THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'Université des Antilles

Faculté des Sciences Exactes et naturelles

ED 589 - Milieu insulaire tropical à risques : Protection, Valorisation, Santé et Développement

présentée et soutenue par

Léa BATTEUX

le 15 Janvier 2021

Modélisation numérique d'écoulements incompressibles diphasiques : Applications à l'interaction fluide-structure.

Directeur de thèse : **Pascal POULLET**, *Professeur, Université des Antilles*
Co-encadrant de thèse : **Jean-Claude LATCHÉ**, *Directeur de Recherche, IRSN Cadarache*

Jury

Emmanuel	**MAITRE**	Professeur, Université Grenoble Alpes	Rapporteur
Stéphanie	**SALMON**	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Rapporteur
Michel	**GEOFFROY**	Professeur, Université des Antilles	Examinateur
Gisèle	**MOPHOU**	Professeur, Université des Antilles	Examinateur
Pascal	**POULLET**	Professeur, Université des Antilles	Directeur
Jean-Claude	**LATCHÉ**	Directeur de Recherche, IRSN Cadarache	Co-Encadrant
Jacques	**LAMINIE**	Professeur retraité, Université des Antilles	Invité

Table des matières

Introduction v

1 Interactions Fluide-Structure dans le contexte des écoulements particulaires. 1
- 1.1 Position du problème physique. . . . 1
- 1.2 Modélisation du problème physique pour simulation directe. . . . 6
- 1.3 Méthode de pénalisation de volume L2. . . . 7
- 1.4 Méthode de pénalisation de volume H1. . . . 8
- 1.5 Comparaison des deux méthodes. . . . 9

2 Discrétisation en espace par le schéma Marker and Cell. 11
- 2.1 La méthode Marker and Cell 11
- 2.2 Le problème continu 12
- 2.3 Discrétisation du domaine par la méthode MAC 14
- 2.4 Discrétisation du problème continu : le schéma. . . . 16
- 2.5 Discrétisation des opérateurs et propriétés. . . . 17
  - 2.5.1 Approximation des termes de dérivée en temps. . . . 18
  - 2.5.2 Partitions de Ω associées à $\widetilde{\mathcal{E}}$. . . . 19
  - 2.5.3 Dualité entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{E}$ 21
  - 2.5.4 Discrétisation des termes de convection dans l'équation de quantité de mouvement. 22
  - 2.5.5 Discrétisation des opérateurs diffusifs de type $\boldsymbol{\Delta}$. . . . 25
  - 2.5.6 Opérateurs de projection sur $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ et $\boldsymbol{L}_{\mathcal{M}}$. . . . 31
  - 2.5.7 Formulation Volume-Finis du schéma 32

3 Convergence of the implicit MAC-discretized Navier–Stokes equations with variable density and viscosity on non-uniform grids. 33
- 3.1 Résumé 33
- 3.2 Introduction 34
- 3.3 Discrete Implicit Scheme. . . . 35
- 3.4 Preliminary results 38
- 3.5 Estimations and Existence results 42
  - 3.5.1 Estimates on the discrete solutions 42
  - 3.5.2 Existence result at any given time 47
- 3.6 Convergence of the scheme 48
  - 3.6.1 Estimate on the time translates of the velocity 49
  - 3.6.2 Convergence of the discrete scheme as $\delta t, h_{\mathcal{M}} \to 0$. . . . 52

4 Schéma de projection pour les équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables **65**
4.1 Introduction . . . 65
4.2 Discrétisation MAC du schéma pénalisé . . . 67
4.3 Stabilité du schéma . . . 70
4.4 Schéma de transport antidiffusif . . . 75
4.5 Tests numériques . . . 77
4.5.1 Transport d'une fonction étagée en 1D. . . . 78
4.5.2 Transport d'une fonction étagée en 3D. . . . 78
4.5.3 Chute d'une bille dans un fluide. . . . 78

5 Code de simulation Fluide–Structure RheoScop **83**
5.1 Introduction . . . 83
5.2 Le code de calcul RheoScop . . . 84
5.2.1 L'interface python. . . . 84
5.2.2 VivAn'O : pour la résolution du système couplé Fluide–Solide. . . . 84
5.2.3 SCoPi : pour la gestion des collisions. . . . 84
5.3 Résolution du système Fluide–Structure, et algèbre linéaire. . . . 85
5.3.1 Résolution fluide par une méthode de prédiction–correction . . . 86
5.3.2 Système découplé : Principe fondamental de la dynamique ponctuel. . . . 86
5.3.3 Méthode de pénalisation de volume L2. . . . 87
5.3.4 Méthode de pénalisation de volume H1. . . . 88
5.4 Une perspective de parallélisation. . . . 91
5.4.1 Méthode de splitting algébrique ATM. . . . 91

Conclusion et perspectives. **98**

A Solutions faibles de l'équation de transport **99**

B Analyse Fonctionnelle discrète **101**

C Proceedings TI2018 **103**

D Proceedings FVCA IX **111**

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Stéphanie Salmon et Emmanuel Maitre d'avoir accepté le rôle de rapporteur de cette thèse. Je les remercie sincèrement pour leur disponibilité, leur patience et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Un grand merci à Gisèle Mophou et à Michel Geoffroy de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Mes remerciements vont ensuite à mon directeur de thèse, Pascal Poullet pour son soutien et son expertise pendant ces 4 années bien remplies. Malgré les aléas, il a toujours fait le nécéssaire pour m'aider à avancer. C'est son accompagnement et ses encouragements qui m'ont permis de mener à bien ce travail de thèse et pour ça je lui en suis profondément reconnaissante. Je souhaite remercier Jacques Laminie qui, même si il n'a pas officiellement encadré cette thèse, a toujours été présent pour me guider. Je le remercie de m'avoir appris à (bien) coder et plus généralement tout ce que je sais du calcul scientifique, depuis mon stage de Master 1 jusqu'à aujourd'hui. J'ai encore beaucoup à apprendre mais je n'en serais pas là sans son encadrement. Je les remercie tous les deux de m'avoir initié à la mécanique des fluides, domaine qui m'était totalement inconnu auparavant et qui me passionne désormais.

Je tiens ensuite à remercier Jean–Claude Latché pour son encadrement durant ces deux dernières années et pour ses nombreuses pistes de recherche. Je le remercie de sa disponibilité et de son aide infaillible, en particulier vis–à–vis du formalisme Volume–Finis que j'appréhendais quelque peu au départ.

Je remercie sincèrement Philippe Angot de m'avoir initié aux méthodes de pénalisation et plus généralement à la modélisation Fluide–Structure. Je le remercie pour son encadrement, pour sa patience et ses nombreux conseils. Merci à lui et à l'institut I2M pour leur accueil lors de ma visite à Marseille.

Merci au laboratoire LAMIA de m'avoir permis de travailler dans les meilleures conditions possibles. Merci à tous les membres du département de Mathématiques et Informatique pour leur convivialité, et merci aux collègues doctorants – et docteurs – qui ont pu me conseiller quand j'en avais besoin.

Un grand merci au centre de calcul C3I de m'avoir permis de réaliser tous les calculs nécessaires à l'accomplissement de cette thèse.

Je remercie finalement mes parents pour toute leur confiance et leur soutien inconditionel tout au long de cette thèse – et bien avant elle – et sans qui je serais pas arrivée jusque–là.

Introduction

La problématique de ce sujet de thèse a été soulevée par l'expérience suivante présentée dans [Mol16] : on place entre deux surfaces une solution lubrifiante composée d'un fluide médium et de plusieurs particules de forme allongée, puis on fait glisser l'une des deux surfaces sur l'autre selon un mouvement de cisaillement (voir Figure 1). Durant cette expérience on peut alors faire l'observation de plusieurs phénomènes complexes. Dans un premier temps, l'ajout d'inclusions solides dans le médium augmente la viscosité dynamique de la solution globale. Dans un second temps, ces mêmes particules rendent la solution rhéofluidifiante : au repos leur position et leur orientation dans le fluide est aléatoire ; puis lors de la mise en mouvement, les particules se déplacent et s'orientent parallèlement au sens du glissement. Ceci a pour conséquence une diminution temporaire de la viscosité jusqu'à l'arrêt du cisaillement, et c'est ce qui caractérise la rhéofluidification de la solution. De façon générale, l'étude de l'écoulement d'un fluide ou de la déformation d'un matériau sous l'action de contraintes définit la rhéologie. Lorsque le système étudié est composé d'un fluide et de particules, on parle de rhéologie des suspensions.

Étant donné le grand nombre de paramètres entrant en jeu durant ces expériences, tels que le fluide médium utilisé ou la concentration de particules, la simulation numérique de tels problèmes possède de nombreux avantages. Elle permet notamment de réaliser des tests – en amont d'un essai réel – afin de déterminer le rôle de chaque variable dans les phénomènes observés. Les simulations ainsi effectuées le sont dans des conditions identiques, ce qui en fait une alternative fiable. Par ailleurs, selon les domaines, les essais en situation réelle peuvent être coûteux en matériaux ; avoir recours à des tests numériques permet ainsi des économies de ressources et de temps.

Notre première problématique a donc consisté à déterminer un modèle afin de reproduire fidèlement les problèmes d'écoulements de systèmes fluide–particules. Généralement, plusieurs approches sont à notre disposition pour la modélisation de phénomènes rhéologiques : il est par exemple possible de faire appel a des modèles macroscopiques pour la suspension globale, ou à des techniques d'homogénéisation pour une approche multi–échelle. Ces méthodes ont l'avantage de représenter efficacement l'évolution de la viscosité du système fluide–particules en fonction des contraintes exercées sur ce dernier. En revanche les particules n'y sont pas représentées individuellement, ce qui nous prive de la simulation du mécanisme complexe de l'écoulement introduit plus haut.

On se place finalement dans le cadre de la mécanique des fluides et des solides pour la représentation continue mais séparée du fluide et des particules (avec des équations propres à chaque composante du système fluide–solide). Dans le but de modéliser l'influence du fluide médium sur la dynamique des particules, et l'effet des particules sur la viscosité de la suspension, on impose également un couplage fort entre les deux composantes du système. Ceci se manifeste par un apport des particules dans les équations gouvernant le mouvement du fluide, et inversement.

Dans le cadre de cette thèse, le mouvement du fluide visqueux est donc décrit par les équations de

Navier–Stokes. On suppose les particules indéformables et imperméables ; ainsi leur dynamique est régie par les équations de Newton–Euler. La présentation de ces équations fait l'objet du chapitre 1. En vue de la simulation numérique des problèmes d'écoulements particulaires, il se pose la difficulté de l'implémentation du couplage entre le fluide et le solide dans le code de calcul. On introduit alors dans ce même chapitre deux méthodes – de pénalisation de volume – qui permettent la modélisation du système fluide–solide par des équations de Navier–Stokes pénalisées.

Dans un deuxième chapitre on présente la méthode Marker and Cell, qui est la méthode utilisée pour discrétiser le domaine spatial lors de l'approximation des différents problèmes continus donnés dans le chapitre 1. Elle est combinée à la méthode des volumes finis pour préserver le caractère conservatif des équations. On y définit également les équivalents discrets des outils d'analyse nécessaires pour l'étude de schémas réalisée dans les Chapitres 3 et 4.

Dans le chapitre 3 on considère le schéma implicite donné par l'approximation des équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables. On montre la convergence de ce schéma vers le problème continu en formulation faible lorsque les paramètres de discrétisation en temps et en espace tendent simultanément vers 0. Par un choix adéquat pour les valeurs de la densité et de la viscosité, on retrouve une des méthodes de pénalisation de volume pour la simulation d'un écoulement particulaire.

On traite dans le chapitre 4 d'un schéma performant approchant les équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables. Contrairement au schéma implicite du chapitre précédent on a fait appel à une méthode de projection, plus adaptée à la simulation numérique. On montre ensuite la stabilité du schéma totalement discrétisé en temps et en espace. Dans ce même chapitre on introduit une technique pour advecter efficacement la densité et la viscosité variable lorsque ces quantités sont discontinues. Elle vient remplacer le schéma upwind usuel à l'origine de diffusion numérique au niveau des discontinuités.

Le dernier chapitre présente le code de calcul utilisé pour effectuer les tests numériques présentés dans ce manuscrit. On détaille en particulier le travail entrepris au cours de cette thèse, à savoir l'implémentation de l'interaction fluide–structure pour la simulation d'écoulements particulaires. On introduit également une perspective de parallélisation pour le code.

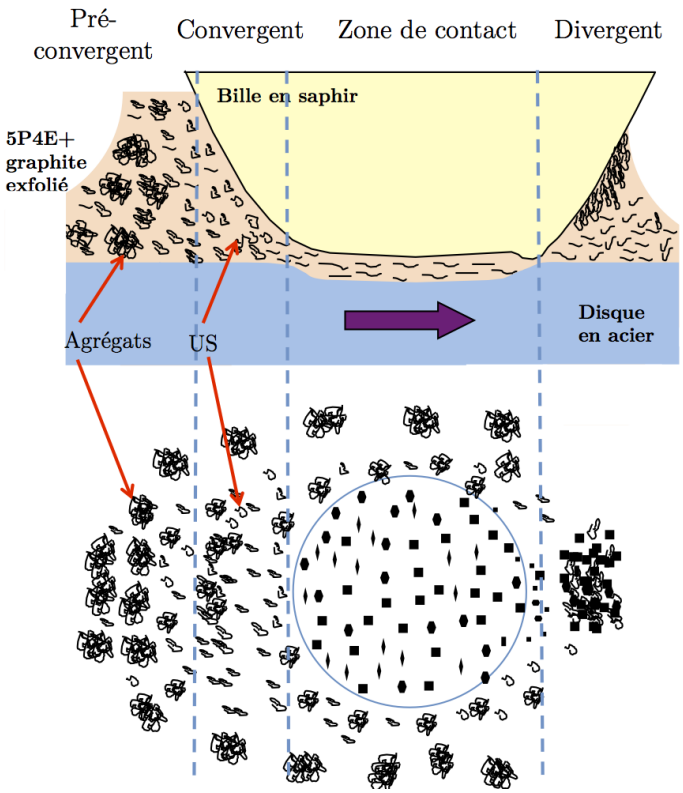

FIGURE 1 – Illustration de l'expérience réalisée dans [Mol16]

Une expérience de rhéologie :
La bille en saphir et le disque en acier sont séparés par un mélange composé d'un fluide visqueux et de particules. La fraction volumique occupée par ces dernières est suffisament élevée afin d'observer une augmentation de la suspension globale au repos. On dispose d'une vue de profil (haut) et une vue du dessus (bas). Le mouvement de cisaillement est obtenu par glissement de la bille sur le disque en acier. Ici les particules sont déformables, néanmoins on observe l'orientation des particules parallèlement au sens du mouvement. En conséquence, le déplacement du fluide est facilité par diminution de la viscosité. On observe ici le couplage fort entre les deux phases : Le mouvement de cisaillement enclenche le mouvement du fluide et donc un déplacement – et une déformation – des particules par le biais de forces hydrodynamiques. L'advection de l'interface du domaine solide entraine à son tour un déplacement du fluide. Les agrégats observés proviennent de forces interparticulaires d'attraction (forces de Van der Waals) et intensifient le phénomène d'augmentation de la viscosité au repos.

Chapitre 1

Interactions Fluide-Structure dans le contexte des écoulements particulaires.

On consacre ce chapitre à la problématique de la modélisation d'un système composé d'un fluide et de plusieurs particules rigides et animé d'un mouvement. Par le choix du modèle, on cherchera à adopter un couplage fort entre les domaines fluide et solide de façon à observer une influence mutuelle en termes de forces extérieures. Dans une première partie, on décrit séparément les équations modélisant les problèmes fluide et solide dans leur domaine respectif. On peut ensuiter fermer le problème sur l'ensemble du domaine à l'aide de la condition de non-glissement à l'interface, qui assure que la vitesse du fluide est égale à celle d'une particule au niveau de sa surface. Dans une deuxième partie on traite des méthodes permettant de modéliser le problème. Étant donné que les particules se déplacent au cours du temps, le problème initial fait apparaître un domaine fluide dépendant du temps. Afin d'éviter le coût de calcul causé par un remaillage du domaine spatial, on fait appel à des méthodes de domaines fictifs de façon à se ramener à un domaine fixe et ainsi contourner cette difficulté. Dans une dernière partie, on présente deux méthodes de domaines fictifs retenues : les méthodes de pénalisation de volume L2 et H1. La comparaison qualitative entre les deux méthodes donnée en fin de chapitre a fait l'objet d'un proceedings inclus en Annexe C.

1.1 Position du problème physique.

Considérons un domaine ouvert et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d = 2, 3$. On étudie l'évolution d'un système fluide–particules à l'intérieur de Ω et sur un intervalle de temps $[0, T]$ avec $T > 0$. Les particules sont animées d'un mouvement et définissent un domaine solide dépendant du temps : $\Omega_s(t)$ avec t parcourant $[0, T]$. Alors on a la relation suivante liant $\Omega_f(t)$, le domaine fluide avec Ω et $\Omega_s(t)$,

$$\Omega_f(t) = \Omega \backslash \overline{\Omega_s(t)} \qquad \forall t \in [0, T]$$

Dans la suite, le fluide est supposé Newtonien, homogène et incompressible. Le problème défini sur $\Omega_f(t)$ peut donc être modélisé par les équations de Navier–Stokes incompressible à densité constante :

$$\rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}\Big) - \mu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega_f(t) \tag{1.1a}$$

$$\mathrm{div} \boldsymbol{u} = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega_f(t) \tag{1.1b}$$

Il s'agit d'un problème ayant pour inconnues $(\boldsymbol{u}, p)$ avec $\boldsymbol{u}$ désignant le champ de vitesse de $\mathbb{R}^d$ associé à l'écoulement du fluide, et p sa pression. Au second membre on retrouve un terme source contenant l'ensemble des forces extérieures exercées sur le fluide. L'homogéneité du fluide est caractérisée

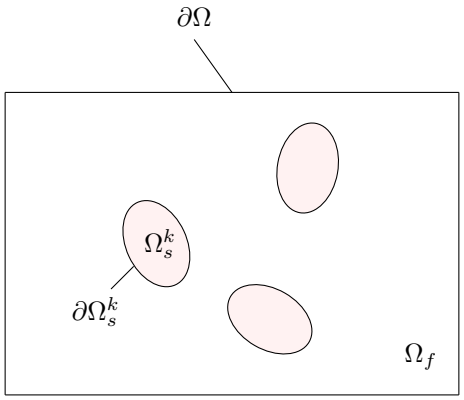

FIGURE 1.1 – Représentation du système fluide–solide ($d = 2$)

par une densité (ou masse volumique) $\rho > 0$ et une viscosité dynamique $\mu > 0$ toutes deux constantes. La première équation (1.1a) représente la conservation de la quantité de mouvement, et (1.1b) définit la condition d'incompressibilité du fluide. Le problème (1.1) constitue en réalité la forme non conservative des équations de Navier–Stokes et découle de la forme conservative donnée par le système ci-dessous,

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega_f(t) \qquad (1.2a)$$

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - 2\mathrm{div}(\mu \mathbf{D}(\boldsymbol{u})) + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega_f(t) \qquad (1.2b)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega_f(t) \qquad (1.2c)$$

L'équation (1.2a) régit la conservation de la masse volumique du fluide. Étant donné que la densité est constante et que le fluide est incompressible (1.1b), l'équation (1.2a) disparait. L'opérateur $\mathbf{D}(\cdot)$ dans (1.2b) désigne le tenseur des taux de déformation et vérifie,

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T)$$

alors, par la relation $\mathrm{div}(2\mathbf{D}(\boldsymbol{u})) = \Delta \boldsymbol{u} + \nabla(\mathrm{div}\boldsymbol{u})$, on retrouve en effet (1.2b). On ferme les systèmes (1.1) (1.2) à l'aide de conditions initiales et aux limites adaptées à notre problème et que l'on détaille plus bas.

On suppose le domaine solide composé de N particules rigides homogènes. Alors, pour $k \in 1, .., N$, l'ouvert $\Omega_s^k(t)$ désigne la k–ème particule et on a,

$$\Omega_s(t) = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_s^k(t).$$

Pour $k \in \{1, .., N\}$, la particule $\Omega_s^k(t)$ est caractérisée par sa densité ρ_k et à chaque instant t, sa position dans l'espace est déterminée par son centre de masse $\mathbf{X}_k(t) \in \mathbb{R}^d$ et une orientation $\boldsymbol{\theta}_k(t) \in \mathbb{R}^d$. On introduit également la notion de position relative à $\mathbf{X}_k(t)$, notée $r_k(t, \boldsymbol{x})$:

$$r_k(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \mathbf{X}_k(t)$$

REMARQUE 1.1.1 En dimension 3, il est courant de faire usage des angles d'Euler pour décrire l'orientation d'un solide. Ainsi pour une rotation d'angle (φ, θ, ψ) appliquée au référentiel (O, x, y, z), on

procède successivement à la rotation d'angle φ autour de l'axe (Oz), à la rotation d'angle θ autour de l'axe (Ox) puis à la rotation d'angle ψ autour du nouvel axe (Oz) issu de la rotation précédente.

On définit maintenant M_k et $I_k(t)$ représentant la masse et le tenseur d'inertie de $\Omega_s^k(t)$. Ces deux quantités sont fonction de ρ_k ; de plus, $I_k(t)$ est inhérent à la notion d'orientation des axes de symétrie de la particule ce qui explique sa dépendance en temps,

$$M_k = \int_{\Omega_s^k(t)} \rho_k \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \rho_k |\Omega_s^k(t)|$$

$$I_k(t) = \int_{\Omega_s^k(t)} \rho_k \Big(\|r_k(t,\cdot)\|^2 \mathbf{I}_d - r_k(t,\cdot) \otimes r_k(t,\cdot) \Big) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

où $|\Omega_s^k(t)|$ est le volume de la particule et $\mathbf{I}_d$ la matrice identité de $\mathbb{R}^{d\times d}$. On peut donc représenter $I_k(t)$ sous la forme d'une matrice de $\mathbb{R}^{d\times d}$. En notant $r_k(t,\cdot) = (x_1, x_2, x_3)$ pour $d = 3$ on obtient,

$$I_k(t) = \rho_k \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

avec

$$I_{11} = \int_{\Omega_s^k(t)} x_2^2 + x_3^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad I_{22} = \int_{\Omega_s^k(t)} x_1^2 + x_3^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad I_{33} = \int_{\Omega_s^k(t)} x_1^2 + x_2^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad I_{ij} = \int_{\Omega_s^k(t)} x_i x_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

De façon analogue au fluide, on cherche à décrire la dynamique d'une particule à l'aide d'une loi de conservation de la quantité de mouvement. On introduit alors $\mathbf{U}_k(t)$, la vitesse de translation de la particule $\Omega_s^k(t)$ et $\boldsymbol{\omega}_k(t)$ sa vitesse de rotation vérifiant les équations cinématiques ci–dessous,

$$\mathbf{U}_k(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}_k(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \boldsymbol{\omega}_k(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_k(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ désigne la dérivée matérielle et est telle que $\dfrac{d\varphi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi$ pour $\varphi, \boldsymbol{u}$ assez réguliers. Alors $M_k \mathbf{U}_k(t)$ et $I_k(t)\boldsymbol{\omega}_k(t)$ désignent les moments linéaire et angulaire de la k–ième particule. La conservation de ces quantités est donnée par les équations de Newton–Euler :

$$M_k \frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_k(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_s^k(t)} \rho_k \boldsymbol{f}_k(t,\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \overbrace{\int_{\partial\Omega_s^k(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})}^{\mathbf{F}_k} \tag{1.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}(I_k(t)\boldsymbol{\omega}_k(t))}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_s^k(t)} \rho_k r_k(t,\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{f}_k(t,\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_s^k(t)} r_k(t,\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{\sigma}((\boldsymbol{u},p)\cdot\boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})}_{\mathbf{T}_k}, \tag{1.5b}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale sortante à $\Omega_s^k(t)$ et $\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d-1}$. On retrouve dans les seconds membres de (1.5a) et (1.5b) deux types de forces extérieures exercées sur les particules. La première intégrale sur $\Omega_s^k(t)$ contient les forces volumiques $\boldsymbol{f}_k$: il s'agit par exemple de la force de pesanteur ou de forces interparticulaires. L'influence du fluide sur la particule apparait dans l'intégrale sur $\partial\Omega_s^k(t)$, contenant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p)$ pour un fluide Newtonien,

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p) = -p\mathbf{I}_d + 2\mu\mathbf{D}(\boldsymbol{u})$$

$\mathbf{F}_k$ désigne alors la force hydrodynamique exercée sur le solide et $\mathbf{T}_k$ le moment de la force $\mathbf{F}$. Par ailleurs, on remarque la présence de $\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p))$ dans (1.2b).

Afin de définir par la suite un problème continu dans le domaine solide, on introduit le champs de vitesse rigide à partir des vitesses de translation et de rotation d'une particule,

$$\boldsymbol{u}_s(t,\boldsymbol{x}) = \mathbf{U}_k(t) + \boldsymbol{\omega}_k(t) \times r_k(t,\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega_s^k(t) \tag{1.6}$$

On parvient à cette expression pour $\boldsymbol{u}_s(t,\boldsymbol{x})$ en réalisant un changement de repère par une translation de vecteur $\mathbf{X}_k(t)$ et une rotation d'angle $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ [Dí18]. On est donc en mesure de se ramener à une description eulérienne pour le mouvement des particules. Par ailleurs, une propriété importante du champs de vitesse solide est son indéformabilité : le lemme ci–dessous établit une relation entre $\boldsymbol{u}_s(t,\boldsymbol{x})$ et le tenseur des taux de déformation appliqué à $\boldsymbol{u}_s(t,\boldsymbol{x})$,

LEMME 1.1.2 – Caractérisation du mouvement rigide pour d = 3. Soit $t \in [0,T]$. On introduit $\mathcal{K}(t)$, l'espace des champs de vitesses rigides sur $\Omega_s(t)$ par,

$$\mathcal{K}(t) = \{\boldsymbol{u}(t,\cdot) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\ \forall k \in \{1,..,N\},\ \exists(\alpha_k,\beta_k) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = \alpha_k + \beta_k \times r_k(t,\boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_s^k(t)\}$$

Alors, on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{K}(t) = \{\boldsymbol{u}(t,\cdot) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\ \forall k \in \{1,..,N\},\ \mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_s^k(t)\}$$

Preuve: Il s'agit d'un résultat démontré dans [TM05]. Le premier sens est direct : soient $\boldsymbol{u}(t,\cdot) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ et $(\alpha_k,\beta_k) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tels que $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = \alpha_k + \beta_k \times r_k(t,\boldsymbol{x})$ pour $\boldsymbol{x} \in \Omega_s^k(t)$. Alors :

$$\nabla\boldsymbol{u} = \nabla(\alpha_k + \beta_k \times r_k(t,\boldsymbol{x})) = \nabla(\beta_k \times \boldsymbol{x})$$

alors, en posant $\beta_k = (\beta^x,\beta^y,\beta^z)$ il vient,

$$\nabla\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta^z & \beta^y \\ \beta^z & 0 & -\beta^x \\ -\beta^y & \beta^x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

d'où $\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = 0$.

Soit $k \in \{1,..,N\}$. On suppose maintenant que $\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega_s^k(t)$. Notons que,

$$\nabla\boldsymbol{u} = \mathbf{D}(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} - (\nabla\boldsymbol{u})^T) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} - (\nabla\boldsymbol{u})^T) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_s^k(t) \tag{1.8}$$

On souhaite montrer que $\nabla\boldsymbol{u}$ est constant en espace presque partout dans le solide. Soient $\boldsymbol{x} \in \Omega_s^k(t)$ et $(i,j,k) \in [\![1,d]\!]^3$. On a alors – au sens des distributions –,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(\nabla\boldsymbol{u})_{i,j} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j} - \frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{x}_k \partial \boldsymbol{x}_j} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_k}{\partial \boldsymbol{x}_i \partial \boldsymbol{x}_j} - \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_k}{\partial \boldsymbol{x}_i \partial \boldsymbol{x}_j} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_j}{\partial \boldsymbol{x}_k \partial \boldsymbol{x}_i}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}(\mathbf{D}(\boldsymbol{u}))_{i,k} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\mathbf{D}(\boldsymbol{u}))_{k,j}\right) = 0.
\end{aligned}$$

De plus, $\nabla \boldsymbol{u}$ étant égal à sa partie antisymétrique dans le solide (1.8), il existe $\beta_k = (\beta^x, \beta^y, \beta^z)$ vérifiant (1.7) en posant,

$$\beta_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_3}{\partial \boldsymbol{x}_2} - \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial \boldsymbol{x}_3} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \boldsymbol{x}_3} - \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_3}{\partial \boldsymbol{x}_1} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \boldsymbol{x}_2} \end{pmatrix}^T$$

et donc $\nabla \boldsymbol{u} = \nabla(\beta_k \times \boldsymbol{x})$.
Par intégration on obtient l'existence de $\bar{\alpha}_k, \alpha_k$ tels que

$$\boldsymbol{u} = \bar{\alpha}_k + \beta_k \times \boldsymbol{x} = \underbrace{\bar{\alpha}_k + \beta_k \times \mathbf{X}_k(t)}_{\alpha_k} + \beta_k \times r_k(t, \boldsymbol{x})$$

□

REMARQUE 1.1.3 On note ainsi qu'un champ de vitesse rigide est à divergence nulle pour $\boldsymbol{x} \in \Omega_s(t)$.

REMARQUE 1.1.4 En raison de la dépendance en temps du tenseur d'inertie $I_k(t)$ il apparait dans (1.5b) le terme $\boldsymbol{\omega}_k(t)\dfrac{\mathrm{d}I_k(t)}{\mathrm{d}t}$. En revanche, grâce à l'hypothèse de mouvement rigide et à l'homogenéité des particules il est possible – voir [Bos08] – de simplifier ce terme par,

$$\frac{dI_k(t)}{dt}\boldsymbol{\omega}_k(t) = \boldsymbol{\omega}_k(t) \times I_k(t)\boldsymbol{\omega}_k(t)$$

et donc

$$I_k(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_k(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_s^k(t)} \rho_k r_k(t, \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega_s^k(t)} r_k(t, \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{\sigma}((\boldsymbol{u}, p) \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\omega}_k(t) \times I_k(t)\boldsymbol{\omega}_k(t) \tag{1.9}$$

Nous avons ainsi introduit les équations gouvernant la dynamique du fluide et du domaine solide. Afin de définir le problème sur Ω tout entier, il nous faut imposer des conditions adéquates à l'interface fluide–solide. Une condition naturelle, causée par la viscosité du fluide, est la condition de non–glissement qui stipule que la vitesse du fluide est égale à la vitesse solide sur le bord des particules :

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = \mathbf{U}_k(t) + \boldsymbol{\omega}_k(t) \times r_k(t, \boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_s^k(t).$$

On complète finalement le problème par des conditions aux limites de dirichlet homogène sur $\partial\Omega$ et par des conditions initiales. Alors la dynamique du système fluide–particules est donné par,

$$\rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}\Big) - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega_f(t) \tag{1.10a}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega_f(t) \tag{1.10b}$$

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = \mathbf{U}_k(t) + \boldsymbol{\omega}_k(t) \times r_k(t, \boldsymbol{x}) \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega_s^k(t) \quad \forall k \in \{1, .., N\} \tag{1.10c}$$

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = 0 \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega \tag{1.10d}$$

(1.5a) − (1.9) − (1.4) (1.10e)

$$\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0 \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f(0) \tag{1.10f}$$

$$\mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k^0 \qquad \boldsymbol{\theta}_k(0) = \boldsymbol{\theta}_k^0 \qquad \forall k \in \{1, .., N\} \mathbf{U}_k(0) = \mathbf{U}_k^0 \qquad \boldsymbol{\omega}_k(0) = \boldsymbol{\omega}_k^0 \quad \forall k \in \{1, .., N\} \tag{1.10g}$$

De nombreux travaux ont été consacrés à l'existence de solutions faibles pour le problème (1.10a)–(1.10b)–(1.10c), qui correspond alors au problème des équations de Navier–Stokes dans un domaine dépendant du temps. On peut notamment citer [AW77, MT82] dans lesquels la géométrie du domaine est imposée et [MF72], qui fait appel à une méthode de pénalisation de volume. Dans tous les cas le mouvement du bord de Ω est supposé assez régulier de façon à pouvoir se ramener à un domaine fixe par le biais d'un difféomorphisme. Pour le système complet (1.10), l'existence de solutions faibles pour $d = 2, 3$ est prouvée dans [DE98] en supposant l'absence de collisions. Dans [HS99], les auteurs parviennent à l'existence globale d'une solution faible pour une particule avec prise en compte des collisions de celle–ci avec le bord du domaine. La généralisation au cas de plusieurs particules a été traité dans [MSM02].

1.2 Modélisation du problème physique pour simulation directe.

Dans notre contexte, on parle de simulation directe lorsque la méthode retenue approche les équations du problème (1.10). Elle établit alors un couplage fort entre le domaine fluide et le domaine solide, et permet ainsi de modéliser fidèlement leurs interactions mutuelles. Étant donnée la formulation eulérienne du problème fluide dans (1.10) il est nécessaire de procéder à une discrétisation spatiale du domaine de calcul pour sa résolution numérique. Pour le problème (1.10a)– (1.10b)–(1.10c) il s'agit donc du domaine $\Omega_f(t)$, qui devient une inconnue au même titre que la vitesse et la pression. Ceci a motivé le développement de méthodes de simulation directes adaptées à ce problème. On peut les regrouper suivant deux classes, selon que le domaine de calcul utilisé est mobile ou fixe au cours du temps.

Dans le premier cas, seul le domaine occupé par le fluide est discrétisé et on résout en un temps donné t^* le problème sur $\Omega_f(t^*)$. De telles méthodes utilisent en général la technique Euler-Lagrange arbitraire ou ALE [Hu96] : une fois le problème fluide résolu, les forces hydrodynamiques sont appliquées aux particules et ces dernières sont advectées. L'interface fluide–solide est donc mobile au cours du temps et on a recours à un remaillage du domaine fluide lorsque le maillage devient trop déformé. Il s'agit de méthodes efficaces [JT97], cependant pour un nombre élevé de particules le remaillage est fréquent et nécessite une finesse suffisante à proximité de l'interface fluide–solide ce qui en fait une procédure couteuse en termes de ressources.

À l'opposé de ces méthodes, on retrouve les méthodes des domaines fictifs. Elle consistent à considérer l'ensemble du domaine Ω comme domaine de calcul. Le problème fluide (1.10a)– (1.10b)–(1.10c) est alors étendu à l'intérieur du domaine solide en enforçant le mouvement rigide dans les régions où se trouvent les particules. Ainsi le maillage obtenu est fixe au cours du temps, et il est même possible de se ramener à un maillage cartésien en se plaçant dans un domaine rectangulaire contenant Ω puis en utilisant la technique des domaines fictifs pour forcer un mouvement rigide dans la région entourant Ω. On peut alors faire appel à des solveurs efficaces pour la résolution du problème étendu. Il existent plusieurs méthodes afin d'imposer le mouvement rigide dans le domaine solide. Parmis elles on peut notamment citer les travaux de Glowinski et al. [GPHJ99, GPH$^+$01] qui utilisent des multiplicateurs de Lagrange dans la formulation variationnelle du problème global, et qui agissent comme des forces extérieures semblables au gradient de pression pour obtenir l'incompressibilité. Pour nos simulations, nous avons retenu les méthodes de pénalisation de volume [ABF99], qui se basent sur des lois de milieux poreux pour forcer le mouvement rigide à l'intérieur des particules. Concrètement, on introduit des termes supplémentaires multipliés à des paramètres de pénalisation dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.10a). On distingue alors la méthode de pénalisation L2 et la méthode de pénalisation H1. Chaque méthode est introduite ci–dessous dans une section qui lui est consacrée.

1.3 Méthode de pénalisation de volume L2.

À cette étape, le problème fluide est déjà étendu sur l'ensemble du domaine Ω selon la méthode des domaines fictifs. La méthode de pénalisation L2 consiste alors à pénaliser la vitesse du fluide à l'intérieur du domaine solide par ajout dans (1.10a) d'un terme nul partout sauf en $\Omega_s(t)$ de la façon suivante,

$$\rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\Big) - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p + \frac{1}{\eta}\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_s) = \boldsymbol{f} \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\Omega \qquad (1.11a)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\Omega \qquad (1.11b)$$

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\partial\Omega \qquad (1.11c)$$

$$\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega \qquad (1.11d)$$

Ici $\eta > 0$ désigne le paramètre de pénalisation de la méthode. On a prolongé le terme source dans (1.10a) par 0 à l'intérieur du solide de façon à avoir $\boldsymbol{f}_{|_{\Omega_s(t)}} = 0$. Par ailleurs on a introduit $\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}$, la fonction caractéristique du domaine $\Omega_s(t)$,

$$\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \boldsymbol{x}\in\Omega_s(t), \\ 0 \text{ si } \boldsymbol{x}\notin\Omega_s(t), \end{cases}$$

Formellement, lorsque $\eta \to 0$ on obtient $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s$ à l'intérieur du solide. C'est d'ailleurs ce qui permet d'obtenir une condition de non–glissement pour le problème pénalisé. La convergence du problème (1.11) lorsque η tend vers 0 vers le problème découplé (1.10) a été prouvé dans [ABF99] dans le cas d'obstacles fixes (et donc avec $\boldsymbol{u}_s = 0$ dans (1.11a)). Dans ce même travail, les auteurs montrent que l'erreur sur la vitesse induite par cette méthode est de l'ordre de $\eta^{\frac{1}{4}}$. Cette estimation a par la suite été améliorée dans [CF03] pour atteindre l'ordre $\eta^{\frac{1}{2}}$ sous des hypothèses de régularité forte des solutions. Dans [Dor17] ces estimations sont étendues au cas d'un obstacle mobile dont la vitesse est connue analytiquement. L'étude de convergence de (1.11) vers (1.10) pour des particules en mouvement libre a été démontrée dans [BCM10]. Dans le modèle couplé étudié, la vitesse rigide est obtenue par projection suivant la technique proposée dans [SP05].

REMARQUE 1.3.1 Dans le cas d'un obstacle fixe, il est formellement montré dans [ABF99] que la vitesse vérifie une loi de Darcy à l'intérieur du domaine solide. Ainsi, le paramètre de pénalisation η peut être assimilé à la porosité du solide.

REMARQUE 1.3.2 Numériquement, il s'agit donc de travailler avec des valeurs de η aussi petites que possible.

Couplage avec le problème solide.

Pour la simulation numérique d'un écoulement particulaire avec la méthode de pénalisation L2, il est nécessaire de coupler (1.11) aux équations (1.4)–(1.5a)–(1.9) pour l'advection du domaine solide. On peut alors procéder comme dans [BCM10] par projection de la vitesse. Cette technique a l'avantage de traiter implicitement les forces hydrodynamiques $\mathbf{F}$ et $\mathbf{T}$ appliquées au solide. Pour notre modèle, on suit les travaux de [Uhl05, KS09] et on détermine ces forces à partir de (1.11) et du théorème de la divergence :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k &= \int_{\partial\Omega_s^k(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) \\ &= \lim_{\eta\to 0}\int_{\Omega_s^k(t)} \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\eta}\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad k\in\{1,..,N\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_k &= \int_{\partial\Omega_S^i(t)} \boldsymbol{r}_k(t,\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) \\ &= \lim_{\eta\to 0}\int_{\Omega_s^k(t)} \boldsymbol{r}_k(t,\boldsymbol{x})\times\Big(\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\eta}\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_s)\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad k\in\{1,..,N\}\end{aligned}$$

Pour l'implémentation numérique de (1.5a) et (1.9) une telle formulation pour les forces hydrodynamiques est avantageuse puisqu'il s'agit de deux intégrales de volume et donc simples à approcher. En revanche, il s'agit également d'une définition des forces hydrodynamiques a posteriori : même pour une formulation semi-implicite de $\mathbf{F}_k$ et $\mathbf{T}_k$, la vitesse fluide qui sert à calculer l'intégrale de volume est la solution du problème fluide au pas de temps précédent. Il faut alors envisager l'usage de la méthode du point fixe afin de coupler les problèmes fluide et solide de manière satisfaisante. On détaille l'implémentation de la méthode de pénalisation L2 dans le cadre d'un écoulement particulaire dans le chapitre 5.

1.4 Méthode de pénalisation de volume H1.

Pour cette méthode le terme ajouté dans (1.10a) vient pénaliser le tenseur des taux de déformation de la vitesse fluide. Dans le cas d'un obstacle fixe, le problème pénalisé H1 tel qu'il a été introduit dans [ABF99] est le suivant,

$$\rho\Big(1+\frac{1}{\eta}\mathbb{1}_\Omega\Big)\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \mathrm{div}\Big(\Big(1+\frac{1}{\eta}\mathbb{1}_\Omega\Big)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p)\Big) + \frac{\mu}{\eta}\mathbb{1}_\Omega(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad (t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\Omega \qquad (1.12a)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\Omega \qquad (1.12b)$$

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\partial\Omega \qquad (1.12c)$$

$$\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega \qquad (1.12d)$$

et il y est montré que le problème converge lorsque $\eta\to 0$ vers le problème initial (1.1). Dans ce même travail, les auteurs montrent que l'erreur sur la vitesse induite par cette méthode est de l'ordre de η. Dans [MSM02] la pénalisation du tenseur $\mathbf{D}(\boldsymbol{u})$ est généralisée au cas d'obstacles mobiles en considérant le problème de Navier–Stokes incompressible à densité et viscosité variables (1.2) en posant $\mu(t,\boldsymbol{x}) = \mu + \frac{\mu}{\eta}\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}(\boldsymbol{x})$. La convergence du problème y est montrée pour $d=2$ et permet par la suite de prouver l'existence de solutions faibles au problème découplé (1.10). Dans toute la suite on associe donc le problème pénalisé H1 à un problème bifluide et on pose $\mu_s = \frac{\mu}{\eta}$. De cette manière le fluide est pénalisé lorsque la viscosité dans la région occupée par les particules tend vers ∞. Le problème pénalisé retenu est donc le suivant,

$$\partial_t \varphi_k + \mathrm{div}(\varphi_k \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega,\ \forall k \in \{1,..,N\} \qquad (1.13a)$$

$$\partial_t(\bar{\rho}\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}(\bar{\mu}\mathbf{D}(\boldsymbol{u})) + \nabla p = \bar{\boldsymbol{f}} \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (1.13b)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (1.13c)$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \qquad (1.13d)$$

$$(\varphi, \boldsymbol{u})_{|t=0} = (\varphi_0, \boldsymbol{u}_0) \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \qquad (1.13e)$$

$$\bar{\rho}(t,\boldsymbol{x}) = \rho(1 - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(t,\boldsymbol{x})) + \sum_{k=1}^{N} \rho_k \varphi_k(t,\boldsymbol{x}) \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (1.13f)$$

$$\bar{\mu}(t,\boldsymbol{x}) = \mu(1 - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(t,\boldsymbol{x})) + \sum_{k=1}^{N} \mu_s \varphi_k(t,\boldsymbol{x}) \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (1.13g)$$

où φ_k désigne la fonction caractéristique de la k–ième particule et φ_0 est donné par la position initiale du domaine solide (1.10g). Par ailleurs on couple (1.13) au problème solide (1.4)–(1.5a)–(1.9) en définissant les forces volumiques des particules dans l'expression du terme source $\bar{\boldsymbol{f}}$:

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}(1 - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(t,\boldsymbol{x})) + \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \rho_k \varphi_k \boldsymbol{f}_k(t,\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Alors le système (1.13) régit la dynamique de l'écoulement particulaire.

REMARQUE 1.4.1 Par un calcul formel, on remarque que la pénalisation H1 nous permet de forcer un mouvement rigide à l'intérieur du domaine solide. On suppose $\bar{\boldsymbol{f}} = 0$ et $t \in (0,T)$. On considère le produit scalaire de (1.13b) avec $\boldsymbol{u}$. En utilisant (1.13a) à deux reprises puis en intégrant sur Ω on obtient l'estimation classique,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\bar{\rho}(\boldsymbol{x},t)|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mu\|(1 - \sum_{k=1}^{N}\varphi_k)\mathbf{D}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mu_s\|\sum_{k=1}^{N}\varphi_k \mathbf{D}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0.$$

En passant à la limite quand $\mu_s \to \infty$ il vient $\|\sum_{k=1}^{N}\varphi_k \mathbf{D}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0$ et donc $\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = 0$ dans le domaine solide. Alors par le Lemme 1.1.2, $\boldsymbol{u}$ définit un champ de vitesse rigide dans les régions occupées par les particules.

REMARQUE 1.4.2 Lorsque η est constant il s'agit alors d'un problème bi–fluide classique. Une preuve de l'existence de solutions faibles à ce problème pour $d = 2, 3$ peut être trouvée dans [BF13].

1.5 Comparaison des deux méthodes.

Il s'agit d'une étude comparative réalisée pour le proceedings TI2018 (voir annexe D). On y étudie le problème de la chute d'une bille rigide dans un fluide visqueux modélisé par les méthodes de pénalisation L2 et H1 (voir Fig 1.3). Pour le schéma semi–discrétisé en temps, on adopte une méthode de prédiction–correction. Les détails de l'implémentation des méthodes peuvent être trouvés dans le chapitre 5.

On considère un domaine d'étude $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,3]$ assez long afin de permettre à la bille d'atteindre sa vitesse terminale. Ce phénomène se produit lorsque les forces exercées par le fluide sur

la particule compensent les forces volumiques dans (1.5a)–(1.9). Alors la vitesse terminale est atteinte lorsque l'accélération de la bille devient nulle. On définit la densité et la viscosité du fluide par $\rho = 1$ et $\mu = 0.01$. La sphère rigide est caractérisée par un rayon $r = 0.05$ et une densité $\rho_s = 5$. Sa position initiale dans Ω est $(0.5, 0.5, 1)$. L'unique force volumique exercée sur la bille est la pesanteur, avec une constante de gravité $g = 98.1$. Le paramètre de pénalisation retenu est $\eta = 10^{-7}$. Pour les pas de temps et d'espace on utilise $\mathrm{d}t = 0.001$ et $h = 1/50$.

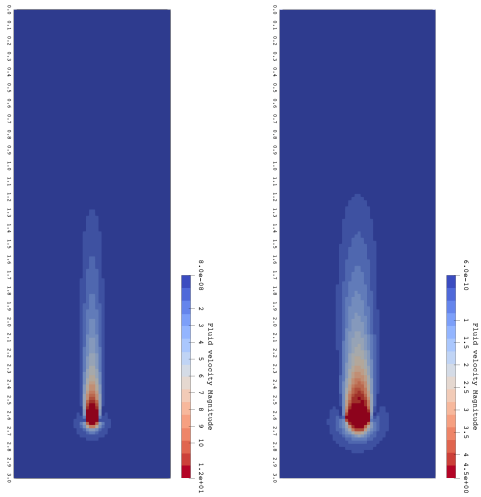

FIGURE 1.2 – Magnitude du champ de vitesse pour la pénalisation L2 (à gauche) et la pénalisation H1 (à droite) lorsque la sphère atteint la position $(0.5, 0.5, 2.617)$.

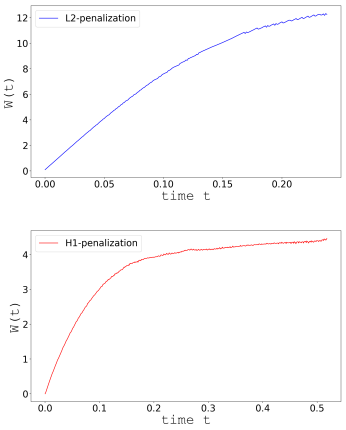

FIGURE 1.3 – Composante de la vitesse translationelle de la bille associée à la direction de la chute pour la pénalisation L2 (en haut) et la pénalisation H1 (en bas). La vitesse se stabilise au cours du temps et on observe la particule atteindre une vitesse terminale.

Dans les deux cas, on observe que la bille atteint une vitesse terminale tout en gardant une trajectoire rectiligne. Les deux vitesses terminales obtenues, quoique différentes ($4L.T^{-1}$ pour la pénalisation H1 contre $12L.T^{-1}$ pour la pénalisation L2) sont du même ordre. On observe une diffusion autour de la bille pénalisée par H1. Il s'agit d'un phénomène déjà observé dans [ABF99] et qui s'explique par la finesse insuffisante du maillage couplée à l'absence de traitement pour remédier à ce problème lors de la discrétisation de la viscosité. Ce phénomène de diffusion a pour conséquence l'amplification des forces exercées sur la bille par le fluide. On observe le phénomène inverse pour la pénalisation L2 en raison du traitement explicite des forces hydrodynamiques dans (1.5a)–(1.9). Il est donc nécessaire de coupler cette méthode à une méthode de point fixe afin d'améliorer le couplage entre le domaine fluide et le domaine solide.

Chapitre 2

Discrétisation en espace par le schéma Marker and Cell.

L'objet de ce chapitre est d'introduire la méthode Marker and Cell (aussi connue sous l'acronyme MAC), qui est la méthode de discrétisation en espace utilisée pour la résolution numérique de l'ensemble des problèmes abordés dans cette thèse. Cette dernière est couplée à la méthode des volumes finis puis appliquée à un problème "type", et cohérent à nos travaux, afin de définir l'approximation des équations et des inconnues qui le composent. On regroupe ainsi le cadre fonctionnel et les outils nécessaires qui sont communs aux Chapitres 3 et 4.

Dans une première partie, on aborde l'historique et les principales motivations de la méthode MAC. Une deuxième section est consacrée au problème continu donné par les équations de Navier–Stokes incompressible à densité et viscosité variables, sur lequel on se base pour l'introduction de la méthode MAC. On présente ensuite le maillage non uniforme issu de la discrétisation de Ω, le domaine spatial d'étude, suivi de l'approximation en temps et en espace des équations, avec un schéma implicite en temps. Pour chaque opérateur intervenant dans le problème, on détermine son analogue discret puis on énonce les propriétés de dualité qui lient ces opérateurs (qui s'apparentent à des intégrations par partie discrètes). Étant donné l'extension du problème de Navier–Stokes non homogène à la viscosité variable, on définit la discrétisation du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T)$ et on démontre une inégalité discrète de Korn.

2.1 La méthode Marker and Cell

Il s'agit d'une méthode de discrétisation en espace introduite dans les années 60 par Harlow et Welch [HW65] pour traiter les problèmes d'écoulements à surface libre. Dans leurs travaux, la simulation du problème de Navier–Stokes en formulation vitesse–pression se base sur deux points clés : l'usage de grilles cartésiennes décalées pour la discrétisation des inconnues, et le suivi de l'interface du fluide à l'aide de marqueurs lagrangiens. C'est ce premier point innovant qui est à l'origine de la méthode MAC telle qu'on la connait aujourd'hui : la vitesse et la pression sont définies sur des grilles qui leur sont propre. Elle se distingue donc des méthodes colocalisées, pour lesquelles les inconnues discrètes sont définies sur les mêmes noeuds d'un unique maillage.

Le gain de popularité de la méthode MAC coincide avec l'introduction des méthodes de projections pour les écoulements incompressibles en formulation vitesse–pression [Cho68, Tem69]. En effet pour l'approximation d'un tel problème par différences finies centrées, l'utilisation d'un maillage colocalisé entraine une instabilité numérique causée par un découplage entre la pression et la vitesse. Ce problème

est étroitement lié au non respect de la condition Inf-Sup (ou condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi) pour le problème discrétisé. Afin de définir cette condition, considérons le problème continu suivant, donné par les équations de Stokes incompressible dans un domaine ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{u} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Alors, la preuve que ce problème est bien posé est directement liée au fait que la condition Inf-Sup ci-dessous est vérifiée :

$$\inf_{p \in L^2_0(\Omega)} \left(\sup_{\boldsymbol{v} \in (H^1_0(\Omega))^2} \frac{b(\boldsymbol{v}, p)}{\|p\|_{L^2}} \right) > 0,$$

en définissant $b(\boldsymbol{v}, p) = \displaystyle\int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ pour $(\boldsymbol{v}, p) \in (H^1_0(\Omega))^2 \times L^2_0(\Omega)$.

Dans le contexte de l'approximation de ce problème (ou d'un problème d'écoulement incompressible en général) on retrouve une condition Inf–Sup associée au problème discretisé, faisant alors apparaitre les équivalents discrets des espaces fonctionnels ainsi qu'une contrainte sur l'approximation de $b(\boldsymbol{v}, p)$,

$$\beta_\tau = \inf_{p_h \in M_h} \left(\sup_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}_h} \frac{b_\tau(\boldsymbol{v}_h, p_h)}{\|p_h\|_{M_h}} \right).$$

Il s'agit alors de s'assurer que la constante β_τ ne tend pas vers 0 avec h, le pas de discrétisation en espace. Cette condition de stabilité a été largement étudiée pour les éléments finis [BBF08, GR86, BF91, Min01]. Pour les différences finies (et par extension pour les volumes finis) un des moyens les plus classiques pour assurer la condition Inf–Sup est d'utiliser le maillage issu de la méthode MAC [Nic92, NW96, PT83, SS97, BKN15]. Il est ainsi d'usage courant d'appeler méthode MAC toute discrétisation spatiale d'un problème sur un système de grilles cartésiennes décalées.

Par ailleurs, afin de discrétiser les équations du problème donné dans la Section 2.2 on combine la méthode MAC à la méthode des volumes finis. Cette dernière est particulièrement adaptée à la simulation numérique des lois de conservations, ce qui en fait une méthode de choix pour les problèmes issus de la mécanique des fluides. En effet, elle consiste à travailler avec des fonctions constantes par morceaux sur les volumes composant le maillage, dits volumes de contrôle. Elle possède alors une propriété de conservation locale provenant du fait que l'approximation s'applique en réalité aux intégrales des équations sur les volumes de contrôles. Par la suite, le théorème de la divergence permet de définir des flux sur les bords de chacun de ces volumes, et on obtient donc l'égalité d'un flux entrant dans un volume avec le flux sortant du volume adjacent. Dans le cas des équations de Stokes/ Navier–Stokes incompressibles, l'adoption du maillage décalé de la méthode MAC permet donc de définir la pression au centre d'un volume, et les composantes de la vitesse sur ses bords.

2.2 Présentation du problème continu.

On considère ici le problème de l'écoulement d'un fluide nonhomogène incompressible sur un domaine ouvert, borné et connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (avec $d = 2, 3$) et sur un intervalle de temps fini $[0, T]$. On modélise ce problème par les équations de Navier–Stokes incompressible à densité et viscosité variables, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (2.1a)$$

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}(\mu(\rho)\mathbf{D}(\boldsymbol{u})) + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (2.1b)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (2.1c)$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \qquad (2.1d)$$

$$(\rho, \boldsymbol{u})_{|t=0} = (\rho_0, \boldsymbol{u}_0) \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \qquad (2.1e)$$

où $(\rho, \boldsymbol{u}, p)$ sont les inconnues et désignent respectivement la densité du fluide, le champ de vitesse de l'écoulement et la pression. Le terme source $\boldsymbol{f} \in L^2([0,T]; (L^2(\Omega))^d)$ est une donnée du problème. On suppose que la viscosité μ présente dans (2.1b) dépend continuement de ρ selon une loi donnée $\rho \mapsto \mu(\rho)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Une telle hypothèse permet la modélisation d'une multitude de problèmes, notamment celui de l'écoulement de plusieurs fluides non miscibles lorsque la densité est discontinue. On rappelle que le terme $\mathbf{D}(\boldsymbol{u})$ représente le tenseur des taux de déformation, et on le définit par $\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T)$.

L'absence de conditions au bord pour la densité provient du fait que l'équation de transport (2.1a) requiert une condition "inflow" : une connaissance de ρ sur la partie du bord $\Gamma_{in} = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) < 0\}$, qui est vide ici (2.1d). Finalement, on remarque que les équations (2.1a) et (2.1b) sont sous la forme conservative ; il s'agit de la formulation adaptée à l'approximation du problème par la méthode des volumes finis.

On renvoit le lecteur au Chapitre 1 pour un état de l'art concernant les résultats d'existence de solutions à (2.1). Néanmoins, on rappelle ci-dessous quelques estimations vérifiées par les solutions faibles du problème. Tout d'abord, on impose les conditions de régularité suivantes pour les données initiales $(\rho_0, \boldsymbol{u}_0)$:

$$(\rho_0, \boldsymbol{u}_0) \in L^\infty(\Omega) \times (L^2(\Omega))^d, \qquad (2.2)$$

et on note $\rho_{\min} = \mathrm{ess\,inf}_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\ \rho_0(\boldsymbol{x}) > 0$, $\rho_{\max} = \mathrm{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\ \rho_0(\boldsymbol{x})$. Sous couvert d'une régularité suffisante pour la vitesse, un résultat classique issu de la théorie de l'équation de transport [DL89] et obtenu par (2.1a) et (2.1c) est le principe du maximum pour la densité :

$$\rho_{\min} \leq \rho(t,\boldsymbol{x}) \leq \rho_{\max}, \qquad p.p. \quad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T] \times \Omega. \qquad (2.3)$$

Il montre ainsi que la régularité naturelle pour ρ est $L^\infty((0,T)\times\Omega)$. Étant donné que la viscosité est une fonction continue de la densité, elle vérifie l'équation de transport avec ρ et donc (2.3) également. En posant $\mu_{\min} = \mathrm{ess\,inf}_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\ \mu(\rho_0(\boldsymbol{x})) > 0$, $\mu_{\max} = \mathrm{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\ \mu(\rho_0(\boldsymbol{x}))$ on a alors,

$$\mu_{\min} \leq \mu(\rho(t,\boldsymbol{x})) \leq \mu_{\max}, \qquad p.p. \quad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T] \times \Omega. \qquad (2.4)$$

Finalement, par un calcul formel utilisant (2.1a) et le produit scalaire de (2.1b) avec $\boldsymbol{u}$ suivi d'une intégration en temps, on retrouve l'estimation suivante,

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\rho(\bar{t},\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}(\bar{t},\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^t \int_\Omega \mu(\rho(t,\boldsymbol{x}))|\mathbf{D}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \frac{1}{2}\rho_0(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \forall \bar{t} \in (0,T) \qquad (2.5)$$

En supposant les estimations (2.3) et (2.4) vérifiées on retrouve la régularité naturelle "classique" de $\boldsymbol{u}$ pour le problème de Navier–Stokes, donnée par $L^\infty((0,T);(L^2(\Omega))^d) \cap L^2((0,T);(H_0^1(\Omega))^d)$. Notons que, avec le principe du maximum, on cherchera à vérifier l'équivalent discret de (2.5) pour le problème approché. Ceci est rendu possible par un choix adéquat de la discrétisation du terme convectif de (2.1b), étudié notamment dans [HL10a, GK14, HL10b, GHLM18] et que l'on rappelle dans ce chapitre.

2.3 Discrétisation du domaine par la méthode MAC

On suppose dans toute la suite que le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est défini comme l'union de rectangles pour $d = 2$, ou de parallélépipèdes rectangles si $d = 3$. On peut alors se ramener à un domaine dont les arrêtes (resp. les faces) des rectangles (resp. parallélépipèdes) sont alignées avec le repère orthonormé de $\mathbb{R}^d$, noté $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_d)$ et ainsi écrire,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{d}]a_k^i, b_k^i[\quad N \in \mathbb{N}, \quad (a_k^i, b_k^i) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

Suivant la philosophie de la méthode MAC, on introduit un système de grilles décalées cartésiennes recouvrant Ω afin de définir les inconnues discrètes. Comme on pourra le voir plus loin, le problème de découplage entre la vitesse et la pression mentionné en début de chapitre se pose également entre la densité et la vitesse (étant donné qu'on a ajouté l'équation de conservation de la masse (2.1a) liant ρ et $\boldsymbol{u}$). Pour cette raison, la grille associée à la densité sera confondue avec celle de la pression.

Les grilles du maillage utilisé ici sont non uniformes : le pas de discrétisation en espace n'est donc pas constant. On fait par ailleurs appel à un formalisme volumes finis généralisé [EGH00, GHLM18] pour les définir, par opposition à la notation lexicographique usuelle. On fait donc déja mention de volumes de contrôles dans la définition du maillage MAC qui suit.

DÉFINITION 2.3.1 – Maillage MAC. Soit Ω un domaine vérifiant (2.6).
Un maillage associé à la discrétisation MAC de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), notée $\mathcal{D}$, est définie par le couple $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$, où :

- $\mathcal{M}$: est la grille dîte "primale" associée à la pression et définie comme une partition conforme de Ω dont les éléments sont des rectangles si $d = 2$ (resp. des parallélépipèdes rectangles si $d = 3$). Un élement K de $\mathcal{M}$ désigne une cellule primale de $\mathcal{D}$. On a ainsi $\overline{\cup_{K\in\mathcal{M}} K} = \overline{\Omega}$. On dénote par $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des arrêtes (resp. faces) d'une cellule $K \in \mathcal{M}$.

- $\mathcal{E}$: est le d–uplet de grilles dîtes duales associées aux d composantes de la vitesse. Il est définit comme l'ensemble de toutes les arrêtes σ de $\mathcal{M}$ (resp. faces de $\mathcal{M}$ si $d = 3$), i.e. $\mathcal{E} = \{\sigma \in \mathcal{E}(K) | K \in \mathcal{M}\}$. On distingue les éléments de $\mathcal{E}$ appartenant à l'intérieur de Ω (resp. au bord de Ω) que l'on note $\mathcal{E}_{\text{int}}$ (resp. $\mathcal{E}_{\text{ext}}$), de telle sorte que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$. Pour chacune des d directions $i \in [\![1, d]\!]$ on définit la $i-$ème grille duale, notée $\mathcal{E}^{(i)}$ et composée des arrêtes ($d = 2$)/ faces ($d = 3$) normales au vecteur $\boldsymbol{e}_i$. On définit alors $\mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)} = \mathcal{E}^{(i)} \cap \mathcal{E}_{\text{int}}$ et $\mathcal{E}_{\text{ext}}^{(i)} = \mathcal{E}^{(i)} \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}$. On a $\mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}^{(i)}$ pour tout $i = 1, \dots, d$.

  Pour un élément $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, on note $\sigma = K|L$ si il existe $(K, L) \in \mathcal{M}^2$ tels que $\sigma = \partial K \cap \partial L$ soit l'arête/la face commune à K et L. De plus, on associe à σ la cellule duale D_σ définie par $D_{K,\sigma} \cup D_{L,\sigma}$, où $D_{K,\sigma}$ (resp. $D_{L,\sigma}$) est le demi-rectangle/demi-parallélépipède de K (resp. L)

adjacent à σ. Pour un élément σ de $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ adjacent à $K \in \mathcal{M}$, on pose $D_\sigma = D_{K,\sigma}$. De façon analogue aux cellules primales, on obtient i partitions de Ω et on écrit :

$$\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_i} D_\sigma}, \quad i = 1, \dots, d$$

La $i-$ème partition définit la $i-$ème grille duale de $\mathcal{D}$.

Étant donné qu'on est amenés au cours de l'approximation du problème à utiliser les flux traversant les cellules duales $\{D_\sigma, \sigma \in \mathcal{E}\}$, on définit pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ les arrêtes ($d = 2$)/ faces ($d = 3$) de la $i-$ème grille duale $\mathcal{E}^{(i)}$, que l'on note $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$. Ici aussi on distinguera les éléments intérieurs et les éléments extérieurs de $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$ en notant $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)} = \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{int}} \cup \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{ext}}$. Pour un élément $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{int}}$, on note $\epsilon = \sigma|\sigma'$ avec $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}_i^2$ tels que $D_\sigma \cap D_{\sigma'} = \epsilon$.

Dans un soucis de réduction des appellations, on fera usage de "cellule" pour désigner un élément de $\mathbb{R}^d$ ($K \in \mathcal{M}$, D_σ pour $\sigma \in \mathcal{E}$) et "face" pour un élément dans $\mathbb{R}^{d-1}$ ($\sigma \in \mathcal{E}$, $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}$), sans donc considérer la dimension d.

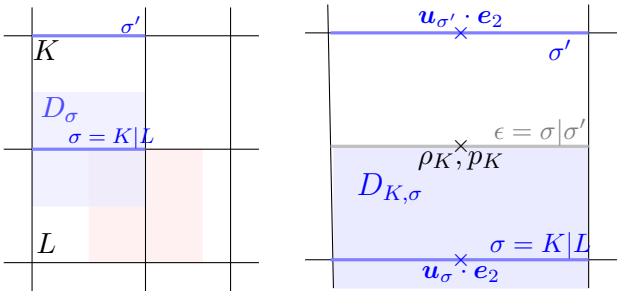

FIGURE 2.1 – Représentation de $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ en dimension $d = 2$

Par ailleurs, on introduit ci-dessous deux constantes permettant de contrôler les pas d'espaces de $\mathcal{D}$ pour l'étude réalisée dans les chapitres 3 et 4. Elles caractérisent la non-uniformité du maillage $\mathcal{D}$ et sont données par :

- la régularité du maillage $\eta_{\mathcal{M}}$:

$$\eta_{\mathcal{M}} = \max \left\{ \frac{|\sigma|}{|\sigma'|}, \ \sigma \in \mathcal{E}^{(i)}, \forall \sigma' \in \mathcal{E}^{(j)}, i, j \in [\![1, d]\!], i \neq j \right\}, \tag{2.7}$$

- le diamètre maximal des cellules primales $K \in \mathcal{M}$, noté $h_{\mathcal{M}}$:

$$h_{\mathcal{M}} = \max\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{M}\}, \tag{2.8}$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue en dimension $d-1$. Par la suite, on utilisera cette même notation pour la mesure de Lebesgue en dimension d. Ainsi $|K|$ désigne la mesure de la cellule primale $K \in \mathcal{M}$, et $|\partial K|$ la mesure de sa frontière.

2.4 Discrétisation du problème continu : le schéma.

On réalise dans un premier temps une semi-discrétisation en temps du problème continu (2.1). On considère alors une subdivision uniforme de l'intervalle $[0,T]$ donnée par l'ensemble $\{t^n = n\delta t, n = 0,..,N\}$, où δt désigne le pas constant de discrétisation en temps et N vérifie $T = N\delta t$. Le schéma utilisé ici pour la discrétisation en temps de (2.1) est un schéma d'Euler implicite, et on se ramène à la résolution d'un problème continu en espace à chaque pas de temps t^n.

Pour tout $n \in \{0,..,N\}$, la discrétisation en espace du problème semi-discrétisé sur $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ est décalée dans le sens suivant : les degrés de liberté pour la densité et la pression sont situés au centre des cellules de la grille primale $\mathcal{M}$, tandis que les degrés de liberté pour la i–ème composante de la vitesse sont situés au centre des cellules de la i–ème grille duale $\mathcal{E}^{(i)}$, et donc sur les faces de $K \in \mathcal{M}$. En conséquence on définit $(\rho^0, \boldsymbol{u}^0)$, l'approximation des données initiales $(\rho_0, \boldsymbol{u}_0)$ par,

$$\begin{aligned} \rho_K^0 &= \frac{1}{|K|}\int_K \rho_0(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad K \in \mathcal{M} \\ \boldsymbol{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|D_\sigma|}\int_{D_\sigma} \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

et on manipule des fonctions constantes par morceaux en espace sur les cellules des différents maillages de $\mathcal{D}$ (en particulier les solutions discrètes recherchées en t^n). On est donc amenés à introduire les espaces fonctionnels associés : $L_\mathcal{M}$, l'espace discret de pression défini comme l'ensemble des fonctions constantes sur les cellules $K \in \mathcal{M}$, et $H_{\mathcal{E}^{(i)}}$, l'espace correspondant à la $i-$ème composante de la vitesse et regroupant l'ensemble des fonctions constantes sur chaque cellule duale D_σ avec $\sigma \in \mathcal{E}^{(i)}$. On note alors,

$$L_\mathcal{M} = \Big\{ q = \sum_{K\in\mathcal{M}} q_K \mathbb{1}_K, \quad q_K \in \mathbb{R} \Big\} \qquad H_{\mathcal{E}^{(i)}} = \Big\{ v = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}} v_\sigma \mathbb{1}_{D_\sigma}, \quad v_\sigma \in \mathbb{R} \Big\}, \quad i \in [\![1,d]\!] \tag{2.10}$$

où $\mathbb{1}_K$ (resp. $\mathbb{1}_{D_\sigma}$) désigne la fonction caractéristique de la cellule de pression $K \in \mathcal{M}$ (resp. de la cellule de vitesse $D_\sigma, \sigma \in \mathcal{E}$) et vérifie :

$$\mathbb{1}_K(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 \text{ if } \boldsymbol{x} \in K, \\ 0 \text{ if } \boldsymbol{x} \notin K, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_{D_\sigma}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 \text{ if } \boldsymbol{x} \in D_\sigma, \\ 0 \text{ if } \boldsymbol{x} \notin D_\sigma. \end{cases}$$

Pour un élément q de $L_\mathcal{M}$, il sera fréquent d'utiliser la notation $q = (q_K)_{K\in\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{N_\mathcal{M}}$ avec $N_\mathcal{M} = \mathrm{card}(\mathcal{M})$: il s'agit de l'ensemble des degrés de liberté de q. De la même façon, on note $v = (v_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}}$ pour $v \in H_{\mathcal{E}^{(i)}}$ quelconque.

De plus, on recherchera naturellement une approximation du champ de vitesse $\boldsymbol{u} = (u_1,..,u_d)^T$ dans l'espace discret $\boldsymbol{H}_\mathcal{E} = \prod_{i=1}^d H_{\mathcal{E}^{(i)}}$. Par analogie avec le cas continu, les conditions aux bord sont intégrées dans la définition des espaces de vitesse. Dans le contexte de notre problème (2.1), on se limite aux conditions de Dirichlet homogène et on introduit $H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \subset H_{\mathcal{E}^{(i)}}$ comme :

$$H_{\mathcal{E}^{(i)},0} = \Big\{ u \in H_{\mathcal{E}^{(i)}}, \ u(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in D_\sigma, \ \sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{ext}}^{(i)} \Big\}, \qquad i \in [\![1,d]\!]. \tag{2.11}$$

et de façon similaire à $\boldsymbol{H}_\mathcal{E}$ on dénote $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} = \prod_{i=1}^d H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \subset \boldsymbol{H}_\mathcal{E}$.

On termine avec la définition de l'équivalent discret de $L^2_0(\Omega)$: ici aussi, la pression discrète joue un rôle de multiplicateur de Lagrange pour la condition d'incompressibilité et est donc définie à une constante près. On fixe cette constante en considérant des éléments de $L_{\mathcal{M},0}$, désignant l'espace des fonctions de $L_{\mathcal{M}}$ à moyenne nulle :

$$L_{\mathcal{M},0} = \Big\{ q = (q_K)_{K\in\mathcal{M}} \in L_{\mathcal{M}}, \quad \sum_{K\in\mathcal{M}} |K| q_K = 0 \Big\}. \tag{2.12}$$

Ainsi $\forall n \in \{0, \cdots, N-1\}$, on obtient pour le problème discrétisé au temps t^n,

Trouver $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times L_{\mathcal{M},0}$ vérifiant :

$$\eth_t \rho^{n+1} + \mathrm{div}_{\mathcal{M}}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1}) = 0 \tag{2.13a}$$

$$\eth_t(\rho\boldsymbol{u})^{n+1} + \boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})\,\boldsymbol{u}^{n+1} - \mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}}\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1})) + \nabla_{\mathcal{E}}\, p^{n+1} = \boldsymbol{f}^{n+1}_{\mathcal{E}} \tag{2.13b}$$

$$\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u}^{n+1} = 0, \tag{2.13c}$$

où (2.13a), (2.13b), (2.13c) sont les approximations respectives de (2.1a), (2.1b) et (2.1c). On définit dans la suite du chapitre les opérateurs discrets intervenant dans (2.13). Notons la forte nonlinéarité au niveau du terme de convection $\boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})\,\boldsymbol{u}^{n+1}$ et du terme diffusif $\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}}\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1}))$ due au couplage implicite avec l'équation de conservation de la masse (2.13a).

En reconsidérant à nouveau la totalité de la partition de l'intervalle $[0,T]$, on obtient des solutions discrètes constantes par morceaux en espace et en temps sur les intervalles $(t^n, t^{n+1}]$ que l'on note,

$$\begin{aligned}
u_i(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}_{\mathrm{int}}} u^{n+1}_\sigma \mathbb{1}_{D_\sigma}(\boldsymbol{x}) \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}(t), \quad i \in [\![1,d]\!] \\
p(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} p^{n+1}_K \mathbb{1}_K(\boldsymbol{x}) \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}(t) \\
\rho(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} \rho^{n+1}_K \mathbb{1}_K(\boldsymbol{x}) \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}(t),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

et où $\mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $]t_n, t_{n+1}]$.

On note $X_{i,\mathcal{E},\delta t}$ l'espace fonctionnel associé aux éléments de vitesse u_i de (2.14) . De la même manière, $Y_{\mathcal{M},\delta t}$ regroupe les fonctions de la forme p, ρ dans (2.14). On cherchera donc à déterminer $(\boldsymbol{u}, \rho, p) \in \boldsymbol{X}_{\mathcal{E},\delta t} \times Y^2_{\mathcal{M},\delta t}$, l'approximation de la solution de (2.1).

2.5 Discrétisation des opérateurs et propriétés.

On définit dans cette section les opérateurs discrets intervenant dans (2.13). Les termes de dérivées en temps sont approchés de façon classique par différences finies à l'aide d'une formule décentrée. Les

termes restants sont traités par la méthode des volumes finis : grâce à la formulation conservative des équations, on fait appel au théorème de la divergence sur les cellules composant les partitions de Ω. On se ramène alors à des flux définis sur les faces de ces cellules et on a la propriété de conservation locale suivante (Fig. 2.2) :

Pour une face $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}$, $i \in [\![1, d]\!]$ telle que $\sigma = K|L$, on note $\boldsymbol{n}_{K,\sigma}$ le vecteur unitaire normal à σ et pointant vers l'extérieur de la cellule K. En posant $u_{K,\sigma} = u_\sigma \, \boldsymbol{n}_{K,\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_i$, on obtient :

$$u_{K,\sigma} = -u_{L,\sigma} \qquad \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}} \tag{2.15}$$

Par ailleurs, on note x_K le centre de masse d'un élément $K \in \mathcal{M}$ (Fig. 2.2) ; et de façon similaire x_σ désignera le centre de masse de la face $\sigma \in \mathcal{E}$.

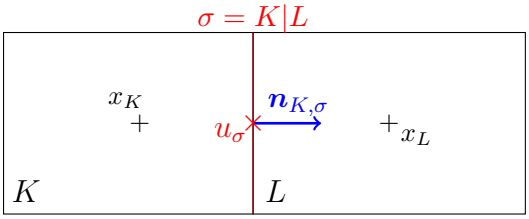

FIGURE 2.2 – Conservativité des flux sur $\sigma = K|L$, $d = 2$

Les termes définis dans (2.13b) sont homogènes à une vitesse. On sera donc également amenés à manipuler des flux sur les faces des cellules duales $\{D_\sigma, \sigma \in \mathcal{E}\}$, et on obtient une propriété de conservation similaire à (2.15).

2.5.1 Approximation des termes de dérivée en temps.

L'équation de conservation de la masse discrète étant naturellement homogène à une pression, on définit $\eth_t \rho \in Y_{\mathcal{M},\delta t}$ l'approximation de la dérivée en temps de ρ par

$$\eth_t \rho(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \eth_t \rho^{n+1}(\boldsymbol{x}) \mathbb{1}_{]t_n, t_{n+1}]}(t),$$

et on adopte une formule de différences finies décentrée pour l'implémentation de $\eth_t \rho^{n+1}$, ce qui donne $\eth_t \rho^{n+1} = \sum_{K \in \mathcal{M}} \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) \mathbb{1}_K \in L_{\mathcal{M}}$ pour $t \in]t_n, t_{n+1}]$ et $n \in \{0, \cdots, N-1\}$. En raison des différentes positions des degrés de liberté de ρ et $\boldsymbol{u}$, des précautions sont à prendre pour approcher la dérivée en temps de $(\rho \boldsymbol{u})$ dans (2.13b). On introduit alors l'approximation de la quantité de mouvement $\rho \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}_{\mathcal{E},\delta t}$ à partir de $(\rho, \boldsymbol{u}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{X}_{\mathcal{E},\delta t}$ de la façon suivante,

$$(\rho \boldsymbol{u})(\cdot, t) = (\rho \boldsymbol{u})^{n+1} = ((\rho u_1)^{n+1}, \ldots, (\rho u_d)^{n+1})^T$$

avec $t \in]t_n, t_{n+1}]$ et $n \in \{0, \cdots, N-1\}$.
Et pour $i = 1, .., d$ on définit chacune des d composantes par,

$$(\rho u_i)^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(i)}} \rho_{D_\sigma}^{n+1} u_\sigma^{n+1} \mathbb{1}_{D_\sigma} \in H_{\mathcal{E}^{(i)},0},$$

où $(\rho_{D_\sigma}^{n+1})_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}}$ est un élément de $H_{\mathcal{E}^{(i)}}$. Du fait des conditions au bord pour la vitesse on peut se restreindre aux faces intérieures et on écrit,

$$|D_\sigma| \, \rho_{D_\sigma}^{n+1} = |D_{K,\sigma}| \, \rho_K^{n+1} + |D_{L,\sigma}| \, \rho_L^{n+1} \text{ pour } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}. \tag{2.16}$$

La valeur $\rho_{D_\sigma}^{n+1}$ est donc obtenue par combinaison convexe des valeurs de ρ^{n+1} en rappelant que $|D_\sigma| = |D_{K,\sigma}| + |D_{L,\sigma}|$. Notons de plus qu'une telle valeur est nécessaire pour obtenir la conservation de la masse sur les cellules duales et ainsi retrouver une estimation pour l'énergie cinétique discrète. On définit finalement $\eth_t(\rho \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{X}_{\mathcal{E},\delta t}$, l'approximation de la dérivée en temps de la quantité de mouvement, par :

$$\eth_t(\rho \boldsymbol{u})(\cdot,t) = (\eth_t(\rho u_1)^{n+1}, \dots, \eth_t(\rho u_d)^{n+1})^T$$

pour $t \in]t_n, t_{n+1}]$ et $n \in \{0, \cdots, N-1\}$. Et par une formule de différences finies décentrées, on a : $\eth_t(\rho u_i)^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(i)}} \frac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n) \mathbb{1}_{D_\sigma} \in H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$.

Pour le reste des approximations ci-dessous on se passe de l'indice en temps étant donné qu'il s'agit d'opérateurs différentiels en espace.

2.5.2 Partitions de Ω associées à $\widetilde{\mathcal{E}}$.

La composante de vitesse u_i étant définie au centre des faces de $\mathcal{E}_i$, l'approximation des termes $(\partial_j u_i)$ présents dans la i-ème équation de quantité de mouvement (2.1b) sont naturellement homogènes à des éléments définis sur $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$ (Fig. 2.3 et 2.4). On introduit alors $d \times d$ partitions du domaine Ω en associant la partition (i,j) aux éléments de $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$ orthogonaux à $\boldsymbol{e}_j$, et on note :

$$(D_\epsilon)_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}, \epsilon \perp \boldsymbol{e}_j} = \begin{cases} \epsilon \times [\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma'}] & \text{pour } \epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\text{int}}^{(i)} \\ \epsilon \times [\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma,\epsilon}] & \text{pour } \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\text{ext}}^{(i)} \cap \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \end{cases} \tag{2.17}$$

où $\boldsymbol{x}_{\sigma,\epsilon}$ désigne la projection orthogonale de $\boldsymbol{x}_\sigma$ sur ϵ. Il s'agit donc pour chaque partition de la réunion de rectangles pour $d = 2$, et de parallélépipèdes rectangle pour $d = 3$. On remarque (Fig. 2.3 et 2.4) que la partition (i,j) coincide avec la partition (j,i) pour $i,j \in [\![1,d]\!]$. De plus, pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, la partition (i,i) correspond au maillage primal $\mathcal{M}$: ainsi pour une face $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$, $\epsilon \perp \boldsymbol{e}_i$ incluse dans $K \in \mathcal{M}$ on a $D_\epsilon = K$. Par la suite, on notera $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}$ les faces duales de $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$ perpendiculaires à $\boldsymbol{e}_j$:

$$\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)} = \{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}, \epsilon \perp \boldsymbol{e}_j\}$$

On a alors $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)} \neq \widetilde{\mathcal{E}}^{(j,i)}$.

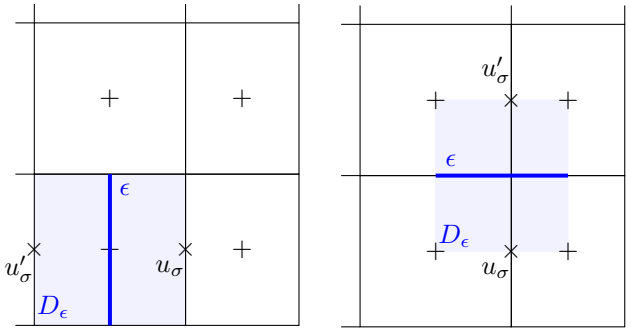

FIGURE 2.3 – Cellules D_ϵ associées à $\epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}_{int}^{(1)}$: pour $\epsilon \perp \boldsymbol{e}_1$ (gauche) ; pour $\epsilon \perp \boldsymbol{e}_2$ (droite) ; $(d = 2)$

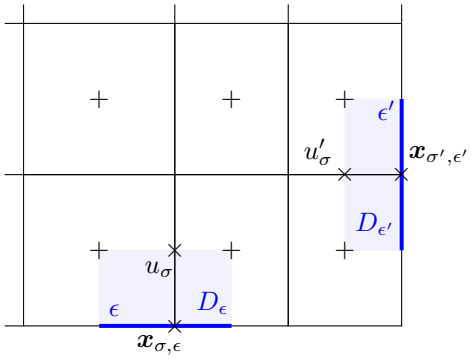

FIGURE 2.4 – Cellules D_ϵ et $D_{\epsilon'}$ associées respectivement à $\epsilon = \widetilde{\mathcal{E}}^{(1)}_{ext} \cap \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)$ et $\epsilon' = \widetilde{\mathcal{E}}^{(2)}_{ext} \cap \widetilde{\mathcal{E}}(D'_\sigma)$; $(d = 2)$

Pour $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, on note alors $(\eth_j u_i)$ la dérivée discrète de u_i dans la direction $\boldsymbol{e}_j$. De plus, $(\eth_j u_i)$ est constant sur D_ϵ pour $\epsilon = \sigma|\sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}$ avec,

$$\left(\frac{\eth u_i}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)_{D_\epsilon} = \begin{cases} \dfrac{u_{\sigma'} - u_\sigma}{d(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma'})}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \cdot \boldsymbol{e}_j) & \text{pour } \epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{int}} \\ \dfrac{-u_\sigma}{d(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma,\epsilon})}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \cdot \boldsymbol{e}_j) & \text{pour } \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{ext}} \cap \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \end{cases} \tag{2.18}$$

où $d(\cdot,\cdot)$ représente la distance euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Par analogie avec le maillage primal, $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$ désigne le vecteur unitaire normal à ϵ et pointant vers l'extérieur de la cellule duale associée à σ. Par la suite on notera,

$$d_\epsilon = \begin{cases} d(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma'}) & \text{pour } \epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{int}} \\ d(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma,\epsilon}) & \text{pour } \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{ext}} \cap \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \end{cases}$$

On est alors amenés à introduire $H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}}$, l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les cellules $D\epsilon$ associées à $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}, \epsilon \perp \boldsymbol{e}_j$,

$$H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} = \left\{ \varphi = \sum_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} \varphi_\epsilon \mathbb{1}_{D_\epsilon}, \quad \varphi_\epsilon \in \mathbb{R} \right\}, \quad i,j \in [\![1,d]\!] \tag{2.19}$$

On en déduit ci-dessous la discrétisation du gradient de la i–ème composante de la vitesse, noté $\nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}}$.

Opérateur Gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}}$:

Pour $i \in [\![1,d]\!]$, le gradient de la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse u_i est donné par :

$$\nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}} : \left| \begin{array}{l} H_{\mathcal{E}^{(i)}} \longrightarrow \prod_{j=1}^d H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} \\ u_i \mapsto \nabla_{\mathcal{E}^{(i)}} u_i = (\eth_1 u_i, \ldots, \eth_d u_i) \end{array} \right. \tag{2.20}$$

avec $\eth_j u_i = \sum_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} (\eth_j u_i)_{D_\epsilon} \mathbb{1}_{D_\epsilon}$ et $(\eth_j u_i)_{D_\epsilon}$ vérifiant (2.18).

Les partitions $(i,i), i \in [\![1,d]\!]$ étant confondues avec la partition primale $\mathcal{M}$, on écrira $(\eth_i u_i)_K$ au lieu de $(\eth_i u_i)_{D_\epsilon}$ lorsque $\epsilon \subset K$. C'est d'ailleurs cette propriété qui établit la dualité $\mathbf{div}_{\mathcal{M}}$–$\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{E}}$ dans (2.27),

permettant alors le découplage de la vitesse et de la pression lors du passage à la formulation variationelle dans le problème discrétisé.

2.5.3 Dualité entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{E}$

Opérateur Divergence $\mathrm{div}_{\mathcal{M}}$:

On réalise la discrétisation de l'équation de transport de ρ (2.1a) sur $\mathcal{M}$ par homogénéité avec les éléments de $L_{\mathcal{M}}$. Pour chaque élément $K \in \mathcal{M}$, le théorème de la divergence permet de traiter l'intégrale de $\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})$ sur K pour obtenir une expression utilisant les flux définis sur $\partial K : \sigma \in \mathcal{E}(K)$. Ceci implique la connaissance des valeurs de la densité discrète sur $\mathcal{E}$, que l'on note $(\rho_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}}$, et pour lesquelles on adopte un schéma upwind :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{\mathcal{M}} : \quad & L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \longrightarrow L_{\mathcal{M}} \\ & (\rho, \boldsymbol{u}) \mapsto \mathrm{div}_{\mathcal{M}}(\rho \boldsymbol{u}) = \sum_{K\in\mathcal{M}} \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\, \mathbb{1}_K, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\text{avec } F_{K,\sigma} = |\sigma|\, \rho_\sigma u_{K,\sigma} \text{ pour } K \in \mathcal{M},\ \sigma \in \mathcal{E}(K), \text{ et } \rho_\sigma = \begin{cases} \rho_K \text{ si } u_{K,\sigma} \geq 0, \\ \rho_L \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.22}$$

Ce choix pour les valeurs $(\rho_\sigma)_\sigma$ est par la suite essentiel à la stabilité du schéma. Dans le cas où $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}$, le schéma upwind est compatible avec les conditions au bord inflow de la densité : ainsi pour $\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\mathrm{ext}}^{(i)}$ on prendra $\rho_\sigma = (\rho_\Gamma)_\sigma$ lorsque $u_{K,\sigma} < 0$.

Par ailleurs, on obtient directement à partir de (2.21) une expression de la divergence discrète de la vitesse, $(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u})_{K\in\mathcal{M}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{\mathcal{M}} : \quad & \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}} \longrightarrow L_{\mathcal{M}} \\ & \boldsymbol{u} \mapsto \mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u} = \sum_{K\in\mathcal{M}} \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\, u_{K,\sigma}\, \mathbb{1}_K, \end{aligned} \tag{2.23}$$

Considérons un élément $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}$. Pour $K \in \mathcal{M}$ il existe $\sigma, \sigma' \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}^{(i)}$ et $\epsilon \subset K$ vérifiant $\epsilon = \sigma|\sigma'$. En remarquant que $\frac{|\sigma|}{|K|} = d(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}'_\sigma)$ si $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}^{(i)}$, et que $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} = \boldsymbol{n}_{K,\sigma'} = -\boldsymbol{n}_{K,\sigma}$, on distingue les éléments de $\mathcal{E}^{(i)}$, $i \in [\![1, d]\!]$ dans l'expression de $(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u})_{K\in\mathcal{M}}$ de façon à obtenir :

$$\mathrm{div}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{K\in\mathcal{M}} \left(\frac{u_{\sigma'} - u_\sigma}{d(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma,\epsilon})} (\boldsymbol{n}_{K,\sigma'} \cdot \boldsymbol{e}_i) \right) \mathbb{1}_K = \sum_{i=1}^{d} \sum_{K\in\mathcal{M}} (\eth_i u_i)_K \mathbb{1}_K$$

ce qui est cohérent avec la définition de $(\eth_i u_i)$ donnée dans (2.18). On introduit finalement l'espace des fonctions de $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ à divergence nulle que l'on note,

$$\boldsymbol{E}_{\mathcal{E}(\Omega)} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}\ ;\ \mathrm{div}_{\mathcal{M}}\ \boldsymbol{u} = 0\} \tag{2.24}$$

Opérateur Gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{E}}$:

Il s'agit notamment du gradient appliqué à la pression dans la discrétisation des équations de quantité de mouvement sur $\mathcal{E}$. Ici encore on considère l'intégrale sur D_σ de $(\eth_i p)$ pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}, i \in [\![1, d]\!]$. On

construit ainsi l'opérateur $\nabla_{\mathcal{E}}$ à valeur dans $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ de façon à obtenir la propriété de dualité (2.27) avec $\mathrm{div}_{\mathcal{M}}$:

$$\nabla_{\mathcal{E}} : \quad \left| \begin{array}{l} L_{\mathcal{M}} \longrightarrow \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \\ p \longmapsto \nabla_{\mathcal{E}} p(\boldsymbol{x}) = (\eth_1 p(\boldsymbol{x}), \ldots, \eth_d p(\boldsymbol{x}))^T \end{array} \right. \tag{2.25}$$

où $\eth_i p = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(i)}} (\eth p)_\sigma \, \mathbb{1}_{D_\sigma} \in H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ désigne la dérivée discrète de p dans la i-ème direction, avec

$$(\eth p)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (p_L - p_K)(\boldsymbol{n}_{K,\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_i) \text{ pour } \sigma = K|L \tag{2.26}$$

LEMME 2.5.1 – Dualité $\mathrm{div}_{\mathcal{M}}$–$\nabla_{\mathcal{E}}$. Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation MAC de Ω.
Alors pour $q \in L_{\mathcal{M}}$ et $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$,

$$\int_\Omega q \, \mathrm{div}_{\mathcal{M}} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla_{\mathcal{E}} q \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \tag{2.27}$$

Preuve: À partir de la définition de $\mathrm{div}_{\mathcal{M}} \boldsymbol{v} \in L_{\mathcal{M}}$ et $\nabla_{\mathcal{E}} q \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$, on peut réécrire l'expression de (2.27) pour obtenir,

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| q_K (\mathrm{div}_{\mathcal{M}} \boldsymbol{v})_K + \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)} \\ \sigma = K|L}} |D_\sigma| (\nabla_{\mathcal{E}} q)_\sigma v_\sigma = \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| v_{K,\sigma} q_K + \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)} \\ \sigma = K|L}} |\sigma| (q_L - q_K) v_{K,\sigma}$$

En utilisant la propriété de conservation locale (2.15) ainsi que les conditions au bord de $\boldsymbol{u}$, on réarrange la somme dans le premier terme de façon à sommer sur les éléments intérieurs de $\mathcal{E}^{(i)}$ ce qui donne $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}} |\sigma| (q_K - q_L) v_{K,\sigma}$. □

2.5.4 Discrétisation des termes de convection dans l'équation de quantité de mouvement.

L'opérateur de convection associé au terme $\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})$ de (2.1b) est discrétisé de façon à vérifier la conservation de la masse (2.1a) sur le maillage dual : on définit alors une approximation de la densité et des flux convectifs sur $\mathcal{E}^{(i)}$ à l'aide des valeurs $(\rho_K)_{K \in \mathcal{M}}$ ainsi que des flux donnés en (2.22). Il s'agit d'établir une inégalité pour l'énergie cinétique discrète, de manière cohérente avec le problème continu (2.5).

On retrouve cette approximation des termes de convection dans [GGHL08a, AABLV11] pour des schémas aux éléments finis (de Crouzeix–Raviart et de Rannacher–Turek respectivement), dans [HL10a] pour un schéma discrétisé MAC et adapté dans [GK14] à un schéma aux Volumes Finis DDFV.

Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}, i \in [\![1, d]\!]$ on considère l'intégrale sur D_σ de la i–ème équation de quantité de mouvement. La forme conservative de l'équation permet l'application directe du théorème de la divergence pour obtenir le terme à discrétiser,

$$\int_{D_\sigma} \mathrm{div}(\rho u_i \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} \int_\epsilon \rho u_i \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}),$$

où $\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$ dénote la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d-1}$. Sur $\epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$, le flux convectif $\int_\epsilon \rho u_i \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\, \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$ est approché par $F_{\sigma,\epsilon} u_\epsilon$ dont les valeurs sont à déterminer. On adopte pour la valeur de $u_\epsilon \simeq (u_i)_{|\epsilon}$ un schéma upwind ou une interpolation entre σ et σ',

$$u_\epsilon = \begin{cases} u_\sigma & \text{si } F_{\sigma,\epsilon} \geq 0 \\ u'_\sigma & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad u_\epsilon = \frac{1}{2}(u_\sigma + u_{\sigma'}). \tag{2.28}$$

On implémente $F_{\sigma,\epsilon}$ – le flux de masse dual passant par ϵ sortant de D_σ – suivant [HL10a, HKL14, GHLM18] afin d'assurer la conservation locale de la masse sur D_σ. On distingue deux cas pour la valeur de $F_{\sigma,\epsilon}$, selon l'orientation de ϵ par rapport à $\boldsymbol{e}_i$ (Fig. 2.5) :

- 1) Le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ est normal à ϵ : alors $\exists K \in \mathcal{M}$ vérifiant $\epsilon = \sigma|\sigma' \subset K$ avec $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}^{(i)2}$. De plus, les normales vérifient $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} = \boldsymbol{n}_{K,\sigma'} = -\boldsymbol{n}_{K,\sigma}$. Par une interpolation des flux de masse primaux $F_{K,\sigma}$ et $F_{K,\sigma'}$ orientés selon $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$ on obtient,

$$F_{\sigma,\epsilon} = \frac{1}{2}\,(-F_{K,\sigma} + F_{K,\sigma'}). \tag{2.29}$$

- 2) Le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ est tangent à ϵ : si $\sigma = K|L$ avec $(K, L) \in \mathcal{M}^2$, alors il existe deux faces primales $\tau \in \mathcal{E}(K), \tau' \in \mathcal{E}(L)$ avec $(\tau, \tau') \in \mathcal{E}^{(j)}$, de telle sorte que ϵ peut être exprimé comme la réunion de la moitié des faces τ et τ'. On a alors que $|\epsilon| = \frac{1}{2}(|\tau| + |\tau'|)$ et on obtient,

$$F_{\sigma,\epsilon} = \frac{1}{2}\,(F_{K,\tau} + F_{L,\tau'}). \tag{2.30}$$

  En notant que $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} = \boldsymbol{n}_{K,\tau} = \boldsymbol{n}_{L,\tau'}$.

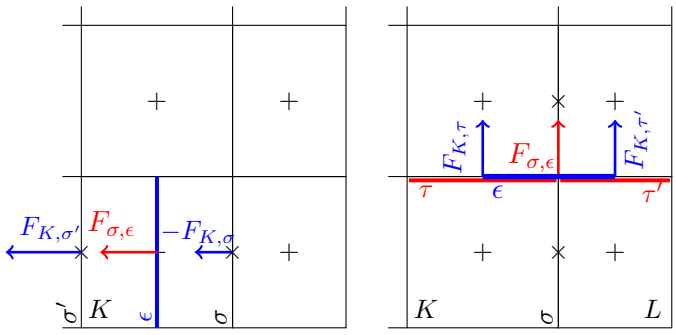

FIGURE 2.5 – Flux dual associé à $\epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(1)}_{int}$:
pour $\epsilon \perp \boldsymbol{e}_1$ (gauche) ; pour $\epsilon \perp \boldsymbol{e}_2$ (droite) ; $(d = 2)$

Indépendamment de la situation, on peut définir des valeurs approchées de $(\rho, \boldsymbol{u})_{|\epsilon}$ de façon à écrire $F_{\sigma,\epsilon} = |\epsilon|\rho_\epsilon u_\epsilon(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \cdot \boldsymbol{e}_j)$. En effet, pour $\epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(j)}$ et lorsque :

- 1) Le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ est normal à ϵ : on définit ρ_ϵ de façon à vérifier $|\epsilon|\rho_\epsilon = \frac{1}{2}(|\sigma|\rho_\sigma + |\sigma'|\rho_{\sigma'})$, ce qui donne en remarquant que $|\epsilon| = |\sigma| = |\sigma'|$:

$$\rho_\epsilon = \frac{\rho_\sigma + \rho_{\sigma'}}{2} \text{ et } u_\epsilon = \frac{\rho_\sigma u_\sigma + \rho_{\sigma'} u_{\sigma'}}{\rho_\sigma + \rho_{\sigma'}}. \tag{2.31}$$

  où u_ϵ est déduit de l'expression de $F_{\sigma,\epsilon}$ et par conséquent, homogène à une vitesse.

- 2) Le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ est tangent à ϵ : ici aussi, on définit ρ_ϵ de façon à vérifier $|\epsilon|\rho_\epsilon = \frac{1}{2}(|\tau|\rho_\tau + |\tau'|\rho_{\tau'})$ d'où,

$$\rho_\epsilon = \frac{|\tau|\rho_\tau + |\tau'|\rho_{\tau'}}{|\tau| + |\tau'|} \text{ et } u_\epsilon = \frac{|\tau|\rho_\tau u_\tau + |\tau'|\rho_{\tau'} u_{\tau'}}{|\tau|\rho_\tau + |\tau'|\rho_{\tau'}} \tag{2.32}$$

Opérateur de convection non linéaire $\boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u})$:

À partir de la discrétisation du terme $\int_\epsilon \rho u_i \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$ de (2.1b), on définit la i–ème composante de l'opérateur discret de convection, que l'on note $C_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u})$:

$$C_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u}) : \left| \begin{array}{l} H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \longrightarrow H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \\ v \longmapsto C_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u})v = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}} \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\substack{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\\ \epsilon=\sigma|\sigma'}} F_{\sigma,\epsilon}\, v_\epsilon\, \mathbb{1}_{D_\sigma}. \end{array} \right.$$

avec les valeurs de v_ϵ et $F_{\sigma,\epsilon}$ données dans (2.28–2.32). Dans la suite, le paramètre $\rho\boldsymbol{u}$ détermine la formulation en temps du schéma. On obtient finalement pour l'opérateur de convection sur $\mathcal{E}$, noté $\boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}(\rho\boldsymbol{u})$,

$$\boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}(\rho\boldsymbol{u}) : \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \longrightarrow \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \\ \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}(\rho\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = (C_{\mathcal{E}}^{(1)}(\rho\boldsymbol{u})v_1, \ldots, C_{\mathcal{E}}^{(d)}(\rho\boldsymbol{u})v_d)^T \end{array} \right. \tag{2.33}$$

Pour $i = 1, \ldots, d$, on obtient une propriété de dualité discrète sur la i–ème grille duale $\mathcal{E}^{(i)}$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega C_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u})v\; w\;\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}} \sum_{\substack{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\\ \epsilon=\sigma|\sigma'}} |\epsilon|\rho_\epsilon u_\epsilon v_\epsilon (\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j) w_\sigma \\ &= -\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\\ \epsilon=\sigma|\sigma'}} |\epsilon|\rho_\epsilon u_\epsilon v_\epsilon (w'_\sigma - w_\sigma)(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j) \\ &= -\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} |D_\epsilon| (\rho u_j)_{D_\epsilon} (v_i)_{D_\epsilon} (\eth_j w_i)_{D_\epsilon} \\ &= -\int_\Omega v_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}} (\rho\boldsymbol{u})_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}} \cdot (\nabla w)_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}}\;\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2.34}$$

où $v_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}} = \sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} v_\epsilon \mathbb{1}_{D_\epsilon}$ avec v_ϵ donné par (2.28). Par analogie avec le cas continu, on associe à l'opérateur $\boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}(\rho\boldsymbol{u})$ la forme trilinéaire $b_{\mathcal{E}}$ suivante,

$$\begin{aligned} &\forall(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}^3, \\ &\qquad b_{\mathcal{E}}(\rho\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^d b_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u}, v_i, w_i) = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \left(C_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u})\, v_i \right) w_i\;\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2.35}$$

On énonce pour finir une propriété importante satisfaite par le schéma discret grâce au choix des valeurs pour les flux $F_{\sigma,\epsilon}$. Il s'agit de la conservation de la masse sur les cellules duales $\{D_\sigma, \sigma\in\mathcal{E}\}$, nécessaire pour la préservation de l'énergie cinétique [HL10b].

LEMME 2.5.2 – Conservation de la masse sur $\mathcal{E}$. On suppose que $(\rho, \boldsymbol{u}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{X}_{\mathcal{E},\delta t}$ vérifie l'équation de conservation de la masse discrète (2.13a). Alors, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}$, on a l'égalité suivante,

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n}) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \tag{2.36}$$

avec ρ_{D_σ} défini dans (2.16) et $F_{\sigma,\epsilon}$ donné par (2.29)-(2.30).

Preuve: Soit une face $\sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\rm int}^{(i)}$ et $(K, L) \in \mathcal{M}^2$ vérifiant $\sigma = K|L$. Alors, on additionne (2.13a) valué en K et multiplié par $|D_{K,\sigma}|$ avec (2.13a) valué en L et multiplié par $|D_{L,\sigma}|$ pour obtenir,

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n}) + \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} + \frac{|D_{L,\sigma}|}{|L|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0$$

On conclut en remarquant que $|K| = 2|D_{K,\sigma}|$ et $|L| = 2|D_{L,\sigma}|$ et en utilisant la définition de $F_{\sigma,\epsilon}$ (2.29)-(2.30) □

Il s'agit donc de l'analogue de (2.13a) sur le maillage dual et retrouve un opérateur de la forme (2.21) pour la divergence de $\rho\boldsymbol{u}$.

2.5.5 Discrétisation des opérateurs diffusifs de type Δ.

On considère dans un premier temps la discrétisation de l'opérateur Laplacien intervenant dans le problème de Navier–Stokes à viscosité constante. Soient $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ un champ de vitesse discret et $\sigma \in \mathcal{E}^{(i)} \cap \mathcal{E}_{\rm int}$. Par définition on a $(\Delta \boldsymbol{u})_\sigma = (\mathrm{div}(\nabla \boldsymbol{u}))_\sigma$ ce qui donne en utilisant le théorème de la divergence appliqué à l'intégrale de $(\Delta \boldsymbol{u})$ sur D_σ et (2.20) :

$$(\Delta \boldsymbol{u})_\sigma = \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}}} |\epsilon| (\eth_j u_i)_{D_\epsilon} \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \cdot \boldsymbol{e}_j$$

De par la définition de $(\eth_j u_i)_{D_\epsilon}$ (2.20), on remarque l'apparition de $(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \cdot \boldsymbol{e}_j)^2 = 1$ dans l'expression de $(\Delta \boldsymbol{u})_\sigma$ et on obtient l'approximation suivante pour le Laplacien,

Opérateur Laplacien $\Delta_\mathcal{E}$:

On définit alors le Laplacien discret, que l'on note $\Delta_\mathcal{E}$, et dont la i-ème composante $\Delta_\mathcal{E}^{(i)}$ vérifie,

$$\Delta_\mathcal{E}^{(i)} : \quad \left| \begin{array}{l} H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \longrightarrow H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \\ u_i \mapsto \Delta_\mathcal{E}^{(i)} u_i = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}} (\Delta u)_\sigma \mathbb{1}_{D_\sigma} \end{array} \right. \tag{2.37}$$

avec,

$$(\Delta u)_\sigma = \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\substack{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \cap \widetilde{\mathcal{E}}_{\rm int}^{(i)} \\ \epsilon = \sigma|\sigma'}} |\epsilon| \frac{u_{\sigma'} - u_\sigma}{d_\epsilon} + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \cap \widetilde{\mathcal{E}}_{\rm ext}^{(i)}} |\epsilon| \frac{-u_\sigma}{d_\epsilon} \tag{2.38}$$

De plus, $\Delta_\mathcal{E} \boldsymbol{u} = (\Delta_\mathcal{E}^{(1)} u_1, \ldots, \Delta_\mathcal{E}^{(d)} u_d)^T \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$.

Produit scalaire sur $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ et $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E}^{(i)},0}$:

Par analogie avec le cas continu, on peut désormais munir l'espace $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ d'une norme associée au produit scalaire discret suivant,

$$\forall (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{H}^2_{\mathcal{E},0}, \qquad \int_\Omega -\Delta_{\mathcal{E}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]_{1,\mathcal{E},0} = \sum_{i=1}^{d} [u_i, v_i]_{1,\mathcal{E}^{(i)},0},$$

$$\text{avec } [u_i, v_i]_{1,\mathcal{E}^{(i)},0} = \sum_{\substack{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{int}} \\ \epsilon = \sigma|\sigma'}} \frac{|\epsilon|}{d_\epsilon} (u_\sigma - u_{\sigma'}) (v_\sigma - v_{\sigma'}) + \sum_{\substack{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{ext}} \\ \epsilon \subset \partial(D_\sigma)}} \frac{|\epsilon|}{d_\epsilon} u_\sigma \, v_\sigma. \tag{2.39}$$

Ainsi,

$$\left| \begin{array}{l} H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \times H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto [u_i, v_i]_{1,\mathcal{E}^{(i)},0} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mapsto [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]_{1,\mathcal{E},0} \end{array} \right. \tag{2.40}$$

sont des formes bilinéaires définissant un produit scalaire sur $H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ et $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ respectivement. Il en résulte les normes discrètes induites :

$$\|u_i\|^2_{1,\mathcal{E}^{(i)},0} = [u_i,u_i]_{1,\mathcal{E}^{(i)},0} = \sum_{\substack{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{int}} \\ \epsilon = \sigma|\sigma'}} \frac{|\epsilon|}{d_\epsilon} (u_\sigma - u_{\sigma'})^2 + \sum_{\substack{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\text{ext}} \\ \epsilon \subset \partial(D_\sigma)}} \frac{|\epsilon|}{d_\epsilon} u_\sigma^2, \quad \text{for } i = 1, \dots, d, \tag{2.41a}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{1,\mathcal{E},0} = [\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}]_{1,\mathcal{E},0} = \sum_{i=1}^{d} \|u_i\|^2_{1,\mathcal{E}^{(i)},0}. \tag{2.41b}$$

De plus, à partir de la définition des produits scalaires et de la définition de l'opérateur discret $\nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ (2.20), on remarque les relations suivantes,

$$\int_\Omega \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}} u \cdot \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}} v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = [u,v]_{1,\mathcal{E}^{(i)},0}, \quad \forall u, v \in H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \tag{2.42}$$

$$\int_\Omega \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{u} : \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]_{1,\mathcal{E},0} \quad \forall u, v \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}. \tag{2.43}$$

On peut désormais énoncer la variante discrète de l'inégalité de Poincaré introduite dans [EGH00] pour nos maillages et dont une preuve peut être trouvée dans [Tem01],

LEMME 2.5.3 – Inégalité de Poincaré discrète. Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation MAC de Ω. Alors pour tout élément $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \operatorname{diam}(\Omega) \|\boldsymbol{u}\|_{1,\mathcal{E},0} \tag{2.44}$$

Discrétisation de l'opérateur $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{D}(\cdot))$:

On traite maintenant du cas de l'opérateur diffusif associé à un écoulement à viscosité variable, dont les équations sont données par (2.1). Il s'agit alors de discrétiser l'opérateur diffusif de la forme $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{D}(\cdot))$

présent dans les d équations de quantité de mouvement (2.1b).

Le paramètre $\alpha(t,\boldsymbol{x}) \in L^\infty([0,T]\times\Omega)$ désigne dans ce contexte la viscosité du fluide. Comme dans le cas continu, on cherchera à définir l'opérateur discret, noté $\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\alpha\mathbf{D})(\cdot)$ vérifiant l'analogue discret de :

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\alpha\mathbf{D}(\boldsymbol{u}))\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \alpha\mathbf{D}(\boldsymbol{u}):\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in \boldsymbol{H}^2_{\mathcal{E},0}$$

tout en s'assurant de la cohérence avec $\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\cdot)$, l'opérateur résultant de la discrétisation du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}(\cdot)=\frac{1}{2}(\nabla+\nabla^T)(\cdot)$:

$$\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}: \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}} \longrightarrow \prod_{i,j=1}^d H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} \\ \boldsymbol{u}\mapsto \mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u} = (\frac{1}{2}(\eth_j u_i + \eth_i u_j))_{i,j=1,\dots,d} \end{array} \right. \tag{2.45}$$

avec $\eth_j u_i = \sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} (\eth_j u_i)_{D_\epsilon}\,\mathbb{1}_{D_\epsilon}$ et $(\eth_j u_i)_{D_\epsilon}$ vérifiant (2.18).

Pour $\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{int}}$, $i\in[\![1,d]\!]$, on considère l'intégrale sur D_σ de la i–ème équation de quantité de mouvement (2.1b). Le terme à approcher est donné par,

$$\int_{D_\sigma}\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}_j}(\frac{\alpha}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial\boldsymbol{x}_j}+\frac{\partial u_j}{\partial\boldsymbol{x}_i}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\\ \epsilon\perp\boldsymbol{e}_j}}\int_\epsilon \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial\boldsymbol{x}_j}+\frac{\partial u_j}{\partial\boldsymbol{x}_i})(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$$

faisant donc appel à des valeurs de α calculées sur les faces duales $\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}$. Dans notre hypothèse sur la viscosité pour le problème continu (2.1), α est défini comme fonction continue de la densité. On définira alors $(\alpha_\epsilon)_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}}$ dépendant de $(\rho_K)_{K\in\mathcal{M}}$ dans un sens à déterminer plus loin. De plus, sachant que les partitions $\{D_\epsilon,\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\}$ et $\{D_\epsilon,\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(j,i)}\}$ de Ω sont égales pour $i,j=1,..,d$, les valeurs de $(\alpha_\epsilon)_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}}$ sont choisies pour que la matrice $\in\mathbb{R}^{N_\mathcal{E}}\times\mathbb{R}^{N_\mathcal{E}}$ associée à $\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\alpha\mathbf{D})(\cdot)$ soit symétrique, avec $N_\mathcal{E}=card(\mathcal{E}_{\mathrm{int}})$ (en remarquant que l'on peut identifier $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ à $\mathbb{R}^{N_\mathcal{E}}$).

Considérons une face duale $\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\cap\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$ avec $\epsilon\perp\boldsymbol{e}_j$. Selon l'orientation de ϵ par rapport à $\boldsymbol{e}_i$, on distingue deux cas pour l'approximation de $\int_\epsilon\left(\frac{\alpha}{2}(\partial_j u_i+\partial_i u_j)\right)(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$:

- 1) $j=i$: le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ est normal à ϵ. Alors $\epsilon=\sigma|\sigma'\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{int}}$ et on utilise la définition de $(\eth_i u_i)_{D_\epsilon}$ de (2.18) pour obtenir,

$$|\epsilon|\alpha_\epsilon\frac{u_{\sigma'}-u_\sigma}{d(\boldsymbol{x}_\sigma,\boldsymbol{x}_{\sigma'})} \tag{2.46}$$

- 2) $j\neq i$: le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ est tangent à ϵ : si $\sigma=K|L$ avec $(K,L)\in\mathcal{M}^2$, alors il existe deux faces primales $\tau\in\mathcal{E}(K),\tau'\in\mathcal{E}(L)$ avec $(\tau,\tau')\in\mathcal{E}^{(j)}$, de telle sorte que ϵ peut être exprimé comme la réunion de la moitié des faces τ et τ'. Par ailleurs, il existe $\epsilon'\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(j)}$, $\epsilon'\perp\boldsymbol{e}_i$ vérifiant $D_\epsilon=\epsilon'\times[\boldsymbol{x}_\tau,\boldsymbol{x}_{\tau'}]$. Si $\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{int}}$ alors le terme discrétisé devient,

$$|\epsilon|\frac{\alpha_\epsilon}{2}\left(\left(\frac{u_{\sigma'}-u_\sigma}{d(\boldsymbol{x}_\sigma,\boldsymbol{x}_{\sigma'})}\right)(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)+\left(\frac{u_{\tau'}-u_\tau}{d(\boldsymbol{x}_\tau,\boldsymbol{x}_{\tau'})}\right)(\boldsymbol{n}_{\tau,\epsilon'}\cdot\boldsymbol{e}_i)\right)(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j) \tag{2.47}$$

Et dans le cas où $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\text{ext}}^{(i)}$ alors $u_\tau = u_{\tau'} = 0$ et on obtient l'approximation $|\epsilon| \dfrac{\alpha_\epsilon}{2} \dfrac{-u_\sigma}{d(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{x}_{\sigma,\epsilon})}$.

On pose $\alpha'_\epsilon = \alpha_\epsilon$ afin d'assurer la symétrie de matrice associée à $\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\alpha \mathbf{D})(\cdot)$. De plus, en prenant $i = j$ on a $\{\tau, \tau'\} = \{\sigma, \sigma'\}$ et on retrouve effectivement 1).

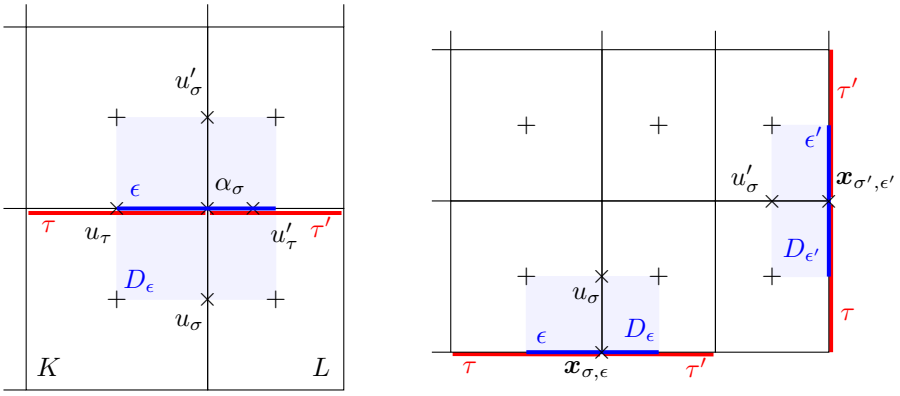

FIGURE 2.6 – Implémentation de (2.47) pour $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}$:
pour $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\text{int}}^{(i)}$ (gauche) ; pour $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\text{ext}}^{(i)}$ (droite) ; $(d = 2)$

À partir de la discrétisation du terme $\frac{\alpha}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \cdot \boldsymbol{e}_j)$ sur ϵ, on définit l'expression discrète de l'opérateur diffusif à coefficient variable, que l'on note $\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\alpha \mathbf{D})(\cdot)$:

$$\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\alpha \mathbf{D})(\cdot) : \quad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \longrightarrow \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \\ \boldsymbol{u} \longmapsto \mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\alpha \mathbf{D}(\boldsymbol{u})) = (\mathrm{div}_{\mathcal{E}}^{(1)}(\alpha \mathbf{D}(\boldsymbol{u})), \ldots, \mathrm{div}_{\mathcal{E}}^{(d)}(\alpha \mathbf{D}(\boldsymbol{u})))^T \end{array} \right. \tag{2.48}$$

où

$$\mathrm{div}_{\mathcal{E}}^{(i)}(\alpha \mathbf{D}(\boldsymbol{u})) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \sum_{\substack{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \epsilon \perp \boldsymbol{e}_j}} \frac{|\epsilon|}{|D_\sigma|} \frac{\alpha_\epsilon}{2} \left(\frac{\eth u_i}{\eth \boldsymbol{x}_j} + \frac{\eth u_j}{\eth \boldsymbol{x}_i} \right)_{D_\epsilon} (\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} \cdot \boldsymbol{e}_j) \, \mathbb{1}_{D_\sigma} \tag{2.49}$$

avec $(\eth_j u_i + \eth_i u_j)_{D_\epsilon}$ donné par (2.46) – (2.47).

LEMME 2.5.4 – Dualité $\mathrm{div}_{\mathcal{E}}$ – $\boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$. Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation MAC de Ω.
Alors pour $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$,

$$\int_\Omega \mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\alpha \mathbf{D}(\boldsymbol{u})) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \alpha \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \tag{2.50}$$

Preuve: À partir de (2.48)–(2.49) on peut réécrire le premier terme de (2.50) pour obtenir,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \mathrm{div}_{\mathcal{E}}^{(i)}(\alpha\mathbf{D}(\boldsymbol{u}))\cdot v_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \sum_{i,j=1}^{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\\ \epsilon\perp\boldsymbol{e}_j}}|\epsilon|\frac{\alpha_\epsilon}{2}\left(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\right)_{D_\epsilon}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)v_\sigma\\
&= -\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\\ \epsilon=\sigma|\sigma'\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\rm int}^{(i)}}}|\epsilon|\frac{\alpha_\epsilon}{2}\left(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\right)_{D_\epsilon}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)(v'_\sigma-v_\sigma)\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\\ \epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\cap\widetilde{\mathcal{E}}_{\rm ext}^{(i)}}}|\epsilon|\frac{\alpha_\epsilon}{2}\left(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\right)_{D_\epsilon}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)v_\sigma\\
&= S_{int}+S_{ext}
\end{aligned}$$

en réarrangeant la somme de façon à sommer sur les éléments de $\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}$, permis par la condition au bord de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. On met en évidence la propriété $\{D_\epsilon,\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\}=\{D_\epsilon,\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(j,i)}\}$ en écrivant,

$$\begin{aligned}
S_{int} &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\Bigg(\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\\ \epsilon=\sigma|\sigma'\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\rm int}^{(i)}}}|\epsilon|\frac{\alpha_\epsilon}{2}\Big(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\Big)_{D_\epsilon}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)(v'_\sigma-v_\sigma)\\
&\qquad+\sum_{\substack{\epsilon'\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(j,i)}\\ \epsilon'=\tau|\tau'\in\widetilde{\mathcal{E}}_{int}^{(j)}}}|\epsilon'|\frac{\alpha'_\epsilon}{2}\Big(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\Big)_{D'_\epsilon}(\boldsymbol{n}_{\tau,\epsilon'}\cdot\boldsymbol{e}_j)(v'_\tau-v_\tau)\Bigg)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\Bigg(\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\\ \epsilon=\sigma|\sigma'\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\rm int}^{(i)}}}|D_\epsilon|\frac{\alpha_\epsilon}{2}\Big(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\Big)_{D_\epsilon}\Big(\frac{\eth v_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}\Big)_{D_\epsilon}\\
&\qquad+\sum_{\substack{\epsilon'\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(j,i)}\\ \epsilon'=\tau|\tau'\in\widetilde{\mathcal{E}}_{int}^{(j)}}}|D_{\epsilon'}|\frac{\alpha'_\epsilon}{2}\Big(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\Big)_{D'_\epsilon}\Big(\frac{\eth v_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\Big)_{D'_\epsilon}\Bigg)
\end{aligned}$$

En remarquant que $|\epsilon|=|D_\epsilon|/d(\boldsymbol{x}_\sigma,\boldsymbol{x}'_\sigma)$ et $|\epsilon'|=|D'_\epsilon|/d(\boldsymbol{x}_\tau,\boldsymbol{x}'_\tau)$. Le terme S_{ext} est traité de façon identique, en utilisant la définition (2.18) de $(\eth_j u_i)_{D_\epsilon}$ lorsque $\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\rm ext}^{(i)}$. De par les conditions au bord pour $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, on somme sur l'ensemble des faces duales $\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}$ pour donner le résultat attendu,

$$S_{int}+S_{ext}=-\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}}|D_\epsilon|\frac{\alpha_\epsilon}{4}\Big(\frac{\eth u_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth u_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\Big)_{D_\epsilon}\Big(\frac{\eth v_i}{\eth\boldsymbol{x}_j}+\frac{\eth v_j}{\eth\boldsymbol{x}_i}\Big)_{D_\epsilon}=-\int_\Omega\alpha\boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathfrak{E}}}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathfrak{E}}}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

□

Afin d'étudier la stabilité du schéma (2.13) dans le chapitre 3 – et par la suite celui du chapitre 4 – il est classique de chercher à établir des estimations a priori portant sur la norme dans $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ d'une vitesse solution du problème discret. Comme pour le problème continu, elle est obtenue à partir de l'équation de quantité de mouvement en utilisant l'inégalité de Korn pour se ramener au gradient de la vitesse dans l'estimation. On démontre donc ci-dessous un équivalent discret de cette inégalité.

LEMME 2.5.5 – Inégalité de Korn discrète. Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation MAC de Ω. Alors pour tout élément $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{1,\mathcal{E},0} \leq \sqrt{2}\|D_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.51}$$

Preuve: On utilise les analogues discrets des arguments utilisés dans [BF13]. On adapte le Lemme 2.5.4 à l'opérateur discret $\nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ pour obtenir,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega u_i \cdot \mathrm{div}^{(i)}_{\mathcal{E}}(\nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \sum_{i,j=1}^{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}_{\mathrm{int}}}\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\\ \epsilon\perp\boldsymbol{e}_j}}|\epsilon|(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)u_\sigma\left(\frac{\eth u_j}{\eth \boldsymbol{x}_i}\right)_{D_\epsilon}\\ &= -\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}}|D_\epsilon|\left(\frac{\eth u_i}{\eth \boldsymbol{x}_j}\frac{\eth u_j}{\eth \boldsymbol{x}_i}\right)_{D_\epsilon} = -\int_\Omega \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u} : \nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

De plus, pour $\sigma = K|L \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{int}}$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{div}^{(i)}_{\mathcal{E}}(\nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u})\right)_{D_\sigma} &= \frac{1}{|D_\sigma|}\sum_{j=1}^{d}\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\\ \epsilon\perp\boldsymbol{e}_j}}|\epsilon|\left(\frac{\eth u_j}{\eth \boldsymbol{x}_i}\right)_{D_\epsilon}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j)\\ &= \frac{1}{|D_\sigma|}\sum_{j=1}^{d}|\sigma|\left(\left(\frac{\eth u_j}{\eth \boldsymbol{x}_j}\right)_L - \left(\frac{\eth u_j}{\eth \boldsymbol{x}_j}\right)_K\right)(\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_i)\\ &= \left(\eth^{(i)}_{\mathcal{E}}(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u})\right)_{D_\sigma}\end{aligned}$$

En effet, l'égalité pour les termes en $j = i$ est montrée en observant que pour $(\epsilon_-, \epsilon_+) \in (\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\cap\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)})$ on a $|\sigma| = |\epsilon_+| = |\epsilon_-|$ et $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon} = -\boldsymbol{n}_{K,\sigma}$ si $D_\epsilon = K$.

Dans le cas où $j \neq i$, alors pour $\sigma = K|L$ il existe $(\tau_+, \tau_-) \in (\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}^{(j)})^2$, $(\tau'_+, \tau'_-) \in (\mathcal{E}(L)\cap\mathcal{E}^{(j)})^2$ et $(\epsilon_-, \epsilon_+) \in (\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \cap \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)})$ tels que :

- ϵ_+ est défini comme la réunion de la moitié des faces τ_+ et τ'_+ : $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon_+} = \boldsymbol{n}_{K,\tau_+} = \boldsymbol{n}_{L,\tau'_+}$.
- ϵ_- est défini comme la réunion de la moitié des faces τ_- et τ'_- : $\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon_-} = \boldsymbol{n}_{K,\tau_-} = \boldsymbol{n}_{L,\tau'_-}$.

On a alors,

$$|\epsilon_+|/d(\boldsymbol{x}_{\tau_+}, \boldsymbol{x}_{\tau'_+}) = |\epsilon_-|/d(\boldsymbol{x}_{\tau_-}, \boldsymbol{x}_{\tau'_-}) = |\sigma|/d(\boldsymbol{x}_{\tau_+}, \boldsymbol{x}_{\tau_-}) = |\sigma|/d(\boldsymbol{x}_{\tau'_+}, \boldsymbol{x}_{\tau'_-})$$

et on aboutit effectivement à $\displaystyle\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)\\ \epsilon\perp\boldsymbol{e}_j}}|\epsilon|(\eth_i u_j)_{D_\epsilon}(\boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}\cdot\boldsymbol{e}_j) = |\sigma|\left((\eth_j u_j)_L - (\eth_j u_j)_K\right)(\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_i)$.

À partir de ces deux résultats combinés avec (2.27) on obtient,

$$\int_\Omega \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u} : \nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\mathcal{E}}(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Ce qui nous permet d'établir l'inégalité de Korn discrète,

$$\begin{aligned}4\int_\Omega D_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}) : D_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \|\boldsymbol{u}\|^2_{1,\mathcal{E},0} + \int_\Omega \nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u} : \nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\int_\Omega(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\geq 2\|\boldsymbol{u}\|^2_{1,\mathcal{E},0}\end{aligned} \tag{2.52}$$

En remarquant la propriété de symétrie,

$$\int_\Omega \nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{u} : \nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} |D_\epsilon| (\eth_i u_j)^2_{D_\epsilon} = \int_\Omega \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{u} : \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.53}$$

□

On obtient donc l'égalité lorsque $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}_{\mathcal{E}(\Omega)}$, l'espace des fonctions de $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ à divergence nulle. Ici la discrétisation du problème par la méthode MAC offre des conditions favorables à l'obtention de l'inégalité (2.51). Dans le cas d'approximations non conformes, on retrouve dans [Bre04] des variantes discrètes de l'inégalité de Korn faisant apparaitre des termes de saut de la vitesse à travers les faces des cellules primales du maillage.

2.5.6 Opérateurs de projection sur $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ et $\boldsymbol{L}_{\mathcal{M}}$.

Les quantités connues provenant du problème continu – telles que les conditions initiales et de bord, le terme source, un paramètre – sont approchées par projection sur les maillages appropriés afin de définir le schéma discret. On introduit alors les opérateurs linéaires de projection $\Pi^{(i)}_{\mathcal{E}} : L^1(\Omega) \longrightarrow H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ et $\Pi_{\mathcal{M}} : L^1(\Omega) \longrightarrow L_{\mathcal{M}}$ par :

$$\Pi^{(i)}_{\mathcal{E}} : \quad \left| \begin{array}{l} L^1(\Omega) \longrightarrow H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \\ v_i \mapsto \Pi^{(i)}_{\mathcal{E}} v_i = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(i)}} \Big(\frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} v_i(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \Big) \mathbb{1}_{D_\sigma} \end{array} \right. \tag{2.54}$$

$$\Pi_{\mathcal{M}} : \quad \left| \begin{array}{l} L^1(\Omega) \longrightarrow L_{\mathcal{M}} \\ q \mapsto \Pi_{\mathcal{M}} q = \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{M}} \Big(\frac{1}{|K|} \int_K q(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}) \Big) \mathbb{1}_K \end{array} \right. \tag{2.55}$$

Ainsi pour $\boldsymbol{v} = (v_1, .., v_d) \in H^1_0(\Omega)^d$, on notera $\Pi_{\mathcal{E}} \boldsymbol{v} = (\Pi^{(1)}_{\mathcal{E}} v_1, \ldots, \Pi^{(d)}_{\mathcal{E}} v_d)$ la projection de $\boldsymbol{v}$ sur $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$. Ces opérateurs sont linéaires et continus de $L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. En effet, on a :

$$\|\Pi_{\mathcal{M}} q\|_{L^p(\Omega)} \leq \|q\|_{L^p(\Omega)} \qquad \|\Pi^{(i)}_{\mathcal{E}} v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall i = 1, .., d \tag{2.56}$$

En effet,

$$\|\Pi_{\mathcal{M}} q\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K|^{1-p} \left| \int_K q(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right|^p \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K|^{1-p} |K|^{p-1} \int_K |q(\boldsymbol{x})|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \|q\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Et le résultat pour $\Pi_{\mathcal{E}}$ est obtenu de façon identique.
De plus, suivant [GHL12], on définit l'opérateur de Fortin suivant :

$$\widetilde{\Pi}^{(i)}_{\mathcal{E}} : \quad \left| \begin{array}{l} H^1_0(\Omega) \longrightarrow H_{\mathcal{E}^{(i)},0} \\ v_i \mapsto \widetilde{\Pi}^{(i)}_{\mathcal{E}} v_i = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(i)}} \Big(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma v_i(\boldsymbol{x}) d\gamma(\boldsymbol{x}) \Big) \mathbb{1}_{D_\sigma} \end{array} \right. \tag{2.57}$$

Il s'agit d'un opérateur de projection vérifiant deux critères [GHL12] : il est continu de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ dans $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ et préserve la divergence dans un sens que l'on définit plus bas. Ainsi, pour $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, la propriété de continuité de $\widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}}$ est donnée par,

$$\|\widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}}\boldsymbol{v}\|_{1,\mathcal{E},0} \leq C_{\eta_{\mathcal{M}}}\|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}} \tag{2.58}$$

où $C_{\eta_{\mathcal{M}}}$ est une constante dépendant uniquement de Ω et de $\eta_{\mathcal{M}}$ (et ne décroit pas avec $\eta_{\mathcal{M}}$). De plus $\widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}}$ satisfait la propriété de préservation de la divergence suivante :

$$\int_\Omega q\mathrm{div}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega q\mathrm{div}_{\mathcal{M}}(\widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}}\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall q \in L_{\mathcal{M}} \tag{2.59}$$

On remarque que pour $q \in L_{\mathcal{M}}$ on a $\Pi_{\mathcal{M}}q = q$, et la même observation peut être faite pour $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$. Par ailleurs, en prenant $q = \mathbb{1}_K$ pour tout $K \in \mathcal{M}$, une conséquence et propriété importante pour l'étude de convergence du schéma discret dans le Chapitre 3 est :

$$\mathrm{div}_{\mathcal{M}}(\widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}}\boldsymbol{v}) = \Pi_{\mathcal{M}}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}) \tag{2.60}$$

2.5.7 Formulation Volume-Finis du schéma

On clot ce chapitre en donnant une formulation équivalente et totalement discrétisée du schéma (2.13) utilisant les approximations par la méthode des volumes finis des équations présentées plus haut,

Pour $n \in \{0, \cdots, N-1\}$

Trouver $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times L_{\mathcal{M}}$ vérifiant :

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \frac{1}{|K|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{M}$$

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1}u_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n) + \frac{1}{|D_\sigma|}\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1}u_\epsilon^{n+1}$$
$$- (\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1})))_{D_\sigma} + (\nabla_{\mathcal{E}}\, p^{n+1})_{D_\sigma} = (\Pi_{\mathcal{E}}\boldsymbol{f})_\sigma^{n+1} \qquad \forall i, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}$$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1}\cdot\boldsymbol{n}_{K,\sigma} = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{M}$$

$$\sum_{K\in\mathcal{M}} |K|p_K^n = 0$$

Chapitre 3

Convergence of the implicit MAC-discretized Navier–Stokes equations with variable density and viscosity on non-uniform grids.

3.1 Résumé

On se tourne à nouveau vers le schéma implicite MAC appliqué aux équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables, tel qu'il a été introduit dans le Chapitre 2. On démontre la convergence de ce schéma vers la formulation faible du problème continu lorsque les pas de discrétisation en temps et en espace (non uniformes) tendent simultanément vers 0. Le travail présenté ici suit une première étude faite lors de la thèse de Khadidja Mallem [Mal15]. Toutefois, l'article est finalisé ci-après dans le cadre des écoulements incompressibles visqueux, avec l'ajout d'une nonlinéarité donnée par une viscosité variable dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Un problème similaire a récemment été traité dans [LS18] pour les éléments finis de Rannacher-Turek et avec une viscosité constante. Il s'agit par ailleurs d'une généralisation du travail présenté dans [GHLM18] pour la discrétisation MAC des équations de Navier–Stokes pour un écoulement incompressible homogène.

Le chapitre est décomposé comme suit. Dans l'introduction, on rappelle la formulation faible du problème vers laquelle le schéma doit converger ainsi que les principaux travaux liés à notre problématique. Dans une deuxième partie, on rappelle le schéma discret et on donne des outils supplémentaires nécessaires à l'étude du schéma et non présentés dans le Chapitre 2 : il s'agit principalement d'opérateurs d'interpolation déjà utilisés dans [GHLM18] et permettant de passer d'une grille à une autre dans le maillage décalé. Ces derniers nous permettent notamment de démontrer des estimations discrètes classiques pour la forme trilinéaire associée au terme de convection dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. De plus, on introduit de manière adéquate la viscosité définie sur les grilles $\widetilde{\mathcal{E}}$, de façon à obtenir la symétrie de l'opérateur diffusif. Dans une troisième partie, on retrouve des estimations a priori classiques pour les solutions discrètes au problème : le principe du maximum discret pour la densité et la viscosité, une estimation $L^2(H_0^1) \cap L^\infty(L^2)$ pour la vitesse, et une estimation L^2 pour la pression à chaque pas de temps. Par ailleurs, on donne quelques estimations sur les variations de la densité, dont une inégalité "BV faible". On démontre ensuite l'existence de solutions au problème discret à tout temps, en utilisant la théorie du degré topologique de Brouwer [GHLM18, LS18] pour se débarasser de la contrainte sur les termes non linéaires. L'ensemble de ces résultats nous permettent alors

de considérer une solution au problème discret avec une régularité donnée par les estimations a priori. Dans une dernière partie, on passe donc à l'étude de convergence en définissant une suite de maillages décalés $(\mathcal{D}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, et où les pas de discrétisation en temps et en espace tendent simultanément vers 0 quand $m \to \infty$. Les estimations a priori donnent en premier lieu la convergence faible des suites de solutions. À l'aide d'un théorème de Fréchet–Kolmogorov pour une suite d'espaces, on parvient à la convergence forte de la vitesse dans L^2 à une sous-suite près. La convergence forte pour la densité n'est obtenue qu'après passage à la limite dans l'équation de la masse, en utilisant la régularité de la limite et des résultats issus de la théorie de l'équation de transport [DL89]. Après s'être assurés de la convergence de la viscosité définie sur $\widetilde{\mathcal{E}}$, on termine la preuve en passant à la limite dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement discrète.

3.2 Introduction

In this chapter, we adress the scheme given by the discrete approximation of the continuous problem introduced in chapter 2. The latter is given by the incompressible non-homogeneous Navier–Stokes equations, by introducing a variable density and viscosity. The density is advected by the velocity through a tranport equation, whereas the viscosity depends continuously on the density following a given law $\mu : \rho \mapsto \mu(\rho)$. Let us consider an open, bounded and connected domain $\Omega \in \mathbb{R}^d$, with $d \in \{2, 3\}$ and a finite time interval $(0, T)$ with $T \in \mathbb{R}^+$. For the sake of convenience we suppose that Ω verifies (2.6) so that it can be covered with cartesian grids. Then, the continuous problem is defined for $(t, \boldsymbol{x})$ in $(0, T) \times \Omega$ and reads,

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{3.1a}$$

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}(\mu(\rho)\mathbf{D}(\boldsymbol{u})) + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{3.1b}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{3.1c}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{3.1d}$$

$$(\rho, \boldsymbol{u})_{|t=0} = (\rho_0, \boldsymbol{u}_0) \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{3.1e}$$

where the unknowns$(\rho, \boldsymbol{u}, p)$ are respectively the density, the velocity and the pressure of the flow. The source term $\boldsymbol{f}$ is given and is assumed to belong to $L^2([0, T]; (L^2(\Omega))^d)$. Moreover, the viscosity is defined as a continuous map $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ depending on ρ only. We assume the following regularity on the initial data $(\rho_0, \boldsymbol{u}_0)$:

$$(\rho_0, \boldsymbol{u}_0) \in L^\infty(\Omega) \times (L^2(\Omega))^d, \tag{3.2}$$

Moreover, we denote $\rho_{\min} = \operatorname{ess\,inf}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \rho_0(\boldsymbol{x}) > 0$ and $\rho_{\max} = \operatorname{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \rho_0(\boldsymbol{x})$. For a velocity field which is regular enough, the maximum principle holds [DL89] for the density which may be bounded by $\rho_{\min}$ and $\rho_{\max}$ a.e. on $(0, T) \times \Omega$. Consequently the same result follows for the viscosity which satisfies (3.1a) along with the density. Thus, let us note $\mu_{\min} = \operatorname{ess\,inf}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \mu(\rho_0(\boldsymbol{x})) > 0$ and $\mu_{\max} = \operatorname{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \mu(\rho_0(\boldsymbol{x}))$.

We define the weak solutions to problem (3.1) as follows :

DEFINITION 3.2.1 Let $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ such that $\rho_0 > 0$ a.e. in Ω, and let $\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$. A pair $(\bar{\rho}, \bar{\boldsymbol{u}})$ is a weak solution of problem (3.1) if it satisfies the following properties :

— $\bar{\rho} \in \{\rho \in L^\infty((0, T) \times \Omega),\ \rho > 0\ a.e.\ \text{in}\ (0, T) \times \Omega\}$.

— $\bar{\boldsymbol{u}} \in \{\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d),\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\ a.e.\ \text{in}\ (0, T) \times \Omega\}$.

— For all φ in $C_c^\infty([0,T)\times\Omega)$,

$$-\int_0^T\int_\Omega(\bar\rho(t,\boldsymbol{x})\partial_t\varphi(t,\boldsymbol{x})+\bar{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla\varphi(t,\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=\int_\Omega\rho_0(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.3}$$

— For all $\boldsymbol{v}$ in $\{\boldsymbol{w}\in C_c^\infty([0,T)\times\Omega)^d, \operatorname{div}\boldsymbol{w}=0\}$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\Big[&-\bar\rho(t,\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\partial_t\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})-(\bar\rho(t,\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x})\otimes\bar{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x})):\nabla\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\\&+\mu(\bar\rho)\mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x})):\mathbf{D}(v(t,\boldsymbol{x}))\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\&=\int_\Omega\rho_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_0^T\int_\Omega\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.4}$$

One can find in [BF13] results regarding the existence of weak solutions to the problem (3.1) in $\mathbb{R}^3$. For a weak formulation featuring the pressure, we have the existence of a solution with $p\in W^{-1,\infty}(0,T;L^2_0(\Omega))$.
In what follows, the continuous problem is approximated using the Marker and Cell scheme for finite volumes, and the sequence of discrete solutions will be shown to converge toward the solution of (3.2.1) with vanishing time and space discretisation steps, without any regularity assumption on the solution. Linear problems discretized by the Marker and Cell method have been extensively studied in the litterature; in the case of convergence results for the Stokes equations we may cite [Bla05] where the source term is in $H^{-1}(\Omega)$ and [LS15] for a superconvergence proof on non-uniform grids given regularity assumptions on the velocity and pressure. Some of the studies of the MAC scheme approximation of the Navier–Stokes equations include the pioneering error analysis in [NW96], as well as convergence proofs on locally refined grids in [CEGH15], and non-uniform grids in [GHLM18] for the steady and time dependent Navier–Stokes equations. In this chapter, we extend the results from [GHLM18] to the case of variable density and viscosity as defined in (3.1). This problem was recently adressed in [LS18] for the Rannacher-Turek elements and a constant viscosity. It is organized according to the following plan; in Sections 3 and 4, we recall briefly the discrete scheme introduced in Chapter 2, as well as a few tools from [GHLM18] needed for the study. We also give a detailed definition of the viscosity tensor appearing in the diffusive term of the problem. The values for the latter are carefully picked in order to achieve the symmetry of the diffusive operator. In Section 5 we establish a $L^2(H^1_0)\cap L^\infty(L^2)$ bound on the velocity, a non–uniform L^2 bound on the pressure and the classic $L^\infty(L^\infty)$ bound on the density and viscosity. Those bounds are required for the topological degree argument used to prove the existence of a solution to the discrete scheme at every time step. Finally we resort to compactness results in Section 6 to pass to the limit in the momentum equation and mass balance equation as the mesh size and time step tend to 0. We can then conclude that the sequence of discrete solutions converges (up to a subsequence) toward the weak solution of Problem (3.1).

3.3 Discrete Implicit Scheme.

We resort to a full discretisation of the continuous problem (3.1) in the manner presented in Chapter 2. First, we carry out a MAC discretization of the domain Ω, in the sense of Definition 2.3.1, resulting with the primal and dual meshes $\mathcal{D}=(\mathcal{M},\mathcal{E})$. For the time discretization, we consider an uniform partition of the time interval $[0,T]$ with $T>0$. By denoting δt the constant time step, the partition of $[0,T]$ is given by $\{t^n=n\delta t, n=0,..,N\}$ with N satisfying $T=N\delta t$. Then, the staggered discrete scheme is given by,

Let $\boldsymbol{u}^0 = \Pi_{\mathcal{E}} \boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ and $\rho^0 = \Pi_{\mathcal{M}} \rho_0 \in L_{\mathcal{M}}$

For $n \in \{0, \cdots, N-1\}$

Find $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times L_{\mathcal{M},0}$ satisfying :

$$\eth_t \rho^{n+1} + \mathrm{div}_{\mathcal{M}}(\rho^{n+1} \boldsymbol{u}^{n+1}) = 0 \tag{3.5a}$$

$$\eth_t (\rho \boldsymbol{u})^{n+1} + \boldsymbol{C}_{\mathcal{E}}(\rho^{n+1} \boldsymbol{u}^{n+1})\, \boldsymbol{u}^{n+1} - \mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1})) + \nabla_{\mathcal{E}}\, p^{n+1} = \boldsymbol{f}^{n+1}_{\mathcal{E}} \tag{3.5b}$$

$$\mathrm{div}_{\mathcal{M}} \boldsymbol{u}^{n+1} = 0, \tag{3.5c}$$

where the spaces $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$, $L_{\mathcal{M}}$, $L_{\mathcal{M},0}$ are defined by (2.10) and (2.12). We refer to Section 2.5 in Chapter 2 for the definitions of the spatial discrete differential operators. The degree of freedom of the pressure and density unknowns are associated with the primal mesh $\mathcal{M}$, whereas the $i-$th component of the velocity is associated with the i–th dual mesh $\mathcal{E}^{(i)}$. Here also, the source term $\boldsymbol{f}^{n+1}_{\mathcal{E}}$ is defined as the projection on $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ of $\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \cdot)$ and we have $\boldsymbol{f}^{n+1}_{\mathcal{E}} = \Pi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \cdot))$. Moreover, special attention is given for the computation of the discrete viscosity tensor in (3.5b) in order to gain a symmetry property for the diffusive operator (see Subsection 2.5.5 in Chapter 2) :

DEFINITION 3.3.1 – Computation of the viscosity "tensor". Let $\mu : \rho \mapsto \mu(\rho)$ be the C^0 viscosity from the continuous formulation of the problem (3.1). Then, the discrete viscosity is function of the discrete density in the following manner :

For $0 \leq n \leq N-1$ and $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}$ satisfying the discrete mass balance equation (3.12a), we define $\mu^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}$ as,

$$\mu^{n+1} = \mu(\rho^{n+1}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \mu_K^{n+1} \mathbb{1}_K \quad \text{with} \quad \mu_K^{n+1} = \mu(\rho_K^{n+1}) \quad \forall K \in \mathcal{M} \tag{3.6}$$

Additionally, for any i, j in $[\![1, d]\!]$ we compute μ_{ij}^{n+1} – the discrete viscosity tensor associated to $\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}$ – from the values $(\mu_K^{n+1})_{K \in \mathcal{M}}$ and we have :

$$\mu_{ij}^{n+1}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)} \\ \epsilon \perp \boldsymbol{e}_j}} \mu_\epsilon^{n+1} \mathbb{1}_{D_\epsilon}(\boldsymbol{x}) \tag{3.7}$$

Therefore μ_{ij}^{n+1} belongs to the space $H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}}$ defined by (2.19).

Let $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)} \cap \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{int}} = \{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{int}}, \epsilon \perp \boldsymbol{e}_j\}$ be the dual face separating D_σ and $D_{\sigma'}$. If $i = j$ then we set $\mu_\epsilon^{n+1} = \mu_K^{n+1}$ if ϵ is included in $K \in \mathcal{M}$ (see Figure 3.1). Otherwise, we may find $(K, K', L, L') \in \mathcal{M}^4$ verifying $\sigma = K|L$ and $\sigma' = K'|L'$ (see Figure 3.2) and we define μ_ϵ^{n+1} associated to the dual cell D_ϵ as,

$$|D_\epsilon| \mu_\epsilon^{n+1} = \frac{1}{4}[|K| \mu_K^{n+1} + |L| \mu_L^{n+1} + |K'| \mu_{K'}^{n+1} + |L'| \mu_{L'}^{n+1}] \tag{3.8}$$

If $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)} \cap \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{ext}} = \{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{ext}}, \epsilon \perp \boldsymbol{e}_j\}$ then $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \cap \widetilde{\mathcal{E}}^{(i)}_{\mathrm{ext}}$ for some $\sigma = K|L$ and we are in the configuration illustrated in Figure 3.1. Hence $|D_\epsilon| = \frac{1}{2}|D_\sigma| = \frac{1}{4}(|K| + |L|)$ and we set :

$$|D_\epsilon| \mu_\epsilon^{n+1} = \frac{1}{4}\left(|K| \mu_K^{n+1} + |L| \mu_L^{n+1}\right) \tag{3.9}$$

Finally, so as to avoid an unnecessary excess of notations in some parts of the chapter, we note $\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{n+1}\boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\mu_{ij}^{n+1}(\eth_j u_i + \eth_i u_j))_{i,j=1,..,d}$.

REMARK 3.3.2 Indeed, when $i = j$ we recall that the partition given by $\{D_\epsilon, \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,i)}\}$ coincides with the set of primal cells $K \in \mathcal{M}$. Moreover, thanks to the equivalence of the partitions $\{D_\epsilon, \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}\} = \{D_\epsilon, \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(j,i)}\}$ there exists $\epsilon' \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(j,i)}$ such that $\mu_\epsilon = \mu_{\epsilon'}$.

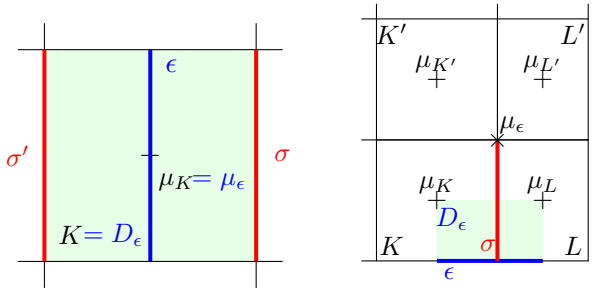

FIGURE 3.1 – Computation of (3.8) for $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(1,1)}$ (left) ; for $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(1,2)} \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^{(1)}$ (right)

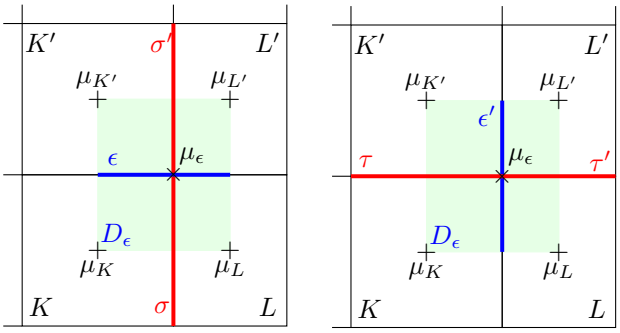

FIGURE 3.2 – Computation of (3.8) for $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(1,2)}$ and $\epsilon' \in \widetilde{\mathcal{E}}^{(2,1)}$ ($d = 2$)

Thus, the viscosity tensor given by the definition above yields the symmetry of the diffusive operator as needed. As we aim to study the convergence of the weak discrete problem towards its continuous analogue (3.2.1), let us introduce the weak formulation of (3.5) :

For $n \in \{0, \cdots, N-1\}$

Find $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{E}_{\mathcal{E}}$ such that for any $(q, \boldsymbol{v}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{E}_{\mathcal{E}}$,

$$\int_\Omega \Big(\eth_t \rho^{n+1} + \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})\Big) q \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \tag{3.10a}$$

$$\int_\Omega \eth_t(\rho\boldsymbol{u})^{n+1} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + b_{\mathcal{E}}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{v}) + \int_\Omega \mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{n+1} \mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1}) : \mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}_{\mathcal{E}}^{n+1} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.10b}$$

And we recall that $\boldsymbol{E}_{\mathcal{E}}$ stands for piecewise constant functions of $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ that are discrete divergence–free (see (2.24)). Although we will eventually come back to the formulation above for the convergence result, let us introduce the weak formulation of the problem featuring the pressure :

For $n \in \{0, \cdots, N-1\}$

Find $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{E}_{\mathcal{E}} \times L_{\mathcal{M},0}$ such that for any $(q, \boldsymbol{v}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}$,

Equation (3.10a) holds and,

$$\int_\Omega \eth_t(\rho \boldsymbol{u})^{n+1} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + b_{\mathcal{E}}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{v}) + \int_\Omega \mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{n+1} \mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1}) : \mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.11a}$$
$$+ \int_\Omega \nabla_{\mathcal{E}} p^{n+1} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}_{\mathcal{E}}^{n+1} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Unlike the former weak formulation of the scheme (3.10a)-(3.10b), this formulation yields the same algebraic equations as the "strong" form of the scheme (3.5). Hence, we start with (3.11a) to derive estimates for the pressure which are needed for the existence result. For the sake of convenience, let us recall the finite-volumes formulation of (3.5), using the definitions of the operators given in Chapter 2 :

Let $\boldsymbol{u}^0 = \Pi_{\mathcal{E}} \boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ and $\rho^0 = \Pi_{\mathcal{M}} \rho_0 \in L_{\mathcal{M}}$

For $n \in \{0, \cdots, N-1\}$

Find $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times L_{\mathcal{M}}$ satisfying :

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{M} \tag{3.12a}$$

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} u_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1} u_\epsilon^{n+1} \tag{3.12b}$$
$$- (\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}} \mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1})))_{D_\sigma} + (\nabla_{\mathcal{E}} \, p^{n+1})_{D_\sigma} = f_\sigma^{n+1} \qquad \forall i, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \boldsymbol{u}_\sigma^{n+1} \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{M} \tag{3.12c}$$

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_K^n = 0 \tag{3.12d}$$

3.4 Preliminary results and tools.

In preparation for the proof of the main results, let us introduce a few necessary tools exclusive to this chapter. Due to the staggered nature of the MAC grids, we are led to deal with convex combinations of the discrete solutions $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$: a direct example to this is the density defined on the velocity grids in (3.12b) with $|D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^n = |K| \rho_K^n + |L| \rho_L^n$ for $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}$ and some $n \in \{1, N\}$.

Furthermore, at some point in the proof – mainly during the passage to the limit in the discrete scheme – we are required to control those quantities to assure their convergence. Hence, we define in this section several "reconstruction" operators so as to cover all our needs.

DEFINITION 3.4.1 – Reconstructions from $\mathcal{M}$ to $\mathcal{E}^{(i)}$. Let $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ be an admissible MAC mesh, and $i \in [\![1, d]\!]$. We define the reconstruction operator from $L_{\mathcal{M}}$ to $H_{\mathcal{E}^{(i)}}$ as follows :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} : \left| \begin{array}{rcl} L_{\mathcal{M}} & \to & H_{\mathcal{E}^{(i)}} \\ q & \mapsto & \mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} q = \displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)} \\ \sigma = K|L}} (\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} q)_{D_\sigma} \, \mathbb{1}_{D_\sigma} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^{(i)} \\ \sigma \in \mathcal{E}(K)}} q_K \, \mathbb{1}_{D_{K,\sigma}} \end{array} \right. \tag{3.13}$$

where,

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} q)_{D_\sigma} = \alpha_\sigma q_K + (1 - \alpha_\sigma) q_L \quad \text{with} \quad \alpha_\sigma = |D_{K,\sigma}|/|D_\sigma| \quad \text{if} \quad \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}$$

and we note that the value $(\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} q)_{D_\sigma}$ for $\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^{(i)}$ is coherent since $|D_{K,\sigma}| = |D_\sigma|$. Additionally, we introduce the following reconstruction operator from $H_{\mathcal{E}^{(i)}}$ to $L_{\mathcal{M}}$:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}} : \left| \begin{array}{rcl} H_{\mathcal{E}^{(i)}} & \to & L_{\mathcal{M}} \\ v & \mapsto & \mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}} v = \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{M}} (\mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}} v)_K \, \mathbb{1}_K \end{array} \right. \tag{3.14}$$

where,

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}} v)_K = \frac{1}{2}(v_\sigma + v_{\sigma'}) \quad \text{with} \quad (\sigma, \sigma') \in (\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}^{(i)})^2$$

which again is coherent as we have $|D_{K,\sigma}| = |D_{K,\sigma'}| = |K|/2$.

REMARK 3.4.2 Both operators are clearly linear. Additionally, for $q \in L_{\mathcal{M}}$ and $v \in H_{\mathcal{E}^{(i)}}$, we compute $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} q$ and $\mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}} v$ through convex combinations of the values $(q_K)_{K \in \mathcal{M}}$ and $(v_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}^{(i)}}$ respectively.

Let us prove the following stability result,

LEMMA 3.4.3 – Stability in L^p, $p \in [1, \infty]$. Let $q \in L_{\mathcal{M}}$ and $v \in H_{\mathcal{E}^{(i)}}$ for some $i \in [\![1, d]\!]$. Then,

$$\|\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} q\|_{L^p(\Omega)} \leq \|q\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{and} \quad \|\mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}} v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

Proof. We prove the first estimate only since both proofs are almost identical. The case with $p = \infty$ is straightforward since we are dealing with convex combinations. Thus, let $q \in L_{\mathcal{M}}$ and $p \in [1, \infty)$. Using Jensen's inequality and $|D_\sigma| = |D_{K,\sigma}| + |D_{L,\sigma}|$ for $\sigma = K|L$ yields :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}} q\|_{L^p(\Omega)}^p &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)} \\ \sigma = K|L}} |D_\sigma| |\alpha_\sigma q_K + (1 - \alpha_\sigma) q_L|^p + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^{(i)} \\ \sigma \in \mathcal{E}(K)}} |D_{K,\sigma}| |q_K|^p \\ &\leq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)} \\ \sigma = K|L}} \Big[|D_{K,\sigma}| |q_K|^p + |D_{L,\sigma}| |q_L|^p \Big] + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^{(i)} \\ \sigma \in \mathcal{E}(K)}} |D_{K,\sigma}| |q_K|^p \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| |q_K|^p = \|q\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned}$$

□

In the same manner we define, following [GHLM18], a reconstruction operator from $H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ to $H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}}$ for some $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$. The latter will allow us to deal with the quantities $(\rho_\epsilon, u_\epsilon)_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}}$ appearing in the nonlinear velocity convection term in (3.12b). Then, we may reformulate the trilinear form $b_\mathcal{E}$ defined by (2.35) so as to obtain estimations necessary to derive the a priori estimates for the problem, as well as the convergence of the scheme.

DEFINITION 3.4.4 – Reconstructions from $H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ to $H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}}$. Let $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ be an admissible MAC mesh, and $i, j \in [\![1,d]\!]$. We define the reconstruction operator from $H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ to $H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}}$ as follows :

$$\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)} : \left| \begin{array}{ccc} H_{\mathcal{E}^{(i)},0} & \to & H_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} \\ v & \mapsto & \mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)} v = \displaystyle\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i)} \\ \epsilon\perp \boldsymbol{e}^{(j)}}} (\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)} v)_{D_\epsilon} \mathbb{1}_{D_\epsilon}, \end{array} \right. \tag{3.15}$$

where,

$$(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)} v)_{D_\epsilon} = \begin{cases} \alpha_\epsilon v_\sigma + (1-\alpha_\epsilon) v_{\sigma'} & \text{if} \quad \epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\text{int}}^{(i)} \\ \alpha_\epsilon v_\sigma & \text{if} \quad \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \cap \widetilde{\mathcal{E}}_{\text{ext}}^{(i)} \end{cases}$$

and $\alpha_\epsilon \in [0,1]$ to which we give a meaning below (Lemma 3.4.6).

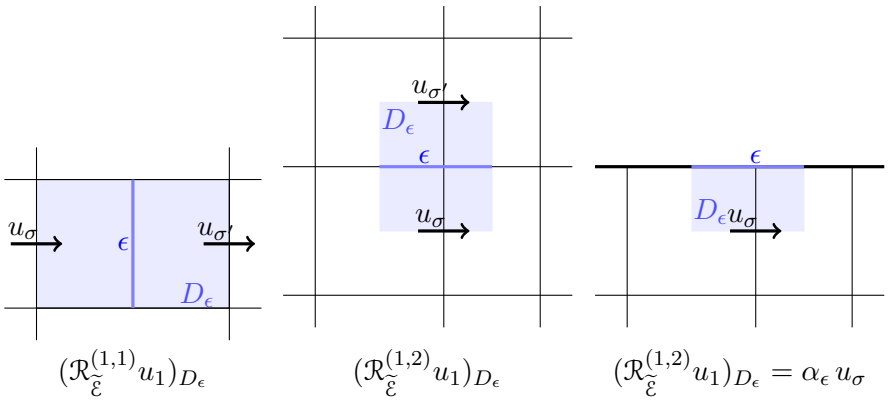

FIGURE 3.3 – Reconstruction of the first component of the velocity ($i = 1$ and $d = 2$).

LEMMA 3.4.5 – Stability of $\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)}$ in L^p, $p \in [1,\infty)$. Let $p \in [1,\infty)$. Then, there exists $C_{\eta_\mathcal{M}} \geq 0$ depending only on $\eta_\mathcal{M}$ such that for any $v \in H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ we have,

$$\|\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)} v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{\eta_\mathcal{M}} \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

Proof. Using $\alpha_\epsilon \in [0,1]$ and $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ for $a, b > 0$ yields :

$$\|\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)}\|_{L^p(\Omega)}^p \leq 2^{p-1} \sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\text{int}}^{(i)} \\ \epsilon=\sigma|\sigma'}} |D_\epsilon|(|v_\sigma|^p + |v_{\sigma'}|^p) + \sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\text{ext}}^{(i)} \\ \epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}} |D_\epsilon||v_\sigma|^p$$

We reorder the sum then use the regularity of the mesh $\eta_{\mathcal{M}}$, to bound the measure $|D_\epsilon| + |D_{\epsilon'}|$ by $C_{\eta_{\mathcal{M}}}|D_\sigma|$, with ϵ and ϵ' being the two dual faces of D_σ orthogonal to $\boldsymbol{e}_j$,

$$\|\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)}\|_{L^p(\Omega)}^p \leq 2^{p-1} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)} \\ \epsilon,\epsilon'\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}} [|D_\epsilon| + |D_{\epsilon'}|]\,|v_\sigma|^p \leq 2^{p-1} C_{\eta_{\mathcal{M}}} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p$$

□

Using the reconstructions by $\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)}$, we give another useful formulation of the trilinear form $b_{\mathcal{E}}$ as follows :

LEMMA 3.4.6 – Reformulation of $b_{\mathcal{E}}$. Let $i \in \{1,..,d\}$ and $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in L_{\mathcal{M}} \times H^3_{\mathcal{E}^{(i)},0}$. Let $b_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u}, v_i, w_i)$ be defined by (2.35). Then there exists three reconstruction operators : $(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^\rho$, $(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^u$ and $(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^v$ in the sense of Definition 3.4.4 such that,

$$b_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u}, v_i, w_i) = -\sum_{j=1}^{d} \int_\Omega (\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^\rho \rho_{\mathcal{E}^{(j)}} (\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^u u_j (\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^v v_i \eth_j w_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.16}$$

where $(\rho_{\mathcal{E}^{(j)}}) = (\rho_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}^{(j)}}$ are the values defined on $\mathcal{E}^{(j)}$ computed from $\rho \in L_{\mathcal{M}}$ using the upwind scheme (see (2.22)).

Proof. By the definition of $b_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u}, v_i, w_i)$ in (2.35) and the duality property of the convective term (2.34) we have,

$$\begin{aligned} b_{\mathcal{E}}^{(i)}(\rho\boldsymbol{u}, v_i, w_i) &= -\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)}} |D_\epsilon| (\rho u_j)_{D_\epsilon} (v_i)_{D_\epsilon} (\eth_j w_i)_{D_\epsilon} \\ &= -\sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}^{(i,j)} \\ \epsilon=\sigma|\sigma'}} |D_\epsilon| \rho_\epsilon u_\epsilon v_\epsilon (\eth_j w_i)_{D_\epsilon} \end{aligned}$$

From their definitions in (2.31)–(2.32), we have that ρ_ϵ and u_ϵ are convex combinations of elements $\in \mathcal{E}$ lying on the faces of D_ϵ. Therefore there exists two reconstruction operators $(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^\rho$ and $(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^u$ such that $((\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^\rho \rho_{\mathcal{E}^{(j)}})_{D_\epsilon} = \rho_\epsilon$ and $((\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^u u)_{D_\epsilon} = u_\epsilon$. Finally, v_ϵ is given either by an interpolation or the upwind scheme (2.28), hence we also have the existence of an operator $(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^v$ verifying $((\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^v v)_{D_\epsilon} = v_\epsilon$ which concludes the reformulation of $b_{\mathcal{E}}^{(i)}$. □

Thanks to the reconstruction operators we may derivate the discrete equivalent of the classical estimations on the trilinear form [Tem01] and we have,

LEMMA 3.4.7 – Estimations on $b_{\mathcal{E}}$. There exists a constant $C_{\eta_{\mathcal{M}}} > 0$, depending only on $\eta_{\mathcal{M}}$ – as defined in (2.7) – such that for any $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{E}_{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{H}^2_{\mathcal{E},0}$ we have,

$$\begin{aligned} |b_{\mathcal{E}}(\rho\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leq C_{\eta_{\mathcal{M}}} \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\boldsymbol{w}\|_{1,\mathcal{E},0} \\ |b_{\mathcal{E}}(\rho\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leq C_{\eta_{\mathcal{M}}} \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\|_{1,\mathcal{E},0} \|\boldsymbol{v}\|_{1,\mathcal{E},0} \|\boldsymbol{w}\|_{1,\mathcal{E},0}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Proof. The result is a direct adaptation of [GHLM18]. Let us consider $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{E}_{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{H}^2_{\mathcal{E},0}$. For any $i \in \{1, .., d\}$, we use Hölder's inequality on the reformulation of $b^{(i)}_{\mathcal{E}}(\rho \boldsymbol{u}, v_i, w_i)$ to yield,

$$\left| b^{(i)}_{\mathcal{E}}(\rho \boldsymbol{u}, v_i, w_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{d} \|(\mathcal{R}^{(j,i)}_{\widetilde{\mathcal{E}}})^{\rho} \rho_{\mathcal{E}(j)} (\mathcal{R}^{(j,i)}_{\widetilde{\mathcal{E}}})^{u} u\|_{L^4(\Omega)} \|(\mathcal{R}^{(i,j)}_{\widetilde{\mathcal{E}}})^{v} v\|_{L^4(\Omega)^d} \|\eth_j w_i\|_{L^2(\Omega)}$$

Using using Lemma 3.4.5 and the fact that $(\mathcal{R}^{(j,i)}_{\widetilde{\mathcal{E}}})^{\rho} \rho_{\mathcal{E}(j)}$ is obtained by convex interpolations of values of ρ yields the first estimate of (3.17). The second estimate hold thanks to the discrete Sobolev inequality [EGH00, Lemma 3.5] :

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\eta_{\mathcal{M}}, q) \|\boldsymbol{v}\|_{1,\mathcal{E},0} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \quad \forall q \in [2, 6]$$

which allows us to control the L^4 norm by the discrete $\boldsymbol{H}^1_0$ norm. □

3.5 Estimations and Existence results

In the present section we aim to prove that a solution to the discrete scheme (3.5) exists at any given time t^n. In order to deal with the nonlinear terms in equations (3.5a,3.5b) we use the topological degree theory for which we recall some relevant advances. These results can be found in [Dei85] and their applications to numerical schemes in [EGG98, LS18, GHLM18, GGHL08a]

First we demonstrate some preliminary results and estimates regarding the solutions of (3.5). The following uniform estimate is a classical consequence of the upwind choice in the mass equation and of the fact that the velocity is divergence-free. Then we derive bounds on the velocity and pressure which are needed for the existence result.

3.5.1 Estimates on the discrete solutions

LEMMA 3.5.1 – Estimate on the density - discrete maximum principle. Let $\mathcal{D}$ be an admissible MAC discretization of Ω. For $n \in \{1, \cdots, N-1\}$, assume $\rho^n \in L_{\mathcal{M}}$ is such that $0 < \rho_{\min} \leq \rho^n \leq \rho_{\max}$. If $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}$ and $\boldsymbol{u}^{n+1} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}$ satisfy the discrete mass balance (3.5a) and the divergence constraint (3.5c), then

$$\rho_{\min} \leq \rho^{n+1} \leq \rho_{\max}. \tag{3.18}$$

Moreover, provided that the discrete viscosity $\mu^n \in L_{\mathcal{M}}$ defined as in Definition 3.3.1 satisfies $0 < \mu_{\min} \leq \mu^n \leq \mu_{\max}$, we have

$$\mu_{\min} \leq \mu^{n+1} \leq \mu_{\max} \tag{3.19}$$

Proof. We proceed similarly to the continuous maximum principle. Starting with right inequality, the discrete mass conservation equation (3.5a) given on $K \in \mathcal{M}$ is multiplied by $|K|(\rho^{n+1}_K - \rho_{\max})^+$. Summing over cells K reads

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \frac{|K|}{\delta t} (\rho^{n+1}_K - \rho^n_K)(\rho^{n+1}_K - \rho_{\max})^+ + \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} (\rho^{n+1}_K - \rho_{\max})^+ = 0 \tag{3.20}$$

The first side of the inequality is obtained by the first term of the equation. We focus on the second term, denoted by B, which we reformulate using (3.12c) as,

$$B = -\sum_{K\in\mathcal{M}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma}(\rho_K^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1})(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})^+$$

Let us denote $\mathrm{sign}(x) = 1$ if $x \geq 0$, and 0 otherwise. We then write that,

$$B = -\sum_{K\in\mathcal{M}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \mathrm{sign}(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})|\sigma| u_{K,\sigma}(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})((\rho_K^{n+1} - \rho_{\max}) - (\rho_\sigma^{n+1} - \rho_{\max}))$$

Using $2a(a-b) = a^2 + (a-b)^2 - b^2$ and (3.12c) we end up with,

$$B = -\frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{M}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} \mathrm{sign}(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})|\sigma| u_{K,\sigma}((\rho_K^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1})^2 - (\rho_\sigma^{n+1} - \rho_{\max})^2)$$

Rearranging the sum over the edges, we get

$$\begin{aligned} B = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}(K)\\ \sigma=K|L}} \Big(&\mathrm{sign}(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})|\sigma| u_{K,\sigma}((\rho_K^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1})^2 - (\rho_\sigma^{n+1} - \rho_{\max})^2) \\ &- \mathrm{sign}(\rho_L^{n+1} - \rho_{\max})|\sigma| u_{K,\sigma}((\rho_L^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1})^2 - (\rho_\sigma^{n+1} - \rho_{\max})^2)\Big) \end{aligned}$$

This term is zero if $\rho_K^{n+1}, \rho_L^{n+1} \leq \rho_{\max}$ and positive if $\rho_K^{n+1}, \rho_L^{n+1} \geq \rho_{\max}$ (owing to the assumption that the upwind scheme is used for the density). In the remaining cases, using the upwind scheme assumption and the order within $\{\rho_K^{n+1}, \rho_L^{n+1}, \rho_{\max}\}$ we show that the term is positive. Going back to the mass conservation relation from the beginning, we are left with,

$$A = \sum_{K\in\mathcal{M}} \frac{|K|}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})^+ \leq \sum_{K\in\mathcal{M}} \frac{|K|}{\delta t}(\rho_K^{n} - \rho_{\max})(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})^+ \leq 0 \quad (3.21)$$

From which we can conclude that $(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})(\rho_K^{n+1} - \rho_{\max})^+ \leq 0 \ \forall K \in \mathcal{M}$, thus $\rho_K^{n+1} \leq \rho_{\max}$. Using the exact same arguments, the mass conservation equation is multiplied by $|K|(\rho_K^{n+1} - \rho_{\min})^-$ to conclude with $\rho_K^{n+1} \geq \rho_{\min}$.

Finally, the extrem value theorem combined with $\rho^n, \rho^{n+1} \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ and $\mu^n \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ yield the bound $\mu_{\min} \leq \mu^{n+1} \leq \mu_{\max}$.

□

REMARK 3.5.2 As a consequence, the estimation (3.19) holds for the discrete viscosity μ_{ij}^{n+1} by being a reconstruction of μ^{n+1} (3.7)–(3.9).

REMARK 3.5.3 The result still holds for non-homogeneous boundary conditions under the assumption that ρ_σ^{n+1} is given by ρ_{in}^{n+1} on $\Gamma_{in} \neq \emptyset$ and verifies $\rho_{\min} \leq \rho_{in}^{n+1} \leq \rho_{\max}$.

From the discrete mass balance equation we also derive the following estimates, including a weak BV inequality. Those bounds will be required to deal with the density variations in the convergence proof. In the case of nonlinear flux functions, we may still be able to bound the total variation of the density using Lemma 5.5 from [EGH00].

LEMMA 3.5.4 – Weak BV estimate for the density. Any solution $(\rho, \boldsymbol{u}, p)$ to the discrete scheme (3.12) satisfies the following equality, for all $K \in \mathcal{M}$ and $0 \leq n \leq N-1$:

$$\frac{|K|}{2\delta t}\left[(\rho_K^{n+1})^2 - (\rho_K^n)^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\,(\rho_\sigma^{n+1})^2\, u_{K,\sigma}^{n+1} + \mathcal{R}_K^{n+1} = 0, \tag{3.22}$$

with the remainder term $\mathcal{R}_K^{n+1}$ given by,

$$\mathcal{R}_K^{n+1} = \frac{|K|}{2\delta t}\left(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\left(\rho_\sigma^{n+1} - \rho_K^{n+1}\right)^2 u_{K,\sigma}^{n+1}. \tag{3.23}$$

As a consequence, we get that

$$\frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{M}} |K|(\rho_K^{n+1})^2 + \frac{\delta t}{2}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}\\ \sigma=K|L}} |\sigma|\,(\rho_L^{n+1} - \rho_K^{n+1})^2\,|u_{K,\sigma}^{n+1}| + \mathcal{R}_\rho^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{M}} |K|(\rho_K^n)^2, \tag{3.24}$$

where $\mathcal{R}_\rho^{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{M}} |K|(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)^2 \geq 0$. Thus, the following weak BV estimate holds :

$$\sum_{n=1}^{N}\delta t \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}\\ \sigma=K|L}} |\sigma|\left(\rho_L^n - \rho_K^n\right)^2 |u_{K,\sigma}^n| \leq C, \tag{3.25}$$

where $C \geq 0$ depends only on the initial data $\|\rho_0\|_{L^2}$.

Proof. Let us multiply the discrete mass balance equation (3.5a) by $|K|\rho_K^{n+1}$. We deal with the discrete time derivative term by using the identity $2(a^2-ab) = (a^2-b^2) + (a-b)^2$ with $a = \rho_K^{n+1}$ and $b = \rho_K^n$. We then apply the identity $2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2$ with $a = \rho_K^{n+1}$ and $b = \rho_\sigma^{n+1}$ for the primal mass fluxes in the second term. We obtain (3.22)–(3.23) by noting that,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|(\rho_K^{n+1})^2 u_{K,\sigma}^{n+1} = (\rho_K^{n+1})^2(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{u})_K = 0.$$

We then sum (3.22) over the cells $K \in \mathcal{M}$. This yields all the terms of (3.24) but the second term. The latter is obtained from reformulating the sum in the second term from $\sum_{M\in\mathcal{M}} \mathcal{R}_K^{n+1}$ to obtain,

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}\\ \sigma=K|L}} |\sigma|\,\left(\left(\rho_\sigma^{n+1} - \rho_K^{n+1}\right)^2 - \left(\rho_\sigma^{n+1} - \rho_L^{n+1}\right)^2\right)\, u_{K,\sigma}^{n+1}$$

and using the definition of the upwind approximation of ρ_σ. Thanks to the boundary conditions on $\boldsymbol{u}$, the terms on $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext}$ vanish. Finally, the second term in (3.22) vanishes from the local conservativity. The last estimate – the weak BV estimate – is obtained by summing (3.24) over n. □

LEMMA 3.5.5 – Discrete $L^2(H_0^1)$ / $L^\infty(L^2)$ velocity estimates. There exists $C > 0$ depending only on $\boldsymbol{u}_0$, ρ_0, μ_0 and $\boldsymbol{f}$ such that, for any function $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}_{\mathcal{E},\delta t}$ satisfying (3.5), the following estimates hold :

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0})} = \sum_{n=0}^{N-1}\delta t\,\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2_{1,\mathcal{E},0} \leq C, \tag{3.26}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)} = \max_{0\leq n\leq N-1}\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C. \tag{3.27}$$

Proof. We start from (3.12b) to derivate a discrete kinetic energy balance. First, we multiply (3.12b) by (u_σ^{n+1}), for $i = 1, \dots d$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}$ and rearrange the resulting relation to obtain,

$$\Big(\frac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \frac{1}{|D_\sigma|}\sum_{\epsilon\in\mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1}\Big)(u_\sigma^{n+1})^2 + \frac{1}{\delta t}\rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^{n+1}(u_\sigma^{n+1} - u_\sigma^n) - \frac{1}{|D_\sigma|}\sum_{\epsilon\in\mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1} u_\sigma^{n+1}(u_\sigma^{n+1} - u_\epsilon^{n+1}) - (\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{n+1}\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1})))_{D_\sigma} u_\sigma^{n+1} + (\nabla\, p^{n+1})_{D_\sigma} u_\sigma^{n+1} = f_\sigma^{n+1} u_\sigma^{n+1}$$

The first term vanishes since it can be expressed as (3.12a) averaged over K and L for $\sigma = K|L$, assuming a suitable choice for $\rho_{D_\sigma}^k$. For the second and third terms we use $2ab = a^2 + (a-b)^2 - b^2$. We use (3.12a) once again to deal with the term $-\frac{1}{2}\sum_{\epsilon\in\mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1}(u_\sigma^{n+1})^2$. Thanks to the approximations $u_\epsilon^{n+1} = (u_\sigma^{n+1} + u_{\sigma'}^{n+1})/2$ when $\epsilon = \sigma|\sigma'$, the term $(u_\sigma^{n+1} - u_\epsilon^{n+1})^2 - (u_\epsilon^{n+1})^2$ yields $-u_\sigma^{n+1}u_{\sigma'}^{n+1}$. We are left with the discrete kinetic energy identity,

$$\frac{1}{2\delta t|D_\sigma|}\Big(\rho_{D_\sigma}^{n+1}(u_\sigma^{n+1})^2 + \rho_{D_\sigma}^n(u_\sigma^{n+1} - u_\sigma^n)^2 - \rho_{D_\sigma}^n(u_\sigma^n)^2\Big) - \frac{1}{2|D_\sigma|}\sum_{\epsilon\in\mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1} u_\sigma^{n+1} u_{\sigma'}^{n+1} - (\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{n+1}\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1})))_{D_\sigma} u_\sigma^{n+1} + (\nabla\, p^{n+1})_{D_\sigma} u_\sigma^{n+1} = f_\sigma^{n+1} u_\sigma^{n+1} \quad (3.28)$$

Let us sum (3.28) over the faces $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}$ for $i = 1, \dots, d$ and over time for $n = 0, \dots, M$ with $M \le N-1$. The convection term can be rearranged as,

$$\sum_{n=0}^{M}\sum_{i=1}^{d}\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\rm int}^{(i)}} (F_{\sigma,\epsilon}^{n+1} + F_{\sigma',\epsilon}^{n+1}) u_\sigma^{n+1} u_{\sigma'}^{n+1}$$

and thus vanishes by conservativity of the numerical flux along $\epsilon = \sigma|\sigma'$. The duality property (2.50) combined with the Korn inequality (2.51) allows us to retrieve the $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ norm of $\boldsymbol{u}^{n+1}$ in the third term. The pressure term vanishes thanks to (2.27) and (3.5c). Finally, from the positivity of the density we have $\rho_{D_\sigma}^n(u_\sigma^{n+1} - u_\sigma^n)^2 \ge 0$. Hence we get,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}} |D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^{(M+1)}(u_\sigma^{(M+1)})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}} |D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^{(0)}(u_\sigma^{(0)})^2 + \mu_{min}\frac{\delta t}{2}\sum_{n=0}^{M}\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|_{1,\mathcal{E},0}^2 \le \sum_{n=0}^{M}\sum_{i=1}^{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}} \delta t|D_\sigma| f_\sigma^{n+1} u_\sigma^{n+1}$$

By Lemma 3.5.1 and thanks to the Cauchy-Schwarz, discrete Poincaré and Young inequalities, we then get the existence of $C > 0$ depending only on Ω and μ_{min} such that

$$\frac{\mu_{min}}{4}\sum_{n=0}^{M}\delta t\,\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|_{1,\mathcal{E},0}^2 + \rho_{\min}\|\boldsymbol{u}^{(M+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \rho_{\max}\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\,\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2.$$

On one hand, we can conclude with the $L^\infty(L^2)$ estimate (3.27); on the other hand, taking $M = N-1$ yields the $L^2(\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0})$ estimate (3.26). □

LEMMA 3.5.6 – Non-uniform bound on the pressure. Let $(\rho^n, \boldsymbol{u}^n, p^n) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times L_{\mathcal{M},0}$ be given and assume that $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times L_{\mathcal{M},0}$ satisfies (3.5). Then there exists a constant $C > 0$ depending only on ρ_0, μ_0, δt, $\eta_{\mathcal{M}}$, $\boldsymbol{f}$, and Ω such that :

$$\|p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \tag{3.29}$$

Proof. Let $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1})$ verify $n+1-$th step of the discrete scheme (3.5). Since $p^{n+1} \in L^2_0(\Omega)$, then there exists a unique weak solution in $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ to the Poisson problem $-\Delta \boldsymbol{w} = p^{n+1}$ on Ω with homogeneous neumann boundary conditions on $\partial\Omega$ [BF13, Theorem III.4.3]. From this solution we may construct $\boldsymbol{\varphi} \in H^1_0(\Omega)^d$ so that,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi} = p^{n+1} \quad \text{and} \quad \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}} \leq C\|p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$$

with C depending only on Ω (see [AB72, Lemma 5.4.2] for the construction process). We then choose $\boldsymbol{v} = \widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}}\boldsymbol{\varphi}$ as a test function in (3.11a).

Using the preservation of the divergence property of the Fortin operator (2.60), we obtain $\|p^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ with

$$T_1 = \int_\Omega \eth_t(\rho\boldsymbol{u})^{n+1} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad T_2 = b_{\mathcal{E}}((\rho\boldsymbol{u})^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{v})$$
$$T_3 = \int_\Omega \mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1}) : \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad T_4 = -\int_\Omega \boldsymbol{f}^{n+1}_{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Let us focus on T_1 ; by the Cauchy-Schwarz inequality and thanks to the $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ bound (3.18) on ρ we deal with $(\rho\boldsymbol{u})^{n+1}$ to get

$$|T_1| \leq \frac{\rho_{\max}}{\delta t}\sum_{i=1}^d \int_\Omega (|u_i^{n+1}| + |u_i^n|)|v_i|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \frac{2\rho_{\max}}{\delta t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega)^d)}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

We combine the fact that $\widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}}$ is continuous in $H^1_0(\Omega)$ with the Poincaré inequality to obtain $\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}}$. By the $L^\infty(L^2)$ estimate (3.27) we find $C_1 \geq 0$ depending only on ρ_0, δt, $\eta_{\mathcal{M}}$, $\boldsymbol{f}$, and Ω such that $|T_1| \leq C_1\|p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$.
From estimate (3.17) on the trilinear form we obtain a bound on T_2 :

$$|T_2| \leq C_{\eta_{\mathcal{M}}}\|\rho^{n+1}\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2_{1,\mathcal{E},0}\|\boldsymbol{v}\|_{1,\mathcal{E},0} \leq C_2(\rho_0, \eta_{\mathcal{M}}, \boldsymbol{f})\|p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

again by using the $L^\infty(L^\infty)$ bound on the density (3.26) and the uniform $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ bound on $\boldsymbol{u}$. We deal with the remaining terms similarly : using the symmetry property (2.53) of the discrete operator $\boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ on T_3 yields,

$$\begin{aligned} T_3 &= \int_\Omega \mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1}) : \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u}^{n+1} : \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{u}^{n+1} : \nabla^T_{\widetilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

It follows by Cauchy-Schwarz : $|T_3| \leq \mu_{max}\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|_{1,\mathcal{E},0}\|\boldsymbol{v}\|_{1,\mathcal{E},0} \leq C_3(\mu_0, \eta_{\mathcal{M}}, \boldsymbol{f})\|p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$. We have for the last bound :

$$T_4 \leq \|\boldsymbol{f}^{n+1}_{\mathcal{E}}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq C_4(\eta_{\mathcal{M}}, \boldsymbol{f})\|p^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$$

which concludes the proof. □

3.5.2 Existence result at any given time

In order to prove the existence of a solution to the scheme (3.5) at any given time, we resort to a topological degree argument. In a finite-dimension context, we make use of the Brouwer topological degree $d : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, where $\mathcal{A}$ refers to the set of triplets $(F, \mathcal{O}, y)$ with $\mathcal{O}$ being an open bounded set of $\mathbb{R}^N$, $F : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^N$ is a continuous function and $y \in \mathbb{R}^N \setminus F(\partial\mathcal{O})$. The triplet is such that $d(F, \mathcal{O}, y)$ is meant to express the existence of solutions of the problem $F(x) = y$, and possibly their locations in $\mathcal{O}$ as well. Let us recall its relevant properties for our problem,

DEFINITION 3.5.7 Let $\mathcal{A} = \{(F, \mathcal{O}, y)$ such that $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$open bounded, $F \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}), y \notin F(\partial\mathcal{O})\}$. The Brouwer degree $d : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ is defined to have the following properties :

— $d((F, \mathcal{O}, y) \neq 0$ implies that $F^{-1}(y) \neq \emptyset$

— $d((F(\lambda, \cdot), \mathcal{O}, y(\lambda))$ is independent of λ if $F : [0, 1] \times \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^N$ and $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ are continuous, while $y(t) \notin F(\lambda, \partial\mathcal{O})$ for every $\lambda \in [0, 1]$

One can find the remaining properties in [Dei85]. The last property refers to the homotopy invariance, and will allow us to demonstrate that there exists at least one solution to (3.5) by considering a simpler problem, close to the unsteady Stokes equations.

The fixed-point theory may be seen as a particular case of the topological degree. Uniqueness of the solution, if it is shown to exist by the topological degree, isn't guaranteed.

THEOREM 3.5.8 – Existence of a solution. For a given $n \in \{1, \cdots, N-1\}$, let us assume that the density ρ^n is such that $0 < \rho_{\min} \leq \rho_K^n \leq \rho_{\max}$ for all $K \in \mathcal{M}$. Then the non-linear system (3.5) admits at least one solution $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1})$ in $L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times L_{\mathcal{M},0}$, and any possible solution satisfies the estimates (3.18), (3.26) and (3.29).

Proof. Let $N_{\mathcal{M}} = \text{card}(\mathcal{M})$ and $N_{\mathcal{E}} = \text{card}(\mathcal{E}_{\text{int}})$; we may identify $L_{\mathcal{M}}$ with $\mathbb{R}^{N_{\mathcal{M}}}$ and $\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$ with $\mathbb{R}^{N_{\mathcal{E}}}$. Let $V = \mathbb{R}^{N_{\mathcal{M}}} \times \mathbb{R}^{N_{\mathcal{E}}} \times \mathbb{R}^{N_{\mathcal{M}}}$. Let us introduce the function $F : [0, 1] \times V \to V$ defined by :

$$F(\lambda, \rho, \boldsymbol{u}, p) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^n) + \lambda \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}, & K \in \mathcal{M} \\ \dfrac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma} u_\sigma - \rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n) + \lambda \dfrac{1}{|D_\sigma|} \displaystyle\sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} u_\epsilon & \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \qquad -\text{div}_{\mathcal{E}}(\mu_{\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{D}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u})))_{D_\sigma} + (\nabla p)_\sigma - f_\sigma, & \\ -\dfrac{1}{|K|} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| u_{K,\sigma} + \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\sum_{L \in \mathcal{M}} |L|\, p_L, & K \in \mathcal{M}. \end{array} \right.$$

The source term is included in the expression of F, hence we have $y = 0_V$. The function F is continuous from $[0, 1] \times V$ to V and the problem $F(1, \rho, \boldsymbol{u}, p) = 0$ is equivalent to the system (3.5). Indeed, the first and second lines remain unchanged. Multiplying the third line by $|K|$ then summing over the cells $K \in \mathcal{M}$, we end up with

$$-\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}} |\sigma| u_{K,\sigma} + \text{card}(\mathcal{M}) \sum_{L \in \mathcal{M}} |L|\, p_L = 0$$

as the terms over $\mathcal{E}_{\text{int}}$ have vanished by conservativity. Using the fact that $\boldsymbol{u}_\sigma = 0$ for $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ – from the choice for $N_{\mathcal{E}}$ and V – it follows that $\sum_{L \in \mathcal{M}} |L|\, p_L = 0$, enforcing the constraint $p \in L_{\mathcal{M},0}$. Hence we have $(\text{div}\boldsymbol{u})_K = 0$, $\forall K \in \mathcal{M}$ giving (3.5).

Also we note that the placement of λ in the expression of F takes all the nonlinearities into account : the penalization of the convective term deals with the product of ρ^{n+1} and $\boldsymbol{u}^{n+1}$, and the penalization of the mass balance equation allows us to go back to a constant density and viscosity.

In order to define the open set $\mathcal{O}$ we make use of the estimates (3.18), (3.26) and (3.29). Thanks to the properties of convection fluxes, the problem $F(\lambda, \rho, \boldsymbol{u}, p) = 0$, satisfies those estimates uniformly in λ. Hence, we may introduce C so that the bounded open set $\mathcal{O}$ can be defined as,

$$\mathcal{O} = \{(\rho, \boldsymbol{u}, p) \in V \text{ s.t. } \frac{\rho_{\min}}{2} < \rho < 2\,\rho_{\max},\ \|\boldsymbol{u}\|_{1,\mathcal{E},0} < C \text{ and } \|p\|_{L^2(\Omega)} < C\},$$

with $y \notin F(1, \partial\mathcal{O})$. In order to prove the existence of at least one solution to the scheme (3.5), it remains to show that $d((F(0,\cdot), \mathcal{O}, 0_V) \neq 0$. For $\lambda = 0$ the density still remains variable regarding the space variable, which prevents us from using directly the results from [Bla05], as done in [GHLM18]. Let us consider the function $G : (\rho, \boldsymbol{u}, p) \mapsto F(0, \rho, \boldsymbol{u}, p)$. In order to show the existence of a solution to $G(\rho, \boldsymbol{u}, p) = 0_V$ we make use of the inverse function theorem. The function G is differentiable on $\mathcal{O}$, and its Jacobian matrix is given by :

$$\text{Jac } G(\rho, \boldsymbol{u}, p) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\delta t} Id_{\mathbb{R}^{N_\mathcal{M} \times N_\mathcal{M}}} & 0 \\ \hline A & \\ & S(\boldsymbol{u}, p) \\ 0 & \end{array}\right)$$

where A the matrix in $\mathbb{R}^{N_\mathcal{E} \times N_\mathcal{M}}$ associated to the differentiation of $(\rho_{D_\sigma} u_\sigma / \delta t)_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}}$ and of the viscous term (containing $\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}$) with respect to $(\rho_K)_{K \in \mathcal{M}}$. The matrix $S(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbb{R}^{(N_\mathcal{E}+N_\mathcal{M}) \times (N_\mathcal{E}+N_\mathcal{M})}$ is the Jacobian matrix associated to the MAC discretization of the following Stokes problem with a space-variable density and viscosity :

Find $(\boldsymbol{u}, p)$ such that $p \in L^2_0(\Omega)$ and

$$\begin{array}{lll} \rho(\boldsymbol{x})\partial_t \boldsymbol{u} - \text{div}(\mu(\boldsymbol{x}) D(\boldsymbol{u})) + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{in} & \Omega \\ \text{div } \boldsymbol{u} = 0 & \text{in} & \Omega \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{on} & \partial\Omega \end{array}$$

where $\rho(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x}) \in L^\infty(\Omega)$ are approximated by ρ_{D_σ} and $(\mu_\epsilon)_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D\sigma)}$ on each dual cell D_σ.

Since $\lambda = 0$ we have $\rho(\boldsymbol{x}) = \rho^n(\boldsymbol{x})$ and $\mu(\boldsymbol{x}) = \mu^n(\boldsymbol{x})$. Hence we are dealing with given, and strictly positive, real quantities. Therefore $S(\boldsymbol{u}, p)$ is invertible [Bla05] and so is Jac $G(\rho, \boldsymbol{u}, p)$ by being a triangular block matrix. This implies that the topological degree of $F(0, \rho, \boldsymbol{u}, p)$ is non-zero and by the homotopy invariance, there exists at least one solution $(\rho, \boldsymbol{u}, p)$ to the equation $F(1, \rho, \boldsymbol{u}, p) = 0$, ie to the scheme (3.5). □

3.6 Convergence of the scheme

From now on let us consider a sequence of time steps $(\delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ and a sequence of MAC grids $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}} = (\mathcal{M}_m, \mathcal{E}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ – in the sense of Definition 2.3.1. The sequence $(\delta t_m, \mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ will be assumed to satisfy $(\delta t_m, h_{\mathcal{M}_m}) \to (0, 0)$ for $m \to \infty$ in order to return to a continuous formulation of the domain $[0, T] \times \Omega$. Therefore, for every $m \in \mathbb{N}$, we consider the corresponding discrete scheme (3.5)

for $\delta t = \delta t_m$ and $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$.

So as to establish the convergence of the weak discrete scheme as $(\delta t_m, h_{\mathcal{M}_m}) \to (0,0)$, we follow the steps from [GHLM18] – for the nonlinear convection term – and [LS18] – for the mass balance equation – by passing to the limit separately in the mass balance and momentum balance equations. This final step requires the convergence of the discrete solutions $(\rho_m, \boldsymbol{u}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ as $m \to \infty$.

The strong convergence of the sequence of discrete velocities is obtained using a compactness result from Annex B. The latter may be applied if an estimate on the time translates of the velocity holds, which we prove in the next subsection.

3.6.1 Estimate on the time translates of the velocity

In order to apply Theorem B.4 for the compactness in L^2, we need to work around the term $\partial_t(\rho\boldsymbol{u})$ from (3.5b) to derive a bound on the time translates of the velocity.

LEMMA 3.6.1 Let $(\rho, \boldsymbol{u}, p)$ be a discrete solution of (3.5). Then, for a given τ verifying $0 < \tau < T$ we have the following estimate on the time translates of $\boldsymbol{u}$,

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega |\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}+\tau) - \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \leq C\sqrt{\tau + \delta t} \tag{3.30}$$

where $C > 0$ only depends on T, $\boldsymbol{f}$, ρ_0, μ_0 and $\eta_{\mathcal{M}}$.

Proof. We proceed by analogy with the continuous case, e.g. [BF13] to yield bounds on the time translates of the velocity. Let $\tau > 0$ and $(\boldsymbol{u}, \rho) \in X_{\mathcal{E},\delta t} \times Y_{\mathcal{M},\delta t}$. We note $\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(t+\tau,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) \in X_{\mathcal{E},\delta t}$. In the continuous case, the estimate (3.30) is obtained by bounding the term

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (\rho(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}+\tau) - \rho(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t$$

However in the context of the MAC scheme, the components of $\boldsymbol{u}$ are piecewise constant on different meshes. Therefore we first deal with components separately.
Let n_τ be such that $T - \tau \in (t^{N-n_\tau-1}, t^{N-n_\tau}]$. For any $t \in (0, T-\tau)$ we associate (n,l) verifying $n = \lceil \frac{t}{\delta t} \rceil$ and $n + l = \lceil \frac{t+\tau}{\delta t} \rceil$. Thus we have $t \in (t^{n-1}, t^n]$, $t + \tau \in (t^{n+l-1}, t^{n+l}]$ and we may use : $\rho(t)u(t) = \rho^n u^n$ and $\rho(t+\tau)u(t+\tau) = \rho^{n+l}u^{n+l}$. Writing $\rho(t,\boldsymbol{x})u_i(t,\boldsymbol{x}+\tau) - \rho(t,\boldsymbol{x})u_i(t,\boldsymbol{x}) = \rho(t,\boldsymbol{x}+\tau)u_i(t,\boldsymbol{x}+\tau) - \rho(t,\boldsymbol{x})u_i(t,\boldsymbol{x}) - (\rho(t,\boldsymbol{x}+\tau) - \rho(t,\boldsymbol{x}))u_i(t,\boldsymbol{x}+\tau)$, we define $A_1^{(i)}$ and $A_2^{(i)}$ as,

$$A_1^{(i)}(t) = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}} |D_\sigma| \left(\rho_{D_\sigma}^{n+l} u_\sigma^{n+l} - \rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n\right) w_\sigma^n$$
$$A_2^{(i)}(t) = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}} |D_\sigma| \left(\rho_{D_\sigma}^{n} - \rho_{D_\sigma}^{n+l}\right) u_\sigma^{n+l} w_\sigma^n$$

with $w_\sigma^n = u_\sigma^{n+l} - u_\sigma^n$.
Therefore, we aim to bound the term,

$$\sum_{i=1}^d \int_0^{T-\tau} A_1^{(i)}(t) + A_2^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t$$

First, let us focus on $A_1^{(i)}(t)$. In order to invoke the momentum equation we need to retrieve an expression with consecutive timesteps. Hence we reformulate $A_1^{(i)}(t)$ as,

$$A_1^{(i)}(t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} |D_\sigma| w_\sigma^n \sum_{k=n}^{n+l-1} \left(\rho_{D_\sigma}^{k+1} u_\sigma^{k+1} - \rho_{D_\sigma}^k u_\sigma^k \right)$$

From the momentum equation (3.12b), we define $(A_{1j}^{(i)})_j$, $j = 1, \dots, 4$ so that $A_1^{(i)}(t) = A_{11}^{(i)}(t) + A_{12}^{(i)}(t) + A_{13}^{(i)}(t) + A_{14}^{(i)}(t)$ with

$$\begin{aligned}
A_{11}^{(i)}(t) &= \sum_{k=n}^{n+l-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \delta t |D_\sigma| f_\sigma^{(k+1)} w_\sigma^n \\
A_{12}^{(i)}(t) &= - \sum_{k=n}^{n+l-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \delta t |D_\sigma| (\partial_i p)_\sigma^{k+1} w_\sigma^n \\
A_{13}^{(i)}(t) &= \sum_{k=n}^{n+l-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \delta t |D_\sigma| \text{div}_{\mathcal{E}}(\mu \mathbf{D}(\boldsymbol{u})))_\sigma^{k+1} w_\sigma^n \\
A_{14}^{(i)}(t) &= - \sum_{k=n}^{n+l-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \delta t \sum_{\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{k+1} u_\epsilon^{k+1} w_\sigma^n
\end{aligned}$$

From the definitions of (n, l) we note that $\delta t l \leq \tau + \delta t$. We deal with the term $\int_0^{T-\tau} A_{11}^{(i)}(t)\, \mathrm{d}t$ by using the Cauchy-Schwarz inequality along with the inequality on $\delta t l$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-\tau} A_{11}^{(i)}(t)\, \mathrm{d}t &\leq \sum_{n=0}^{N-n_\tau} (\delta t)^2 \sum_{k=n}^{n+l-1} \|f_i^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)} \|w_i^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-n_\tau} \delta t \|w_i^n\|_{L^2(\Omega)} \sum_{k=0}^{N-1} \delta t \mathbb{1}_{[t^n, t^{n+l-1}]}(t^k) \|f_i^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-n_\tau} \delta t \|w_i^n\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\delta t l} \|f_i\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(T) \sqrt{\tau + \delta t}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Owing to the fact that $u_i \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ (by Lemma 3.5.5). The term $\sum_{i=1}^d A_{12}^{(i)}(t)$ vanishes thanks to the discrete duality property (2.27) and to $\boldsymbol{u}$ being discrete-divergence-free (3.12c). For the diffusive term we apply (2.50) followed by the Cauchy-Schwarz inequality. We then use (2.53) to retrieve an expression using $\nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ only,

$$\int_\Omega \text{div}_{\mathcal{E}}(\mu \mathbf{D}(\boldsymbol{u})))^{k+1} w^n \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \mu_{\max} \|u^{(k+1)}\|_{1,\mathcal{E},0} \| \, \|w^n\|_{1,\mathcal{E},0},$$

Hence in order to deal with $\int_0^{T-\tau} A_{13}^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t$ we proceed as in $A_{11}^{(i)}$ to obtain,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d}\int_0^{T-\tau} A_{13}^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t &\leq \mu_{\max}\sum_{n=0}^{N-n_\tau}\sum_{k=n}^{n+l-1} 2\delta t^2\|u^{(k+1)}\|_{1,\mathcal{E},0}\|w^n\|_{1,\mathcal{E},0}\\ &\leq \mu_{\max}\sum_{n=0}^{N-n_\tau}\delta t\|w^n\|_{1,\mathcal{E},0}\sum_{k=0}^{N-1}\delta t\mathbb{1}_{[t^n,t^{n+l-1}]}(t^k)\|u^{(k+1)}\|_{1,\mathcal{E},0}\\ &\leq C(T,\mu_0)\sqrt{\tau+\delta t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0})} \leq C(T)\sqrt{\tau+\delta t}\end{aligned} \tag{3.32}$$

using $\boldsymbol{u}\in L^1(0,T;\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0})$. The term $A_{14}(t)$ being associated to $b_{\mathcal{E}}((\rho\boldsymbol{u})^{k+1},\boldsymbol{u}^{k+1},\boldsymbol{w}^n)$, we resort to Lemma 3.4.7 and (3.18) to yield,

$$A_{14}(t)=\sum_{i=1}^{d}A_{14}^{(i)}(t)\leq\rho_{\max}\sum_{k=n}^{n+l-1}\delta t\|\boldsymbol{u}^{(k+1)}\|_{1,\mathcal{E},0}^2\|\boldsymbol{w}^n\|_{1,\mathcal{E},0}$$

Therefore, by the Cauchy-Schwarz and $\delta t l\leq\tau+\delta t$ inequalities combined with $\mathbb{1}_{[t^n,t^{n+l-1}]}(t^{k+1})=\mathbb{1}_{[t^{k-l+1},t^{k+1}]}(t^n)$, we bound $\int_0^{T-\tau}A_{14}(t)\,\mathrm{d}t$ as below,

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\tau}A_{14}(t)\,\mathrm{d}t &\leq \rho_{\max}\sum_{n=0}^{N-n_\tau}\sum_{k=n}^{n+l-1}\delta t^2\|\boldsymbol{u}^{(k+1)}\|_{1,\mathcal{E},0}^2\|\boldsymbol{w}^n\|_{1,\mathcal{E},0}\\ &\leq \rho_{\max}\Big(\delta t\sum_{k=0}^{N-1}\|\boldsymbol{u}^{(k+1)}\|_{1,\mathcal{E},0}^2\Big)\Big(\delta t\sum_{n=0}^{N-n_\tau}\mathbb{1}_{[t^n,t^{n+l-1}]}(t^k)\|\boldsymbol{w}^n\|_{1,\mathcal{E},0}\Big)\\ &\leq C(T,\rho_0)\sqrt{\tau+\delta t}\end{aligned} \tag{3.33}$$

Similarly to $A_1^{(i)}$, we may write the term $A_2^{(i)}$ as,

$$A_2^{(i)}(t)=\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}}|D_\sigma|u_\sigma^{n+l}w_\sigma^n\sum_{k=n}^{n+l-1}\left(\rho_{D_\sigma}^n-\rho_{D_\sigma}^{n+1}\right)$$

Thanks to the discrete mass equation on the dual cells (2.36) and to the discrete duality formula (2.27) we have :

$$\begin{aligned}A_2^{(i)}(t) &= \sum_{k=n}^{n+l-1}\delta t\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}}|D_\sigma|\mathrm{div}_{D_\sigma}(\rho^{k+1}\boldsymbol{u}^{k+1})u_\sigma^{n+l}w_\sigma^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= -\sum_{k=n}^{n+l-1}\delta t\int_\Omega(\rho^{k+1}\boldsymbol{u}^{k+1})_{\mathcal{E}^{(i)}}\cdot\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(u_i^{n+l}w_i^n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

Now thanks to Hölder's inequality, we have :

$$A_2^{(i)}(t)\leq\rho_{\max}\delta t\sum_{k=n}^{n+l-1}\|\boldsymbol{u}^{(k+1)}\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(u_i^{n+l}w_i^n)\|_{(L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^d}$$

We apply the Cauchy-Schwarz inequality then Hölder's inequality with $p = 5$ for the gradient term. This yields,

$$\begin{aligned} A_2^{(i)}(t) &\leq \rho_{\max} \|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \sqrt{\delta t + \tau} \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(u_i^{n+l} w_i^n)\|_{(L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^d} \\ &\leq \rho_{\max} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \sqrt{\delta t + \tau} \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(u_i^{n+l} w_i^n)\|_{(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d} \end{aligned}$$

Let us focus on the gradient term norm,

$$\|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(u_i^{n+l} w_i^n)\|_{(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d} \leq \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(u_i^{n+l}) w_i^n\|_{(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d} + \|u_i^{n+l} \nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(w_i^n)\|_{(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d}$$

By Hölder's inequality with $p = 4$ we have for both terms,

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(u_i^{n+l}) w_i^n\|_{(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d} &\leq \|w_i^n\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}} u_i^{n+l}\|_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\leq \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}} u_i^{n+l}\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|w_i^n\|^2_{L^6(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_i^{n+l} \nabla_{\mathcal{E}^{(i)}}(w_i^n)\|_{(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d} &\leq \|u_i^{n+l}\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}} w_i^n\|_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\leq \|\nabla_{\mathcal{E}^{(i)}} w_i^n\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|u_i^{n+l}\|^2_{L^6(\Omega)} \end{aligned}$$

Hence we were able to retrieve the norms in $H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ of u_i^{n+l} and w^n. Owing to the injection of $H_0^1(\Omega)$ into $L^6(\Omega)$ the estimates are sufficient. We still require to perform the integration over $(0, T - \tau)$ on $A_2^{(i)}(t)$,

$$\int_0^{T-\tau} A_2^{(i)}(t)\, \mathrm{d}t \leq C(\eta_{\mathcal{M}}, \rho_0) \sqrt{\delta t + \tau} \Big(\|u_i\|^2_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} + \|u_i\|^2_{L^2(0,T;H_{\mathcal{E}^{(i)},0})} \Big)$$

Summing over $i = 1, \ldots, d$ yields the bound on $A_2(t)$:

$$\int_0^{T-\tau} A_2(t)\, \mathrm{d}t \leq C(\eta_{\mathcal{M}}, \rho_0) \sqrt{\delta t + \tau} \tag{3.34}$$

We may now conclude with the bound on $\sum_{i=1}^d \int_0^{T-\tau} (A_1^{(i)}(t) + A_2^{(i)}(t))\, \mathrm{d}t$ by summing (3.31-i), (3.32-i) over $i = 1, \ldots, d$ with (3.33) and (3.34). □

3.6.2 Convergence of the discrete scheme as $\delta t, h_{\mathcal{M}} \to 0$.

Before introducing the main theorem for the convergence of the discrete scheme, we state a few results required for the passage to the limit in the weak discrete equations : namely the consistency of the discrete derivatives and the convergence of the reconstructions. The former will assure the accuracy of the approximation of the discrete derivatives, and using Taylor expansions we will be able to recover the order of the truncation errors. The latter will allow us to control the convergence of convex combinations of the quantities $(\rho_m, \boldsymbol{u}_m)$ defined on $\mathcal{D}_m$.

LEMMA 3.6.2 – Consistency of the discrete derivatives. Let $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ be an admissible MAC mesh and $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \Omega)$. For some $n \in \{0, N\}$ we note $\varphi_\mathcal{M}^n = \Pi_\mathcal{M} \varphi(t^n, \cdot)$ and $\varphi_{\mathcal{E}^{(i)}}^n = \Pi_{\mathcal{E}^{(i)}} \varphi(t^n, \cdot)$ the projections of φ given at t^n on $\mathcal{M}$ and $\mathcal{E}^{(i)}$ respectively. Let

$$\varphi_\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_\mathcal{M}^{n+1} \mathbb{1}_{(t^n, t^{n+1}]} \quad \text{and} \quad \varphi_{\mathcal{E}^{(i)}} = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_{\mathcal{E}^{(i)}}^{n+1} \mathbb{1}_{(t^n, t^{n+1}]}$$

Then, for all $p \in [1, \infty]$,

$$\begin{aligned}
\|\eth_t \varphi_\mathcal{M} - \partial_t \varphi\|_{L^p([0,T]\times\Omega)} \quad &+ \quad \|\nabla_\mathcal{E} \varphi_\mathcal{M} - \nabla \varphi\|_{L^p([0,T]\times\Omega)^d} \quad \leq C_1(\delta t + h_\mathcal{M}) \\
\|\eth_t \varphi_{\mathcal{E}^{(i)}} - \partial_t \varphi\|_{L^p([0,T]\times\Omega)} \quad &+ \quad \|\nabla_{\widetilde{\mathcal{E}}} \varphi_{\mathcal{E}^{(i)}} - \nabla \varphi\|_{L^p([0,T]\times\Omega)^d} \quad \leq C_1(\delta t + h_\mathcal{M}) \\
\|\varphi_\mathcal{M}^0 - \varphi(0,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \quad &+ \quad \|\varphi_\mathcal{E}^0 - \varphi(0,\cdot)\|_{L^p(\Omega)^d} \quad \leq C_2 h_\mathcal{M}
\end{aligned}$$

with C_1 and C_2 depending only on φ, Ω, T, p.

Proof. Thanks to the regularity of φ, we may use Taylor's inequalities retrieve the desired bounds. Indeed,

$$\|\eth_t \varphi_\mathcal{M} - \partial_t \varphi\|_{L^p}^p = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \left| \frac{\varphi_K^{n+1} - \varphi_K^n}{\delta t} - \partial_t \varphi(t, \boldsymbol{x}) \right|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$

Then there exists C_1 depending only on $\partial_{tt}\varphi$ such that,

$$\|\eth_t \varphi_\mathcal{M} - \partial_t \varphi\|_{L^p}^p = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K |\partial_t \varphi(t^n, \boldsymbol{x}_K) - \partial_t \varphi(t, \boldsymbol{x}) + C_1 \delta t|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$

Using a Taylor inequality once again yields the constant C_2 depending only on $\partial_{tt}\varphi$ and $\partial_x \partial_t \varphi$ and it follows that,

$$\|\eth_t \varphi_\mathcal{M} - \partial_t \varphi\|_{L^p}^p = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K |C_2(\delta t + h_\mathcal{M}) + C_1 \delta t|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$

which concludes the bound on $\|\eth_t \varphi_\mathcal{M} - \partial_t \varphi\|_{L^p([0,T]\times\Omega)}$. By a similar process and thanks to the regularity of φ, the derivation of the remaining bounds is straightforward. □

LEMMA 3.6.3 – Convergence of reconstructions in L^p, $p \in [1, \infty)$. Let $p \in [1, \infty)$ and a sequence $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ be such that for all $m \in \mathbb{N}$, $q_m \in L_{\mathcal{M}_m}$. If $q_m \longrightarrow \bar{q}$ as $m \to \infty$ in $L^p(\Omega)$ then,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} q_m \to \bar{q} \quad \text{as} \quad m \to \infty \quad \text{in} \quad L^p(\Omega)$$

Similarly, for a sequence of velocities $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ verifying $v_m \in H_{\mathcal{E}_m^{(i)}}$ for all $m \in \mathbb{N}$ and v_m strongly converging to $\bar{v}$ as $m \to \infty$ in $L^p(\Omega)$ then,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}_m^{(i)}}^{\mathcal{M}_m} v_m \to \bar{v} \quad \text{as} \quad m \to \infty \quad \text{in} \quad L^p(\Omega)$$

$$\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}_m}^{(i,j)} v_m \to \bar{v} \quad \text{as} \quad m \to \infty \quad \text{in} \quad L^p(\Omega)$$

Proof. The proofs being similar, let us show the first convergence result only. Let $\varepsilon > 0$. Thanks to the density of $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, let $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ be the function verifying $\|\varphi - \bar{q}\|_{L^p} < \varepsilon$.

Thus using $\Pi_{\mathcal{M}_m}\bar{q}$ and $\Pi_{\mathcal{M}_m}\varphi$, respectively the projection of $\bar{q}$ and φ on $L_{\mathcal{M}_m}$ and noting that $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} q_m = (\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m}) q_m$ yields,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} q_m - \bar{q}\|_{L^p} \leq \quad & \|(\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m}) q_m - (\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m})\bar{q}\|_{L^p} \\ & + \|(\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m})\bar{q} - (\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m})\varphi\|_{L^p} \\ & + \|(\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m})\varphi - \varphi\|_{L^p} + \|\varphi - \bar{q}\|_{L^p}\end{aligned}$$

Using (2.58) and Lemma 3.4.3, we conclude that the second and last terms in the right handside are bounded by ε. Moreover, from the strong convergence of $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ we may find M_1 such that for all $m \geq M_1$ we have $\|q_m - \bar{q}\|_{L^p} < \varepsilon$.

From the regularity of φ we resort to a Taylor's inequality to obtain a constant C depending only on p, φ, Ω and T such that

$$\|(\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m})\varphi - \varphi\|_{L^p} \leq C h_{\mathcal{M}_m}$$

Then there exists M_2 verifying $\|(\mathcal{R}_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} \circ \Pi_{\mathcal{M}_m})\varphi - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$ for all $m \geq M_2$. Taking $M = \max(M_1, M_2)$, we can then conclude with the strong convergence of $(R_{\mathcal{M}_m}^{\mathcal{E}_m^{(i)}} q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ towards $\bar{q}$ in $L^p([0,T]\times\Omega)$. □

REMARK 3.6.4 Therefore, given the strong convergence of a discrete solution to a limit in $L^p([0,T]\times\Omega)$, with $1 \leq p < \infty$, we can conclude with the strong convergence of its reconstruction towards this same limit. This is achieved using the time piecewise constant projections of the limit (and φ) as in (2.55) – (2.56).

THEOREM 3.6.5 – Convergence of the discrete scheme. Let $(\delta t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ be a sequence of time steps and $(\mathcal{D}_m)_{m\in\mathbb{N}} = (\mathcal{M}_m, \mathcal{E}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ a sequence of MAC grids (in the sense of Definition 2.3.1) such that $\delta t_m \to 0$ and $h_{\mathcal{M}_m} \to 0$ as $m \to +\infty$. We assume that there exists $\eta > 0$ controlling the regularity of every MAC mesh in the sequence : $\eta_{\mathcal{M}_m} \leq \eta$ for any $m \in \mathbb{N}$ – with $\eta_{\mathcal{M}_m}$ defined by (2.7). Let $(\rho_m, \boldsymbol{u}_m)$ be a solution to (3.5) for $\delta t = \delta t_m$ and $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$. Then there exists $\bar{\rho}$ with $\rho_{\min} \leq \bar{\rho} \leq \rho_{\max}$ and $\bar{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;\boldsymbol{E}(\Omega))$ verifying up to a subsequence :

- the sequence $(\boldsymbol{u}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converges to $\bar{\boldsymbol{u}}$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)$,
- the sequence $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converges to $\bar{\rho}$ in $\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$,
- $(\bar{\rho}, \bar{\boldsymbol{u}})$ is a solution to the weak formulation (3.3) and (3.4).

Step 1- Weak convergence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$ and maximum principle.

Let us consider the sequence $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ verifying (3.5) for $\delta t = \delta t_m$ and $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$. Thanks to the bound (3.18), there exists a subsequence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$, denoted once again $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$, which converges $\star$-weakly to some function $\bar{\rho}$ in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$, i.e. :

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \rho_m(t,\boldsymbol{x})\varphi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \bar{\rho}(t,\boldsymbol{x})\varphi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \quad \forall \varphi \in L^1((0,T)\times\Omega) \quad (3.35)$$

Let B be a borelian set of $(0,T)\times\Omega$ so that we can take $\varphi(t,\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_B(t,\boldsymbol{x})$ in (3.35). From the bounds on $\rho_m(t,\boldsymbol{x})$ given by (3.18), we have the non-negativity of the integrals :

$$\int_0^T\int_\Omega (\rho_m(t,\boldsymbol{x})-\rho_{\min})\mathbb{1}_B(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{and}\quad \int_0^T\int_\Omega (\rho_{\max}-\rho_m(t,\boldsymbol{x}))\mathbb{1}_B(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\quad \forall m\in\mathbb{N}$$

Passing to the limit as $m\to\infty$ yields,

$$\int_0^T\int_\Omega (\bar\rho(t,\boldsymbol{x})-\rho_{\min})\mathbb{1}_B(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\geq 0\quad\text{and}\quad \int_0^T\int_\Omega (\rho_{\max}-\bar\rho(t,\boldsymbol{x}))\mathbb{1}_B(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\geq 0$$

which is equivalent to $\rho_{\min}\leq\bar\rho(t,\boldsymbol{x})\leq\rho_{\max}$ a.e. in $(0,T)\times\Omega$.

Step 2- Compactness of $(\boldsymbol{u}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\boldsymbol{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)}$

Let us apply the time compactness Theorem B.4 for $p=2$, with the Banach space $B=(L^2(\Omega))^d$ and the sequence of Banach spaces $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ where $X_m=\mathbf{H}_{\mathcal{E}_m,0}$, $m\in\mathbb{N}$ is endowed with the norm defined in (2.41). By Lemma B.1 and Theorem B.2 we have that any bounded sequence in $H_{\mathcal{E}_m^{(i)},0}$ is relatively compact in $L^2(\Omega)$ for all $i=1,..,d$. Hence $H_{\mathcal{E}_m^{(i)},0}$ endowed with the i–th component norm (2.41) is compactly embedded in $L^2(\Omega)$ in the sense of Definition B.3. Finally $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ is compactly embedded in $(L^2(\Omega))^d$.

Let us consider the sequence $(\boldsymbol{u}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ verifying (3.5) for $\delta t=\delta t_m$ and $\mathcal{D}=\mathcal{D}_m$. Thanks to the first bound from Lemma 3.5.5 we have that $(\|\boldsymbol{u}_m\|_{L^1(0,T;\mathbf{H}_{\mathcal{E}_m,0})})_{m\in\mathbb{N}}$ is bounded. Furthermore, using the discrete Poincaré inequality on the first bound yields that $(\boldsymbol{u}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ is bounded in $L^2(0,T;(L^2(\Omega)^d))$. Let us show that the remaining condition is satisfied : that is, demonstrating the existence of ζ with $\zeta(\tau)\to 0$ as $\tau\to 0$ for all $m\in\mathbb{N}$ such that,

$$\int_0^{T-\tau}\|\boldsymbol{u}_m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{u}_m(t,\cdot)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\leq\zeta(\tau)\qquad\forall\tau\in(0,T)\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

First, we use the following upper bound for the expression in (3.30) : $C\sqrt{\tau+\delta t}\leq C(\tau^{\frac12}+\delta t^{\frac12})$, with C independent of m thanks to the assumption $\eta_{\mathcal{M}_m}\leq\eta$.
Let $\varepsilon>0$. Then we may find τ_1 and $M\in\mathbb{N}$ so that we have $\tau_1^{\frac12}\leq\varepsilon$ and $\delta t_m^{\frac12}\leq\varepsilon$ for all $m\geq M$. Thus, by Lemma 3.6.1, we have for all $m\geq M$,

$$\int_0^{T-\tau}\|\boldsymbol{u}_m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{u}_m(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}^2}^2\,\mathrm{d}t\leq C_1\varepsilon\qquad\forall\tau\in(0,\tau_1)$$

For $m<M$, we introduce $\varphi^m\in C([0,T]\times\Omega)$ verifying $\|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{\varphi}^m\|_{L^2((0,T),(L^2(\Omega))^d)}<\varepsilon$. Therefore

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\tau}\|\boldsymbol{u}_m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{u}_m(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}^2}^2\,\mathrm{d}t\leq 3\Big[&\int_0^{T-\tau}\|\boldsymbol{u}_m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{\varphi}^m(t+\tau,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}^2}^2\,\mathrm{d}t\\ +&\int_0^{T-\tau}\|\boldsymbol{\varphi}^m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{\varphi}^m(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}^2}^2\,\mathrm{d}t\\ +&\int_0^{T-\tau}\|\boldsymbol{\varphi}^m(t,\cdot)-\boldsymbol{u}_m(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}^2}^2\,\mathrm{d}t\Big]\end{aligned}$$

which yields

$$\int_0^{T-\tau} \|\boldsymbol{u}_m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{u}_m(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t \leq 6\varepsilon + 3\int_0^{T-\tau} \|\boldsymbol{\varphi}^m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{\varphi}^m(t,\cdot)\|_{L^2}^2$$

with $\int_0^{T-\tau} \|\boldsymbol{\varphi}^m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{\varphi}^m(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \to 0$ as $\tau \to 0$. Thus, we may find τ^m such that $\int_0^{T-\tau} \|\boldsymbol{u}_m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{u}_m(t,\cdot)\|_{L^2}^2 < 9\varepsilon$ for $\tau \in (0,\tau^m)$.

Let us define $\overline{\tau} = \min(\tau_1, \min_{m\leq M} \tau^m)$ and $C = \max(C_1, 9)$. It follows that $\forall \tau \in (0,\overline{\tau})$,

$$\int_0^{T-\tau} \|\boldsymbol{u}_m(t+\tau,\cdot)-\boldsymbol{u}_m(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t \leq C\varepsilon \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{N}$$

Hence, the third condition of Theorem B.4 is satisfied and we can conclude with the existence of $\bar{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)$ such that, up to a subsequence,

$$\boldsymbol{u}_m \to \bar{\boldsymbol{u}} \text{ in } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^d\right) \text{ as } m \to +\infty.$$

Step 3- Passing to the limit as $\delta t, h_{\mathcal{M}} \to 0$ in the mass balance equation

For this step, we prove a weak Lax-Wendroff consistency for the discrete mass balance equation : by passing to the limit as $\delta t, h_{\mathcal{M}} \to 0$ in (3.10a), we aim to show that the limit $(\bar{\rho}, \bar{\boldsymbol{u}})$ obtained in the previous steps satisfies the weak mass balance equation (3.3).

Let $\psi \in C_c^\infty([0,T)\times\Omega)$ so that we take $\psi_m^n = \Pi_{\mathcal{M}_m}\psi(t_n,\cdot) \in L_{\mathcal{M}}$ as a test function in (3.10a). Multiplying by δt_m and summing over $n = \{0,\dots,N_m-1\}$ (with $N_m\delta t_m = T$) yields :

$$\sum_{n=0}^{N_m-1} \delta t_m \int_\Omega \eth_t \rho_{\mathcal{M}_m}^{n+1}\, \psi_m^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{n=0}^{N_m-1} \delta t_m \int_\Omega \mathrm{div}_{\mathcal{M}_m}(\rho\boldsymbol{u})_m^{n+1}\, \psi_m^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = T_{1,m} + T_{2,m} = 0$$

by defining the first and second terms as $T_{1,m}$ and $T_{2,m}$ respectively. Let us use the definition of each operator and drop the subscript m to reduce the clutter of notations. It comes down to studying the convergence of each of the following terms :

$$T_{1,m} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} |K|(\rho_K^{n+1}-\rho_K^n)\psi_K^n$$

$$T_{2,m} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K\in\mathcal{M}} \psi_K^n \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1}$$

We deal with $T_{1,m}$ by rearranging the sum so as to perform a discrete integration by parts for the time variable :

$$T_{1,m} = -\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K\in\mathcal{M}} |K|\rho_K^{n+1}(\psi_K^{n+1}-\psi_K^n) - \sum_{K\in\mathcal{M}} |K|\rho_K^{(0)}\psi_K^{(0)}$$

since $\psi_K^N = 0$ thanks to the compact support of ψ. Let us note $\psi_m = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_m^{n+1} \mathbb{1}_{]t^n,t^{n+1}]}$. This is equivalent to,

$$T_{1,m} = -\int_0^T \int_\Omega \rho_m(t,\boldsymbol{x})\eth_t\psi_m(t,\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \rho_m^{(0)}(\boldsymbol{x})\psi_m(0,\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

The weak-$\star$ convergence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$ and the strong convergence of $(\eth_t\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ towards $\partial_t\psi$ in $L^1((0,T)\times\Omega)$ yields the convergence of the first term in $T_{1,m}$. The second term is dealt with in the same way : from the initialization of the scheme and the assumed regularity of the initial data $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ and the strong convergence of $(\psi_m(0,\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\Omega)$. Hence we have,

$$\lim_{m\to\infty} T_{1,m} = -\int_0^T \int_\Omega \bar{\rho}(t,\boldsymbol{x})\partial_t\psi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \rho_0(\boldsymbol{x})\psi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Let us now focus on $T_{2,m}$. Using the expression of the mass flux $F_{K,\sigma}$ and the boundary conditions on the velocity, we reorder the sum in $T_{2,m}$ so as to perform a discrete integration by parts for the space variable :

$$T_{2,m} = -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}} |D_\sigma|\rho_\sigma^{n+1}u_{K,\sigma}^{n+1}\frac{|\sigma|}{|D_\sigma|}(\psi_L^n-\psi_K^n),$$

The terms ρ_σ^{n+1} being computed using the upwind scheme, we decompose $T_{2,m}$ into two sums : $T_{2,m} = \mathcal{T}_{2,m} + \mathcal{R}_{2,m}$ with

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,m} = &\quad -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}} |D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^{n+1}u_\sigma^{n+1}\frac{|\sigma|}{|D_\sigma|}(\psi_L^n-\psi_K^n)(\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_i)\\
\mathcal{R}_{2,m} = &\quad -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}} |D_\sigma|(\rho_\sigma^{n+1}-\rho_{D_\sigma}^{n+1})u_{K,\sigma}^{n+1}\frac{|\sigma|}{|D_\sigma|}(\psi_L^n-\psi_K^n)
\end{aligned}$$

by recalling that $|D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^{n+1} = |D_{K,\sigma}|\rho_K^{n+1} + |D_{L,\sigma}|\rho_L^{n+1}$. In this form however, the term $\mathcal{T}_{2,m}$ reveals the convex combinations of the density $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}}\rho_m$ for $i = 1,..,d$ and we have,

$$\mathcal{T}_{2,m} = -\sum_{i=1}^{d}\int_0^T\int_\Omega \mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}}(\rho_m(t,\boldsymbol{x}))u_{i,m}(t,\boldsymbol{x})\eth_i\psi_m(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$

Since the sequence $(\rho_m)_m$ is only $\star$–weakly convergent, we can neither conclude about the convergence of $(R_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}}\rho_m)_m$ yet nor pass to the limit in $\mathcal{T}_{2,m}$. Hence, we must reformulate the sum so as to iterate over elements of $\mathcal{M}$. For every $i = 1,..,d$, let us note $K = [\sigma\sigma']$ for $(\sigma,\sigma') \in (\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}^{(i)})^2$, with σ,σ' thus being the two faces of the cell K normal to $\boldsymbol{e}_i$. Notice that we may include the elements of $\mathcal{E}_{\mathrm{ext}}^{(i)}$ owing

to the homogeneous boundary conditions for the velocity. Therefore, we have,

$$
\begin{aligned}
T_{2,m} &= -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}} |D_\sigma|\rho_{D_\sigma}u_\sigma^{n+1}(\eth\psi^n)_\sigma \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{K\in\mathcal{M}\\ K=[\sigma\sigma']}} \Big(|D_{K,\sigma}|\rho_K u_\sigma^{n+1}(\eth\psi^n)_\sigma + |D_{K,\sigma'}|\rho_K u_{\sigma'}^{n+1}(\eth\psi^n)_{\sigma'}\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{K\in\mathcal{M}\\ K=[\sigma\sigma']}} |K|\rho_K\Big(\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}u_\sigma^{n+1}(\eth\psi^n)_\sigma + \frac{|D_{K,\sigma'}|}{|K|}u_{\sigma'}^{n+1}(\eth\psi^n)_{\sigma'}\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{K\in\mathcal{M}\\ K=[\sigma\sigma']}} |K|\rho_K\frac{1}{2}\Big((u_\sigma^{n+1}(\eth\psi^n)_\sigma + u_{\sigma'}^{n+1}(\eth\psi^n)_{\sigma'}\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t \sum_{\substack{K\in\mathcal{M}\\ K=[\sigma\sigma']}} |K|\rho_K\mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}}(u_i^{n+1}\eth_i\psi^n)_\sigma
\end{aligned}
$$

Finally we have,

$$
T_{2,m} = -\sum_{i=1}^{d}\int_0^T\int_\Omega \rho_m(t,\boldsymbol{x})\mathcal{R}_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}}(u_{i,m}(t,\boldsymbol{x})\eth_i\psi_m(t,\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t
$$

The strong convergence of $(u_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$ and $(\eth_i\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ yields the strong convergence of $(u_{i,m}\eth_i\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$. By Lemma 3.6.3, we have :

$$
R_{\mathcal{E}^{(i)}}^{\mathcal{M}}\big(u_{i,m}\eth_i\psi_m\big) \longrightarrow \bar{\boldsymbol{u}}\eth_i\psi \quad \text{in} \quad L^2((0,T)\times\Omega) \quad \text{as} \quad m\to\infty
$$

Hence, combined with the weak convergence of $\rho_m \rightharpoonup \bar{\rho}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ we may pass to the limit in $\mathcal{T}_{2,m}$ to get,

$$
\lim_{m\to\infty}\mathcal{T}_{2,m} = -\int_0^T\int_\Omega \bar{\rho}(t,\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla\psi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t
$$

We are left to show that the remainder $\mathcal{R}_{2,m}$ tends to 0 as $m\to\infty$. Owing to the upwind choice (2.22) for ρ_σ we have :

$$
|D_\sigma|(\rho_\sigma^{n+1}-\rho_{D_\sigma}^{n+1}) \le \max\left(|D_{K\sigma}|,|D_{L,\sigma}|\right)|\rho_K^{n+1}-\rho_L^{n+1}|
$$

Therefore, $\mathcal{R}_{2,m}$ may be bounded with,

$$
|\mathcal{R}_{2,m}| \le \sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{i=1}^{d}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}} |\sigma||\rho_L^{n+1}-\rho_K^{n+1}||u_\sigma^{n+1}||\psi_L^n-\psi_K^n|
$$

We then use the Cauchy-Schwarz inequality to highlight the left handside of the weak BV estimate (3.25),

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_{2,m}| &\leq \Big(\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{i=1}^{d}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}}|\sigma||\rho_L^{n+1}-\rho_K^{n+1}|^2|u_\sigma^{n+1}|\Big)^{\frac12}\\ &\qquad\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{i=1}^{d}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}}|\sigma||\psi_L^{n}-\psi_K^{n}|^2|u_\sigma^{n+1}|\Big)^{\frac12}\\ &\leq \sqrt{C}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{i=1}^{d}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}}|\sigma||\psi_L^{n}-\psi_K^{n}|^2|u_\sigma^{n+1}|\Big)^{\frac12}\end{aligned}$$

By Lemma 3.6.2, there exists C_ψ depending only $\partial_i\psi$, Ω and T such that $|\psi_L^n-\psi_K^n|\leq C_\psi d(\boldsymbol{x}_K,\boldsymbol{x}_L)$. As $|D_\sigma|=|[\boldsymbol{x}_K,\boldsymbol{x}_L]\times\sigma|$ it yields that,

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_{2,m}| &\leq \sqrt{C}C_\psi\sqrt{h_m}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{i=1}^{d}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}\\ \sigma=K|L}}|D_\sigma||u_\sigma^{n+1}|\Big)^{\frac12}\\ &\leq C(\psi,T,\Omega,\|\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(L^2)})\sqrt{h_m}.\end{aligned}$$

Thanks to the bound (3.26) on $\boldsymbol{u}_m$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$, we have $|\mathcal{R}_{2,m}|\longrightarrow 0$ as $h_m\to 0$ which allows us to conclude that $(\bar\rho,\bar{\boldsymbol{u}})$ satisfies the weak mass balance equation.

Step 4- Regularity of the limit $\bar{\boldsymbol{u}}$

In order to demonstrate the strong convergence of $(\rho_m)_m$ in the next section, we require $\bar{\boldsymbol{u}}$ to be divergence free. First, let us show that $\bar{\boldsymbol{u}}\in L^2((0,T),\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$. A characterization of $\bar{\boldsymbol{u}}\in L^2((0,T),\boldsymbol{H}^1(\Omega))$ is given by the existence of a constant C such that,

$$\left|\int_0^T\int_\Omega \bar u_i\partial_j\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\leq C\|\varphi\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\quad\forall\varphi\in C_c^\infty((0,T)\times\Omega)\quad\forall i,j=1,..,d \tag{3.36}$$

We adapt the proof of Theorem B.2 from [EGH00] to our case. Let $\varphi\in C_c^\infty((0,T)\times\Omega)$ and $(i,j)\in[\![1,d]\!]$. From now on we drop the subscript i in the velocity notation. Let us define the continuation of $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ on $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\backslash((0,T)\times\Omega)$, denoted $(\mathbb{P}u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, by

$$\mathbb{P}u_m=u_m\quad\text{a.e. on}\quad(0,T)\times\Omega\quad\text{and}\quad\mathbb{P}u_m=0\quad\text{a.e. on}\quad(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\backslash((0,T)\times\Omega)$$

Then $(\mathbb{P}u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converges strongly to $\mathbb{P}\bar u$ in $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ with $\mathbb{P}\bar u$ being the continuation of $\bar u$ on $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\backslash((0,T)\times\Omega)$.

Let $\eta\in\mathbb{R}^d,\eta\neq 0$ and $m\in\mathbb{N}$. Using Cauchy-Schwarz, we have :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathbb{P}u_m(t,\boldsymbol{x}+\eta)-\mathbb{P}u_m(t,\boldsymbol{x})}{|\eta|}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{|\eta|}\left[\int_{\mathbb{R}}\|\mathbb{P}u_m(t,\cdot+\eta)-\mathbb{P}u_m(t,\cdot)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac12}\|\varphi\|_{L^2}$$

Again, using the space compactness estimate from Lemma B.1 and the bound on the $H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ norms of $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (3.26) yields the existence of C depending only on initial data $\rho_0,\boldsymbol{u}_0$ and $\boldsymbol{f}$ such that,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathbb{P}u_m(t,\boldsymbol{x}+\eta)-\mathbb{P}u_m(t,\boldsymbol{x})}{|\eta|}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{|\eta|}\left(C|\eta|(|\eta|+Ch_{\mathcal{M}_m})\right)^{\frac12}\|\varphi\|_{L^2(L^2)}$$

Passing to the limit as $m \to \infty$ yields

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathbb{P}\bar{u}(t, \boldsymbol{x} + \eta) - \mathbb{P}\bar{u}(t, \boldsymbol{x})}{|\eta|} \varphi(t, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \leq \sqrt{C} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}$$

We perform a change of variable to obtain,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(t, \boldsymbol{x}) - \varphi(t, \boldsymbol{x} - \eta)}{|\eta|} \mathbb{P}\bar{u}(t, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \leq \sqrt{C} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}$$

We may retrieve an estimate with $\partial_j \varphi$ by setting $\eta = h\boldsymbol{e}_j$ with $h > 0$. Using a Taylor's inequality and passing to the limit as $h \to 0$ yields (3.36) on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Hence $P\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d))$. Finally, since $\bar{u} = P\bar{u}$ a.e. on $(0, T) \times \Omega$ and $P\bar{u} = 0$ outside $(0, T) \times \Omega$, we conclude that $\bar{u} \in L^2((0, T), H^1_0(\Omega))$.

Let us show that $\bar{\boldsymbol{u}}$ is divergence free. For any $\varphi \in C^\infty_c((0, T) \times \Omega)$ we define the sequence $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ as,

$$\varphi_m = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_m^{n+1} \mathbb{1}_{(t^n, t^{n+1}]} \quad \text{with} \quad \varphi_m^n = \Pi_{\mathcal{M}_m} \varphi(t^n, \cdot) \quad \forall n \in \{1, N\}$$

The sequence $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ being discrete divergence free a.e. in $(0, T) \times \Omega$ combined with the discrete integration by parts 2.27 yields,

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^T \int_\Omega \varphi_m \mathrm{div}_{\mathcal{M}_m} \boldsymbol{u}_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ = & - \int_0^T \int_\Omega \nabla_{\mathcal{E}_m} \varphi_m \cdot \boldsymbol{u}_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Using the strong convergences of $\nabla_{\mathcal{E}_m} \varphi_m$ (by Lemma 3.6.2) and $(\boldsymbol{u}_m)_m$ towards $\nabla\varphi$ and $\bar{\boldsymbol{u}}$ respectively in $L^2((0, T), L^2(\Omega)^d)$, we conclude with :

$$0 = \lim_{m \to \infty} - \int_0^T \int_\Omega \nabla_{\mathcal{E}_m} \varphi_m \cdot \boldsymbol{u}_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = - \int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \bar{\boldsymbol{u}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \varphi \mathrm{div} \bar{\boldsymbol{u}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$

Finally, the limit $\bar{\boldsymbol{u}}$ belongs to $L^2((0, T), \boldsymbol{H}^1_0(\Omega))$ and $\mathrm{div}\bar{\boldsymbol{u}} = 0$ a.e. on $(0, T) \times \Omega$.

Step 5- Weak convergence of the discrete derivatives in $L^2(\Omega)$

First, owing to the discrete "$L^2(\boldsymbol{H}^1_0)$" bound (3.26) we have that for all $i, j = 1, .., d$ the sequence of derivatives $(\eth_j u_{i,m})_{m \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^2((0, T) \times \Omega)$, thus is weakly convergent to some limit in $L^2((0, T) \times \Omega)$. For $i \in \{1, .., d\}$ and $n \in \{1, .., N\}$ – although we drop the superscript n – we show that $\eth_i u_{i,m} \rightharpoonup \partial_i \bar{u}_i$ as $m \to \infty$. Let $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ so that we may take $\varphi_m = \Pi_{\mathcal{M}} \varphi$. Then,

$$\int_\Omega \eth_i u_{i,m} \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \eth_i u_{i,m} \varphi_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \eth_i u_{i,m} (\varphi - \varphi_m) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Thanks to the regularity of φ and the bound on $\eth_i u_{i,m}$, the second term vanishes as $m \to \infty$ and we may work on the first term only. An integration by part (2.27) yields,

$$\int_\Omega \eth_i u_{i,m} \varphi_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = - \int_\Omega u_{i,m} \eth_i \varphi_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Using the strong convergence of $u_{i,m}$ with the consistency of the derivatives (Lemma 3.6.2) we pass to the limit to get,

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \eth_i u_{i,m}\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \bar{u}_i\partial_i\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial_i\bar{u}_i\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

and we can conclude by density. The result with $\eth_j u_{i,m}$ follows, by considering the reconstructions $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{E}^{(i)}}u_{i,m}$ and $\mathcal{R}^{\mathcal{E}^{(j)}}_{\mathcal{M}}\varphi_m$ and their convergence properties.

Step 6- Strong convergence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$

We follow the proof in [LS18] to obtain the strong convergence of $(\rho_m)_m$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$. Obviously, we cannot resort to the previous space compactness results from the lack of estimates on the space translates of the discrete density. Instead, using results from [DL89] and [BF13] and recalled in Annex A, we turn to the regularity of $\bar{\rho}$ to conclude with the result.

The boundness of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$ yields that $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converges weakly towards $\bar{\rho}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$. Hence, thanks to the convexity and the continuity of the L^2 norm for the weak topology, we use the following classical result [BF13, Corollary II.2.8] :

$$\|\bar{\rho}\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq \liminf_{m\to\infty}\|\rho_m\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}.$$

Let us show that $\limsup_{m\to\infty}\|\rho_m\|_{L^2} \leq \|\bar{\rho}\|_{L^2}$ which in turn, will yield the strong convergence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$. [BF13, Proposition II.2.11].

By (3.24), we have for all n in $\{0,\cdots,N-1\}$:

$$\sum_{K\in\mathcal{M}_m}|K|(\rho_K^{n+1})^2 \leq \sum_{K\in\mathcal{M}_m}|K|(\rho_K^{(0)})^2 \leq \|\rho_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

which yields $\|\rho_m(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\rho_0(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ for all $t\in(0,T)$ and $m\in\mathbb{N}$.

Moreover, since $\bar{\rho}$ is a solution to the weak transport equation (3.3), with $\bar{\boldsymbol{u}}\in L^2([0,T],\boldsymbol{H}^1_0(\Omega))$ being divergence free, we apply Theorem A.2 to conclude with the unicity and time continuity of the limit $\bar{\rho}$ and we have $\bar{\rho}\in C^0(0,T;L^2(\Omega))$.
Taking $\beta(\zeta)=\zeta^2$ in Theorem A.1 along with the test function $\varphi=1$, we can establish that for any $t\in[0,T)$ then $\|\bar{\rho}(.,t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\rho_0\|_{L^2(\Omega)}$.

Therefore, we have $\|\rho_m(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\bar{\rho}(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ for all $t\in[0,T)$ and $m\in\mathbb{N}$. Integrating this last inequality for $t\in[0,T)$, we obtain $\|\rho_m\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq \|\bar{\rho}\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)}$ for all $m\in\mathbb{N}$, and passing to the limit as m goes to infinity yields :

$$\limsup_{n\to\infty}\|\rho_m\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq \|\bar{\rho}\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}.$$

This proves that $\lim_{m\to\infty}\|\rho_m\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} = \|\bar{\rho}\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}$. Combined with the weak convergence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ towards $\bar{\rho}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ we conclude that,

$$\rho_m \longrightarrow \bar{\rho} \quad \text{as} \quad m\to\infty \quad \text{in} \quad L^2((0,T)\times\Omega)$$

Step 7- Strong convergence of the viscosity tensor in $L^2((0,T)\times\Omega)$

Thanks to the continuity of $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, the strong convergence of $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ is rather straightforward. Indeed, owing to the strong convergence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ to $\bar\rho$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ we may use the reciprocal of the dominated convergence theorem. Hence there exists a subsequence still denoted $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ such that,

$$\rho_m(t,\boldsymbol{x}) \to \bar\rho(t,\boldsymbol{x}) \quad \text{a.e. in} \quad [0,T]\times\Omega$$

Therefore, $\mu_m(t,\boldsymbol{x}) = \mu(\rho_m(t,\boldsymbol{x}))$ converges pointwise to $\bar\mu(t,\boldsymbol{x}) = \mu(\bar\rho(t,\boldsymbol{x}))$ a.e. in $[0,T]\times\Omega$. Using (3.19) – the $L^\infty([0,T]\times\Omega)$ bound on $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ – and the dominated convergence theorem yields the strong convergence of $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ to $\bar\mu$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$.

For any $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$ we show that the sequence of viscosities associated to $\widetilde{\mathcal{E}}_m^{(i,j)}$ converges strongly to $\bar\mu$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ as $m\to\infty$. Nothing is to be done for $i=j$ as we have $\{D_\epsilon, \epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}_m^{(i,i)}\} = \{K \in \mathcal{M}_m\}$. Let $i\neq j$ and $n\in\{0,..,N\}$. Then $\mu^n_{ij_m}$ can be defined as a reconstruction of μ^n_m. Using the same arguments as the proof in Lemma 3.4.3 yields that $\|\mu_{ij_m}\|_{L^p((0,T)\times\Omega)} \leq \|\mu_m\|_{L^p((0,T)\times\Omega)}$. Hence, by Lemma 3.6.3 we are able to conclude that

$$\mu_{ij_m} \to \bar\mu \quad \text{as} \quad m\to\infty \quad \text{in} \quad L^2((0,T)\times\Omega) \quad \forall i,j=1,..,d$$

Step 8- Passing to the limit as $\delta t, h_{\mathcal{M}} \to 0$ in the momentum balance equation

Similarly to Step 3, we prove a weak Lax-Wendroff consistency for the discrete momentum balance equation : by passing to the limit as $\delta t, h_{\mathcal{M}} \to 0$ in (3.10b), we aim to show that the limit $(\bar\rho, \bar{\boldsymbol{u}})$ obtained in the previous steps satisfies the weak momentum equation (3.4).

Let $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty([0,T)\times\Omega)^d$, such that $\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi} = 0$, so that we take $\boldsymbol{\varphi}^n_m = \widetilde{\Pi}_{\mathcal{E}_m}\boldsymbol{\varphi}(\cdot,t_n)$. The preservation of the divergence by the Fortin operator (2.60) yields that $\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\boldsymbol{\varphi}^n_m = 0$. Therefore $\boldsymbol{\varphi}^n_m$ belongs to $\boldsymbol{E}_{\mathcal{E}}$ and may be used as a test function in (3.10b).

Multiplying by δt_m and summing over $n = \{0,\dots,N_m-1\}$ we get,

$$\sum_{n=0}^{N_m-1} \delta t_m \Big[\int_\Omega \eth_t(\rho\boldsymbol{u})^{n+1}_m \cdot \boldsymbol{\varphi}^n_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + b_{\mathcal{E}}((\rho\boldsymbol{u})^{n+1}_m, \boldsymbol{u}^{n+1}_m, \boldsymbol{\varphi}^n_m) + \int_\Omega \mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1}_m) : \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{\varphi}^n_m)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{f}^{n+1}_{\mathcal{E}_m}\cdot\boldsymbol{\varphi}^n_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big] = 0,$$

which we decompose according to,

$$T^{(m)}_{1,i} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}} \int_\Omega \eth_t(\rho u_i)^{n+1}_m \varphi^n_{m,i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad T^{(m)}_{2,i} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta t\, b^{(i)}_{\mathcal{E}}((\rho\boldsymbol{u})^{n+1}_m, u^{n+1}_{i,m}, \varphi^n_{i,m}),$$

$$T^{(m)}_3 = \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \int_\Omega \mu^{n+1}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{u}^{n+1}_m) : \boldsymbol{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{\varphi}^n_m)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad T^{(m)}_{4,i} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \int_\Omega f^{n+1}_{i,m}\varphi^n_{i,m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

to give $\sum_{i=1}^d \big[T^{(m)}_{1,i} + T^{(m)}_{2,i} + T^{(m)}_{4,i}\big] + T^{(m)}_3 = 0$.

Let us treat the convergence of each term individually. We deal with $T_{1,i}^{(m)}$ by rearranging the sum so as to perform a discrete integration by parts for the time variable

$$\begin{aligned} T_{1,i}^{(m)} &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}} |D_\sigma| \frac{\rho_{D_\sigma}^{n+1}u_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n}{\delta t} \varphi_\sigma^n \\ &= -\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}} |D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^{n+1}u_\sigma^{n+1}\frac{(\varphi_\sigma^{n+1}-\varphi_\sigma^n)}{\delta t} - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}^{(i)}} |D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^{(0)}u_\sigma^{(0)}\,\varphi_\sigma^{(0)}. \end{aligned}$$

since $\varphi_\sigma^{(T)} = 0$ thanks to the compact support of φ. We recall that $|D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^{n+1} = |D_{K,\sigma}|\rho_K^{n+1} + |D_{L,\sigma}|\rho_L^{n+1}$: as in Step 3 we are dealing with a reconstruction of ρ_m and we have,

$$\begin{aligned} T_{1,i}^{(m)} = -\int_0^T \int_\Omega \mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}}(\rho_m(t,\boldsymbol{x}))u_{i,m}(t,\boldsymbol{x})\eth_t\varphi_{i,m}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ - \int_\Omega \mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}}(\rho_m^{(0)}(\boldsymbol{x}))u_{i,m}^{(0)}(\boldsymbol{x})\varphi_{i,m}^{(0)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Therefore passing to the limit in $T_{1,i}^{(m)}$ is straightforward : Lemma 3.6.3 yields that $(\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}}\rho_m)_m$ converges strongly to $\bar\rho$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ as $m\to+\infty$. Combined with the strong convergences of $(u_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$ and $\eth_t\varphi_{i,m}$ (by Lemma 3.6.2) towards $\bar u_i$ and $\partial_t\varphi_i$ respectively in $L^2((0,T)\times\Omega)$ we can conclude for the limit in the first term.

From the initialization of the scheme and the assumed regularity of the initial data – i.e. $\rho_0\in L^\infty(\Omega)$ and $u_0\in L^2(\Omega)$ – we get that $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}^{(i)}}(\rho_m^{(0)})$ and $u_{i,0}$ converge to ρ_0 and $u_{i,0}$ respectively in $L^2(\Omega)$. Finally, Lemma 3.6.2 yields the convergence of $\varphi_{i,m}^{(0)}$ to $\varphi_i(.,0)$ in $L^2(\Omega)$ and we have,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^d T_{1,i}^{(m)} = -\int_0^T\int_\Omega \bar\rho(t,\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \rho_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\varphi}(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Thanks to the reformulation of $b_{\mathcal{E}}^{(i)}$ to (3.16) we have for the convection term $T_{2,i}^{(m)}$,

$$\begin{aligned} T_{2,i}^{(m)} &= \sum_{n=0}^{N-1}\delta t\, b_{\mathcal{E}}^{(i)}((\rho\boldsymbol{u})_m^{n+1}, u_{i,m}^{n+1}, \varphi_{i,m}^n) \\ &= -\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{j=1}^d\int_\Omega (\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^\rho \rho_{\mathcal{E}^{(j)},m}^{n+1}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^u u_{j,m}^{n+1}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^v u_{i,m}^{n+1}\eth_j\varphi_{i,m}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Moreover, we recall that $\rho_{\mathcal{E}^{(j)},m}^{n+1}$ is defined using an upwind scheme (see Lemma 3.4.6 and (2.22)). Therefore it can be seen as a reconstruction of ρ_m^{n+1} in the sense of definition 3.14 where we take $\alpha_\sigma = 0$ or 1 according to the upwind scheme and a bound similar to that of Lemma 3.4.5 holds. Then, given the strong convergence of $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ we have that $((\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^\rho\rho_{\mathcal{E}^{(j)},m})_{m\in\mathbb{N}}\to\bar\rho$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$ as $m\to\infty$. Finally, we decompose $T_{2,i}^{(m)}$ as,

$$\begin{aligned} T_{2,i}^{(m)} = &-\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{j=1}^d\int_\Omega (\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^\rho \rho_{\mathcal{E}^{(j)},m}^{n+1}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^u u_{j,m}^{n+1}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^v u_{i,m}^{n+1}\eth_j\varphi_{i,m}^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &+\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{j=1}^d\int_\Omega (\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^\rho \rho_{\mathcal{E}^{(j)},m}^{n+1}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^u u_{j,m}^{n+1}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^v u_{i,m}^{n+1}\eth_j(\varphi_{i,m}^{n+1}-\varphi_{i,m}^{n+1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

using the estimation on the trilinear form (3.17) combined with the bounds on the discrete solutions (3.18), (3.26) and the regularity of $\boldsymbol{\varphi}$, we conclude that the second term tends to 0 as $m \to \infty$. From the consistence properties of the reconstruction operators and the strong convergences of $(\rho_m)_m$ and $(\boldsymbol{u}_m)_m$ in $L^2((0,T)\times\Omega)$. Thus, up to a subsequence, $(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^{\rho}\rho_{\mathcal{E}^{(j)},m}^{n+1}(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j,i)})^{u}u_{j,m}^{n+1}(\mathfrak{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(i,j)})^{v}u_{i,m}^{n+1}\eth_j\varphi_{i,m}^{n+1}$ tends to $\bar{\rho}\bar{u}_j\bar{u}_i\partial_j\varphi_i$ in $L^1((0,T)\times\Omega)$ as $m \to +\infty$, and we get,

$$\lim_{m\to+\infty} T_{2,i}^{(m)} = \int_0^T \int_\Omega \bar{\rho}\bar{u}_j\bar{u}_i\partial_j\varphi_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,$$

Thanks to the symmetry property (2.53), the diffusion term $T_3^{(m)}$ reads,

$$T_3^{(m)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{i,j=1}^{d}\left[\int_\Omega \mu_{ij,m}^{n+1}\eth_j u_{i,m}^{n+1}\eth_j\varphi_{i,m}^{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \mu_{ij,m}^{n+1}\eth_j u_{i,m}^{n+1}\eth_i\varphi_{j,m}^{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]$$

Let us pass to the limit in each term. First, we note that :

$$\int_\Omega \mu_{ij,m}^{n+1}\eth_j u_{i,m}^{n+1}\eth_j\varphi_{i,m}^{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \mu_{ij,m}^{n+1}\eth_j u_{i,m}^{n+1}\eth_j\varphi_{i,m}^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \mu_{ij,m}^{n+1}\eth_j u_{i,m}^{n+1}\eth_j(\varphi_{i,m}^{n}-\varphi_{i,m}^{n+1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Thanks to the regularity of φ and the bounds on $\mu_{ij,m}^{n+1}$ and $\eth_j u_{i,m}^{n+1}$ the second term vanishes as $m \to \infty$. The desired convergence result follows using the weak convergence of the discrete derivatives (Step 5) combined with the strong convergences as $m \to \infty$ of $\mu_{ij,m}$, $\eth_j\varphi_{i,m}$ and $\eth_i\varphi_{j,m}$ to $\bar{\mu}$, $\partial_j\varphi_i$ and $\partial_i\varphi_j$ respectively in $L^2((0,T)\times\Omega)$ (up to a subsequence, by the dominated convergence theorem). Therefore,

$$\lim_{m\to\infty} T_3^{(m)} = \int_0^T \int_\Omega \bar{\mu}\boldsymbol{D}(\bar{\boldsymbol{u}}) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$

Finally, we have for the last term $T_{4,i}^{(m)}$:

$$T_{4,i}^{(m)} = \sum_{n=0}^{N-1}\delta t\int_\Omega f_{i,m}^{n+1}\varphi_{i,m}^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{n=0}^{N-1}\delta t\int_\Omega f_{i,m}^{n+1}(\varphi_{i,m}^{n}-\varphi_{i,m}^{n+1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Thanks to the continuity of the Fortin operator (2.58) we get the strong convergence of $(f_{i,m})_m$ towards f_i in $L^p((0,T)\times\Omega)$ for $p \in [1,\infty)$. Moreover, by a Taylor inequality (Lemma 3.6.2) the second term tends to 0 as $m \to \infty$. Then,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{d} T_{4,i}^{(m)} = \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$

which concludes the convergence proof.

Chapitre 4

Schéma de projection pour les équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables

4.1 Introduction

Le schéma étudié dans le chapitre précédent possède théoriquement des qualités numériques remarquables : il approche le plus fidèlement possible le problème continu, et il se veut stable par sa formulation totalement implicite en temps. Toutefois, sa mise en oeuvre pour la simulation de phénomènes est difficile pour plusieurs raisons. L'une d'entre elles est le couplage de l'équation de conservation quantité de mouvement avec le transport de la densité, qui nous amène alors à travailler sur des systèmes de grande taille. Sous couvert de l'utilisation de méthodes – du point fixe ou de Newton – pour traiter les nonlinéarités présentes dans les équations, il se pose alors la difficulté de la dimension des matrices à inverser. Cela vient s'ajouter au problème de couplage vitesse/pression déjà présent pour le problème de Navier–Stokes à densité constante.

Lorsque le fluide est homogène, une approche classique pour l'approximation en temps d'un écoulement incompressible est de considérer une méthode de projection incrémentale (également appelé schéma prédicteur–correcteur) qui va découpler le calcul du champ de vitesse de celui de la pression. Cette méthode de semi-discrétisation en temps introduite dans [Cho68, Tem69] se base sur la décomposition de Helmholtz de l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ qui établit que tout élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ peut être est décomposé comme la somme d'un champ de vecteurs irrotationel et d'un champ de vecteurs à divergence nulle :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^2(\Omega) &= H \oplus H^{\perp}, \text{ avec} \\
H &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\
H^{\perp} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \boldsymbol{u} = \nabla p,\ p \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)\},
\end{aligned}$$

où Ω est un domaine assez régulier de $\mathbb{R}^3$, et $\boldsymbol{n}$ la normale sortante à $\partial\Omega$. À chaque temps t^n, la résolution du problème se fait donc en deux étapes : lors d'une étape de prédiction, le gradient de pression est évalué au temps précédent dans l'équation de quantité de mouvement ce qui donne à résoudre un problème dont la seule inconnue est la vitesse. On obtient donc une vitesse prédite $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ qui ne vérifie pas la contrainte

d'incompressibilité. Cette dernière est ensuite projetée sur H lors une étape de correction :

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{n+1} = 0\,, (\boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n})_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où $\boldsymbol{u}^{n+1}$ est le champ de vitesse à divergence nulle recherché. Le terme $\nabla(p^{n+1} - p^n)$ étant par définition un champ irrotationel, il s'agit donc de la décomposition de Helmholtz de $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$. On obtient la pression puis $\boldsymbol{u}^{n+1}$ en passant à la divergence dans l'étape de correction, et on est donc ramenés à la résolution d'un problème de Poisson avec des conditions aux limites de Neumann homogène. Le schéma prédicteur correcteur a fait l'objet de nombreux travaux [GMS06], et on peut notamment citer [Tem69] pour la convergence du schéma et [She92, She96, FLPA09] pour des estimations d'erreur pour la vitesse et la pression.

Considérons maintenant le problème des équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible à densité et viscosité variables (2.1). On travaille dans toute la suite du chapitre avec un domaine ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et une partition uniforme de l'intervalle $[0, T]$ donnée par $\{n\delta t,\, n \in \{1, .., N\},\, T = N\delta t\}$. Afin de découpler totalement les calculs de la densité, de la vitesse et de la pression, on réalise dans un premier temps l'advection de la densité ρ par la vitesse à divergence nulle obtenue au temps précédent. Alors, une généralisation possible du schéma de projection incrémentale au cas de la densité variable est immédiate :

Pour tout $n \in \{1, .., N\}$: Trouver $(\rho^{n+1}, \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1})$ vérifiant,

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \operatorname{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mu^{n+1} = \mu(\rho^{n+1}) \end{cases} \tag{4.1a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^{n+1}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \rho^n\boldsymbol{u}^n}{\delta t} + \operatorname{div}(\rho^{n+1}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} \otimes \boldsymbol{u}^n) \\ \qquad -\operatorname{div}(\mu^{n+1}\mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})) + \nabla p^n = \boldsymbol{f}(t^{n+1}) & \text{dans } \Omega \\ \qquad\qquad \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1b}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1} - \rho^{n+1}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1c}$$

Cette semi-discrétisation en temps – ou des variantes proches – est fréquemment utilisée pour la simulation d'écoulement de fluides non homogènes [PS06, ACF16, GQ00, GS09]. En revanche, beaucoup de problèmes restent ouverts quant à la preuve de stabilité de tels schémas ou à l'estimation d'erreur pour leurs solutions. Dans [GQ00], les auteurs montrent la stabilité du schéma ci-dessus pour les éléments finis sous réserve de l'ajout d'une deuxième étape de projection à chaque pas de temps (nécessitant alors la résolution de deux problèmes de Poisson). La stabilité d'un schéma Gauge-Uzawa / Élements finis pour ce problème a été démontrée dans [PS06]. Pour les volumes finis, on retrouve dans [GHKL16] un

schéma de projection stable pour l'approximation MAC des équations de Navier–Stokes compressible à densité variable, et dans [GGHL08b] pour les équations de Navier–Stokes compressible barotrope.

En ce qui concerne la résolution numérique de (4.1), l'étape de projection requiert désormais la résolution d'un problème de Poisson à coefficients variables pour déterminer la pression :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\Big(\dfrac{1}{\rho^{n+1}}\nabla\Phi^{n+1}\Big) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla\Phi^{n+1}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Phi^{n+1} = p^{n+1} - p^n$ est l'incrément de pression. Le problème devient alors plus coûteux à résoudre (en dimension 3 notamment) puisqu'un calcul des coefficients de la matrice est requis à chaque pas de temps. Par ailleurs, le conditionnement du problème s'en trouve dégradé. On observe ce phénomène en particulier lorsque la densité est discontinue, et pour des rapports élevés entre la borne $\sup$ et $\inf$ de ρ. Dans [GS09], Guermond et Salgado proposent de pénaliser l'étape de projection dans (4.1) en remplacant la densité variable ρ^{n+1} par $\chi = \min_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\rho(0,\cdot)$. On se ramène donc à un problème de Poisson classique et l'étape de projection devient,

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}}{\delta t} + \dfrac{1}{\chi}\nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}^{n+1} = 0\,, (\boldsymbol{u}^{n+1}\cdot\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Il est démontré dans [GS09] que le schéma pénalisé semi-discrétisé est inconditionellement stable, à condition de modifier l'équation de transport et le terme convectif dans l'étape de prédiction. Des estimations d'erreur d'ordre 1 peuvent être trouvées dans [GS11].

Le chapitre est décomposé comme suit. On introduit dans une première section la discrétisation MAC du schéma pénalisé par χ. Dans une seconde partie, on montre que ce schéma est inconditionellement stable, sans modifier l'approximation en temps des étapes du transport ou de la prédiction. Ceci est notamment rendu possible par la discrétisation du terme de convection dans l'étape de prédiction (2.29)–(2.30), et la consistance entre celui-ci et la conservation de la masse (2.36) [HL10b]. Avant de passer à des tests numériques dans une dernière partie, on définit un schéma antidiffusif pour le transport de la densité : celui-ci va donc venir remplacer le schéma upwind pour l'implémentation des valeurs ρ_σ dans les flux de masse. Le schéma anti–diffusif couplé au schéma pénalisé par χ à fait l'objet d'un proceedings dans le cadre du symposium Finite Volumes for Complex Applications IX.

4.2 Discrétisation MAC du schéma pénalisé

Pour des raisons pratiques, on suppose que Ω vérifie la condition (2.6) pour le passage à la discrétisation MAC. Par ailleurs, on adopte une formulation équivalente du schéma semi-discrétisé en considérant la nouvelle étape de prédiction obtenue par la somme de (4.1b) valué en t^{n+1} avec (4.1c) valué en t^n. Cette formulation fait donc apparaître $\bar{\boldsymbol{u}}^n$ dans la prédiction et on obtient,

Initialisation : $(\rho^0, \boldsymbol{u}^0, \bar{\boldsymbol{u}}^0, p^0, p^{-1}) = ((\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{|t=0}, p_0, 0)$ et $\chi = \min_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\rho^0$.

Pour tout $n \in \{0, .., N-1\}$: Trouver $(\rho^{n+1}, \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1})$ vérifiant,

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \operatorname{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mu^{n+1} = \mu(\rho^{n+1}) \end{cases} \tag{4.3a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^{n+1}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \rho^n\bar{\boldsymbol{u}}^n}{\delta t} + \operatorname{div}(\rho^{n+1}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} \otimes \boldsymbol{u}^n) & \\ \qquad -\operatorname{div}(\mu^{n+1}\mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})) + \nabla(2p^n - p^{n-1}) = \boldsymbol{f}(t^{n+1}) & \text{dans } \Omega \\ \qquad\qquad \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3b}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}}{\delta t} + \dfrac{1}{\chi}\nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}\ \boldsymbol{u}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3c}$$

On réalise la discrétisation spatiale du schéma (4.3) par la méthode MAC. On introduit alors un maillage décalé $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$, vérifiant la définition 2.3.1, composé du maillage primal $\mathcal{M}$ et des $d = 2, 3$ grilles duales $\mathcal{E}$. Les inconnues totalement discrétisées sont renommées $(\rho^{n+1}, \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1})$ pour éviter un excès de notations. Les données initiales et le terme source sont discrétisés par projection sur les espaces de fonctions constantes par morceaux sur les cellules de $\mathcal{D}$,

$$\boldsymbol{f}_{\mathcal{E}} = \Pi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{f}) \qquad \boldsymbol{u}^0, \bar{\boldsymbol{u}}^0 = \Pi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{u}_0) \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}} \qquad \rho^0 = \Pi_{\mathcal{M}}(\rho_0) \in L_{\mathcal{M}}$$

La discrétisation des équations est semblable à celle réalisée dans les Chapitre 2 et 3. Toutefois, on remarque que le transport dans (4.3a) fait intervenir $\boldsymbol{u}^n$ au lieu de $\boldsymbol{u}^{n+1}$,

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \frac{1}{|K|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0 \qquad \text{avec} \qquad F_{K,\sigma} = |\sigma|\rho_\sigma^{n+1}u_{K,\sigma}^n$$

avec ρ_σ définit à l'aide du schéma upwind (2.22). Dans la Section 4.4, on fait appel à un schéma antidiffusif pour implémenter les valeurs de ρ_σ. On donne ci-dessous le schéma discrétisé en temps et en espace,

Initialisation : $(\rho^0, \boldsymbol{u}^0, \bar{\boldsymbol{u}}^0, p^0, p^{-1}) = ((\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{|t=0}, p_0, 0)$ et $\chi = \min_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\rho^0$.

Pour tout $n \in \{0, .., N-1\}$: Trouver $(\rho^{n+1}, \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}} \times L_{\mathcal{M}}$ vérifiant,

Transport
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \dfrac{1}{|K|}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0 & \forall K \in \mathcal{M} \quad (4.4a) \\ \mu_K^{n+1} = \mu(\rho_K^{n+1}) & \forall K \in \mathcal{M} \quad (4.4b) \end{cases}$$

$$\text{Prédiction}\begin{cases}\dfrac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1}-\rho_{D_\sigma}^{n}\bar{u}_\sigma^{n})+\dfrac{1}{|D_\sigma|}\displaystyle\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}F_{\sigma,\epsilon}\bar{u}_\epsilon^{n+1} & (4.4c)\\ -(\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})))_{D_\sigma}+(\nabla_{\mathcal{E}}\,(2p^n-p^{n-1}))_{D_\sigma}=(\Pi_{\mathcal{E}}\boldsymbol{f})_\sigma^{n+1}\forall i,\forall\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)} & (4.4d)\end{cases}$$

$$\text{Correction}\begin{cases}\dfrac{1}{\delta t}(u_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\sigma^{n+1})+\dfrac{1}{\chi}(\nabla_{\mathcal{E}}\,(p^{n+1}-p^n))_{D_\sigma}=0 & \forall i,\forall\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)} \quad (4.4e)\\ \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}|\sigma|\boldsymbol{u}_{K,\sigma}^{n+1}=0 & \forall K\in\mathcal{M} \quad (4.4f)\\ \boldsymbol{u}_{K,\sigma}^{n+1}=0 & \forall i,\forall\sigma\in\mathcal{E}_{\rm ext}^{(i)} \quad (4.4g)\end{cases}$$

REMARQUE 4.2.1 Étant donné que l'implémentation de l'équation de conservation de la masse (4.4a) fait appel à la vitesse projetée sur H, on se ramène à une équation d'advection de la densité. En réalité, ce choix pour la vitesse d'advection est primordial pour retrouver le principe du maximum discret pour ρ^{n+1} pour tout $n\in\{0,..,N-1\}$ – et par extension pour la viscosité – ainsi qu'une estimation pour la stabilité de la densité que l'on donne dans la prochaine section. Ainsi, malgré une formulation des étapes de prédiction/correction utilisant la vitesse prédite $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$, le calcul de $\boldsymbol{u}^{n+1}$ reste nécessaire à chaque itération.

REMARQUE 4.2.2 De façon analogue au cas continu, on déduit à partir de (4.4e)–(4.4f)–(4.4g) que,

$$(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})_K=(\frac{\delta t}{\chi}\Delta_{\mathcal{M}}(p^{n+1}-p^n))_K,\qquad\forall K\in\mathcal{M} \tag{4.5}$$

où $\Delta_{\mathcal{M}}q\in L_{\mathcal{M}}$ désigne le laplacien de $q\in L_{\mathcal{M}}$ dont on donne l'expression ci-dessous. En effet, soient $i\in\{1,..d\}$ et $\sigma=K|L\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}$. En multipliant (4.4e) par $|\sigma|(\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_i)$ on obtient,

$$|\sigma|(u_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\sigma^{n+1})(\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_i)+\frac{\delta t}{\chi}\frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|}(\phi_L-\phi_K)=0$$

où on a posé $\phi=p^{n+1}-p^n$ et d'après l'expression de $(\nabla_{\mathcal{E}}\phi^{n+1})_{D_\sigma}$ (2.25). Notons que si $\sigma\in\mathcal{E}_{\rm ext}$ alors l'expression ci-dessus est nulle en utilisant les conditions au bord de $(u_\sigma^{n+1},\bar{u}_\sigma^{n+1},\nabla_{\mathcal{E}}\phi)$ (4.4g). En considérant $K\in\mathcal{M}$ et toutes ses faces $\sigma\in\mathcal{E}(K)$ il vient,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}|\sigma|(u_{K,\sigma}^{n+1}-\bar{u}_{K,\sigma}^{n+1})+\frac{\delta t}{\chi}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}(K)\\ \sigma=K|L}}\frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|}(\phi_L-\phi_K)=0$$

Par la condition d'incompressibilité (4.4f), les termes en $u_{K,\sigma}^{n+1}$ disparaissent dans la première somme. En remarquant que $|D_\sigma|=|\sigma|\times d(\boldsymbol{x}_K,\boldsymbol{x}_L)$, on retrouve effectivement une formulation du laplacien pour $\mathcal{M}$ similaire à (2.37). En divisant par $|K|$, on arrive finalement au résultat,

$$-\frac{1}{|K|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}|\sigma|\bar{u}_{K,\sigma}^{n+1}+\frac{\delta t}{\chi}\frac{1}{|K|}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}(K)\\ \sigma=K|L}}|\sigma|\frac{\phi_L-\phi_K}{d(\boldsymbol{x}_K,\boldsymbol{x}_L)}=0\,,\qquad\forall K\in\mathcal{M}$$

REMARQUE 4.2.3 Dans [GS09], le paramètre χ appartient à $(0,\min_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\rho(0,\boldsymbol{x})]$. Il s'agit uniquement d'une condition nécessaire pour l'obtention de l'estimation de stabilité a priori (4.3.1). En pratique on peut avoir recours à $\chi=(\rho_{\min}+\rho_{\max})/2$.

4.3 Stabilité du schéma

On démontre ici des estimations a priori satisfaites par les solutions de (4.4), si elles existent. À partir de (4.4a) et de (4.4f) la contrainte de divergence nulle satisfaite par $\boldsymbol{u}$, on obtient que la densité et la viscosité vérifient le principe du maximum discret. Il s'agit du résultat énoncé et démontré (avec $\boldsymbol{u}^n$ au lieu de $\boldsymbol{u}^{n+1}$) dans le Lemme 3.5.1 du Chapitre 3, et que l'on rappelle ci-dessous,

LEMME 4.3.1 – Principe du maximum discret. Soient $n \in \{1, \cdots, N-1\}$ et $\rho^n \in L_{\mathcal{M}}$ avec $0 < \rho_{\min} \leq \rho^n \leq \rho_{\max}$. Alors si $(\rho^{n+1}, \mu^{n+1}, \boldsymbol{u}^n) \in L^2_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}$ vérifient (4.4a)–(4.4f)–(4.4g) on a :

$$\rho_{\min} \leq \rho_K^{n+1} \leq \rho_{\max} \quad \text{et} \quad \mu_{\min} \leq \mu_K^{n+1} \leq \mu_{\max} \quad \forall K \in \mathcal{M} \tag{4.6}$$

Et en particulier $\rho_K^{n+1} \geq \chi$ pour tout $K \in \mathcal{M}$. Par ailleurs, on a l'estimation suivante pour la densité :

LEMME 4.3.2 – Stabilité pour la densité. Soit $(\rho^{n+1}, \boldsymbol{u}^n) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}$ vérifiant (4.4a)–(4.4f)–(4.4g) pour tout $n \in \{0, .., N-1\}$. Alors, on a l'estimation suivante :

$$\|\rho^N\|^2_{L^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \|\rho^{k+1} - \rho^k\|^2_{L^2} \leq \|\rho^0\|^2_{L^2}$$

Preuve: Soit $K \in \mathcal{M}$. Considérons (4.4a) que l'on multiplie par $\delta t |K| \rho_k^{n+1}$ et que l'on reformule de la façon suivante,

$$|K|(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)\rho_K^{n+1} + (\rho_K^{n+1})^2 \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| u^n_{K,\sigma} + \delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| u^n_{K,\sigma} (\rho_K^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1}) \rho_K^{n+1} = 0$$

Alors le deuxième terme est nul par (4.4f). En utilisant deux fois l'identité $2(a^2 - ab) = (a^2 - b^2) + (a-b)^2$ on obtient,

$$\frac{|K|}{2}\left[(\rho_K^{n+1})^2 + (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)^2 - (\rho_K^n)^2\right] - \frac{\delta t}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| u^n_{K,\sigma} \left[(\rho_K^{n+1})^2 + (\rho_K^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1})^2 - (\rho_\sigma^{n+1})^2\right] = 0$$

On fait de nouveau appel à (4.4f) pour le terme $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| u^n_{K,\sigma} (\rho_K^{n+1})^2$ puis on somme sur les éléments $K \in \mathcal{M}$. En utilisant (4.4g), on reformule ensuite la somme dans le deuxième terme, de façon à sommer sur les éléments $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$,

$$\|\rho^{n+1}\|^2_{L^2} + \|\rho^{n+1} - \rho^n\|^2_{L^2} - \|\rho^n\|^2_{L^2} - \delta t \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = K|L}} |\sigma| u^n_{K,\sigma} \left[(\rho_K^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1})^2 - (\rho_L^{n+1} - \rho_\sigma^{n+1})^2\right] = 0$$

Les valeurs $(\rho_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ étant données par le schéma upwind, le dernier terme est positif. En sommant l'expression pour $n = 0, .., N-1$ on obtient le résultat. □

La stabilité du schéma sans l'ajout de termes de stabilisation dans l'étape de prédiction (4.4c) est obtenue à l'aide de l'estimation ci-dessous. En effet, le choix pour les valeurs des flux $F_{\sigma,\epsilon}$ définis sur les faces duales $\epsilon \in \widetilde{\mathcal{E}}$ offre au schéma une propriété de consistance, à savoir la conservation de la masse sur les grilles duales.

LEMME 4.3.3 – Stabilité du terme de convection. On suppose que pour tout $n \in \{0, .., N-1\}$ on ait $(\rho^{n+1}, \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{u}^n) \in L_{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0} \times \boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}$ vérifiant (4.4a)–(4.4c)–(4.4f)–(4.4g). Alors l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}} \frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n \bar{u}_\sigma^n)\bar{u}_\sigma^{n+1} + \sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}\bar{u}_\epsilon^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1}$$
$$\geq \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}} \frac{|D_\sigma|}{\delta t}\Big(\rho_{D_\sigma}^{n+1}(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2 + \rho_{D_\sigma}^n(\bar{u}_\sigma^{n+1} - \bar{u}_\sigma^n)^2 - \rho_{D_\sigma}^n(\bar{u}_\sigma^n)^2\Big)$$

avec les termes à gauche de l'inégalité représentant la partie convective de (4.4c)$\cdot\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$.

Preuve: Soit $i \in [\![1, d]\!]$, $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}$ et $K, L \in \mathcal{M}$ vérifiant $\sigma = K|L$. Alors, à partir de (4.4a), de la définition de ρ_{D_σ} et des flux duaux $(F_{\sigma,\epsilon})_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}$, on obtient la conservation de la masse sur $\mathcal{E}^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
0 &= |D_{\sigma,K}|\Big[\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \frac{1}{|K|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}\Big] + |D_{\sigma,L}|\Big[\frac{1}{\delta t}(\rho_L^{n+1} - \rho_L^n) + \frac{1}{|L|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma}\Big] \\
&= \frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \frac{|D_{\sigma,K}|}{|K|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} + \frac{|D_{\sigma,L}|}{|L|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} \\
&= \frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Notons T_σ, le terme d'advection dans l'étape de prédiction (4.4c) multiplié par $|D_\sigma|\bar{u}_\sigma^{n+1}$. On a donc,

$$\begin{aligned}
T_\sigma &= \frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n\bar{u}_\sigma^n)\bar{u}_\sigma^{n+1} + \sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}\bar{u}_\epsilon^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1} \\
&= \frac{|D_\sigma|}{\delta t}\Big((\bar{u}_\sigma^{n+1})^2(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) - \rho_{D_\sigma}^n\bar{u}_\sigma^n\bar{u}_\sigma^{n+1} + (\bar{u}_\sigma^{n+1})^2\rho_{D_\sigma}^n\Big) \\
&\qquad + (\bar{u}_\sigma^{n+1})^2\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} + \sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}\bar{u}_\sigma^{n+1}(\bar{u}_\epsilon^{n+1} - \bar{u}_\sigma^{n+1})
\end{aligned}$$

Faisant alors apparaître (4.7)$\times(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2$. On utilise alors l'identité $2(a^2 - ab) = (a^2 - b^2) + (a - b)^2$ à deux reprises et on somme sur les éléments $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}} T_\sigma = \overbrace{\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\Big[\frac{|D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^n}{2\delta t}\Big((\bar{u}_\sigma^{n+1})^2 + (\bar{u}_\sigma^{n+1} - \bar{u}_\sigma^n)^2 - (\bar{u}_\sigma^n)^2\Big)\Big]}^{T_1}$$
$$\underbrace{- \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\Big[\frac{1}{2}\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}\big((\bar{u}_\sigma^{n+1})^2 + (\bar{u}_\sigma^{n+1} - \bar{u}_\epsilon^{n+1})^2 - (\bar{u}_\epsilon^{n+1})^2\big)\Big]}_{T_2}$$

Puis, en utilisant la propriété de conservation des flux ($F_{\sigma,\epsilon} = -F_{\sigma',\epsilon}$ pour $\epsilon = \sigma|\sigma' \in \widetilde{\mathcal{E}}$), on reformule ci-dessous la somme dans T_2 pour obtenir,

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2 - \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}\big((\bar{u}_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\epsilon^{n+1})^2-(\bar{u}_\epsilon^{n+1})^2\big) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\rm int}^{(i)}\\ \epsilon=\sigma|\sigma'}} F_{\sigma,\epsilon}\big((\bar{u}_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\epsilon^{n+1})^2-(\bar{u}_{\sigma'}^{n+1}-\bar{u}_\epsilon^{n+1})^2\big) \end{aligned}$$

Le second terme est nul pour $u_\epsilon^{n+1} = \frac{1}{2}(u_\sigma^{n+1}+u_{\sigma'}^{n+1})$ et positif si u_ϵ^{n+1} est défini par le schéma upwind. Par conservation de la masse (4.7), il vient :

$$T_2 \geq \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}(\rho_{D_\sigma}^{n+1}-\rho_{D_\sigma}^{n})(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2$$

Finalement,

$$T_1+T_2 \geq \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\frac{|D_\sigma|}{\delta t}\Big(\rho_{D_\sigma}^{n+1}(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2+\rho_{D_\sigma}^{n}(\bar{u}_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\sigma^{n})^2-\rho_{D_\sigma}^{n}(\bar{u}_\sigma^{n})^2\Big)$$

□

On peut dès lors adapter l'estimation de stabilité de [GS09] au cas d'une discrétisation MAC, et on obtient l'estimation a priori donnée ci-dessous,

THEORÈME 4.3.1 Supposons $(\rho^{n+1},\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1},\boldsymbol{u}^{n+1},p^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}}\times\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}\times\boldsymbol{H}_{\mathcal{E}}\times L_{\mathcal{M}}$ solution du schéma (4.4) pour tout $n\in\{0,N-1\}$ et l'étape d'initialisation vérifiée. Alors, on a l'estimation d'énergie suivante,

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{\rho_{\mathcal{E}}^N}\bar{\boldsymbol{u}}^N\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2+\frac{\mu_{\min}}{2}\|\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}\|_{L^2((0,T);\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0})}^2+\frac{\delta t^2}{\chi}\|\nabla_{\mathcal{E}}p^N\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2+\frac{\delta t^2}{\chi}\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^n-p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\quad\leq \|\sqrt{\rho_{\mathcal{E}}^0}\bar{\boldsymbol{u}}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2+\frac{\delta t^2}{\chi}\|\nabla_{\mathcal{E}}p^0\|_{\mathbf{L}^2}^2+C\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|_{L^2((0,T);\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

avec $\sqrt{\rho_{\mathcal{E}}^n}\bar{\boldsymbol{u}}^n = (\sqrt{\rho_{D_\sigma}^n}u_\sigma^n)_{\sigma\in\mathcal{E}}$. De plus, combinée avec le principe du maximum discret (4.6), on obtient que $\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^\infty((0,T),\mathbf{L}^2(\Omega))}\leq C$ avec C dépendant uniquement de ρ^0,μ^0,Ω.

Preuve: Soit $\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}$. Considérons (4.4c) que l'on multiplie par $|D_\sigma|\bar{u}_\sigma^{n+1}$,

$$\begin{aligned} &\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1}-\rho_{D_\sigma}^{n}\bar{u}_\sigma^{n})\bar{u}_\sigma^{n+1}+\sum_{\epsilon\in\widetilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}F_{\sigma,\epsilon}\bar{u}_\epsilon^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1} \\ &\quad -|D_\sigma|(\mathrm{div}_{\mathcal{E}}(\mu_{\widetilde{\mathcal{E}}}\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})))_{D_\sigma}\bar{u}_\sigma^{n+1}+|D_\sigma|(\nabla_{\mathcal{E}}\,(2p^n-p^{n-1}))_{D_\sigma}\bar{u}_\sigma^{n+1}=|D_\sigma|f_\sigma^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1} \end{aligned}$$

On somme ensuite cette expression pour tout $\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}$ pour se ramener à l'intégrale de l'équation sur Ω. En utilisant la propriété de dualité (2.50) ainsi que l'inégalité du Lemme 4.3.3 on obtient,

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\left[\frac{|D_\sigma|}{2\delta t}\Big(\rho_{D_\sigma}^{n+1}(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2+\rho_{D_\sigma}^{n}(\bar{u}_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\sigma^{n})^2-\rho_{D_\sigma}^{n}(\bar{u}_\sigma^{n})^2\Big)\right] \\ &\quad+\mu_{\min}\|\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})\|_{\mathbf{L}^2}^2+\int_\Omega\nabla_{\mathcal{E}}(2p^n-p^{n-1})\cdot\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leq\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}}|D_\sigma|f_\sigma^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

On se concentre maintenant sur l'étape de projection (4.4e). Soit donc $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$. En multipliant (4.4e) par $\delta t^2 |D_\sigma| (\nabla_\mathcal{E} \, (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}))_{D_\sigma}$ et en prenant la somme sur tous les éléments $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ on obtient,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \Big[\delta t |D_\sigma| (u_\sigma^{n+1} - \bar{u}_\sigma^{n+1}) (\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}))_{D_\sigma} \\ + \frac{|D_\sigma| \delta t^2}{\chi} \big(\nabla_\mathcal{E} \, (p^{n+1} - p^n) \big)_{D_\sigma} \big((\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) \big)_{D_\sigma} \Big] = 0$$

En décomposant $(u_\sigma^{n+1} - \bar{u}_\sigma^{n+1})$ dans le premier terme, et en réalisant une intégration par partie discrète (2.27) dans le terme en u_σ^{n+1}, ce dernier disparait par (4.4f). Il reste,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \Big[\delta t |D_\sigma| \bar{u}_\sigma^{n+1} (\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}))_{D_\sigma} \\ - \frac{|D_\sigma| \delta t^2}{\chi} \big(\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - p^n) \big)_{D_\sigma} \Big[\big(\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - p^n) \big)_{D_\sigma} - \big(\nabla_\mathcal{E} (p^n - p^{n-1}) \big)_{D_\sigma} \Big] \Big] = 0$$

On utilise encore une fois l'identité $2(a^2 - ab) = (a^2 - b^2) + (a - b)^2$,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \Big[\delta t |D_\sigma| \bar{u}_\sigma^{n+1} (\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}))_{D_\sigma} \Big] \\ - \frac{\delta t^2}{2\chi} \Big[\|\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - p^n)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \|\nabla_\mathcal{E} (p^n - p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2 \Big] = 0 \tag{4.10}$$

De la même manière, on multiplie (4.4e) par $\delta t^2 |D_\sigma| (\nabla_\mathcal{E} p^{n+1})_{D_\sigma}$, et on répète les étapes précédentes pour obtenir,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^{(i)}} \Big[\delta t |D_\sigma| \bar{u}_\sigma^{n+1} (\nabla_\mathcal{E} p^{n+1})_{D_\sigma} \Big] - \frac{\delta t^2}{2\chi} \Big[\|\nabla_\mathcal{E} p^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla_\mathcal{E} (p^{n+1} - p^n)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \|\nabla_\mathcal{E} p^n\|_{\mathbf{L}^2}^2 \Big] = 0 \tag{4.11}$$

En soustrayant l'expression (4.5)$\times |K|$ en t^n de l'expression $|K| \times$(4.5) en t^{n+1} on a,

$$|K| (\text{div}_\mathcal{M} (\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \bar{\boldsymbol{u}}^n))_K = |K| \frac{\delta t}{\chi} (\Delta_\mathcal{M} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}))_K, \qquad \forall K \in \mathcal{M}$$

On multiplie le résultat par $(p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1})_K$ et on somme sur l'ensemble des cellules $K \in \mathcal{M}$ de façon à revenir à l'intégrale sur Ω,

$$\int_\Omega \text{div}_\mathcal{M} (\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \bar{\boldsymbol{u}}^n) (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ = \int_\Omega \frac{\delta t}{\chi} \Delta_\mathcal{M} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4.12}$$

On procède à l'intégration par partie de chaque terme : le premier par la formule (2.27) puis, en posant $\phi = p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\frac{\delta t}{\chi}\int_\Omega (\Delta_{\mathcal{M}}\phi)\phi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \frac{\delta t}{\chi}\sum_{K\in\mathcal{M}}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}(K)\\ \sigma=K|L}} |\sigma|\frac{\phi_L-\phi_K}{d(\boldsymbol{x}_K,\boldsymbol{x}_L)}\phi_K \\ &= \frac{\delta t}{\chi}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}\\ \sigma=K|L}} \frac{|\sigma|}{d(\boldsymbol{x}_K,\boldsymbol{x}_L)}\Big[(\phi_L-\phi_K)\phi_K + (\phi_K-\phi_L)\phi_L\Big] \\ &= -\frac{\delta t}{\chi}\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}\\ \sigma=K|L}} \frac{|\sigma|}{d(\boldsymbol{x}_K,\boldsymbol{x}_L)}(\phi_L-\phi_K)^2 = -\frac{\delta t}{\chi}\int_\Omega \nabla_{\mathcal{E}}\phi\cdot\nabla_{\mathcal{E}}\phi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

en notant ici encore que les termes de bords disparaissent. On applique maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (4.12),

$$\frac{\delta t}{\chi}\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^{n+1}-2p^n+p^{n-1})\|_{\mathbf{L^2}}^2 \le \|\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\bar{\boldsymbol{u}}^n\|_{\mathbf{L^2}}\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^{n+1}-2p^n+p^{n-1})\|_{\mathbf{L^2}}$$

Ce qui donne en utilisant l'hypothèse (4.6) : $\chi \le \rho_{D_\sigma}^n$, $\forall\sigma\in\mathcal{E}$,

$$\frac{\delta t^2}{\chi}\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^{n+1}-2p^n+p^{n-1})\|_{\mathbf{L^2}}^2 \le \chi\|\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\bar{\boldsymbol{u}}^n\|_{\mathbf{L^2}}^2 \le \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}} |D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^n(\bar{u}_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\sigma^n)^2 \tag{4.13}$$

On considère à nouveau (4.9) que l'on multiplie par $2\delta t$. On note que $(2p^n - p^{n-1}) = -(p^{n+1}-2p^n+p^{n-1}) + p^{n+1}$ dans le terme de pression et on utilise donc (4.10) et (4.11) pour obtenir,

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\Big[|D_\sigma|\Big(\rho_{D_\sigma}^{n+1}(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2 + \rho_{D_\sigma}^n(\bar{u}_\sigma^{n+1}-\bar{u}_\sigma^n)^2 - \rho_{D_\sigma}^n(\bar{u}_\sigma^n)^2\Big)\Big] + 2\delta t\mu_{\min}\|\mathbf{D}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &-\frac{\delta t^2}{\chi}\Big[\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^{n+1}-p^n)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla_{\mathcal{E}}(p^{n+1}-2p^n+p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \|\nabla_{\mathcal{E}}(p^n-p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2\Big] \\ &+\frac{\delta t^2}{\chi}\Big[\|\nabla_{\mathcal{E}}p^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla_{\mathcal{E}}(p^{n+1}-p^n)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \|\nabla_{\mathcal{E}}p^n\|_{\mathbf{L}^2}^2\Big] \le 2\delta t\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}}|D_\sigma|f_\sigma^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1}\end{aligned}$$

On utilise (4.13) pour traiter le terme $\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^{n+1}-2p^n+p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2$,

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\Big[|D_\sigma|\Big(\rho_{D_\sigma}^{n+1}(\bar{u}_\sigma^{n+1})^2 - \rho_{D_\sigma}^n(\bar{u}_\sigma^n)^2\Big)\Big] + 2\delta t\mu_{\min}\|\mathbf{D}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &+\frac{\delta t^2}{\chi}\Big[\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^n-p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla_{\mathcal{E}}p^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \|\nabla_{\mathcal{E}}p^n\|_{\mathbf{L}^2}^2\Big] \\ &\le 2\delta t\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}}|D_\sigma|f_\sigma^{n+1}\bar{u}_\sigma^{n+1}\end{aligned} \tag{4.14}$$

Étant donné que $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} \in \boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0}$, on applique l'inégalité de Korn (2.51) au terme diffusif dans (4.14). Pour le second membre, on fait appel – dans cet ordre – à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à l'inégalité de

Poincaré (2.44) puis à l'inégalité de Young avec $\epsilon = \mu_{\min}/2$. Alors il existe une constante C dépendant uniquement de Ω et $\mu_{\min}$ telle que,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\left[|D_\sigma|\Big(\rho_{D_\sigma}^{n+1}(\bar u_\sigma^{n+1})^2-\rho_{D_\sigma}^{n}(\bar u_\sigma^{n})^2\Big)\right]+\delta t\frac{\mu_{\min}}{2}\|\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{E},0}^2 \\ +\frac{\delta t^2}{\chi}\left[\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^n-p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla_{\mathcal{E}}p^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2}^2-\|\nabla_{\mathcal{E}}p^{n}\|_{\mathbf{L}^2}^2\right]\le C\delta t\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \tag{4.15}$$

On conclut finalement en additionnant (4.15) sur $n\in\{0,N-1\}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}^{(i)}}\left[|D_\sigma|\Big(\rho_{D_\sigma}^{N}(\bar u_\sigma^{N})^2-\rho_{D_\sigma}^{0}(\bar u_\sigma^{0})^2\Big)\right]+\frac{\mu_{\min}}{2}\|\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}\|_{L^2((0,T);\boldsymbol{H}_{\mathcal{E},0})}^2 \\ +\frac{\delta t^2}{\chi}\left[\|\nabla_{\mathcal{E}}p^{N}\|_{\mathbf{L}^2}^2-\|\nabla_{\mathcal{E}}p^{0}\|_{\mathbf{L}^2}^2\right]+\frac{\delta t^2}{\chi}\sum_{n=0}^{N-1}\|\nabla_{\mathcal{E}}(p^n-p^{n-1})\|_{\mathbf{L}^2}^2\le C\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|_{L^2((0,T);\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \tag{4.16}$$

□

4.4 Schéma de transport antidiffusif

Jusqu'à présent, on faisait appel à un schéma upwind pour la définition des flux de masse dans l'équation de conservation de la masse (4.4a),

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1}-\rho_K^n)+\frac{1}{|K|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}|\sigma|\rho_\sigma^{n+1}u_\sigma^n=0\quad\text{avec}\quad\rho_\sigma^{n+1}=\begin{cases}\rho_K^{n+1}, & u_{K,\sigma}^n\ge 0\\ \rho_L^{n+1}, & \text{sinon}\end{cases}\quad\text{pour}\quad\sigma=K|L$$

En revanche, ce schéma est réputé comme générateur de diffusion numérique. Un tel phénomène devient donc problématique lors de la simulation d'un écoulement de fluides non miscibles ou d'un écoulement particulaire, où on se retrouve dans la situation de l'advection d'une interface. L'objet de cette section est donc d'introduire un schéma antidiffusif (AD) basé sur les algorithmes présentés dans [BZ07, DL01], eux-même semblables au schéma Ultra–Bee [Roe85]. Dans [DL01], Desprès et Lagoutière introduisent un schéma 1D d'ordre 1 ayant la propriété d'advecter "exactement" une fonction étagée pour une vitesse constante donnée. Dans [BZ07], ce schéma est généralisé au cas de vitesses non constantes (et changeant de signe). Étant donné qu'il s'agit dans ces travaux de schémas 1D et discrétisés sur un maillage colocalisé, on présente donc la construction d'un schéma antidiffusif adapté à notre contexte. La généralisation aux dimensions supérieures utilisée ici est obtenue en découplant chaque direction de façon à se ramener à un transport 1D. Cependant des précautions sont à prendre vis-à-vis de la contrainte d'incompressibilité qui n'est alors plus vérifiée pour chaque direction.

Afin d'introduire le schéma AD, on se place donc dans un premier temps dans le cas 1D en réalisant le transport dans la direction $\boldsymbol{e}_i$, pour $i\in\{1,..,d\}$. Soit $K\in\mathcal{M}$ une cellule primale. On note ρ_K^* la nouvelle valeur de la densité sur K calculée à partir de ρ_K, sa valeur au pas de temps précédent. La cellule K est supposée à l'intérieur du domaine, de telle sorte qu'il existe $(K^-,K^+)\in\mathcal{M}^2$ avec K^-,K,K^+ consécutives. On peut donc définir $(\sigma^-,\sigma^+)\in{\mathcal{E}^{(i)}}^2$ vérifiant $\sigma^-=K^-|K$ et $\sigma^+=K|K^+$. Pour finir on impose, sans perte de généralité, l'ordre des cellules en écrivant $\boldsymbol{n}_{K,\sigma^+}\cdot\boldsymbol{e}_i\ge 0$ et $\boldsymbol{n}_{K,\sigma^-}\cdot\boldsymbol{e}_i\le 0$ (voir Figure 4.1 ci–dessous). L'équation de transport sur K dans la direction $\boldsymbol{e}_i$ est donnée par,

$$\frac{\rho_K^*-\rho_K}{\delta t}+\frac{1}{|K|}(F_{K,\sigma^+}+F_{K,\sigma^-})=0$$

On travaille ci-dessous à définir les flux F_{K,σ^+}, F_{K,σ^-}. Puisque le transport de seule une des d directions

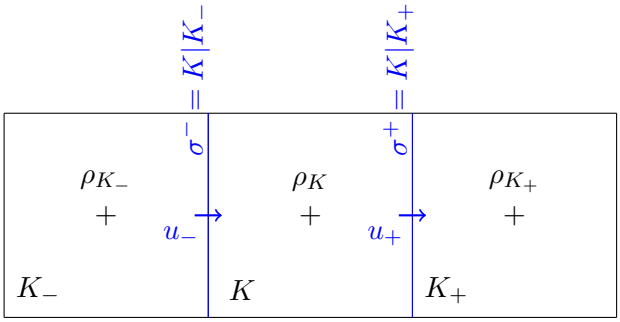

FIGURE 4.1 – Notations pour le transport dans la direction $i = 1$ ($d = 2$).

est effectué, la contrainte d'incompressibilité n'est plus vérifiée (à l'échelle d'une direction). Cela nous ramène donc à considérer l'équation d'advection 1D suivante,

$$\frac{\rho_K^* - \rho_K}{\delta t} + \frac{|\sigma|}{|K|}\Big[\underbrace{(\rho_{\sigma^+}u_{\sigma^+} - \rho_{\sigma^-}u_{\sigma^-})}_{\mathrm{div}(\rho u_i)} - \underbrace{(u_{\sigma^+} - u_{\sigma^-})\rho_K}_{(\mathrm{div}u_i)\rho}\Big] = 0 \tag{4.17}$$

où u_{σ^-} et u_{σ^+} sont les valeurs de u_i connues et définies au centre des faces σ^- et σ^+ respectivement. Les valeurs ρ_{σ^-} et ρ_{σ^+} sont les valeurs de la densité sur σ^- et σ^+ et sont donc à déterminer. Notons que $|\sigma| = |\sigma^-| = |\sigma^+|$. En posant ν_{σ^-} et ν_{σ^+} comme étant les nombres de Courant associés aux faces σ^- et σ^+ respectivement, on définit :

$$\nu_{\sigma^-} = \frac{\delta t|\sigma|u_{\sigma^-}}{|K|} \qquad \nu_{\sigma^+} = \frac{\delta t|\sigma|u_{\sigma^+}}{|K|}$$

Alors, une formulation équivalente de (4.17) est :

$$\rho_K^* = \rho_K + \nu_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{\sigma^+}) + \nu_{\sigma^-}(\rho_{\sigma^-} - \rho_K) \tag{4.18}$$

On détermine ρ_{σ^-} et ρ_{σ^+} afin que ρ_K^* soit une combinaison convexe de ρ_K, ρ_{K^-}, ρ_{K^+}. Le choix 'upwind' pour ces valeurs étant à l'origine du phénomène de diffusion, la méthode ici consiste à partir d'une valeur initiale 'downwind', à caractère antidiffusif, que l'on projette sur un intervalle admissible. Si on note $\rho^0_{\sigma^-}$ et $\rho^0_{\sigma^+}$ ces valeurs initiales, on a :

$$\rho^0_{\sigma^-} = \begin{cases} \rho_K \text{ si } u_{\sigma^-} \geq 0, \\ \rho_{K^-} \text{ sinon.} \end{cases} \qquad \rho^0_{\sigma^+} = \begin{cases} \rho_{K^+} \text{ si } u_{\sigma^-} \geq 0, \\ \rho_K \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons $|[a,b]| = [\min(a,b), \max(a,b)]$. On impose alors une première condition "naturelle" pour les valeurs de ρ_{σ^-} et ρ_{σ^+} :

$$\rho_{\sigma^-} \in |[\rho_K, \rho_{K^-}]| \quad \text{et} \quad \rho_{\sigma^+} \in |[\rho_K, \rho_{K^+}]| \tag{4.19}$$

Afin d'illustrer la construction de l'intervalle admissible, considérons l'implémentation de ρ_{σ^+}. On suppose dans un premier temps que $u_{\sigma^-}, u_{\sigma^+} \geq 0$. Le cas négatif pourra être déduit par symétrie, et on abordera les cas avec changements de signe de la vitesse en dernier lieu. D'après (4.19), il existe $\alpha^- \in [0,1]$ tel que $(\rho_{\sigma^-} - \rho_K) = \alpha^-(\rho_{K^-} - \rho_K)$. En posant α^+ tel que $(\rho_K - \rho_{\sigma^+}) = \alpha^+(\rho_{K^-} - \rho_K)$ on obtient pour (4.18) :

$$\rho_K^* = (1 - (\nu_{\sigma^+}\alpha^+ + \nu_{\sigma^-}\alpha^-))\rho_K + (\nu_{\sigma^+}\alpha^+ + \nu_{\sigma^-}\alpha^-)\rho_{K^-} \tag{4.20}$$

On obtient donc une combinaison convexe des valeurs ρ_K et ρ_{K^-} sous la condition que $(\nu_{\sigma^+}\alpha^+ + \nu_{\sigma^-}\alpha^-) \in [0,1]$ pour $\alpha^- \in [0,1]$, soit :

$$0 \leq \alpha^+ \leq \frac{1-\nu_{\sigma^-}}{\nu_{\sigma^+}}$$

d'où la deuxième condition imposée à ρ_{σ^+} : $\rho_{\sigma^+} \in |[\rho_K, \rho_K + (1-\nu_{\sigma^-})/\nu_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{K^-})]|$. On note par ailleurs l'apparition de la condition CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) sur u_{σ^-} donnée par,

$$\nu_{\sigma^-} = \frac{|\sigma|\delta t u_{\sigma^-}}{|K|} < 1$$

L'algorithme pour l'implémentation de ρ_{σ^+} quand $u_{\sigma^-}, u_{\sigma^+} \geq 0$ est donc le suivant :

— Initialisation par le schéma downwind : $\rho^0_{\sigma^+} = \rho_{K^+}$

— Projection de $\rho^0_{\sigma^+}$ sur $|[\rho_K, \rho_{K^+}]| \cap |[\rho_K, \rho_K + (1-\nu_{\sigma^-})/\nu_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{K^-})]|$:

$$\zeta^- = \max(\min(\rho_K, \rho_{K^+}), \min(\rho_K, \rho_K + (1-\nu_{\sigma^-})/\nu_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{K^-})))$$
$$\zeta^+ = \min(\max(\rho_K, \rho_{K^+}), \max(\rho_K, \rho_K + (1-\nu_{\sigma^-})/\nu_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{K^-})))$$

$$\rho_{\sigma^+} = \begin{cases} \zeta^- & \text{si } \rho^0_{\sigma^+} < \zeta^- \\ \rho^0_{\sigma^+} & \text{si } \rho^0_{\sigma^+} \in [\zeta^-, \zeta^+] \\ \zeta^+ & \text{si } \rho^0_{\sigma^+} > \zeta^+ \end{cases}$$

Pour l'implémentation de ρ_{σ^-}, on utilise le même raisonnement en prenant $K = K^-$. Dans le cas où $u_{\sigma^-}, u_{\sigma^+} \leq 0$ on procède par symétrie, et on peut construire un intervalle admissible sous réserve cette fois–ci qu'une CFL sur la valeur u_{σ^+}, donnée par $\nu_{\sigma^+} < 1$, soit satisfaite. Il reste alors à traiter les deux situations pour lesquelles u_{σ^+} et u_{σ^-} sont de signe contraire. Dans les deux cas on adopte le schéma upwind pour le calcul ρ_{σ^-} et ρ_{σ^+} mais notons que dans [BZ07], le schéma downwind est utilisé pour $u_{\sigma^+} > 0$ et $u_{\sigma^-} < 0$.

On revient à la dimension $d = 2, 3$ en itérant sur chaque direction $i = 1, ..d$: il s'agit donc de transporter la densité direction par direction. Pour $d = 3$, on construit les états intermédiaires de la densité ρ^* et ρ^{**} à la manière des pas fractionnaires. Une optimisation possible pour l'algorithme ci-dessous consiste alors à itérer de façon aléatoire sur les directions.

$$\rho^*_K = \rho_K - \nu^{(1)}_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{\sigma^+}{}^{(1)}) - \nu^{(1)}_{\sigma^-}(\rho_{\sigma^-}{}^{(1)} - \rho_K)$$

$$\rho^{**}_K = \rho^*_K - \nu^{(2)}_{\sigma^+}(\rho^*_K - \rho^*_{\sigma^+}{}^{(2)}) - \nu^{(2)}_{\sigma^-}(\rho^*_{\sigma^-}{}^{(2)} - \rho^*_K)$$

$$\rho^{***}_K = \rho^{**}_K - \nu^{(3)}_{\sigma^+}(\rho^{**}_K - \rho^{**}_{\sigma^+}{}^{(3)}) - \nu^{(3)}_{\sigma^-}(\rho^{**}_{\sigma^-}{}^{(3)} - \rho^{**}_K)$$

4.5 Tests numériques

Dans un premier temps, les propriétés antidiffusives du schéma AD sont examinées pour plusieurs dimensions, en imposant une vitesse d'advection de façon à tester l'étape de transport (4.4a) uniquement. Le schéma AD est ensuite combiné au schéma de projection pénalisé (4.4) pour la simulation de la chute d'une bille dans un fluide incompressible visqueux.

4.5.1 Transport d'une fonction étagée en 1D.

On réalise le transport d'une fonction densité discontinue dans un domaine $\Omega = [0, 2]$ et sur l'intervalle de temps $[0, 2]$. Pour les pas de discrétisation en temps et en espace, on pose $\delta t = 0.02$ et $h = 0.005$. La densité initiale ρ^0 est définie par $0.3(\mathbb{1}_{[0.1,0.5]}(x) + \mathbb{1}_{[1.0,1.5]}(x))$ et est advectée par la vitesse $u(t, x) = \frac{3}{2\pi} \max(\arctan(10^3(x - t - 1)), \arctan(-10^3(x - t - 1/10)))$. La fonction u a été choisie de façon à obtenir des changements de signe soudains, pour ainsi expérimenter les différentes situations du schéma. La fonction étagée se déplace donc d'une extrémité du domaine à l'autre. Au cours du temps, le profil de la fonction étagée n'est modifié que par une réduction –attendue – de son plateau (voir Fig.4.2). Aucune diffusion numérique n'a été ajoutée par le schéma AD, et les bornes de la densité demeurent identiques à celle de ρ^0.

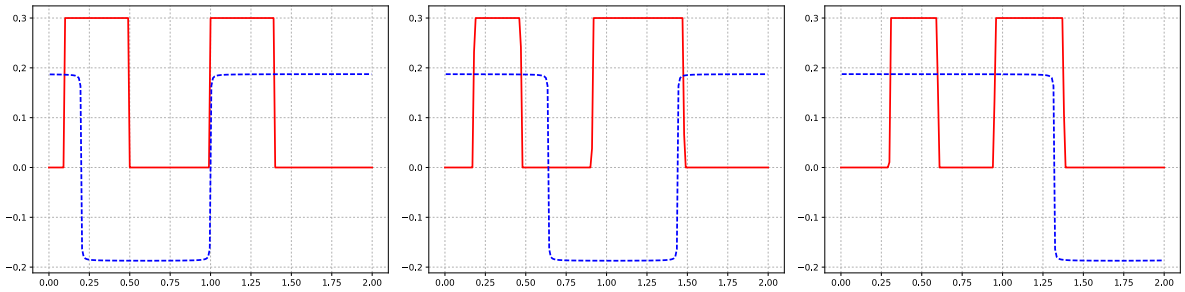

FIGURE 4.2 – État de la densité (en rouge) aux temps $t = 0.0$, $t = 0.22$, $t = 0.56$. La figure représente également la vitesse (en bleu) afin de mettre en évidence les changements de signe pour la vitesse.

4.5.2 Transport d'une fonction étagée en 3D.

Pour ce deuxième test, on étudie le comportement d'une fonction étagée transportée par un champ de vitesse incompressible $(0, -\sin(y)\cos(z), \sin(z)\cos(y))$ pour (x, y, z) parcourant le domaine $\Omega = [0, \pi]^3$. On pose $h = 0.005$ et $\delta t = 0.001$ pour les pas de discrétisation. La fonction étagée au temps $t = 0.0$ est définie comme la sphère de rayon 0.3 et d'origine $(\pi/2, \pi/2, \pi/4)$. Les différentes colonnes dans Fig. 4.3 représentent des coupes 2D du domaine Ω. Une déformation attendue se produit étant donné qu'aucune contrainte de rigidité n'est imposée. On observe très peu de diffusion au niveau de l'interface au cours du temps, et une conservation des bornes de la densité. Le changement de topologie du plateau provient probablement de la finesse du maillage et de la non-régularité de la sphère initiale.

4.5.3 Chute d'une bille dans un fluide.

On observe maintenant la chute d'une sphère rigide dans le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 3]$ contenant un fluide visqueux (Fig.4.4). On décompose alors Ω en un domaine fluide et un domaine solide, et on a $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_f(t) \cup \Omega_s(t)}$. On caractérise le fluide par sa densité ρ_f et sa viscosité μ_f et on pose $\rho_f = \mu_f = 1.0$. Une force de gravité, de constante $g = 981.0$, est appliquée à la sphère et enclenche le mouvement. On définit cette dernière par son rayon $r = 0.08$ et sa densité $\rho_s = 2.0$. La rigidité de la bille est obtenue en prenant $\mu_s = 10^5$ de façon à pénaliser le tenseur des taux de déformations dans le solide. Pour les pas de discrétisation, on considère $\delta t = 0.001$ et $h = \max_{i=x,y,z} h_i = 1/80$. Au temps initial $t = 0$, le fluide est supposé être au repos et le centre de la sphère a pour position $(0.5, 0.5, 1)$. Pour l'étape d'initialisation, on prend $p^{-1} = 0$ et on détermine $(p^0, \bar{\boldsymbol{u}}^0)$ par projection de la vitesse initiale sur H. La figure 4.4 représente – dans cet ordre – la densité, la composante de la vitesse associée à la chute, et la pression au bout de 250 itérations. On observe une advection de la bille sans déformation et avec très peu de diffusion au niveau de l'interface fluide–solide, malgré un maillage relativement grossier

et un mouvement complexe du fluide dans la région occupée par la bille (suite à la pénalisation H1). Sur cet aspect, le cas test vient confirmer les résultats du test précédent. Le schéma antidiffusif devrait ainsi minimiser les efforts de reconstruction de la fonction caractéristique de la particule. Par ailleurs, les profils de vitesse et de pression correspondent à ce qui peut être attendu pour la simulation de la chute d'une bille dans un fluide, ce qui est satisfaisant. En revanche, d'autres études comparatives sont nécessaires afin d'observer l'influence de l'étape de projection pénalisée par χ sur la vitesse terminale de la bille.

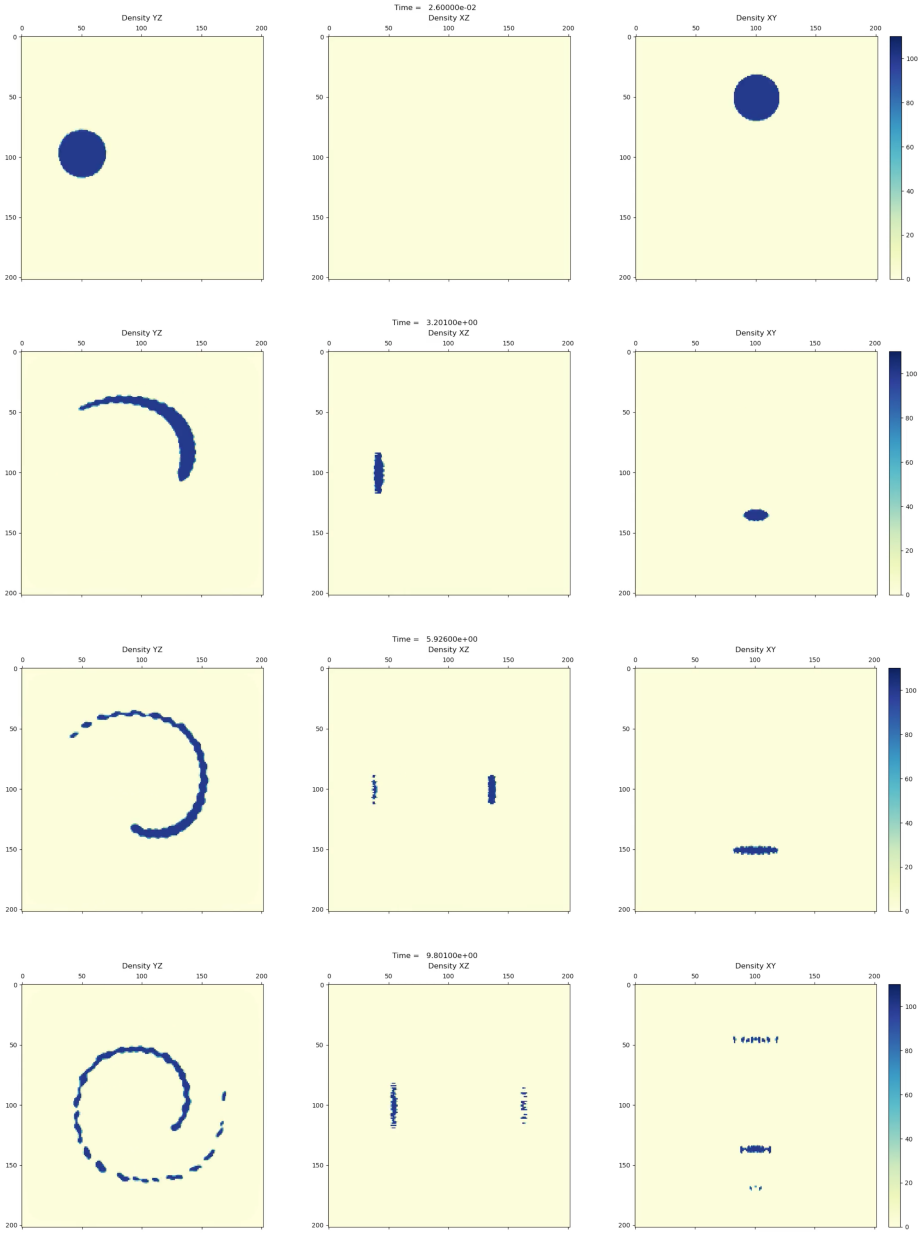

FIGURE 4.3 – État de la densité pour $t = 0.026$, $t = 3.2$, $t = 5.9$, $t = 9.8$ (de haut en bas). Chaque ligne représente l'état de la densité à un temps donné. Les colonnes représentent trois coupes 2D du domaine $\Omega = [0, \pi]^3$. De gauche à droite : pour $x = \frac{\pi}{2}$, pour $y = \frac{\pi}{2}$ et pour $z = \frac{\pi}{2}$.

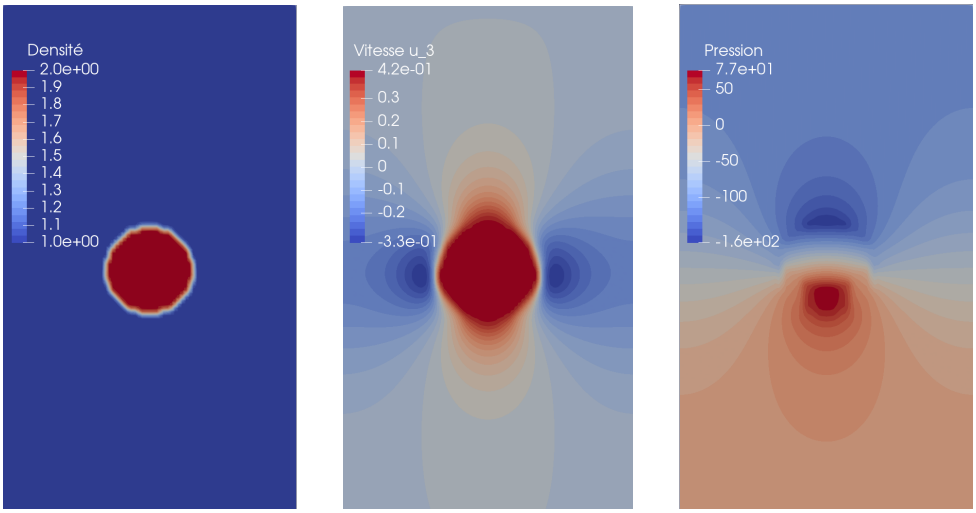

FIGURE 4.4 – De gauche à droite : État de la densité, de la vitesse u_3 (associée à la direction de chute) et de la pression pour $t = 0.25$.

Chapitre 5

Code de simulation Fluide–Structure RheoScop

5.1 Introduction

RheoScop est un code de calcul multilangage (Fortran90, Python, C++) permettant de résoudre numériquement en dimension 2 ou 3 des problèmes d'écoulements particulaires, et plus généralement des interactions fluide–structure avec plusieurs degrés de couplage. Il est le fruit du travail réalisé lors de quatre thèses de doctorat effectuées à l'Université des Antilles, dont celle–ci. À l'origine, il s'agissait d'un code de calcul conçu en fortran90 par Carine Février [FLPA09] pour la résolution des équations de Navier–Stokes 2D discrétisées sur un maillage MAC par différences finies. Par la suite, Jean–Marc Mounsamy s'est basé sur ce code pour construire VivAn'O, avec le passage à la dimension 3 et à une discrétisation en volumes finis pour des applications à la bathymétrie [JMMP12]. Une première extension pour la simulation des écoulements particulaires a été réalisée par Sidney Solvar afin d'étudier le déplacement de macro–bactéries dans la mangrove : le système fluide/solide était supposé découplé et l'influence des particules sur le fluide était négligée en raison de leur taille. Il était alors possible d'utiliser le principe fondamental de la dynamique de façon ponctuelle, en advectant uniquement le centre de masse des particules. La population nombreuse de bactéries a motivé le couplage du code VivAn'O à SCoPi, un code C++ de gestion de collisions développé par l'équipe de Bertrand Maury [SFT09]. Un programme d'interface en python a donc été écrit afin de faciliter la communication entre les deux codes.

La problématique de la thèse actuelle découle des phénomènes de suspensions en rhéologie. De manière générale, la présence de particules dans un fluide influe sur la viscosité apparente du système global. À l'échelle macroscopique, ceci se manifeste alors par une relation non linéaire entre la déformation de la suspension et les contraintes appliquées au fluide. Cette observation est d'autant plus marquée que la concentration de particules dans le fluide augmente. Afin d'étudier de tels phénomènes, il était donc nécessaire de rendre les particules 'visibles' par le fluide en ajoutant un couplage fort dans VivAn'O. Une première réfléxion consistait alors à choisir un modèle continu pour l'interaction fluide–solide compatible avec le code de calcul existant. Notre choix s'est donc porté sur les méthodes de pénalisation de volume afin de pouvoir conserver l'algorithme de discrétisation du domaine par la méthode MAC déjà présent. Il a donc été question d'adapter la résolution des équations de Navier–Stokes au cas d'une densité et d'une viscosité variable, puis d'entreprendre l'implémentation de méthodes pour l'advection des particules. Nous avons également été contraints de définir le domaine solide – jusqu'ici représenté par des points dans le fluide – de façon particulière afin de garantir le couplage avec SCoPi.

Dans une première partie, on présente les fonctions des trois codes composant RheoScop. Dans une

deuxième partie on introduit les algorithmes implémentés pour la résolution d'écoulements particulaires pour plusieurs degrés de couplage fluide–solide, puis dans une dernière partie on présente une perspective de parallélisation du code RheoScop.

5.2 Le code de calcul RheoScop

On présente dans cette section les différentes fonctions des parties qui composent le code RheoScop, en commençant par l'interface python permettant la communication entre VivAn'O et SCoPi et qui est le premier programme a être exécuté.

5.2.1 L'interface python.

En raison de la barrière de langage entre VivAn'O et SCoPi, une interface python a été écrite de façon a faciliter l'échange entre les deux programmes. Il s'agit d'une partie de RheoScop purement décisionelle, dans le sens où aucun calcul lié à la résolution numérique du problème n'est réalisé. C'est d'ailleurs ce qui a motivé le choix d'un langage non compilé pour l'interface. C'est dans ce programme que se déroule la lecture des fichiers d'entrées. Parmis ces entrées on retrouve notamment les données du problème continu (type de pénalisation, définition du domaine, conditions au bord), les caractéristiques physiques de la suspension (densité, viscosité, type de particules), le choix de la méthode de résolution et les paramètres de discrétisation.

Étant donné que le problème fluide–solide est résolu dans VivAn'O, et que SCoPi est en charge de la gestion des collisions, c'est dans l'interface python que l'on trouve la boucle en temps. Ainsi à chaque pas de temps, le programme python reçoit de VivAn'O les vitesses des particules calculées à partir de la nouvelle solution du schéma numérique, puis transmet ces vitesses à SCoPi qui va détecter de possibles collisions. La taille des données échangées entre les trois programmes est donc optimisée et relativement faible, ce qui en fait une interface efficace.

5.2.2 VivAn'O : pour la résolution du système couplé Fluide–Solide.

Il s'agit de la partie de RheoScop conçue en fortran90. Sa programmation est basée sur une approche orientée objet [JMMP12], au moyen de l'usage de modules fortran. Ainsi, depuis la construction du maillage MAC jusqu'à l'écriture des fichiers de sortie graphique, en passant par les méthodes de résolution : chaque module de VivAn'O contient des subroutines et un jeu de données propres à une fonction particulière du code. On recherche par cette méthode de programmation l'autonomie de chaque partie de VivAn'O, ce qui facilite son évolution pour des futures applications. C'est d'ailleurs dans VivAn'O que l'on effectue la totalité des calculs et des allocations mémoire de grande taille.

Outre les étapes d'initialisation ou la gestion des sorties, RheoScop englobe la totalité de la résolution du système couplé fluide–solide : à chaque pas de temps, le domaine solide est mis à jour (en cas de collision détectée par SCoPi), puis le problème fluide pénalisé est résolu par une méthode de prédiction–correction. Finalement, selon la méthode de pénalisation choisie, la phase solide est advectée et les nouvelles vitesses des particules sont communiquées à l'interface python. Le détail de ces étapes est donné dans la section 5.3.

5.2.3 SCoPi : pour la gestion des collisions.

De façon générale, les forces visqueuses générées par le fluide servent à éviter les collisions d'ordre physique entre les particules. Cependant une finesse du maillage insatisfaisante ou une concentration

élevée de particules peuvent donner lieu à des collisions d'origine numérique. Celles ci peuvent par exemple se manifester par un chevauchement de deux particules, ou par une particule traversant une autre. Il est alors nécessaire d'adopter une stratégie pour éviter ces phénomènes. Une méthode possible consiste à implémenter des forces de répulsions entre les particules. Nous adoptons ici l'algorithme implémenté dans le code SCoPi [SFT09] : par un algorithme d'Uzawa pour la résolution d'un problème de point selle, les vitesses des particules prédites par VivAn'O sont projetées sur un espace de vitesses admissibles. En cas de collision détectée, les positions des particules sont corrigées et les nouvelles vitesses sont communiquées à VivAn'O par le biais de l'interface python.

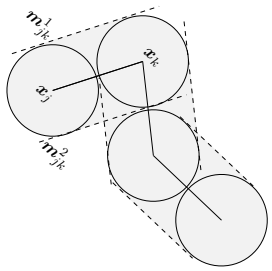

FIGURE 5.1 – Définition d'une particule
non sphérique à partir de sous–sphères

Un avantage notable en faveur de l'utilisation de SCoPi est la possibilité de traiter des particules non sphériques, et éventuellement déformables. Une telle particule est alors définie comme la réunion de sous–sphères, et l'algorithme d'Uzawa est appliqué à chacune d'elles. Cependant, cette discrétisation de la particule n'est plus cohérente avec le problème continu. Si cette stratégie est suffisante dans le cas où le système fluide–particules est découplé, il faut en revanche redéfinir la fonction caractéristique du domaine solide lorsque celui-ci influe sur la dynamique du fluide. La méthode retenue est alors de considèrer la réunion des enveloppes convexes de deux particules voisines (voir Figure 5.1). Dans la suite on qualifie de macro–particule toute particule non–sphérique composée de sous–sphères.

5.3 Résolution du système Fluide–Structure, et algèbre linéaire.

On détaille dans cette section l'algorithme implémenté dans VivAn'O pour la résolution du problème fluide–structure, sur un pas de temps. En suivant les notations du chapitre 1, on suppose que le fluide est homogène de densité et de viscosité ρ et μ. Au temps t^n, on note Ω_f^n le domaine fluide et $\Omega_S^n = \cup_{k=1}^N \Omega_{S_k}^n$ le domaine solide composé de N particules rigides de densités respectives ρ_k pour $k = 1, .., N$. Les deux domaines forment ainsi une partition de Ω et on a $\Omega_f^n = \Omega \backslash \overline{\Omega_S^n}$.

De façon générale, la résolution se déroule en trois étapes. On effectue en premier lieu l'advection du domaine solide (prenant en compte les vitesses éventuellement corrigées par SCoPi). Il vient ensuite la résolution du problème fluide – pénalisé ou non suivant le couplage considéré – puis la résolution d'un problème solide permettant de calculer les vitesses caractéristiques des particules. Deux types de couplages sont implémentés pour deux usages différents : un couplage faible à sens unique selon la méthode proposée dans [SLGB], et un couplage fort à l'aide des méthodes de pénalisation de volumes présentées dans le chapitre 1. Pour la pénalisation H1, on présente deux techniques pour l'advection des particules.

5.3.1 Résolution fluide par une méthode de prédiction–correction

Cette étape est commune aux différents algorithmes de résolution fluide–particule. On y résout un schéma de projection incrémentale issu du problème fluide continu de façon à obtenir la vitesse du fluide au nouveau pas de temps. Selon la méthode de traitement pour les particules, les systèmes linéaires à résoudre ici changent. On aborde en détail les systèmes résolus pour chacune d'entre elles dans les parties qui leur sont consacrées. Formellement, il s'agit dans tous les cas d'un problème donné par :

Prédiction : trouver $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ vérifiant,

$$\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t(\mathrm{NL}(\boldsymbol{u}^n) + \mathrm{A})\Big)\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{u}^n, \nabla p^n, \boldsymbol{\rho}^{n+1})$$

Correction : trouver $\boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}$ vérifiant,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\Big(\frac{\delta t}{\boldsymbol{\rho}^{n+1}}\nabla\Phi^{n+1}\Big) = \mathrm{div}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}\\
&p^{n+1} = \Phi^{n+1} + p^n\\
&\boldsymbol{u}^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \frac{\delta t}{\boldsymbol{\rho}^{n+1}}\nabla\Phi^{n+1}
\end{aligned}$$

Dans l'étape de prédiction on retrouve les matrices I_N, $\mathrm{NL}(\boldsymbol{u}^n)$ et A de dimension $N_\mathcal{E} \times N_\mathcal{E}$ où $N_\mathcal{E} = \mathrm{card}(\mathcal{E})$. La matrice $\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}}$ désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^{N_\mathcal{E}\times N_\mathcal{E}}$ et $\mathrm{NL}(\boldsymbol{u}^n)$ correspond à la discrétisation du terme convectif linéarisé défini dans le Chapitre 2. Dans A on retrouve la matrice issue de la discrétisation du terme diffusif à laquelle on additionne une matrice diagonale si la méthode de pénalisation L2 est utilisée. Le second membre contient toutes les quantités déjà connues. Selon l'expression de $\mathrm{NL}(\boldsymbol{u}^n)$, il est possible que la matrice $(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t(\mathrm{NL}(\boldsymbol{u}^n) + \mathrm{A}))$ soit non symétrique, et on utilise alors la méthode itérative GMRES pour son inversion. Le problème de la symétrie ne se pose pas pour la résolution du système dans l'étape de correction, et on fait donc appel à la méthode du gradient conjugué [GL13]. Grâce à l'utilisation de modules fortran, la définition des matrices $\mathrm{NL}(\boldsymbol{u}^n)$ et A est indépendante du module associé aux méthodes de résolution fluide : il s'agit donc d'une unique subroutine utilisée pour tous les modèles de traitement du solide.

5.3.2 Système découplé : Principe fondamental de la dynamique ponctuel.

Une résolution numérique par cette méthode [SLGB] est justifiée lorsque la taille des particules est suffisament petite et pour des écoulements à faibles nombres de Reynolds. Sous ces conditions on peut alors négliger la contribution des particules sur la dynamique du fluide. On retrouve donc un schéma de prédiction–correction classique [GMS06] pour la résolution du problème fluide. Pour une particule sphérique homogène, les effets de rotation sont négligés et la vitesse solide est donc déterminée uniquement par sa vitesse de translation à l'aide du principe fondamental de la dynamique (1.5a) :

$$M_k\frac{\mathrm{d}U_k^{n+1}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1} F_i^n \qquad k = 1, .., N$$

avec U_k^{n+1} étant la vitesse de translation de la k–ième particule $\Omega_{S_k}^n$ au temps t^{n+1}. Le second membre regroupe les forces $(F_i^n)_i$ appliquées à la particule, calculées explicitement à partir de modèles bien définis. Pour une particule de rayon R_k : on retrouve par exemple la force de gravité $F_g = M_k\mathbf{g}$ ou encore la loi de Faxen $F_d^n = -6\pi\mu R_k(U_k^{n+1} - \boldsymbol{u}(t^n, \mathbf{X}_k^n))$ pour approcher les forces hydrodynamiques. Pour les particules non-sphériques, il est supposé suivant [SFT09] que le principe fondamental de la

dynamique ci–dessus est satisfait pour chaque sous–sphère. Une fois obtenues, les vitesses de translation sont projetées sur un espace de vitesses admissibles à l'aide de SCoPi. Malgré les hypothèses restrictives, ce modèle a l'avantage d'être peu coûteux en calcul, notamment lorsque la quantité de particules est grande (voir Fig 5.5 [SLGB]).

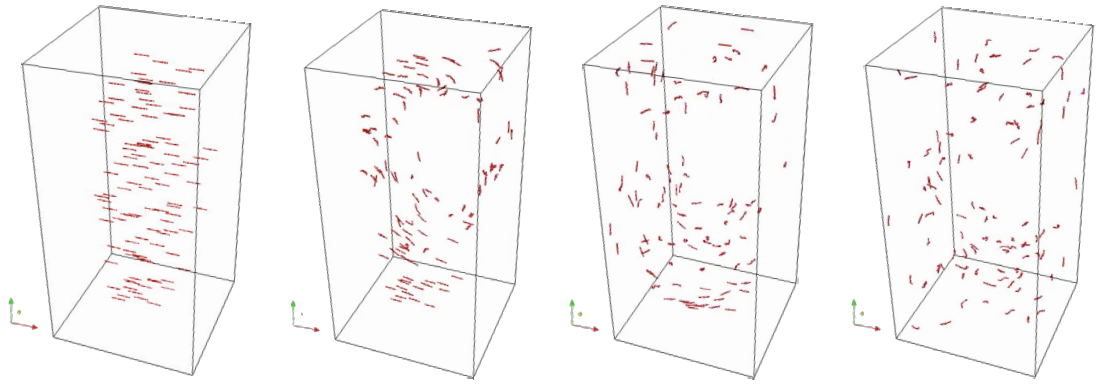

FIGURE 5.2 – Comportement d'un écoulement particulaire dans une double cavité entrainée pour différents pas de temps. Le domaine solide est composé de 100 particules non sphériques et déformables. $\Omega = [0,1]^2 \times [0,2]$, avec $\boldsymbol{u}_{\partial\Omega} = 1.0$ si $z = 2$ et 0 sinon. L'influence des particules sur le fluide est négligée. Dans un premier temps les particules se déplacent avec le sens de l'écoulement ; puis, suite aux collisions des particules entre elles et avec les parois du domaine, ce mouvement est perturbé.

5.3.3 Méthode de pénalisation de volume L2.

Les particules sont rendues visibles dans le problème fluide continu par ajout du terme de pénalisation $\frac{1}{\eta}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s)\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Le coefficient η a le rôle de paramètre de pénalisation et est choisi suffisament petit. Le terme $\boldsymbol{u}_s$ désigne le champ de vitesse solide calculé à partir des vitesses de translation et de rotation des particules. Pour une résolution par une méthode de projection incrémentale, on utilise alors la quantité $\boldsymbol{u}_s$ calculée au pas de temps précédent. Une adaptation du schéma à la pénalisation L2 proposée dans [SVC20] consiste à pénaliser l'étape de correction en plus de l'étape de prédiction. Il s'agit d'obtenir $\frac{1}{\eta}(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_s^n)\mathbb{1}_{\Omega_s(t)}$ si on additionne les deux étapes pour obtenir la consistence avec le problème continu. Sur une itération en temps, la résolution fluide–solide est donnée par,

Étape au temps t^{n+1} :

i) Advection de la fonction caractéristique de la k–ième particule : $\mathbf{H}_k^n$, pour $k \in \{1, .., N\}$ à partir de $\mathbf{X}^n$ et $\boldsymbol{\theta}_k$, pour $k \in \{1, .., N\}$ possiblement corrigées par SCoPi.

ii) Calcul de la fonction caractéristique du domaine solide $\mathbf{H}^n = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{H}_k^n$.

iii) Calcul de la vitesse solide $\boldsymbol{u}_s^n = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{U}_k^n + \omega_k^n \times (\boldsymbol{x} - \mathbf{X}_k^n))\mathbf{H}_k^n$

iv) Prédiction : trouver $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ vérifiant,

$$\rho\left(\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\delta t} + (\boldsymbol{u}^n \cdot \nabla)\,\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right) - \mu\Delta\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} + \nabla p^n + \frac{1}{\eta}\mathbf{H}^n(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \boldsymbol{u}_s^n) = \boldsymbol{f}^{n+1}$$

v) Correction : trouver $\boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}$ vérifiant,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\Big(\delta t(\rho \mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \frac{\delta t}{\eta}\mathbf{H}^n)^{-1}\nabla\Phi^{n+1}\Big) = \mathrm{div}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}\\
&p^{n+1} = \Phi^{n+1} + p^n\\
&\boldsymbol{u}^{n+1} = \Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \frac{\delta t}{\rho\eta}\mathbf{H}^n\Big)^{-1}\Big(\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \frac{\delta t}{\rho\eta}\mathbf{H}^n\Big)\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho}\nabla\Phi^{n+1}\Big)
\end{aligned}$$

vi) Calcul de $\mathbf{U}_k^{n+1}, \boldsymbol{\omega}^{n+1}$ pour $k \in \{1, .., N\}$ par un schéma semi-implicite :

$$M_k\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_k^{n+1}}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega \rho_k H_k^n \boldsymbol{f}_k^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mathbf{F}_k^n$$

$$I_k^n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_k^{n+1}}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega \rho_k H_k^n r_k^n \times \boldsymbol{f}_k^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mathbf{T}_k^n - \boldsymbol{\omega}_k^{n+1}\times I_k^n\boldsymbol{\omega}_k^n$$

avec les approximations des forces hydrodynamiques suivantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_k^n &= \rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_k^{n+1}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega H_k^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{\eta}\int_\Omega H_k^n(\boldsymbol{u}^{n+1} - (\mathbf{U}_k^{n+1} + \boldsymbol{\omega}_k^{n+1}\times r_k^n))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
\mathbf{T}_k^n &= \frac{\rho}{\rho_k}I_k^n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_k^{n+1}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\eta}\int_\Omega H_k^n r_k^n\times(\boldsymbol{u}^{n+1} - (\mathbf{U}_k^{n+1} + \boldsymbol{\omega}_k^{n+1}\times r_k^n))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

vii) Communication des vitesses à SCoPi.

Pour une particule non-sphérique, on calcule la vitesse au centre de chaque sous-sphère par à l'aide de $\mathbf{U}_k^{n+1} + \omega_k^{n+1}\times(\bar{\boldsymbol{x}} - \mathbf{X}_k^{n+1})$ avec $\bar{\boldsymbol{x}}$ centre de la sous-sphère.

5.3.4 Méthode de pénalisation de volume H1.

Pour cette méthode, le problème fluide résolu est donné par les équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables (2.1). Les forces volumiques appliquées aux particules sont implémentées dans la définition du terme source et la viscosité de la phase solide est choisie suffisamment grande de façon à pénaliser le tenseur des taux de déformation du fluide dans la région occupée par les particules. Étant donné que la dynamique des particules est résolue avec le problème fluide pénalisé, les équations (1.4)–(1.5a)–(1.9) ne sont plus résolues explicitement. Afin d'être en mesure de communiquer les vitesses prédites à SCoPi, on introduit une technique de suivi de l'interface fluide–solide, et on présente deux méthodes pour l'advection des particules.

Suivi de l'interface fluide–solide à l'aide de marqueurs lagrangiens.

Contrairement à la méthode de pénalisation L2 pour laquelle on couple le problème fluide pénalisé aux équations (1.4)–(1.5a)–(1.9), le calcul des vitesses $\{(\mathbf{U}_k^{n+1}, \boldsymbol{\omega}_k^{n+1}), k \in \{1, .., N\}\}$ n'est pas réalisé lors de la résolution du problème fluide–solide. En cas de couplage avec SCoPi il est donc nécessaire de trouver une solution pour le suivi de l'interface fluide–solide afin d'être en mesure de communiquer les vitesses prédites et ainsi mettre à jour les positions des centres de masse des particules.

La méthode retenue est la construction au temps initial t^0 de marqueurs lagrangiens disposés à la surface de la macro–particule. Ainsi, après la résolution du problème fluide au temps t^{n+1}, on suppose la condition de non-glissement satisfaite et on peut alors définir une vitesse aux marqueurs à partir de la vitesse solution du problème fluide. Pour un nombre de marqueurs q assez grand, on cherche à obtenir un système à résoudre pour le calcul de $\{(\mathbf{U}_k^{n+1}, \boldsymbol{\omega}_k^{n+1}), k \in \{1, .., N\}\}$,

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = \mathbf{U}_k^{n+1} + \omega_k^{n+1} \times (\boldsymbol{x}_i^n - \mathbf{X}_k^n) \qquad i = 1, .., q \tag{5.3}$$

où $\boldsymbol{u}_i^{n+1}$ est la vitesse du marqueur, et $\boldsymbol{x}_i^n$ sa position. Pour la dimension 3, le nombre de degrés de liberté associé à une macro–particule est 6 : 3 vitesses de translation et 3 angles d'Euler. Il s'agit donc du nombre minimal de marqueurs à définir pour chacune des macro–particules pour éviter la résolution d'un système sous–déterminé. Afin de s'assurer de l'homogenéité de leur répartition sur la surface d'une macro–particule, on construit 6 marqueurs sur la surface de chaque sous–sphère, puis on conserve uniquement les marqueurs situés à la surface de la macro–particule (voir Fig 5.3).

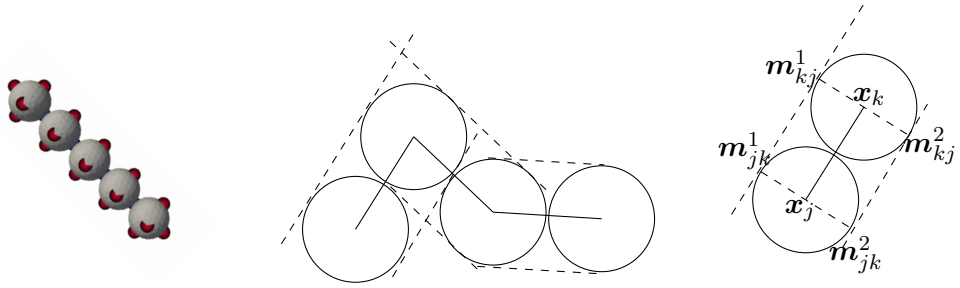

FIGURE 5.3 – Définition des marqueurs pour une particule non–sphérique

On est alors ramenés à la résolution d'un système (5.3) surdéterminé : on réalise la décomposition "thin QR" de la matrice du système pour une résolution par la méthode des moindres carrés. À partir des vitesses caractéristiques de la macro–particule $\{(\mathbf{U}_k^{n+1}, \boldsymbol{\omega}_k^{n+1})\}$ obtenues on détermine la vitesse prédite au centre de chaque sous–sphère (à l'aide du champ de vitesse rigide) que l'on communique à SCoPi.

REMARQUE 5.3.1 Les valeurs $\{\boldsymbol{u}_i^{n+1}, i = 1, .., q\}$ sont obtenues à partir de la vitesse fluide calculée à l'étape précédente. Pour un marqueur i donné, on utilise alors une technique de pondération inverse à la distance (PID) pour déterminer chacune de ses composantes $\boldsymbol{u}_i^{n+1}$: pour $j \in \{1, .., d\}$ notons $u_{i,j}^{n+1}$ la j–ième composante de la vitesse de $\boldsymbol{u}_i^{n+1}$. On définit V_j, l'ensemble des cellules D_σ avec $\sigma \in \mathcal{E}^{(j)}$ qui entourent le marqueur i (4 cellules lorsque $d = 2$ et 8 cellules lorsque $d = 3$). Alors $u_{i,j}^{n+1}$ est défini par,

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\sum_{D_\sigma \in V_j} \lambda_\sigma^p u_\sigma^{n+1}}{\sum_{D_\sigma \in V_j} \lambda_\sigma^p} \quad \text{avec} \quad \lambda_\sigma = \frac{1}{d(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_\sigma)}, \tag{5.4}$$

où p définit le coefficient de lissage de la méthode PID.

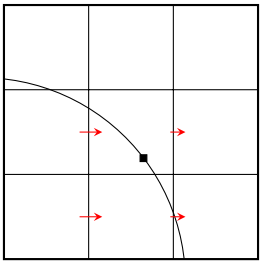

FIGURE 5.4 – Calcul de $u_{i,j}^{n+1}$ pour $j = 1$ et $d = 2$.
Le maillage représenté est celui de la pression, et on retrouve effectivement 4 cellules D_σ, $\sigma \in \mathcal{E}^{(1)}$ entourant le marqueur i

Algorithme de résolution par la méthode de pénalisation H1.

Construction des marqueurs au temps t^0

Boucle en temps : étape t^{n+1}

i) Advection de la fonction caractéristique de la k–ième particule : $\mathbf{H}_k^{n+1}$, pour $k \in \{1, .., N\}$

– Si aucune collision détectée : par le schéma antidiffusif présenté dans le chapitre 4.

– Sinon : reconstruction à partir des positions $\mathbf{X}_k^{n+1}$ et $\boldsymbol{\theta}_k^{n+1}$, $k \in \{1, .., N\}$ corrigées par SCoPi.

ii) Advection des marqueurs de la k–ième particule.

– Si aucune collision détectée : à partir de la vitesse calculée par la méthode PID (5.4) en t^n.

– Sinon : calcul à partir des positions $\mathbf{X}_k^{n+1}$ et $\boldsymbol{\theta}_k^{n+1}$, $k \in \{1, .., N\}$ corrigées par SCoPi.

iii) Définition de la densité et de la viscosité à partir des fonctions caractéristiques $\mathbf{H}_k^{n+1}$

$$\bar{\rho}^{n+1} = \rho(1 - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{H}_k^{n+1}) + \sum_{k=1}^{N} \rho_k \mathbf{H}_k^{n+1} \qquad \forall k \in \{1, .., N\}$$

$$\bar{\mu}^{n+1} = \mu(1 - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{H}_k^{n+1}) + \sum_{k=1}^{N} \mu_s \mathbf{H}_k^{n+1} \qquad \forall k \in \{1, .., N\}$$

iii) Prédiction : trouver $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ vérifiant,

$$\frac{\bar{\rho}^{n+1}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \bar{\rho}^n \boldsymbol{u}^n}{\delta t} + \mathrm{div}(\rho^{n+1}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} \otimes \boldsymbol{u}^n) - \mathrm{div}(\bar{\mu}^{n+1}\mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1})) + \nabla p^n = \boldsymbol{f}^{n+1}$$

iv) Correction : trouver $\boldsymbol{u}^{n+1}, \Phi^{n+1}, p^{n+1}$ vérifiant,

$$\mathrm{div}\Big(\frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}}\nabla\Phi^{n+1}\Big) = \mathrm{div}\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$$

$$p^{n+1} = \Phi^{n+1} + p^n$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}}\nabla\Phi^{n+1}$$

v) Calcul de la vitesse aux marqueurs par la méthode PID (5.4).

vi) Calcul des vitesses prédites pour communication à SCoPi.

Test de l'algorithme de suivi par les marqueurs lagrangiens.

On met à l'épreuve l'algorithme de suivi par les marqueurs lagrangiens par la simulation d'un problème de cavité entrainée. On place dans le fluide un bâtonnet indéformable et on observe son déplacement au cours du temps. On considère donc le domaine $\Omega = [0,1]^3$ et on impose la vitesse $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = 1.0$ sur la face supérieure du domaine $\Omega : \{(x,y,z) \in \partial\Omega, z = 1\}$ et $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = 0.0$ sur le reste du bord. Le problème de cavité entrainée a été choisi de façon à observer des changements de direction de la particule. Le bâtonnet est défini comme un cylindre à bouts arrondis de longueur $l = 0.1$ et de diamètre $w = 0.02$. On pose $\rho_s = 0.8$ pour sa densité et $\mu_s = 10^4$ afin de pénaliser le fluide par la pénalisation H1. Pour ce dernier on prend une densité ρ_f et une viscosité μ_f égales à 1.0. La force de pesanteur est négligée ici. Pour les pas de discrétisation on prend $h = 1/70$ pour le pas d'espace uniforme et $\delta t = 0.001$ pour le pas en temps. Malgré un maillage relativement grossier on remarque que la particule suit le sens de l'écoulement et change de direction de façon adéquate.

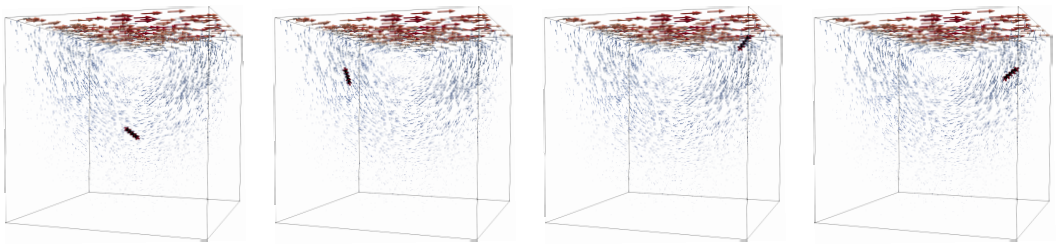

FIGURE 5.5 – État de l'écoulement aux temps $t = 2.25$, $t = 4,25$, $t = 6.0$, $t = 6.75$

5.4 Une perspective de parallélisation.

L'introduction d'un couplage fort dans le code de calcul a rapidement soulevé la problématique de la parallélisation du code. En effet, un nombre élevé de particules dans l'écoulement nécessite une finesse suffisante pour le maillage. En conséquence la taille des données à stocker augmente et avec elle, la taille des calculs. On introduit ci–dessous une proposition de parallélisation pour le code RheoScop : il s'agit d'un travail en cours car la question de l'application de l'algorithme parallèle à la résolution de problèmes fluide pénalisés pose des difficultés. En revanche, une application à la simulation du problème découplé est en cours d'implémentation. L'algorithme parallèle est adapté aux problèmes en 3 dimensions. Il est présenté dans [SC12] pour les différences finies et se base sur une méthode de splittling algébrique étudiée dans [Vab15] et que l'on présente ci–dessous. Il a fait l'objet d'une première étude lors de mon travail de recherche de Master [Bat16]. La principale nouveauté ici provient de l'adaptation de l'algorithme à un problème discrétisé sur un maillage décalé.

5.4.1 Méthode de splitting algébrique ATM.

La méthode de splitting ATM (Alternating Triangle Method) s'applique par définition à des équations paraboliques pour des problèmes de convection–diffusion. En guise d'exemple, on applique donc la méthode à l'étape de prédiction d'un schéma de projection incrémentale pour un écoulement de Stokes. Pour un fluide homogène de densité ρ et de viscosité μ on obtient,

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} \text{ vérifiant :} & \\ \rho\dfrac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t} - \mu\Delta\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} + \nabla p^n = \boldsymbol{f}(t^{n+1}) & \text{dans } \Omega \\ \bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.6}$$

Après une discrétisation en espace, on se ramène à un problème de la forme,

Trouver $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ vérifiant :

$$\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t\mathrm{A}\Big)\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t} + \mathrm{A}\boldsymbol{u}^n = \mathbf{F}(\boldsymbol{f}^{n+1}, \nabla p^n) = \phi^{n+1}$$

avec A correspondant à la discrétisation de l'opérateur $-\frac{\mu}{\rho}\Delta$. On réalise alors un splitting purement algébrique du problème par décomposition de la matrice A. Si on note A_1 la partie triangulaire inférieure de A et A_2 sa partie triangulaire supérieure, alors la méthode ATM consiste à résoudre le nouveau problème donné par,

Trouver $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ vérifiant :

$$\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t\mathrm{A}_1\Big)\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t\mathrm{A}_2\Big)\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t} + \mathrm{A}\boldsymbol{u}^n = \phi^{n+1}$$

Ce nouveau problème a un atout de taille, puisque sa résolution se résume à la résolution de deux systèmes triangulaires. En revanche, on y a introduit une erreur de splitting : en développant, une formulation équivalente du système à résoudre est donnée par,

$$\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t\mathrm{A}\Big)\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t} + \mathrm{A}\boldsymbol{u}^n + (\delta t)^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t} = \phi^{n+1}$$

Dans [Vab15] les auteurs montrent que cette méthode est inconditionnellement stable sous la condition que A est symétrique et défini positif. Ils proposent ensuite d'améliorer la consistance du schéma en remplaçant le terme supplémentaire lié au splitting par,

$$(\delta t)^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t} - (\delta t)^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\frac{\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}^{n-1}}{\delta t} = (\delta t)^3\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-2\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{u}^{n-1}}{(\delta t)^2}$$

de manière à obtenir une erreur de troncature de l'ordre de $\delta t^3|h|^{-2}$ où $|h|^2 = \sum_{i=1}^d h_i^2$ avec h_i est le pas d'espace dans la direction $\boldsymbol{e}_i$. On obtient finalement pour l'étape de prédiction,

Trouver $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ vérifiant :

$$\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t\mathrm{A}_1\Big)\Big(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t\mathrm{A}_2\Big)\frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t} + \mathrm{A}\boldsymbol{u}^n - (\delta t)^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\frac{\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}^{n-1}}{\delta t} = \phi^{n+1}$$

On peut désormais introduire l'algorithme parallèle basé sur cette méthode. Cependant notons que l'application de cette méthode de splitting à un schéma pénalisé donne lieu à une erreur de troncature de l'ordre de $\eta^{-2}\delta t^3|h|^{-2}$, ce qui nous limite à des applications au problème découplé.

L'algorithme parallèle.

On suit l'algorithme présenté dans [SC12] pour les différences finies et que l'on adapte à un maillage décalé MAC pour les volumes finis. Il s'agit d'une méthode adaptée aux problèmes paraboliques en dimension 3 : on l'utilise alors pour la résolution des étapes de prédiction de nos schémas. Une fois la solution $\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ calculée, l'étape de projection elliptique est résolue sur chaque sous–domaine de manière classique par l'algorithme du gradient conjugué.

L'originalité de cet algorithme provient de la décomposition de Ω en sous–domaines, et prend tout son interêt lorsque Ω est un parallélépipède allongé dans une des $d = 3$ directions : $\Omega = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$. À titre d'exemple, on suppose donc que Ω est allongé suivant l'axe (Oz) et on introduit maintenant $N_x, N_y \in \mathbb{N}$. Il s'agit alors de décomposer Ω suivant les axes (Ox) et (Oy) selon N_x et N_y respectivement afin d'obtenir $N = N_x N_y$ sous–domaines comme représenté sur la partie gauche de la figure 5.6. Le nombre N correspondra alors au nombre de processeurs appelés pour la résolution du problème.

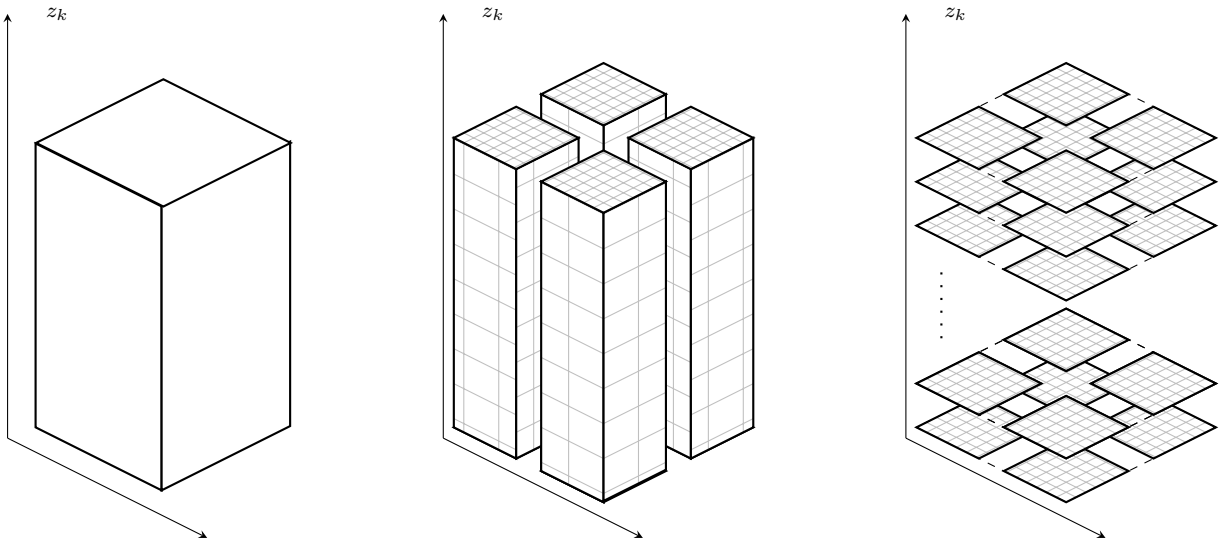

FIGURE 5.6 – Les étapes de la décompositions en sous–domaines pour $N_x = N_y = 2$

Pour chaque sous–domaine, on effectue sa discrétisation par la méthode MAC sous la condition qu'il s'agit de la même discrétisation pour tous les sous–domaines. Une telle hypothèse est nécessaire afin de pouvoir assurer la gestion des conditions aux limites des problèmes définis sur les sous–domaines et la communication aux interfaces entre deux processeurs voisins. On note n_z le nombre de cellules $K \in \mathcal{M}$ dans la direction z, alors $n_z = \text{card}(\mathcal{E}^{(3)}) - 1$ en supposant que $\boldsymbol{e}_3$ est le vecteur associé à l'axe (Oz). Si n_x et n_y correspondent respectivement au nombre de cellules $K \in \mathcal{M}$ dans la direction x et y, alors chaque sous–domaine dispose de $n_x n_y n_z$ cellules primales.

On décompose de manière fictive chaque sous–domaine selon n_z couches (partie droite de la figure 5.6) : l'élément constitutif de l'algorithme consiste alors à itérer sur les n_z couches dans un premier sens puis dans l'autre. En raison de la forme triangulaire des matrices, les dépendances entre processeurs sont assurées. On présente l'algorithme pour une composante de la vitesse de façon à se placer sur le maillage associé, et on introduit les notations suivantes :

$$r^n = \phi^{n+1} - \mathrm{A}\boldsymbol{u}^n + (\delta t)^2 \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \frac{\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-1}}{\delta t} \qquad \delta^n = \frac{\bar{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\delta t}$$

Il s'agit donc de résoudre les deux systèmes triangulaires ci–dessous,

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t \mathrm{A}_1\right)\Psi^n &= r^n \quad \text{(a)} \\ \left(\mathrm{I}_{N_\mathcal{E}} + \delta t \mathrm{A}_2\right)\delta^n &= \Psi^n \quad \text{(b)} \end{aligned} \tag{5.10a}$$

31	32	33	34	35	36
25	26	27	28	29	30
19	20	21	22	23	24
13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6

16	17	18	34	35	36
13	14	15	31	32	33
10	11	12	28	29	30
7	8	9	25	26	27
4	5	6	22	23	24
1	2	3	19	20	21

FIGURE 5.7 – Numérotation des volumes en pression sur une couche avec et sans décomposition pour $n_x = n_y = 3$

Du fait de la structure triangulaire des deux matrices, il est donc possible de résoudre (5.10) sur Ω par deux étapes, que nous appelerons étapes de "descente" et de "remontée" (resp. (a) et (b)). Il s'agit donc bien d'une résolution particulière du système global. L'ordre dans lequel on effectue ces étapes est important car il faut s'assurer que le processeur qui s'apprête à résoudre un des deux systèmes triangulaires dispose de l'ensemble valeurs de Ψ^n (ou δ^n pour la remontée) nécessaires. Prenons l'exemple du Laplacien discrétisé avec une notation lexicographique et de la première composante de vitesse u. Pour l'étape de descente et le calcul de $\Psi^n(i+\frac{1}{2},j,k)$, il s'agira de connaitre au préalable les valeurs $\Psi(i-\frac{1}{2},j,k)$, $\Psi(i+\frac{1}{2},j-1,k)$ et $\Psi(i+\frac{1}{2},j,k-1)$. Dans le cas où $\Psi(i+\frac{1}{2},j,k)$ est défini sur une face partagée avec un autre processeur, alors une ou l'autre des valeurs $\Psi(i-\frac{1}{2},j,k)$ ou $\Psi(i+\frac{1}{2},j-1,k)$ doit être communiquée par ce processeur avant de débuter le calcul de $\Psi(i+\frac{1}{2},j,k)$. Étant donné que l'on itère sur les n_z couches dans un sens adéquat, la valeur $\Psi(i+\frac{1}{2},j,k-1)$ a été calculée à l'itérée précédente. La figure 5.8 illustre les dépendances entre 4 processeurs et sur 2 couches successives.

Ainsi, le processus de "descente" (a) se déroule comme suit. Après calcul du second membre r^n on itère sur les n_z couches : pour $k \in [\![0, n_z - 1]\!]$, chaque processeur résout un sous–problème $(\mathrm{a})_k$ de façon coordonnée : le premier processeur à commencer la résolution de $(\mathrm{a})_k$ est celui contenant toutes les informations nécessaires (notamment données par les conditions au bord). Une fois la résolution achevée, il transmet à chaque sous–domaine adjacent les valeurs calculées aux interfaces. Il poursuit alors l'étape de descente avec la résolution de $(\mathrm{a})_{k+1}$ tandis que les sous-domaines adjacents débutent à leur tour la résolution de $(\mathrm{a})_k$. Le processeur enclenchant l'étape de descente est donc logiquement le premier à finir.

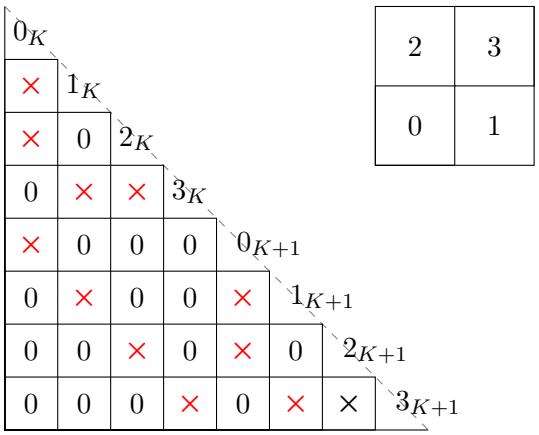

FIGURE 5.8 – Dépendances (×) entre 4 processeurs
pour la descente sur 2 couches successives $K, K+1 \in [\![0, n_z - 1]\!]$
Les cases marquées d'un '0' désigne les valeurs nulles de la matrice creuse.

Le processus de "remontée" (b) se déroule de manière symétrique, avec une itération sur les n_z couches dans le sens inverse étant donné qu'il s'agit de la résolution d'un système triangulaire supérieur. Ainsi, le processeur ayant bouclé l'étape de "descente" est le premier à commencer ici. À la fin de l'étape de "remontée", on s'assure de la convergence du problème par calcul de la norme de la solution sur chaque sous–domaine. La figure 5.9 illustre les communications au cours de (a) et (b). Le nombre d'opérations effectuées en parallèle augmente donc avec le nombre de processeurs.

Test de l'efficacité de l'algorithme parallèle.

Il s'agit d'une étude de l'efficacité de l'algorithme réalisée dans [Bat16] pour les différences finies. On y résout le problème parabolique donné par l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène et sur un domaine $\Omega = [0, 1]^3$. Pour δt et h_i, les pas de discrétisation en temps et en espace dans la direction $\boldsymbol{e}_i$ on pose $\delta t = h_i = 0.01$. On effectue la résolution du problème sur $N_{\delta t} = 2000$ itérations en temps pour un nombre variable de processeurs N_p. Pour chaque valeur de N_p on donne dans Table 5.1 le temps machine nécessaire à la complétion des $N_{\delta t}$ itérations et l'efficacité associée. L'efficacité de l'algorithme est donc doublée dès $N_p = 4$ processeurs. Notons que le domaine est cubique ici, tandis que le potentiel de la méthode réside dans l'application à des domaines rectangulaires suffisament allongés.

N_p	Temps machine	Efficacité
1	2193.218s	-
2	1383.148s	+36.94%
4	1003.679s	+54.24%
9	943.253s	+56.99%
16	833.034s	+63.02%
25	793.385s	+63.83%

TABLE 5.1 – Temps machine écoulé et efficacité en terme
de "Speedup" pour plusieurs valeurs de N_p.

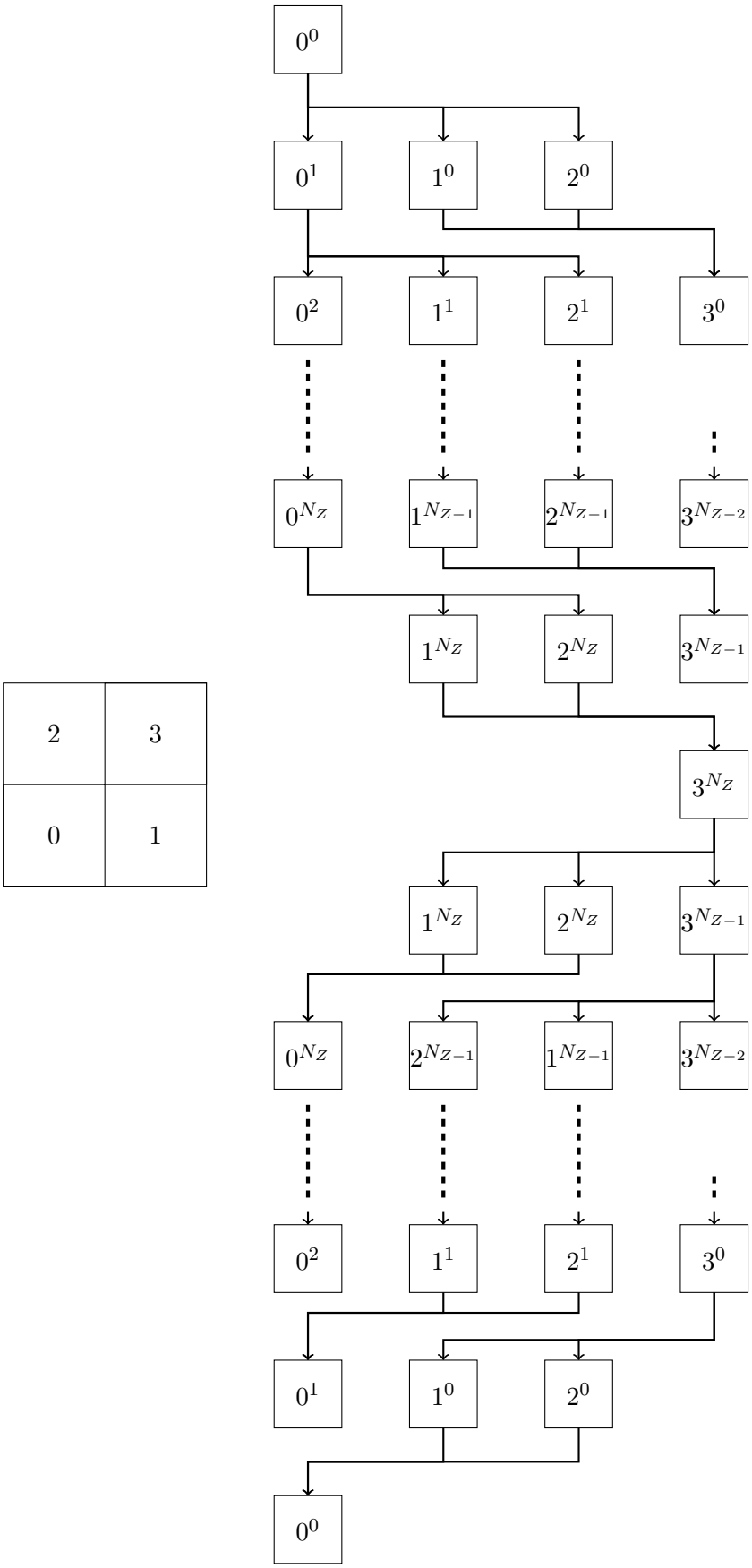

FIGURE 5.9 – Représentation des
communications lors des étapes de descente puis de remontée.
Les flêches représentent les communications d'un processeur $\rightarrow$ à un autre.

Conclusion et perspectives.

Interactions Fluide–Structure dans le contexte des écoulements particulaires.

On a présenté dans ce chapitre les équations gouvernant la dynamique d'un système composé d'un fluide incompressible et de particules rigides. Afin de simuler de façon adéquate les interactions fluide–structure liant les deux domaines, on choisit deux méthodes de domaines fictifs pour la modélisation numérique du problème : la méthode de pénalisation – de la vitesse – L2, et la méthode de pénalisation – du tenseur des taux de déformations – H1. Les deux méthodes fournissent des résultats satisfaisants suite aux tests numériques réalisés : le mouvement rigide est correctement forcé à l'intérieur des particules, et le problème fluide initial est résolu à l'extérieur du domaine solide. En revanche, le schéma utilisé pour la pénalisation L2 étant trop explicite, il nécessite l'utilisation d'une méthode de point–fixe englobant la résolution du problème fluide et du problème solide. On se concentre dans la suite des chapitres sur la modélisation par la méthode de pénalisation H1, qui revient à considérer les équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variable. En prenant des champs scalaires discontinus pour la densité et la viscosité et en intégrant au second membre les forces volumiques exercées sur les particules on parvient à définir le problème de l'écoulement d'un fluide multiphasique. Le mouvement rigide à l'intérieur du domaine solide est ensuite obtenu en passant à la limite sur la viscosité solide.

Convergence of the implicit MAC-discretized Navier–Stokes equations with variable density and viscosity on non-uniform grids.

À l'aide des outils définis dans le chapitre 2, on introduit un schéma implicite résultant de l'approximation des équations de Navier–Stokes à densité et à viscosité variable par la méthode des volumes finis et sur un maillage décalé MAC non uniforme. Après avoir montré l'existence de solutions au schéma discret, on passe à la limite dans la formulation faible du schéma quand les paramètres de discrétisation tendent vers 0. On obtient alors la convergence du schéma vers le problème continu en formulation faible. Une extension de l'étude du schéma à des conditions aux limites plus générales constitue une future piste de recherche. On envisage par ailleurs l'analyse de la convergence du schéma pénalisé par la méthode de pénalisation H1.

Schéma de projection pour les équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables.

L'étude réalisée dans le chapitre précédent nous a permis de mettre en évidence les propriétés de consistance du schéma implicite. Il s'agit cependant d'un schéma peu efficace lorsqu'il est utilisé pour la simulation numérique d'un problème d'écoulement de fluide. On présente donc dans ce chapitre une

alternative faisant appel à la méthode de projection incrémentale : il s'agit d'un schéma à pas fractionnaires pour lequel l'étape de correction a été modifiée de façon à se ramener à un problème de Poisson classique. On montre dans un premier temps la stabilité du schéma discrétisé en temps et en espace. Puis, afin de traiter correctement le cas où la densité et la viscosité sont des champs scalaires constants par morceaux, on améliore l'étape de transport en construisant un schéma antidiffusif. Les tests numériques réalisés dans ce chapitre sont très encourageants. On distingue en particulier celui de la simulation d'un problème pénalisé H1 pour la chute d'une bille dans un fluide : le transport de la fonction caractéristique du domaine solide se fait avec peu de diffusion au niveau de l'interface fluide–solide, malgré un mouvement de convection complexe du fluide à l'intérieur de la particule. D'autres tests sont envisagés dans le but de mesurer l'influence de l'étape de correction modifiée sur la solution obtenue. Parmi les futures pistes de travail, on souhaite étudier la stabilité du schéma pénalisé lorsque le terme de dérivée en temps est approché par la formule de différentiation BDF2.

Code de simulation Fluide–Structure RheoScop.

On a introduit dans ce chapitre l'apport de ce travail de thèse à RheoScop, notre code de calcul. Il s'agissait auparavant d'un code de résolution numérique des équations de Navier–Stokes en dimension 3 avec une présence éventuelle de particules n'ayant pas d'influence sur le fluide. Il s'agissait donc d'implémenter des méthodes pour la résolution d'un système fortement couplé. La problématique principale consiste désormais à mettre en oeuvre la parallélisation du code afin de pouvoir considérer la simulation d'écoulements particulaires avec un nombre élevé de particules.

Annexe A

Solutions faibles de l'équation de transport

Soit $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T), \boldsymbol{H}^1_0(\Omega))$ avec $\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0$. On dira que $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est une solution faible de l'équation de transport si pour tout $\varphi \in C^1_c(]0,T[\times\Omega)$ on a

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \left(\partial_t \varphi + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi\right) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0,.) = 0 \tag{A.1}$$

Par la théorie de renormalisation des solutions faibles, introduite par DiPerna-Lions [DL89] on obtient l'unicité de la solution faible dans le sens des renormalisations. On adapte les résultats suivants à notre situation bien que l'unicité est possible dans le cas général de l'équation $\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) + c\rho = 0$ sous couvert d'une régularité suffisante pour $(\boldsymbol{u}, \mathrm{div}\boldsymbol{u}, c)$ [DL89, BF13].

Theorem A.1 (Renormalisation des solutions faibles)**.**
Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien $\subset \mathbb{R}^d$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T), \boldsymbol{H}^1_0(\Omega))$ vérifiant $\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0$. Pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ et toute solution de (A.1) $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ pour la donnée ρ_0 on a :

$$\partial_t \beta(\rho) + \mathrm{div}(\beta(\rho)\boldsymbol{u}) = 0 \tag{A.2}$$

au sens faible avec $\beta(\rho)_{|_{t=0}} = \beta(\rho_0)$, i.e. $\beta(\rho)$ est solution de (A.1) pour la donnée initiale $\beta(\rho_0)$.

Theorem A.2 (Unicité de la solution et régularité en temps)**.**
Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien $\subset \mathbb{R}^d$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T), \boldsymbol{H}^1_0(\Omega))$ vérifiant $\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0$. Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ est une solution de (A.1) pour la donnée ρ_0, alors elle est unique, et de plus :

$$\rho \in C^0([0,T], L^q(\Omega)) \quad \forall q < +\infty$$

Annexe B

Analyse Fonctionnelle discrète.

On introduit dans cette section les outils de compacité utilisés pour l'étude de convergence d'un schéma discretisé par la méthode MAC. Les énoncés des résultats et leur démonstration peuvent être retrouvés dans [EGH00] et [GH14].

Lemme B.1 ([EGH00, Lemme 3.3])**.**
Soit Ω un domaine ouvert borné de R^d, $d = 2$ ou 3. Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une grille admissible selon la définition 2.3.1 et un élément $u \in H_{\mathcal{E}^{(i)},0}$ avec $i \in [\![1, d]\!]$. On définit alors $\tilde{u}$ de la façon suivante : $\tilde{u} = u$ p.p. sur Ω et $\tilde{u} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω telle que,

$$\|\tilde{u}(\cdot + \eta) - \tilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|^2_{1,\mathcal{E}^{(i)},0} |\eta|(|\eta| + Ch_{\mathcal{M}}), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^d$$

Theorem B.2 ([EGH00, Théorème 3.10])**.**
Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord Lipschitz, $N \geq 1$, et $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$. On définit la suite $\{\tilde{u}_n, n \in \mathbb{N}\}$ de la façon suivante : $\tilde{u}_n = u_n$ p.p. sur Ω et $\tilde{u}_n = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Supposons qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ et $\{h_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$ avec $h_n \to 0$ quand $n \to \infty$ tel que,

$$\|\tilde{u}_n(\cdot + \eta) - \tilde{u}_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C|\eta|(|\eta| + h_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{B.1}$$

Alors, $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Définition B.3 (Compactly embedded sequence)**.**
Let B be a Banach space and $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces included in B. The sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is said to be compactly embedded in B if any sequence satisfying :

- *$u_n \in X_n$ for all $n \in \mathbb{N}$*
- *the sequence $(\|u_n\|_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded*

is relatively compact in B

Theorem B.4 (Time compactness with a sequence of subspaces, [GH14] Proposition 4.47)**.**

.

We set $1 \leq p < \infty$ and $T > 0$. Let B be a Banach space and $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Banach spaces compactly embedded in B. Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of $L^p((0,T);B)$ satisfying the following conditions :

— *The sequence* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in bounded in* $L^p((0,T);B)$.

— *The sequence* $(\|f_n\|_{L^1(0,T;X_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *is bounded.*

— *There exists a non-decreasing function* η *from* $(0,T)$ *to* $\mathbb{R}_+$ *such that* $\lim_{h\to 0}\eta(h) = 0$ *and,* $\forall h \in (0,T)$ *and* $n \in \mathbb{N}$*, we have :*

$$\int_0^{T-h} \|f_n(t+h) - f_n(t)\|_B^p \,\mathrm{d}t \leq \eta(h) \tag{B.2}$$

Then, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is relatively compact in* $L^p((0,T);B)$.

Annexe C

Proceedings TI2018

Simulation of a particulate flow in 3D using volume penalization methods*

Philippe Angot[1], Léa Batteux[2], Jacques Laminie[2], and Pascal Poullet[2]

[1] Université d'Aix–Marseille, Marseille 13007, France
[2] Université des Antilles, Campus de Fouillole, Pointe–à–Pitre 97157, Guadeloupe
lea.batteux@univ-antilles.fr

Abstract. We are concerned with modelling a particulate flow in a 3–dimensional domain. The particles are assumed to be rigid, allowing us to describe their motion using the Newton laws. As we aim to take into account complex shapes for the solid inclusions, we adopt volume penalization methods. Those methods allow us to extend the fluid problem inside the solid domain by assimilating the particle as a porous medium. The homogeneous fluid flow is governed by the incompressible Navier–Stokes equations. The whole problem is solved with a projection–correction method using finite volumes and a staggered mesh to ensure the infsup condition for the stability. Regarding the transport of the particles, a marker–based front tracking method is used for the fluid–solid interface, as well as a collision strategy. Both penalization methods are studied and compared in the context of particulate flows.

Keywords: Fluid–structure interactions · Fictitious domain · Penalization

1 Introduction

We are interested in the modelling of fluid–solid systems where we consider rigid solid inclusions in an incompressible viscous fluid flow in a 3–dimensional domain. Such problems led to a wide panel of methods to attempt to model and reproduce faithfully the fluid–solid interactions observed in real life problems. Depending on the needs, different degrees of coupling between the fluid and the particles may be applied. In what follows we will resort to a strong coupling to make evident the influence of the solid inclusions on the fluid. Using an Eulerian formulation for the fluid flow, we extend the fluid problem inside the solid domain as defined by the fictitious domain methods. Given the assumptions on the particles we require a rigidity constraint on the solid domain. Among the most famous methods in this field, the works of Glowinsky *et. al* [6] which resort to Lagrange multipliers for the constraint, and volume penalty methods [1, 8]. The latter idea is based on porous laws and will be considered in our model.

Let us introduce our physical domain Ω along with its boundary Γ, containing the fluid domain $\Omega_f(t)$ and N particles $\Omega_s^i(t)$ such that $\cup_{i=1}^N \Omega_s^i(t) = \Omega_s(t)$ defines the solid domain. Therefore we have $\Omega_f(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_s(t)}$. Given the assumptions, we will work with the incompressible Navier Stokes equations to govern the fluid flow,

* The computational tests have been performed using the server of the Centre Commun de Calcul Intensif (C3I) of Université des Antilles.

$$\begin{cases} \rho\Big(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\Big) - 2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mu D(\boldsymbol{v})) + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega_f(t) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega_f(t) \\ \\ \boldsymbol{v}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_0 & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega_f(0) \\ \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_\Gamma & \text{on } \mathbb{R}^+\times\Gamma \\ \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}_i(t) + \boldsymbol{\omega}_i(t)\times\boldsymbol{r}_i(t,\boldsymbol{x}) & \text{on } \mathbb{R}^+\times\partial\Omega_s^i(t) \end{cases}$$

with the fluid velocity $\boldsymbol{v}$ and pressure p as the unknowns. The fluid here is defined by its density ρ and dynamic viscosity μ. The term $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ in the momentum equation refers to the tensor of deformation rate of the fluid, and we have: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla v}+(\boldsymbol{\nabla v})^T)$. The last equality defines the no–slip condition; it closes the boundary conditions on Ω_f and enables the coupling with the solid domain. It states that the fluid velocity and the solid velocity are equal on the fluid–solid interface. Finally, as the particles are assumed to be rigid, their motion can be described using the translational and rotational velocities $(\boldsymbol{V}_i, \boldsymbol{\omega}_i)$ of their respective center of mass $\boldsymbol{X_i}$. As such we can define the rigid velocity field $\boldsymbol{v}_s(t,\boldsymbol{x})$ in $\Omega_s(t)$: $\forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega_s(t)}$, $\exists(\boldsymbol{V}_i(t), \boldsymbol{\omega}_i(t))$, $\boldsymbol{v_s}(t) = \boldsymbol{V}_i(t)+\boldsymbol{\omega}_i(t)\times\boldsymbol{r}_i(t,\boldsymbol{x})$ where $\boldsymbol{r}_i(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X_i}(t)$. In addition we have for each particle that,

$$\begin{cases} M_i\dfrac{d\boldsymbol{V}_i}{dt} = \displaystyle\int_{\Omega_s^i(t)} \rho_s \boldsymbol{f}_i(t,\boldsymbol{x})dx + \int_{\partial\Omega_s^i} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n}dS \\ \\ \dfrac{d(J_i(t)\boldsymbol{\omega}_i)}{dt} = \displaystyle\int_{\Omega_s^i(t)} \rho_s \boldsymbol{r}_i(t,\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{f}_i(t,\boldsymbol{x})dx + \int_{\partial\Omega_s^i} \boldsymbol{r}_i(t,\boldsymbol{x})\times(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v},p)\cdot\boldsymbol{n})dS \end{cases}$$

Here the particle is subjected to the exterior force $\boldsymbol{f}_i$. The coupling with the fluid exists within the surface integrals, as they involve $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v},p) = (-p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}))$, the surface stress tensor of the incompressible fluid. The surface integral applied to the translational (resp. rotational) acceleration will be denoted $\boldsymbol{F}_i$ (resp. $\boldsymbol{T}_i$). We also define the density, mass and inertia tensor (ρ_s, M_i, J_i) of the particle i.

So as to prevent the use of time–dependent spatial meshes, we resort to fictitious domain methods to extend the fluid problem inside the solid domain. In our case we will be using and comparing the L2–penalty and the H1–penalty methods, which consist in penalizing specific quantities in the fluid problem. Convergence estimates can be found in [1,3] for fixed obstacles. Notably, the L2–penalty has a convergence rate of $\mathcal{O}(\eta^{1/2})$ in the fluid in regard to the penalization parameter η whereas the H1–penalty has a convergence rate of $\mathcal{O}(\eta)$.

1.1 The Darcy or L2–penalty

We penalize the velocity itself by introducing a perturbation term to the momentum equation in order to extend the problem inside the solid domain:

$$\begin{cases} \rho\Big(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\Big) - 2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mu D(\boldsymbol{v})) + \nabla p + \dfrac{\mu}{\eta}\mathbf{1}_{\Omega_s}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_s) = \boldsymbol{f} & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega \end{cases}$$

The parameter η roughly describes the permeability of the solid domain, which is now considered as a porous medium. The latter will be taken as small as possible, in order to obtain the no–slip condition on $\partial\Omega_s$ in a weak sense with fixed point iterations regarding the convergence of $\boldsymbol{v}_s$.

Following the introduction, the system of equations above is coupled to the Newton laws for the transport of the solid domain. Owing to the modified momentum equation, we can consider for the fluid contributions on the particle $\Omega_s^i(t)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_i &= \lim_{\eta\to 0}\frac{\mu}{\eta}\int_{\Omega_s^i(t)}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_s)dx + \rho\int_{\Omega_s^i(t)}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dx\\ \boldsymbol{T}_i &= \lim_{\eta\to 0}\frac{\mu}{\eta}\int_{\Omega_s^i(t)}\boldsymbol{r}_i(t,\boldsymbol{x})\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_s)dx + \rho\int_{\Omega_s^i(t)}\boldsymbol{r}_i(t,\boldsymbol{x})\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dx\end{aligned}$$

Using these definitions, one deals with volume integrals, favoring greatly their computation in the context of fictitious domain methods.

1.2 The Viscous or H1–penalty

We constraint the extended fluid velocity by penalizing its tensor of deformation rate $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ inside the solid domain, in the momentum equation. To achieve this we resort to a multiphase flow representation of the problem, using the non–homogeneous incompressible Navier–Stokes equations with variable viscosity,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\Big(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\Big)\rho=0 & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega\\ \dfrac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})-2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mu(\rho)D(\boldsymbol{v}))+\nabla p=\boldsymbol{f} & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0 & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega\end{cases}$$

along with inflow boundary conditions for ρ on $\{\boldsymbol{x}\in\Gamma,(\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}))<0\}$ as well as initial conditions. Consequently we have introduced the transport equation of the two–valued density $\rho(t,\boldsymbol{x})\geq\underline{\rho}>0$, which will carry out the transport of the particles rather than the Newton laws. Similarly we have for the viscosity $\mu_f\leq\mu(\rho)\leq\mu_s$. The solid viscosity μ_s will be taken as great as possible to enforce the penalization of the tensor $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$. We aim that way to tend towards $\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega_s(t))}=0$. With this property we can go back to a rigid motion velocity field in $\Omega_s(t)$ for an accurate representation of the rigid behaviour of the particles.

2 Numerical method to solve the problem

In the present section we describe time and spatial discretization schemes applied to the penalized problems, followed by the strategies regarding the fluid–structure coupling.

We resort to the incremental projection scheme [5, 7] adapted to both penalty methods to solve the extended problem in Ω. Using the Hodge–Helmholtz decomposition of a given vector in $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, we are able to decouple the computation of the velocity and pressure. In a first substep we account for the viscous terms to determine a predicted velocity, followed by a second substep where we enforce the incompressibility constraint to obtain the pressure and corrected velocity. For the discretization of the derivatives, we use a BDF2 formulation for the time derivative of the velocity and a Richardson extrapolation for the non–linear inertia term. Thereafter we complete the projection scheme with the transport of the solid domain. For the Darcy penalty, we use an implicit scheme of the Newton laws in regards to the particle velocities.

Resorting to an advection scheme of the phase field of the particles for the viscous penalty could render difficult the localisation of the fluid–solid interface. Instead we carry out the transport of markers defined on the surface of the particles using Runge–Kutta schemes [2]. We require at least $N_{df} = 6$ markers for each particle, N_{df} being the degree of freedom for a 3–dimensional rigid solid. Using the no–slip condition, we end up with at most an overdetermined system given by the rigid–body equations valued on each marker.

As we aim to simulate a large collection of particles we need to adopt a fitting strategy to account for the potential collisions between particles or the boundaries of the computational domain. One can resort to repulsive forces using the given position and orientation of the particle. In our case we will couple the fluid–solid scheme above with the method introduced in [4]. In the latter reference we break down a particle in sub–spheres in such a way that we can define the particle as the union of the convex hulls of two neighbour sub–spheres (Fig. 1). Using an Uzawa algorithm, the predicted velocities of all sub–spheres are projected on a set of admissible velocities. Regarding the spatial discretizations, finite volumes and a staggered mesh have been chosen. We define the fields for the penalty quantities $(\rho, \mu, \mathbf{1}_{\Omega_s})$ on the velocity grids. To compute those fields on the cells where the fluid–solid interface is located, we adopt an averaging method.

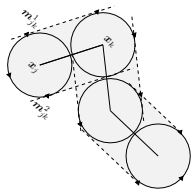

Fig. 1: Defining the markers for a particle in 2D

3 Validation tests and comparisons

3.1 Dropping a ball in a viscous fluid

For a first test we drop a rigid heavy sphere in a viscous fluid and observe it attaining its terminal velocity according to the principle that the drag force exerted on the particle by the fluid as well as buoyancy balances the gravity applied to the sphere. We define the fluid using the density $\rho_f = 1$ and viscosity $\mu_f = 0.01$. The sphere with radius $r = 0.05$ and density $\rho_s = 5$ is falling in the rectangular domain $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 3]$ to which we applied channel–flow boundary conditions. The gravity constant applied to the ball is $g = 98.1$. We take for the penalty parameters $\mu_s = 10^4$ and $1/\eta = 10^7$.

For the time step we will be using $\delta t = 0.001$. The spatial step h is such that $h = \max_{i=x,y,z} h_i = 1/50$. The initial position for the ball is $(0.5, 0.5, 1)$.

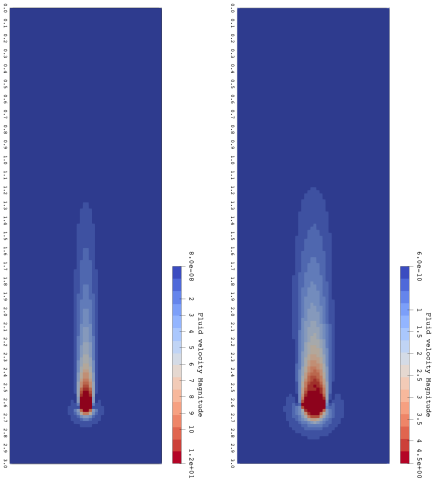

Fig. 2: Fluid velocity magnitude for the L2–penalty (left) and H1–penalty (right) when $Z(t) = 2.617$

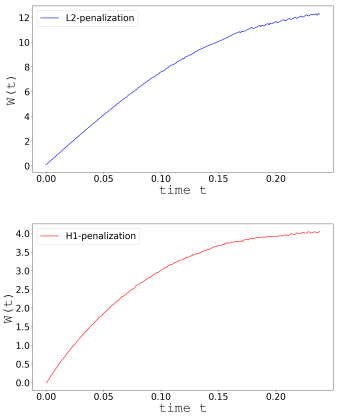

Fig. 3: W-component of the translational velocity reaching a terminal velocity of the for the L2–penalty (above) and H1–penalty (bottom)

In both cases the velocity of the particle keeps a straight trajectory and reaches a terminal velocity, which is a first satisfying result. However the terminal velocities while being within the same order ($4L.T^{-1}$ against $12L.T^{-1}$) still differ. We can also observe a diffusion around the sphere constrained with the H1/viscous penalty. This could be explained by the fact that no specific treatment regarding the interface is used when computing the viscous part of the momentum equation of the penalized problem. Meanwhile the Darcy penalty probably requires corrections regarding the physical parameters and external forces to obtain a coherent coupling between the Newton laws and the fluid problem.

3.2 A Rigid rod in a lid–driven cavity

To demonstrate the marker strategy of the viscous penalty method with a non–spherical particle, we place a rigid rod in the domain $\Omega = [0, 1]^3$ with the boundary conditions of a lid–driven cavity problem. On the side $\{(x, y, z) \in \Gamma, z = 1\}$ of Ω we set $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = 1$. The rigid rod is defined with the density $\rho_s = 0.8$, a length $l = 0.1$ and width $w = 0.02$. For the fluid we use $\rho_f = 1.0$, $\mu_f = 1.0$. We neglect the gravity and leave the boundary conditions to establish the flow. We use the spatial step $h = 1/70$ and the same time step as the previous test. We take $\mu_s = 10^4$ to penalize the solid.

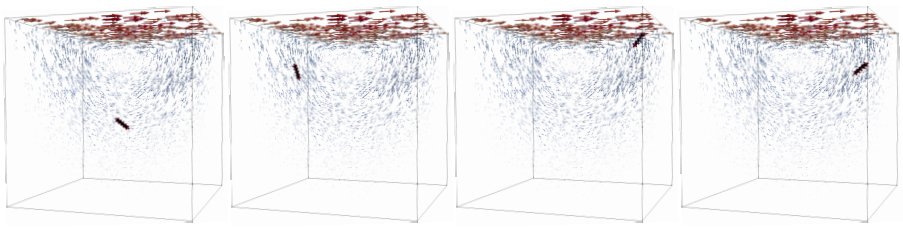

Fig. 4: State of the problem at times $t = 2.25$, $t = 4.25$, $t = 6.0$, $t = 6.75$

Despite the rather coarse mesh and the thin rod used in this test, the particle properly follows the flow and rotates appropriately, while remaining rigid. The markers seem to handle correctly the decomposition of a complex particle using sub-spheres from the collision strategy.

4 Concluding remarks

We were able to study and compare the L2–penalty and the H1–penalty methods in the context of particulate flows. As far as we know, comparative studies between those two methods do not exist for such situations. Therefore, this work can be considered as a novel short progress in this direction. The numerical tests were overall satisfying and allowed us to take a step further in validating our code. However more work is required regarding the calibration of the Darcy penalty problem and the sharpness of the interface with the viscous-penalized problem to help with the comparison of the methods and the global observations.

References

1. Angot, P., Bruneau, C.H., Fabrie, P.: A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numer. Math. **81**, 497–520 (1999)
2. Angot, P., Caltagirone, J.P., Fabrie, P.: A kinematic vector penalty–projection method for incompressible flow with variable density. C.R.A.S. pp. 1124–1131 (2016)
3. Carbou, G., Fabrie, P.: Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow. Adv. Differential Equations 8 **12**, 1453–1480 (2003)
4. Faure, S., Martin, S., Maury, B., Takahashi, T.: Towards the simulation of dense suspensions: a numerical tool. ESAIM Proc. **28**, 55–79 (2009)
5. Févrière, C., Laminie, J., Poullet, P., Angot, P.: On the penalty–projection method for the Navier–Stokes equations with the mac mesh. Journal of Computational and Applied Mathematics **226**, 228–245 (2009)
6. Glowinski, R., Pan, T.W., Hesla, T., D.D., J.: A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. International Journal of Multiphase Flow **25**, 755–794 (1999)
7. Guermond, J., Minev, P., Shen, J.: An overview of projection methods for incompressible flows. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **195**, 6011–6045 (2006)
8. Khadra, K., Angot, P., Parneixc, S., Caltagirone, J.P.: Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier–Stokes equations. Int. J. Numer. Meth. Fluids **34**, 651–684 (2000)

Annexe D

Proceedings FVCA IX

3-dimensional particulate flow modelling using a viscous penalty combined with a stable projection scheme

L. Batteux, J. Laminie, J.C. Latché and P. Poullet

Abstract We introduce a strategy for the simulation a particulate flow in a 3–dimensional domain. The particles are assumed to be rigid, and the homogeneous fluid flow to be governed by the incompressible Navier–Stokes equations. The system is solved using a predictor-corrector scheme for the Navier–Stokes equations with variable density. The latter scheme is adapted to take into account the solid domain by adopting a volume penalization method. In order to advect efficiently the particles, the approximation of the mass balance equation is carried out by an anti-dissipative scheme similar to the Ultra-Bee scheme. We conclude with numerical tests in the context of particulate flows.

Key words: 65M08, 76D05, 76T20

1 Introduction

This work is focused on the modelling of fluid–solid systems in a 3-dimensional domain. To reproduce faithfully the fluid–solid interactions is a problem of large interest due to numerous processes in industrial applications. There are several methods to attempt to model such a problem, but in this study, one considers rigid solid inclusions in an incompressible viscous fluid flow and one enforces a strong coupling between both phases. The motion of the solid domain may then be described using Newton laws for rigid bodies. As we are concerned with the efficiency and computational costs, we resort to an Eulerian formulation for the fluid flow and extend the fluid problem inside the solid domain in the manner of fictitious domain methods

L. Batteux, J. Laminie, P. Poullet
LAMIA, Université des Antilles, Campus de Fouillole, Pointe-à-Pitre, 97157 Guadeloupe FWI
e-mail: lea.batteux@univ-antilles.fr, pascal.poullet@univ-antilles.fr

J.C. Latché
IRSN, BP13115, St-Paul-lez-Durance Cedex, France e-mail: jean-claude.latche@irsn.fr

[1]. In our case we enforce some kind of Brinkmann law inside the solid domain by adopting the H1-penalty method [1]. In practice, it will come down to penalizing the tensor of deformation term where the particles are in the non-homogeneous Navier-Stokes equations. Let us denote by Ω the domain containing the particulate flow. The continuous problem is given by:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - 2\nabla \cdot (\mu(\rho)\mathbf{D}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{1}$$

with the unknowns being the density ρ, velocity $\mathbf{u}$ and pressure p. The source term is denoted by $\mathbf{f}$ and contains the forces applied to the particles among other exterior forces. The advection of the rigid particles is carried out by the mass balance equation rather than Newton laws. The viscosity μ is continuously dependent on ρ, and taking $\mu \to \infty$ inside the solid domain allows for the penalization of the tensor of deformation rate $\mathbf{D}(\mathbf{u})$. We aim to tend towards $\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_s(t))} = 0$ which is equivalent to a rigid motion velocity field inside the particles $\Omega_s(t)$. The system of equations (1) is complemented with initial conditions for $(\rho, \mathbf{u})$.

The flow being incompressible, one often resorts to a projection scheme [7, 4] to solve problem (1). Many variants can be found in the literature especially when considering multiphase flows. However a lot of problems remain open regarding the stability or convergence of those schemes. Again, for efficiency reasons we will rely on the scheme introduced in [8]. In this article, the authors circumvent the relatively expensive computational cost of the elliptic pressure problem of standard projection problem for incompressible variable density flows, by switching to an approximate and more efficient formulation of the latter. In this paper, we adapt the scheme presented in [8] for finite elements to the MAC discretization, while keeping the same stability properties. Additionally, the discontinuity and the jumps of viscosity along the fluid/solid interface require an accurate tracking of the surface of the particles. To this end, we replace the discrete mass balance equation with an anti-diffusive advection scheme introduced in [3] that is similar to the Ultra-Bee method. The scheme is adapted to the dimension $d = 3$ by considering an alternate direction variant.
In the following section we introduce the notations, meshes as well as the full discrete scheme. In a final section we carry out and comment on the simulation of the fall of a rigid sphere.

2 Numerical Method

Let $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ be a uniform partition of the time interval $[0,T]$. We note $\delta t = T/N$ the time step so that $t_n = n\delta t$, for $n \in [\![0,N]\!]$. The incremental projection scheme from [8] reads,

$$\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\delta t} + \nabla\cdot(\rho^{n+1}\overline{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}}) = 0 \ \text{ in } \Omega \tag{2a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}-\rho^n\mathbf{u}^n}{\delta t} &+\nabla\cdot(\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}\otimes\overline{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}})\\ &-\nabla\cdot((\mu^{n+1}\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}))) + \nabla(2p^n - p^{n-1}) = \mathbf{f}^{n+1} \ \text{ in } \Omega \qquad (2b)\\ &\mathbf{u}^{n+1} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega\end{aligned}$$

$$-\tfrac{\delta t}{\chi}\Delta(p^{n+1}-p^n) = -\nabla\cdot\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}} \ \text{ in } \Omega \tag{2c}$$

$$\overline{\mathbf{u}}^{\mathbf{n+1}} = \mathbf{u}^{n+1} - \tfrac{\delta t}{\chi}\nabla(p^{n+1}-p^n) \ \text{ in } \Omega \tag{2d}$$

for any time increment t^{n+1}. We denote $\mathbf{f}(t^{n+1}) = \mathbf{f}^{n+1}$ and we take $\chi = \min_{\mathbf{x}\in\Omega}\rho_0$. We aim to compute the sequence of discrete solution $(\mathbf{u}^{n+1}, \overline{\mathbf{u}}^{n+1}, p^{n+1}, \rho^{n+1})$ for $n \geq 0$. For each time step, the density is advected in (2a) by the divergence free velocity from the previous step, $\overline{\mathbf{u}}^n$. It follows with the calculation of a tentative velocity $\mathbf{u}^{n+1}$ by solving equation (2b). Using the Helmholtz decomposition of $\mathbf{L}^2(\Omega)$, the substep (2c) acts as the projection of $\mathbf{u}^{n+1}$ on $\mathbf{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{|\partial\Omega} = 0\}$ to get a corrected divergence–free velocity $\overline{\mathbf{u}}^{n+1}$ in (2d). The specificity (and interest) of the present scheme is to replace the actual density by the constant coefficient χ ; indeed, a direct adaptation of the classic incremental projection scheme [7] to nonhomogeneous fluids would result in a variable Poisson problem of the form $\nabla\cdot((\rho^{n+1})^{-1}\nabla\Phi^{n+1}) = 0$ with Neumann boundary conditions. For discontinuous densities with a high ρ_{max}/ρ_{min} ratio, this problem can be expensive to solve due to its ill-conditioned status.

2.1 Notations, mesh and discrete projection scheme

The domain Ω is discretized according to a staggered MAC mesh $\mathscr{D} = (\mathscr{M}, \mathscr{E})$ so the scheme (2) can benefit from the infsup stability property. Let the primal grid $\mathscr{M}$ consist in a conforming structured partition of Ω using rectangular parallelepipeds elements. The parallelepipeds are defined as primal cells and noted K. Therefore we have $\overline{\cup_{K\in\mathscr{M}} K} = \overline{\Omega}$. We may assume that the faces of the primal cells are normal to the vectors of the standard basis of $\mathbb{R}^3$, denoted by $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d)$. A face of the primal cell $K \in \mathscr{M}$ will be noted $\sigma \in \mathscr{E}(K)$, $\mathscr{E}(K)$ referring to the set of all faces of K.

The staggered grid is completed by defining the dual grid $\mathscr{E}$ as the set of all edges of $\mathscr{M}$: $\{\sigma \in \mathscr{E}(K) | K \in \mathscr{M}\}$. We note $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{int}} \cup \mathscr{E}_{\text{ext}}$, where $\mathscr{E}_{\text{int}}$ (resp. $\mathscr{E}_{\text{ext}}$) are the edges of $\mathscr{E}$ that lie in the interior (resp. on the boundary) of the domain. The set of faces that are orthogonal to the i^{th} unit vector $\mathbf{e}_i$ of the canonical basis of $\mathbb{R}^d$ is denoted by $\mathscr{E}^{(i)}$, for $i = 1, \ldots, d$. Correspondingly we introduce $\mathscr{E}^{(i)}_{\text{int}} = \mathscr{E}_{\text{int}} \cap \mathscr{E}^{(i)}$, $\mathscr{E}^{(i)}_{\text{ext}} = \mathscr{E}_{\text{ext}} \cap \mathscr{E}^{(i)}$ so $\mathscr{E}^{(i)} = \mathscr{E}^{(i)}_{\text{int}} \cup \mathscr{E}^{(i)}_{\text{ext}}$.
For $\sigma \in \mathscr{E}_{\text{int}}$, we note $\sigma = K|L$ for $(K,L) \in \mathscr{M}^2$ such that $\partial K \cap \partial L = \sigma$ and we associate the dual cell D_σ with $D_{K,\sigma} \cup D_{L,\sigma}$, where $D_{K,\sigma}$ (resp. $D_{L,\sigma}$) is the half-part of K (resp. L) adjacent to σ. If $\sigma \in \mathscr{E}_{\text{ext}}$ is adjacent to the cell K, then $D_\sigma = D_{K,\sigma}$. We can define Ω from the dual mesh: $\Omega = \cup_{\sigma \in \mathscr{E}_i} D_\sigma, i = 1, \ldots, d$. A dual face separating two duals cells D_σ and $D_{\sigma'}$ is denoted by $\varepsilon = \sigma|\sigma'$. In agreement with the staggered MAC scheme, we will define the unknowns (ρ, p) on the primal grid and the $i-th$ component of the velocity on $\mathscr{E}^{(i)}$ in such a way that we deal with quantities $(\rho_K, p_K)_{K \in \mathscr{M}}$ and $(\mathbf{u}_\sigma)_{\sigma \in \mathscr{E}}$. The grids and notations for $d = 2$ are illustrated in Fig. 1.

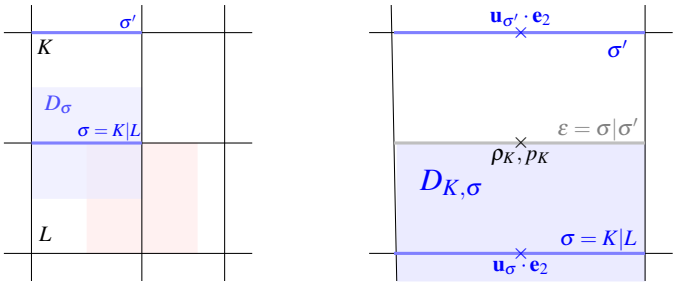

Fig. 1 2-dimensional representation of $(\mathscr{M}, \mathscr{E})$

The discretization of problem (2) begins with the discrete approximation of the mass balance equation (2a). For $K \in \mathscr{M}$, we resort in the classic way to the divergence formula for the computation of (2a) integrated over the primal cell K. This yields:

$$\frac{\rho_K^{n+1} - \rho_K^n}{\delta t} + \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{\sigma \in \mathscr{E}(K) \\ \sigma \in \mathscr{E}^{(i)}_{\text{int}}}} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0, \tag{3}$$

where $F_{K,\sigma}^{n+1}$ refers to the mass flux across the primal face σ outward K. In section 2.2, we introduce the two techniques we adopt to compute $F_{K,\sigma}^{n+1}$; namely the classic upwind scheme and an antidiffusive scheme inspired by [3].

Let us focus on the discretization of the prediction step. For $\sigma = K|L \in \mathscr{E}^{(i)}_{\text{int}}$, the approximation of (2b) is obtained by integrating the $i-th$ prediction equation over the associated dual cell D_σ. In order for the scheme to be stable and provide the

desired estimates for the unknowns, we must pay a particular attention to the discretization of the convective term in (2b):

$$\frac{1}{|D_\sigma|}\int_{D_\sigma}\Big((\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}-\rho^n\mathbf{u}^n)/\delta t+\nabla\cdot(\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}\otimes\overline{\mathbf{u}}^n)\Big)\cdot\mathbf{e}_i \quad \mathbf{dx}$$

so that the discretization of the prediction step is compatible with the the discrete mass balance. This yields an approximation of the form:

$$(\rho_{D_\sigma}^{n+1}u_\sigma^{n+1}-\rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n)/\delta t+\frac{1}{|D_\sigma|}\sum_{\varepsilon\in\mathscr{E}(D_\sigma)}F_{\sigma,\varepsilon}^{n+1}u_{\varepsilon,i}^{n+1}$$

where the values for the density on D_σ, denoted ρ_{D_σ} (resp. the fluxes on the dual faces σ, noted as $F_{\sigma,\varepsilon}^{n+1}$) are given as functions of the density on the primal cells K,L (resp. the fluxes on the primal faces). This is achieved by averaging the discrete mass balance over K and L to obtain a consistent mass balance equation on D_σ. Therefore we define $|D_\sigma|\rho_{D_\sigma}^n=|D_{K,\sigma}|\rho_K^n+|D_{L,\sigma}|\rho_L^n$. The dual fluxes $F_{\sigma,\varepsilon}^{n+1}$ are defined as the average of the fluxes on matching primal faces – the primal faces with coinciding outward normals [9, 5]. The approximation $u_{\varepsilon,i}^{n+1}$ of the $i-th$ component of the velocity valued on the dual face ε is obtained by the upwind scheme. Finally the discrete $i-th$ prediction step is given by

$$\begin{aligned}(\rho_{D_\sigma}^{n+1}u_\sigma^{n+1}-\rho_{D_\sigma}^n u_\sigma^n)/\delta t+\frac{1}{|D_\sigma|}\sum_{\varepsilon\in\mathscr{E}(D_\sigma)}F_{\sigma,\varepsilon}^{n+1}u_{\varepsilon,i}^{n+1}\\ -(\nabla\cdot(\mu^{n+1}\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1})))_{D_\sigma}+(\nabla(2p^n-p^{n-1}))_{D_\sigma}=f_\sigma^{n+1}\end{aligned}$$

with $|D_\sigma|f_\sigma^{n+1}=\int_{D_\sigma}\mathbf{f}^{n+1}\mathbf{dx}$. The remaining terms are discretized in a straightforward way, with $(\nabla(2p^n-p^{n-1}))_{D_\sigma}$ approximated by $(|\sigma|/|D_\sigma|)(\varphi_L^n-\varphi_K^n)\mathbf{n}_{K,\sigma}\cdot\mathbf{e}_i$, if we note $\varphi^n=2p^n-p^{n-1}$ and define $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ as the normal to the face σ outward K. For the viscous term, precautions must be taken given the discontinuous nature of the viscosity. It comes down to the discretization of the following term:

$$-\int_{\partial D_\sigma}\mu^{n+1}\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}):(\mathbf{n}_{\varepsilon,\sigma}\otimes\mathbf{e}_i)\mathbf{dx}$$

Therefore involving the value of μ_ε, the viscosity valued on the faces of D_σ. In our case we average the viscosity over D_σ and D'_σ associated to the dual edge $\varepsilon=\sigma|\sigma'$, and denoted μ_{D_σ} and $\mu_{D'_\sigma}$. We define μ_{D_σ} the same way ρ_{D_σ} was defined in the predictive step. However one may resort to VOF (Volume of Fluid) techniques – among others – for the computation of μ_ε [10]. We refer to [6] for the detailed approximation of the viscous term.

2.2 Antidiffusive transport scheme for the particles

For the advection of the density we resort on one hand to the classic upwind scheme, and on the other hand to an antidiffusive transport technique we introduce below. As stated in the previous section, the difference in those methods primarily involves the computation of $F_{K,\sigma}^{n+1}$ in (3).

For the upwind scheme the latter is defined as $F_{K,\sigma}^{n+1} = |\sigma|\rho_\sigma^{n+1}\overline{u}_{K,\sigma}^n$ with $\overline{u}_{K,\sigma}^n = \overline{u}_\sigma^n \mathbf{n}_{K,\sigma}\cdot\mathbf{e}_i$ when $\sigma \in \mathscr{E}^{(i)}$. The updated density at the face $\sigma = K|L$, denoted ρ_σ^{n+1}, is given by:

$$\rho_\sigma^{n+1} = \begin{cases} \rho_K^{n+1}, & \overline{u}_{K,\sigma}^n \geq 0 \\ \rho_L^{n+1}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

However in the context of the non-homogeneous Navier–Stokes equations penalized by the H1–penalty method, this approximation of the mass balance generates a large numerical diffusion around the solid phase (as observed in Section 3). We replace the diffusive upwind technique for the transport of the density with an antidiffusive scheme (AD–scheme) based on [2, 3] and adapted to the dimension $d = 3$ of the problem by considering an alternate directions variant.

Let us focus on the transport of the density by the AD–scheme in the direction $\mathbf{e}_i$. For $K \in \mathscr{M}$ we note ρ_K^* the updated value of the density on K computed from its previous value ρ_K. Let $(K^-, K^+) \in \mathscr{M}^2$ so that the primal cells K^-, K, K^+ are consecutive and such that $\sigma^- = K^-|K$ and $\sigma^+ = K|K^+$ are in $\mathscr{E}^{(i)}$. We reorder the cells by imposing $\mathbf{n}_{K,\sigma^+}\cdot\mathbf{e}_i \geq 0$ and $\mathbf{n}_{K,\sigma^-}\cdot\mathbf{e}_i \leq 0$. For the time being, Let us assume that the velocities are positive. The transport of the density in $i-th$ direction is carried out by:

$$\rho_K^* = \rho_K - \frac{\delta t|\sigma|}{|K|}((\rho_{\sigma^+}u_{\sigma^+} - \rho_{\sigma^-}u_{\sigma^-}) - (u_{\sigma^+} - u_{\sigma^-})\rho_K)$$

where u_{σ^+} (resp. u_{σ^-}) is the value of the $i-th$ component of the velocity on σ^+ (resp. σ^-). The density on the faces σ^+ and σ^-, noted ρ_{σ^+} and ρ_{σ^-}, are to be determined. An equivalent formulation yields:

$$\rho_K^* = \rho_K + \nu_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{\sigma^+}) + \nu_{\sigma^-}(\rho_{\sigma^-} - \rho_K)$$

by defining $\nu_{\sigma^+} = \delta t|\sigma|u_{\sigma^+}/|K|$ and $\nu_{\sigma^-} = \delta t|\sigma|u_{\sigma^-}/|K|$ as local Courant numbers. We compute the value ρ_{σ^+} in such a way that ρ_K^* is a convex combination of $\rho_{K^-}, \rho_K, \rho_{K^+}$. Let us note $[\![a,b]\!] = [\min(a,b), \max(a,b)]$. It then comes down to the projection of the downwind value on σ^+ (ρ_{K^+} in this case) on $[\![\rho_K, \rho_{K^+}]\!] \cap [\![\rho_K, \rho_K + (1-\nu_{\sigma^-})/\nu_{\sigma^+}(\rho_K - \rho_{K^-})]\!]$ using the classic minmod formula. We carry out a similar process for any values of $\mathbf{u}$ on faces σ^+, σ^-[2]. We extend the advection to other directions to obtain the alternate direction variant of the AD–scheme.

3 Numerical Test – Dropping a ball in a viscous fluid

We drop a rigid heavy sphere in a viscous fluid and observe it reaching its terminal velocity. We define the fluid by setting $\rho_f = \mu_f = 1$. The gravity constant $g = 9.81$ is applied to the ball. The sphere with radius $r = 0.08$ and density $\rho_s = 100$ is falling down the rectangular domain $[0,1]\times[0,1]\times[0,3]$ to which we applied channel–flow boundary conditions. We take $\mu_s = 10^4$ for the penalty viscosity. For the time step we will be using $\delta t = 0.001$. The spatial step h is such that $h = \max_{i=x,y,z} h_i = 1/50$. For the initial data at $t = 0$, the fluid is considered at rest and the particle located at its initial position $(0.5, 0.5, 1)$. We take $p^{-1} = 0$ and compute p^0 and $\overline{\mathbf{u}}^{\mathbf{0}}$ by projection of the initial velocity on $\mathbf{H}$.

In this particular test we resort to the upwind scheme for the approximation of fluxes on the primal faces. However this technique can produce a large diffusion (Fig. 2) of the discontinuous quantities and a deformability of the particle (that is ensured by a well-advected viscosity), thus resulting in an incorrect terminal velocity. The advection of the solid phase requires an antidiffusive scheme as introduced in Section 2.2, for which we carry out the following 1–dimensional numerical test; the transport of a discontinuous density along the dimensional domain $[0,2]$ and over the time interval $[0,2]$. For the discretization steps we take $h = 0.005$ and $\delta t = 0.02$. The initial density is defined as $0.3(\mathbb{1}_{[0.1,0.5]}(x) + \mathbb{1}_{[1.0,1.5]}(x))$ and is advected by the velocity $u(t,x) = \frac{3}{2\pi}\max(\arctan(10^3(x-t-1)), \arctan(-10^3(x-t-1/10)))$. The former has been chosen to obtain sudden sign changes, and thus should advect the step-function back and forth. The shape of step function of the density is modified only by the reduction of the plateau (see Fig.3). No numerical diffusion is added by the scheme and the bounds of the density remain the same.

In a second experiment, we study the behaviour of a droplet carried by the incompressible velocity field $(-\sin(x)\cos(y), \sin(y)\cos(x))$ for (x,y) in the 2–dimensional domain $[0,\pi]^2$. Let $h = 0.005$ and $\delta t = 0.0025$. The droplet at $t = 0.0$ is defined as a ball with radius 0.3 and position $(\pi/3, \pi/3)$. While no rigid constraint is imposed on the droplet, we observe little diffusion and the conservation of density bounds over time (Fig. 4).

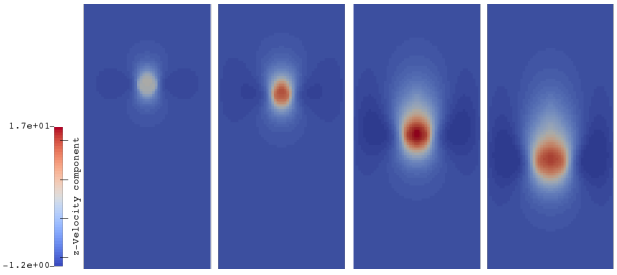

Fig. 2 Velocity component in the z-direction for the upwind scheme at $t = 0.01$, $t = 0.02$, $t = 0.05$, $t = 0.07$.

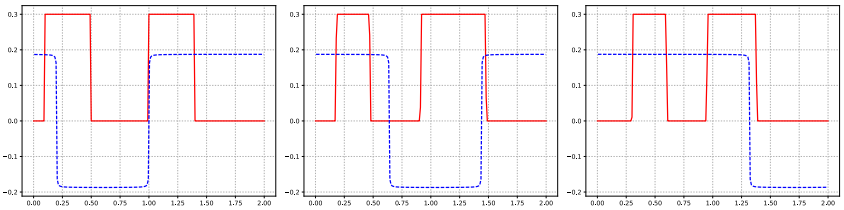

Fig. 3 State of the density (red line) at times $t = 0.0$, $t = 0.22$, $t = 0.56$. The figure also illustrates the velocity (dashed blue line) to highlight the change of sign of the velocity.

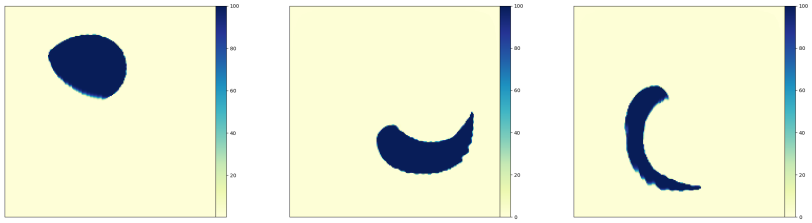

Fig. 4 State of the droplet and density values (colorbar) at times $t = 0.025$, $t = 0.25$, $t = 0.375$. For $t = 0$ we take $\rho(t,\mathbf{x}) = 100$ inside the droplet and zero everywhere else.

References

1. Angot, P., Bruneau, C.H., Fabrie, P.: A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numer. Math. **81**, 497–520 (1999)
2. Bokanowski, O., Zidani, H.: Anti-dissipative schemes for advection and application to Hamilton–Jacobi–Bellmann equations. J. Sci. Comput. **30**, 1–33 (2007)
3. Després, B., Lagoutière, F.: Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. J. Sci. Comput. **16**(4), 479–524 (2001)
4. Février, C., Laminie, J., Poullet, P., Angot, P.: On the penalty-projection method for the Navier–Stokes equations with the mac mesh. J. Comput. Appl. Math. **226**, 228–245 (2009)
5. Gallouët, Thierry, Gastaldo, Laura, Herbin, Raphaele, Latché, Jean-Claude: An unconditionally stable pressure correction scheme for the compressible barotropic Navier-Stokes equations. ESAIM: M2AN **42**(2), 303–331 (2008)
6. Grapsas, D., Herbin, R., Kheriji, W., Latché, J.C.: An unconditionally stable staggered pressure correction scheme for the compressible Navier–Stokes equations. SMAI J. Comput. Math. **2**, 51–97 (2016)
7. Guermond, J., Minev, P., Shen, J.: An overview of projection methods for incompressible flows. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **195**(44), 6011 – 6045 (2006)
8. Guermond, J.L., Salgado, A.: A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation. J. of Comput. Phys. **228**(8), 2834 – 2846 (2009)
9. Herbin, R., Latché, J.C.: Kinetic energy control in the MAC discretization of compressible Navier-Stokes equations. Int. J. Fin. Vol **7**(2) (2010)
10. Vincent, S., de Motta, J.C.B., Sarthou, A., Estivalezes, J.L., Simonin, O., Climent, E.: A Lagrangian VOF tensorial penalty method for the DNS of resolved particle-laden flows. J. of Comput. Phys. **256**, 582 – 614 (2014)

Bibliographie

[AABLV11] G. Ansanay-Alex, F. Babik, J.-C. Latché, and D. Vola. An l^2-stable approximation of the Navier–Stokes convection operator for low-order non-conforming finite elements. *Int. J. Numer. Methd. Fl.*, 66 :555–580, 2011.

[AB72] A. K. Aziz and I. Babuska. *Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method in The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*. ed. A. K. Aziz, 1972.

[ABF99] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numer. Math.*, 81 :497–520, 1999.

[ACF16] Ph. Angot, J.P. Caltagirone, and P. Fabrie. A kinematic vector penalty-projection method for incompressible flow with variable density. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 354(11) :1124–1131, 2016.

[AW77] Inoue Atsushi and Minoru Wakimoto. On existence of solutions of the Navier–Stokes equation in a time dependent domain. *Journal of the Faculty of Science. Section I A*, 24, 1977.

[Bat16] Léa Batteux. Méthodes de splitting triangulaire et préconditionneurs pour la résolution d'équations aux dérivées partielles paraboliques. Technical report, LAMIA, Université des Antilles, Guadeloupe, 2016.

[BBF08] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. Finite elements for the Stokes problem. 1939, 2008.

[BCM10] Claire Bost, Georges-Henri Cottet, and Emmanuel Maitre. Convergence analysis of a penalization method for the three-dimensional motion of a rigid body in an incompressible viscous fluid. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(4) :1313–1337, 2010.

[BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New-York, 1991.

[BF13] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier–Stokes Equations and Related Models*. Applied Mathematical Sciences 183. Springer, 2013.

[BKN15] F. Boyer, S. Krell, and F. Nabet. Inf-sup stability of the discrete duality finite volume method for the 2d Stokes problem. *Math. Comp.*, 84 :2705–2742, 2015.

[Bla05] Ph. Blanc. Convergence of a finite volume scheme on a MAC mesh for the Stokes problem with righthand side in H^{-1}. *Finite volumes for complex applications IV*, pages 133–142, 2005.

[Bos08] Claire Bost. *Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008.

[Bre04] S. Brenner. Korn's inequalities for piecewise H1 vector fields. *Math. Comput.*, 73 :1067–1087, 2004.

[BZ07] Olivier Bokanowski and Hasnaa Zidani. Anti-dissipative schemes for advection and application to Hamilton–Jacobi–Bellmann equations. *J. Sci. Comput.*, 30 :1–33, 01 2007.

[CEGH15] E. Chénier, R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. An extension of the MAC scheme to locally refined meshes : convergence analysis for the full tensor time-dependent Navier–Stokes equations. *Calcolo*, 52(1) :69–107, 2015.

[CF03] G. Carbou and P. Fabrie. Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow. *Adv. Differ. Equ.*, 8(12) :1453–1480, 2003.

[Cho68] A.J. Chorin. Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.

[DE98] Benoît Desjardins and Maria Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. 08 1998.

[Dei85] Klaus Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. 1st Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

[DL89] R.J. DiPerna and P.L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3) :511–547, 1989.

[DL01] Bruno Després and Frédéric Lagoutière. Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *J. Sci. Comput.*, 16(4) :479–524, 2001.

[Dor17] Adrien Doradoux. *Simulation numérique d'écoulements diphasiques autour d'un solide mobile*. PhD thesis, 2017.

[Dí18] Ernesto Olguín Díaz. *3D Motion of Rigid Bodies : A Foundation for Robot Dynamics Analysis*. Springer, 2018.

[EGG98] R. Eymard, T. Gallouet, and M. Ghilani. Error estimates for the aproximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes. *IMA J. Numer. Anal.*, 18 :563–594, 12 1998.

[EGH00] R. Eymard, T. Gallouet, and R. Herbin. *Finite Volume Methods*. Handb. Numer. Anal., VII. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[FLPA09] C. Février, J. Laminie, P. Poullet, and Ph. Angot. On the penalty-projection method for the Navier–Stokes equations with the MAC mesh. *J. Comput. Appl. Math.*, 226 :228–245, 2009.

[GGHL08a] T. Gallouët, L. Gastaldo, R. Herbin, and J.-C. Latché. An unconditionally stable pressure correction scheme for the compressible barotropic Navier–Stokes equations. *ESAIM : M2AN*, 42(2) :303–331, 2008.

[GGHL08b] T. Gallouët, L. Gastaldo, R. Herbin, and J.-C. Latché. An unconditionally stable pressure correction scheme for the compressible barotropic Navier–Stokes equations. *ESAIM : M2AN*, 42(2) :303–331, 2008.

[GH14] T. Gallouët and R. Herbin. *Équations aux dérivées partielles*. 2014.

[GHKL16] Dionysis Grapsas, Raphaèle Herbin, Walid Kheriji, and Jean-Claude Latché. An unconditionally stable staggered pressure correction scheme for the compressible Navier–Stokes equations. *SMAI J. Comput. Math.*, 2 :51–97, 01 2016.

[GHL12] T. Gallouët, R. Herbin, and J.-C. Latché. $W^{1,q}$ stability of the Fortin operator for the MAC scheme. *Calcolo*, 49(1) :63–71, 2012.

[GHLM18] T. Gallouët, R. Herbin, J.-C. Latché, and K. Mallem. Convergence of the marker-and-cell scheme for the incompressible Navier–Stokes equations on non-uniform grids. *Found. Comput. Math.*, 18(1) :249–289, 2018.

[GK14] T. Goudon and S. Krell. A DDFV scheme for incompressible Navier–Stokes equations with variable density. In *Finite volumes for complex applications VII. Elliptic, parabolic and hyperbolic problems*, volume 78 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 627–635. Springer, 2014.

[GL13] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. 4th Edition. The Johns Hopkins University Press, 2013.

[GMS06] J.L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2006.

[GPH+01] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, and J. Périaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :363 – 426, 2001.

[GPHJ99] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Hesla, and D.D. Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiph. Flow*, 25 :755–794, 1999.

[GQ00] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. A projection FEM for variable density incompressible flows. *J. of Comput. Phys.*, 165 :167–188, 2000.

[GR86] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1986.

[GS09] J.-L. Guermond and Abner J. Salgado. A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation. *J. of Comput. Phys.*, 228(8) :2834 – 2846, 2009.

[GS11] J.L. Guermond and A. Salgado. Error analysis of a fractional time-stepping technique for incompressible flows with variable density. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(3), 2011.

[HKL14] R. Herbin, W. Kheriji, and J.-C. Latché. On some implicit and semi-implicit staggered schemes for the shallow water and Euler equations. *ESAIM : M2AN*, 48(6) :1807–1857, 2014.

[HL10a] R. Herbin and J.-C. Latché. Kinetic energy control in the mac discretization of compressible Navier-Stokes equations. (2), 2010.

[HL10b] Raphaele Herbin and Jean-Claude Latché. Kinetic energy control in the MAC discretization of compressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Fin. Vol*, 7(2), 2010.

[HS99] K.-H. Hoffmann and V. Starovoitov. On a motion of a solid body in a viscous fluid. two-dimensional case. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 9 :633–648, 1999.

[Hu96] H.H. Hu. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2) :335 – 352, 1996.

[HW65] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Physics of Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.

[JMMP12] J. Laminie J.-M. Mounsamy and P. Poullet. Fluid flow modeling in complex areas. *ESAIM Proc.*, 35 :263–268, 2012.

[JT97] Andrew Johnson and Tayfun Tezduyar. 3d simulation of fluid-particle interactions with the number of particles reaching 100. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145 :301–321, 06 1997.

[KS09] D. Kolomensky and D. Schneider. A Fourier spectral method for the Navier-Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles. *J. of Comput. Phys.*, 228 :5687–5709, 2009.

[LS15] Jichun Li and Shuyu Sun. The superconvergence phenomenon and proof of the MAC scheme for the Stokes equations on non-uniform rectangular meshes. *J. Sci. Comput.*, 65 :341–362, 2015.

[LS18] J.-C. Latché and K. Saleh. A convergent staggered scheme for the variable density incompressible Navier–Stokes equations. *Math. Comp.*, 87(310) :581–632, 2018.

[Mal15] Khadidja Mallem. *Convergence du schéma Marker-and-Cell pour les équations de Navier–Stokes incompressible*. PhD thesis, 2015. Thèse de doctorat dirigée par R. Herbin, Mathématiques Aix-Marseille 2015.

[MF72] H. Morimoto and H. Fujita. On existence of periodic weak solutions of the Navier–Stokes equations in regions with periodically moving boundaries. *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics*, 18 :499–524, 1972.

[Min01] P.D. Minev. A stabilized incremental projection scheme for the incompressible Navier–Stokes equations. *Int. J. Numer. Methd. Fl.*, 36 :441–464, 2001.

[Mol16] A. Molza. *Contribution à la compréhension des mécanismes de lubrification par particules colloïdales*. Thèse de doctorat de Physique à l'Université des Antilles, 2016.

[MSM02] Jorge Martín, Victor Starovoitov, and Tucsnak Marius. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 161 :113–147, 02 2002.

[MT82] Tetsuro Miyakawa and Yoshiaki Teramoto. Existence and periodicity of weak solutions of the Navier–Stokes equations in a time dependent domain. *Hiroshima Math. J.*, 12(3) :513–528, 1982.

[Nic92] R. A. Nicolaides. Analysis and convergence of the MAC scheme i. the linear problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(6) :1579–1591, 1992.

[NW96] Roy A. Nicolaides and X. Wu. Analysis and convergence of the MAC scheme. ii. Navier–Stokes equations. *Math. Comp.*, 65 :29–44, 1996.

[PS06] J.-H. Pyo and J. Shen. Gauge–Uzawa methods for incompressible flows with variable density. *J. of Comput. Phys.*, 221 :181–197, 2006.

[PT83] R. Peyret and T. D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer-Verlag, 1983.

[Roe85] P. L. Roe. Some contributions to the modelling of discontinuous flows. In *Large-Scale Computations in Fluid Mechanics*, 1985.

[SC12] A.I. Sukhinov and A.E. Chistyakov. Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a nonself adjoint operator. *Math. Mod. and Comp. Sim*, 4 :398–409, 2012.

[SFT09] B. Maury S. Faure, S. Martin and T. Takahashi. Towards the simulation of dense suspensions : a numerical tool. *ESAIM Proc.*, 28 :55–79, 2009.

[She92] Jie Shen. On error estimates of projection methods for Navier–Stokes equations : First-order schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29, 1992.

[She96] Jie Shen. On error estimates of the projection methods for the Navier–Stokes equations : Second-order schemes. *Math. Comput.*, 65 :1039–1065, 1996.

[SLGB] S. Solvar, J. Laminie, O. Gros, and L. Batteux. Modélisation du comportement de mattes d'archaebactéries en milieu lagunaire tropical.

[SP05] Nitin Sharma and Neelesh Patankar. A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows. *Journal of Computational Physics*, 205 :439–457, 05 2005.

[SS97] Dongho Shin and J.C. Strikwerda. Inf-sup conditions for finite-difference approximations of the Stokes equations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B.*, 39(1) :121–134, 1997.

[SVC20] A. Sarthou, S. Vincent, and Jean-Paul Caltagirone. Consistent velocity–pressure coupling for second-order l2-penalty and direct-forcing methods. *Fluids*, 5 :92, 2020.

[Tem69] R. Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes par la méthode des pas fractionnaires. *Arch. Ration. Mech.*, 33 :377–385, 1969.

[Tem01] Roger Temam. Navier-stokes equations : Theory and numerical analysis. 2 :500 pp, 01 2001.

[TM05] R. Temam and A. Miranville. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. 2nd Edition. Cambridge University Press, 2005.

[Uhl05] Markus Uhlmann. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, 209(2) :448 – 476, 2005.

[Vab15] P.N. Vabishchevich. Explicit schemes for parabolic and hyperbolic equations. *Appl. Math. Comput.*, 250 :424–431, 2015.

Modélisation numérique d'écoulements incompressibles diphasiques : Applications à l'interaction fluide–structure

Ce travail de thèse porte sur la modélisation d'écoulements multiphasiques incompressibles, avec une application aux systèmes fluide–particules. En guise d'introduction on présente le problème physique suivi de deux méthodes de pénalisation de volume retenues pour sa modélisation. L'une des méthodes consiste à faire appel aux équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables, puis à pénaliser le tenseur des taux de déformations dans la région occupée par les particules. Les résultats démontrés sont consacrés à ces équations. On considère dans un premier temps un schéma implicite obtenu par discrétisation des équations de Navier–Stokes à densité et viscosité variables sur un maillage MAC non uniforme pour les volumes finis. Après avoir démontré l'existence de solutions à chaque pas de temps, on réalise l'étude de convergence de ce schéma lorsque les pas de discrétisation en temps et espace tendent vers 0. Une alternative au schéma précédent utilisant une méthode de projection incrémentale est ensuite étudiée et prouvée stable. Afin de simuler les problèmes d'écoulements multiphasiques, on introduit une technique pour advecter efficacement la densité. Elle vient remplacer le transport par le schéma upwind, générateur de diffusions numériques. On présente finalement un code de calcul multi-langage développé pour la simulation de problèmes fluide–structure en 3D avec les schémas introduits. On détaille alors les algorithmes implémentés pour les méthodes de pénalisation. On conclut avec une perspective de parallélisme du code à l'aide d'une méthode de splitting d'opérateur qui a déjà été expérimentée pour des problèmes paraboliques.

Mots-clés : Analyse numérique des EDP, Équations de Navier-Stokes non homogène, Interactions fluide-structure, Pénalisation de volume, Maillage décalé MAC, Volumes Finis (DDFV), Méthode de projection incrémentale, Parallélisme par MPI.

Numerical modeling for incompressible multiphase flows : Applications to Fluid–structure interactions

This phd thesis aims to model incompressible multiphase flows, with an application to fluid-particles systems. We begin with an introduction of the physical problem as well as two volume penalization methods for its modeling. One of these methods consists in using the Navier-Stokes equations with variable density and viscosity where the strain rate tensor is penalized in the domain occupied by the particles. The results demonstrated in this thesis deal with those equations. First of all, we consider an implicit scheme obtained by discretizing the Navier-Stokes equations with variable density and viscosity on a non-uniform MAC mesh with the finite volumes method. After ensuring the existence of solutions at any given time, we prove the convergence of this scheme when the time and space discretization steps tend to 0. An alternative to the previous scheme resorting to the incremental projection method is then studied and proven to be stable. In order to simulate multiphase flow problems, we introduce a technique to advect effectively the density. This step replaces the transport by an upwind scheme which generates numerical diffusion. As a conclusion we present a multi-language solver developed for the simulation of fluid-structure problems in 3D using the schemes introduced above. We then describe the algorithms implemented for the penalization methods. We introduce a parallelization prospect for the solver using a splitting method which has already been validated for parabolic problems.

Keywords : Numerical Analysis for PDE, Nonhomogeneous Navier-Stokes equations, Fluid-Structure interactions, Volume penalization, MAC staggered mesh, Finite volumes (DDFV), Incremental projection method, MPI parallel programming.