two types: the first is a microstructure in which all the carbon fibers are coated with a thin layer of elastomer and the second is a microstructure in which there is coexistence of carbon fibers and elastomer fibers. These solutions are compared to a last damping technology which is implemented on a macroscopic scale, the constrained elastomer patch.

Keywords: rubber characterization, non-linear finite viscoelasticity, homogenization, CFRP damping

Remerciements

Table des matières

Affidavit	2
Liste de publications et participation aux conférences	3
Résumé	4
Abstract	5
Remerciements	6
Table des matières	7
Table des figures	10
Liste des tableaux	15
Introduction	16
1 Caractérisation mécanique du matériau de l'étude	20
1.1 Présentation de la campagne expérimentale	21
1.1.1 Objectifs de la campagne expérimentale	21
1.1.2 Moyens d'essais	22
1.2 Résultats de la campagne d'essais	28
1.2.1 Caractérisation du comportement quasi-statique	28
1.2.2 Caractérisation du comportement sous chargement harmonique	35
1.2.3 Essais de compression confinée	43
1.2.4 Influence de la température d'essai	46
1.2.5 Principe d'équivalence temps-température	49
1.2.6 Campagne de vieillissement thermique	51
1.3 Conclusion	56
2 Modélisation du comportement des élastomères	58
2.1 Introduction	60
2.1.1 Éléments de bibliographie sur l'hyperélasticité	60
2.1.2 Éléments de bibliographie sur la viscoélasticité	65
2.1.3 Éléments de bibliographie sur la description de l'effet Payne . .	68
2.2 Présentation du modèle hyperviscoélastique	71
2.2.1 Démarche choisie et objectifs du modèle	71
2.2.2 Équations constitutives du modèle de Maxwell généralisé	72

2.2.3	Linéarisation du modèle et exploitation dans le domaine fréquentiel	80
2.3	Identification des paramètres du modèle	89
2.3.1	Formes analytiques de la contrainte	90
2.3.2	Identification des paramètres de la branche hyperélastique sous contrainte de stabilité matérielle	93
2.3.3	Identification des paramètres des branches de Maxwell	96
2.3.4	Validation du modèle sous chargement multi-axial	104
2.4	Conclusion	109
3	Modélisation et homogénéisation de composites hybrides	111
3.1	Introduction	112
3.1.1	Objectifs	112
3.1.2	Éléments de bibliographie	114
3.2	Modélisation des composites hybrides étudiés	116
3.2.1	Démarche	116
3.2.2	Définition des matériaux de l'étude et données utilisées	117
3.2.3	Définition du problème d'homogénéisation	122
3.2.4	Détermination d'une cellule représentative du composite	127
3.2.5	Résultats de l'homogénéisation des microstructures hybrides	130
3.3	Conclusion	134
4	Amortissement des structures composites hybrides	136
4.1	Introduction	137
4.1.1	Éléments de bibliographie sur les technologies d'amortissement	137
4.1.2	Objectifs	143
4.2	Mise en place des calculs sur structure	143
4.2.1	Procédure	143
4.2.2	Validation expérimentale du modèle numérique	144
4.3	Comparaison des solutions technologiques	148
4.3.1	Comparaison dans le cadre de la viscoélasticité linéaire	148
4.3.2	Comparaison dans le cadre de la viscoélasticité non-linéaire	151
4.4	Conclusion	153
	Conclusion Générale	154
	Bibliographie	158
	ANNEXES	179
A	Matrice d'essais réalisés	179
B	Etude domaine validité DMA	182
C	Influence de la précharge statique sur les DMA en traction	184
D	Essais de relaxation par palier en compression hydrostatique à 70°C	186
E	Caractérisation DMA des éprouvettes de cisaillement vieilles	187
F	Formalisme grandes déformations et principes de la thermodynamique	188
F.1	Préliminaires : outils pour la description des grandes déformations	188

G	Étude comparative de différents modèles hyperélastiques	193
H	Résolution du problème d'homogénéisation	195
	H.1 Résolution par éléments finis	195
	H.2 Résolution par Transformées de Fourier	196
	H.3 Comparaison des méthodes sur un cas simple	198
	H.4 Obtention de l'opérateur de Green	205
I	Modules complexes issus de l'homogénéisation des microstructures hybrides	208
J	Implémentation EF de la loi de comportement	212

Table des figures

0.1	Schéma de principe d'un réacteur double flux avec soufflante (a) et photo du LEAP-1B (b) (aubes de soufflante en premier plan)	16
1.1	Les différents types d'éprouvettes utilisés pour la campagne de caractérisation	23
1.2	Illustration du cycle de polymérisation et de finition de la structure composite appliqué à l'élastomère	24
1.3	Récapitulatif des essais et traitements thermiques réalisés	25
1.4	Machines d'essai et enceinte thermique	26
1.5	Élongation vraie et élongation globale sur éprouvette H2	27
1.6	Chargement effectué pour la caractérisation de l'effet Mullins	28
1.7	Réponse en traction sur éprouvette vierge et cuite	29
1.8	Réponse en cisaillement sur éprouvette vierge et cuite	29
1.9	Courbe de déplacement imposé sur une éprouvette de cisaillement. . .	31
1.10	Paliers de contrainte de traction Π_{11} normalisée par la déformation atteinte sur chaque palier λ pour la phase de montée en amplitude statique.	31
1.11	Paliers de contrainte de cisaillement Π_{12} normalisée par la déformation atteinte sur chaque palier γ pour la phase de montée en amplitude statique.	32
1.12	Tracés des courbes d'hystérésis d'équilibre en traction et en cisaillement	32
1.13	Superposition de la contrainte de la première montée en charge de l'essai de relaxation par paliers en cisaillement et en traction	34
1.14	Relaxation des contraintes de traction et de cisaillement sur les paliers de la phase montée des essais de relaxation par paliers (sur éprouvettes cuites).	35
1.15	Description du chargement effectué	38
1.16	Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour la traction avec $\varepsilon_d=0.6\%$	39
1.17	Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour le cisaillement avec $\gamma_d=1.8\%$	39
1.18	Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour la traction à une fréquence de 3Hz.	40
1.19	Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour le cisaillement à une fréquence de 3Hz.	41
1.20	Module de stockage et module de perte en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de précharges avec $\gamma_d=1.8\%$	42

1.21	Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour différentes valeurs de précharges avec $\gamma_d=1.8\%$	42
1.22	Montage utilisé pour les essais de compression confinée	43
1.23	Charge-décharge quasi-statique sur plot confiné.	44
1.24	Chargement de relaxation par palier en compression confinée.	45
1.25	Contrainte axiale en réponse au chargement de relaxation par palier en fonction du temps.	45
1.26	Boucles d'hystérésis d'équilibre aux trois températures d'essai pour les éprouvettes de traction (a) et de cisaillement cuites (b).	46
1.27	Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour les températures -40°C et 70°C , à une fréquence de 3Hz.	47
1.28	Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour les températures -40°C et 70°C , à une fréquence de 3Hz.	48
1.29	Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour 70°C	48
1.30	Construction d'une courbe maitresse à la température de référence T_0 . Ici on a $T_2 > T_0 > T_1$	50
1.31	Facteurs de translation horizontale utilisés pour construire la courbe maitresse de l'élastomère.	51
1.32	Courbe DMA du module de cisaillement et de son facteur de perte associé pour l'élastomère	51
1.33	Préparation des éprouvettes pour le vieillissement	53
1.34	Hystérésis d'équilibre d'éprouvette vieillie en traction et en cisaillement sur essais de relaxation par palier à température ambiante	53
1.35	Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour éprouvette de traction vieillie, éprouvette cuite et éprouvette vierge	54
1.36	Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour éprouvette de traction vieillie, éprouvette cuite et éprouvette vierge	55
2.1	Décomposition des micromécanismes de déformation (issue de YING LI et al. 2016).	68
2.2	Schéma rhéologique d'une branche de Maxwell	70
2.3	Schéma rhéologique du modèle de Maxwell généralisé et décomposition du gradient de la transformation	75
2.4	Étude paramétrique des paramètres du modèle de variable interne décrivant l'effet Payne, pour un cas de traction cyclique avec $N(\mathbf{B}) = \lambda(t)^2 + \frac{2}{\lambda(t)} - 3$	79
2.5	Description du chargement pour lequel la linéarisation est effectuée	81
2.6	Définition du chargement-test appliqué	87
2.7	Réponse en contrainte de Cauchy calculée à partir du modèle non-linéaire et du modèle linéarisé autour de la précharge	87
2.8	Résultats après identification des paramètres de la branche hyperélastique sur la phase de montée des essais de relaxation par palier	95

2.9	Réponses en contrainte des essais de relaxation par paliers, essais et modèle identifié	99
2.10	Contraintes de traction et de cisaillement issues du modèle identifié sur les paliers de la phase montée des essais de relaxation par paliers. . . .	100
2.11	Modules d'Young identifiés et expérimentaux en fonction de la fréquence pour deux précharges différentes, pour une amplitude dynamique ε_d de 0.6%.	101
2.12	Modules de cisaillement identifiés et expérimentaux en fonction de la fréquence pour deux précharges différentes, avec une amplitude dynamique γ_d de 1.8%.	102
2.13	Modules de cisaillement identifiés et expérimentaux en fonction de l'amplitude de sollicitation harmonique pour deux précharges différentes à une fréquence de 3Hz	102
2.14	Modules de Young identifiés et expérimentaux en fonction de l'amplitude sollicitation harmonique pour deux précharges différentes à une fréquence de 3Hz	103
2.15	Modèle éléments finis de l'éprouvette diabolo et son repère cylindrique associé (e_r, e_θ, e_z)	104
2.16	Chargement en traction appliqué	106
2.17	Contrainte de traction obtenue à partir du code source sur Mathematica et celle obtenue par éléments finis avec l'UMAT	106
2.18	Contrainte de cisaillement obtenue à partir du code source sur Mathematica et celle obtenue par éléments finis avec l'UMAT	107
2.19	Comparaison essai-calcul sur éprouvette diabolo pour $\varepsilon_{\theta z}^s = 50\%$ et $\varepsilon_{zz}^d = 5\%$	108
2.20	Comparaison essai-calcul sur éprouvette diabolo pour $\varepsilon_{\theta z}^s = 50\%$ et $\varepsilon_{zz}^d = 20\%$	109
3.1	Observation au microscopie électronique à balayage de la distribution de fibres de verre dans un composite unidirectionnel avec un taux de 48% de fibres de verre et 52% de résine epoxy issue de ALBEROLA et BENZARTI 1997.	113
3.2	Les microstructures étudiées : (a)La microstructure de "Référence" : contient seulement de la résine et des fibres de carbone. (b) La microstructure de co-tissé : contient des fibres d'élastomère en plus des fibres de carbone avec les mêmes propriétés géométriques. (c)La microstructure d'enrobé : contient des fibres de carbone enrobées par une fine couche d'élastomère (zoom en figure (d)).	114
3.3	Facteurs de translation horizontale utilisés pour construire la courbe maitresse pour la résine.	118
3.4	Courbe DMA du module de cisaillement et de son facteur de perte associé pour la résine	118

3.5	Exemple d'évolution théorique d'un coefficient de Poisson complexe issu de PRITZ 1998 en échelle semi-logarithmique. $v_d(\omega)$ représente la partie réelle de v^* , v_I la partie imaginaire et η_v le facteur de perte. . . .	120
3.6	Courbe maitresse du module de compressibilité et de son facteur de perte associé pour la résine	121
3.7	Courbe maitresse du module de compressibilité et de son facteur de perte associé pour l'élastomère	121
3.8	Schéma de quatre cellules de base d'un milieu périodique simple . . .	124
3.9	Déformation macroscopique calculée et son erreur associée pour les différents maillages pour les 4 chargements étudiés : $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{33}$ et $\bar{\sigma}_{12}$	129
3.10	Erreur à l'isotropie transverse en fonction du nombre de fibres - moyenne et écart-type basés sur 10 tirages de microstructures pour chaque nombre de fibres	130
3.11	Module complexe $\tilde{\alpha}^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\alpha^*)$, module de perte $\text{Im}(\alpha^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\alpha^*})$	132
3.12	Facteurs de perte associés aux modules complexes $\tilde{\beta}^*$, $\tilde{\gamma}^*$, $\tilde{\delta}_T^*$ et $\tilde{\delta}_L^*$. . .	133
4.1	Calcul du facteur d'amortissement au niveau d'un pic de résonance . .	141
4.2	Réponse d'un système à un degré de liberté en oscillations libres	142
4.3	Montage des essais Oberst : a) schéma avec dimensions, b) Photo du montage avec les accéléromètres de mesure ainsi que leurs câbles . . .	145
4.4	Séquences d'empilement des échantillons utilisés : un stratifié quasi-isotrope à 8 plis sans élastomère $L0$ et un stratifié quasi-isotrope 16 plis avec un patch en élastomère au centre $L0 - Elasto - L0$	145
4.5	Pics de résonance associés au 1er mode de vibration pour les stratifiés représentés en figure 4.4, essai et calcul.	146
4.6	Facteur d'amortissement en fonction des fréquences de résonance des trois premiers modes de vibration. Ligne continue pour les simulations et ligne pointillée pour les essais.	147
4.7	Seconde configuration de patch étudiée	148
4.8	Facteur d'amortissement en fonction des 3 premières fréquences de résonance : (a) stratifié $[0]_{4S}$, (b) stratifié $[90]_{4S}$ et (c) stratifié $[-45, 90, 45, 0]_S$	149
4.9	Stratifié $C3$	151
4.10	Pic de résonance associé au premier mode de flexion de la structure $C3$, calcul en viscoélasticité linéaire et calcul avec loi de comportement non-linéaire pour l'élastomère	152
A.1	Cuisson des éprouvettes d'élastomères à l'autoclave - 1	181
A.2	Cuisson des éprouvettes d'élastomères à l'autoclave - 2	181
B.1	Transformée de Fourier discrète du signal de force pour trois sollicitations à trois amplitudes dynamiques différentes : $\gamma^d = 6.25\%$, $\gamma^d = 38.12\%$ et $\gamma^d = 73.75\%$	182

B.2	Transformée de Fourier discrète du signal de force normalisée par le coefficient associé à la fréquence du fondamental pour trois sollicitations à trois amplitudes dynamiques différentes : $\gamma^d = 6.25\%$, $\gamma^d = 38.12\%$ et $\gamma^d = 73.75\%$	183
C.1	Module de stockage et module de perte en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de précharges	184
C.2	Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour différentes valeurs de précharges	185
D.1	Contrainte en fonction du temps pour les relaxations par palier en compression hydrostatique sur plot cuit et vierge	186
E.1	Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour éprouvette de cisaillement vieillie, éprouvette cuite et éprouvette vierge	187
E.2	Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour éprouvette de cisaillement vieillie, éprouvette cuite et éprouvette vierge	187
G.1	Contrainte de traction identifiée avec plusieurs modèles hyperélastiques	193
G.2	Contrainte de cisaillement identifiée plusieurs modèles hyperélastiques	194
H.1	Définition des conditions aux limites de deux points opposés sur les bords d'une cellule de base	195
H.2	Exemples de discrétisations d'une image de VER	199
H.3	Erreur sur la contrainte par rapport au calcul de référence à 100 millions de pixels	200
H.4	Comparaison du module complexe dans le sens des fibres obtenu à partir de l'homogénéisation d'un même VER carbone-résine par FFT et EF	202
H.5	Comparaison du module complexe de compressibilité plane obtenu à partir de l'homogénéisation d'un même VER carbone-résine par FFT et EF	203
H.6	Comparaison du module complexe de cisaillement transverse obtenu à partir de l'homogénéisation d'un même VER carbone-résine par FFT et EF	204
I.1	Module complexe $\tilde{\beta}^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\beta^*)$, module de perte $\text{Im}(\beta^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\beta^*})$	208
I.2	Module complexe $\tilde{\gamma}^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\gamma^*)$, module de perte $\text{Im}(\gamma^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\gamma^*})$	209
I.3	Module complexe $\tilde{\delta}_T^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\delta_T^*)$, module de perte $\text{Im}(\delta_T^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\delta_T^*})$	210
I.4	Module complexe $\tilde{\delta}_L^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\delta_L^*)$, module de perte $\text{Im}(\delta_L^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\delta_L^*})$	211

Liste des tableaux

1.1	Taux de variation de masse moyen entre avant et après immersion dans le xylène. Pour éprouvette vierge et éprouvette cuite.	30
1.2	Mesure du module de compressibilité statique pour éprouvette vierge et éprouvette cuite	44
2.1	Quelques modèles polynomiaux	62
2.2	Exemples de fonctions d'incompressibilité	63
2.3	Modèles hyperélastiques récents	64
2.4	Paramètres de la branche hyperélastique identifiés et valeur de l'erreur	95
2.5	Paramètres des branches de Maxwell identifiés	98
3.1	Taux volumique et masse volumique de chaque constituant	117
3.2	Propriétés élastiques des fibres de carbone	117
3.3	Coefficients de Poisson de la résine et de l'élastomère	120
3.4	Tailles de maille étudiées	128
4.1	Exemples industriels de contrôle actif et passif	137
4.2	Comparaison des facteurs d'amortissement et des fréquences de résonance issues des essais et des simulations pour le premier mode de flexion	146
4.3	Facteur d'amortissement et fréquence de résonance issus du calcul viscoélastique linéaire et du calcul non-linéaire avec UMAT, premier mode de flexion	152
B.1	Taux de distorsion harmonique avec bruit pour les réponses aux signaux d'amplitude dynamique différente.	183
G.2	Les modèles polynomiaux testés	193
H.3	Propriétés matériau arbitraires définies pour les calculs	201

Introduction générale

Contexte industriel et scientifique

En aéronautique, certains turboréacteurs de dernière génération ont des aubes de soufflante d'entrée (voir figure 0.1) en composite tissées 3D (interlock) de fibres de carbone.

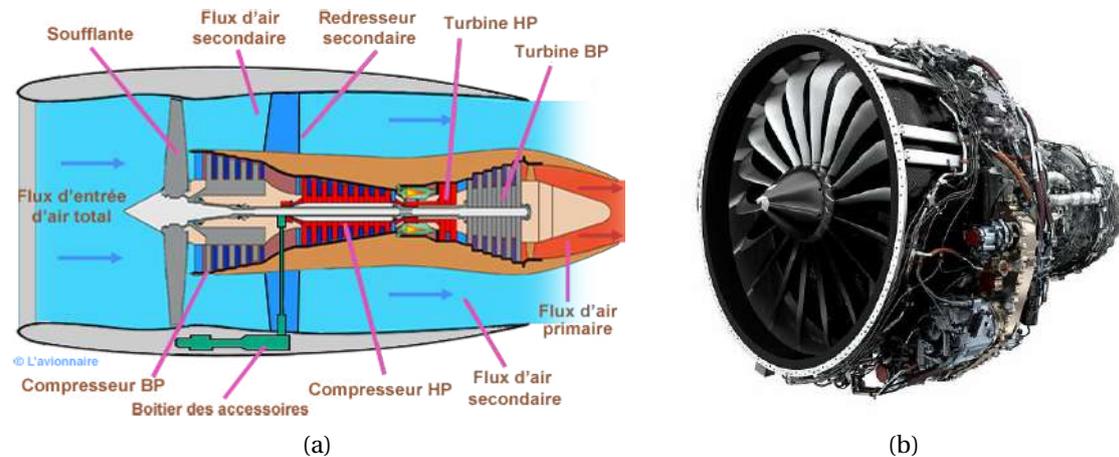


FIGURE 0.1. – Schéma de principe d'un réacteur double flux avec soufflante (a) et photo du LEAP-1B (b) (aubes de soufflante en premier plan)

L'amortissement des structures tournantes, telles que les aubes, est une préoccupation industrielle majeure pour le contrôle des instabilités vibratoires, comme le flottement en vol par exemple, qui peut conduire à la dégradation de ces aubes (voir MARSHALL et IMREGUN 1996 pour une revue des effets aéroélastiques sur les aubes de turbomachines ou plus récemment VAHDATI et al. 2020 qui montre que le flottement est toujours une préoccupation majeure pour les moteurs d'avions modernes). Le flottement est une vibration instable et auto-entretenue due à l'interaction entre les efforts aérodynamiques et les modes propres de la structure. Ce type d'instabilité se produit à des fréquences relativement basses, c'est-à-dire autour des premier, deuxième et troisième modes propres des aubes. La réduction de l'effet de cette instabilité permettrait d'augmenter la durée de vie des pièces structurales, de réduire le bruit global du moteur mais aussi de bénéficier de plages de fonctionnement des moteurs encore inexploitées. C'est pourquoi il est nécessaire de mettre en œuvre des solutions innovantes pour améliorer l'amortissement d'une telle structure autour de ses premiers modes propres.

Différents moyens d'améliorer l'amortissement existent, parmi ces techniques on peut distinguer :

- ▶ les techniques dites passives utilisant des matériaux dissipatifs comme les élastomères dont les propriétés viscoélastiques permettent la dissipation d'énergie mécanique par effet Joule. Ces technologies sont aujourd'hui très utilisées dans l'industrie automobile et aéronautique. Cette solution est par exemple utilisée dans les systèmes rotors d'hélicoptère, voir Alexis DELATTRE 2014, ou encore dans les silentbloks des supports moteur de voiture. Il existe également les technologies basées sur le frottement entre des pièces.
- ▶ les technologies actives utilisant des couplages électromécaniques : des solutions technologiques électromagnétiques qui reposent sur l'utilisation d'aimants et de bobines ou encore des solutions piézoélectriques, voir THIERRY 2016. Il existe également des technologies à base de fluide magnétorhéologique qui peuvent être utilisées pour les suspensions de voiture (SLEIMAN 2010).

Cette étude, financée par une bourse CIFRE en collaboration avec Safran Composites, porte sur les technologies d'insertion d'un matériau élastomère dissipatif dans la structure. Ces solutions ont l'avantage d'être peu coûteuses, peu encombrantes, et relativement fiables d'un point de vue industriel et en terme de durée de vie.

Problématiques de recherche et objectifs

Le choix d'un élastomère pour une telle application est motivé par plusieurs facteurs, premièrement et en toute logique, l'élastomère de l'étude est choisi pour sa capacité à fortement dissiper de l'énergie. Qui plus est, le matériau doit répondre à un certain nombre de critères liés à l'application. Le matériau élastomère de l'étude est fourni par une entreprise externe à Safran, il s'agit d'un élastomère réticulé au soufre et chargé en noirs de carbone mais sa composition précise est inconnue.

Les propriétés du matériau étant inconnues, le premier objectif de la thèse est de caractériser les propriétés mécaniques de ce dernier. Cette caractérisation doit reposer sur un cahier des charges donné par l'application visée ainsi que son environnement (turboréacteur). Ce cahier des charges permet de définir quelles grandeurs (amplitude et fréquence du chargement mécanique, température) sont susceptibles d'influencer le comportement du matériau et sur quelles plages il est nécessaire de le connaître. On cherche notamment à apporter des éléments sur les phénomènes non-linéaires pouvant apparaître sur le comportement du matériau tels que l'influence d'une précharge sur sa réponse dynamique ou encore l'effet Payne qui décrit l'influence de l'amplitude dynamique.

Une fois le comportement de l'élastomère caractérisé, l'industriel doit pouvoir le prédire par l'intermédiaire d'une loi de comportement. C'est pourquoi le deuxième objectif de cette thèse est de proposer une loi de comportement ainsi que son implémentation dans un code de calcul numérique. Cette loi de comportement doit

modéliser tous les effets non-linéaires observés dans le comportement du matériau comme ceux cités précédemment pour des sollicitations axiales ou multi-axiales. Ces problématiques sont encore très ouvertes et les outils de calcul industriels ne permettent pas encore de les explorer.

Une autre problématique se pose sur comment incorporer cet élastomère sans altérer les caractéristiques avantageuses du matériau composite. En effet, le design des aubes est très contraint, les dimensions sont fixées et le but est d'éviter de rajouter de la masse significativement sur la structure, ce qui diminuerait la plage de régimes moteur atteignables. C'est pourquoi le troisième objectif de cette thèse est d'explorer les différentes façons d'incorporer l'élastomère dans des structures composites et d'étudier l'impact de son comportement sur la réponse vibratoire de ces structures, le tout dans une démarche d'amélioration des performances pour un surcoût raisonnable sans changer grandement la rigidité et le process industriel de fabrication des aubes.

Organisation du manuscrit

La démarche mise en place pour cette étude est présentée en quatre chapitres.

Le chapitre 1 présente l'ensemble des résultats de la campagne de caractérisation de l'élastomère de l'étude sur des éprouvettes de traction, de cisaillement et de compression confinée. Cette campagne s'est articulée autour de différents sous-objectifs. Premièrement, le comportement quasi-statique du matériau est mis en évidence avec des essais cycliques à faibles vitesses et de relaxation par paliers. Ensuite, afin d'explorer le caractère élasto-dissipatif non-linéaire du matériau, une campagne d'essais sous chargement harmonique a été réalisée en étudiant l'influence de la fréquence du chargement, de l'amplitude dynamique mais également de l'application d'une pré-déformation statique. L'ensemble de ces essais sont réalisés sur des éprouvettes ayant subi des traitements thermiques différents dont un qui reproduit le procédé de fabrication et d'assemblage de la structure composite à amortir. Ces variables d'intérêt sont étudiées dans des plages de valeurs définies en grande partie par les conditions environnementales de l'application industrielle. Enfin, ces essais de caractérisation sont réalisés à trois températures différentes : -40°C , 20°C et 70°C .

A partir de cette caractérisation, on propose dans le chapitre 2, une loi de comportement hyper-viscoélastique basée sur une approche phénoménologique permettant de prédire le comportement de l'élastomère sous différents types de chargements. Une attention particulière est portée à la prise en compte de l'effet Payne qui a été mis en évidence dans le chapitre 1. On propose ensuite une procédure de linéarisation de ce modèle dans un cas de figure particulier : pré-chargement statique superposé à un chargement harmonique de faible amplitude. Cette procédure nous permet d'obtenir des relations analytiques reliant contrainte et déformation dans le domaine fréquentiel pour une loi à la base non-linéaire et rend ainsi possible la comparaison directe du modèle avec les essais harmoniques du chapitre 1. Après identification des paramètres du modèle et implémentation de la loi dans un code de calcul commercial,

la confrontation des résultats du modèle avec les essais permet de conclure quant à la capacité du modèle à traduire les phénomènes observés en fonction du temps, de la fréquence ou de l'amplitude.

Le chapitre 3 présente une étude comparative de différentes solutions d'amortissement utilisant de l'élastomère à l'échelle de la microstructure d'un matériau composite. Deux insertions différentes sont étudiées : La première, appelé l'enrobé, est une microstructure dans laquelle toutes les fibres de carbone sont enrobées par une fine couche d'élastomère et la deuxième, appelé le cotissé, est une microstructure dans laquelle des fibres d'élastomère sont introduites en plus des fibres de carbone. Cette comparaison est basée sur une procédure d'homogénéisation de ces composites dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. La reconstruction des modules complexes associés aux tenseurs effectifs en fonction de la fréquence permet de comparer le comportement dissipatif des différentes microstructures et favorise la technologie d'enrobé dans ce cadre.

Enfin, dans le chapitre 4 on compare les solutions d'insertion microscopiques à une autre solution d'amortissement plus répandue qui consiste à assembler un patch d'élastomère directement sur la structure composite. Il s'agit donc d'une technologie d'insertion à l'échelle macroscopique. Cette comparaison est basée sur le calcul du facteur d'amortissement sur les trois premiers modes de flexion de structures composites stratifiées. S'agissant d'une comparaison, à l'échelle macro, entre composite résine-carbone avec patch élastomère et composites résine-carbone-élastomère, on utilise les comportements effectifs des microstructures hybrides obtenues au chapitre 3 pour définir le comportement des plis composant les stratifiés associés. Différentes configurations de stratifiés sont étudiées afin de relier les paramètres géométriques de ces derniers au comportement plus ou moins dissipatif du patch élastomère. Pour finir, on met en place des simulations sur stratifié avec patch élastomère dont le comportement est décrit par le modèle non-linéaire du chapitre 2 pour évaluer sa capacité à estimer l'amortissement de structure en tenant compte d'un état précontraint.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude

Sommaire

1.1	Présentation de la campagne expérimentale	21
1.1.1	Objectifs de la campagne expérimentale	21
1.1.2	Moyens d'essais	22
1.1.2.1	Les éprouvettes et leurs traitements thermiques	22
1.1.2.2	Machines d'essais	25
1.1.2.3	Correction sur la mesure de déformation en traction	26
1.2	Résultats de la campagne d'essais	28
1.2.1	Caractérisation du comportement quasi-statique	28
1.2.1.1	Essais cycliques de caractérisation de l'effet Mullins	28
1.2.1.2	Essais de relaxation par paliers	30
1.2.2	Caractérisation du comportement sous chargement harmonique	35
1.2.2.1	Essais DMA	35
1.2.2.2	Influence de la fréquence de chargement	38
1.2.2.3	Influence de l'amplitude dynamique de chargement	40
1.2.2.4	Influence de la précharge statique sur les deux balayages	41
1.2.3	Essais de compression confinée	43
1.2.4	Influence de la température d'essai	46
1.2.5	Principe d'équivalence temps-température	49
1.2.6	Campagne de vieillissement thermique	51
1.2.6.1	Généralités sur le vieillissement	51
1.2.6.2	Description du protocole de vieillissement	52
1.2.6.3	Influence sur le comportement statique	53
1.2.6.4	Influence sur le comportement dynamique	54
1.3	Conclusion	56

1.1. Présentation de la campagne expérimentale

1.1.1. Objectifs de la campagne expérimentale

Cette campagne de caractérisation a pour but premier d'évaluer le comportement dissipatif de l'élastomère visé pour l'application industrielle sous différentes conditions thermiques représentatives de l'environnement d'un turboréacteur d'avion.

Dans un second temps, toujours au regard de la finalité industrielle, les essais jugés les plus pertinents sont extraits de cette campagne pour identifier un modèle de loi de comportement mécanique qui, lui-même, pourra être utilisé pour le calcul numérique de pièces structurales.

D'autre part, l'effet Mullins ne sera pas étudié dans le but d'être prédit, en effet, pour l'application visée, ce dernier est très rapidement supprimé pour faire place au comportement accommodé de l'élastomère. Cela s'explique par le fait que dans les turboréacteurs d'avions sous conditions opérationnelles (au démarrage ou en vol), la vitesse des mécanismes rotatifs (de l'ordre de 80 Hz au niveau du compresseur basse pression du moteur *LEAP-1B*) mis en jeu est telle que les pièces en élastomère atteindraient quasi-instantanément leur comportement stabilisé au regard de cet effet.

L'effet Mullins est donc stabilisé avant chaque essai par l'application de cycles à plus grande amplitude par rapport au chargement souhaité. C'est pourquoi il est nécessaire de caractériser ce dernier pour définir le nombre de cycles nécessaire à la stabilisation de la réponse de l'élastomère.

Les conditions environnementales de l'application visée ont motivé les paramètres d'essais suivants.

- ◆ Une plage de fréquences cible de 10 à 100Hz qui englobe la plage d'évolution de la fréquence propre du premier mode de vibration en flexion de l'aube fan. Ce mode fait partie des modes d'intérêt à amortir pour gagner en marge sur les instabilités aéroélastiques telles que le flottement.
- ◆ Une plage de températures allant de -40°C à 70°C qui combinent à la fois les températures extrêmes de l'environnement extérieur à l'avion et les températures que peut voir l'élastomère dans la structure (à cause du flux d'air).
- ◆ En fonction de la technologie envisagée pour l'incorporation de l'élastomère dans la structure, une combinaison d'un chargement statique avec un chargement vibratoire d'amplitude variable peut avoir lieu. C'est pourquoi, il est choisi d'étudier le matériau sous amplitudes de déformation pouvant aller jusqu'à 100% en combinant pré-charge statique et amplitude dynamique.
- ◆ L'assouplissement pour éliminer l'effet Mullins sera réalisé à l'aide d'un pré-chargement cyclique d'amplitude de déformation de 120% sur un nombre N de cycles jugé assez grand.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.1. Présentation de la campagne expérimentale

Les conditions explicitées ci-dessus ont motivé le choix d'effectuer la campagne expérimentale à trois températures différentes : une température froide -40°C, une température proche de la température ambiante 20°C ainsi qu'une température chaude 70°C. Cette campagne portera sur la caractérisation à la fois statique et dynamique avec un accent particulier sur l'effet de la fréquence ainsi que de l'amplitude dynamique de sollicitation, le tout avec et sans précharge statique. Les effets de la **température d'essai** sont discutés uniquement en partie 1.2.4, dans les autres paragraphes sont détaillés les essais réalisés à **température ambiante**. En parallèle de cette étude et toujours en lien fort avec les objectifs industriels, il est proposé d'analyser les conséquences d'un vieillissement thermique sur le comportement mécanique afin de comprendre les mécanismes de dégradation du matériau sous environnement agressif. On étudie également l'influence d'un cycle thermique de cuisson d'une pièce composite, ce qui est expliqué par le fait que l'élastomère serait introduit dans le composite avant l'étape de polymérisation de la résine et ses propriétés peuvent donc changer après cuisson du composite.

Tous les essais présentés dans ce chapitre ont été réalisés au LMA, excepté les essais de traction-torsion qui ont été réalisés au CERMEL du laboratoire de mécanique Gabriel Lamé de Tours et les DMA en torsion réalisé à Safran Composites.

1.1.2. Moyens d'essais

1.1.2.1. Les éprouvettes et leurs traitements thermiques

Différents modèles d'éprouvettes sont nécessaires afin de caractériser le matériau sous différentes formes de sollicitation mécanique. Les éprouvettes utilisées pour la caractérisation mécanique du matériau de l'étude sont listées ci-dessous.

- ▶ **Éprouvettes H2 (haltère de type 2)**, figure 1.1(a), dont la géométrie est définie par la norme ISO 37 :2017 (*ISO 37 p. d.*). Ces éprouvettes sont utilisées pour les essais d'extension simple en statique et dynamique.
- ▶ **Éprouvettes quadruple-cisaillement** figure 1.1(c), pour les essais de glissement simple en statique et dynamique. Ces éprouvettes sont constituées de quatre couches d'élastomère qui sont assemblées lors de la vulcanisation à quatre armatures métalliques. La géométrie de cette éprouvette n'est pas normalisée.
- ▶ **Eprouvettes "Diabolo"**, figure 1.1(d), qui serviront pour les essais bi-axiaux de validation en traction/compression et torsion combinés. La géométrie de cette éprouvette n'est pas normalisée.
- ▶ **Plots Goodrich**, figure 1.1(b). Ces plots sont utilisés pour effectuer des essais de compression confinée. Il s'agit d'un essai de compression où les plots sont confinés par une bague métallique afin d'assurer un déplacement radial quasi-nul, ce qui évite l'apparition d'un effet tonneau trop important. Ces essais de compression donnent accès au module de compressibilité du matériau.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.1. Présentation de la campagne expérimentale

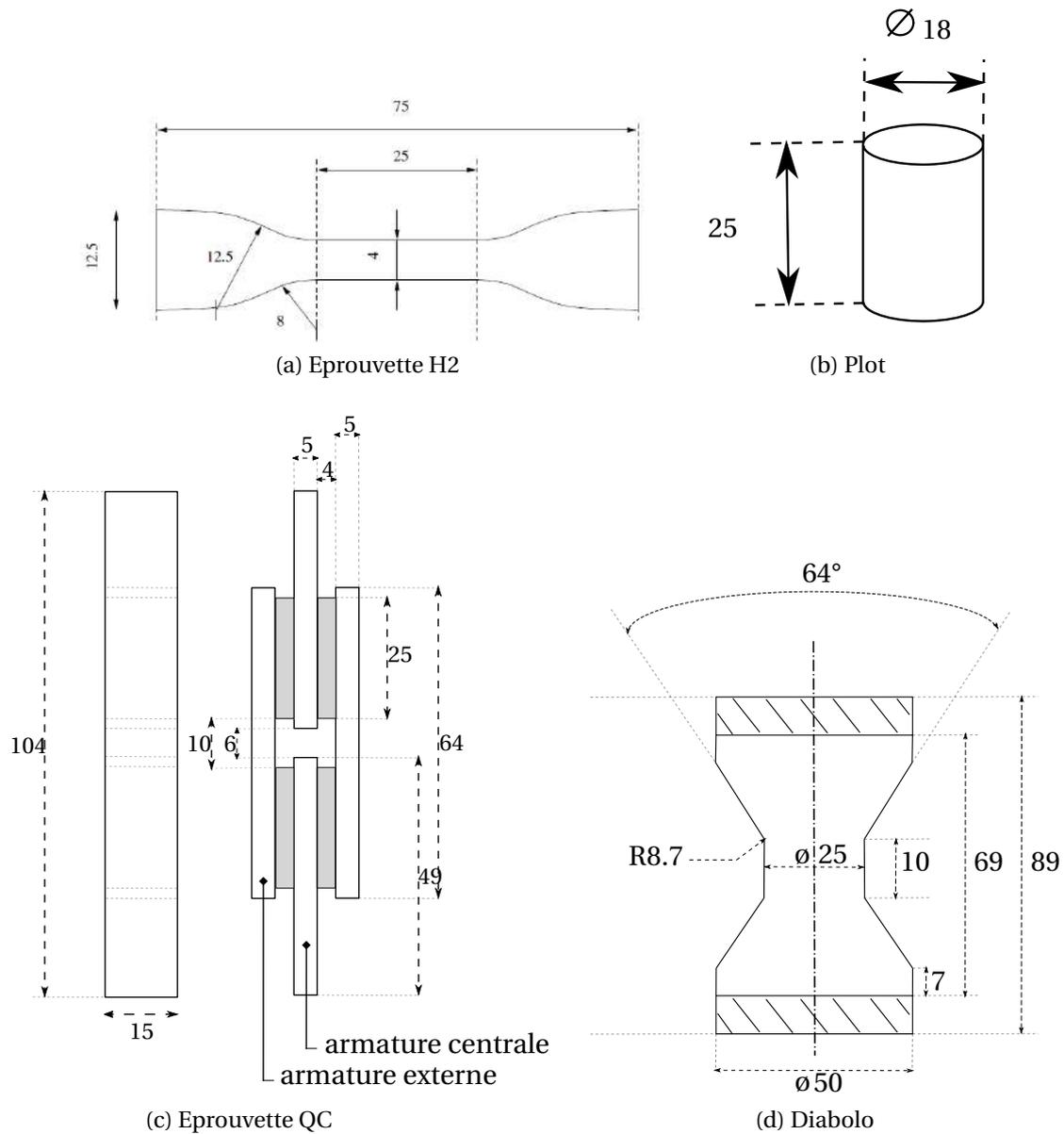


FIGURE 1.1. – Les différents types d'éprouvettes utilisés pour la campagne de caractérisation

Toutes ces éprouvettes ont été testées après avoir connu trois types de conditionnement thermique différent dans le but de caractériser le matériau dans les conditions les plus proches possibles des conditions réelles d'utilisation. Ainsi, les éprouvettes sont divisées en trois catégories :

- Les éprouvettes **vierges** qui ont été testées à leur état initial, c'est-à-dire sans historique thermique autre que celui vu lors de la fabrication même de l'éprouvette chez le fournisseur.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.1. Présentation de la campagne expérimentale

- Les éprouvettes **cuites** qui correspondent aux éprouvettes ayant subi un cycle thermique, illustré en figure 1.2, de plusieurs heures représentatif du cycle de polymérisation (paliers à T_1 et T_2) et de finition de la structure cible avec un dernier palier d'assemblage final (palier à T_3 , assemblage du bord d'attaque en titane). Ce choix est motivé par le fait que l'élastomère vulcanisé serait mis en oeuvre lors du drapage de la pièce composite cible précédant l'étape de polymérisation à chaud. À noter que les températures T_1 , T_2 et T_3 sont supérieures à 100°C .

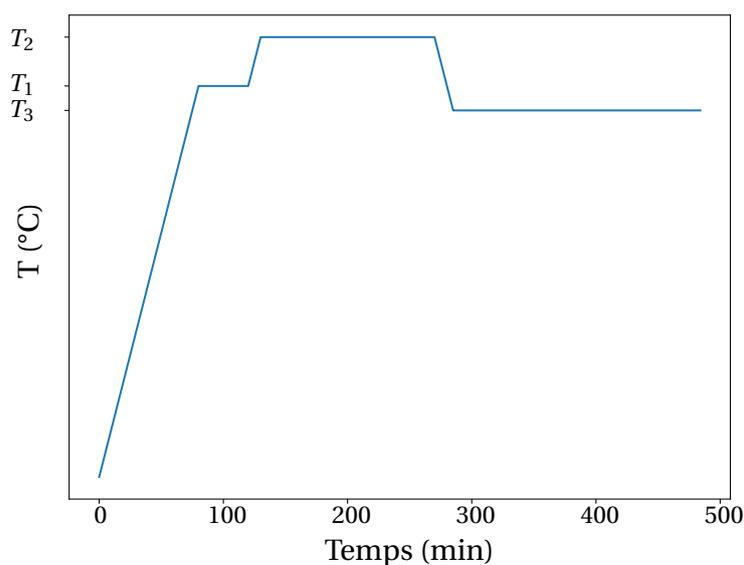


FIGURE 1.2. – Illustration du cycle de polymérisation et de finition de la structure composite appliqué à l'élastomère

- Les éprouvettes **vieillies** qui sont des éprouvettes vierges ayant été placées sous vide partiel (afin de limiter les phénomènes de thermo-oxydation) à 90°C pendant 4 mois. La température de vieillissement est bien inférieure aux températures du cycle de "cuisson" effectué sur les éprouvettes cuites.

En résumé, pour chaque nature d'éprouvette (H2, QC, plot et diabolo), trois types de traitement thermique différents ont été appliqués. Ensuite, toutes ces éprouvettes ont été testées à trois températures différentes. Ceci est résumé sur la figure 1.3. Le détail des essais réalisés est également présent sous forme de matrice d'essais en annexe A ainsi que des photos prises lors des traitements thermiques réalisés sur les éprouvettes. **Par ailleurs, un nombre suffisant d'essais a été réalisé pour chaque étude afin que les résultats soient jugés répétables (en moyenne trois essais par configuration).**

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.1. Présentation de la campagne expérimentale

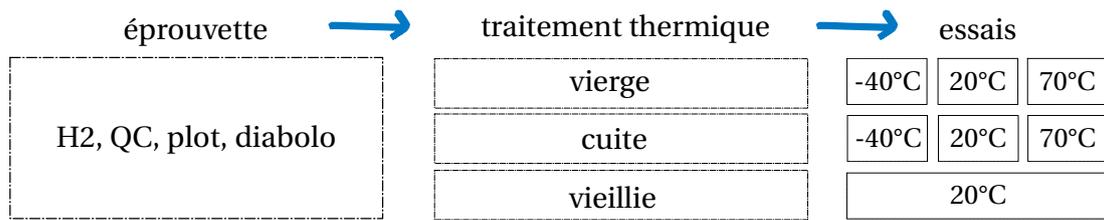


FIGURE 1.3. – Récapitulatif des essais et traitements thermiques réalisés

1.1.2.2. Machines d'essais

Les moyens expérimentaux utilisés pour la campagne d'essais de cette thèse sont les suivants.

- ▶ Machine électro-magnétique Bose ElectroForce 3230 (voir figure 1.4(a)) avec un montage de traction/compression. Elle est équipée de deux capteurs : un capteur à effort maximal de 50 N utilisé pour les essais sur éprouvette de traction, et un second capteur à effort maximal de 450 N utilisé pour les essais de quadruple cisaillement. Le pilotage est assuré par un moteur électromagnétique sur un des deux axes pouvant aller jusqu'à 200 Hz en fréquence de sollicitation dynamique. Sur le deuxième axe permettant d'appliquer un chargement statique, le pilotage est assuré par un moteur électrique. Cette machine est fournie avec un logiciel DMA intégré.
- ▶ Machine électro-magnétique Bose ElectroForce 3300 pour les essais traction/torsion et compression/torsion.
- ▶ Machine hydraulique d'essai universelle MTS Series 322 traction/compression capacité de 100 kN (voir figure 1.4(b)). Cette machine servira à réaliser les essais de compression confinée sur plots d'élastomère.
- ▶ Enceinte thermique SUN PC100 (présente sur les photos des machines 1.4) pouvant aller de -70°C à 200°C . Cette enceinte est nécessaire pour effectuer les essais à -40°C et 70°C . Elle est dotée d'une interface de contrôle (présente figure 1.4(c)) reliée à un ordinateur permettant de contrôler la température.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.1. Présentation de la campagne expérimentale

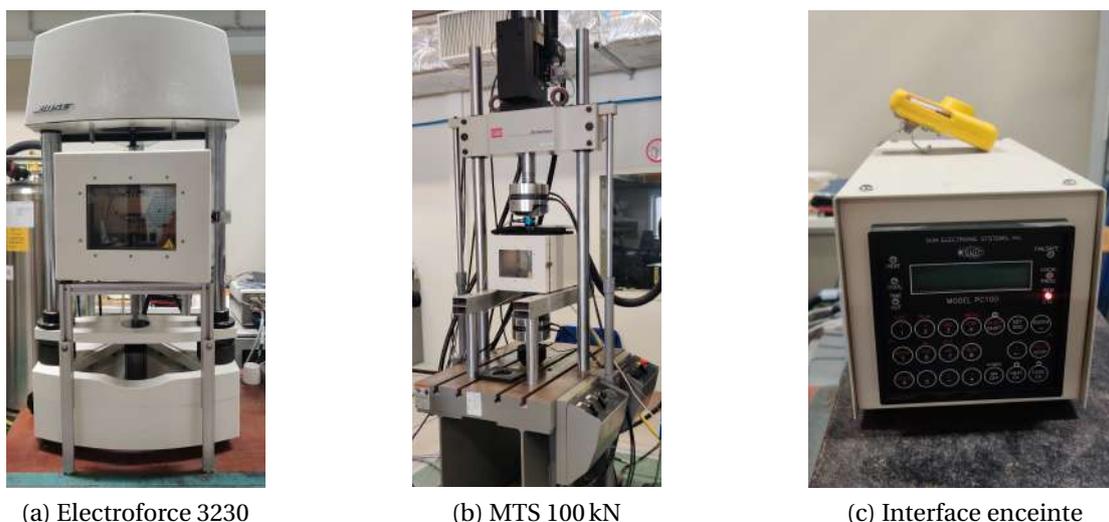


FIGURE 1.4. – Machines d'essai et enceinte thermique

1.1.2.3. Correction sur la mesure de déformation en traction

Concernant les essais sur H2, il n'a pas été mis en place d'extensométrie sur les éprouvettes pour mesurer la déformation, la mesure utilisée est donc la mesure du déplacement de la traverse. Un protocole de positionnement systématique des éprouvettes H2 dans les mors a été effectué pour s'assurer de solliciter toutes les éprouvettes de façon similaire. Pour déterminer la relation entre le déplacement de la traverse et l'élongation locale, des simulations EF en grandes déformations des H2 et des mesures sur éprouvettes en statique en suivant le déplacement relatif de deux lignes situées dans la zone utile ont été réalisées. Ces mesures ont montré qu'une prise en compte de la différence entre l'élongation globale mesurée ainsi que l'élongation mesurée dans la zone utile est nécessaire. Il a été montré qu'il existe une relation quasi-linéaire entre l'élongation globale $\lambda_{globale}$ et l'élongation dans la zone utile λ_{vraie} définie en équations (1.1) et (1.2) et expliquées sur la figure 1.5. Le facteur α reliant l'élongation vraie à l'élongation globale varie de 0.6 à 0.8 en fonction de où est mesurée la déformation vraie (i.e. en fonction de la position verticale de l'étoile rouge sur le schéma 1.5). La relation liant les deux élongations est précisée en équation (1.3).

$$\lambda_{globale} = \frac{u_{global}}{l_0}, \quad (1.1)$$

$$\lambda_{vraie} = \frac{l_{vraie} - l_0}{l_0}, \quad (1.2)$$

$$\lambda_{vraie} - 1 = \alpha(\lambda_{globale} - 1). \quad (1.3)$$

Les résultats de traction présentés par la suite ont été corrigés avec une valeur de α valant 0.675 (pour une valeur de longueur de zone utile l_0 valant 25 mm). Les déformations en traction indiquées dans la suite sont donc les déformations dans la zone utile.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.1. Présentation de la campagne expérimentale

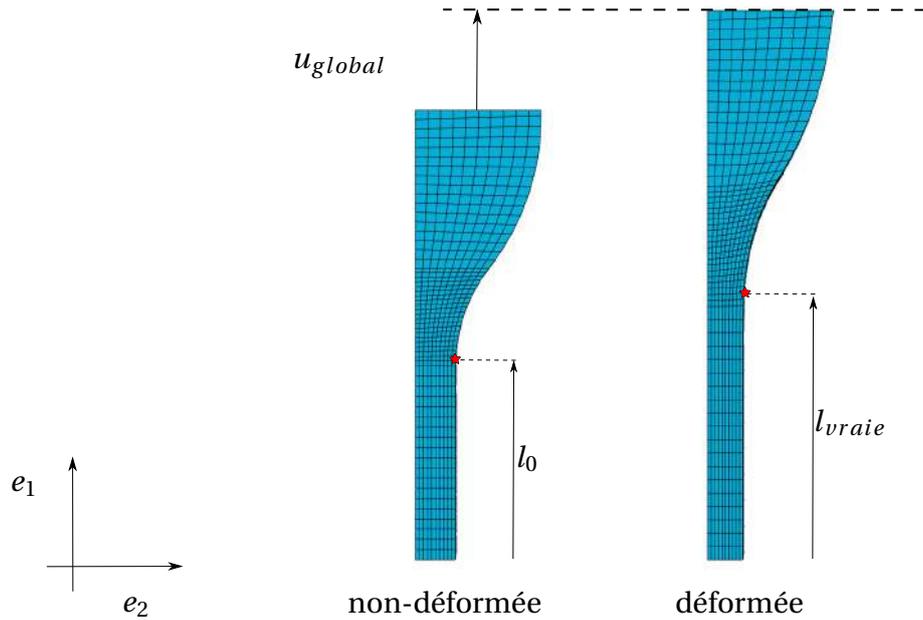


FIGURE 1.5. – Élongation vraie et élongation globale sur éprouvette H2

Les résultats d'essais en cisaillement ne nécessitent pas de telle correction au vu de la géométrie des éprouvettes de quadruple cisaillement. On appelle h l'épaisseur d'un tronçon d'élastomère de l'éprouvette de quadruple cisaillement (d'après le schéma 1.1(c) $h=4\text{mm}$) et u_{global} le déplacement appliqué à la traverse, la déformation en cisaillement γ est donnée par :

$$\gamma = \frac{u_{global}}{2h}. \quad (1.4)$$

Par ailleurs, les contraintes calculées à partir des données d'essais sont les contraintes associées au premier tenseur de Piola-Kirchhoff et elles s'expriment scalairement par :

$$\Pi = \frac{F(t)}{S_0}. \quad (1.5)$$

Où $F(t)$ est la force mesurée à l'instant t et S_0 est la section initiale non-déformée. On montre donc par la suite la contrainte de traction Π_{11} calculée à partir de l'effort mesure et de la section non-déformée de l'éprouvette H2 ainsi que la contrainte de cisaillement Π_{12} calculée à partir de l'effort mesuré et de la section non-déformée des tronçons d'élastomère de l'éprouvette de quadruple cisaillement. On confond contrainte locale (dans la zone utile) et globale dans le cas des éprouvettes H2 et QC car les simulations ont montré qu'elles étaient très proches. Par ailleurs un calcul linéaire nous a montré que le mode propre lié aux armatures métalliques libres des H2 est plus grand que la zone de balayage en fréquence utilisé pour ces éprouvettes.

1.2. Résultats de la campagne d'essais

1.2.1. Caractérisation du comportement quasi-statique

1.2.1.1. Essais cycliques de caractérisation de l'effet Mullins

La sollicitation effectuée sur les éprouvettes d'élastomère est illustrée sur la figure 1.6. Il s'agit d'un essai consistant en la juxtaposition de plusieurs blocs de cycles triangulaires, l'amplitude de chaque bloc étant supérieure à celle du bloc précédent dans la première partie de l'essai et inférieure à celle du bloc précédent dans la deuxième partie de l'essai. Chaque bloc de cycles d'iso-amplitude contient 5 cycles triangulaires.

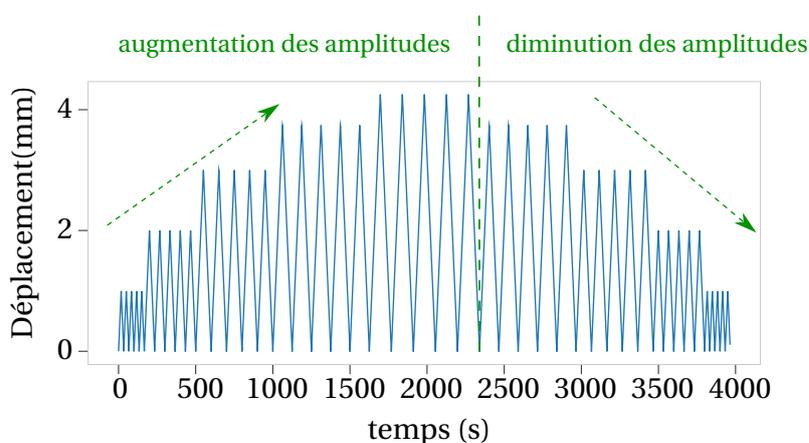


FIGURE 1.6. – Chargement effectué pour la caractérisation de l'effet Mullins

A partir des courbes de déplacement imposé et de réponse en effort, les évolutions pour chaque cycle de la contrainte de Piola-Kirchhoff de traction Π_{11} et de cisaillement Π_{12} en fonction de la déformation sont calculées (par rapport à l'état présumé initial sans déformation). L'élongation de traction est dénotée λ sur les figures 1.7 et celle de cisaillement est dénotée γ sur les figures 1.8. Les figures 1.7(a) et 1.8(a) correspondent à la phase d'augmentation des amplitudes tandis que les figures 1.7(b) et 1.8(b) correspondent à la phase de diminution des amplitudes.

Pour les graphes correspondant aux phases de montée en amplitude, il est possible de remarquer que pour chaque amplitude de déplacement imposée, le matériau s'assouplit avec les cycles jusqu'à atteindre un cycle stabilisé. Ces courbes montrent donc qu'au bout de cinq cycles de chargement, le comportement accommodé du matériau a pu être atteint. Il est également possible de constater que la non-linéarité du comportement augmente avec l'amplitude de déformation, tout comme l'aire des boucles d'hystérésis. Les graphes correspondant aux phases de diminution d'amplitude confirment qu'en sollicitant à une amplitude plus faible que la précédente, l'effet Mullins n'apparaît plus.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

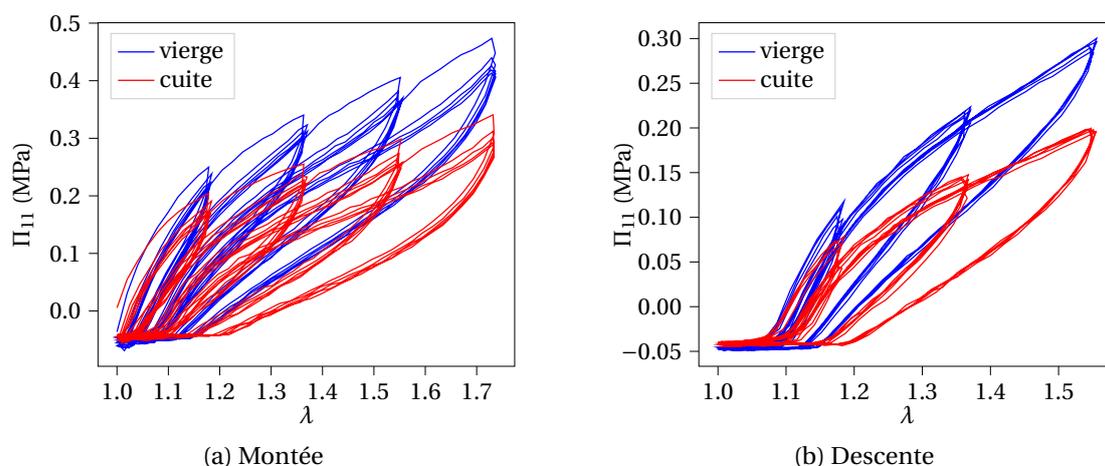


FIGURE 1.7. – Réponse en traction sur éprouvette vierge et cuite

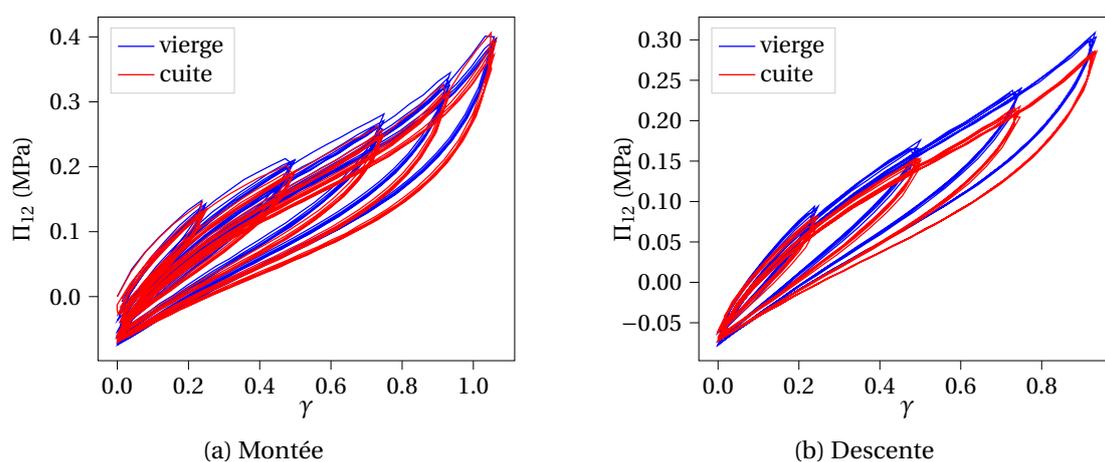


FIGURE 1.8. – Réponse en cisaillement sur éprouvette vierge et cuite

La comparaison entre éprouvette vierge et éprouvette cuite met en évidence une différence de raideur entre les deux types d'éprouvettes particulièrement notable en traction. Cette information permet d'émettre l'hypothèse que lors de la cuisson des éprouvettes un changement de configuration de la microstructure du matériau a eu lieu.

Plusieurs changements peuvent avoir eu lieu. Premièrement, il est fort probable que des composés volatils se soient évaporés lors du cycle en température comme des plastifiants ou des huiles. Or, ces composés ne participent pas grandement à la rigidité du matériau donc cela n'explique pas la perte de rigidité après cuisson. Cette perte peut en revanche s'expliquer par une diminution du taux de réticulation de l'élastomère ou un phénomène de scission de chaînes. L'hypothèse la plus probable serait donc une perte de liaisons pontales entre les chaînes de macromolécules à cause des mouvements de l'agent vulcanisant, le soufre. La différence de perte de rigidité

entre traction et cisaillement peut premièrement s'expliquer par la différence de complexité de géométrie entre les éprouvettes. En effet dans l'éprouvette de cisaillement, l'élastomère est en majeure partie confiné par les plaques en acier lui assurant une protection de l'environnement extérieur lors du cycle en température. Tandis que sur l'éprouvette H2, l'élastomère est totalement en contact avec l'air. La différence peut également venir de la différence de procédé de fabrication des éprouvettes puisque pour fabriquer les éprouvettes de cisaillement l'élastomère est injecté dans un moule. Tandis que les éprouvettes H2 sont découpées sur une grande plaque calandree.

Des mesures de gonflement par immersion dans un solvant, le xylène, ont renforcé l'hypothèse d'une diminution de la densité de réticulation de l'ordre de 11% qui a eu lieu durant le cycle de cuisson par une mesure du taux de variation de masse avant et après immersion sur éprouvettes vierges et éprouvettes cuites. Cette mesure a été réalisée sur 6 échantillons par éprouvette, le tout sur 6 éprouvettes (soit 36 échantillons au total). Le tableau 1.1 affiche le taux de variation de masse moyen pour les deux types d'éprouvettes. En revanche cette mesure n'a été réalisée que sur des éprouvettes H2, la découpe sur les éprouvettes de cisaillement étant plus délicate. Le lecteur pourra se référer à Paul J. FLORY 1953 pour plus de détails sur le phénomène de gonflement ou plus récemment FAYOLLE et VERDU p. d. pour la mesure du vieillissement.

	Vierge	Cuite
Taux de variation de masse moyen (%)	196.21	213.44

Tableau 1.1. – Taux de variation de masse moyen entre avant et après immersion dans le xylène. Pour éprouvette vierge et éprouvette cuite.

Enfin, les essais de caractérisation de l'effet Mullins ont permis de définir un nombre de cycles permettant d'atteindre l'état accommodé du comportement de l'élastomère, cet état est atteint relativement rapidement par l'application de cinq cycles. C'est donc ce nombre de cycles, ou plutôt le double de ce nombre par sécurité, qui sera appliqué avant chaque essai décrit par la suite pour s'affranchir de l'effet Mullins dans la caractérisation.

1.2.1.2. Essais de relaxation par paliers

Description de l'essai

L'essai de relaxation par paliers, en figure 1.9, consiste, comme son nom l'indique, en l'enchaînement de paliers de relaxation croissant en amplitude puis décroissant. L'une des premières publications à formaliser ce type d'essai dans le cas des élastomères chargés en noir de carbone est Alexander LION 1996. Les pics non-différenciés autour de $t = 0s$ correspondent aux pics d'élimination de l'effet Mullins. Chaque palier est d'une durée de 3500s. Cet essai permet de mettre en évidence plusieurs effets non-

linéaires que le comportement du matériau peut exhiber. Ces différents effets sont discutés ci-dessous.

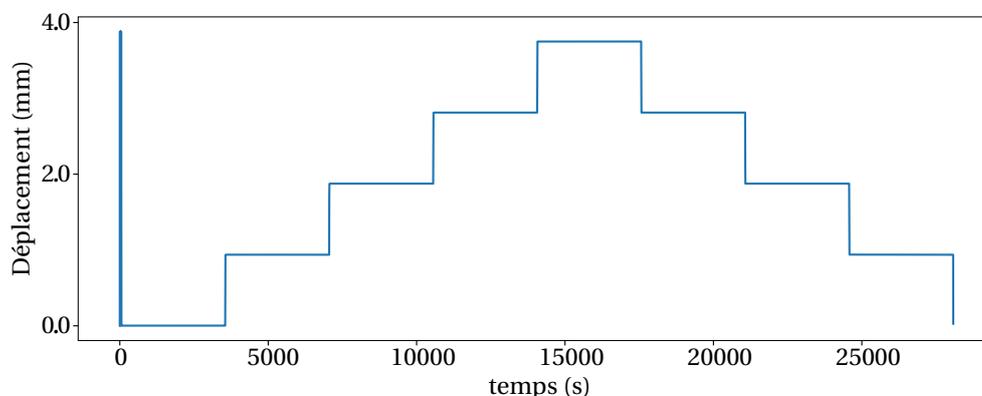


FIGURE 1.9. – Courbe de déplacement imposé sur une éprouvette de cisaillement.

Influence de l'amplitude du palier sur la réponse

La dépendance non-linéaire à l'amplitude statique de déformation du matériau est observable lors du tracé de la superposition des différents paliers de relaxation de la contrainte de l'essai décrit en figure 1.9. En effet, une fois les valeurs de contrainte normalisées par la valeur de déformation atteinte sur chaque palier, des cinétiques de relaxation différentes sont observables pour chaque palier d'amplitude différente : à voir en figure 1.10 dans le cas de la traction et en figure 1.11 dans le cas du cisaillement. Pour un matériau à comportement viscoélastique linéaire, les quatre courbes auraient été superposés.

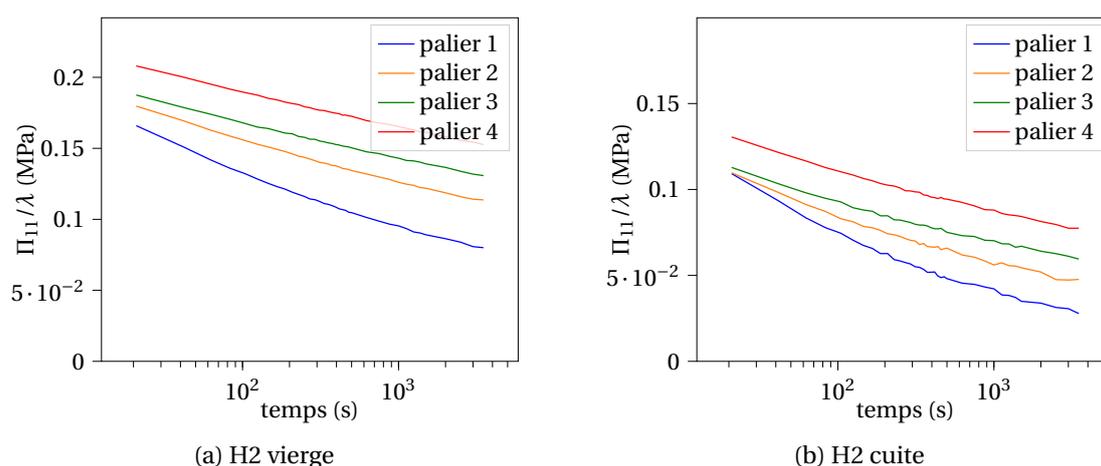


FIGURE 1.10. – Paliers de contrainte de traction Π_{11} normalisée par la déformation atteinte sur chaque palier λ pour la phase de montée en amplitude statique.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

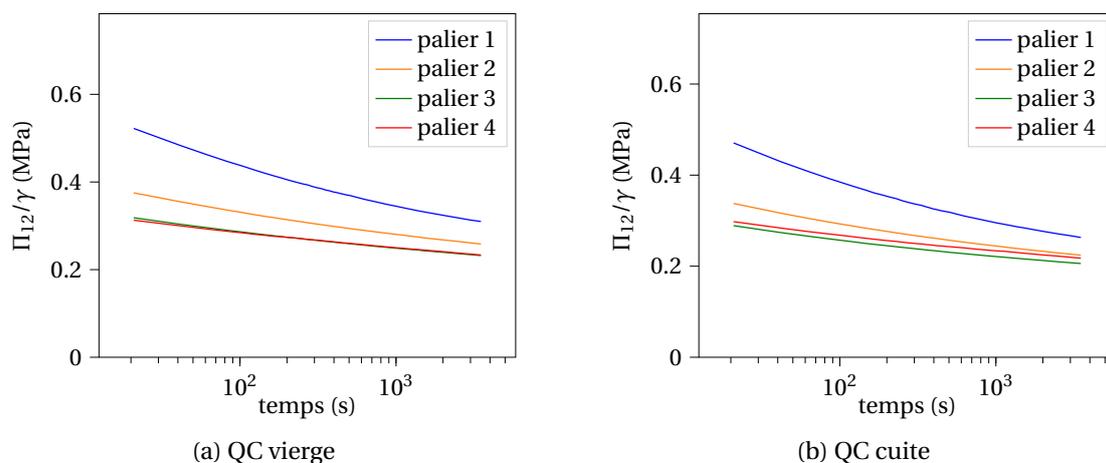


FIGURE 1.11. – Paliers de contrainte de cisaillement Π_{12} normalisée par la déformation atteinte sur chaque palier γ pour la phase de montée en amplitude statique.

Mise en évidence d'une hystérésis d'équilibre

A partir de l'essai de relaxation par paliers, il est possible de mettre en évidence une boucle d'hystérésis non-visqueuse (ou du moins visqueuse à très long terme) sur les courbes de contrainte-déformation qui provient de la recouvrance partielle des contraintes. Sur la figure 1.12 sont tracées les boucles d'hystérésis d'équilibre pour éprouvette vierge et éprouvette avec cuisson issues des essais de traction et des essais de cisaillement. Ces courbes sont obtenues en reliant les points de fin de chaque palier de relaxation de l'essai de relaxation par palier.

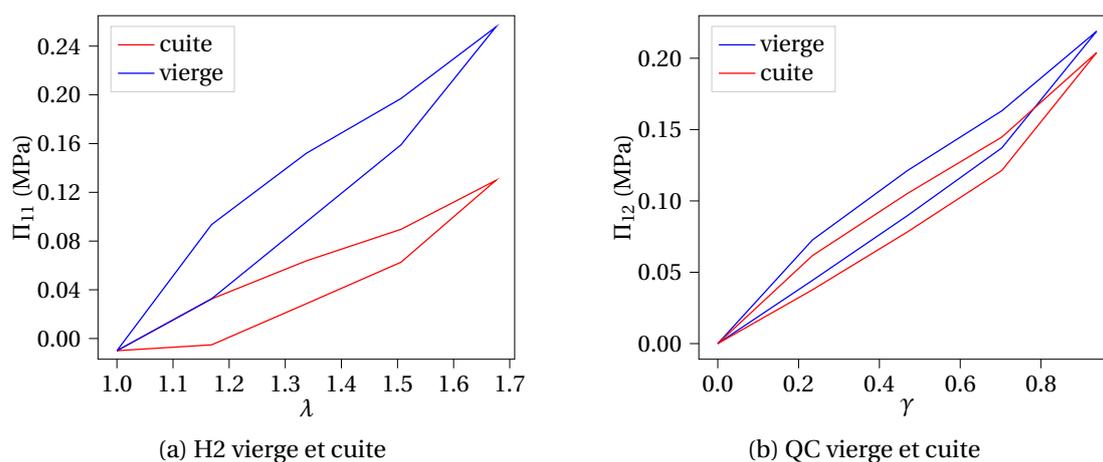


FIGURE 1.12. – Tracés des courbes d'hystérésis d'équilibre en traction et en cisaillement

La comparaison entre éprouvette vierge et éprouvette cuite semble montrer que

l'aire des boucles d'hystérésis, et donc le comportement visqueux à long terme, n'a été que faiblement impactée par la cuisson. La perte de raideur est néanmoins de l'ordre de 48% en traction et de 14% en cisaillement. Ce qui laisserait penser que les changements organiques ayant eu lieu durant le cycle en température n'ont pas impacté la quantité de particules renforçantes présentes dans la matrice élastomère. Puisque d'après FRÖHLICH et al. 2005 par exemple, une diminution du taux de charges (noir de carbone ou silice) signifie une diminution de l'hystérésis qui provient principalement de la dissipation d'énergie issue du réseau de charge et dépendant du chargement appliqué.

Ainsi, l'hypothèse déjà expliquée plus haut de la perte de ponts de vulcanisation pendant le cycle en température semble se confirmer.

Une combinaison de ce phénomène avec en parallèle une diminution de liaisons physiques faibles entre chaînes est également possible.

De plus, les résultats de cette hystérésis d'équilibre sont à nuancer car le temps de relaxation laissé pour chaque palier peut être finalement insuffisant pour éliminer le comportement visqueux. Il est possible que si les paliers avaient été plus longs que 3500 secondes les conclusions n'auraient pas été identiques.

Mise en évidence d'une relaxation anisotrope

Sur la figure 1.13 sont représentées les contraintes de cisaillement et de traction en fonction de leur déformation associée lors de la première montée en charge de l'essai de relaxation par paliers (donc après l'élimination de l'effet Mullins). La contrainte de cisaillement a été multipliée par 3, afin de visualiser le caractère isotrope du matériau à faibles niveaux de déformations. En effet, pour un matériau incompressible (coefficient de Poisson ν proche de 0.5) et isotrope, le module de cisaillement statique vaut quasiment 3 fois le module d'Young statique (égal à 3 fois pour $\nu=0.5$). La formule reliant le module de cisaillement μ et le module de Young E est rappelée en équation (1.6) :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.6)$$

La superposition quasi-parfaite des deux courbes aux faibles niveaux de déformation prouve le caractère isotrope du matériau et que l'élimination de l'effet Mullins n'a pas introduit d'anisotropie, du moins dans la direction de chargement.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

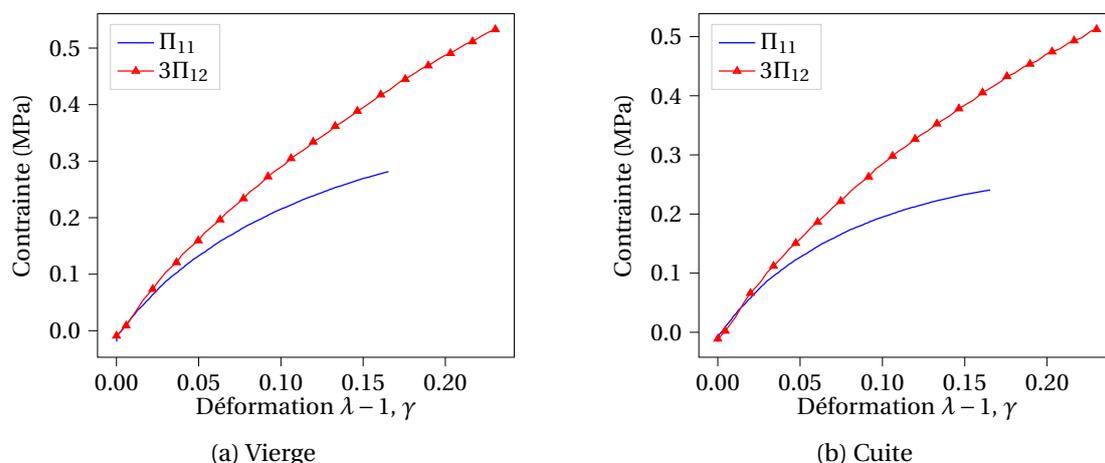


FIGURE 1.13. – Superposition de la contrainte de la première montée en charge de l'essai de relaxation par paliers en cisaillement et en traction

Sur la figure 1.14 sont représentées les relaxations des contraintes pour les 4 paliers de la phase d'augmentation des amplitudes de déformation appliquées. Ces figures sont issues des essais sur éprouvettes cuites mais les résultats sur éprouvettes vierges sont de même nature. Les contraintes sont normalisées par leur valeur initiale qui est aussi leur valeur maximale. Pour chaque graphe, sont données les valeurs du premier invariant de déformation $I_1(\lambda)$ (en traction) et $I_1(\gamma)$ (en cisaillement). Cette donnée apporte une information supplémentaire quant à la différence de niveau de déformation du matériau en traction et en cisaillement et quant à la réelle pertinence de cette comparaison. Par exemple, pour le premier palier de déformation, figure 1.14 les valeurs du premier invariant en traction et en cisaillement sont très proches donc l'hypothèse d'une différence de cinétique de relaxation entre les deux modes de déformation peut être établie. En revanche l'écart de valeurs entre premiers invariants se creuse en augmentant l'amplitude de déformation des paliers donc ces tracés de contrainte normalisée ne permettent pas à eux seuls de conclure entièrement sur l'éventuelle anisotropie du comportement visqueux d'autant que l'on constate que le comportement stabilisé n'est pas atteint au bout de 3500s.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

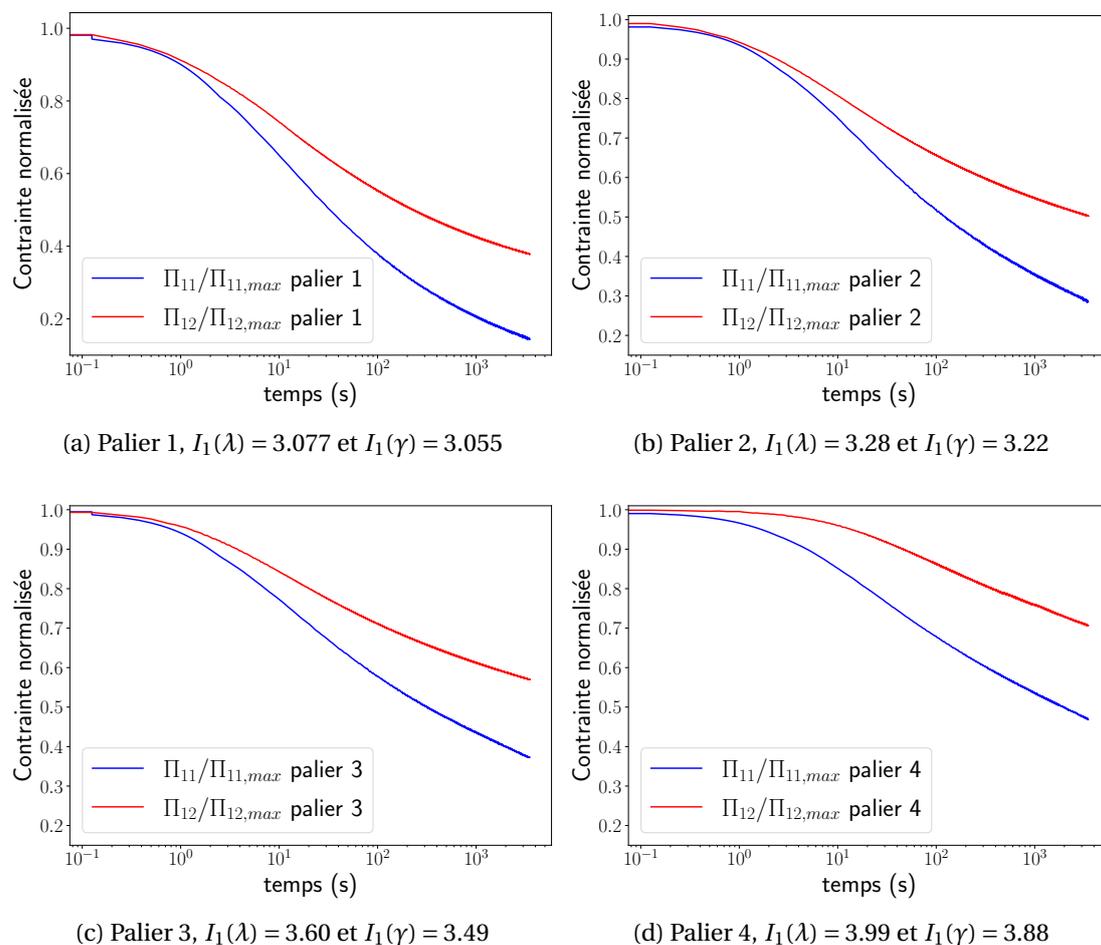


FIGURE 1.14. – Relaxation des contraintes de traction et de cisaillement sur les paliers de la phase montée des essais de relaxation par paliers (sur éprouvettes cuites).

1.2.2. Caractérisation du comportement sous chargement harmonique

1.2.2.1. Essais DMA

Définition

Les propriétés des matériaux viscoélastiques peuvent être caractérisées, dans leur domaine linéaire, par des essais de type DMA (pour Dynamic Mechanical Analysis) lors desquelles le matériau est sollicité avec un chargement mécanique harmonique. Il s'agit d'une méthode couramment utilisée pour les polymères et qui permet entre autres de mesurer les propriétés intrinsèques suivantes.

- ▷ Le module complexe (Young E^* ou cisaillement μ^* ou encore compressibilité K^*)

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

- Les différentes températures de transition du matériau (transition vitreuse T_g et fusion de la phase cristalline pour un polymère semi-cristallin).

Les DMA les plus courantes sont les DMA en traction et en cisaillement qui permettent chacune la mesure d'un module différent (respectivement le module d'Young E^* et le module de cisaillement μ^*). La sollicitation en déformation, dans le domaine temporel, d'un tel essai peut être définie de la façon suivante :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_d \cos(\omega t) Y(t) = \varepsilon_d \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} Y(t) \right], \quad (1.7)$$

avec

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Dans le cadre d'un comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant, la réponse à cette sollicitation est une contrainte qui s'écrit comme suit d'après par exemple SALENÇON 2019 :

$$\sigma(t) = \varepsilon_d \operatorname{Re} \left[\dot{r} * e^{i\omega t} \right] Y(t), \quad (1.8)$$

où r est une fonction de relaxation et \dot{r} sa dérivée temporelle et où $*$ est le produit de convolution qui s'écrit de la façon suivante :

$$\sigma(t) = \varepsilon_d \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{r}(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} Y(t-\tau) d\tau \right]. \quad (1.9)$$

La réponse (1.9) est nulle pour $t < 0$ en conséquences des propriétés de $Y(t)$. Pour $t \geq 0$, la réponse se décompose comme suit (décomposition de l'intégrale),

$$\sigma(t) = \varepsilon_d \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^t e^{-i\omega\tau} \dot{r}(\tau) Y(t-\tau) d\tau + \int_t^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \dot{r}(\tau) Y(t-\tau) d\tau \right) \right], \quad (1.10)$$

or la fonction $Y(t-\tau)$ vérifie $Y(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau > t$, la seconde intégrale est donc nulle. D'où, en décomposant encore une fois l'intégrale de $-\infty$ à t en deux sous intégrales, on a :

$$\sigma(t) = \varepsilon_d \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \dot{r}(\tau) d\tau - e^{i\omega t} \int_t^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \dot{r}(\tau) d\tau \right], \quad (1.11)$$

Dans l'équation (1.11), le premier terme est par définition la transformée de Laplace-Carson de r , notée r^* . L'équation devient, $\forall t$:

$$\sigma(t) = \varepsilon_d \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} r^*(i\omega) - e^{i\omega t} \int_t^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \dot{r}(\tau) d\tau \right] Y(t). \quad (1.12)$$

Le premier terme de l'équation (1.12) représente la réponse harmonique en régime permanent et le deuxième terme est un terme transitoire qui tend vers une zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. La réponse tend donc vers le régime harmonique asymptotique sui-

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

vant :

$$\sigma(t) = \varepsilon_d \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} r^*(i\omega) \right] Y(t). \quad (1.13)$$

Dans le cas unidimensionnel r^* est appelé module complexe et s'écrit :

$$r^*(\omega) = r' + ir'' = |r^*(\omega)| e^{i\delta}. \quad (1.14)$$

Par conséquent, la réponse à la sollicitation unidimensionnelle définie par l'équation (1.7) peut s'écrire de la forme suivante, lorsque le régime permanent est atteint :

$$\sigma(t) = \sigma_d \cos(\omega t + \delta), \quad (1.15)$$

où

$$\sigma_d = \varepsilon_d |r^*(\omega)|. \quad (1.16)$$

Enfin il est possible de définir les différentes caractéristiques de ces équations mesurables lors d'un essai DMA :

- Le module de stockage $r' = \operatorname{Re}(r^*)$ qui est directement lié à l'énergie élastique moyennée sur un cycle :

$$W_{el} = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} \sigma(t)(\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (1.17)$$

soit

$$W_{el} = \frac{1}{4} \varepsilon_d^2 |r^*(\omega)| \cos \delta = \frac{1}{4} \varepsilon_d^2 r'. \quad (1.18)$$

- Le module de perte $r'' = \operatorname{Im}(r^*)$ qui est lié à l'énergie dissipée sur un cycle du régime harmonique asymptotique :

$$\Delta W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sigma(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (1.19)$$

soit

$$\Delta W = \varepsilon_d^2 |r^*(\omega)| \pi \sin \delta = \pi \varepsilon_d^2 r''. \quad (1.20)$$

- Le facteur de perte $\tan(\delta) = \frac{r''}{r'}$ qui, au regard des équations (1.18) et (1.20), caractérise le rapport de l'énergie dissipée sur l'énergie stockée mécaniquement :

$$\tan(\delta) = \frac{r''}{r'} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W_{el}} \quad (1.21)$$

Dans le cas d'un essai DMA en traction uniaxiale ou en cisaillement simple, r^* correspond respectivement au module d'Young complexe E^* ou au module de cisaillement complexe μ^* . Ces modules peuvent être caractérisés en fonction de la fréquence du chargement ou de l'amplitude dynamique appelée ε_d dans l'équation (1.7).

La DMA permet de construire des courbes maitresses du comportement de matériaux qui sont en fait l'évolution des valeurs de E' , E'' et $\tan(\delta)$ sur un domaine étendu de fréquences, appelées fréquences réduites, en utilisant le principe d'équivalence temps/température FERRY 1980 ou encore fréquence/température. Le lecteur peut se référer à CHASSAIGNE 2020 pour un état de l'art concis sur la problématique de construction de courbes maitresses.

Les essais DMA réalisés dans cette partie se limitent à l'étude des modules sur un domaine de fréquences allant de 0.1 à 100 Hz à température constante.

Chargement effectué

Le chargement effectué est schématisé en figure 1.15. L'essai consiste, pour la traction comme pour le cisaillement, à appliquer un chargement harmonique d'amplitude U_d autour d'une valeur de précharge statique U_s grande par rapport à U_d . Une élimination de l'effet Mullins est préalablement réalisée à une amplitude U_{max} plus grande que $U_s + U_d$. Un temps d'attente de 15 minutes a été pris après l'application de la précharge U_s et avant le démarrage du chargement harmonique avec balayage fréquentiel ou balayage en amplitude dynamique.

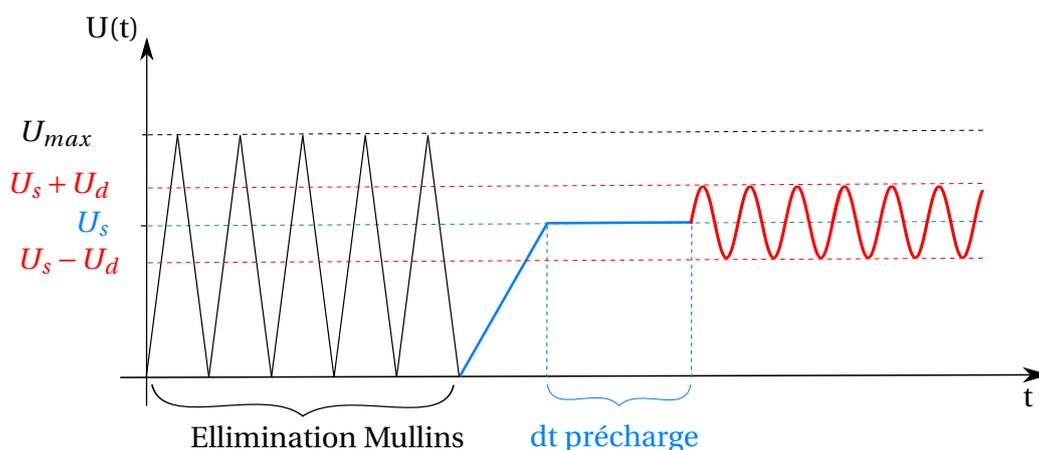


FIGURE 1.15. – Description du chargement effectué

Le calcul des modules est effectué via l'outil interne au logiciel DMA de la machine Bose 3230. D'après la documentation de cette dernière, un certain nombre de cycles est appliqué afin d'obtenir une réponse stabilisée en effort avant de calculer la raideur complexe correspondante selon la norme ASTM D5992-96(2018) (*Standard Guide for Dynamic Testing of Vulcanized Rubber and Rubber-Like Materials Using Vibratory Methods p. d.*). Cette procédure d'essai est appliquée avec des balayages en fréquence ou en amplitude de déformation.

1.2.2.2. Influence de la fréquence de chargement

Les balayages fréquentiels sont réalisés à un niveau d'amplitude dynamique valant 0.6% pour la traction et 1.8% pour le cisaillement. Les courbes pour la traction sont les

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

courbes obtenues pour une précharge non-nulle valant 17 %, soit une élongation λ valant 1.17. Les courbes de cisaillement sont les courbes obtenues pour une précharge nulle. Toutes les courbes de balayage en fréquence ont été lissées en utilisant un module Python permettant de faire de l'interpolation cubique (basée sur FRITSCH et BUTLAND 1984).

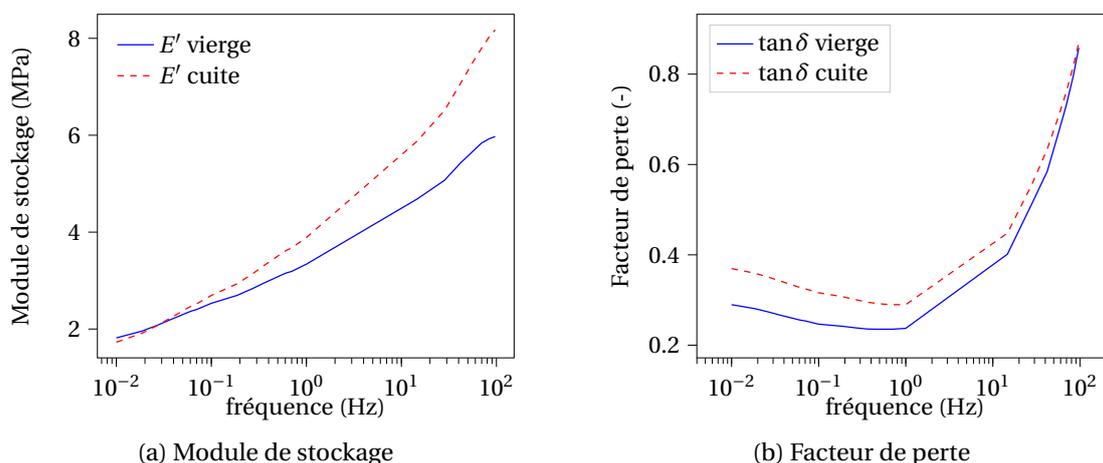


FIGURE 1.16. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour la traction avec $\varepsilon_d=0.6\%$.

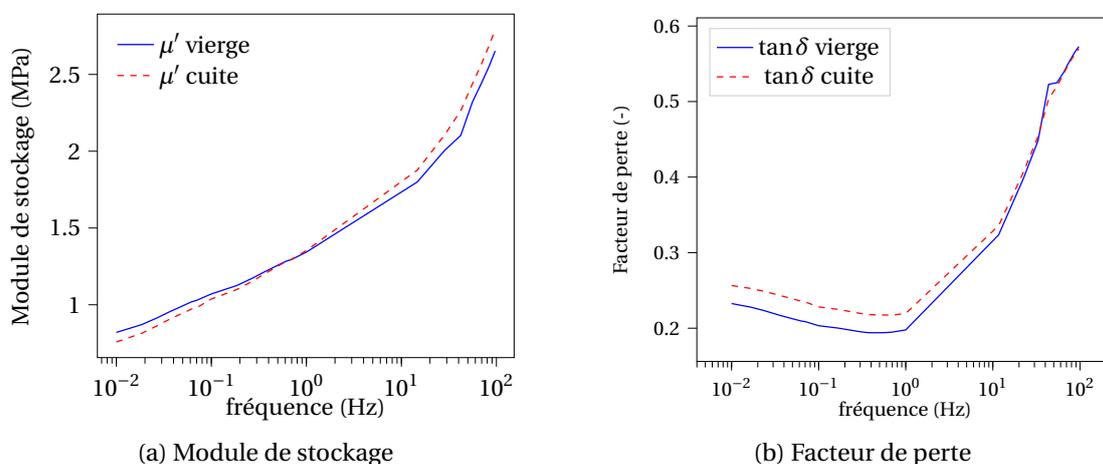


FIGURE 1.17. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour le cisaillement avec $\gamma_d=1.8\%$.

Que ce soit pour la traction (figure 1.16) ou le cisaillement (figure 1.17), l'augmentation de la fréquence se caractérise par une augmentation des facteurs de perte et des modules de stockage. Ce comportement est bien connu des élastomères dans le cadre de faibles niveaux de déformation comme l'ont étudié A. LION, KARDELKY et HAUPT 2003 par exemple. D'autre part les modules de stockage et de perte sont plus

élevés pour les éprouvettes cuites, et l'écart de module de stockage entre celles-ci et les éprouvettes vierges semble augmenter avec la fréquence. Cet effet est encore une fois plus visible en traction. Une mise en parallèle de ces observations avec celles écrites dans le paragraphe sur la comparaison des hystérésis d'équilibre permet d'affirmer que la cuisson des éprouvettes a engendré une perte de raideur statique mais une augmentation de raideur dynamique du matériau.

1.2.2.3. Influence de l'amplitude dynamique de chargement

Les balayages en amplitude sont réalisés à une fréquence fixe de 3 Hz. Sont présentés en figure 1.18 et en figure 1.19 les modules de stockage et les facteurs de perte en fonction de l'amplitude dynamique respectivement pour la traction et pour le cisaillement. Les modules de perte ne sont pas présentés car ils possèdent la même allure que les modules de stockage, c'est pourquoi le facteur de perte est jugé plus pertinent. Les courbes du module en traction (figure 1.18) sont les courbes obtenues pour une précharge non-nulle valant 17 %.

La première chose notable sur ces graphiques est bien sûr la décroissance non-linéaire de la raideur (ici quantifiée par les courbes des modules de stockage) avec l'amplitude dynamique, il s'agit de l'effet Payne. Sur la courbe du module de stockage pour le cisaillement (figure 1.19(a)), il est possible d'apercevoir un troisième changement de pente non-linéaire pour des amplitudes dynamiques dépassant 0.5 (soit 50%). Une hypothèse pour expliquer cela est "l'élimination totale" de l'effet Payne dû aux charges renforçantes dans le domaine des grandes déformations, domaine où l'analyse DMA n'est, par définition, plus applicable mais où la mesure de raideur effective reste pertinente. Ce point est discuté en annexe B. De plus, l'évolution des facteurs de perte montre l'augmentation de l'énergie dissipée en augmentant l'amplitude dynamique.

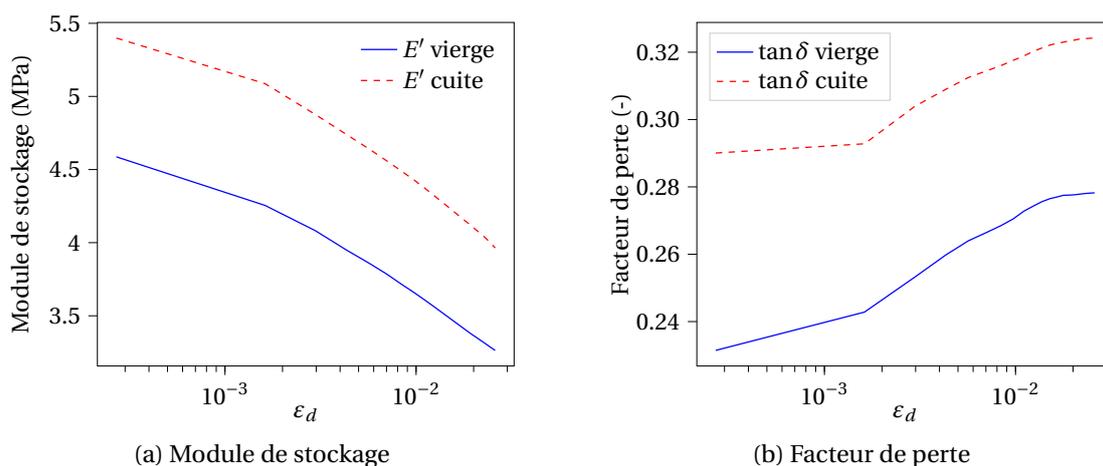


FIGURE 1.18. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour la traction à une fréquence de 3Hz.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

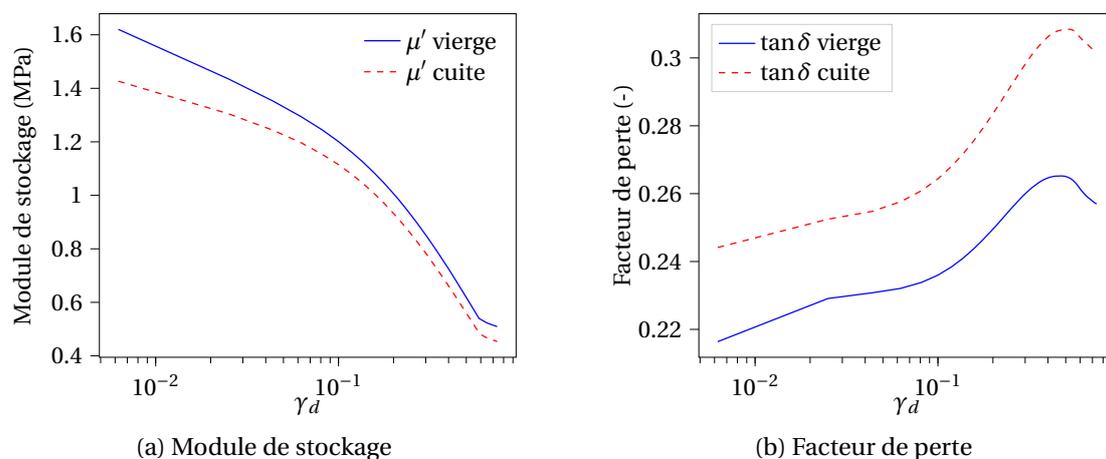


FIGURE 1.19. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour le cisaillement à une fréquence de 3Hz.

Ces courbes confirment que les propriétés dissipatives des éprouvettes avec cycle de cuisson ont été augmentées. Le décalage sur le facteur de perte est quasi constant et traduit une augmentation de l'ordre de 16% en traction et en cisaillement. En revanche, dans le cas de la traction, un module de stockage plus élevé pour les éprouvettes cuites est en contradiction avec les observations faites en statiques sur la figure 1.12. Cette observation pose questions vis à vis du protocole d'essai DMA pour la traction. On peut aussi se poser la question du rôle de la précharge sur les essais en traction. Dans le cas du cisaillement, qui sont à précharge nulle, le module de stockage après cuisson est plus faible ce qui est accord avec les observations sur essais statiques. Qui plus est, l'augmentation du facteur de perte après cuisson s'explique également par la diminution de la densité de réticulation qui accroît la liberté de mouvements des agrégats de charge.

1.2.2.4. Influence de la précharge statique sur les deux balayages

Les balayages décrits ci-dessus ont été réalisés à plusieurs valeurs de précharge U_s afin de quantifier l'effet de cette dernière. Pour les essais en cisaillement, trois précharges ont été testées dont une précharge nulle. En revanche pour la traction deux précharges non-nulles ont été appliquées et le cas de figure d'une précharge nulle est impossible à cause de la géométrie des éprouvettes. En effet, la mesure de raideur n'aurait pas de sens à cause du flambement des éprouvettes dans les phases de compression. Sont présentés dans ce paragraphe uniquement les résultats sur éprouvettes de cisaillement cuites. Les résultats sur éprouvettes de traction sont disponibles en annexe C. Les DMA en cisaillement ont été réalisées aux trois précharges suivantes : 0%, 25% et 50%.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

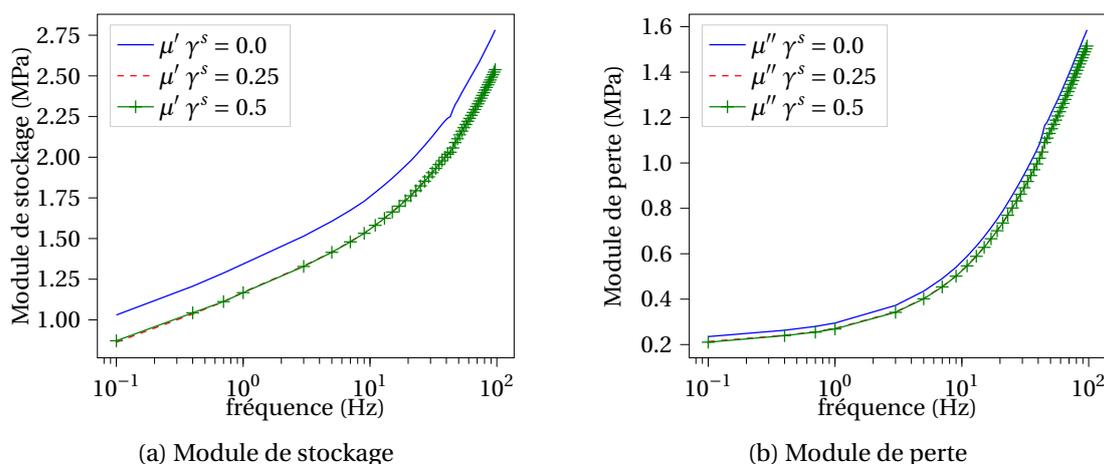


FIGURE 1.20. – Module de stockage et module de perte en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de précharges avec $\gamma_d=1.8\%$.

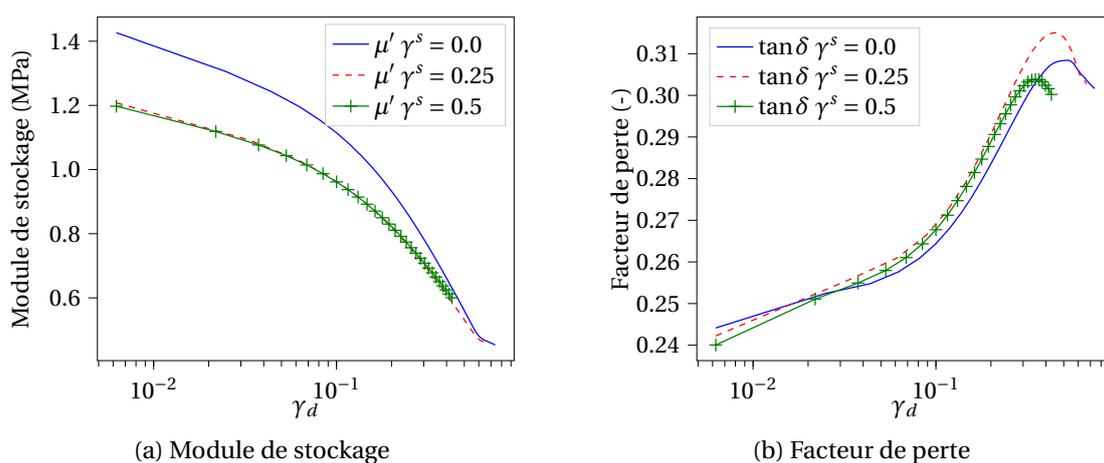


FIGURE 1.21. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour différentes valeurs de précharges avec $\gamma_d=1.8\%$.

Les figures 1.20(a) et 1.20(b) représentent les balayages en fréquence des parties réelle et imaginaire du module de cisaillement tandis que les figures 1.21(a) et 1.21(b) représentent les balayages en amplitude dynamique des parties réelles et leur facteur de perte associé. Sur toutes les courbes, il est possible de remarquer que les courbes correspondant à la précharge de 50% et les courbes correspondant à la précharge de 25% sont quasiment superposées. Ce qui souligne la présence d'une stabilisation du comportement dynamique en augmentant la précharge statique. Ce qui veut hypothétiquement dire qu'au-dessus de 50% de déformation statique, le comportement dynamique ne change plus en fonction de la précharge (à la fois à amplitude dynamique fixe pour les balayages en fréquence figure 1.20 ou fréquence fixe pour les balayages en amplitude de la figure 1.21).

Par ailleurs, sur les balayages en fréquence, un écart quasi-constant entre les courbes issues des deux premières précharges est observable sur les plages de fréquences réalisées. Tandis que sur les balayages en amplitude dynamique l'écart entre les différentes précharges varie en allant vers les amplitudes dynamiques croissantes. Deux points sont déduits de ces observations : il est nécessaire de modéliser la dépendance à la précharge statique des propriétés dynamiques, et cette dépendance n'est pas linéaire dans le cas de variation de l'amplitude dynamique. Ce dernier aspect souligne d'autant plus le comportement non-linéaire lié à l'effet Payne.

1.2.3. Essais de compression confinée

Montage

Le montage, présenté en figure 1.22, est composé de deux parties en acier C40 : un cylindre de confinement avec la partie creuse mobile (et fixable avec des vis) afin de faciliter la récupération du plot d'élastomère après l'essai. La deuxième partie de ce montage est le piston qui va permettre de comprimer le plot une fois mis en mouvement. Ce montage a été installé sur la machine hydraulique MTS. Lors des essais, l'intérieur du cylindre de confinement du montage a été lubrifié avec un lubrifiant à base de silicone (pour lequel on a préalablement vérifié l'absence d'interaction avec l'élastomère avec des mesures de gonflement) pour limiter les phénomènes de frottement.

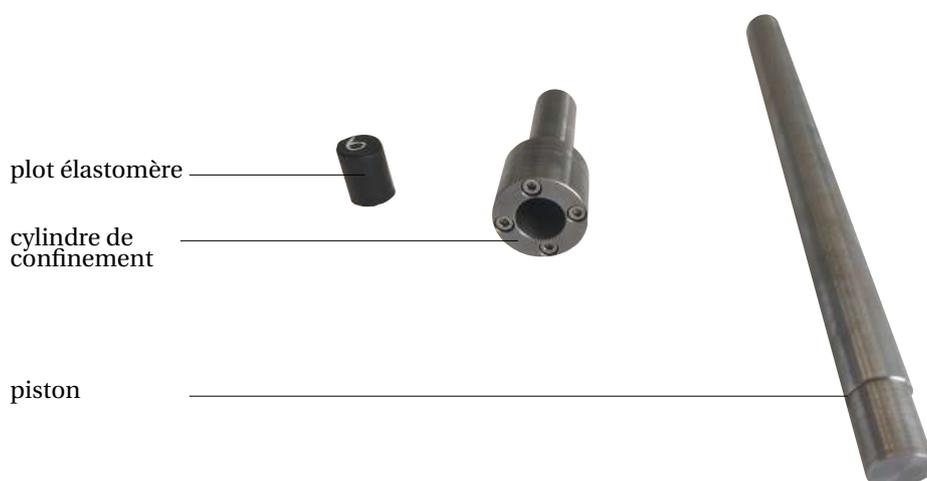


FIGURE 1.22. – Montage utilisé pour les essais de compression confinée

Mesure module de compressibilité quasi-statique

L'essai de charge-décharge quasi-statique permet d'estimer le module de compressibilité k du matériau. Sur la figure 1.23 est présentée l'évolution de la contrainte axiale en fonction de la déformation appliquée sur le plot confiné.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

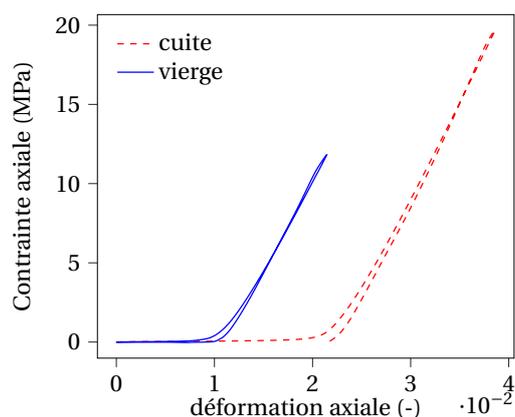


FIGURE 1.23. – Charge-décharge quasi-statique sur plot confiné.

Ces courbes peuvent être divisées en trois phases distinctes. La première phase des courbes où la contrainte reste nulle correspond à la phase de venue au contact du piston sur le plot et n'est pas interprétable. Une deuxième phase relativement courte avec un changement de pente non-linéaire est observable pour les deux types d'éprouvettes et correspond à la phase de mise en contact du plot avec toutes les surfaces du cylindre de confinement. Vient ensuite la troisième phase, quant à elle linéaire, où la contrainte augmente drastiquement et correspond au chargement du plot une fois en contact avec toutes les surfaces du montage. C'est sur cette dernière phase que le module de compressibilité statique est estimé avant la décharge. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.2.

	Vierge	Cuite
k (MPa)	1281	1268

Tableau 1.2. – Mesure du module de compressibilité statique pour éprouvette vierge et éprouvette cuite

La figure 1.23 montre également que la raideur du matériau, pour ce type de chargement, est quasiment inchangée entre un plot vierge et un plot cuit. Cependant, ces résultats sont à nuancer au regard du nombre important de facteurs de variabilité présents dans le montage, comme par exemple la quantité et la qualité du lubrifiant utilisé pour diminuer l'effet des frottements.

Relaxation par paliers

Des essais de relaxation par paliers en compression confinée ont été réalisés sur des plots d'élastomère. Le chargement réalisé en déformation est présenté en figure 1.24.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

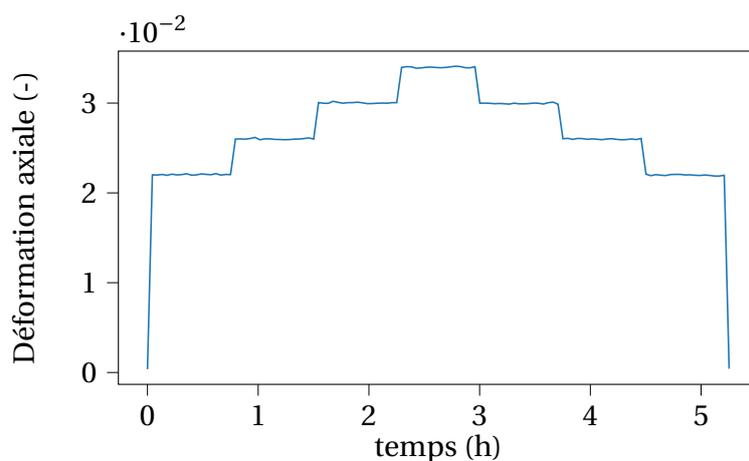


FIGURE 1.24. – Chargement de relaxation par palier en compression confinée.

La réponse en contrainte à ce chargement est donnée en figure 1.25 pour éprouvette vierge et éprouvette cuite.

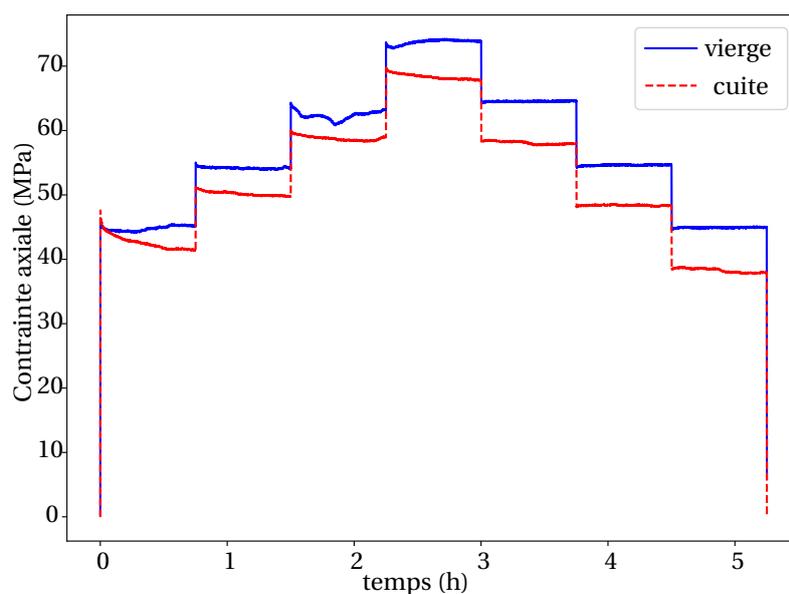


FIGURE 1.25. – Contrainte axiale en réponse au chargement de relaxation par palier en fonction du temps.

Ces résultats ne sont pas concluants vis-à-vis de la forte variabilité entre éprouvettes du même type. Les paliers de montée en charge mettent davantage en exergue le problème. L'hypothèse la plus probable pour expliquer ces résultats est que la mise en charge du plot met le fluide lubrifiant sous pression et ce dernier se mettrait à bouger et s'échapperait progressivement au cours des paliers de relaxation. En revanche, les paliers de décharge présentent moins de variation inattendue et permettent fi-

nalement de déduire que la relaxation est quasiment inexistante pour ce mode de sollicitation.

Une piste d'amélioration de la variabilité de ces essais serait par exemple un contrôle plus précis de la quantité de lubrifiant utilisé, voire une autre solution technologique pour limiter les frottements comme l'application d'un revêtement en téflon à l'intérieur du cylindre de confinement par exemple.

1.2.4. Influence de la température d'essai

Pour information, tous les essais présentés dans cette partie sont les résultats d'essais obtenus sur éprouvettes avec cycle de cuisson.

Influence sur le comportement quasi-statique

La figure 1.26 représente les boucles d'hystérésis d'équilibres issues des essais de relaxation par palier pour les éprouvettes de traction et de cisaillement cuites aux trois températures d'essais différentes.

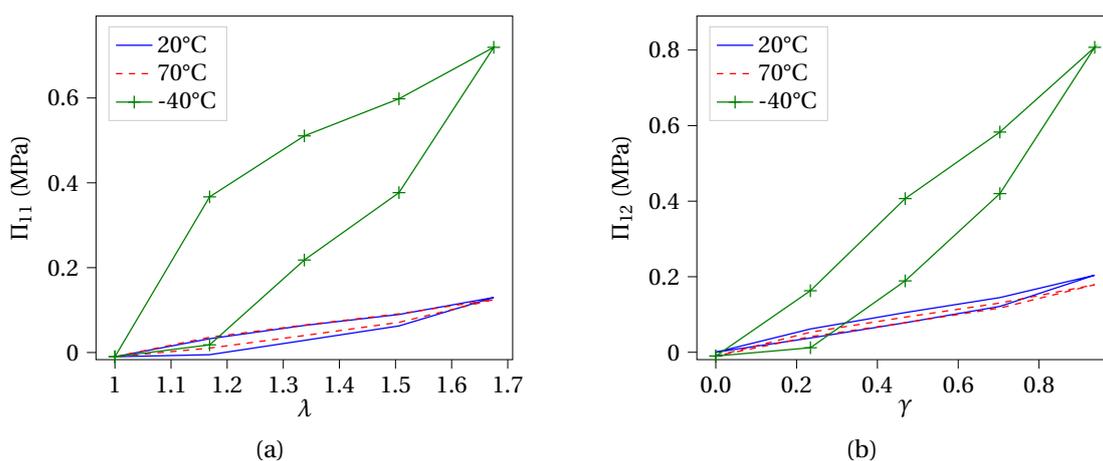


FIGURE 1.26. – Boucles d'hystérésis d'équilibre aux trois températures d'essai pour les éprouvettes de traction (a) et de cisaillement cuites (b).

Plusieurs informations peuvent être extraites de ces courbes. Premièrement, la rigidité statique du matériau augmente en diminuant la température d'essai, ce qui est tout à fait logique pour un élastomère en se rapprochant de sa température de transition vitreuse qui, pour le matériau de l'étude, est proche de -40°C . Le matériau passe d'un état caoutchoutique à un état vitreux plus rigide (mais également plus fragile). Au regard des résultats à -40°C , la perte de rigidité entre les essais à 20°C et 70°C semble négligeable (logique puisque ces températures sont incluses dans le "plateau caoutchoutique"). Deuxièmement, l'effet de la température est très marqué et sans surprise sur l'aire des boucles d'hystérésis qui équivaut à une dissipation qui baisse en augmentant la température, ce qui a été déjà démontré à plusieurs reprises dans la littérature (GORCE et al. 1993, LIN et S.-J. HWANG 2004 ou plus récemment

REY et al. 2013 pour des élastomères à base de silicone). L'hystérésis est le plus élevé à -40 °C , il est tout à fait logique que l'hystérésis soit exacerbée aux alentours de la température de transition vitreuse. Ces résultats sont à nuancer au vu de la durée des paliers de relaxation fixée à 3500s pour toutes les températures, en particulier pour -40 °C , il paraît certain que la relaxation est d'autant moins complète car le matériau relaxe beaucoup plus lentement.

Les essais de relaxation par palier en compression confinée réalisés à 70 °C sont présents en annexe D. Ces derniers essais ont présenté une forte variabilité inter-éprouvette mais ont néanmoins pu affirmer l'absence quasi-parfaite de relaxation en compression confinée. Ce qui a déjà été mis en avant dans le paragraphe 1.2.3.

Influence sur le comportement dynamique

En figures 1.27 et 1.28 sont présentés respectivement les balayages en amplitude et en fréquence dans le cas de la traction à -40 °C et 70 °C . Une plage plus restreinte d'amplitudes a été réalisée à -40 °C pour cause de limite de capteur.

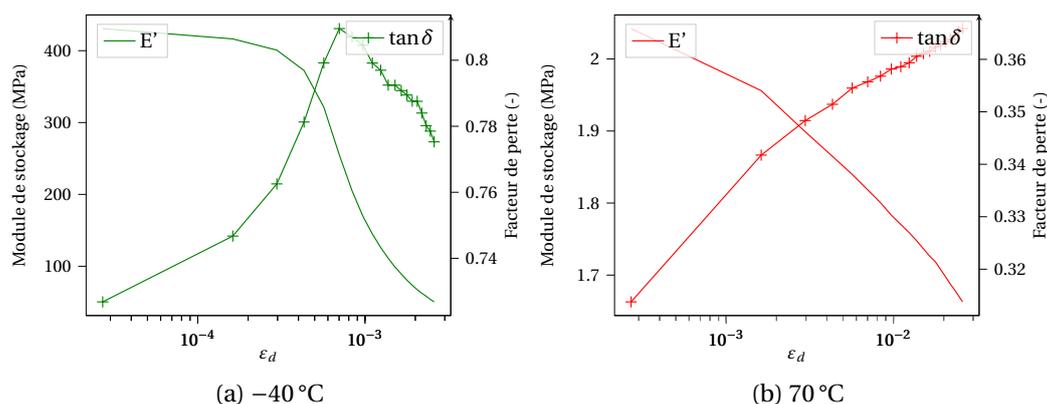


FIGURE 1.27. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour les températures -40 °C et 70 °C , à une fréquence de 3Hz.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

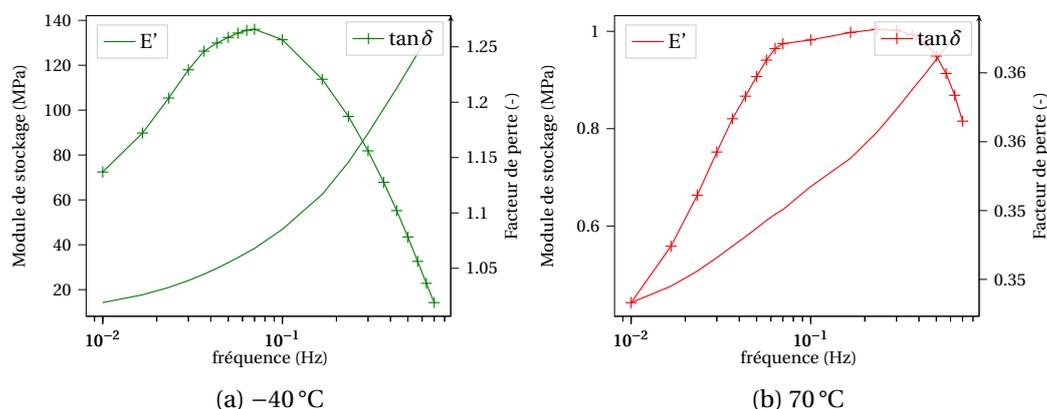


FIGURE 1.28. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour les températures $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $70\text{ }^{\circ}\text{C}$, à une fréquence de 3Hz.

Ces courbes affirment ce qui était déjà décrit dans le paragraphe précédent sur la dépendance de la raideur à la température. En effet, les valeurs de module de stockage à $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ sont 100 à 200 fois plus élevés que les valeurs à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$. Qui plus est, sur la figure 1.27, l'effet Payne est d'autant plus présent à $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ puisque les différentes phases de comportement sont observables jusqu'à l'élimination totale de ce dernier aux plus grandes amplitudes dynamique. Contrairement au module E' à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ où seulement une phase de décroissance est notable sans inversion de convexité.

Le facteur de perte, qui caractérise la dissipation (voir équation (1.21)), est globalement plus élevé à $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Sur la figure 1.29 sont représentés les modules de stockage et facteurs de perte en cisaillement en fonction de la fréquence et de l'amplitude à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ seulement. Les essais à $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ en cisaillement n'ont pas pu être réalisés à cause de limitations en effort du capteur de mesure.

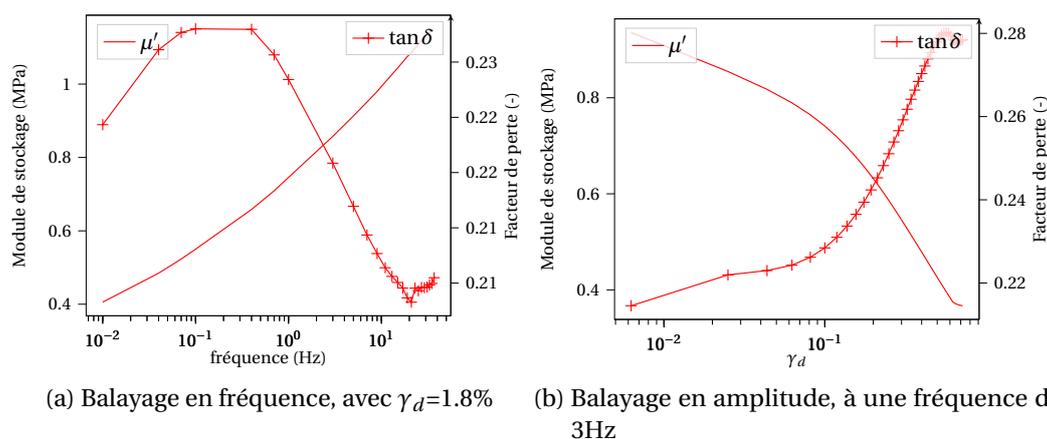


FIGURE 1.29. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour $70\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Une comparaison avec des essais à -40°C n'est pas possible mais les résultats à l'ambiante ont déjà été montrés en paragraphe 1.2.2.3 et permettent d'établir les mêmes conclusions que sur la traction excepté que les écarts entre essais à 20°C et 70°C ne sont pas du même ordre de grandeur que les écarts entre essais à -40°C et 70°C . Ce qui provient encore une fois du plateau caoutchoutique de comportement de l'élastomère loin de sa température de transition vitreuse (soit, schématiquement, entre 20°C et 70°C).

1.2.5. Principe d'équivalence temps-température

Des essais DMA en torsion ont été réalisés, selon la norme **ISO6721-7**, chez Safran Composites afin de construire les courbes maitresses de comportement de l'élastomère de l'étude. Ces essais ont été réalisés en amont de tous les autres essais de la campagne expérimentale afin d'obtenir des données qui ont servi comme données d'entrées pour les simulations numériques du chapitre 3 (paragraphe 3.2.2.2). Ces essais ont été réalisés sur la machine d'essai électromagnétique *ARES G2* de *TA Instruments*. Ces essais ont permis de mesurer le module de cisaillement complexe défini comme suit :

$$\mu^* = \mu' + i\mu'', \quad \text{avec} \quad \mu' = C \frac{M_0}{\alpha_0} \cos(\phi) \quad \text{et} \quad \mu'' = C \frac{M_0}{\alpha_0} \sin(\phi), \quad (1.22)$$

où μ' et μ'' sont les modules de stockage et de perte mesurés, α_0 et M_0 sont respectivement l'amplitude de l'angle de torsion appliqué et le moment mesuré, ϕ est le déphasage entre le signal de l'angle de torsion appliqué et celui du moment et C est un scalaire caractérisant la géométrie de l'échantillon. Les dimensions des échantillons sont 45 mm de longueur et de section rectangulaire de $3 \times 5 \text{ mm}^2$.

Les courbes maitresses de comportement sur un domaine étendu de fréquences ou de températures sont obtenues en utilisant le principe d'équivalence temps/température, voir FERRY 1980. Ce principe a permis de définir des lois régissant le lien entre des courbes de propriété complexe mesurées sur une plage de fréquence fixe et à différentes températures à travers des facteurs de translations. Ainsi, la courbe maitresse initiale à une température de référence T_0 et la connaissance des facteurs de translation a_T en fonction de la température permet de reconstruire cette courbe sur un domaine plus grand de fréquences non-atteignables expérimentalement. Les fréquences obtenues après translation du domaine fréquentiel de l'essai sont appelées fréquences réduites. L'allure schématique d'une courbe maitresse est donnée sur la figure 1.30. La loi *WLF* issue de WILLIAMS et al. 1955 propose la variation suivante des facteurs translation en fonction de la température de référence T_0 et la température T :

$$\log a_T = \frac{-C_1^0(T - T_0)}{C_2^0 + T - T_0}, \quad (1.23)$$

avec C_1^0 et C_2^0 deux constantes qui dépendent de la température de référence. Il est précisé dans WILLIAMS et al. 1955 que la relation 1.23 est usuellement valable sur

l'intervalle de température $[T_g; T_g + 100^\circ\text{C}]$.

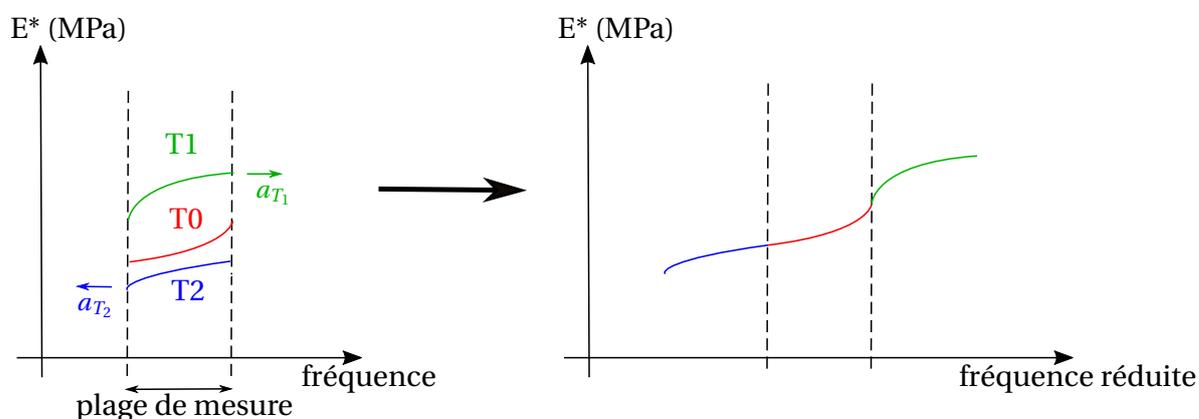


FIGURE 1.30. – Construction d'une courbe maîtresse à la température de référence T_0 . Ici on a $T_2 > T_0 > T_1$.

La loi *WLF* est une loi pour laquelle la translation réalisée est seulement horizontale (c'est-à-dire en température), mais il existe d'autres lois permettant de définir une translation à la fois horizontale (en température) et verticale (en propriété mesurée) DEALY et PLAZEK 2009. La qualité d'une loi de translation par rapport à une autre reste assez subjective et dépend du matériau. Par exemple, pour les élastomères chargés il a été prouvé qu'une simple translation horizontale de type *WLF* est souvent insuffisante surtout aux basses fréquences (M. KLÜPPEL 2008, FRITZSCHE et M. KLÜPPEL 2011).

Ainsi, à partir des données expérimentales, il a été décidé de réaliser une translation horizontale suivant une loi *WLF* puis une translation verticale manuelle sans loi analytique spécifique. Les facteurs de translation horizontale utilisés pour reconstruire les courbes maîtresses du module de cisaillement complexe sont donnés en figure 1.31 pour l'élastomère.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

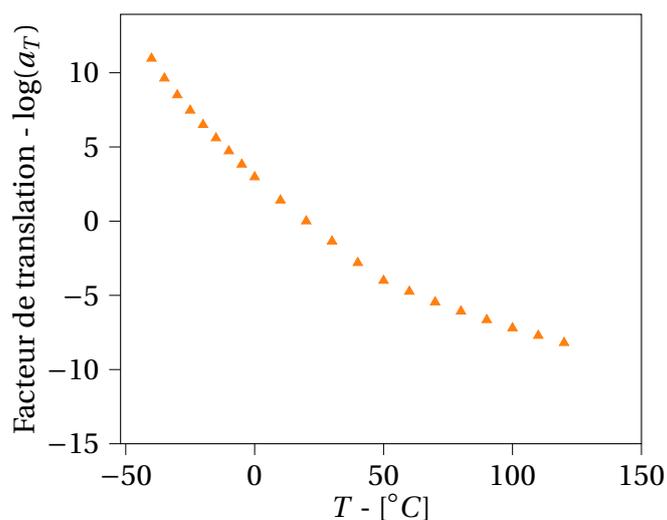


FIGURE 1.31. – Facteurs de translation horizontale utilisés pour construire la courbe maîtresse de l'élastomère.

La courbe maîtresse obtenue permet de reconstruire des DMA pour une température donnée avec une plage de fréquences très large. Le résultat est illustré en figure 1.32.

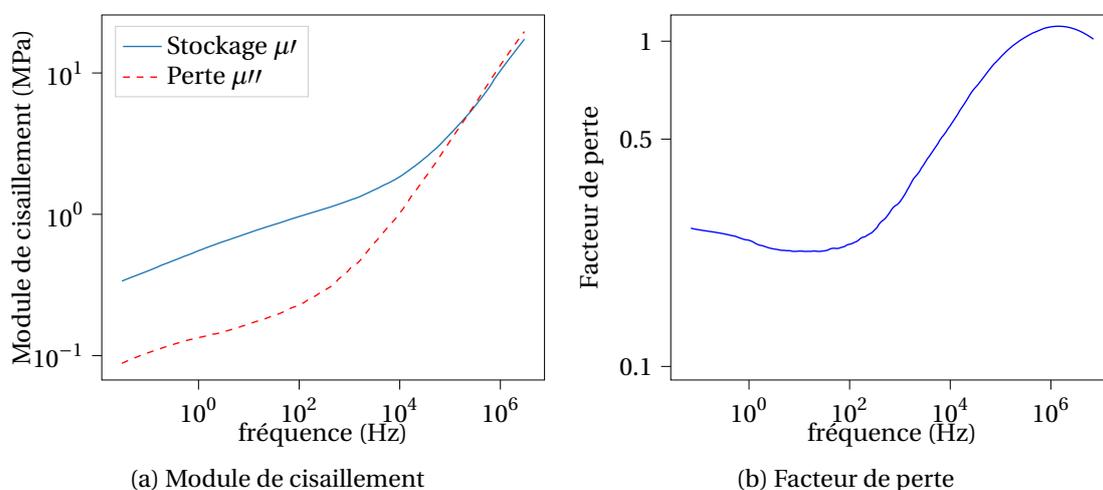


FIGURE 1.32. – Courbe DMA du module de cisaillement et de son facteur de perte associé pour l'élastomère

1.2.6. Campagne de vieillissement thermique

1.2.6.1. Généralités sur le vieillissement

Une définition non-exhaustive du vieillissement, fortement inspirée de FAYOLLE et VERDU [p. d.](#), serait un phénomène d'évolution lente et irréversible des propriétés d'un

matériau résultant de modifications de sa structure ou de sa composition sous l'effet de son instabilité propre, de l'interaction avec son environnement, de chargement mécaniques ou de l'association de plusieurs de ces causes (on parle alors de couplage). Le vieillissement des polymères peut être de deux types : le vieillissement physique où seul l'arrangement spatial des macromolécules ou la composition du matériau sont altérés et le vieillissement chimique où la structure chimique des macromolécules est modifiée. Un exemple de vieillissement physique peut être l'absorption par le matériau d'un solvant si ce dernier interagit avec un environnement liquide. Un exemple de vieillissement chimique est la thermo-oxydation lorsque le matériau interagit avec de l'oxygène (et plus généralement de l'air).

Afin de quantifier les effets du vieillissement, des essais accélérés sont réalisés afin de mesurer l'altération du matériau sous des conditions jugées plus sévères que les conditions réelles de fonctionnement de ce dernier. Dans cette étude, l'accélération de la dégradation du matériau est effectuée en jouant sur la température, mais il existe d'autres "moyens" d'accélération comme le taux d'humidité. Le choix du moyen d'accélération dépend bien sûr de l'application visée pour le matériau en question. Par exemple, des études se concentrent sur l'étude du vieillissement marin des élastomères couplée à l'estimation des propriétés en fatigue (vieillissement mécanique) pour une application offshore, comme dans LE SAUX 2010.

1.2.6.2. Description du protocole de vieillissement

Le protocole de vieillissement que l'on a utilisé est relativement simple puisqu'il a consisté en un seul palier de température à 90 °C pendant 4 mois. L'état avant vieillissement des éprouvettes était vierge, c'est-à-dire qu'elles n'avaient pas connu de cycle de cuisson avant d'être vieilles.

Il s'agit d'un vieillissement thermique anaérobie, c'est pourquoi, avant la mise en température, les éprouvettes ont été placées sous vide partiel à l'aide d'une bache protectrice scellée par du joint d'étanchéité (généralement utilisé pour la fabrication de plaques composites, voir figure 1.33). Les éprouvettes ont ensuite été placées dans une enceinte thermique universelle à convection naturelle UN55 de marque Memmert. Le fait d'isoler les éprouvettes permet de limiter les phénomènes de thermo-oxydation. En effet, l'oxydation est le mécanisme de dégradation le plus critique pour les polymères, une description concise du phénomène est disponible dans BEN HASSINE 2013. Il s'agit d'un phénomène auto-catalytique, ce qui veut dire que la cinétique de ces réactions est très lente au départ puis accélère avec le temps. L'oxydation peut mener soit à de la réticulation soit à des scissions de chaînes (SHELTON 1957) et engendre un vieillissement hétérogène à l'échelle des échantillons puisqu'elle apparaît surtout à leur bords libres. Par ailleurs, dans l'application industrielle, la partie en élastomère ne serait pas en contact direct avec un milieu oxydant tel que l'air. C'est également pourquoi un conditionnement sous vide partiel a été réalisé pour cette campagne.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

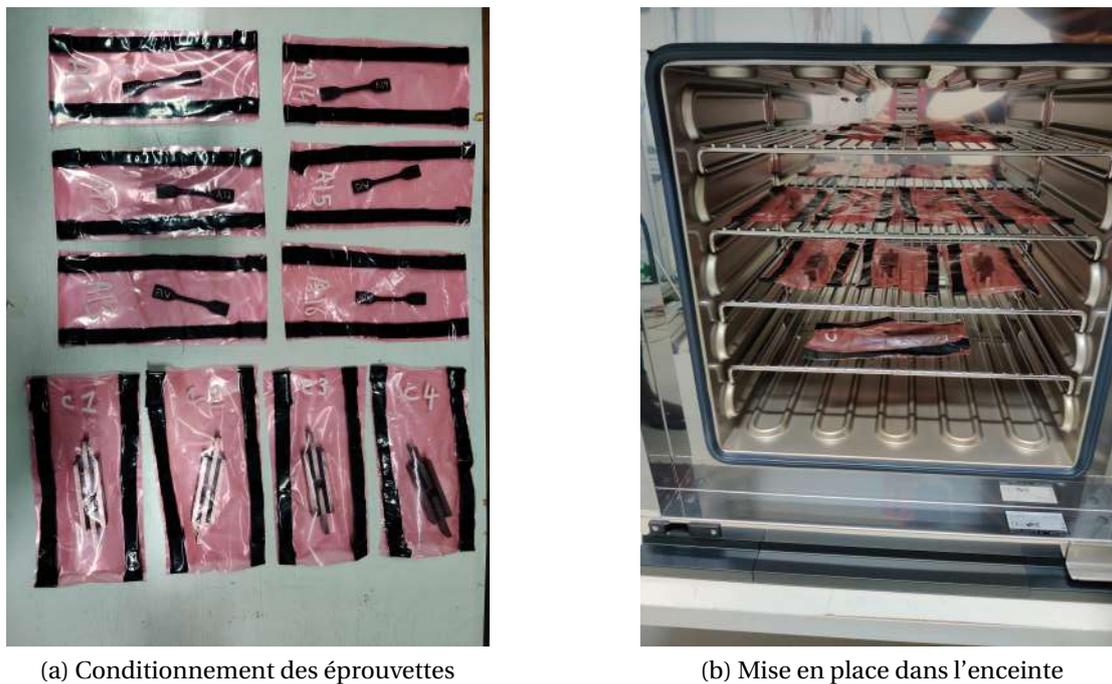


FIGURE 1.33. – Préparation des éprouvettes pour le vieillissement

1.2.6.3. Influence sur le comportement statique

Sur la figure 1.34 sont représentés les boucles d'hystérésis d'équilibre issues des essais de relaxation par palier en traction et en cisaillement pour éprouvettes vieilles mais également vierges et cuites.

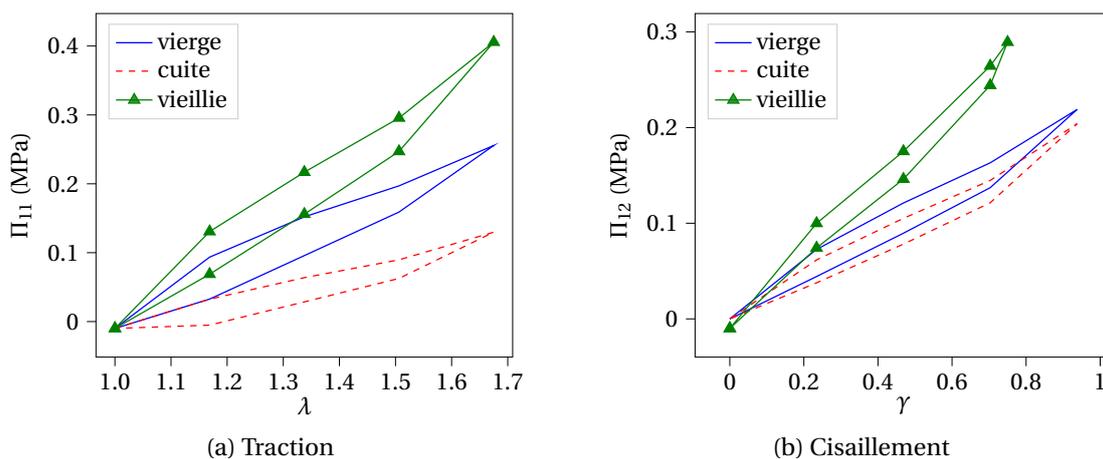


FIGURE 1.34. – Hystérésis d'équilibre d'éprouvette vieillie en traction et en cisaillement sur essais de relaxation par palier à température ambiante

Globalement, ces graphes montrent une rigidification du matériau après vieillisse-

ment. Ce phénomène de rigidification peut s'expliquer par une augmentation du taux de réticulation après vieillissement thermique. Il s'agit d'une hypothèse quasi-certaine car, dans le cas des élastomères vulcanisés au soufre, il a été démontré dans SHELTON 1957 qu'à faible niveaux de concentrations en oxygène, le processus de réticulation domine devant les autres phénomènes mis en jeu lors de l'oxydation comme la scission de chaînes. D'un point de vue expérimental, la rigidification engendrée par le vieillissement thermique a été mise en évidence dans WARLEY et HALLADAY 2005 par exemple.

1.2.6.4. Influence sur le comportement dynamique

Sur la figure 1.35 est représentée le module de stockage (1.35(a)) et le facteur de perte (1.35 (b)) en fonction de la fréquence en traction pour tous les types d'éprouvettes (vierge, cuite et vieillie). Sur la figure 1.36, sont représentées les mêmes grandeurs en fonction de l'amplitude dynamique pour les mêmes éprouvettes. Les résultats sur éprouvettes de quadruple cisaillement sont disponibles en annexe E.

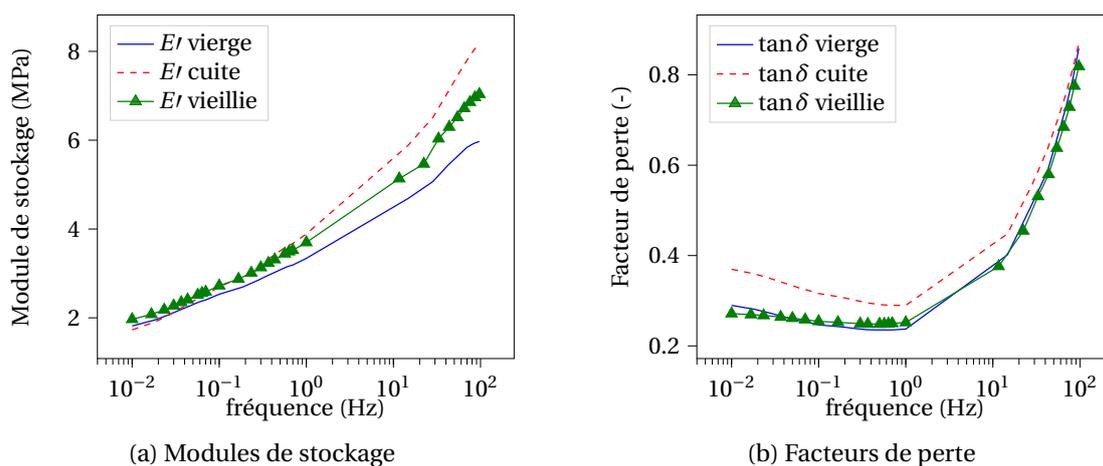


FIGURE 1.35. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour éprouvette de traction vieillie, éprouvette cuite et éprouvette vierge

Comparée au module de stockage de l'éprouvette vierge, celui de l'éprouvette vieillie est plus élevée ce qui est lié au raidissement déjà constaté au paragraphe précédent et s'explique par une augmentation de la densité de réticulation après vieillissement. Concernant, l'évolution du facteur de perte, cette dernière est quasi-inchangée sur les balayages en fréquence entre éprouvette vierge et vieillie.

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.2. Résultats de la campagne d'essais

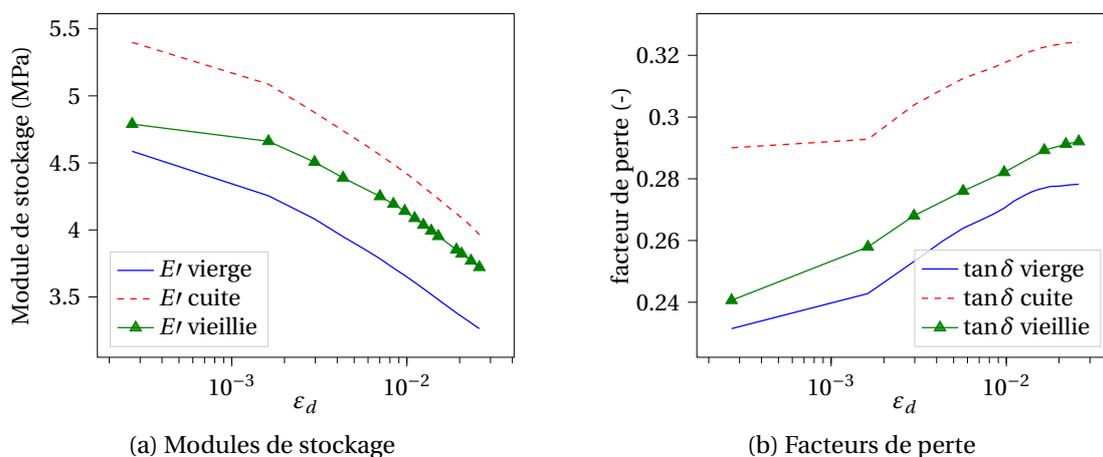


FIGURE 1.36. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour éprouvette de traction vieillie, éprouvette cuite et éprouvette vierge

Sur les balayages en amplitude dynamique, la même conclusion sur le raidissement est observable après vieillissement. Et contrairement au cas du balayage fréquentiel, le facteur de perte est légèrement plus élevé après vieillissement en fonction de l'amplitude dynamique. En revanche, les formes des évolutions restent inchangées et représentent seulement un décalage vertical. Ce qui a déjà été étudié par le passé (dans AHOSE et al. 2017 ou AZIZ et al. 2021 par exemple).

1.3. Conclusion

Dans ce chapitre, des résultats de caractérisation mécanique du matériau de l'étude, le SMACTANE60, sont présentés.

Les objectifs de cette caractérisation ont été définis prioritairement par rapport aux attentes de l'application industrielle. Ces attentes se sont traduites par des gammes de températures (-40 °C à 70 °C), de déformations (100% à 120% maximum), de fréquences (100 Hz maximum) ou encore d'état (vierge ou après cuisson) portant un intérêt pour la caractérisation statique et dynamique. Le tout sous différents types de sollicitation (cisaillement, traction, compression).

Pour les chargements statiques, les essais de relaxation par paliers sont des essais très pertinents qui permettent de mettre en évidence plusieurs phénomènes. Ils permettent premièrement de caractériser le comportement "statique" du matériau en regardant les courbes d'hystérésis d'équilibre obtenues après relaxation quasi-totale des contraintes. Ces essais ont également permis de mettre en évidence la dépendance non-linéaire à l'amplitude statique de chargement en traction comme en cisaillement. Même dépendance qui a pu être jugée comme anisotrope au regard des cinétiques de relaxation différentes entre traction et cisaillement.

Les essais DMA quant à eux, ont permis d'étudier l'influence de la fréquence et de l'amplitude dynamique de chargement sur la raideur par le biais des modules de stockage et la dissipation par le biais du facteur de perte. Les effets connus pour ce type de matériau ont été mis en évidence, comme l'augmentation de la raideur en fonction de la fréquence ou la diminution de cette dernière en fonction de l'amplitude dynamique plus connue comme l'effet Payne. L'effet de la précharge statique sur les deux types de balayage a également été souligné.

Des essais de compression confinée ont permis de mesurer le module de compressibilité statique de l'élastomère et surtout de faire ressortir l'absence de relaxation pour ce mode de sollicitation.

L'influence de la température d'essai a également été étudiée à la fois sur le comportement statique et dynamique permettant de mettre en exergue la forte dépendance de la dissipation du matériau à cette dernière.

Pour tous ces essais, une comparaison entre éprouvette vierge et éprouvette ayant subi un cycle en température a été proposée. Cette comparaison permet de s'interroger sur l'impact du procédé d'assemblage de l'élastomère sur la structure composite lors de l'étape de polymérisation. Une augmentation de la dissipation (en traction comme en cisaillement) a été démontrée par cette comparaison pour les éprouvettes cuites. Ce dernier aspect semble positif d'un point de vue amortissement mais reste à nuancer au regard des autres propriétés mécaniques critiques.

Enfin, une campagne de vieillissement thermique anaérobie a été réalisée pour mesurer l'impact du vieillissement sur les propriétés statiques et dynamiques de l'élastomère. Les conclusions de cette étude sont parfaitement en accord avec la littérature sur le phénomène de rigidification du matériau vieilli qui s'accompagne d'une faible variation des propriétés dissipatives.

Une partie de ces essais est utilisée pour identifier le modèle de comportement

1. Caractérisation mécanique du matériau de l'étude – 1.3. Conclusion

hyperviscoélastique présenté en chapitre suivant.

2. Modélisation du comportement des élastomères

Sommaire

2.1	Introduction	60
2.1.1	Éléments de bibliographie sur l'hyperélasticité	60
2.1.1.1	Cas incompressible	61
2.1.1.2	Cas faiblement compressible	63
2.1.2	Éléments de bibliographie sur la viscoélasticité	65
2.1.3	Éléments de bibliographie sur la description de l'effet Payne	68
2.2	Présentation du modèle hyperviscoélastique	71
2.2.1	Démarche choisie et objectifs du modèle	71
2.2.2	Équations constitutives du modèle de Maxwell généralisé	72
2.2.2.1	Forme générale de la contrainte	72
2.2.2.2	Formes d'énergies libres et lois d'évolution	76
2.2.2.3	Modèle pour la prédiction de l'effet Payne	77
2.2.3	Linéarisation du modèle et exploitation dans le domaine fréquentiel	80
2.2.3.1	Objectifs de la linéarisation	80
2.2.3.2	Hypothèses et procédure de linéarisation	81
2.3	Identification des paramètres du modèle	89
2.3.1	Formes analytiques de la contrainte	90
2.3.1.1	Écriture en formulation mixte incompressible	90
2.3.1.2	Forme analytique de la contrainte de traction et du module d'Young complexe	91
2.3.1.3	Forme analytique de la contrainte de cisaillement	92
2.3.2	Identification des paramètres de la branche hyperélastique sous contrainte de stabilité matérielle	93
2.3.2.1	Définition de la fonction objectif	93
2.3.2.2	Contrainte de stabilité matérielle	93
2.3.2.3	Résultats	94
2.3.3	Identification des paramètres des branches de Maxwell	96
2.3.3.1	Définition de la fonction objectif	96
2.3.3.2	Procédure d'identification	97
2.3.3.3	Résultats d'identification	98
2.3.4	Validation du modèle sous chargement multi-axial	104
2.3.4.1	Implémentation éléments finis	104

2. *Modélisation du comportement des élastomères –*

2.3.4.2	Validation de l'implémentation éléments finis sur cas simple	105
2.3.4.3	Résultats sur essais de traction-torsion	107
2.4	Conclusion	109

2.1. Introduction

Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence expérimentalement un certain nombre de caractéristiques propres aux élastomères. Les essais définis par des chargements à des niveaux de déformation élevés ont permis de mettre en évidence le comportement statique du matériau (sur les essais de relaxation par palier au paragraphe 1.2.1.2 par exemple) qui sera supposé ici comme hyperélastique, et les essais harmoniques (présentés en paragraphe 1.2.2) ont mis en évidence la dépendance du matériau à la fréquence ainsi qu'à l'amplitude de sollicitation ce qui s'explique par le caractère viscoélastique non-linéaire du matériau et par l'effet Payne pour les élastomères chargés. Maintenant que les différentes caractéristiques mécaniques du matériau sont mises en évidence, l'établissement d'un modèle de comportement est possible dans le but de prédire son comportement dans un domaine d'application visé. Différentes approches de modélisation existent dans la littérature et permettent de décrire les différentes caractéristiques citées plus haut (hyperélasticité, viscoélasticité, effet Payne). Un certain nombre d'entre elles sont présentées dans les parties suivantes.

L'annexe F rappelle brièvement les outils mathématiques nécessaires à la description des mouvements et des efforts dans le cadre des grandes transformations ainsi que les principes de la thermodynamique utilisés en fonction de la configuration d'étude.

2.1.1. Éléments de bibliographie sur l'hyperélasticité

L'hyperélasticité caractérise la partie réversible du comportement. La modélisation du comportement hyperélastique passe par la définition d'une fonction d'énergie libre de Helmholtz ψ permettant de calculer la contrainte hyperélastique (ou contrainte d'équilibre) $\boldsymbol{\sigma}_{eq}$ ou $\boldsymbol{\Pi}_{eq}$ dans des configurations différentes :

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq} = 2\rho_0 J^{-1} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_B}{\partial \mathbf{B}} \quad \text{dans la configuration eulérienne,} \quad (2.1)$$

ou

$$\boldsymbol{\Pi}_{eq} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{en configuration mixte.} \quad (2.2)$$

Dans le cas des élastomères (matériaux incompressibles ou faiblement compressibles), il existe deux grands types de modèles, les modèles phénoménologiques (comme RIVLIN, SAUNDERS et al. 1951 ou HART-SMITH 1966) et les modèles motivés par la micro-physique (comme ARRUDA et Mary C. BOYCE 1993 ou Christian MIEHE et KECK 2000). Dans le cas des modèles phénoménologiques, l'expression de cette énergie est généralement basée sur les invariants du tenseur des déformations ou sur les déformations principales. Pour une revue détaillée sur tous les modèles hyperélastiques, le lecteur pourra se référer à BEDA 2007 ou HOSSEINI et al. 2010. Le choix d'un modèle va dépendre de son domaine d'application, des variables qu'il met en jeu mais également des données expérimentales disponibles. La validité du modèle est alors évaluée par

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

sa capacité à décrire les essais, sa pertinence est quant à elle évaluée par le nombre de paramètres nécessaires à sa construction.

2.1.1.1. Cas incompressible

Les approches statistiques

Les approches statistiques sont basées sur la déformation des chaînes macromoléculaires et sur des lois probabilistes qui définissent la répartition de ces chaînes au sein du matériau. Une première formulation statistique a été proposée par WALL 1942 puis par TRELOAR 1944 et se base sur l'estimation de l'entropie d'une chaîne moléculaire. Cette estimation est rendue possible par l'introduction d'une loi de probabilité gaussienne donnant la distribution des chaînes de même longueur. Il est alors possible de remonter à l'entropie totale du système et c'est de là que trouve son origine le modèle néo-hookéen (TRELOAR 1944) :

$$\psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} N k_B \theta (I_1(\mathbf{C}) - 3), \quad (2.3)$$

avec N le nombre de chaînes polymères par unité de volume du solide non-déformé, k_B la constante de Boltzmann, θ la température absolue et $I_1(C)$ le premier invariant du tenseur de déformations de Cauchy-Green droit. Or, ce modèle n'est adapté que pour des niveaux de déformations modérés car ne permet pas de traduire le phénomène de rigidification aux déformations importantes, c'est pourquoi des approches non-gaussiennes ont été développées par la suite. L'une des plus répandues est présentée dans ARRUDA et Mary C. BOYCE 1993 et considère un positionnement des chaînes selon les diagonales d'une cellule unitaire cubique. Ces modèles diffèrent par leur domaine de validité en terme de plage de déformations mais également par leur capacité à capturer le comportement multi-axial.

Les approches phénoménologiques

Les approches phénoménologiques sont basées sur des considérations mathématiques mais sont généralement corrélées à des observations expérimentales à l'échelle macroscopique. C'est pourquoi une bonne compréhension des phénomènes physiques mis en jeu est nécessaire afin d'être au plus proche du comportement réel. Ce paragraphe présente une liste non-exhaustive de modèles couramment utilisés, pour une revue plus détaillée le lecteur pourra se reporter à Mary C. BOYCE et ARRUDA 2000 ou MARCKMANN et Erwan VERRON 2006 qui comparent vingt modèles et les classifient au regard de données d'essais issues de TRELOAR 1944.

◆ Le modèle de MOONEY 1940

Pour un matériau incompressible et isotrope pour lequel l'effort de cisaillement est proportionnel à la déformation de cisaillement, l'auteur parvient à exprimer

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

la forme suivante d'énergie libre :

$$\psi(\mathbf{F}) = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right), \quad (2.4)$$

où C_1 et C_2 sont des paramètres matériau à identifier et λ_1 , λ_2 et λ_3 sont les élongations principales (valeurs propres de \mathbf{F}). Ce modèle relativement simple parvient à traduire le comportement des élastomères pour des déformations allant jusqu'à 100%.

◆ Le modèle de RIVLIN, SAUNDERS et al. 1951

Il s'agit de la généralisation du modèle de Mooney qui consiste en une série de facteurs de $(I_1 - 3)$ et $(I_2 - 3)$:

$$\psi(\mathbf{B}) = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, \quad (2.5)$$

où I_1 et I_2 sont les deux premiers invariants de \mathbf{B} ici. Cette généralisation a donné source à un grand nombre de modèles qui sont des cas particuliers de cette série. Le tableau 2.1 en cite quelques uns.

Référence	Coefficients
TRELOAR 1943	C_{10}
ISIHARA et al. 1951	$C_{10} C_{01} C_{20}$
JAMES et al. 1975	$C_{10} C_{01} C_{11} C_{20} C_{02}$
RIVLIN et SAWYERS 1976	$C_{10} C_{01} C_{02}$
HAUPT et SEDLAN 2001	$C_{10} C_{01} C_{11} C_{02} C_{30}$

Tableau 2.1. – Quelques modèles polynomiaux

◆ Le modèle de GENT et THOMAS 1958

Ce modèle considère une dépendance logarithmique en I_2 et est généralement pertinent pour des déformations allant jusqu'à 200% :

$$\psi(\mathbf{F}) = C_1(I_1 - 3) + C_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right). \quad (2.6)$$

◆ Le modèle de OGDEN et HILL 1972

Ce modèle fait intervenir les élongations principales et le module de cisaillement

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

μ :

$$\psi(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3), \quad (2.7)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i = 2\mu \quad \text{et} \quad \mu_i \alpha_i > 0. \quad (2.8)$$

Les performances de ce modèle vont dépendre du degré n de troncature et possède l'avantage d'être très modulable.

2.1.1.2. Cas faiblement compressible

L'hypothèse d'incompressibilité est largement utilisée dans la littérature et se justifie par le fait que le module de compressibilité de l'élastomère est beaucoup plus élevé que son module de cisaillement. Bien que simplificatrice, cette hypothèse est en général fautive puisque la plupart des élastomères possèdent plutôt un comportement quasi-incompressible et une variation de volume doit être prise en compte dans la déformation puis dans l'énergie (en particulier lors de sollicitations dont la composante sphérique est grande devant la composante déviatorique). Ainsi, une décomposition multiplicative du tenseur gradient de transformation en une partie isochore et une partie volumique a été proposée (en premier lieu par P. J. FLORY 1961) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \cdot \bar{\mathbf{F}}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{F}_{vol} = J^{1/3} \mathbf{I}. \quad (2.10)$$

Et l'énergie se retrouve découpée de la façon suivante :

$$\psi = \psi_{iso}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{vol}(J), \quad (2.11)$$

où $\bar{\mathbf{B}} = J^{-2/3} \mathbf{B}$ et $\psi_{vol}(J)$ est la partie volumique de l'énergie qui est souvent écrite de la forme suivante :

$$\psi_{vol}(J) = kf(J), \quad (2.12)$$

où k correspond au module de compressibilité sous la condition $f''(J = 1) = 1$. Le tableau présente quelques formes d'énergie de compressibilité (inspiré de Stéphane LEJEUNES 2006).

Référence	$f(J)$	$f'(J)$	$f''(J)$
OGDEN et HILL 1972	$\frac{1}{\beta^2} (\frac{1}{J^\beta} - 1 + \beta \ln(J))$	$\frac{1}{\beta} (\frac{1}{J} - \frac{1}{J^{1+\beta}})$	$\frac{1}{\beta} \frac{1}{J^{2+\beta}} (1 + \beta - J^\beta)$
C. MIEHE 1994	$J - \ln(J) - 1$	$1 - \frac{1}{J}$	$\frac{1}{J^2}$
Stefan HARTMANN et NEFF 2003	$\frac{1}{50} (J^5 + J^{-5} - 2)$	$\frac{1}{10} (J^4 - J^{-6})$	$\frac{1}{10} (4J^3 + 6J^{-7})$

Tableau 2.2. – Exemples de fonctions d'incompressibilité

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

Pour tous les modèles (compressibles ou non), de nombreuses études comparatives ont été réalisées pour comparer ces modèles entre eux comme CHAGNON et al. 2004, MARCKMANN et Erwan VERRON 2006 qui compare 20 modèles sur leur capacité à décrire un comportement multi-axial, CURRIE 2005 compare des modèles incompressibles par rapport à leur domaines de validité calculés à partir d'une méthode de prédiction de l'énergie libre basée sur des données expérimentales ou plus récemment STEINMANN et al. 2012 qui compare 14 modèles sur la robustesse des opérateurs tangents associés à chacun pour le calcul numérique.

Les approches plus récentes sont pour la plupart une généralisation ou une combinaison des différents modèles cités plus haut. La dernière catégorie constitue les modèles dits "hybrides" car combinant aspects phénoménologiques et aspects micro-physiquement motivés. Quelques modèles plus récents sont répertoriés dans le tableau 2.3 ci-dessous.

Référence	Énergie	Remarques
YUAN et al. 2015	$W = \frac{1-2\nu}{3} w(q) + \frac{1+\nu}{6} \left(((2 - \gamma)w(\pi) + (\gamma - 1)Y_1)(1 + \gamma)^2 + ((2 + \gamma)w(-\pi) + (\gamma + 1)Y_{-1})(1 - \gamma)^2 \right)$	Modèle compressible, basé sur des fonctions des invariants ($w(\pi)$ et γ) du tenseur des déformations de Hencky $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) n_i \otimes n_i$
KHIÊM et ITSKOV 2016	$\psi(I_1, I_2) = \mu_c \kappa n \ln \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) (I_1/3)^{\frac{q}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) (I_1/3)^{\frac{q}{2}}} + \mu_t \left[\left(\frac{I_2}{3}\right)^{1/2} - 1 \right]$	Modèle micro-physiquement motivé basé sur C. MIEHE 1994, distribution non-gaussienne des chaînes moléculaires
CRESPO et al. 2017	$\psi(E_1, E_2, E_3) = \mathcal{W}(E^{vol}) + \mathcal{W}(E_1^d, E_2^d, E_3^d)$	Une formulation "what you prescribe is what you get" compressible exprimé en fonction des élongations logarithmiques principales
ZHAO et al. 2019	$W = \sum_n \sum_r c_n^r (\lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} + \lambda_3^{2n} - 3)^r$	Incompressible, basé sur le tenseur des déformations de Seth : $\mathbf{E}^{(n)} = \frac{1}{2n} (\mathbf{C}^n - I)$

Tableau 2.3. – Modèles hyperélastiques récents

2.1.2. Éléments de bibliographie sur la viscoélasticité

La viscoélasticité permet de traduire la dépendance de certains matériaux au temps (comme rappelé dans LAKES 2009), cette dépendance pouvant se caractériser par une influence de la vitesse de chargement, un déphasage entre le chargement et sa réponse et/ou une source de dissipation. Dans le cadre des grandes déformations, la théorie de la viscoélasticité linéaire ainsi que le principe de Boltzmann CHRISTENSEN 1982 ne permettent pas d'établir des lois régissant les différentes grandeurs mécaniques. C'est pourquoi différentes approches ont été proposées dans la littérature pour modéliser le comportement viscoélastique en grandes déformations. Trois types d'approches se dégagent principalement : les approches intégrales, les approches différentielles et les approches micro-physiquement motivées. Ces différentes approches sont discutées dans les revues DRAPACA et al. 2007 et WINEMAN 2009.

L'approche intégrale

Les formulations intégrales reposent sur l'expression des contraintes comme une fonction de l'histoire des déformations, les modèles les plus répandus se basent sur les études pionnières de COLEMAN et NOLL 1961 et TRUESDELL et NOLL 1965 qui elles-mêmes trouvent leur fondement dans l'extension du principe de superposition de Boltzmann aux grandes déformations. C'est ainsi que le modèle F.L.V (Finite Linear Viscoelasticity, COLEMAN et NOLL 1961) est né dont l'expression de la contrainte est la suivante.

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T = -p\mathbf{I} + f(\mathbf{E}) + \int_0^\infty \mathbb{K}(\mathbf{E}, s) : (\mathbf{E}(t-s) - \mathbf{E}(s)) ds \quad (2.13)$$

Où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, \mathbf{R} est le tenseur de rotation propre (issu de la décomposition polaire de \mathbf{F}), p est la pression hydrostatique, \mathbf{E} est le tenseur de déformations de Green-Lagrange, f est la fonction décrivant une loi hyperélastique et \mathbb{K} est une fonction tensorielle d'ordre 4. Le modèle BERNSTEIN et al. 1965 propose une écriture intégrale en postulant l'existence d'un potentiel W partant de la généralisation d'une formulation 1D d'un essai de cisaillement, en utilisant le principe de superposition de Boltzmann :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \int_{-\infty}^t \mathbf{F}^{-1}(t, t') \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}(t, t')} \cdot \mathbf{F}^T(t, t') dt' \quad (2.14)$$

Avec $\mathbf{F}^T(t, t') = \mathbf{F}(t') \cdot \mathbf{F}^{-1}(t)$.

Le modèle M.F.L.V. (Modified Finite Linear Viscoelasticity) proposé dans MORMAN 1988 découle directement de cette écriture mais introduit une mesure généralisée des déformations notée $\mathbf{H}(\mathbf{E})$ qui est une fonction isotrope et inversible de \mathbf{E} . En linéarisant le modèle aux petites déformations, l'auteur obtient une expression équivalente du modèle F.L.V avec un module de relaxation linéaire.

Ces modèles les plus anciens permettent un écart par rapport à l'équilibre thermodynamique. En revanche, le modèle plus récent de HAUPT et A. LION 2002 est quant à lui thermodynamiquement compatible avec l'inégalité de Clausius-Duhem et fait intervenir un modèle F.L.V dans lequel la fonction de relaxation est définie par un

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

spectre de relaxation continu. La construction de ce modèle est réalisée notamment par l'utilisation de dérivées fractionnaires.

D'intéressantes comparaisons des modèles à formulation intégrale sont proposées dans CIAMBELLA et al. 2010 ou JRIDI et al. 2019.

L'approche différentielle (à variables internes)

La formulation différentielle constitue la généralisation tridimensionnelle des modèles rhéologiques 1D transposés aux grandes déformations (Maxwell, Kelvin-Voigt, Zener, etc...). Ces modèles se basent sur la théorie de l'état local, LEMAITRE et al. 1996, et sur la notion d'états intermédiaires (d'abord introduite par R. A. SCHAPERY 1966 et approfondie par François Sidoroff SIDOROFF 1973 SIDOROFF 1975a, SIDOROFF 1975b, SIDOROFF 1976), et font intervenir des variables internes. Ces variables internes sont définies par des lois d'évolution obtenues sous l'hypothèse des matériaux standards généralisés (HALPHEN et SON NGUYEN 1975). La dissipation est alors fonction de ces variables internes V_k et de leur force thermodynamique associée A_k et les lois d'évolutions de ces variables internes sont obtenues en appliquant le principe de normalité introduisant une nouvelle quantité appelée potentiel de dissipation ϕ :

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} = - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{V}_k}. \quad (2.15)$$

Pour satisfaire l'inégalité de Clausius-Duhem il suffit alors de postuler un potentiel ϕ qui soit convexe, positif et nul à l'origine dans l'espace des variables flux \dot{V}_k . Par exemple, S. MEO et al. 2002 propose un modèle de Poynting-Thomson avec un pseudo-potentiel de forme quadratique en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C}_v associé à la contribution visqueuse \mathbf{F}_v du tenseur gradient de déformations :

$$\phi(\mathbf{C}_v) = \frac{1}{2} \eta \dot{\mathbf{C}}_v : \dot{\mathbf{C}}_v, \quad (2.16)$$

\mathbf{F}_v provient de la décomposition multiplicative de \mathbf{F} en une partie élastique et une partie anélastique (ici visqueuse) (SIDOROFF 1975b) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_v, \quad (2.17)$$

avec η un paramètre de viscosité. Plus tard, MARTINEZ et al. 2011 propose un modèle de Maxwell statistique avec un pseudo-potentiel faisant intervenir une mesure objective du tenseur taux de déformation associé à \mathbf{F}_v :

$$\phi = \frac{1}{2} \eta \mathbf{D}_v^o : \mathbf{D}_v^o, \quad (2.18)$$

avec $\mathbf{D}_v^o = \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{R}_e^{-1}$ où \mathbf{R}_e est le tenseur de rotation propre de la décomposition polaire de \mathbf{F}_e , $\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{U}_e$. Un autre exemple de ce type de formulation est disponible dans CHEN et al. 2017 et concerne la modélisation viscoélastique-viscoplastique du bitume. Un potentiel de force est introduit en fonction de la contrainte de Mandel \mathbf{M}

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

(contrainte généralement utilisée pour des modèles incorporant de la plasticité) :

$$\phi^* = \frac{1}{2\eta^d} \left\{ \text{dev} \mathbf{M}^\nu \right\}^2 + \frac{1}{9\eta^\nu} \left\{ \text{tr} \mathbf{M}^\nu \right\}^2 \mathbf{I}, \quad (2.19)$$

où η^d et η^ν sont des paramètres matériau contrôlant l'évolution de la partie déviatorique et volumique de la déformation viscoélastique.

L'approche micro-physiquement motivée

Ce type de modèles est basé sur la description statistique des interactions entre chaînes polymère et charges. GREEN et TOBOLSKY 1946 établissent la théorie du réseau transitoire qui postule que les chaînes polymère se brisent et se reforment en permanence. Les auteurs proposent alors une loi d'évolution, décrivant le taux actuel de chaînes brisées, qui dépend d'un paramètre α représentant la probabilité de rupture d'une chaîne inversement proportionnelle au temps de relaxation de la contrainte. La contrainte prend la forme suivante :

$$\sigma = Nk_b T_0 \exp[-\alpha(t - t_0)] h(t - t_0) + \int_{t_0}^t Nk_b T_0 \exp[-\alpha(t - t_0)] g(t, t') dt', \quad (2.20)$$

le premier terme correspond à la contribution des chaînes élastiquement actives depuis $t = t_0$ et le second correspond aux chaînes reformés au temps $t > t_0$. Sur le même concept, REESE 2003 propose une forme d'énergie libre faisant intervenir des élongations internes $(\lambda_{A_j})_{A=1,2,3}$ pour les différents types de chaînes j :

$$\psi = \sum_{A=1}^3 \int_1^{\lambda_A} \frac{k_b T}{2} \left((\lambda_A \lambda_{A_j})^2 - 1 \right) f(\lambda_{A_j}, t) d\lambda_{A_j}, \quad (2.21)$$

où $f(\lambda_{A_j}, t)$ est une fonction de distribution.

Une autre approche, proposée par Christian MIEHE et GÖKTEPE 2005 propose que la viscosité provient des mouvements relatifs de deux réseaux de chaînes enchevêtrés. Un premier réseau formant une trame traduit le comportement hyperélastique. Le second réseau est constitué de chaînes emmêlées dans la trame et serait à l'origine du comportement visqueux. Ce type de réseau est illustré en figure 2.1.

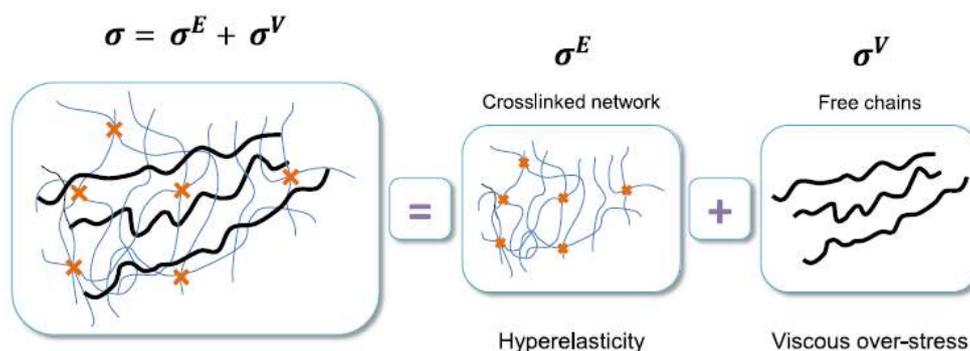


FIGURE 2.1. – Décomposition des micromécanismes de déformation (issue de YING LI et al. 2016)

A l'échelle de la microstructure, les auteurs décomposent alors l'énergie libre en une contribution due au réseau de trame et une contribution due au "sous-réseau". La modélisation du second réseau fait intervenir un spectre discret de tailles de chaînes différentes associé à des variables internes assimilables à des micro-déformations. Une procédure d'homogénéisation est ensuite mise en place pour se ramener au comportement macroscopique. YING LI et al. 2016 reprennent le même concept de double réseau mais l'enrichissent avec des simulations de dynamique moléculaire faisant apparaître de nouveaux paramètres matériau dans le modèle tels que : un temps caractéristique de désenchevêtrement, l'extensibilité maximale des chaînes ou encore le degré de polymérisation.

Une revue détaillée sur les modèles micro-physiques est disponible dans XIANG et al. 2020 pour la description de l'hyperélasticité et de l'hyper-viscoélasticité.

2.1.3. Éléments de bibliographie sur la description de l'effet Payne

L'un des premiers modèles phénoménologiques permettant de décrire l'effet Payne est celui de KRAUS et al. 1966 étudié dans ULMER 1996 par exemple. Ce modèle repose sur l'hypothèse que l'effet Payne provient des charges par des ruptures puis reformations des liaisons physiques faibles du réseau de charges, lorsque l'élastomère est soumis à un chargement. Le taux de ruptures dans le réseau est alors supposé être une fonction croissante de l'amplitude dynamique de sollicitation alors que le taux de reformations serait au contraire une fonction décroissante de cette même amplitude. Le module de stockage (partie réelle du module complexe) est alors supposé être proportionnel au nombre total de liaisons intactes (qui n'ont pas été détruites lors de la sollicitation) et le module de perte (partie imaginaire) proportionnel à la vitesse de rupture de liaisons. Les expressions suivantes des modules de stockage E' et de perte

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

E'' résultent de cette théorie :

$$E'(\Delta\varepsilon) = E'_\infty + \frac{E'_0 - E'_\infty}{1 + \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon_c}\right)^{2m}}, \quad (2.22)$$

$$E''(\Delta\varepsilon) = E''_\infty + \frac{2(E''_m - E''_\infty)\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon_c}\right)^m}{1 + \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon_c}\right)^{2m}}, \quad (2.23)$$

où $\Delta\varepsilon_c$ est la valeur seuil d'amplitude dynamique pour laquelle le module de perte atteint sa valeur maximale E''_m , avant de diminuer. E'_0 est la valeur du module de stockage à faibles amplitudes de déformation, E'_∞ et E''_∞ sont les valeurs asymptotiques des modules à haute (tendant vers l'infini) amplitude de déformation et m est un exposant positif à identifier. Force est de constater qu'il s'agit d'un modèle présenté dans le domaine fréquentiel et qu'il faudra attendre Alexander LION 1999 pour en obtenir un équivalent dans le domaine temporel.

Dans Alexander LION 1999, l'auteur décrit la dépendance à l'amplitude à l'aide de modèles rhéologiques de Maxwell en parallèle dans lesquels il introduit une fonction de viscosité non-linéaire $\eta_k(T, p_k)$. Cette fonction de viscosité dépend de l'état de la microstructure du matériau qui représente en fait une mesure indirecte de l'amplitude de sollicitation en se basant sur le modèle de Kraus expliqué plus haut, cette dépendance est réalisée à l'aide de l'introduction d'une variable phénoménologique p_k . A l'aide d'hypothèses simplificatrices et de la linéarisation des éléments de Maxwell autour d'un état préchargé, Alexander Lion résout les équations de son système pour des sollicitations sinusoïdales et parvient à trouver une équivalence au modèle de Kraus dans le domaine temporel (les mêmes formules pour G' et G''). Cependant le nombre d'éléments de Maxwell nécessaire pour décrire la faible dépendance du comportement de l'élastomère à la fréquence est élevé et rend l'équation d'évolution de la variable structurelle p_k lourde et la modélisation reste uni-dimensionnelle.

Dans A. LION et KARDELKY 2004, il est proposé une généralisation tridimensionnelle et aux grandes déformations du modèle Alexander LION 1999 également dans le domaine temporel formulé grâce à l'introduction d'un temps intrinsèque $z(t)$ dont l'évolution est directement liée à une variable interne décrivant l'état de la microstructure.

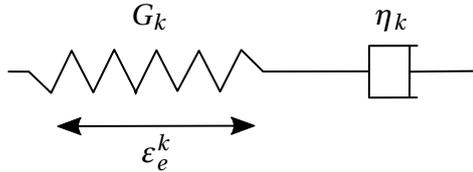
Un autre modèle, qui repose également sur des considérations physico-chimiques, est celui développé par Manfred KLÜPPEL 2003, il s'agit du modèle "Cluster-Cluster Aggregation" qui repose sur une définition particulière de la cinétique d'agrégation des charges dans la matrice élastomère car il est basé sur une approche fractale de la création du réseau de charges dans le polymère. Le modèle CCA repose sur l'hypothèse que les particules oscillent de manière aléatoire autour de leur position moyenne dans la matrice élastomère. Étant donné que l'énergie thermique d'une seule particule est plus faible que son énergie d'interaction avec les autres charges, lorsque celle-ci rentre en contact avec une autre particule ou un agrégat de particules, elle se fixe de manière irréversible. La concentration en agrégats formés dépend bien-sûr du volume que ceux-ci occupent dans la matrice élastomère mais également d'une constante

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.1. Introduction

caractérisant l'inter-pénétrabilité dans la microstructure. En appliquant la théorie de l'homogénéisation sur ce composite d'élastomère, Manfred KLÜPPEL 2003 définit un module d'élasticité à l'échelle d'une cellule représentative du matériau constituée d'un seul agrégat "CCA" de charges. Dans le cas des faibles amplitudes de déformation et des forts contrastes de raideur entre charge et matrice, le module dynamique (à la fois de stockage et de perte) de l'élastomère chargé suit une loi puissance en fonction de la concentration d'agrégats et d'un facteur d'échelle qui évolue en fonction de la taille et de la structure géométrique des agrégats.

Ce modèle est basé sur des mécanismes micro-physiques, cependant il existe également des modèles purement phénoménologiques qui, en se basant uniquement sur des résultats expérimentaux sur l'effet Payne, parviennent à modéliser ce dernier dans des lois de comportement.

Les modèles cités par la suite reposent sur des modèles de Maxwell généralisés dont l'équation d'évolution de la variable interne, notée ici ε_e^k prend la forme générale suivante en fonction de la variable observable ε :



$$\dot{\varepsilon}_e^k + \frac{\eta_k}{G_k} \varepsilon_e^k = \dot{\varepsilon}, \quad (2.24)$$

$$\sigma_k = 2G_k \varepsilon_e^k. \quad (2.25)$$

FIGURE 2.2. – Schéma rhéologique d'une branche de Maxwell

Dans ce cadre, RENDEK et Alexander LION 2010 introduisent la dépendance à l'amplitude dans les paramètres de viscosité η_k de chaque branche du modèle de Maxwell. Ces paramètres prennent la forme suivante :

$$\eta_k = \frac{\eta_k^0}{H_k}, \quad (2.26)$$

avec

$$H_k(t) = 1 + d_k q_k(t), \quad (2.27)$$

où d_k est un facteur de gain qui contrôle la variation du module dynamique et $q_k(t)$ une variable interne dont l'équation d'évolution dépend de la norme de la vitesse de déformation.

Toujours dans une approche phénoménologique, Alexis DELATTRE 2014 propose un modèle où l'effet Payne est modélisé par l'introduction de variables internes inspirées de la mécanique de l'endommagement et où ce même effet est traduit aux grandes déformations. Cette variable interne influe ici sur le module G_k de chaque branche de Maxwell qui devient $\alpha_k G_k$.

Enfin, dans JALOCHA 2020, l'auteur étudie un modèle de viscoélasticité dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel basé sur l'expression des modules en fonction d'un spectre de relaxation (continu ou discret). L'auteur constate que

seulement un des paramètres de la forme continue du spectre de relaxation $H(\tau)$ dépend de l'amplitude dynamique. Cette fonction prend la forme suivante :

$$H(\tau, \varepsilon_d) = \frac{E_g}{\Gamma(\beta(\varepsilon_d))} \left(\frac{\tau}{t_0} \right)^{-\beta(\varepsilon_d)} \exp\left(\frac{-t}{\tau} \right), \quad (2.28)$$

avec

$$\beta(\varepsilon_d) = \beta^0 (1 + a \tanh(b\varepsilon_d)). \quad (2.29)$$

Une expression du spectre discret est également proposée où la dépendance à l'amplitude dynamique est prise en compte dans les paramètres de viscosité $\eta_k(\varepsilon_d)$ du modèle de Maxwell généralisé. Le paramètre η_k prend la forme suivante :

$$\eta_k(\varepsilon_d) = \tau_k H(\tau_k, \varepsilon_d) \ln \left(\sqrt{\frac{\tau_{k+1}}{\tau_{k-1}}} \right) \quad \forall k \in [1, n]. \quad (2.30)$$

2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

2.2.1. Démarche choisie et objectifs du modèle

Le paragraphe précédent offre une courte présentation des différentes approches possibles pour modéliser le comportement hyper-viscoélastique des élastomères. La prise de conscience des avantages et des inconvénients des différentes approches a permis de mettre en place une loi de comportement qui reflète les objectifs recherchés.

Premièrement, le comportement que l'on cherche à modéliser est le comportement macroscopique du matériau, or les modèles micro-physiquement motivés sont basés sur des considérations micro-structurales et nécessitent donc d'avoir accès à certaines quantités caractérisant le matériau à l'échelle microscopique.

Par ailleurs, s'agissant d'une étude à but applicatif dans l'industrie, un point d'honneur est mis à minimiser les coûts numériques de simulation. Or les approches intégrales présentent un désavantage sur les coûts numériques de calculs ainsi que le stockage en mémoire des informations car nécessitant des schémas d'intégration.

C'est pourquoi la modélisation du matériau de l'étude est réalisée à l'aide d'une approche différentielle. Le modèle a les objectifs suivants :

- Rendre compte de la dépendance à la fréquence de sollicitation dynamique.
- Décrire la dépendance à l'amplitude de sollicitation dynamique, pour simplifier cet aspect il n'est considéré seulement le cas des amplitudes dynamiques croissantes. Le modèle n'a ainsi pas à restituer le caractère réversible de l'effet Payne.
- Rendre compte de la dépendance à une précharge statique de la réponse dynamique.
- Proposer une loi non-linéaire pour les grandes déformations et utilisable sous forme linéarisée autour d'un état préchargé.

L'effet Mullins n'est volontairement pas modélisé car seulement le comportement accommodé du matériau nous intéresse. En effet, dans l'application de pièce tournante constituée de composite et d'élastomère, soumise à une vitesse de rotation élevée induisant une force centrifuge significative, il est considéré que l'effet Mullins est très rapidement éliminé pour faire place au comportement stabilisé de l'élastomère.

Inspirée de Alexis DELATTRE 2014, la prise en compte de l'effet Payne est réalisée par l'introduction de variables internes supplémentaires inspirées de la mécanique de l'endommagement car cette méthode présente l'avantage d'être robuste même à hauts niveaux de déformation mais ne permet pas, dans sa version originale, de prendre en compte la réversibilité du phénomène (quand on diminue les amplitudes de sollicitation).

Dans les paragraphes suivants, les équations constitutives ne sont décrites que dans une configuration eulérienne.

Dans le cadre de cette étude, les couplages thermo-mécaniques sont négligés, ainsi, l'étude se limite au cas isotherme sans aucune source volumique ou flux surfacique de chaleur (interne et externe au système).

Enfin, le matériau est considéré isotrope et incompressible. L'hypothèse d'incompressibilité est motivée par le fait que le matériau présente un comportement en compression plus énergétique qu'en cisaillement si bien que le module statique de compressibilité est environ 1000 fois plus grand que le module de cisaillement (voir paragraphe 1.2.3 du chapitre 1 qui met en évidence cette caractéristique). Par ailleurs, l'application industrielle telle qu'envisagée jusqu'à présent ne laisse pas présager de très hauts niveaux de contrainte hydrostatique rendant nécessaire la description de la compressibilité.

2.2.2. Équations constitutives du modèle de Maxwell généralisé

2.2.2.1. Forme générale de la contrainte

L'inégalité de Clausius-Duhem postule que la dissipation intrinsèque d'un système doit être positive ou nulle. Cette dissipation intrinsèque dépend du potentiel d'énergie libre de Helmholtz ψ qui est fonction du tenseur gradient de transformation \mathbf{F} et de variables internes, elle dépend également du tenseur des contraintes (ici le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$), d'un tenseur vitesse de déformation (ici \mathbf{D}) ainsi que de la masse volumique du matériau dans la configuration déformée ρ . Cette inégalité est rappelée en équation (2.31) dans le cas isotherme et adiabatique :

$$\phi = -\rho\dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0, \quad (2.31)$$

avec

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.32)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

Par la suite, la mesure de déformation utilisée est le tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} défini comme suit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (2.33)$$

En utilisant la notion d'état intermédiaire (SIDOROFF 1973; SIDOROFF 1974; SIDOROFF 1975b), la description cinématique du matériau passe par la décomposition multiplicative du tenseur \mathbf{F} en une partie purement élastique et une partie visqueuse :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_v, \quad (2.34)$$

il en est de même pour \mathbf{B} et l'on peut définir $\mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$. Sous l'hypothèse de l'état local (LEMAITRE et al. 1996), cette décomposition se retranscrit également sur l'expression de l'énergie libre qui s'exprime en fonction des variables d'état choisies et qui sont \mathbf{F} (variable observable) et \mathbf{F}_e (variable interne pour la description des phénomènes dissipatifs) :

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}_e). \quad (2.35)$$

A noter que cette décomposition n'est vraie que dans le cas incompressible où $\det \mathbf{F} = 1$, en effet, dans le cas quasi-incompressible l'énergie libre posséderait une contribution volumique ainsi que le tenseur \mathbf{F} (voir HOLZAPFEL et Juan C. SIMO 1996).

Sous les hypothèses d'isotropie et d'objectivité, l'énergie libre peut également être exprimée en fonction de \mathbf{B} et de \mathbf{B}_e :

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}_e) = \psi_B(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e). \quad (2.36)$$

Dans la suite, on fait l'abus de notation $\psi_B(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e) = \psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e)$. Ensuite, toujours sous les hypothèses de SIDOROFF 1975b, l'énergie libre peut être décomposée additivement en une énergie dite d'équilibre indépendante du temps et qui va décrire la réponse hyperélastique et une énergie hors-équilibre qui dépend de \mathbf{B}_e , c'est-à-dire de l'histoire des déformations et qui va décrire les phénomènes viscoélastiques :

$$\psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e) = \psi_{eq}(\mathbf{B}) + \psi_v(\mathbf{B}_e). \quad (2.37)$$

\mathbf{B} et \mathbf{B}_e sont indépendants, c'est pourquoi la dérivée temporelle de ψ s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{\psi}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e) = \frac{\partial \psi_{eq}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} + \frac{\partial \psi_v(\mathbf{B}_e)}{\partial \mathbf{B}_e} : \dot{\mathbf{B}}_e, \quad (2.38)$$

les dérivées temporelles des variables d'état sont données par les relations suivantes :

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^T, \quad (2.39)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{L}^T - 2\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{D}_v^o \cdot \mathbf{V}_e. \quad (2.40)$$

Ces équations font apparaître \mathbf{V}_e qui est le tenseur de déformation élastique pure issu de la décomposition polaire de \mathbf{F}_e tel que $\mathbf{F}_e = \mathbf{V}_e \cdot \mathbf{R}_e$ et \mathbf{R}_e tenseur de rotation

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

pure, le tenseur \mathbf{D}_v^o qui est une mesure objective du tenseur taux de déformation viscoélastique :

$$\mathbf{D}_v^o = \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{R}_e^T. \quad (2.41)$$

Il est alors possible de réécrire la dissipation intrinsèque ϕ de la forme suivante sous l'hypothèse d'incompressibilité ($\rho = \rho_0$) :

$$\begin{aligned} \phi = & \left(\boldsymbol{\sigma} - 2\rho_0 \left[\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \right]^D - 2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi_v(\mathbf{B}_e)}{\partial \mathbf{B}_e} \right]^D \right) : \mathbf{D} \\ & + 2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi_v(\mathbf{B}_e)}{\partial \mathbf{B}_e} \right]^D : \mathbf{D}_v^o, \end{aligned} \quad (2.42)$$

où $[\mathbf{A}]^D$ est la partie déviatorique du tenseur \mathbf{A} ¹. Une condition suffisante au respect de l'inégalité de Clausius-Duhem est que les deux termes de ϕ soient indépendamment positifs ou nuls. De plus, en supposant que la dissipation portée par la déformation totale est nulle, les expressions suivantes de la contrainte et de la dissipation intrinsèque peuvent être déduites :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \boldsymbol{\sigma}_v - p\mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{eq} = 2\rho_0 \left[\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \right]^D \\ \boldsymbol{\sigma}_v = 2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi_v(\mathbf{B}_e)}{\partial \mathbf{B}_e} \right]^D \end{cases} \quad (2.43)$$

et :

$$\phi = 2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi_v(\mathbf{B}_e)}{\partial \mathbf{B}_e} \right]^D : \mathbf{D}_v^o \geq 0, \quad (2.44)$$

p est un multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité $J = 1$ qui représente la partie hydrostatique de la contrainte que l'on appelle pression. Le modèle décrit par les équations (2.43) représente le modèle du solide linéaire standard (SLS ou Zener) constitué d'une branche élastique et d'une branche dissipative. Ce modèle ne permet pas de capturer le comportement visqueux complexe d'un élastomère puisque ce dernier est lié aux mouvements des chaînes moléculaires qui évoluent avec plusieurs temps caractéristiques différents. Ces mouvements peuvent être expliqués par la reptation de chaînes libres au sein d'un réseau de chaînes liées chimiquement (BERGSTRÖM et M. C. BOYCE 2000) ou alors par des phénomènes de relaxation ainsi que de réorientation de segments de chaînes enchevêtrées (LINDER et al. 2011).

C'est pourquoi, il est nécessaire d'ajouter au modèle SLS d'autres branches dissipatives en parallèle afin de rendre compte de la diversité de temps caractéristiques associés aux phénomènes microscopiques engendrant la viscosité. Il s'agit alors du modèle de Maxwell généralisé dont le schéma rhéologique est illustré en figure 2.3.

1. $[\mathbf{A}]^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I}$ avec \mathbf{I} le tenseur identité d'ordre 2

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

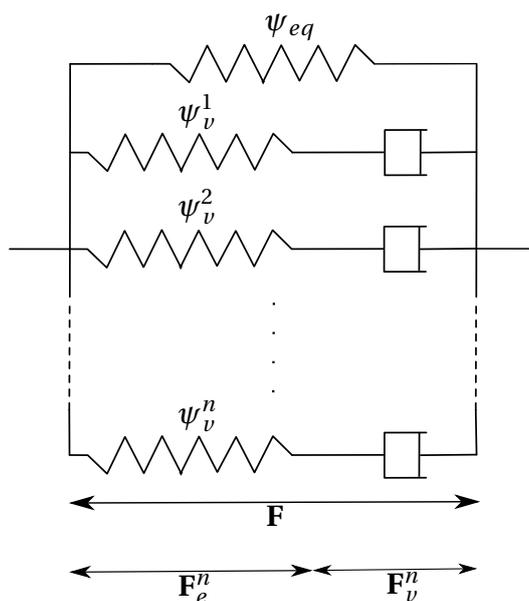


FIGURE 2.3. – Schéma rhéologique du modèle de Maxwell généralisé et décomposition du gradient de la transformation

L'enrichissement du modèle par n branches élasto-dissipatives modifie la décomposition additive de la densité d'énergie libre ψ de la façon suivante :

$$\psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^i) = \psi_{eq}(\mathbf{B}) + \sum_{i=1}^n \psi_v^i(\mathbf{B}_e^i), \quad (2.45)$$

avec \mathbf{B}_e^i le tenseur de Cauchy-Green gauche de la $i^{\text{ème}}$ branche $\mathbf{B}_e^i = \mathbf{F}_e^i \cdot \mathbf{F}_e^{iT}$ et avec la décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e^i \cdot \mathbf{F}_v^i$.

Ainsi, en appliquant la même procédure que illustrée dans le cas d'une seule branche, les équations constitutives du modèle de Maxwell généralisé peuvent s'écrire de la façon suivante.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_v^i - p\mathbf{I} \quad (2.46)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{eq} = 2\rho_0 \left[\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \right]^D \\ \boldsymbol{\sigma}_v^i = 2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e^i)}{\partial \mathbf{B}_e^i} \right]^D \end{cases} \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.47)$$

$$\text{Et } 2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e^i)}{\partial \mathbf{B}_e^i} \right]^D : \mathbf{D}_v^{oi} \geq 0 \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.48)$$

2.2.2.2. Formes d'énergies libres et lois d'évolution

Pour décrire la contribution de la branche purement hyperélastique, il est choisi d'utiliser le modèle d'énergie libre proposé dans ISIHARA et al. 1951 qui est un cas particulier de la série proposée par RIVLIN, SAUNDERS et al. 1951 :

$$\rho_0 \psi_{eq}(\mathbf{B}) = C_{10}(I_1(\mathbf{B}) - 3) + C_{01}(I_2(\mathbf{B}) - 3) + C_{20}(I_1(\mathbf{B}) - 3)^2, \quad (2.49)$$

où $I_1(\mathbf{B})$ et $I_2(\mathbf{B})$ sont les deux premiers invariants de \mathbf{B} . Ce choix a été motivé par sa relative simplicité ainsi que son nombre restreint de paramètres C_{ij} . De plus, une étude sur plusieurs modèles polynomiaux a été réalisée pour déterminer celui qui, une fois identifié, se rapprochait au mieux des données expérimentales présentées au chapitre 1. Cette étude est disponible en annexe G.

Pour les branches hyper-viscoélastiques, une forme néo-hookéenne a été choisie pour définir les énergies libres :

$$\rho_0 \psi_v^i = G_i (I_1(\mathbf{B}_e^i) - 3) \quad \forall i \in [1, n], \quad (2.50)$$

où les G_i sont homogènes à des modules de cisaillement. Le principe de normalité nous permet de postuler l'existence d'un potentiel de dissipation ϕ_v^i qui vérifie la relation suivante :

$$2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e^i)}{\partial \mathbf{B}_e^i} \right]^D = \frac{\partial \phi_v^i}{\partial \mathbf{D}_v^{oi}} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.51)$$

Une forme quadratique du potentiel de dissipation ϕ_v^i est suffisante à la vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem exprimée en équation (2.48) et est souvent utilisée (MÉO 2012) car c'est la forme la plus simple permettant de vérifier (2.48) :

$$\phi_v^i(\mathbf{D}_v^{oi}) = \frac{\eta_i}{2} \mathbf{D}_v^{oi} : \mathbf{D}_v^{oi}, \quad (2.52)$$

où η_i est un paramètre de viscosité. Cette écriture sous-entend qu'il n'y pas de dépendance de la viscosité à la direction de sollicitation. Néanmoins il est également possible d'introduire un tenseur d'ordre 4 de viscosité anisotrope comme l'a fait Alexis DELATTRE 2014 pour différencier le comportement sur les composantes de dilatation et les composantes de cisaillement. L'équation (2.51) se réécrit de la façon suivante :

$$2\rho_0 \left[\mathbf{B}_e^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e^i)}{\partial \mathbf{B}_e^i} \right]^D = \eta_i \mathbf{D}_v^{oi} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.53)$$

Ainsi, en injectant les équations (2.50) et (2.53) dans la loi d'évolution (2.40) on obtient :

$$\dot{\mathbf{B}}_e^i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e^i + \mathbf{B}_e^i \cdot \mathbf{L}^T - \frac{4}{\eta_i} \rho_0 \mathbf{V}_e^i \cdot \left[\mathbf{B}_e^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e^i)}{\partial \mathbf{B}_e^i} \right]^D \cdot \mathbf{V}_e^i. \quad (2.54)$$

Il est désormais possible de reformuler les équations constitutives du modèle de Max-

well généralisé en prenant en compte les formes d'énergies libres choisies (équations (2.49) et (2.50)) ainsi que les lois complémentaires pour les variables internes \mathbf{B}_e^i en utilisant la condition d'isotropie sur $\boldsymbol{\sigma}_v^i$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_v^i - p\mathbf{I} \quad (2.55)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{eq} = 2[(C_{10} + 2C_{20}(I_1(\mathbf{B}) - 3) + C_{01}I_1(\mathbf{B})) \cdot \mathbf{B} - C_{01}\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}]^D \\ \boldsymbol{\sigma}_v^i = 2G_i \mathbf{B}_e^{iD} \quad \forall i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}_e^i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e^i + \mathbf{B}_e^i \cdot \mathbf{L}^T - \frac{4G_i}{\eta_i} \mathbf{B}_e^i \cdot \mathbf{B}_e^{iD} \quad \forall i \in [1, n] \\ \text{Tel que } \mathbf{B}_e^i(t=0) = \mathbf{I} \quad \forall i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.57)$$

Ce modèle ne permet pas encore de décrire la dépendance de la raideur dynamique à l'amplitude de déformation, dans le paragraphe suivant une approche similaire à Alexis DELATTRE 2014 est proposée pour prendre en compte ce phénomène dans les équations constitutives (2.68).

2.2.2.3. Modèle pour la prédiction de l'effet Payne

Le choix d'un modèle phénoménologique tel que celui proposé dans Alexis DELATTRE 2014 pour la modélisation de l'effet Payne est motivée par la volonté de retranscrire le phénomène pour des chargements en grandes déformations ainsi que sous plusieurs axes de sollicitation. Cette approche, consiste à enrichir l'expression des énergies libres et des potentiels de dissipation des branches élasto-dissipatives, ψ_v^i et ϕ_v^i , en introduisant des nouvelles variables internes notées α_i de la façon suivante :

$$\rho_0 \psi_v^i(\mathbf{B}_e, \alpha_i) = G_i \alpha_i (I_1(\mathbf{B}_e^i) - 3) \quad \forall i \in [1, n], \quad (2.58)$$

$$\phi_v^i(\mathbf{D}_v^{oi}) = \frac{\eta_i}{2} \alpha_i \mathbf{D}_v^{oi} : \mathbf{D}_v^{oi}. \quad (2.59)$$

L'introduction de ces nouvelles variables internes modifie l'expression de la dissipation intrinsèque et devient l'expression qui suit :

$$\begin{aligned} \phi = & \left(\boldsymbol{\sigma} - 2\rho_0 \left[\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \right]^D - 2\rho_0 \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{B}_e^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e, \alpha_i)}{\partial \mathbf{B}_e^i} \right]^D \right) : \mathbf{D} \\ & + 2\rho_0 \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{B}_e^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e, \alpha_i)}{\partial \mathbf{B}_e^i} \right]^D : \mathbf{D}_v^{oi} - \rho_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \end{aligned} \quad (2.60)$$

dans ce cas, une condition suffisante supplémentaire pour le respect de l'inégalité de Clausius-Duhem est nécessaire et prend la forme suivante :

$$-\rho_0 \frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.61)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

Ce qui est équivalent à :

$$\dot{\alpha}_i \leq 0 \quad \forall i \in [1, n], \quad (2.62)$$

car $\frac{\partial \psi_v^i(\mathbf{B}_e, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} \geq 0$ pour notre choix d'expression des ψ_v^i de l'équation (2.58). Cette condition affirme que les α_i sont des fonctions décroissantes du temps, ce qui est en accord avec le phénomène de stabilisation du module dynamique en fonction du temps mis en évidence expérimentalement dans HÖFER et A. LION 2009 par exemple. Il découle de ces observations quelques propriétés de α_i qui sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i \leq 0 \\ \alpha_i \geq 0 \\ \alpha_i(t=0) = 1 \end{cases} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.63)$$

De surcroît, les équations d'évolution des variables α_i doivent bien sûr prendre en compte la dépendance de ces dernières à l'amplitude dynamique et ceci par une mesure de déformation totale choisie. Il est ici choisi de considérer cette dépendance à travers le premier invariant de \mathbf{B} . La loi prend la forme suivante :

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{1}{h_i} \left\langle \alpha_i - \left(1 + r_i \frac{1 - \exp\left[\frac{N(\mathbf{B})}{b_i}\right]}{1 + \exp\left[\frac{N(\mathbf{B})}{b_i}\right]} \right) \right\rangle = -\frac{1}{h_i} \left\langle \alpha_i - \left(1 + r_i \tanh\left(\frac{N(\mathbf{B})}{2b}\right) \right) \right\rangle, \quad (2.64)$$

avec

$$N(\mathbf{B}) = I_1(\mathbf{B}) - 3, \quad (2.65)$$

et les crochets $\langle A \rangle$ définissent la partie positive de A . r_i et b_i sont des paramètres matériau positifs et h_i est un temps caractéristique des phénomènes de dépendance à l'amplitude. Cette forme de fonction est également choisie car elle a la particularité de décroître puis de se stabiliser vers une constante qui peut être non-nulle, ce qui n'est pas le cas du modèle de Alexis DELATTRE 2014 pour lequel α_i tend obligatoirement vers 0 aux temps longs. La figure 2.4 présente le rôle de chacun des paramètres dans la réponse temporelle de α_i par une rapide étude paramétrique. On introduit un temps de relaxation τ_i tel que :

$$\tau_i = \frac{\eta_i}{4G_i} \quad \forall i \in [1, n], \quad (2.66)$$

τ_i est le temps caractéristique de l'évolution de la variable interne \mathbf{B}_e^i . Ainsi, il est possible de réécrire les équations constitutives du modèle et les équations d'écoulement relatives à ce dernier de la façon suivante :

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

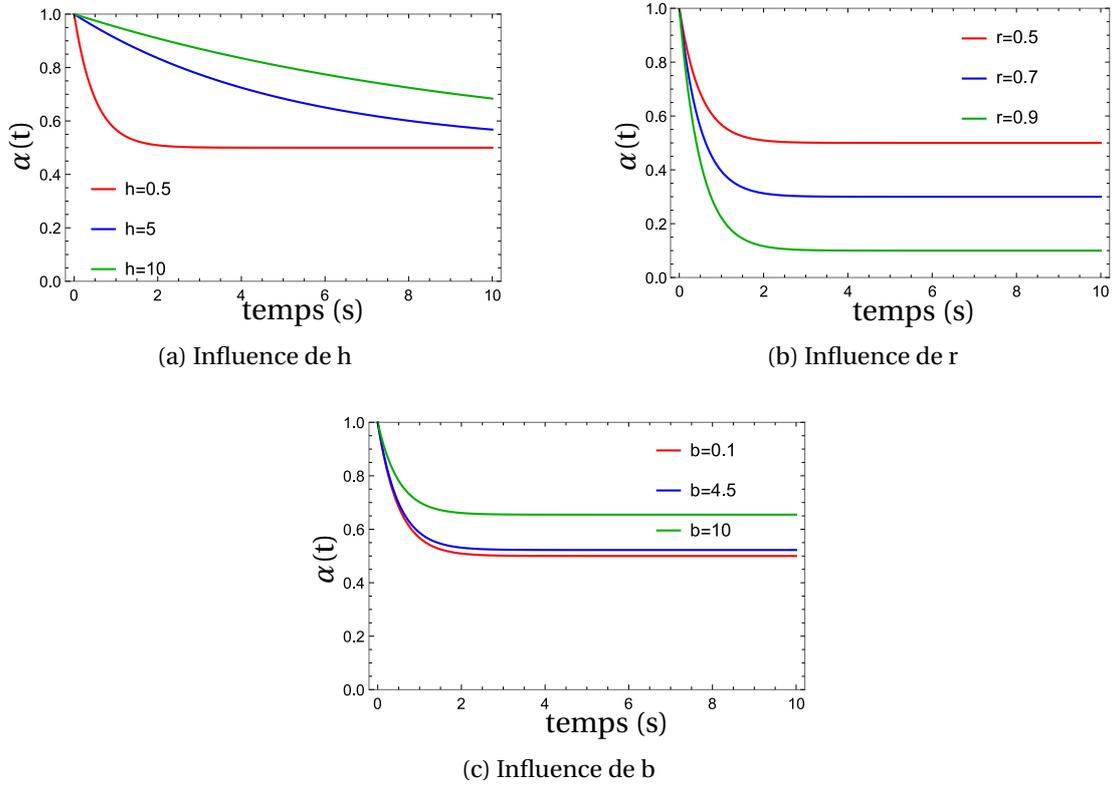


FIGURE 2.4. – Étude paramétrique des paramètres du modèle de variable interne décrivant l'effet Payne, pour un cas de traction cyclique avec $N(\mathbf{B}) = \lambda(t)^2 + \frac{2}{\lambda(t)} - 3$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_v^i - p\mathbf{I} \quad (2.67)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{eq} = 2[(C_{10} + 2C_{20}(I_1(\mathbf{B}) - 3) + C_{01}I_1(\mathbf{B})) \cdot \mathbf{B} - C_{01}\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}]^D \\ \boldsymbol{\sigma}_v^i = 2G_i \alpha_i \mathbf{B}_e^{iD} \quad \forall i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}_e^i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e^i + \mathbf{B}_e^i \cdot \mathbf{L}^T - \frac{1}{\tau_i} \mathbf{B}_e^i \cdot \mathbf{B}_e^{iD} \quad \forall i \in [1, n] \\ \text{Tel que } \mathbf{B}_e^i(t=0) = \mathbf{I} \quad \forall i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.69)$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i = -\frac{1}{h_i} \left\langle \alpha_i - \left(1 + r_i \tanh\left(\frac{N(\mathbf{B})}{2b}\right) \right) \right\rangle \quad \forall i \in [1, n] \\ \text{Tel que } \alpha_i(t=0) = 1 \quad \forall i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.70)$$

Où, pour résumer, C_{10} , C_{01} et C_{20} sont les paramètres de la contribution purement hyperélastique, les G_i sont les modules de cisaillement des branches élasto-dissipatives, les τ_i sont des temps caractéristiques de viscosité, les h_i sont les temps caractéristiques associés à l'effet Payne et les r_i et b_i sont des paramètres positifs.

Le modèle est ainsi complètement défini pour tout type de sollicitation et peut être implémenté numériquement. On montre dans la partie suivante qu'il peut être utile, pour certaines sollicitations, de remanier ces équations pour se ramener à un cas de viscoélasticité linéaire.

Notons que la dépendance à la température n'est pas modélisée ici, mais l'on peut supposer que l'ensemble des paramètres du modèle peuvent être dépendants de la température.

2.2.3. Linéarisation du modèle et exploitation dans le domaine fréquentiel

2.2.3.1. Objectifs de la linéarisation

Dans cette partie, on détaille la procédure de linéarisation des équations constitutives (2.70) autour d'une précharge de grande amplitude sur laquelle est superposée un chargement harmonique à petit niveau de déformation. Ce type de linéarisation a d'abord été introduite par LIANIS 1965 dans le cadre d'une théorie définissant un mouvement viscoélastique à petites amplitudes (pas nécessairement harmonique), puis a été étudiée jusqu'à proposer la linéarisation d'un modèle hyper-viscoélastique J.-H. CHO et YOUN 2006 ainsi que leur implémentation dans des outils de calculs tels que les éléments finis (A. LION, RETKA et al. 2009, S. LEJEUNES, NGUYEN VAN et al. 2012). Cette linéarisation permet également d'étudier l'influence de la précharge statique sur la réponse dynamique du matériau comme il en est question dans LECTEZ et E. VERRON 2016.

Pour cette étude, la linéarisation est menée dans plusieurs buts listés ci-dessous.

- ▶ Le premier intérêt de cette linéarisation est de pouvoir exploiter les essais harmoniques (DMA) réalisés lors de la campagne de caractérisation du matériau de l'étude. On a alors un modèle qui est identifié à partir d'essais monotones (réponse temporelle) et cycliques (réponse fréquentielle). En effet, grâce à la linéarisation autour d'une précharge, il devient possible d'obtenir des relations reliant la contrainte linéarisée à la déformation dans le domaine fréquentiel en passant par une transformée de Laplace-Carson. Il est alors possible d'obtenir des relations analytiques pour les différents modules tels que le module d'Young et le module de cisaillement complexe. Une identification des différents paramètres du modèle est alors possible en se basant sur des résultats d'essais DMA donnant l'évolution du module d'Young et de cisaillement en fonction de la fréquence ou de l'amplitude.
- ▶ Le deuxième intérêt principal de cette linéarisation, qui découle du premier, est d'obtenir des relations analytiques reliant contrainte et déformation linéarisées autour d'une grande précharge et superposée à un chargement harmonique. Ces relations pourront alors être implémentées numériquement pour pouvoir prédire la réponse d'une structure à ce type de chargement. D'un point de vue

industriel, ce chargement représente un cas critique d'intérêt pour le type de structure étudiée.

- Enfin, pour ce type de chargement, le modèle proposé a l'originalité de pouvoir considérer une précharge dont la réponse peut être hyper-viscoélastique.

2.2.3.2. Hypothèses et procédure de linéarisation

Postulat de la décomposition du tenseur \mathbf{F}

On suppose que le tenseur gradient de transformation \mathbf{F} peut être décomposé en une partie de grande amplitude \mathbf{F}_0 induisant une réponse non-linéaire et une partie de faible amplitude qui correspond au chargement harmonique \mathbf{F}_d . On a alors l'expression suivante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{F}_0, \quad (2.71)$$

tel que

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (2.72)$$

où \mathbf{H} est un tenseur gradient de déplacement dynamique définissant le chargement harmonique de faible amplitude et vérifiant $|\mathbf{H}| \ll 1$. Ce chargement est schématisé en figure 1.15 du chapitre 1 mais est rappelé en figure 2.5.

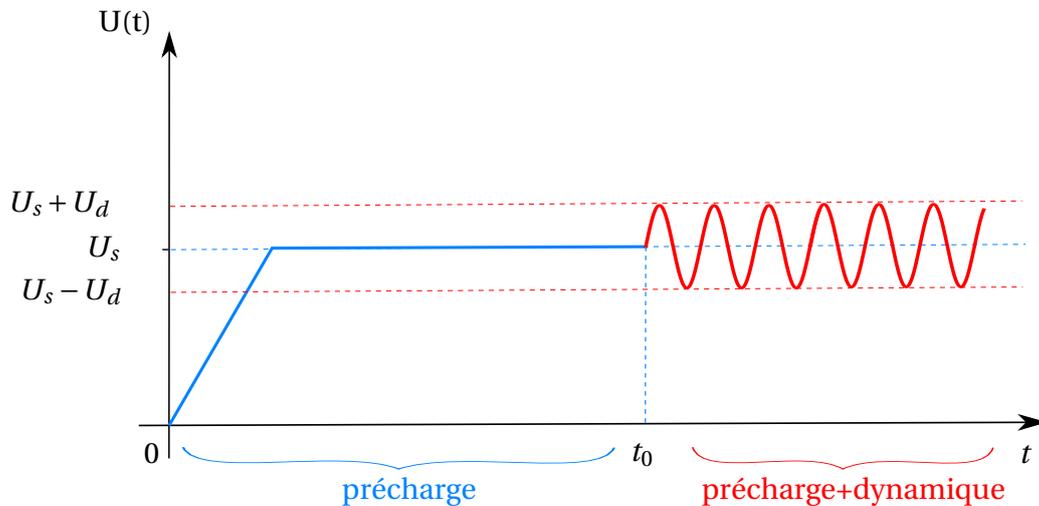


FIGURE 2.5. – Description du chargement pour lequel la linéarisation est effectuée

Ainsi, pour $t \in [0, t_0]$ le modèle est non-linéaire lors de la phase de préchargement puis pour $t > t_0$ le modèle est linéarisé autour de \mathbf{F}_0 qui est considéré comme constant dans cette phase. \mathbf{H} est un tenseur qui n'est pas symétriques a priori. Une hypothèse forte que l'on fait se base sur la décomposition polaire du tenseur gradient de déformation \mathbf{F}_d :

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{V}_d \cdot \mathbf{R}_d. \quad (2.73)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

Dans l'hypothèse des petites rotations, on postule :

$$\mathbf{R}_d \approx \mathbf{I}, \quad (2.74)$$

par conséquent, \mathbf{F}_d est égal à sa composante de dilatation pure \mathbf{V}_d qui est symétrique par définition. En se référant à l'équation (2.72), on en déduit la propriété suivante sur \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{sym} = \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.75)$$

Par ailleurs, tout en gardant la décomposition de \mathbf{F} en $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e^i \cdot \mathbf{F}_v^i$, on suppose également que la linéarisation se répercute sur \mathbf{F}_e^i et \mathbf{F}_v^i de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_e^i = \mathbf{F}_{ed}^i \cdot \mathbf{F}_{e0}^i, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{F}_v^i = \mathbf{F}_{vd}^i \cdot \mathbf{F}_{v0}^i, \quad (2.77)$$

où \mathbf{F}_{e0}^i et \mathbf{F}_{v0}^i résultent, comme \mathbf{F}_0 , de la phase de chargement pour $t \in [0, t_0]$. On a donc une décomposition différente de \mathbf{F} pour les deux phases de chargement.

Pour $t \in [0, t_0]$ on a :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0, \quad (2.78)$$

$$\text{avec } \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{e0}^i \cdot \mathbf{F}_{v0}^i \quad (2.79)$$

dans cette phase, \mathbf{F}_0 n'est pas constant dans le temps. Puis, pour $t > t_0$, \mathbf{F}_0 est figé et on pose :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{F}_0, \quad (2.80)$$

$$\text{avec } \mathbf{F} = \mathbf{F}_e^i \cdot \mathbf{F}_v^i = \mathbf{F}_{ed}^i \cdot \mathbf{F}_{e0}^i \cdot \mathbf{F}_{vd}^i \cdot \mathbf{F}_{v0}^i \quad (2.81)$$

$$(2.82)$$

Cette décomposition est consistante à $t = t_0$, où l'on a $\mathbf{F}_{ed}^i = \mathbf{I}$ et $\mathbf{F}_{vd}^i = \mathbf{I}$ et l'on retombe sur $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{e0}^i \cdot \mathbf{F}_{v0}^i = \mathbf{F}_0$. Et \mathbf{F}_{ed}^i et \mathbf{F}_{vd}^i sont choisis tels que :

$$\mathbf{F}_{ed}^i = \mathbf{I} + \mathbf{H}_e^i \quad \text{avec } |\mathbf{H}_e^i| \ll 1, \quad (2.83)$$

$$\mathbf{F}_{vd}^i = \mathbf{I} + \mathbf{H}_v^i \quad \text{avec } |\mathbf{H}_v^i| \ll 1. \quad (2.84)$$

Et de la même façon que pour le tenseur \mathbf{F}_d , on suppose que le tenseur de rotation pure \mathbf{R}_{ed}^i issu de la décomposition polaire de \mathbf{F}_{ed}^i tel que

$$\mathbf{F}_{ed}^i = \mathbf{V}_{ed}^i \cdot \mathbf{R}_{ed}^i \quad \forall i \in [1, n], \quad (2.85)$$

est d'amplitude faible :

$$\mathbf{R}_{ed}^i \approx \mathbf{I} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.86)$$

Par conséquent, \mathbf{F}_{ed}^i est égal à sa composante de dilatation pure \mathbf{V}_{ed}^i qui est symétrique

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

par définition. En se référant à l'équation (2.83), on en déduit la propriété suivante :

$$\mathbf{H}_e^i = \mathbf{H}_e^{i\,sym} = \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.87)$$

En utilisant les relations (2.71), (2.72) et (2.76), il est possible d'exprimer les tenseurs de Cauchy-Green gauches \mathbf{B} et \mathbf{B}_e^i de la manière qui suit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}^T), \quad (2.88)$$

avec

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_0^T. \quad (2.89)$$

Et de la même façon, on a :

$$\mathbf{B}_e^i = \mathbf{F}_e^i \cdot \mathbf{F}_e^{i\,T} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}_e^i) \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}_e^{i\,T}), \quad (2.90)$$

avec

$$\mathbf{B}_{e0}^i = \mathbf{F}_{e0}^i \cdot \mathbf{F}_{e0}^{i\,T}. \quad (2.91)$$

On peut également reformuler le tenseur gradient des vitesses \mathbf{L} comme suit :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{H}} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H})^{-1}. \quad (2.92)$$

Les lois d'évolution linéarisées pour $t > t_0$

En utilisant les écritures de \mathbf{B} et \mathbf{B}_e^i définies en équation (2.88) et (2.90), les dérivées temporelles associées peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 \cdot \dot{\mathbf{H}}^T + \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_0 + \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \dot{\mathbf{H}}^T \quad (2.93)$$

et

$$\dot{\mathbf{B}}_e^i = \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \dot{\mathbf{H}}_e^{i\,T} + \dot{\mathbf{H}}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i + \dot{\mathbf{H}}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \mathbf{H}_e^{i\,T} + \mathbf{H}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \dot{\mathbf{H}}_e^{i\,T} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.94)$$

La linéarisation de ces équations au premier ordre respectivement en \mathbf{H} et en \mathbf{H}_e^i donne les relations suivantes :

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 \cdot \dot{\mathbf{H}}^T + \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_0 + o(\dot{\mathbf{H}}) \quad (2.95)$$

et

$$\dot{\mathbf{B}}_e^i = \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \dot{\mathbf{H}}_e^{i\,T} + \dot{\mathbf{H}}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i + o(\dot{\mathbf{H}}_e^i) \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.96)$$

Il est alors possible de réécrire les lois d'évolutions des \mathbf{B}_e^i de l'équation (2.69) en effectuant une linéarisation au premier ordre en \mathbf{H}_e^i et en utilisant la relation (2.92) pour \mathbf{L} . L'équation (2.69) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \dot{\mathbf{H}}_e^{i\,T} + \dot{\mathbf{H}}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \approx \dot{\mathbf{H}}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \dot{\mathbf{H}}^T - \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbf{B}_{e0}^i \cdot \left(\mathbf{B}_{e0}^i + \mathbf{H}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \mathbf{H}_e^{i\,T} \right)^D \right. \\ \left. + \mathbf{H}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^{i\,D} + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \mathbf{H}_e^{i\,T} \cdot \mathbf{B}_{e0}^{i\,D} \right] \quad \forall i \in [1, n], \end{aligned} \quad (2.97)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

En considérant localement de faibles rotations élastiques dans le matériau, on remplace dorénavant \mathbf{H}_e^i par sa partie symétrique $\boldsymbol{\varepsilon}_e^i$ (voir équation (2.87)) pour toutes les branches élasto-dissipatives. En linéarisant également le tenseur \mathbf{L} tel quel $\mathbf{L} \approx \dot{\mathbf{H}}$, l'équation d'évolution (2.97) devient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^i + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \approx \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{e0}^i + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \dot{\mathbf{H}}^T - \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbf{B}_{e0}^i \cdot \left(\mathbf{B}_{e0}^i + \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \right)^D \right. \\ \left. + \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i{}^D + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i{}^D \right] \quad \forall i \in [1, n]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Il est possible de réécrire l'équation (2.98) de manière plus compacte en introduisant des tenseurs d'ordre 4. Pour ce faire, définissons le tenseur \mathbb{L} défini comme suit :

$$\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i = \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e^i, \quad (2.99)$$

soient \mathbf{B} et \mathbf{u} deux tenseurs d'ordre 2, en notation indicielle, on a :

$$(\mathbf{u}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{u}^T)_{ij} = \mathbf{u}_{io}\mathbf{B}_{oj} + \mathbf{B}_{io}\mathbf{u}_{jo} \quad (2.100)$$

$$= \boldsymbol{\delta}_{ip}\mathbf{u}_{po}\mathbf{B}_{oj} + \mathbf{B}_{io}\boldsymbol{\delta}_{jp}\mathbf{u}_{po} \quad (2.101)$$

$$= (\boldsymbol{\delta}_{ip}\mathbf{B}_{oj} + \mathbf{B}_{io}\boldsymbol{\delta}_{jp})\mathbf{u}_{po} \quad (2.102)$$

$$= \mathbb{L}_{ijpo}\mathbf{u}_{po} \quad (2.103)$$

$$= \mathbb{L}(\mathbf{B}) : \mathbf{u}. \quad (2.104)$$

En se basant sur des manipulations similaires, l'équation (2.98) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^i = \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \dot{\mathbf{H}} - \frac{1}{\tau_i} \left[\frac{1}{2} \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbf{B}_{e0}^i - \frac{1}{6} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbf{I} \right] \\ - \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \quad \forall i \in [1, n], \end{aligned} \quad (2.105)$$

en simplifiant cette expression par \mathbb{L} et en remarquant que :

$$\frac{1}{\tau_i} \left[\frac{1}{2} \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbf{B}_{e0}^i - \frac{1}{6} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbf{I} \right] = \frac{1}{2\tau_i} \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : [\mathbf{B}_{e0}^i]^D, \quad (2.106)$$

l'équation d'évolution (2.105) devient :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^i + \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i = \dot{\mathbf{H}} - \frac{1}{2\tau_i} [\mathbf{B}_{e0}^i]^D \quad \forall i \in [1, n], \quad (2.107)$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre 4. De plus, si l'on utilise l'hypothèse des faibles rotations émise sur \mathbf{H} en équation 2.75, l'équation d'évolution (2.107) prend donc sa forme finale qui est la suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^i + \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2\tau_i} [\mathbf{B}_{e0}^i]^D \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.108)$$

Dans cette équation, on voit directement l'influence de la précharge sur l'évolution de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_e^i$ à condition que cette dernière induit un état visqueux (échelle de temps pas assez longue pour considérer que tout le comportement visqueux a été "évacué"). Ce qui est souvent le cas dans les structures tournantes étudiées où la partie vibratoire intervient quasiment simultanément à la précharge.

Les contraintes linéarisées pour $t > t_0$

En utilisant la relation 2.88 du tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} pour le chargement-type, il est possible de linéariser la contribution hyperélastique de la contrainte, $\boldsymbol{\sigma}_{eq}$, par la même procédure que précédemment. La formule de cette dernière est donnée par l'équation 2.68 et dépend de \mathbf{B} , $I_1(\mathbf{B})$ ainsi que du produit $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$. Le premier invariant de \mathbf{B} s'écrit comme suit après linéarisation au premier ordre en $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$I_1(\mathbf{B}) = \mathbf{I} : \mathbf{B} = \mathbf{I} : [\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_0] = \mathbf{I} : \mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} : [\mathbf{B}_0 + \mathbb{L}(\mathbf{B}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}], \quad (2.109)$$

ce qui permet de trouver la linéarisation au premier ordre de $\boldsymbol{\sigma}_{eq}$ suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq} = \mathbb{K} : \left\{ 2(\beta \mathbf{I} - C_{01} \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_0 + [8C_{20} \mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + 2\beta \mathbb{L}(\mathbf{B}_0) - 2C_{01} \mathbb{L}(\mathbf{B}_0^2)] : \boldsymbol{\varepsilon} \right\}, \quad (2.110)$$

où \mathbb{K} est le tenseur d'ordre 4 définissant le projecteur sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 déviatoriques tel que :

$$\mathbb{K} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (2.111)$$

et β est défini comme suit :

$$\beta = C_{10}[1 + \text{tr}(\mathbf{B}_0)] + C_{20}[2\text{tr}(\mathbf{B}_0) - 6]. \quad (2.112)$$

Les contraintes visqueuses des branches ne nécessitent pas de manipulation particulière car elles s'expriment déjà au premier ordre en fonction des \mathbf{B}_e^i :

$$\boldsymbol{\sigma}_v^i = \mathbb{K} : \left\{ 2G_i \alpha_i \left(\mathbf{B}_{e0}^i + \mathbf{B}_{e0}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e^i + \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \cdot \mathbf{B}_{e0}^i \right) \right\} \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.113)$$

$$= \mathbb{K} : \left\{ 2G_i \alpha_i \left(\mathbf{B}_{e0}^i + \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \right) \right\} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.114)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_v^i - p\mathbf{I} \quad (2.115)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{eq} = \mathbb{K} : \left\{ 2(\beta\mathbf{I} - C_{01}\mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_0 + [8C_{20}\mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + 2\beta\mathbb{L}(\mathbf{B}_0) - 2C_{01}\mathbb{L}(\mathbf{B}_0^2)] : \boldsymbol{\varepsilon} \right\} \\ \boldsymbol{\sigma}_v^i = \mathbb{K} : \left\{ 2G_i\alpha_i \left(\mathbf{B}_{e0}^i + \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \right) \right\} \quad \forall i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.116)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^i + \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i)\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2\tau_i} [\mathbf{B}_{e0}^i]^D \\ \text{Tel que } \boldsymbol{\varepsilon}_e^i(t = t_0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.117)$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i = -\frac{1}{h_i} \left\langle \alpha_i - \left(1 + r_i \tanh \left(\frac{N(\mathbf{B})}{2b} \right) \right) \right\rangle \\ \text{Tel que } \alpha_i(t = 0) = 1 \end{cases} \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.118)$$

Ainsi, les équations constitutives du modèle (2.67) à (2.70) ont été linéarisées pour le cas de charge avec une précharge décrite par le modèle non-linéaire complet sur laquelle est superposée un chargement harmonique en petites déformations. Cette linéarisation est effectuée au premier ordre en déformation dans le domaine temporel. Pour faire un parallèle avec le schéma de chargement (2.5), la démarche consiste à résoudre les équations constitutives non-linéaires (2.67) à (2.70) pour $t \in [0, t_0]$ puis, de travailler avec les équations linéarisées (2.115) à (2.118) pour $t > t_0$. Il faut également noter que dans ce cadre il y a bien une parfaite continuité entre le modèle utilisé pour la phase de précharge et celui de la phase de sollicitation harmonique.

Comparaison du modèle non-linéaire et du modèle linéarisé

A ce stade il est possible de comparer les résultats provenant du modèle non-linéaire avec les résultats donnés par le modèle linéarisé pour un cas de charge identique afin de vérifier la capacité du modèle linéarisé à capter la réponse recherchée. La comparaison est présentée sur deux cas de chargement différents : la traction uni-axiale et le cisaillement simple. Pour ces deux cas, les tenseurs gradients de transformation associés sont donnés au paragraphe F.1.7 de l'annexe F.

Le chargement simulé pour effectuer cette comparaison est illustré en figure 2.6 pour la traction et la cisaillement. Les réponses du modèle non-linéaire et du modèle linéarisé autour de la précharge sont illustrées en figure 2.7 pour les deux cas de chargement.

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.2. Présentation du modèle hyperviscoélastique

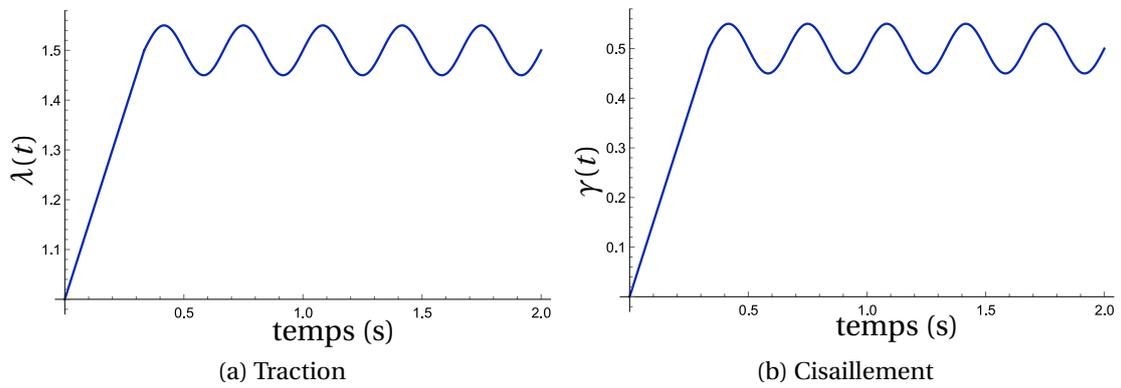


FIGURE 2.6. – Définition du chargement-test appliqué

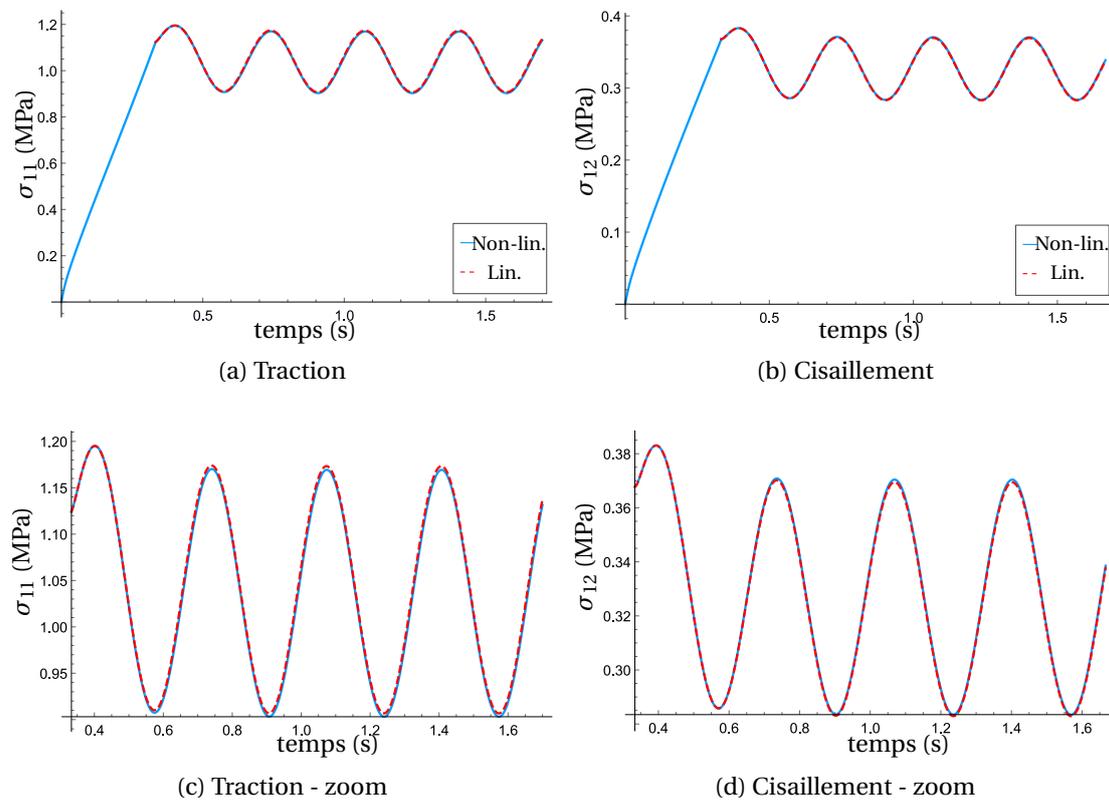


FIGURE 2.7. – Réponse en contrainte de Cauchy calculée à partir du modèle non-linéaire et du modèle linéarisé autour de la précharge

On constate un léger décalage des deux modèles au niveau des valeurs maximales des signaux sinusoïdaux mais mis à part cela, la correspondance des réponses est quasiment parfaite. Ces courbes nous assurent que les réponses linéarisée et non-linéaire sont quasiment identiques et témoignent du fort intérêt à cette linéarisation.

Écriture dans le domaine fréquentiel pour $t > t_0$

Afin d'exprimer les équations constitutives linéarisées (2.118) en fonction de la fréquence, on utilise la transformée de Laplace-Carson (SALENÇON 2019). Il s'agit d'une transformée usuellement utilisée dans le cadre de la viscoélasticité linéaire puisque les expressions de Boltzmann reliant contrainte et histoire de déformation font intervenir des produits de convolution qui se transforment en relation algébrique linéaire dans l'espace de Laplace. Les propriétés de cette transformée sont rappelées dans SALENÇON 2019, on rappelle néanmoins sa forme générale :

Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles pour $t \geq 0$. La transformée de Laplace-Carson de cette fonction $\mathcal{L}_f(s)$ est définie comme suit :

$$\mathcal{L}_f(s) = s \int_0^{+\infty} \exp(-st) f(t) dt. \quad (2.119)$$

On notera par la suite $\hat{f}(s) = \mathcal{L}_f(s)$ et s est la variable de Laplace telle que $s = j\omega$ et $j^2 = -1$. On cherche à exprimer l'amplitude des contraintes en réponse au chargement en déformation pour $t > t_0$. En effectuant le changement de variable $t' = t - t_0$, on exprime la transformée de Laplace-Carson de l'équation d'évolution des variables internes des branches élasto-dissipatives (équation (2.117)) :

$$s\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^i + \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right] : \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^i = s\hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{2\tau_i} [\mathbf{B}_{e0}^i]^D \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.120)$$

Cette expression permet de trouver la réponse stabilisée pour un chargement harmonique de fréquence ω (comme déjà montré au chapitre 1 paragraphe 1.2.2 dans le cas 1D pour la DMA) :

$$j\omega \boldsymbol{\epsilon}_e^{i*} + \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right] : \boldsymbol{\epsilon}_e^{i*} = j\omega \boldsymbol{\epsilon}^* - \frac{1}{2\tau_i} [\mathbf{B}_{e0}^i]^D \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.121)$$

On en déduit la relation suivante entre la variable interne $\boldsymbol{\epsilon}_e^{i*}$ et la variable observable $\boldsymbol{\epsilon}^*$:

$$\boldsymbol{\epsilon}_e^{i*} = \left[j\omega \mathbb{I} + \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right]^{-1} : \left[j\omega \boldsymbol{\epsilon}^* - \frac{1}{2\tau_i} \mathbb{K} : \mathbf{B}_{e0}^i \right] \quad \forall i \in [1, n], \quad (2.122)$$

notons \mathbb{A}_i le tenseur d'ordre 4 tel que :

$$\mathbb{A}_i = j\omega \mathbb{I} + \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.123)$$

On obtient ainsi la formule donnant les variables internes complexes $\boldsymbol{\epsilon}_e^{i*}$ en fonction de $\boldsymbol{\epsilon}^*$.

Concernant les variables internes décrivant l'effet Payne α_i , il est impossible d'ef-

fectuer une transformée de Laplace-Carson à cause de la non-linéarité de l'équation d'évolution de cette même variable.

Pour palier à cette difficulté, il est décidé d'estimer numériquement les valeurs des α_i à partir de leur équation d'évolution non-linéaire (2.118) (en temporel) pour chaque fréquence ω d'un vecteur de fréquences d'intérêt (et chaque amplitude dynamique $|\boldsymbol{\varepsilon}^*|$) et de prendre leur valeur stabilisée aux temps longs. On note alors α_i^∞ la valeur stabilisée de la variable interne α_i . Il s'agit d'une procédure qualifiée de semi-analytique.

En introduisant l'expression de la déformation élastique complexe (2.122) (de chaque branche de Maxwell) dans la transformée de Laplace-Carson de l'expression de la contrainte totale linéarisée (2.115), on obtient finalement la relation entre $\boldsymbol{\sigma}^*$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^*$:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{K} : \left\{ 2(\beta \mathbf{I} - C_{01} \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_0 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^\infty G_i \mathbf{B}_{e0}^i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^\infty \frac{G_i}{\tau_i} \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbb{A}_i^{-1} : \mathbb{K} : \mathbf{B}_{e0}^i + \left[8C_{20} \mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + 2\beta \mathbb{L}(\mathbf{B}_0) - 2C_{01} \mathbb{L}(\mathbf{B}_0^2) + 2j\omega \sum_{i=1}^n \alpha_i^\infty G_i \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbb{A}_i^{-1} \right] : \boldsymbol{\varepsilon}^* \right\} - p \mathbf{I} \quad (2.124)$$

avec $\mathbf{B}_0^2 = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0$. L'équation (2.124) reliant le tenseur des contraintes complexe $\boldsymbol{\sigma}^*$ au tenseur des déformations complexe $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ fait apparaître le tenseur des modules complexes \mathbb{C}^* défini comme suit :

$$\mathbb{C}^* = \left[8C_{20} \mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + 2\beta \mathbb{L}(\mathbf{B}_0) - 2C_{01} \mathbb{L}(\mathbf{B}_0^2) + 2j\omega \sum_{i=1}^n \alpha_i^\infty G_i \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbb{A}_i^{-1} \right], \quad (2.125)$$

on réécrit l'équation 2.124 de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{K} : \left\{ 2(\beta \mathbf{I} - C_{01} \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_0 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^\infty G_i \mathbf{B}_{e0}^i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^\infty \frac{G_i}{\tau_i} \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \mathbb{A}_i^{-1} : \mathbb{K} : \mathbf{B}_{e0}^i + \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* \right\} - p \mathbf{I} \quad (2.126)$$

2.3. Identification des paramètres du modèle

L'identification des paramètres du modèle est basée sur les résultats expérimentaux issus de la campagne expérimentale présentée en chapitre 1. L'identification se fera à la fois sur les essais de relaxation par palier qui font intervenir des hauts niveaux de déformation ainsi que des temps caractéristiques longs, et elle se fera également sur les essais DMA, de façon complémentaire, sur les balayages en fréquence et en

amplitude où les temps caractéristiques d'essais sont plus courts. Il es à noter que l'identification est effectuée sur les essais réalisés sur les éprouvettes cuites car leur comportement est proche de celui attendu dans l'application visée. De plus, on se limite au comportement à température ambiante mais la procédure mise en place pourrait être utilisée pour toute autre température (lorsque le modèle associé sera dépendant de la température).

2.3.1. Formes analytiques de la contrainte

2.3.1.1. Écriture en formulation mixte incompressible

Les équations (2.67) à (2.70) constituent le modèle de comportement hypervisco-élastique sous sa forme générale et les équations (2.115) à (2.118) sous forme linéarisée autour d'une précharge. Toutes ces expressions sont exprimées sous forme eulérienne incompressible. Pour l'identification des paramètres du modèle il est préférable de travailler avec les modèles exprimés en formulation mixte en fonction de la première contrainte de Piola-Kirchhoff $\mathbf{\Pi}$. Cette dernière s'exprime en fonction de la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ grâce à la règle de transport suivante (dans le cas incompressible) :

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.127)$$

les équations constitutives non-linéaires peuvent alors s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{eq} + \sum_{i=1}^n \mathbf{\Pi}_v^i - p \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.128)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{\Pi}_{eq} = 2 [(C_{10} + 2C_{20}(I_1(\mathbf{B}) - 3) + C_{01} I_1(\mathbf{B})) \cdot \mathbf{B} - C_{01} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}]^D \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbf{\Pi}_v^i = 2G_i \alpha_i \mathbf{B}_e^{iD} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \forall i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.129)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{B}}_e^i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e^i + \mathbf{B}_e^i \cdot \mathbf{L}^T - \frac{1}{\tau_i} \mathbf{B}_e^i \cdot \mathbf{B}_e^{iD} \\ \text{Tel que} \quad \mathbf{B}_e^i(t=0) = \mathbf{I} \end{cases} \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.130)$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i = -\frac{1}{h_i} \left\langle \alpha_i - \left(1 + r_i \tanh \left(\frac{N(\mathbf{B})}{2b} \right) \right) \right\rangle \\ \text{Tel que} \quad \alpha_i(t=0) = 1 \end{cases} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.131)$$

De la même façon les équations linéarisées autour d'une précharge s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{eq} + \sum_{i=1}^n \mathbf{\Pi}_v^i - p \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.132)$$

avec

$$\mathbf{F}^{-T} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})^{-T} \cdot \mathbf{F}_0^{-T} \approx (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T) \cdot \mathbf{F}_0^{-T}, \quad (2.133)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Pi}_{eq} = \mathbb{K} : \left\{ 2(\beta \mathbf{I} - C_{01} \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T) \cdot \mathbf{F}_0^{-T} + [8C_{20} \mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{B}_0 + 2\beta \mathbb{L}(\mathbf{B}_0) - 2C_{01} \mathbb{L}(\mathbf{B}_0^2)] : \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}_0^{-T} \right\} \\ \mathbf{\Pi}_v^i = \mathbb{K} : \left\{ 2G_i \alpha_i \left(\mathbf{B}_{e0}^i \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T) \cdot \mathbf{F}_0^{-T} + \mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i \cdot \mathbf{F}_0^{-T} \right) \right\} \quad \forall i \in [1, n] \end{array} \right. , \quad (2.134)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^i + \frac{1}{\tau_i} \left[\mathbb{L}(\mathbf{B}_{e0}^i) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{B}_{e0}^i) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{e0}^i \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_e^i = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2\tau_i} [\mathbf{B}_{e0}^i]^D \quad \forall i \in [1, n], \\ \text{Tel que } \boldsymbol{\varepsilon}_e^i(t = t_0) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.135)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_i = -\frac{1}{h_i} \left\langle \alpha_i - \left(1 + r_i \tanh\left(\frac{N(\mathbf{B})}{2b}\right) \right) \right\rangle \quad \forall i \in [1, n], \\ \text{Tel que } \alpha_i(t = 0) = 1 \end{array} \right. \quad (2.136)$$

2.3.1.2. Forme analytique de la contrainte de traction et du module d'Young complexe

Contrainte en fonction de la déformation

Dans un cas de traction uni-axiale homogène, le tenseur gradient de transformation \mathbf{F} prend la forme décrite au paragraphe F.1.7 :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}. \quad (2.137)$$

Le premier invariant du tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} , $I_1(\lambda)$ vaut alors :

$$I_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (2.138)$$

On suppose que le tenseur de Cauchy-Green gauche élastique pour la branche de Maxwell i a la forme suivante (BOUKAMEL et al. 2001, A. DELATTRE et al. 2016) :

$$\mathbf{B}_e^i = \begin{bmatrix} B_{e11}^i & B_{e12}^i & 0 \\ B_{e12}^i & B_{e22}^i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B_{e11}^i B_{e22}^i - B_{e12}^i{}^2} \end{bmatrix} \quad \forall i \in [1, n]. \quad (2.139)$$

L'état de contrainte pour cette sollicitation est tel que $\mathbf{\Pi}_{22} = \mathbf{\Pi}_{33} = 0$ (bords libres), ce qui permet d'identifier la pression hydrostatique p et la contrainte de traction $\mathbf{\Pi}_{11}$:

$$\Pi_{11} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) (C_{01} + C_{10}\lambda) + \frac{2C_{20}}{\lambda^3} (\lambda - 1)^3 (2 + \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) + \sum_{i=1}^n 2G_i \alpha_i (B_{e11}^i - B_{e22}^i) \frac{1}{\lambda}, \quad (2.140)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

avec

$$p = \frac{1}{3} \left[(1 - \lambda) [C_{01} + C_{10}\lambda + 2C_{20}(2 - 3\lambda + \lambda^3)] + \sum_{i=1}^n 2G_i \alpha_i \left(2B_{e22}^i - B_{e11}^i + \frac{1}{B_{e12}^i{}^2 - B_{e11}^i B_{e22}^i} \right) \right]. \quad (2.141)$$

Module d'Young en fonction de la fréquence

L'expression du module d'Young complexe se déduit de l'expression du tenseur des modules complexes \mathbb{C}^* issu de la linéarisation des équations constitutives explicitement exprimées en équations (2.125) et (2.126). On note \mathbb{Q}^* le tenseur d'ordre 4 apparaissant dans l'équation (2.126) défini par :

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{K} : \mathbb{C}^*. \quad (2.142)$$

Le module d'Young s'exprime en fonction des composantes de ce tenseur de la façon suivante :

$$E^* = Q_{1111}^* - Q_{2211}^* + \frac{1}{2}(Q_{2222}^* + Q_{2233}^*) - \frac{1}{2}(Q_{1122}^* + Q_{1133}^*). \quad (2.143)$$

2.3.1.3. Forme analytique de la contrainte de cisaillement

Contrainte en fonction de la déformation

Dans un cas de cisaillement simple homogène, le tenseur gradient de transformation \mathbf{F} prend la forme décrite au paragraphe F1.7 :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.144)$$

le premier invariant de \mathbf{B} est tel que :

$$I_1(\gamma) = 3 + \gamma^2. \quad (2.145)$$

La composante de cisaillement du tenseur des contraintes Π_{12} s'écrit alors de la façon suivante :

$$\Pi_{12} = \gamma(C_{10} + C_{01} + 2C_{20}\gamma^2) + \sum_{i=1}^n 2G_i \alpha_i B_{e12}^i, \quad (2.146)$$

Module de cisaillement en fonction de la fréquence

Le module de cisaillement complexe dans le cadre du modèle linéarisé vaut :

$$\mu^* = \frac{1}{2} (C_{1212}^* + C_{1221}^*). \quad (2.147)$$

A partir des formes analytiques des contrainte de traction et de cisaillement, ainsi que l'expression des modules en fonction de la fréquence et de l'amplitude, une stratégie d'identification est proposée par la suite. Il est décidé de procéder en deux temps.

Premièrement, les paramètres de la contribution hyperélastique Π_{eq} sont identifiés en utilisant les points de fin de relaxation des essais de relaxation par paliers. Ensuite, une identification des paramètres des branches élasto-dissipatives est proposée à la fois sur les essais de relaxation et sur les essais DMA de balayage en fréquence et de balayage en amplitude.

2.3.2. Identification des paramètres de la branche hyperélastique sous contrainte de stabilité matérielle

2.3.2.1. Définition de la fonction objectif

Il est nécessaire de définir une erreur puisque l'identification des paramètres se base sur la minimisation d'un écart entre les données expérimentales et les valeurs analytiques données par le modèle.

Comme annoncé plus haut, on s'attache à corrélérer au mieux les courbes formées des points de fin de relaxation lors de la phase de montée en charge.

La minimisation prendra en compte à la fois les données en traction et les données en cisaillement (des éprouvettes "cuites" du chapitre 1) afin d'assurer l'unicité de la solution pour différents modes de sollicitation. Les formes analytiques des contraintes hyperélastiques de traction et de cisaillement s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \Pi_{eq11}(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right)(C_{01} + C_{10}\lambda) + \frac{2C_{20}}{\lambda^3}(\lambda - 1)^3(2 + \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) \\ \Pi_{eq12}(\gamma) = \gamma(C_{10} + C_{01} + 2C_{20}\gamma^2) \end{cases}, \quad (2.148)$$

où C_{10} , C_{01} et C_{20} sont les paramètres matériau à identifier. Pour ce faire, on définit une erreur au sens des moindres carrés qui prend la forme suivante :

$$E_{eq} = \sum_{i=1}^{N_t} \frac{\left(\Pi_{eq,i}^t - \Pi_{eq11}(\lambda_i)\right)^2}{\Pi_{eq,i}^t{}^2} + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\left(\Pi_{eq,i}^c - \Pi_{eq12}(\gamma_i)\right)^2}{\Pi_{eq,i}^c{}^2}, \quad (2.149)$$

où N_t et N_c sont les nombres de points de fin de relaxation considérés pour la traction et le cisaillement, $\Pi_{eq,i}^t$ et $\Pi_{eq,i}^c$ sont les valeurs expérimentales des contraintes de traction et de cisaillement mesurées en fin de palier associées aux valeurs de déformation λ_i et γ_i des différents paliers.

2.3.2.2. Contrainte de stabilité matérielle

Le problème de minimisation est contraint par le fait que l'énergie libre doit respecter des conditions d'admissibilité thermodynamique et de stabilité matérielle. Ces conditions se traduisent par les relations suivantes :

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

→ la fonction d'énergie libre doit être positive quelle que soit la déformation :

$$\psi_{eq}(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad (2.150)$$

où λ_1 et λ_2 sont les élongations principales.

→ La condition de normalisation qui postule que l'énergie libre est nulle lorsque le système est dans son état de référence libre de contrainte :

$$\psi_{eq} = 0 \quad \text{à l'état de référence.} \quad (2.151)$$

→ La condition de coercivité (ANTMAN 1983) qui précise qu'il faut une énergie infinie pour réduire à 0 ou dilater à l'infini un élément de volume :

$$\begin{cases} \psi_{eq}(\mathbf{F}) \rightarrow \infty & \text{si } \det \mathbf{F} \rightarrow 0 \\ \psi_{eq}(\mathbf{F}) \rightarrow \infty & \text{si } \det \mathbf{F} \rightarrow \infty \\ \psi_{eq}(\mathbf{F}) \rightarrow \infty & \text{si } \lambda_i \rightarrow \infty \end{cases} . \quad (2.152)$$

→ La condition de stabilité matérielle d'un point de vue mathématique (BALL 1976, CIARLET 1994) se traduit par une condition de polyconvexité de la fonction d'énergie libre qui assure d'avoir un problème de minimisation bien posé. Cette condition s'exprime en fonction de l'opérateur Hessien de la forme suivante :

$$\det \nabla^2 \psi_{eq}(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0, \quad \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \lambda_1} \geq 0, \quad \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \lambda_2} \geq 0 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \quad (2.153)$$

Dans le cas incompressible, la condition de polyconvexité revient à choisir une fonction d'énergie ψ_{eq} qui soit symétrique, convexe et monotone croissante pour toutes ses variables.

Ainsi, en tenant compte de toutes ces contraintes sur l'énergie libre, le problème de minimisation de l'erreur E_{eq} définie plus haut prend la forme suivante :

$$\text{Trouver } (C_{10}, C_{01}, C_{20}) \in \mathcal{Z} \text{ tel que : } (C_{10}, C_{01}, C_{20}) = \text{Argmin}(E_{eq}), \quad (2.154)$$

avec

$$\mathcal{Z} = \left\{ (C_{10}, C_{01}, C_{20}) \in \mathbb{R}^3 \mid \det \nabla^2 \psi_{eq}(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0, \quad \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \lambda_1} \geq 0, \quad \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \lambda_2} \geq 0 \right\}. \quad (2.155)$$

2.3.2.3. Résultats

La méthode de minimisation de l'erreur utilisée est une méthode de minimisation globale proposée par le logiciel *Mathematica* intitulée "*Random Search*" sous contrainte comme affiché aux équations (2.154) et (2.155). Comme son nom l'indique, l'algorithme génère aléatoirement un certain de nombres de points de départ et pour

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

chaque point, une estimation locale de l'erreur est réalisée. Le point possédant l'erreur la plus faible est alors choisie comme solution. Cette méthode ne s'adapte pas très bien à la dimension de l'espace des solutions possibles (l'espace des points aléatoires de départ varie exponentiellement avec le nombre de paramètres du problème et leur pertinence est de plus en plus faible) mais a l'avantage d'être très rapide dans notre cas. L'identification est réalisée sur les points de fin de relaxation de la phase de montée en charge.

De plus, le respect des conditions d'admissibilité thermodynamique et de stabilité n'a été imposé que pour un espace restreint de dilatations principales tel que $(\lambda_1, \lambda_2) \in [0.5; 2.5]^2$. Les paramètres ainsi identifiés sont donnés dans le tableau 2.4 et la réponse du modèle identifié est donné en figure 2.8 avec les données expérimentales.

C_{10} (MPa)	C_{01} (MPa)	C_{20} (MPa)	E_{eq}
-0.096	0.16	0.027	0.4

Tableau 2.4. – Paramètres de la branche hyperélastique identifiés et valeur de l'erreur

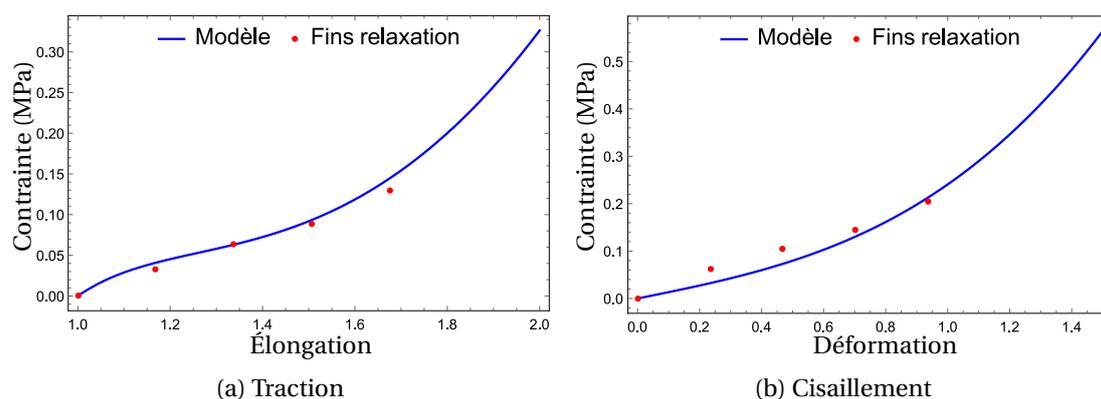


FIGURE 2.8. – Résultats après identification des paramètres de la branche hyperélastique sur la phase de montée des essais de relaxation par palier

On constate que le modèle choisi pour la branche hyperélastique décrit de façon très satisfaisante le comportement hyperélastique en traction, en revanche une légère sous-estimation de la réponse en cisaillement est notable. Une hypothèse pour expliquer cette différence, comme avancée au chapitre 1 paragraphe 1.2.1.2, serait qu'il existe une anisotropie qui proviendrait du comportement viscoélastique intrinsèque du matériau qui se traduirait par des temps de relaxation différents pour les deux modes de sollicitation. Par conséquent, au bout de 3500 s pour chaque palier, la réponse en cisaillement, ou en traction, ou les deux, ne seraient pas stabilisées.

Néanmoins il est considéré que le modèle permet une description assez fidèle du comportement hyperélastique du matériau, et il s'agit du modèle ayant donné les meilleurs résultats après en avoir investigué un certain nombre (voir annexe G).

2.3.3. Identification des paramètres des branches de Maxwell

2.3.3.1. Définition de la fonction objectif

On rappelle brièvement les paramètres des branches de Maxwell à identifier :

- Les modules de cisaillement $(G_i)_{i=1\dots n}$.
- Les temps caractéristiques associés aux effets dissipatifs $(\tau_i)_{i=1\dots n}$.
- Les temps caractéristiques associés à l'effet Payne $(h_i)_{i=1\dots n}$ ainsi que les deux jeux de paramètres $(r_i)_{i=1\dots n}$ et $(b_i)_{i=1\dots n}$ intervenant dans les lois d'évolution.

Comme énoncé plus haut, l'identification des paramètres se fait simultanément sur les essais de relaxation par paliers et sur les essais harmoniques de balayage en fréquence et en amplitude à la fois en traction et en cisaillement, le tout dans le but de traduire au mieux le comportement multi-axial ainsi que les effets de la fréquence et de l'amplitude de chargement.

L'erreur à minimiser est constituée alors des erreurs sur la contrainte totale non-linéaire en traction et en cisaillement ainsi que des erreurs sur les modules d'Young et modules de cisaillement analytiquement obtenus à partir de la linéarisation des équations constitutives autour d'une précharge. C'est pourquoi il est également nécessaire de considérer des essais DMA à différentes précharges. Pour résumer, la fonction objectif totale notée f_{hv} est la somme des fonctions objectif de traction et de cisaillement $f_{hv,tra}$ et $f_{hv,cis}$, telle que :

$$f_{hv} = f_{hv,tra} + f_{hv,cis}, \quad (2.156)$$

où $f_{hv,tra}$ est composée de deux contributions :

$$f_{hv,tra} = f_{nl,tra} + f_{dyn,tra}, \quad (2.157)$$

où $f_{nl,tra}$ est l'écart entre contrainte totale issue des essais de relaxation par paliers et contrainte totale théorique donnée en équation (2.140) :

$$f_{nl,tra} = \sum_{i=1}^{M_t} \frac{(\Pi_i^t - \Pi_{11}(\lambda_i))^2}{\Pi_i^{t^2}}, \quad (2.158)$$

avec M_t le nombre de points correspondant aux deux premiers paliers de chargement. Et $f_{dyn,tra}$ est l'écart entre les modules d'Young mesurés lors des essais DMA et les modules d'Young théoriques, le tout sur la partie réelle et la partie imaginaire pour les différentes précharges et sur les balayages en fréquence et en amplitude :

$$\begin{aligned} f_{dyn,tra} = & \sum_{u=1}^{T_s} \sum_{i=1}^{T_f} \frac{(E'_{i_u} - E'(f_i, u))^2}{E'_{i_u}{}^2} + \sum_{u=1}^{T_s} \sum_{i=1}^{T_f} \frac{(E''_{i_u} - E''(f_i, u))^2}{E''_{i_u}{}^2} \\ & + \sum_{u=1}^{T_s} \sum_{k=1}^{T_d} \frac{(E'_{k_u} - E'(\varepsilon_{d_k}, u))^2}{E'_{k_u}{}^2} + \sum_{u=1}^{T_s} \sum_{k=1}^{T_d} \frac{(E''_{k_u} - E''(\varepsilon_{d_k}, u))^2}{E''_{k_u}{}^2}, \end{aligned} \quad (2.159)$$

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

où T_s est le nombre de précharges statiques considéré, T_f le nombre de points fréquentiels considérés et T_d le nombre de points d'amplitude dynamique considérés.

Il en est de même pour la fonction objectif de cisaillement $f_{hv,cis}$:

$$\begin{aligned}
 f_{hv,cis} = & \sum_{i=1}^{M_c} \frac{(\Pi_i^c - \Pi_{12}(\gamma_i))^2}{\Pi_i^{c2}} + \sum_{u=1}^{C_s} \sum_{i=1}^{C_f} \frac{(\mu'_{i_u} - \mu'(f_i, u))^2}{\mu'_{i_u}{}^2} + \sum_{u=1}^{C_s} \sum_{i=1}^{C_f} \frac{(\mu''_{i_u} - \mu''(f_i, u))^2}{\mu''_{i_u}{}^2} \\
 & + \sum_{u=1}^{C_s} \sum_{k=1}^{C_d} \frac{(\mu'_{k_u} - \mu'(\gamma_{d_k}, u))^2}{\mu'_{k_u}{}^2} + \sum_{u=1}^{C_s} \sum_{k=1}^{C_d} \frac{(\mu''_{k_u} - \mu''(\gamma_{d_k}, u))^2}{\mu''_{k_u}{}^2}
 \end{aligned} \tag{2.160}$$

avec M_c le nombre de points correspondant aux deux premiers paliers de chargement en entier, C_s est le nombre de précharges statiques considéré, C_f le nombre de points fréquentiels considérés et C_d le nombre de points d'amplitude dynamique dans le cas du cisaillement.

Les valeurs de fréquences utilisées sont identiques en traction et en cisaillement et sont réparties sur la plage [0.1;95] Hz pour un total de 50 points. Les différentes précharges utilisées sont respectivement de 17% et 33% pour la traction et 0% et 25% pour le cisaillement.

2.3.3.2. Procédure d'identification

De façon similaire à la minimisation de l'erreur sur la branche hyperélastique, la minimisation de l'erreur f_{hv} est contrainte par les critères d'admissibilité thermodynamique et de stabilité matérielle de l'énergie libre de chaque branche de Maxwell ψ_v^i . Une condition suffisante au respect de ces critères est d'imposer la positivité des modules de cisaillement $(G_i)_{i=1\dots n}$ (S. HARTMANN 2001). Ainsi le problème reposant sur la minimisation de f_{hv} est formulé de la façon suivante :

$$\text{Trouver } (G_i, \tau_i, h_i, r_i, b_i)_{i=1\dots n} \in \mathcal{Y} \text{ tel que : } (G_i, \tau_i, h_i, r_i, b_i)_{i=1\dots n} = \text{Argmin}(E_{hv}), \tag{2.161}$$

avec

$$\mathcal{Y} = \left\{ (G_i, \tau_i, h_i, r_i, b_i) \in \mathbb{R}^5 \mid G_i \geq 0, \tau_i > 0, h_i > 0, r_i > 0, b_i > 0 \quad \forall i \in [1, n] \right\}. \tag{2.162}$$

La procédure d'identification réalisée est une méthode hybride entre une méthode itérative classique et une méthode optimisée proposée par Alexis DELATTRE 2014. La procédure d'identification a consisté à fixer un nombre de branches n a priori et les temps caractéristiques associés τ_i , de fixer également les h_i , r_i et b_i qui sont les paramètres des lois d'évolution des variables internes α_i et de n'identifier que les G_i à partir de la minimisation de la fonction objectif f_{hv} . Le fait de fixer des paramètres identiques pour les lois d'évolution de toutes les branches assure de ne devoir résoudre les équations qu'une seule fois par cas de charge et pour toutes les

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

branches. La résolution numérique de ces équations différentielles est réalisée à l'aide de la fonction *NDSolve* du logiciel Mathematica. Cette méthode permet alors de reformuler la fonction objectif comme une fonction semi-analytique des $(G_i)_{i=1\dots n}$ et le problème de minimisation devient linéaire, ce qui est numériquement moins coûteux malgré un nombre de branches élevé. En partant d'un grand nombre de branches n , l'identification élimine d'elle-même les branches ne contribuant pas à la réponse en attribuant aux G_i associés une valeur quasiment nulle.

2.3.3.3. Résultats d'identification

En définissant initialement un nombre de branches de $n = 30$, le résultat du problème de minimisation est de telle sorte que 12 branches soient vraiment actives. Les paramètres identifiés sont présentés dans le tableau 2.5.

G_i (MPa)	τ_i (s)	h_i (s)	r_i	b_i
0.32	0.00001	0.15	0.78	0.12
0.38	0.01	0.15	0.78	0.12
0.06	0.1	0.15	0.78	0.12
0.22	1.0	0.15	0.78	0.12
0.13	10.0	0.15	0.78	0.12
0.09	100.0	0.15	0.78	0.12
0.04	1000.0	0.15	0.78	0.12
0.29	0.00001	0.15	0.01	0.12
1.37	0.0001	0.15	0.01	0.12
1.46	0.001	0.15	0.01	0.12
0.07	0.01	0.15	0.01	0.12
0.0049	100000.	0.15	0.01	0.12

Tableau 2.5. – Paramètres des branches de Maxwell identifiés

Résultats sur les essais de relaxation par paliers

La figure 2.9 présente les résultats des contraintes calculées à partir de tous les paramètres identifiés (branche hyperélastique et branches de Maxwell), en traction, figure 2.9(a), et en cisaillement, figure 2.9(b), en réponse au chargement de relaxation par paliers. Les données expérimentales y sont également représentées. On constate premièrement que les paramètres identifiés ne permettent pas de décrire parfaitement l'évolution temporelle des contraintes de traction et de cisaillement. En effet, sur la courbe de traction, il semblerait que la stabilisation de la contrainte modélisée pour chaque palier soit plus rapide que celle de la véritable relaxation, par conséquent une surestimation des contraintes est notable.

En revanche, ce phénomène a l'effet inverse en cisaillement puisque la contrainte se voit sous-estimée par rapport aux essais mais d'un écart plus faible. Ce résultat

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

est assez cohérent avec les résultats d'identification obtenus pour la contribution hyperélastique seule où la courbe issue des points de fin de relaxation de ce même essai était sous-estimée en cisaillement. Ce point met encore en lumière la différence de comportement viscoélastique en traction et en cisaillement.

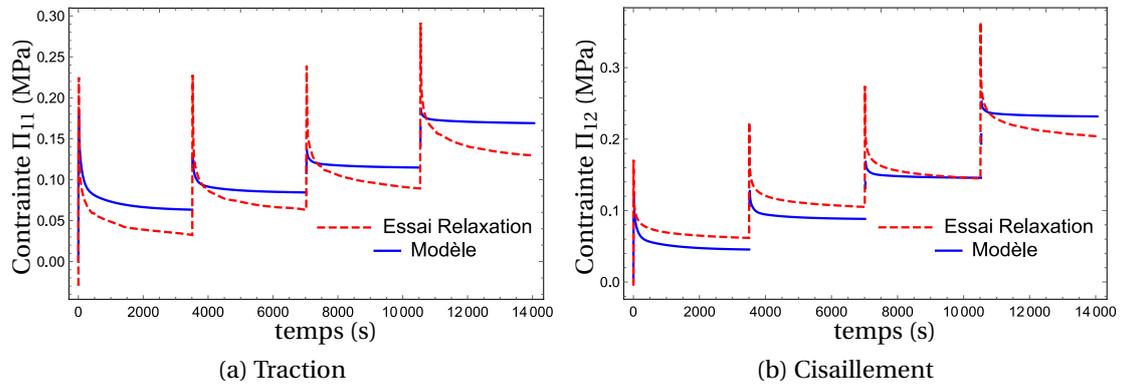


FIGURE 2.9. – Réponses en contrainte des essais de relaxation par paliers, essais et modèle identifié

Afin de renforcer cette hypothèse d'anisotropie, on a tracé, de façon analogue aux courbes 1.14 du paragraphe 1.2.1.2 du chapitre 1, l'évolution des contraintes de traction et de cisaillement obtenues à partir du modèle identifié en échelle logarithmique. Les résultats sont présentés en figure.

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

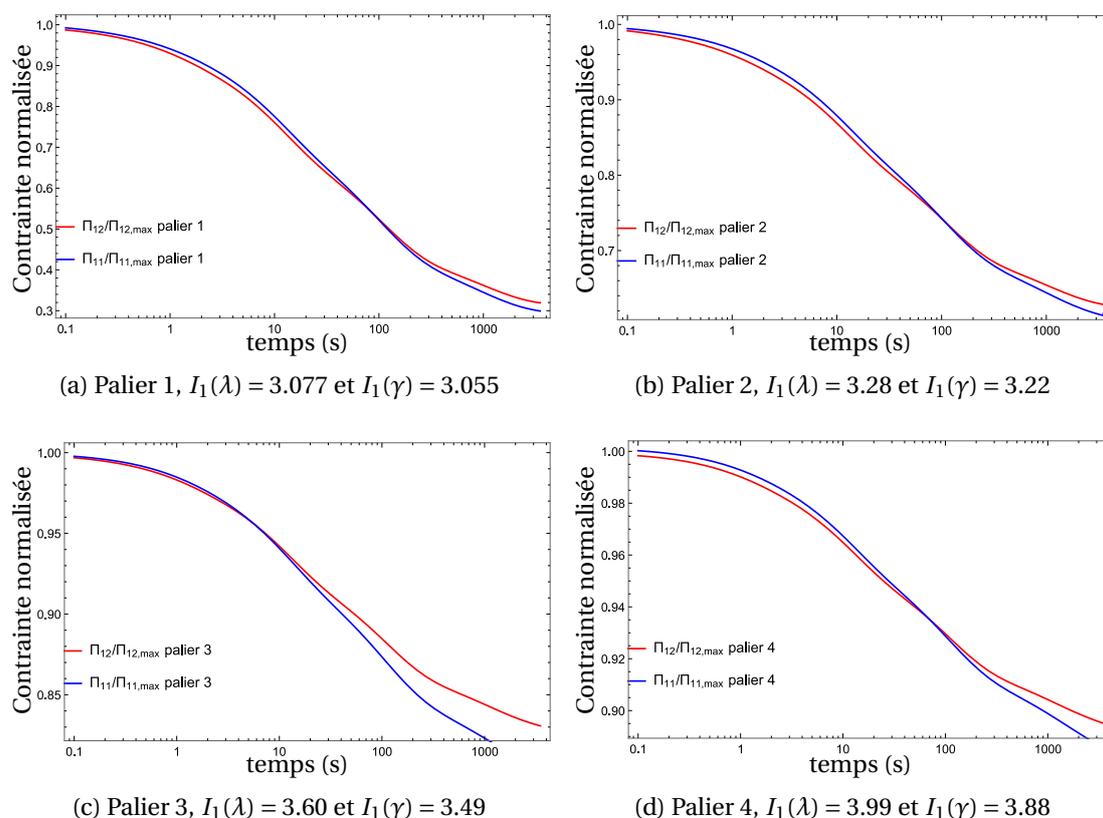


FIGURE 2.10. – Contraintes de traction et de cisaillement issues du modèle identifié sur les paliers de la phase montée des essais de relaxation par paliers.

En comparant la relaxation des contraintes du modèle de la figure 2.10 aux contraintes expérimentales de la figure 1.14, on constate effectivement que la distinction entre traction et cisaillement est moins marquée sur les contraintes issues du modèle. Ce résultat confirme la nécessité de définir un comportement visqueux anisotrope dans le modèle. Pour ce faire, une piste serait de considérer des temps caractéristiques des phénomènes visqueux $(\tau_i)_{i=1\dots n}$ différents pour la traction et pour le cisaillement qui induirait la construction d'un modèle anisotrope.

Résultats sur les essais harmoniques de balayage fréquentiel

La figure 2.11 présente la partie réelle (figure 2.11(a)) ainsi que la partie imaginaire (figure 2.11(b)) du Module de Young en fonction de la pulsation pour les deux pré-charges citées plus haut de 17% ($\lambda_s = 1.17$) et 33% ($\lambda_s = 1.33$). Les courbes en pointillés sont les courbes expérimentales tandis que les courbes continues sont les modules calculés à partir des paramètres identifiés. Les résultats entraînent les commentaires suivants.

Premièrement, les courbes des modèles analytiques semblent trop non-linéaires par rapport aux courbes expérimentales en allant dans le sens des fréquences croissantes

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

mais permettent néanmoins de capter la bonne évolution fréquentielle des modules de stockage et de perte.

Concernant l'influence de la précharge statique, on constate expérimentalement que plus cette dernière est élevée plus les modules sont faibles. Le modèle retranscrit fidèlement cet effet avec un écart de module de stockage entre les deux précharges qui est du même ordre que l'écart mesuré expérimentalement. Ce qui n'est pas vrai pour le module de perte où l'écart est fortement sous-estimé.

Enfin ces résultats restent à nuancer au vu de la qualité des réponses fréquentielles pour certains points.

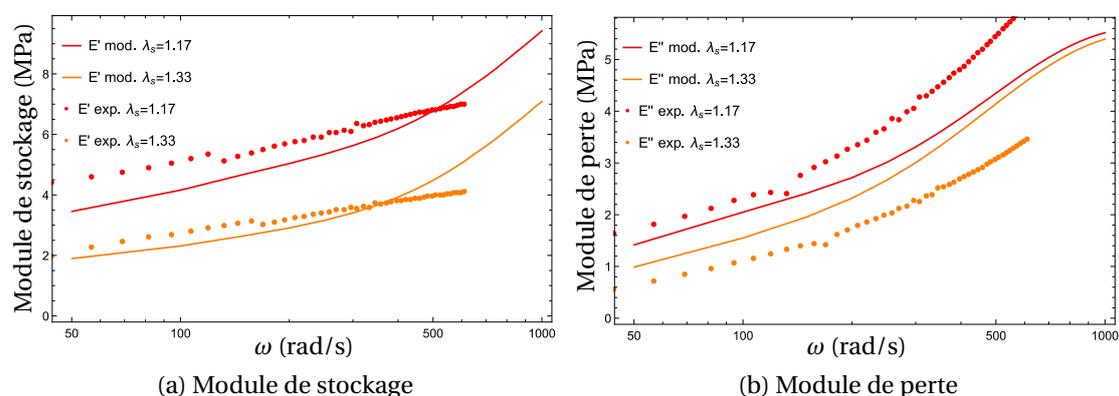


FIGURE 2.11. – Modules d'Young identifiés et expérimentaux en fonction de la fréquence pour deux précharges différentes, pour une amplitude dynamique ε_d de 0.6%.

La figure 2.12 présente la partie réelle (2.12(a)) ainsi que la partie imaginaire (2.12(b)) du Module de cisailment en fonction de la fréquence radiale pour les deux précharges citées plus haut de 0% ($\gamma_s = 0$) et 25% ($\gamma_s = 0.25$). Les courbes en pointillés sont les courbes expérimentales tandis que les courbes continues sont les modules calculés à partir des paramètres identifiés.

Comparées aux courbes du module d'Young, les évolutions du module de cisailment analytique semblent davantage corrélérer avec les courbes expérimentales notamment d'un point de vue évolution globale (même type de non-linéarité).

L'effet de la précharge statique est assez fidèlement retranscrit dans le cas du module de stockage mais une étonnante inversion du comportement est notable dans le cas du module de perte. Cependant il est à noter que l'écart de module de perte mesuré entre les deux précharges est faible sur toute la plage de fréquence, ce qui est le cas du modèle jusqu'aux alentours de 100 rad/s.

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

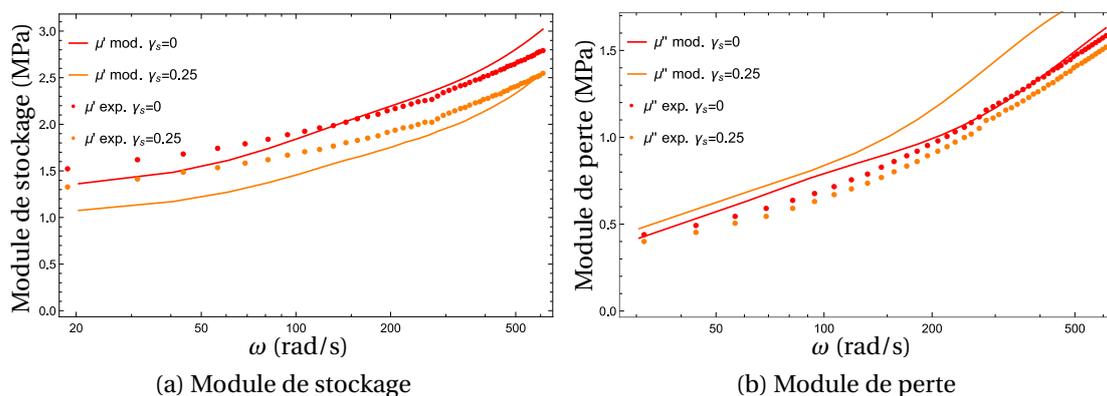


FIGURE 2.12. – Modules de cisailment identifiés et expérimentaux en fonction de la fréquence pour deux précharges différentes, avec une amplitude dynamique γ_d de 1.8%.

Résultats sur les essais harmoniques de balayage en amplitude

La figure 2.13 présente la partie réelle (2.13(a)) ainsi que la partie imaginaire (2.13(b)) du Module de cisailment en fonction de l'amplitude de déformation dynamique de sollicitation pour les deux précharges citées plus haut de 0% ($\gamma_s = 0$) et 25% ($\gamma_s = 0.25$). On constate que la dépendance à l'amplitude est captée avec une grande fidélité à la fois sur la partie réelle et sur la partie imaginaire du module de cisailment. Le module analytique associé à la précharge de 25% présente une valeur incohérente pour une amplitude dynamique aux alentours de 0.4. Cet artefact numérique provient certainement de la résolution de l'équation d'évolution de la variable interne de Payne et peut être éliminée en réduisant la taille maximale du pas d'intégration.

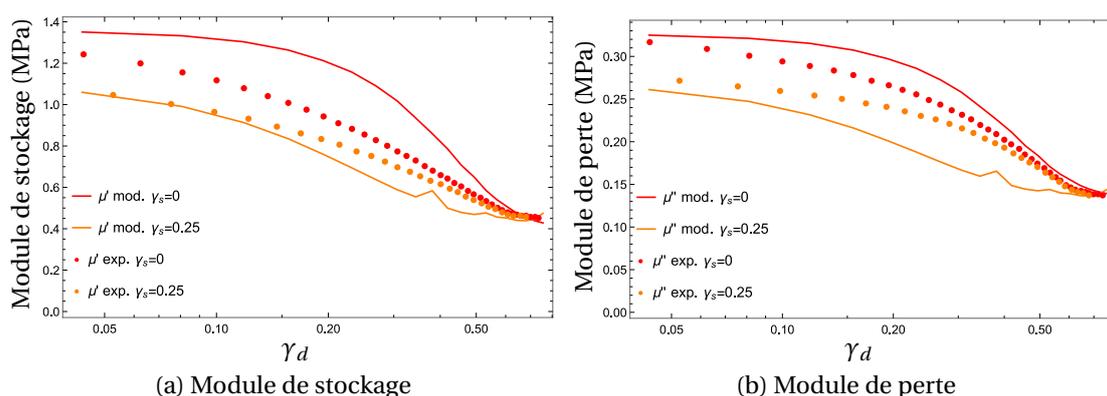


FIGURE 2.13. – Modules de cisailment identifiés et expérimentaux en fonction de l'amplitude de sollicitation harmonique pour deux précharges différentes à une fréquence de 3Hz

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

La figure 2.14 présente la partie réelle (2.14(a)) ainsi que la partie imaginaire (2.14(b)) du Module de Young en fonction de l'amplitude de déformation dynamique de sollicitation pour les deux précharges citées plus haut de 17% ($\lambda_s = 1.17$) et 33% ($\lambda_s = 1.33$). L'évolution décroissante est bien décrite en revanche un fort décalage vertical est notable entre les modules mesurés expérimentalement et les modules calculés à partir des paramètres identifiés.

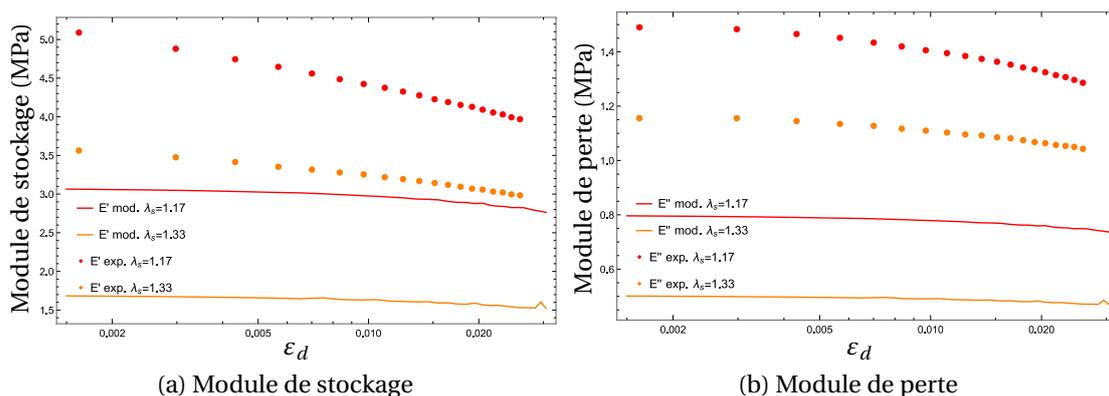


FIGURE 2.14. – Modules de Young identifiés et expérimentaux en fonction de l'amplitude sollicitation harmonique pour deux précharges différentes à une fréquence de 3Hz

Globalement, le modèle proposé ainsi que sa méthode d'identification ont permis d'obtenir un jeu de paramètres matériau permettant de retranscrire à la fois des effets non-linéaires liés aux grandes transformations et des effets de la fréquence grâce à l'utilisation du modèle linéarisé pour exprimer les modules complexes. Dans le cadre du modèle linéarisé, ce dernier permet également de retranscrire très fidèlement l'influence d'une précharge statique sur le comportement fréquentiel ainsi que l'effet Payne.

Il est à noter néanmoins la difficulté du modèle à retranscrire parfaitement les phénomènes intervenant respectivement en traction et en cisaillement, notamment pour l'effet Payne (voir figure 2.13 et 2.14). Cet écart provient en majeure partie de la forte dépendance de ces modules aux paramètres imposés pour l'évolution des variables internes de Payne. Une modification de ces paramètres matériau peut permettre de se rapprocher des courbes du modules de Young.

Un choix stratégique peut être de n'identifier le modèle que sur les essais en cisaillement où globalement l'erreur de mesure liée aux efforts est plus faible que sur les essais en traction. En effet, globalement on a fait plus confiance aux essais de cisaillement car on a moins de dispersion en particulier sur la mesure de la déformation alors qu'en traction cette mesure repose sur un positionnement rigoureux des éprouvettes vu que nous n'avons pas de moyen de mesure dans la zone utile (comme expliqué au paragraphe 1.1.2.3 du chapitre 1).

2.3.4. Validation du modèle sous chargement multi-axial

Cette partie a pour but de confronter les résultats d'essais multi-axiaux de traction-torsion aux résultats du modèle pour le même type de sollicitation. Pour ce faire, un modèle éléments finis de l'éprouvette diabolo a été réalisée et la loi de comportement non-linéaire a été implémentée à l'aide d'une *UMAT* du logiciel Abaqus. Une rapide description du modèle EF ainsi que de l'implémentation du modèle sont présentées avant la confrontation essai-calcul.

2.3.4.1. Implémentation éléments finis

Modèle EF

Le modèle EF est constitué d'éléments hybrides quadratiques (briques C3D20H et tétraédriques C3D15H, voir figure 2.15) et comprend 87604 degrés de liberté. Comme pour les essais, le diabolo est soumis à une rotation suivant son axe de révolution et une traction axiale harmonique purement alternée (dont le rapport de charge R est -1). Un soin particulier est apporté à la définition du chargement qui doit être identique à celui des essais. La vitesse de rotation pour l'application du chargement statique est de 1 deg/s (ou 0.017 rad/s) et la fréquence de la traction harmonique est de 10 Hz. Durant l'essai, la phase de chargement harmonique (superposée à la torsion statique) a duré 1000s, cependant pour diminuer les coûts de calcul cette phase a été réduite à 50s pour les simulations.

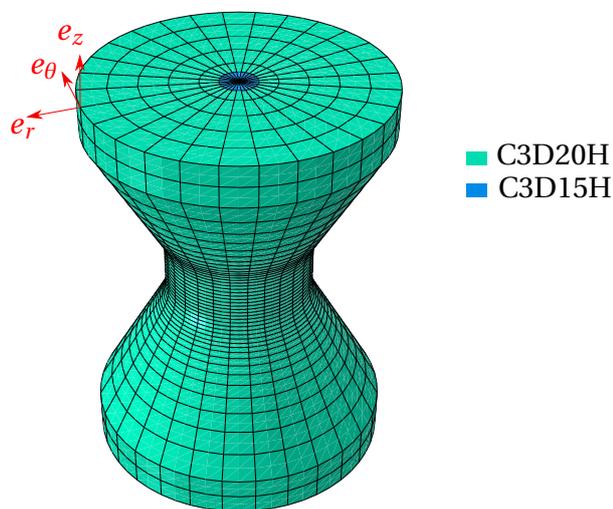


FIGURE 2.15. – Modèle éléments finis de l'éprouvette diabolo et son repère cylindrique associé (e_r , e_θ , e_z)

UMAT

L'implémentation numérique de la loi a été effectuée dans le cadre d'un matériau

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

quasi-incompressible et non strictement incompressible. Ce qui a pour conséquence de modifier les équations constitutives qui s'expriment désormais en fonction de $\bar{\mathbf{B}}$ la partie isochore du tenseur de Cauchy-Green gauche telle que $\mathbf{B} = (J^{2/3}\mathbf{I}) \cdot \bar{\mathbf{B}}$. La forme de la contrainte volumique σ_{vol} découle du modèle d'énergie libre volumique proposée par J. C. SIMO et al. 1985 :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_v^i + \boldsymbol{\sigma}_{vol}, \quad (2.163)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{eq} = 2J^{-1} [(C_{10} + 2C_{20}(I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) + C_{01}I_1(\bar{\mathbf{B}})) \cdot \bar{\mathbf{B}} - C_{01}\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}]^D \\ \boldsymbol{\sigma}_v^i = 2J^{-1} G_i \alpha_i \bar{\mathbf{B}}_e^{iD} \quad \forall i \in [1, n] \\ \boldsymbol{\sigma}_{vol} = k \frac{1}{J} \ln(J) \end{cases}, \quad (2.164)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e^i = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e^i + \bar{\mathbf{B}}_e^i \cdot \mathbf{L}^T - \frac{1}{\tau_i} \bar{\mathbf{B}}_e^i \cdot \bar{\mathbf{B}}_e^{iD} \quad \forall i \in [1, n] \\ \text{Tel que } \bar{\mathbf{B}}_e^i(t=0) = \mathbf{I} \quad \forall i \in [1, n] \end{cases}, \quad (2.165)$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i = -\frac{1}{\bar{h}_i} \left\langle \alpha_i - \left(1 + r_i \tanh\left(\frac{N(\mathbf{B})}{2b}\right) \right) \right\rangle \quad \forall i \in [1, n] \\ \text{Tel que } \alpha_i(t=0) = 1 \quad \forall i \in [1, n] \end{cases}. \quad (2.166)$$

Notons qu'il est possible sur Abaqus d'implémenter la formulation seulement en eulérien, c'est pourquoi c'est $\boldsymbol{\sigma}$ qui apparaît dans les équations. La mise en œuvre numérique du modèle est basée sur une formulation variationnelle à deux champs qui sont le déplacement \mathbf{u} et la pression p . Cette formulation est présentée en annexe J.

Concernant la résolution des équations d'évolution des variables internes du modèle $\bar{\mathbf{B}}_e^i$ et α_i , ces dernières sont résolues indépendamment en utilisant le même schéma de résolution d'Euler implicite avec des sous-pas de temps (*substepping*) différents de ceux du schéma de Newton-Raphson pour le calcul de l'équilibre mécanique.

2.3.4.2. Validation de l'implémentation éléments finis sur cas simple

L'objectif de ce paragraphe est de valider l'implémentation éléments finis de la loi de comportement en comparant les résultats obtenus sur des chargements de traction simple et de cisaillement simple avec les résultats donnés par sa version codée sur *Mathematica*. Cette démarche permet notamment de valider les méthodes d'intégration définies dans l'UMAT.

Traction simple

On compare premièrement les résultats obtenus pour un cas de traction simple statique avec une elongation de $\lambda_s = 1.33$ sur lequel est superposé une traction harmonique à une amplitude de déformation dynamique de 10% et une fréquence de 10 Hz. Ce chargement est décrit en figure 2.16.

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

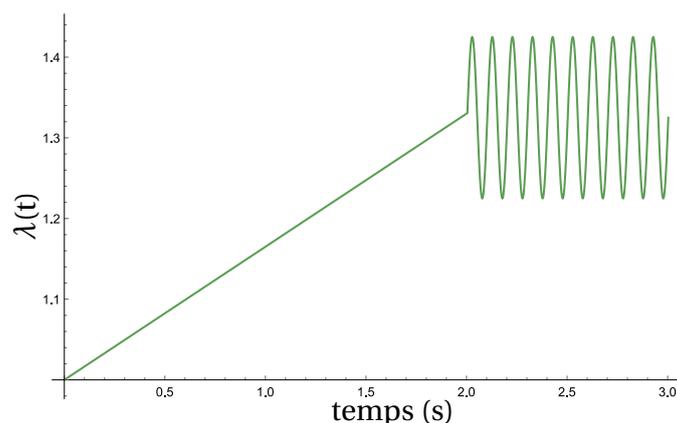


FIGURE 2.16. – Chargement en traction appliqué

Pour le calcul éléments finis, la traction est réalisée sur un élément cubique hybride C3D20H. La contrainte de traction obtenue via le code source de la loi de comportement codée sur *Mathematica* ainsi que celle obtenue par éléments finis en utilisant l'UMAT sur un cube élémentaire sont tracées en figure 2.17. On constate pour le cas de la traction une corrélation parfaite entre la contrainte calculée avec *Mathematica* et la contrainte issue du calcul par élément finis en utilisant l'UMAT durant tout le long de la simulation.²

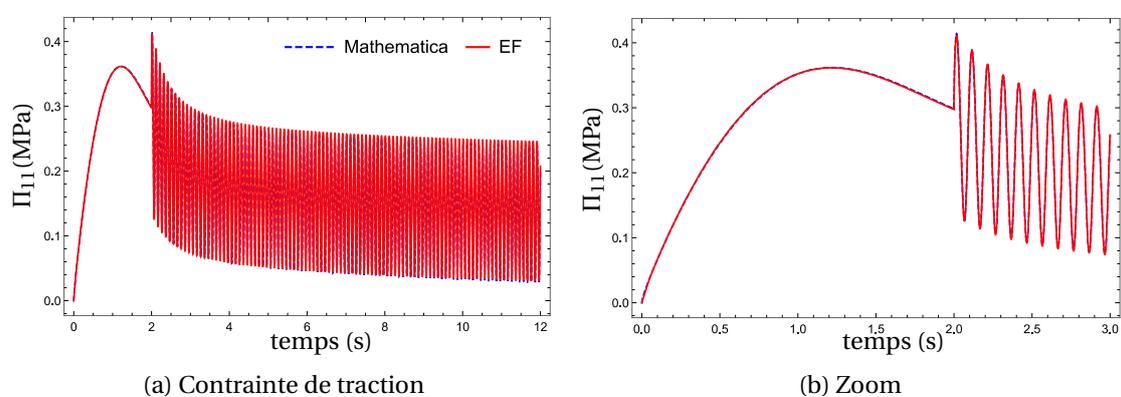


FIGURE 2.17. – Contrainte de traction obtenue à partir du code source sur *Mathematica* et celle obtenue par éléments finis avec l'UMAT

Cisaillement simple

On compare maintenant les résultats obtenus pour un cas de cisaillement simple statique avec une déformation de $\gamma_s = 0.33$ sur laquelle est superposé un cisaillement harmonique à une amplitude de déformation dynamique de 10% et une fréquence de

2. On constate néanmoins une instabilité sur la contrainte dans la zone de la précharge ($t < 2s$) qui s'explique par l'évolution des variables de Payne α_i conditionnée par le choix des temps caractéristiques h_i .

10 Hz. La contrainte de cisaillement obtenue via le code source de la loi de comportement codée sur *Mathematica* ainsi que celle obtenue par éléments finis en utilisant l'UMAT sur un cube élémentaire sont tracées en figure 2.18. On constate pour le cas du cisaillement une très bonne corrélation entre la contrainte calculée avec Mathematica et la contrainte issue du calcul par élément finis en utilisant l'UMAT.

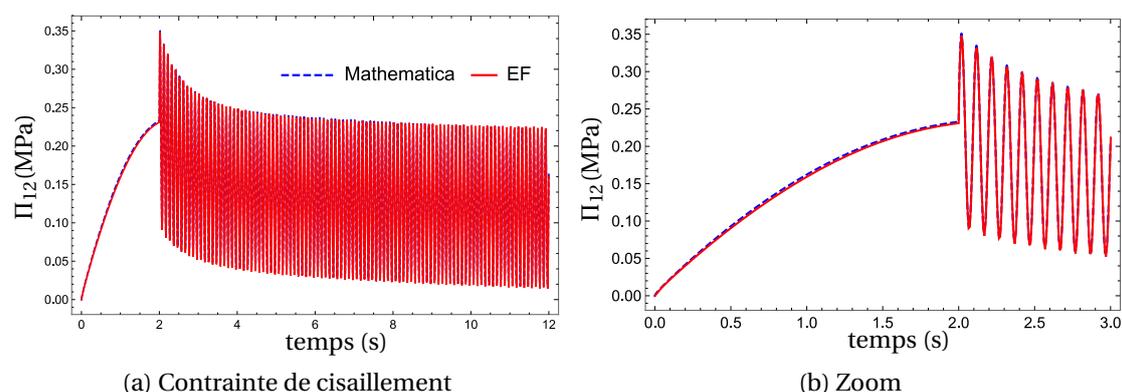


FIGURE 2.18. – Contrainte de cisaillement obtenue à partir du code source sur Mathematica et celle obtenue par éléments finis avec l'UMAT

Ces résultats permettent de valider les méthodes d'intégration utilisées pour le calcul des variables internes dans l'UMAT. On peut désormais procéder à la validation de la loi de comportement en comparant une simulation éléments finis d'un chargement de traction-torsion sur diabolo à des données expérimentales.

2.3.4.3. Résultats sur essais de traction-torsion

Dans ce paragraphe on confronte les résultats de simulation d'essais de traction-torsion sur diabolo aux résultats expérimentaux. On étudie un cas de torsion statique équivalent à une déformation statique en cisaillement $\varepsilon_{\theta z}^s$ de 50%, soit 23.6 degrés de rotation, superposée à une traction axiale harmonique alternée d'amplitude de déformation dynamique ε_{zz}^d de 5%, soit 0,5 mm de déplacement de fréquence 10 Hz (voire figure 2.15 pour le repère cylindrique). On étudie également le même cas mais avec une amplitude de déformation en traction dynamique de 20% afin de juger de la qualité de la prise en compte de l'influence de l'amplitude dans le modèle.

Pour chacune des configurations, on compare deux éléments : premièrement on compare l'évolution dans le temps de la relaxation du moment dans l'axe de la pré-charge qui permet de valider le comportement en grandes déformations dans le domaine temporel, puis on compare les boucles issues de la force et du déplacement harmonique appliquée dans l'autre axe de chargement. Les essais nous donnent accès seulement au déplacement traverse de la machine donc on fait l'hypothèse que déplacement dans l'éprouvette est égal à ce dernier.

La figure 2.19 présente les résultats pour la première configuration d'essai : $\varepsilon_{\theta z}^s = 50\%$ et $\varepsilon_{zz}^d = 5\%$. La figure 2.19(a) est le moment en fonction du temps. Le signal de moment

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.3. Identification des paramètres du modèle

de l'essai étant très bruité, on présente en figure 2.19(b) la courbe moyenne de moment calculée à partir du signal brut sur laquelle n'apparaissent plus, par conséquent, les oscillations liées au chargement dans la direction axiale après application de la précharge (elles y sont toujours sur la courbe issue de la simulation). La figure 2.19(c) représente la boucle d'hystérésis en effort et déplacement calculée à partir du dernier cycle de chargement de la simulation et celle de l'essai qui correspond aux mêmes instants. On constate que l'évolution du moment est légèrement sous-estimée par rapport à l'essai mais présente néanmoins une cinétique de relaxation très similaire. Concernant les boucles d'hystérésis on constate une sous-estimation de l'aire de cette dernière mais néanmoins une raideur dynamique très proche.

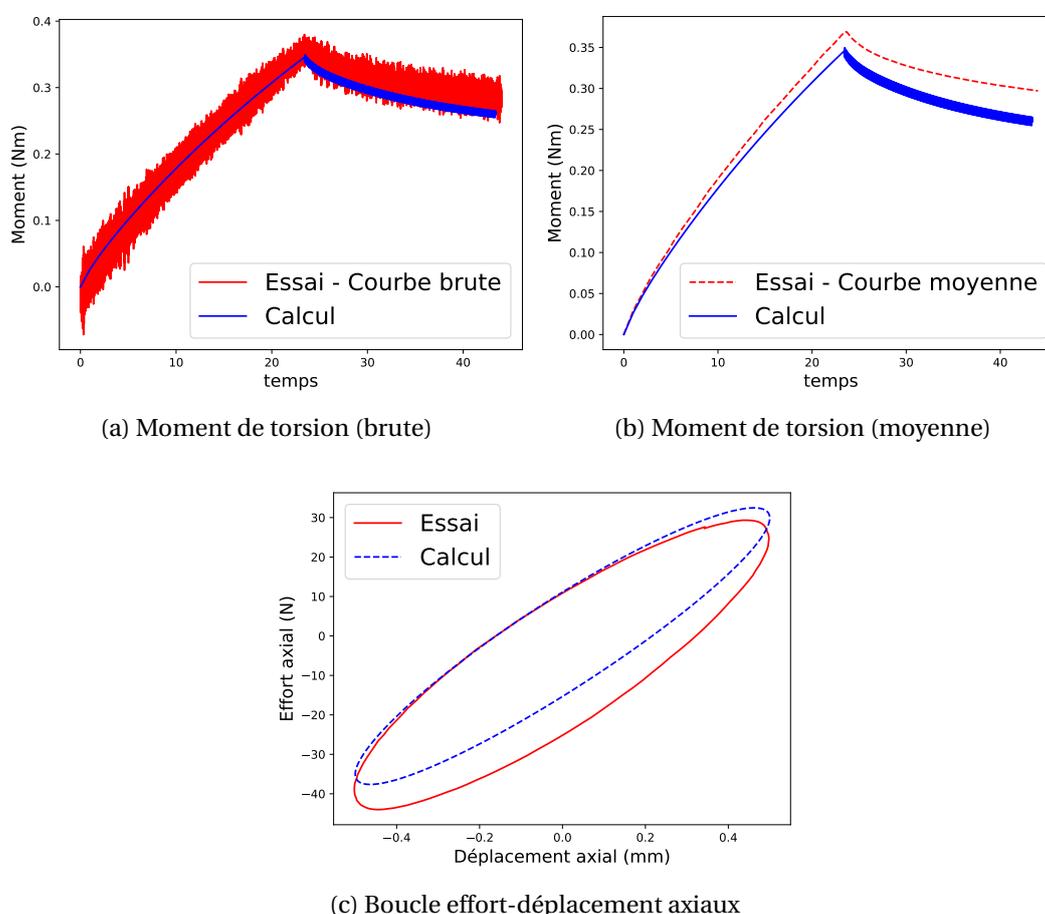


FIGURE 2.19. – Comparaison essai-calcul sur éprouvette diabolo pour $\varepsilon_{\theta z}^s = 50\%$ et $\varepsilon_{zz}^d = 5\%$

La figure 2.20 illustre les mêmes grandeurs mais pour un essai avec une amplitude de déformation harmonique plus élevée valant $\varepsilon_{zz}^d = 20\%$.

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.4. Conclusion

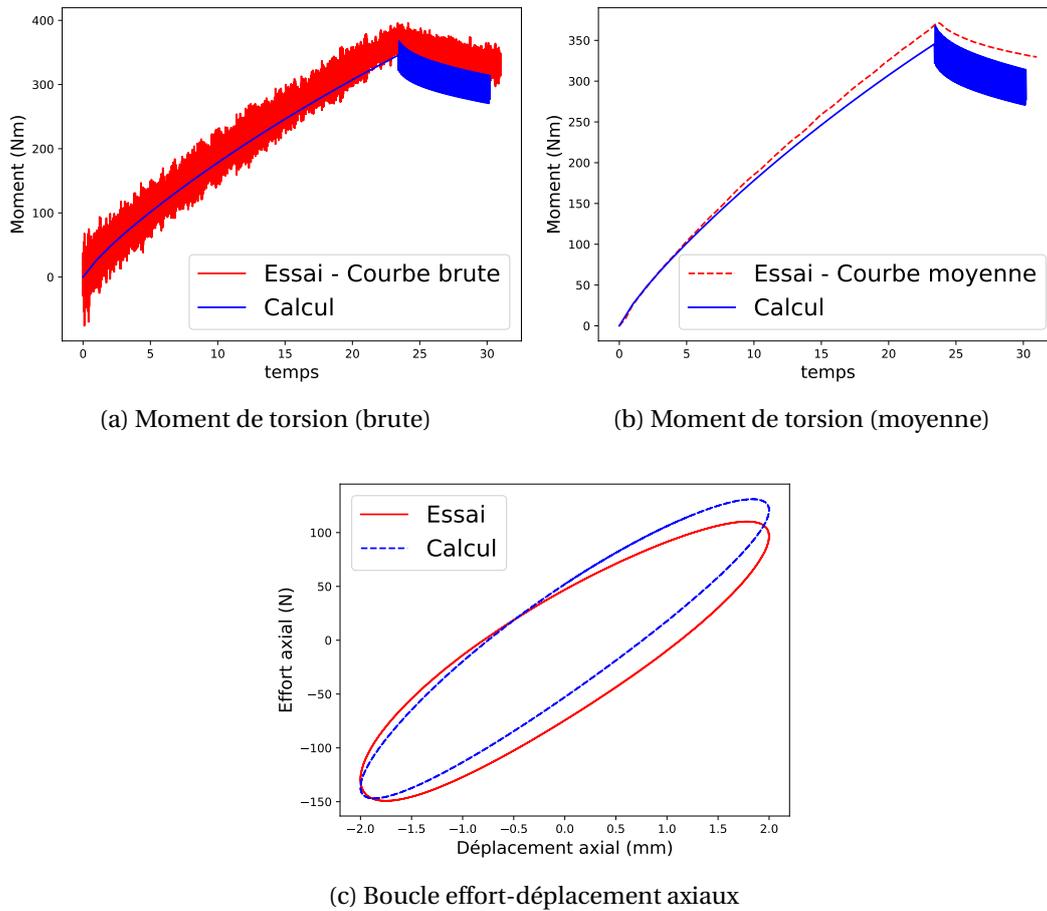


FIGURE 2.20. – Comparaison essai-calcul sur éprouvette diabolico pour $\varepsilon_{\theta z}^s = 50\%$ et $\varepsilon_{zz}^d = 20\%$

On constate que même à une amplitude dynamique plus élevée, les résultats de simulation sont très proches des résultats d'essai. On peut donc affirmer que la loi de comportement proposée (ainsi que son implémentation) permet de retranscrire fidèlement les effets non-linéaire liés au matériau tels que l'effet Payne.

2.4. Conclusion

Ce chapitre a pour but de construire un modèle de loi de comportement pouvant prédire les propriétés élasto-dissipatives du matériau de l'étude.

Après un bref état de l'art sur les différentes approches existantes, il est décidé d'établir un modèle phénoménologique respectant les principes de la thermodynamique.

Pour le cas d'un modèle de comportement incompressible, une décomposition du tenseur gradient de transformation en une partie ne dépendant pas du temps et une partie caractérisant le comportement dissipatif est effectuée et nous permet d'introduire une variable interne dont l'équation d'évolution sert à traduire ces effets.

2. Modélisation du comportement des élastomères – 2.4. Conclusion

Il en découle la proposition d'un modèle rhéologique de type Maxwell généralisé permettant de décrire la diversité des échelles de temps liées aux phénomènes visqueux au sein d'un élastomère.

Les expressions des énergies libres sont issues de la littérature, décomposition sous forme de somme de termes produits des invariants de \mathbf{B} pour la branche hyperélastique et de type Néo-Hooke pour les branches élasto-dissipatives.

En reprenant la démarche de Alexis DELATTRE 2014, les énergies libres des branches de Maxwell ont été enrichies par une variable interne supplémentaire α_i permettant de retranscrire l'effet Payne sous sollicitation dynamique. Une nouvelle forme d'équation d'évolution a toutefois été proposée pour ces variables internes afin de s'approcher au mieux du comportement du matériau d'intérêt.

Par ailleurs, une méthode de linéarisation du modèle ainsi constitué est proposée dans le cas d'un chargement statique en grandes déformations superposé à chargement harmonique à faible amplitude dans le but de s'appuyer sur des essais DMA lors de l'identification des paramètres matériau. C'est pourquoi une formulation en complexe est introduite et permet l'obtention directe de formules analytiques définissant les modules complexes en fonction de la fréquence. Ces expressions peuvent alors être directement utilisées pour identifier des paramètres à partir des mesures du module de Young complexe et du module de cisaillement complexe en fonction de la fréquence et de l'amplitude présentées dans le chapitre 1.

De ce fait, une procédure d'identification en deux temps est proposée. La première étape est l'identification des paramètres de la branche hyperélastique qui se base sur les fins de relaxation d'essais de relaxation par paliers. Dans un second temps, en fixant *a priori* un certain nombre de paramètres des branches élasto-dissipatives le problème est réduit à l'identification du jeu de coefficients de cisaillement $(G_i)_{i=1\dots n}$. Il s'agit d'une méthode d'identification robuste, peu coûteuse numériquement et qui ne nécessite des résultats d'essais que sur deux types d'essais différents : relaxation par palier et DMA. Néanmoins l'efficacité de cette méthode est en partie due au fait que l'on fixe des paramètres matériau qui ne seront pas identifiés.

Les résultats d'identification montrent que le modèle est capable de prédire les effets non-linéaires liés aux grandes déformations, mais également les phénomènes de dépendance à la fréquence et à l'amplitude de sollicitation que l'on constate sur les balayages fréquentiels et en amplitude des modules complexes. Néanmoins ces résultats restent perfectibles notamment sur la prédiction de l'effet Payne sur ces dits modules.

Finalement, le modèle phénoménologique proposé permet de répondre aux objectifs initiaux qui étaient de prédire le comportement élasto-dissipatif du matériau de l'étude ainsi que ses multiples non-linéarités (effet Payne, effet d'une précharge) le tout sur les plages de fréquence, d'amplitude et de température définies initialement par l'application industrielle.

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides

Sommaire

3.1	Introduction	112
3.1.1	Objectifs	112
3.1.2	Éléments de bibliographie	114
3.1.2.1	Les composites hybrides	114
3.1.2.2	Homogénéisation élastique et viscoélastique	116
3.2	Modélisation des composites hybrides étudiés	116
3.2.1	Démarche	116
3.2.2	Définition des matériaux de l'étude et données utilisées	117
3.2.2.1	Fibres de carbone	117
3.2.2.2	Résine et élastomère	117
3.2.3	Définition du problème d'homogénéisation	122
3.2.3.1	Séparation d'échelle	122
3.2.3.2	Conditions aux limites	123
3.2.3.3	Problème élémentaire sur cellule périodique	123
3.2.4	Détermination d'une cellule représentative du composite	127
3.2.4.1	Détermination d'une densité de maillage	128
3.2.4.2	Détermination du nombre de fibres	129
3.2.5	Résultats de l'homogénéisation des microstructures hybrides	130
3.3	Conclusion	134

3.1. Introduction

3.1.1. Objectifs

Dans le chapitre précédent, on présente la loi de comportement définie pour l'élastomère de l'étude ainsi que son implémentation numérique. Dans le cheminement logique de cette étude, il est maintenant question d'utiliser cette loi non-linéaire pour prédire le comportement de structures composites contenant de l'élastomère afin de discerner les avantages et/ou inconvénients de l'ajout d'un tel matériau sur les propriétés mécaniques. Avant cela, il est nécessaire de définir le cadre d'étude ainsi que les choix de modélisation pour les différents matériaux constituant les composites dans le but d'établir le problème d'homogénéisation et sa résolution. En effet, l'étape d'homogénéisation des différents composites étudiés est essentielle car elle permet d'obtenir le comportement mécanique homogène équivalent aux microstructures hybrides (c'est-à-dire contenant des fibres de carbone et des ajouts d'élastomère) qui sera utilisé pour des simulations à échelle macroscopique. Cette procédure permet donc de diminuer les coûts de calcul sur les simulations à l'échelle macroscopique où un comportement homogénéisé remplace la description microstructurale des éléments de la structure.

Le comportement identifié au chapitre précédent présente de fortes non-linéarités liées aux grandes déformations (hyperélasticité) ainsi qu'au comportement du matériau (effet Payne par exemple). Actuellement, il n'existe pas de méthode d'homogénéisation permettant de traiter ce problème. L'objectif de ce chapitre et du chapitre suivant est de comparer l'amortissement induit par l'ajout d'élastomère dans un composite CFRP suivant deux types de technologies. On fait l'hypothèse qu'une comparaison dans un cadre simplifié (viscoélasticité linéaire) permet de tirer des conclusions demeurant valables dans le cas non-linéaire.

Dans cette partie on étudie la modélisation de composites à fibres continues unidirectionnelles, c'est-à-dire où les fibres sont alignées suivant un axe privilégié. Dans ce type de composite, les fibres ne sont pas distribuées uniformément à cause des procédés de polymérisation sous pression. La figure 3.1 issue de ALBEROLA et BENZARTI 1997 montre une distribution de fibres dans un composite unidirectionnel.

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.1. Introduction

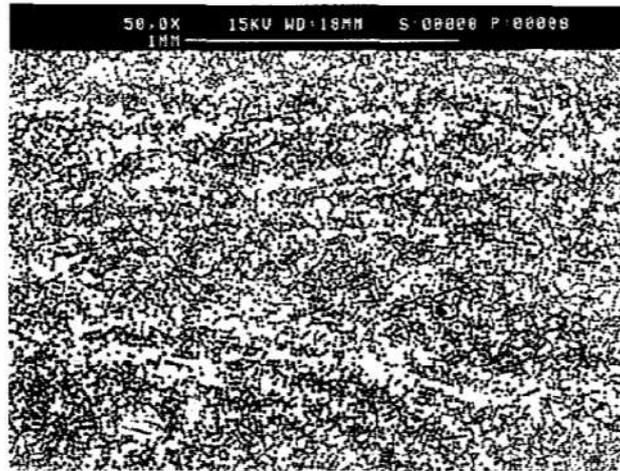


FIGURE 3.1. – Observation au microscopie électronique à balayage de la distribution de fibres de verre dans un composite unidirectionnel avec un taux de 48% de fibres de verre et 52% de résine epoxy issue de ALBEROLA et BENZARTI 1997.

Il existe différentes façons d'introduire de l'élastomère dans une microstructure, on présente ici deux technologies différentes : le *co-tissé* et l'*enrobé*. Le *co-tissé* est une microstructure dans laquelle coexiste des fibres de carbone et des fibres d'élastomère et l'*enrobé* est une microstructure dans laquelle toutes les fibres de carbone sont enrobées par une fine couche d'élastomère. Ces microstructures sont présentées en figure 3.2.

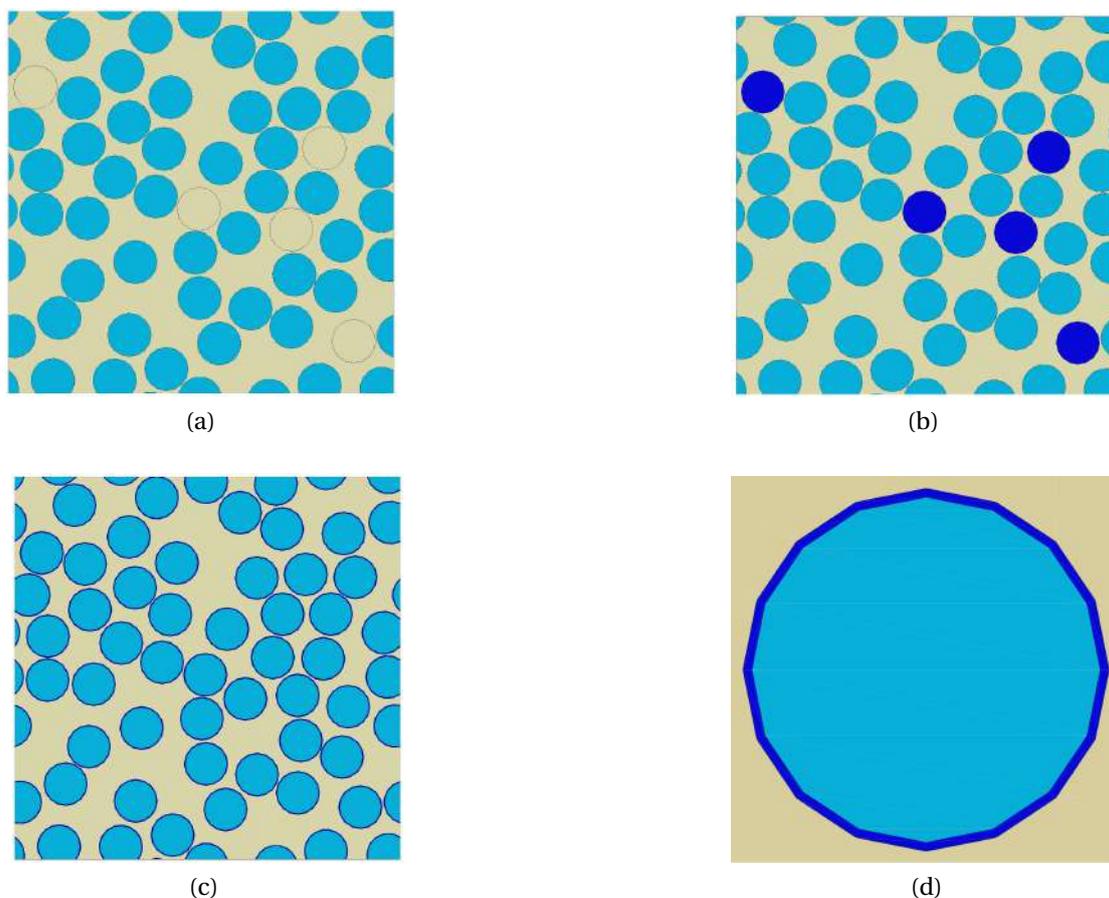


FIGURE 3.2. – Les microstructures étudiées : (a) La microstructure de "Référence" : contient seulement de la résine et des fibres de carbone. (b) La microstructure de co-tissé : contient des fibres d'élastomère en plus des fibres de carbone avec les mêmes propriétés géométriques. (c) La microstructure d'enrobé : contient des fibres de carbone enrobées par une fine couche d'élastomère (zoom en figure (d)).

3.1.2. Éléments de bibliographie

3.1.2.1. Les composites hybrides

Le principal avantage des composites hybrides, c'est-à-dire des composites composés d'au moins deux types de fibres différents et d'une matrice, est qu'ils offrent une plus grande liberté de conception que les composites mono-fibres car ils permettent souvent d'obtenir des propriétés qui reflètent les avantages des différentes fibres (qui peuvent être complémentaires) SWOLFS et al. 2019. C'est pour cette raison que l'on considère dans cette étude une matrice renforcée en fibres de carbone qui apportent la rigidité et des éléments, sous forme de fibres ou d'enrobage, en élastomère qui apportent de la dissipation et donc de l'amortissement.

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.1. Introduction

Co-tissé

MARTONE, GIORDANO et al. 2011 conceptualisent une préforme contenant des torons de carbone ainsi que des fibres d'élastomère, dans leur cas des fibres de polyuréthane (PU), avec des taux volumique de 5% et 10% en fibre de PU. Ces préformes ont ensuite été imprégnées de résine epoxy RTM6 et mises sous forme de plaque par infusion sous vide. Des échantillons de ces plaques ont ensuite été testés avec des essais DMA en flexion 3 points pour quantifier les propriétés dissipatives des différentes plaques hybrides. Une amélioration conséquente du facteur de perte, de l'ordre de 80%, est constatée suivant la direction longitudinale du composite unidirectionnel fabriqué.

En dehors du cadre des composites à fibres continues, de nombreuses études quantifiant l'apport de particules d'élastomère sur l'amortissement ont été réalisées. Par exemple, RAVI SANKAR et al. 2010 étudie l'impact sur les propriétés dissipatives de l'ajout de particules de caoutchouc naturel quasi-sphériques dans un composite à fibres de verre continues et constatent notamment que plus les particules de caoutchouc sont grosses (à taux volumique constant), plus le facteur de perte est élevé en fonction de la fréquence.

Enrobé

La technologique de l'enrobé est plus présente dans la littérature, en effet, S. J. HWANG et GIBSON 1993 ont étudié l'influence d'une interface élastique enrobant des fibres continues de carbone contenues dans une résine epoxy modélisant des cellules représentatives de la microstructure avec les éléments finis. Les auteurs estiment alors la contribution à l'amortissement de cette interface entre la fibre et la matrice en fonction de sa largeur dans la direction longitudinale (direction des fibres de carbone) et la direction transversale.

Plus tard, FINEGAN et GIBSON 1998 ont effectué une étude en se basant sur les mêmes méthodes mais en considérant, pour la première fois, un comportement viscoélastique pour le matériau enrobant les fibres de carbone qui sont celles, d'après les auteurs, d'un élastomère acrylique.

Plus récemment, KERN et al. 2019, homogénéisent des composites unidirectionnels où les fibres sont enrobées avec un matériau dissipatif dans le domaine fréquentiel et comparent leur résultat avec le modèle analytique d'homogénéisation proposé par HERVE et ZAOUÏ 1993 et obtiennent une excellente corrélation avec ce dernier. Les auteurs élargissent ensuite l'étude à la prédiction du comportement d'une plaque sous oscillations libres dont le comportement mécanique est celui de la microstructure hybride homogénéisée.

D'un point de vue expérimental, GAO et al. 2019 ont réalisé un tissu 3D interlock dans lequel des fibres de carbone sont enrobées par de l'élastomère NBR et ont réalisé des essais DMA afin de mesurer l'ajout de l'élastomère sur le facteur de perte du composite. Les auteurs constatent une amélioration des propriétés dissipatives de l'ordre de 120% par rapport au tissu sans élastomère. Cette augmentation s'accompagne d'une faible perte de rigidité dans le sens longitudinal mais d'une amélioration de la résistance en cisaillement transverse de 7% ainsi qu'une augmentation de la résistance à l'impact de 11%.

3.1.2.2. Homogénéisation élastique et viscoélastique

Connaissant les comportements des constituants locaux (fibres de carbone, résine époxy et caoutchouc) et la microstructure (disposition des différents constituants les uns par rapport aux autres), le comportement des plis composites peut être estimé en utilisant une méthode d'homogénéisation. Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, la méthode la plus simple consiste à utiliser la transformée de Laplace-Carson et le principe dit de correspondance (R. SCHAPERY 1967). Les comportements locaux des matériaux sont définis par leurs modules élastiques complexes et la réponse macroscopique peut être obtenue par des méthodes d'homogénéisation linéaire bien connues.

Les méthodes analytiques de champ moyen donnent accès à la réponse macroscopique sous forme explicite (HASHIN 1970, ROUGIER et al. 1993 et R. SCHAPERY 1967) mais elles sont limitées à des microstructures idéalisées pas nécessairement représentatives des composites industriels qui nous intéressent. En revanche, les méthodes en champs complets peuvent être utilisées pour résoudre numériquement les équations d'homogénéisation sur un volume élémentaire représentatif caractérisant la microstructure du composite (par exemple M. EL HACHEMI et al. 2016 et LIEBIG et al. 2019 qui ont utilisé la méthode des éléments finis et NOÛS et al. 2021 qui a appliqué une méthode numérique basée sur les Transformées de Fourier Rapides). La définition d'une telle cellule représentative passe par plusieurs étapes qui sont cruciales pour modéliser numériquement le matériau.

3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

3.2.1. Démarche

Dans cette partie il est question de mettre en place une méthode d'homogénéisation en champs complets, dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, pour des microstructures de CFRP avec ajouts d'élastomère. On pourra alors comparer les propriétés dissipatives des différents comportements effectifs liés à ces composites hybrides.

Une fois avoir défini le comportement local des différents éléments de la microstructure, il est nécessaire de définir une cellule représentative de la microstructure d'un composite uni-directionnel constitué d'une matrice époxy ainsi que des fibres continues de carbone par une description géométrique et morphologique. La représentativité de la cellule dépend du nombre d'hétérogénéités considérées car le matériau est de constitution irrégulière. Pour ce faire, nous nous basons sur l'erreur faite sur le calcul des propriétés élastiques homogénéisées (données statistiques sur une grande base de calculs) de la cellule en fonction de la taille (donnée en nombre de fibres cf. KANIT et al. 2003) de cette dernière. Après avoir obtenu un volume élémentaire statistiquement représentatif (*VER*) en élasticité linéaire, nous ajoutons le comportement viscoélastique linéaire de la résine afin de simuler le comportement

dissipatif. Le module dynamique issu du calcul sur VER seulement epoxy-carbone nous servira de référence pour la comparaison aux cas où le VER est modifié par l'ajout de l'élastomère.

3.2.2. Définition des matériaux de l'étude et données utilisées

Pour les deux microstructures hybrides étudiées, le taux volumique des fibres de carbone et le taux volumique d'élastomère sont identiques, seul le taux volumique de résine est diminué lors du passage d'un microstructure résine-carbone à une microstructure résine-carbone-élastomère. Ces taux sont donnés en tableau 3.1.

matériau	fraction volumique (%) dans composite résine-carbone	fraction volumique (%) dans composite résine-carbone-élastomère	masse volumique (g/cm^3)
Résine Epoxy	50	45	1.2
Carbone	50	50	1.78
Élastomère	0	5	1.5

Tableau 3.1. – Taux volumique et masse volumique de chaque constituant

3.2.2.1. Fibres de carbone

Les fibres continues de carbone sont modélisés avec un comportement élastique isotrope transverse (BORNERT et al. 2001a, BERTHELOT 2012) et sont donc caractérisées par 5 propriétés élastiques indépendantes. Ces dernières sont listées dans le tableau 3.2 et proviennent de Alice COURTOIS 2018, l'indice L est la direction parallèle aux fibres (direction longitudinale) et l'indice T dénote la direction transverse normale aux fibres.

E_T	10300 MPa
E_L	310000 MPa
ν_{TT}	0.3
ν_{TL}	0.01
G_{TL}	27900 MPa

Tableau 3.2. – Propriétés élastiques des fibres de carbone

3.2.2.2. Résine et élastomère

Comportement fréquentiel

Pour définir le comportement de la résine et de l'élastomère on utilise les courbes

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

des modules de cisaillement en fonction de la fréquence obtenues à partir d'essais DMA en torsion comme expliqué en paragraphe 1.2.5. Les courbes du module de cisaillement de l'élastomère sont présentées en paragraphe 1.2.5. On détaille dans ce paragraphe les résultats obtenus pour la résine.

La figure 3.3 présente les facteurs de translations utilisés pour construire la courbe maitresse du module de cisaillement complexe de la résine.

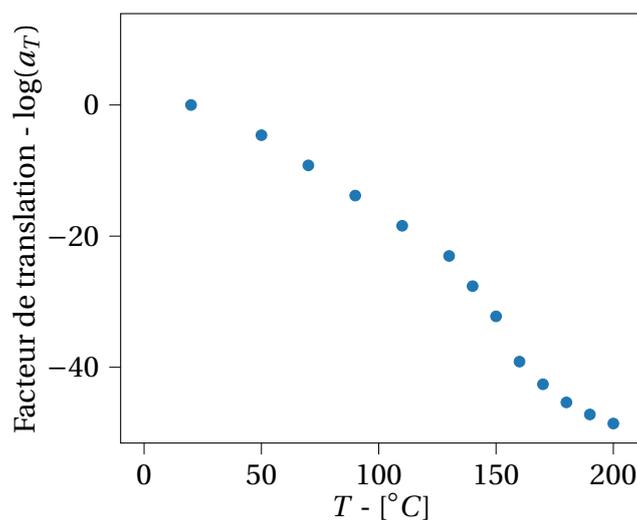


FIGURE 3.3. – Facteurs de translation horizontale utilisés pour construire la courbe maitresse pour la résine.

Les courbes du comportement en cisaillement de la résine sont illustrées en figure 3.4.

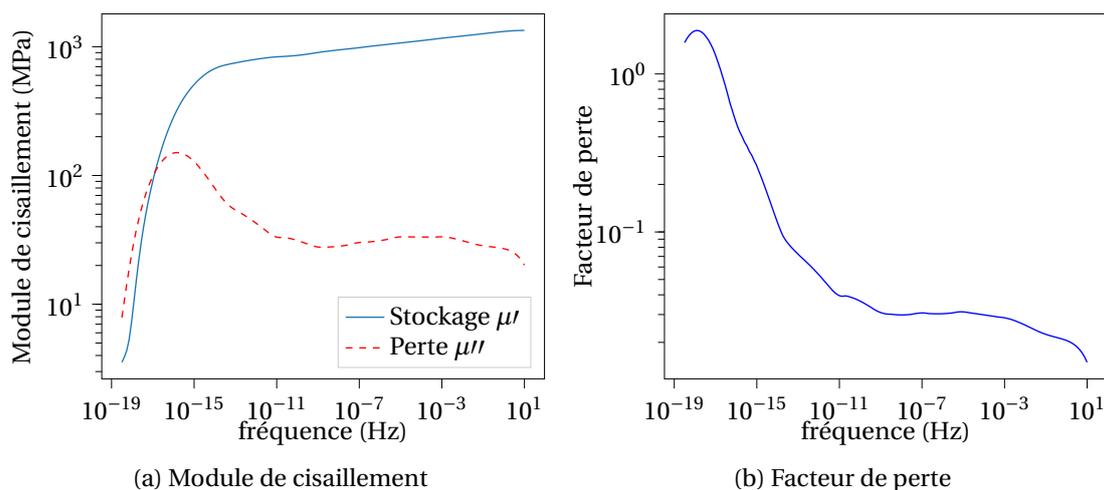


FIGURE 3.4. – Courbe DMA du module de cisaillement et de son facteur de perte associé pour la résine

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

Afin d'obtenir le comportement tri-dimensionnel complet des deux matériaux viscoélastiques qui sont considérés comme homogènes et isotropes, la connaissance du module complexe de compressibilité k^* est nécessaire afin d'obtenir la contribution sphérique de la contrainte. Avec les données disponibles (courbes du module de cisaillement), il est possible de calculer le module de compressibilité car ce dernier est lié au module de cisaillement et au coefficient de Poisson ν^* de la façon suivante :

$$k^* = \frac{2\mu^*(1 + \nu^*)}{3(1 - 2\nu^*)}. \quad (3.1)$$

L'équation (3.1) fait apparaître le coefficient de Poisson ν^* qui est a priori complexe aussi. Cependant la mesure de ce dernier est délicate à réaliser, ce qui pousse de nombreux auteurs à le considérer constant en fonction de la fréquence. C'est ce que l'on illustre au paragraphe suivant.

Hypothèse sur le coefficient de Poisson

La difficulté en DMA réside aujourd'hui dans la mesure simultanée de deux modules d'élasticité qui permettrait d'obtenir l'évolution du coefficient de Poisson complexe. Beaucoup d'études émettent l'hypothèse que le coefficient de Poisson est purement réel et constant en fonction de la fréquence sans que les autres cas de figure ne soient pris en compte.

Par exemple, Alice Courtois qui, dans sa thèse Alice COURTOIS 2018, étudie les propriétés viscoléastiques d'un composite tissé 3D composé d'une résine époxy et de fibres de carbone à 51%, a émis l'hypothèse dans ses travaux que le coefficient de Poisson de la résine était constant et ne dépend ni de la température ni du degré de cuisson. Cette hypothèse revient à dire que les déphasages sur les modules d'Young et de cisaillement sont identiques, les travaux de PRITZ 1998 et PRITZ 2000 s'opposent à ce type d'hypothèses en étudiant l'évolution théorique d'un coefficient de Poisson complexe mais également les différentes possibilités de mesure. Une évolution possible du coefficient de Poisson complexe d'après PRITZ 1998 est représentée en figure 3.5.

Dans l'article SASEENDRAN et al. 2017, il est expliqué que la difficulté à étudier la dépendance du coefficient de Poisson au temps (ou à la fréquence) provient de la difficulté à mesurer des déformations transverses à faible amplitude tout en restant dans le domaine viscoélastique linéaire et avec des déformations irréversibles négligeables.

Cependant, plusieurs méthodes de mesure ont été proposées et la plus précise aujourd'hui reste la méthode indirecte de mesure de deux modules complexes (E^* et μ^* ou k^* et μ^* par exemple) afin d'en déduire l'évolution du coefficient de Poisson. Dans le cas de QVALE et RAVI-CHANDAR 2004, ce déphasage est mesuré lors d'essais DMA par la mesure du module de compressibilité k^* et du module de cisaillement μ^* de façon simultanée. Il s'agit d'un essai de compression confinée sur un cylindre de PMMA où la mesure à la fois de la déformation suivant l'axe du cylindre et la déformation radiale orthogonale à celui-ci est effectuée. Ce type d'essai est difficile à mettre en place et nécessite, par exemple, de connaître parfaitement le jeu présent entre le

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

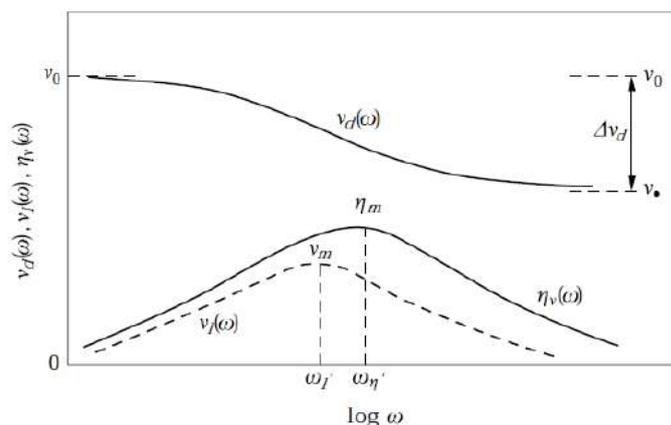


FIGURE 3.5. – Exemple d'évolution théorique d'un coefficient de Poisson complexe issu de PRITZ 1998 en échelle semi-logarithmique. $v_d(\omega)$ représente la partie réelle de ν^* , ν_l la partie imaginaire et η_ν le facteur de perte.

rayon interne du cylindre de confinement et le rayon du cylindre confiné et surtout de négliger les phénomènes de frottement. C'est d'ailleurs pourquoi, encore aujourd'hui, cette méthode pose question car des résultats contradictoires ont été présentés : l'étude SASEENDRAN et al. 2017 montre que le coefficient de Poisson augmente avec la température quand d'autres études telles que CARACCILO et GIOVAGNONI 1996 prouvent l'inverse en utilisant une méthode de mesure différente (DMTA).

Cependant, à l'aide de la technologie plus récente de corrélation d'images, les auteurs de HOSHINO et al. 2018 proposent une mesure simultanée des déformations longitudinales et transversales sur une éprouvette de résine epoxy soumise à de la traction harmonique et remontent alors à l'évolution du coefficient de Poisson en fonction de la fréquence.

Pour notre étude, n'ayant accès qu'à un seul module complexe mesuré, des coefficients de Poisson constants et purement réels en fonction de la fréquence sont considérés pour la résine et pour l'élastomère et sont donnés dans le tableau 3.3. Cette hypothèse est largement utilisée dans la littérature (dans O'BRIEN et al. 2007, EL MOURID et al. 2013 ou A. COURTOIS et al. 2019 par exemple) bien que limitante d'un point de vue modélisation, le lecteur pourra se référer à HILTON 2001 pour une analyse poussée à ce sujet. Néanmoins pour l'élastomère il s'agit d'une hypothèse réaliste puisqu'il s'agit d'un matériau quasi-incompressible, comme on a pu le voir au paragraphe 1.2.3 du chapitre 1 qui concerne les essais de compression confinée.

matériau	coefficient de Poisson
Résine	0.398
Élastomère	0.4998

Tableau 3.3. – Coefficients de Poisson de la résine et de l'élastomère

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

Les valeurs de coefficient de Poisson étant établies, les courbes maitresses du module de compressibilité k^* ont été calculées et sont présentées en figure 3.6 et 3.7.

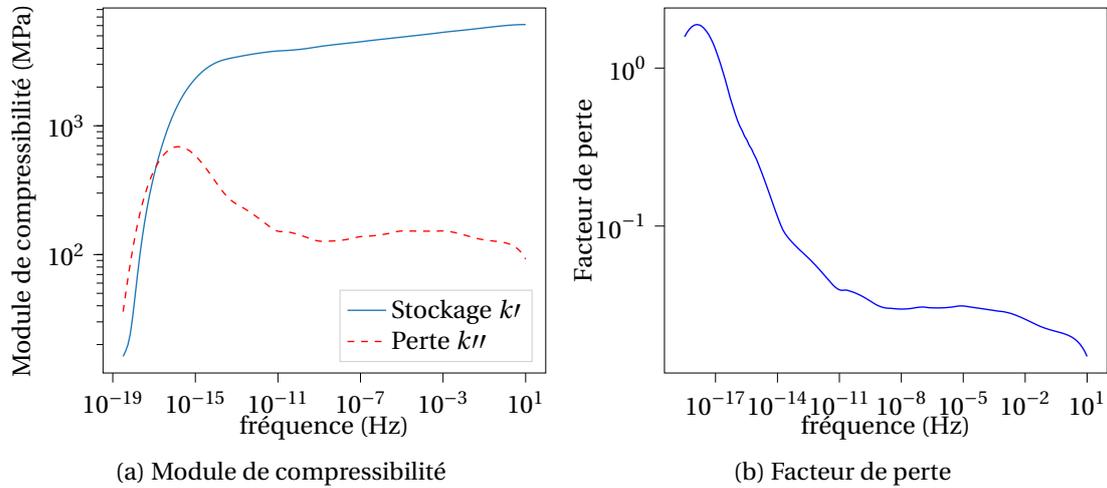


FIGURE 3.6. – Courbe maitresse du module de compressibilité et de son facteur de perte associé pour la résine

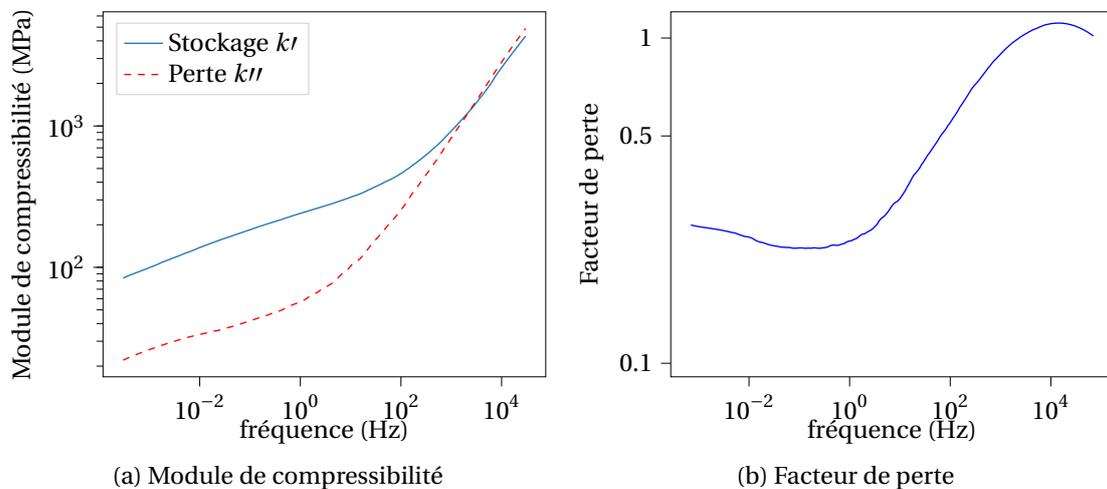


FIGURE 3.7. – Courbe maitresse du module de compressibilité et de son facteur de perte associé pour l'élastomère

Toutes les données matériaux nécessaires à la constitution du problème d'homogénéisation en viscoélasticité linéaire ont été définies. Il est à noter que les données d'entrée pour les simulations sont les données issues des essais en torsion réalisés à Safran Composites et non les essais réalisés au LMA sur éprouvettes de quadruple cisaillement pour plusieurs raisons. Premièrement, l'étude de l'homogénéisation des microstructures hybrides a démarré avant d'obtenir tous les résultats de la campagne

d'essais sur quadruple cisaillement et les données en torsion de Safran Composites étaient plus rapidement disponibles. En effet, la machine de DMA de torsion permet de réaliser des balayages en température rapidement et de façon automatique. Les résultats en torsion sont jugés suffisamment précis pour cette étude, en revanche, dans le cadre de l'identification de la loi de comportement non-linéaire de l'élastomère on a exploité les essais de quadruple cisaillement qui donnent des résultats plus précis (au vu de l'homogénéité de la sollicitation dans l'élastomère).

Concernant les masses volumiques, on considère que la masse volumique du matériau constituant le pli composite est la moyenne sur le volume du VER¹ des masses volumiques des composants :

$$\tilde{\rho} = \langle \rho(x) \rangle = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \rho^{(r)}, \quad (3.2)$$

où N est le nombre de phases présentes dans le VER (2 pour la microstructure résine-carbone sans élastomère et 3 pour le cas avec élastomère), $c^{(r)}$ and $\rho^{(r)}$ sont respectivement la fraction volumique et la masse volumique du constituant r . On explicite maintenant quelques aspects pratiques liés à la réalisation de cette homogénéisation.

3.2.3. Définition du problème d'homogénéisation

3.2.3.1. Séparation d'échelle

Les plis que l'on souhaite homogénéiser sont composés de résine époxy et de fibres de carbone continues (avec ou sans fibres d'élastomère) dont le diamètre est très faible (environ 5 μm) par rapport aux dimensions des plis (150 μm d'épaisseur). Puisque l'échelle des hétérogénéités est très petite comparée à celle des plis, le principe de séparation d'échelle peut être supposé et les différents plis peuvent être vus à l'échelle de la structure comme constitués de matériaux homogènes, dont le comportement est obtenu en utilisant une méthode d'homogénéisation.

Les propriétés dissipatives des différents composites étudiés seront estimées à l'aide de simulations dynamiques. Lorsque les longueurs d'onde associées au champ de déplacement sont beaucoup plus grandes que la taille des hétérogénéités, l'homogénéisation peut se faire dans la limite quasi-statique, voir MILTON 2003, cette hypothèse est vérifiée dans la présente étude où seuls les trois premiers modes de vibration sont étudiés. Cela signifie que les propriétés mécaniques effectives des plis peuvent être obtenues par des calculs statiques effectués à l'échelle microscopique et que les résultats seront utilisés dans les calculs dynamiques à l'échelle macroscopique (échelle de la structure) dans le chapitre suivant.

1. avec $\langle f(x) \rangle$ la moyenne volumique de la variable f dans le volume V : $\langle f(x) \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V f dV$

3.2.3.2. Conditions aux limites

Dans le volume élémentaire représentatif d'une microstructure, les champs locaux σ et ε doivent être solutions des équations décrivant l'équilibre du VER : l'équilibre mécanique dans le cas quasi-statique et en l'absence d'efforts volumiques $\text{div}\sigma = 0$, la loi de comportement $\sigma(t, x) = \mathcal{F}(\varepsilon(t, x))$ et les relations de compatibilité $\varepsilon = \text{grad}^s(u)$. Ce problème ne peut pas être résolu en l'absence de conditions aux limites aux bords du volume car elles assurent l'unicité de la solution et doivent être représentatives de l'état des champs dans la microstructure. Les différentes conditions aux limites existantes sont expliquées ci-dessous.

- ▶ Les conditions de contraintes homogènes aux bords (SUBC)
- ▶ Les conditions de déformations homogènes aux bords (KUBC)
- ▶ Les conditions de périodicité (PBC)

Dans cette étude, on fait le choix d'appliquer des conditions aux limites périodiques aux bords des VER. Il a été montré par de nombreux auteurs que l'application de conditions aux limites périodiques améliore la convergence vers les propriétés du milieu homogène équivalent (HAZANOV et HUET 1994, BORNERT et al. 2001b, KANIT et al. 2003).

3.2.3.3. Problème élémentaire sur cellule périodique

Problème en élasticité

D'un point de vue théorique, un milieu périodique est caractérisé par une cellule de base et des vecteurs de périodicité. Pour un même milieu il existe souvent plusieurs cellules de bases possibles mais qui diffèrent par la complexité de leur description géométrique. Le choix de cette cellule de base n'est pas unique mais la résolution du problème d'homogénéisation doit apporter des résultats identiques, c'est pourquoi une étude de l'indépendance des résultats par rapport à la cellule sera mise en avant.

Supposons la cellule de base V connue, celle-ci permet de définir le milieu périodique par translation le long de trois vecteurs de l'espace. Le champ de contrainte local σ est en équilibre sur l'ensemble du milieu : à la fois l'équilibre volumique dans V et l'équilibre aux interfaces du bord de V (équilibre d'une cellule avec les cellules voisines). σ est alors à divergence nulle dans V et $\sigma \cdot n$ est anti-périodique avec n la normale sortante sur les bords du VER (voir figure 3.8). Autrement dit $\sigma \cdot n$ prend des valeurs opposées aux points de ∂V qui se correspondent par translation suivant v_1 et v_2 . Toujours sur les bords de volume ∂V , la périodicité du champ de déformation $\varepsilon(u)$ est toujours vérifiée, ce qui permet de dire que le champ fluctuant de déplacement u' tel que :

$$u = \langle \varepsilon(u) \rangle \cdot x + u', \quad (3.3)$$

est périodique.

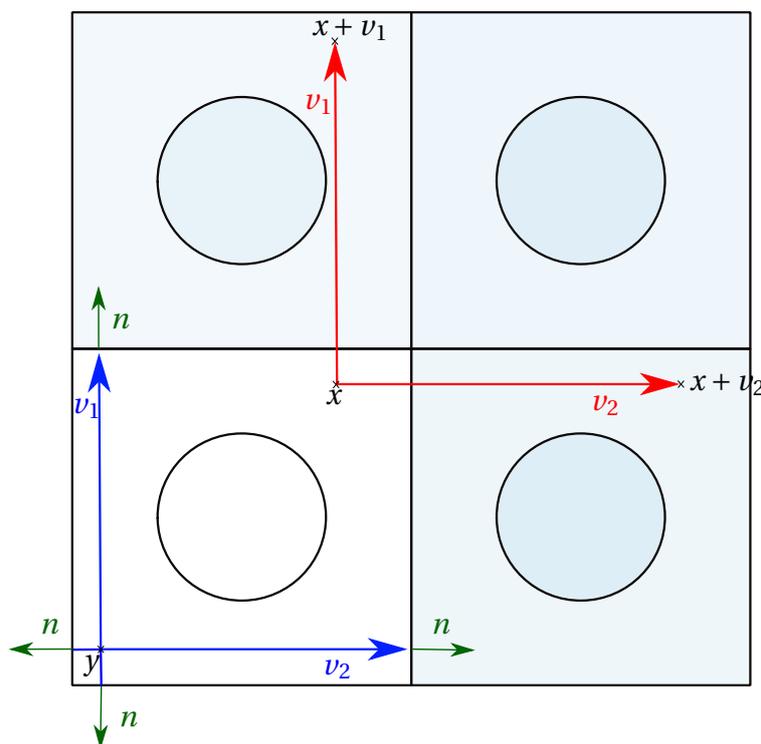


FIGURE 3.8. – Schéma de quatre cellules de base d'un milieu périodique simple

Considérons la cellule de base 2D représentée sur la figure 3.8 avec ses deux vecteurs de périodicité v_1 et v_2 . La périodicité de la déformation locale $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(x + v_1) = \boldsymbol{\sigma}(x) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(u'(x + v_1)) = \boldsymbol{\varepsilon}(u'(x)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(x + v_2) = \boldsymbol{\sigma}(x) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(u'(x + v_2)) = \boldsymbol{\varepsilon}(u'(x)) \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire pour les constituants de la cellule de base (et donc connu en tout point x), il est possible de relier la contrainte locale $\boldsymbol{\sigma}(x)$ à la déformation locale $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbb{L}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}(x). \quad (3.5)$$

Toutes ces informations permettent la détermination des champs locaux de contrainte et de déformation engendrés par une déformation macroscopique $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ou une contrainte macroscopique $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ connue. Pour cela il faut résoudre le problème local suivant dans le

cas d'une déformation macroscopique $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ imposée. Il faut trouver u , $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ tels que²

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(x)) = 0 & \forall x \in V \\ \boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbb{L}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}(x) & \forall x \in V \\ u' = u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot x & \text{périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot n & \text{anti-périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(x) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} . \quad (3.6)$$

Le comportement effectif du composite est défini par $\tilde{\mathbb{L}}$ le tenseur des modules élastiques homogénéisé tel que :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbb{L}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.7)$$

avec $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ la contrainte macroscopique définie par :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma}(x) \rangle. \quad (3.8)$$

Problème en viscoélasticité linéaire

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, on peut exprimer la contrainte comme fonction de l'histoire des déformations par une approche intégrale qui est équivalente à l'écriture d'un modèle rhéologique (de type Maxwell généralisé par exemple) comme décrit en paragraphe 2.1.2 du chapitre précédent dans l'hypothèse des petites perturbations. Supposons que le volume élémentaire V soit soumis à une histoire de chargement $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ entre $t = 0$ et $t = t_1$. Sous conditions aux limites de périodicité, le problème local s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(x,t)) = 0 & \forall (x,t) \in V \times [0; t_1] \\ \boldsymbol{\sigma}(x,t) = \frac{d}{dt}(\mathbb{L} * \boldsymbol{\varepsilon})(x,t) = \mathbb{L}' * \boldsymbol{\varepsilon} & \forall (x,t) \in V \times [0; t_1] \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(x,t) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) & \forall (t) \in [0; t_1] \end{cases} , \quad (3.9)$$

où \mathbb{L} est le tenseur de relaxation viscoélastique local, $\mathbb{L}' = \frac{d}{dt}(\mathbb{L})$ et $*$ est le produit de convolution. En utilisant le principe de correspondance et la transformée de Laplace-Carson (voir GURTIN et STERNBERG 1962), le problème temporel (3.9) se transforme en un problème linéaire dans le domaine de Laplace :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(x)) = 0 & \forall x \in V \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(x,s) = \hat{\mathbb{L}}(x,s) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x,s) & \forall x \in V \\ \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x,s) \rangle = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) \end{cases} , \quad (3.10)$$

où $\hat{h}(s)$ est la transformée de Laplace-Carson de la fonction $h(t)$, comme définie en équation (2.119) du chapitre précédent et s la variable de Laplace. Dans le cas particulier d'un chargement harmonique de pulsation ω , la réponse en régime permanent est

2. avec $\langle f(x) \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V f dV$

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

donnée par le problème suivant en prenant $s = j\omega$ (voir GALLICAN et BRENNER 2019) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^*(x)) = 0 & \forall x \in V \\ \boldsymbol{\sigma}^*(x, j\omega) = \mathbb{L}^*(x, j\omega) : \boldsymbol{\varepsilon}^*(x, j\omega) & \forall x \in V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^*(x, j\omega) \rangle = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(j\omega) \end{cases} \quad (3.11)$$

Ce système (3.11) dépend linéairement du champs de déformation macroscopique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ et est de la même forme que (3.7).

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*(j\omega) = \tilde{\mathbb{L}}^*(j\omega) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(j\omega). \quad (3.12)$$

On détermine $\tilde{\mathbb{L}}^*(j\omega)$ en résolvant le système d'équations (3.11) en appliquant 6 chargements élémentaires. La distribution des fibres étant statistiquement isotrope dans le plan transversal, on suppose que les plis sont isotropes transverses. $\tilde{\mathbb{L}}^*$ peut donc être défini dans la base de Walpole avec 5 modules indépendants (BORNERT et al. 2001a , BURGARELLA et al. 2020) comme écrit en équation (3.13). Il s'agit d'une projection sur une base de tenseurs d'ordre 4 symétriques et orthogonaux à l'exception de \mathbb{F} . Le tenseur \mathbb{F} permet de décrire l'effet Poisson, c'est-à-dire le couplage entre une elongation le long de l'axe de symétrie et une contraction dans le plan transversal.

$$\tilde{\mathbb{L}}^* = \tilde{\alpha}^* \mathbb{E}_L + \tilde{\beta}^* \mathbb{J}_T + \tilde{\gamma}^* (\mathbb{F} + \mathbb{F}^T) + \tilde{\delta}_T^* \mathbb{K}_T + \tilde{\delta}_L^* \mathbb{K}_L. \quad (3.13)$$

L'ensemble des modules $(\tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}^*, \tilde{\gamma}^*, \tilde{\delta}_T^*, \tilde{\delta}_L^*)$ donne directement accès à l'ensemble de tenseur $\tilde{\mathbb{L}}^*$ mais il peut également être utilisé pour exprimer les modules ingénieurs d'un pli (module d'Young, coefficient de Poisson et module de cisaillement selon les directions longitudinale et transversale) :

$$\tilde{E}_T^* = \frac{2\tilde{\alpha}^* \tilde{\beta}^* \tilde{\delta}_T^* - (\tilde{\gamma}^*)^2 \tilde{\delta}_T^*}{\tilde{\alpha}^* (\tilde{\beta}^* + \tilde{\delta}_T^*) - (\tilde{\gamma}^*)^2} \quad (3.14)$$

$$\tilde{E}_L^* = \tilde{\alpha}^* - \frac{(\tilde{\gamma}^*)^2}{\tilde{\beta}^*} \quad (3.15)$$

$$\tilde{\nu}_{TT}^* = \frac{\tilde{\alpha}^* \tilde{\beta}^* - (\tilde{\gamma}^*)^2 - \tilde{\alpha}^* \tilde{\delta}_T^*}{\tilde{\alpha}^* \tilde{\beta}^* - (\tilde{\gamma}^*)^2 + \tilde{\alpha}^* \tilde{\delta}_T^*} \quad (3.16)$$

$$\tilde{\nu}_{TL}^* = \frac{\tilde{\gamma}^*}{\sqrt{2}\tilde{\beta}^*} \quad (3.17)$$

$$\tilde{\mu}_{TL}^* = \frac{\tilde{\delta}_L^*}{2}. \quad (3.18)$$

Dans la pratique, plusieurs méthodes numériques existent pour résoudre le problème d'homogénéisation (3.11). On compare les deux méthodes numériques les plus couramment utilisées en annexe H, à savoir une méthode basée sur les éléments finis et une méthode basée sur les transformées de Fourier rapides. On présente dans la suite de ce chapitre les résultats d'homogénéisation effectuée par éléments finis.

Le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus (*Abaqus Unified FEA - SIMULIA™ par Dassault Systèmes® p. d.*) peut être utilisé pour résoudre ce problème de manière analogue à un problème élastique en utilisant le solveur "Direct-solution steady-state dynamic analysis" dans le domaine fréquentiel. Ce solveur permet de calculer la réponse dynamique linéarisée en régime permanent d'un système à une excitation harmonique sur une plage de fréquence définie. Les propriétés élastiques du tableau 3.2 ont été utilisées pour définir le comportement des fibres de carbone, les parties réelles et imaginaires des modules complexes de cisaillement et de compressibilité μ^* et k^* respectivement données par les courbes maitresses (en figures 3.4, 1.32, 3.6 et 3.7) ont été utilisées comme données d'entrée pour la résine et l'élastomère. Les conditions aux limites périodiques (PBC) ont été imposées à l'aide de Homtools (voir S. LEJEUNES et S. BOURGEOIS 2011) qui permet d'imposer et de calculer directement la déformation ou la contrainte macroscopique (réelle ou complexe).

3.2.4. Détermination d'une cellule représentative du composite

Le but ici est de déterminer numériquement une cellule élémentaire dont le comportement se rapproche au mieux du comportement homogène équivalent d'un composite UD constitué de résine époxy et de 50% de fibres longues de carbone. Deux études de convergence sont réalisées sur un VER 2D en déformations planes généralisées dans le plan normal à la direction des fibres afin de diminuer les coûts de calculs. Ces études sont effectuées en ne considérant que les comportements élastiques des constituants. Les propriétés élastiques des fibres de carbone sont données en tableau 3.2 et les données considérées pour la résine sont données ci dessous :

$$\begin{cases} E^M = 7.5 \text{ MPa} \\ \nu^M = 0.398 \end{cases} \quad (3.19)$$

Le module d'Young E^M considéré pour la résine est calculé en utilisant la valeur du module de cisaillement à très basse fréquence (voir courbe maitresse 3.4) de sorte que le contraste le plus élevé existe entre les propriétés de la résine et du carbone. De nombreux auteurs ont montré que les taux de convergence les plus faibles se produisent pour les contrastes (de rigidité) les plus élevés (KANIT et al. 2003, BORNERT et al. 2001b). On suppose que les résultats de convergence obtenus avec cet ensemble de paramètres seront donc valables pour tout contraste plus faible.

L'algorithme de génération de microstructures utilisé est un algorithme de type RSA (*Random Sequential Addition*) TORQUATO et HASLACH 2002 . C'est un processus qui permet de placer de manière aléatoire et séquentielle un nombre d'objets sans qu'il y ait inter-pénétrabilité de ces objets dans un volume. Plus le nombre d'objets est grand, plus il devient difficile de trouver de l'espace libre pour placer un objet et ceci jusqu'à atteindre la saturation du volume. La saturation est alors atteinte d'autant plus rapidement que le nombre d'objets générés est grand.

3.2.4.1. Détermination d'une densité de maillage

On étudie l'évolution des propriétés élastiques en fonction de la taille de maille afin de déterminer une taille d'élément pour laquelle nous considérons l'écart assez faible par rapport à un maillage de référence. On considère pour cela le VER représenté en figure 3.2(a). Pour ce faire, des calculs ont été effectués sur un grand nombre de tirages de VER 2D, en pilotage en contrainte macroscopique, et qui correspondent aux tractions suivant les trois axes orthogonaux (notées $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ et $\bar{\sigma}_{33}$) et à un cisaillement plan ($\bar{\sigma}_{12}$).

Une estimation de l'erreur est introduite pour comparer les résultats à un maillage de référence considéré comme suffisamment fin pour obtenir des résultats proches du comportement réel.

$$E_k = \frac{|\bar{\varepsilon}_{ij,N} - \bar{\varepsilon}_{ij,k}|}{\bar{\varepsilon}_{ij,N}} \quad (3.20)$$

Où $\bar{\varepsilon}_{ij,N}$ représente la valeur de déformation macroscopique de la maille la plus fine qui est suffisamment proche de la solution exacte, et $ij \in \{11, 22, 33, 12\}$. $\bar{\varepsilon}_{ij,k}$ correspond à la déformation macroscopique pour le maillage k dont la taille est supérieure à celle du maillage d'indice N .

Les tailles de maillage étudiées sont explicitées dans le tableau 3.4, celles-ci sont normalisées par la longueur d'un côté du VER.

k	taille l_k normalisée
1	$50e-3$
2	$30e-3$
3	$20e-3$
4	$15e-3$
5	$10e-3$
6 = N	$5e-3$

Tableau 3.4. – Tailles de maille étudiées

Les graphiques de la figure 3.9 représentent la déformation dans la même direction que le chargement selon les différents maillages (notés de 1 à $N = 6$, le maillage 6 est la référence ce qui explique l'erreur de 0 pour ce maillage).

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

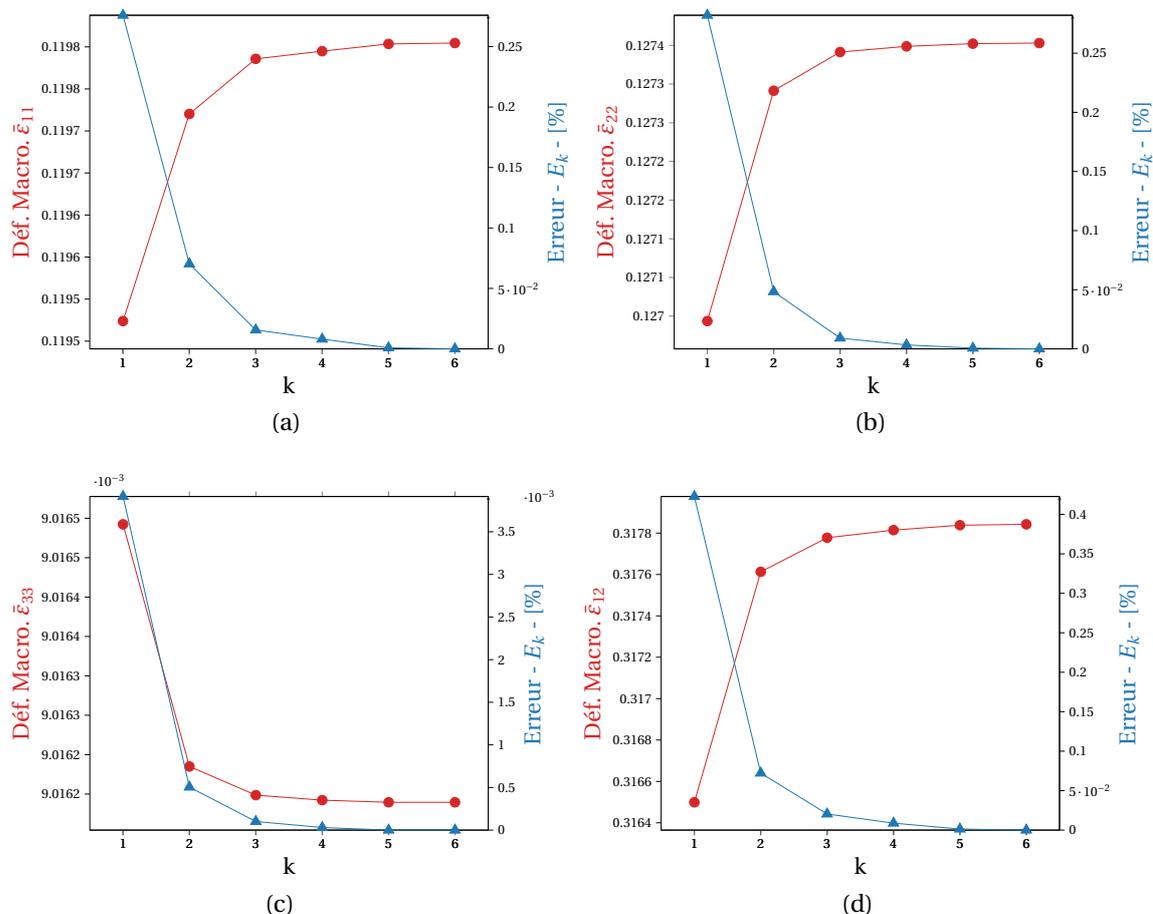


FIGURE 3.9. – Déformation macroscopique calculée et son erreur associée pour les différents maillages pour les 4 chargements étudiés : $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{33}$ et $\bar{\sigma}_{12}$.

3.2.4.2. Détermination du nombre de fibres

La réponse à une sollicitation mécanique d'un VER doit être, par définition, indépendante du tirage de microstructure et donc a fortiori du nombre de fibres contenues dans ce tirage (cf. GUSEV 1997, KANIT et al. 2003).

C'est pourquoi une étude statistique a été réalisée pour déterminer la taille optimale des RVE selon la procédure suivante. Un grand nombre de populations de RVEs avec de plus en plus de fibres mais la même fraction volumique a été construit. Chaque population contient dix tirages de RVEs. Sur chaque RVE, 4 cas de chargement élémentaires, similaires à ceux expliqués dans le paragraphe 3.2.4.1, ont été appliqués. Le tenseur d'élasticité 2D homogénéisé $\tilde{\mathbb{L}}$ et sa projection orthogonale $\tilde{\mathbb{L}}^P$ ont ensuite été calculés numériquement en utilisant l'équation 3.21.

$$\tilde{\mathbb{L}}^P = (\mathbb{E}_L : \tilde{\mathbb{L}}) \mathbb{E}_L + (\mathbb{J}_T : \tilde{\mathbb{L}}) \mathbb{J}_T + (\mathbb{F}^T : \tilde{\mathbb{L}}) (\mathbb{F} + \mathbb{F}^T) + \frac{1}{2} (\mathbb{K}_T : \tilde{\mathbb{L}}) \mathbb{K}_T. \quad (3.21)$$

Dans le but de quantifier l'écart à l'isotropie transverse de la microstructure, l'erreur

relative entre le tenseur d'élasticité obtenu numériquement et ce même tenseur projeté sur cette base de tenseurs symétriques est calculée de la façon suivante :

$$E = \sqrt{\frac{(\tilde{\mathbb{L}} - \tilde{\mathbb{L}}^p) : (\tilde{\mathbb{L}} - \tilde{\mathbb{L}}^p)}{\tilde{\mathbb{L}} : \tilde{\mathbb{L}}}} \quad (3.22)$$

L'évolution de cette erreur en fonction du nombre de fibres présentes dans le VER est tracée en figure 3.10. Pour chaque nombre de fibres, 10 tirages de VER différents ont été générés afin d'obtenir des résultats statistiquement représentatifs. Ce graphique montre que l'erreur est globalement faible quel que soit le nombre de fibres. Cependant, dans la suite de l'étude, il a été choisi de travailler sur des RVE contenant 55 fibres.

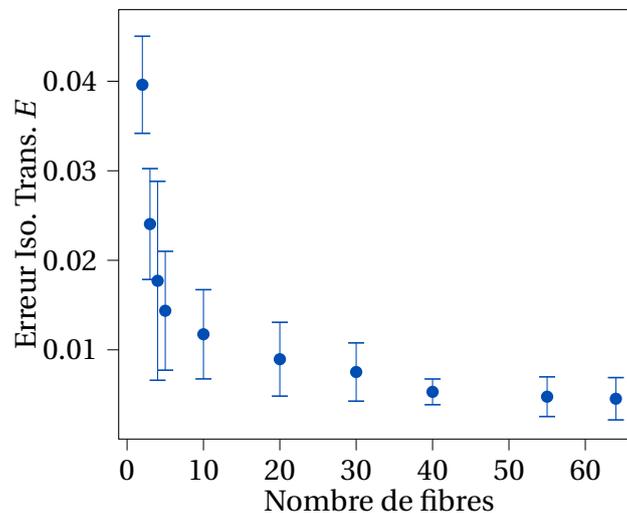


FIGURE 3.10. – Erreur à l'isotropie transverse en fonction du nombre de fibres - moyenne et écart-type basés sur 10 tirages de microstructures pour chaque nombre de fibres

3.2.5. Résultats de l'homogénéisation des microstructures hybrides

Dans ce paragraphe sont présentés les résultats de l'homogénéisation, dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, de la microstructure de référence (sans élastomère) ainsi que des deux microstructures hybrides étudiées de cotissé et d'enrobé. La procédure d'obtention de ces résultats est expliquée en page 126, on a effectué des chargement élémentaires suivants différentes directions de l'espace sur les microstructures 3D afin de reconstruire le tenseur des modules effectifs le tout directement en fréquentiel à l'aide du solver Abaqus "Steady-State Dynamics - Direct". Dans ce cadre, l'admissibilité thermodynamique des résultats a été vérifiée : il a été constaté qu'une condition suffisante à la positivité de l'énergie dissipée et de l'énergie élastique moyenne (c'est-à-dire stockée) pour un cycle était la définie positivité du tenseur de relaxation effectif.

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

Cette condition implique directement la positivité des parties réelles et imaginaires des différents modules complexes. La figure 3.11 montre la comparaison des modules complexes $\tilde{\alpha}^*$ entre les trois microstructures. Le troisième graphe est le facteur de perte $\tan \phi$ qui est défini comme suit :

$$\tan(\phi_{\tilde{\alpha}^*}) = \frac{\tilde{\alpha}'}{\tilde{\alpha}''}. \quad (3.23)$$

La figure 3.12 présente les facteurs de perte obtenus pour les autres modules complexes effectifs ($\tilde{\beta}^*$, $\tilde{\gamma}^*$, $\tilde{\delta}_T^*$ et $\tilde{\delta}_L^*$) et les résultats complets des autres modules sont présentés en annexe I.

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

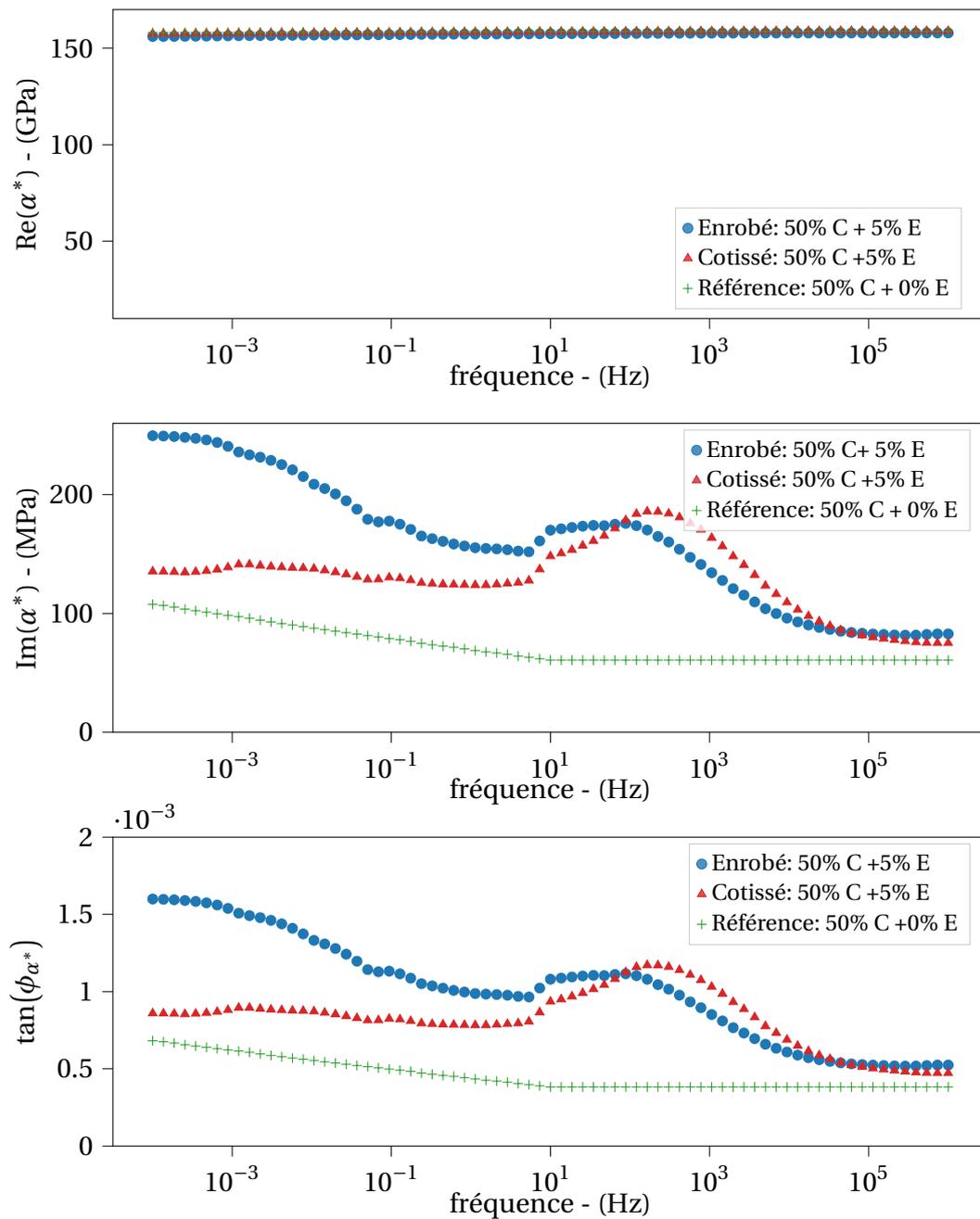


FIGURE 3.11. – Module complexe $\tilde{\alpha}^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $Re(\alpha^*)$, module de perte $Im(\alpha^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\alpha^*})$.

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.2. Modélisation des composites hybrides étudiés

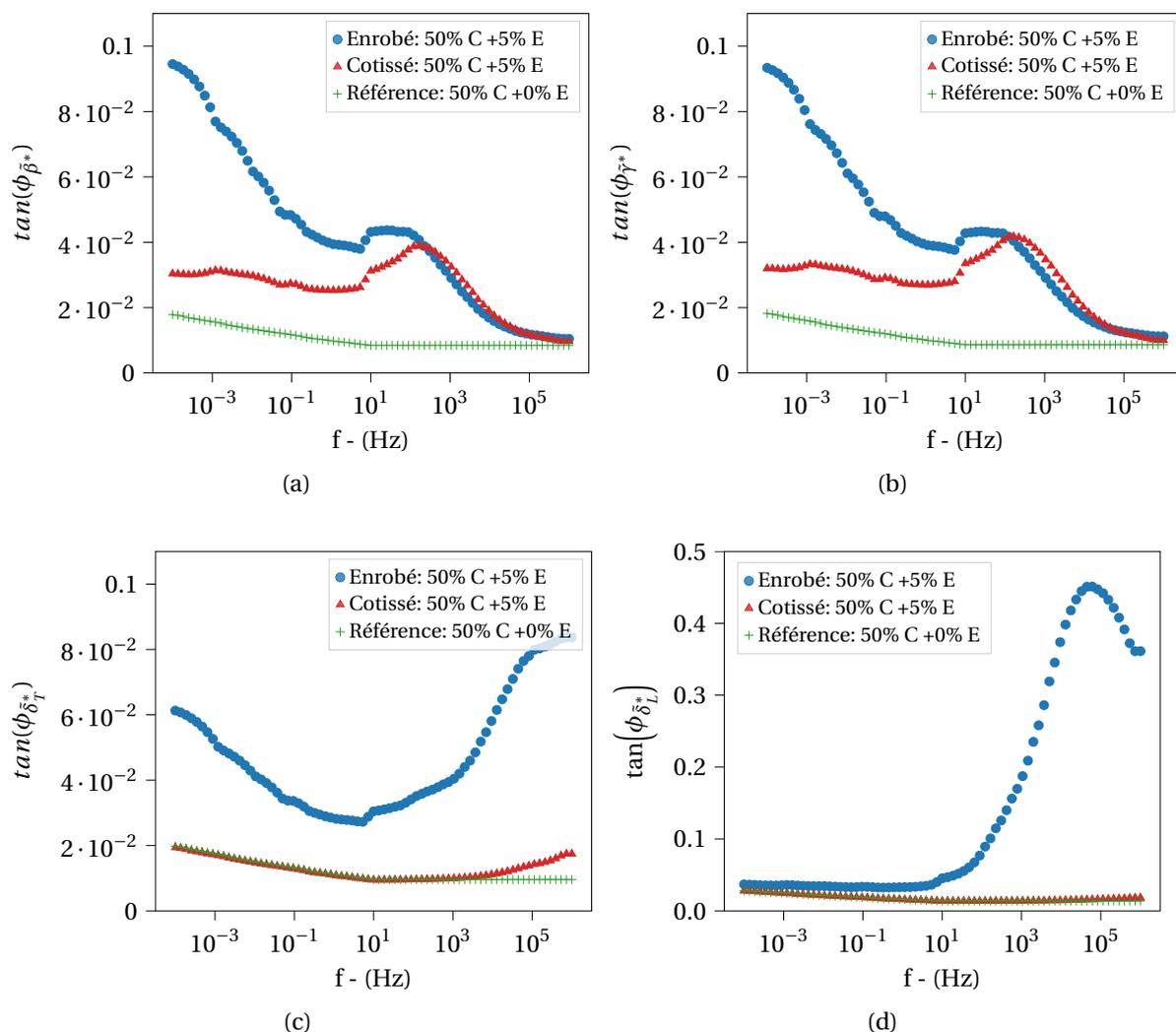


FIGURE 3.12. – Facteurs de perte associés aux modules complexes $\tilde{\beta}^*$, $\tilde{\gamma}^*$, $\tilde{\delta}_T^*$ et $\tilde{\delta}_L^*$.

Premièrement on note que, le VER de référence, ne contenant aucun élastomère, présente les plus petits facteurs de perte des trois VER. De plus, les facteurs de perte obtenus pour ce VER suivent la même tendance que le facteur de perte de la résine époxy, à savoir que le facteur de perte diminue avec la fréquence (voir figure 3.4). A l'inverse, le VER enrobé présente les valeurs les plus élevées pour les facteurs de perte de tous les modules et pour presque toutes les valeurs de fréquence. Cela peut s'expliquer par le fait que, contrairement à la technologie de cotissé, pour la technologie enrobée, les efforts sont transférés de la résine époxy aux fibres de carbone par l'intermédiaire de l'élastomère qui subit plus de déformations et qui, par conséquent, dissipe plus d'énergie par la viscosité.

Le facteur de perte associé aux modules de cisaillement $\tilde{\delta}_T^*$ et $\tilde{\delta}_L^*$ est plus important que ceux associés aux autres modules, surtout à haute fréquence, car le cisaillement est le mode de chargement pour lequel l'élastomère dissipe le plus d'énergie, en raison

de son comportement incompressible. A basse fréquence, en dessous d'environ 10 Hz, les facteurs de perte associés aux modules du VER enrobé, à l'exception de $\tilde{\delta}_L^*$, augmentent lorsque la fréquence diminue, cette évolution est moins évidente car elle est contraire à celle observée pour l'élastomère pris seul (voir figure 1.32). Mais ceci peut s'expliquer par la forte diminution des modules de l'élastomère aux basses fréquences, par rapport à ceux de la résine, qui implique des plus hauts niveaux de déformation dans l'élastomère et donc plus d'énergie dissipée.

Et enfin, le facteur de perte associé aux modules $\tilde{\alpha}^*$, caractérisant le comportement effectif dans la direction des fibres, est très faible en raison du contraste de rigidité très élevé entre les fibres et la résine époxy et l'élastomère qui réduit la déformation dans ces matériaux et par conséquent l'énergie dissipée.

3.3. Conclusion

Dans ce chapitre, une méthodologie pour homogénéiser des microstructures hybrides carbone-élastomère est mise en place dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Les deux microstructures hybrides étudiées sont l'*enrobé* et le *cotissé*.

La première étape de l'homogénéisation a été de définir les comportements mécaniques adéquats aux différents matériaux des microstructures en passant par la constructions des courbes maitresses des deux matériaux viscoélastiques des microstructures (résine et élastomère). Cette construction a nécessité de faire une hypothèse forte quant à l'évolution du coefficient de Poisson de ces matériaux.

La seconde étape a été de définir les microstructures d'un point de vue morphologique en passant par la définition de la forme et de la taille des fibres et en considérant le cas d'une microstructure périodique avec les conditions aux limites que cela implique sur les VER.

La procédure d'homogénéisation a été effectuée par éléments finis en utilisant un solveur spécifique aux calculs des réponses stationnaires à un chargement harmonique afin d'obtenir directement un tenseur des modules effectifs en complexe en fonction de la fréquence. Mais avant cela, deux études de convergence ont été nécessaire dans le but de définir une taille de VER optimale.

Les microstructures étudiées possédant une symétrie isotrope transverse, les résultats de l'homogénéisation sont présentés par le biais des 5 modules complexe indépendants définissant le comportement mécaniques de ces microstructures pour cette symétrie. Pour chaque module, on présente sa partie réelle, sa partie imaginaire et son facteur de perte associé.

L'étude de ces modules a permis de conclure que la technologie qui permettant d'obtenir les niveaux de facteurs de perte les plus élevés est la technologie de l'enrobé, ce qui induit donc des niveaux d'énergie dissipée plus élevés.

La démarche mise en place est très générale et pourrait être appliquée dans des cas plus proche de certaines applications aéronautiques notamment dans le cas du tissé 3D comme le fait par exemple CONEJOS 2021.

Les résultats de cette homogénéisation sont utilisés dans le chapitre suivant afin

3. Modélisation et homogénéisation de composites hybrides – 3.3. Conclusion

de simuler le comportement dissipatif de structures composites à l'échelle macroscopique.

4. Amortissement des structures composites hybrides

Sommaire

4.1	Introduction	137
4.1.1	Éléments de bibliographie sur les technologies d'amortissement	137
4.1.1.1	Technique active et technique passive	137
4.1.1.2	Amortissement des composites	137
4.1.1.3	Le patch : une technique passive largement employée	138
4.1.1.4	Mesurer l'amortissement	140
4.1.2	Objectifs	143
4.2	Mise en place des calculs sur structure	143
4.2.1	Procédure	143
4.2.2	Validation expérimentale du modèle numérique	144
4.2.2.1	Description des essais	144
4.2.2.2	Résultats	145
4.3	Comparaison des solutions technologiques	148
4.3.1	Comparaison dans le cadre de la viscoélasticité linéaire	148
4.3.2	Comparaison dans le cadre de la viscoélasticité non-linéaire	151
4.4	Conclusion	153

4.1. Introduction

4.1.1. Éléments de bibliographie sur les technologies d'amortissement

4.1.1.1. Technique active et technique passive

Les solutions d'amortissement peuvent être divisées en deux catégories : le contrôle dit *actif* et le contrôle *passif*. Le contrôle passif repose sur l'exploitation de moyens passifs pour réduire les bruits et/ou vibrations, c'est-à-dire en utilisant la nature même d'un matériau ou encore par un travail sur les géométries afin de redistribuer la dissipation de l'énergie dans un système. Le contrôle actif est, à l'opposé, basé sur l'introduction d'une énergie supplémentaire pour contrôler la dissipation d'un matériau ou interférer avec la source de bruit. Quelques exemples de ces technologies sont présentés en tableau 4.1.

Application	Type de contrôle	Origine de la technologie
Casque anti-bruit	Actif	Système de haut-parleurs
Parebrise, pneus, suspension moteur	Passif	Matériau viscoélastique
Double vitrage	Passif	Dissipation visco-thermique entre les 2 vitres + cisaillement de l'air
Silencieux pour pot d'échappement	Passif	Système de résonateurs

Tableau 4.1. – Exemples industriels de contrôle actif et passif

Concernant l'atténuation des vibrations mécaniques, les technologies de contrôle passif sont largement employées dans l'industrie car relativement simples à mettre en place et peu coûteuses. La technologie de contrôle actif la plus présente aujourd'hui est celle basée sur l'ajout d'un matériau piézoélectrique (par exemple SHEN 1994, THIERRY 2016 ou plus récemment LOSSOUARN et al. 2021).

L'introduction d'élastomère dans une structure constitue donc une technologie passive. Dans le chapitre précédent on a présenté une introduction d'élastomère à l'échelle de la microstructure mais il est également possible de l'introduire à l'échelle macroscopique sous d'autres formes.

4.1.1.2. Amortissement des composites

Les matériaux composites à matrice polymère possèdent un amortissement intrinsèque lié aux propriétés viscoélastiques de la matrice mais également au phénomène de friction aux interfaces fibre-matrice. C'est pourquoi de nombreuses études ont été

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.1. Introduction

réalisées afin de caractériser l'amortissement des composites (sans ajout d'une technologie d'amortissement supplémentaire). Dans TREVISI et al. 2015 une revue détaillée est proposée sur la caractérisation de l'amortissement des matériaux composites de plusieurs types : à fibres courtes, à fibres continues, nanocomposites etc...

Dans le cas particulier des composites à fibres continues, des études se sont concentrées sur l'influence de l'orientation des plis sur les propriétés dissipatives, comme le travail complet dans BERTHELOT, ASSARAR et al. 2008 où les auteurs prédisent et mesurent l'amortissement de plis unidirectionnels (de fibres de verre) en fonction de l'orientation des fibres. La prédiction est basée sur le calcul de l'énergie à partir de la méthode de Ritz (BERTHELOT 2006a) étendue aux éléments finis. Les auteurs déterminent alors l'orientation qui maximise le facteur d'amortissement et qui est autour de 60° pour un UD et 45° pour un sergé.

Pour les stratifiés, l'influence de la séquence d'empilement a également été largement étudiée (YIM et GILLESPIE JR 2000, S. J. HWANG et GIBSON 1991, S. J. HWANG et GIBSON 1992) et les auteurs s'accordent sur le fait que pour maximiser l'amortissement, le pli le plus enclin au cisaillement doit être placé là où la contrainte de cisaillement est la plus élevée dans l'empilement. Ce qui est en accord avec les résultats de BERTHELOT, ASSARAR et al. 2008. Ce choix a néanmoins l'inconvénient d'augmenter les contraintes interlaminaires à cause de la différence de rigidité entre les plis (MAHERI 2011). Plus récemment, HE et al. 2018 utilise les éléments finis pour évaluer le facteur d'amortissement modal en fonction de l'angle θ pour des stratifiés du type $[\theta, -\theta]_{4S}$ et montre que ce dernier a une évolution très différente pour des modes de flexion et de torsion.

Dans le cas des composites tissés 3D interlock, des études très récentes comme CONEJOS et al. 2021 mettent en place une méthode de caractérisation de l'amortissement d'échantillons de ce matériau en fonction de la température et comparent les résultats obtenus à des résultats issus d'une procédure d'homogénéisation couplée à des éléments finis.

4.1.1.3. Le patch : une technique passive largement employée

Le patch en élastomère est un traitement externe qui consiste à accoler (par un certain procédé d'adhésion ou de fixation), une portion d'élastomère d'une certaine surface et épaisseur à définir, sur la structure à amortir. Afin de maximiser l'efficacité de ce traitement, il est souvent placé à l'intérieur même des structures lorsque cela est possible. Cela permet de contraindre le patch de part et d'autre et de maximiser son cisaillement transverse lorsque la structure est sollicitée en flexion. Ce traitement est souvent nommé *CLD* pour *Constrained Layer Damping* (NASHIF et al. 1985, JONES 1996).

De nombreuses études ont été réalisées dans le cadre des composites stratifiés puisque leur géométrie rend l'insertion d'un patch a priori relativement simple. LIAO et al. 1994 proposent un modèle pour estimer l'amortissement des stratifiés avec une couche d'élastomère en leur centre. Pour ce faire, les auteurs combinent deux modèles pré-existants pour des cas de figure différents : le modèle *RKU* (ROSS et al.

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.1. Introduction

1959, KERWIN 1959), utilisé pour des cas de sandwich 3 couches à cœur viscoélastique et âmes isotropes très rigides par rapport au cœur, qui permet de calculer le facteur d'amortissement du sandwich en fonction du facteur de perte en cisaillement du matériau viscoélastique, de la rigidité des âmes ainsi que de la géométrie; et un modèle calculant l'amortissement pour des stratifiés symétriques NI et ADAMS 1984 qui considère que les contributions à l'énergie dissipée par une poutre avec patch en flexion proviennent seulement des contraintes dans le plan du patch. Les auteurs décomposent le stratifié avec patch en deux sous-problèmes pour pouvoir combiner les deux méthodes. Les résultats obtenus à partir de ce nouveau modèle sont comparés à des résultats expérimentaux pour différents stratifiés $[(\pm\theta)_3, Patch]_S$ et les auteurs mettent aussi en évidence l'impact de la différence de modules de cisaillement entre pli du stratifié et couche élastomère dans l'amortissement.

YIM, S. Y. CHO et al. 2003 reprennent le modèle de NI et ADAMS 1984 en y ajoutant la contribution de la contrainte transverse de cisaillement pour prédire l'amortissement de poutres stratifiées unidirectionnelles à 0° avec un patch en leur centre. Ils étudient alors l'évolution du facteur d'amortissement en fonction de la longueur des poutres stratifiées et en fonction de leur élancement et améliorent les prédictions de NI et ADAMS 1984 pour des dimensions de stratifiés où les effets transverses ne sont pas négligeables (très épais et longueur faible). Dans leur étude théorique, YIM, S. Y. CHO et al. 2003 ne précisent pas de quel type de cœur viscoélastique il s'agit. En revanche, KISHI et al. 2004 étudient le cas particulier de couche en élastomère thermoplastique (polyuréthane et polyamide) dans des stratifiés UD d'un point de vue expérimental et déterminent l'influence de la nature du matériau du patch sur l'amortissement des stratifiés. En plus de cela, les auteurs prouvent que des stratifiés de base très rigides en flexion (comme un $[0^\circ]_{12}$) peut se retrouver après ajout d'un patch avec un facteur d'amortissement plus élevé qu'un stratifié moins rigide (comme un $[\pm 45^\circ]_{3S}$) avec le même patch, et cela provient encore une fois de la rigidité intralaminare (et donc la déformation locale atteinte dans le patch) engendrée par la séquence d'empilement.

Par la suite, on a les travaux de BERTHELOT et SEFRANI 2004, BERTHELOT 2006a; BERTHELOT 2006b, BERTHELOT, ASSARAR et al. 2008 dans lesquels la méthode de Ritz pour calculer l'amortissement est employée et appliquée à des structures différentes. BERTHELOT 2006b propose des modèles analytiques pour calculer l'amortissement de stratifiés contenant un ou deux patches. Cette méthode a l'avantage de pouvoir être appliquée à tous les types de stratifiés, et pour les structures plus complexes elle peut être implémentée dans un code de calcul par éléments finis.

MARTONE, ANTONUCCI et al. 2016 proposent un modèle semi-analytique basé sur la théorie classique des stratifiés et qui prend comme données d'entrée les propriétés viscoélastiques des constituants du stratifié (patch et pli) mesurées par DMA.

Dans tous les articles cités précédemment, aucun ne prend en compte le comportement potentiellement non-linéaire du patch pour les cas où ce dernier serait en élastomère. Ce problème est généralement traité à part dans des études dédiées spécifiquement à l'élastomère, comme dans MARTINEZ-AGIRRE et al. 2014 ou ROULEAU et DEÛ 2019 où ils étudient l'impact d'une précharge sur le comportement dissipatif d'un patch d'élastomère.

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.1. Introduction

Néanmoins certains auteurs ont étudié des propriétés liées aux procédés de fabrication de telles structures car les élastomères ont un comportement fortement dépendant de la température. En effet, en pratique, l'incorporation d'un patch au sein d'un stratifié est un procédé difficile à maîtriser, par exemple très récemment ZHENG et al. 2021 étudient les propriétés d'interface entre un patch élastomère et les plis d'un stratifié autour après un procédé de co-cuisson.

Sachant qu'il peut être plus simple d'un point de vue procédé de positionner les patches en surface des structures (et non dedans), des études ont porté sur la détermination de la position optimale du patch pour maximiser l'amortissement, comme dans RAO 2003 ou ZOGHAIB 2006.

Les études les plus récentes sur l'amortissement des composites reposent principalement sur des méthodes numériques pour prédire l'amortissement telles que les éléments finis ou la FFT qui servent de base à un outil de dimensionnement (TSIMOURI et al. 2021), ou il s'agit d'études couplées à l'étude d'autres propriétés telles que les propriétés à l'impact par exemple (WANG et al. 2021).

4.1.1.4. Mesurer l'amortissement

Le facteur d'amortissement, *damping factor* ou *loss factor* en anglais est l'outil essentiel utilisé par quasiment tous les chercheurs cités précédemment pour quantifier l'amortissement d'une structure. Ce facteur, que l'on notera ξ , peut être défini comme le rapport entre l'énergie dissipée d'une structure par l'énergie totale (UNGAR et KERWIN 1962) dans le cas d'un régime vibratoire établi :

$$2\xi = \frac{D}{2\pi W}, \quad (4.1)$$

où D est l'énergie dissipée par cycle et W est l'énergie totale stockée par le système. Dans la pratique, il existe plusieurs méthodes pour mesurer ce facteur.

Oscillations forcées

En vibrations forcées, la méthode la plus classique est la méthode spectrale de largeur de bande à -3 dB (CARFAGNI et al. 1998) pour laquelle il est nécessaire de calculer la fonction de transfert caractérisant la mesure de déplacement de l'échantillon soumis à des vibrations. Cette méthode est basée sur la mesure de l'écart de fréquences $\Delta f = f_2 - f_1$ autour d'un pic de résonance à une fréquence f_r (voir figure 4.1) où f_1 et f_2 sont les fréquences pour lesquelles l'amplitude est réduite d'un facteur $\sqrt{2}$.

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.1. Introduction

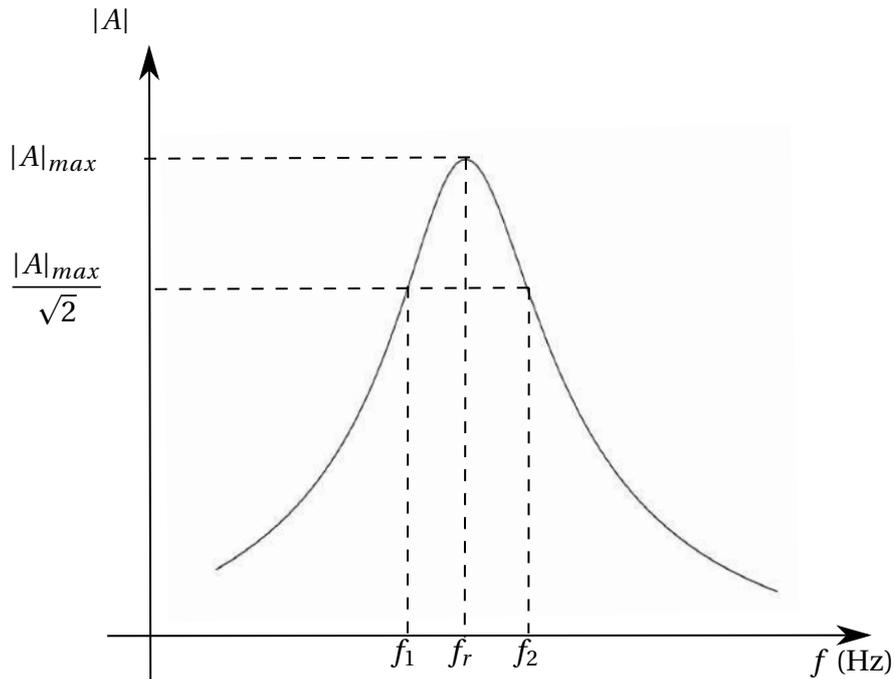


FIGURE 4.1. – Calcul du facteur d'amortissement au niveau d'un pic de résonance

On a alors :

$$\xi = \frac{\Delta f}{2f_r} \quad (4.2)$$

L'équation 4.2 n'est valide que pour les cas où $\xi \ll 1$ (BUCHHOLDT et MOOSSAVI NEJAD 2012).

Une autre méthode pour les oscillations forcées est d'exploiter le modèle théorique d'un système à un degré de liberté soumis à des oscillations représenté par un système masse-ressort-amortisseur. Pour ce type de système, en supposant soumis à un effort sinusoïdal $P(t)$ tel que :

$$P(t) = P_0 \sin(\omega t), \quad (4.3)$$

l'équation de mouvement s'écrit de la façon suivante :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = q_0 \sin(\omega t) \quad (4.4)$$

avec

$$2\xi\omega_n = C/M \quad (4.5)$$

$$\omega_n^2 = K/M \quad (4.6)$$

$$q_0 = P_0/M \quad (4.7)$$

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.1. Introduction

La solution à cette équation en régime permanent s'écrit comme suit :

$$x = \frac{x_{st}}{\sqrt{[(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2]}} \sin(\omega t - \alpha) \quad (4.8)$$

Où

$$x_{st} = P_0/K \quad (4.9)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (4.10)$$

Il est donc possible de déterminer ξ à l'aide d'un programme numérique qui permette d'identifier les paramètres de l'équation 4.8 avec une minimisation par les moindres carrés par exemple. Dans le cas de balayages fréquentiels comme dans le cas de la méthode à -3dB, il est également possible d'utiliser une procédure de *curve-fitting* sur l'amplitude du signal fréquentiel défini par :

$$X_0 = \frac{x_{st}}{\sqrt{[(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2]}} \quad (4.11)$$

Oscillations libres

En vibrations libres, la méthode du décrétement logarithmique est souvent utilisée.

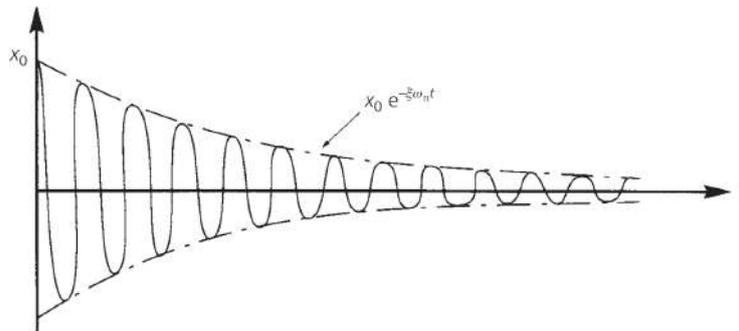


FIGURE 4.2. – Réponse d'un système à un degré de liberté en oscillations libres

La forme de fonction représentant ce type de réponse s'écrit de la façon suivante :

$$x(t) = \exp^{-\xi\omega_n t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (4.12)$$

Où ω_n est la pulsation propre du système non-amorti. Le facteur de perte peut alors s'exprimer en fonction du rapport de deux amplitudes maximales consécutives (ou bien espacées de n pseudo-périodes T) de la façon suivante :

$$\xi\omega_n T = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_{i+n}}{x_i} \right) \quad (4.13)$$

Où T pour un système amorti s'exprime comme suit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.14)$$

Pour des valeurs de $\xi \ll 1$, on obtient la relation simplifiée qui donne le facteur d'amortissement ξ :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_{i+n}}{x_i} \right) \quad (4.15)$$

Il est également possible d'utiliser un programme numérique qui permette d'identifier les paramètres de la courbe 4.12 avec une minimisation par les moindres carrés par exemple.

Ces quelques méthodes (mais aussi d'autres) sont détaillées dans l'ouvrage BUCHHOLDT et MOOSSAVI NEJAD 2012.

4.1.2. Objectifs

Dans le chapitre 3, on a présenté l'homogénéisation de microstructures hybrides contenant de l'élastomère dans le cadre de la viscoélasticité linéaire et on a ensuite comparé les propriétés dissipatives issues de l'homogénéisation de ces différents composites. Afin d'approfondir la comparaison de différentes solutions technologiques d'amortissement, on propose dans ce chapitre la modélisation d'un composite stratifié composé de plis UD résine-carbone et d'un patch élastomère. Deux configurations de patch différentes sont étudiées : une classique dans laquelle le patch est positionné au centre du stratifié symétrique et une autre se rapprochant davantage du positionnement visé dans l'application industrielle.

Ainsi, une comparaison entre les solutions d'insertion de l'élastomère à l'échelle *micro* et la solution d'insertion macroscopique classique du patch est effectuée.

Enfin, on souhaite comparer l'utilisation d'une loi viscoélastique linéaire à l'utilisation de la loi non-linéaire présentée en chapitre 2, pour définir le comportement des parties en élastomère, dans le but de juger de la pertinence d'une telle loi dans le cas particulier de notre étude vibratoire.

4.2. Mise en place des calculs sur structure

4.2.1. Procédure

Pour évaluer les propriétés dissipatives d'une structure, on réalise, comme expliqué précédemment, des essais vibratoires en oscillations libres ou forcées. Les modes de vibration les plus critiques pour l'application industrielle sont les deux premiers modes de flexion et le premier mode de torsion.

On simule alors des essais de types poutre encastree-libre avec effort ponctuel à une extrémité (souvent décrits comme des essais de type *Oberst*, ou *Cantilever beam tests* en anglais NASHIF et al. 1985). On réalise ces simulations en utilisant la même

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.2. Mise en place des calculs sur structure

procédure que celle utilisée pour l'homogénéisation des composites hybrides, qui est la procédure "*Steady-State Dynamics - Direct*" disponible sur Abaqus et qui permet d'obtenir la réponse en régime permanent d'un système soumis à un chargement harmonique en fonction de la fréquence. Quelques auteurs, comme EL HACHEMI et al. 2016 ou LIEBIG et al. 2019, mettent en place la même méthode pour simuler les propriétés dynamiques de stratifiés.

Le but étant de comparer les propriétés d'amortissement des différentes technologies présentées jusqu'à présent, on définit les stratifiés de l'étude :

- ▶ Un stratifié où tous les plis possèdent le comportement homogénéisé de la microstructure de référence sans élastomère.
- ▶ Un stratifié où tous les plis possèdent le comportement homogénéisé de la microstructure de cotissé.
- ▶ Un stratifié où tous les plis possèdent le comportement homogénéisé de la microstructure d'enrobé.
- ▶ Un stratifié où tous les plis possèdent le comportement homogénéisé de la microstructure de référence et dans lequel se trouve un patch élastomère. L'épaisseur du patch est choisie de sorte que la même quantité massique d'élastomère soit présente dans les différentes technologies.

L'amortissement des différentes structures est calculé en identifiant la fonction 4.11 sur les courbes des pics de résonance en fonction de la fréquence correspondant aux modes de vibration d'intérêt (qui sont les trois premiers). Cette méthode est préférée à la méthode graphique de la largeur de bande à -3dB car la précision de cette dernière dépend de l'échantillonnage fréquentiel défini dans les simulations. Dans un but de réduction de coûts de calcul il est donc préférable d'utiliser une méthode de fitting sur des simulations à un nombre réduit de points en fréquence.

4.2.2. Validation expérimentale du modèle numérique

4.2.2.1. Description des essais

Des essais Oberst ont été réalisés, au sein de Safran, sur des échantillons de stratifiés UD contenant un patch en élastomère conformément à la norme **ISO6721-3** (*ISO 6721-3 p. d.*). La figure 4.3 montre le montage expérimental : l'accéléromètre pilote de l'excitation est situé au centre de l'éprouvette (cercle rouge) tandis que les accéléromètres utilisés pour mesurer la réponse de l'éprouvette sont situés aux deux extrémités de l'éprouvette (cercles verts).

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.2. Mise en place des calculs sur structure

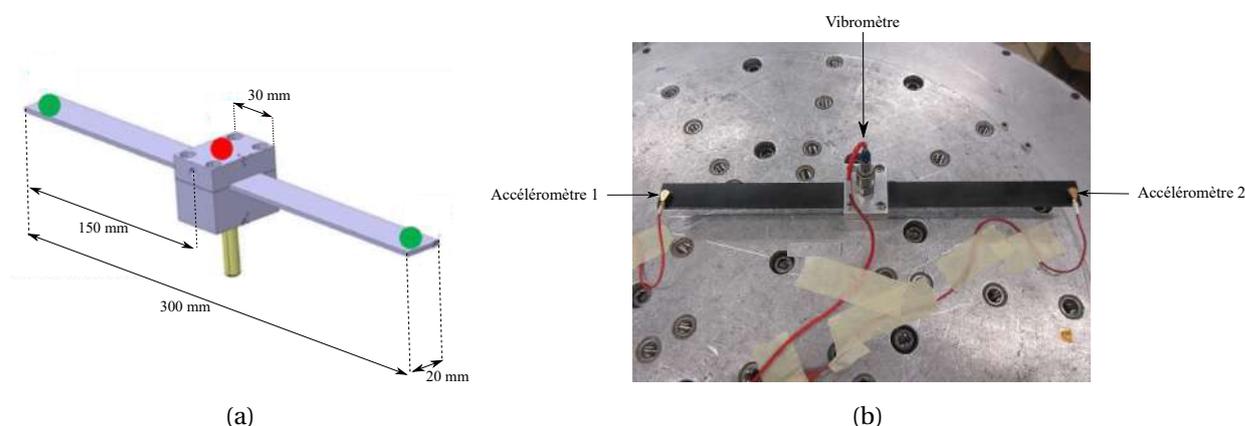


FIGURE 4.3. – Montage des essais Oberst : a) schéma avec dimensions, b) Photo du montage avec les accéléromètres de mesure ainsi que leurs câbles

Le vibromètre (accéléromètre pilote) est un système électromagnétique "964 LS" de LDS (Ling Dynamic System). La taille de l'échantillon est de $300\text{ mm} \times 20\text{ mm}$ avec une épaisseur qui dépend des séquences d'empilement, qui sont indiquées, ainsi que la position du patch, sur la figure 4.4 (1.2mm pour le stratifié simple appelé $L0$ et 2.6mm pour le stratifié $L0 - Elasto - L0$).

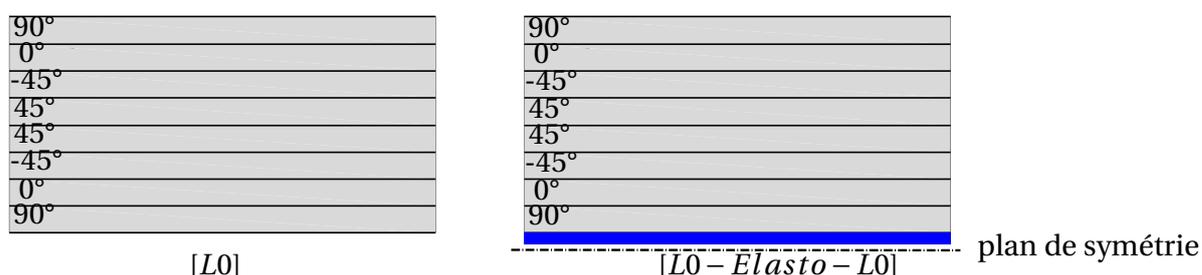


FIGURE 4.4. – Séquences d'empilement des échantillons utilisés : un stratifié quasi-isotrope à 8 plis sans élastomère $L0$ et un stratifié quasi-isotrope 16 plis avec un patch en élastomère au centre $L0 - Elasto - L0$

4.2.2.2. Résultats

La même expérience est réalisée numériquement avec l'approche illustrée ci-dessus et on compare les résultats obtenus pour les 3 premiers modes de vibration. Concernant les conditions aux limites définies sur les stratifiés, un effort harmonique $F = F_0 \cos(2\pi f t)$ a été appliqué sur une extrémité du stratifié et l'autre extrémité est encastree.

La figure 4.5 présente les pics de résonance associés au premier mode de flexion des stratifiés avec et sans élastomère illustrés en figure 4.4. Il s'agit des courbes de l'amplitude de déplacement normalisée par sa valeur maximale notée U_r qui correspond à la valeur atteinte à la fréquence de résonance f_r . Ces courbes sont tracées en

fonction de la fréquence normalisée par la fréquence de résonance f_r . Ce choix est motivé par le fait que le facteur d'amortissement dépend de l'inverse de la fréquence de résonance, ainsi l'axe f/f_r permet d'estimer visuellement l'amortissement relatif des différents stratifiés en regardant la largeur des pics à la valeur $f/f_r = 1$. Le choix de l'axe des ordonnées $|U|/|U_r|$ est motivé par le fait que les stratifiés ne possèdent pas les mêmes rigidités. Le tableau 4.2 présente les facteurs d'amortissement et les fréquences de résonance associés à ces pics.

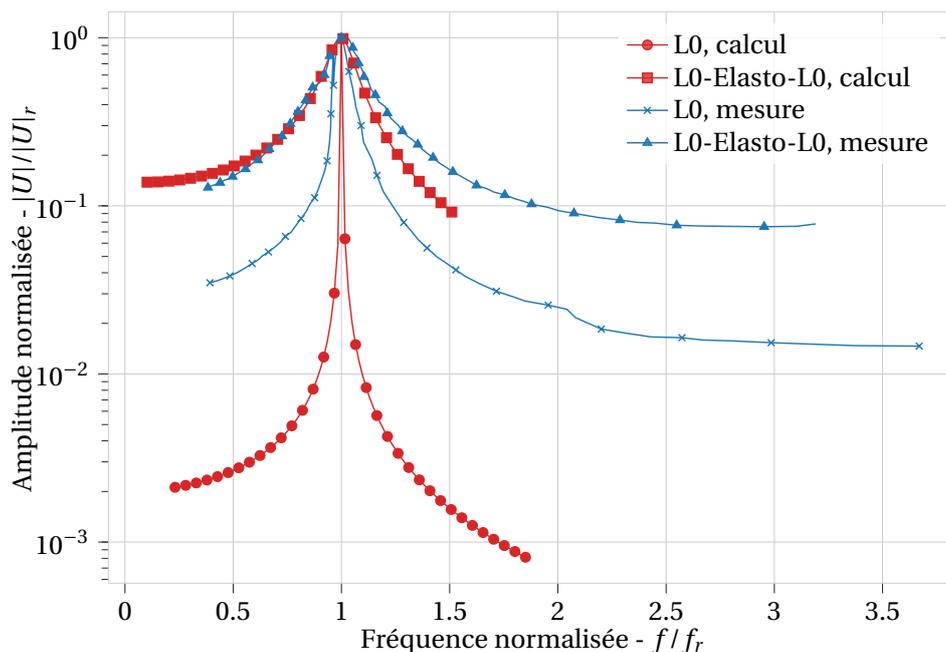


FIGURE 4.5. – Pics de résonance associés au 1er mode de vibration pour les stratifiés représentés en figure 4.4, essai et calcul.

Stratifié	facteur d'amortissement ξ	fréquence de résonance f_r (Hz)
L0 (simulation)	0.0008	43.24
L0 (essai)	0.029	43.3
L0-Elasto-L0 (simulation)	0.06	97.7
L0-Elasto-L0 (essai)	0.069	99.6

Tableau 4.2. – Comparaison des facteurs d'amortissement et des fréquences de résonance issues des essais et des simulations pour le **premier mode de flexion**

En termes de fréquence de résonance (voir tableau 4.2), les simulations donnent des valeurs très cohérentes par rapport aux résultats des essais pour les deux stratifiés.

En termes de facteurs d'amortissement, une sous-estimation de l'amortissement pour le stratifié $L0$ est notable : il est presque 40 fois inférieur. L'hypothèse la plus probable pour expliquer cette différence est la présence d'autres sources de dissipation dans le montage expérimental, comme des phénomènes de friction dans entre les parties assemblées ou des interactions avec les câbles reliant les accéléromètres, voir figure 4.3(b), qui fausseraient la mesure du facteur d'amortissement.

En fait, la valeur de ce facteur d'amortissement devrait être proche de $\xi = 0.0005$ mesuré par HE et al. 2018 pour le premier mode propre d'un stratifié UD $[0, 90, 45, -45]_{2S}$, il est clair que celui mesuré ($\xi = 0.029$) est beaucoup trop grand alors que celui issu du calcul ($\xi = 0.0008$) est du même ordre de grandeur. En revanche, les facteurs d'amortissement estimés pour le stratifié avec élastomère sont très proches de ceux mesurés expérimentalement. Les variabilités introduites précédemment seraient plus faibles pour le stratifié avec élastomère puisque les frottements deviennent négligeables par rapport à l'amortissement de la structure.

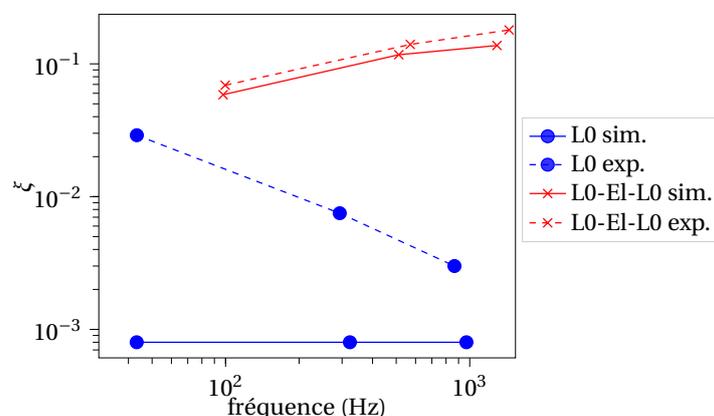


FIGURE 4.6. – Facteur d'amortissement en fonction des fréquences de résonance des trois premiers modes de vibration. Ligne continue pour les simulations et ligne pointillée pour les essais.

La figure 4.6 montre le facteur d'amortissement pour les fréquences de résonance des trois premiers modes de flexion pour le stratifié sans élastomère ($L0$) et pour celui avec élastomère ($L0 - El - L0$). Comme déjà remarqué plus haut, les résultats pour le stratifié sans élastomère sont peu concluants au regard des écarts en facteur d'amortissement. Pour le stratifié avec patch, en termes de fréquence de résonance, la différence entre l'estimation numérique et la fréquence de résonance mesurée augmente avec le nombre de modes mais reste acceptable en termes d'amplitudes. En termes de facteur d'amortissement du stratifié contenant l'élastomère, l'estimation numérique capture très bien l'augmentation du facteur d'amortissement avec le rang du mode comme cela a déjà été observé par KISHI et al. 2004.

Néanmoins, ces résultats préliminaires montrent que la stratégie numérique peut être considérée comme suffisamment fiable et prédictive pour comparer la réponse de structures composites stratifiées soumises à des vibrations, en particulier pour les stratifiés contenant un patch en élastomère.

4.3. Comparaison des solutions technologiques

Dans cette partie, on étudie les stratifiés avec les différentes technologies d'amortissement présentées précédemment et leur influence sur le facteur d'amortissement structurel ζ . Trois stratifiés composés de plis UD hybrides, dont le comportement est calculé en chapitre 3, sont étudiés pour chaque technologie : $[0]_{4S}$, $[90]_{4S}$ et $[-45, 90, 45, 0]_S$.

En ce qui concerne la technologie de patch, deux configurations différentes de patchs sont étudiées. La première (notée C1 dans les résultats) respecte la symétrie de la séquence d'empilement du stratifié en introduisant la couche d'élastomère au milieu du stratifié. Dans la deuxième configuration (notée C2 dans les résultats), la position de la couche d'élastomère est choisie pour être plus représentative de l'application cible : elle est introduite sur le dessus du stratifié et contrainte par une couche supplémentaire d'UD comme illustré sur la figure 4.7. Cette couche supplémentaire reste orientée à 0° quel que soit le stratifié de 8 plis d'en-dessous. Dans tous les cas, l'épaisseur de la couche d'élastomère t_e est choisie de manière à ce que la masse totale d'élastomère reste égale dans toutes les technologies (c'est-à-dire 5%).

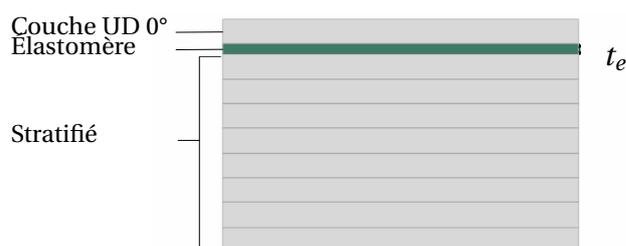


FIGURE 4.7. – Seconde configuration de patch étudiée

4.3.1. Comparaison dans le cadre de la viscoélasticité linéaire

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, on compare les résultats sur stratifiés pour lesquels on a homogénéisé les microstructures hybrides ainsi que les stratifiés avec patch pour lesquels le comportement de l'élastomère est le même que celui utilisé pour l'homogénéisation des microstructures à savoir viscoélastique linéaire issu de courbes maitresses de DMA.

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.3. Comparaison des solutions technologiques

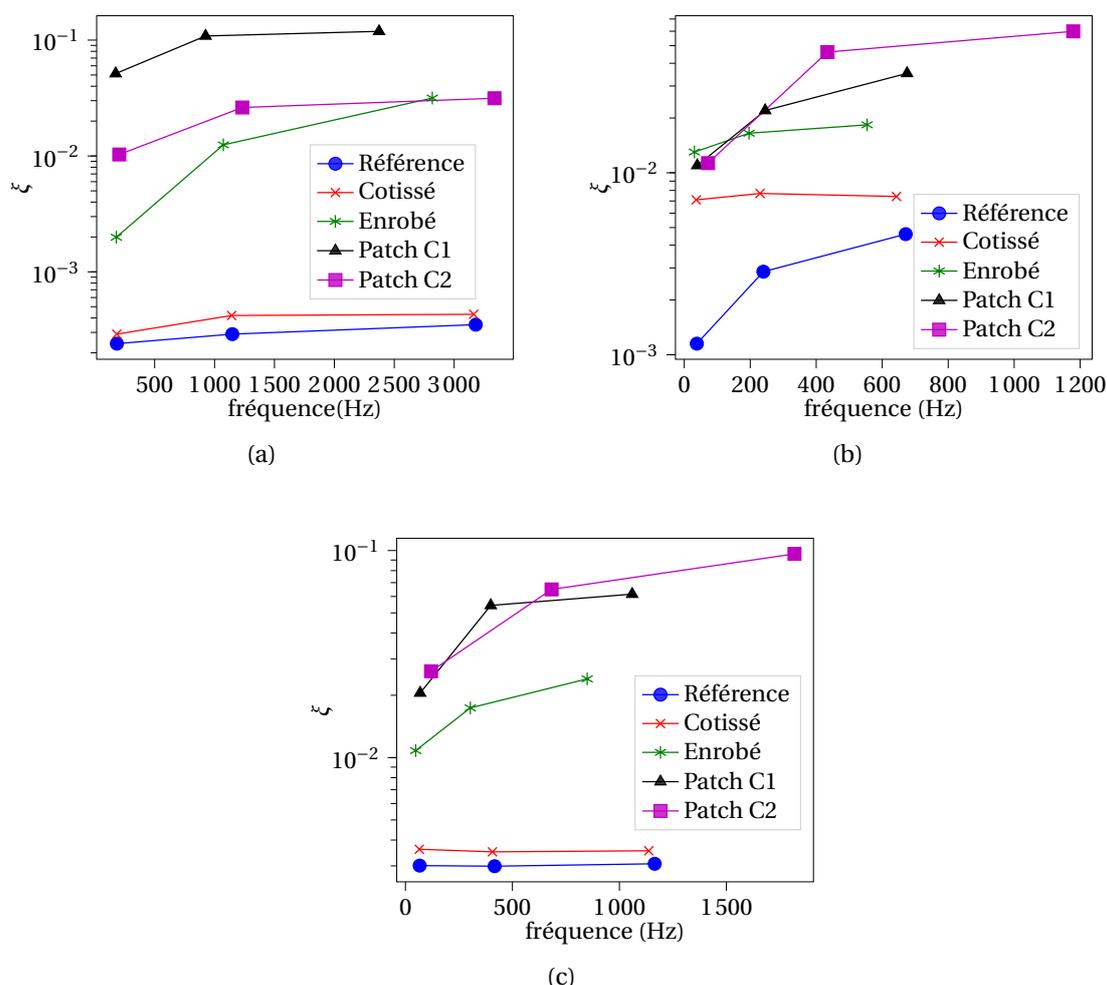


FIGURE 4.8. – Facteur d’amortissement en fonction des 3 premières fréquences de résonance : (a) stratifié $[0]_{4S}$, (b) stratifié $[90]_{4S}$ et (c) stratifié $[-45, 90, 45, 0]_S$.

Sur la figure 4.8 sont représentés les facteurs d’amortissement pour les trois premières fréquences de résonance (des modes de flexion) de chaque technologie introduite auparavant pour les trois stratifiés étudiés. Sans surprise, le stratifié de référence, qui ne contient pas d’élastomère, est celui pour lequel le facteur d’amortissement est le plus faible, pour les trois premiers modes et pour toutes les séquences d’empilement étudiées. La valeur estimée pour le premier mode du stratifié $[0]_{4S}$ ($\xi=0.00011$) semble être un peu plus faible que $\xi=0.0006$ obtenue en faisant la moyenne des valeurs données dans quatre références pour le même stratifié¹ mais concorde parfaitement avec celle obtenue numériquement par KERN et al. 2019 pour des matériaux composites similaires. Cependant, la valeur obtenue pour le premier mode du stratifié $[90]_{4S}$ ($\xi=0.0046$) est très proche à la fois de $\xi=0.004$ obtenue en faisant la moyenne des va-

1. YIM et GILLESPIE JR 2000, KISHI et al. 2004, PEREIRA et al. 2020 et HE et al. 2018

leurs données pour le même stratifié dans les références mentionnées précédemment¹ et de celle estimée numériquement par KERN et al. 2019.

La technologie du cotissé apporte plus d'amortissement pour le stratifié $[90]_{4S}$ que pour les autres orientations. Cela a déjà été remarqué par MARTONE, GIORDANO et al. 2011, dans le contexte des fibres viscoélastiques de PU, et peut s'expliquer par la rigidité élevée dans la direction des fibres qui limite considérablement la déformation dans les fibres élastomères alors que la rigidité plus faible dans la direction transversale permet aux fibres élastomères d'atteindre une plus grande amplitude de déformation impliquant une plus grande dissipation d'énergie.

Pour les trois stratifiés étudiés, la technologie d'enrobé apporte plus d'amortissement par rapport à la technologie du cotissé avec un facteur d'amortissement maximal obtenu pour le stratifié $[90]_{4S}$. Ceci n'est pas surprenant puisque les facteurs de perte des modules du VER enrobé sont plus importants que ceux du VER cotissé, comme cela a été discuté dans la section 3.2.5 du chapitre 3. Pour les stratifiés $[0]_{4S}$ et $[90]_{4S}$, les facteurs d'amortissement estimés ici sont supérieurs à ceux obtenus par KERN et al. 2019 mais dans notre travail l'enrobage des fibres de carbone est beaucoup plus épais. Cependant, comme dans cette dernière référence, le gain en facteur d'amortissement se révèle plus important pour les stratifiés $[0]_{4S}$ que pour les $[90]_{4S}$ (plus de trois fois plus de gain pour les $[0]_{4S}$ que pour les $[90]_{4S}$).

Contrairement aux autres technologies, le patch de la configuration 1 est plus efficace pour les stratifiés les plus rigides. Ceci a déjà été mis en évidence expérimentalement par BERTHELOT, ASSARAR et al. 2008 pour les stratifiés UD fibres de verre et par KISHI et al. 2004 pour les stratifiés UD fibres de carbone. Cela provient de l'augmentation du cisaillement transverse appliqué au patch avec l'augmentation de la rigidité des plis situés de part et d'autre de celui-ci. Les facteurs d'amortissement estimés ici sont difficilement comparables à ceux donnés dans la littérature car ces valeurs sont étroitement liées au matériau constituant le patch (voir KISHI et al. 2004), ainsi qu'à son épaisseur (voir ZHENG et al. 2021). Néanmoins, les valeurs $\xi=0.048$ et $\xi=0.008$ obtenues pour les stratifiés $[0]_{4S}$ et $[90]_{4S}$ respectivement, semblent cohérentes avec celles trouvées dans les références précédemment citées.

Les résultats obtenus pour le patch en configuration 2 sont plus complexes à expliquer car l'orientation du pli supplémentaire est différente des autres plis. Cependant pour le $[0]_{4S}$, l'amortissement estimé pour cette configuration est plus faible que celui de la configuration 1 car il implique moins de cisaillement transverse dans le patch viscoélastique. Mais contrairement à la configuration 1, la configuration 2 est plus efficace pour les stratifiés $[90]_{4S}$ et surtout les $[-45, 90, 45, 0]_S$. Ceci provient de la distribution de la rigidité de part et d'autre du patch et montre le grand intérêt de la méthode proposée pour estimer l'amortissement des structures complexes.

Pour les trois stratifiés, les simulations estiment une augmentation du facteur d'amortissement avec la valeur des fréquences de résonance (sauf pour la technologie cotissé), ce qui avait déjà été observé par KISHI et al. 2004 pour la technologie de patch et par KERN et al. 2019 pour la technologie d'enrobé.

En conclusion, pour les stratifiés contenant les technologies microscopiques d'insertion (c'est-à-dire cotissé et enrobé), il semble que la technologie d'enrobé apporte

plus d'amortissement comparé au cotissé et en considérant toutes les technologies, il apparaît que la technologie de patch (configuration 1) apporte l'amortissement le plus élevé sans modifier fortement les fréquences de résonance par rapport au stratifié sans élastomère.

4.3.2. Comparaison dans le cadre de la viscoélasticité non-linéaire

Dans cette partie, on étudie le cas particulier de la configuration de patch C2 qui est plus proche de l'utilisation industrielle. Pour cette configuration on compare les résultats obtenus avec un comportement linéaire pour l'élastomère (de la partie précédente) avec une simulation du stratifié en utilisant la loi de comportement non-linéaire obtenue au chapitre 2 pour l'élastomère. Afin de limiter les effets de structure liés à la précharge qui engendre une pré-flexion de la structure élevée, il est décidé de réaliser l'étude sur la configuration de patch C2 doublée par symétrie miroir comme présentée en figure 4.9, on appelle ce nouveau stratifié C3. Un modèle 2D suffit également pour ces simulations où la précharge induit un cisaillement transverse des plis d'élastomères. Tous les plis du stratifié sont orientés à 0° y compris les couches contraignant le patch élastomère.

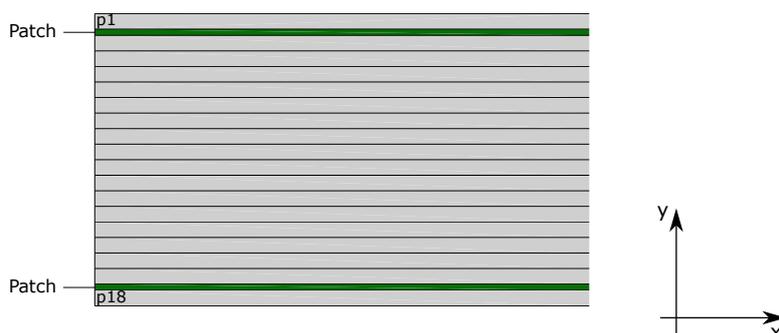


FIGURE 4.9. – Stratifié C3

On compare pour les deux modèles l'amortissement lié au premier mode de flexion de la structure. Pour ce faire, pour le cas viscoélastique linéaire on effectue un calcul fréquentiel en utilisant la procédure "Steady-State Dynamics - Direct" disponible sur Abaqus. Pour le calcul avec le modèle non-linéaire, la version fréquentielle du modèle linéarisé présenté en paragraphe 2.2.3.2 du chapitre 2 (page 88) n'est pas encore implémentée dans une UMAT. C'est pourquoi on effectue des calculs temporels à différentes fréquences et on retrace la réponse fréquentielle de la structure de son premier mode de flexion à partir des réponses stabilisées. Le chargement se décompose en deux parties : on applique premièrement une précharge de cisaillement aux patches en appliquant un effort suivant la direction x aux deux couches extérieures appelées $p1$ et $p18$ du stratifié en figure 4.9. Ensuite, un effort de flexion suivant la direction y est appliqué en bout de structure. La figure 4.10 montre les pics de

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.3. Comparaison des solutions technologiques

résonance associés au premier mode de flexion de la structure présentée en figure 4.9 dans le cas d'une simulation où le comportement de l'élastomère est viscoélastique linéaire et dans le cas où l'élastomère est défini par la loi de comportement non-linéaire présentée au chapitre 2. Le tableau 4.3 présente les fréquences de résonance ainsi que les facteurs d'amortissement liés à ces deux cas de figure.

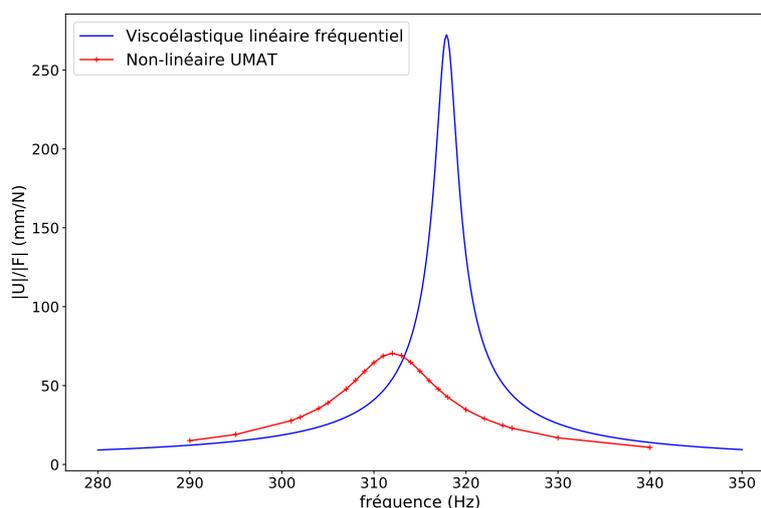


FIGURE 4.10. – Pic de résonance associé au premier mode de flexion de la structure C3, calcul en viscoélasticité linéaire et calcul avec loi de comportement non-linéaire pour l'élastomère

Stratifié	Calcul	facteur d'amortissement ξ	fréquence de résonance f_r (Hz)
C3	Viscoélastique linéaire	0.0037	317.87
C3	Non-linéaire (UMAT)	0.014	312.07

Tableau 4.3. – Facteur d'amortissement et fréquence de résonance issus du calcul viscoélastique linéaire et du calcul non-linéaire avec UMAT, premier mode de flexion

On observe premièrement un décalage en fréquence de résonance entre les deux courbes. La fréquence de résonance est de 312 Hz pour la simulation non-linéaire tandis qu'elle est de 317 Hz dans le cas linéaire. Cet écart peut s'expliquer par le fait que la loi non-linéaire implémentée dans l'UMAT permet de prendre en compte l'effet de la précharge sur la réponse dynamique de la structure tandis que dans le cadre viscoélastique linéaire ce n'est pas le cas. De plus, on a pu observer au chapitre 1

qu'une précharge a pour effet de diminuer la rigidité dynamique de l'élastomère. Ce qui peut expliquer la diminution de la fréquence de résonance pour la simulation où l'effet de la précharge est bien pris en compte. De plus, on constate également que le pic associé aux simulations non-linéaires est d'amplitude bien plus faible par rapport au cas viscoélastique linéaire et induit donc un facteur d'amortissement plus élevé dans le cas non-linéaire.

Ces résultats de simulations mettent en avant la forte différence de résultats, à l'échelle de la structure, entre un cas où le comportement de l'élastomère est viscoélastique linéaire et le cas où le comportement est défini par une loi non-linéaire permettant, entre autres, de prendre en compte l'effet d'une précharge sur le comportement dynamique.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, des simulations à l'échelle de stratifiés composites ont été mises en place dans plusieurs buts.

Premièrement, les simulations vibratoires en oscillations forcées sur stratifié avec patch élastomère ont pu être comparées à des résultats expérimentaux réalisés au sein de Safran. Ces résultats ont permis d'évaluer la justesse de nos simulations mais également de questionner le protocole expérimental. Ces essais et simulations donnent accès à une quantité caractéristique que l'on appelle le facteur d'amortissement.

Une fois la modélisation numérique mise en place, on a pu comparer les différentes technologies d'amortissement présentées en chapitre 3, l'enrobé et le cotissé, en utilisant leurs propriétés homogénéisées respectives pour définir le comportement mécanique des plis des différents stratifiés étudiés (de trois orientations différentes). On a pu constater que les conclusions à l'échelle des structures étaient les mêmes qu'à l'échelle des microstructures (du chapitre 3), la technologie de l'enrobé engendre les facteurs d'amortissement les plus élevés pour les trois premiers modes de flexion des structures.

Néanmoins, en ajoutant à cette comparaison les résultats associés aux technologies de patch d'élastomère (insertion à l'échelle macro), on est arrivé à la conclusion que le patch permettait d'apporter les plus hauts niveaux d'amortissement pour les structures stratifiées étudiées.

Enfin, en prenant le cas particulier du patch d'élastomère, on a pu juger de la pertinence d'utiliser une loi de comportement non-linéaire (du chapitre 2) pour l'élastomère dans les simulations. En effet, pour le mode de flexion étudié, il semblerait que l'utilisation d'une loi viscoélastique conventionnelle ne permet pas de capter le comportement vibratoire réel d'un stratifié composite comportant un patch élastomère. Ce qui s'explique en grande partie par la richesse du modèle non-linéaire qui permet de prendre en compte des effets tels que la dépendance du comportement dynamique à une précharge. Cette même précharge impacte fortement la réponse du matériau, comme on a pu le voir lors de la campagne de caractérisation (chapitre 1).

Conclusion Générale

Conclusion

La problématique industrielle associée à cette étude concernait l'amortissement de structures composites utilisées dans certaines pièces de turboréacteur d'avion. L'étude concernait plus précisément les technologies d'amortissement basées sur l'introduction d'un élastomère dissipatif dans ces structures. La démarche adoptée a consisté à caractériser expérimentalement l'élastomère ciblé pour cette application, puis à en modéliser le comportement et enfin de réaliser des simulations numériques à différentes échelles pour quantifier l'apport en amortissement d'un tel matériau. Ce travail de thèse regroupe à la fois différents aspects de la mécanique des élastomères et des matériaux composites tout en combinant de façon complémentaire des approches expérimentales et numériques.

Dans un premier temps, une campagne d'essais a permis de caractériser le matériau de l'étude (élastomère vulcanisé au soufre et chargé en noirs de carbone) sous différents types de chargements. Premièrement le comportement quasi-statique, supposé hyperélastique, a été mis en évidence à l'aide d'essais de relaxation par paliers réalisés en traction et en cisaillement. Ensuite, des essais cycliques harmoniques ont permis d'exposer les effets de la fréquence, de l'amplitude dynamique ainsi que de la précharge, sur le comportement dissipatif du matériau. Ces essais ont été réalisés sur des éprouvettes ayant subi des histoires thermiques différentes : les éprouvettes vierges qui ont été testées à leur état initial sans histoire connue, les éprouvettes cuites qui ont connu un traitement thermique similaire à celui d'une étape de polymérisation d'une pièce composite, et enfin les éprouvettes vieilles qui ont été placées en vieillissement thermique à 90 °C pendant 4 mois. Tous ces essais ont également été répétés à trois températures différentes : -40 °C, 20 °C et 70 °C.

A partir de ces essais, on a établi un modèle de comportement hyper-viscoélastique basé sur un assemblage rhéologique de type Maxwell généralisé. L'originalité du modèle repose sur la description de l'effet Payne par l'introduction d'une variable interne supplémentaire inspirée de la mécanique de l'endommagement (Alexis DELATTRE 2014). On a ensuite proposé une procédure de linéarisation de la loi pour les cas particuliers de chargement harmonique avec précharge de grande amplitude. Cette linéarisation a permis d'obtenir l'expression de la loi de comportement dans le domaine fréquentiel en passant par des transformées de Laplace-Carson. Par la suite une stratégie d'identification rapide des paramètres du modèle est proposée en n'utilisant que deux types d'essais : les relaxations par palier et les DMA. Les corrélations entre modèle et essais sont très pertinentes, en particulier sur les essais de relaxation par

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.4. Conclusion

palier, mais il reste un travail à faire sur l'identification pour améliorer les résultats notamment sur l'évolution des modules en fonction de l'amplitude dynamique (effet Payne). Néanmoins, les résultats sont satisfaisants au vu de la richesse du modèle et de sa procédure d'identification rapide. L'implémentation de la loi de comportement dans un code de calcul éléments finis a permis de valider les propriétés identifiées en comparant simulations et essais de traction-torsion sur éprouvettes diabolo. Cette implémentation dans un code de calcul commercial va permettre à l'industriel de simuler avec plus de sûreté le comportement de l'élastomère soumis à différents cas de chargement tout en prédisant les effets non-linéaires mis en évidence expérimentalement.

Ensuite, dans une approche exploratoire, on a comparé différentes solutions technologiques basées sur l'introduction d'élastomère à l'échelle de la microstructure d'un composite CFRP à fibres continues. Les deux technologies étudiées sont : l'enrobé qui est une microstructure dans laquelle les fibres de carbone sont enrobées par une fine couche d'élastomère et le cotissé qui est une microstructure dans laquelle coexistent fibres de carbone et fibres d'élastomère. On a alors mis en place une procédure d'homogénéisation de ces microstructures dans le cadre de la viscoélasticité linéaire afin de comparer l'évolution de leurs propriétés effectives respectives en fonction de la fréquence mais aussi dans le but de préparer les simulations à échelle macroscopique du chapitre suivant. Grâce à cette étude, on a développé des outils ainsi qu'une méthodologie robuste pour effectuer des comparaisons numériques à l'échelle microscopique qui pourront être utilisées dans le cas d'études paramétriques en fonction du taux volumique d'élastomère ou encore dans le cas d'autres composites comme les tissés 3D interlock.

Pour finir, on a voulu comparer ces technologies d'insertion micro à une autre technologie plus conventionnelle qui consiste à coller un *patch* d'élastomère directement sur la structure à amortir (insertion "macro"). Cette étude comparative est conduite sur différents types de stratifiés (3 séquences d'empilement différentes) ainsi que deux configurations différentes de stratifié avec patch afin de mettre en évidence les effets géométriques sur la dissipation de la couche d'élastomère. Avant de comparer les différentes technologies, on a pu valider la modélisation numérique des stratifiés avec patch grâce à la confrontation des calculs avec des essais vibratoires réalisés dans le groupe Safran. Cette étude s'est concentrée sur l'amortissement lié aux trois premiers modes de flexion de ces structures. On a ainsi mis en évidence les fortes capacités d'amortissement de la technologie du patch et de la technologie d'enrobé. Le patch semble néanmoins être la solution judicieuse par la facilité de sa mise en œuvre. Enfin, dans le but de juger de l'intérêt d'utiliser une loi de comportement non-linéaire pour l'élastomère, on a pu estimer sur un cas concret de stratifié avec patch, l'apport de la loi non-linéaire par rapport à une loi viscoélastique linéaire ne prenant pas en compte l'effet de la précharge ou de l'amplitude dynamique sur la réponse vibratoire.

D'un point de vue industriel, cette thèse a permis de consolider des éléments méthodologiques pour comparer des solutions technologiques entre elles uniquement par simulation numérique. Cela a permis de constater qu'a priori la solution du patch élastomère semble la plus indiquée pour un cas simple d'une poutre en flexion. D'autre

part on a développé un modèle de loi de comportement non linéaire temporel qui permet d'aller plus loin que les modèles classiques et de se rapprocher des conditions réelles de fonctionnement (oscillations dynamique autour d'une précharge). Ce modèle est une première brique qui pourra certainement servir à étudier d'autres problématiques pour l'application (effet de la température, problématique de l'endommagement et de la durée de vie, etc).

Perspectives

D'un point de vue expérimental, au chapitre 1 on a caractérisé l'influence d'un vieillissement thermique sur le comportement de l'élastomère, mais il serait également intéressant d'effectuer un vieillissement en conditions réelles durant lequel le vieillissement thermique serait couplé à un chargement mécanique pour se rapprocher des sollicitations sur pièce. Par ailleurs, le comportement en fatigue de l'élastomère n'a pas été étudié dans cette thèse mais il s'agit d'une axe de recherche fort d'intérêt pour l'application industrielle. Toujours dans le domaine expérimental, il serait intéressant de proposer un protocole permettant d'identifier la réponse tridimensionnelle d'un matériau isotrope viscoélastique linéaire à un chargement de DMA. Ceci pourrait être obtenu à partir d'un essai de traction et en mesurant un coefficient de Poisson complexe à partir de mesures de champs de déformation.

Concernant la loi de comportement présentée en chapitre 2, celle-ci est écrite dans une forme isotherme et identifiée sur les essais à température ambiante. Dans un futur proche il serait donc intéressant d'introduire la dépendance à la température dans l'expression du modèle afin d'exploiter les essais réalisés à -40 °C et 70 °C . De plus, des essais de traction-torsion ont été réalisés à 60 °C et peuvent servir de validation au modèle avec température.

Par ailleurs, on a montré au chapitre 1 que la relaxation des contraintes en traction et en cisaillement sont très différentes. On a également montré en chapitre 2 que le modèle actuel ne permettait pas de modéliser une telle différence de cinétique de relaxation. C'est pourquoi il serait pertinent d'introduire dans le modèle des temps caractéristiques de Maxwell différents pour les composantes d'élongation et les composantes de cisaillement du tenseur des contraintes dans le modèle. Différentes pistes pourraient être étudiées à commencer par la proposition de Alexis DELATTRE 2014 avec une viscosité directionnelle, une autre alternative pourrait être de modifier l'énergie libre des branches visqueuses.

Toujours concernant le modèle de loi de comportement, on a développé au chapitre 2 une procédure analytique pour linéariser la loi dans un cas particulier de chargement de précharge statique superposée à un chargement harmonique. Cette linéarisation nous a permis d'exprimer la loi de comportement dans le domaine fréquentiel. La prochaine étape est donc d'implémenter cette loi dans le but de réaliser des simulations directement en fréquentiel. Le point bloquant à l'heure actuelle est la prise en compte de l'effet Payne qui nécessite de connaître la déformation dynamique en chaque point du modèle. On peut donc commencer par implémenter la loi linéarisée sans prendre

4. Amortissement des structures composites hybrides – 4.4. Conclusion

en compte l'effet Payne mais avec l'influence de la précharge non-linéaire. Ensuite, pour incorporer l'effet Payne, une première façon de faire serait de considérer un chargement dynamique temporel à effectuer avant la simulation fréquentielle afin d'en déduire une valeur de variation de raideur dynamique, pour évaluer les variables internes de Payne considérées constantes pour la phase fréquentielle. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice qui a déjà été utilisée dans le passé par GIL-NEGRETE et al. 2006. Une piste, à explorer à plus long terme, qui ne nécessite pas de faire de simplifications serait la mise au point d'une stratégie de résolution en fréquentiel mais non-linéaire pour des faibles amplitudes qui nécessite le traitement du problème par une méthode de discrétisation espace-fréquence particulière.

A propos des technologies d'amortissement, on a vu que la technologie du patch permet d'atteindre les facteurs d'amortissement les plus élevés pour les trois premiers modes de flexion d'une structure stratifiée. D'un point de vue industriel, il serait pertinent de développer des outils d'optimisation géométrique des patches et de leur contre-couche sur les structures plus complexes telles que les aubes afin d'élargir la plage fréquentielle d'amortissement possible pour y incorporer l'amortissement des modes de torsion également. D'autres problématiques vont bien sûr se poser pour l'application comme l'impact de l'endommagement par fatigue sur le comportement vibratoire du patch afin notamment d'estimer la durée de vie du dispositif et l'impact du procédé de mise en œuvre (problèmes d'hétérogénéité des caractéristiques dues à des contraintes internes liées au procédé par exemple).

Bibliographie

- Abaqus Unified FEA - SIMULIA™* par Dassault Systèmes® (p. d.). fr. URL : <https://www.3ds.com/fr/produits-et-services/simulia/produits/abaqus/> (cf. p. 127).
- AHOSE, Komla Dela, Stéphane LEJEUNES, Dominique EYHERAMENDY et Franck SOSSON (août 2017). « On the thermal aging of a filled butadiene rubber ». In : Pages : 64. ISBN : 978-1-315-22327-8. DOI : [10.1201/9781315223278-11](https://doi.org/10.1201/9781315223278-11) (cf. p. 55).
- ALBEROLA, Nicole et Karim BENZARTI (sept. 1997). « Méso- et microstructures des composites unidirectionnels : modélisation du comportement viscoélastique ». fr. In : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy* 325.5, p. 249-255. ISSN : 1251-8069. DOI : [10.1016/S1251-8069\(97\)88388-1](https://doi.org/10.1016/S1251-8069(97)88388-1). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1251806997883881> (cf. p. 112, 113).
- ANTMAN, Stuart S. (1983). « The influence of elasticity on analysis : Modern developments ». en. In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 9.3, p. 267-291. ISSN : 0273-0979, 1088-9485. DOI : [10.1090/S0273-0979-1983-15185-6](https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1983-15185-6). URL : <https://www.ams.org/bull/1983-09-03/S0273-0979-1983-15185-6/> (cf. p. 94).
- ARRUDA, Ellen M. et Mary C. BOYCE (1993). « A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41.2, p. 389-412. ISSN : 0022-5096. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90013-6). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509693900136> (cf. p. 60, 61).
- AZIZ, Siti Aishah Abdul, Saiful Amri MAZLAN, Ubaidillah UBAIDILLAH, Norzilawati MOHAMAD, Michal SEDLACIK, Nur Azmah NORDIN et Nurhazimah NAZMI (jan. 2021). « Loss Factor Behavior of Thermally Aged Magnetorheological Elastomers ». en. In : *Materials* 14.17. Number : 17 Publisher : Multidisciplinary Digital Publishing Institute, p. 4874. ISSN : 1996-1944. DOI : [10.3390/ma14174874](https://doi.org/10.3390/ma14174874). URL : <https://www.mdpi.com/1996-1944/14/17/4874> (cf. p. 55).
- BALL, John M. (déc. 1976). « Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity ». en. In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 63.4, p. 337-403. ISSN : 1432-0673. DOI : [10.1007/BF00279992](https://doi.org/10.1007/BF00279992). URL : <https://doi.org/10.1007/BF00279992> (cf. p. 94).
- BEDA, T. (2007). « Modeling hyperelastic behavior of rubber : A novel invariant-based and a review of constitutive models ». en. In : *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Physics* 45.13. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/polb.20928>, p. 1713-1732. ISSN : 1099-0488. DOI : [10.1002/polb.20928](https://doi.org/10.1002/polb.20928). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/polb.20928> (cf. p. 60).

- BEN HASSINE, Mouna (oct. 2013). « Modélisation du vieillissement thermique et mécanique d'une protection externe en EPDM de jonctions rétractables à froid ». fr. Thèse de doct. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM. URL : <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00941411> (cf. p. 52).
- BERGSTRÖM, J. S. et M. C. BOYCE (nov. 2000). « Large strain time-dependent behavior of filled elastomers ». en. In : *Mechanics of Materials* 32.11, p. 627-644. ISSN : 0167-6636. DOI : [10.1016/S0167-6636\(00\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(00)00028-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663600000284> (cf. p. 74).
- BERNSTEIN, B., E. A. KEARSLEY et L. J. ZAPAS (mar. 1965). « A Study of Stress Relaxation with Finite Strain ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 38.1, p. 76-89. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3535640](https://doi.org/10.5254/1.3535640). URL : <https://doi.org/10.5254/1.3535640> (cf. p. 65).
- BERTHELOT, Jean-Marie (juil. 2006a). « Damping analysis of laminated beams and plates using the Ritz method ». en. In : *Composite Structures* 74.2, p. 186-201. ISSN : 0263-8223. DOI : [10.1016/j.compstruct.2005.04.031](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.04.031). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822305001005> (cf. p. 138, 139).
- (nov. 2006b). « Damping Analysis of Orthotropic Composites with Interleaved Viscoelastic Layers : Modeling ». en. In : *Journal of Composite Materials* 40.21. Publisher : SAGE Publications Ltd STM, p. 1889-1909. ISSN : 0021-9983. DOI : [10.1177/0021998306061302](https://doi.org/10.1177/0021998306061302). URL : <https://doi.org/10.1177/0021998306061302> (cf. p. 139).
- (2012). *Matériaux composites*. fr. 5ème édition. Lavoisier (cf. p. 117).
- BERTHELOT, Jean-Marie, Mustapha ASSARAR, Youssef SEFRANI et Abderrahim EL MAHI (2008). « Damping analysis of composite materials and structures ». In : *Composite Structures* 85.3, p. 189-204 (cf. p. 138, 139, 150).
- BERTHELOT, Jean-Marie et Youssef SEFRANI (juil. 2004). « Damping analysis of uni-directional glass and Kevlar fibre composites ». en. In : *Composites Science and Technology* 64.9, p. 1261-1278. ISSN : 0266-3538. DOI : [10.1016/j.compscitech.2003.10.003](https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2003.10.003). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353803003786> (cf. p. 139).
- BORNERT, Michel, Thierry BRETHERAU et Pierre GILORMINI (2001a). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. fr. URL : <https://www.lavoisier.fr/livre/materiaux/homogeneisation-en-mecanique-des-materiaux-1-materiaux-aleatoires-elastiques-et-milieux-periodiques/bornert/descriptif-9782746201996> (cf. p. 117, 126).
- (2001b). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2 : comportements non linéaires et problèmes ouverts*. fr. URL : <https://www.lavoisier.fr/livre/materiaux/homogeneisation-en-mecanique-des-materiaux-2-comportements-non-lineaires-et-problemes-ouverts/bornert/descriptif-9782746202009> (cf. p. 123, 127).
- BOUKAMEL, A., S. MÉO, O. DÉBORDES et M. JAEGER (déc. 2001). « A thermo-viscoelastic model for elastomeric behaviour and its numerical application ». en. In : *Archive of*

- Applied Mechanics* 71.12, p. 785-801. ISSN : 1432-0681. DOI : [10.1007/s004190100191](https://doi.org/10.1007/s004190100191). URL : <https://doi.org/10.1007/s004190100191> (cf. p. 91).
- BOYCE, Mary C. et Ellen M. ARRUDA (juil. 2000). « Constitutive Models of Rubber Elasticity : A Review ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 73.3, p. 504-523. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3547602](https://doi.org/10.5254/1.3547602). URL : <https://doi.org/10.5254/1.3547602> (cf. p. 61).
- BUCHHOLDT, H.a. et S.e. MOOSSAVI NEJAD (jan. 2012). *Structural Dynamics for Engineers*. ICE Publishing. ISBN : 978-0-7277-4176-9. DOI : [10.1680/sde.41769](https://doi.org/10.1680/sde.41769). URL : <https://www.icevirtuallibrary.com/doi/book/10.1680/sde.41769> (cf. p. 141, 143).
- BURGARELLA, Boris, Aurelien MAUREL-PANTEL, Noël LAHELLEC, Jean-Luc BOUVARD et Noëlle BILLON (2020). « Modeling the effective viscoelastic properties of PEEK matrix reinforced by arbitrary oriented short glass fibers ». In : *Mechanics of Time-Dependent Materials*, p. 1-29 (cf. p. 126).
- CARACCILO, R. et M. GIOVAGNONI (sept. 1996). « Frequency Dependence of Poisson's Ratio using the Method of Reduced Variables ». In : *Mechanics of Materials - MECH MATER* 24, p. 75-85. DOI : [10.1016/0167-6636\(96\)00002-6](https://doi.org/10.1016/0167-6636(96)00002-6) (cf. p. 120).
- CARFAGNI, M., Edoardo LENZI et Marco PIERINI (1998). *The Loss Factor as a Measure of Mechanical Damping*. en. URL : [/paper/The-Loss-Factor-as-a-Measure-of-Mechanical-Damping-Carfagni-Lenzi/c33d393514b86fea3045751429361eb4368db99d](https://www.researchgate.net/publication/266241414-The-Loss-Factor-as-a-Measure-of-Mechanical-Damping-Carfagni-Lenzi) (cf. p. 140).
- CHAGNON, G., G. MARCKMANN et E. VERRON (sept. 2004). « A Comparison of the Hart-Smith Model with Arruda-Boyce and Gent Formulations for Rubber Elasticity ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 77.4, p. 724-735. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3547847](https://doi.org/10.5254/1.3547847). URL : <https://doi.org/10.5254/1.3547847> (cf. p. 64).
- CHASSAIGNE, Adrien (mai 2020). « Contribution à la conception des assemblages mécaniques utilisant des matériaux fortement dissipatifs ». These de doctorat. université Paris-Saclay. URL : <http://www.theses.fr/2020UPASC020> (cf. p. 38).
- CHEN, F., R. BALIEU et N. KRINGOS (déc. 2017). « Thermodynamics-based finite strain viscoelastic-viscoplastic model coupled with damage for asphalt material ». en. In : *International Journal of Solids and Structures* 129, p. 61-73. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2017.09.014](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.09.014). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768317304249> (cf. p. 66).
- CHO, Ji-Hyun et Sung-Kie YOUN (fév. 2006). « A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory load superimposed on large static deformation considering the Payne effect ». en. In : *Archive of Applied Mechanics* 75.4, p. 275-288. ISSN : 1432-0681. DOI : [10.1007/s00419-005-0435-0](https://doi.org/10.1007/s00419-005-0435-0). URL : <https://doi.org/10.1007/s00419-005-0435-0> (cf. p. 80).
- CHRISTENSEN, R.M. (1982). *Theory of Viscoelasticity - 2nd Edition*. ISBN : 978-0-323-16182-4. URL : <https://www.elsevier.com/books/theory-of-viscoelasticity/christensen/978-0-12-174252-2> (cf. p. 65).
- CIAMBELLA, J., A. PAOLONE et S. VIDOLI (oct. 2010). « A comparison of nonlinear integral-based viscoelastic models through compression tests on filled rubber ». en. In : *Mechanics of Materials* 42.10, p. 932-944. ISSN : 0167-6636. DOI : [10.1016/](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2010.08.001)

- [j.mechmat.2010.07.007](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663610000979). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663610000979> (cf. p. 66).
- CIARLET, Philippe G. (fév. 1994). *Mathematical Elasticity*. en. T. 1 : Three-Dimensional Elasticity. Google-Books-ID : sQiOzyTOJXUC. Elsevier. ISBN : 978-0-444-81776-1 (cf. p. 94).
- COLEMAN, B. D. et W. NOLL (avr. 1961). « Foundations of Linear Viscoelasticity ». In : *Reviews of Modern Physics* 33.2. Publisher : American Physical Society, p. 239-249. DOI : [10.1103/RevModPhys.33.239](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.33.239). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.33.239> (cf. p. 65).
- CONEJOS, Florian (juin 2021). *Homogénéisation multi-échelle pour un objectif d'amortissement modal dans la conception d'aubes composite tissé 3D*. URL : <http://www.theses.fr/s202277> (cf. p. 134).
- CONEJOS, Florian, Etienne BALMES, Bastien TRANQUART, Eric MONTEIRO et Guillaume MARTIN (nov. 2021). « Viscoelastic homogenization of 3D woven composites with damping validation in temperature and verification of scale separation ». en. In : *Composite Structures* 275, p. 114375. ISSN : 0263-8223. DOI : [10.1016/j.compstruct.2021.114375](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114375). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822321008370> (cf. p. 138).
- COURTOIS, A., L. MARCIN, M. BENAVENTE, E. RUIZ et M. LÉVESQUE (mai 2019). « Numerical multiscale homogenization approach for linearly viscoelastic 3D interlock woven composites ». In : *International Journal of Solids and Structures* 163, p. 61-74. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2018.12.018](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.12.018). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768318305079> (cf. p. 120).
- COURTOIS, Alice (juin 2018). « 3D Interlock Composites Multi-Scale Viscoelastic Model Development, Characterization and Modeling ». en. phd. École Polytechnique de Montréal. URL : <https://publications.polymtl.ca/3178/> (cf. p. 117, 119).
- CRESPO, José, Marcos LATORRE et Francisco Javier MONTÁNS (jan. 2017). « WYPIWYG hyperelasticity for isotropic, compressible materials ». en. In : *Computational Mechanics* 59.1, p. 73-92. ISSN : 1432-0924. DOI : [10.1007/s00466-016-1335-6](https://doi.org/10.1007/s00466-016-1335-6). URL : <https://doi.org/10.1007/s00466-016-1335-6> (cf. p. 64).
- CURRIE, P. K. (oct. 2005). « Comparison of Incompressible Elastic Strain Energy Functions over the Attainable Region of Invariant Space ». en. In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 10.5. Publisher : SAGE Publications Ltd STM, p. 559-574. ISSN : 1081-2865. DOI : [10.1177/1081286505036420](https://doi.org/10.1177/1081286505036420). URL : <https://doi.org/10.1177/1081286505036420> (cf. p. 64).
- DEALY, J. et Donald PLAZEK (jan. 2009). « Time-temperature superposition-a users guide ». In : *Rheol. Bull.* 78, p. 16-31 (cf. p. 50).
- DELATTRE, A., S. LEJEUNES, F. LACROIX et S. MÉO (juil. 2016). « On the dynamical behavior of filled rubbers at different temperatures : Experimental characterization and constitutive modeling ». en. In : *International Journal of Solids and Structures* 90, p. 178-193. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2016.03.010](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.03.010). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768316001293> (cf. p. 91).

- DELATTRE, Alexis (2014). « Caractérisation et modélisation du comportement hyper-viscoélastique d'un élastomère chargé pour la simulation de pièces lamifiées élastomère-métal et étude en fatigue ». PhD Thesis. URL : <http://www.theses.fr/2014TOUR4039/document> (cf. p. 17, 70, 72, 76-78, 97, 110, 154, 156).
- DRAPACA, C.S., S. SIVALOGANATHAN et G. TENTI (oct. 2007). « Nonlinear Constitutive Laws in Viscoelasticity ». en. In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 12.5. Publisher : SAGE Publications Ltd STM, p. 475-501. ISSN : 1081-2865. DOI : [10.1177/1081286506062450](https://doi.org/10.1177/1081286506062450). URL : <https://doi.org/10.1177/1081286506062450> (cf. p. 65).
- EL HACHEMI, M, Y KOUTSAWA, H NASSER, G GIUNTA, Ali DAOUADJI, EM DAYA et S BELOUETTAR (2016). « An intuitive computational multi-scale methodology and tool for the dynamic modelling of viscoelastic composites and structures ». In : *Composite Structures* 144, p. 131-137 (cf. p. 144).
- EL HACHEMI, M., Y. KOUTSAWA, H. NASSER, G. GIUNTA, A. DAOUADJI, E. M. DAYA et S. BELOUETTAR (juin 2016). « An intuitive computational multi-scale methodology and tool for the dynamic modelling of viscoelastic composites and structures ». en. In : *Composite Structures* 144, p. 131-137. ISSN : 0263-8223. DOI : [10.1016/j.compstruct.2016.02.032](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.032). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822316300526> (cf. p. 116).
- EL MOURID, Amine, Rajamohan GANESAN et Martin LÉVESQUE (mar. 2013). « Comparison between analytical and numerical predictions for the linearly viscoelastic behavior of textile composites ». en. In : *Mechanics of Materials* 58, p. 69-83. ISSN : 0167-6636. DOI : [10.1016/j.mechmat.2012.11.003](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.11.003). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663612001974> (cf. p. 120).
- FAYOLLE, Bruno et Jacques VERDU (p. d.). *Vieillessement physique des matériaux polymères*. fr. URL : <https://www-techniques-ingenieur-fr.lama.univ-amu.fr/base-documentaire/42152210-proprietes-generales-des-plastiques/download/am3150/vieillessement-physique-des-materiaux-polymeres.html> (cf. p. 30, 51).
- FERRY, John D. (sept. 1980). *Viscoelastic Properties of Polymers*. en. Google-Books-ID : 9dqQY3Ujxs4C. John Wiley & Sons. ISBN : 978-0-471-04894-7 (cf. p. 38, 49).
- FINEGAN, I. C. et R. F. GIBSON (avr. 1998). « Improvement of Damping at the Micromechanical Level in Polymer Composite Materials Under Transverse Normal Loading by the Use of Special Fiber Coatings ». In : *Journal of Vibration and Acoustics* 120.2, p. 623-627. ISSN : 1048-9002. DOI : [10.1115/1.2893872](https://doi.org/10.1115/1.2893872). URL : <https://doi.org/10.1115/1.2893872> (cf. p. 115).
- FLORY, P. J. (jan. 1961). « Thermodynamic relations for high elastic materials ». en. In : *Transactions of the Faraday Society* 57.0. Publisher : The Royal Society of Chemistry, p. 829-838. ISSN : 0014-7672. DOI : [10.1039/TF9615700829](https://doi.org/10.1039/TF9615700829). URL : <https://pubs.rsc.org/en/content/articlelanding/1961/tf/tf9615700829> (cf. p. 63).
- FLORY, Paul J. (1953). *Principles of Polymer Chemistry*. en. Google-Books-ID : CQ0EbEkt5R0C. Cornell University Press. ISBN : 978-0-8014-0134-3 (cf. p. 30).
- FRITSCH, F. N. et J. BUTLAND (juin 1984). « A Method for Constructing Local Monotone Piecewise Cubic Interpolants ». In : *SIAM Journal on Scientific and Statistical Com-*

- puting 5.2. Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 300-304. ISSN : 0196-5204. DOI : [10.1137/0905021](https://doi.org/10.1137/0905021). URL : <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/0905021> (cf. p. 39).
- FRITZSCHE, J. et M. KLÜPPEL (jan. 2011). « Structural dynamics and interfacial properties of filler-reinforced elastomers ». eng. In : *Journal of Physics. Condensed Matter : An Institute of Physics Journal* 23.3, p. 035104. ISSN : 0953-8984. DOI : [10.1088/0953-8984/23/3/035104](https://doi.org/10.1088/0953-8984/23/3/035104) (cf. p. 50).
- FRÖHLICH, J., W. NIEDERMEIER et H.D. LUGINSLAND (avr. 2005). « The effect of filler–filler and filler–elastomer interaction on rubber reinforcement ». In : *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 36, p. 449-460. DOI : [10.1016/j.compositesa.2004.10.004](https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2004.10.004) (cf. p. 33).
- GALLICAN, Valentin et Renald BRENNER (2019). « Homogenization estimates for the effective response of fractional viscoelastic particulate composites ». In : *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31, p. 823-840. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02023868> (cf. p. 126).
- GAO, Fei, Hang SONG, Xiaowen QIU, Fang HE, Chunsheng SHI, Naiqin ZHAO et Chuan-nian HE (2019). « The preparation and properties of novel structural damping composites reinforced by nitrile rubber coated 3-D braided carbon fibers ». en. In : *Polymer Composites* 40.S1, E599-E608. ISSN : 1548-0569. DOI : [10.1002/pc.24905](https://doi.org/10.1002/pc.24905). URL : <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pc.24905> (cf. p. 115).
- GENT, A. N. et A. G. THOMAS (1958). « Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber ». en. In : *Journal of Polymer Science* 28.118. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/pol.1958.1202811814>, p. 625-628. ISSN : 1542-6238. DOI : [10.1002/pol.1958.1202811814](https://doi.org/10.1002/pol.1958.1202811814). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pol.1958.1202811814> (cf. p. 62).
- GIL-NEGRETE, N., J. VIÑOLAS et L. KARI (oct. 2006). « A simplified methodology to predict the dynamic stiffness of carbon-black filled rubber isolators using a finite element code ». en. In : *Journal of Sound and Vibration* 296.4, p. 757-776. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2006.03.038](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.038). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X06002732> (cf. p. 157).
- GORCE, Jean-Noël, J. W. HELLGETH et Thomas C. WARD (1993). « Mechanical hysteresis of a polyether polyurethane thermoplastic elastomer ». en. In : *Polymer Engineering & Science* 33.18. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/pen.760331804>, p. 1170-1176. ISSN : 1548-2634. DOI : [10.1002/pen.760331804](https://doi.org/10.1002/pen.760331804). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pen.760331804> (cf. p. 46).
- GREEN, M. S. et A. V. TOBOLSKY (fév. 1946). « A New Approach to the Theory of Relaxing Polymeric Media ». In : *The Journal of Chemical Physics* 14.2. Publisher : American Institute of Physics, p. 80-92. ISSN : 0021-9606. DOI : [10.1063/1.1724109](https://doi.org/10.1063/1.1724109). URL : <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1724109> (cf. p. 67).
- GURTIN, M. E. et Eli STERNBERG (jan. 1962). « On the linear theory of viscoelasticity ». en. In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 11.1, p. 291-356. ISSN : 1432-0673. DOI : [10.1007/BF00253942](https://doi.org/10.1007/BF00253942). URL : <https://doi.org/10.1007/BF00253942> (cf. p. 125).

- GUSEV, Andrei A. (sept. 1997). « Representative volume element size for elastic composites : A numerical study ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45.9, p. 1449-1459. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/S0022-5096\(97\)00016-1](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00016-1). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509697000161> (cf. p. 129).
- HALPHEN, Bernard et Quoc SON NGUYEN (1975). « Sur les matériaux standard généralisés ». In : *Journal de Mécanique* 14, p. 39-63. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00105514> (cf. p. 66).
- HART-SMITH, L. J. (sept. 1966). « Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials ». en. In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 17.5, p. 608-626. ISSN : 1420-9039. DOI : [10.1007/BF01597242](https://doi.org/10.1007/BF01597242). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01597242> (cf. p. 60).
- HARTMANN, S. (mar. 2001). « Numerical studies on the identification of the material parameters of Rivlin's hyperelasticity using tension-torsion tests ». en. In : *Acta Mechanica* 148.1, p. 129-155. ISSN : 1619-6937. DOI : [10.1007/BF01183674](https://doi.org/10.1007/BF01183674). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01183674> (cf. p. 97).
- HARTMANN, Stefan et Patrizio NEFF (juin 2003). « Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility ». en. In : *International Journal of Solids and Structures* 40.11, p. 2767-2791. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/S0020-7683\(03\)00086-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00086-6). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303000866> (cf. p. 63).
- HASHIN, ZVI (1970). « Complex moduli of viscoelastic composites—I. General theory and application to particulate composites ». In : *International Journal of Solids and Structures* 6.5, p. 539-552 (cf. p. 116).
- HAUPT, P. et A. LION (mar. 2002). « On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials ». en. In : *Acta Mechanica* 159.1, p. 87-124. ISSN : 1619-6937. DOI : [10.1007/BF01171450](https://doi.org/10.1007/BF01171450). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01171450> (cf. p. 65).
- HAUPT, P. et K. SEDLAN (mar. 2001). « Viscoplasticity of elastomeric materials : experimental facts and constitutive modelling ». en. In : *Archive of Applied Mechanics* 71.2, p. 89-109. ISSN : 1432-0681. DOI : [10.1007/s004190000102](https://doi.org/10.1007/s004190000102). URL : <https://doi.org/10.1007/s004190000102> (cf. p. 62, 193).
- HAZANOV, S. et C. HUET (déc. 1994). « Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume ». en. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42.12, p. 1995-2011. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/0022-5096\(94\)90022-1](https://doi.org/10.1016/0022-5096(94)90022-1). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509694900221> (cf. p. 123).
- HE, Yi, Yi XIAO, Yanqing LIU et Zhen ZHANG (2018). « An efficient finite element method for computing modal damping of laminated composites : theory and experiment ». In : *Composite Structures* 184, p. 728-741 (cf. p. 138, 147, 149).
- HERVE, Eveline et Andre ZAOUÏ (jan. 1993). « n-Layered inclusion-based micromechanical modelling ». en. In : *International Journal of Engineering Science* 31.1, p. 1-10. ISSN : 0020-7225. DOI : [10.1016/0020-7225\(93\)90059-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90059-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020722593900594> (cf. p. 115).

- HILTON, Harry H. (juin 2001). « Implications and Constraints of Time-Independent Poisson Ratios in Linear Isotropic and Anisotropic Viscoelasticity ». en. In : *Journal of elasticity and the physical science of solids* 63.3, p. 221-251. ISSN : 1573-2681. DOI : [10.1023/A:1014457613863](https://doi.org/10.1023/A:1014457613863). URL : <https://doi.org/10.1023/A:1014457613863> (cf. p. 120).
- HÖFER, P. et A. LION (mar. 2009). « Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.3, p. 500-520. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/j.jmps.2008.11.004](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.11.004). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509608001981> (cf. p. 78).
- HOLZAPFEL, Gerhard A. et Juan C. SIMO (août 1996). « A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes ». In : *International Journal of Solids and Structures* 33.20, p. 3019-3034. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/0020-7683\(95\)00263-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00263-4). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768395002634> (cf. p. 73).
- HOSHINO, Yusuke, Kazuki TAMAI, Yuelin ZHANG et Satoru YONEYAMA (2018). « Direct measurement and master curve construction of viscoelastic Poisson's ratio with digital image correlation ». en. In : *Strain* 54.6. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/str.12294>, e12294. ISSN : 1475-1305. DOI : [10.1111/str.12294](https://doi.org/10.1111/str.12294). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/str.12294> (cf. p. 120).
- HOSSEINI, Mina, Aidy ALI et B. SAHARI (jan. 2010). « A Review of Constitutive Models for Rubber-Like Materials ». In : *American Journal of Engineering and Applied Sciences* 3 (cf. p. 60).
- HWANG, S. J. et R. F. GIBSON (jan. 1991). « The effects of three-dimensional states of stress on damping of laminated composites ». en. In : *Composites Science and Technology* 41.4, p. 379-393. ISSN : 0266-3538. DOI : [10.1016/0266-3538\(91\)90073-X](https://doi.org/10.1016/0266-3538(91)90073-X). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026635389190073X> (cf. p. 138).
- (jan. 1992). « Contribution of interlaminar stresses to damping in thick laminated composites under uniaxial extension ». en. In : *Composite Structures* 20.1, p. 29-35. ISSN : 0263-8223. DOI : [10.1016/0263-8223\(92\)90009-2](https://doi.org/10.1016/0263-8223(92)90009-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0263822392900092> (cf. p. 138).
- (jan. 1993). « Prediction of fiber-matrix interphase effects on damping of composites using a micromechanical strain energy/finite element approach ». en. In : *Composites Engineering* 3.10, p. 975-984. ISSN : 0961-9526. DOI : [10.1016/0961-9526\(93\)90005-5](https://doi.org/10.1016/0961-9526(93)90005-5). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0961952693900055> (cf. p. 115).
- ISHIHARA, Akira, Natsuki HASHITSUME et Masao TATIBANA (déc. 1951). « Statistical Theory of Rubber-Like Elasticity. IV. (Two-Dimensional Stretching) ». In : *The Journal of Chemical Physics* 19.12. Publisher : American Institute of Physics, p. 1508-1512. ISSN : 0021-9606. DOI : [10.1063/1.1748111](https://doi.org/10.1063/1.1748111). URL : <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1748111> (cf. p. 62, 76, 193, 194).

- ISO 37 (p. d.). ISO 37:2017. fr. Library Catalog : www.iso.org. URL : <https://www.iso.org/cms/render/live/fr/sites/isoorg/contents/data/standard/06/81/68116.html> (cf. p. 22).
- ISO 6721-3 (p. d.). ISO 6721-3:2021. fr. URL : <https://www.iso.org/cms/render/live/fr/sites/isoorg/contents/data/standard/07/99/79997.html> (cf. p. 144).
- JALOCHA, D. (sept. 2020). « Payne effect : A Constitutive model based on a dynamic strain amplitude dependent spectrum of relaxation time ». en. In : *Mechanics of Materials* 148, p. 103526. ISSN : 0167-6636. DOI : [10.1016/j.mechmat.2020.103526](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103526). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663620305688> (cf. p. 70).
- JAMES, A. G., A. GREEN et G. M. SIMPSON (1975). « Strain energy functions of rubber. I. Characterization of gum vulcanizates ». en. In : *Journal of Applied Polymer Science* 19.7. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/app.1975.070190723>, p. 2033-2058. ISSN : 1097-4628. DOI : [10.1002/app.1975.070190723](https://doi.org/10.1002/app.1975.070190723). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/app.1975.070190723> (cf. p. 62).
- JONES, D. I. G. (fév. 1996). « REFLECTIONS ON DAMPING TECHNOLOGY AT THE END OF THE TWENTIETH CENTURY ». en. In : *Journal of Sound and Vibration* 190.3, p. 449-462. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1006/jsvi.1996.0073](https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0073). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X96900735> (cf. p. 138).
- JRIDI, Nidhal, Makrem ARFAOUI, Adel HAMDI, Michelle SALVIA, Olivier BAREILLE, Mohamed ICHCHOU et Jalel ABDALLAH (août 2019). « Separable finite viscoelasticity : integral-based models vs. experiments ». In : *Mechanics of Time-Dependent Materials* 23. DOI : [10.1007/s11043-018-9383-2](https://doi.org/10.1007/s11043-018-9383-2) (cf. p. 66).
- KANIT, T., S. FOREST, I. GALLIET, V. MOUNOURY et D. JEULIN (juin 2003). « Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach ». en. In : *International Journal of Solids and Structures* 40.13, p. 3647-3679. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/S0020-7683\(03\)00143-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00143-4). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303001434> (cf. p. 116, 123, 127, 129).
- KERN, Leyla S., Peter J. HINE et Andrei A. GUSEV (jan. 2019). « Optimizing the damping properties of unidirectional composites by incorporating carbon fibers with a thin viscoelastic coating ». In : *Composite Structures* 208, p. 879-890. ISSN : 0263-8223. DOI : [10.1016/j.compstruct.2018.10.043](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.043). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822318322657> (cf. p. 115, 149, 150).
- KERWIN, Edward M. (juil. 1959). « Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 31.7. Publisher : Acoustical Society of America, p. 952-962. ISSN : 0001-4966. DOI : [10.1121/1.1907821](https://doi.org/10.1121/1.1907821). URL : <https://asa.scitation.org/doi/citedby/10.1121/1.1907821> (cf. p. 139).
- KHIÊM, Vu Ngoc et Mikhail ITSKOV (oct. 2016). « Analytical network-averaging of the tube model : : Rubber elasticity ». en. In : *Journal of the Mechanics and Phy-*

- sics of Solids* 95, p. 254-269. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/j.jmps.2016.05.030](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.05.030). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509615302817> (cf. p. 64).
- KISHI, Hajime, Manabu KUWATA, Satoshi MATSUDA, Toshihiko ASAMI et Atsushi MURAKAMI (déc. 2004). « Damping properties of thermoplastic-elastomer interleaved carbon fiber-reinforced epoxy composites ». en. In : *Composites Science and Technology* 64.16, p. 2517-2523. ISSN : 0266-3538. DOI : [10.1016/j.compscitech.2004.05.006](https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2004.05.006). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353804001393> (cf. p. 139, 147, 149, 150).
- KLÜPPEL, M. (déc. 2008). « Evaluation of viscoelastic master curves of filled elastomers and applications to fracture mechanics ». en. In : *Journal of Physics : Condensed Matter* 21.3. Publisher : IOP Publishing, p. 035104. ISSN : 0953-8984. DOI : [10.1088/0953-8984/21/3/035104](https://doi.org/10.1088/0953-8984/21/3/035104). URL : <https://doi.org/10.1088/0953-8984/21/3/035104> (cf. p. 50).
- KLÜPPEL, Manfred (2003). « The Role of Disorder in Filler Reinforcement of Elastomers on Various Length Scales ». en. In : *Filler-Reinforced Elastomers Scanning Force Microscopy*. Sous la dir. de B. CAPELLA, M. GEUSS, M. KLÜPPEL, M. MUNZ, E. SCHULZ et H. STURM. Advances in Polymer Science. Berlin, Heidelberg : Springer, p. 1-86. ISBN : 978-3-540-36438-2. DOI : [10.1007/b11054](https://doi.org/10.1007/b11054). URL : <https://doi.org/10.1007/b11054> (cf. p. 69, 70).
- KRAUS, G., C. W. CHILDERS et K. W. ROLLMANN (1966). « Stress softening in carbon black-reinforced vulcanizates. Strain rate and temperature effects ». en. In : *Journal of Applied Polymer Science* 10.2, p. 229-244. ISSN : 1097-4628. DOI : [10.1002/app.1966.070100205](https://doi.org/10.1002/app.1966.070100205). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/app.1966.070100205> (cf. p. 68).
- LAKES, Roderic (2009). *Viscoelastic Materials*. Cambridge : Cambridge University Press. ISBN : 978-0-521-88568-3. DOI : [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722) (cf. p. 65).
- LE SAUX, Vincent (oct. 2010). « Fatigue et vieillissement des élastomères en environnements marin et thermique : de la caractérisation accélérée au calcul de structure ». fr. Thèse de doct. Université de Bretagne occidentale - Brest. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00542506> (cf. p. 52).
- LECTEZ, A. -S. et E. VERRON (mai 2016). « Influence of large strain preloads on the viscoelastic response of rubber-like materials under small oscillations ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 81, p. 1-7. ISSN : 0020-7462. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.003](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.003). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746215002292> (cf. p. 80).
- LEJEUNES, S. et S. BOURGEOIS (2011). « Homtools : an abaqus toolbox for the computation of effective properties of heterogeneous media ». In : *proceedings of the 10th National Conference on Computation methods for Structures*. Giens, France. URL : <http://homtools.lma.cnrs-mrs.fr/> (cf. p. 127).
- LEJEUNES, S., T. A. NGUYEN VAN, A. BOUKAMEL et D. EYHERAMENDY (avr. 2012). « Linearized behavior of a dissipative rubber with large static preloads ». In : *Computers & Structures* 96-97, p. 46-53. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2012.04.012](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.04.012)

- 2012.01.006. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794912000077> (cf. p. 80).
- LEJEUNES, Stéphane (jan. 2006). « Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles ». These de doctorat. Aix-Marseille 2. URL : <https://www.theses.fr/2006AIX22007> (cf. p. 63).
- LEJEUNES, Stéphane et Stéphane BOURGEOIS (mai 2011). « Une Toolbox Abaqus pour le calcul de propriétés effectives de milieux hétérogènes ». In : *10e colloque national en calcul des structures*. Giens, France, Clé USB. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00592866> (cf. p. 195).
- LEMAITRE, Jean, Jean-Louis CHABOCHE, Ahmed BENALLAL et Rodrigue DESMORAT (1996). *Mécanique des matériaux solides*. fr. 1^{re} éd. Dunod (cf. p. 66, 73).
- LIANIS, G. (jan. 1965). « Small deformations superposed on an initial large deformation in viscoelastic bodies ». In : NTRS Author Affiliations : Purdue Univ. NTRS Document ID : 19670005160 NTRS Research Center : Legacy CDMS (CDMS). URL : <https://ntrs.nasa.gov/citations/19670005160> (cf. p. 80).
- LIAO, Fu-Sen, An-Chung SU et Tzu-Chien J. HSU (déc. 1994). « Vibration Damping of Interleaved Carbon Fiber-Epoxy Composite Beams ». en. In : *Journal of Composite Materials* 28.18. Publisher : SAGE Publications Ltd STM, p. 1840-1854. ISSN : 0021-9983. DOI : [10.1177/002199839402801806](https://doi.org/10.1177/002199839402801806). URL : <https://doi.org/10.1177/002199839402801806> (cf. p. 138).
- LIEBIG, Wilfried V., Alexander JACKSTADT, Vincent SESSNER, Kay A. WEIDENMANN et Luise KÄRGER (août 2019). « Frequency domain modelling of transversely isotropic viscoelastic fibre-reinforced plastics ». en. In : *Composites Science and Technology* 180, p. 101-110. ISSN : 0266-3538. DOI : [10.1016/j.compscitech.2019.04.019](https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2019.04.019). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026635381832606X> (cf. p. 116, 144).
- LIN, Yeong-Jyh et Sheng-Jye HWANG (nov. 2004). « Temperature prediction of rolling tires by computer simulation ». en. In : *Mathematics and Computers in Simulation* 67.3, p. 235-249. ISSN : 0378-4754. DOI : [10.1016/j.matcom.2004.07.002](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2004.07.002). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475404002319> (cf. p. 46).
- LINDER, Christian, Mykola TKACHUK et Christian MIEHE (oct. 2011). « A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity ». en. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59.10, p. 2134-2156. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/j.jmps.2011.05.005](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2011.05.005). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509611001086> (cf. p. 74).
- LION, A. et C. KARDELKY (juil. 2004). « The Payne effect in finite viscoelasticity : constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales ». In : *International Journal of Plasticity* 20.7, p. 1313-1345. ISSN : 0749-6419. DOI : [10.1016/j.ijplas.2003.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.07.001). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641903001360> (cf. p. 69).
- LION, A., C. KARDELKY et P. HAUPT (mai 2003). « On the Frequency and Amplitude Dependence of the Payne Effect : Theory and Experiments ». In : *Rubber Chemistry*

- and Technology* 76.2, p. 533-547. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3547759](https://doi.org/10.5254/1.3547759). URL : <https://doi.org/10.5254/1.3547759> (cf. p. 39).
- LION, A., J. RETKA et M. RENDEK (sept. 2009). « On the calculation of predeformation-dependent dynamic modulus tensors in finite nonlinear viscoelasticity ». en. In : *Mechanics Research Communications* 36.6, p. 653-658. ISSN : 0093-6413. DOI : [10.1016/j.mechrescom.2009.02.005](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2009.02.005). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009364130900038X> (cf. p. 80).
- LION, Alexander (juin 1996). « A constitutive model for carbon black filled rubber : Experimental investigations and mathematical representation ». en. In : *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 8.3, p. 153-169. ISSN : 1432-0959. DOI : [10.1007/BF01181853](https://doi.org/10.1007/BF01181853). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01181853> (cf. p. 30, 193).
- (mai 1999). « Strain-Dependent Dynamic Properties of Filled Rubber : A Non-Linear Viscoelastic Approach Based on Structural Variables ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 72.2. Publisher : Rubber Division, ACS, p. 410-429. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3538811](https://doi.org/10.5254/1.3538811). URL : <https://www.rubberchemtechnol.org/doi/abs/10.5254/1.3538811> (cf. p. 69).
- LOSSOUARN, Boris, Lucie ROULEAU, Robin DARLEUX et Jean-François DEÛ (jan. 2021). « Comparison of passive damping treatments based on constrained viscoelastic layers and multi-resonant piezoelectric networks. » en. In : *Journal of Structural Dynamics*. ISSN : 2684-6500. DOI : [10.25518/2684-6500.63](https://doi.org/10.25518/2684-6500.63). URL : <https://popups.uliege.be/2684-6500/index.php?id=63> (cf. p. 137).
- MAHERI, M.R. (juin 2011). « The effect of layup and boundary conditions on the modal damping of FRP composite panels ». en. In : *Journal of Composite Materials* 45.13. Publisher : SAGE Publications Ltd STM, p. 1411-1422. ISSN : 0021-9983. DOI : [10.1177/0021998310382314](https://doi.org/10.1177/0021998310382314). URL : <https://doi.org/10.1177/0021998310382314> (cf. p. 138).
- MARCKMANN, Gilles et Erwan VERRON (2006). « Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 79.5, p. 835-858. DOI : [10.5254/1.3547969](https://doi.org/10.5254/1.3547969). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01004680> (cf. p. 61, 64).
- MARSHALL, J. G. et M. IMREGUN (avr. 1996). « a review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications ». en. In : *Journal of Fluids and Structures* 10.3, p. 237-267. ISSN : 0889-9746. DOI : [10.1006/jfls.1996.0015](https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0015). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974696900158> (cf. p. 16).
- MARTINEZ, J. M., A. BOUKAMEL, S. MÉO et S. LEJEUNES (nov. 2011). « Statistical approach for a hyper-visco-plastic model for filled rubber : Experimental characterization and numerical modeling ». en. In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 30.6, p. 1028-1039. ISSN : 0997-7538. DOI : [10.1016/j.euromechsol.2011.06.013](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.06.013). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753811000982> (cf. p. 66).
- MARTINEZ-AGIRRE, Manex, Silvia ILLESCAS et María Jesús ELEJABARRIETA (avr. 2014). « Characterisation and modelling of prestrained viscoelastic films ». In : *International Journal of Adhesion and Adhesives* 50, p. 183-190. ISSN : 0143-7496. DOI : [10.1016/j.ijadad.2014.04.005](https://doi.org/10.1016/j.ijadad.2014.04.005)

- j.ijadhadh.2014.01.029. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014374961400030X> (cf. p. 139).
- MARTONE, A., V. ANTONUCCI, M. ZARRELLI et M. GIORDANO (juil. 2016). « A simplified approach to model damping behaviour of interleaved carbon fibre laminates ». en. In : *Composites Part B : Engineering* 97, p. 103-110. ISSN : 1359-8368. DOI : 10.1016/j.compositesb.2016.04.048. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836816304310> (cf. p. 139).
- MARTONE, A., M. GIORDANO, V. ANTONUCCI et M. ZARRELLI (nov. 2011). « Enhancing damping features of advanced polymer composites by micromechanical hybridization ». In : *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 42.11, p. 1663-1672. ISSN : 1359-835X. DOI : 10.1016/j.compositesa.2011.07.019. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X11002259> (cf. p. 115, 150).
- MEO, S., A. BOUKAMEL et O. DEBORDES (nov. 2002). « Analysis of a thermoviscoelastic model in large strain ». en. In : *Computers & Structures* 80.27, p. 2085-2098. ISSN : 0045-7949. DOI : 10.1016/S0045-7949(02)00246-8. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794902002468> (cf. p. 66).
- MEO, Stéphane (2000). « Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité ». fr. Thèse de doct. (cf. p. 188).
- MÉO, Stéphane (oct. 2012). « Modélisation du comportement (thermo-) mécanique des élastomères et prévision de leur tenue en fatigue ». Habilitation à diriger des recherches. Université François Rabelais de Tours. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01237757> (cf. p. 76).
- MIEHE, C. (1994). « Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.12, p. 1981-2004. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1620371202. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620371202> (cf. p. 63, 64).
- MIEHE, Christian et Serdar GÖKTEPE (oct. 2005). « A micro-macro approach to rubber-like materials. Part II : The micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity ». en. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53.10, p. 2231-2258. ISSN : 0022-5096. DOI : 10.1016/j.jmps.2005.04.006. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509605000918> (cf. p. 67).
- MIEHE, Christian et Joachim KECK (fév. 2000). « Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation ». en. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48.2, p. 323-365. ISSN : 0022-5096. DOI : 10.1016/S0022-5096(99)00017-4. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509699000174> (cf. p. 60).
- MILTON, GW (mar. 2003). « Theory of Composites ». In : *Applied Mechanics Reviews* 56.2, B27-B28. ISSN : 0003-6900. DOI : 10.1115/1.1553445. eprint : <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanicsreviews/article-pdf/>

- 56/2/B27/5439802/b17_1.pdf. URL : <https://doi.org/10.1115/1.1553445> (cf. p. 122).
- MOONEY, M. (sept. 1940). « A Theory of Large Elastic Deformation ». In : *Journal of Applied Physics* 11.9. Publisher : American Institute of Physics, p. 582-592. ISSN : 0021-8979. DOI : [10.1063/1.1712836](https://doi.org/10.1063/1.1712836). URL : <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1712836> (cf. p. 61).
- MORMAN, K. N. (jan. 1988). « An adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like viscoelasticity by use of a generalized strain measure ». en. In : *Rheologica Acta* 27.1, p. 3-14. ISSN : 1435-1528. DOI : [10.1007/BF01372444](https://doi.org/10.1007/BF01372444). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01372444> (cf. p. 65).
- MOULINEC, H. et P. SUQUET (avr. 1998). « A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157.1, p. 69-94. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00218-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00218-1). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782597002181> (cf. p. 196, 197, 204).
- NASHIF, Ahid D., David I. G. JONES et John P. HENDERSON (mar. 1985). *Vibration Damping*. en. Google-Books-ID : oEI1HAXHg4AC. John Wiley & Sons. ISBN : 978-0-471-86772-2 (cf. p. 138, 143).
- NI, R.G. et R.D. ADAMS (mar. 1984). « The Damping and Dynamic Moduli of Symmetric Laminated Composite Beams—Theoretical and Experimental Results ». en. In : *Journal of Composite Materials* 18.2. Publisher : SAGE Publications Ltd STM, p. 104-121. ISSN : 0021-9983. DOI : [10.1177/002199838401800202](https://doi.org/10.1177/002199838401800202). URL : <https://doi.org/10.1177/002199838401800202> (cf. p. 139).
- NOÛS, Camille, Julien BOISSE et Stéphane ANDRÉ (mai 2021). « An FFT solver used for virtual Dynamic Mechanical Analysis experiments : Application to a glassy/amorphous system and to a particulate composite ». en. In : *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics*. Publisher : Episciences.org. DOI : [10.46298/jtcam.6450](https://doi.org/10.46298/jtcam.6450). URL : <https://jtcam.episciences.org/7456/pdf> (cf. p. 116, 198).
- O'BRIEN, D. J., N. R. SOTTOS et S. R. WHITE (avr. 2007). « Cure-dependent Viscoelastic Poisson's Ratio of Epoxy ». en. In : *Experimental Mechanics* 47.2, p. 237-249. ISSN : 1741-2765. DOI : [10.1007/s11340-006-9013-9](https://doi.org/10.1007/s11340-006-9013-9). URL : <https://doi.org/10.1007/s11340-006-9013-9> (cf. p. 120).
- OGDEN, Raymond William et Rodney HILL (fév. 1972). « Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 326.1567. Publisher : Royal Society, p. 565-584. DOI : [10.1098/rspa.1972.0026](https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026). URL : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1972.0026> (cf. p. 62, 63).
- PEREIRA, DA, TAM GUIMARÃES, HB RESENDE et DA RADE (2020). « Numerical and experimental analyses of modal frequency and damping in tow-steered CFRP laminates ». In : *Composite Structures* 244, p. 112190 (cf. p. 149).
- PRITZ, T. (juil. 1998). « FREQUENCY DEPENDENCES OF COMPLEX MODULI AND COMPLEX POISSON'S RATIO OF REAL SOLID MATERIALS ». en. In : *Journal of Sound and Vibration* 214.1, p. 83-104. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1006/jsvi](https://doi.org/10.1006/jsvi).

1998. 1534. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X98915346> (cf. p. 119, 120).
- PRITZ, T. (juil. 2000). « Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials ». en. In : *Applied Acoustics* 60.3, p. 279-292. ISSN : 0003-682X. DOI : 10.1016/S0003-682X(99)00049-3. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003682X99000493> (cf. p. 119).
- QVALE, D. et K. RAVI-CHANDAR (sept. 2004). « Viscoelastic Characterization of Polymers Under Multiaxial Compression ». en. In : *Mechanics of Time-Dependent Materials* 8.3, p. 193-214. ISSN : 1573-2738. DOI : 10.1023/B:MTDM.0000046749.79406.f5. URL : <https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000046749.79406.f5> (cf. p. 119).
- RAO, Mohan D (mai 2003). « Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes ». In : *Journal of Sound and Vibration*. 2001 India-USA Symposium on Emerging Trends in Vibration and Noise Engineering 262.3, p. 457-474. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/S0022-460X(03)00106-8. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X03001068> (cf. p. 140).
- RAVI SANKAR, H, P VAMSI KRISHNA, V BHUJANGA RAO et P BANGARU BABU (avr. 2010). « The effect of natural rubber particle inclusions on the mechanical and damping properties of epoxy-filled glass fibre composites ». en. In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L : Journal of Materials : Design and Applications* 224.2. Publisher : SAGE Publications, p. 63-70. ISSN : 1464-4207. DOI : 10.1243/14644207JMADA282. URL : <https://doi.org/10.1243/14644207JMADA282> (cf. p. 115).
- REESE, Stefanie (juil. 2003). « A micromechanically motivated material model for the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers ». en. In : *International Journal of Plasticity* 19.7, p. 909-940. ISSN : 0749-6419. DOI : 10.1016/S0749-6419(02)00086-4. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641902000864> (cf. p. 67).
- RENDEK, Martin et Alexander LION (oct. 2010). « Amplitude dependence of filler-reinforced rubber : Experiments, constitutive modelling and FEM – Implementation ». In : *International Journal of Solids and Structures* 47.21, p. 2918-2936. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2010.06.021. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768310002428> (cf. p. 70).
- REY, T., G. CHAGNON, J. -B. LE CAM et D. FAVIER (mai 2013). « Influence of the temperature on the mechanical behaviour of filled and unfilled silicone rubbers ». en. In : *Polymer Testing* 32.3, p. 492-501. ISSN : 0142-9418. DOI : 10.1016/j.polymertesting.2013.01.008. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014294181300010X> (cf. p. 47).
- RIVLIN, R. S., D. W. SAUNDERS et E. N. Da C. ANDRADE (avr. 1951). « Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 243.865. Publisher : Royal Society, p. 251-288. DOI : 10.1098/rsta.1951.0004. URL : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1951.0004> (cf. p. 60, 62, 76).

- RIVLIN, R. S. et K. N. SAWYERS (déc. 1976). « The Strain-Energy Function for Elastomers ». In : *Transactions of the Society of Rheology* 20.4. Publisher : The Society of Rheology, p. 545-557. ISSN : 0038-0032. DOI : [10.1122/1.549436](https://doi.org/10.1122/1.549436). URL : <https://sor.scitation.org/doi/10.1122/1.549436> (cf. p. 62, 193).
- ROSS, D., E.E. UNGAR et E.M. KERWIN (1959). « Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminae ». In : *Structural Damping* (cf. p. 138).
- ROUGIER, Yves, Claude STOLZ et André ZAOUI (1993). « Représentation spectrale en viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes ». In : (cf. p. 116).
- ROULEAU, Lucie et Jean-François DEÛ (2019). « Modélisation des propriétés dynamiques de matériaux viscoélastiques pré-contraints ». In : URL : <https://csma2019.sciencesconf.org/240869> (cf. p. 139).
- SALENÇON, Jean (2019). *Viscoelastic Modeling for Structural Analysis* | Wiley. en-us. Wiley-ISTE. ISBN : 978-1-119-61835-5. URL : <https://www.wiley.com/en-us/Viscoelastic+Modeling+for+Structural+Analysis-p-9781786304452> (cf. p. 36, 88).
- SASEENDRAN, Sibin, Maciej WYSOCKI et Janis VARNA (juil. 2017). « Cure-state dependent viscoelastic Poisson's ratio of LY5052 epoxy resin ». In : *Advanced Manufacturing : Polymer & Composites Science* 3.3. Publisher : Taylor & Francis _-eprint : <https://doi.org/10.1080/20550340.2017.1348002>, p. 92-100. ISSN : 2055-0340. DOI : [10.1080/20550340.2017.1348002](https://doi.org/10.1080/20550340.2017.1348002). URL : <https://doi.org/10.1080/20550340.2017.1348002> (cf. p. 119, 120).
- SCHAPER, R. A. (juil. 1966). « An engineering theory of nonlinear viscoelasticity with applications ». en. In : *International Journal of Solids and Structures* 2.3, p. 407-425. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/0020-7683\(66\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(66)90030-8). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768366900308> (cf. p. 66).
- (1967). « Stress analysis of viscoelastic composite materials ». In : *Journal of Composite Materials* 1.3, p. 228-267 (cf. p. 116).
- SHELTON, J. Reid (nov. 1957). « Aging and Oxidation of Elastomers ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 30.5, p. 1251-1290. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3542760](https://doi.org/10.5254/1.3542760). URL : <https://doi.org/10.5254/1.3542760> (cf. p. 52, 54).
- SHEN, I. Y. (juil. 1994). « Hybrid Damping Through Intelligent Constrained Layer Treatments ». In : *Journal of Vibration and Acoustics* 116.3, p. 341-349. ISSN : 1048-9002. DOI : [10.1115/1.2930434](https://doi.org/10.1115/1.2930434). URL : <https://doi.org/10.1115/1.2930434> (cf. p. 137).
- SIDOROFF, François (1973). « The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain ». In : 25, p. 299-309 (cf. p. 66, 73).
- (1974). « Un modèle viscoélastique non-linéaire avec configuration intermédiaire ». In : *Journal de Mécanique* (cf. p. 73).
- (1975a). « Variables internes en viscoélasticité, 1. variables internes scalaires et tensorielles ». In : 14, p. 545-566 (cf. p. 66).
- (1975b). « Variables internes en viscoélasticité, 2. milieux avec configuration intermédiaire ». In : 14, p. 571-595 (cf. p. 66, 73).

- SIDOROFF, François (1976). « Variables internes en viscoélasticité, 3. milieux avec plusieurs configurations intermédiaires ». In : 15, p. 85-118 (cf. p. 66).
- SIMO, J. C., R. L. TAYLOR et K. S. PISTER (sept. 1985). « Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51.1, p. 177-208. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/0045-7825\(85\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90033-7). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782585900337> (cf. p. 105, 212).
- SLEIMAN, Hussein (juin 2010). « Systèmes de suspension semi-active à base de fluide magnétorhéologique pour l'automobile ». fr. Thèse de doct. Arts et Métiers ParisTech. URL : <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00502171> (cf. p. 17).
- Standard Guide for Dynamic Testing of Vulcanized Rubber and Rubber-Like Materials Using Vibratory Methods* (p. d.). en. URL : <https://www.astm.org/d5992-96r18.html> (cf. p. 38).
- STEINMANN, Paul, Mokarram HOSSAIN et Gunnar POSSART (sept. 2012). « Hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and suitability for Treloar's data ». en. In : *Archive of Applied Mechanics* 82.9, p. 1183-1217. ISSN : 1432-0681. DOI : [10.1007/s00419-012-0610-z](https://doi.org/10.1007/s00419-012-0610-z). URL : <https://doi.org/10.1007/s00419-012-0610-z> (cf. p. 64).
- SWOLFS, Yentl, Ignaas VERPOEST et Larissa GORBATIKH (2019). « Recent advances in fibre-hybrid composites : materials selection, opportunities and applications ». In : *International Materials Reviews* 64.4, p. 181-215 (cf. p. 114).
- THIERRY, Olivier (déc. 2016). « Réduction des vibrations de structures composites complexes par dispositifs piézoélectriques shuntés : application aux aubes de turbomachines ». fr. In : URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01620672> (cf. p. 17, 137).
- TORQUATO et HASLACH (juil. 2002). « Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties ». en. In : *Applied Mechanics Reviews* 55.4. Publisher : American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, B62-B63. ISSN : 0003-6900. DOI : [10.1115/1.1483342](https://doi.org/10.1115/1.1483342). URL : <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanicsreviews/article/55/4/B62/458303/Random-Heterogeneous-Materials-Microstructure-and> (cf. p. 127).
- TRELOAR, L. R. G. (jan. 1943). « The elasticity of a network of long-chain molecules—II ». en. In : *Transactions of the Faraday Society* 39.0. Publisher : The Royal Society of Chemistry, p. 241-246. ISSN : 0014-7672. DOI : [10.1039/TF9433900241](https://doi.org/10.1039/TF9433900241). URL : <https://pubs.rsc.org/en/content/articlelanding/1943/tf/tf9433900241> (cf. p. 62).
- (jan. 1944). « Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation ». en. In : *Transactions of the Faraday Society* 40.0. Publisher : The Royal Society of Chemistry, p. 59-70. ISSN : 0014-7672. DOI : [10.1039/TF9444000059](https://doi.org/10.1039/TF9444000059). URL : <https://pubs.rsc.org/en/content/articlelanding/1944/tf/tf9444000059> (cf. p. 61).
- TREVISIO, A., B. VAN GENECHTEN, D. MUNDO et M. TOURNOUR (sept. 2015). « Damping in composite materials : Properties and models ». en. In : *Composites Part*

- B : Engineering* 78, p. 144-152. ISSN : 1359-8368. DOI : [10.1016/j.compositesb.2015.03.081](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.03.081). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836815002139> (cf. p. 138).
- TRUESDELL, C. et W. NOLL (1965). « The Non-Linear Field Theories of Mechanics ». en. In : *The Non-Linear Field Theories of Mechanics / Die Nicht-Linearen Feldtheorien der Mechanik*. Sous la dir. de C. TRUESDELL et W. NOLL. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik. Berlin, Heidelberg : Springer, p. 1-541. ISBN : 978-3-642-46015-9. DOI : [10.1007/978-3-642-46015-9_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-46015-9_1). URL : https://doi.org/10.1007/978-3-642-46015-9_1 (cf. p. 65).
- TSIMOURI, Ioanna Ch, Samuel MONTIBELLER, Leyla KERN, Peter J. HINE, Ralph SPOLENAK, Andrei A. GUSEV et Stefano DANZI (mai 2021). « A simulation-driven design approach to the manufacturing of stiff composites with high viscoelastic damping ». en. In : *Composites Science and Technology* 208, p. 108744. ISSN : 0266-3538. DOI : [10.1016/j.compscitech.2021.108744](https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2021.108744). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353821001007> (cf. p. 140).
- ULMER, J. D. (mar. 1996). « Strain Dependence of Dynamic Mechanical Properties of Carbon Black-Filled Rubber Compounds ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 69.1. Publisher : Rubber Division, ACS, p. 15-47. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3538354](https://doi.org/10.5254/1.3538354). URL : <https://rubberchemtechnol.org/doi/abs/10.5254/1.3538354> (cf. p. 68).
- UNGAR, Eric E. et Edward M. KERWIN (juil. 1962). « Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 34.7. Publisher : Acoustical Society of America, p. 954-957. ISSN : 0001-4966. DOI : [10.1121/1.1918227](https://doi.org/10.1121/1.1918227). URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1918227> (cf. p. 140).
- VAHDATI, Mehdi, Kuen-Bae LEE et Prathiban SURESHKUMAR (2020). « A Review of Computational Aeroelasticity Of Civil Fan Blades ». In : *International Journal of Gas Turbine, Propulsion and Power Systems* 11.4, p. 22-35. DOI : [10.38036/jgpp.11.4_22](https://doi.org/10.38036/jgpp.11.4_22) (cf. p. 16).
- WALL, F. T. (1942). « Statistical Thermodynamics of Rubber. II ». In : DOI : [10.1063/1.1723753](https://doi.org/10.1063/1.1723753) (cf. p. 61).
- WANG, Anni, Xiaojun WANG et Guijun XIAN (déc. 2021). « The influence of stacking sequence on the low-velocity impact response and damping behavior of carbon and flax fabric reinforced hybrid composites ». en. In : *Polymer Testing* 104, p. 107384. ISSN : 0142-9418. DOI : [10.1016/j.polymertesting.2021.107384](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2021.107384). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142941821003299> (cf. p. 140).
- WARLEY, Russell L. et James R. HALLADAY (sept. 2005). « Effect of ambient temperature and cure state on the age stiffening of a cured NR/BR blend ». en. In : *Polymer Testing* 24.6, p. 678-683. ISSN : 0142-9418. DOI : [10.1016/j.polymertesting.2005.06.004](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2005.06.004). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142941805000954> (cf. p. 54).
- WILLIAMS, Malcolm L., Robert F. LANDEL et John D. FERRY (juil. 1955). « The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other

- Glass-forming Liquids ». In : *Journal of the American Chemical Society* 77.14, p. 3701-3707. ISSN : 0002-7863. DOI : [10.1021/ja01619a008](https://doi.org/10.1021/ja01619a008). URL : <https://doi.org/10.1021/ja01619a008> (cf. p. 49).
- WINEMAN, A. (mai 2009). « Nonlinear Viscoelastic Solids—A Review ». en. In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 14.3. Publisher : SAGE Publications Ltd STM, p. 300-366. ISSN : 1081-2865. DOI : [10.1177/1081286509103660](https://doi.org/10.1177/1081286509103660). URL : <https://doi.org/10.1177/1081286509103660> (cf. p. 65).
- XIANG, Yuhai, Danming ZHONG, Stephan RUDYKH, Haofei ZHOU, Shaoxing QU et Wei YANG (août 2020). « A Review of Physically Based and Thermodynamically Based Constitutive Models for Soft Materials ». In : *Journal of Applied Mechanics* 87.11. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.4047776](https://doi.org/10.1115/1.4047776). URL : <https://doi.org/10.1115/1.4047776> (cf. p. 68).
- YEOH, O. H. (nov. 1993). « Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber ». In : *Rubber Chemistry and Technology* 66.5, p. 754-771. ISSN : 0035-9475. DOI : [10.5254/1.3538343](https://doi.org/10.5254/1.3538343). URL : <https://doi.org/10.5254/1.3538343> (cf. p. 193).
- YIM, Jong Hee, Shee Yong CHO, Yun Jong SEO et Bor Z. JANG (juin 2003). « A study on material damping of 0° laminated composite sandwich cantilever beams with a viscoelastic layer ». en. In : *Composite Structures* 60.4, p. 367-374. ISSN : 0263-8223. DOI : [10.1016/S0263-8223\(03\)00051-5](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822303000515). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822303000515> (cf. p. 139).
- YIM, Jong Hee et J. W GILLESPIE JR (nov. 2000). « Damping characteristics of 0° and 90° AS4/3501-6 unidirectional laminates including the transverse shear effect ». en. In : *Composite Structures* 50.3, p. 217-225. ISSN : 0263-8223. DOI : [10.1016/S0263-8223\(00\)00087-8](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822300000878). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822300000878> (cf. p. 138, 149).
- YING LI, Shan TANG, Martin KRÖGER et WING KAM LIU (mar. 2016). « Molecular simulation guided constitutive modeling on finite strain viscoelasticity of elastomers ». en. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 88, p. 204-226. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/j.jmps.2015.12.007](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509615303550). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509615303550> (cf. p. 68).
- YUAN, Lu, Zhi-Xiang GU, Zheng-Nan YIN et Heng XIAO (déc. 2015). « New compressible hyper-elastic models for rubberlike materials ». en. In : *Acta Mechanica* 226.12, p. 4059-4072. ISSN : 1619-6937. DOI : [10.1007/s00707-015-1475-3](https://doi.org/10.1007/s00707-015-1475-3). URL : <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1475-3> (cf. p. 64).
- ZHAO, Zihan, Xihui MU et Fengpo DU (mai 2019). « Modeling and Verification of a New Hyperelastic Model for Rubber-Like Materials ». en. In : *Mathematical Problems in Engineering* 2019. Publisher : Hindawi, e2832059. ISSN : 1024-123X. DOI : [10.1155/2019/2832059](https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/2832059/). URL : <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/2832059/> (cf. p. 64).
- ZHENG, Changsheng, Fenghai DUAN et Sen LIANG (2021). « Manufacturing and mechanical performance of novel epoxy resin matrix carbon fiber reinforced damping composites ». In : *Composite Structures* 256, p. 113099 (cf. p. 140, 150).
- ZOGHAIB, Lionel (déc. 2006). « Optimisation vibroacoustique de structures amorties par des traitements en élastomère ». fr. Thèse de doct. Université de la Méditerranée

Bibliographie

- Aix-Marseille II. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00164596>
(cf. p. 140).

ANNEXES

A. Matrice d'essais réalisés

Explication du vocabulaire

L'explication de chaque essai est écrit dans le manuscrit, il s'agit ici simplement de définir les abréviations utilisées dans la matrice d'essais.

- ◆ Carac. Mullins : Caractérisation de l'effet Mullins par l'application d'un chargement triangulaire cyclique à amplitude croissante puis décroissante.
- ◆ RP : Relaxation par paliers
- ◆ RS : Relaxation simple
- ◆ Harmoniques HA : Essais harmoniques à hautes amplitudes (plus grandes que celles des essais DMA) pour caractériser le domaine non-linéaire du matériau.
- ◆ DMA (F et A) : Balayages en fréquences et en amplitudes dynamique sur signaux harmoniques dans le domaine linéaire de comportement.
- ◆ CD : Essais de charge-décharge quasi-statique.

Pour chaque type d'éprouvette (H2, QC, plot) : les essais sont réalisés dans le mode de sollicitation approprié. Par exemple "RP" dans la case plot vierge signifie une relaxation par paliers en compression confinée.

Matrice d'essais

Eprouvette	Traitement thermique	Essais à -40 °C	Essais à 20 °C	Essais à 70 °C
H2	Vierge	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • DMA (F et A) 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RS • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A) • CD 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A)
	Cuite	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • DMA (F et A) 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RS • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A) • CD 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A)
	Vieillie		<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • DMA (F et A) 	
QC	Vierge	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • DMA (F et A) 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RS • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A) • CD 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A) • CD
	Cuite	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • DMA (F et A) 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RS • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A) • CD 	<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • Harmoniques HA • DMA (F et A) • CD
	Vieillie		<ul style="list-style-type: none"> • Carac. Mullins • RP • DMA (F et A) 	
plot	Vierge		<ul style="list-style-type: none"> • CD • RP 	<ul style="list-style-type: none"> • CD • RP
	Cuite		<ul style="list-style-type: none"> • CD • RP 	<ul style="list-style-type: none"> • CD • RP
Diabolo	Vierge		Traction-Torsion (multiples configurations)	Traction-Torsion (multiples configurations)
	Cuite		Traction-Torsion (multiples configurations)	Traction-Torsion (multiples configurations)

Mise en place des éprouvettes pour le cycle de polymérisation



FIGURE A.1. – Cuisson des éprouvettes d'élastomères à l'autoclave - 1



(a) Thermocouple de contrôle dans diablo



(b) Thermocouple de contrôle dans QC

FIGURE A.2. – Cuisson des éprouvettes d'élastomères à l'autoclave - 2

B. Etude domaine validité DMA

Une possibilité pour estimer la validité de l'analyse DMA pour une valeur d'amplitude du chargement harmonique définie est d'étudier la décomposition de Fourier du signal temporel de force associé à ce pas d'amplitude. La figure B.1 représente les transformées de Fourier discrètes du signal de force en réponse au signal de déplacement imposé pour trois valeurs d'amplitude de déformation : 6.25%, 38.125% et 73.7%. La figure B.2 représente les mêmes transformées mais normalisée par le coefficient associé à la fréquence du fondamental afin de quantifier la dispersion par rapport à celui-ci. Les transformées de Fourier discrètes font volontairement apparaître seulement les sept premiers harmoniques : le fondamental et les harmoniques supérieurs de $2f$ à $6f$, le reste étant d'amplitude négligeable.

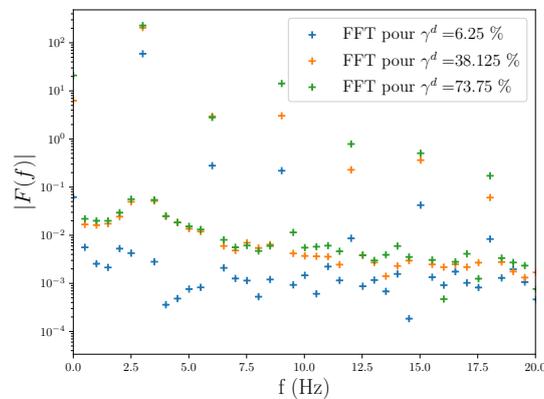


FIGURE B.1. – Transformée de Fourier discrète du signal de force pour trois sollicitations à trois amplitudes dynamiques différentes : $\gamma^d = 6.25\%$, $\gamma^d = 38.12\%$ et $\gamma^d = 73.75\%$.

Transformées de Fourier discrètes normalisées par $F(f_0)$, le coefficient associé à la fréquence de l'harmonique fondamentale. Cette représentation permet de visualiser directement la dispersion des signaux par rapport à leur signal associé à la fréquence du fondamental.

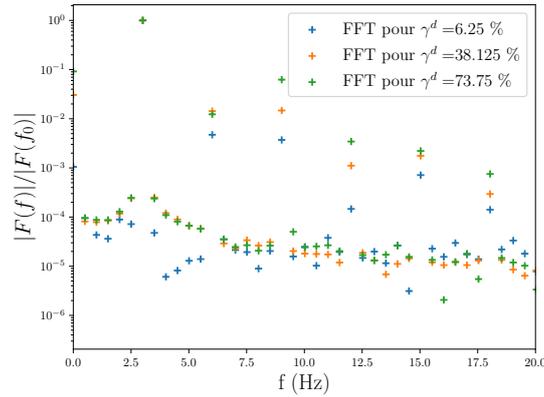


FIGURE B.2. – Transformée de Fourier discrète du signal de force normalisée par le coefficient associé à la fréquence du fondamental pour trois sollicitations à trois amplitudes dynamiques différentes : $\gamma^d = 6.25\%$, $\gamma^d = 38.12\%$ et $\gamma^d = 73.75\%$.

Une observation pertinente se dégage de ces deux courbes (B.1 et B.2), le signal avec l’amplitude dynamique la plus élevée possède la dispersion la plus grande par rapport au signal brut défini à une fréquence de 3Hz. Cette dispersion est la plus élevée sur les harmoniques 3f et 5f. Le taux de distorsion harmonique THD permet de quantifier la dispersion des signaux aux différentes amplitudes. Il est choisi ici d’estimer le taux de distorsion harmonique sans séparer les harmoniques du bruit de fond $THD + N$ car le signal de bruit seul n’est pas connu. Ce dernier est défini en équation B.1.

$$THD + N = 100 \times \frac{\sqrt{v^2 - v_1^2}}{v} \quad (B.1)$$

Où v est la valeur efficace globale du signal de sortie et v_1 est la valeur efficace de l’harmonique de rang 1 (le fondamental).

	$\gamma^d = 6.25\%$	$\gamma^d = 38.12\%$	$\gamma^d = 73.75\%$
THD+N (%)	2.1	2.5	6.5

Tableau B.1. – Taux du distorsion harmonique avec bruit pour les réponses aux signaux d’amplitude dynamique différente.

Cette étude permet de postuler que la modification de la distorsion harmonique du signal de réponse en effort peut permettre d’estimer le domaine de validité d’une DMA en fonction de l’amplitude dynamique.

C. Influence de la précharge statique sur les DMA en traction

Comme expliqué en paragraphe 1.2.2.4, seulement deux précharges ont été étudiées en traction valant respectivement 25% et 50% en déformation globale, soit 16.8% et 33.7% en déformation dans la zone utile. En figures C.1 et C.2 les balayages en fréquence (a) et en amplitude (b) des modules de Young de stockage et de perte respectivement pour deux précharges différentes. Ces courbes permettent premièrement de souligner la forte dépendance des modules dynamiques à la précharge statique. Sur les balayages en fréquence, un écart quasi-constant entre les courbes issues des deux précharges est observable sur les plages de fréquences réalisées. Tandis que sur les balayages en amplitude dynamique l'écart entre les deux précharges se ressert en allant vers les amplitudes dynamiques croissantes. Deux points sont déduits de ces observations : il est nécessaire de modéliser la dépendance à la précharge statique des propriétés dynamiques, et cette dépendance n'est pas linéaire dans le cas de variation de l'amplitude dynamique. Ce dernier aspect souligne d'autant plus le comportement non-linéaire lié à l'effet Payne.

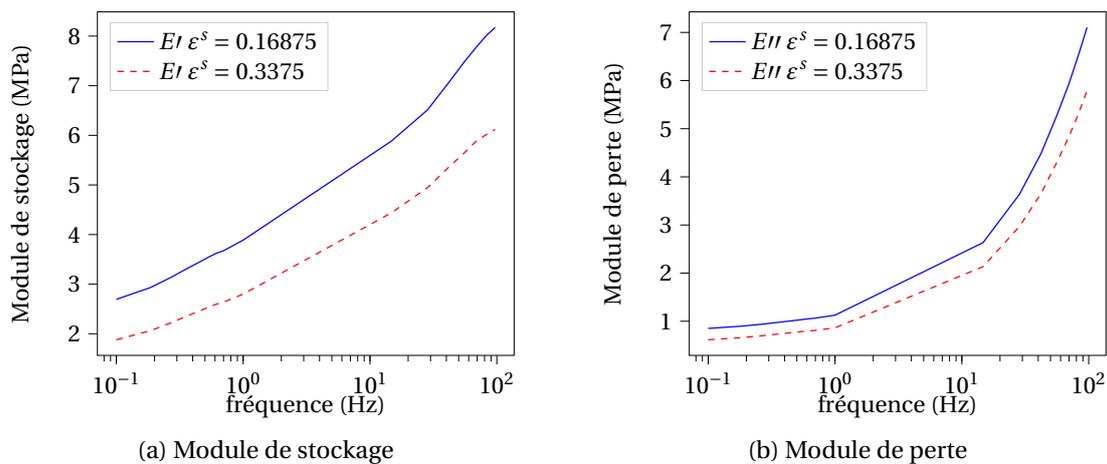


FIGURE C.1. – Module de stockage et module de perte en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de précharges

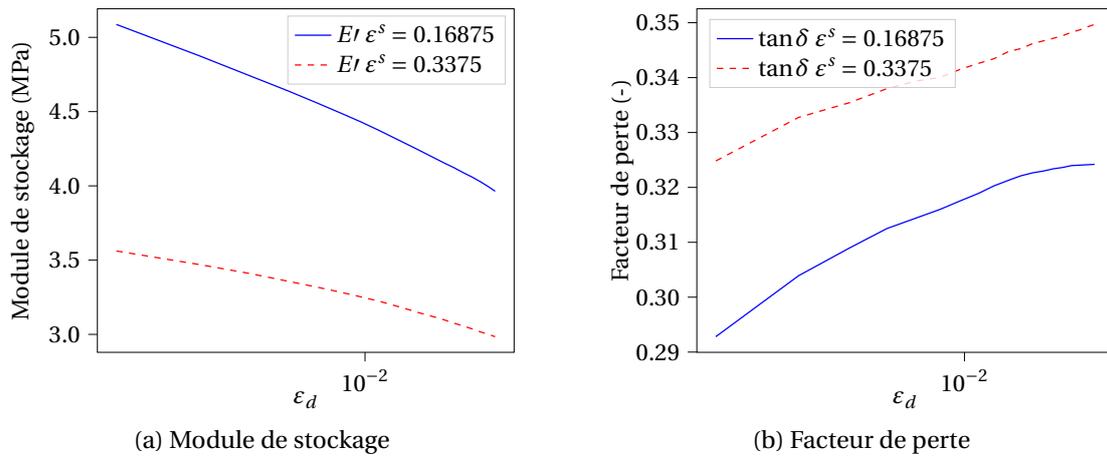


FIGURE C.2. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour différentes valeurs de précharges

D. Essais de relaxation par palier en compression hydrostatique à 70°C

Des essais de relaxation par paliers en compression hydrostatique à 70°C ont été réalisés sur des plots d'élastomère. Les résultats sont présentés en figure D.1. Ces résultats ne sont pas concluants vis-à-vis de la forte variabilité entre éprouvettes du même type. Les paliers de montée en charge mettent davantage en exergue le problème. L'hypothèse la plus probable pour expliquer ces résultats est que la mise en charge du plot met le fluide lubrifiant sous pression et ce dernier se mettrait à bouger et s'échapperait en partie du montage. A chaud et en montée de charge, certains paliers présentent des cinétiques similaires à des relaxations mais le phénomène de dilatation thermique peut également expliquer ces allures. En revanche, les paliers de décharge présentent moins de variation inattendue et permettent finalement de déduire que la relaxation est quasiment inexistante pour ce mode de sollicitation.

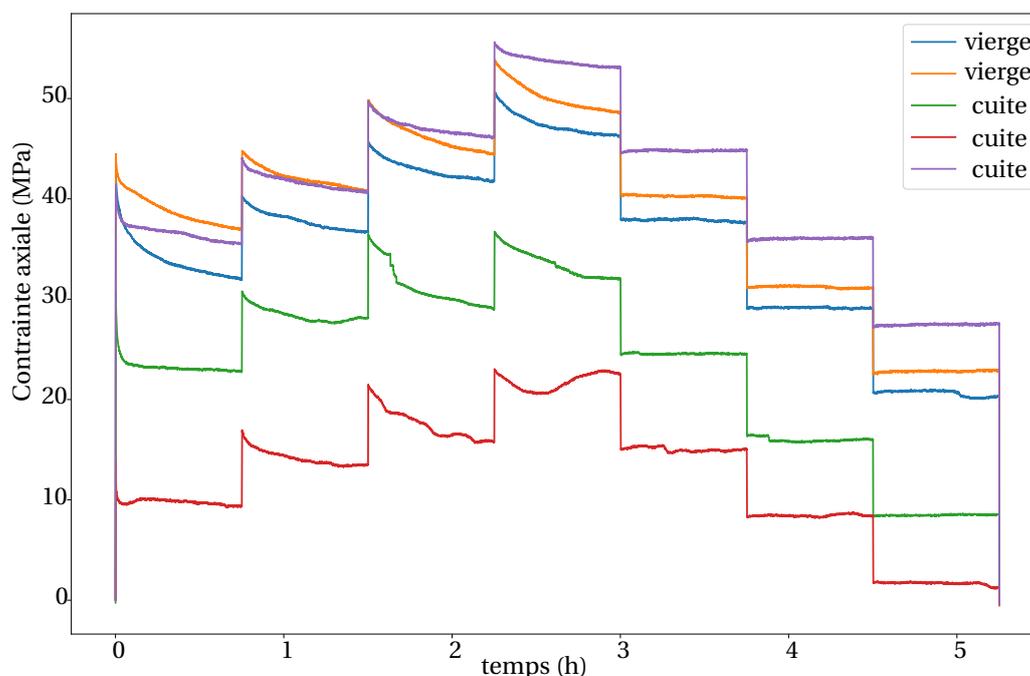


FIGURE D.1. – Contrainte en fonction du temps pour les relaxations par palier en compression hydrostatique sur plot cuit et vierge

E. Caractérisation DMA des éprouvettes de cisaillement vieilles

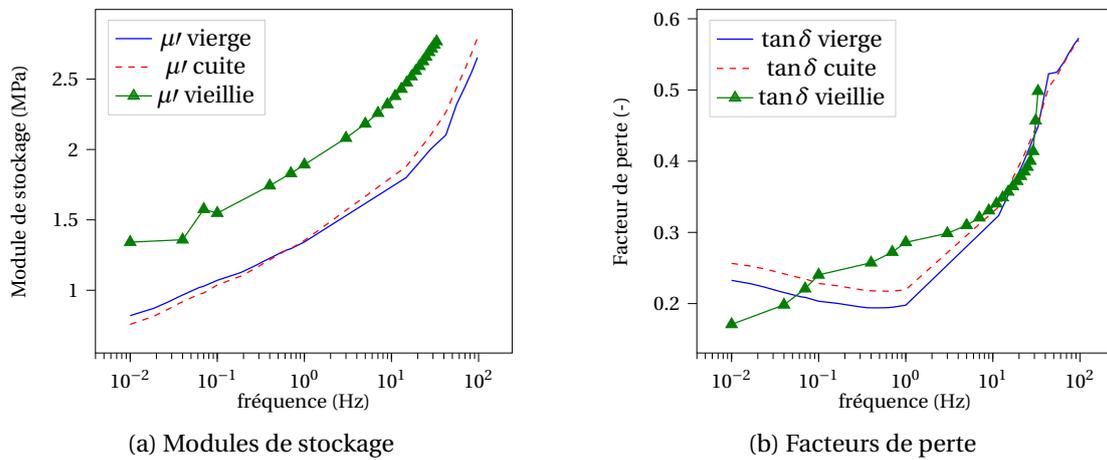


FIGURE E.1. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence pour éprouvette de cisaillement vieilles, éprouvette cuite et éprouvette vierge

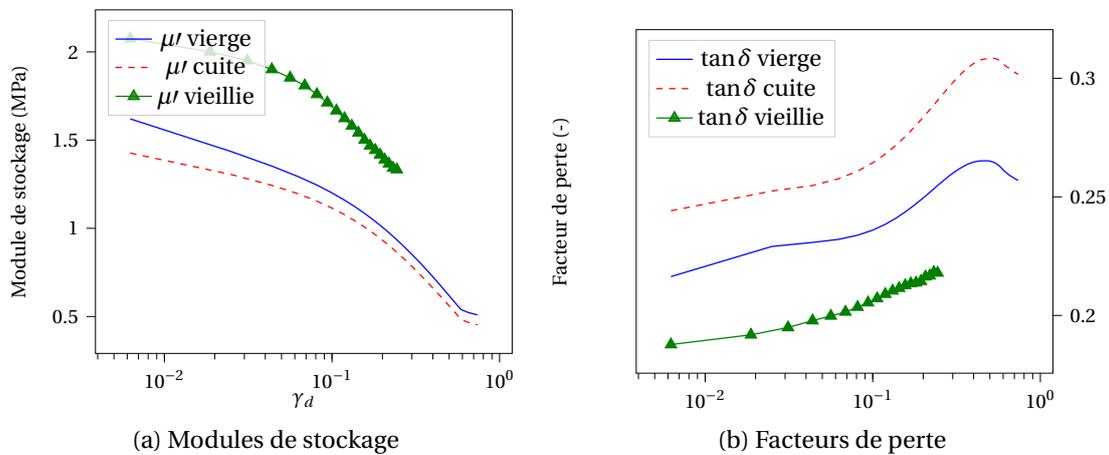


FIGURE E.2. – Module de stockage et facteur de perte en fonction de l'amplitude dynamique pour éprouvette de cisaillement vieilles, éprouvette cuite et éprouvette vierge

F. Formalisme grandes déformations et principes de la thermodynamique

F.1. Préliminaires : outils pour la description des grandes déformations

Ce paragraphe rappelle de manière succincte les outils mathématiques permettant de décrire un problème mécanique dans le cadre des grandes transformations. Le lecteur pourra se référer par exemple à Stéphane MEO 2000 pour une description plus détaillée sur le cadre thermodynamique.

F.1.1. Description du mouvement

◆ Gradient de transformation

L'évolution de la géométrie d'un solide se décrit par l'existence d'une transformation $\vec{\phi}$ qui associe à chaque position initiale \vec{X} sa nouvelle position \vec{x} dans la configuration à l'instant t :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad (\text{E1})$$

Le gradient du déplacement, noté \mathbf{F} , est une mesure usuelle permettant de caractériser la sollicitation locale du matériau et se définit comme suit.

$$\mathbf{F} = \frac{d\vec{x}}{d\vec{X}} \quad (\text{E2})$$

Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de création ou destruction de matière durant la transformation, l'application linéaire \mathbf{F} est localement inversible et son déterminant J caractérise le changement de volume. La transformation d'un élément de volume dV s'écrit alors :

$$dv = JdV \quad (\text{E3})$$

L'incompressibilité se traduit par la relation :

$$J = 1 \quad (\text{E4})$$

◆ Décomposition polaire

La décomposition polaire du gradient de la transformation \mathbf{F} s'écrit de la façon suivante.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{E5})$$

Où \mathbf{R} est le tenseur de rotation propre et \mathbf{U} et \mathbf{V} sont des tenseurs symétriques définis positifs correspondant à une déformation pure du milieu (privée de

rotation). \mathbf{R} vérifie les propriétés suivantes.

$$\begin{cases} \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \\ \det(\mathbf{R}) = 1 \end{cases}$$

◆ **Vitesse de déformation**

La dérivée temporelle du gradient de la transformation $\dot{\mathbf{F}} = D\mathbf{F}/Dt$ est reliée au tenseur gradient des vitesses \mathbf{L} par la relation suivante.

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (\text{F.6})$$

Le tenseur \mathbf{L} peut se décomposer en une partie symétrique \mathbf{D} et en une partie anti-symétrique \mathbf{W} qui représentent respectivement le taux de déformation et le taux de rotation du champ des vitesses.

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \end{cases} \quad (\text{F.7})$$

F.1.2. Mesure de déformation

◆ **Description lagrangienne**

La description lagrangienne correspond à la description du mouvement dans la configuration non-déformée. Dans cette configuration, le tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} et le tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E} sont les mesures les plus communément utilisées pour la description lagrangienne du mouvement d'un corps. Ces deux tenseurs sont définis de la façon suivante.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{F.8})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{F.9})$$

◆ **Description eulérienne**

La description eulérienne correspond à la description du mouvement dans la configuration déformée. Dans cette configuration, le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} et le tenseur d'Almansi-Euler \mathbf{A} sont les mesures les plus communément utilisées pour la description eulérienne du mouvement d'un corps. Ces deux tenseurs sont définis de la façon suivante.

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (\text{F.10})$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{F.11})$$

F.1.3. Description des efforts et mesure de contrainte

◆ Description eulérienne

La contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte associant à une surface unitaire $\vec{d}s$ de la configuration déformée la force $\vec{d}f$ agissant sur cette surface.

$$\vec{d}f = \boldsymbol{\sigma} \vec{d}s \quad (\text{F.12})$$

Il s'agit d'un tenseur symétrique.

◆ Description mixte

L'élément de surface déformé n'est pas toujours connu en pratique, c'est pourquoi l'on raisonne souvent avec le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{\Pi}$ qui relie la force exercée à travers un élément de surface déformée $\vec{d}f$ à la surface unitaire $\vec{d}S$ non-déformée.

$$\vec{d}f = \boldsymbol{\Pi} \vec{d}S \quad (\text{F.13})$$

$$\boldsymbol{\Pi} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{F.14})$$

$\boldsymbol{\Pi}$ n'est pas symétrique.

◆ Description lagrangienne

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} associe à la surface unitaire de la configuration non-déformée $\vec{d}S$ la force $\vec{d}F$ agissant sur cette surface.

$$\vec{d}F = \mathbf{S} \vec{d}S \quad (\text{F.15})$$

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \quad (\text{F.16})$$

Le tenseur \mathbf{S} est symétrique.

F.1.4. Premier principe de la thermodynamique

Soit un solide contenu un domaine Ω (resp. ω) dans sa configuration non-déformée (resp. déformée). Si l'on considère que \mathcal{E} est son énergie interne et P_{int} la puissance des efforts intérieurs et Q le taux de chaleur reçu. La conservation de l'énergie donne la relation suivante.

$$\dot{\mathcal{E}} = P_{int} + \mathcal{Q} \quad (\text{F.17})$$

Où \mathcal{E} peut s'exprimer en fonction de sa valeur spécifique e .

$$\mathcal{E} = \int_{\omega} \rho e dv = \int_{\Omega} \rho_0 e dV \quad (\text{F.18})$$

La puissance des efforts intérieurs s'écrit de la façon suivante, d'après le principe des puissances virtuelles.

$$P_{int} = \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv = \int_{\Omega} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} dV \quad (\text{F.19})$$

Le taux de chaleur \mathcal{Q} se décompose en une partie massique r et une perte surfacique q (resp. Q) à travers $\partial\omega$ (resp. $\partial\Omega$) :

$$\mathcal{Q} = \int_{\omega} \rho r dv - \int_{\partial\omega} q ds = \int_{\Omega} \rho_0 r dV - \int_{\partial\Omega} Q dS \quad (\text{F.20})$$

La conservation de l'énergie peut s'écrire, localement, des trois façons suivantes.

◆ Formulation eulérienne

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \text{div}_x(q) \quad (\text{F.21})$$

◆ Formulation mixte

$$\rho_0 \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 r - \text{div}_X(Q) \quad (\text{F.22})$$

◆ Formulation lagrangienne

$$\rho_0 \dot{e} = \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} + \rho_0 r - \text{div}_X(Q) \quad (\text{F.23})$$

F.1.5. Second principe et inégalité de Clausius-Duhem

Soit \mathcal{S} l'entropie du système et s sa densité massique. Le second principe pour un système non adiabatique s'écrit de la façon suivante.

$$\dot{\mathcal{S}} - \frac{\mathcal{Q}}{T} \geq 0 \quad (\text{F.24})$$

Où \mathcal{Q} est le taux de chaleur reçu par le système et T est la température. Soit ϕ_0 (respectivement ϕ) la dissipation dans la configuration non-déformée (resp. déformée). Cette relation combinée à la conservation de l'énergie permet d'obtenir l'inégalité de Clausius-Duhem. Elles sont explicitées ci-dessous dans le cas isotherme et où le matériau a une température homogène.

◆ Formulation eulérienne

$$\phi = -\rho(\dot{e} - T\dot{s}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (\text{F.25})$$

◆ Formulation lagrangienne

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{s}) + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad (\text{F.26})$$

◆ Formulation mixte

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{s}) + \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad (\text{E27})$$

F.1.6. Invariants de déformation

Le théorème de représentation affirme que pour un tenseur symétrique \mathbf{A} , si la fonction $\psi(\mathbf{A})$ est une fonction scalaire isotrope, alors elle est équivalente à son écriture en fonction des invariants de \mathbf{A} . Les trois invariants sont définis ci-dessous.

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{ii} \quad (\text{E28})$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[(\text{Tr}(\mathbf{A}))^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}^2)] = \frac{1}{2}[(\mathbf{A}_{ii}\mathbf{A}_{jj} - \mathbf{A}_{ji}\mathbf{A}_{ij})] \quad (\text{E29})$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \quad (\text{E30})$$

Et on a la relation suivante :

$$\psi(\mathbf{A}) = \psi(I_1, I_2, I_3) \quad (\text{E31})$$

F.1.7. Cas particuliers

◆ Traction uni-axiale

La traction uni-axiale est définie par le tenseur gradient de transformation suivant.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (\text{E32})$$

◆ Cisaillement simple

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E33})$$

G. Étude comparative de différents modèles hyperélastiques

Afin de déterminer un modèle hyperélastique adapté au comportement du matériau caractérisé dans le chapitre 1, plusieurs modèles ont été identifiés sur les données expérimentales issues des essais de relaxation par palier en traction et en cisaillement. Les différents modèles testés sont présentés au tableau G.2 et le modèle de Gent-Thomas présenté en partie 2.1.1 a également été étudié.

Référence	Coefficients
YEOH 1993	C_{10} C_{20} C_{30}
Alexander LION 1996	C_{10} C_{01} C_{50}
RIVLIN et SAWYERS 1976	C_{10} C_{01} C_{02}
HAUPT et SEDLAN 2001	C_{10} C_{01} C_{11} C_{02} C_{30}
ISIHARA et al. 1951	C_{10} C_{01} C_{20}

Tableau G.2. – Les modèles polynomiaux testés

Tous ces modèles ont été choisis car, mis à part HAUPT et SEDLAN 2001, ils possèdent un nombre restreint de paramètres matériau à identifier qui sont au nombre de 2 ou 3. Comme expliqué en partie 2.3.2, l'identification du comportement hyperélastique a été effectuée sur les points de fin de relaxation de la phase de montée en charge des essais de relaxation par paliers simultanément en traction et en cisaillement. De plus, cette identification a été réalisée avec les contraintes de stabilité matérielles pour les énergies libres. Les résultats de cette identification pour chaque modèle testé sont présentés en figure G.1 pour la contrainte de traction et en figure G.2 pour la contrainte de cisaillement.

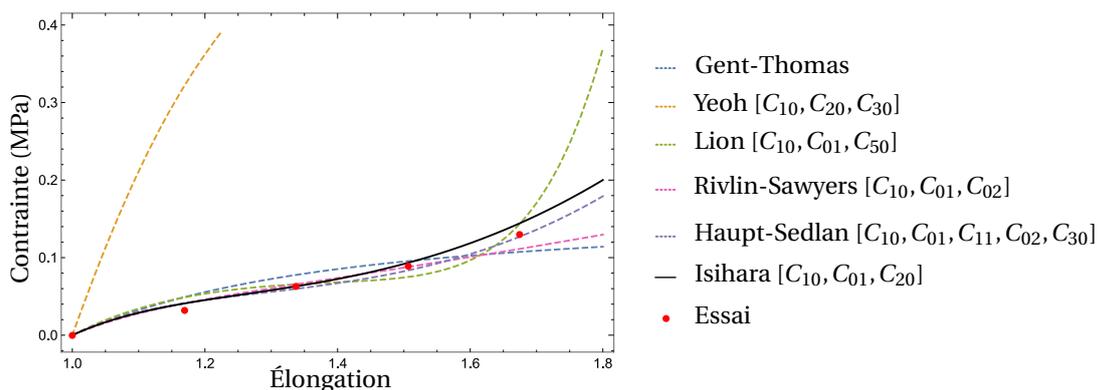


FIGURE G.1. – Contrainte de traction identifiée avec plusieurs modèles hyperélastiques

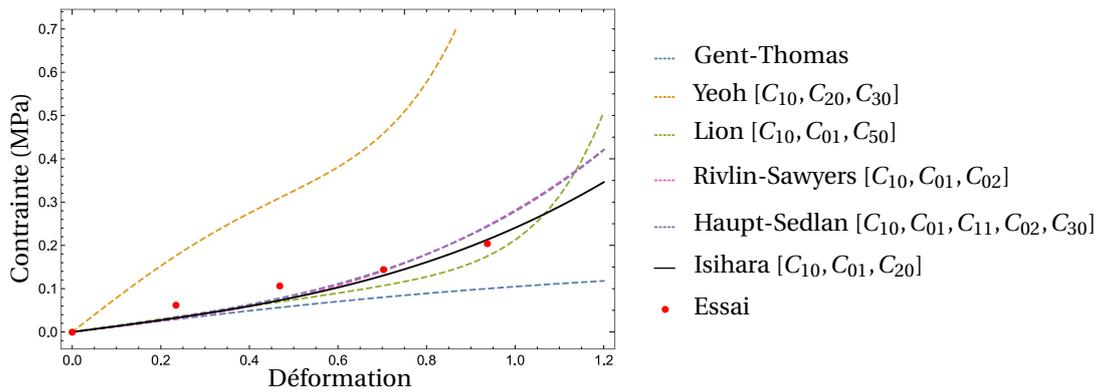


FIGURE G.2. – Contrainte de cisaillement identifiée plusieurs modèles hyperélastiques

C'est donc en comparant les résultats de ces différents modèles que l'on a choisi de modéliser le comportement hyperélastique du matériau de l'étude avec le modèle de ISIHARA et al. 1951 puisque c'est celui qui décrit le mieux les données expérimentales avec un nombre de paramètres relativement faible.

H. Résolution du problème d'homogénéisation

H.1. Résolution par éléments finis

Que ce soit pour l'approche en déformation (système 3.6) ou pour l'approche en contrainte (système ??), la méthode considérée est la même et repose sur l'introduction de degrés de liberté supplémentaires dans le système qui correspondent aux composantes de la déformation macroscopique imposée $\bar{\epsilon}$ ou la contrainte macroscopique imposée $\bar{\sigma}$.

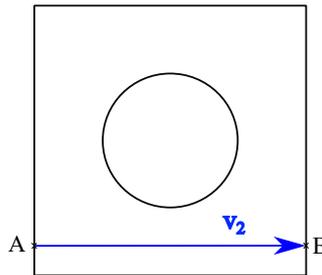


FIGURE H.1. – Définition des conditions aux limites de deux points opposés sur les bords d'une cellule de base

Dans le cas de l'approche en déformation, les deux points A et B sont liés par la relation suivante. On sait que $u - \bar{\epsilon} \cdot x$ est périodique sur les bords de la cellule ∂V , on en déduit

$$u(x_A) - \bar{\epsilon} \cdot x_A = u(x_B) - \bar{\epsilon} \cdot x_B = u(x_B) - \bar{\epsilon} \cdot (x_A + v_2) \quad (\text{H.1})$$

D'où

$$u(x_A) - u(x_B) + \bar{\epsilon} \cdot v_2 = 0 \quad (\text{H.2})$$

Les composantes des déplacements de deux points opposés du bord ∂V et les composantes de la déformation macroscopique $\bar{\epsilon}$ sont donc reliées par des relations linéaires (équation H.2). Ainsi, une fois avoir maillé la cellule, il suffit d'écrire toutes les relations liant les nœuds sur les bords du volume aux déformations macroscopiques de chargement. Cette formulation de conditions aux limites offre une certaine praticité car elle est indépendante de la loi de comportement.

Cette méthode sera utilisée sur le logiciel éléments finis Abaqus via le plug-in Homtools Stéphane LEJEUNES et Stéphane BOURGEOIS 2011 qui facilite l'écriture de ces équations aux bords du VER en lui définissant au préalable des points de référence sur lesquels appliquer le chargement macroscopique. Les degrés de liberté de ces points de référence seront alors reliés aux degrés de libertés des nœuds sur les bords par des relations cinématiques comme exprimées ci-dessus. Pour l'approche en contrainte, l'application du chargement sur les points de référence passe par la définition de forces nodales divisées par le volume du VER.

H.2. Résolution par Transformées de Fourier

Supposons le problème local 3.6 défini dans le cas de conditions aux limites périodiques et pour des milieux élastiques linéaires. Ce problème peut également être résolu par méthode de transformées de Fourier rapide (FFT) MOULINEC et SUQUET 1998. Moulinec et Suquet MOULINEC et SUQUET 1998 expriment d'abord un problème local préliminaire dans un milieu élastique de référence de tenseur de rigidité \mathbb{L}_0 qui est soumis à un champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(x)$ connu de la façon suivante.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(x)) = 0 & \forall x \in V \\ \boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbb{L}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(x) + \boldsymbol{\tau}(x) & \forall x \in V \\ u' = u - \langle \boldsymbol{\varepsilon}(u) \rangle . x & \text{périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(x) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

où

$$\boldsymbol{\tau}(x) = (\mathbb{L}() - \mathbb{L}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(x) \quad \forall x \in V \quad (\text{H.4})$$

Le problème étant linéaire, le principe de superposition s'applique et il est possible de décomposer ce problème en une somme de deux sous-problèmes :

- Un problème dont le chargement est $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et l'inconnue est $u_1 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(u) \rangle . x$:

$$P^1 \begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_1(x)) = 0 & \forall x \in V \\ \boldsymbol{\sigma}_1(x) = \mathbb{L}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(u_1) & \forall x \in V \\ u_1 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle . x & \text{sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(u_1) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \quad (\text{H.5})$$

- Un problème dont le chargement est $\boldsymbol{\tau}$ et l'inconnue est u' tel que :

$$P^2 \begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_2(x)) = 0 & \forall x \in V \\ \boldsymbol{\sigma}_2(x) = \mathbb{L}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(u') + \boldsymbol{\tau}(x) & \forall x \in V \\ u' \text{ périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(u') \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{H.6})$$

- On a bien-sûr $u = u_1 + u'$ et $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2$

Une solution évidente au problème P^1 est $u_1 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle . x$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(u_1) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Le problème P^2 est résolu dans l'espace de Fourier. Par l'intermédiaire de l'opérateur périodique de Green $\boldsymbol{\Gamma}_0$ associé au milieu de référence \mathbb{L}_0 , la solution du problème P^2 s'écrit dans l'espace des réels et dans l'espace de Fourier respectivement de la façon suivante.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(u') = -\boldsymbol{\Gamma}_0 * \boldsymbol{\tau}(x) = -\boldsymbol{\Gamma}_0 * (\mathbb{L} - \mathbb{L}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(u) & \forall x \in V \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi) = -\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0(\xi) : \hat{\boldsymbol{\tau}}(\xi) & \forall \xi \neq 0 \end{cases} \quad (\text{H.7})$$

Où toutes les grandeurs avec un $\hat{}$ sont les transformées de Fourier de leur homologues dans l'espace réel. L'opérateur de Green Γ_0 ne dépend que du comportement du milieu de référence \mathbb{L}_0 et est connu de façon explicite dans l'espace de Fourier. L'obtention de ce dernier est expliqué en paragraphe H.4 de cette annexe. De plus, le tenseur de polarisation peut s'exprimer en fonction du tenseur de rigidité de référence \mathbb{L}_0 de la façon suivante. La valeur de la déformation totale, dans l'espace réel, est donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(u) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Gamma_0 * (\mathbf{L} - \mathbf{L}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(u) \quad (\text{H.8})$$

Cette expression correspond à l'équation de Lippmann-Schwinger périodique qui prend donc la forme suivante respectivement dans l'espace des réels et dans l'espace de Fourier.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(u) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Gamma_0 * \boldsymbol{\tau}(x) & \forall x \in V \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi) = -\hat{\Gamma}_0(\xi) : \hat{\boldsymbol{\tau}}(\xi) & \forall \xi \neq 0, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \quad (\text{H.9})$$

En notant que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(u') = \Gamma_0 * (\mathbf{L}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(u')) \quad (\text{H.10})$$

Les deux formes de l'équation de Lippmann-Schwinger s'expriment comme suit.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(u) = \boldsymbol{\varepsilon}(u) - \Gamma_0 * \boldsymbol{\sigma}(x) & \forall x \in V \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi) - \hat{\Gamma}_0(\xi) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\xi) & \forall \xi \neq 0, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \quad (\text{H.11})$$

Que ce soit dans l'espace des réels ou l'espace de Fourier, l'équation de Lippmann-Schwinger est une équation implicite qui nécessite d'être résolue de manière itérative. Moulinec et Suquet MOULINEC et SUQUET 1998 ont d'abord proposé de résoudre le problème par une méthode itérative dite du point fixe. Le principe de l'algorithme est d'utiliser alternativement les équations H.4 et H.11 dans l'espace des réels et dans l'espace de Fourier respectivement. Le schéma itératif est présenté ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation : } \boldsymbol{\varepsilon}^0(x) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \forall x \in V \\ \quad \boldsymbol{\sigma}^0(x) = \mathbb{L}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}^0(x) \quad \forall x \in V \\ \\ \text{Itération } i+1 : \boldsymbol{\varepsilon}^i \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^i \text{ étant connus} \\ (a) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i = \mathcal{F} \mathcal{T}(\boldsymbol{\sigma}^i) \\ (b) \text{ Test de convergence} \\ (c) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\xi) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\xi) - \hat{\Gamma}_0(\xi) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\xi) \quad \forall \xi \neq 0 \text{ et } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(0) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ (d) \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1} = \mathcal{F} \mathcal{T}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}) \\ (e) \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(x) = \mathbb{L}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(x) \end{array} \right. \quad (\text{H.12})$$

La convergence du schéma dépend en grande partie du choix de \mathbb{L}_0 et du contraste entre les propriétés mécaniques des phases. Cette méthode sera étudiée par l'intermédiaire du logiciel *CRAFT* et elle ne nécessite qu'une image de la microstructure

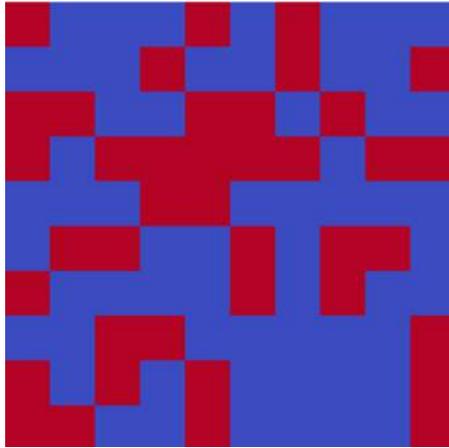
qui sera découpée en N pixels. La méthode est ici expliquée dans le cas d'un comportement élastique, mais très récemment, NOÛS et al. 2021 ont élargi l'utilisation du logiciel FFT CraFT à des chargements harmoniques (complexes) proposant une division en pas de fréquences et non plus en pas de temps, ce qui facilite l'homogénéisation pour des matériaux à comportement viscoélastique linéaire définis par leur comportement complexe.

H.3. Comparaison des méthodes sur un cas simple

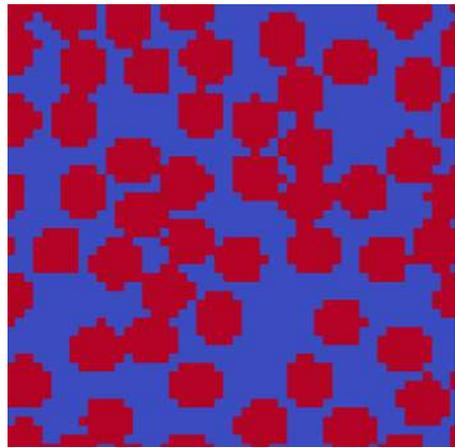
H.3.1. Étude préliminaire de convergence en nombre de pixels pour la FFT

Comme pour les éléments finis, il est nécessaire de discrétiser un modèle afin d'effectuer un calcul d'homogénéisation par la méthode FFT. Le programme CraFT a besoin d'une image de la microstructure (qu'il est également possible de générer avec CraFT) découpée en pixels. Ce sont les pixels de l'image qui servent de pattern de discrétisation. Il convient alors de définir un nombre de pixels suffisamment élevé dans le but d'obtenir un résultat de simulation ne variant quasiment plus avec ce dernier. C'est pourquoi une étude de convergence de la réponse mécanique de la microstructure en fonction du nombre de pixels présents sur son image a été effectuée. Quelques discrétisations de VER étudiées sont présentées en figure H.2. En se limitant au cas élastique, l'évolution de la contrainte dans la direction du chargement en déformation appliqué est étudiée en fonction du nombre de pixels considéré. Dans un cas 2D, les chargements étudiés ont été $\varepsilon_{11} = 1$, $\varepsilon_{22} = 1$ et $\varepsilon_{12} = 1$. Une image 100 millions de pixels (carré de 10000 pixels par 10000 pixels) a servi d'image de référence pour le calcul d'écart en contrainte par rapport aux images de plus faible résolution. Soit N le nombre de pixels, l'erreur en % a été calculée comme indiqué dans l'équation H.13 et les résultats sur les différentes directions étudiées sont présentés en figure H.3.

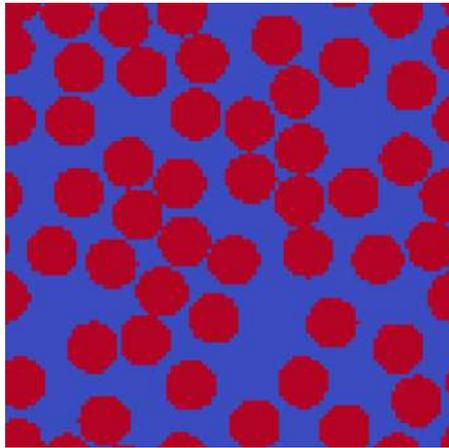
$$Erreur = 100 * \frac{|\sigma_{ij,N} - \sigma_{ij,Ref}|}{\sigma_{ij,Ref}} \quad (H.13)$$



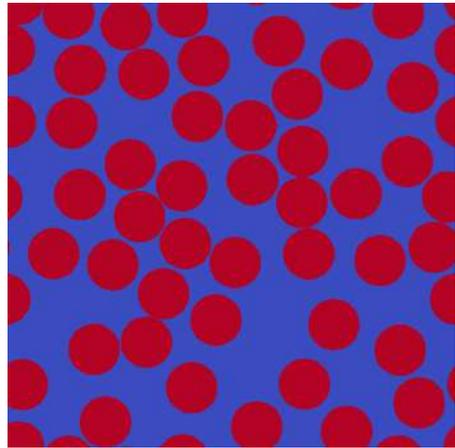
(a) 10px * 10px



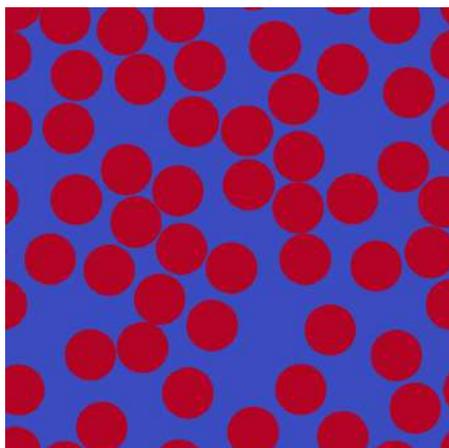
(b) 50px * 50px



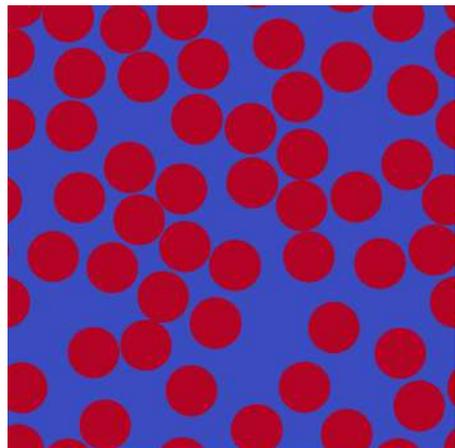
(c) 100px * 100px



(d) 500px * 500px



(e) 1000px * 1000px



(f) 5000px * 5000px

FIGURE H.2. – Exemples de discrétisations d'une image de VER

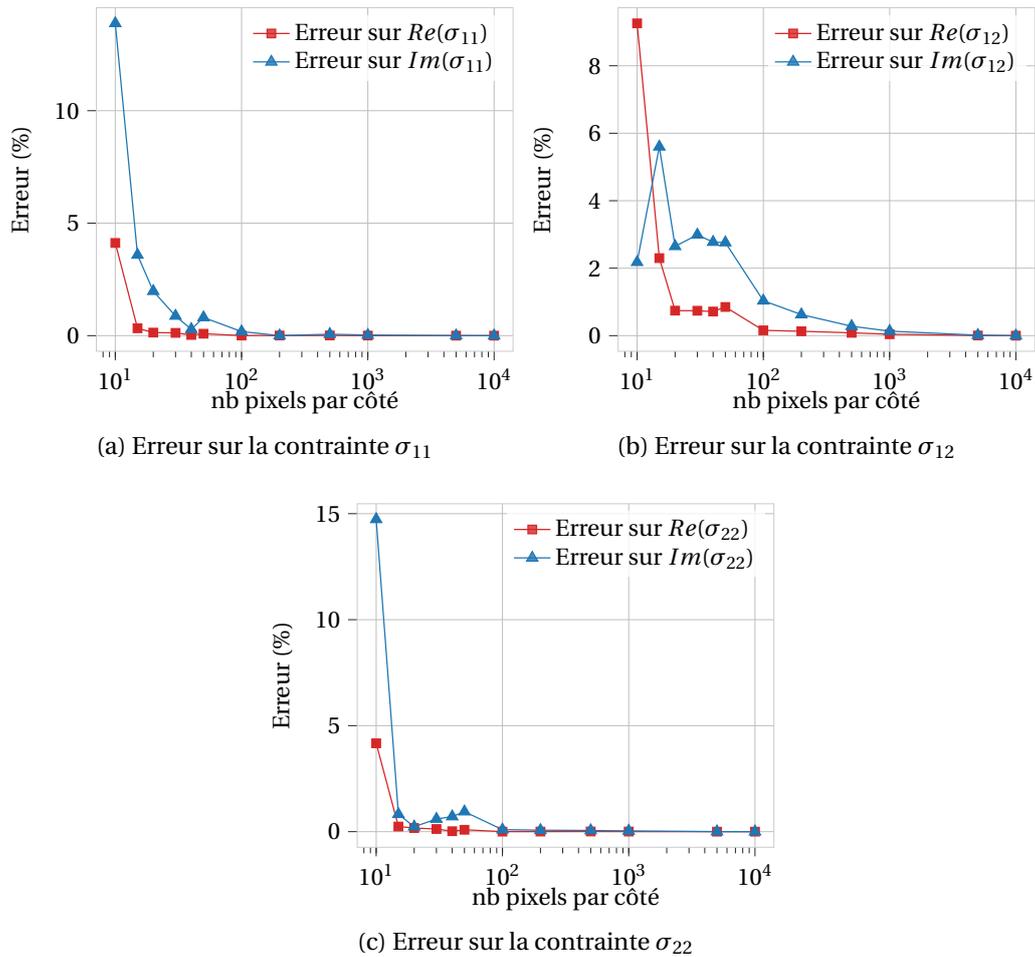


FIGURE H.3. – Erreur sur la contrainte par rapport au calcul de référence à 100 millions de pixels

Cette étude a permis de fixer un nombre de pixels pour lequel un écart cible de 1% entre la réponse mécanique du VER et sa valeur asymptotique est atteint. Ainsi, il a été décidé de considérer l'image de résolution 100 pixels par 100 pixels pour l'étude de comparaison avec les éléments finis.

H.3.2. Comparaison des deux méthodes d'homogénéisation en fréquentiel

Pour comparer les calculs éléments finis sur Abaqus et FFT sur CraFT, une DMA virtuelle sur une microstructure biphasée résine-carbone a été réalisée. Un comportement viscoélastique de type Maxwell généralisé à une branche a été définie pour la résine par l'intermédiaire d'une série de Prony ainsi qu'un comportement élastique pour le carbone (données dans le tableau H.3). Les modèles de microstructures sont 3D avec un élément dans l'épaisseur pour les éléments finis et un pixel dans l'épaisseur pour la FFT.

Constituent	k_0	μ_0	$\tau_{k,0} = \tau_{\mu,0} = \tau_0$	k_1	μ_1	τ_1
Carbone	100	60	1E10	-	-	-
Résine	1	0.6	1E10	1	0.6	1

Tableau H.3. – Propriétés matériau arbitraires définies pour les calculs

Pour les deux méthodes, les modules ingénieurs ont été reconstruits sur une certaine plage de fréquence. En figure H.4 on présente le module E_l qui est le module caractéristique à la direction des fibres. En figure H.5 on présente le module de compressibilité plane K et en figure H.6 le module de cisaillement transverse.

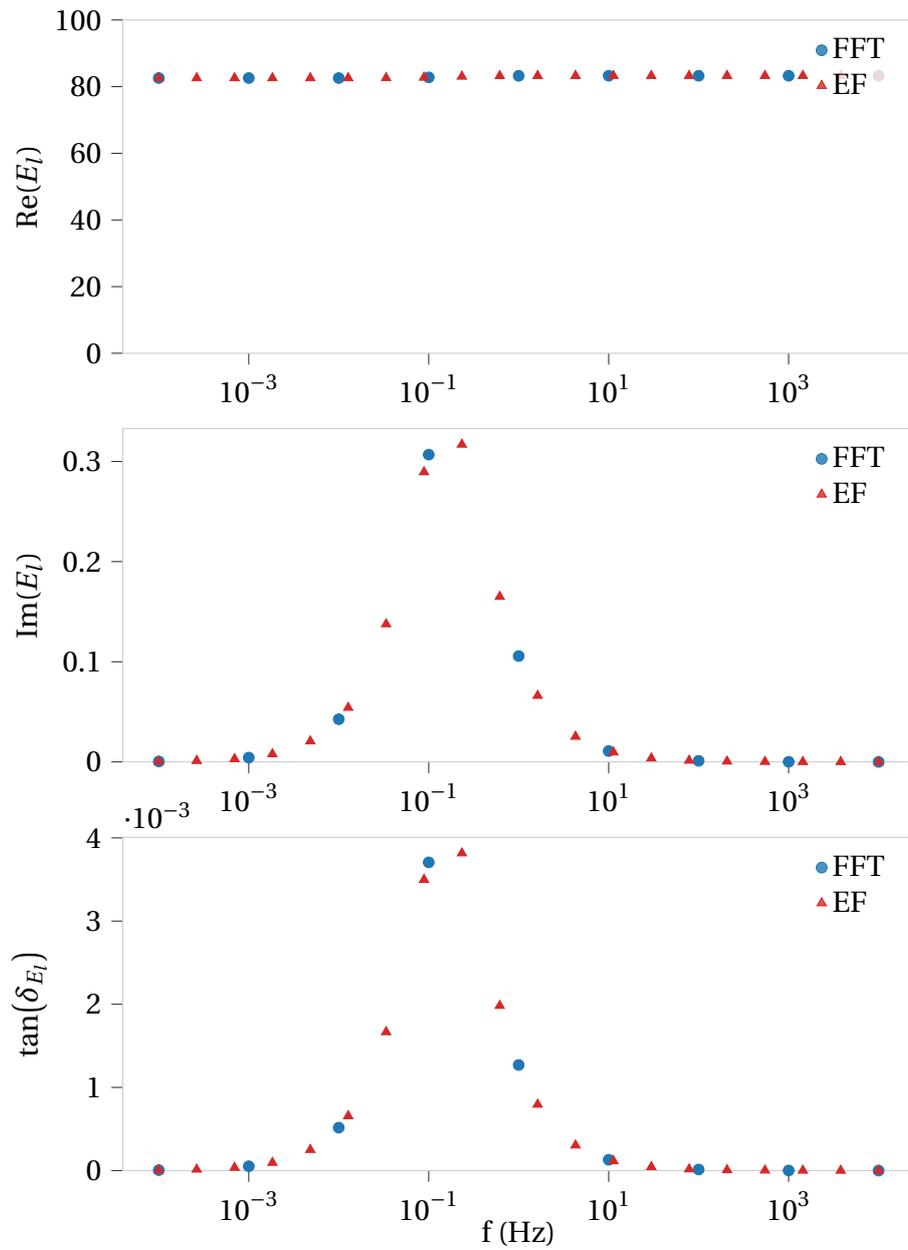


FIGURE H.4. – Comparaison du module complexe dans le sens des fibres obtenu à partir de l'homogénéisation d'un même VER carbone-résine par FFT et EF

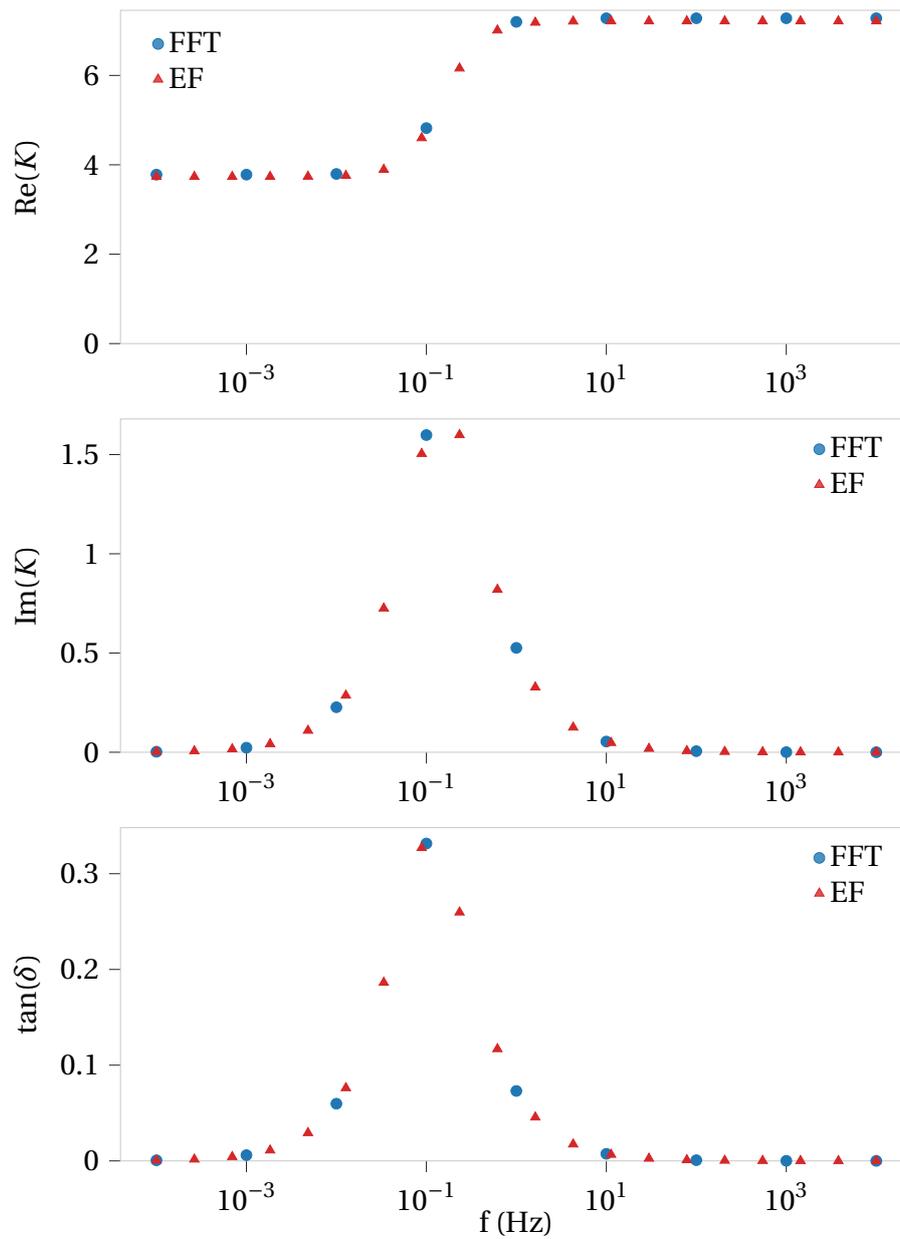


FIGURE H.5. – Comparaison du module complexe de compressibilité plane obtenu à partir de l'homogénéisation d'un même VER carbone-résine par FFT et EF

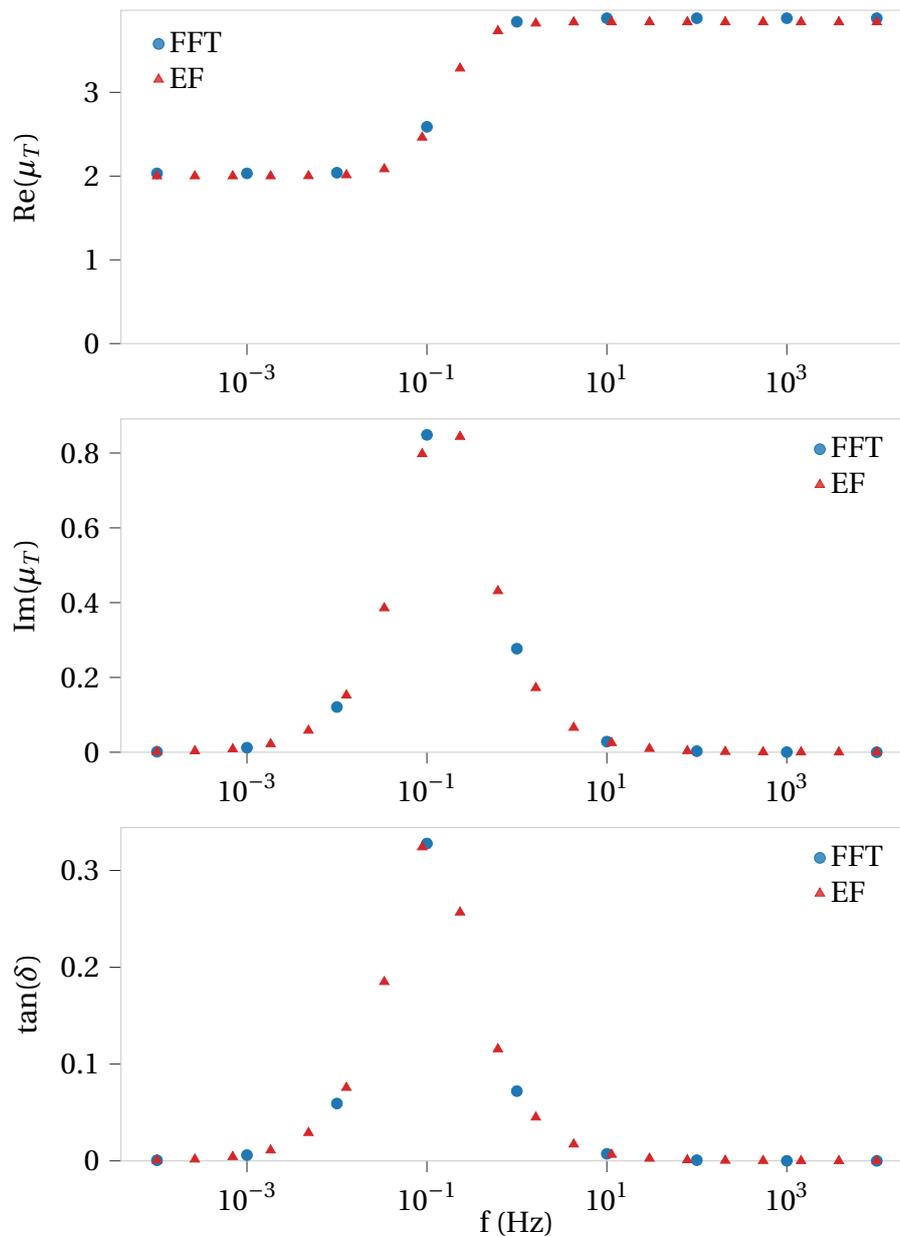


FIGURE H.6. – Comparaison du module complexe de cisaillement transverse obtenu à partir de l'homogénéisation d'un même VER carbone-résine par FFT et EF

Cette étude permet de premièrement vérifier que les deux méthodes d'homogénéisation donnent lieu aux mêmes résultats. Ces résultats sont obtenus pour un contraste de 100 entre les propriétés élastiques des fibres et les propriétés élastiques de la résine. La convergence de la méthode FFT est très dépendante de la valeur de ce contraste MOULINEC et SUQUET 1998. Il a été constaté dans cette étude une forte différence de temps de calculs cpu entre une simulation avec un contraste de 10 et une simulation avec un contraste de 100. Mais pour un même contraste, la méthode éléments-finis et

la méthode fft ont montré des temps de calcul équivalents.

H.4. Obtention de l'opérateur de Green

Le problème nommé P^2 est résolu dans l'espace de Fourier. Réécrivons d'abord le problème en notation indicielle :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^2 = 0 \\ \sigma_{ij}^2 = C_{ijkh}^0 \epsilon_{kh} + \tau_{ij} \\ \epsilon_{kh} = \frac{1}{2} (u'_{k,h} + u'_{h,k}) \end{cases}$$

Ainsi, en considérant les différentes propriétés de la transformée de Fourier citées ci-dessus, ces équations s'écrivent de la façon suivante dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} i\xi_j \hat{\sigma}_{ij}^2(\xi) = 0 \\ \hat{\sigma}_{ij}^2(\xi) = C_{ijkh}^0 \hat{\epsilon}_{kh}(\xi) + \hat{\tau}_{ij}(\xi) \\ \hat{\epsilon}_{kh}(\xi) = \frac{1}{2} (i\xi_h \hat{u}'_k(\xi) + i\xi_k \hat{u}'_h(\xi)) \end{cases} \quad (\text{H.14})$$

En prenant en compte , la deuxième et troisième équations assemblées deviennent :

$$\hat{\sigma}_{ij}^2(\xi) = C_{ijkh}^0 \frac{1}{2} (i\xi_h \hat{u}'_k(\xi) + i\xi_k \hat{u}'_h(\xi)) + \hat{\tau}_{ij}(\xi) \quad (\text{H.15})$$

En multipliant par $i\xi_j$ cette équation, on retrouve la première égalité qui s'annule. On a alors :

$$i\xi_j \hat{\sigma}_{ij}^2(\xi) = 0 = -\xi_j C_{ijkh}^0 \frac{1}{2} (\xi_h \hat{u}'_k(\xi) + \xi_k \hat{u}'_h(\xi)) + \hat{\tau}_{ij}(\xi) \quad (\text{H.16})$$

Soit :

$$\hat{\tau}_{ij}(\xi) = \xi_j C_{ijkh}^0 \frac{1}{2} (\xi_h \hat{u}'_k(\xi) + \xi_k \hat{u}'_h(\xi)) \quad (\text{H.17})$$

D'autre part, les symétries mineures du tenseur d'élasticité du milieu de référence C_{ijkh}^0 permettent de simplifier les termes suivants :

$$\frac{1}{2} \xi_j C_{ijkh}^0 (\xi_h \hat{u}'_k(\xi) + \xi_k \hat{u}'_h(\xi)) = \xi_j C_{ijkh}^0 \xi_h \hat{u}'_k(\xi) \quad (\text{H.18})$$

D'où :

$$\hat{\tau}_{ij}(\xi) = \xi_j C_{ijkh}^0 \xi_h \hat{u}'_k(\xi) \quad (\text{H.19})$$

Définissons les tenseurs d'ordre 2 suivants :

$$\mathbf{K}_{ik}^0(\xi) = \xi_j C_{ijkh}^0 \xi_h \quad \text{et} \quad \mathbf{N}^0(\xi) = \mathbf{K}^0(\xi)^{-1} \quad (\text{H.20})$$

Ce qui donne l'expression suivante de la transformée de Fourier du déplacement u' :

$$\hat{u}'_k(\xi) = \frac{i}{2} \left(\mathbf{N}_{ki}^0(\xi) \xi_j + \mathbf{N}_{kj}^0(\xi) \xi_i \right) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{ij}(\xi) \quad (\text{H.21})$$

En dérivant cette équation il est donc possible d'exprimer la transformée de Fourier de $u'_{k,h}$ de la façon suivante :

$$\hat{u}'_{k,h}(\xi) = \frac{-1}{2} \xi_h \left(\mathbf{N}_{ki}^0(\xi) \xi_j + \mathbf{N}_{kj}^0(\xi) \xi_i \right) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{ij}(\xi) \quad (\text{H.22})$$

On en déduit alors l'expression de la transformée de Fourier du tenseur des déformations :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi) = -\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0(\xi) : \hat{\boldsymbol{\tau}}(\xi) \quad (\text{H.23})$$

Avec $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0(\xi)$ la transformée de Fourier de l'opérateur de Green relatif au milieu \mathbf{C}^0 qui est donc défini par la relation suivante :

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{0khij}(\xi) = \frac{1}{4} \left(\xi_h \mathbf{N}_{ki}^0(\xi) \xi_j + \xi_h \mathbf{N}_{kj}^0(\xi) \xi_i + \xi_k \mathbf{N}_{hi}^0(\xi) \xi_j + \xi_k \mathbf{N}_{hj}^0(\xi) \xi_i \right) \quad (\text{H.24})$$

CQFD.

Bibliographie – H. Résolution du problème d'homogénéisation

I. Modules complexes issus de l'homogénéisation des microstructures hybrides

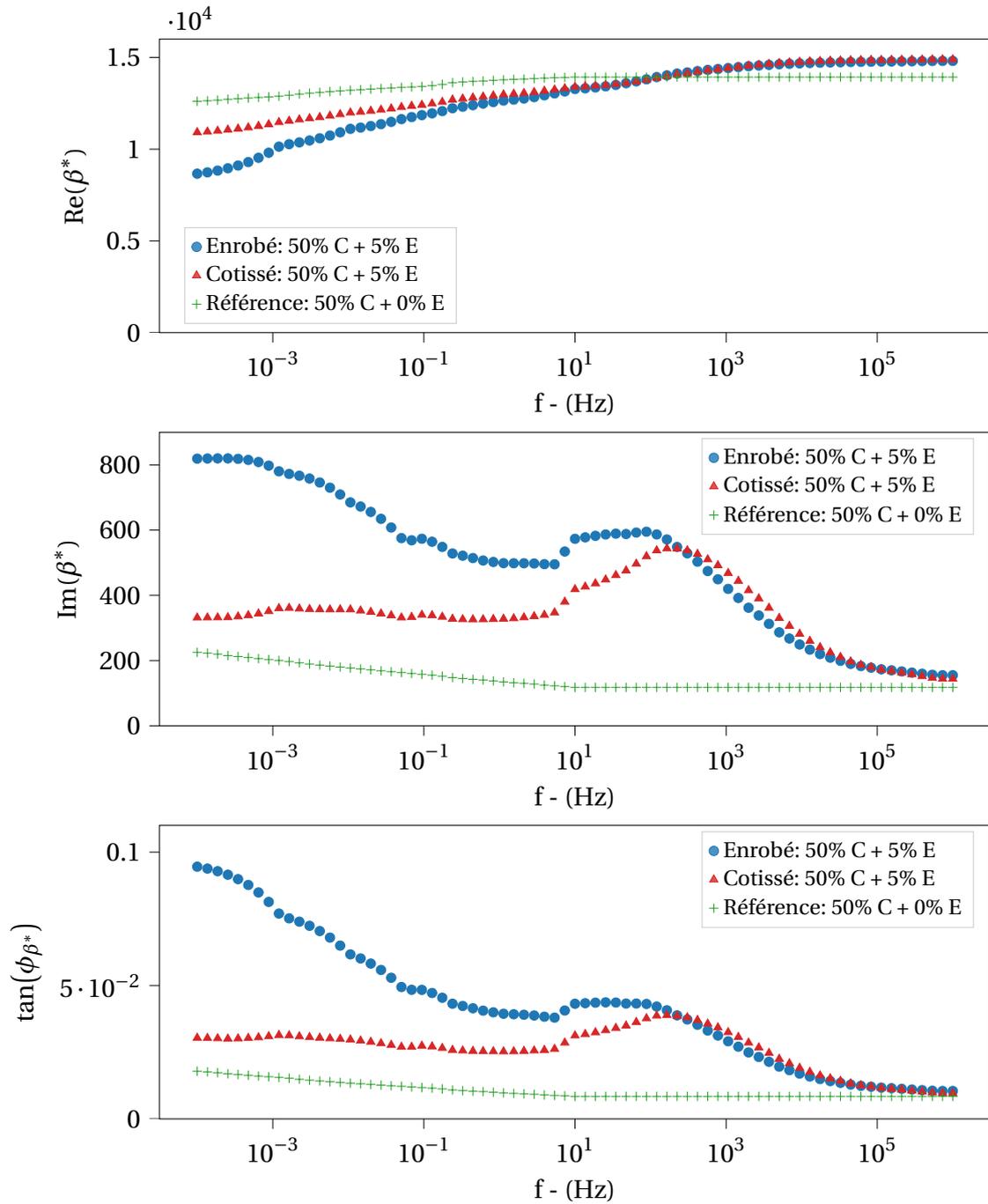


FIGURE I.1. – Module complexe $\tilde{\beta}^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\beta^*)$, module de perte $\text{Im}(\beta^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\beta^*})$.

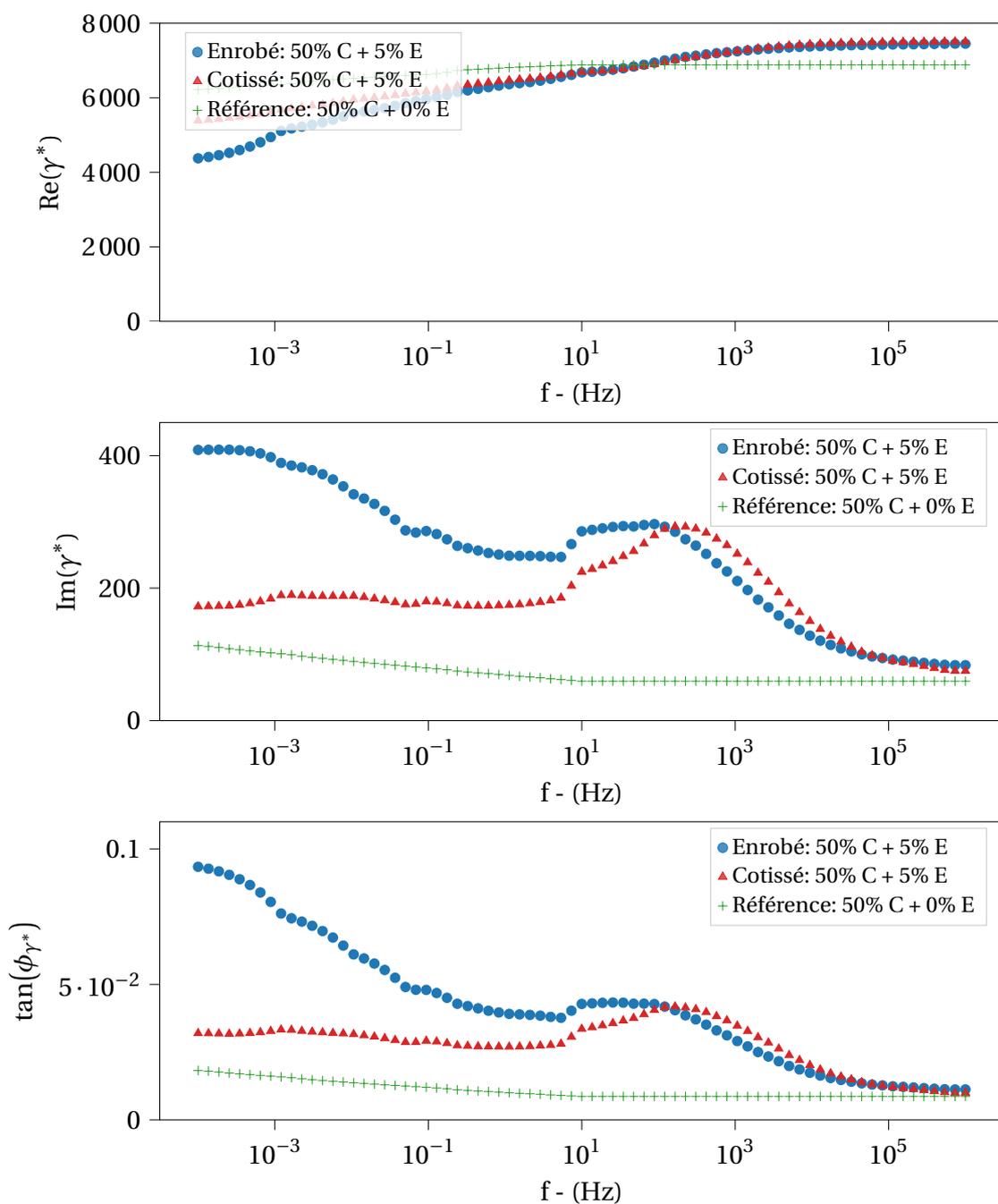


FIGURE I.2. – Module complexe $\tilde{\gamma}^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\gamma^*)$, module de perte $\text{Im}(\gamma^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\gamma^*})$.

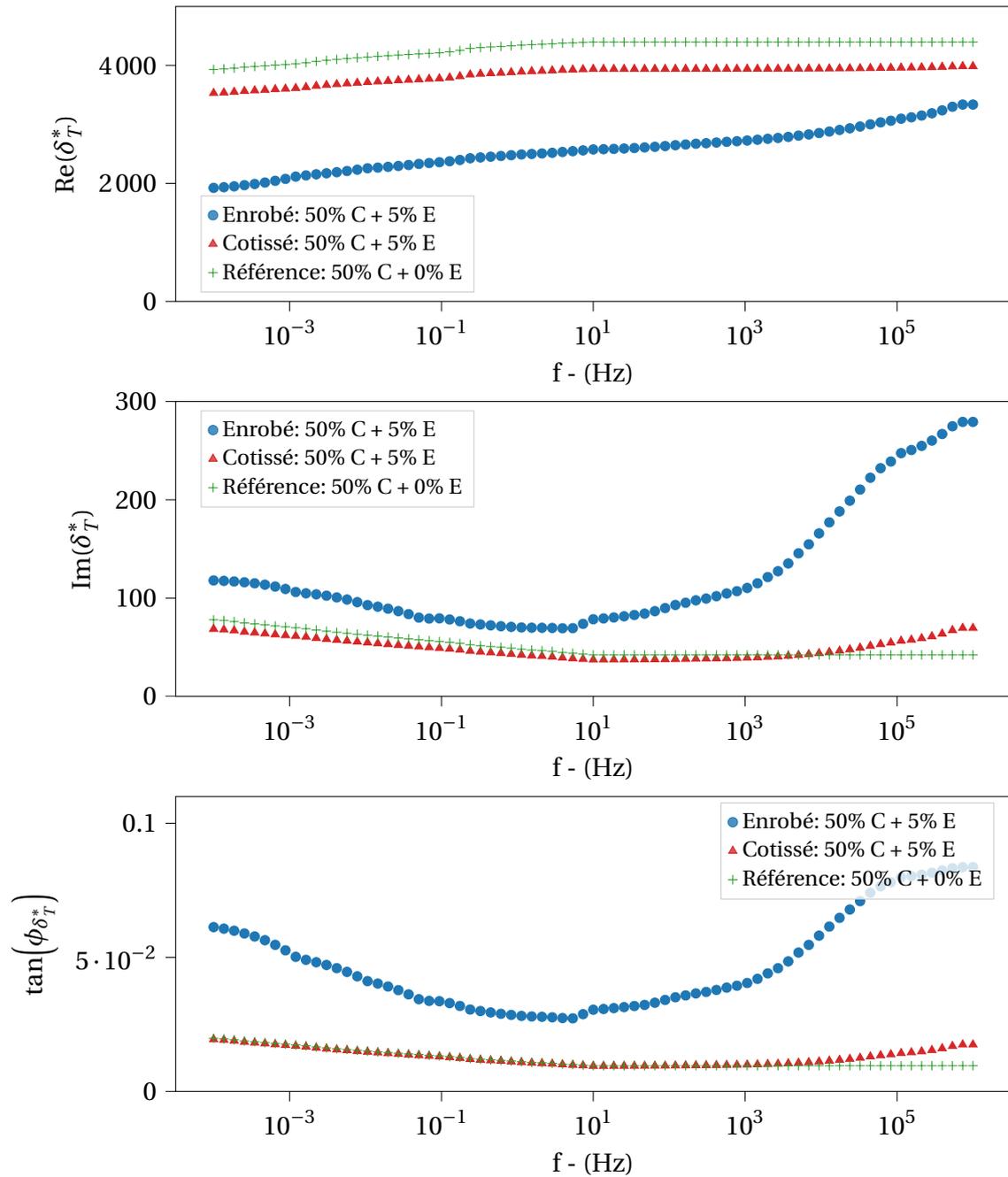


FIGURE I.3. – Module complexe $\tilde{\delta}_T^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\delta_T^*)$, module de perte $\text{Im}(\delta_T^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\delta_T^*})$.

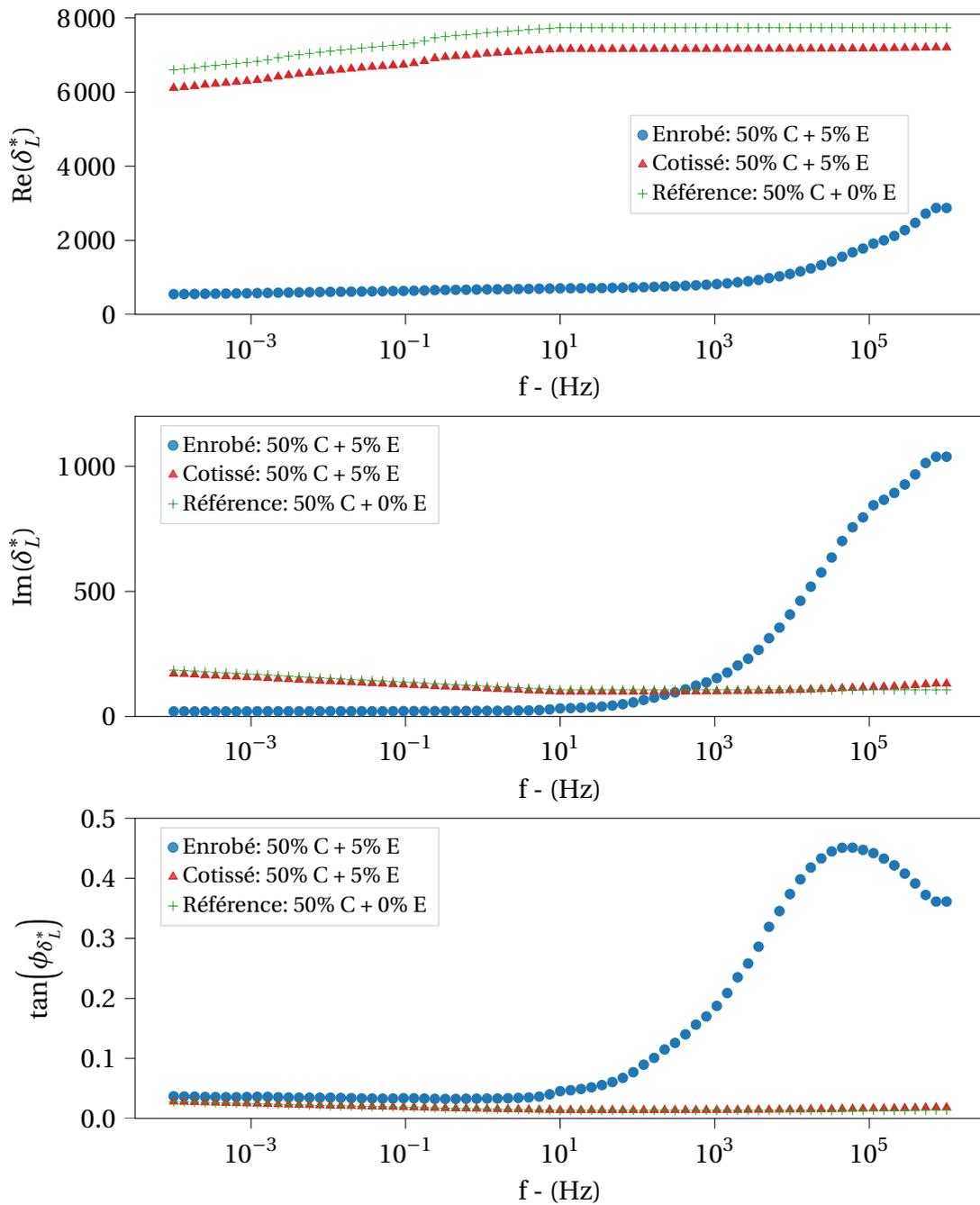


FIGURE I.4. – Module complexe $\tilde{\delta}_L^*$ en fonction de la fréquence pour les trois microstructures : module de stockage $\text{Re}(\delta_L^*)$, module de perte $\text{Im}(\delta_L^*)$ et facteur de perte $\tan(\phi_{\delta_L^*})$.

J. Implémentation EF de la loi de comportement

On considère un solide occupant le domaine Ω_0 à son état de référence. Dans le cas faiblement compressible, hyperélastique et quasi-statique, Abaqus propose une formulation mixte initialement proposée par J. C. SIMO et al. 1985 et qui repose sur la fonctionnelle à trois champs suivante :

$$L(\mathbf{u}, \hat{J}, p) = \int_{\Omega_0} (\psi(\bar{\mathbf{B}}, \hat{J}) - p(J - \hat{J})) d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t} \mathbf{u} dS. \quad (\text{J.1})$$

Les champs solutions du problème d'équilibre peuvent être obtenus à partir du principe variationnel suivant :

$$\{\mathbf{u}, \hat{J}, p\} = \arg \left\{ \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{H}^u}, \inf_{\hat{J} \in \mathbb{R}^{+*}}, \sup_{p \in \mathcal{H}^p} L(\mathbf{u}, \hat{J}, p) \right\}, \quad (\text{J.2})$$

avec $\mathcal{H}^u, \mathcal{H}^p$ des espaces des Sobolev adaptés pour la cinématique et la pression. En écrivant la stationnarité on obtient les équations d'Euler suivantes :

$$\delta_{\mathbf{u}} L = \int_{\Omega_0} (J \boldsymbol{\sigma}^D : \delta \mathbf{e} - J p \delta e^{vol}) d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dS, \quad (\text{J.3})$$

$$\delta_{\hat{J}} L = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{J}} + p \right) \delta \hat{J} d\Omega, \quad (\text{J.4})$$

$$\delta_p L = \int_{\Omega_0} -(J - \hat{J}) \delta p d\Omega, \quad (\text{J.5})$$

avec :

$$2\delta \mathbf{e} = \delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{F}^T = \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \nabla \delta \mathbf{u}^T, \quad (\text{J.6})$$

$$\delta e^{vol} = \text{tr}(\delta \mathbf{e}) = \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{J.7})$$

et :

$$\boldsymbol{\sigma}^D = 2J^{-1} \left(\bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D. \quad (\text{J.8})$$

On peut ensuite éliminer p en supposant que $p = -\partial \psi / \partial \hat{J}$, on obtient $\delta p = -(\partial^2 \psi / \partial \hat{J}^2) \delta \hat{J} - J(\partial \boldsymbol{\sigma}^D / \partial \hat{J}) : \delta \mathbf{e}$, ce qui nous ramène à une formulation à 2 champs :

$$\delta_{\mathbf{u}} L = \int_{\Omega_0} \left(J \boldsymbol{\sigma}^D + (J - \hat{J}) J \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^D}{\partial \hat{J}} + J \frac{\partial \psi}{\partial \hat{J}} \mathbf{I} \right) : \delta \mathbf{e} d\Omega \quad (\text{J.9})$$

$$- \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dS,$$

$$\delta_{\hat{J}} L = \int_{\Omega_0} (J - \hat{J}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{J}^2} \delta \hat{J} d\Omega. \quad (\text{J.10})$$

Cette formulation est utilisée par Abaqus uniquement dans le cas faiblement compres-

sible. Si la loi de comportement est parfaitement incompressible (ce qui n'est pas notre cas) une forme en lagrangien déplacement/pression est utilisée. L'approximation du champ \hat{J} est choisie comme étant discontinue entre éléments dans la plupart des cas (excepté pour le C3D4H ou elle est continue). Ce champ peut donc être condensé statiquement dans la formulation élémentaire (de manière à ne garder que des degrés de liberté de déplacements au global).

La linéarisation des équations (J.9) et (J.10) est nécessaire pour la résolution du problème non linéaire dans le schéma de Newton-Raphson utilisé par Abaqus. Pour simplifier nous supposons que le comportement sphérique et déviatorique sont découplés, donc $\partial\boldsymbol{\sigma}^D/\partial\hat{J} = 0$. De plus on adopte une loi de pression linéaire¹, tel que $\partial^2\psi/\partial\hat{J}^2 = k$ (avec k le module de compressibilité). On a donc (en supposant que les efforts sont indépendants du déplacement) :

$$d\delta_{\mathbf{u}}L = \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{e} : \overbrace{\left(\mathbb{C}^s + J \frac{\partial\psi}{\partial\hat{J}} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)}^{\mathbb{C}} : d\mathbf{e} + \delta\mathbf{e} : (Jk\mathbf{I}) d\hat{J} + \delta\mathbf{e} : (d\mathbf{W}J\boldsymbol{\sigma} + J\boldsymbol{\sigma}d\mathbf{W}) d\Omega, \quad (\text{J.11})$$

$$d\delta_jL = \int_{\Omega_0} \delta\hat{J}(Jk\mathbf{I}) : d\mathbf{e} - \delta\hat{J}k d\hat{J} d\Omega \quad (\text{J.12})$$

avec \mathbb{C}^s tel que :

$$d(J\boldsymbol{\sigma}^D) = \mathbb{C}^s : d\mathbf{e} + d\mathbf{W}J\boldsymbol{\sigma}^D + J\boldsymbol{\sigma}^D d\mathbf{W} \quad (\text{J.13})$$

et :

$$d\mathbf{W} = \frac{1}{2}(d\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-T}d\mathbf{F}^T). \quad (\text{J.14})$$

Une implémentation UMAT d'un comportement hyperélastique faiblement compressible nécessite d'implémenter le calcul de $\boldsymbol{\sigma}$ et de \mathbb{C} .

Dans le cas de notre modèle nous ne pouvons plus écrire le principe variationnel de l'équation (J.2) mais nous pouvons néanmoins utiliser la forme faible des équations (J.9)-(J.10). Sur un pas de temps $[t_n, t_{n+1}]$ la résolution itérative de Newton nous donne une prédiction pour \mathbf{u}^{n+1} et \hat{J}^{n+1} . En intégrant, localement (au point de Gauss), les équations d'évolutions pour $\bar{\mathbf{B}}_e^i$ et α^i à l'aide d'un schéma d'Euler implicite on obtient également des valeurs prédictives pour $\bar{\mathbf{B}}_e^{i^{n+1}}$ et $\alpha^{i^{n+1}}$, ce qui nous permet de calculer $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ en utilisant l'expression de notre loi de comportement (équation (2.163) et (2.164) en page 105). L'équilibre statique à t_{n+1} et la vérification du lagrangien pour \hat{J}^{n+1} est considéré au niveau global (assemblé) par les équations (J.9)-(J.10). Ce processus est répété pour les étapes de correction. L'algorithme d'Euler que nous utilisons est basée sur une sous-discrétisation (sub-stepping) du pas de temps $[t_n, t_{n+1}]$ auto-adaptative qui nous permet d'améliorer la convergence en temps. Ce schéma nécessite néanmoins l'écriture d'un schéma de Newton local pour résoudre les équations non-linéaires liées à la viscosité et à l'effet Payne. Nous faisons l'hypothèse d'une évolution linéaire en temps du gradient de la déformation sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$

1. Cette loi linéaire n'est thermodynamiquement admissible que si J reste proche de 1

pour construire ce schéma d'Euler. Pour calculer \mathbb{C} de manière consistante il faut également calculer les tenseurs \mathbb{C}_e^i et \mathbb{C}_α^i définis par :

$$d\bar{\mathbf{B}}_e^i = \mathbb{C}_e^i : d\mathbf{e} \quad (\text{J.15})$$

$$d\alpha_i = \mathbb{C}_\alpha^i : d\mathbf{e}. \quad (\text{J.16})$$

Ces tenseurs s'obtiennent à partir des formes discrétisées en temps des équations d'évolutions (et sont également utilisés dans les schémas de newton locaux d'intégration des équations d'évolutions).