AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lorraine et de l'Université de Sousse

Mention : Mathématiques

par **Nahed NACEUR**

Une méthode de décomposition de domaine pour la résolution numérique d'une équation non-linéaire

---

Soutenue publiquement 3 décembre 2020

Membres du Jury :

Saloua Aouadi	Pr., Université de Tunis	Rapporteuse
Michel Mehrenberger	Pr., Université Aix-Marseille	Rapporteur
Hatem Zaag	DR., Université Sorbonne Paris Nord	Examinateur
Sana Hadj Amor	Pr., Université de Sousse	Examinatrice
Julie Valein	MCF., Université de Lorraine	Examinatrice
Moez Khenissi	Pr., Université de Sousse	Directeur de thèse
Jean R. Roche	Pr. émérite, Université de Lorraine	Directeur de thèse

---

Institut Élie Cartan de Lorraine, UMR CNRS 7502, Laboratoire de Mathématiques,
BP 70239, 54 506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
ESSTHS, Laboratoire de Mathématiques Modélisation Déterministe et Aléatoire,
BP 285, Rue Lamine Abassi, 4011, Hammam Sousse, Tunisie

The tool which serves as intermediary between theory and practice,
between thought and observation, is mathematics ;
it is mathematics which builds the linking bridges
and gives the ever more reliable forms.
David Hilbert.

Remerciements

À mes directeurs de thèse, Messieurs Jean Rodolphe Roche et Moez Khenissi, toutes les lettres ne sauraient générer les mots appropriés qui, eux, ne sauraient exprimer ma reconnaissance pour vous. Vos compétences, votre expérience et vos qualités humaines m'inspirent une grande admiration et un profond respect. Votre accompagnement sans faille, tout au long de ces années, a porté ses fruits et m'a permis de mener à bien ce travail. Jamais avares de votre temps, vous m'avez toujours guidée dans mon parcours de recherche avec un mélange de bienveillance et d'exigence en me prodiguant une orientation scientifique efficace, des conseils avisés et des constants encouragements. Les connaissances que vous m'avez transmises me suivront dans mon futur parcours professionnel et pour cela je vous en remercie.

C'est avec une grande émotion que j'adresse mes remerciements à Monsieur Michel Mehrenberger et Madame Saloua Aouadi qui ont sacrifié une partie de leur temps pour être rapporteurs de cette thèse et également à Monsieur Hatem Zaag qui m'a fait l'honneur de juger mon travail en tant que président du jury. Je suis très reconnaissante envers Mesdames Sana Hadj Amor et Julie Valein d'avoir accepté d'être examinatrices de ma thèse.

Je dédie ce travail à l'âme de mon oncle Farid. A toi mon cher oncle qui m'a encouragé à suivre ce chemin et accompagné dans toutes les étapes de ma vie même pendant ta maladie. Tu m'as appris à aller jusqu'au bout de mes rêves et voilà qu'aujourd'hui l'un d'eux devient réalité, mais tu n'es plus là. J'espère que là où tu es, tu seras fier de moi. Paix à ton âme.

À mon cher papa, à mon héros, à mon prince charmant, c'est grâce à toi, à tes efforts, à tes sacrifices, à ta patience et à tes encouragements que ce travail a pu voir le jour. Je sais que tu as beaucoup subi, rien que pour m'offrir une belle vie. De mon côté, les efforts que j'ai consenti ont eu pour objectif de t'apporter de la joie. Que ce travail soit l'expression de mon amour inconditionnel.

À ma maman, à l'étoile qui illumine ma vie, pour ton amour intarissable et ton soutien indéfectible. J'espère que tu trouveras dans ce travail l'expression de ma profonde gratitude et de toute ma reconnaissance.

À mon frère Nader, à mon petit ange, à ma joie de vivre, à tous les membres de la famille Naceur qui m'ont encouragé de près ou de loin, merci. Que ce travail soit une source de fierté pour vous.

Une pensée très spéciale à mon amie d'enfance, à la sœur que je n'ai pas, Safa. Ta présence à mes côtés est une source d'énergie dans tous les moments de découragement. Parce que l'on a tout partagé, je te dédie cette thèse, en mémoire du bon vieux temps.

À mes amis du collège : Maher, Foued, Olfa et Ghazwa, vous êtes pour moi le symbole d'une amitié exceptionnelle et d'un amour éternel.

Je réserve une reconnaissance particulière à mon amie Rihab qui m'a accueillie à bras ouverts et supporté mes sautes d'humeur au gré des périodes de travail les plus ardues pendant ces années de thèse.

Je tiens également à remercier mon collègue et mon ami Ghattassi que j'ai eu l'occasion de rencontrer au cours de la première période de ma thèse et qui a su créer une ambiance amicale et agréable dans notre bureau '127'.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des membres du laboratoire LAMMDA à Hammam Sousse et à tous les membres de l'IECL de l'Université de Lorraine.

Enfin, un merci à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué, directement ou indirectement, à ce travail.

Table des matières

1 Résolution numérique des équations différentielles elliptiques non linéaires en 1 D **11**

1.1 Introduction 11

1.2 Résultats théoriques 13

1.2.1 Schéma d'approximation 14

1.2.2 Estimations 15

1.2.3 Démonstration du théorème (1.2.1) 17

1.3 Méthode numérique 20

1.3.1 Approximation de la sur-solution 20

1.3.2 Résolution numérique de l'équation (1.22) 26

1.3.3 Description de l'algorithme 28

1.3.4 Résultats numériques 29

1.3.5 Conclusion 40

2 Étude théorique et numérique des équations différentielles elliptiques non linéaires dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ **42**

2.1 Introduction 42

2.2 Existence d'une solution faible non négative 43

2.2.1 Équation d'approximation 44

2.2.2 Estimations 45

2.2.3 Démonstration du théorème (2.2.1) 47

2.3 Approximation numérique 50

2.3.1 Caractérisation de la discrétisation 51

2.3.2 Approximation numérique de la sur-solution 51

2.3.3 Décomposition de domaine 53

2.3.4 Approximation de la solution de l'équation (2.17) 54

2.3.5 Résultats numériques 56

2.3.6 Conclusion 66

3 Résolution numérique des équations paraboliques semi-linéaires (de type Fujita) 67

3.1 Introduction 67

3.2 Existence, unicité, régularité et explosion de la solution 67

3.2.1 $\Omega = \mathbb{R}^d$ 68

3.2.2 Ω est un domaine extérieur 70

3.2.3 Ω est un domaine borné 71

3.2.4 Estimation du temps d'explosion par la méthode des fonctions propres 73

3.3 Étude numérique 76

3.3.1 Résolution par éléments finis 77

3.3.2 Discrétisation en temps 79

3.3.3 Explosion de la solution approchée 81

3.3.4 Estimation de temps d'explosion numérique 84

3.3.5 Algorithme classique 85

3.3.6 Algorithme pararéel 99

3.4 Conclusion 111

4 Résolution numérique de l'équation de Chipot-Weissler 112

4.1 Introduction 112

4.2 Analyse théorique 113

4.2.1 Rappels sur l'existence, unicité, régularité et explosion de la solution 113

4.2.2 Estimation du profil et temps d'explosion 116

4.3 Simulation numérique 117

4.3.1 Algorithme classique 117

4.3.2 Algorithme pararéel 126

4.3.3 Conclusion 136

Notations générales

Symboles	**Significations**
$\Delta u = (\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_d})$	Le Laplacien de u dans $\mathbb{R}^d$
$\partial\Omega$	La frontière de Ω
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid u \text{ mesurable}, \int_\Omega \mid u \mid^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid u \text{ mesurable}\,; \exists\, C \text{ tel que } \mid u(x) \mid \leq C \text{ p.p } x \in \Omega\}$
$\|.\|_p$	$= \left(\int_\Omega \mid u \mid^p\right)^{\frac{1}{p}},\ u \in L^p(\Omega)$
$\|.\|_\infty$	$= \inf\{\mid u(x) \mid \leq C \text{ p.p } \} \in L^\infty(\Omega)$
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_d})$	Le gradient de u
p.p	presque pour tous les points
$C^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment différentiables
$C_c(\Omega)$	Espace des fonctions continues à support compact dans Ω
$C_0(\Omega)$	Espace des fonctions dans $C(\overline{\Omega})$ et nulles sur $\partial\Omega$
$C^{n,m}(\Omega_1 \times \Omega_2)$	Espace des fonctions n fois dérivables dans Ω_1 et m fois dérivables dans Ω_2
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de C^∞ à support compacte dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, c.a.d les espaces des distributions dans Ω
$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$	Élément de $\mathbb{N}^d$.
$D^\alpha u = (\partial_{x_1}^{\alpha_1}, \cdots, \partial_{x_d}^{\alpha_d})$	Dérivée de u au sens faible
$W^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivée d'ordre m dans L^p
$W_0^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec une trace nulle sur $\partial\Omega$
$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$	$= \sum_{\|\alpha\| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$, pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	$= W^{m,2}(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	$= W_0^{m,2}(\Omega)$
δ_x	delta de Dirac en x
$(.,.)$	produit de dualité
$r = \mid x \mid = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2}$	Module de x

Introduction générale :

Les équations différentielles non linéaires occupent une grande place dans la modélisation d'un large éventail de problèmes du monde réel, par exemple en chimie, en biomathématique, en systèmes physiques, en propagation de maladies, en transport de contaminants, en biologie [81, 90], en finance et en sciences de l'ingénieur et plus généralement dans tout modèle impliquant un phénomène de réaction diffusion.
Cette thèse porte sur l'étude et l'analyse d'un type d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires elliptiques et paraboliques.
Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'analyse mathématique des solutions à un tel problème et de nombreux travaux ont été largement publiés dans la littérature pour répondre aux nombreuses questions sur l'existence, l'unicité, la régularité et le comportement asymptotique des solutions du problème considéré. Diverses discussions dans la littérature [1, 11, 12, 46, 65] sont consacrées à l'étude des solutions classiques avec des conditions aux limites de Dirichlet ou Neumann. Au cours du dernier demi-siècle, l'attention a été portée sur une autre définition de la solution appelée « solution faible », voir [3, 7, 10, 4, 6, 25, 26, 31, 78, 102, 8]. En lien avec cette notion, différentes méthodes ont été utilisées, telles que le théorème du point fixe, le degré topologique, la méthode de pénalité et la technique des sous-solutions et super-solutions.
Le travail présenté dans cette thèse ne se limite pas à un cadre purement théorique mais aussi à un cadre numérique vu que les simulations numériques sont devenues un puissant moyen d'investigation qui tend à prendre une place croissante à côté de l'approche expérimentale dans les sciences et les techniques. On va présenter, par suite, des méthodes numériques pour calculer une approximation d'une solution non négative de ce type d'équation en présentant les simulation correspondantes.
Cette thèse est composée de 4 chapitres :

- Le premier est consacré à l'étude d'une équation elliptique semi-linéaire en une dimension suivante :

$$\alpha u - \Delta u + G(\nabla u) = F(u) + f \text{ dans } \Omega \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $d \geq 1$, $p > 1$, $q \geq 1$, G et F sont des fonctions non négatives de Carathéodory, et la fonction source f est non négative.

On a commencé ce chapitre en démontrant l'existence d'une solution faible non négative de cette équation. Puis, on a présenté un algorithme inspiré de l'étude théorique pour calculer une approximation de la solution de l'équation (1) en se basant sur la méthode de Newton et la méthode de décomposition sans recouvrement. On a démontré le caractère bien posé de l'algorithme ainsi que sa convergence. Afin d'appréhender les aspects pratiques de ces méthodes, on a présenté à la fin de ce chapitre quelques illustrations numériques significatives des concepts traités. Ce travail a été publié dans la revue internationale « Applicable Analysis», [95].

- Dans le deuxième chapitre, on a abordé le même problème (1) au cas de dimension supérieure ou égale à 2. En fait, ce cas est très différent du point de vue théorique car on doit imposer que la non linéarité dans le gradient de l'inconnue soit sous-quadratique. On a démontré l'existence d'une solution non négative par une méthode différente que celle proposée dans le premier chapitre, qui ne peut pas être appliquée au cas de dimension supérieure à un. Ensuite, on a développé la même méthode numérique que celle introduite dans le chapitre précédent sauf qu'on a considéré une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement. Des exemples numériques ont été présentés pour mettre en valeur les performances de la méthode proposée dans ce chapitre. Ce travail original, a été publié dans « Discrete and Continuous Dynamical Systems, serieS », voir [96].
- Le chapitre 3 est dédié à l'analyse numérique de l'équation du type Fujita suivante :

$$u_t - \Delta u = \mu |u|^p + f \text{ dans } Q_T = \Omega \times]0, T[\tag{2}$$

où $T > 0$, $\mu > 0$, $p > 1$ et $f \in L^1(Q_T)$.

On a rappelé d'abord un bon nombre des résultats connus sur l'existence d'une solution non négative, ainsi que des résultats sur le temps d'existence maximale de la solution en rappelant les conditions de l'existence d'une solution globale et d'une solution qui explose en temps fini.

Dans le cas de l'explosion « blow-up », on a rappelé des résultats sur le temps maximal de l'existence de la solution. Ensuite, on a développé deux algorithmes différents. Le premier, qu'on a appelé classique, consiste à réaliser une discrétisation en espace par éléments finis et une discrétisation en temps de type Crank-Nicholson pour appliquer après, à chaque pas de temps, l'algorithme étudié dans les chapitres

précédents afin d'obtenir un problème bien posé en considérant un pas de temps adaptatif.

Le deuxième algorithme est une adaptation au cas non linéaire de l'algorithme pararéel « parareal » [59, 58, 70, 69], dont le cas linéaire a été déjà traité dans la littérature. Le calcul parareél est ainsi devenu un paradigme important pour la résolution de ce type d'équation.

Dans le cas d'une explosion de la solution, l'algorithme pararéel apporte les possibilités nouvelles. En effet, on peut considérer des pas de temps adaptés à l'évolution de la solution sur chaque sous-domaine ouvrant ainsi la possibilité d'effectuer moins d'itérations en temps en dehors de la région d'explosion de la solution.

A propos du phénomène d'explosion, on a démontré que la version discrète a une solution qui explose en temps fini de la même façon que la solution analytique. L'estimation du temps d'explosion de la solution approchée est très similaire à celle obtenue dans le cas continu.

On a présenté des simulations numériques attestant l'efficacité des algorithmes étudiés. Ces simulations sont cohérentes avec la théorie. Ce travail est également nouveau et fera l'objet d'une publication en cours de rédaction.

- Dans le dernier chapitre, on a ajouté le terme gradient dans l'équation de Fujita pour aborder la résolution numérique de l'équation de type Chipot-Weissler suivante :

$$u_t - \Delta u + \eta|\nabla u|^q = \mu|u|^p + f \text{ dans } Q_T = \Omega\times]0,T[\tag{3}$$

où $T > 0$, $\mu,\ \eta > 0$, $p > 1$, $q \geq 1$, et $f \in L^1(Q_T)$.

On a commencé par un rappel d'un certain nombre des résultats connus sur l'étude théorique de ce problème. Puis, vu que la solution de l'équation de Fujita est aussi une sur-solution du problème de Chipot-Weissler, on a développé une méthode numérique qui fait appel à la résolution numérique de l'équation de Fujita et une implémentation des algorithmes considérés dans les chapitres précédents afin d'obtenir à la limite une approximation de la solution de l'équation (3).

Les résultats des exemples étudiés avec l'algorithme classique et l'algorithme pararéel démontrent la pertinence des méthode de mises en œuvre.

Pour clore ce mémoire, on a présenté certains problèmes, encore ouverts, concernant l'amélioration des méthodes numériques pour la résolution de ce type d'équations non linéaires.

Chapitre 1

Résolution numérique des équations différentielles elliptiques non linéaires en 1 D

1.1 Introduction

Après avoir prouvé l'existence d'une solution faible non négative, on développe une méthode adaptative de décomposition de domaine sans recouvrement appropriée pour calculer une solution approchée de l'équation différentielle suivante :

$$(E,\alpha): \begin{cases} \alpha u(x) - u''(x) + G(x,u'(x)) &= F(x,u(x)) + f(x) \quad \forall\, x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall\, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

où Ω est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, α est un réel non négatif.

Les fonctions G et F sont non négatives de Carathéodory [3].

La fonction source f est non négative et intégrable ou, plus généralement, est une mesure donnée non négative sur Ω.

On peut remarquer que (E, $\alpha > 0$) est l'équation à résoudre à chaque pas de temps quand on calcule une approximation numérique d'un problème parabolique non linéaire. On peut montrer que (E, $\alpha > 0$) admet une solution avec un pas de temps adaptative dépendant de la décomposition du domaine.

A titre d'exemple, on va considérer le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} \alpha u(x) - u''(x) + \mid u(x)' \mid^q &= \mid u(x) \mid^p + f(x) \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0) &= u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

où $p \geq 1$, $q \geq 1$, f est une mesure non négative sur $]0,1[$.

Dans un premier temps, on donnera un résultat de l'existence d'une solution non négative.

Dans [9], les auteurs ont analysé le cas où $\alpha = 0$. Ils ont donné un résultat de l'existence d'une solution et introduit une méthode de décomposition de domaine de Schwarz avec recouvrement pour calculer une solution numérique. Dans le cas présent, on considère le cas $\alpha \geq 0$ et une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement. De plus, on étudie la convergence de la méthode numérique.

Des nombreux auteurs ont considéré l'existence de la solution du problème lorsque $\alpha = 0$, dans le cas unidimensionnel si f est régulière. Dans [78], les auteurs ont montré que, dans le cas où f est régulière, si l'équation (E, $\alpha = 0$) a une sur-solution non négative dans $W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ alors l'équation (E, $\alpha = 0$) a une solution dans $W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. La convexité de l'application $s \longmapsto G(x, s)$ est essentielle dans la démonstration. Lorsque f est irrégulière et G est sous-quadratique par rapport à s, de nombreux auteurs ont montré que si (E, $\alpha = 0$) a une sur-solution dans $W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ alors il a une solution dans $W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, voir [12, 13, 26, 25].

Dans ce chapitre, on considère le cas où $\alpha \geq 0$ et où f peut être irrégulière, plus précisément le cas où f est une mesure non négative dans Ω. La croissance de G par rapport à u' et la croissance de F par rapport à u sont arbitraires, voir [7, 8].

Le cas où (E, $\alpha \geq 0$) n'est pas le même que le cas (E, $\alpha = 0$) car, par exemple, la quantité $|s|^p - \alpha s$ peut être négative pour un α et un p donnés.

En suivant la méthodologie utilisée pour établir l'existence d'une solution non négative, on développe une méthode numérique. Elle consiste à calculer une sur-solution, en utilisant la méthode de Newton et les techniques de décomposition de domaine. Ensuite, en utilisant la sur-solution comme donnée initiale, on résout l'équation (E, α) en utilisant une approximation de Yosida et une méthode itérative.

Afin de calculer une approximation numérique de la sur-solution $\overline{w}$ de (E, α), on résout l'équation non linéaire suivante :

$$(E1) : \begin{cases} \alpha\overline{w} - \overline{w}''(x) & = F(x, \overline{w}(x)) + f(x) \quad \forall x \in \Omega \\ \overline{w}(x) & = 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A chaque itération de la méthode de Newton, on doit résoudre une équation linéaire qui n'est pas toujours elliptique, car elle dépend du signe de la dérivée de la non linéarité, et dans ce cas elle peut admettre plusieurs solutions.

Pour dépasser cette difficulté, on introduit la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement [79, 104] .

A titre d'exemple, on va étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha u - u''(x) + \mu(x) \mid u(x)' \mid^q &= \eta(x) \mid u(x) \mid^p + f \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0) &= u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

où $p, q \geq 1$, Les fonctions μ, η, et f sont des fonctions positives intégrables.
Ce chapitre est organisé comme suit : dans la prochaine section on donnera un résultat théorique concernant l'existence de la solution non négative, de $(E,\ \alpha)$. La troisième section décrit la méthode numérique pour calculer une approximation de cette solution tout en donnant les résultats de la convergence. La dernière section est consacrée à la présentation d'un ensemble d'exemples numériques attestant la performance des méthodes considérées et à une comparaison avec d'autres méthodes numériques.

1.2 Résultats théoriques

Dans ce chapitre on suppose :

$$f \text{ est une mesure finie non négative sur } \Omega, \tag{1.3}$$

$$F, G : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, +\infty[\text{ sont mesurables}, \tag{1.4}$$

$$\text{Les fonctions } r \to F(x,.), G(x,.) \text{ sont continues}, \tag{1.5}$$

$$F(x,.) \text{ est non décroissante}, G(x,.) \text{ est convexe}, \tag{1.6}$$

$$G(x,0) = \min\{G(x,r), r \in \mathbb{R}\} = 0 \text{ et } F(x,0) = 0, \tag{1.7}$$

$$\forall\, r \in \mathbb{R}, F(.,r), G(.,r) \text{ sont intégrables sur } \Omega. \tag{1.8}$$

On note $C_0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues et nulles sur $\partial\Omega$.
On fixe $1 \leq p \leq \infty$. Soit k un entier non négatif. L'espace Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions f définies sur Ω de telle sorte que pour chaque multi-indice $\tilde{\alpha}$ avec $|\tilde{\alpha}| \leq k$, la dérivée partielle mixte $\partial^{\tilde{\alpha}} f$ existe au sens faible et appartient à $L^p(\Omega)$.
On note $W_0^{k,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$. L'espace de Sobolev $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ telles que pour tout $\Omega' \subset \Omega$, $f_{|\Omega'} \in W^{k,p}(\Omega)$.
On introduit maintenant la notion d'une solution faible.

Définition 1.2.1. *Une fonction u est dite solution faible de (E,α), si elle vérifie le problème suivant :*

$$\begin{cases} u \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}) \\ \alpha u(x) - u''(x) + G(x, u'(x)) = F(x, u(x)) + f(x) \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{1.9}$$

On remplace dans (1.9) '=' par '$\geq$' pour la sur-solution faible et par '$\leq$' pour la sous-solution faible.
Dans l'équation (1.9), puisque $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ et grâce aux hypothèses (1.8), on a $G(x, u'(x))$ et $F(x, u(x)) \in L^1_{loc}(\Omega)$. Par conséquent chaque terme dans (1.8) admet un sens.
En particulier, si $\overline{w}$ est une solution du problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \overline{w} \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}) \\ \alpha\overline{w}(x) - \overline{w}''(x) = F(x, \overline{w}(x)) + f(x) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{1.10}$$

alors $\overline{w}$ est une sur-solution de (1.9).

Remarque 1.2.1. *P.Baras and M.Pierre ont prouvé dans [25] que le problème*

$$\begin{cases} \tilde{w} \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}) \\ -\tilde{w}''(x) = F(x, \tilde{w}(x)) + f(x) \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{1.11}$$

admet une solution non négative, à condition que f soit suffisamment petit.
Dans [9] les auteurs ont montré que l'existence de cette sur-solution implique l'existence d'une solution non négative du problème (E, $\alpha = 0$).

Remarque 1.2.2. *Puisque f est non négative, $\underline{w} \equiv 0$ est une sous-solution du problème (1.9).*

Théorème 1.2.1. *Pour $\alpha \geq 0$. On suppose que (1.3)-(1.8) sont vérifiées. On suppose qu'il existe une sur-solution faible $\overline{w}$ du problème (E, α). Alors, il existe une solution faible de (E, α) telle que $0 \leq u \leq \overline{w}$.*

1.2.1 Schéma d'approximation

On introduit une version régularisée de (E, α) en utilisant l'approximation de Yosida $G_n(x, .)$ de $G(x, .)$ définie par :

$$G_n(x, r) = \begin{cases} G(x, -n) + G'_r(x, -n)(r + n) & \text{si } r \leq -n, \\ G(x, r) & \text{si } |r| < n, \\ G(x, n) + G'_r(x, n)(r - n) & \text{si } r \geq n, \end{cases} \tag{1.12}$$

où G'_r désigne le sous différentiel de G par rapport à r.
G_n satisfait les hypothèses (1.5)-(1.8) et

$$G_n \leq G, \quad G_n \leq G_{n+1}, \tag{1.13}$$

alors $G_n(x,.)$ croit vers $G(x,.)$ quand n tend vers l'infini.

Dans [4], les auteurs ont montré qu'il existe une suite de solutions $(v_n)_{n\geq 0}$ de la solution du problème

$$\begin{cases} v_{n+1} \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \\ -v''_{n+1}(x) + G_{n+1}(x, v'_{n+1}(x)) = F(x, v_n(x)) + f(x) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{1.14}$$

où $v_0 = \tilde{w}$.

Par ailleurs, v_n peut être une sur-solution de l'équation :

$$\begin{cases} u_{n+1} \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \\ \alpha u_{n+1} - u''_{n+1}(x) + G_{n+1}(x, u'_{n+1}(x)) = F(x, u_n(x)) + f(x) \qquad \text{dans} \ \ \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{1.15}$$

où $u_0 = \overline{w}$.

On notera dans la suite algorithme de Yosida, l'algorithme qui décrit le calcul de la suite u_n solution du problème (1.15).

Vu que 0 peut être considérée comme une sous-solution de la même équation, alors l'équation (1.15) admet une solution (voir [9]).

On va montrer que la suite $\{u_n\}_n$ converge vers la solution. Pour atteindre cet objectif, on commence par prouver l'inégalité suivante

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \overline{w}. \tag{1.16}$$

Pour atteindre ce but, on a besoin d'introduire quelques estimations.

1.2.2 Estimations

Lemme 1.2.1. *Soit $a(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \geq 0$ et u satisfaisant*

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\Omega), \\ a(x)u'(x) \in L^1_{loc}(\Omega), \\ \alpha u - u'' + a.u' \geq 0 \ \textit{dans} \ \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Alors $u \geq 0$ dans Ω.

Démonstration. On suppose que s'il $\exists\ x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) < 0$, alors il $\exists$ un voisinage $[a_0, b_0] \subset \Omega$ tel que $-u'' + a.u' \geq -\alpha u \geq 0$, $u(a_0) = u(b_0) = 0$.

Mais, d'après [9], [4] on sait que si $a(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, et si u vérifie

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\Omega), \\ a(x)u'_n(x) \in L^1_{loc}(\Omega), \\ -u'' + a.u' \geq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

alors $u \geq 0$, on obtient ainsi une contradiction. □

Lemme 1.2.2. *Soit $u \in W^{2,1}_{loc}(\Omega)$, $\overline{w} \in L^\infty(\Omega)$ et $\mu \in M^+_B(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq \overline{w} & \text{dans } \Omega, \\ \alpha u - u'' \leq \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \alpha \overline{w} - \overline{w}'' \geq \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Alors $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$. De plus :

$$|u'(x)| \leq \frac{1}{d(x;a,b)} \left((|b-a|(K(a,b) + \|\mu\|_{M_B(\Omega)}) + \|\overline{w}\|_\infty) \right)$$

pour tout $[a,b] \subset \Omega$, où $d(x;a,b) = \min(x-a, b-x)$, et $K(a,b)$ est une fonction constante de a et b.

Démonstration. Soit $[a,b] \subset \Omega$, et soit φ le potentiel de capacité de $[a,b]$.
La fonction $\eta = \overline{w} - u$ vérifie :

$$\begin{cases} 0 \leq \eta & \text{dans } \Omega, \\ \alpha \eta - \eta'' \geq 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

et $\eta \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$0 \leq \int_a^b \alpha\eta - \eta'' = \int_a^b (\alpha\eta - \eta'')\varphi \leq \int_\Omega (\alpha\eta - \eta'')\varphi = \int_\Omega (\alpha\varphi - \varphi'')\eta \leq K(a,b)$$

où $K(a,b)$ est une fonction constante de a et b.
Alors, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b -u'' &\leq \int_a^b \mu - \alpha u \\ &\leq \int_a^b \mu + \alpha\eta - \alpha\overline{w} \\ &\leq \int_a^b \mu + \alpha\eta - (\mu + \overline{w}'') \\ &\leq \int_a^b \mu + \alpha\eta - (\mu + \eta'' + u'') \\ &\leq \int_a^b \mu + \alpha\eta - \eta'' - (\mu + u") \\ &\leq \int_a^b \mu + \alpha\eta - \eta'' - (\alpha u) \\ &\leq \int_a^b \alpha\eta - \eta'' + \mu \\ &\leq K(a,b) + \|\mu\|_{M^+_B(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit pour tout $0 < a < x < y < b < 1$:

$$\int_x^y -u'' = u'(x) - u'(y) \leq K(a,b) + \|\mu\|_{M_B(\Omega)}.$$

On intègre y sur $[x,b]$ on obtient :

$$(b-x)u'(x) \leq (b-a)(K(a,b)+\|\mu\|_{M_B(\Omega)})+u(b)-u(x) \leq (b-a)(K(a,b)+\|\mu\|_{M_B(\Omega)})+\|\overline{w}\|_\infty.$$

On intègre maintenant x sur $[a,y]$ et on obtient :

$$u(y)-u(a) \leq (b-a)(K(a,b)+\|\mu\|_{M_B(\Omega)})+(y-a)u'(y)$$

Alors, on conclut que :

$$\forall x \in [a,b], \ \ |u'(x)| \leq \frac{1}{d(x;a,b)}\left((|b-a|(K(a,b)+\|\mu\|_{M_B(\Omega)})+\|\overline{w}\|_\infty)\right),$$

où $d(x;a,b)=\min(x-a,b-x)$ et $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$. □

Lemme 1.2.3. *Soit $\{u_n\}_{n\geq 0} \subset W^{1,\infty}_0(\Omega)$ telles que :*

$$u_n \to u \text{ fortement dans } \ L^\infty(\Omega)$$

et

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq u_n \leq \overline{w} & \text{dans } \ \Omega, \\ \alpha u_n - u_n'' \leq \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \alpha\overline{w} - \overline{w}'' \geq \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Alors $u_n' \to u'$ fortement dans $\ L^\infty_{loc}(\Omega)$.

Démonstration. Grâce au lemme (1.2.2), $u' \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, $u_n' \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ et u_n' est bornée et dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ indépendamment de n.
Puis, en appliquant le théorème d'Ascoli, $u_n' \to u'$ fortement dans $\ L^\infty_{loc}(\Omega)$. □

1.2.3 Démonstration du théorème (1.2.1)

Démonstration. En se fondant sur le lemme (2.2.1), montrons (1.16).
On a

$$\alpha u_n - u_n'' + G_n(u_n') = F(u_{n-1}) + f \geq 0.$$

Puisque $G_n \leq G$, alors :

$$\alpha u_n - u_n'' + G(u_n') \geq \alpha u_n - u_n'' + G_n(u_n') \geq 0.$$

D'autre part, $G(.,r)$ est convexe par rapport à r, alors :

$$G(0) \geq \partial G(u_n').(0-u_n') + G(u_n'),$$

ce qui implique que :

$$\partial G(u_n').u_n' \geq G(u_n').$$

On obtient alors :

$$\alpha u_n - u_n'' + \partial G(u_n').u_n' \geq \alpha u_n - u_n'' + G_n(u_n') \geq 0.$$

De plus on a :

$$G(2u_n') \geq \partial G(u_n').(2u_n' - u_n') + G(u_n').$$

Alors :

$$\partial G(u_n').(u_n') \leq G(2u_n') - G(u_n') \in L^1_{loc}(\Omega).$$

Si on note $a_n \in \partial G(., u_n')$, alors on obtient :

$$\begin{cases} u_n \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\Omega), \\ a_n.u_n' \in L^1_{loc}(\Omega), \\ \alpha u_n - u_n'' + a_n.u_n' \geq 0 \in \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{1.17}$$

et alors, d'après le lemme (2.2.1), $u_n \geq 0$.

On montre maintenant que $u_{n+1} \leq u_n \leq \overline{w}$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \overline{w}$, et $\alpha(u_0 - u_1) - (u_0 - u_1)'' = G_1(u_1') \geq 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u_1 \leq u_0 \leq \overline{w}$.

Maintenant on suppose que $u_n \leq u_{n-1} \leq \overline{w}$, grâce à la définition de $\overline{w}$ et u_n, on obtient :

$$\alpha(\overline{w} - u_n) - (\overline{w} - u_n)'' = G_n(u_n') + F(\overline{w}) - F(u_{n-1}).$$

Puisque F est continue non décroissante et $u_n \leq \overline{w}$, alors $F(\overline{w}) - F(u_{n-1}) \geq 0$.

Par conséquent :

$$\begin{cases} \overline{w} - u_n \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\Omega), \\ \alpha(\overline{w} - u_n) - (\overline{w} - u_n)'' \geq 0 \in \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \tag{1.18}$$

En appliquant le principe du maximum, on déduit que $u_n \leq \overline{w}$. En conclusion :

$$0 \leq u_n \leq \overline{w}.$$

En utilisant les mêmes techniques, on obtient :

$$\begin{cases} (u_n - u_{n+1}) \in W^{1,1}_0(\Omega) \cap C_0(\Omega), \\ a_n(u_n' - u_{n+1}') \in L^1_{loc}(\Omega), \\ \alpha(u_n - u_{n+1}) - (u_n - u_{n+1})'' + a_n(u_n - u_{n+1})' \geq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{1.19}$$

où $a_n \in \partial G_{n+1}(x, u_n')$, alors d'après le lemme (2.2.1) :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Par suite

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \overline{w}.$$

Par ailleurs, d'après (1.3) et (1.8), on a $\alpha u - u'' \in L^1_{loc}(\Omega)$.
De plus, on a :

$$\begin{cases} 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \overline{w}, \\ \alpha u_{n+1} - u''_{n+1} = F(u_n) + f - G_{n+1}(u'_{n+1}) \leq F(\overline{w}) + f = \mu, \\ \alpha \overline{w} - \overline{w}'' = F(\overline{w}) + f = \mu. \end{cases} \tag{1.20}$$

Alors, en se basant sur le lemme (1.2.2), on déduit que $\{u_n\}_n$ est décroissante, bornée indépendamment de n dans $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, alors, il existe une sous-suite notée encore $\{u_n\}_n$ convergente fortement vers u dans $L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ quand $n \to \infty$.
Aussi, d'après le lemme (1.2.2) :

$$\|u'_{n+1}(x)\| \leq \frac{1}{d(x;a,b)}(\|\mu\|_{M_B(\Omega)} + \|\overline{w}\|_\infty),$$

où $d(x;a,b) = \min(x-a, b-x)$.
Alors u'_{n+1} est uniformément bornée dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ et en utilisant le théorème d'Ascoli on a u'_{n+1} qui converge vers u' dans $L^\infty_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.
Puisque $G_{n+1}(x,.)$ croit vers $G(x,.)$ quand n tend vers l'infini, et $G(x,.)$ et $F(x,.)$ sont continues par rapport à la deuxième variable, on a pour $[a,b] \subset \Omega$,

$$G_{n+1}(x, u'_{n+1}),\ F(x,u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G(x,u'),\ F(x,u).$$

Par ailleurs, on a :

$$|G_{n+1}(x,u'_{n+1}(x))| \leq |G(x,u'_{n+1}(x))| \leq \max_{(r\leq\|\mu\|_\infty+\|\overline{w}\|_\infty d(x;a,b)^{-1})} |G(x,r)| = \Phi(x)\ \in L^1_{loc}(\Omega),$$

$$|F(x,u_n)| \leq \max_{s\leq\|\overline{w}\|_V} |F(x,s)| = \Psi(x)\ \in L^1_{loc}(\Omega),$$

(car G et F sont intégrables).
En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a pour φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ à support dans $[a,b]$:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \langle \alpha u_{n+1} - u''_{n+1} + G_{n+1}(u'_{n+1}) - F(u_n) - f, \varphi\rangle = \langle \alpha u - u'' + G(u') - F(u) - f, \varphi\rangle.$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit dual entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

Ceci conclut la preuve du théorème (1.2.1).

1.3 Méthode numérique

Dans cette section, on introduit une méthode numérique pour calculer une approximation numérique de la solution non négative du problème(E, α) inspirée de l'étude théorique.

On considère $\Omega =]a, b[$, et $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ une partition de l'intervalle $\Omega =]a, b[$.

Soit $h = \max_{i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$.

Soit $V_h = \{p(x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); p|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i]), i = 1, ...n\}$ où $\mathbb{P}_k([x_{i-1}, x_i])$ est l'ensemble de polynômes de degré k définis dans $[x_{i-1}, x_i]$. Soit $X_h = V_h \cap H_0^1]a, b[$.

En premier lieu, on calcule $w_h \in X_h$ une approximation de $\overline{w} \in H_0^1(]a, b[)$, sur-solution du problème (E, α) et la solution de l'équation non-linéaire suivante :

$$\alpha \overline{w} - \overline{w}'' = F(x, \overline{w}) + f \text{ dans } H_0^1(]a, b[). \tag{1.21}$$

En deuxième lieu, si on note $u_{h,0} = \overline{w}_h$, on calcule la suite $\{u_{h,n}\}_n \subset X_h$ où $u_{h,n}$ est l'approximation numérique de u_n, solution dans $H_0^1(]a, b[)$ de l'équation non linéaire :

$$\alpha u_n - u_n''(x) + G_n(x, u_n'(x)) = F(x, u_{n-1}(x)) + f(x) \qquad \text{dans } H_0^1(]a, b[). \tag{1.22}$$

Dans la section précédente, on a montré que si le problème (1.21) admet une solution alors le problème (1.22) admet aussi une solution telle que $u^0 = \overline{w}$ et $0 \leq u_n \leq \overline{w}$.

1.3.1 Approximation de la sur-solution

La méthode de Newton est la méthode la plus répandue pour résoudre l'équation non linéaire (1.21). Pour une donnée initiale $\overline{w}^0 = 0$, la méthode itérative de Newton consiste à créer une suite de solutions $\{\overline{w}^k\}_k$ telles que $\overline{w}^{k+1} = \overline{w}^k + \delta$ où δ est la solution dans $H_0^1(]a, b[)$ du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\delta''(x) + (c^k(x) + \alpha)\delta(x) = g^k(x) \quad \text{dans }]a, b[\\ \qquad\qquad \delta(a) = \delta(a) = 0, \end{cases} \tag{1.23}$$

avec :

- $c^k(x) = -\frac{\partial F(x, \overline{w}^k)}{\partial r} \quad \in L^2(]a, b[)$.
- $g^k(x) = -\alpha \overline{w}^k + (\overline{w}^k)''(x) + F(x, \overline{w}^k) + f(x)$.

Alors $g^k \in M_B]a, b[$ est l'ensemble des mesures finies dans $]a, b[$.

On suppose que $c_\infty = \|c^k\|_{L^\infty(]a,b[)}$ est bornée.

Nous considérons la formulation faible associée au problème (1.23) suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } \delta \in H_0^1(]a, b[) \text{ telle que :} \\ a(\delta, v) = L(v) \ \forall \ v \in H_0^1(]a, b[) \end{cases} \tag{1.24}$$

où

$$a(\delta, v) = \int_a^b \delta'(x)v'(x)dx + \int_a^b (\alpha + c(x))\delta(x)v(x)dx,$$

$$L(v) = \int_a^b g(x)v(x)dx.$$

Pour tout $v, \delta \in H_0^1(]a, b[)$ on a :

$$|a(\delta, v)| \leq \|\delta'\|_2 \|v'\|_2 + (\alpha + c_\infty)\|\delta\|_2 \|v\|_2.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient pour tout $v \in H_0^1(]a, b[)$:

$$\|v\|_2 \leq C(a, b)\|v\|_{H_0^1(]a,b[)},$$

où $C(a, b) = \dfrac{\mid b - a \mid}{c_0}$, et $c_0 = \sqrt{2}$.
Par conséquent, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue dans $H_0^1(]a, b[) \times H_0^1(]a, b[)$ et on a :

$$|a(\delta, v)| \leq (1 + \frac{(c_\infty + \alpha)}{c_0^2}|b - a|^2)\|\delta\|_{H_0^1(]a,b[)}\|v\|_{H_0^1(]a,b[)}. \tag{1.25}$$

De plus $L(v)$ est continue dans $H_0^1(]a, b[)$:

$$|L(v)| \leq \|g\|_{M_B(]a,b[)}\|v\|_2 \leq C(a, b)\|g\|_{M_B(]a,b[)}\|v\|_{H_0^1(]a,b[)}. \tag{1.26}$$

Puisque le signe de $\alpha + c(x)$, $x \in (]a, b[)$ est inconnu, alors la forme bilinéaire $a(.,.)$ peut ne pas être elliptique :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_a^b v'^2 + \int_a^b (\alpha + c)v^2 \\ &\geq \int_a^b v'^2 + (\alpha - c_\infty)\int_a^b v^2 \end{aligned}$$

Si $\alpha - c_\infty < 0$, l'inégalité de Poincaré donne :

$$(\alpha - c_\infty)\int_a^b v^2 \geq (\alpha - c_\infty)C(a, b)^2 \int_a^b v'^2.$$

Alors,

$$a(v, v) \geq \left(1 + \frac{(\alpha - c_\infty)}{c_0^2} \mid b - a \mid^2\right)\int_a^b v'^2.$$

Alors, la forme bilinéaire est coercive si $(\alpha + c(x)) \geq 0,\ x \in (]a, b[)$ ou bien si :

$$\left(1 + \frac{(\alpha - c_\infty)}{c_0^2} \mid b - a \mid^2\right) > 0.$$

Ce qui implique :

$$|b - a| < \frac{c_0}{\sqrt{c_\infty - \alpha}},\ \text{pour tout } c_\infty > \alpha. \tag{1.27}$$

De plus, il existe un ensemble de valeurs propres λ_k de l'opérateur de dérivation de second ordre tels qu'il existe une unique solution du problème variationnel à condition que $c_\infty - \alpha \neq \lambda_k = -\frac{k^2\,\pi^2}{|b-a|^2}$, voir Agmon [1]. Dans le cas contraire, il peut y avoir un nombre infini de solutions.
Ainsi l'existence d'une solution unique de l'équation (1.23), dépend du comportement de $c_\infty = \|\frac{\partial F(.,\overline{w}^k)}{\partial r}\|_\infty$. Alors, pour calculer une solution du problème (1.23) en utilisant la méthode classique des éléments finis quand le domaine $]a,b[$ ne vérifie pas (1.27), on introduit la méthode de décomposition de domaine de Schwarz sans recouvrement.

Méthode de décomposition de domaine

Dans cette section, on va présenter la méthode de décomposition de domaine de Schwarz sans recouvrement, voir (Lions [79]), qui consiste à décomposer l'intervalle $(]a,b[)$ en m sous-domaines tels que :

i)
$$\Omega_i =]\beta_i, \beta_{i+1}[$$

ii)
$$\overline{\Omega} = [a,b] = \bigcup_{i=1}^{m} [\beta_i, \beta_{i+1}] = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega_i}$$

iii)
$$\Omega_i \cap \Omega_{i+1} = \emptyset,\ i = 1, ..., m$$

où
$$\beta_1 = a\ ,\ \beta_{m+1} = b,\ \beta_i < \beta_{i+1},\ \beta_{i+1} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_{i+1}$$

et
$$|\beta_{i+1} - \beta_i| < \frac{c_0}{\sqrt{c_\infty - \alpha}}. \tag{1.28}$$

Soit v^0 une fonction d'initialisation définie sur $(]a,b[)$ et nulle sur le bord. On généralise pour $l \geq 0, 1, ..., m$ des suites $v_i^l\ ,\ i = 1, ..., m$ solutions des sous-problèmes linéaires suivants :
Pour $i = 1$:

$$\begin{cases} -(\delta_1^{l+1})''(x) + (\alpha + c(x))\delta_1^{l+1}(x) = g(x) \quad \text{dans } (a, \beta_2), \\ \delta_1^{l+1}(a) = 0, \\ \frac{\partial \delta_1^{l+1}(\beta_2)}{\partial n} + \lambda \delta_1^{l+1}(\beta_2) = \frac{\partial \delta_2^{l}(\beta_2)}{\partial n} + \lambda \delta_2^{l}(\beta_2) = l_2^l(\beta_2), \quad \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{1.29}$$

pour $i = 2, ..., m-1$:

$$\begin{cases} -(\delta_i^{l+1})''(x) + (\alpha + c(x))\delta_i^{l+1}(x) = g(x) \ \text{ dans } (\beta_i, \beta_{i+1}), \\ \frac{\partial \delta_i^{l+1}(\beta_i)}{\partial n} - \lambda \delta_i^{l+1}(\beta_i) = \frac{\partial \delta_{i-1}^{l+1}(\beta_i)}{\partial n} - \lambda \delta_{i-1}^{l+1}(\alpha_i) = r_{i-1}^{l+1}(\beta_i), \ \ \lambda \geq 0, \\ \frac{\partial \delta_i^{l+1}(\beta_{i+1})}{\partial n} + \lambda \delta_i^{l+1}(\beta_{i+1}) = \frac{\partial \delta_{i+1}^{l}(\beta_{i+1})}{\partial n} + \lambda \delta_{i+1}^{l}(\beta_{i+1}) = l_{i+1}^{l}(\beta_{i+1}), \ \ \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{1.30}$$

pour $i = m$

$$\begin{cases} -(\delta_m^{l+1})''(x) + (\alpha + c(x))\delta_m^{l+1}(x) = g(x) \ \text{ dans }]\beta_m, b[\\ \delta_m^{l+1}(b) = 0, \\ \frac{\partial \delta_m^{l+1}(\beta_m)}{\partial n} - \lambda \delta_m^{l+1}(\beta_m) = \frac{\partial \delta_{m-1}^{l+1}(\beta_m)}{\partial n} - \lambda \delta_{m-1}^{l+1}(\beta_m) = r_{m-1}^{l+1}(\beta_m), \ \ \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{1.31}$$

où $\dfrac{\partial \delta_i}{\partial n}$ dénote le produit $\delta_i'.n_i$ avec $n = n_i = -n_{i+1}$ vecteur normal extérieur sur $\partial\Omega_i$.
Puisque les domaines vérifient la condition (1.28), les problèmes (1.29), (1.30) et (1.31) sont elliptiques et admettent une unique solution.
La démonstration de la convergence dans $H_0^1(]a, b[)$ de la méthode de décomposition de domaines de Schwarz sans recouvrement quand l'ellipticité est vérifiée dans chaque sous-domaine, se trouve dans le travail de Lions [79] et dans [9]. Par suite, chaque pas de la méthode de Newton est bien posé.
Il reste à préciser l'hypothèse qui doit être vérifiée pour la non-linéarité afin d'obtenir la convergence de l'itération de la méthode de Newton.

Convergence de la méthode de Newton appliquée (1.21)

La méthode de Newton permet de chercher une racine d'une équation non linéaire de type $H(x) = 0$. Dans ce contexte, on commence par donner des résultats de convergence de cette méthode dans le cadre général et ensuite dans le cadre de notre problème modèle (1.2). Les résultats de convergence de cette méthode sont basés sur le théorème de Newton-Kantorivich [44].
Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $H : \Omega \subseteq X \to Y$ un opérateur non linéaire, deux fois différentiable dans un domaine convexe Ω. On suppose que $H'(x_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe pour $x_0 \in \Omega$, et que :
i) $\|H'(x_0)^{-1}\| \leq C$,
ii) $\|H'(x_0)^{-1}H(x_0)\| \leq \eta$,
iii) $\|H''(x)\| \leq M, \ x \in \Omega$.
Alors l'algorithme de Newton : $x^{k+1} = x^k - H'(x^k)^{-1}H(x^k)$, $k \geq 0$ converge vers la solution de l'équation $H(x) = 0$.

Remarque 1.3.1. *Plus généralement, ce résultat est toujours vrai si on remplace la condition (iii) par l'une des hypothèses suivantes :*

- $\|H'(x) - H'(y)\| \leq L\|x - y\|,\ L \geq 0\ (x, y \in \Omega)$, *voir [44].*
  En d'autres termes, H est une fonction lipschitzienne.
- $\|H'(x) - H'(y)\| \leq K\|x - y\|^p,\ K \geq 0\ p \in [0, 1]\ (x, y \in \Omega)$.
  Cette condition signifie que H' est (K, p)-Holder continue dans Ω, voir [72]
- $\|H'(x) - H'(y)\| \leq \omega(\|x - y\|),\ \ (x, y \in \Omega)$, *où* $\omega(z) = \sum_{i=1}^{m} K_i z^{p_i}$, *avec* $K_i \geq 0$, $p_i \in [0, 1]$, $\omega(z)$ *est une fonction réelle continue non décroissante pour* $z > 0$, *telle que* $\omega(0) \geq 0$ *(voir [52]).*
- $\|H''(x)\| \leq \tilde{\omega}(\|x\|),\ \ x \in \Omega$, *où* $\tilde{\omega} : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *est une fonction réelle continue telle que* $\tilde{\omega} \geq 0$, *et* $\tilde{w}$ *est monotone, (voir [51]).*

On applique ce résultat de convergence à la version discrète du problème (E, α) qui ,dans la pratique, est celui effectivement résolu.
L'application de la méthode des éléments finis pour calculer une solution numérique de l'équation non linéaire (1.21) donne la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } w_h \ \in X_h \text{ telles que :} \\ \quad (w_h', v_h')_2 \ + (\alpha w_h - F(x, w_h), v_h)_2 = (f(x), v_h)_2 \ \ \forall\ v_h \in X_h. \end{cases} \tag{1.32}$$

Soit N_h le nombre des nœuds intérieurs de la discrétisation de l'intervalle $]a, b[$. Soit $\{\phi_i\}, i = 1, \cdots, N_h$ la base de Lagrange de X_h. Alors, toute fonction dans X_h est donnée par l'expression suivante :

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} w_h^i \phi_i(x),$$

où $w_h^i = w_h(x_i)$.
Soit $\overline{w}_h = \{w_h^i\}_{i=1}^{N_h}$ les vecteurs des inconnues des valeurs de la fonction w_h dans les nœuds d'interpolation $x_i,\ i = 1, ..., N_h$. Le vecteur $\overline{w}_h$ est la solution du système non linéaire suivant :

$$K(\overline{w}_h) = A_h \overline{w}_h - \overline{F}(x, \overline{w}_h) = f_h \tag{1.33}$$

où :

$$A_h = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{N_h} \ \text{ où } \ a_{i,j} = (\phi_i', \phi_j')_2 + \alpha(\phi_i, \phi_j)_2 \tag{1.34}$$

$$\overline{F}(x, \overline{w}_h) \text{ est la matrice diagonale } \{\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)\}_{i,i} = (F(x, w_h^k), \phi_i)_2 \tag{1.35}$$

$$f_h = \{f_h^i\}_{i=1}^{N_h}, \quad f_h^i = (f, \phi_i)_2 \tag{1.36}$$

Soit $H : \mathbb{R}^{N_h} \to \mathbb{R}^{N_h}$ l'application non linéaire :

$$H(\overline{w}_h) = A_h \overline{w}_h - \overline{F}(x, w_h). \tag{1.37}$$

Maintenant, on note $J(\overline{w}_h^k) : \mathbb{R}^{N_h} \to \mathbb{R}^{N_h}$ l'application linéaire :

$$J(\overline{w}_h^k)\overline{\delta}_h = A_h\overline{\delta}_h - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)\overline{\delta}_h, \tag{1.38}$$

où $\frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)$ est la matrice $\{\frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)\}_{i,j} = (\frac{\partial}{\partial r}F(x, w_h^k)\phi_j, \phi_i)_2$.
La résolution du problème non linéaire $H(\overline{w}_h) = f_h$ en utilisant la méthode de Newton mène à chaque itération k au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \overline{\delta}_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ telle que :} \\ J(\overline{w}_h^k)\overline{\delta}_h = -H(\overline{w}_h^k) + f_h. \end{cases} \tag{1.39}$$

Puisque $\delta_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} \delta_h^i \phi_i(x)$ on définit :

$$w_h^{k+1} = w_h^k + \delta. \tag{1.40}$$

Si chaque sous-domaine vérifie la condition (1.3.1), alors il existe γ telle que :

$$(J(\overline{w}_h^k)\overline{\delta}_h, \overline{\delta}_h) \geq \gamma \|\overline{\delta}_h\|_2 \ \forall\ k \text{ et } \overline{\delta}_h \in \mathbb{R}^{N_h}.$$

Par conséquent :

$$|||J^{-1}(\overline{w}_h^k)|||_2 < \frac{1}{\gamma}.$$

Donc, d'après le théorème de Kantorovich [44], la convergence de la suite $\{w_h^k\}_k$ dépend de la régularité de l'opérateur non linéaire H.
Dans le cas de notre problème modèle :

$$\begin{cases} \alpha u - u''(x) = \mu(x) \mid u(x) \mid^p + f(x) \quad \forall x \in]a, b[, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{1.41}$$

où $p \geq 1$, μ est une fonction positive et f est une mesure non-négative sur $]a, b[$, on a :

- Si $p > 2$, la dérivée de H, $J(.)$ est lipschitzienne alors, en appliquant le théorème de Kantorovich, la méthode de Newton converge d'une façon quadratique.
- Si $1 \leq p \leq 2$, $J(.)$ est $(p-1)$-Holderienne. D'après les résultats annoncés dans [72], la méthode de Newton converge, et la vitesse de convergence est d'ordre p.

Puisque $p \geq 1$, alors la suite de solutions $\{\overline{w}_h^k\}_k$, créée par la méthode de Newton pour calculer une approximation de la sur-solution du problème (1.41), vérifie à chaque itération k :

$$\overline{w}_h^{k+1} \geq \overline{w}_h^k \geq 0.$$

En effet, l'application de la méthode de Newton nous a donné l'équation suivante :

$$J(\overline{w}_h^k)\overline{\delta}_h = -H(\overline{w}_h^k) + f_h.$$

D'où, par la définition de $\overline{\delta}$ et des opérateurs J et H, on a :

$$A_h(\overline{w}_h^{k+1} - \overline{w}_h^k) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)(\overline{w}_h^{k+1} - \overline{w}_h^k) = -A_h(\overline{w}_h^k) + \overline{F}(\overline{w}_h^k) + f_h.$$

Ce qui implique :

$$A_h(\overline{w}_h^{k+1}) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)(\overline{w}_h^{k+1} - \overline{w}_h^k) = \overline{F}(\overline{w}_h^k) + f_h. \tag{1.42}$$

De même, on a :

$$A_h(\overline{w}_h^k) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^{k-1})(\overline{w}_h^k - \overline{w}_h^{k-1}) = \overline{F}(\overline{w}_h^{k-1}) + f_h. \tag{1.43}$$

En calculant la différence entre (1.42) et (1.43), on obtient :

$$A_h(\overline{w}_h^{k+1} - \overline{w}_h^k) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)(\overline{w}_h^{k+1} - \overline{w}_h^k) + \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^{k-1})(\overline{w}_h^k - \overline{w}_h^{k-1}) = \overline{F}(\overline{w}_h^k) - \overline{F}(\overline{w}_h^{k-1}).$$

Ce qui donne :

$$A_h(\overline{\delta}_h) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)(\overline{\delta}_h) = \overline{F}(\overline{w}_h^k) - \overline{F}(\overline{w}_h^{k-1}) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^{k-1})(\overline{w}_h^k - \overline{w}_h^{k-1}).$$

Par ailleurs, vu que $p > 1$, alors la fonction F est convexe ce qui implique que :

$$\overline{F}(\overline{w}_h^k) - \overline{F}(\overline{w}_h^{k-1}) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^{k-1})(\overline{w}_h^k - \overline{w}_h^{k-1}) \geq 0.$$

Alors :

$$A_h(\overline{\delta}_h) - \frac{\partial}{\partial r}\overline{F}(x, \overline{w}_h^k)(\overline{\delta}_h) \geq 0.$$

Donc, d'après le principe du maximum discret :

$$\delta_h = \overline{w}_h^{k+1} - \overline{w}_h^k \geq 0.$$

1.3.2 Résolution numérique de l'équation (1.22)

A cette étape, pour une donnée initiale $u_0 = \overline{w}$, on résout, pour $n = 1, ...$ jusqu'à convergence le problème non linéaire obtenu par l'approximation de Yosida :

$$\begin{cases} \alpha u_n(x) - u_n''(x) + G_n(x, u_n'(x)) &= F(x, u_{n-1}(x)) + f(x) \quad \forall x \in]a, b[\\ u_n(a) &= u_n(b) = 0. \end{cases} \tag{1.44}$$

L'équation aux dérivées partielles (1.44) est à nouveau résolue par la méthode de Newton. A chaque itération, on résout, pour tout v_h dans $H_0^1(]a, b[)$, le problème variationnel suivant :

$$(\theta_h', v_h') + (\alpha\theta_h + \frac{\partial G_n(u_{n,h}^j)'}{\partial r}\theta_h', v_h) = (-G_n((u_{n,h}^j)') + F(u_{n-1,h}) + f + (u_{n,h}^j)'' - \alpha u_{n,h}^j, v_h), \tag{1.45}$$

où $u_{n,h}$ est l'approximation numérique de la solution u_n, et $u_{n,h}^{j+1} = u_{n,h}^{j} + \theta_h$.
On note :

$$\tilde{a}(\theta_h, v_h) = \int_\Omega \alpha\theta_h v_h + \int_\Omega \theta_h' v_h' + \int_\Omega d(x)\theta_h' v_h$$

et

$$\tilde{L}(v_h) = \int_\Omega g v_h.$$

avec

- $d(x) = \dfrac{\partial G_n}{\partial r}(x, (u_{n,h}^j)')$,
- $g(x) = -G_n((u_{n,h}^j)') + F(u_{n-1,h}) + f + (u_{n,h}^j)'' - \alpha u_{n,h}^j$.

La forme bilinéaire $\tilde{a}(.,.)$ est continue sur $H_0^1(]a,b[) \times H_0^1(]a,b[)$. La forme linéaire $\tilde{L}(.)$ est continue sur $H_0^1(]a,b[)$.
Étudions maintenant l'ellipticité de la forme $\tilde{a}$. Pour tout $\theta_h \in H_0^1(]a,b[)$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\theta_h, \theta_h) &= \int_\Omega \alpha\theta_h^2 + \int_\Omega (\theta_h')^2 + \int_\Omega d(x)\theta_h'\theta_h \\ &= \int_\Omega \alpha\theta_h^2 + \int_\Omega (\theta_h')^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega d(x)(\theta_h^2)'. \end{aligned}$$

En supposant que $d'(x) \in L^\infty(]a,b[)$, et en faisant une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\theta_h, \theta_h) &= \int_\Omega \alpha\theta_h^2 + \int_\Omega \mid \theta_h' \mid^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega d'(x)\theta_h^2, \\ &= \int_\Omega \mid \theta_h' \mid^2 + \int_\Omega (\alpha - \frac{1}{2}d'(x))\theta_h^2. \end{aligned}$$

Si on suppose que $d'(x)$ est borné par sa norme infinie, notée d_∞, alors, on obtient

$$\tilde{a}(\theta_h, \theta_h) \geq \int_\Omega \mid \theta_h' \mid^2 + (\alpha - d_\infty) \int_\Omega \mid \theta_h \mid^2 .$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\theta_h, \theta_h) &\geq \int_\Omega \mid \theta_h' \mid^2 + (\alpha - d_\infty)\, C(\Omega)^2 \int_\Omega \mid \theta_h' \mid^2 \\ &\geq \left(1 + (\alpha - d_\infty)\, C(\Omega)^2\right) \|\theta_h'\|_2^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, le problème (1.45) est elliptique si $\alpha - d_\infty > 0$ ou bien, si :

$$\operatorname{diam}(\Omega) < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d_\infty - \alpha}}, \text{ pour } \alpha - d_\infty < 0. \tag{1.46}$$

Par ailleurs, la convergence de la méthode de Newton dépend des propriétés de la non-linéarité $G_n(., r)$ comme mentionné dans (1.12).
De plus, en utilisant les mêmes arguments considérés dans la section (1.2) pour montrer

le théorème 1.2.1, on obtient la convergence de $u_{n,h}$ vers u dans $H_0^1(]a,b[)$.
Pour le cas de l'exemple (1.2), l'approximation de Yosida de $G(.,r)$ est donnée comme suit :

$$G_n(x,r) = \begin{cases} n^q - qn^{q-1}(r+n) & \text{si } r \leq -n, \\ |r|^q & \text{si } |r| < n, \\ n^q + qn^{q-1}(r-n) & \text{si } r \geq n, \end{cases} \tag{1.47}$$

Pour les mêmes raison indiquées dans la section (1.21), la méthode de Newton appliquée à (1.22) converge d'une façon quadratique si $q \geq 2$ et elle converge et elle est d'ordre q si $1 \leq q < 2$.

1.3.3 Description de l'algorithme

On résume l'algorithme présenté dans la section (1.3) de la manière suivante :

1) Pour une donnée initiale $\overline{w}^0 = 0$, on calcule d'une façon itérative, pour $k = 1$ jusqu'à convergence la suite $w^{k+1} = w^k + \delta$, où δ est la solution du problème linéaire (1.23).

   Pour atteindre cet objectif, on considère la méthode de décomposition de domaine de Schwarz sans recouvrement. Cette étape de l'algorithme peut être décrite comme suit :

   i) On calcule $c_\infty = \|\frac{\partial}{\partial r}F(x, w_h^k)\|_\infty$. Ensuite, on détermine la décomposition des sous-domaines géométriques Ω, $\{\Omega_i\}_{i=1,...,m}$ selon l'hypothèse

   $$diam(\Omega_i) < \frac{c_0}{\sqrt{c_\infty - \alpha}}, \text{ pour } c_\infty > \alpha.$$

   ii) On calcule d'une manière itérative,
   pour $k = 1, ..,$ jusqu'à convergence
   pour $i = 1, ..., m$, la solution numérique des problèmes (1.29), (1.30) et (1.31).

   La suite w_h^k tend vers la sur-solution numérique $\overline{w}_h$ du problème (1.21) quand k tend vers l'infini.

2) Soit $u_0 = \overline{w}_h$.
   Pour $n = 1, ...$ jusqu'à convergence :

   - Soit $u_n^0 = u_{n-1}$,
   - pour $j = 1, ...,$ jusqu'à convergence, on calcule $u_n^{j+1} = u_n^j + \theta$, où θ est la solution du problème d'approximation (1.45).

- À la fin de la boucle en j, on aura $u_n = u_n^j$.

L'approximation discrète de la solution de (E, α) est obtenue à la fin de la boucle en n.

1.3.4 Résultats numériques

Dans cette section on va présenter quelques simulations numériques qui illustrent le performance de notre algorithme.
L'exemple analysé dans ce chapitre est le suivant :

$$\begin{cases} \alpha u(x) - u''(x) + \mu(x) \mid u(x)' \mid^q &= \eta(x) \mid u(x) \mid^p + f(x) \quad \forall x \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.48}$$

où $p \geq 1$, $q \geq 1$, f est une fonction positive dans $L^1(0,1)$, $\mu(x)$ et $\eta(x)$ seront données à chaque test.
Afin de tester notre algorithme, on considère le cas où $u(x) = 15x^2(1-x)^2$ est connue, $\alpha = 2$, $p = q = 2$, $\mu(x) = 1$, et $\eta(x) = 3$.
Le paramètre λ introduit dans la méthode de décomposition de domaine est donné suivant le pas de discrétisation h, $\lambda = \dfrac{\text{diam}(]0,1[)}{h} = \dfrac{1}{h}$, see [79].

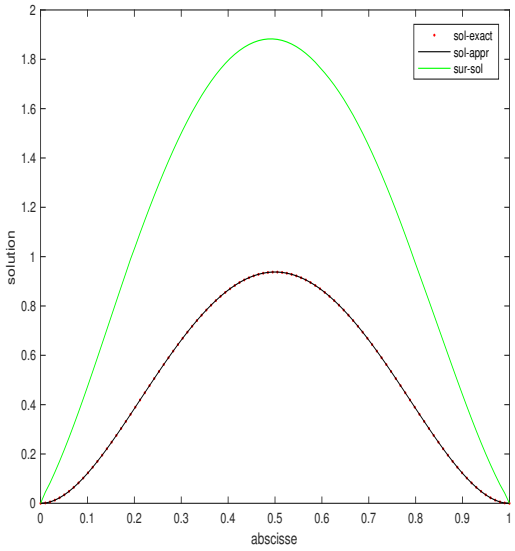


FIGURE 1.1 – Forme de la solution exacte et les solution numériques

La Figure 1.1 montre bien la convergence entre la solution numérique et la solution exacte, la précision de l'erreur est d'ordre 10^{-4} avec un pas de discrétisation $h = 0.01$.
Pour analyser cette convergence, la Figure 1.2 illustre l'évolution de la sur-solution en fonction des itérations de la méthode de Newton notées k. Pour ce même exemple, on montre l'évolution du nombre de sous-domaines dans la Figure 1.3.

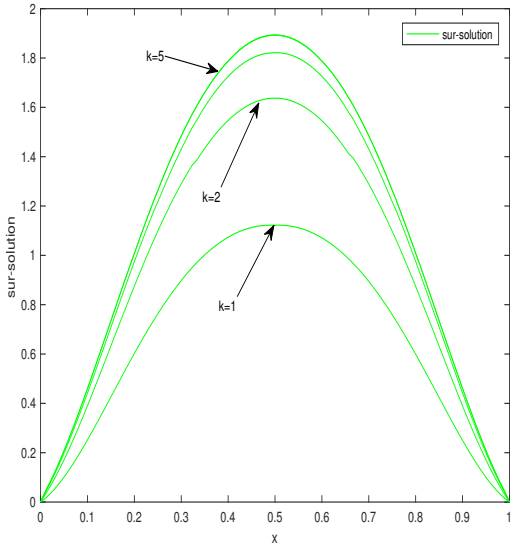


FIGURE 1.2 – Évolution de la sur-solution en fonction des itérations successives de Newton notées k

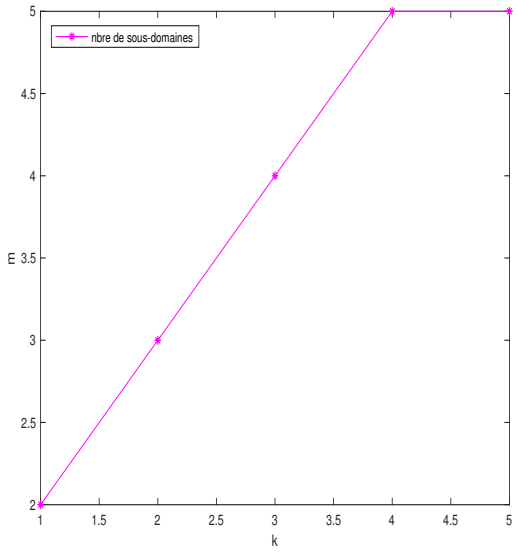


FIGURE 1.3 – Évolution du nombre de sous-domaines noté m en fonction du nombre k d'itérations de Newton

Le tableau suivant donne plus de détails des résultats numériques obtenus :

# Itération de Newton : k	1	2	3	4	5
$\|\overline{w}_h^{k+1} - \overline{w}_h^k\|_\infty$	1.12	0.51	0.185	0.071	1.2 10−3
# Itération de Schwarz : l	45	66	61	35	1
$\|\overline{\delta}_h^{l+1} - \overline{\delta}_h^l\|_\infty$	$9.71\ 10^{-5}$	$9.76\ 10^{-5}$	$9.9\ 10^{-5}$	$9.8\ 10^{-5}$	$6.4\ 10^{-5}$
# Nombre de sous-domaine : m	2	3	4	5	5

TABLE 1.1 – Comportement de l'algorithme calculant la sur-solution approchée

Dans la Figure 1.3, on remarque qu'à la première itération de la méthode de Newton on a seulement deux sous-domaines, à la deuxième on en a 3 et à la troisième itération on en a 4, puis, le nombre de sous-domaine est égal à 5. L'algorithme de Newton converge à l'itération 5 et la simulation s'arrête quand la correction calculée (en norme L^∞) est d'ordre 10^{-3}.

D'autre part, on vérifie que le nombre de sous-domaine croit quand on se rapproche de la sur-solution $\overline{w}$.

Une fois la sur-solution calculée, pour $u_0 = \overline{w}$, on résout, d'une manière itérative, pour $n = 1$ jusqu'à convergence le problème d'approximation (1.44).

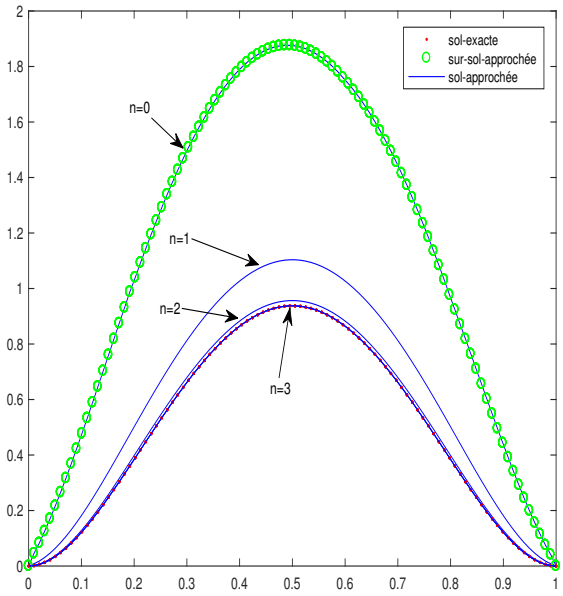


FIGURE 1.4 – Évolution de la solution en fonction des itérations de l'algorithme de Yosida notées n

Dans la Figure 1.4, on trace l'évolution de la solution numérique u_n, du problème (1.44). On a obtenu, à la troisième itération de l'algorithme de Yosida, une convergence vers la solution exacte avec précision de 10^{-4} en norme L^2 et un pas de discrétisation en espace $h = 0.01$.
Pour mieux décrire le résultat de cet algorithme on consulte le tableau suivant :

# Itération de Yosida : n	1	2	3
# Itération de Newton : j	9	5	4
$\|\theta\|_\infty$	$5.5\ 10^{-5}$	$7.3\ 10^{-5}$	$2.3\ 10^{-5}$
Erreur en L^2	0.126	0.0147	$1.9\ 10^{-4}$

TABLE 1.2 – Comportement de l'algorithme calculant la solution approchée en fonction de l'itération de Yosida notée n.

En utilisant la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$, l'erreur en norme L^2 entre la solution exacte et la solution approchée est d'ordre h^2, voir [110, 49].
Une vérification numérique de l'ordre de l'erreur en fonction de $log(h)$ où $h = \frac{1}{N}$ et $N = 100, 200, .., 500$ est donnée dans la Figure 1.5.

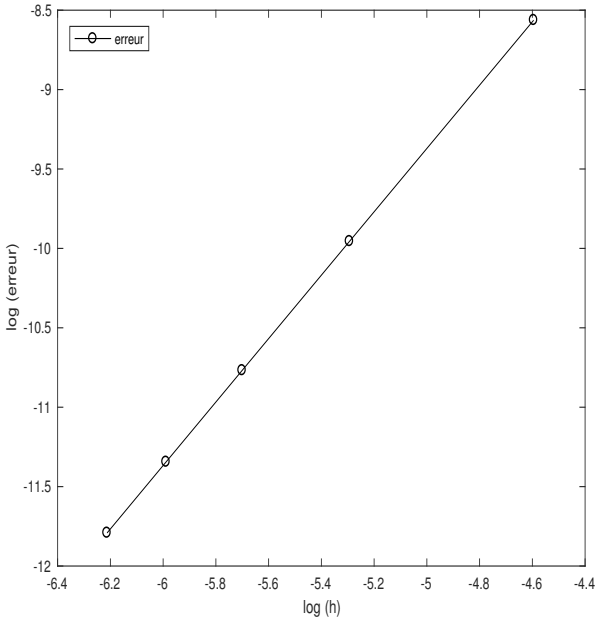


FIGURE 1.5 – Estimation d'erreur en norme L^2 dans le calcul de la solution du problème (1.48)

Par ailleurs, afin de montrer l'influence de α et de $\|\frac{\partial F(\overline{w})}{\partial r}\|_\infty$ sur l'évolution du nombre de sous-domaines, on considère le problème où la solution exacte est $u(x) = x(1-x)$ avec $p = 3$, $q = 4$, et $h = 0.03$. En prenant différentes valeurs de α et η, on obtient les résultats présentés dans les Figures 1.6 et 1.8, avec, respectivement, $\eta = 100$, $\alpha = 10$, $\eta = 650$, $\alpha = 100$.

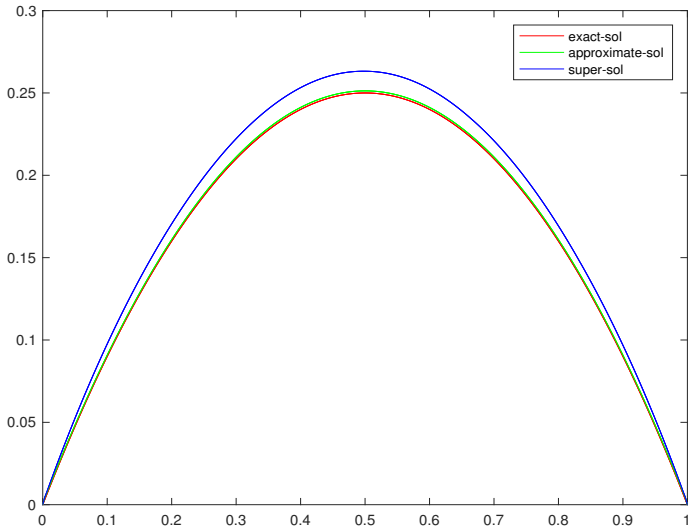


FIGURE 1.6 – Solution de l'équation (1.48) dans le cas $\eta = 100$, $\alpha = 10$, et $m = 6$

On a effectué 6 itérations de la méthode de Newton pour calculer la sur-solution de l'exemple présenté dans la Figure 1.6 où la différence entre deux itérés successifs est d'ordre 10^{-4}. Le nombre de sous-domaines varie de 2 à 6 au cours de ces itérations, voir la Figure (1.7).

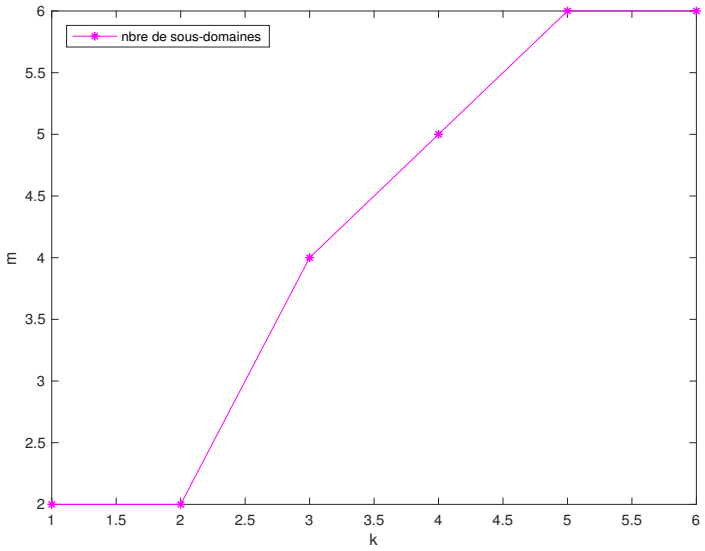


FIGURE 1.7 – Évolution du nombre de sous-domaines en fonction du nombre d'itérations de Newton, notées k

Par ailleurs, après deux itérations de l'algorithme de Yosida, on a atteint un erreur entre la solution exacte et la solution approchée en norme L^2 d'ordre 10^{-4}.
La Figure 1.8 présente les résultats avec $\eta = 650$, $\alpha = 100$, et $m = 15$

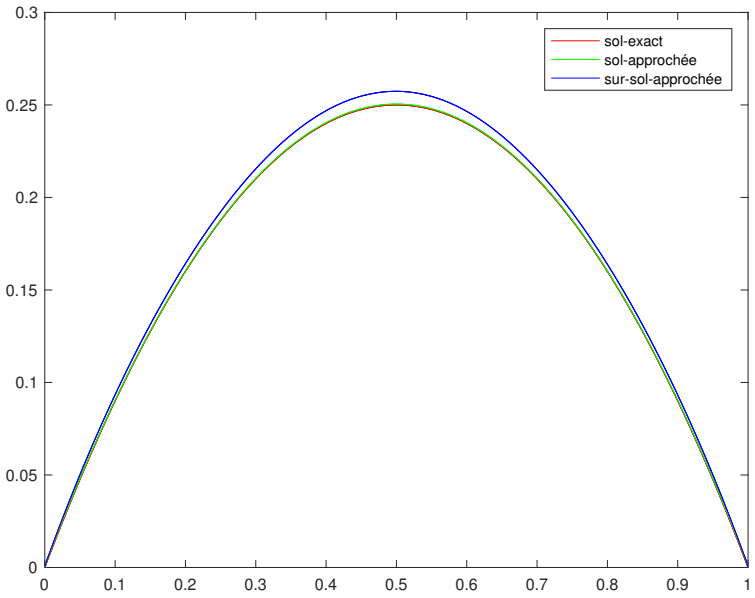


FIGURE 1.8 – Solution du probléme (1.48) avec $\eta = 650$, $\alpha = 100$, et $m = 15$

Pour ce choix de paramètres, le calcul de la sur-solution nécessite 15 sous-domaines. De la première à la troisième itération de la méthode de Newton le nombre de sous-domaines est égale à 2, à la quatrième on a 12 sous-domaines et à la cinquième, on en a 15.
Après le calcul de la sur-solution, on effectue deux itérations de l'algorithme de Yosida pour obtenir une convergence en norme L^2 d'ordre 10^{-4}.
Les résultats présentés dans les Figures 1.6 et 1.8 montrent que le nombre de sous-domaines dépend du comportement de α et de $\|\frac{\partial F(\overline{w})}{\partial r}\|_\infty$.

On considère maintenant un cas présentant une difficulté supplémentaire :

$$\begin{cases} \alpha u - u''(x) + \mu(x) \mid u(x)' \mid^q &= \eta(x) \mid u(x) \mid^p + K\delta_{x_0} \quad \forall x \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.49}$$

Dans ce cas, la solution exacte est inconnue et la fonction source f est une mesure ponctuelle.

Dans un premier temps, on considère :

$$\alpha = 2,\ p = q = 3,\ K = 3,\ x_0 = \frac{1}{3},\ \mu(x) = 1,\ \eta(x) = 5,\ \text{et}\ N = 400$$

.

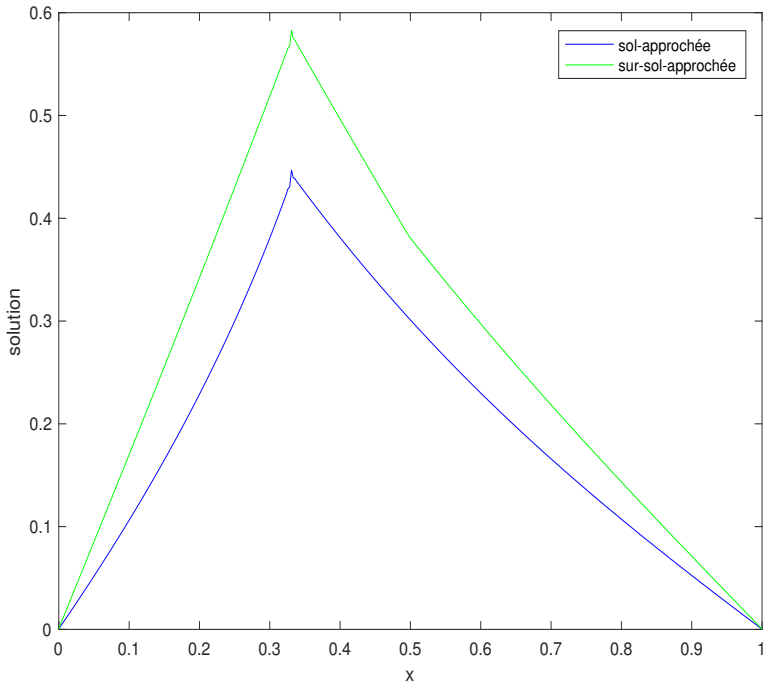


FIGURE 1.9 – Approximation de la sur-solution et la solution du problème (2.30) dans le cas $\alpha = 2,\ p = q = 3,\ K = 3,\ x_0 = \frac{1}{3},\ \mu(x) = 1,\ \eta(x) = 5$, et $N = 400$

Dans la Figure 1.9, on peut observer la forme de la sur-solution et de la solution numériques du problème (1.49) pour ce choix de paramètres . L'algorithme de Newton utilisé pour le calcul de la sur-solution converge seulement avec deux sous-domaines. On effectue 5 itérations de l'algorithme de Newton pour atteindre une approximation de la sur-solution où l'évolution entre deux itérés successifs en norme L^∞ est inférieure à 10^{-4} avec un nombre de sous-domaines égal à deux (m=2).
D'autre part, on a effectué 5 itérations de l'algorithme de Yosida afin d'obtenir une solution numérique quand l'évolution relative en norme L^2 entre deux itérés successifs est d'ordre 10^{-5}.

# Itération de Yosida n	1	2	3	4	5
# Itération de Newton : j	3	6	8	10	11
$\|\theta_h\|_\infty$	$6.9\ 10^{-5}$	$4.6\ 10^{-5}$	$3.6\ 10^{-5}$	$9.3\ 10^{-5}$	$2.9\ 10^{-5}$
$\frac{\|u_{n-1,h} - u_{n,h}\|_2}{\|u_{n-1,h}\|_2}$	0.24	0.0732	$8.3\ 10^{-3}$	$2.1\ 10^{-3}$	$5.06\ 10^{-5}$

TABLE 1.3 – Comportement de l'algorithme calculant la solution approchée du problème (1.49) dans le cas $\alpha = 2,\ p = q = 3,\ K = 3,\ x_0 = \frac{1}{3},\ \mu(x) = 1,\ \eta(x) = 5$, et $N = 400$.

Dans un second cas, pour le même problème (1.49), on choisit $\alpha = 3,\ p = 3,\ q = 4,\ K = 5,\ x_0 = \dfrac{1}{2},\ N = 800,$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in (0, 0.5) \\ 10(x - 0.5) & \forall x \in (0.5, 1). \end{cases} \tag{1.50}$$

et

$$\eta(x) = \begin{cases} 36(0.5 - x) & \forall x \in (0, 0.5) \\ 0 & \forall x \in (0.5, 1). \end{cases} \tag{1.51}$$

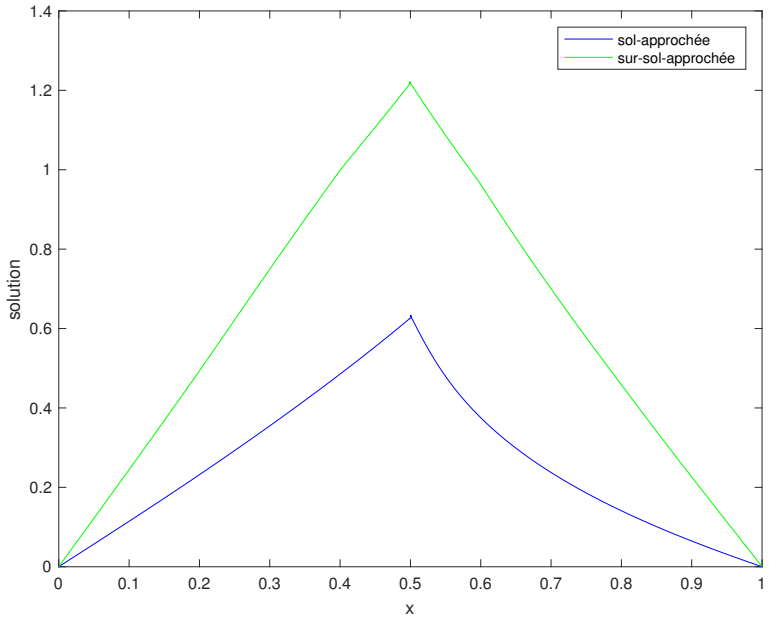


FIGURE 1.10 – Approximation de la sur-solution et solution du problème (1.49), dans le cas $\alpha = 3,\ p = 3,\ q = 4,\ K = 5,\ x_0 = \dfrac{1}{2},\ N = 800,$

Pour cet exemple, la sur-solution est obtenue après 3 itérations de la méthode de Newton. Dans ce cas, le nombre de sous-domaines varie de 2 à 5. Aux deux la premières itérations le nombre de sous-domaines est 2, et à la troisième itération le nombre est 5 avec une correction en norme infinie d'ordre 10^{-4}.

Afin de calculer la solution approximative de l'équation (1.49), en commençant par la sur-solution, on effectue 4 itérations de l'équation d'algorithme de Yosida et on s'arrête lorsque l'évolution entre deux approximations calculées successives est inférieure à 10^{-4}.

# Itération de Yosida : n	1	2	3	4
# Itération de Newton : j	7	17	23	24
$\|\theta_h\|_\infty$	$6.3\ 10^{-4}$	$3.7\ 10^{-4}$	$5.8\ 10^{-4}$	$1.9\ 10^{-4}$
$\frac{\|u_{n-1,h} - u_{n,h}\|_2}{\|u_{n-1,h}\|_2}$	0.76	0.24	0.03	$2.8\ 10^{-4}$

TABLE 1.4 – Comportement de l'algorithme calculant la solution approchée du problème (1.49), dans le cas $\alpha = 3,\ p = 3,\ q = 4,\ K = 5,\ x_0 = \frac{1}{2},\ N = 800$.

Remarque 1.3.2. *Pour montrer l'utilité de la décomposition de domaine, toujours pour le même exemple (1.49), et les mêmes paramètres* $\alpha = 3,\ p = 3,\ q = 4,\ K = 5,\ x_0 = \frac{1}{2},\ N = 800$*, on autorise un maximum de deux sous-domaines, (on fixe* $m = 2$*), On obtient alors le résultat présenté dans la Figure 1.11 pour le calcul de la sur-solution :*

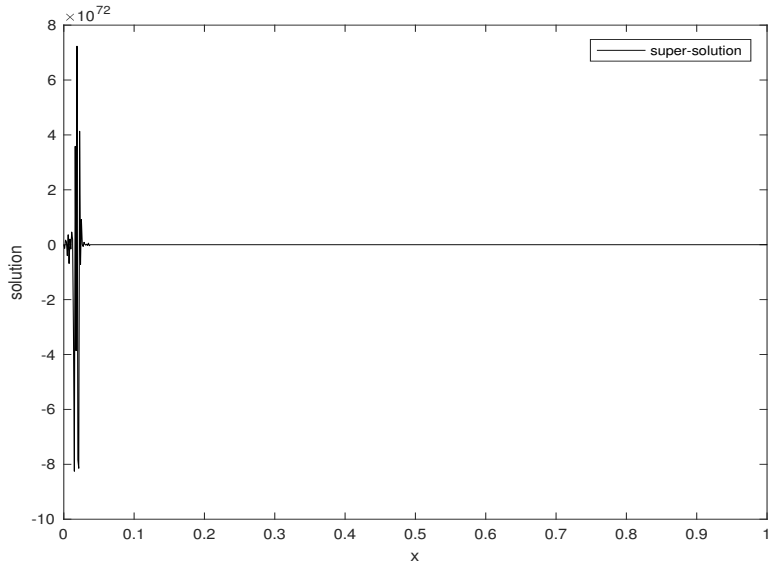


FIGURE 1.11 – Comportement de l'algorithme calculant l'approximation de la sur-solution avec 2 sous-domaines

Alors, d'après la Figure 1.11, il est clair que la méthode classique sans méthode adaptative de domaine ne permet pas de calculer la solution approchée de l'équation non linéaire de type (E, α). En effet la forme bilinéaire associée au problème (1.49) n'est pas elliptique sur les 2 sous-domaines, et par suite, l'algorithme de Newton appliqué pour le calcul de la sur-solution de ce problème (1.49) diverge.

On considère maintenant le même exemple (1.49) avec les mêmes paramètres $\alpha = 3,\ p = 3,\ q = 4$, mais avec une fonction source f à plusieurs mesures de Dirac. On considère en particulier,

$$f = 3\delta_{x_0} + 2\delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \delta_{x_3},$$

où $x_0 = 0.4,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.7,$ et $x_3 = 0.9$. On obtient alors le résultat suivant :

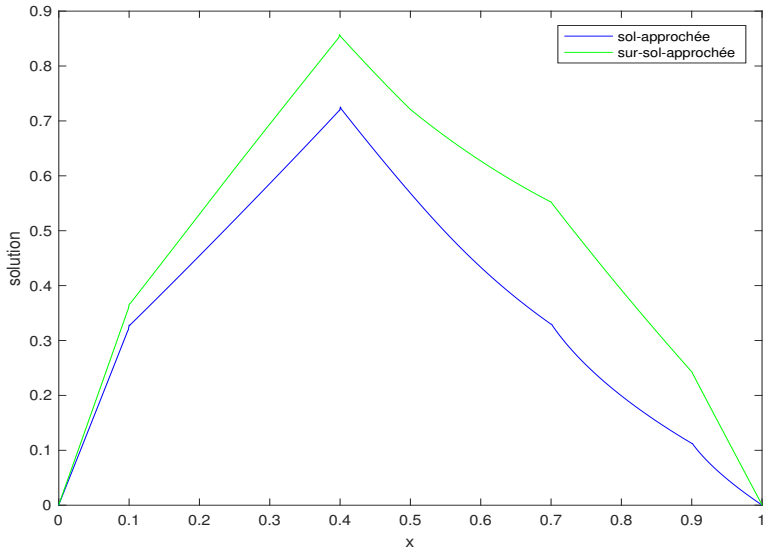


FIGURE 1.12 – Approximation de la sur-solution et la solution du problème (1.49) dans le cas $\alpha = 3,\ p = 3,\ q = 4$, et fonction source à plusieurs mesures de Dirac

La sur-solution approchée de cet exemple est obtenue après 5 itérations de la méthode de Newton dont la différence entre deux itérés successifs en norme L^∞ est égale à $2.8\ 10^{-4}$. A la première itération on a deux sous-domaines, à la deuxième itération le nombre de sous-domaines est 3 et à partir de la troisième itération on a 4 sous-domaines.
Après le calcul de la sur-solution, la résolution du problème régularisé donne une solution

approchée après 3 itérations de l'algorithme de Yosida avec une simulation de correction en norme infinie d'ordre 10^{-4}.

# Itération de Yosida : n	1	2	3
# Itération de Newton : j	9	24	25
$\|\theta_h\|_\infty$	$3.6\ 10^{-4}$	$7.7\ 10^{-4}$	$5.4\ 10^{-4}$
$\frac{\|u_{n-1,h} - u_{n,h}\|_2}{\|u_{n-1,h}\|_2}$	0.27	0.051	$8.06\ 10^{-4}$

TABLE 1.5 – Comportement de l'algorithme calculant la solution approchée u problème (1.49) dans le cas $\alpha = 3,\ p = 3,\ q = 4$, et fonction source à plusieurs mesures de Dirac

Pour conclure à partir de la section des expériences numériques, on peut souligner les différences entre l'algorithme décrit dans ce chapitre et les autres codes proposés dans les packages d'analyse numérique. Il existe des algorithmes puissants dans la litérature : la méthode numérique proposée par Ascher et les collaborateurs de Hill, voir [17, 15, 18, 14], les algorithmes du package MATLAB bvp inspirés des méthodes étudiées dans [77, 115, 113, 61] et le code MATLAB bvptwp.m proposé dans [92, 91]. Tous ces codes implémentent des versions optimisées de méthodes numériques adaptées aux équations différentielles, comme les méthodes de collocation, les différences finies, Runge-Kutta implicite et la stratégie de continuation pour gérer les changements de la solution.
L'algorithme présenté dans notre travail est inspiré des méthodes variationnelles et des éléments finis. Nous pouvons gérer des données non régulières sans régularisation préalable. La décomposition adaptative du domaine a été introduite pour prendre en compte les non-linéarités et contrôler l'évolution à chaque étape de Newton. Les résultats numériques obtenus par notre algorithme sont comparables à ceux cités dans le paragraphe précédent par rapport à la précision de l'approximation de la solution. Dans notre cas, nous n'avons pas besoin de la régularisation préalable à la fonction source.

1.3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on produit un résultat d'existence d'une solution non négative d'une équation différentielle non linéaire de type (E, α). Notre résultat améliore les résultats précédents car le terme source peut être non régulier et la non-linéarité concernant la solution et sa dérivée première peuvent croître plus vite que de manière quadratique. On a prouvé qu'il existe une solution non négative, faible dans $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$.
Ensuite, on a développé une méthode numérique pour calculer une approximation, par

éléments finis, de la solution non négative du problème non linéaire de type (1.2) en une dimension. Au début, on a calculé une sur-solution en utilisant une méthode de Newton. On a introduit la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement afin d'obtenir à chaque itération de l'algorithme de Newton des problèmes linéaires elliptiques. Ensuite, en utilisant l'approximation de Yosida de la non-linéarité impliquant la dérivée première de la solution, on calcule une suite de solutions des problèmes intermédiaires convergeant vers la solution de (1.2).

En plus, on a montré sous quelles conditions la méthode de Newton est bien définie et converge.

Des exemples numériques ont montré les performances de la méthode présentée dans ce chapitre pour résoudre l'équation (1.2).

Dans les exemples test où la solution est connue, on a vérifié que la précision finale est celle attribuée aux éléments finis considérés.

Le chapitre suivant est dédié à étendre nos résultats au cas de dimension supérieure ou égale à 2. En fait, ce cas est très différent d'un point de vue théorique. En effet, on doit considérer que la non linéarité G est au plus quadratique.

Chapitre 2

Étude théorique et numérique des équations différentielles elliptiques non linéaires dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d \geq 2$

2.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer l'existence théorique et numérique d'une solution faible, non négative du problème elliptique semi-linéaire suivant :

$$(E,\alpha): \quad \begin{cases} \alpha u - \Delta u(x) + G(x, \nabla u(x)) = F(x, u(x)) + f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où α est un réel non négatif, G et F sont des fonctions de Carathéodory non négatives. La fonction source $f \in L^1(\Omega)$ est non négative. Le domaine Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d,\ d \geq 2$.

Dans le premier chapitre, on a montré l'existence d'une solution non négative, du problème $(E,\ \alpha)$ dans le cas mono-dimensionnel avec une croissance arbitraire de la non linéarité. Par contre, pour montrer l'existence de la solution de $(E,\ \alpha)$ dans ce chapitre, il faut que $G(x,r)$ soit convexe et semi-quadratique en r :

$$G(x,r) \leq C(k(x) + \|r\|^2), \quad \text{où} \quad k(x) \in L^1(\Omega),\ C > 0, \ \text{ et } r \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

Après avoir prouvé l'existence théorique de cette solution, on va étudier une méthode numérique pour calculer une sur-solution de $(E,\ \alpha)$.

Ensuite, on calculera une suite de solutions du problème régularisé obtenu par l'approximation de Yosida. Cette suite converge vers la solution non négative de $(E,\ \alpha)$.

Un modèle classique à considérer est donné par :

$$\begin{cases} \alpha u - \Delta u(x) + \mid \nabla u(x) \mid^q = \mid u(x) \mid^p + f(x) & \forall x \in \Omega. \\ u(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

où $p \geq 1$ et $1 \leq q \leq 2$.

2.2 Existence d'une solution faible non négative

Dans cette section, on suppose que :

$$f \in L^1(\Omega), f \geq 0, \tag{2.4}$$

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, +\infty[\text{ une fonction de Carathéodory }, \tag{2.5}$$

$$F(x, s) \in L^1(\Omega), \ F \text{ est non-décroissante en s }, \tag{2.6}$$

$$G : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[\text{ est une fonction de Carathéodory }, \tag{2.7}$$

$$G(x, 0) = \min \left\{ G(x, r), \ r \in \mathbb{R}^N \right\} = 0 \text{ et } F(x, 0) = 0 \,, \tag{2.8}$$

$$G(x, r) \leq C_2 \left(\|r\|_0^2 + d_2(x) \right), \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}^N \text{ et } i.e.\ x \in \Omega, \tag{2.9}$$

avec $d_2 \in L^1(\Omega)$ et $C_2 > 0$.
On introduit maintenant la notion de solution non négative, de (2.1).

Définition 2.2.1. *Une fonction u est dite une solution faible du problème (2.1), si*

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,1}(\Omega), \ G(x, \nabla u) \ \ et \ F(x, u) \in L^1(\Omega) \\ \alpha u - \Delta u + G(x, \nabla u) = F(x, u) + f \qquad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{2.10}$$

On s'intéresse à prouver l'existence d'une solution faible non négative du problème (2.1).

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothèses (2.4)—(2.10), s'il existe w solution du :*

$$\begin{cases} w \in W_0^{1,1}(\Omega), \quad F(x, w) \in L^1(\Omega) \\ \alpha w - \Delta w = F(x, w) + f \qquad\qquad dans \qquad \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{2.11}$$

Alors le problème (2.1) admet une solution faible non négative u telle que $0 \leq u \leq w$.

2.2.1 Équation d'approximation

Dans cette section, on introduit une version régularisée du problem (2.1), en considérant $G_n(.)$, $F_n(.)$ et f_n des approximations régulières de $G(.)$, $F(.)$ et f sont définies comme suit :

$$G_n(x,r) = \frac{G(x,r)}{1+\frac{1}{n}G(x,r)}.1_{[w\leq n]},$$
$$F_n(x,s) = \frac{F(x,s)}{1+\frac{1}{n}F(x,s)}.1_{[w\leq n]},$$
$$f_n = \min\{n,f\}.1_{[w\leq n]}.$$

On rappelle que les approximations régulières G_n, F_n et f_n sont limitées par n et convergent respectivement vers G, F et f quand n tend vers l'infini. Définissons le problème approximatif comme suit :

$$\begin{cases} \alpha u_n - \Delta u_n + G_n(x,\nabla u_n) = F_n(x,u_n) + f_n \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.12}$$

Puisque 0 est une sous-solution du problème (2.1), la fonction $w_n = \min\{n,w\}$ est une sur-solution non négative et la croissance de G_n est sous-quadratique, on peut appliquer les travaux classiques de [12], et par suite conclure à l'existence de $u_n \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible de (2.12), telle que :

$$0 \leq u_n \leq w_n \leq w. \tag{2.13}$$

Remarque 2.2.1. *Si on suppose que la non-linéarité G est convexe par rapport au gradient, et si on régularise le problème (2.1) en considérant que $G_n(x,r)$ est l'approximation Yosida de $G(x,r)$. Alors $G_n(x,r)$ est convexe par rapport r, converge vers $G(x,r)$ quand n tend vers ∞ et satisfait les propriétés suivantes :*

$$G_n \leq G_{n+1} \leq G, \quad ||G_{n,r}(x,r)||_\infty \leq n,$$

où $G_{n,r}$ est le sous-différentiel de G_n par rapport à r. On définit la solution approximative du problème (2.1) comme suit : on considère la suite définie par $u_0 = w$ et pour $n \geq 1$, u_n est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha u_n - \Delta u_n + G_n(x,\nabla u_n) = F(x,u_{n-1}) + f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u_n \in W_0^{1,1}(\Omega),\ G_n(x,\nabla u_n) \ \text{ et } \ F(x,u_{n-1}) \ \in L^1(\Omega). \end{cases}$$

Le reste de la preuve suit la même technique introduite dans [5].

2.2.2 Estimations

On considère la fonction

$$T_k(s) = \max\{-k, \min(s,k)\} \text{ pour } s \in \mathbb{R} \text{ et } k \text{ est un nombre donné.}$$

On montrera dans le lemme suivant quelques estimations nécessaires qui sont utiles dans la démonstration du théorème 2.2.1.

Lemme 2.2.1. *Soit u_n une suite définie comme ci-dessus. Alors*

(i) $\int_\Omega F_n(x,u_n)dx + \int_\Omega f_n(x)dx \le C,$

(ii) $\int_\Omega G_n(x,\nabla u_n)dx \le C,$

(iii) $\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \le Ck,$

(iv) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_{\Omega,} |\nabla T_k(u_n)|^2 = 0$ *uniformément en n,*

où C est une constante indépendante de n.

Démonstration. (i) En utilisant (2.6) et (2.13), on a

$$\int_\Omega F_n(x,u_n)dx + \int_\Omega f_n(x)dx \le \int_\Omega F(x,w)dx + \int_\Omega f(x)dx \le C.$$

(ii) En intégrant l'équation (2.12) sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \alpha u_n - \int_\Omega \Delta u_n + \int_\Omega G_n(x,\nabla u_n) = \int_\Omega F_n(x,u_n) + \int_\Omega f_n. \tag{2.14}$$

Tout d'abord, on rappelle que pour toute fonction $y \in W_0^{1,1}(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta y &= H, \quad H \in L^1(\Omega), \\ y &\ge 0, \end{cases}$$

il existe une suite $y_n \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ qui satisfait :

$$y_n \to y \text{ fortement dans } W_0^{1,1}(\Omega),$$
$$\Delta y_n \to \Delta y \text{ fortement dans } L^1(\Omega).$$

On utilise la régularité de y_n pour écrire :

$$\int_\Omega \Delta y_n = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y_n}{\partial \nu},$$

mais $y_n \geq 0$ dans Ω et $y_n = 0$ sur $\partial\Omega$, alors, $\dfrac{\partial y_n}{\partial \nu} \leq 0$. En passant à la limite, on a $\int\limits_{\Omega} \Delta y \leq 0$. Par conséquent :

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u_n \leq 0.$$

En utilisant ce fait, il résulte de (2.14) que :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} G_n(x, \nabla u_n) &\leq \int\limits_{\Omega} F_n(x, u_n) + \int\limits_{\Omega} f_n \\ &\leq \|F(w)\|_{L^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

(iii) En multipliant l'équation (2.12) par $T_k(u_n)$ et en l'intégrant sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \alpha u_n T_k(u_n) + \int\limits_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int\limits_{\Omega} G_n(x, \nabla u_n) T_k(u_n) & \\ = \int\limits_{\Omega} F_n(x, u_n) T_k(u_n) + \int\limits_{\Omega} f_n T_k(u_n) & \\ \leq k\Big(\int\limits_{\Omega} F(x, w) + \int\limits_{\Omega} f \Big) & \\ \leq Ck. &\end{aligned}$$

Puisque u_n est non-négative, on a $T_k(u_n) \geq 0$, on obtient alors :

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 \leq Ck.$$

(iv) Concernant l'équation satisfaite par u_n, on remarque que :

$$\alpha u_n - \Delta u_n \leq F(x, w) + f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pour tout $0 < M < k$, on multiplie cette inégalité par $T_k(u_n)$ et on intègre sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 &\leq \int\limits_{[u_n \leq M]} T_k(u_n)\Big(F(x, w) + f\Big) + \int\limits_{[u_n > M]} T_k(u_n)\Big(F(x, w) + f\Big) \\ &\leq M \int\limits_{\Omega} \Big(F(x, w) + f\Big) + k \int\limits_{\Omega} \Big(F(x, w) + f\Big) 1_{[u_n > M]}.\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{1}{k} \int\limits_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 \leq \frac{M}{k}\Big(\|F(x, w)\|_{L^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)} \Big) + \int\limits_{\Omega} \Big(F(x, w) + f\Big).1_{[u_n > M]}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque u_n est bornée dans $L^1(\Omega)$, on a :

$$|[u_n \geq h]| = \int\limits_{[u_n \geq h]} dx \leq \frac{1}{h} \|u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{C}{h}.$$

Par conséquent, il existe h_ε indépendant de n telle que :

$$\int\limits_{\Omega} \Big(F(x,w) + f \Big).1_{[u_n > h_\varepsilon]} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenant $M = h_\varepsilon$ et faisant tendre k vers ∞, on obtient le résultat désiré.

□

2.2.3 Démonstration du théorème (2.2.1)

Démonstration. En utilisant (i) et (ii) du Lemme 2.2.1 et le résultat de compacité de l'opérateur suivant :

$$L^1(\Omega) \to W_0^{1,q}(\Omega)$$
$$\eta \mapsto v,$$

où $q \in [1, \frac{d}{d-1}[$ et v est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,q}(\Omega) \\ \alpha v - \Delta v = \eta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

On conclut à l'existence d'une sous-suite notée encore u_n pour simplicité, telle que :

$$u_n \to u \text{ fortement dans } W_0^{1,q}(\Omega),$$
$$(u_n, \nabla u_n) \to (u, \nabla u) \text{ dans } \Omega.$$

En plus :

$$G_n(x, \nabla u_n) \to G(x, \nabla u) \text{ dans } \Omega,$$
$$F_n(x, u_n) \to F(x, u) \text{ dans } \Omega,$$

la monotonie de $F(x,.)$ implique que :

$$|F_n(x, u_n)| \leq F(x, w) \text{ in } \Omega.$$

En utilisant le théorème de Lebesgue, on obtient :

$$F_n(x, u_n) \to F(x, u) \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Alors, il existe λ, une mesure non-négative, voir [112], telle que :

$$\begin{aligned}\alpha u_n - \Delta u_n + G_n(x, \nabla u_n) - F_n(x, u_n) - f_n \\ \to \alpha u - \Delta u + G(x, \nabla u) - F(x, u) - f + \lambda \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\alpha u_n - \Delta u_n + G_n(x, \nabla u_n) = F_n(x, u_n) + f_n \to F(x, u) + f \text{ dans } L^1(\Omega).$$

D'où :

$$\alpha u - \Delta u + G(x, \nabla u) \leq F(x, u) + f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.15}$$

Par conséquent, pour conclure à l'existence d'une solution faible au problème (2.1), on doit établir l'opposé de l'inégalité (2.15).
Pour cela, on considère la fonction $H \in C^1(\mathbb{R})$, telle que $0 \leq H(s) \leq 1$ et

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } |s| \geq 2 \\ 1 & \text{if } |s| \leq 1 \end{cases}$$

et la fonction test suivante :

$$v_n = \Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}),$$

où C_2 est donnée par l'hypothèse sur G :

$$G(x, r) \leq C_2 \left(\|r\|_0^2 + d_2(x) \right)$$

et $\Psi \leq 0$, $\Psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
On multiplie (2.12) par v_n, on intègre sur Ω et on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u_n \nabla \Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}) + \frac{1}{k} \int_\Omega \Psi \left|\nabla u_n\right|^2 \exp(-C_2 u_n) H'(\frac{u_n}{k}) \\ &+ \int_\Omega (\alpha u_n + G_n(x, \nabla u_n) - C_2 \left|\nabla u_n\right|^2) \Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}) \\ = &\int_\Omega F_n(x, u_n) \Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}) + \int_\Omega f_n \Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}). \end{aligned}$$

On note I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5 les cinq termes dans cette dernière relation. En étudiant séparément chaque terme. On obtient pour le premier :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u_n \nabla \Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla T_k(u_n) \nabla \Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$\nabla\Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}) \text{ converge fortement vers } \nabla\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k}) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et

$$\nabla T_k(u_n) \text{ converge faiblemet vers } \nabla T_k(u) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

Grâce à l'hypothèse (iii) du lemme 2.2.1, on a :

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = \int_\Omega \nabla u \nabla\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k}).$$

Pour la deuxième intégrale, et puisque $\exp(-C_2 u_n) \leq 1$, on a :

$$\frac{1}{k}\int_\Omega \Psi \left|\nabla u_n\right|^2 \exp(-C_2 u_n) H'(\frac{u_n}{k}) \leq C \left\|\Psi\right\|_\infty \frac{1}{k}\int_\Omega \left|\nabla T_k(u_n)\right|^2.$$

Alors, d'après (iii) du Lemme 2.2.1, on a :

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = 0 \text{ uniformément en } n.$$

Pour I_3, en utilisant l'hypothèse (2.8) et $\Psi \leq 0$, on a :

$$(\alpha u_n + G_n(x, \nabla u_n) - (C_2 \left|\nabla u_n\right|^2 + d_2(x)))\Psi \exp(-C_2 u_n) H(\frac{u_n}{k}) \geq 0.$$

Alors, en appliquant le lemme de Fatou, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} I_3 \geq \int_\Omega (\alpha u + G(x, \nabla u) - C_2 \left|\nabla u\right|^2)\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k}).$$

D'autre part, on a :

$$\lim_{n\to\infty} I_4 = \int_\Omega F(x,u)\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k})$$

et

$$\lim_{n\to\infty} I_5 = \int_\Omega f\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k}).$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u \nabla\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k}) \\
&+ \int_\Omega (\alpha u + G(x, \nabla u) - C_2 \left|\nabla u\right|^2)\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k}) + \beta(\frac{1}{k}) \\
&\leq \int_\Omega (F(x,u) + f)\Psi \exp(-C_2 u) H(\frac{u}{k}),
\end{aligned}$$

où $\beta(\varepsilon)$ dénote la quantité qui tend vers 0 quand ε tend vers 0.
Maintenant, en choisissant $\Psi = -\phi \exp(C_2 u) H(\frac{u}{k})$, où $\phi \geq 0$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \nabla u \nabla \phi H^2(\frac{u}{k}) - \int_\Omega C_2 \left|\nabla u\right|^2 \phi H^2(\frac{u}{k}) - \frac{1}{k}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 \phi H(\frac{u}{k}) H'(\frac{u}{k}) \\
&-\int_\Omega \phi(\alpha u + G(x, \nabla u) - C_2 \left|\nabla u\right|^2) H^2(\frac{u}{k}) + \beta(\frac{1}{k}) \\
&\leq -\int_\Omega (F(x,u) + f)\phi H^2(\frac{u}{k}).
\end{aligned}$$

En développant les calculs et en remarquant que le troisième terme est équivalent à $\beta(\frac{1}{k})$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \nabla u \nabla \phi H^2(\frac{u}{k}) - \int_\Omega \phi(\alpha u + G(x, \nabla u)) H^2(\frac{u}{k}) + \beta(\frac{1}{k}) \\
&\leq -\int_\Omega (F(u) + f)\phi H^2(\frac{u}{k}).
\end{aligned}$$

Finalement, on passe à la limite quand k tend vers ∞ et on utilise le fait que $\lim_{k\to\infty} H(\frac{u}{k}) = 1$ pour conclure que pour tout $\phi \geq 0$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega \phi(\alpha u + G(x, \nabla u)) \geq \int_\Omega (F(x,u) + f)\phi.$$

Cela nous permet de montrer l'existence d'une solution faible non-négative du problème (2.1). □

2.3 Approximation numérique

Dans cette section, on étend la méthode numérique présentée dans le chapitre précédent pour calculer une solution non-négative au cas bidimensionnel.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Suivant le même algorithme que celui développé pour le cas unidimensionnel, on calculera en premier, une approximation numérique de la solution non négative en $H_0^1(\Omega)$ de l'équation non linéaire :

$$\alpha w - \Delta w = F(x, w) + f. \tag{2.16}$$

Alors, w est une sur-solution faible de (E, α).
Ensuite, on construit une suite $\{u_n\}_n \subset H_0^1(\Omega)$ avec $u_0 = w$, solution de l'équation non linéaire :

$$\alpha u_n - \Delta u_n + G_n(x, \nabla u_n) = F(x, u_{n-1}) + f. \tag{2.17}$$

Dans la section précédente, on a démontré que si le problème (2.16) admet une solution non négative w, alors le problème (2.17) admet une solution et si $u_0 = w$, alors la suite $\{u_n\}_n$ converge vers la solution faible non négative du problème (E, α) avec $0 \leq u_n \leq w$.

2.3.1 Caractérisation de la discrétisation

Soit h le pas de discrétisation du bord $\partial\Omega$, par éléments finis $\mathbb{P}_1$. On obtient ainsi un domaine polyédrique Ω_h de bord $\partial\Omega_h$.
Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation conforme du domaine Ω_h, c'est à dire un ensemble fini $(T_i)_{1\leq i\leq \tau_h}$ vérifiant :

- $\overline{\Omega}_h = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{T}_h} T_i$.
- Si $i \neq j$ alors $T_i \cap T_j = \emptyset$, ou un sommet commun ou une arête commune.
- Il existe deux nombres $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$ tels que si d_i est le diamètre interne du triangle $T_i \in \mathcal{T}_h$, alors $\sigma_1 h \leq d_i \leq \sigma_2 h$.

On associe à Ω_h un espace d'approximation de fonctions continues linéaires par triangles c'est à dire :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega_h)/\ v_{h_{|T_i}} \in \mathbb{P}_1(T_i) \text{ pour tout } T_i \in \mathcal{T}_h\} \tag{2.18}$$

où $\mathbb{P}_1(T)$ est l'ensemble des polynômes de degré 1 défini sur T.
Les éléments finis de X_h sont déterminés de manière unique par leur valeur dans les sommets de la triangulation $\mathcal{T}_h$.
Après, on cherche une approximation de la solution de notre problème dans l'espace de dimension finie $X_h = V_h \cap H_0^1(\overline{\Omega})$.

2.3.2 Approximation numérique de la sur-solution

La formulation faible associée au problème (2.16) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } w_h \in X_h \text{ telle que :} \\ a_1(w_h, v_h) = L_1(v_h)\ \ \forall\ v_h \in X_h \end{cases} \tag{2.19}$$

$$a_1(w_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla w_h \nabla v_h + \int_{\Omega_h} \alpha w_h v_h - \int_{\Omega_h} F(w_h) v_h, \text{ et } L_1(v_h) = \int_{\Omega_h} f v_h.$$

Le problème (2.19) est non linéaire, alors nous considérons l'algorithme de Newton pour calculer une approximation de la solution.
On commence par une donnée initiale $w_h^0 \in X_h$. La méthode itérative de Newton calcule

une suite w_h^k où $w_h^k \in X_h$ et $w_h^{k+1} = w_h^k + \delta$. La mise à jour $\delta \in X_h$ est la solution de l'équation suivante :

$$a_2(\delta, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla\delta\nabla v_h + \int_{\Omega_h} \alpha\delta v_h - \int_{\Omega_h} \frac{\partial F}{\partial r}(w_h^k)\delta v_h = L_2(v_h), \tag{2.20}$$

avec

$$L_2(v_h) = -\int_{\Omega_h} \nabla w_h^k \nabla v_h - \int_{\Omega_h} \alpha w_h^k v_h + \int_{\Omega_h} F(w_h^k)v_h + \int_{\Omega_h} f v_h,$$

pour tout $v_h \in X_h$.
Le signe de la dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial r}(w_h^k)$ n'est pas fixe, alors l'ellipticité de la forme bilinéaire a_2 n'est pas acquise sans une restriction sous le domaine Ω_h.
Maintenant, si on définit $c_\infty = \|\frac{\partial F}{\partial r}(w_h^k)\|_\infty$ une analyse analogue à celle effectuée au chapitre 1, permet de conclure que a_2 est coercive en $H_0^1(\Omega)$ quand $c_\infty > \alpha$ si :

$$\mathrm{diam}(\Omega) < \frac{\pi}{\sqrt{c_\infty - \alpha}}. \tag{2.21}$$

Dans le cas $\alpha > c_\infty$ la forme bilinéaire a_2 est bien elliptique en $H_0^1(\Omega)$.
On considère maintenant une base de X_h, $\{\Phi_i\}_{1\leq i\leq N}$. On note $\overline{w}_h$ le vecteur $\{w_h^i\}_{i=1}^N$ avec :

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^{N} w_h^i \phi_i(x), \text{ et } w_h^i = w_h(S_i),$$

où S_i sont les nœuds de la triangulation $\mathcal{T}_h$. On notera aussi $\overline{\delta}\{\delta_h^i\}_{i=1}^N$ avec

$$\delta_h(x) = \sum_{i=1}^{N} \delta_h^i \phi_i(x).$$

Ainsi l'algorithme de Newton dans notre contexte peut être reformulé de la façon suivante :
On construit une suite w_h^k telle que $w_h^{k+1} = w_h^k + \delta_h \in H_0^1(\Omega)$, avec $\delta_h \in H_0^1(\Omega)$ solution du système linéaire :

$$A\overline{\delta}_h = (K + M)\overline{\delta}_h = b, \tag{2.22}$$

où $K \in \mathbb{R}^{N\times N}$ est définie par $K_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \nabla\phi_i\nabla\phi_j$,
$M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ est donnée par $M_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega (-\frac{\partial F}{\partial r}\left(w_h^k\right) + \alpha)\,\phi_i\phi_j$
et $b \in \mathbb{R}^N$ est définie par $b_i = -\displaystyle\int_{\Omega_h} \nabla w_h^k\nabla\phi_i - \int_{\Omega_h} \alpha w_h^k\phi_i + \int_{\Omega_h} F(w_h^k)\phi_i + \int_{\Omega_h} f\phi_i.$

Remarque 2.3.1. *La forme bilinéaire $a_2(.,.)$ 2.20 est elliptique. Si $\delta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $\delta_h \in X_h$ on a, voir [29, 41] :*

$$||\delta - \delta_h||_2 + h\|\nabla(\delta - \delta_h)\|_2 \leq \beta h^2 \|\delta\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

2.3.3 Décomposition de domaine

Pour traiter le cas d'un domaine Ω_h d'un diamètre qui ne vérifie pas la restriction (2.21) et pour lequel éventuellement la forme bilinéaire a_2 n'est pas elliptique, on introduit une méthode de décomposition de domaine de type Schwarz dont l'analyse est faite dans Lions [79].

Il résulte une décomposition géométrique en un ensemble de sous-domaines $\Omega_i,\ i = 1, ..., m$, tels que :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega_i}$
- $\Omega_i \cap \Omega_j = \Omega_{i,j},\ i = 1, ..., m$, si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$.
- diam $(\Omega_i) \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{c_\infty - \alpha}}$ si $c_\infty \geq \alpha$, si non il n'est pas nécessaire d'effectuer une décomposition de domaines.
- On notera $\partial\Omega_j \cap \Omega_j = \Gamma_{i,j},\ i = 1, ..., m$, si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$.

Les espaces d'approximation locale associés à la décomposition du domaine géométrique et à la méthode de Schwarz sont les suivants :

— $V_h^i = \{p \in C^0(\Omega_i); p_{|T} \in \mathbb{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_{h,i}\}$,

— $X_{h,0}^i = V_h^i \cap H_0^1(\Omega_i)$.

La forme bilinéaire locale à l'itération l de la méthode de Schwarz est donnée par :

$$a_3^i(\delta_{h,i}^l, v_h) = \int_{\Omega_i} \nabla\delta_{h,i}^l \nabla v_h \, dx + \int_{\Omega_i} \alpha\delta_{h,i}^l v_h \, dx - \int_{\Omega_i} \frac{\partial F}{\partial r}(x, w_h^k)\delta_{h,i}^l v_h \, dx,$$

et

$$L_3^i(v_h) = -\int_{\Omega_i} \nabla w_h^k \nabla v_h \, dx - \int_{\Omega_i} \alpha w_h^k v_h \, dx + \int_{\Omega_i} F(x, w_h^k) v_h \, dx + \int_{\Omega_i} f v_h \, dx.$$

si Ω_i vérifie la condition (2.21) alors la forme bilinéaire a_3^i est elliptique dans $X_{h,0}^i$ et la forme linéaire L_3^i est continue pour tout $i = 1, ..., m$. Alors l'algorithme de la décomposition de domaine pour calculer δ_h peut être formulé de la façon suivante : pour $\delta_h^0 \in X_h$, $l \geq 0$, on calcule δ_h^{l+1} dans X_h telle que :

$$\delta_h^{l+1} = \delta_h^l + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_{h,i}^l,$$

où $\tilde{\delta}_{h,i}^l$ dénote l'extension de $\delta_{h,i}^l$ par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_i$. La fonction $\delta_{h,i}^l$ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \delta_{h,i}^l \in X_{h,0}^i \text{ telle que :} \\ a_3^i(\delta_{h,i}^l, v_h) = L_3^i(v_h) - a_3^i(\delta_h^l, v_h) \ \ \forall\, v_h \in X_{h,0}^i. \end{cases} \tag{2.23}$$

Donc la méthode de Schwarz considérée pour résoudre l'équation (2.22) peut être énoncée de la façon suivante : soit $\delta_h^0 \in X_h^0$, pour $l \geq 0$, on calculera δ_h^{l+1} dans X_h telle que :

$$\delta_h^{l+1} = \delta_h^l + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_{h,i}^l, \tag{2.24}$$

avec $\tilde{\delta}_{h,i}^l$ la prolongation par zéro dans X_h de $\delta_{h,i}^l$ solution de :

$$\begin{cases} \text{trouver } \delta_{h,i}^l \in X_{h,}^i \text{ telle que :} \\ a_2^i(\delta_{h,i}^l, v) = L(v) - a_2^i(\delta_h^l, v) \ \ \forall\, v \in X_{h,0}^i. \end{cases} \tag{2.25}$$

Puisque chaque sous-domaine Ω_i est choisi tel que a_2^i est elliptique, cette formation variationnelle admet une solution unique. Par ailleurs dans [33], [104] et [34], la convergence de la méthode de Schwarz est démontrée. Par suite, on conclut que chaque pas de la méthode de Newton est bien posé.

Dans le cas du problème modèle (2.3), la méthode de Newton appliquée au calcul de la sur-solution converge avec une vitesse quadratique si $p \geq 2$, et avec une vitesse d'ordre p si $1 \leq p < 2$, voir [72, 44]

2.3.4 Approximation de la solution de l'équation (2.17)

Une fois calculée la sur-solution w, on calculera, pour $n = 1, ...$ jusqu'à convergence la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha u_n - \Delta u_n + G_n(x, \nabla u_n) = F(x, u_{n-1}) + f & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.26}$$

où G_n est l'approximation de Yosida de G, ce qui signifie que G_n et G sont convexes, $G_n < G$ et $G_n \to G$ quand $n \to \infty$.

On note $\overline{a}(.,.)$ la forme bilinéaire associée au problème (2.26), définie par :

$$\overline{a}(u_{n,h}, v_h) = \int_\Omega \alpha u_{n,h} v_h dx \ + \ \int_\Omega \nabla u_{n,h} \nabla v_h dx \ + \ \int_\Omega G(x, u_{n,h}) v_h dx$$

et

$$\overline{L}(v_h) = \int_\Omega \left(F(x, u_{n-1,h}) + f(x)\right) v_h dx.$$

L'approximation numérique $u_{n,h}$ de u_n est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{find } u_{n,h} \in X_h \text{ such :} \\ \overline{a}(u_{n,h}, v_h) = \overline{L}(v_h) \ \forall\, v_h \in X_h. \end{cases} \tag{2.27}$$

La solution numérique du problème (2.27) sera similaire à celle implémentée pour calculer la sur-solution. En appliquant la méthode de Newton, on calcule la suite $\{u_{n,h}^k\}_k \subset X_k$

telle que, pour $u^0_{n+1,h} = u_{n,h}$, la nouvelle itération s'écrit $u^{k+1}_{n+1,h} = u^k_{n+1,h} + \theta_h$, où la mise à jour θ_h est la solution dans X_h de l'équation suivante :

$$\tilde{a}(\theta_h, v_h) = \tilde{L}(v_h) \ \ \forall v_h \in X_h,$$

où

$$\tilde{a}(\theta_h, v_h) = \int_\Omega \alpha\theta_h v_h + \int_\Omega \nabla\theta_h v_h + \int_\Omega d(x)\nabla\theta_h v_h, \text{ et } \tilde{L}(v_h) = \int_\Omega g v_h.$$

On note $d(x)$ le sous-différentiel de G_n évalué en ∇u^k_n, c'est à dire :

$$d(x) = \frac{\partial G_n}{\partial r}(x, \nabla u^k_n),$$

et on note :

$$g(x) = -G_n(x, \nabla u^k_n) + F(x, u_{n-1}) + f(x) + \Delta u^k_n(x) - \alpha u^k_n(x).$$

La forme bilinéaire $\tilde{a}(.,.)$ est continue sur $X_h \times X_h$. La forme linéaire $\tilde{L}(.)$ est continue sur X_h.

Étudions maintenant l'ellipticité de la forme $\tilde{a}$. Pour tout $\theta_h \in X_h$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\theta_h, \theta_h) &= \int_\Omega \alpha\theta_h^2 + \int_\Omega (\nabla\theta_h)^2 + \int_\Omega d(x)(\nabla\theta_h)\theta_h \\ &= \int_\Omega \alpha\theta_h^2 + \int_\Omega (\nabla\theta_h)^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega d(x)\nabla(\theta_h^2). \end{aligned}$$

En supposant que $\mathrm{div}(d(x)) \in L^\infty(\Omega)$, et en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\theta_h, \theta_h) &= \int_\Omega \alpha\theta_h^2 + \int_\Omega \mid \nabla\theta_h \mid^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}(d(x))\theta_h^2, \\ &= \int_\Omega \mid \nabla\theta_h \mid^2 + \int_\Omega (\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{div}(d(x)))\theta_h^2. \end{aligned}$$

Si on suppose que $\mathrm{div}(d(x))$ est borné par sa norme infinie, notée d_∞, alors, on obtient

$$\tilde{a}(\theta_h, \theta_h) \geq \int_\Omega \mid \nabla\theta_h \mid^2 + (\alpha - d_\infty)\int_\Omega \theta_h^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\theta_h, \theta_h) &\geq \int_\Omega \mid \nabla\theta_h \mid^2 + (\alpha - d_\infty)\, C(\Omega)^2 \int_\Omega \mid \nabla\theta_h \mid^2 \\ &\geq \left(1 + (\alpha - d_\infty)\, C(\Omega)^2\right) \|\nabla\theta_h\|_2^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\tilde{a}$ est elliptique si $\alpha - d_\infty > 0$ ou bien, si :

$$\mathrm{diam}(\Omega) < \frac{\pi}{\sqrt{d_\infty - \alpha}}, \text{ pour } \alpha - d_\infty < 0. \tag{2.28}$$

Alors, si $\tilde{a}(\theta_h, \theta_h)$ est elliptique, chaque étape de Newton est bien posée. Dans le cas contraire, on peut appliquer la même méthode de décomposition de domaine utilisée pour calculer la sur-solution.
La convergence de la méthode de Newton peut être obtenue en utilisant les arguments utilisés dans le cas de la sur-solution, en y ajoutant la convexité de G_n. Le taux de convergence dans le cas du problème du modèle (2.3) sera q selon les résultats dans [72].

2.3.5 Résultats numériques

Dans cette section on va présenter quelques simulations numériques qui permettent de tester les performances de notre algorithme.
Afin d'atteindre ce but, on commence par considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha u(x,y) - \Delta u(x,y) + \|\nabla u(x,y)\|_2^2 = \mu \|u(x,y)\|_2^3 + f(x,y) \quad \forall (x,y) \ \in]0,1[\times]0,1[. \\ \qquad\qquad u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0, \end{cases} \tag{2.29}$$

où la solution est donnée $u(x,y) = 10x(1-x)y(1-y)$, $\alpha = 1$ et $\mu = 10$.
En implémentant notre algorithme pour cet exemple, on obtient, en premier lieu, les résultats suivants :

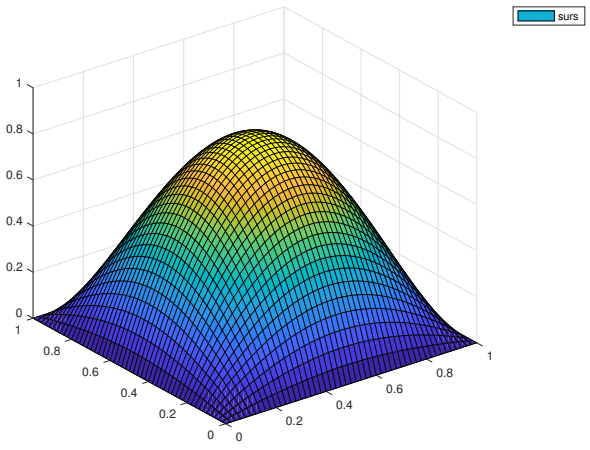


FIGURE 2.1 – Sur-solution approchée du problème (2.29)

La Figure 2.1 présente la sur-solution du problème (2.29). Elle est obtenue après 5 itérations de la méthode de Newton avec une simulation de correction en norme infinie d'ordre 10^{-5}, avec $dx = dy = 0.02$. Le nombre de sous-domaines pour le calcul de cette sur-solution est 4 comme illustré dans la Figure 2.2.

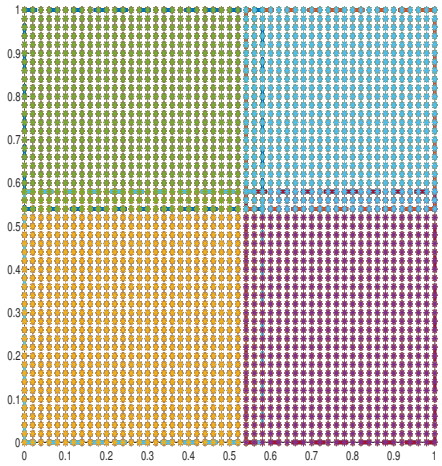


FIGURE 2.2 – Nombre de sous-domaines du problème (2.29)

Ici, l'algorithme de Schwarz additif s'arrête après 13 itérations quand la différence en norme infinie entre les sous-solutions sur le bord est d'ordre 10^{-5}.

Remarque 2.3.2. *La taille de recouvrement entre les sous-domaines est* 2*, si l'on augmente, alors la méthode de Schwarz converge plus vite.*

En commençant par la sur-solution présentée dans la Figure 2.1, on résout, pour $n = 1, .., 10$, le problème régularisé (2.26) associé à l'exemple (2.29). On obtient la solution numérique suivante :

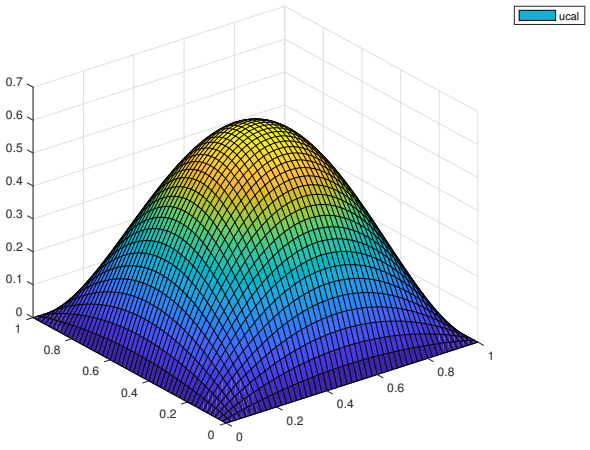


FIGURE 2.3 – Solution numérique du problème (2.29)

Dans la Figure (2.3), on trace l'approximation numérique de la solution du problème (2.29) obtenue après 10 itérations de l'algorithme de Yosida. En utilisant la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$, l'erreur dans $L^2(]0,1[^2)$ entre la solution exacte et la solution approchée est de l'ordre de 10^{-6} avec un pas de discrétisation en espace $dx = dy = 0.02$.
Le tableau ci-dessous montre l'évolution de cette erreur en fonction des itérations de l'algorithme de Yosida, notées n :

n	1	2	...	8	9	10
Erreur	0.5994	0.2884	...	$1.19\ 10^{-4}$	$2.9\ 10^{-5}$	$8.43\ 10^{-6}$

TABLE 2.1 – Erreur en L^2 entre la solution exacte et la solution numérique calculée

Ce tableau montre aussi le nombre d'itérations nécessaires de la méthode de Newton à chaque itération de Yosida pour atteindre la convergence.
En traçant la variation de cette erreur en fonction de n, on obtient la courbe suivante :

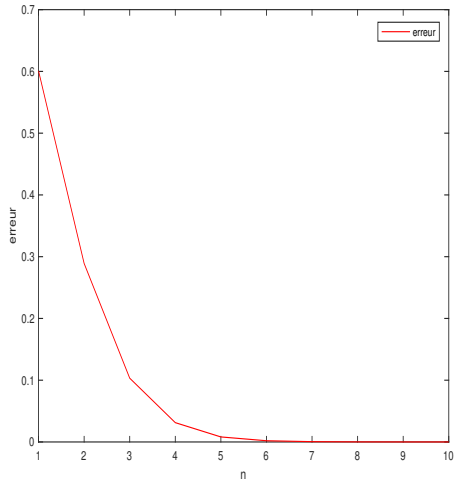


FIGURE 2.4 – Évolution de l'erreur en fonction de n du problème (2.29)

A partir de cet exemple, on a vérifié numériquement que la méthode numérique présentée converge et que l'erreur est d'ordre dx^2 où dx est le pas de discrétisation en espace.
On passe à un nouveau exemple dont on ne connait pas sa solution exacte. Maintenant la fonction source est une mesure ponctuelle de Dirac : $f = \delta_{X_0}$, avec $X_0 = (x_0, y_0) =$

$(0.5, 0.6)$. Pour ce cas on considère $\mu = 1$ et $dx = dy = 0.02$.
La calcul de la sur-solution approchée de cet exemple donne les résultats suivants :

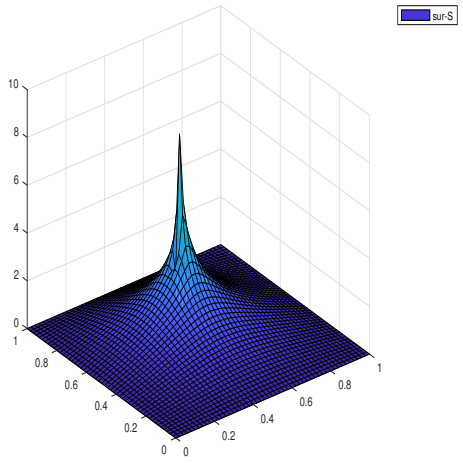


FIGURE 2.5 – Sur-solution approchée de (2.29) dans le cas d'une source ponctuelle

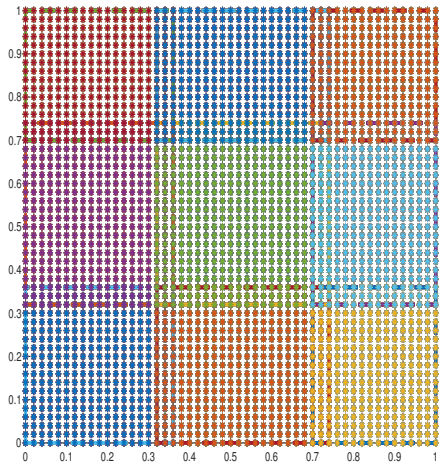


FIGURE 2.6 – Nombre de sous-domaines de (2.29) dans le cas d'une source ponctuelle

D'après la Figure 2.6, on peut observer que le nombre nécessaire de sous-domaine pour calculer une approximation d'une sur-solution du notre problème (2.29) dans le cas d'une source ponctuelle est 9. La norme infinie de la mise à jour après 3 itérations de l'algorithme de Schwarz est d'ordre 10^{-5}. Ainsi, on a effectué en parallèle 5 itérations de la méthode

de Newton pour atteindre une norme de la correction d'ordre 10^{-5} .
Aussi, l'algorithme de Yosida appliqué pour le calcul de la solution approchée du problème (2.29) dans le cas d'une source ponctuelle converge après 30 itérations avec un écart relatif en norme L^2 entre deux itérés successifs d'ordre 10^{-3}. Á la dernière étape de cet algorithme, la méthode de Newton s'arrête après 10 itérations avec une correction d'ordre 10^{-5}.
L'utilisation des ces deux algorithmes donnent l'approximation suivante de la solution de (2.29)

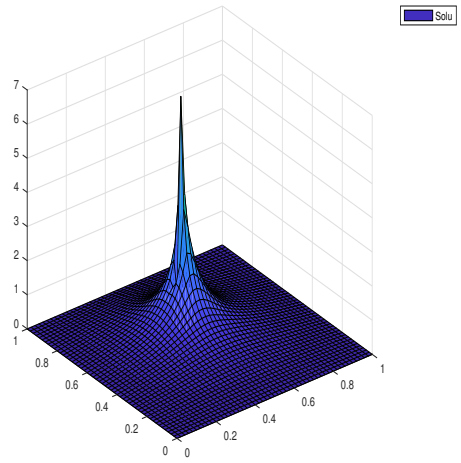


FIGURE 2.7 – Solution approchée de (2.29) dans le cas d'une source ponctuelle

On passe maintenant à un cas présentant une difficulté supplémentaire où la fonction source f est l'addition de fonctions de Dirac :

$$\begin{cases} \alpha u(\overline{x}) - \Delta u(\overline{x}) + \| \nabla u(\overline{x}) \|_2^2 = \mu(\overline{x}) \|u(\overline{x})\|_2^3 + \sum_{j=1}^{3} K_j \delta_{\overline{x}_j} & \forall\, \overline{x} \in \Omega \\ u(\overline{x}) = 0 & \forall\, \overline{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.30}$$

où $\overline{x} = (x, y)$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\mu(\overline{x}) = 6$, $\alpha = 1$, $K_1 = 5 = K_2$, $K_3 = 10$, $\overline{x}_1 = (0.1, 0.2)$, $\overline{x}_2 = (0.5, 0.6)$ et $\overline{x}_3 = (0.9, 0.9)$.
Dans la figure 2.8, nous avons tracé la super-solution calculée obtenue après cinq itérations de la méthode de Newton lorsque la norme L^2 de la mise à jour est de l'ordre de 10^{-4}.
La taille du pas d'espace est $dx = dy = 0.02$ et le nombre de sous-domaines passe de 9 à 16. À la deuxième itération de la méthode de Newton, nous avons 9 sous-domaines et à partir de la troisième itération, le nombre de sous-domaines nécessaires est de 16.

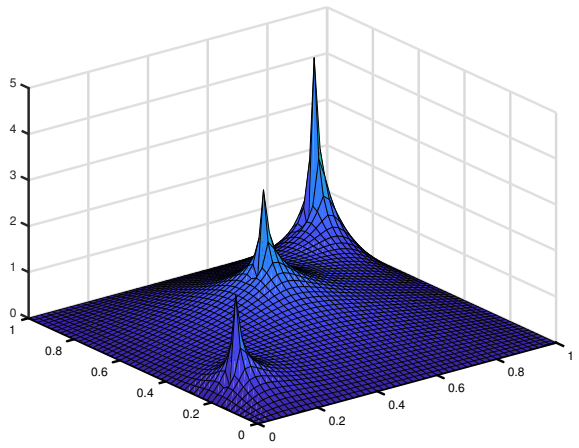


FIGURE 2.8 – Approximation numérique de sur-solution du problème (2.30)

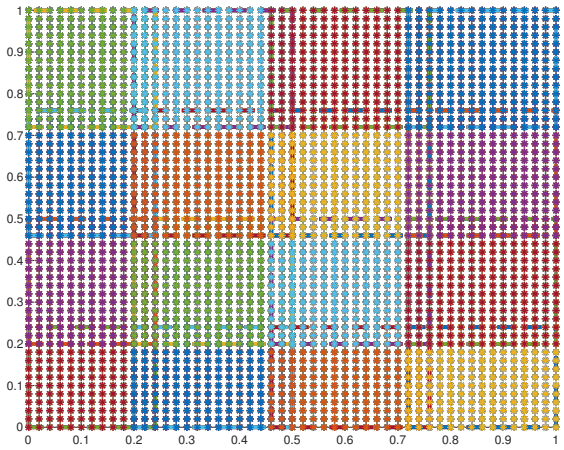


FIGURE 2.9 – Décomposition finale en sous-domaines

Figure 2.9 montre la dernière configuration de la décomposition en sous-domaine.

itération de Newton : k	1	2	3	4
$\|\delta_h\|_\infty$	4.21	0.17	0.026	$6.4\ 10^{-4}$
# Itération de Schwarz : l	-	20	14	6
$\|\delta_h^{l+1} - \delta_h^l\|_\infty$	-	$8.6\ 10^{-4}$	$9.1\ 10^{-4}$	$8.8\ 10^{-4}$
#nombre de sous-domaines	1	9	16	16

TABLE 2.2 – Comportement de l'algorithme calculant la sur-solution

Dans le tableau 2.2, on montre l'évolution de l'algorithme calculant la sur-solution.

On a besoin de quatre itérations de la méthode de Newton pour obtenir une norme infinie de la mise à jour de l'ordre 10^{-4}. À chaque étape de l'algorithme de Newton, on donne le nombre d'itérations de l'algorithme de décomposition de domaine pour obtenir la convergence, et on arrête lorsque la norme infinie de la mise à jour est d'ordre 10^{-4}. Une fois l'approximation de la sur-solution calculée, on résout le problème (2.30) pour $n = 1, 2, ..., 20$.

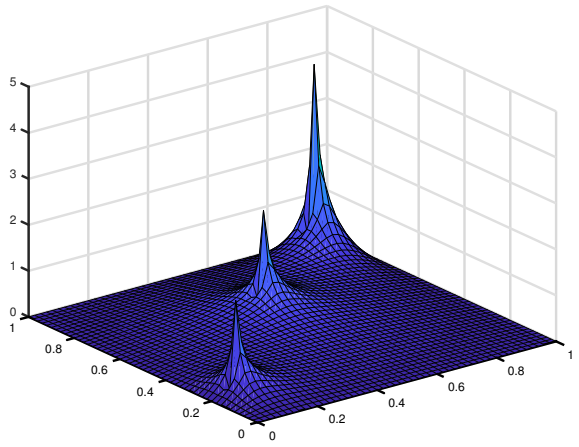


FIGURE 2.10 – Solution du problème (2.30) calculée à la 20ème étape de l'algorithme implémentant l'approximation Yosida de G.

Dans la Figure 2.10, on a tracé la solution obtenue à l'itération $n = 20$.

# Itération de Yosida n	1	2	...	6	7	...	19	20
$\frac{\|u_{n-1,h} - u_{n,h}\|_2}{\|u_{n-1,h}\|_2}$	0.1009	0.1037	...	0.0232	0.018	...	0.0065	0.0062
# Itération de Newton	7	8	...	8	9	...	9	8

TABLE 2.3 – Le comportement de l'algorithme calculant la solution approchée du problème (2.30)

Dans le tableau 2.3, on a résumé le nombre d'itérations de Newton nécessaires à chaque étape de l'algorithme de Yosida pour atteindre la convergence. La norme de la mise à jour de Newton est inférieure à 10^{-7}. On rapporte également la norme relative L^2 de la mise à jour entre l'étape n et $n + 1$ lorsque G_n devient G_{n+1}. L'algorithme s'arrête lorsque la correction relative en norme L^2 entre deux étapes de l'algorithme de Yosida est inférieure à 10^{-3}.

A ce stade, on se propose de traiter un nouvel exemple avec les paramètres suivants : $dx =$

$dy = 0.02$, $\mu(X) = 100$, $K_1 = K_2 = K_3 = 1$, $(x_1, y_1) = (0.3, 0.4)$, $(x_2, y_2) = (0.4, 0.8)$, $(x_3, y_3) = (0.6, 0.9)$.
La sur-solution approchée de (2.30) avec ces paramètres a la forme suivante :

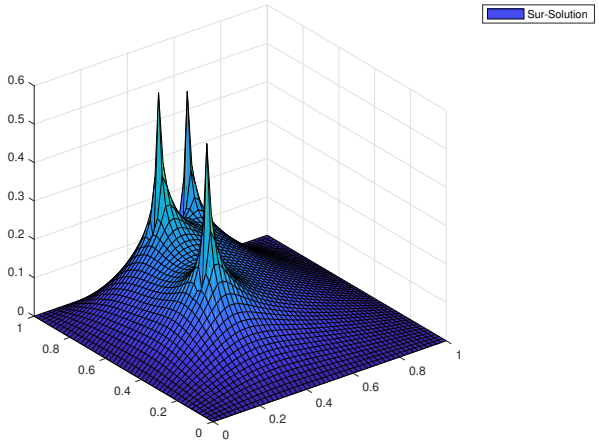


FIGURE 2.11 – Sur-solution approchée

Pour cet exemple, afin de calculer la sur-solution numérique, le nombre de sous-domaine varie de 4 à 9. A la première et à la deuxième itération de la méthode de Newton on a 4 sous-domaines, et à partir de la troisième itération le nombre de sous-domaines est de 9. La simulation s'arrête à l'itération 4 quand la correction calculée est d'ordre 10^{-4}.
On résout maintenant le problème régularisé de (2.30), on obtient après 20 itérations de l'algorithme de Yosida et 8 itérations de la méthode de Newton une approximation de u_n de la forme suivante :

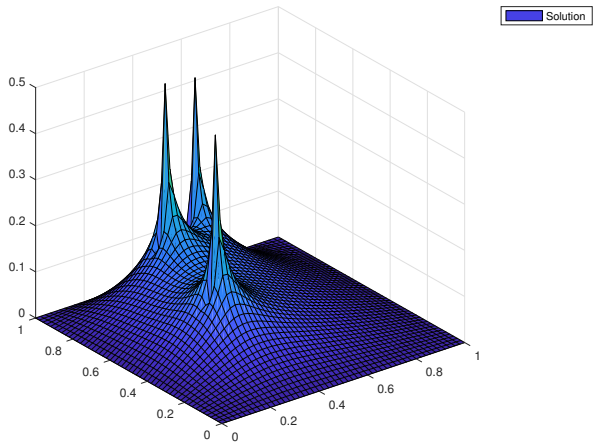


FIGURE 2.12 – Solution approchée

L'algorithme de Yosida s'arrête quand l'écart relatif en norme L^2 de la correction est d'ordre 10^{-3} et l'algorithme de Newton s'arrête quand cette correction en norme infinie est d'ordre 10^{-7}.
On montre dans la Figure 2.13 l'évolution de la norme de la différence entre deux itérés successifs de l'algorithme de Yosida :

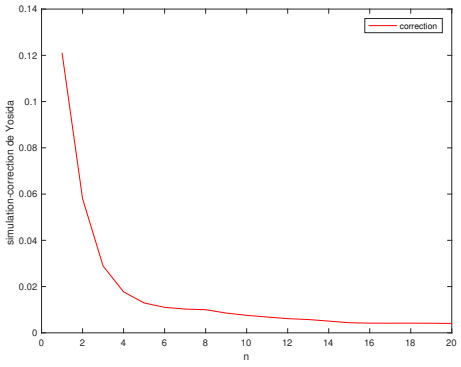


FIGURE 2.13 – Évolution de la correction de l'algorithme de Yosida

On se propose maintenant de fixer le nombre de sous-domaines pour cet exemple. Si on prend $m = 2$, alors on trouve les résultats présentés dans les Figures 2.14 et 2.15 :

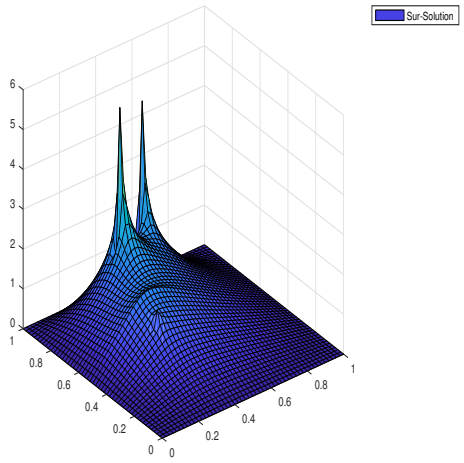


FIGURE 2.14 – Sur-solution approchée

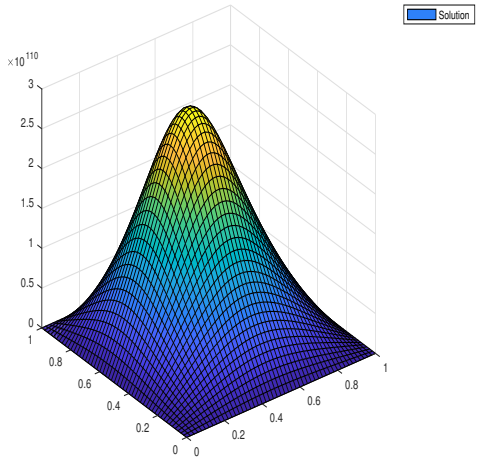


FIGURE 2.15 – Solution approchée

Il est clair que les méthodes numériques utilisées pour calculer la sur-solution approchée présentée dans Figure (2.14) ne convergent pas. En effet, la norme de la différence entre deux itérées successifs de la méthode de Newton diverge. Donc on n'a pas une bonne approximation de la sur-solution, ce qui engendre, par suite, une divergence de l'algorithme de Yosida pour calculer une solution approchée du problème (2.30),comme ci présenté dans la Figure 2.15.

En fait,on peut visualiser l'erreur relative en norme L^2 entre deux itérés successifs de l'algorithme de Yosida dans la courbe suivante :

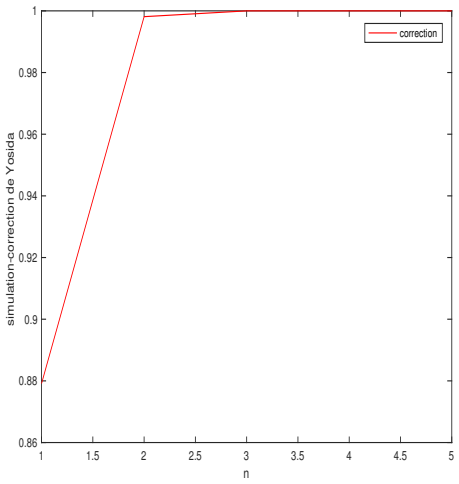


FIGURE 2.16 – Évolution de la correction de l'algorithme de Yosida

Alors, il est évident que la méthode classique de décomposition de domaine ne permet pas de calculer la solution approchée de l'équation non linéaire de type $(E,\ \alpha)$, et qu'il faut adapter le nombre de sous-domaine au comportement de la non linéarité.

2.3.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté un résultat d'existence théorique d'une solution non négative, dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ du problème non linéaire de type (E, α) avec une croissance au plus quadratique de la non linéarité et une fonction source régulière ou non régulière, en particulier le cas d'une somme de mesures ponctuelles.
Dans la seconde section de ce chapitre, en se basant sur l'analyse théorique on a calculé une approximation d'une sur-solution de (E, α) en utilisant la méthode de Newton et la méthode de décomposition de domaine avec recouvrement de type Schwarz additive.
Après, en partant par cette sur-solution, on a construit une suite de solution des problèmes régularisés qui convergent vers la solution de notre problème.
A la fin de ce chapitre on a donné quelques exemples numériques pour illustrer les performances des méthodes numériques étudiées.
La méthode numérique considérée pour calculer la sur-solution soit peut être utilisée dans le chapitre suivant pour résoudre un problème parabolique non linéaire à chaque itération en temps, en considérant un pas de temps adaptatif.

Chapitre 3

Résolution numérique des équations paraboliques semi-linéaires (de type Fujita)

3.1 Introduction

On considère dans ce chapitre le problème parabolique suivant :

$$(P_{Fuj}) : \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = |u(x,t)|^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0,T[, \\ u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T = \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où

- Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $d \geq 1$, $T > 0$, et $p > 1$.
- f est une fonction source non négative appartenant à $L^1(Q_T)$.

3.2 Existence, unicité, régularité et explosion de la solution

Plusieurs auteurs ont étudié les aspects théoriques du problème (P_{Fuj}), on va rappeler quelques résultats concernant l'existence, l'unicité, la régularité de la solution ainsi que le profil et le taux d'explosion dans différents domaines. Commençons par :

3.2.1 $\Omega = \mathbb{R}^d$

En 1966, Fujita [56] a étudié un problème de type (P_{Fuj}) en considérant en particulier $f = 0$ et $\Omega = \mathbb{R}^d$. Il a traité le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = |u(x,t)|^p & \text{dans } Q_T = \mathbb{R}^d \times]0, T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.1}$$

où $p > 1$, et T_{max} est le temps d'existence maximale de u.
On commence tout d'abord par donner quelques définitions :

Définition 3.2.1. *Une fonction non négative $u = u(x,t)$ est dite une solution régulière de (3.1) dans $[0, T_{max}[$ si u, ∇u, Δu et u_t existent et sont continues dans Q_T et si (3.1) est vérifié.*

Définition 3.2.2. *On dit qu'une solution explose en $t = T_{max}$, s'il existe $(x_n, t_n) \in (\mathbb{R}^d \times [0, T_{max}[)$, tel que $(x_n, t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x_0, T_{max})$ et $\mid u(x_n, t_n) \mid \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On dit alors que x_0 est le point d'explosion.*
La collection de tous les points d'explosion est dite l'ensemble d'explosion.

- Si $T_{max} < +\infty$, dans ce cas $\lim\limits_{t\to T_{max}} \|u(.,t)\|_\infty = +\infty$. On dit que la solution explose en temps fini $T_{max} < +\infty$.
- Si $T_{max} = +\infty$, on dit que la solution est globale.

Par ailleurs, la solution de (3.1) admet la représentation intégrale suivante :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y,\tau) u^p(y,\tau) dy d\tau. \tag{3.2}$$

où

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\mid x \mid^2}{4t}\right).$$

satisfait :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Gamma(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \neq (0,0).$$

Fujita [56] a montré que :

i) Si $1 < p < p^* = 1 + \dfrac{2}{d}$, alors pour une donnée initiale non négative non identiquement nulle $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^d)$, le problème (3.1) admet une solution non négative qui explose en temps fini.

ii) Si $p > 1 + \dfrac{2}{d}$, alors la solution de (3.1) est globale et non négative, pour toute donnée initiale non négative dans $C^2(\mathbb{R}^d)$, vérifiant l'inégalité suivante [74] : pour des petits $\varepsilon > 0$

$$u_0(x) \leq \varepsilon \Gamma(x,1) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

En 1973, Hayakawa [71], ensuite Weissler [68] en 1981, ont prouvé que $p^* = 1+\frac{2}{d}$ appartient à la région d'explosion pour toute donnée initiale non négative, continue et bornée.
Comme extension de ces résultats, Pinsky [100] a étudié en 1997 les solutions non négatives du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + a(x)u(x,t)^p & \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \gneqq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.3}$$

où $0 \lneqq a(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, avec $\alpha \geq 1$ et $p > 1$.

Définition 3.2.3. *Une fonction non négative $u(x,t)$ est dite une solution classique de (3.3) si $u \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^d \times]0,T[\right) \cap C\left(\mathbb{R}^d \times [0,T[\right)$ et vérifie (3.3).*

Il a prouvé que :

1− Pour $d \geq 2$ et $a(x)$ d'ordre $|x|^m$ quand $|x| \to \infty$, $m \in]-2, \infty[$ on obtient :

i) Si $1 < p \leq \dfrac{2+m}{d}$, alors toute solution de (3.3) explose en temps fini pour tout $u_0 > 0$.

ii) Si $p > 1 + \dfrac{2+m}{d}$, alors il existe des solutions globales de (3.3) pour une donnée initiale suffisamment petite, en particulier :

$$u_0(x) \leq \delta \exp(-k|x|^2) \text{ pour } k > 0 \text{ et } \delta > 0 \text{ assez petite.} \tag{3.4}$$

2− En particulier pour $d = 1$:

i) Si $1 < p \leq 2$, alors toutes les solutions explosent en temps fini quel que soit le choix de la donnée initiale même si a est à support compact.

ii) Si $p > 2$, alors on peut avoir des solutions globales si u_0 est assez petite, en particulier si elle vérifie (3.4).

Ensuite, en 1999, Pinsky [101] a amélioré son étude en considérant le problème non homogène suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + a(x)u(x,t)^p + \lambda f(x,t) & \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\lambda > 0$ et $f > 0$.

Il a montré que :

A) pour $d = 1, 2$ ou bien pour $d \geq 3$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|y|^{d-2}} dy = \infty$, la solution de (3.5) explose en temps fini.

B) pour $d \geq 3$ et $a(x) \geq c|x|^m$, quand $|x| \to \infty$ et $c > 0$:

- Si $f(x) \geq c|x|^{-q}$, quand $|x| \to \infty$, $c > 0$, $q \in]2, d[$ et $1 < p < 1 + \dfrac{2+m}{q-2}$,

ou bien

- Si $0 \lneqq f(x) \leq c|x|^{-d}$, $c > 0$ et $1 < p \leq 1 + \dfrac{2+m}{q-2}$,

alors pour tout $\lambda > 0$, et toute $u_0 \geq 0$, la solution de (3.5) explose en temps fini.

C) pour $d \geq 3$ et $0 \leq a(x) \leq c|x|^m$, quand $|x| \to \infty$ et $c > 0$:

- Si $0 \lneqq f(x) \leq c|x|^{-q}$ où $|x| \to \infty$, $c > 0$ et $q \in]2, d]$ et $p \geq 1 + \dfrac{(2+m)^+}{q-2}$,

alors pour tout λ et u_0 suffisamment petits :

$$0 \leq u_0 \leq c\,(1+|x|)^{\frac{(2+m)^+}{p-1}-\epsilon}, \text{ où } c > 0 \text{ et } \epsilon > 0, \tag{3.6}$$

la solution de (3.5) est globale

Dans le même cadre toujours, Bandle, Levine et Zhang [22] ont étudié en 2000 le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \mid u(x,t) \mid^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T = \mathbb{R}^d \times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.7}$$

Les auteurs ont prouvé que :

— pour $d = 1, 2,\ p > 1$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \geq 0$, et pour $d \geq 3,\ 1 \leq p \leq \dfrac{d}{d-2}$, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \geq 0$, les solutions de (3.7) explosent en temps finis. Dans ce cas, les solutions peuvent être positives ou négatives.

— si $d \geq 3,\ p \geq \dfrac{d}{d-2}$, alors il existe des solutions globales.
En effet, pour tout $\delta > 0,\ \exists\ \epsilon > 0$ telles que si :

$$|f(x)|,\ |u_0(x)| \leq \frac{\epsilon}{1+|x|^{d+\delta}}, \tag{3.8}$$

alors, le problème (3.7) admet des solutions globales.

— Pour tout d, si $p \geq 1$, alors le problème (3.7) admet des solutions globales pour des données initiales u_0 suffisamment petites et des fonctions sources f telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \leq 0$.

3.2.2 Ω est un domaine extérieur

En se basant toujours sur les mêmes techniques de Fujita, en 1989 Bandle et Levine [21] ont étudié le problème (3.1) pour Ω un domaine extérieur ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Ils ont trouvé le même résultat que Fujita.

Plusieurs auteurs ont étudié le problème (3.1) dans un domaine extérieur mais avec d'autres conditions au bord. Par exemple Levine et Zhang [83], qui ont considéré le problème (3.1) avec les conditions au bord de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, \infty[. \tag{3.9}$$

Dans ce cas, le phénomène d'explosion rapporté par Fujita est encore vérifié.
En 2006, Bandle, Von Below et Reichel [23] ont montré le même résultat que Fujita pour le problème (3.1) mais avec les conditions au bord dynamique :

$$B_\sigma(u) = \sigma\partial_t u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\infty[. \tag{3.10}$$

En 2010, Rault [107] a montré l'existence globale des solutions du problème (3.1) avec les condition au bord (3.10) dans le cas sur-critique ($p > p^*$) pour des données initiales suffisamment petites, pour tout domaine extérieur Ω, et pour tout σ vérifiant :

$$\sigma \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\infty[,\ \sigma \in C^1(\partial\Omega\times]0,\infty[). \tag{3.11}$$

En 2011 [108], cet auteur a montré que le résultat de Fujita est encore vérifié pour le problème de type (3.1) avec les conditions au bord de Robin suivantes :

$$R_\alpha(u) = \frac{\partial u}{\partial u} + \alpha u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times]0,\infty[, \tag{3.12}$$

3.2.3 Ω est un domaine borné

Quittner et Souplet [106] ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \mid u(x,t) \mid^{p-1} u(x,t) & \text{dans } Q_T = \Omega\times]0,\infty[, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T = \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Définition 3.2.4. *Soient X un espace de Banach des fonctions définies sur Ω, $u_0 \in X$ et $T \in]0,\infty]$. On dit que la fonction $u \in C(]0,T[,X)$ est une X- solution classique du (3.13) dans $]0,T[$ si $u \in C^{2,1}(\Omega\times]0,T[) \cap C(\overline{\Omega}\times]0,T[)$, $u(0) = u_0$ et u vérifie (3.13) pour $t \in (0,T)$, où $C^{2,1}(\Omega\times]0,T[)$ est l'espace des fonctions deux fois continues, différentiables dans la variable spatiale x et une fois dans la variable temporelle t.*

Le problème (3.13) est bien posé dans l'espace $X = W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q > d$.
Dans la même référence [106], Quittner et Souplet ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.2.1. *Soit $p > 1$, $u_0 \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, $q > q_c = \dfrac{d(p-1)}{2}$. Alors il existe $T = T(\parallel u_0 \parallel_q)$ telle que le problème (3.13) possède une unique L^q-solution classique dans $[0,T[$, vérifiant l'estimation suivante :*

$$\parallel u(t) \parallel_r \leq C \parallel u_0 \parallel_q t^{-\beta_r},\ \ \beta_r = \frac{d}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}), \tag{3.14}$$

pour $t \in]0,T[$ et $r \in [q,\infty]$ avec $C = C(d,p,q) > 0$. De plus, $u \geq 0$ à condition que $u_0 \geq 0$.

Remarque 3.2.1. *Soit* $p > 1 + \dfrac{2}{d}$, *et* $1 \leq q \leq q_c$, *alors il existe une fonction non négative* $u_0 \in L^q(\Omega)$ *telle que le problème (3.13) n'admet aucune solution non négative* L^q-*classique dans sur* $[0, T[$ *pour tout* $T > 0$ *[106].*

Pour $X = L^2(\Omega)$ Ball [20] a annoncé en 1977 le résultat suivant :

Théorème 3.2.2. *Soit* $p > 1$, $d = 1, 2$ *ou bien soit* $1 < p < \dfrac{d}{d-2}$, *pour* $d \geq 3$.
Soit $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. *Alors* $\exists!$ *une solution non négative de :*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + \mid u(x,t) \mid^{p-1} u(x,t) & \text{dans } \Omega \times]0, T_{max}[, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

définie sur un intervalle d'existence maximal $[0, T_{max}[$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} u(x,t) \in C\left([0, T_{max}[,\ W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\ u(x,t) \in C^1\left(]0, T_{max}[,\ L^2(\Omega)\right), \\ u(x,t) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega),\ \text{pour tout } t \in]0, T_{max}[. \end{cases} \tag{3.16}$$

De plus si u_0 *vérifie la condition suivante :*

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \mid \nabla u_0 \mid^2 - \frac{1}{p+1} \mid u_0 \mid^{p+1} \leq 0, \tag{3.17}$$

alors :

$$T_{max} < \infty,\ \lim_{t \to T_{max}} \int_\Omega \mid u \mid^{p+1} dx = \infty. \tag{3.18}$$

Remarque 3.2.2. *La condition nécessaire pour que (3.15) admette une solution globale est :*

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \mid \nabla u_0 \mid^2 - \frac{1}{p+1} \mid u_0 \mid^{p+1} \geq 0. \tag{3.19}$$

Fila, Souplet [54], Giga, Khon [62, 63, 64], Friedman, McLeod [55] et Levine [82] ont donné une estimation du taux d'explosion du problème (3.15) . Ils ont montré que si $u(x,t)$ est une solution de (3.15) qui explose en temps fini T_{max}, alors il existe une constante positive C telle que pour tout $t \in [0, T_{max}[$ et $1 < p \leq 1 + \frac{2}{d}$ on a :

$$(p-1)^{-\frac{1}{p-1}} (T_{max} - t)^{-\frac{1}{p-1}} \leq \| u(t) \|_\infty \leq C (T_{max} - t)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3.20}$$

Chen [37] a montré que ce temps d'explosion vérifie l'estimation suivante :

$$\frac{1}{(p-1) \| u_0 \|_\infty^{p-1}} \leq T_{max} \leq \frac{1}{(p-1) \| u_0 \|_1^{p-1}}. \tag{3.21}$$

Quittner et Souplet ont montré aussi, dans [106], que le problème :

$$\begin{cases} w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = w(x,t)^p + \lambda w(x,t) & \text{dans } \Omega\times]0,\overline{T}_{max}[,\ p>1,\ \lambda>0, \\ w(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,\overline{T}_{max}[, \\ w(x,0) = w_0(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.22}$$

admet une unique solution w dans $C\left([0,\overline{T}_{max}[,\ L^q(\Omega)\right)$, où $q \geq \max(q_c = \dfrac{d(p-1)}{2},\ p+1)$ et $\overline{T}_{max}$ est le temps d'existence maximale de w.
De même si la donnée initiale $w_0 \in L^\infty \cap H_0^1(\Omega)$ vérifie :

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \mid \nabla w_0 \mid^2 -\lambda w_0^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \mid w_0 \mid^{p+1} \leq 0, \tag{3.23}$$

alors $\overline{T}_{max} < \infty$.

Revenons maintenant à notre problème principal (P_{Fuj}) : l'équation de Fujita non homogène :

$$(P_{Fuj}) : \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \mid u(x,t) \mid^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T = \Omega\times]0,T^*[, \\ u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T = \partial\Omega\times]0,T^*[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où $p>1$, T^* le temps d'existence maximale de la solution u du (P).
Soit $u(t)$ la solution u de l'équation intégrale associée à (P_{Fuj}) :

$$u(t) = S(t)u_0(y) + \int_0^t S(t-s)\left(\mid u(s) \mid^p + f(s)\right) ds, \tag{3.24}$$

où $(S(t))_{t\geq 0}$: le semi groupe associé à l'équation de la chaleur.
Cazenave et Haraux [36] ont annoncé le résultat suivant :

Proposition 3.2.1. *Soit $u_0 \in C_0(\Omega)$, $f \in L^\infty_{loc}([0,+\infty[,\ L^\sigma(\Omega))$ où $\sigma \geq 1$ telle que $\sigma \geq \frac{d}{2}$. Alors il existe une unique solution maximale de (3.24) $u \in C\left([0,T^*[,\ C_0(\Omega)\right)$. On a $T^*>0$ et si $T^*<\infty$, alors $\lim\limits_{t\nearrow T^*} \parallel u(t) \parallel_\infty = \infty$.*

Remarque 3.2.3. *Il est immédiat que v solution de (3.15) est une sous-solution de (P_{Fuj}), $v \leq u$, avec u solution de (P_{Fuj}). De plus on a $T^* \leq T_{max}$.*

3.2.4 Estimation du temps d'explosion par la méthode des fonctions propres

On se propose maintenant de traiter les conditions d'explosion de la solution u de notre problème (P_{Fuj}) et de donner une estimation du temps d'explosion par application

de la méthode des fonctions propres [98, 74, 106].

Dans ce contexte on note λ_1 la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec les conditions de Dirichlet au bord. Soit ϕ_1 la fonction propre associée à λ_1 telle que :

$$\begin{cases} \phi_1(x) > 0, \quad x \in \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega \phi_1(x)dx = 1. \end{cases} \tag{3.25}$$

On définit

$$J(t) = \int_\Omega u(x,t)\phi_1(x)dx. \tag{3.26}$$

Pour notre cas, on a $t^0 = 0$, d'où $J(t^0) = J(0) = \displaystyle\int_\Omega u(x,0)\phi_1(x)dx = \int_\Omega u_0(x)\phi_1(x)dx.$

Proposition 3.2.2. *On considère le problème (P_{Fuj}), soit $J(t^0) > (2\lambda_1)^{\frac{1}{p-1}} = J^l$, alors la solution u de (P_{Fuj}) est non négative et elle explose en temps fini noté T^* tel que :*

$$T^* < \frac{2}{(p-1)J(t^0)^{p-1}}. \tag{3.27}$$

Démonstration. On multiplie la première équation de (P_{Fuj}) par ϕ_1 et on l'intègre sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t J(t) = \int_\Omega u_t\phi_1 &= \int_\Omega \Delta u\phi_1 + \int_\Omega \mid u \mid^p \phi_1 + \int_\Omega f\phi_1 \\ &= -\int_\Omega \lambda_1 u\phi_1 + \int_\Omega \mid u \mid^p \phi_1 + \int_\Omega f\phi_1 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen [74] et le fait que f et ϕ_1 sont non-négatives on aura :

$$\partial_t J(t) \geq -\lambda_1 J(t) + J(t)^p, \quad t > 0 \tag{3.28}$$

Comme $J(t_0) > (2\lambda_1)^{\frac{1}{p-1}} > 0$, alors, $J(t_0)^{p-1} > 2\lambda_1 > 0$. D'où, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t J(t^0) &\geq (-\lambda_1 + J(t^0)^{p-1})J(t^0), \qquad t^0 \geq 0 \\ &> (-\lambda_1 + 2\lambda_1)J(t^0), \quad t^0 \geq 0 \\ &> \lambda_1 J(t^0) > 0, \qquad t^0 \geq 0. \end{aligned}$$

D'où on peut montrer que :

$$\partial_t J(t) > 0, \quad \text{pour } t > t^0.$$

En effet, si on raisonne par l'absurde : On suppose qu'il existe $t > t^0$, tel que $\partial_t J(t) \leq 0$, alors il existe un $t^1 > t^0$, tels que

$$\partial_t J(t^1) = 0 \text{ et } \partial_t J(t) > 0, \text{ pour tout } t^0 < t < t^1. \tag{3.29}$$

D'après (3.28), on a

$$\partial_t J(t^1) \geq -\lambda_1 J(t^1) + J(t^1)^p,\ t^1 > 0.$$

Puisque $\partial_t J(t^1) = 0$, alors

$$-\lambda_1 J(t^1) + J(t^1)^p \leq 0.$$

D'autre part, la fonction $-\lambda_1 J(t) + J(t)^p$ est non-négative pour tout $J(t) > J^l = (2\lambda_1)^{\frac{1}{p-1}}$ (car dans ce cas $-\lambda_1 J(t) + J(t)^p > (-\lambda_1 + 2\lambda_1)J(t) > \lambda_1 J^l > 0$), d'où

$$J(t^1) < J^l < J(t^0).$$

Mais c'est absurde car, d'une part, $J(t^1) - J(t^0) = \int_{t^0}^{t^1} \frac{\partial J(s)}{ds} ds > 0$, et, d'autre part, d'après (3.29),$\partial_t J(t) > 0$, pour $t^0 < t < t^1$.
On conclut alors $\partial_t J(t) > 0$, pour tout $t > t^0$. Par suite $J(t)$ est croissante, d'où

$$J(t) > J(t^0) > 0,\ \text{pour } t > t^0.$$

Vu que $\partial_t J(t) > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que $\partial_t J(t) \geq c > 0$, ce qui donne

$$\int_{t_0}^{t} \partial_t J(t) dt \geq c(t - t^0).$$

Donc :

$$J(t) \geq c(t - t^0) + J(t^0).$$

En conséquence, si $t \to +\infty$, on a $J(t) \to +\infty$.
Par définition de $J(t)$ et grâce à la positivité de $u(t)$, on conclut que $u(t)$ explose.
Montrons maintenant que le temps d'explosion est fini. On a :

$$\begin{aligned} \partial_t J(t) &\geq -\lambda_1 J(t) + J(t)^p \\ &\geq (\frac{-\lambda_1}{J(t)^{p-1}} + 1) J(t)^p), \end{aligned}$$

car $J(t) > (2\lambda_1)^{\frac{1}{p-1}} > 0$.
Puisque $J(t) > J(t^0) > 0$ pour tout $t > t^0$, on a :

$$\frac{-\lambda_1}{J(t)^{p-1}} > \frac{-\lambda_1}{J(t^0)^{p-1}}.$$

En plus, on a $J(t^0)^{p-1} > 2\lambda_1$, donc :

$$\frac{-\lambda_1}{J(t^0)^{p-1}} > \frac{-\lambda_1}{2\lambda_1}.$$

Par suite :

$$d_t J(t) \;>\; (\frac{-\lambda_1}{2\lambda_1}+1)J(t)^p > \frac{1}{2}J(t)^p,$$

donc :

$$\partial_t J(t) J(t)^{-p} > \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\frac{1}{1-p}(\partial_t J(t))^{1-p} > \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p-1}\int_{t^0}^{t} \partial_t J(t)^{1-p} &> \frac{1}{2}(t-t^0) \\ J(t^0)^{1-p} - J(t)^{1-p} &> \frac{p-1}{2}(t-t^0). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$t - t^0 < \frac{2}{(p-1)J(t^0)^{p-1}}$$

Pour $t = T^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} T^* &< \frac{2}{(p-1)J(t^0)^{p-1}} + t^0 \\ &< \frac{2}{(p-1)J(t^0)^{p-1}} < \infty. \end{aligned} \tag{3.30}$$

□

3.3 Étude numérique

On commence par un petit historique sur l'étude numérique du problème (P).
En 1976, Nakagawa [97] a appliqué une approximation de différences finies explicite en temps au problème (3.1) où $p = 2$, en mettant l'accent sur le cas où la solution explose. Il a donné une estimation du temps d'explosion de la solution approchée en considérant un pas de temps τ dépendant du pas de discrétisation en espace h, ($\tau < \frac{h^2}{2}$) qui garantit la positivité de la solution numérique et la convergence du schéma numérique considéré. Ensuite, d'autres auteurs ont traité le cas général ($p > 1$), citons par exemple Chen [37]. Il a prouvé, en utilisant la méthode des différences finies explicite, que, pour une donnée initiale u_0 non négative symétrique régulière et suffisamment grande, l'explosion en temps fini de la solution discrète dans le domaine $]0, 1[$ est concentrée dans le point maximal de la solution. Ainsi, il a étudié le comportement de la solution au voisinage de ce point d'explosion en donnant une majoration du temps d'explosion numérique et en considérant

un pas de temps adapté à la norme infinie de la solution. Il a donné ainsi des résultats de convergence de la méthode numérique considérée.
Dans cette section, on va présenter d'autres méthodes numériques basées sur une semi-discrétisation en espace en utilisant la méthode des éléments finis, ensuite une discrétisation en temps en se basant sur la méthode de Crank-Nicholson. Des estimations d'erreur seront données à la fois pour les solutions discrétisées en espace et les solutions totalement discrètes.
On s'intéresse en particulier au calcul d'une approximation numérique d'une solution non négative du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) + \mid u(x,t) \mid^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T = \partial\Omega \times]0,T], \end{cases} \tag{3.31}$$

avec $p > 1$.
La fonction $F^*(u) = \mid u(x,t) \mid^p + f(x,t)$ est lipschitzienne, i.e : pour $u,\ v \in \mathbb{R}$,

$$|F^*(u) - F^*(v)| \leq L|u - v|, \text{ où } (L = p(\inf\{u,v\})^{p-1}). \tag{3.32}$$

3.3.1 Résolution par éléments finis

On commence par écrire la formulation variationnelle associée au problème (3.31). On multiplie la première équation de ce problème par une fonction test $v = v(.,t)$ qui appartient à l'espace $H_0^1(\Omega)$, pour chaque t fixe. Puis, on l'intègre sur Ω et on applique la formule de Green. On obtient alors le problème faible suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u(t) \in C^0\left([0,T],\ L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(]0,T],\ H_0^1(\Omega)\right), \text{ telle que :} \\ (\partial_t u(t), v) + a(u(t), v) - (\mid u(t) \mid^p, v) = L(v) \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ t \in]0,T], \end{cases} \tag{3.33}$$

où

- $C^0\left([0,T],\ L^2(\Omega)\right)$: l'ensemble des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$.
- $L^2\left(]0,T],\ H_0^1(\Omega)\right)$: l'ensemble des fonctions mesurables et de carré intégrable sur $]0,T]$, à valeur dans $H_0^1(\Omega)$.
- $(\partial_t u(t), v) = \displaystyle\int_\Omega \partial_t u(t) v dx$,
- $a(u(t), v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(t) \nabla v dx$
- $(\mid u(t) \mid^p, v) = \displaystyle\int_\Omega \mid u(t) \mid^p v dx$
- $L(v) = \displaystyle\int_\Omega f(t) v dx$.

Cette formulation variationnelle admet une unique solution u dans $H_0^1(\Omega),\ t \in]0,T]$, voir [129].

Définition 3.3.1. *On dit que $u = u(x,t)$ est une solution faible de (3.31) dans $]0,T]$, si $u \in L^2(]0,T],\ H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^2(]0,T],\ H^{-1}(\Omega))$ et (3.33) est vérifiée avec $u(.,0) = u_0(.)$.*

Maintenant on approche la solution u de (3.33) par une fonction u_h qui appartient à un espace variationnel approché de dimension finie, pour tout $t \in [0,T]$.
Dans ce contexte, on considère $\Omega =]a,b[$, et $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ une partition de l'intervalle $\Omega =]a,b[$.
Soit $h_i = |x_i - x_{i-1}|$, et $h = \max\limits_{i \leq n} h_i,\ ch \leq h_i \leq h$, avec $0 < c < 1$.
On définit $V_h = \{p(x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega});\ p|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1([x_{i-1},x_i]), i = 1,...n\}$ où $\mathbb{P}_k([x_{i-1},x_i])$ est l'ensemble du polynôme de degré k défini dans $[x_{i-1},x_i]$.
On note N_h le nombre de nœuds intérieurs de la discrétisation de l'intervalle $]a,b[$, et $\{\psi_i\},\ i = 1,\cdots,N_h$ la base de Lagrange de V_h.

Remarque 3.3.1. *La solution approchée est donc recherchée dans un espace d'éléments finis $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ tel que, pour h petit [129], on a :*

$$\inf_{\chi \in V_h} \{\|u - \chi\|_{L^2(\Omega)} + h\|\nabla(u - \chi)\|_{L^2(\Omega)}\} \leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)},\ \text{où } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (3.34)$$

L'approximation du problème (3.31) dans l'espace V_h conduit à la formulation variationnelle semi-discrète suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h(t) \in C^0([0,T],\ V_h) \cap L^2([0,T],\ V_h) \text{ telle que :} \\ d_t \displaystyle\int_\Omega u_h(t)v_h dx + \int_\Omega \nabla u_h(t)\nabla v_h dx - \int_\Omega |\ u_h(t)\ |^p\ v_h = \int_\Omega f(t)v_h\ \ \forall\ v_h \in V_h, t \in]0,T], \\ u_h(0) = u_{0,h} \end{cases} \quad (3.35)$$

où $u_{0,h}$ est une approximation de la fonction u_0 dans V_h. On suppose que :

$$\lim_{h \to 0} \|u_{0,h} - u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Le problème discrétisé (3.35) est un système différentiel de N_h équations différentielles d'ordre 1. En effet, si on note le vecteur $U_h(t) = (u_h(x_1,t), u_h(x_2,t), ..., u_h(x_{N_h},t))^T = (U_1(t),\ U_2(t), ..., U_{N_h}(t))^T$.
Par construction de u_h dans V_h, on a :

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N_h} u_h(x_i,t)\psi_i(x) = \sum_{i=1}^{N_h} U_i(t)\psi_i(x).$$

On déduit alors que :
$d_t \sum_{i=1}^{N_h} \left(\int_\Omega \psi_i \psi_j dx \right) U_i(t) + \sum_{i=1}^{N_h} \left(\int_\Omega \nabla\psi_i \nabla\psi_j dx \right) U_i(t) = \int_\Omega \mid u_h \mid^p \psi_j dx + \int_\Omega f\psi_j dx.$
Il en découle alors le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } U_h(t) \in C^0\left([0,T],\ \mathbb{R}^{N_h}\right) \text{ tel que :} \\ d_t M U_h(t) + A_h U_h(t) = \tilde{F}(U_h(t)) + \tilde{f}(t), t \in]0,T], \\ U_h(0) = U_{0,h} \end{cases} \tag{3.36}$$

où

- $U_h(0) = (U_1(0), U_2(0), ..., U_{N_h}(0))^T = (u_{0,h}(x_1), u_{0,h}(x_2), ..., u_{0,h}(x_{N_h}))^T$,
- $M = \left(\int_\Omega \psi_i \psi_j dx \right)_{i,j=1:N_h}$,
- $A_h = \left(\int_\Omega \nabla\psi_i \nabla\psi_j dx \right)_{i,j=1:N_h}$,
- $\tilde{F}(U_h(t)) = \left(\int_\Omega \mid u_h(t) \mid^p \psi_j dx \right)_{j=1:N_h}$
- $\tilde{f}(t) = \left(\int_\Omega f(t)\psi_j dx \right)_{j=1:N_h}$.

Vu que les matrices M et A_h sont définies positives et $\tilde{F}$ est lipschitzienne continue sur $\mathbb{R}^{N_h}$, alors le système différentiel (3.36) admet une solution unique pour $t \in]0,T]$.

Remarque 3.3.2. *Soient $u(t)$ une solution de (3.31) et $u_h(t)$ solution de (3.35) [129]. On suppose que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors, on a :*

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|u_{0,h} - u_0\|_{L^2(\Omega)}) + C(u)h^2,\ t \in]0,T], \tag{3.37}$$

avec $C(u) = C\|u\|_2$.

3.3.2 Discrétisation en temps

Pour calculer l'approximation numérique de l'équation (3.36) on introduit un découpage non uniforme de l'intervalle $[0,T]$. Soit τ_n le pas de temps tel que :

$$\begin{cases} t^0 = 0 \\ t^{n+1} = t^n + \tau_n = \sum_{k=0}^{n+1} \tau_k, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{3.38}$$

On cherche à calculer pour $n \geq 1$ une approximation notée U_h^n de $U_h(t^n)$. En d'autres termes la $i - me$ composante U_i^n du vecteur $U_h^n \in \mathbb{R}^{N_h}$ représente une approximation de

la fonction u solution du problème (3.31) à l'instant t^n et aux nœuds x_i :

$$U_i^n \simeq U_i(t^n) \simeq u(x_i, t^n). \tag{3.39}$$

Chen [37], Hani et Khenissi [66, 67] ont utilisé la méthode de différences finis puis le schéma numérique d'Euler explicite pour calculer une solution approchée notée u^n du problème de type (3.31) avec une fonction source nulle. Ils ont considéré un pas de temps qui vérifie les hypothèses suivantes :

- $\tau_n = \tau$ quand la solution de (3.31) est globale, où τ est une constante positive telle que $\tau < \dfrac{h^2}{2}$.
- $\tau_n = \tau \dfrac{1}{\|u^n\|_\beta^{p-1}}$ dans le cas d'explosion de la solution de (3.31), où :

$$\|u^n\|_\beta = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N_h-1} (hu_j^n)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}, & 1 \leq \beta < \infty, \\ \max\limits_j |u_j^n|, & \beta = \infty. \end{cases} \tag{3.40}$$

Dans le cas présent, la méthode de discrétisation en temps considérée est la méthode de Crank-Nicholson. Cette méthode consiste à remplacer l'équation de (3.36) par le schéma aux différences finies en temps suivant :

$$\frac{1}{\tau_n} M \left(U_h^{n+1} - U_h^n \right) + \frac{1}{2} A_h (U_h^{n+1} + U_h^n) = \frac{1}{2} \left(\tilde{F}(U_h^{n+1}) + \tilde{F}(U_h^n) + \tilde{f}^{n+1} + \tilde{f}^n \right), \tag{3.41}$$

où

- $U_h^n = \left(U_1^n, U_2^n, ..., U_{N_h}^n \right)^T = \left(u_h^n(x_1), u_h^n(x_2), ..., u_h^n(x_{N_h}) \right)^T$: une approximation du $U_h(t^n) = \left(u_h(x_1, t^n), u_h(x_2, t^n), ..., u_h(x_{N_h}, t^n) \right)^T$, avec

$$u_h^n = \sum_{j=1}^{N_h} u_h^n(x_j) \psi_j = \sum_{j=1}^{N_h} U_j^n \psi_j. \tag{3.42}$$

- $\tilde{F}(U_h^n) = \left(\displaystyle\int_\Omega \mid u_h^n \mid^p \psi_j dx \right)_{j=1:N_h}$
- $\tilde{f}^n = \tilde{f}(t^n) = \left(\displaystyle\int_\Omega f(t^n) \psi_j dx \right)^T$.

Remarque 3.3.3. *Soient u_h^n vérifient (3.42), et u solution du (3.31). On suppose que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors on a, pour un pas de temps τ_n petit ($\tau_n < \frac{1}{L}$, définie dans (3.32)),*

$$\|u_h^n - u(t^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|u_{0,h} - u(t^0)\|_{L^2(\Omega)} \right) + C(u) \left(h^2 + \tau_n^2 \right), \quad \textit{pour } t^n \in [0, T], \tag{3.43}$$

où C est une constante qui dépend de la discrétisation du domaine et $C(u) = C\|u\|_2$.

Rappelons que U_h^n est un vecteur de $\mathbb{R}^N$, et que la matrice M est définie positive. On munit alors $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire $(M.,.)$ et de la norme $|.|_M = (M.,.)^{\frac{1}{2}}$. Ce qui nous permet d'écrire, si U_h^n une solution de (3.41). Alors :

$$|U_h^n|_M^2 = (MU_h^n, U_h^n) = \int_\Omega (u_h^n)^2 dx = \|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.44}$$

Remarque 3.3.4. *Les matrices M et A_h sont symétriques définies positives.*
En conséquence [109, 41] le problème aux valeurs propres :

$$A_h\phi_h = \lambda_h M\phi_h, \tag{3.45}$$

admet N_h valeurs propres $(\lambda_{i,h})_{i=1,...N_h}$ positives formant une suite croissante :

$$0 < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq ... \leq \lambda_{N_h,h},$$

et une base de vecteurs propres $(\phi_{i,h})_{i=1,...N_h}$ orthonormale pour la norme $(M.,.)$ sur $\mathbb{R}^{N_h}$.

On note maintenant $\phi_{1,h}$ un vecteur propre associé à la première valeur propre $\lambda_{1,h}$ de (3.45) tel que :

$$\sum_{j=1}^{N_h} \phi_{1,h,j} = 1,$$

3.3.3 Explosion de la solution approchée

D'une façon analogue dans le cas continu on définit :

$$J_h^n = MU_h^n.\phi_{1,h}. \tag{3.46}$$

Définition 3.3.2. *On dit que la solution discrète U_h^n explose si $\lim\limits_{n\to\infty} \|U_h^n\|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq N_h} |u_h^n(x_j)| = \infty$.*

Proposition 3.3.1. *La solution U_h^n du problème approché (3.41) explose si $\exists\, n > 0$, pour laquelle :*

$$J_h^n > (2\lambda_{1,h})^{\frac{1}{p-1}} = J_h^l. \tag{3.47}$$

Démonstration. Si on multiplie (3.41) par $\phi_{1,h}$, on obtient :

$$M\left(U_h^{n+1} - U_h^n\right).\phi_{1,h} + \frac{\tau_n}{2}A_h(U_h^{n+1}+U_h^n).\phi_{1,h} = \frac{\tau_n}{2}\left(\tilde{F}(U_h^{n+1}) + \tilde{F}(U_h^n) + \tilde{f}^{n+1} + \tilde{f}^n\right).\phi_{1,h}.$$

Comme la fonction source f est non négative, alors on a :

$$M\left(U_h^{n+1} - U_h^n\right).\phi_{1,h} + \frac{\tau_n}{2}A_h(U_h^{n+1} + U_h^n).\phi_{1,h} \geq \frac{\tau_n}{2}\left(\tilde{F}(U_h^{n+1}) + \tilde{F}(U_h^n)\right).\phi_{1,h}. \tag{3.48}$$

Or, $\phi_{1,h}$ est un vecteur propre associé à la première valeur propre $\lambda_{1,h}$ de (3.45), d'où on a :

$$A_h.\phi_{1,h} = \lambda_{1,h} M.\phi_{1,h},$$

donc :

$$A_h.\phi_{1,h} U_h^n = \lambda_{1,h} M.\phi_{1,h} U_h^n,$$

ce qui implique que :

$$A_h U_h^n.\phi_{1,h} = \lambda_{1,h} M U_h^n.\phi_{1,h}.$$

Par conséquent, l'inégalité (3.48) donne :

$$M\left(U_h^{n+1} - U_h^n\right).\phi_{1,h} + \frac{\tau_n}{2}\lambda_{1,h} M(U_h^{n+1} + U_h^n).\phi_{1,h} \geq \frac{\tau_n}{2}\left(\tilde{F}(U_h^{n+1}) + \tilde{F}(U_h^n)\right).\phi_{1,h}.$$

D'après la définition (3.46) de J_h^n, on obtient :

$$J_h^{n+1} - J_h^n + \frac{\tau_n}{2}\lambda_{1,h}(J_h^{n+1} + J_h^n) \geq \frac{\tau_n}{2}\left(\tilde{F}(U_h^{n+1}) + \tilde{F}(U_h^n)\right).\phi_{1,h}. \tag{3.49}$$

Or, d'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\tilde{F}(U_h^n) = \left(\int_\Omega \mid u_h^n(x) \mid^p \psi_j(x)dx\right)_{j=1}^{N_h} \geq \left(\left|\int_\Omega u_h^n(x)\psi_j(x)dx\right|^p\right)_{j=1}^{N_h}. \tag{3.50}$$

De plus, on a :

$$\left(\left|\int_\Omega u_h^n(x)\psi_j(x)dx\right|^p\right)_{j=1}^{N_h}.\phi_{1,h} = \sum_{j=1}^{N_h}\left|\int_\Omega u_h^n(x)\psi_j(x)dx\right|^p \phi_{1,h,j}.$$

Puisque $\sum_{j=1}^{N_h}\phi_{1,h,j} = 1$, en appliquant l'inégalité de Jensen discrète, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(U_h^n).\phi_{1,h} \geq \sum_{j=1}^{N_h}\left|\int_\Omega u_h^n(x)\psi_j(x)dx\right|^p \phi_{1,h,j} &\geq \left|\sum_{j=1}^{N_h}\int_\Omega u_h^n(x)\psi_j(x)\phi_{1,h,j}dx\right|^p \\
&= \left|\sum_{j=1}^{N_h}\int_\Omega \sum_{i=1}^{N_h} u_h^n(x_i)\psi_i(x)\psi_j(x)\phi_{1,h,j}dx\right|^p \\
&= \left|\sum_{j=1}^{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} u_h^n(x_i)\int_\Omega \psi_i(x)\psi_j(x)\phi_{1,h,j}dx\right|^p \\
&= \mid MU_h^n.\phi_{1,h} \mid^p \\
&= \mid J_h^n \mid^p .
\end{aligned}$$

On conclut donc que

$$\tilde{F}(U_h^n).\phi_{1,h} \geq \mid J_h^n \mid^p .$$

Alors (3.49) implique l'inégalité suivante :

$$\frac{2}{\tau_n}(J_h^{n+1} - J_h^n) \geq (-\lambda_{1,h} J_h^{n+1} + \mid J_h^{n+1} \mid^p) + (-\lambda_{1,h} J_h^n + \mid J_h^n \mid^p). \tag{3.51}$$

On va commencer par monter, par récurrence, que $J_h^n > 0,\ \forall n \geq 0$.

On a $J_h^0 > 0$, on suppose que $J_h^n > 0$, et montrons que $J_h^{n+1} > 0$.

Puisque $J_h^n > J_h^l > 0$, on a alors,

$$\begin{aligned}
(\frac{2}{\tau_n} + \lambda_{1,h}) J_h^{n+1} &\geq -\lambda_{1,h} J_h^n + (J_h^n)^p + \frac{2}{\tau_n} J_h^n + \mid J_h^{n+1} \mid^p . \\
&\geq -\lambda_{1,h} J_h^n + (J_h^n)^p \\
&\geq (-\lambda_{1,h} (J_h^n)^{1-p} + 1)(J_h^n)^p \\
&\geq (\frac{-\lambda_{1,h}}{2\lambda_{1,h}} + 1)(J_h^n)^p \\
&\geq \frac{1}{2}(J_h^n)^p.
\end{aligned}$$

et on conclut que $J_h^{n+1} > 0$. Il en résulte que $J_h^n > 0,\ \forall n \geq 0$.

D'autre part, on a supposé que $J_h^n > J_h^l$, et on montrera que $J_h^{n+1} > J_h^l$.

Dans ce contexte, on a :

$$\begin{aligned}
(\frac{2}{\tau_n} + \lambda_{1,h}) J_h^{n+1} &\geq -\lambda_{1,h} J_h^n + (J_h^n)^p + \frac{2}{\tau_n} J_h^n. \\
&\geq (\frac{2}{\tau_n} - \lambda_{1,h} + (J_h^n)^{p-1}) J_h^n
\end{aligned}$$

d'où :

$$(2 + \tau_n \lambda_{1,h}) J_h^{n+1} \geq (2 - \lambda_{1,h}\tau_n + \tau_n (J_h^n)^{p-1}) J_h^l.$$

Alors :

$$J_h^{n+1} \geq (\frac{2 - \lambda_{1,h}\tau_n + \tau_n (J_h^n)^{p-1}}{2 + \lambda_1 \tau_n}) J_h^l.$$

Or :

$$(2 - \lambda_{1,h}\tau_n + \tau_n (J_h^n)^{p-1}) - (2 + \lambda_{1,h}\tau_n) = \tau_n ((J_h^n)^{p-1} - 2\lambda_1) > 0.$$

Ce qui implique que :

$$\frac{2 - \lambda_1 \tau_n + \tau_n (J_h^n)^{p-1}}{2 + \lambda_{1,h}\tau_n} > 1.$$

Par suite $J_h^{n+1} > J_h^l$, donc :

$$\begin{aligned}
-\lambda_{1,h} J_h^{n+1} + (J_h^{n+1})^p &> (\lambda_{1,h} + (J_h^{n+1})^{p-1}) J_h^{n+1} \\
&> (-\lambda_{1,h} + 2\lambda_{1,h}) J_h^{n+1} \\
&> \lambda_{1,h} J_h^{n+1} \qquad (3.52) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

On conclut, d'après (3.51), que : $\frac{2}{\tau_n}(J_h^{n+1} - J_h^n) > 0$, donc $J_h^{n+1} > J_h^n$.
D'où, puisque :

$$\frac{2}{\tau_n}(J_h^{n+1} - J_h^n) \geq (-\lambda_{1,h} J_h^{n+1} + (J_h^{n+1})^p) + (-\lambda_{1,h} J_h^n + (J_h^n)^p),$$

on peut écrire grâce à (3.52) :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau_n}(J_h^{n+1} - J_h^n) &> \lambda_{1,h} J_h^{n+1} - \lambda_{1,h} J_h^n + (J_h^n)^p \\ &> \lambda_{1,h} J_h^{n+1} - \lambda_{1,h} J_h^{n+1} + (J_h^n)^p \\ &> (J_h^n)^p. \end{aligned}$$

Donc :

$$J_h^{n+1} \geq (1 + \frac{\tau_n}{2}(J_h^n)^{p-1}) J_h^n.$$

On choisit $\tau_n = \frac{2\tau}{(J_h^n)^{p-1}}$, on obtient $J_h^{n+1} \geq (1+\tau) J_h^n$, d'où $J_h^n \geq (1+\tau)^{n-k} J_h^k$, pour $n > k$.
Or, $(1+\tau) > 1$ donc $J_h^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Alors, par définition de J_h^n, on a $u_h^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. □

3.3.4 Estimation de temps d'explosion numérique

On note T_{max}^{Num} le temps numérique d'explosion de U_h^n solution discrète du schéma (3.41), défini par :

$$T_{max}^{Num} = \sum_{n \geq 0} \tau_n. \tag{3.53}$$

Proposition 3.3.2. *On suppose que la condition (3.47) est vérifiée, alors, le temps d'explosion T_{max}^{Num} est borné et vérifie l'inégalité suivante :*

$$T_{max}^{Num} \leq t_k + \frac{2(1+\tau)^{p-1}}{(p-1)(J_h^k)^{p-1}}, \quad \textit{pour tout } J_h^k > J_h^l, \;\; p > 1. \tag{3.54}$$

Démonstration. D'après la définition de pas de temps τ_n (3.38), on a

$$
\begin{aligned}
t_n &= t_k + \sum_{m=k}^{n-1} \tau_m \\
&= t_k + \sum_{m=k}^{n-1} \frac{2\tau}{(J_h^m)^{p-1}} \\
&\leq t_k + \frac{2\tau}{(J_h^k)^{p-1}} \sum_{m=k}^{n-1} \frac{1}{(1+\tau)^{(p-1)(m-k)}}, \quad n > k \\
&\leq t_k + \frac{2\tau}{(J_h^k)^{p-1}} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(1+\tau)^{(p-1)(m-k)}}, \quad n > k \\
&= t_k + \frac{2\tau}{(J_h^k)^{p-1}} \sum_{m=k}^{\infty} \left((1+\tau)^{(1-p)}\right)^{(m-k)}, \quad n > k \\
&= t_k + \frac{2\tau}{(J_h^k)^{p-1}} \frac{1}{1-(1+\tau)^{1-p}}, \quad n > k \\
&= t_k + \frac{2\tau}{(J_h^k)^{p-1}} \frac{(1+\tau)^{p-1}}{(1+\tau)^{p-1}-1}, \quad n > k.
\end{aligned}
$$

Puisque τ est petit, on a alors : $(1+\tau)^{p-1} \sim 1+(p-1)\tau+o(\tau)$, d'où $(1+\tau)^{p-1}-1 \sim (p-1)\tau$. Donc :

$$
\begin{aligned}
t_n &\leq t_k + \frac{2\tau}{(J_h^k)^{p-1}} \frac{(1+\tau)^{p-1}}{(p-1)\tau}, \quad n > k \\
&\leq t_k + \frac{2(1+\tau)^{p-1}}{(p-1)(J_h^k)^{p-1}}, \quad n > k.
\end{aligned}
$$

Dans ce cas on dit que la solution U_h^n explose en temps fini T_{max}^{Num}. □

Remarque 3.3.5. *Cette estimation du temps d'explosion est analogue à celle de la théorie (3.30) quand τ tend vers 0.*

3.3.5 Algorithme classique

Afin de résoudre numériquement le problème discret (3.41), on va présenter deux algorithmes différents. Commençons par le premier : cet algorithme est classique. Il consiste à discrétiser tout d'abord le problème de type (P_{Fuj}) en temps et en espace et puis, à chaque itération temporelle, on résout le problème statique obtenu en appliquant la méthode de Newton. Puis pour garantir l'ellipticité du problème linéaire obtenu, on fait appel à la méthode de décomposition de domaine.
Le schéma numérique (3.41) peut être reformulé :

$$
\frac{2}{\tau_n} M U_h^{n+1} + A_h U_h^{n+1} - \tilde{F}(U_h^{n+1}) = \frac{2}{\tau_n} M U_h^n - A_h U_h^n + \tilde{F}(U_h^n) + \tilde{f}^{n+1} + \tilde{f}^n. \qquad (3.55)
$$

On note :

$$\alpha = \frac{2}{\tau_n} \text{ et } g(U_h^n) = \alpha M U_h^n - A_h U_h^n + \tilde{F}(U_h^n) + \tilde{f}^{n+1} + \tilde{f}^n,$$

donc, pour simplifier, sans perte de généralité, l'égalité (3.55) peut s'écrire, à chaque pas de temps, de la façon suivante :

$$\alpha M U_h^{n+1} + A_h U_h^{n+1} - \tilde{F}(U_h^{n+1}) = g(U_h^n). \tag{3.56}$$

On remarque qu'on est ramené au problème stationnaire de type (E, α) présenté dans les chapitres précédents. Donc pour résoudre ce type du problème on l'applique au début la méthode de Newton qui consiste à calculer une suite de vecteurs $U_h^{n+1,k} \in \mathbb{R}^{N_h}$, tel que $U_h^{n+1,k+1} = U_h^{n+1,k} + \delta_h$, où $\delta_h \in \mathbb{R}^{N_h}$, la solution de :

$$\begin{cases} (\alpha M \delta_h, v) + (A_h \delta_h, v) + C(U_h^{n+1,k})(M\delta_h, v) = (\tilde{g}(U_h^{n,k}), v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{N_h}, \\ \delta_h(0) = \delta_{0,h}. \end{cases} \tag{3.57}$$

avec

- $C(U_h^{n+1,k}) = -\dfrac{\partial F(U_h^{n+1,k})}{\partial r}$,
- $\tilde{g} = -\alpha M U_h^{n+1,k} - A_h U_h^{n+1,k} + \tilde{F}(U_h^{n+1,k}) + g(U_h^n)$.

On note $C_\infty = \|c(x)\|_\infty$.

On a :

$$\begin{aligned} (\alpha M\delta_h, \delta_h) + (A_h\delta_h, \delta_h) + (C(U_h^{n+1,k})M\delta_h, \delta_h) &\geq \alpha\|\delta_h\|_2^2 + \|\nabla\delta_h\|_2^2 - C_\infty\|\delta_h\|_2^2 \\ &\geq (\alpha - C_\infty)\|\delta_h\|_2^2 + \|\nabla\delta_h\|_2^2. \end{aligned}$$

Si $\alpha - C_\infty \geq 0$ alors $(\alpha M\delta_h, \delta_h) + (A_h\delta_h, \delta_h) - (\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial r}\delta_h, \delta_h) \geq \|\nabla\delta_h\|^2$. Ce qui implique que le problème (3.57) est bien posé.

Si $\alpha - C_\infty \leq 0$, alors

$$\begin{aligned} (\alpha M\delta_h, \delta_h) + (A_h\delta_h, \delta_h) + (C(U_h^{n+1,k})M\delta_h, \delta_h) &\geq (\alpha - C_\infty)C(\Omega)^2\|\nabla\delta_h\|_2^2 + \|\nabla\delta_h\|_2^2 \\ &\geq \left((\alpha - C_\infty)C(\Omega)^2 + 1\right)\|\nabla\delta_h\|_2^2. \end{aligned}$$

On en conclut que le problème (3.57) est elliptique si $((\alpha - C_\infty)C(\Omega)^2 + 1) > 0$, où $C(\Omega) = \dfrac{\text{diam }(\Omega)}{c_0}$, avec $c_0 = \sqrt{2}$ en 1D et π en 2D.

C'est à dire, le problème (3.57) est elliptique si diam $(\Omega) \leq \dfrac{c_0}{\sqrt{c_\infty - \alpha}}$.

Estimation du pas de temps en fonction du diamètre des sous-domaines

On passe maintenant à la méthode de décomposition de domaine de Schwarz décrite dans les chapitres précédents :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega_i}$.
- $\Omega_i \cap \Omega_j = \Omega_{i,j},\ i = 1, ..., m$, si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$.
- On notera $\partial\Omega_i \cap \Omega_j = \Gamma_{i,j},\ i = 1, ..., m$, si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$.
- diam $(\Omega_i) \leq \dfrac{c_0}{\sqrt{c_\infty - \alpha}}$, si $c_\infty \geq \alpha$.

Cette inégalité implique que, pour $C_\infty - \alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{C_\infty - \alpha} &< \frac{c_0}{\text{diam } (\Omega_i)},\ i = 1, ..., m \\
\Rightarrow \quad C_\infty - \alpha &< \frac{c_0^2}{\text{diam } (\Omega_i)^2},\ i = 1, ..., m \\
\Rightarrow \quad -\alpha &< \frac{c_0^2}{\text{diam } (\Omega_i)^2} - C_\infty,\ i = 1, ..., m \\
\Rightarrow \quad \alpha &> C_\infty - \frac{c_0^2}{\text{diam } (\Omega_i)^2},\ i = 1, ..., m.
\end{aligned}$$

Comme $\alpha = \dfrac{2}{\tau_n}$, on obtient, pour $\tau_n > \dfrac{2}{C_\infty}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\tau_n} &> C_\infty - \frac{c_0^2}{\text{diam } (\Omega_i)^2}\ i = 1, ..., m \\
\Rightarrow \quad \frac{\tau_n}{2} &< \frac{1}{C_\infty - \frac{c_0^2}{\text{diam } (\Omega_i)^2}}\ i = 1, ..., m \\
\Rightarrow \quad \tau_n &< \frac{2}{C_\infty - \frac{c_0^2}{\text{diam}(\Omega_i)^2}}\ i = 1, ..., m. \\
\Rightarrow \quad \tau_n &< \frac{2}{p\|U_h^{n+1,k}\|_\infty^{p-1} - \frac{c_0^2}{\text{diam}(\Omega_i)^2}}\ i = 1, ..., m. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Méthode de Schwarz

On définit les espaces d'approximation locale associés à la décomposition du domaine géométrique et à la méthode de Schwarz :

— $V_h^i = \{p \in C^0(\Omega_i); p_{|T} \in \mathbb{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_{h,i}\}$,

— $X_{h,0}^i = V_h^i \cap H_0^1(\Omega)$.

En vérifiant l'hypothèse (3.58), l'algorithme de la décomposition de domaine est reformulé comme suit, pour une fonction d'initialisation $U_h^{n+1,0}$ définie dans V_h, on calcule, pour $l \geq 0$, la suite des solutions δ_h^{l+1}, dans V_h telle que :

$$\delta_h^{l+1} = \delta_h^l + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_{h,i}^l,$$

où $\tilde{\delta}_{h,i}^l$ dénote l'extension de $\delta_{h,i}^l$ par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_i$. La fonction $\delta_{h,i}^{l+1}$ est la solution du problème suivant, pour $i = 1, ..., m$: En commençant par une donnée initiale $\delta_{h,i}^0$, on

résout, pour $l \geq 0$ jusqu'à convergence les problèmes suivants :

$$\begin{cases} (\alpha M\delta_{h,i}^{l+1}, v) + (A_h\delta_{h,i}^{l+1}, v) + C(U_{h,i}^{n+1,k})(M\delta_{h,i}^{l+1}, v) = (\overline{g}(U_{h,i}^{n,k}), v) & \forall v \in X_{h,0}^i, \\ \delta_{h,i}^{l+1} = \delta_{h,i+1}^{l,} & \text{sur } \Gamma_{i,i+1} \\ \delta_{h,i}^{l+1} = \delta_{h,i-1}^{l+1} & \text{sur } \Gamma_{i,i-1}, \\ \delta_{h,i}^{l+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.59}$$

En résumant, le problème (3.57) est bien défini si :

i) $\alpha - C_\infty > 0$, c'est à dire, $\tau_n < \dfrac{2}{p\|U_h^{n+1,k}\|_\infty^{p-1}}$, (par définition de τ_n et α). ou bien si,

ii)

$$\tau_n < \frac{2}{p\|U_h^{n+1,k}\|_\infty^{p-1} - \frac{c_0^2}{\text{diam}(\Omega_i)^2}} \; i = 1, ..., m. \tag{3.60}$$

Il apparaît donc que la méthode de décomposition de domaines nous permet de considérer un pas de temps plus grand que le pas de temps établi par Chen. En effet, plus on diminue la taille de sous-domaine, plus on peut accroître la taille du pas de temps.

Remarque 3.3.6. *Pour les mêmes raisons mentionnées dans le chapitre 1 et 2, en satisfaisant les hypothèses d'ellipticité du problème (3.57), la vitesse de convergence de la méthode de Newton est d'ordre 2 si $p > 2$, et elle est d'ordre p si $1 < p \leq 2$.*

En comparant notre résultat avec celui de Chen [37], on remarque que dans le cas où il n'y a pas d'explosion, grâce à la méthode de décomposition de domaine, on peut considérer un pas de temps plus grand que le pas de temps établi par Chen qui vérifie (3.58). En contre partie, si la solution explose, les estimations du pas de temps sont pratiquement similaires, ils sont adaptés à la norme $\|U_h^{n+1,k}\|_\infty^{p-1}$.

Description de l'algorithme classique :

Après une discrétisation en temps et en espace du problème (3.31), on se propose de résoudre à chaque pas de temps le problème stationnaire (3.41) :

1) On fixe un pas de temps τ_n qui vérifie (3.58),
2) On calcule $U_{0,h}$ une approximation de la donnée initiale.
   - À chaque étape de temps n, on linéarise le problème discret (3.41), par la méthode de Newton :
   - pour $k = 1, ...,$ convergence,
     on calcule la suite des solutions approximatives $U_h^{n,k+1} = U_h^{n,k} + \delta$ où δ la

solution du problème linéaire (3.57). Pour cet objectif, on applique la méthode de Schwarz pour garantir l'ellipticité de ce problème sur chaque sous-domaine. On note m le nombre maximale de sous-domaines.

i) On calcule $C_\infty = p\|U_h^{n,k}\|_\infty^{p-1}$, et on détermine le nombre de sous-domaines selon l'hypothèse :

$$\text{diam } (\Omega_i) < \frac{c_0}{\sqrt{C_\infty - \dfrac{2}{\tau_n}}} \text{ pour }, i = 1...m, \text{et } C_\infty > \frac{2}{\tau_n}. \tag{3.61}$$

ii) Pour $i = 1, ...m$,
on commence par la fonction d'initialisation $\delta_{h,i}^0 = 0$,
pour $l = 1, ...$ convergence,
on calcule les solutions $\delta_{h,i}^{l+1}$, de sous-problèmes linéaires obtenus par l'algorithme de Schwarz (3.59).

À la fin de la boucle en l, on obtient la solution $\delta_h = \delta_{h,i}$ sur Ω_i pour $i = 1, .., m$.
L'approximation discrète de la solution est obtenue à chaque pas de temps.

Remarque 3.3.7. *La vitesse de convergence de la méthode de Newton appliquée au problème (3.41) est quadratique si $p \geq 2$, et d'ordre p si $1 \leq p < 2$.*

Résultats numériques pour l'algorithme classique :

Cas de non explosion

Dans le but de tester l'algorithme présenté ci-dessus, on se propose de résoudre premièrement un problème de type (3.31) en une dimension dont on connait la solution exacte. On considère en particulier :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = u''(x,t) + \mu \mid u(x,t) \mid^p + f(x,t) & \text{dans }]0,1[\times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans }]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T], \end{cases} \tag{3.62}$$

avec $p = 6,\ \mu = 7.6,$ et $u(x,t) = t\sin(\pi x)$.
On commence par une donnée initiale nulle et on résout, $n = 1, ...10$, le problème approché (3.57) associé au problème (3.62) pour un pas de discrétisation spatiale $dx = 0.5\ 10^{-2}$ et un pas temporel $\tau = 0.1$.
Afin d'évaluer notre résultat, on trace l'évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itérations de la méthode de Newton et celle de la solution exacte pour quelques étapes en temps.

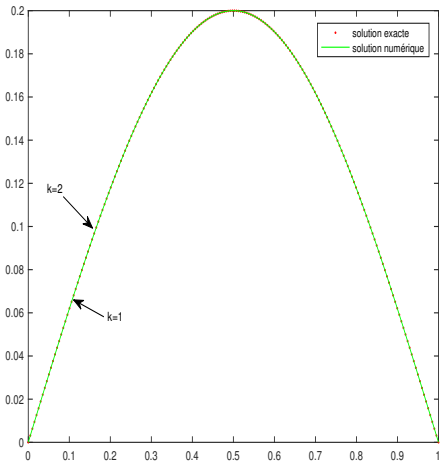


FIGURE 3.1 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itérations de Newton notées k au bout de 2 itérations en temps

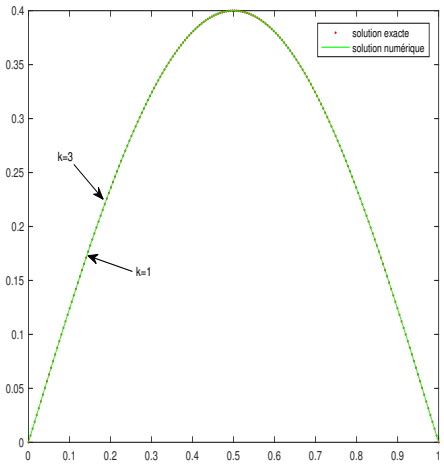


FIGURE 3.2 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itération de Newton k au bout de 4 itérations en temps

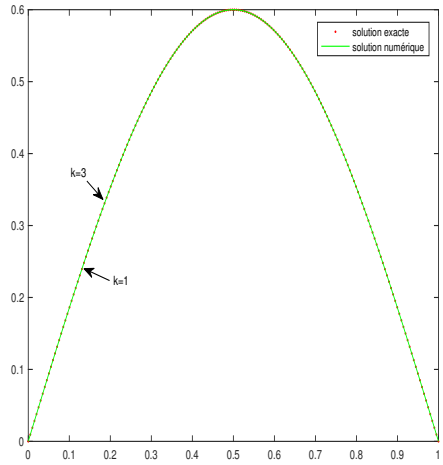


FIGURE 3.3 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itérations de Newton k au bout de 6 itérations en temps

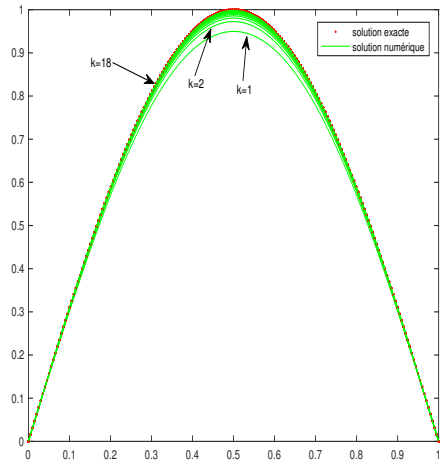


FIGURE 3.4 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itérations de Newton k au bout de 10 itérations en temps

Dans les figures ci-dessus, on a tracé la solution approchée de (3.62) et la solution exacte au bout de quelques itérations en temps pour visualiser la convergence de la solution numérique vers la solution exacte à différents pas de temps. Au final, on trace la solution exacte, Figure 3.5, et la solution approchée, Figure 3.6, à chaque itération en temps et en

espace :

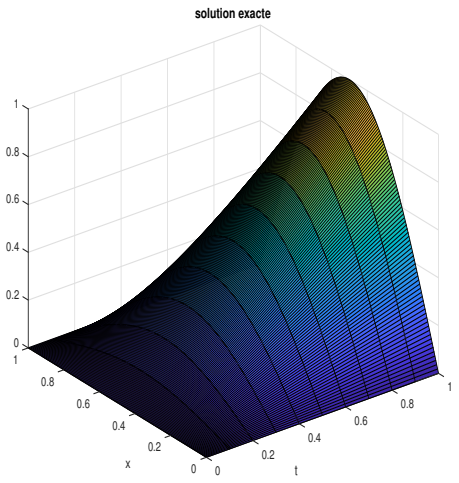


FIGURE 3.5 – Solution exacte du problème (3.62) au bout de 10 itérations en temps

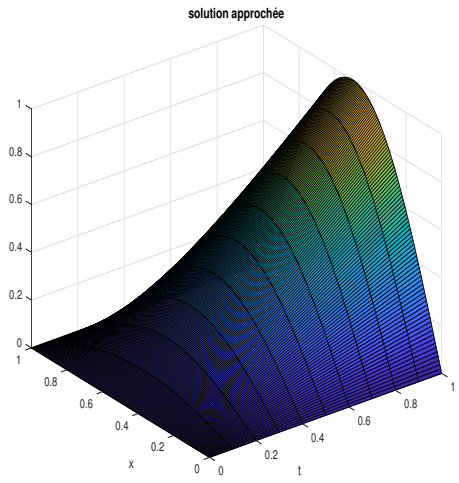


FIGURE 3.6 – Solution approchée du problème (3.62) au bout de 10 itérations en temps

Pour mieux décrire les étapes considérées pour obtenir les résultats ci-dessus, on considère le tableau suivant :

# Itération de temps : n	1	2	3	...	9	10
# Itération de Newton	2	2	2	...	4	18
$\|\delta_h\|_\infty$	1.710^{-7}	9.810^{-6}	8.110^{-5}	...	3.710^{-6}	$7.6\ 10^{-5}$
$C_\infty = p\ \mu\ \|u_h^n\|_\infty^{p-1}$	$5\ 10^{-4}$	0.0142	0.11	...	29.93	45.47
Nombre de s-domaines	1	1	1	...	2	4
$\|u_h^n - u\|_2$	$4.8\ 10^{-7}$	1.610^{-6}	2.910^{-6}	...	$4.4\ 10^{-5}$	$3.9\ 10^{-4}$

TABLE 3.1 – Comportement de l'algorithme calculant la solution numérique du problème (3.62)

Ce tableau illustre les itérations de la méthode de Newton effectuées pour atteindre la convergence de la solution approchée vers la solution exacte en indiquant le nombre de sous-domaine nécessaire pour chaque pas temporel.
De plus, l'erreur de la convergence numérique est compatible avec l'erreur théorique.
En effet, pour chaque itération en temps n, on a vérifié numériquement pour $h = 0.5\ 10^{-2}$ et $\tau_n = 0.1$, que :

- $\|u_h^n - u(t^n)\|_2 \leq C\left(\|u_{0,h} - u(t^0)\|_2\right) + C(u)\left(h^2 + \tau_n^2\right) \leq C(u)\left(h^2 + \tau_n^2\right).$

Par ailleurs, la non linéarité de la solution approchée augmente au cours du temps et au cours des itérations de Newton, ce qui engendre l'augmentation automatique du nombre de sous-domaines, qui est donné dans le tableau suivant, en particulier, à la dernière itération en temps :

# Itération de Newton	1	2	3	...	17	18
$\|\delta_h\|_\infty$	0.031	0.024	$8.6\ 10^{-3}$	...	9.510^{-5}	$7.6\ 10^{-5}$
C_∞	35.52	40.42	42.3	...	45.45	45.47
Nombre de s-domaines	3	4	4	...	4	4
$\|u_h^n - u\|_2$	0.028	0.014	$9\ 10^{-3}$	...	$4.3\ 10^{-4}$	3.910^{-4}

TABLE 3.2 – Évolution du nombre de sous-domaines pour $n = 10$ pour le cas du problème (3.62)

A cette dernière étape en temps ($n = 10$), à la première itération de la méthode de Newton, on a considéré 3 sous-domaines, puis à partir de l'itération 2 on a besoin de 4 sous-domaines.
D'après le tableau 3.2, on conclut que l'évolution du nombre de sous-domaines est liée à l'évolution de la non linéarité considérée, car il faut vérifier à chaque étape temporelle et à chaque itération de la méthode de Newton l'hypothèse de la décomposition de domaine :

$$\text{diam } (\Omega_i) < \frac{c_0}{\sqrt{C_\infty - \dfrac{2}{\tau_n}}}, \quad \text{pour } i = 1...m, \text{ et } C_\infty > \frac{2}{\tau}.$$

Par ailleurs, afin de tester l'utilité de la décomposition de domaine, on se propose de résoudre le problème (3.62) pour les mêmes paramètres mais en appliquant la méthode de Newton sans utiliser la méthode de décomposition de domaine. On trace dans les figures suivantes le comportement de la solution approchée et de la solution exacte pour quelques pas de temps :

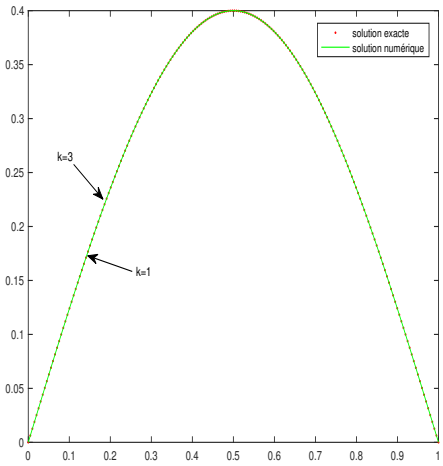


FIGURE 3.7 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itérations de Newton k au bout de 2 itérations en temps

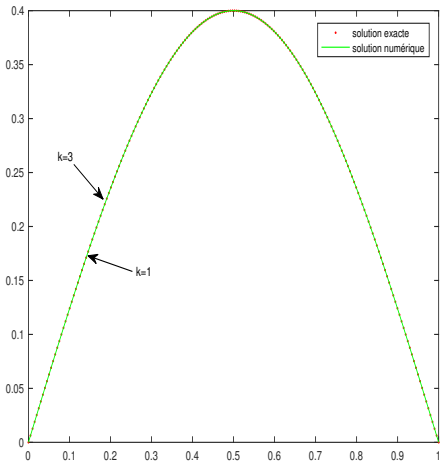


FIGURE 3.8 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itérations de Newton k au bout de 4 itérations en temps

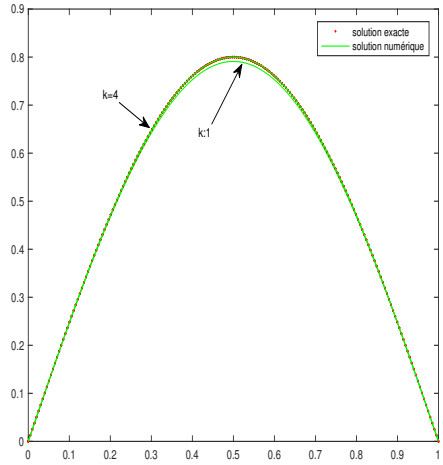


FIGURE 3.9 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itérations de Newton k au bout de 6 itérations en temps

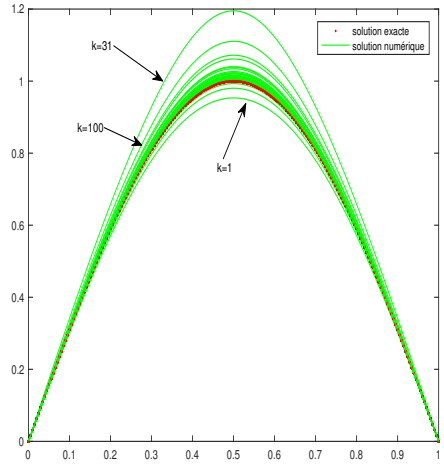


FIGURE 3.10 – Évolution de la solution approchée du problème (3.62) en fonction des itération de Newton k au bout de 10 itérations en temps

On constate dans la Figure 3.10 que la solution approchée du problème (3.62) croît, puis elle décroît au cours des itérations de Newton. On remarque alors que la méthode de Newton diverge.

Pour mieux visualiser le comportement de l'algorithme de Newton sans la décomposition

de domaine, ainsi que l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée obtenue pour chaque pas de temps, on consulte le tableau ci-dessous :

# Itération de temps : n	1	2	3	...	8	9	10
# Itération de Newton	2	2	2	...	4	4	100
$\|\delta_h\|_\infty$	1.710^{-7}	9.810^{-6}	8.110^{-5}	...	1.610^{-8}	3.710^{-6}	0.0015
$\|u_h^n - u\|_2$	$4.8\ 10^{-7}$	1.610^{-6}	2.910^{-6}	...	$1.8\ 10^{-5}$	$4.4\ 10^{-5}$	0.004

TABLE 3.3 – Comportement de l'algorithme calculant la solution numérique le problème (3.62) sans décomposition de domaine pour $\tau = 0.1$

On vérifie qu'au bout de la dixième itération en temps l'erreur en norme L^2 entre la solution exacte et la solution approchée est d'ordre 10^{-3} avec 100 itérations de la méthode de Newton, ce qui implique que la méthode numérique considérée ne converge pas pour ce choix de pas de temps ($\tau = 0.1$). On peut expliquer cette divergence par le fait qu'à la dernière étape en temps (n=10), on a :

$$\tau = 0.1 > \frac{2}{C_\infty} = \frac{2}{45.47} = 0.022,$$

et, dans ce cas, le problème (3.57) n'est plus elliptique et la méthode de Newton diverge. Donc, la méthode de décomposition nous a permis d'utiliser un pas de temps plus long en assurant la convergence de la méthode de Newton. En effet, à cette étape de temps on a 4 sous-domaines, donc $\text{diam}(\Omega_i) = \frac{1}{4}$.Par suite, on a vérifié numériquement que :

$$\frac{2}{C_\infty} = 0.522 < \tau = 0.1 < \frac{2}{C_\infty - \frac{2}{\text{diam}(\Omega_i)^2}} = 0.15,$$

ce qui garantie la coercivité du problème (3.59) sur chaque sous-domaine.
Par ailleurs, si on choisit un pas de temps plus petit, par exemple, si on prend $\tau = 0.05$, alors, on obtient le résultat suivant :

# Itération de temps : n	1	2	3	...	18	19	20
# Itération de Newton	2	3	3	...	3	4	4
$\|\delta_h\|_\infty$	1.510^{-6}	1.210^{-12}	2.110^{-11}	...	9.710^{-6}	5.910^{-10}	4.310^{-9}
$\|u_h^n - u\|_2$	0.0043	0.0026	0.0016	...	1.810^{-4}	3.710^{-4}	9.910^{-4}

TABLE 3.4 – Comportement de l'algorithme calculant la solution numérique sans décomposition de domaine pour $\tau = 0.05$ dans le cas du problème (3.62)

Maintenant si on considère un pas de temps $\tau = 0.01$, on a les résultats présentées dans le tableau suivant :

# Itération de temps : n	1	2	3	...	98	99	100
Itération de Newton	3	3	3	...	4	4	4
$\|\delta_h\|_\infty$	1.910^{-17}	5.610^{-17}	$4.8\ 10^{-16}$	...	3.1810^{-10}	4.310^{-9}	9.610^{-8}
$\|u_h^n - u\|_2$	$1.4\ 10^{-7}$	$5.2\ 10^{-7}$	$1.05\ 10^{-6}$	...	$3.9\ 10^{-5}$	7.510^{-5}	2.0310^{-4}

TABLE 3.5 – Comportement de l'algorithme calculant la solution numérique du problème (3.62) sans décomposition de domaine pour $\tau = 0.01$

On remarque que pour $\tau = 0.01$, et $\tau = 0.05$, on atteint la convergence souhaitée, sans avoir besoin de la décomposition de domaine car on a, pour des deux choix des pas de temps : $\tau_n < \dfrac{2}{C_\infty}$, et donc le problème de Newton est bien posé à chaque itération en temps. Mais en contre partie, on a besoin d'effectuer plus d'itérations en temps.
Passons maintenant à un cas plus général, où la solution est inconnue et la fonction source une somme des mesures ponctuelles :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = u''(x,t) + \mu \mid u(x,t) \mid^p + f(x,t) & \text{dans }]0,1[\times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans }]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T], \end{cases} \tag{3.63}$$

$$f(x,t) = 100t(\delta_{0.5} + \delta_{0.8} + \delta_{0.2}).$$

On prend $N = 300,\ p = 4,\ \mu = 1200,\ \tau = 0.2,\ T = 4$, et $u_0(x) = 0.01x(1-x)$.
En implémentant notre code en 20 itérations en temps, on obtient la courbe suivante :

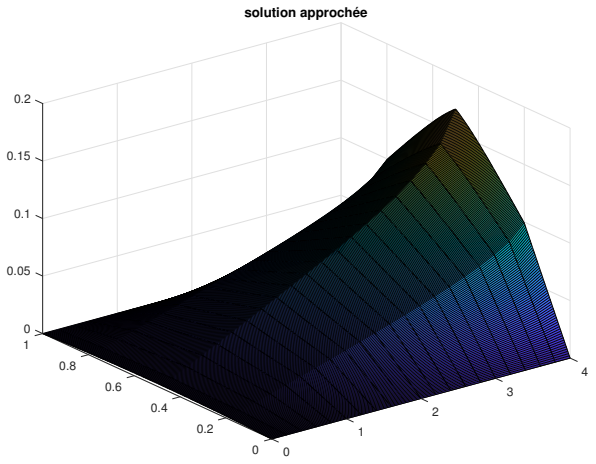


FIGURE 3.11 – Evolution de la solution approché du problème (3.63) au cour de 20 itérations en temps

Le tableau suivant décrit le comportement de l'algorithme considéré pour calculer la solution approchée du problème (3.63) ci-dessus :

# Itération de temps n	1	2	.3	...	19	20
# Itération de Newton	2	2	2	...	3	4
$\|\delta_h\|_\infty$	7.910^{-10}	2.710^{-7}	1.02910^{-6}	...	9.5310^{-5}	9.810^{-5}
# Nombre de s-domaines	1	1	1	...	2	3

TABLE 3.6 – Comportement de l'algorithme calculant la solution numérique du problème (3.63)

Pour cet exemple, on a commencé la décomposition de domaine qu'à partir de la 19ème itération en temps, où le nombre de sous-domaines vaut 2. Puis à la dernière itération temporelle ce nombre varie de 2 à 3. En effet, à la première étape de Newton on commence avec 2 sous-domaines, à la troisième itération, on constate qu'il est nécessaire de décomposer le domaine en 3 sous-domaines pour que le problème de Newton soit bien posé et cela persiste jusqu'à la cinquième itération. A cette étape de Newton, l'évolution de la différence en norme infinie entre deux itérés successifs est d'ordre 10^{-5} et la mise à jour dans l'algorithme de Schwarz est d'ordre 10^{-5}.
Pour mieux décrire cette évolution du nombre de sous-domaines, on présente les tableaux suivants :

Itération de Newton	1	2	3
$\|\delta_h\|_\infty$	0.0127	0.0011	9.310^{-5}
C_∞	14.03	14.35	14.38
Nombre de s-domaines	2	2	2

TABLE 3.7 – Évolution du nombre de sous-domaines pour $n = 19$ dans le cas du problème (3.63)

Itération de Newton	1	2	3	4
$\|\delta_h\|_\infty$	0.02	0.005322	5.810^{-5}	9.810^{-5}
C_∞	21.4	23.5	23.74	23.78
Nombre de s-domaines	2	3	3	3

TABLE 3.8 – Évolution du nombre de sous-domaines pour $n = 20$ dans le cas du problème (3.63)

Le nombre de sous-domaines varie au cours des itérations de temps n, et en fonction des itérations de Newton comme il est montré dans le tableau (3.8). A partir de ces exemples, on a vérifié numériquement que les méthodes présentées convergent à chaque itération temporelle.

Remarque 3.3.8. *Le choix du pas temps $\tau = 0.2$ garantit l'ellipticité du problème linéaire obtenu par la méthode de Newton, à chaque étape temporelle. En effet :*

- *pour $n = 1 : 18$, on a $\frac{2}{C_\infty} > \tau$, par exemple pour $n = 18$, on a $\frac{2}{C_\infty} = 0.24 > \tau = 0.2$,*
- *pour $n = 19$ et $n = 20$, on a $\frac{2}{C_\infty} < \tau < \frac{2}{C_\infty - \frac{2}{diam_{(\Omega_i)^2}}}$, En effet :*

  — *pour $n = 19$, le nombre de sous-domaines est 2 d'où, $diam(\Omega_i) = \frac{1}{2}$ et on a $\frac{2}{C_\infty} = \frac{2}{14.35} = 0.13 < \tau = 0.2 < \frac{2}{C_\infty - \frac{2}{diam_{(\Omega_i)^2}}} = \frac{2}{14.35 - 2\times 2^2} = 0.31$.*

  — *pour $n = 20$, on a 3 sous-domaines, donc $diam(\Omega_i) = \frac{1}{3}$ et on a $\frac{2}{C_\infty} = \frac{2}{23.74} = 0.084 < \tau = 0.2 < \frac{2}{C_\infty - \frac{2}{diam_{(\Omega_i)^2}}} = \frac{2}{23.74 - 2\times 3^2} = 0.34$.*

Cas d'explosion

En commençant par une donnée initiale $u_0 = 10^3 sin(\pi x)$, on résout le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = u''(x,t) + \mid u(x,t) \mid^p & \text{dans }]0,1[\times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans }]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T], \end{cases} \tag{3.64}$$

avec $p = 2$.
On considère un pas spatial h= 0.47 10^{-2} et un pas temporel adaptatif $\tau_n = \tau \min(1, \frac{1}{p\|u^n\|_\infty^{p-1}})$.
On obtient les résultats suivants :

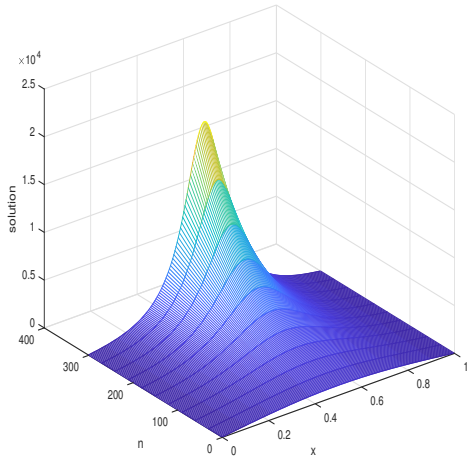


FIGURE 3.12 – Évolution de la solution approchée du problème (3.64) au bout de 300 itérations en temps au $T_{max}^{Num} = 9.5\ 10^{-4}$

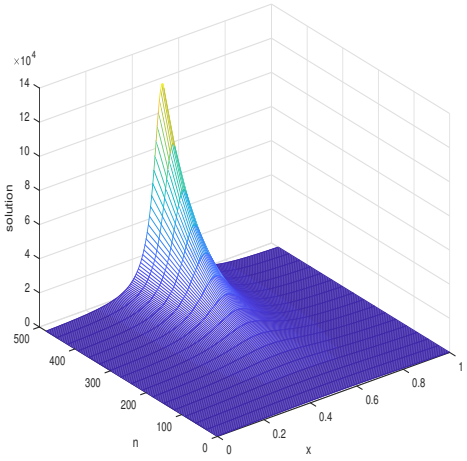


FIGURE 3.13 – Évolution de la solution du problème (3.64) en 483 itérations en temps au $T_{max}^{Num} = 1.001\ 10^{-3}$

Pour ce choix adaptatif de pas de temps τ_n, la méthode de Newton converge sans introduire la méthode de décomposition de domaine, car il assure que $\tau_n < \dfrac{2}{C_\infty} = \dfrac{2}{p\|U_h^n\|_\infty^{p-1}}$.
Par ailleurs, à la dernière étape en temps, on a :

- Le temps final numérique $T_{max}^{Num} = 1.001\ 10^{-3}$.
- $\|U_h^n\|_\infty = 1.226\ 10^5$
- La méthode de Newton converge en 3 itérations avec une différence entre deux itérés successif en norme infinie d'ordre 10^{-10}.

Tous ces résultats numériques sont compatibles avec la théorie :
Le temps final vérifie l'estimation établie par Chen [37] :

$$\frac{1}{(p-1)\parallel u_0 \parallel_\infty^{p-1}} = 10^{-3} \leq T_{max}^{Num} \leq \frac{1}{(p-1)\parallel u_0 \parallel_1^{p-1}} = 1.5\ 10^{-3}. \tag{3.65}$$

En comparant ce temps final aussi avec l'estimation de temps d'explosion étudiée dans le cas théorique (3.30) on a $\dfrac{2}{(p-1)J(t^0)^{p-1}} = 0.0028$, donc T_{max}^{Num} vérifie aussi (3.30) :

$$T_{max}^{Num} < \frac{2}{(p-1)J(t^0)^{p-1}}. \tag{3.66}$$

L'algorithme classique de la décomposition de domaine pour résoudre les problèmes d'évolution du type (3.31) s'agit d'abord, de discrétiser d'une manière uniforme l'intervalle de temps, et à chaque étape, un problème d'espace uniquement résolu en utilisant la méthode de décomposition de domaine. Donc, le principal inconvénient de cet algorithme est qu'il

nécessite la même discrétisation temporelle dans chaque sous-domaine.Donc pour mieux résoudre ce problème, on va considérer un autre algorithme, nommé algorithme pararéel [59, 2, 70, 69].

3.3.6 Algorithme pararéel

L'algorithme pararéel est introduit pour la première fois en 2001 par J.-L. Lions, Y. Maday et G. Turinici [85]. Il s'agit d'une parallélisation dans le temps pour la simulation de systèmes d'équations différentielles ordinaires ou d'équations aux dérivées partielles dépendant du temps. Contrairement à la stratégie utilisée dans les méthodes classiques de décomposition de domaine qui consiste à discrétiser la variable temps, pour ensuite appliquer une méthode de décomposition de domaine au problème statique qui apparaît à chaque itération en temps, l'algorithme pararéel consiste à décomposer le domaine en sous-domaines Ω_i et ensuite, à chaque itération, résoudre le problème parabolique sur chaque sous-domaine $\Omega_i \times]0, T]$ de manière indépendante avec un pas de temps adapté au sous-domaine. Entre chaque itération une communication régulière des données à l'interface entre deux sous-domaines permet d'obtenir la convergence de la méthode. Cette méthode est tout à fait adaptée à des problèmes où l'évolution de la solution n'est pas uniforme sur tout le domaine, par exemple dans le cas d'une explosion ponctuelle de la solution.
L'algorithme pararéel a reçu de plus en plus d'attention vu qu'il est plus rapide que les algorithmes traditionnels. Une version améliorée a été présentée par Bal en 2005 [19]. Cet algorithme a été appliqué avec succès à une variété de problèmes, tels que :

- problèmes paraboliques en 2007 étudiés par Gander et Vandewalle [60], puis en 2016 par Ruprecht.al [111], Hassan.al [70, 69] en 2018, puis , Ahmed.al [2] en 2019.
- problèmes hyperboliques par Dai et Maday en 2013 [42],
- problèmes de contrôle optimal étudiés par Du et al en 2013 [48] et par Maday et al en 2007 [131], ensuite par Mathew et al en 2010 [89],
- équations de Navier- Stokes, Trindade et Pereira [130] en 2006.

En suivant la stratégie de l'algorithme pararéel, on se propose, comme première étape, d'appliquer la méthode de décomposition de domaine au problème initial :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = u''(x,t) + F(u(x,t)) + f(x,t) & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T = \partial\Omega \times]0,T], \end{cases} \tag{3.67}$$

avec $F(u(x,t)) =\mid u(x,t) \mid^p$ et $p > 1$.
Alors, pour une fonction d'initialisation u^0, on résout, pour $l = 1, ...$jusqu'à convergence de la méthode de Schwarz, les sous-problèmes d'évolution suivants sur chaque sous domaine Ω_i, $i = 1, ..., m$:

$$\begin{cases} \partial_t u_i^{l+1}(x,t) - (u_i^{l+1})''(x,t) = F(u_i^{l+1}(x,t)) + f(x,t) & \text{dans } \Omega_i \times]0, T_{max}[, \\ u_i^{l+1} = u_{i+1}^l & \text{sur } \Gamma_{i,i+1} \times]0, T_{max}[\\ u_i^{l+1} = u_{i-1}^{l+1} & \text{sur } \Gamma_{i,i-1} \times]0, T_{max}[, \\ u_i^{l+1}(x,0) = u_{i,0}^{l+1}(x) & \text{sur } \Omega_i \end{cases} \tag{3.68}$$

Remarque 3.3.9. *En se basant sur le travail de Gander et al [32], la solution itérative u_i^{l+1}, solution du problème (3.68), converge vers u solution du problème (3.67).*

Pour résoudre numériquement le problème (3.68), on utilise la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale et la méthode de Crank-Nicholson pour la discrétisation temporelle.
Alors, pour un vecteur d'initialisation $U_h^{n+1,0}$ défini dans V_h, approximation de U_h^0, on calcule, pour $l \geq 0$, la suite des solutions $U_h^{n+1,l+1}$, dans V_h telle que :

$$U_h^{n+1,l+1} = U_h^{n+1,l} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{U}_{h,i}^{n+1,l},$$

où $\tilde{U}_{h,i}^{n+1,l}$ dénote l'extension de $U_{h,i}^{n+1,l}$ par 0 dans $\Omega \backslash \Omega_i$. La fonction $U_{h,i}^{n+1,l+1}$ est la solution du problème suivant, pour $i = 1, ..., m$:

$$\begin{cases} (\alpha_i M U_{h,i}^{n+1,l+1}, v) + (A_h U_{h,i}^{n+1,l+1}, v) - (F(U_{h,i}^{n+1,l+1}), v) = (g(U_{h,i}^{n,l+1}), v) & \forall v \in X_{h,0}^i, \\ U_{h,i}^{n+1,l+1} = U_{h,i+1}^{n+1,l} & \text{sur } \Gamma_{i,i+1} \times]0, T_{max}[\\ U_{h,i}^{n+1,l+1} = U_{h,i-1}^{n+1,l+1} & \text{sur } \Gamma_{i,i-1} \times]0, T_{max}[, \\ U_{h,i}^{n+1,l+1}(x,0) = 0 & \text{sur } \Omega_i \end{cases} \tag{3.69}$$

où $\alpha_i = \dfrac{2}{\tau_i}$, avec τ_i le pas de temps considéré sur les sous-domaine Ω_i, $i = 1, ..., m$.
Pour résoudre ce type du problème (3.69), on applique la méthode de Newton. En commençant par une donnée initiale $U_{h,i}^{n+1,l+1,0}$, on construit, pour $k > 0$ une suite de solutions $U_{h,i}^{n+1,l+1,k+1} = U_{h,i}^{n+1,l+1,k} + \delta_{h,i}$, $i = 1, ...m$, solution du problème suivant :

$$\begin{cases} (\alpha_i M \delta_{h,i}, v) + (A_h \delta_{h,i}, v) + C(U_{h,i}^{n+1,l+1,k})(M\delta_{h,i}, v) = (\overline{g}(U_{h,i}^{n+1,l+1,k}), v) & \forall v \in X_{h,0}^i, \\ \delta_{h,i} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.70}$$

où

- $C(U_{h,i}^{n+1,l+1,k}) = -\dfrac{\partial F(U_{h,i}^{n+1,l+1,k})}{\partial r}$.

- $(\overline{g}(U_{h,i}^{n+1,l+1,k}), v) = -(\alpha M U_{h,i}^{n+1,l+1,k}, v) - (A_h U_{h,i}^{n+1,l+1,k}, v) + F(U_{h,i}^{n+1,l+1,k}, v) + (g(U_{h,i}^{n,l+1}), v)$

On note $C_{\infty,i} = \|C(U_{h,i}^{n+1,l+1,k})\|_\infty$.

On considère, pour chaque sous domaine Ω_i, $i = 1, ..., m$, un pas de temps τ_i de manière à garantir l'ellipticité de chaque sous problème (3.70). C'est à dire :

- $$\tau_i < \frac{2}{C_{\infty,i}}, \tag{3.71}$$

  ou bien :

- $$\tau_i < \frac{2}{C_{\infty,i} - \frac{c_0^2}{\text{diam}(\Omega_i)^2}}. \tag{3.72}$$

Remarque 3.3.10. *Si les pas de temps τ_i vérifient sur chaque sous-domaine Ω_i, $i = 1, ..., m$, les hypothèses (3.71) ou bien (3.72), alors la méthode de Newton converge d'une façon quadratique si $p > 2$, et avec une vitesse d'ordre p si $1 \leq p \leq 2$.*

Description de l'algorithme

On peut traduire l'algorithme présenté comme suit :

1) On fixe m le nombre de sous-domaines.
2) • pour $i = 1, ...m$,

   On donne n_i le nombre d'itération maximale de temps sur chaque sous-domaine, on note $n = n_i$ sur Ω_i et on définit $T_{max}^{Num} = \sum_{j=1}^{n_i} \tau_j,\ i = 1, ..., m$.

   • À l'instant $t = 0$, on calcule une approximation $\mathbb{P}_1$ de la condition initiale qu'on note U_h^0 et les conditions de transmission sur les bords $\Gamma_{i,j},\ i, j = 1, ..., m$..

3) A ce stade on applique l'algorithme de Schwarz :
   - pour $l = 1, ...$ convergence,
     - pour $i = 1 : m$,
       - pour $n = 1 : n_i$, on résout le problème (3.69) en introduisant la méthode de Newton.
         - Pour $k = 1, ...$, on calcule la suite des solutions $U_{h,i}^{n,l,k+1} = U_{h,i}^{n,l,k} + \delta_{h,i}^n$, où $\delta_{h,i}^n$ solutions des problèmes linéaires (3.70).
         - À la fin de la boucle de Newton, la solution numérique $U_{h,i}^{n,l,k}$ converge vers $U_{h,i}^{n,l}$ sur chaque Ω_i.

- Une fois que $U_{h,i}^{n,l}$ est calculée pour tout n, on met à jour les conditions de transmission sur les interfaces en calculant les interpolations linéaires des $U_{h,i}^{n,l}$, $i = 1 : m$.
- À la fin de la boucle de Schwarz, la solution approchée $U_h^n = U_{h,i}^n$ sur Ω_i.

Remarque 3.3.11. *La difficulté de cet algorithme est de raccorder les solution u_i sur les frontières de sous-domaines. Sarah et al [70, 69] ont présenté une méthode faisant intervenir une correction à partir d'une grille fine, en calculant les valeurs moyennes des données sur les interfaces. Dans notre cas, on a calculé les interpolations linéaires des solutions afin d'obtenir des valeurs approchées des solutions dans le maillage le plus fin.*

Remarque 3.3.12. *L'avantage de cet algorithme réside non seulement dans la possibilité de considérer des pas de temps différents pour chaque sous domaine, mais aussi la possibilité de considérer différents schémas numériques en temps dans différents sous-domaine. [2, 70, 69], contrairement à l'algorithme classique.*

Simulations numériques

Cas de non explosion

On considère, comme exemple, le problème parabolique du type suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = u''(x,t) + \mid u(x,t) \mid^2 + f(x,t) & \text{dans }]0,1[\times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans }]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T], \end{cases} \tag{3.73}$$

Afin de tester la performance de l'algorithme pararéel, on commence par considérer une solution connue de ce problème (3.73), en particulier

$$u(x,t) = (5+t)x(1-x),$$

avec la condition initiale :

$$u_0 = 5x(1-x).$$

On considère ensuite, un pas de discrétisation spatial, dx $= 0.0067$, et une décomposition du domaine $]0,1[$ en 3 sous-domaines $\Omega_i,\ i = 1,2,3$. Puis on introduit une décomposition non uniforme de l'intervalle de temps $]0,T[$, où $T = 1$ sur tout le domaine Ω en n_i itérations temporelles ($i = 1,2,3$). Autrement dit, on associe à chaque sous-domaine un nombre fixe d'itérations temporelles et des pas de temps τ_i de façon à ce que $\tau_i \times n_i = T$. On a choisi en particulier $n_1 = 10,\ n_2 = 30$, et $n_3 = 30$, par suite $\tau_1 = 0.1,\ \tau_2 = 0.0333$ et $\tau_3 = 0.0667$.

Il ressort dans les figures (3.14) et (3.15) que la différence entre la solution exacte et la solution numérique est d'ordre 10^{-4}.

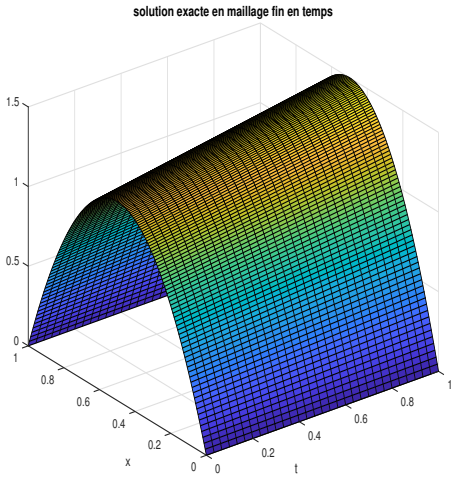


FIGURE 3.14 – Solution exacte du problème (3.73) mono-domaine dans le maillage fin en temps

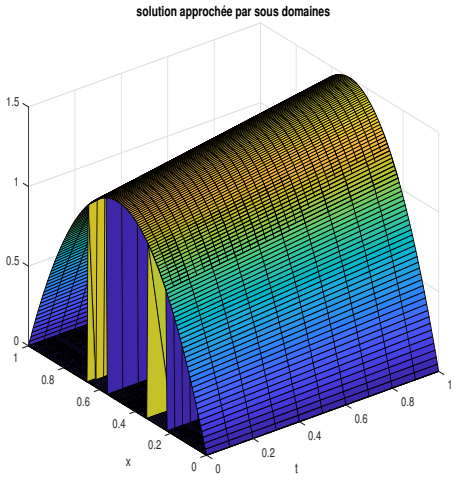


FIGURE 3.15 – solution approchée du problème (3.73) en pas temps différent pour chaque sous-domaine

La Figure 3.15 présente la solution numérique du problème (3.73). Elle est obtenue après 25 itérations de l'algorithme de Schwarz multiplicatif avec une mise à jour de correction en norme L^2 d'ordre 10^{-5}.
Pour mieux visualiser l'évolution de cette solution en fonction des itérations de Schwarz, on la présente dans la Figure 3.16 :

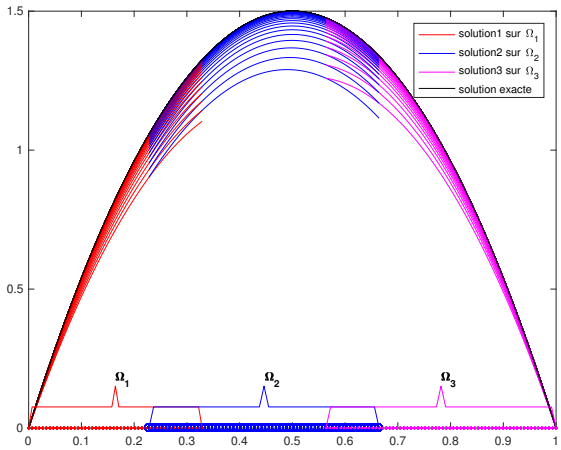


FIGURE 3.16 – Evolution des solutions approchées du problème (3.73) dans les sous-domaines en fonction des itérations de Schwarz à T_{max}^{Num}

On a tracé dans la Figure 3.16 le comportement des solutions à T_{max}^{Num} sur chaque sous domaine Ω_i, $i = 1 : 3$ au cours des étapes de Schwarz jusqu'à atteindre une convergence en norme L^2 d'ordre 10^{-4} vers la solution exacte mono-domaine présentée dans la Figure 3.14.
Pour plus d'informations, on peut consulter le tableau suivant :

# Itération de Schwarz	1	2	...	24	25
$\|u_h^{n,l+1} - u_h^{n,l}\|_2$	0.512	0.02	...	1.210^{-4}	9.810^{-5}
# Itération de Newton sur Ω_1	4	4	...	4	4
$\|\delta_{h,1}\|_2$	4.310^{-16}	1.810^{-15}	...	7.910^{-16}	4.210^{-16}
# Itération de Newton sur Ω_2	4	4	...	4	4
$\|\delta_{h,2}\|_2$	2.810^{-14}	3.610^{-14}	...	9.510^{-14}	2.510^{-14}
# Itération de Newton sur Ω_3	4	4	...	4	4
$\|\delta_{h,3}\|_2$	2.210^{-614}	2.810^{-14}	...	6.1910^{-14}	6.210^{-14}
$\|u_h^n - u\|_2$	0.14	0.11	...	6.510^{-4}	5.0910^{-4}

TABLE 3.9 – Comportement de l'algorithme pararéel à T_{max}^{Num} dans le cas du problème (3.73)

Le tableau 3.9 donne le nombre d'itérations de la méthode de Newton et l'écart en norme L^2 entre deux itérés successifs de cette méthode dans les 3 sous-domaines. On remarque bien la convergence de l'algorithme pararéel.
On trouve aussi dans ce tableau l'évolution de l'erreur en norme L^2 au cours des itérations de l'algorithme de Schwarz.
On trace cette évolution dans la Figure 3.17 :

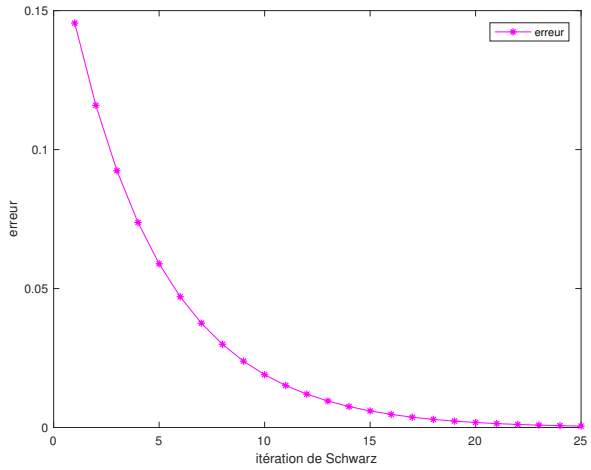


FIGURE 3.17 – Evolution de l'erreur en norme L^2 $\|u_h^n - u\|_2$ dans le cas du problème (3.73)

L'erreur entre la solution exacte et la solution numérique en norme L^2 décroit en fonction des itérations de Schwarz. Elle est d'ordre de 10^{-4}, à l'étape 25.
On passe maintenant à un exemple plus général avec une difficulté supplémentaire.

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = u''(x,t) + \mid u(x,t) \mid^2 + f(x,t) & \text{dans }]0,1[\times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans }]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T], \end{cases} \tag{3.74}$$

On résout le problème (3.74) dans le cas où la solution est inconnue et la fonction source est une somme des fonctions gaussiennes :
$f(x,t) = tx(1-x)(K_0 \exp(\frac{x-x_0}{\sigma})^2 + K_2 \exp(\frac{x-x_0}{\sigma})^2 + K_2 \exp(\frac{x-x_2}{\sigma})^2)$, avec $K_0 = 2\ 10^3$ $x_0 = 0.5$, $\sigma = 2\ 10^{-3}$, $K_1 = K_2 = 10^2$ $x_1 = 0.2$, et $x_2 = 0.8$, comme il est illustré dans la Figure 3.18 :

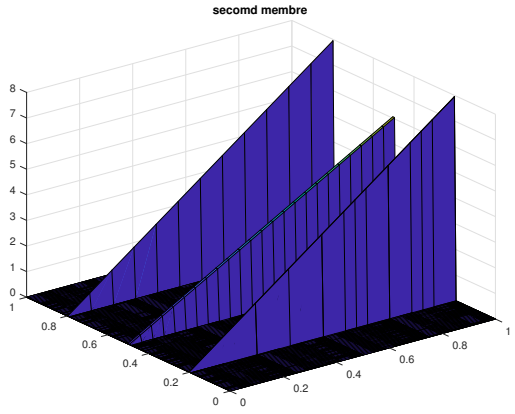


FIGURE 3.18 – La fonction source f en maillage temporel par sous-domaine dans le cas du problème (3.74)

Pour résoudre numériquement le problème (3.74), on discrétise le domaine Ω avec 120 points et on le décompose en 4 sous domaines. On a associé à chaque sous-domaine des pas de temps différents τ_i, tout en assurant l'ellipticité du problème (3.70) sur chaque sous-domaine. Puis on effectue les itérations en temps nécessaires n_i, $(i = 1 : 4)$ pour arriver au même temps final $T_{max}^{Num} = 1$.
On a choisi en particulier $\tau_1 = \tau_4 = 0.083,\ \tau_2 = 0.125, \tau_3 = 0.0417,\ n_1 = n_4 = 12,\ n_2 = 24,$ et $n_3 = 8$. On note $n = n_i$ sur Ω_i.
Ensuite, en partant d'une donnée initiale nulle et en appliquant l'algorithme pararéel jusqu'à atteindre le temps final $T_{max}^{Num} = 1$, on obtient la solution approchée suivante :

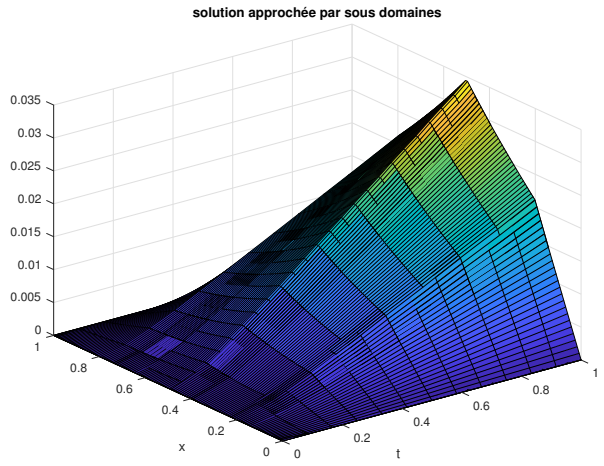


FIGURE 3.19 – Solution approchée du problème (3.73) avec le maillage temporel pour chaque sous-domaine

La solution présentée dans la Figure 3.20 est obtenue après 18 itérations de l'algorithme de Schwarz. En effet, on peut visualiser l'évolution de cette solution approchée au temps final T_{max}^{Num} en fonction de ces itérations dans la figure 3.20 :

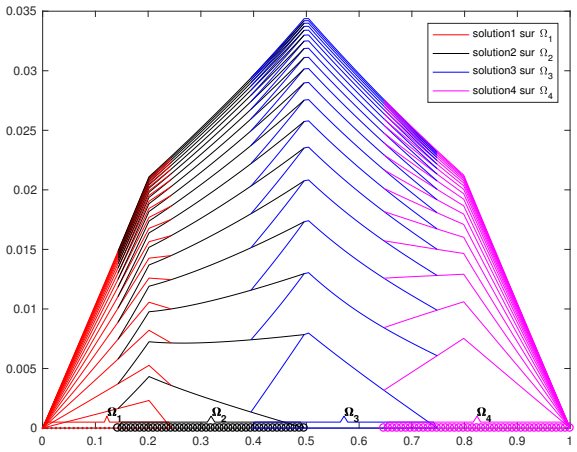


FIGURE 3.20 – Evolution des solutions numériques du problème (3.74) sur les sous-domaines en fonction des itérations de Schwarz à T_{max}^{Num}

Pour mieux décrire le comportement de cette méthode numérique on peut consulter le tableau suivant :

# Itération de Schwarz	1	2	...	17	18
$\|U_h^{n,l+1} - U_h^{n,l}\|_2$	$8.7\ 10^{-3}$	$3.1\ 10^{-3}$	...	$1.1\ 10^{-4}$	$9.03\ 10^{-5}$
# Itération de Newton sur Ω_1	3	3	...	3	3
$\|\delta_{h,1}\|_2$	$2.1\ 10^{-18}$	$1.9\ 10^{-17}$	...	$4.8\ 10^{-15}$	$5.03\ 10^{-15}$
# Itération de Newton sur Ω_2	3	3	...	3	3
$\|\delta_{h,2}\|_2$	$5.1\ 10^{-17}$	$2.9\ 10^{-15}$	...	$5.1\ 10^{-13}$	$5.23\ 10^{-13}$
# Itération de Newton sur Ω_3	3	3	...	3	3
$\|\delta_{h,3}\|_2$	$3.9\ 10^{-16}$	$5.2\ 10^{-15}$	...	$3.9\ 10^{-13}$	$4.03\ 10^{-13}$
# Itération de Newton sur Ω_4	3	3	...	3	3
$\|\delta_{h,4}\|_2$	$7.9\ 10^{-16}$	$4.1\ 10^{-15}$	...	$1.002\ 10^{-13}$	$1.01\ 10^{-13}$

TABLE 3.10 – Comportement de l'algorithme pararéel à T_{max}^{Num} dans le cas du problème (3.74)

D'après le tableau 3.10, on a vérifié que la méthode numérique étudiée converge dans tous les sous-domaines dans le cas du problème (3.74).

Cas d'explosion

Pour ce cas, on traite le même exemple cité dans le cas classique (3.64), pour qu'on puisse faire la comparaison entre les deux algorithmes.

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = u''(x,t) + \mid u(x,t) \mid^p & \text{dans }]0,1[\times]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{dans }]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T], \end{cases} \tag{3.75}$$

avec $p = 2$ et un pas spatial $h = 0.47\ 10^{-2}$.
On prend aussi comme donnée initiale $u_0 = 10^3\ sin(\pi x)$.
L'idée de cet algorithme est de considérer un pas de temps plus fin seulement dans la région d'explosion. Pour atteindre ce but, à la première étape, on décompose $\Omega =]0,1[$ en 3 sous-domaines Ω_i, $i = 1:3$. Puis, on localise le sous domaine où se déroule l'explosion, en d'autres termes, où la solution atteint son maximum.
On note $U^i_{0,h}$ la discrétisation de la donnée initiale Ω_i, $i = 1:3$ et selon son maximum on fixe le domaine de l'explosion qu'on notera Ω_{imax}.
Une fois ce sous-domaine localisé, on lui associe le pas de temps le plus fin noté τ_{imax} et les itérations temporelles les plus grandes notées n_{imax}, tout en assurant la convergence de la méthode de Newton.
En particulier, on a choisi $\tau_{imax} = 0.05\ \|U_{0,h}\|_\infty^{1-p} = 0.5\ 10^{-5}$.
Pour ce choix de τ_{imax}, on a :

$$\frac{2}{\tau_{imax}} = 3.9\ 10^5 > C_\infty = 2.4\ 10^5,$$

et donc le problème linéaire (3.70) associé à l'exemple (3.75) est elliptique sur ce sous-domaine.
En conséquence, afin d'atteindre le même temps final de l'exemple (3.75), $T^{Num}_{max} = 10^{-3}$, on doit effectuer 200 itérations en temps pour le sous-domaine Ω_{imax}. Pour les autres sous-domaines on considère des pas de temps plus longs que τ_{imax} tout en gardant l'ellipticité du problème (3.70) sur chaque Ω_i, $i = 1:3,\ i \neq imax$. Puis on associe le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir le même temps final sur chaque sous-domaine. En particulier on a considéré :

$$\tau_i = 2\ \tau_{imax} = 0.1\ 10^{-4},\ \text{et}\ n_i = \frac{1}{2}\ n_{imax}\ = 100.,\ i = 1:3,\ i \neq imax$$

On applique à nouveau l'algorithme pararéel et on obtient la solution approchée suivante :

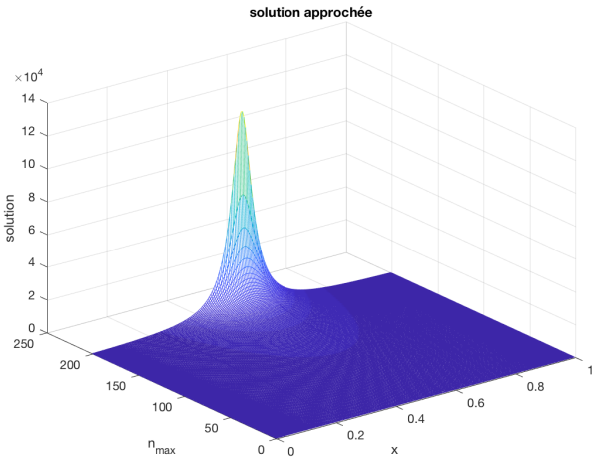


FIGURE 3.21 – Solution numérique du problème (3.75) à T_{max}^{Num}

En fait, cette solution est la réunion des solutions dans les 3 sous-domaines qui sont illustrées dans la Figure 3.22.

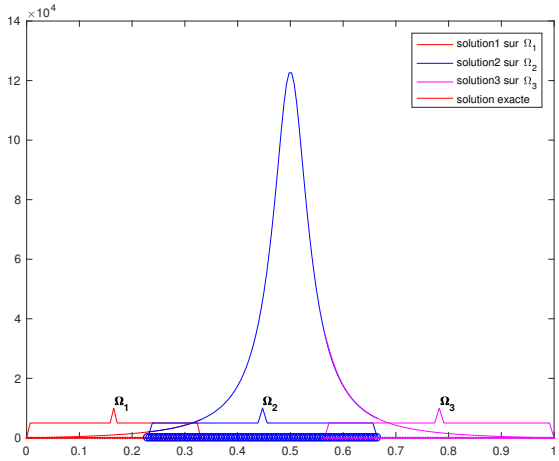


FIGURE 3.22 – Solution du problème (3.75) par sous-domaines à T_{max}^{Num}

Ces solutions sont obtenues après 5 itérations de la méthode de Schwarz avec une dernière mise à jour en norme L^2 d'ordre 10^{-10}. La méthode de Newton converge aussi à chaque étape de Schwarz comme il est montré dans le tableau suivant :

# Itération de Schwarz	1	2	3	4	5
$\|U_h^{n,l+1} - U_h^{n,l}\|_2$	$4.9\ 10^3$	$1.5\ 10^3$	2.52	$5.07\ 10^{-4}$	3.310^{-10}
# Itération de Newton sur Ω_1	4	5	5	5	5
$\|\delta_{h,1}\|_2$	$3.8\ 10^{-11}$	1.410^{-13}	$1.3\ 10^{-13}$	$1.6\ 10^{-13}$	1.210^{-13}
# Itération de Newton sur Ω_2	7	7	7	7	7
$\|\delta_{h,2}\|_2$	$3.9\ 10^{-12}$	4.310^{-12}	5.710^{-12}	5.710^{-12}	5.710^{-12}
# Itération de Newton sur Ω_3	6	6	6	6	6
$\|\delta_{h,3}\|_2$	$6.7\ 10^{-13}$	6.210^{-13}	4.710^{-13}	4.710^{-13}	7.410^{-13}

TABLE 3.11 – Comportement de l'algorithme pararéel à T_{max}^{Num} dans le cas du problème (3.75)

Le tableau 3.11 présente le nombre d'itérations de la méthode de Newton effectuées et la mise à jour de cette méthode à chaque étape de Schwarz dans chaque sous-domaine. On conclut, d'après ces résultats, que les méthodes numériques considérées convergent même dans le cas d'explosion.

Remarque 3.3.13. *On a vérifié numériquement que :*

$\frac{2}{\tau_1} = 1.9\ 10^5 < C_\infty = p\|U_h^n\|_\infty^{p-1} = 2.4\ 10^5$, *et* $\frac{2}{\tau_1} = 1.9\ 10^5 > C_{\infty,1} = p\|U_{h,1}^n\|_\infty^{p-1} = 6.1\ 10^3$.

Donc le choix de τ_1 garantit l'ellipticité du problème linéaire (3.70) sur Ω_1 et non pas sur tout le domaine Ω. Pour cette raison on ne peut pas le considérer sur tout le domaine. A cette étape, on voit clairement l'utilité de la décomposition pararéelle. Elle permet d'utiliser des pas de temps selon la non linéarité sur chaque sous-domaine, et non pas sur tout le domaine.

Remarque 3.3.14. *On peut améliorer notre algorithme en considérant un pas de temps plus grand dans le premier sous-domaine, par exemple : $\tau_1 = 4 \times \tau_2 = 0.2\ 10^{-4}$. Il suffira alors d'effectuer 50 itérations en temps dans le premier sous-domaine. Les méthodes numériques convergent encore pour ce choix.*
Grâce à cet algorithme on peut effectuer moins d'itérations temporelles en dehors de la région d'explosion.

Remarque 3.3.15. *Pour cet exemple, à la fin de toutes les itérations des méthodes numériques considérées, on a $\|U_h^n\|_\infty = 1.226\ 10^5$. La solution numérique obtenue atteint alors 'approximativement' le même maximum au même temps final T_{max}^{Num} que la solution numérique obtenue par l'algorithme traditionnel, mais sans avoir en besoin ni d'utiliser un pas de temps adaptatif ni d'effectuer toutes les itérations temporelles sur tout le domaine.*

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a rappelé quelques résultats d'existence et d'unicité ainsi que des conditions d'explosion d'une solution non négative du problème de type (P_{Fuj}) sur différents domaines Ω. On a présenté également des estimations du temps d'explosion théorique ainsi que numérique de cette solution en appliquant la méthode des fonctions propres.

Afin de calculer une solution approchée du problème (P_{Fuj}), on a utilisé une approximation en espace par éléments finis et une approximation en temps par le schéma de Crank-Nickolson, et on a appliqué deux algorithmes différents.

Le premier est classique. Il sert à résoudre à chaque itération en temps un problème elliptique de type (E, α) introduit dans les chapitres précédents où $\alpha = \dfrac{2}{\tau_n}$ et τ_n le pas de temps considéré.

Le deuxième consiste à utiliser une méthode de décomposition de domaine de Schwarz et de résoudre, à chaque itération de cette méthode, le problème d'évolution, tout en considérant un maillage différent en temps sur chaque sous-domaine. Ensuite, pour raccorder les solutions calculées sur les interfaces, on calcule leurs interpolations linéaires. Cet algorithme est utile aussi dans le cas où la solution du (P_{Fuj}) explose en temps fini. Dans ce cas , on considère un maillage en temps plus fin seulement dans le domaine d'explosion de cette solution. Cette résolution numérique sera appliquée ensuite dans le chapitre suivant, pour calculer une solution approchée du problème de Chipot-Weissler, en ajoutant au problème (P_{Fuj}), le terme d'amortissement : $|\nabla u|^q$, avec $q > 1$.

Chapitre 4

Résolution numérique de l'équation de Chipot-Weissler

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude numérique d'équation de Chipot-Weissler suivant :

$$(P_{Ch-W}) : \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + G(\nabla u(x,t)) = F(u(x,t)) + f(x,t) & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0, T_{max}[, \\ u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T = \partial\Omega \times]0, T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où

- Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $T > 0$, et T_{max} est le temps de l'existence maximale de la solution en partant d'une donnée initiale u_0.
- $G(\nabla u(x,t)) = \eta |\nabla u(x,t)|^q$, $\eta > 0$, et $q > 1$.
- $F(u(x,t)) = \mu |u(x,t)|^p$ avec $\mu > 0$, et $p > 1$.
- f est une fonction source non négative appartenant à $L^1(Q_T)$.

Ce type d'équation peut modéliser une dynamique de population biologique vivant dans un environnement représenté par un domaine Ω dans $\mathbb{R}^d$, [120, 121]. La densité spatiale des individus situés près d'un point $x \in \Omega$ à un instant $t \geq 0$ est notée $u(x,t)$. L'évolution de cette densité est le résultat de trois types de mécanismes : les déplacements, les naissances et les décès. Pour dériver l'équation d'évolution satisfaite par u, nous revenons à la méthode des volumes de contrôle. On considère un petit volume ω de mesure δx entourant un point x. On compte le nombre d'individus apparaissant ou disparaissant de ω pendant un petit intervalle de temps δt.

Le terme de diffusion Δu représente le déplacement des individus et le terme de réaction

$\mu|u|^p$ représente le taux de naissance supposé proportionnel au nombre de $p-$uplet. Ce dernier joue en général le rôle de terme d'explosion de la densité. Par ailleurs, le terme $\eta|\nabla u|^q$ représente la densité du prédateur dans le cas où les individus ont été détruits par des prédateurs pendant leur déplacement. Ce terme joue, par conséquent, le rôle d'amortissement.

Par suite, tous ces termes influent sur le comportement asymptotique de la solution qui dépend fortement des paramètres p, q, η et μ.

Dans la première section de ce chapitre on va rappeler des résultats d'existence, unicité, régularité et les conditions d'explosion de la solution des équations de type (P_{Ch-W}). Puis, dans la section suivante, en appliquant une semi-discrétisation en temps et en espace, on calcule une approximation numérique de la solution en utilisant les algorithmes présentés dans le troisième chapitre. Dans la dernière section, on donnera quelques exemples numériques qui illustrent les performances de la méthode de décomposition de domaine.

4.2 Analyse théorique

4.2.1 Rappels sur l'existence, unicité, régularité et explosion de la solution

Chipot et Weissler ont étudié en 1989, voir [38], ce type d'équation, où $\eta = \mu = 1$, et la fonction source est nulle :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = |u(x,t)|^{p-1}u(x,t) & \text{dans } Q_T, \\ u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Ils ont prouvé que pour :

- $s \geq q,\ s > d(q-1)$,
- $s \geq dp(p+d),\ s > \dfrac{d(p-1)}{p+1}$,

et pour toute donnée initiale non négative $u_0 \in W_0^{1,s}(\Omega)$, il existe une unique solution positive maximale $u \in C([0, T_{max}(u_0)], W_0^{1,s}(\Omega))$ de l'équation intégrale associée au problème (4.1) suivante :

$$u(t) = S(t)u_0(y) + \int_0^t S(t-y)\left(|u(y)|^{p-1}u(y) - |\nabla u(y)|^q\right) dy \tag{4.2}$$

où $(S(t))_{t\geq 0} = e^{t\Delta}$ est le semi groupe associé à l'équation de la chaleur avec les conditions aux limites homogènes.

Les auteurs ont ajouté que si :

- le réel s vérifie de plus : $s \geq 2q$, et $s > dq$.
- $u_0 \in D := \{\phi \in W^{3,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega);\ \Delta\phi + |\phi|^{p-1}\phi - |\nabla\phi|^q \in W_0^{1,s}(\Omega)\}$.
- $u(t)$ est la solution de l'équation intégrale (4.2),

Alors, on a :

- $u \in C^1\left(]0, T_{max}[; W_0^{1,s}(\Omega)\right)$, elle vérifie (4.1), en plus $\Delta u,\ |\nabla u(x,t)|^q,$ et $|u(x,t)|^{p-1}u(x,t)$ sont tous dans $C\left([0, T_{max}[; L^{\frac{s}{q}}(\Omega)\right)$.
- $u \in C\left(]0, T_{max}[; W^{2,\frac{s}{q}}(\Omega)\right)$.
- $\|u(t)\|_\infty < \infty$ et $\|\nabla u(t)\|_\infty < \infty$ sur chaque intervalle $[0, T]$, avec $T < T_{max}$.

Chipot et Weissler ont prouvé que si la donnée initiale est suffisamment régulière alors toute solution de (4.2) est aussi une solution du problème d'origine (4.1), pour plus de détails, on peut consulter [38].

Par ailleurs, ces auteurs ont étudié les conditions d'explosion en temps fini de la solution de (4.1) selon le choix de la donnée initiale u_0 et les paramètres p et q. Dans ce contexte, ils ont annoncé le résultat suivant :

Proposition 4.2.1. *Soient $p > 1,\ 1 \leq q \leq \dfrac{2p}{p+1}$ et $u_0 \in W^{3,s}(\Omega)$ une donnée initiale positive, (s grand), non identiquement nulle. On suppose :*

- $u_0 = 0$ *sur* $\partial\Omega$.
- $\Delta u_0 - |\nabla u_0|^q + |u_0|^p = 0$ *sur* $\partial\Omega$.
- $\Delta u_0 - |\nabla u_0|^q + u_0^p \geq 0$ *dans* Ω.
- $E(u_0) = \dfrac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 - \dfrac{1}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1} \leq 0$.
- *Si* $q < \dfrac{2p}{p+1}$, *on choisit* $\|u_0\|_{p+1}$ *suffisamment grande.*
- *Si* $q = \dfrac{2p}{p+1}$, *on choisit* p *assez grand.*

Alors la solution du (4.1) explose en norme L^∞ en temps fini.

Remarque 4.2.1. *Suite à ces hypothèses, on peut considérer comme donnée initiale du problème (4.1) la solution du problème stationnaire suivant :*

$$\begin{cases} \Delta u_0 - |\nabla u_0|^q + \mu\, u_0^p = 0 & \text{dans } \Omega,\ \mu \text{ assez petit}, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_0 > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

Le problème (4.3) est aussi le problème stationnaire associé au problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = \mu\, u(x,t)^p & \text{dans } Q_T, \\ u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

où $p,\ q > 1, \mu > 0$.

Suite à l'étude théorique réalisée par Amann [13], pour un réel $s > d\max(1,\ q-1)$ et pour une donnée initiale positive $u_0 \in W_0^{1,s}(\Omega)$, il existe une unique solution positive $u \in C\left([0, T_{max}[,\ W_0^{1,s}(\Omega)\right)$. Puis, Quittner [105] a amélioré cette étude en montrant que :

- Si $T_{max} < \infty$, alors $\limsup_{t \to T_{max}^-} \|u(t,.)\|_\infty = +\infty$.
- Si $q \geq p$, alors $T_{max} = \infty$ et $\sup_{t \geq 0} \|u(t,.)\|_\infty < +\infty$.
- Si $q \geq p$ et $u_t \geq 0$, alors $\sup_{t \geq t_0} \|\nabla u(t,.)\|_\infty < +\infty$, pour tout $t > 0$.

En 1991, Fila [53] a prouvé que dans un intervalle borné, pour $q < \dfrac{2}{p+1}$ et $\mu > 0$, ou bien pour $q = \dfrac{2}{p+1}$ et $\mu > \overline{\mu}_p = 2^p(p+1)(p-1)^{-1-p}$, si on suppose que $u_0 \geq v$, $u_0 \not\equiv v$ où v est l'unique solution positive stationnaire du problème (4.4), alors $T_{max} < \infty$.

En outre, Amann a montré que si $p > q \geq \dfrac{2}{p+1}$, alors il existe un nombre positif $\tilde{\mu}$ dépend de $(\|u_0\|_\infty)$, tel que les solutions de (4.4) sont globales pour $0 < \mu < \tilde{\mu}$.

Pour mieux comprendre ce rôle dissipatif du terme gradient, Souplet [120, 121] a étudié en 2001 l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + \eta |\nabla u(x,t)|^q = u(x,t)^p & \text{dans } Q_T, \\ u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

avec $\eta > 0,\ p,\ q > 1$,

Remarque 4.2.2. *L'étude du problème (4.5) est équivalente à l'étude du problème (4.4). En effet, en posant la solution de (4.5) $u = \mu^{\frac{1}{p-1}} v$, et $\eta = \mu^{-\frac{q-1}{p-1}}$ où v est la solution de (4.4), on est ramené à un problème de type (4.4).*

Souplet [120, 121] a annoncé aussi le résultat suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit u une solution de (4.5) telle que :*

- $u \in C^1\left([0, T_{max}[,\ L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)\right)$, (4.6)
- $u \in C\left([0, T_{max}[,\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$, (4.7)
- $u \geq 0,\ u_t \geq 0,\ \ pour\ 0 \leq t \leq T_{max}$, (4.8)
- $E(u_0) = \dfrac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 - \dfrac{1}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1} < 0.$ (4.9)

Si

- $1 < q < \dfrac{2p}{p+1},\ \ et\ \ -\dfrac{E(u_0)}{\|u_0\|_2^2}$ *est suffisamment grand,*

ou bien, si

- $q = \dfrac{2p}{p+1}$, *et* $0 \leq \eta \leq M_0(p) = \dfrac{p-1}{p+1}\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^{\frac{p}{p+1}}$,

alors, $T_{max} < \infty$.

L'auteur a prouvé aussi, que pour :

$$p > 1,\ q = \frac{2p}{p+1} \text{ et } 0 \leq \eta \leq M_0(p) = \frac{p-1}{p+1}\left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{p}{p+1}},$$

si u est solution de (4.5) et vérifie (4.6)-(4.8), alors, $T_{max} = +\infty$, $u \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^{+},\ L^{p+1}(\Omega)\right)$ et $\nabla u \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^{+},\ L^{2}(\Omega)\right)$.
En plus, les solutions de (4.5) sont globales et uniformément bornées pour toute u_0 si $q \geq p$, voir [125].

Remarque 4.2.3. *Dans le cas du problème (4.5), on peut considérer comme donnée initiale la solution du problème stationnaire du problème (4.5) en remplaçant la constante* η *par* $\overline{\eta}$, *telle que* $\overline{\eta} > \eta$, *voir [106].*

Remarque 4.2.4. *Souplet et Weissler ont montré dans [125] que, pour* $p > q \geq 1$, $\eta \geq 0$, *et pour une fonction* $\psi \geq 0$ *non identiquement nulle, il existe une constante positive* k_0 *qui dépend seulement de* ψ *telle que pour tout* $k > k_0$, *la solution de (4.5) avec une donnée initiale* $u_0 = k\psi$ *explose en temps fini.*

Remarque 4.2.5. *Dans le cas où* $p > q = 2$, *la solution de (4.5) explose pour* η *suffisamment petit. Par contre, si* $1 < p \leq q = 2$, *toutes les solutions de (4.5) sont globales et le terme gradient joue dans ce cas le rôle d'amortissement, en empêchant l'explosion de la solution, voir [75]*
Hessaaraki et Moameni [73] ont ajouté que, pour une donnée initiale petite, la solution décroit d'une façon exponentielle quand $q > p$.

4.2.2 Estimation du profil et temps d'explosion

Les conditions d'explosion de la solution ainsi que son temps d'explosion ont occupé l'intérêt des plusieurs auteurs. Souplet et Weissler ont annoncé dans [124], pour $p > q$, le résultat suivant :

Théorème 4.2.2. *Soit* $\psi \in W_0^{1,s}(\Omega)$, *avec* $\psi \geq 0$ *et* $\psi \not\equiv 0$, *(s est grand).*

- $\exists\ k_0 = k_0(\psi) > 0$ *telle que pour tout* $k > k_0$, *la solution du (4.5) avec une donnée initiale* $u_0 = k\psi$ *explose en norme* $W_0^{1,s}(\Omega)$ *en temps fini* T_{max}.

- $\exists\, C > 0$ *telle que :*

$$T_{max}(k\psi) \leq \frac{C}{(k\|\psi\|_\infty)^{p-1}}. \tag{4.10}$$

-

$$T_{max}(k\psi) \geq \frac{1}{(p-1)(k\|\psi\|_\infty)^{p-1}}. \tag{4.11}$$

Par ailleurs, Fila et Souplet [54] ont étudié le comportement asymptotique de la solution du (4.5) à l'explosion. Ils ont montré que le profil de cette solution est similaire à celui de la solution du problème de type Fujita (P_{fuj}). Plus précisément, ils ont prouvé pour un domaine quelconque Ω (borné ou non) le théorème suivant :

Théorème 4.2.3. *On suppose que*

$$1 < p \leq 1 + \frac{2}{d},\ q \leq \frac{2p}{p+1},\ u_0 \geq 0,\ |\nabla u| \in L^\infty(\Omega).$$

Alors pour toutes les solutions du problème (4.5) qui explosent en temps fini T_{max}, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$u(x,t) \leq C(T_{max}-t)^{-\frac{1}{p-1}}, \quad et\ |\nabla u| \leq C(T_{max}-t)^{-\frac{p+1}{2(p-1)}},\ pour\ tout\ (x,t) \in \Omega\times]0,T_{max}[. \tag{4.12}$$

4.3 Simulation numérique

Dans cette section, on va appliquer l'algorithme classique pour la résolution numérique du problème (P_{Ch-W})

$$(P) : \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + G(\nabla u(x,t)) = F(u(x,t)) + f(x,t) & \text{dans } Q_T = \Omega\times]0,T_{max}[, \\ u(x,t) = 0 & \text{dans } \Sigma_T = \partial\Omega\times]0,T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où

- $G(\nabla u(x,t)) = \eta|\nabla u(x,t)|^q$, $\eta > 0$, et $q > 1$.
- $F(u(x,t)) = \mu|u(x,t)|^p$, $\mu > 0$, et $p > 1$.

4.3.1 Algorithme classique

Après une discrétisation en temps et en espace du problème (P_{Ch-W}), similaire à celle considérée dans le chapitre 3, on doit résoudre à chaque pas de temps le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h^n \in V_h \text{ telle que :} \\ a(u_h^n, v_h) = L(v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h, \end{cases} \tag{4.13}$$

où

$$a(u_h^n, v_h) = \alpha \int_{\Omega_h} u_h^n v_h + \int_{\Omega_h} \nabla u_h^n \nabla v_h + \int_{\Omega_h} G(\nabla u_h^n) v_h - \int_{\Omega_h} F(u_h^n) v_h, \ (\alpha = \frac{2}{\tau_n}).$$

et

$$L(v_h) = -\int_{\Omega_h} \nabla u_h^{n-1} \nabla v_h + \alpha \int_{\Omega_h} u_h^{n-1} v_h - \int_{\Omega_h} G(\nabla u_h^{n-1}) v_h + \int_{\Omega_h} F(u_h^{n-1}) v_h + \int_{\Omega_h} (f^{n-1} + f^n) v_h.$$

Pour résoudre le problème variationnel (4.13), on calcule dans un premier temps, une sur-solution notée w_h^n, solution du problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } w_h^n \in V_h \text{ telle que :} \\ \tilde{a}(w_h^n, v_h) = \tilde{L}(v_h), \quad \forall\ v_h \in V_h, \end{cases} \tag{4.14}$$

où :

$$a(w_h^n, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla w_h^n \nabla v_h + \alpha \int_{\Omega_h} w_h^n v_h - \int_{\Omega_h} F(w_h^n) v_h,$$

et

$$\tilde{L}(v_h) = -\int_{\Omega_h} \nabla w_h^{n-1} \nabla v_h + \alpha \int_{\Omega_h} w_h^{n-1} v_h + \int_{\Omega_h} F(w_h^{n-1}) v_h + \int_{\Omega_h} (f^{n-1} + f^n) v_h.$$

La prochaine étape de l'algorithme pour calculer une approximation de l'équation de Chipot-Weissler on l'appellera, dans ce qu'il suit, l'algorithme de Yosida.
Pour une donnée initiale $u_{h,0}^n = w_h^n$ solution de (4.13), on construit, pour $j = 1,...,$ convergence, une suite de solutions $\{u_{h,j}^n\}_j$ du problème obtenu par l'approximation de Yosida suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_{h,j}^n \in V_h \text{ telle que :} \\ \overline{a}_1(u_{h,j}^n, v_h) = L(v_h), \quad \forall\ v_h \in V_h, \end{cases} \tag{4.15}$$

où

$$\overline{a}_1(u_{h,j}^n, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla u_{h,j}^n \nabla v_h + \alpha \int_{\Omega_h} u_{h,j}^n v_h + \int_{\Omega_h} G_j(\nabla u_{h,j}^n) v_h - \int_{\Omega_h} F(u_{h,j-1}^n) v_h,$$

avec G_j l'approximation de Yosida de G vérifie :

$$G_j(x,r) = \begin{cases} G(x,-j) + \partial G_r(x,-j)(r+j) & \text{si } r \le -j, \\ G(x,r) & \text{si } |r| < j, \\ G(x,j) + \partial G_r(x,j)(r-j) & \text{si } r \ge j, \end{cases} \tag{4.16}$$

où ∂G_r désigne le sous différentiel de G par rapport à r.
L'approximation de Yosida du terme non-linéaire G vérifie :

$$G_j \le G_{j+1}, \ \ G_j \nearrow G \text{ quand j tend vers l'infini.} \tag{4.17}$$

Afin de calculer une solution de la formulation variationnelle (4.15), on applique la méthode de Newton. À chaque itération k, on résout, pour tout v_h dans V_h, le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \theta_h \in V_h \text{ telle que :} \\ \overline{a}_2(\theta_h, v_h) = \overline{L}_2(v_h), \end{cases} \tag{4.18}$$

où

- $\theta_h = u_{h,j}^{n,k+1} - u_{h,j}^{n,k}$,
- $\overline{a}_2 = \displaystyle\int_{\Omega_h} \nabla\theta_h \nabla v_h + \alpha \int_{\Omega_h} \theta_h v_h + \int_{\Omega_h} d(x)\nabla\theta_h v_h$, et $\overline{L}_2(v_h) = L(v_h) + \displaystyle\int_{\Omega_h} g v_h$

avec

- $d(x) = \dfrac{\partial G_j \nabla(u_{h,j}^{n,k})}{\partial r}$,
- $g = \Delta u_{h,j}^{n,k} - \alpha u_{h,j}^{n,k} - G_j(\nabla u_{h,j}^{n,k}) + F(u_{h,j-1}^{n})$.

Si on suppose que $\mathrm{div}(d(x))$ est borné par sa norme infinie notée d_∞ alors, cette étape de Newton est bien posée si :

- $\alpha - d_\infty > 0$,

  ou bien si
- $\mathrm{diam}(\Omega) < \dfrac{c_0}{\sqrt{d_\infty - \alpha}}$, pour $\alpha - d_\infty < 0$, avec $c_0 = \sqrt{2}$ en 1D et π en 2D.

Description de l'algorithme

1) On fixe un pas de temps τ_n.
2) On calcule $w_{0,h}$ une approximation de la donnée initiale,
3) Pour $n = 1 : n_{max}$, où n_{max} désigne le nombre maximal d'itérations en temps maximales sur Ω :
   - On calcule la sur-solution w_h^n de (4.13).
   - Puis, on commence par $u_{h,0}^n = w_h^n$,
   - pour $j = 1, ...$convergence :
     - $u_{h,j}^{n,0} = u_{h,j-1}^n$
     - pour $k = 1, ...,$ convergence :
     - on calcule $u_{h,j}^{n,k+1} = u_{h,j}^{n,k} + \theta_h$, où θ_h est la solution du problème (4.29).
     - À la fin de la boucle en k, on obtient $u_{h,j}^{n,k} \to u_{h,j}^n$.
   - À la fin de la boucle en j, on obtiendra $u_{h,j}^n \to u_h^n$.
- L'approximation discrète de la solution du problème (P_{Ch-W}) est obtenue à chaque pas de temps n.

Résultats numériques

A titre d'exemple, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = \mu |u(x,t)|^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T =]0,1[\times]0,T_{max}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.19}$$

avec $\mu = 15,\ p = q = 5,\ \tau = 0.1,\ T_{max}^{Num} = 2,\ u(x,t) = tx(1-x)$.
On discrétise l'intervalle $]0,1[$ en 210 points, on commence par calculer une sur-solution. Si on considère une approximation $w_{0,h}$ de la donnée initiale w_0 nulle, on obtient au bout de 20 itérations en temps les résultats suivants :

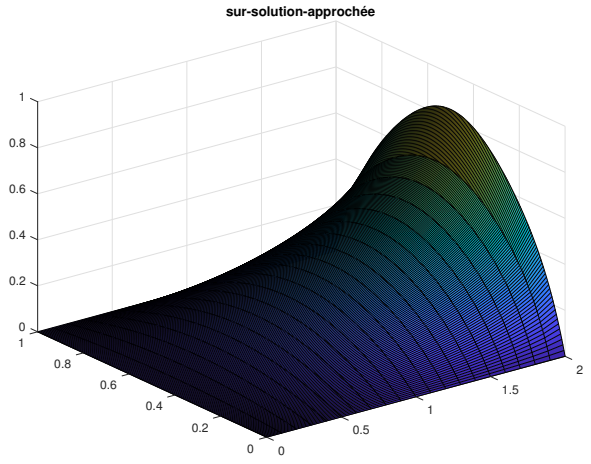


FIGURE 4.1 – Sur-solution approchée du problème (4.19)

Le calcul de la sur-solution approchée présentée dans la Figure 4.1 nécessite de décomposer l'intervalle $]0,1[$ en 4 sous-domaines.
Pour plus de détails, on donne dans la Table 4.3.1 le nombre d'itérations de Newton à chaque pas de temps ainsi que le nombre de sous-domaines nécessaires :

# Itération de temps n	1	2	3	...	19	20
# Itération de Newton	2	2	2	...	3	6
$\|\delta_h\|_\infty$	3.710^{-9}	9.610^{-8}	$4.8\ 10^{-7}$	...	$5.6\ 10^{-5}$	$2\ 10^{-5}$
# Nombre de s-domaines	1	1	1	...	1	4

TABLE 4.1 – Comportement de l'algorithme calculant la sur-solution approchée du problème (4.19)

On désigne par $\|\delta_h\|_\infty$ la correction entre chaque itération de l'algorithme de Newton. Le nombre final de sous-domaine est obtenu après 6 itérations de la méthode de Newton dont la correction en norme infinie est d'ordre 10^{-5}. A cette dernière étape de Newton, le nombre des itérations de l'algorithme de Schwarz est égal à 16 avec une différence entre deux itérés successifs en norme infinie d'ordre 10^{-6}.
Pour $n = 20$, le nombre de sous-domaine varie au cours de ces 6 itérations de la méthode de Newton de la façon suivante :

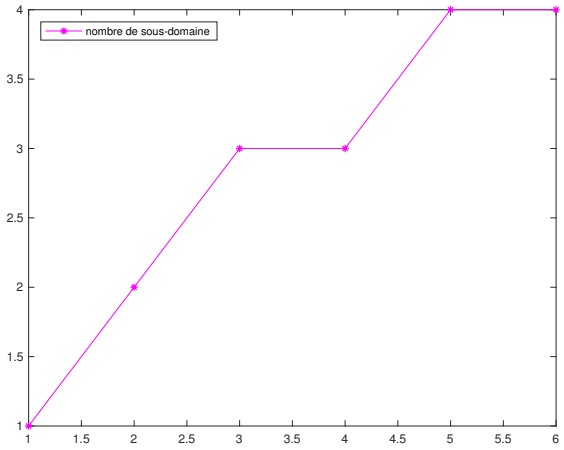


FIGURE 4.2 – Évolution du nombre de sous-domaines en fonction des itérations de Newton à T_{max} pour le cas du problème (4.19)

Pour chaque itération en temps n, en commençant, par la sur-solution présentée dans la Figure 4.1, on résout pour j=1,..convergence le problème approché (4.15) associé à notre exemple (4.19) afin d'obtenir la solution approchée illustrée dans la Figure 4.3.

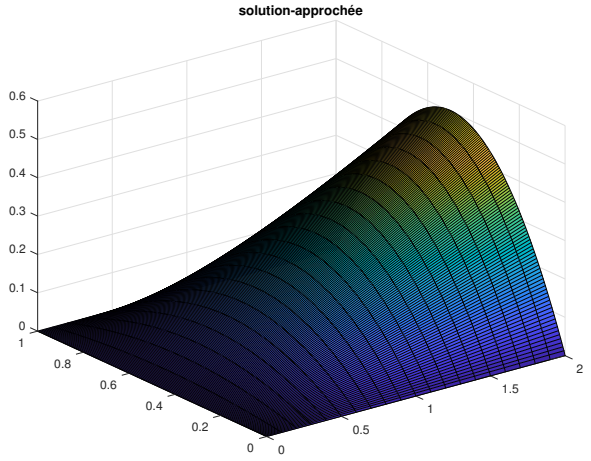


FIGURE 4.3 – Solution approchée du problème (4.19)

Pour analyser encore le calcul de la solution approchée du problème (4.19), on donne dans le tableau 4.2, pour chaque n, le nombre d'itérations de l'algorithme de Yosida ainsi que le nombre d'itérations de la méthode de Newton. On donne aussi la norme de la mise à jour à la dernière étape de l'algorithme de Yosida. Finalement, on y présente, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée à chaque itération en temps.

# Itération de temps n	1	2	.3	...	19	20
# Itération de Yosida	2	2	2	...	3	3
# Itération de Newton	3	3	3	...	8	6
$\|\theta_h\|_\infty$	3.910^{-5}	4.610^{-5}	$6.2\ 10^{-5}$	...	$6.5\ 10^{-5}$	$1.1\ 10^{-5}$
$\|u_h^n - u\|_2$	$4.5\ 10^{-5}$	$1.2\ 10^{-4}$	2.110^{-4}	...	$1.6\ 10^{-3}$	$1.7\ 10^{-3}$

TABLE 4.2 – Comportement de l'algorithme calculant la solution approchée du problème (4.19)

A la dernière itération en temps, l'algorithme de Yosida appliqué pour la résolution du problème (4.15) s'arrête après 6 itérations quand la correction est d'ordre 10^{-6} et l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée est d'ordre 10^{-3}. L'erreur de la convergence numérique est compatible avec l'erreur théorique.
En effet, pour chaque itération en temps n, on a vérifié numériquement pour $h = 0.48\ 10^{-2}$ et $\tau_n = 0.1$, que :

- $\|u_h^n - u(t^n)\|_2 \leq C\left(\|u_{0,h} - u(t^0)\|_2\right) + C(u)\left(h^2 + \tau_n^2\right) \leq C(u)\left(h^2 + \tau_n^2\right).$

A la dernière étape l'algorithme de Yosida, on a effectué 13 itérations de la méthode de Newton pour résoudre (4.29) avec une correction en norme infinie d'ordre 10^{-5}.

On résout maintenant un exemple plus général dont la solution est inconnue :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = |u(x,t)|^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T =]0,1[\times]0,T_{max}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.20}$$

avec $p = 3,\ q = 2,\ \tau = 0.05,\ dx = 0.0048,\ T_{max}^{Num} = 2$, et la fonction source f est une fonction gaussienne :

$$f(x,t) = K_0 t x(1-x)\exp(\frac{x-x_0}{\sigma})^2,\ \text{avec } K_0 = 5\ 10^2,\ x_0 = 0.5,\ \sigma = 2\ 10^{-2}.$$

Le résultat du calcul de l'approximation numérique de la sur-solution dans le cas de l'exemple (4.20) est donné dans la Figure (4.4) :

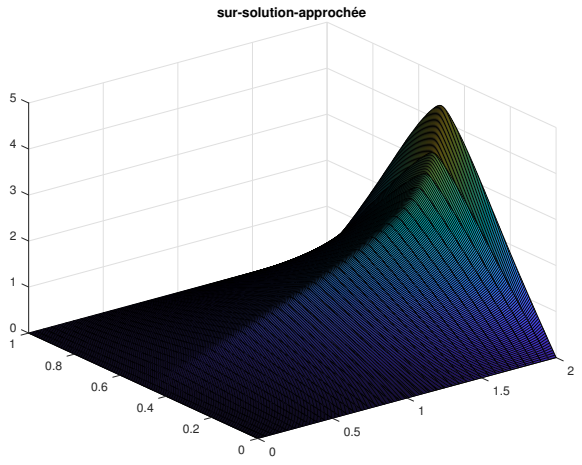


FIGURE 4.4 – Sur-solution approchée du problème (4.20)

A la dernière itération en temps ($n = 40$), 3 sous-domaines sont nécessaires pour calculer l'approximation de la sur-solution est 3. On a effectué 6 itérations de la méthode de Newton avec une mise à jour en norme infinie d'ordre10^{-6}, et à la dernière étape de Newton on a besoin de 4 itérations de la méthode de Schwarz pour obtenir une correction en norme infinie d'ordre 10^{-6}.

Toujours, pour $n = 40$, l'algorithme de Yosida appliqué pour le calcul de la solution

approchée de l'exemple (4.20) est arrêté après 5 itérations quand la mise à jour en norme L^2 est d'ordre 10^{-6}. A cette dernière étape de Yosida, on a effectué 13 itérations de la méthode de Newton avec une correction en norme infinie d'ordre 10^{-5}.
L'application de ces deux méthodes numériques donne l'approximation de la solution du problème (4.20) représentée dans la Figure 4.5 :

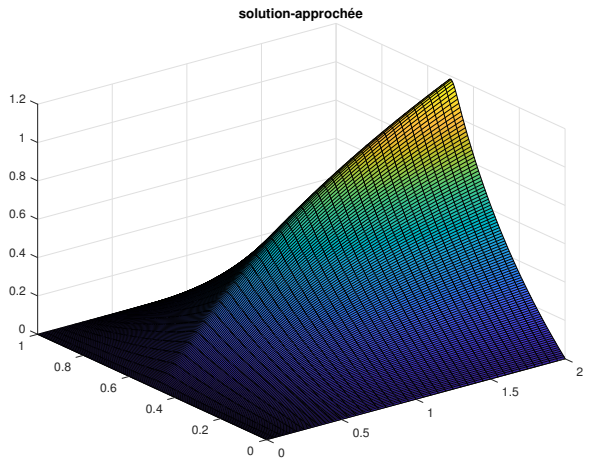


FIGURE 4.5 – Solution approchée du prblème (4.20)

On traite maintenant, le cas où la solution explose en temps fini. Pour une donnée initiale : $u_0(x) = 10^3 \sin(\pi x)$, on résout le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = |u(x,t)|^p & \text{dans } Q_T =]0,1[\times]0,T_{max}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.21}$$

où $p = 2,\ q = 1.3$.
Pour un pas de discrétisation spatiale $h = 0.47\ 10^{-2}$ on considère un pas temporel adaptatif $\tau_n = \min(1, \tau \frac{1}{\|u^n\|_\infty^{p-1}})$ avec $\tau = 0.01$. En appliquant l'algorithme classique présenté dans le chapitre 3 on obtient après 469 itérations en temps, c'est à dire, au temps $t = T_{max}^{Num} = 10^{-3}$ une sur-solution et une solution approchée présentées dans les figures 4.6 et 4.7 :

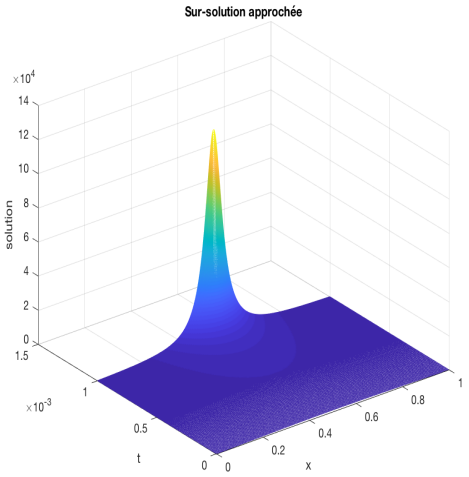


FIGURE 4.6 – Sur-solution numérique du problème (4.21)

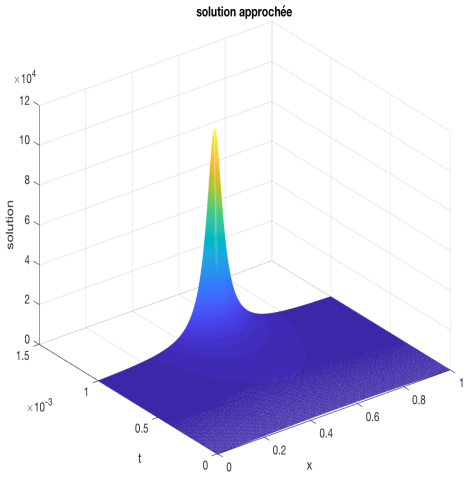


FIGURE 4.7 – Solution numérique du problème (4.21)

Pour ce choix de pas de temps, τ_n, le problème linéaire associé à une itération de Newton dans le calcul de la sur-solution approchée présentée sans la Figure 4.6, est toujours elliptique. En conséquence, la méthode de décomposition de domaine, n'y est pas introduite. On a appliqué seulement la méthode de Newton en effectuant, à la dernière itération en temps, 2 itérations avec une correction en norme infinie d'ordre 10^{-10}.
D'autre part, la solution discrète de l'exemple (4.21), donnée dans la Figure 4.7, est obtenue après 2 itérations de l'algorithme de Yosida avec un écart relatif entre deux itérés successifs d'ordre 10^{-7}. A la dernière étape de cet algorithme, on a effectué 7 itérations de la méthode de Newton pour obtenir une norme infinie de la correction égale à $1.8\ 10^{-4}$.
Par ailleurs, on trace dans les figures 4.8 et 4.9 l'évolution de la solution approchée, respectivement, après 200 et 469 itérations en temps avec le même pas de temps adaptatif τ_n :

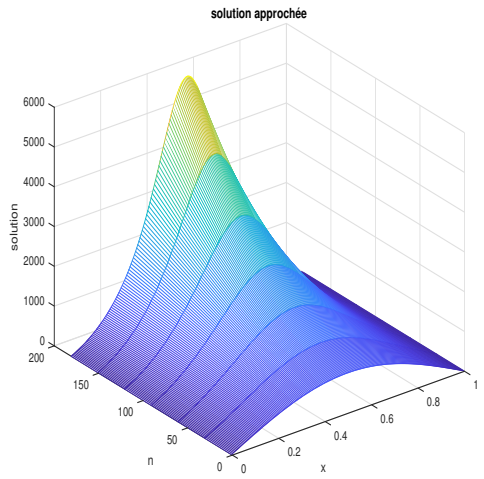


FIGURE 4.8 – Évolution de la solution approchée du problème (4.21) au bout de 200 itérations en temps

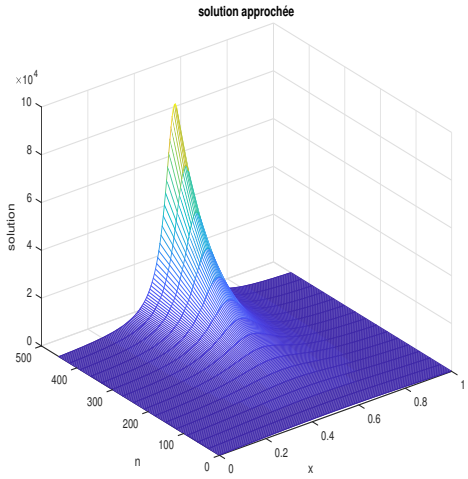


FIGURE 4.9 – Évolution de la solution approchéedu problème (4.21) au bout de 469 itérations en temps (temps final)

Pour $n = 200$, on a

- Le temps $t = 8.7\ 10^{-4}$,
- $\|u_{n,h}\|_\infty = 7.29\ 10^3$,
- $\|w_{n,h}\|_\infty = 7.34\ 10^3$,
- $\tau_n = 1.3\ 10^{-6}$.

À la dernière étape en temps on a :

- Le temps final $t = T_{max}^{Num} = 0.001001$,
- $\|u_{n,h}\|_\infty = 1.05\ 10^5$,
- $\|w_{n,h}\|_\infty = 1.22\ 10^5$,
- $\tau_n = 9.5\ 10^{-8}$.

Pour cette itération en temps, les résultats numériques sont compatibles avec les résultats théoriques présentés. En effet, $\|u_{n,h}\|_\infty$ vérifie l'estimation (4.12) et le temps final numérique T_{max}^{Num} satisfait les inégalités (4.10) et (4.11).

4.3.2 Algorithme pararéel

L'application de l'algorithme pararéel pour la résolution numérique du problème (P_{Ch-W}) consiste, dans un premier temps, à introduire la méthode de décomposition de domaine. Soit u^0 une fonction d'initialisation définie sur Ω. On construit pour $l \geq 0, 1, ..., m$ des

suites u_i^l , $i = 1, ..., m$ solutions des sous-problèmes paraboliques non linéaires suivants :

$$(P_i) : \begin{cases} \partial_t u_i^{l+1}(x,t) - \Delta u_i^{l+1}(x,t) + G(\nabla u_i^{l+1}(x,t)) = F(u_i^{l+1}(x,t)) + f(x,t) & \text{dans } \Omega_i \times]0, T_{max}[, \\ u_i^{l+1} = u_{i+1}^l & \text{sur } \Gamma_{i,i+1} \times]0, T_{max}[\\ u_i^{l+1} = u_{i-1}^{l+1} & \text{sur } \Gamma_{i,i-1} \times]0, T_{max}[, \\ u_i^{l+1}(x,0) = u_{i,0}^{l+1}(x) & \text{sur } \Omega_i \end{cases} \tag{4.22}$$

En discrétisant ces problèmes (P_i) en temps et en espace, on obtient le système variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_{h,i}^{n,l+1} \in X_{h,0}^i \text{ telle que :} \\ a_i(u_{h,i}^{n,l+1}, v_h) = L_i(v_h), \quad \forall\, v_h \in X_{h,0}^i, \end{cases} \tag{4.23}$$

où

$$a_i(u_{h,i}^{n,l+1}, v_h) = \int_{\Omega_i} \nabla u_{h,i}^{n,l+1} \nabla v_h + \alpha_i \int_{\Omega_i} u_{h,i}^{n,l+1} v_h + \int_{\Omega_i} G(\nabla u_{h,i}^{n,l+1}) v_h - \int_{\Omega_i} F(u_{h,i}^{n,l+1}) v_h,$$

et

$$L_i(v_h) = -\int_{\Omega_i} \nabla u_{h,i}^{n-1,l+1} \nabla v_h + \alpha_i \int_{\Omega_i} u_{h,i}^{n-1,l+1} v_h - \int_{\Omega_i} G(\nabla u_{h,i}^{n-1,l+1}) v_h + \int_{\Omega_i} F(u_{h,i}^{n-1,l+1}) v_h + \int_{\Omega_i} (f^{n-1} + f^n) v_h.$$

avec $\alpha_i = \dfrac{2}{\tau_i}$, et τ_i est le pas de temps considéré dans Ω_i.
On commence par calculer une sur-solution du problème variationnel (4.23) sur chaque sous domaine Ω_i notée $w_{h,i}^n$, solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } w_{h,i}^{n,l+1} \in X_{h,0}^i \text{ telle que :} \\ \tilde{a}_i(w_{h,i}^{n,l+1}, v_h) = \tilde{L}_i(v_h), \quad \forall\, v_h \in X_{h,0}^i, \end{cases} \tag{4.24}$$

où

$$\tilde{a}_i(w_{h,i}^{n,l+1}, v_h) = \int_{\Omega_i} \nabla w_{h,i}^{n,l+1} \nabla v_h + \alpha_i \int_{\Omega_i} w_{h,i}^{n,l+1} v_h - \int_{\Omega_i} F(w_{h,i}^{n,l+1}) v_h,$$

et

$$\tilde{L}_i(v_h) = -\int_{\Omega_i} \nabla w_{h,i}^{n-1,l+1} \nabla v_h + \alpha_i \int_{\Omega_i} w_{h,i}^{n-1,l+1} v_h + \int_{\Omega_i} F(w_{h,i}^{n-1,l+1}) v_h + \int_{\Omega_i} (f^{n-1} + f^n) v_h.$$

À cette étape, on applique, à chaque itération $KN \geq 0$, la méthode de Newton pour calculer une suite de solutions $w_{h,i}^{n,l+1,KN+1} = w_{h,i}^{n,l+1,KN} + \delta_{h,i}$, où $\delta_{h,i}$ solution du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \delta_{h,i} \in X_{h,0}^i \text{ telle que :} \\ \underline{a}(\delta_{h,i}, v_h) = \underline{L}_i(v_h), \ v_h \in X_{h,0}^i \end{cases} \tag{4.25}$$

où

- $\underline{a} = \displaystyle\int_{\Omega_i} \nabla \delta_{h,i} \nabla v_h + \alpha_i \int_{\Omega_i} \delta_{h,i} v_h + \int_{\Omega_i} c_i(x) \nabla \delta_{h,i} v_h$, et $\underline{L}_(v_h) = \tilde{L}_i(v_h) + \displaystyle\int_{\Omega_i} \tilde{g} v_h$

avec

- $c_i(x) = -\dfrac{\partial F(w_{h,i}^{n,l+1,KN})}{\partial r}$,
- $g = \Delta w_{h,i,j}^{n,l+1,KN} - \alpha_i w_{h,i}^{n,l+1,KN} + F(u_{h,i}^{n,l+1,KN})$.

On note $C_{\infty,i} = \|c_i\|_\infty$, alors, on rappelle que le problème variationnel (4.25) est bien posé si :

- $$\alpha_i - C_{\infty,i} > 0, \text{c'est à dire } \tau_i < \frac{2}{C_{\infty,i}}, \tag{4.26}$$

  ou bien si :

- $$\text{diam}(\Omega) < \frac{c_0}{\sqrt{C_{\infty,i} - \alpha_i}}, \text{ c'est à dire } \tau_i < \frac{2}{C_{\infty,i} - \frac{c_0^2}{\text{diam}(\Omega_i)^2}} \tag{4.27}$$

Ensuite, on donne une fonction d'initialisation, $u_{h,i,0}^{n,l+1} = w_{h,i}^n$, et on résout, pour $j = 1, ...$ convergence, le problème variationnel obtenu par l'approximation de Yosida suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_{h,i,}^{n,l+1} \in X_{h,0}^i \text{ telle que :} \\ a_{i,j}(u_{h,i,j}^{n,l+1}, v_h) = L_i(v_h), \quad \forall\, v_h \in X_{h,0}^i, \end{cases} \tag{4.28}$$

où

$$a_{i,j}(u_{h,i,j}^{n,l+1}, v_h) = \int_{\Omega_i} \nabla u_{h,i,j}^{n,l+1} \nabla v_h + \alpha_i \int_{\Omega_i} u_{h,i,j}^{n,l+1} v_h + \int_{\Omega_i} G_j(\nabla u_{h,i,j}^{n,l+1}) v_h - \int_{\Omega_i} F(u_{h,i,j-1}^{n,l+1}) v_h.$$

La formulation variationnelle (4.28) est résolue à nouveau par la méthode de Newton. A chaque itération k, on résout, pour tout $v_h \in X_{h,0}^i$, le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \theta_{h,i} \in X_{h,0}^i \text{ telle que :} \\ \overline{a}(\theta_{h,i}, v_h) = \overline{L}(v_h), \end{cases} \tag{4.29}$$

où

- $\theta_{h,i} = u_{h,i,j}^{n,l+1,k+1} - u_{h,i,j}^{n,l+1,k}$,
- $\overline{a} = \displaystyle\int_{\Omega_i} \nabla \theta_{h,i} \nabla v_h + \alpha_i \int_{\Omega_i} \theta_{h,i} v_h + \int_{\Omega_i} d_i(x) \nabla \theta_{h,i} v_h$, et $\overline{L}_(v_h) = L_i(v_h) + \displaystyle\int_{\Omega_i} g v_h$

avec

- $d_i(x) = \dfrac{\partial G_j}{\partial r}(\nabla(u_{h,i,j}^{n,l+1,k})$,
- $g = \Delta u_{h,i,j}^{n,l+1,k} - \alpha_i u_{h,i,j}^{n,l+1,k} - G_j(\nabla u_{h,i,j}^{n,l+1,k}) + F(u_{h,i,j-1}^{n,l+1,k})$.

Description de l'algorithme

1) On fixe m le nombre de sous-domaines.

2) • pour $i = 1, ...m$,

On donne τ_i les pas de temps sur Ω_i vérifiant les hypothèses (4.26) et (4.27), ainsi que le nombre maximal d'itérations en temps pour chaque sous-domaine n_i. On note $T_{max}^{num} = \sum_{j=1}^{n_i} \tau_j \ \ , i = 1, ..., m.$

- On calcule une approximation de la donnée initiale notée u_h^0, et les conditions de transmission initiales sur les bords.

3) Puis, on applique l'algorithme de Schwarz :

- Pour $l = 1, ...,$ convergence
  - pour $i = 1 : m$,
    - pour $n = 1 : n_i$, on résout le problème variationnel linéaire (4.25) obtenu par la méthode de Newton pour avoir une approximation de la sur-solution $w_{h,i}^n$, à la fin de cette boucle.
    - Puis, on résout le problème obtenu par l'approximation de Yosida (4.28) en introduisant la méthode de Newton :
    - on calcule $u_{h,i,0}^{n,l+1}$,
    - Pour $j = 1, ...,$ convergence
    - $u_{h,i,j}^{n,l+1,0} = u_{h,i,j-1}^{n,l+1}$,
    - pour $k = 1, ...,$ convergence on calcule la suite des solutions $u_{h,i,j}^{n,l+1,k+1} = u_{h,i,j}^{n,l+1,k} + \theta_{h,i}$, où $\theta_{h,i}$ solution du problème linéaire (4.29).
    - À la fin de la boucle de Newton, la solution numérique $u_{h,i}^{n,l,k}$ converge vers $u_{h,i}^{n,l}$ quand $k \to \infty$ sur chaque Ω_i.
    - À la fin de la boucle de l'algorithme de Yosida, la solution $u_{h,i,j}^{n,l}$ tend vers $u_{h,i}^{n,l}$ lorsque $j \to \infty$.
  - Une fois que $u_{h,i}^{n,l}$ est calculée pour tout n, on met à jour les conditions de transmission sur les interfaces en calculant les interpolations linéaires des $u_{h,i}^{n,l}$.
  - À la fin de la boucle de Schwarz, la solution approchée $u_h^n = u_{h,i}^n$ sur Ω_i.

Simulations numériques

A fin de tester la performance de l'algorithme pararéel appliqué au problème de type (P_{Ch-W}), on considère problème modèle avec u connue :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = |u(x,t)|^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T =]0,1[\times]0,T_{max}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.30}$$

On a choisi $u(x,t) = (1+t)x(1-x)$, $p = q = 2$, $u_0(x) = x(1-x)$.
On a discrétisé l'intervalle $]0,1[$ en 210 points, et on l'a décomposé en 3 sous-domaines en associant des pas de temps différents $\tau_1 = 0.1667,\ \tau_2 = 0.0556,\ \tau_3 = 0.111$ sur chaque sous-domaine pour atteindre $T_{max}^{Num} = 1$.
Le résultat du calcul numérique de la solution du problème (4.30) est présenté dans la Figure 4.11 et la sur-solution approchée est présentée dans la Figure 4.10.

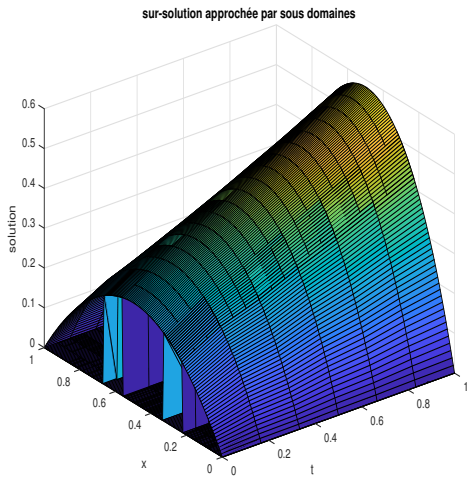


FIGURE 4.10 – Sur-solution approchée du problème (4.30) dans le maillage temporel par sous-domaine

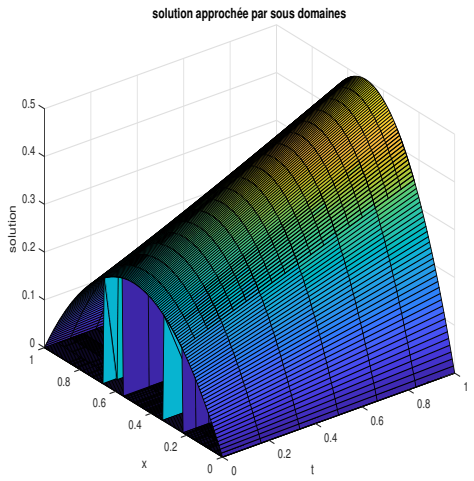


FIGURE 4.11 – Solution approchée du problème (4.30) dans le maillage temporel par sous-domaine

Dans les Figures 4.12 et 4.13, on présente l'évolution respectivement des sur-solutions et des solutions calculées de l'algorithme de Schwarz au temps T_{max}^{Num} appliqué à l'exemple (4.30) au cours des itérations :

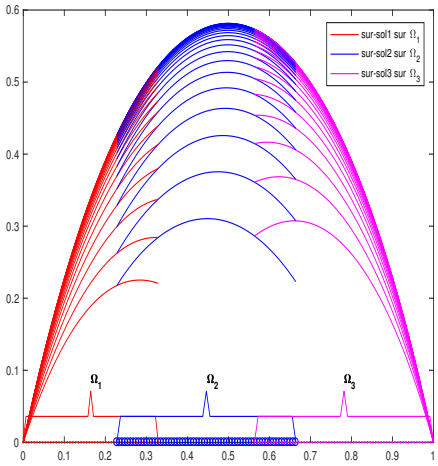


FIGURE 4.12 – Evolution des sur-solutions approchées dans les sous-domaines en fonction des itérations de Schwarz dans le cas du problème (4.30) au temps T_{max}^{Num}

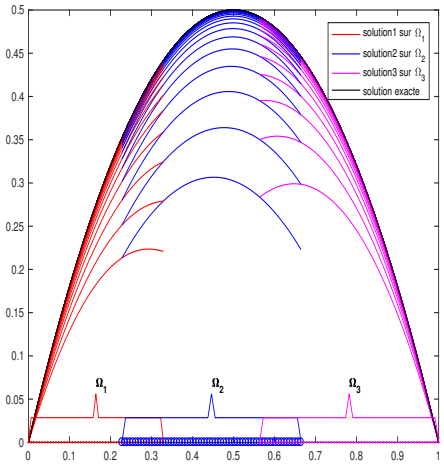


FIGURE 4.13 – Evolution des solutions approchées dans les sous-domaines en fonction des itérations de Schwarz dans le cas du problème (4.30) au temps T_{max}^{Num}

Pour obtenir les solutions illustrées dans la Figure 4.13, on a effectué 10 itérations de l'algorithme de Schwarz jusqu'à atteindre une erreur en norme L^2 entre la solution exacte et la solution approchée du problème (4.30) d'ordre 10^{-5}. Cette erreur a diminué en fonction de ces itérations suivant le graphique présenté dans la Figure 4.14

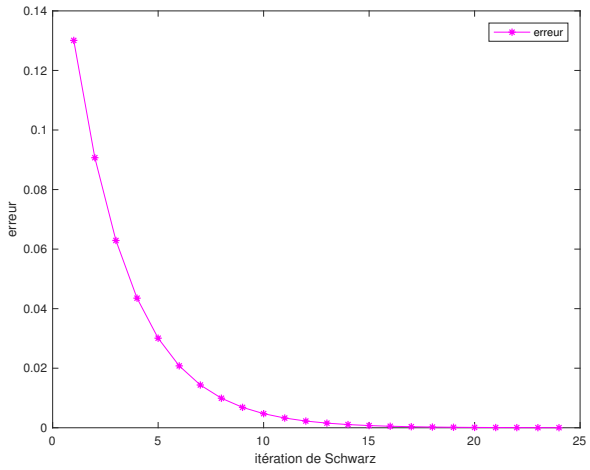


FIGURE 4.14 – Evolution de l'erreur en norme L^2

On résume dans le Table 4.3 les performances de l'algorithme, au temps final, pararéel dans le cas de l'exemple (4.30). On y retrouve dans ce tableau pour chaque itération de l'algorithme de Schwarz et pour chaque sous-domaine, le comportement de l'algorithme de Newton pour la calcul de la sur-solution, ainsi que le comportement de l'algorithme de Yosida en indiquant à sa dernière itération de cet algorithme le comportement de l'algorithme de Newton appliqué au calcul de la solution approchée.

# Itération de Schwarz l	1	2	...	23	24
KN_1	3	3	...	3	3
$\|\delta_{h,1}\|_2$	$6.6\ 10^{-9}$	$1.3\ 10^{-8}$	...	$8.7\ 10^{-8}$	$8.7\ 10^{-8}$
KN_2	3	3	...	4	4
$\|\delta_{h,2}\|_2$	$8.6\ 10^{-8}$	$1.8\ 10^{-7}$	...	$2.1\ 10^{-15}$	$2.1\ 10^{-15}$
KN_3	3	3	...	3	3
$\|\delta_{h,3}\|_2$	$1.01\ 10^{-7}$	$1.8\ 10^{-7}$	...	$6.6\ 10^{-7}$	$6.6\ 10^{-7}$
$\|w_h^{n,l+1} - w_h^{n,l}\|_2$	0.11	0.02	...	$1.2\ 10^{-5}$	$8.2\ 10^{-6}$
# Itération de Yosida sur Ω_1	3	4	...	5	5
$\|en_1\|_2$	$9.7\ 10^{-4}$	$1.1\ 10^{-5}$	...	$1.2\ 10^{-5}$	$1.2\ 10^{-5}$
# Itération de Yosida sur Ω_2	2	3	...	3	3
$\|en_2\|_2$	$5.9\ 10^{-4}$	$1.5\ 10^{-5}$	...	$1.4\ 10^{-4}$	$1.4\ 10^{-4}$
# Itération de Yosida sur Ω_3	4	4	...	5	5
$\|en_3\|_2$	$3.9\ 10^{-5}$	$2.9\ 10^{-4}$	...	$3.7\ 10^{-5}$	$3.7\ 10^{-5}$
# Itération de Newton sur Ω_1	9	11	...	17	17
$\|\theta_{h,1}\|_2$	$1.8\ 10^{-6}$	$4.6\ 10^{-7}$	...	$7.9\ 10^{-7}$	$7.9\ 10^{-7}$
# Itération de Newton sur Ω_2	6	7	...	8	8
$\|\theta_{h,2}\|_2$	$9.1\ 10^{-7}$	$6.8\ 10^{-7}$	...	$8.8\ 10^{-6}$	$8.9\ 10^{-6}$
# Itération de Newton sur Ω_3	11	13	...	16	16
$\|\theta_{h,3}\|_2$	$1.4\ 10^{-6}$	$4.3\ 10^{-7}$	...	$2.2\ 10^{-6}$	$2.2\ 10^{-6}$
$\|u_h^{n,l+1} - u_h^{n,l}\|_2$	0.11	0.03	...	$9.3\ 10^{-5}$	$7.04\ 10^{-5}$
$\|u - u_h^n\|_2$	0.13	0.09	...	$3.7\ 10^{-5}$	$2.5\ 10^{-5}$

TABLE 4.3 – Comportement de l'algorithme pararéel dans le cas de l'exemple (4.30)

où :

- KN_i : le nombre d'itérations de la méthode de Newton appliquées pour calculer la sur-solution à la dernière étape de l'algorithme de Schwarz sur Ω_i en temps T_{max}^{Num}.

- $\|en_i\|_2 = \dfrac{\|u^{n,l}_{h,i,j} = u^{n,l}_{h,i,j-1}\|_2}{\|u^{n,}_{h,i,j-1}\|_2}$: la mise à jour relative de la correction de l'algorithme de Yosida sur Ω_i.

On a vérifié numériquement que l'application de l'algorithme pararéel est encore efficace pour la résolution des problème de type Chipot-Weissler.

On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = |u(x,t)|^p + f(x,t) & \text{dans } Q_T =]0,1[\times]0,T_{max}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.31}$$

avec $p = 3,\ q = 2$. La solution exacte maintenant est inconnue. On considère une donnée initiale nulle et une fonction source raide (voir Figure 4.15).

$$f(x,t) = K_0 t x(1-x)\exp(\frac{x-x_0}{\sigma})^2,\ \text{avec } K_0 = 2\ 10^3\ x_0 = 0.5,\ \sigma = 2\ 10^{-2}.$$

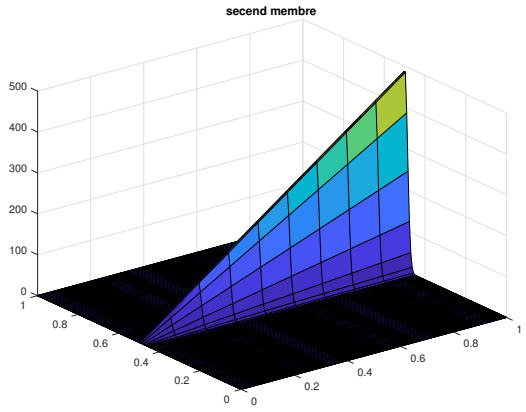


FIGURE 4.15 – La fonction source f du problème (4.31) en maillage temporel par sous-domaine

On a décomposé $]0,1[$ en 5 sous-domaines et en 150 points de discrétisation. On considère les pas de temps suivants $\tau_1 = \tau_4 = 0.1667,\ \tau_2 = 0.0556,\ \tau_3 = \tau_5 = 0.111$, tout en assurant toujours l'ellipticité sur chaque sous-domaine.

En considérant la discrétisation en temps et en espace décrite ci-dessus, au bout de 22 itérations de l'algorithme de Schwarz on obtient la solution approchée du problème (4.31) représentée dans la Figure 4.16 :

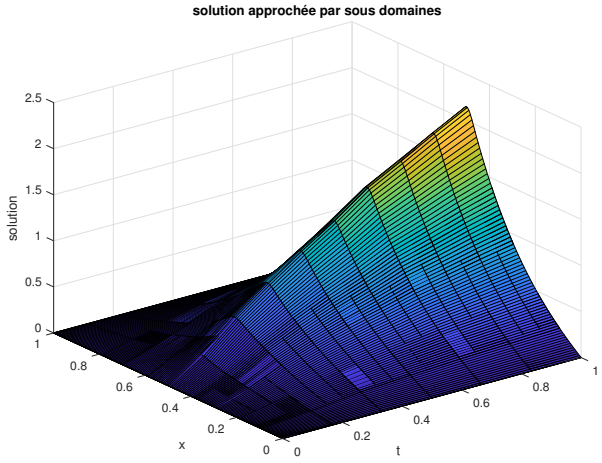


FIGURE 4.16 – Solution approchée du problème (4.31) dans le maillage temporel par sous-domaine

Dans les figures 4.17 et 4.18 on représente l'évolution, respectivement, de la sur-solution et de la solution numérique de l'exemple (4.31) par sous-domaine au temps T_{max}^{Num}.

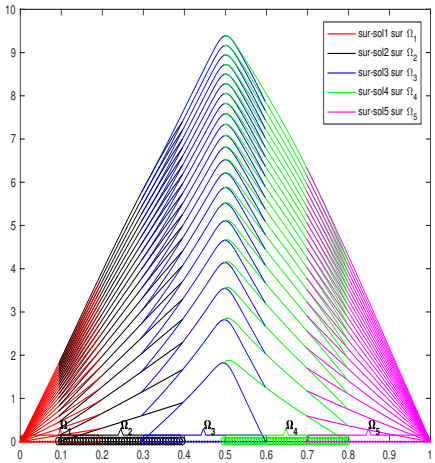


FIGURE 4.17 – Evolution des sur-solutions approchées dans les sous-domaines en fonction des itérations de Schwarz dans le cas du problème (4.31) au temps T_{max}^{Num}

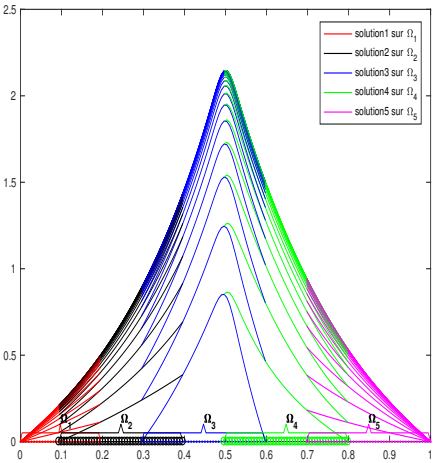


FIGURE 4.18 – Evolution des solutions approchées dans les sous-domaines en fonction des itérations de Schwarz dans le cas du problème (4.31) au temps T_{max}^{Num}

À la dernière itération en temps, les méthodes numériques considérées pour le calcul de la sur-solution présentée dans la Figure 4.17 ainsi que pour le calcul de la solution

approchée donnée dans la Figure 4.18 convergent dans chaque sous-domaine. On en déduit alors que l'algorithme pararéel est encore efficace dans le cas d'une fonction raide.
On étudie maintenant les performances de l'algorithme pararéel dans un cas avec explosion de la solution. Le problème considéré est le suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + |\nabla u(x,t)|^q = |u(x,t)|^p & \text{dans } Q_T =]0,1[\times]0,T_{max}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{dans }]0,T_{max}[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.32}$$

avec $p = 2,\ q = 1.3$ et $u_0(x) = 10^3 \sin(\pi x)$.
Dans ce cas on décompose l'intervalle $]0,1[$ en 3 sous-domaines et on considère 210 points de discrétisation. On associe le pas de temps le plus fin au sous-domaine Ω_2 où se déroule l'explosion de la solution.
Plus précisément on a choisi les pas de temps suivants : $\tau_1 = \tau_3 = 10^{-5}$ et $\tau_2 = 0.5\ 10^{-5}$.

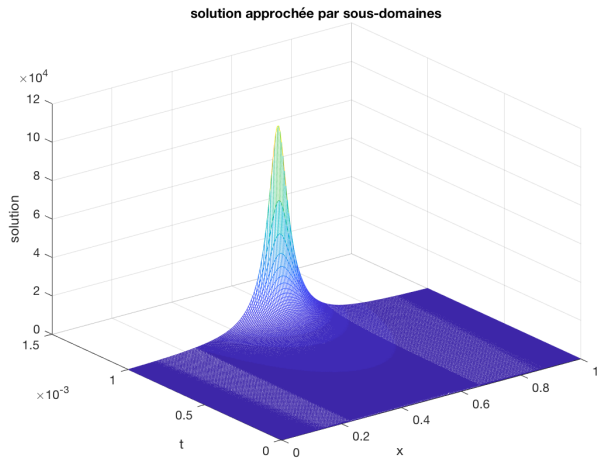


FIGURE 4.19 – Solution numérique du problème (4.32)

La solution présentée dans la figure 4.19, obtenue après 5 itérations de Schwarz, est la combinaison des solutions sur les sous-domaines $\Omega_i,\ i = 1:3$.
Dans la Figure 4.20, on présente la sur-solution et la solution approchée à la dernière itération de Schwarz et au temps T_{max}^{Num} :

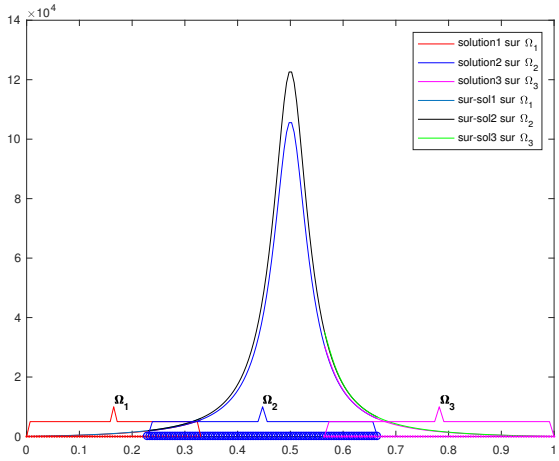


FIGURE 4.20 – Sur-solution et solution par sous-domaines dans le cas de l'exemple (4.32)

Pour cet exemple, on a :

- $\|w_h^n\|_\infty = 1.22\ 10^5$
- $\|u_h^n\|_\infty = 1.05\ 10^5$ qui vérifie l'estimation (4.12).
- $T_{max}^{Num} = 10^{-3}$, qui satisfait les inégalités (4.10) et (4.11).

Les résultats numériques obtenus par l'algorithme pararéel sont cohérents avec les résultats théoriques et en plus, ils sont comparables aux résultats de l'algorithme classique.
D'autre part, on remarque, d'après cet exemple, que le terme $|\nabla u|^q$ joue le rôle d'un amortisseur ralentissant l'explosion de la solution.

4.3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a rappelé un certain nombre de résultats connus sur l'existence et l'unicité d'une solution non négative du problème de type Chipot-Weissler (P_{Ch-W}) en donnant les conditions sur p, q, η, μ et sur la donnée initiale pour avoir l'explosion de la solution. On a aussi rappelé des résultats concernant l'estimation du temps d'explosion de la solution.
Puis, on a proposé une méthode pour calculer une solution approchée de problème (P_{Ch-W}) en se basant sur les deux algorithmes présentés dans le chapitre 3.
Tout d'abord, on a implémenté l'algorithme classique qui consiste, dans un premier temps, à calculer la solution approchée du problème (P_{Ch-W}) sans le terme du gradient. En effet, celle-ci est à la fois une approximation de la sur-solution de ce problème et une solution approchée du problème (P_{Fuj}). Ensuite, on applique l'algorithme de Yosida de la

non-linéarité impliquant le terme gradient, en utilisant cette sur-solution, et on calcule une suite de solutions régularisées convergeant vers la solution exacte de notre problème (P_{Ch-W}).

Deuxièmement, on a considéré l'algorithme pararéel : il s'agit d'appliquer directement la même démarche que celle présentée dans le chapitre 3 pour résoudre le problème régularisé obtenu par l'approximation de Yosida.

Dans la dernière section de ce chapitre on a étudié les performances numériques de deux algorithmes décrits dans les sections précédentes. Au début, on a considéré le cas où la solution exacte est connue, pour valider la démarche et ensuite on a déroulé les deux algorithmes dans les cas avec et sans explosion de la solution. Les résultats numériques obtenus confirment les estimations théoriques et peuvent être comparés aux résultats obtenus avec d'autres méthodes numériques.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse j'ai étudié des méthodes numériques pour calculer une approximation de la solution non-négative des équations aux dérivées partielles quasi-linéaires elliptiques et paraboliques.

Les deux premiers chapitres sont dédiés à l'analyse et à la résolution numérique d'une équation elliptique quasi-linéaire qui est, en fait, l'équation que l'on doit résoudre à chaque itération d'un schéma numérique de discrétisation en temps appliquée à la résolution d'une équation parabolique.

En une dimension de la variable d'espace j'ai démontré l'existence d'une solution non-négative quand les restrictions sur l'évolution de la non-linéarité sont plus faibles que celles imposées dans des travaux précédemment publiés dans la littérature.

Dans des dimensions supérieures à un, j'ai obtenu des résultats similaires mais en faisant l'hypothèse d'une évolution de la non-linéarité sur le gradient sous-quadratique. Dans les deux cas, la démonstration d'existence d'une solution non-négative suppose l'existence a priori d'une sur-solution.

Il en est découlé un algorithme de résolution numérique que consiste à calculer une sur-solution pour ensuite construire une suite de solutions d'une suite d'équations quasi-linéaires elliptiques avec une régularisation, introduite par Yosida, de la non-linéarité sur le gradient.

Pour calculer une approximation de la sur-solution par la méthode des éléments finis on applique l'algorithme de Newton. Le problème linéaire obtenu n'est pas nécessairement elliptique à cause du comportement du terme non linéaire. En conséquence la convergence de l'algorithme de Newton n'est pas garantie ainsi que la positivité de la solution. J'ai alors introduit une méthode de décomposition de domaines où chaque sous-domaine est adapté pour obtenir un problème elliptique et ainsi garantir que, à chaque itération, l'algorithme de Newton est bien posé.

Cette méthodologie a d'autres avantages. En effet, on peut adapter la discrétisation à la régularité de la solution sur chaque sous-domaine et même utiliser différents types d'élé-

ments finis. Par ailleurs, dans les cas des équations quasi-linéaires elliptiques, j'ai présenté des simulations numériques en une et deux dimensions attestant les performances des algorithmes étudiés.

Dans le chapitre 3 j'ai développé une méthode numérique de résolution de l'équation de Fujita. Après une discrétisation de la variable temps avec un schéma de Crank-Nicolson, le problème résultant est, à chaque pas de temps, résolu à l'aide de la méthode mise en place dans les chapitres 1 et 2. La décomposition de domaines est ainsi adaptée à chaque pas de temps. Dans le cas d'existence d'une solution globale cet algorithme est très performant et permet d'adapter les sous-domaines, ainsi que la méthode de discrétisation, à l'évolution du comportement de la non-linéarité et de la solution. On peut utiliser des pas de temps plus longs que ceux utilisés dans les méthodes de résolution explicites (cf. Chen, Houda).

Dans le cas de l'explosion en temps fini de la solution, à partir d'un temps t_0 qui dépend de la nature de la non-linéarité, on ne pourra pas faire évoluer le nombre des sous-domaines. Il faut alors recourir au pas de temps adaptatif proposé par Chen.

J'ai mis en place une méthode pararéel, méthode de décomposition de domaine en temps et en espace, adaptée à la résolution de l'équation de Fujita. Cette méthode permet de considérer des pas de temps différents par sous-domaines. On peut alors utiliser des pas des temps plus longs dans les sous-domaines où on n'a pas d'explosion de la solution, des maillages de temps plus fins étant alors réservés seulement aux sous-domaines où l'explosion a lieu. Dans le dernier chapitre j'ai combiné toutes les techniques développées dans les chapitres précédents et les ai appliquées à la résolution de l'équation de Chipot-Weissler. Je suis arrivée à des conclusions similaires à celles affichées dans le chapitre 3.

Les simulations numériques réalisées en 1 D, pour le cas des équations aux dérivées partielles paraboliques, attestent l'efficacité de l'algorithme présenté.

Les techniques de décomposition de domaines considérées dans cette thèse m'ont permis d'utiliser la méthode de Newton pour traiter les non-linéarités et, par ailleurs, de considérer des discrétisations en temps et en espace adaptées au comportement des non-linéarités et de la solution des problèmes quasi-linéaires étudiés.

Ce travail donnera lieu à une suite, car les méthodes étudiées peuvent encore être améliorées dans plusieurs directions :

- mettre au point des raffinements adaptatifs des pas d'espace et de temps de façon automatique. En particulier, dans le cas de l'algorithme pararéel, on pourra étudier des raffinements du pas de temps non structuré,
- considérer des nouvelles conditions d'interface entre les sous-domaines. Dans l'im-

médiat on pourra appliquer la méthode développée au cas des équations de Fujita et Chipot-Weissler en deux dimensions.

Par ailleurs, je pense appliquer la méthode développée à la résolution d'équations paraboliques avec de conditions périodiques et, dans un avenir plus lointain, aux systèmes de réaction-diffusion.

Bibliographie

[1] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* D. Van Nostrand Company, Princeton, 1965.

[2] E. Ahmed, S. A. Hassan, C. Japhet, M. Kern, and M. Vohralik. A posteriori error estimates and stopping criteria for space-time domain decomposition for two-phase flow between different rock types. *SMAI-JCM*, 5, 2019.

[3] N. Alaa. *Etude d'équations elliptiques non linéaires à dépendance convexe en gradient et à données mesure.* PhD thesis, Université de Nancy, 1989.

[4] N. Alaa. solutions faibles d'équations paraboliques quasi-linéaires avec données initiales mesures. *Ann.Math.Blaise Pascal, 3N°* , 2 :1–15, 1996.

[5] N. Alaa, A. Cheggour, J.R. Roche. Mathematical and numerical analysis of a class of non-linear elliptic equations in the two dimensional case. *Numerical mathematics and advanced applications (eds A. Bermúdez de Castro, D. Gómez, P. Quintela and P. Salgado), Springer, Berlin*, pages 926–934, 2006.

[6] N. Alaa and M. Pierre. Weak solution of some quasilinear elliptic aquations with data measures. *SIAM J.Math.Anal*, 1 :23–35, 1993.

[7] N. Alaa, F. Maach, I. Mounir. Existence for some quasilinear elliptic systems with critical growth nonlinearity and l1 data. *Journal of Applied Analysis*, 11 :8–94, 2005.

[8] N. Alaa, I. Mounir. Global existence for some reaction-diffusion system with mass control and critical growth with respec to the gradients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pages 532–557, 2001.

[9] N. Alaa, J.R.Roche. Theoretical and Numerical Analysis of a class of Nonlinear Elliptic Equations. *Mediterr. J. Math*, 2 :327–344, 2005.

[10] N. Alaa, M. Iguernane. Weak periodic solutions of some quasilinear parabolic equations with data measures. *J. Inequal. Pure Appl. Math*, 3 :Article 46,14pp, 2002.

[11] H. Amann. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in order banach spaces. *SIAM Rev*, 18 :660–709, 1976.

[12] H. Amann, M.G. Crandall. On some existence theorems for semilinear elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 7 :779–790, 1978.

[13] H. Amann, M.G. Grandall. On some existence theorems for semilinear equation equations. *Indiana Univ. Math.J* , 27 :779–970, 1978.

[14] U. Ascher. Collocation for two-point boundary value problems revisited. *SIAM J. Numer. Anal*, 23 :596–609, 1986.

[15] U. Ascher, RD.Russell. Reformulation of boundary value problems into 'standart' form. *SIAM Review*, 23 :238–254, 1981.

[16] U. M. Ascher, R.M. Mattheij and R.D. Russell. *Numerical* Solution of Boundary Value Problem of Ordinary Differential Equations, volume 13. SIAM, 1995.

[17] U. M. Ascher, R.M.Mattheij, R.D.Russell. *Numerical solution of boundary value problem of ordinary differential equations*, volume 13. SIAM, 1995.

[18] G. Bader, U.Ascher. A new basis implementation for a mixed order boundary value ODE solve. *SIAM J. Sci. Statist. Comput*, 8 :483–500, 1987.

[19] G. Bal. On the convergence and the stability of the parareal algorithm to solve partial differential equations, in domain decomposition methods in science and engineering. *SIAM, Springer, Berlin*, 40, 2005.

[20] J. M. Ball. Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations. *Quart. J. Math. Oxford*, pages 473–486, 1997.

[21] C. Bandle, H. A. Levine. On the existence and nonexistence of global solutions of reaction diffusion equations in sectorial domains. *Trans. Am. Math. Soc*, pages 595–622, 1989.

[22] C. Bandle, H.A.Levine, Qi S.Zhang. The critical exponents of fujita type for inhomogeneous parabolic equations and systems. *Math. Analy. Appli*, pages 624–648, 2000.

[23] C. Bandle, J. von Below, W.Reichel. Parabolic problems with dynamical boundary conditions eignvalue expanssions and blow up. *Rend. Lincei. Math. Appl*, 17 :35–67, 2006.

[24] P. Baras. Nonuniqueness of the solutions of a nonlinear evolution equation. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math*, pages 287–302, 1983.

[25] P. Baras, M. Pierre. Critéres d'existence de solutions positives pour des equations semilineaires. *Annales Fourier Grenoble*, 24 :1985–2006, 1984.

[26] L. Boccardo, F. Murat, J. P. Puel. Existence results for some quasilinear parabolic equations. *Nonlinear Analysis Theory Method and Applications*, 13 :373–392, 1989.

[27] N. Boudiba. *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse.* PhD thesis, Université de Renne-France, 1999.

[28] S. C. Brenner, L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15. Americain Mathematical society, 1994.

[29] S. C. Brenner, L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15. Texts in Applied Mathematics,Springer, New York, 1994.

[30] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications.* Masson, 1983.

[31] H. Brezis. W. Strauss. Semilinear second order elliptic equation in l^1. *J. Math. Soc. Japan*, 25 :565–590, 1973.

[32] F. Caetano, M.J. Gander, L. Halpern, and J. Szefte. Schwarz waveform relaxation algorithms for semilinear reaction-diffusion equations. *American Institute of Mathematical Sciences*, 5, 2010.

[33] X. C. Cai. An optimal two-level overlapping domain decomposition method for elliptic problems in two and three dimensions. *SIAM,* Journal on Scientific Computing , pages 239–247, 1993.

[34] X. C. Cai, Olof B. Widlund. Domain Decomposition Algorithms for Indefinite elleptic Problems. *SIAM, Journal on Scinetific and Statistical Computing* , pages 243–258, 1992.

[35] X. C. Cai, Olof B. Widlund. Multiplicative Schwarz algorithms for Some nonsymetric and Indefinite Problems. *SIAM,* Journal on Numerical Analysis , pages 936–952, 1993.

[36] T. Cazenave, A.Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaire.* 1987.

[37] Y. G. Chen. Asymptotic behaviours of blowing up solutions for fnite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*, 33 :541–574, 1986.

[38] M. Chipot, F. B. Weissler . Some blow up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term. *SIAM J. Math. Ana*, 20, 1989.

[39] M. Chlebik, M. Fila. From critical exponents to blow-up rates for parabolic problems. *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, 19, 1999.

[40] M. Chlebik, M. Fila, P. Quittner. Blow-up of positive solutions of a semilinear parabolic equation with a gradient term. *Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst*, 10, 2003.

[41] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam-New-York, Oxford, 1978.

[42] X. Dai, Y. Maday. Stable parareal in time method for first and second order hyperbolic systems. *SIAM J. Sci. Comput*, 35, 2013.

[43] D. S. Daoud, M.J. Gander. Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for Convection Reaction Diffusion Problems. *In : 13th International Coference on Domain Decomposition Methods. Cimne*, 2001.

[44] P. Deuflhard. *Newton Methods for Nonlinear Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, 2000.

[45] M. Dryja, B.F. Smith, O.B. Widlund. Schwarz analysis of iterative substructuring algorithms for elliptic problems in three dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31 :1662–1694, 1994.

[46] Y. Dryja, B.F. Smith, O.B. Widlund. Sur le problème de dirichlet, quasilineaire, d'ordre deux. *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A973*, A-B 274 :81–85, 1972.

[47] M. Dryja, O.B. Widlund. Domain decomposition algorithms with small overlap. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15 :604–620, 1994.

[48] X. H. Du, M.Sarkis, C.F.Schaerer, D.B.Szyld. Inexact and truncated parareal-in-time krylov subspace methods for parabolic optimal control problems. *Electron. Trans. Numer. Anal*, 40, 2013.

[49] A. Ern, J.L Guermond. *Theory and Practice of finite Elements*, volume 159. Applied Mathematic Sciences, 2010.

[50] L. C. Evans. *Partial Diferential Equations*, volume 19. Americain Mathematical society, 1998.

[51] J. A. Ezquerro, M.A.Hernandez. On an application of newton's method to nonlinear operators with w-conditioned second. *BIT Numerical Mathematics*, 42 :519–530, 2002.

[52] J. A. Ezquerro, M.A.Hernandez. On the R-order of convergence of newthon's method under mild differentiability conditions. *Jounal of Computational and Applied Mathematics*, pages 53–61, 2005.

[53] M. Fila. Remarks on blow up for a nonlinear parabolic equation with a gradient term. *Proc. Amer. Math. Soct*, 111, 1991.

[54] M. Fila, P.Souplet. The blow-up rate for semilinear parabolic problems on general domains. *Nonlinear differ. equ. appl.*, 8 :473–480, 2001.

[55] A. Friedman, J.B.McLeod. Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 34 :425–447, 1985.

[56] H. Fujita. On the blowing up of solutions of the cauchy problem for $u_t = \delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci.Univ. Tokyo Sect. IA Math*, 13 :106–124, 1966.

[57] H. Fujita. On some existence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations. *Proc. Symp. Pure. Math, 18, Nonlinear Functionnal Analysis, Amer.Math.Soc.,*, 28 :105–113, 1970.

[58] M. Gander. A waveform relaxation with overlapping splitting for reaction diffusion equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 6 :125–145, 1999.

[59] M. J. Gander. 50 years of time parallel time integration. multiple shooting and time domain decomposition methods. *Contrib. Math. Comput. Sci. 9, Springer, Cham*, 9, 2015.

[60] M. J. Gander, S. Vandewalle. Analysis of the parareal time-parallel time-integration method. *SIAM J. Sci. Comput*, 29, 2007.

[61] A. K. Ghosh. *Numerical Symbolic and Statistical Computing for chemical ingeneers using Matlab*. SPHI Learning Private Limited Delhi, 2018.

[62] Y. Giga, R.V.Kohn. Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 38 :297–319, 1985.

[63] Y. Giga, R.V.Kohn. Characterizing blow-up using selfsimilarity variables. *Indiana Univ. Math. J*, 36 :1–44, 1987.

[64] Y. Giga, R.V.Kohn. Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 :845–884, 1989.

[65] D. Gilbarg. N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[66] H. Hani, M. Khenissi. On a finite difference scheme for blow up solutions for the chipot-weissler equation. *Applied Mathematics and Computation*, 268, 2015.

[67] H. Hani, M. Khenissi. Asymptotic behaviors of solutions for finite difference analogue of the chipot-weissler equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 9*, 5, 2016.

[68] A. Haraux, F.B. Weissler. Non-uniqueness for a semi linear initial value problem. *Indiana Univ. Math*, 31 :167–189, 1989.

[69] S. A. Hassan, C. Japhet, M.Vohralik. A posteriori stopping criteria for optimized schwarz domain decomposition algorithms in mixed formulations. *Comput. Methods Appl. Math.*, 18, 2018.

[70] S. A. Hassan, C. Japhet, M.Vohralik. A posteriori stopping criteria for space-time domain decomposition for the heat equation in mixed formulations. *Electron. Trans. Numer. Anal*, 49, 2018.

[71] K. Hayakawa. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations. *Proc.Japan.Acad.Ser. A Math*, 38 :503–525, 1973.

[72] M. A. Hernandez. The newton method for operators with hölder continous first derivate. *Jounal of optimization theory and applications*, 3 :631–641, 2001.

[73] M. Hesaaraki, A. Moameni. Blow-up of positive solutions for a family of nonlinear parabolic equations in general domain in r^n. *Michigan Math. J*, 52, 2004.

[74] B. Hu. *Blow-up Theories for Semilinear Parabolic Equations.* Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[75] B. Kawohl, L. A. Peletier. Observations on blow up and dead cores for nonlinear parabolic equations. *Math. Z*, 202, 1989.

[76] C. Kelly. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations.* Frontiers in Applied Mathematics, 1995.

[77] J. Kierzenka, L. F. Shampine. A BVP solver based on residual control and the MATLAB. *PSE. ACM TOMS*, 27 :299–316, 2001.

[78] P. L. Lions. Résolution de problèmes elliptiques quasilinéaires. *Arch. Rational Mech. Anl.*, 74 :335–353, 1980.

[79] P. L. Lions. *On the schwarz alternating methode : a variant for non overlapping subdomains.* 1990.

[80] J. L. Lions, Y. Maday and G. Turinici. Parareal in time algorithm for kinetic systems based on model reduction in high-dimensional partial differential equations in science and engineering. *Amer. Math. Soc. Providence*, 41, 2007.

[81] S. A. Levin. Models in ecotoxicology : methodological aspects. *Applied Mathematical Ecology, (eds S.A. Levin, Th.G. Hallam and L.J. Gross), Biomathematics, Springer Verlag*, 18 :315–321, 1989.

[82] H. A. Levine. The role of critical exponents in blow up theorems. *SIAM. Rev.*, 32 :4262–288, 1990.

[83] H. A. Levine, Q.S. Zhang. The critical fujita number for a semi linear heat equation in exterior domains with homogeneous newmann boundary values. *Proc. of the R. of Edinb*, pages 591–602, 2000.

[84] P. L. Lions. Résolution de problèmes elliptiques quasilinéaires. *Arch. Rational Mech. Anl*, 74 :335–353, 1980.

[85] J. L. Lions, Y. Maday and G. Turinici. Résolution d'edp par un schèma en temps pararéel. *C.R.Acad Sci. Paris Sér. I Math*, 332, 2001.

[86] S. H. Lui. On schwarz alternating methods for nonlinearelliptic pdes. *SIAM. J. SCI.COMP*, 21, 2000.

[87] S. H. Lui. Monotone and schwarz amternating methods for non linear elliptic pdes. *ESAIM : M2AN*, 35, 2001.

[88] K. Martin. Parallel multiple shooting for the solution of initial value problems. *Parallel Computing. 20*, 3, 1994.

[89] T. P. Mathew, M. Sarkis, C.E, Schaerer. Analysis of block parareal preconditioners for parabolic optimal control problems. *SIAM J. Sci. Comput*, 32, 2010.

[90] J. Mazzia, D.Murray. *Mathematical Biology*, volume 18. Biomathematics. Berlin : Springer Verlag, 1993.

[91] F. Mazzia, J.R.Cash, K.Soetaert. *Algorithm 927 : The MATLAB code bvptwp.m for the Numerical Solution of Two Boundary Value Problems*, volume 39. ACM transactions on Mathematical Software, 2013.

[92] F. Mazzia, J.R.Cash, K.Soetaert. Solving boundary value Problems in the open source software R : package bvpSolve. *Opuscula Math*, 34 :397–403, 2014.

[93] F. Merle, H.Zaag. Stability of the blow up pro le of equations of the type $u_t = \delta u + \mid u \mid^{p-1} u$. *Duke Math.J.*, 32, 1997.

[94] F. Merle, H.Zaag. Refined uniform estimates at blow-up and applications for non linear heat equations. *GAFA. Geom. Funct. Anal*, 8, 1998.

[95] N. Naceur, M. Khenissi, J. R. Roche. Numerical solution of nonlinear differential boundary value problems using adaptive non-overlapping domain decomposition method. *Applicable Analysis, Taylor and Francis*, 2020.

[96] N. Naceur, N. Alaa, M. Khenissi, J. R. Roche. Theoretical and numerical analysis of a class of quasilinear elliptic equationss. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, American Institute of Mathematical Sciences*, 2020.

[97] T. Nakagawa. Blowing up on a fnite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$. *Appl. Math. Optim.*, 2 :337–350, 1976.

[98] T. Nakagawa, T.Ushijima. Numerical Analysis of the Semi-linear Heat Equation of Blow-up Type. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, 1976.

[99] V. T. Nguyen, H.Zaag. Blow up results for a strongly perturbed semilinear heat equation. *Theoretical analysis and numerical method :.arxiv :1410.4079v1.*

[100] R. G. Pinsky. Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = au + a(x)u^p in\mathbb{R}^d$. *J.Diff Equas*, 8, 1997.

[101] R. G. Pinsky. Finite blow up for the inhomgeneous equation $u_t = \delta u + a(x)u^p + \lambda\varphi$ in $\mathbb{R}^d$. *Americain Math Society*, 27 :3319–3327, 1999.

[102] A. Porretta. Existence for elliptic equations in l^1 having lower order terms with natural growth. *Portugaliae Math.*, 57 :179–190, 2000.

[103] A. Quarteroni, A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations.* Springer series in Computational Mathematics, Springer, 1994.

[104] A. Quarteroni, A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Diferential Equations*, volume 1. Oxford Science Publications, 1999.

[105] P. Quittner. On global existence and stationary solutions for two classes of semilinear parabolic problems. *Comment. Math. Univ. Carolin. 34*, 1, 1993.

[106] P. Quittner, P. Souplet. Superlinear Parabolic Problems : Blow up Global existence and steady States. *Brikauser*, 2007.

[107] J. F. Rault. The fujita phenomenon in exterior domains under dynamical boundary conditions.

[108] J. F. Rault. The fujita phenomenon in exterior domains under the robin boundary conditions. *C.R. Math .Acad. Sci. Paris*, 349 :1059–1061, 2011.

[109] P. A. Raviart, J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson, Paris, 1983.

[110] P. A. Raviat, J.M Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équaions aux dérivées partielles.* Paris New York Barcelone Mexico Sao Paulo, 1983.

[111] D. Ruprecht, R. Speck, R. Krause. Parareal for di usion problems with space- and time-dependent coe cients. domain decomposition methods in science and engineering xxii. *Lect. Notes Comput. Sci. Eng. Springer, Cham*, 104, 2016.

[112] J. T. Schwartz. *Nonlinear Functional Analysis.* Gordon and Breach Science Publishers, New York-London, Paris.

[113] L. F. Shampine , M.W Reichelt and J.Kierzenka. A Solving Boundary Value problem for Ordinary Differeantial Equation in MATLAB with bvp4c. *Philadelphia, SIAM*, pages 163–169, 2000.

[114] L. F. Shampine, and J.Kierzenka. A A BVP Solver that Controls Residual and Error. *Philadelphia, SIAM*, 2007.

[115] L. F. Shampine, I.Gladwell, S.Thompson. *Solving ODE's with MATLAB*. Cambridge University Press, 2003.

[116] L. F. Shampine Lawrence, J.Kierzenka. A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE. *ACM,TOMS*, 27 :299–316, 2001.

[117] B. Smith, P. Bjorstad. W. Gropp. *Domain Decomposition, Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[118] S. Snoussi, S. Tayachi and F. B. Weissler. Asymptotically self similar global solutions of a semilinear parabolic equation with a nonlinear gradient term. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 129, 1999.

[119] Ph. Souplet. Résultats d'explosion en temps fini pour une équation de la chaleur non linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris t 321, Série*, 1, 1995.

[120] Ph. Souplet. Finite time blow up for a nonlinear parabolic equation with a gradient term and applications. *Math. Methods Appl. sci*, 19, 1996.

[121] Ph. Souplet. Recent results and open problems on parabolic equations with gradient nonlinearities. *Electronic Journal Of Differential Equations*, 20, 2001.

[122] Ph. Souplet. Gradient blow-up for multidimensional nonlinear parabolic equations with general boundary conditions. *Differential Integral Equations*, 15, 2002.

[123] Ph. Souplet. The infuence of gradient perturbations on blow up asymptotics in semilinear parabolic problems : A survey. nonlinear elliptic and parabolic problemse. *Birkhäuser Basel*, 2005.

[124] Ph. Souplet, F. B. Weissler. Self similar subsolutions and blow up for nonlinear parabolic equations. *Analysis and Applications*, 212, 1997.

[125] Ph. Souplet, F. B. Weissler. Poincaré's inequality and global solutions of a nonlinear parabolic equations. *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire*, 16, 1999.

[126] Ph. Souplet, S.Tayachi. Blow up rates for nonlinear heat equations with gradient terms and for parabolic inequalities. *Colloquium Mathematicum*, 88, 2001.

[127] Ph. Souplet, S.Tayachi, F. B. Weissler. Exact self similar blow up of solutions of a semilinear parabolic equation with a nonlinear gradient term. *Indiana Univ. Math. J*, 48, 1999.

[128] S. Tayachi. A singular solution for the heat equation with absorption and a nonlinear gradient term. *Communications in Applied Analysis*, 7, 2003.

[129] V. Thomée. *Galerkin Finite Element Methods for parabolic Problems*, volume 25. Springer Series in Computational Mathematics, 2000.

[130] J. M. F. Trindade, J.C.F, Pereira. Parallel-in-time simulation of two- dimensional, unsteady, incompressible laminar fows. *Numer. Heat Trans. Part B Fund*, 50, 2006.

[131] J. M.F Trindade, J.C.F, Pereira. A "parareal" time discretization for non-linear pde's with application to the pricing of an american put. in : Recent developments in domain decomposition methods (zurich, 2001). *N Lect. Notes Comput. Sci. Eng*, 23, 2002.

[132] G. E. Urroz. *Numerical Symbolic and Statistical Methods with SCILAB for Science and Engineering*, volume 2. Greatunpublished, 2001.

[133] F. B. Weissler. Semilinear evolution equations in banach spaces. *Journal of functional analysis*, 32, 1979.

[134] F. B. Weissler. Existence and nonexistence of globale solutions for a semilinear heat equation. *Israel.J.Math*, 38 :29–40, 1981.

[135] F. B. Weissler. Asymptotic analysis of ordinary differential equation and nonuniqueness for a semi linear partial differential equation. *Arch, Rational Mesh Anal*, pages 231–241, 1985.

Résumé

Cette thèse porte sur l'analyse théorique et la résolution numérique d'un type d'équations semi-linéaires elliptiques et paraboliques. Ces équations sont souvent utilisées pour modéliser des phénomènes dans la dynamique de la population et les réactions chimiques. On a commencé cette thèse par l'étude théorique d'une équation elliptique semi-linéaire dont on a démontré l'existence d'une solution faible non négative sous des hypothèses plus générale que celles considérées dans des précédents travaux. Puis on a présenté une nouvelle méthode basée sur la méthode de Newton et la méthode de décomposition de domaine sans et avec recouvrement.

Ensuite, on a rappelé quelques aspects théoriques concernant l'existence, l'unicité ainsi que la régularité de la solution d'une équation parabolique appelée équation de type Fujita. On a rappelé aussi des résultats sur l'existence de la solution globale et sur le temps maximal d'existence dans le cas d'explosion. Afin de calculer une approximation numérique de la solution de ce type d'équation, on a introduit une discrétisation en éléments finis dans la variable en espace et un schéma de Crank-Nicholson pour la discrétisation en temps. Pour résoudre le problème non linéaire discret on a implémenté une méthode de Newton couplée avec une méthode de décomposition de domaine. On a démontré que la méthode est bien posée.

On a également traité un autre type d'équation parabolique dit équation de Chipot-Weissler. En premier, on a rappelé des résultats théoriques concernant cette équation. Puis, en se basant sur les méthodes numériques étudiées précédemment on a calculé une approximation numérique de la solution de cette équation.

Dans la dernière section de chaque chapitre de cette thèse on a présenté des simulations numériques illustrant les performances des algorithmes étudiés et la cohérence des résultats avec la théorie.

Mots clés : Équations aux dérivées partielles semi-linéaires, Méthode de décomposition de domaine, Éléments finis, Méthode de Newton, Équation de Fujita, Équation de Chipot-Weissler, Explosion en temps fini.

Abstract

The subject of this thesis is to present a theoretical analysis and a numerical resolution of a type of quasi-linear elliptic and parabolic equations. These equations present an important role to model phenomena in population dynamics and chemical reactions.
We started this thesis with the theoretical study of a quasi-linear elliptical equation for which we demonstrated the existence of a weak non-negative solution under more general hypotheses than those considered in previous works. Then we inspired a new method based on Newton's method and the domain decomposition method without and with overlapping.
Then, we recalled some theoretical aspects concerning the existence, the uniqueness and the regularity of the solution of a parabolic equation called Fujita equation. We also recalled results about the existence of the global solution and the maximum time of existence in the case of blow-up. In order to calculate a numerical approximation of the solution of this type of equation, we introduced a finite element discretization in the space variable and a Crank-Nicholson scheme for the time discretization. To solve the discrete nonlinear problem we implemented a Newton's method coupled with a domain decomposition method. We have shown that the method is well posed.
Another type of parabolic equation known as the Chipot-Weissler equation has also been treated. First, we recalled theoretical results concerning this equation. Then, based on the numerical methods studied previously, a numerical approximation of the solution of this equation was calculated.
In the last section of each chapter of this thesis we presented numerical simulations illustrating the performance of the algorithms studied and its compatibility with the theory.
Keywords : quasi-linear partial differential equations, Domain decomposition method, finite elements, Newton's method, Fujita equation, Chipot-Weissler equation, blow up in a finite time.