

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
ED184 Mathématiques et Informatique
I2M/RGR

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de
docteur

Discipline : Mathématiques

Benjamin ANDRYSIAK

Homologie cyclique périodique de l'algèbre de Schwartz d'un groupe
discret d'isométries d'un espace $CAT(0)$

Periodic cyclic homology of the Schwartz algebra of a discrete group of $CAT(0)$
space isometries

Soutenue le 02/12/2019 devant le jury composé de :

Moulay-Tahar BENAMEUR	Université de Montpellier	Examineur
Claire DEBORD	Institut de Mathématiques de Jussieu	Examinatrice
Victor NISTOR	Université de Lorraine	Examineur
Hervé OYONO-OYONO	Université de Lorraine	Rapporteur
Denis PERROT	Université Lyon 1	Rapporteur
Christophe PITTET	Aix-Marseille Université	Examineur
Michael PUSCHNIGG	Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Richard ZEKRI	Aix-Marseille Université	Examineur

Numéro national de thèse/suffixe local : 2019AIXM0319/018ED184



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](#).

Résumé

Dans cette thèse nous calculons l'homologie cyclique périodique réduite de l'algèbre des fonctions sommables à décroissance rapide (par rapport à une métrique de mots) sur un groupe discret agissant de manière isométrique, propre et cocompacte sur un espace métrique à courbure non-positive. Elle coïncide avec l'homologie du groupe à coefficients dans la sous-représentation de la représentation adjointe donnée par les éléments de torsion du groupe. Cela coïncide avec l'homologie cyclique périodique de l'anneau du groupe et est en accord avec les résultats de Vincent Lafforgue sur la K -théorie de l'algèbre de Schwartz.

Notre calcul se fait en analogie avec celui bien connu de l'homologie cyclique d'une algèbre de groupe. La présence de la topologie sur l'algèbre de Schwartz nous force cependant à renoncer aux arguments de l'algèbre homologique abstraite et à travailler exclusivement avec des morphismes de complexes complètement explicites. Cela est nécessaire pour établir leur continuité.

Nous partons de la décomposition du complexe cyclique en somme directe topologique des sous-complexes indexés par les classes de conjugaison du groupe. Pour étudier un tel sous-complexe nous utilisons deux outils. D'un côté, la projection "orthogonale" de l'espace $CAT(0)$ sur le sous-espace des points de déplacement minimal sous un élément fixé de la classe de conjugaison. De l'autre, une subdivision des simplexes dans cet espace, bien adaptée à la géométrie de courbure non-positive.

Nous arrivons ainsi à une rétraction par déformation du sous-complexe associé à une classe de conjugaison dans un complexe de dimension finie. Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie étant équivalentes, nous pouvons oublier la topologie de l'algèbre de Schwartz et nous arrivons au résultat cherché.

Mots clés : homologie cyclique périodique, espace $CAT(0)$, algèbre de groupe

Abstract

In this thesis we compute the reduced periodic cyclic homology of the algebra of rapid decay summable functions (w.r.t. a word metric) over a discrete group acting isometrically, properly and cocompactly over a non-positive curvature metric space. It coincides with the group homology with coefficients in the sub-representation of the adjoint representation given by the torsion elements of the group. This coincides with the periodic cyclic homology of the group ring and agrees with Vincent Lafforgue's results on the K -theory of the Schwartz algebra .

Our computing is led in a similar way to the well known for the cyclic homology of a group algebra. The topology on the Schwartz algebra however forces us to renounce to abstract homological algebra arguments and to work exclusively with completely explicit chain maps. This is necessary to establish their continuity.

We start with the decomposition of the cyclic complex into a topological direct sum of sub-complexes indexed by the conjugacy classes of the group. To study such a subcomplex we use two tools. On one hand, the "orthogonal" projection of the $CAT(0)$ space onto the subspace of minimal displacement points under a fixed element of the conjugacy class. On the other hand, a subdivision a simplicies in this space, well adapted to non-positive curvature geometry.

We thus arrive to a deformation retraction of the subcomplex associated to a conjugacy class into a finite dimensional complex. Every norms on a finite dimensional linear space being equivalent, we can forget the topology of the Schwartz algebra and we then reach the sought result.

Keywords: periodic cyclic homology, $CAT(0)$ space, group algebra

Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mon directeur de thèse, Michael Puschnigg. Merci de m'avoir fait confiance jusqu'au bout et merci de la patience et de l'humanité dont vous avez pu faire preuve à mon égard. Travailler sur cette thèse sous votre direction aura été un plaisir et un honneur.

Je remercie bien entendu Claire Debord, Moulay-Tahar Benameur, Victor Nistor, Christophe Pittet et Richard Zekri d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Merci tout particulier aux deux rapporteurs Hervé Oyono-Oyono et Denis Perrot pour votre relecture du manuscrit, et surtout pour les précieuses remarques et corrections suggérées.

Je remercie également l'école doctorale 184, et tout particulièrement Nadia Creignou et Thierry Gallouet pour leur soutien et les quelques échanges rassurants que nous avons pu avoir. Merci également aux différents doctorants que j'ai pu rencontrer ici et là, notamment lors des rencontres de géométrie non commutative, à Montpellier, Albi, et dans la jolie ville de Münster.

Même s'il ne peut pas encore lire ces lignes, je tiens à remercier mon fils Raphaël, arrivé dans ma vie pendant cette thèse, peut-être au moment où j'en avais le plus besoin. Merci de m'apporter tout ce bonheur.

Merci à Marie-Christine et Jean-François, mes parents, dont la patience et le soutien n'ont pas toujours reçu les remerciements et la gratitude adaptés.

Je remercie enfin Éloïse pour sa patience et son amour sans faille, qui n'a jamais cessé de croire en moi, même lorsque j'en étais moi-même incapable.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	5
Remerciements	7
Introduction	14
1 Généralités	15
1.1 Ensembles simpliciaux	15
1.1.1 Catégorie simpliciale	15
1.1.2 Ensemble simplicial	16
1.1.3 Subdivision d'un ensemble simplicial	19
1.2 Algèbre homologique	23
1.2.1 Complexes de chaînes	24
1.2.2 Théorie duale	25
1.2.3 Morphismes de complexes	25
1.2.4 Complexe de chaînes simplicial	26
1.2.5 Longue suite exacte en homologie	27
1.2.6 Augmentations, résolutions	28
1.2.7 Bicomplexes	31
1.2.8 Quelques résultats utiles...	31
1.3 Morphisme entre un complexe simplicial et sa subdivision	36
1.3.1 Retour sur la subdivision d'un ensemble simplicial	36
1.3.2 Le cas $X_\bullet = \Delta[n]_\bullet$	37
1.3.3 Le cas général	40
2 Homologie cyclique	43
2.1 Cadre général	43
2.1.1 Formes différentielles algébriques	43
2.1.2 Homologie de Hochschild	44
2.1.3 Homologie cyclique	46
2.1.4 Explicitation de l'opérateur $\tilde{S} : C_*^\lambda \rightarrow C_*^\lambda[-2]$	48
2.1.5 Homologie cyclique périodique	49
2.2 Le cas des algèbres de Fréchet	52
2.2.1 Espaces de Fréchet	52
2.2.2 Produit d'espaces de Fréchet	52
2.2.3 Algèbre de Fréchet	53
2.2.4 Théories d'homologie des algèbres de Fréchet	53
3 Homologie cyclique de l'algèbre d'un groupe discret	55

3.1	Lien entre homologie de groupe et homologie de Hochschild	55
3.1.1	G -modules	55
3.1.2	Homologie de groupe	56
3.1.3	Homologie de Hochschild par l'homologie de groupe	57
3.1.4	Quelques points sur la cohomologie de groupe	58
3.1.5	Quelques points sur l'hyperhomologie de groupe	60
3.2	Le bicomplexe cyclique $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$	61
3.2.1	Décomposition suivant les classes de conjugaison	61
3.2.2	Construction du bicomplexe cyclique	63
3.3	Contribution elliptique à $HP_*(\mathbb{C}G)$	66
3.3.1	Préliminaires	66
3.3.2	Calcul de $HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$	67
3.4	Contribution hyperbolique à $HC_*(\mathbb{C}G)$	70
4	Espaces $CAT(0)$, morphisme de rétraction	75
4.1	Espaces $CAT(0)$	75
4.2	Groupe d'isométries d'un espace $CAT(0)$	77
4.2.1	Action propre et cocompacte d'un groupe discret d'isométries	78
4.2.2	Déplacement minimal, théorème de projection	83
4.3	Le morphisme de subdivision sd	86
4.3.1	Construction du morphisme sd	87
4.3.2	Estimations des normes de sd et h_{sd}	88
4.4	Morphisme de rétraction	91
4.4.1	Construction	91
4.4.2	Propriétés de Φ_R	93
5	Résultats	95
5.1	Définition de $\ell_{RD}^1(\Gamma)$	95
5.2	Calcul de $HH_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle}$	96
5.2.1	Préparatifs	96
5.2.2	Calcul	102
5.3	Calcul de $HC_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle}$	104
5.4	Calcul de $HP_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$ dans le cas hyperbolique	105
5.4.1	Résultat préliminaire	106
5.4.2	Construction d'une homotopie contractante de l'augmentation de $Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle})$	106
5.4.3	Construction de la section Ψ	108
5.4.4	Calcul du morphisme $\widetilde{S} : C_*^{\text{bar}}(N_v) \rightarrow C_{*-2}^{\text{bar}}(N_v)$	112
5.4.5	Relation entre \widetilde{S} et le cap-product	112
5.4.6	Modification de la section s	113
	Conclusion	118
	Bibliographie	119

Introduction

La (co)homologie cyclique périodique, notée HP , et inventée indépendamment par Alain Connes [Con85] et Boris Tsygan [Tsy83], est un des invariants homologiques d'une algèbre abstraite ou topologique les plus importants, et est étroitement liée à sa K -théorie topologique. En particulier, on dispose d'une transformation naturelle $ch : K_* \rightarrow HP_*$, appelée caractère de Chern qui permet d'approximer la K -théorie topologique d'une algèbre de Fréchet par son homologie cyclique périodique, qui est souvent plus facile à calculer. Cette dernière est définie comme la (co)homologie d'un complexe de chaînes, appelé complexe cyclique périodique, et noté \widehat{CC}_* , associé de façon naturelle à une telle algèbre.

Dans cette thèse nous nous proposons d'étudier cette théorie de (co)homologie pour une certaine classe d'algèbres de Fréchet, obtenues par complétion de l'algèbre complexe de groupe $\mathbb{C}\Gamma$ d'un groupe discret Γ .

La manière classique de procéder est d'étudier en premier lieu le complexe $\widehat{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)$ associé à l'algèbre du groupe, vue comme algèbre abstraite, et de passer en second lieu à sa complétion.

L'analyse du complexe cyclique périodique pour une telle algèbre a été effectuée par Dan Burghlea [Bur85] et Victor Nistor [Nis90]. Elle est basée sur une décomposition canonique indexée par les classes de conjugaison du groupe Γ . La (co)homologie (au sens usuel) de certains sous-quotients de Γ peut être utilisée pour décrire chacune des contributions des facteurs. On peut évoquer le cas particulier de la classe de conjugaison de l'élément neutre dont la contribution, appelée partie homogène, est canoniquement isomorphe à la (co)homologie de Γ à coefficients complexes.

C'est lorsque l'on veut s'attaquer à la (co)homologie cyclique périodique d'une complétion de $\mathbb{C}\Gamma$ que la situation peut changer radicalement. Prenons l'exemple de $\ell^1(\Gamma)$, algèbre de Banach des fonctions sommables sur Γ : dans ce cas, la partie homogène de $HP^*(\ell^1(\Gamma))$ s'identifie à la cohomologie bornée de Γ . Celle-ci est un invariant subtil, ayant un comportement très différent de celui de la cohomologie usuelle. Par exemple, la cohomologie bornée d'un groupe moyennable est nulle en degrés strictement positifs [Gro82], alors que celle d'un groupe hyperbolique (non élémentaire) est, en degré 2, un espace vectoriel complexe de dimension non dénombrable [EF97]. Cette cohomologie bornée n'est pas calculable avec les outils de l'algèbre homologique, mais c'est, dans de rares cas, la géométrie du groupe qui permet d'obtenir des résultats, néanmoins partiels.

La cohomologie cyclique périodique d'une complétion de $\mathbb{C}\Gamma$ coïncide avec la cohomologie d'un complexe de cochaînes du groupe à croissance contrôlée, qui s'avère en général incalculable. Pour la C^* -algèbre d'un groupe discret, il n'existe en général

même pas de décomposition indexées par les classes de conjugaison de Γ du complexe cyclique périodique, sa cohomologie reste essentiellement inconnue.

Le but de ce travail est de calculer l'homologie cyclique périodique réduite de l'algèbre des fonctions sommables à décroissance rapide sur un groupe discret agissant de manière isométrique, propre et cocompacte sur un espace métrique à courbure non-positive, autrement dit un espace $CAT(0)$. Pour cette famille de complétions de $\mathbb{C}\Gamma$, le calcul de la (co)homologie est encore possible en combinant des outils d'algèbre homologique et de la géométrie du groupe. Voici notre résultat principal, dans lequel le terme "réduite" signifie que nous quotientons l'espace des (co)cycles du complexe cyclique périodique par la clôture de l'espace de ses (co)bords :

Théorème. *Soit Γ un groupe discret, agissant sur un espace $CAT(0)$ de manière isométrique, propre et cocompacte. On désigne par $\ell_{RD}^1(\Gamma)$ l'algèbre de Schwartz des fonctions sommables à décroissance rapide sur Γ . Alors on a, en (co)homologie cyclique périodique réduite :*

$$\begin{aligned}\overline{HP}_*(\ell_{RD}^1(\Gamma)) &\simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_{*+2n}(\Gamma, \mathbb{C}\Gamma_{tors}) \\ \overline{HP}^*(\ell_{RD}^1(\Gamma)) &\simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^{*+2n}(\Gamma, \mathbb{C}\Gamma_{tors})\end{aligned}$$

où $\mathbb{C}\Gamma_{tors}$ désigne le sous-espace vectoriel de la représentation adjointe $Ad(\mathbb{C}\Gamma)$ engendré par les éléments de torsion de Γ .

Ce résultat rentre dans la philosophie générale que l'homologie cyclique périodique et la K -théorie topologique devrait être étroitement liées pour des algèbres de Fréchet "suffisamment petites". Notre résultat, combiné à ceux de Vincent Lafforgue sur la conjecture de Baum-Connes [Laf02] et au théorème d'indice supérieur de Connes-Moscovici [CM90], implique cet autre :

Théorème. *Le caractère de Chern-Connes $Ch : K_* \rightarrow HP_*$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes*

$$K_*(\ell_{RD}^1(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow \overline{HP}_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))$$

pour la classe de groupes considérée.

Notre résultat découle du calcul de la contribution $HP(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle}$ de chaque classe de conjugaison $\langle v \rangle$ de Γ à l'homologie cyclique périodique. Comme nous travaillons avec des complexes normés, tous les morphismes utilisés doivent être représentés par des applications complètement explicites pour permettre la vérification de leur continuité.

L'idée est de construire, pour chaque classe de conjugaison, une déformation par rétraction de la contribution correspondante $C_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$ au complexe de Hochschild dans un sous-complexe beaucoup plus petit de dimension finie. Le passage à la complétion $\ell_{RD}^1(\Gamma)$ ne modifiant pas ce petit complexe, nous obtenons que l'inclusion

$$C_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \rightarrow C_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle}$$

est une équivalence d'homotopie. La suite *SBI* de Connes nous permet ensuite d'arriver à notre résultat.

Nistor et Burghelea ont calculé, dans le cas de l'anneau de groupe $\mathbb{C}\Gamma$, la contribution des classes de conjugaison à l'homologie de Hochschild et à l'homologie cyclique, et ont notamment mis en évidence l'importance de l'extension de groupes :

$$1 \longrightarrow v^{\mathbb{Z}} \longrightarrow Z_v \longrightarrow N_v \longrightarrow 1$$

où Z_v désigne le centralisateur d'un élément v de la classe $\langle v \rangle$ considérée, et où $v^{\mathbb{Z}}$ est le groupe cyclique engendré par v . Leurs résultats sont les suivants :

$$HH(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \simeq H(Z_v, \mathbb{C})$$

$$HC_*(\mathbb{C}\Gamma) \simeq \left(\bigoplus_{\substack{\langle v \rangle \\ |v| < \infty}} H_*(Z_v, \mathbb{C}) \otimes HC_*(\mathbb{C}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\langle v \rangle \\ |v| = \infty}} H_*(N_v, \mathbb{C}) \right)$$

Pour adapter ces raisonnements au cas topologique qui nous intéresse, nous avons besoin d'un espace sur lequel agit Z_v , de la même manière que Γ agit sur l'espace $CAT(0)$, noté X . Pour cela nous prenons, pour un élément v , l'espace de déplacement minimal sous l'action de v , noté M_v . En particulier, si v n'est pas de torsion, l'espace M_v se présente comme un produit $Y \times \mathbb{R}$, où Y est un sous-espace $CAT(0)$. Dans ce cas, tout élément de Z_v agit par isométrie sur les deux facteurs et l'élément v lui-même agit trivialement sur Y et par translation sur \mathbb{R} .

Pour construire notre déformation, nous utilisons les propriétés de l'espace X , sur lequel Γ agit par isométries, et de manière propre et cocompacte. Étant donné un élément v de Γ , nous commençons par projeter le complexe bar de X sur celui de l'espace M_v . Nous itérons ensuite une subdivision particulière du complexe obtenu, appelée *2-fold edgewise subdivision*. Celle-ci n'est pas aussi connue que la subdivision barycentrique de complexes simpliciaux, mais dans notre cas elle s'avère avantageuse. L'effet de cette subdivision sur les normes données peut être estimé en utilisant la convexité de la fonction distance sur l'espace $CAT(0)$ et conduit à des majorations explicites indépendantes du degré. L'itération de cette subdivision a pour effet de rétracter le complexe bar de M_v dans un complexe dont les simplexes sont de diamètre uniformément borné, dépendant de la classe $\langle v \rangle$ mais sur lequel nous avons une certaine liberté. Le fait de projeter en amont sur le complexe bar de M_v nous permet de contrôler la norme de cet opérateur de rétraction, pour une classe de conjugaison fixée. Passant au groupe Γ et prenant les coinvariants sous l'action du centralisateur Z_v de v , nous obtenons notre complexe de dimension finie.

Les normes de ces opérateurs dépendent de la classe de conjugaison $\langle v \rangle$ et en particulier, il semble qu'il ne soit pas possible de majorer la norme de la projection de X sur M_v uniformément sur toutes les classes de conjugaison. C'est pourquoi notre résultat principal porte uniquement sur l'homologie cyclique périodique réduite : dans le cas de contribution des classes hyperboliques, nous ne pouvons affirmer qu'un cocycle est un

cobord, mais seulement une limite de cobords.

Le point essentiel de cette thèse a été de contourner les mécanismes de l'algèbre homologique abstraite et de se tourner vers des morphismes de complexes totalement explicites afin d'estimer leurs normes, et de nous permettre d'arriver à notre résultat. En particulier, et même si cela n'a pas de réel apport sur les résultats de cette thèse, nous avons explicité l'opérateur de périodicité S au niveau des complexes de chaînes. Cela pourra s'avérer utile si on envisage d'étudier d'autres complétions de l'anneau de groupe ou d'autres variantes de l'homologie cyclique.

1 Généralités

Dans ce premier chapitre nous posons les bases de notre travail. Nous commençons par rappeler les définitions générales d'ensembles simpliciaux, puis nous faisons un survol des définitions et propriétés classiques d'algèbre homologique. Le point important de ce chapitre est l'introduction de la *2-fold edgewise subdivision*, traduite ici en "subdivision simpliciale", introduite dans [BHM93]. À partir de cette subdivision, nous construisons, en guise de conclusion à ce chapitre, un morphisme de complexes entre le complexe associé à un ensemble simplicial vers le complexe associé à sa subdivision.

1.1 Ensembles simpliciaux

Dans cette section est abordée la notion d'ensemble simplicial. Nous la définissons tout d'abord puis en donnons un exemple important. Le point clé de cette section est l'introduction de la notion de subdivision d'un ensemble simplicial, due à Bökstedt, Hsiang et Madsen dans [BHM93].

1.1.1 Catégorie simpliciale

Nous définissons ici la catégorie simpliciale et nous caractérisons ses morphismes, et plus précisément ses morphismes injectifs et surjectifs. Nous en donnons ensuite quelques propriétés.

Définition 1.1.1.1 (Catégorie simpliciale). *La catégorie simpliciale, notée Δ , est la catégorie dont les objets sont les ensembles totalement ordonnés $[n] := \{0, \dots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Les morphismes de Δ sont les applications de $[n]$ dans $[m]$ conservant l'ordre, autrement dit croissantes.*

Nous allons maintenant caractériser les morphismes de Δ plus précisément, en partant tout d'abord du constat que tout morphisme f d'un objet A dans un objet B est la composition du morphisme surjectif $A \rightarrow \text{Im}(f)$ puis du morphisme injectif $\text{Im}(f) \rightarrow B$. Il convient donc de s'intéresser aux morphismes injectifs d'une part et aux morphismes surjectifs d'une part.

L'autre constat, c'est qu'un morphisme injectif de $[n]$ dans $[n+k]$ est la composition de morphismes injectifs de $[n]$ dans $[n+1]$, puis de $[n+1]$ dans $[n+2]$, etc.

Il en va de même pour les morphismes surjectifs, de $[n+k]$ dans $[n]$. On en arrive donc à étudier les morphismes dits standards définis ci-dessous :

Définition 1.1.1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit d'une part :*

- *les morphismes injectifs appelés cofaces $\delta^i : [n-1] \rightarrow [n]$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$, définis par le fait que l'élément i n'appartient pas à l'image de δ^i , et d'autre part :*
- *les morphismes surjectifs appelés codégénérescences $\sigma^i : [n+1] \rightarrow [n]$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$, définis par le fait que l'élément i a deux antécédents par σ^i . Autrement dit, σ^i envoie i et $i+1$ sur i .*

Proposition 1.1.1.3. *Les cofaces et codégénérescences vérifient les propriétés suivantes :*

- $\delta^j \delta^i = \delta^i \delta^{j-1}$ si $i < j$,
- $\sigma^j \sigma^i = \sigma^i \sigma^{j+1}$ si $i \leq j$,
- $\sigma^j \delta^i = \delta^i \sigma^{j-1}$ si $i < j$,
- $\sigma^j \delta^i = id$ si $i = j$ ou $i = j + 1$,
- $\sigma^j \delta^i = \delta^{i-1} \sigma^j$ si $i > j + 1$.

1.1.2 Ensemble simplicial

Nous donnons ici la définition d'un ensemble simplicial, nous en donnons un exemple, le simplexe standard combinatoire, et nous définissons la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial.

Définition 1.1.2.1 (Ensemble simplicial). *Un ensemble simplicial est un foncteur contravariant X_\bullet de la catégorie simpliciale Δ dans la catégorie des ensembles, notée Set . Ainsi, à chaque entier n est associé un ensemble noté X_n , obtenant donc une suite d'ensembles. Les éléments de l'ensemble X_n sont appelés n -simplexes.*

Définition 1.1.2.2. *Soit X_\bullet un ensemble simplicial. Les applications induites par les cofaces et les codégénérescences de Δ sont respectivement appelées faces $\partial_i := X_\bullet(\delta^i) : X_n \rightarrow X_{n-1}$ et dégénérescences $s_i := X_\bullet(\sigma^i) : X_n \rightarrow X_{n+1}$.*

Définition 1.1.2.3 (Simplexes dégénérés). *Soit X_\bullet un ensemble simplicial. Les simplexes se trouvant dans l'image d'une dégénérescence sont appelés simplexes dégénérés. Les autres simplexes sont dits non-dégénérés.*

Proposition 1.1.2.4. *Les applications faces et dégénérescences vérifient les propriétés suivantes :*

- $\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i$ si $i < j$,
- $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ si $i \leq j$,
- $\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i$ si $i < j$,
- $\partial_i s_j = id$ si $i = j$ ou $i = j + 1$,
- $\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1}$ si $i > j + 1$.

Définition 1.1.2.5 (Morphisme simplicial). *Soient X_\bullet et Y_\bullet deux ensembles simpliciaux. On dira qu'une application $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ est un morphisme simplicial si f commute avec les applications faces et dégénérescences de X_\bullet et Y_\bullet .*

Un morphisme simplicial peut donc être vu comme un morphisme entre deux foncteurs, c'est que l'on appelle une transformation naturelle, c'est-à-dire un morphisme dans la catégorie des foncteurs.

1.1.2.1 Le simplexe combinatoire standard

On donne maintenant un exemple d'ensemble simplicial, dont on va beaucoup se servir dans la suite : on appelle n -simplexe combinatoire standard l'ensemble simplicial induit par le foncteur donnant, pour $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des morphismes de $[k]$ dans $[n]$:

$$\Delta[n]_k := \text{Morph}_\Delta([k], [n]) \quad (1.1)$$

Il s'agit donc par définition d'un foncteur représentable de la catégorie simpliciale. L'image par ce foncteur d'un morphisme $f : [k] \rightarrow [l]$ est donnée par le morphisme $X_l \rightarrow X_k$ qui à $\varphi : [l] \rightarrow [n]$ associe $\varphi \circ f : [k] \rightarrow [n]$.

Il sera plus confortable de voir les ensembles $\Delta[n]_k$ de la façon suivante :

$$\Delta[n]_k = \{[p_0, \dots, p_k] \in \mathbb{N}^{k+1}, 0 \leq p_0 \leq \dots \leq p_k \leq n\} \quad (1.2)$$

En effet chaque élément de cet ensemble décrit bien une et une seule application croissante f de $[k]$ dans $[n]$, via la correspondance $p_i = f(i)$.

Les applications faces et dégénérescences dans le cas de $\Delta[n]_\bullet$ sont faciles à expliciter. En effet, on a, pour $0 \leq i, j \leq k$:

$$\partial_i([p_0, \dots, p_k]) = [p_0, \dots, \cancel{p_i}, \dots, p_k] \quad (1.3)$$

$$s_j([p_0, \dots, p_k]) = [p_0, \dots, p_{j-1}, p_j, p_j, p_{j+1}, \dots, p_k] \quad (1.4)$$

Proposition 1.1.2.6. *Pour $k \in \mathbb{N}$, le cardinal de $\Delta[n]_k$ est égal à $\binom{n+k+1}{n}$, et le nombre de simplexes non-dégénérés de $\Delta[n]_k$ est égal à $\binom{n+1}{k+1}$. En particulier, $\Delta[n]_n$ ne contient qu'un seul simplexe non-dégénéré, qui est l'identité $[n] \rightarrow [n]$ ou autrement dit le $(n+1)$ -uplet $[0, 1, \dots, n]$.*

Preuve :

La deuxième assertion est claire, puisqu'il s'agit de choisir $k+1$ nombres différents dans l'ensemble ordonné $\{0, 1, \dots, n\}$. Il faut un peu plus travailler pour la première : un simplexe $[p_0, \dots, p_k]$ est entièrement défini par p_0 et par la liste des "sauts" $(p_1 - p_0, \dots, p_k - p_{k-1})$. On a donc une bijection entre $\Delta[n]_k$ et l'ensemble

$$\{(p_0, (a_1, \dots, a_k)) \in \{0, \dots, n\}^{k+1}, p_0 + \sum_{i=1}^k a_i \leq n\} \quad (1.5)$$

qui à son tour est en bijection avec l'ensemble

$$\{(a_0, \dots, a_{k+1}) \in \{0, \dots, n\}^{k+2}, \sum_{i=0}^{k+1} a_i = n\} \quad (1.6)$$

Or le cardinal de ce dernier ensemble est bien connu puisqu'il s'agit du problème des chaussettes et des tiroirs, ou combien y a-t-il de possibilités de ranger n chaussettes dans $k+2$ tiroirs. Pour calculer ce cardinal il faut voir qu'il suffit de choisir les positions

des $k + 1$ séparations de tiroirs parmi $n + k + 1$ positions possibles. Ce cardinal est donc égal à $\binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{n}$. \square

1.1.2.2 Ensemble simplicial associé à un ensemble

Définition 1.1.2.7. Soit E un ensemble. On peut lui associer un ensemble simplicial, noté $\Delta(E)_\bullet$, dont les simplexes en degré k sont les $k + 1$ -uplets d'éléments de $E : [e_0, \dots, e_k]$. Les faces ∂_i et les dégénérescences s_j de cet ensemble simplicial sont définies par :

$$\partial_i([e_0, \dots, e_k]) = [e_0, \dots, \cancel{e_i}, \dots, e_k] \quad (1.7)$$

$$s_j([e_0, \dots, e_k]) = [e_0, \dots, e_{j-1}, e_j, e_j, e_{j+1}, \dots, e_k] \quad (1.8)$$

1.1.2.3 Réalisation géométrique d'un ensemble simplicial

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le n -simplexe géométrique standard par :

$$\Delta_{\text{géom}}^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=0}^n t_i = 1\} \quad (1.9)$$

Il s'agit donc de l'enveloppe convexe de l'ensemble des vecteurs de la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} . Par exemple, Δ^0 est un point, Δ^1 un segment, Δ^2 un triangle, Δ^3 un tétraèdre, etc.

On définit entre ces ensembles des applications cofaces $\delta^i : \Delta_{\text{géom}}^{n-1} \rightarrow \Delta_{\text{géom}}^n$ et codégénérescences $\sigma^j : \Delta_{\text{géom}}^{n+1} \rightarrow \Delta_{\text{géom}}^n$ comme suit, pour $i, j \in \{0, \dots, n\}$:

$$\delta^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \quad (1.10)$$

$$\sigma^j(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}) \quad (1.11)$$

Avec ces applications, $\Delta_{\text{géom}}^\bullet$ devient un espace cosimplicial.

Soit X_\bullet un ensemble simplicial, dont les applications faces et dégénérescences sont notées respectivement ∂_i et s_j .

On définit sur la réunion $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n$ les identifications suivantes :

$$(\partial_i(\alpha_n), x) \sim (\alpha_n, \delta^i(x)) \quad (1.12)$$

$$(s_j(\alpha_n), x) \sim (\alpha_n, \sigma^j(x)) \quad (1.13)$$

pour $\alpha_n \in X_n$ et $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

Définition 1.1.2.8. On appelle réalisation géométrique de X_\bullet , notée $|X_\bullet|$, le quotient de $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n$ par la relation d'équivalence engendrée par les relations (1.12) et (1.13) ci-dessus.

On remarque que la seconde identification (1.13) implique que pour construire la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial, il suffit de regarder les simplexes non-dégénérés de l'ensemble simplicial.

Lemme 1.1.2.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\Delta[n]_{\bullet}| = \Delta^n$.*

1.1.3 Subdivision d'un ensemble simplicial

Nous présentons maintenant la notion de subdivision d'un ensemble simplicial. Cette notion a été introduite par Bökstedt, Hsiang et Madsen dans leur article [BHM93]. Plus exactement ils introduisent une version plus générale, appelée *r-fold edgewise subdivision*, que celle qui va nous intéresser, cette dernière correspondant en réalité à une *2-fold edgewise subdivision*. Dans leur article, ils mettent notamment en évidence l'existence d'un homéomorphisme entre les réalisations géométriques d'un ensemble simplicial X_{\bullet} et de sa subdivision.

Nous commençons par donner la définition de cette subdivision, puis nous nous intéressons au cas du simplexe combinatoire standard $\Delta[n]_{\bullet}$, notamment en dénombrant quelques-uns des simplexes non-dégénérés de sa subdivision.

1.1.3.1 Définition

Soit X_{\bullet} un ensemble simplicial dont les applications faces (resp. dégénérescences) seront notées ∂_i (resp. s_j). On note $sd_2(X_{\bullet})$ l'ensemble simplicial appelé subdivision de X_{\bullet} défini de la manière suivante : on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$sd_2(X_{\bullet})_n = X_{2n+1} \quad (1.14)$$

et les applications faces $\bar{\partial}_i$ et dégénérescences \bar{s}_j sont données par :

$$\bar{\partial}_i = \partial_i \circ \partial_{i+n+1} : sd_2(X_{\bullet})_n \rightarrow sd_2(X_{\bullet})_{n-1} \quad (1.15)$$

$$\bar{s}_j = s_{j+n+2} \circ s_j : sd_2(X_{\bullet})_n \rightarrow sd_2(X_{\bullet})_{n+1} \quad (1.16)$$

Dans la suite ces applications seront notées indifféremment ∂_i et s_j , sauf en cas de confusion possible.

Intéressons-nous au cas particulier où $X_{\bullet} = \Delta[n]_{\bullet}$: les éléments de $\Delta[n]_k$ peuvent être vus comme des $(k+1)$ -uplets d'entiers $[p_0, \dots, p_k]$ avec $0 \leq p_0 \leq \dots \leq p_k \leq n$. Ainsi les éléments de $sd_2(\Delta[n])_k = \Delta[n]_{2k+1}$ seront notés

$$[p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k], \text{ avec } 0 \leq p_0 \leq \dots \leq p_k \leq q_0 \leq \dots \leq q_k \leq n. \quad (1.17)$$

Pour les applications faces et dégénérescences, on aura :

$$\partial_i(p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k) = (\partial_i(p_0, \dots, p_k), \partial_i(q_0, \dots, q_k)) \quad (1.18)$$

$$s_j(p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k) = (s_j(p_0, \dots, p_k), s_j(q_0, \dots, q_k)) \quad (1.19)$$

1.1.3.2 Quelques dénombrements

Nous allons maintenant dénombrer certains simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n]_{\bullet})$, ces dénombrements s'avéreront utiles pour la suite.

Lemme 1.1.3.1. À un k -simplexe $x = [p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k]$ de $sd_2(\Delta[n]_{\bullet})_k$, on associe la liste de ses "sauts" :

$$(a_1, \dots, a_k, c, b_1, \dots, b_k), \text{ où } a_i = p_i - p_{i-1}, b_i = q_i - q_{i-1} \text{ et } c = q_0 - p_k \quad (1.20)$$

Alors x est non-dégénéré si et seulement si la condition $a_i + b_i > 0$ est respectée pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$.

Preuve :

Il s'agit d'appliquer la définition d'un simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n]_{\bullet})_k$. \square

Proposition 1.1.3.2. L'ensemble des simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n]_{\bullet})_n$ est en bijection avec $\{0, 1\}^n$, son cardinal est par conséquent égal à 2^n .

Preuve :

Soit x un n -simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n]_{\bullet})$ et soit $(a_1, \dots, a_n, c, b_1, \dots, b_n)$ la suite de ses sauts. La somme de ces coefficients ne peut pas dépasser n par définition, ainsi la condition $a_i + b_i > 0$ du lemme précédent devient ici $a_i + b_i = 1$. Cela implique de plus que $c = 0$. On voit ainsi qu'il suffit de connaître $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ pour retrouver le simplexe d'origine. \square

Pour aller plus loin, nous aurons besoin de deux notations pour les calculs à venir :

Pour un entier $a \in \{0, 1, 2\}$, on définit \underline{a} par :

$$\underline{a} = 0 \text{ si } a = 0, \text{ et } \underline{a} = 1 \text{ si } a = 1 \text{ ou } 2 \quad (1.21)$$

Pour un entier $b \in \{0, 1\}$, on définit \bar{b} par :

$$\bar{b} = 0 \text{ si } b = 1, \text{ et } \bar{b} = 1 \text{ si } b = 0 \quad (1.22)$$

Lemme 1.1.3.3. L'ensemble E des simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n]_{\bullet})_{n-1}$ qui présentent n répétitions est en bijection avec l'ensemble $\{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}^{n-1}$.

Preuve :

On remarque tout d'abord que comme un tel simplexe x présente n répétitions, il présente $n - 1$ sauts. Il manque donc nécessairement dans x un et un seul nombre entre 0 et n . À un simplexe x de E , on associe alors :

- d'une part le nombre k qui n'apparaît pas dans x ,
- d'autre part la liste (a_1, \dots, a_{n-1}) des $n - 1$ premiers sauts de x .

On a pour l'instant une application de E dans $\{0, \dots, n\} \times \{0, 1, 2\}^{n-1}$, et à ce stade ce n'est pas une bijection.

On définit alors l'application ϕ suivante :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}^{n-1} \\ x &\longmapsto \left(k, (\underline{a_1}, \dots, \underline{a_{n-1}})\right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

La question est de savoir si on peut retrouver x en connaissant $\phi(x)$.

On commence par remarquer que si $x = [p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{n-1}] \in E$, on a nécessairement $q_0 = p_{n-1}$, compte-tenu du nombre de zéros que l'on doit avoir, et que :

$$p_i - p_{i-1} = 0 \Leftrightarrow q_i - q_{i-1} \neq 0 \quad (1.24)$$

Soit maintenant $(k, (b_1, \dots, b_{n-1})) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}^{n-1}$, on va montrer qu'il existe un unique x tel que $\phi(x) = (k, (b_1, \dots, b_{n-1}))$.

On commence par reconstituer la liste $J = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0, \overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}})$.

Si $k = 0$, on prend x l'unique élément de E commençant par 1 et dont la liste des sauts est J . Alors $\phi(x) = (0, (b_1, \dots, b_{n-1}))$.

De même, si $k = n$, on prend x l'unique élément de E commençant par 0 et dont la liste des sauts est J . Alors $\phi(x) = (n, (b_1, \dots, b_{n-1}))$.

Soit maintenant $k \in \{1, \dots, n-1\}$. On prend alors pour x l'unique élément de E commençant par 0 et dont la liste des sauts est J , mais où le k -ème 1 est remplacé par 2. Alors $\phi(x) = (k, (b_1, \dots, b_{n-1}))$. \square

Proposition 1.1.3.4. *L'ensemble des simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n]_{\bullet})_{n-1}$ se décompose en une réunion disjointe $E \amalg F \amalg G$, où*

$$E \simeq \{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}^{n-1} \quad (1.25)$$

$$F \simeq \{0, 1\}^{n-1} \quad (1.26)$$

$$G \simeq \{1, \dots, n-1\} \times \{0, 1\}^{n-2} \quad (1.27)$$

Son cardinal est donc égal à $3(n+1)2^{n-2}$.

Preuve :

Pour x un simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n])_{n-1}$, on notera $(a_1, \dots, a_{n-1}, c, b_1, \dots, b_{n-1})$ la liste de ses "sauts". Dans cette liste il ne peut y avoir que $n-1$ ou n zéros, sinon on aurait plus de n coefficients non nuls, ce qui est impossible. On distingue alors 3 ensembles E , F et G :

- l'ensemble E des simplexes possédant n répétitions, donc n zéros dans la liste des sauts. On sait par le lemme 1.1.3.3 que E est équipotent à $\{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}^{n-1}$.
- dans l'ensemble des simplexes présentant $n-1$ répétitions, on peut distinguer deux sous-ensembles :
 - le sous-ensemble F des simplexes tels que $c = 1$. Alors on a nécessairement $b_i = \overline{a_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, donc le simplexe x est entièrement déterminé par la liste (a_1, \dots, a_{n-1}) .
 - le sous-ensemble G des simplexes tels que $c = 0$. Alors on a nécessairement $b_i = \overline{a_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, sauf pour un k où $b_k = a_k = 1$. Alors

le simplexe x est entièrement déterminé par la donnée de k et de la liste $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_{n-1})$. \square

1.1.3.3 Signature

Soit $\beta = [p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_n]$ un simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n])_n$. On a vu dans la preuve de la proposition 1.1.3.2 que β est entièrement caractérisé par la liste de ses n premiers sauts (a_1, \dots, a_n) . On associe alors à β la permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ définie par :

$$\begin{aligned}\sigma(i) &= p_i \text{ si } a_i = 1 \\ &= q_i \text{ si } a_i = 0\end{aligned}\tag{1.28}$$

Définition 1.1.3.5. La signature $\varepsilon(\beta)$ d'un simplexe non-dégénéré β de $sd_2(\Delta[n])_n$ est définie comme étant la signature de la permutation associée à β .

Étant donnée une permutation σ , on appelle inversion tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. En notant N le nombre d'inversions de σ , on sait que la signature de σ est donnée par $(-1)^N$. Nous allons maintenant exploiter ceci dans le cadre de la signature d'un simplexe β non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n])_n$.

Il est clair que le couple (i, j) est une inversion pour la permutation associée à β si et seulement si $a_i = 0$ et $a_j = 1$, avec $i < j$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.1.3.6. Soit β un simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n])_n$. Alors le nombre d'inversions N dans la permutation associée à β est donné par l'expression :

$$N = nm - \frac{m(m-1)}{2} - \sum_{i=1}^m d_i\tag{1.29}$$

où m est le nombre de zéros dans la liste de sauts (a_1, \dots, a_n) et les $d_i \in \{1, \dots, n\}$ sont les positions de ces zéros dans (a_1, \dots, a_n) .

Preuve :

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$ le nombre de uns après le i -ème zéro est donné par $n - d_i - (m - i)$. On a donc :

$$\begin{aligned}N &= \sum_{i=1}^m (n - d_i - m + i) \\ &= nm - \sum_{i=1}^m d_i - \sum_{i=1}^m (m - i) \\ &= nm - \sum_{i=1}^m d_i - \frac{m(m-1)}{2}\end{aligned}\tag{1.30}$$

\square

Cette formule nous sera utile dans la suite lorsque nous aurons besoin de comparer les signatures de simplexes ayant des listes de sauts similaires.

1.1.3.4 Réalisation géométrique de $sd_2(\Delta[2]_\bullet)$

En guise d'illustration, nous allons nous intéresser au cas $n = 2$ et construire la réalisation géométrique de $sd_2(\Delta[2]_\bullet)$. Pour cela, il nous faut tout d'abord identifier les simplexes non-dégénérés en degrés 0, 1 et 2, trouver des simplexes non-dégénérés en degrés supérieurs étant impossible. En voici la liste :

- $[0, 0], [0, 1], [0, 2], [1, 1], [1, 2]$ et $[2, 2]$,
- $[0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 2], [0, 0, 1, 2], [1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 2], [0, 1, 1, 1], [0, 1, 1, 2], [0, 1, 2, 2]$ et $[1, 2, 2, 2]$,
- $T_1 = [0, 0, 0, 0, 1, 2], T_2 = [0, 1, 1, 1, 1, 2], T_3 = [0, 1, 2, 2, 2, 2]$ et $T_4 = [0, 0, 1, 1, 2, 2]$

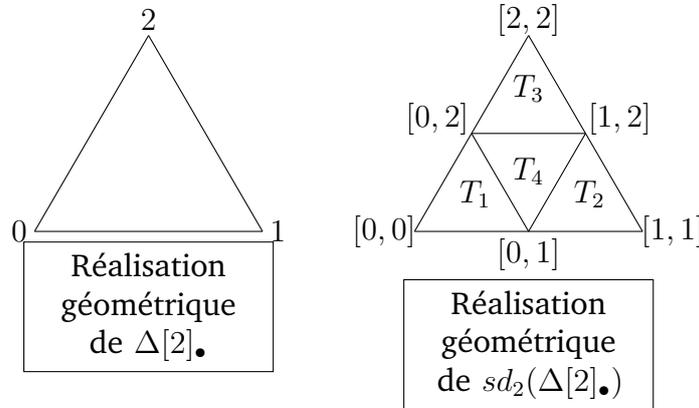
Cela nous permet au passage de valider les dénombrements précédents. On constate en effet qu'il y a 6 simplexes de degré 0 et 9 simplexes de degré 1. Chacun des 4 simplexes de degré 2 est associé à un triangle dans la réalisation géométrique. On remarque de plus que chaque côté de T_4 est identifié à un côté d'un autre triangle. On a en particulier

$$[0, 1, 2, 2] = \partial_0(T_4) = \partial_2(T_3) \quad (1.31)$$

$$[0, 1, 1, 2] = \partial_1(T_4) = \partial_1(T_2) \quad (1.32)$$

$$[0, 0, 1, 2] = \partial_2(T_4) = \partial_0(T_1) \quad (1.33)$$

On donne ci-après la réalisation géométrique de $\Delta[2]_\bullet$ puis de $sd_2(\Delta[2]_\bullet)$. Dans la seconde nous avons indiqué les 4 2-simplexes et placé les 6 0-simplexes. On peut constater que le triangle T_4 a une "orientation" différente des trois autres. On remarque par ailleurs que T_4 est le seul simplexe à avoir une signature négative.



1.2 Algèbre homologique

Cette section va servir à poser les bases de notre travail, en complément de la section précédente. Nous y rappelons les bases de l'algèbre homologique, en définissant en particulier la notion de complexe de chaînes et d'homologie. Nous faisons également le lien avec la section précédente avec les complexes simpliciaux. Pour finir, nous donnons quelques résultats classiques d'algèbre homologique qui nous seront utiles par la suite.

Dans ce qui suit R désignera un anneau commutatif (unitaire).

1.2.1 Complexes de chaînes

Définition 1.2.1.1. On appelle complexe de chaînes (ou complexe) la donnée d'une collection $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de R -modules et d'une collection d'applications R -linéaires $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ telles que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour tout n . Un tel complexe de chaînes est usuellement noté C_* et représenté de la manière suivante :

$$C_* : \cdots \xleftarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}} \cdots$$

Bien que les applications d_n soient a priori toujours différentes, l'usage veut qu'elles soient toutes notées par une même lettre d . Un complexe de chaînes sera donc en général noté de façon abrégée (C_*, d) , et d est appelée la différentielle du complexe C_* .

Un complexe vérifiant $C_n = 0$ pour $n < 0$ sera dit non-négatif.

Définition 1.2.1.2 (Sous-complexe). Soit (C_*, d) un complexe de chaînes. Si, pour tout n , C'_n est un sous-module de C_n et si, pour tout n , $d(C'_n)$ est inclus dans C'_{n-1} , alors le complexe (C'_*, d) est dit sous-complexe de (C_*, d) .

Définition 1.2.1.3 (Complexe quotient). Soient (C_*, d) un complexe et (C'_*, d) un sous-complexe. On définit le quotient C''_* de C_* par C'_* par $C''_n = C_n/C'_n$ pour tout degré n . La différentielle est celle induite par d .

Définition 1.2.1.4. Étant donné un complexe de chaînes (C_*, d) et un entier n , on note $C_*[n]$ le complexe "décalé" défini par $C_k[n] = C_{k+n}$ et dont la différentielle est égale à $(-1)^n d$.

Définition 1.2.1.5. Soient (C_*, d) et (C'_*, d') deux complexes de R -modules. On définit leur produit tensoriel $(C_* \otimes C'_*, d_\otimes)$ par :

$$(C_* \otimes C'_*)_k = \sum_{i+j=k} C_i \otimes_R C'_j \quad (1.34)$$

$$d_\otimes(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{\deg(x)} x \otimes d'(y) \quad (1.35)$$

où $\deg(x)$ désigne le degré de la chaîne x .

Définition-Proposition 1.2.1.6. Soient (C_*, d) et (C'_*, d') deux complexes de R -modules. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note E_n le R -module constitué des applications R -linéaires de C_* dans C'_* de degré n : $E_n = \{f : C_* \rightarrow C'_{*+n}, f \text{ } R\text{-linéaire}\}$. On définit alors $\text{Hom}(C_*, C'_*)$ le complexe de R -modules, égal à E_n en degré n , et dont la différentielle ∂_E est définie par :

$$\partial_E : f \in E_n \longmapsto (-1)^n f \circ d - d' \circ f \quad (1.36)$$

Preuve :

Vérifions que $\partial_E^2 = 0$: soit $f \in E_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \partial_E^2(f) &= \partial_E((-1)^n f \circ d - d' \circ f) \\
 &= (-1)^{n-1}((-1)^n f \circ d - d' \circ f) \circ d - d' \circ ((-1)^n f \circ d - d' \circ f) \\
 &= -f \circ d^2 + (-1)^n d' \circ f \circ d - (-1)^n d' \circ f \circ d + (d')^2 \circ f \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

□

Définition 1.2.1.7 (Chaînes, cycles et bords). *On appellera chaîne de degré n tout élément du module C_n , pour $n \in \mathbb{Z}$. De plus, tout élément du noyau de $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ sera appelé cycle, et ce noyau sera noté Z_n . Enfin, tout élément dans l'image de $d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$ sera appelé bord, et l'ensemble de ces bords sera noté B_n .*

Étant donné un complexe (C_*, d) , on voit que par définition, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a l'inclusion $B_n \subset Z_n$, ce qui nous autorise à calculer le quotient de ces deux espaces.

Définition 1.2.1.8 (Groupes d'homologie). *Soit (C_*, d) un complexe. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $H_n = Z_n/B_n$ et on appelle H_n le n -ème groupe d'homologie du complexe C_* , ce sont en fait encore des R -modules.*

Définition 1.2.1.9 (Acyclicité, suite exacte). *Soit (C_*, d) un complexe. Si en tout degré n on a $H_n(C_*) = 0$, ou de manière équivalente $B_n = Z_n$, on dira que le complexe est acyclique, ou encore qu'il s'agit d'une suite exacte.*

1.2.2 Théorie duale

Il existe une théorie duale à celle que l'on vient de définir : un complexe de cochaînes sera par définition la donnée d'une collection de R -modules $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'une collection d'applications linéaires $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ telles que $d^n \circ d^{n-1} = 0$ pour tout $n > 0$.

On définit alors le n -ième groupe de cohomologie H^n d'un tel complexe de cochaînes par le quotient $\text{Ker}(d^n)/\text{Im}(d^{n-1})$.

1.2.3 Morphismes de complexes

Définition 1.2.3.1 (Morphismes de complexes). *Soient (C_*, d) et (C'_*, d') deux complexes de chaînes. On appellera morphisme de complexes entre ces deux complexes toute collection d'applications linéaires $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $f_n \circ d_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1}$. Un tel morphisme sera alors noté $f_* : C_* \rightarrow C'_*$.*

Remarque 1.2.3.2. *Un morphisme de complexes de (C_*, d) vers (C'_*, d') peut être vu comme un 0-cycle dans $\text{Hom}(C_*, C'_*)$.*

Un morphisme de complexes induit bien évidemment un morphisme de R -modules entre les groupes d'homologie associés aux deux complexes. On a en particulier la définition suivante :

Définition 1.2.3.3 (Quasi-isomorphisme). *On dit qu'un morphisme de complexes $f_* : C_* \rightarrow C'_*$ est un quasi-isomorphisme si pour tout n , l'application induite en homologie entre $H_n(C_*)$ et $H_n(C'_*)$ est un isomorphisme.*

Définition 1.2.3.4 (Morphismes homotopes). *Soient f_* et g_* deux morphismes entre les complexes (C_*, d) et (C'_*, d') . On dit que f et g sont homotopes s'il existe une application $h_* : C_* \rightarrow C'_{*+1}$, appelée homotopie, telle que, pour tout n :*

$$f_n - g_n = h_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ h_n \quad (1.38)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & C_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & C_{n+1} & \longleftarrow \cdots \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow \\ \cdots & \longleftarrow & C'_{n-1} & \xleftarrow{d'_n} & C'_n & \xleftarrow{d'_{n+1}} & C'_{n+1} & \longleftarrow \cdots \end{array}$$

Remarque 1.2.3.5. *Un morphisme de complexes $C_* \rightarrow C'_*$ homotope au morphisme nul peut être vu comme un bord dans $\text{Hom}(C_*, C'_*)$.*

Proposition 1.2.3.6. *Deux morphismes homotopes induisent la même application en homologie.*

Preuve :

Pour un cycle z , nous noterons $[z]$ sa classe en homologie. Soit donc z un cycle de C_* . Alors

$$[(f_* - g_*)(z)] = [h_{n-1}(d_n(z))] + [d'_{n+1}(h_n(z))] = 0 \quad (1.39)$$

car $d'_{n+1}(h_n(z))$ est un bord et $d_n(z) = 0$ par hypothèse. \square

Définition 1.2.3.7 (Équivalence d'homotopie). *On dit qu'un morphisme de complexes $f_* : C_* \rightarrow C'_*$ est une équivalence d'homotopie s'il existe un morphisme $g_* : C'_* \rightarrow C_*$ tel que $f_* \circ g_*$ et $g_* \circ f_*$ sont tous les deux homotopes à l'identité. On dira alors que g_* est un inverse homotopique de f_* , ou qu'il s'agit d'un inverse de f_* à homotopie près. En particulier, une équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme.*

Définition 1.2.3.8 (Homotopie contractante). *Soit C_* un complexe de chaînes. Alors si $\text{id} : C_* \rightarrow C_*$ est homotope au morphisme nul, on dira que le complexe C_* est contractile, et que l'homotopie concernée est contractante.*

1.2.4 Complexe de chaînes simplicial

1.2.4.1 Définition

À tout ensemble S de la catégorie Set , on peut associer un R -module M_S dont la base est l'ensemble S , on a donc un foncteur de Set dans la catégorie $R\text{-Mod}$ des R -modules. Ainsi, étant donné un ensemble simplicial X_\bullet , on peut associer à chaque ensemble X_n un R -module libre dont la base est X_n . On notera ces modules $C_n(X, R)$. On obtient ainsi ce que l'on appelle un module simplicial, qui est en fait la composition des deux

foncteurs $\Delta \rightarrow \text{Set} \rightarrow R\text{-Mod}$.

On définit alors l'application $\partial := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i : C_n(X, R) \rightarrow C_{n-1}(X, R)$. Par un simple calcul, on vérifie que $\partial^2 = 0$, ce qui valide la définition ci-dessous :

Définition 1.2.4.1 (Complexe de chaînes simplicial). *À tout ensemble simplicial, on peut associer le complexe $C_*(X, R)$ constitué des modules $C_n(X, R)$ et de la différentielle $\partial := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i : C_n(X, R) \rightarrow C_{n-1}(X, R)$ agissant sur la base des modules. Ce complexe est appelé complexe de chaînes simplicial associé à l'ensemble simplicial.*

On peut également définir le sous-complexe réduit associé à un ensemble simplicial X_\bullet : pour $n \in \mathbb{N}$ on note $C_n^{\text{deg}}(X, R)$ le R -module dont la base est constituée des n -simplexes dégénérés de X_\bullet .

Proposition 1.2.4.2. *Le complexe $(C_*^{\text{deg}}(X, R), \partial)$ est un sous-complexe contractile de $C_*(X, R)$.*

Définition 1.2.4.3. *On appelle complexe simplicial réduit associé à l'ensemble simplicial X_\bullet le quotient $\overline{C}_*(X, R) := C_*(X, R)/C_*^{\text{deg}}(X, R)$.*

On obtient alors que le morphisme canonique $C_*(X, R) \rightarrow \overline{C}_*(X, R)$ est une équivalence d'homotopie, autrement dit les deux complexes ont la même homologie.

1.2.4.2 Complexe bar d'un ensemble

Définition 1.2.4.4. *Étant donné un ensemble E , le complexe de chaîne simplicial associé à l'ensemble simplicial $\Delta(E)_\bullet$ (définition 1.1.2.7) est appelé complexe bar de E et est noté $C_*^{\text{bar}}(E, R)$, ou simplement $C_*^{\text{bar}}(E)$.*

1.2.5 Longue suite exacte en homologie

On considère le diagramme de complexes suivant :

$$0 \longrightarrow (C'_*, d') \xrightarrow{i} (C_*, d) \xrightarrow{p} (C''_*, d'') \longrightarrow 0 \quad (1.40)$$

Définition 1.2.5.1. *On dira que le diagramme (1.40) ci-dessus est une extension de complexes si, en tout degré n , la suite*

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{p} C''_n \longrightarrow 0 \quad (1.41)$$

est exacte.

Lemme 1.2.5.2. *Dans l'extension (1.40), on considère une section linéaire s du morphisme p . Alors l'application $\delta = d \circ s - s \circ d''$ est un morphisme de complexes de C''_* dans $C'_*[-1]$. De plus, si s' est une autre section de p , le morphisme δ' obtenu est homotope à δ .*

Preuve :

On remarque tout d'abord que $p \circ \delta = p \circ (d \circ s - s \circ d'') = pds - psd'' = d''ps - psd'' = 0$, donc δ est bien à image dans $C'_*[-1]$. Ensuite, on a : $(-d)\delta - \delta d'' = (-d)(ds - sd'') - (ds - sd'')d'' = 0$, donc δ est bien un morphisme de complexes.

Si s' est une autre section de p et δ' le morphisme obtenu, on remarque que :

$$\delta - \delta' = (s' - s)d'' + (-d)(s' - s) \quad (1.42)$$

ainsi δ et δ' sont homotopes via l'homotopie $s' - s$. □

Proposition 1.2.5.3. *Étant donnée l'extension (1.40), on a une longue suite exacte en homologie :*

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_n(C'_*) \longrightarrow H_n(C_*) \longrightarrow H_n(C''_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C'_*) \longrightarrow H_{n-1}(C_*) \longrightarrow \cdots \quad (1.43)$$

l'application δ , appelée flèche de bord, est induite en homologie par le morphisme de complexes $ds - sd''$, où s est une section linéaire à p .

1.2.6 Augmentations, résolutions

1.2.6.1 Définitions

Nous commençons par rappeler les définitions de modules libres et projectifs :

Définition 1.2.6.1. *Soit P un R -module. On dit que P est projectif si, pour tout morphisme surjectif $f : M \rightarrow N$ et tout morphisme $g : P \rightarrow N$, il existe un morphisme $h : P \rightarrow M$ faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow h & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{g} & N \end{array} \quad (1.44)$$

Définition 1.2.6.2. *Soit L un R -module. On dit que L est libre s'il possède une base B , c'est-à-dire une partie de L telle que tout élément de L s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire finie d'éléments de B .*

On peut faire le lien entre ces deux notions via le résultat classique suivant :

Proposition 1.2.6.3. *Un R -module est projectif si et seulement si il est facteur direct d'un R -module libre. En particulier, un R -module libre est projectif.*

Dans cette thèse nous manipulerons surtout des modules sur des algèbres complexes. Le résultat suivant permet une caractérisation des A -modules libres dans le cas où A est une telle algèbre :

Proposition 1.2.6.4. *Soit A une algèbre complexe et M un A -module. Alors M est libre si et seulement si il existe un espace vectoriel complexe V tel que $M = A \otimes_{\mathbb{C}} V$.*

Et nous aurons besoin également des résultats suivants :

Proposition 1.2.6.5. *Soient A et B deux algèbres complexes uniales et $f : B \rightarrow A$ un morphisme d'algèbres. Alors A peut être vu comme un B -module. De plus, si A est un B -module projectif, alors tout A -module projectif est un B -module projectif.*

Preuve :

A peut en effet être vu comme B -module via l'application $(b, a) \in B \times A \mapsto f(b)a$. Si M est un A -module, c'est aussi un B -module via l'application $(b, m) \in B \times M \mapsto f(b)m$. Si A est projectif en tant que B -module, alors il existe un B -module M_B et un espace vectoriel complexe V tel que $A \oplus M_B = B \otimes_{\mathbb{C}} V$. De même, si M est un A -module projectif, il existe un A -module M_A et un espace vectoriel complexe W tel que $M \oplus M_A = A \otimes_{\mathbb{C}} W$. Alors :

$$\begin{aligned} M \oplus (M_A \oplus (M_B \otimes_{\mathbb{C}} W)) &= (M \oplus M_A) \oplus (M_B \otimes_{\mathbb{C}} W) = (A \otimes_{\mathbb{C}} W) \oplus (M_B \otimes_{\mathbb{C}} W) \\ &= (A \oplus M_B) \otimes_{\mathbb{C}} W = (B \otimes_{\mathbb{C}} V) \otimes_{\mathbb{C}} W = B \otimes_{\mathbb{C}} (V \otimes_{\mathbb{C}} W) \end{aligned} \quad (1.45)$$

ainsi M est projectif en tant que B -module. \square

Proposition 1.2.6.6. *Soit A une algèbre complexe et L un A -module libre. Alors la tensorisation par L est un foncteur qui envoie les A -modules projectifs sur des A -modules projectifs.*

Preuve :

Soit V un espace vectoriel complexe tel que $L = A \otimes_{\mathbb{C}} V$ et soit P un A -module projectif, i.e. il existe un A -module M et un espace vectoriel complexe W tels que $P \oplus M = A \otimes_{\mathbb{C}} W$. Alors :

$$\begin{aligned} (P \otimes_A L) \oplus (M \otimes_A L) &= (P \oplus M) \otimes_A L = (A \otimes_{\mathbb{C}} W) \otimes_A L \\ &= (A \otimes_{\mathbb{C}} V) \otimes_A (A \otimes_{\mathbb{C}} W) = A \otimes_{\mathbb{C}} (V \otimes_{\mathbb{C}} W) \end{aligned} \quad (1.46)$$

\square

Définition 1.2.6.7 (Complexe augmenté). *Soit (C_*, d) un complexe non-négatif et soit ε une application linéaire de C_0 dans un R -module M telle que $\varepsilon \circ d_1 = 0$. Alors le nouveau complexe*

$$M \xleftarrow{\varepsilon} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} \dots \quad (1.47)$$

est appelé complexe augmenté, et ε est appelé morphisme d'augmentation.

Définition 1.2.6.8 (Résolution). *Soient (C_*, d) un complexe non-négatif et $\tilde{C}_* : M \leftarrow C_*$ une augmentation de ce complexe. On dira que \tilde{C}_* est une résolution de M si ce complexe est acyclique.*

En particulier, ceci implique que $H_n(C_) = 0$ pour $n > 0$ et que M est isomorphe à $H_0(C_*) = C_0 / \text{Im}(d_1)$.*

Remarque 1.2.6.9. Dire que \tilde{C}_* est une résolution de M revient à dire que la flèche d'augmentation $\varepsilon : C_0 \rightarrow M$ définit un quasi-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 \longleftarrow \dots \\ & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & M & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \longleftarrow \dots \end{array} \quad (1.48)$$

On dira qu'une résolution du module M est projective si les modules qui la composent sont projectifs. En pratique on recherchera des résolutions par des modules libres, qui sont alors projectifs.

1.2.6.2 Augmentation du complexe bar associé à un ensemble

Soit E un ensemble. On note habituellement ε le morphisme d'augmentation $C_0^{\text{bar}}(E, R) \rightarrow R$ qui à tout 0-simplexe associe 1_R . Le complexe bar de E ainsi augmenté est alors contractile. En effet, choisissant un point de base $e \in E$, l'application h définie par :

$$\begin{aligned} h : [e_0, \dots, e_k] &\longmapsto [e, e_0, \dots, e_k] \\ 1_R &\longmapsto [e] \end{aligned} \quad (1.49)$$

est une homotopie contractante du complexe bar augmenté. On a ainsi :

Proposition 1.2.6.10. *Le complexe bar de l'ensemble E est une résolution de R , son homologie est donc nulle sauf en degré 0 où elle vaut R .*

1.2.6.3 Utilisation dans le calcul de foncteurs dérivés

On rappelle qu'un foncteur additif d'une catégorie abélienne \mathcal{C} dans une autre catégorie abélienne \mathcal{C}' est dit exact à droite si, pour toute suite exacte d'objets de \mathcal{C}

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad (1.50)$$

on obtient après action du foncteur la suite exacte :

$$F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0 \quad (1.51)$$

Pour M un objet de \mathcal{C} , on considère une résolution projective M_* :

$$0 \leftarrow M \leftarrow M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow M_2 \dots \quad (1.52)$$

Alors on définit les foncteurs dérivés de F en M comme étant les groupes d'homologie du complexe $F(M_*)$: on note $H_i(F(M_*)) = L_i F(M)$.

1.2.7 Bicomplexes

Un bicomplexe de R -modules est la donnée d'une collection doublement indexée $C_{p,q}$ de R -modules et de deux différentielles, l'une verticale d_v et l'autre horizontale d_h .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \downarrow d_v & & \downarrow d_v \\
 \leftarrow & C_{p,q+1} & \xleftarrow{d_h} & C_{p+1,q+1} & \xleftarrow{d_h} \\
 & \downarrow d_v & & \downarrow d_v & \\
 \leftarrow & C_{p,q} & \xleftarrow{d_h} & C_{p+1,q} & \xleftarrow{d_h} \\
 & \downarrow d_v & & \downarrow d_v & \\
 & & & &
 \end{array}
 \tag{1.53}$$

Ces deux différentielles vérifient en outre les relations

$$d_v \circ d_v = d_h \circ d_h = d_v \circ d_h + d_h \circ d_v = 0 \tag{1.54}$$

Définition 1.2.7.1. *Étant donné un bicomplexe C_{**} , on définit son complexe total comme étant le complexe*

$$(TotC)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} \tag{1.55}$$

dont la différentielle, qui sera dans la suite souvent notée ∂_T ou ∂_{Tot} , est donnée par la formule $d_h + d_v$.

L'homologie du bicomplexe est alors définie comme étant l'homologie du complexe total associé.

Remarque 1.2.7.2. *Si les modules $C_{p,q}$ sont triviaux pour $p < 0$ et $q < 0$, on dit que le bicomplexe est contenu dans le premier quadrant.*

1.2.8 Quelques résultats utiles...

1.2.8.1 ...d'algèbre homologique

Dans cette sous-section nous donnons quelques résultats d'algèbre homologique auxquels nous pourrons faire référence dans la suite.

Proposition 1.2.8.1 (Lemme des cinq). *Dans une catégorie abélienne, on considère le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow i & & \downarrow j \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'
 \end{array}
 \tag{1.56}$$

tel que les lignes sont exactes, les morphismes g et i sont des isomorphismes, le morphisme f est un épimorphisme et le morphisme j est un monomorphisme.

Alors le morphisme h est un isomorphisme.

Proposition 1.2.8.2. *Le foncteur d'homologie commute avec la somme directe, autrement dit si $\bigoplus_{i \in I} C_{i,*}$ est la somme directe d'une famille $(C_{i,*})_{i \in I}$ de complexes de chaînes, alors on a pour tout n :*

$$H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_{i,*} \right) = \bigoplus_{i \in I} H_n(C_{i,*}) \quad (1.57)$$

Proposition 1.2.8.3. *Soient $M \leftarrow P_*$ et $M \leftarrow P'_*$ deux résolutions d'un R -module M par des R -modules projectifs, et soient ε et ε' les flèches d'augmentation respectives. Alors il existe un morphisme de complexes $f_* : P_* \rightarrow P'_*$ tel que $\varepsilon' \circ f_0 = \varepsilon$. Ce morphisme est unique à homotopie près, ce qui en fait une équivalence d'homotopie.*

Preuve :

On note ∂ et ∂' les différentielles respectives de P_* et P'_* . L'augmentation $\varepsilon' : P'_0 \rightarrow M$ est par définition surjective, donc il existe un morphisme $f_0 : P_0 \rightarrow P'_0$ tel que $\varepsilon' \circ f_0 = \varepsilon : P_0 \rightarrow M$.

Supposons maintenant que, pour un rang $n \geq 0$, nous ayons construit des morphismes $f_k : P_k \rightarrow P'_k$, tels que $f_{k-1} \circ \partial = \partial' \circ f_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. On cherche alors à construire un morphisme $f_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P'_{n+1}$ tel que $f_n \circ \partial = \partial' \circ f_{n+1}$. Notons I'_{n+1} l'image de $\partial' : P'_{n+1} \rightarrow P'_n$. Alors le morphisme $f_n \circ \partial : P_{n+1} \rightarrow P'_n$ est à image dans $I'_{n+1} = \text{Ker}(\partial' : P'_n \rightarrow P'_{n-1})$, en effet on a :

$$\partial' \circ (f_n \circ \partial) = (\partial' \circ f_n) \circ \partial = (f_{n-1} \circ \partial) \circ \partial = 0 \quad (1.58)$$

D'où l'existence du morphisme f_{n+1} recherché, et par suite l'existence du morphisme de complexes f_* .

Soit maintenant g_* un autre morphisme vérifiant les propriétés de la proposition. Nous allons montrer que $\varphi_* := f_* - g_*$ est homotope au morphisme nul en construisant par récurrence une homotopie h_* .

Nous posons tout d'abord $h_n = 0$ pour $n < 0$. Ensuite, on remarque que $\varepsilon' \circ \varphi_0 = 0$. Ainsi, φ_0 est à image dans $\text{Ker}(\varepsilon')$, qui est par définition égal à I'_0 . La flèche $\partial' : P'_1 \rightarrow I'_0$ étant surjective et comme P_0 est projectif, il existe une application R -linéaire $h_0 : P_0 \rightarrow P'_1$ telle que $\varphi_0 = \partial' \circ h_0$.

Supposons maintenant que, pour un rang $n \geq 0$, nous ayons construit des morphismes $h_k : P_k \rightarrow P'_{k+1}$, tels que $\varphi_k = h_{k-1} \circ \partial + \partial' \circ h_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

Le morphisme $\partial' : P'_{n+2} \rightarrow I'_{n+1}$ est par définition surjectif et $\varphi_{n+1} - h_n \circ \partial$ est à image dans $I'_{n+1} = \text{Ker}(\partial' : P'_{n+1} \rightarrow P'_n)$. En effet, on a :

$$\partial' \circ (\varphi_{n+1} - h_n \circ \partial) = \varphi_n \circ \partial - (\varphi_n - h_{n-1} \circ \partial) \circ \partial = 0 \quad (1.59)$$

Par conséquent, il existe $h_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P'_{n+2}$ tel que $\varphi_{n+1} - h_n \circ \partial = \partial' \circ h_{n+1}$.

On a ainsi construit par récurrence une homotopie entre φ_* et le morphisme nul, ce qui revient à dire que les deux morphismes f_* et g_* sont homotopes. \square

Corollaire 1.2.8.4. *Soit (P_*, ∂) un complexe de R -modules projectifs non-négatif. On suppose que P_* est acyclique. Alors P_* est contractile.*

Preuve :

Il suffit de prendre $P'_* = P_*$ et $M = 0$ dans la proposition précédente. \square

Proposition 1.2.8.5. Soit C_{**} un bicomplexe de R -modules tel que $C_{pq} = 0$ si $p \ll 0$ ou si $q \ll 0$ dont toutes les colonnes sont acycliques. Alors le complexe total associé est acyclique.

Preuve :

Quitte à décaler le bicomplexe, on peut supposer que $C_{pq} = 0$ si $p < 0$. En notant $C(n)$ le bicomplexe constitué des n premières colonnes de C_{**} , on a pour tout n la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Tot(C(n)) \longrightarrow Tot(C(n+1)) \longrightarrow C_{n,*}[-n] \longrightarrow 0 \quad (1.60)$$

Comme $C_{n,*}$ est acyclique, la longue suite exacte en homologie donne un isomorphisme $H_*(Tot_*(C(n))) \simeq H_*(Tot_*(C(n+1)))$. On montre ainsi par récurrence que $H_*(Tot_*(C(n))) = 0$ pour tout n . On conclut avec :

$$H_*(Tot(C_{**})) = H_*\left(\lim_{\rightarrow} Tot(C(n))\right) = \lim_{\rightarrow} H_*(Tot(C(n))) = 0 \quad (1.61)$$

□

Proposition 1.2.8.6. On considère l'extension de complexes suivante :

$$0 \longrightarrow (C'_*, d') \xrightarrow{i} (C_*, d) \xrightarrow{p} (C''_*, d'') \longrightarrow 0$$

tel que C'_* est contractile, d'homotopie contractante $h : C'_* \rightarrow C'_*[1]$. Si $s : C''_* \rightarrow C_*$ est une section linéaire de p , alors l'application

$$\sigma = s - h \circ (d \circ s - s \circ d'') \quad (1.62)$$

est un inverse homotopique de p qui est également une section de p , autrement dit on a $p \circ \sigma = id$ et $\sigma \circ p \sim id$.

Preuve :

Commençons par vérifier que σ est un morphisme de complexes :

$$\begin{aligned} d\sigma - \sigma d'' &= d(s - h \circ (d \circ s - s \circ d'')) - (s - h \circ (d \circ s - s \circ d''))d'' \\ &= ds - sd'' - dh(d \circ s - s \circ d'') + h(d \circ s - s \circ d'')d'' \\ &= ds - sd'' - dhds + dhsd'' + hdsd'' \\ &= ds - sd'' - (1 - hd)ds + (1 - hd)sd'' + hdsd'' \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

Ensuite, σ est bien une section de p : comme $ds - sd''$ est à image dans $C'_*[-1]$, la quantité $ph(ds - sd'')$ est nulle et on a directement $p\sigma = ps = 1$.

Posons pour finir $\tilde{h} = h(1 - \sigma p)$: cette application est à images dans $C'_*[1]$ et donc dans $C_*[1]$. De plus, on a $d\tilde{h} + \tilde{h}d = (dh + hd)(1 - \sigma p) = 1 - \sigma p$, \tilde{h} est donc une homotopie entre σp et 1. □

1.2.8.2 ...sur le morphisme d'anti-symétrisation

Nous commençons cette section par l'énoncé d'un lemme très pratique dont nous nous servirons à de nombreuses reprises dans la suite. Celui-ci est évoqué par exemple dans [God98], mais nous en donnons une preuve ici :

Lemme 1.2.8.7. *Soient X et Y deux ensembles et $f, g : C_*^{\text{bar}}(X) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(Y)$ deux morphismes de complexes qui induisent l'identité en homologie. Alors f et g sont homotopes, via l'homotopie :*

$$h : [x_0, \dots, x_n] \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k [f([x_0, \dots, x_k]), g([x_k, \dots, x_n])] \quad (1.64)$$

de sorte que $g - f = \partial h + h \partial$.

Preuve :

Pour plus de clarté on écrira par exemple $f([x_0, \dots, x_k]) = f(0, \dots, k)$.

$$\begin{aligned} \partial \circ h(0, \dots, n) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \partial([f(0, \dots, k), g(k, \dots, n)]) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k [\partial \circ f(0, \dots, k), g(k, \dots, n)] + (-1)^{k+1} [f(0, \dots, k), \partial \circ g(k, \dots, n)] \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k [f \circ \partial(0, \dots, k), g(k, \dots, n)] - \sum_{k=0}^n [f(0, \dots, k), g \circ \partial(k, \dots, n)] \\ &= (g - f)(0, \dots, n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k [f \circ \partial(0, \dots, k), g(k, \dots, n)] \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} [f(0, \dots, k), g \circ \partial(k, \dots, n)] \\ &= (g - f)(0, \dots, n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [f(0, \dots, \cancel{i}, \dots, k), g(k, \dots, n)] \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n (-1)^{k+i} [f(0, \dots, k), g(k, \dots, \cancel{i}, \dots, n)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n [f(0, \dots, k-1), g(k, \dots, n)] - \sum_{k=0}^{n-1} [f(0, \dots, k), g(k+1, \dots, n)] \\ &= (g - f)(0, \dots, n) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k+i+1} [f(0, \dots, \cancel{i}, \dots, k), g(k, \dots, n)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{k+i} [f(0, \dots, k), g(k, \dots, \cancel{i}, \dots, n)] \\ &= (g - f)(0, \dots, n) - h \circ \partial(0, \dots, n) \end{aligned}$$

L'hypothèse que f et g doivent induire l'identité en homologie peut se traduire par le fait que, pour tout $x \in C_0^{\text{bar}}(X)$, la somme des coefficients des chaînes $f(x)$ et $g(x)$ vaut

1 ce qui permet d'assurer que, par exemple, $\partial(f(x), g(x)) = g(x) - f(x)$. \square

Définition 1.2.8.8. Soit X un ensemble et $n \in \mathbb{N}$. Alors le groupe symétrique \mathfrak{S}_{n+1} agit sur $C_n^{bar}(X)$ de la façon suivante :

$$\text{pour } [x_0, \dots, x_n] \in C_n^{bar}(X) \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}, \sigma[x_0, \dots, x_n] = [x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}] \quad (1.65)$$

Définition 1.2.8.9. Soit X un ensemble. On définit le morphisme d'anti-symétrisation $\pi_{as} : C_*^{bar}(X) \rightarrow C_*^{bar}(X)$ par :

$$\pi_{as} : [x_0, \dots, x_n] \mapsto \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon_\sigma \sigma[x_0, \dots, x_n] \quad (1.66)$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ .

Proposition 1.2.8.10. Dans la formule 1.66, si $x_i = x_j$ pour un couple d'indices (i, j) , alors $\pi_{as}([x_0, \dots, x_n]) = 0$.

Preuve :

Notons τ la transposition $(i j)$. Alors $\tau[x_0, \dots, x_n] = [x_0, \dots, x_n]$ et on a donc :

$$\begin{aligned} \pi_{as}([x_0, \dots, x_n]) &= \pi_{as}(\tau[x_0, \dots, x_n]) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon_\sigma \sigma \tau[x_0, \dots, x_n] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon_{\sigma' \tau} \sigma'[x_0, \dots, x_n] \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon_{\sigma'} \sigma'[x_0, \dots, x_n] \\ &= -\pi_{as}([x_0, \dots, x_n]) \end{aligned} \quad (1.67)$$

\square

Remarque 1.2.8.11. La preuve précédente fonctionne si R n'est pas de caractéristique 2, mais dans la suite de ce travail ce sera le cas.

Proposition 1.2.8.12. Soit X un ensemble. Le morphisme π_{as} est homotope à l'identité de $C_*^{bar}(X)$ via l'homotopie :

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [\pi_{as}([x_0, \dots, x_i]), x_i, \dots, x_n] \quad (1.68)$$

Preuve :

En degré 0, on a $\pi_{as}([x]) = [x]$, ce morphisme induit donc l'identité en homologie et on peut alors appliquer le lemme 1.2.8.7. \square

1.3 Morphisme entre un complexe simplicial et sa subdivision

Pour conclure ce chapitre, nous mettons en évidence dans cette section l'existence d'un morphisme de complexes entre le complexe associé à un ensemble simplicial et celui associé à sa subdivision (définition 1.1.3.1). Pour cela, nous nous occupons du cas du simplexe combinatoire standard $\Delta[n]$, le passage au cas général étant facilité par la fonctorialité.

1.3.1 Retour sur la subdivision d'un ensemble simplicial

Dans leur article [BHM93], les auteurs établissent l'existence d'un homéomorphisme entre la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial et celle de sa subdivision. Voici comment ils procèdent : on définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $D : \Delta^n \rightarrow \Delta^{2n+1}$ par :

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto \frac{1}{2}(t_0, \dots, t_n, t_0, \dots, t_n) \quad (1.69)$$

où Δ^n est le n -simplexe géométrique défini en section 1.1.2.3.

Rappelons que la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est construite à partir de $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n$, quotienté par les relations (1.12) et (1.13). L'application D permet alors de passer de l'une à l'autre comme le montre le diagramme :

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}} sd_2(X_n) \times \Delta^n = \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_{2n+1} \times \Delta^n \xrightarrow{id \times D} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_{2n+1} \times \Delta^{2n+1} \quad (1.70)$$

Il est alors montré dans [BHM93] que ceci induit un homéomorphisme $f : |sd_2(X_\bullet)| \rightarrow |X_\bullet|$, nous n'en donnons pas ici de démonstration.

Le constat important est que, par cette construction, l'intérieur d'un k -simplexe non-dégénéré de $|sd_2(X_\bullet)|$ sera envoyé dans l'intérieur d'un k' -simplexe de $|X_\bullet|$ avec $k' \geq k$. Il en découle que l'inverse de f est cellulaire, c'est à dire qu'elle respecte les squelettes. Il est alors connu (par exemple [Dol72], V.6) qu'une telle application induit un morphisme naturel σ entre les complexes simpliciaux associés $C_*(X_\bullet) \rightarrow C_*(sd_2(X_\bullet))$.

Dans le cas où X_\bullet est le simplexe combinatoire standard, en degré n , ce morphisme envoie l'unique n -simplexe non-dégénéré de $\Delta[n]_n$, $\alpha = [0, 1, \dots, n]$ sur une combinaison linéaire des 2^n simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n]_n)$:

$$\sigma(\alpha) = \sum_{\gamma_i} \lambda_i \gamma_i \quad (1.71)$$

On sait par ailleurs que les coefficients λ_i de cette combinaison linéaire sont égaux à $+1$ ou -1 , du fait que l'application f soit un homéomorphisme.

Cependant, dans ce qui suit, nous allons expliciter ces coefficients et prouver concrètement que l'application σ ainsi définie constitue bien un morphisme de complexes, d'abord pour $\Delta[n]_\bullet$ puis pour un ensemble simplicial quelconque.

1.3.2 Le cas $X_\bullet = \Delta[n]_\bullet$.

Définition 1.3.2.1. Soient, pour $k \leq n$, $\gamma = [p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k]$ un simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[k])_k$ et $x = [x_0, \dots, x_k]$ un simplexe non-dégénéré de $\Delta[n]_k$. Alors on note $f_\gamma(x)$ le simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n])_k$ défini par :

$$f_\gamma(x) = [x_{p_0}, \dots, x_{p_k}, x_{q_0}, \dots, x_{q_k}] \quad (1.72)$$

On construit le morphisme $\sigma_* : \overline{C}_*(X_\bullet) \rightarrow \overline{C}_*(sd_2(X_\bullet))$ recherché de la façon suivante :

Définition 1.3.2.2. Soit x un simplexe non-dégénéré de $\Delta[n]_k$. Alors l'image de x par σ_* est donnée par :

$$\sigma_*(x) = \sum \varepsilon(\gamma) f_\gamma(x) \quad (1.73)$$

la somme portant sur la totalité des 2^k simplexes non-dégénérés γ de $sd_2(\Delta[k])_k$, et $\varepsilon(\gamma)$ étant la signature du simplexe γ , définie en 1.1.3.5.

Nous allons montrer que l'application σ définie ci-dessus est bien un morphisme de complexes. Il est clair que compte-tenu de la construction de cette application, il suffit de vérifier la commutativité du diagramme ci-dessous, pour $\alpha = [0, 1, \dots, n]$ l'unique simplexe non-dégénéré de $\Delta[n]_n$:

$$\begin{array}{ccc} C_{n-1}(\Delta[n]) & \xleftarrow{\partial} & C_n(\Delta[n]) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ C_{n-1}(sd_2(\Delta[n])) & \xleftarrow{\partial} & C_n(sd_2(\Delta[n])) \end{array} \quad (1.74)$$

L'idée est de travailler non pas sur les simplexes eux-mêmes directement, mais sur leur liste de sauts (définie dans le lemme 1.1.3.1).

On rappelle (proposition 1.1.3.4) que l'ensemble des simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n]_{n-1})$ se décompose en trois ensembles E, F et G où :

- E est l'ensemble des simplexes présentant n répétitions,
- F est l'ensemble des simplexes présentant $n - 1$ répétitions et un "saut" au milieu,
- G est l'ensemble des simplexes présentant $n - 1$ répétitions dont une au milieu,

avec les bijections suivantes :

$$E \simeq \{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}^{n-1} \quad (1.75)$$

$$F \simeq \{0, 1\}^{n-1} \quad (1.76)$$

$$G \simeq \{1, \dots, n - 1\} \times \{0, 1\}^{n-2} \quad (1.77)$$

Ces trois bijections vont permettre de "coder" les simplexes non-dégénérés qui vont apparaître. De la même manière, nous allons "coder" les applications faces ∂_k :

Définition 1.3.2.3. On considère les applications $\widetilde{\partial}_k : \{0, 1\}^n \rightarrow E \amalg F \amalg G$ définies par :

$$\widetilde{\partial}_0(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} (a_2, \dots, a_n) \in F & \text{si } a_1 = 0 \\ (0, (a_2, \dots, a_n)) \in E & \text{si } a_1 = 1 \end{cases} \quad (1.78)$$

$$\widetilde{\partial}_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} (n, (a_1, \dots, a_{n-1})) \in E & \text{si } a_n = 0 \\ (a_1, \dots, a_{n-1}) \in F & \text{si } a_n = 1 \end{cases} \quad (1.79)$$

et pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$\widetilde{\partial}_k(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} (k, (a_1, \dots, \cancel{a_k}, a_{k+1}, \dots, a_n)) \in G & \text{si } a_k \neq a_{k+1} \\ \left((1 - a_k) \left(k + \sum_{i=k}^n a_i \right) + a_k \sum_{i=1}^k a_i, (a_1, \dots, \cancel{a_k}, \dots, a_n) \right) \in E & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.80)$$

Ces applications sont construites de façon à ce que l'on ait :

Proposition 1.3.2.4. Les diagrammes ci-dessous, où *ND* signifie "non-dégénéré", sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \{x \in sd_2(\Delta[n])_n, x \text{ ND}\} & \xrightarrow{\simeq} & \{0, 1\}^n \\ \partial_k \downarrow & & \downarrow \widetilde{\partial}_k \\ \{x \in sd_2(\Delta[n])_{n-1}, x \text{ ND}\} & \xrightarrow{\simeq} & E \amalg F \amalg G \end{array} \quad (1.81)$$

On commence par s'intéresser au sens $\sigma \circ \partial$ du diagramme 1.74. Tout d'abord, il est immédiat que l'on a :

Lemme 1.3.2.5. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$ et γ un simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n-1])_{n-1}$. On identifie γ à sa liste de sauts dans $\{0, 1\}^{n-1}$, conformément à la proposition 1.1.3.2. Alors le simplexe $f_\gamma(\partial_i(\alpha))$ s'identifie à l'élément (i, γ) de E .

En conséquence :

Lemme 1.3.2.6. Dans la combinaison linéaire $\sigma \circ \partial(\alpha)$ ne figurent que les éléments de E , et chacun de ces éléments (i, γ) est associé au coefficient $(-1)^i \varepsilon(\gamma)$ où, pour $\gamma \in \{0, 1\}^{n-1}$, $\varepsilon(\gamma)$ désigne la signature du simplexe non-dégénéré associé à γ .

Preuve :

En effet : $\sigma \circ \partial(\alpha) = \sigma \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(\alpha) \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma(\partial_i(\alpha)) = \sigma \circ \partial(\alpha) = \sum_{i=0}^n \sum_{\gamma} (-1)^i \varepsilon(\gamma) f_\gamma(\partial_i(\alpha))$,

où la dernière somme porte sur les 2^{n-1} simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n-1])_{n-1}$. On conclut avec le lemme précédent. \square

Intéressons-nous maintenant au sens $\partial \circ \sigma$ de (1.74), en remarquant tout d'abord que, comme $f_\beta(\alpha) = \beta$ pour tout simplexe non-dégénéré β de $sd_2(\Delta[n])_n$, on a :

$$\partial \circ \sigma(\alpha) = \sum_{j=0}^n \sum_{\beta} (-1)^j \varepsilon(\beta) \partial_j(\beta) \quad (1.82)$$

la dernière somme portant sur les simplexes non-dégénérés β de $sd_2(\Delta[n])_n$.

Nous allons observer chacun des simplexes intervenant dans cette somme, en se servant en particulier de la formule sur la signature figurant dans la proposition 1.1.3.6 :

Lemme 1.3.2.7. Soient $\beta = (0, a_1, \dots, a_{n-1})$ et $\beta' = (a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$ des simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n])_n$, identifiés à des éléments de $\{0, 1\}^n$. Alors :

$$(-1)^0 \varepsilon(\beta) \partial_0(\beta) + (-1)^n \varepsilon(\beta') \partial_n(\beta') = 0 \quad (1.83)$$

Ainsi, tous les simplexes de F apparaissent exactement deux fois dans $\partial \circ \sigma(\alpha)$ mais avec des signes opposés, et se simplifient donc.

Preuve :

Grâce à la formule sur la signature, on établit rapidement que l'on a $\varepsilon(\beta) = (-1)^{n+1} \varepsilon(\beta')$. Enfin, compte-tenu des applications $\widetilde{\partial}_j$, l'élément $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in F$ ne peut être obtenu que de ces deux façons. \square

Lemme 1.3.2.8. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\beta = (a_1, \dots, 0, 1, \dots, a_{n-2}) \text{ et } \beta' = (a_1, \dots, 1, 0, \dots, a_{n-2})$$

deux simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n])_n$, identifiés à des éléments de $\{0, 1\}^n$, où le 0 et le 1 sont en place k et $k+1$. Alors :

$$(-1)^k \varepsilon(\beta) \partial_k(\beta) + (-1)^k \varepsilon(\beta') \partial_k(\beta') = 0 \quad (1.84)$$

Ainsi, tous les simplexes de G apparaissent exactement deux fois dans $\partial \circ \sigma(\alpha)$ mais avec des signes opposés, et se simplifient donc.

Preuve :

Comme pour la preuve précédente, la formule sur la signature permet d'affirmer que $\varepsilon(\beta) = -\varepsilon(\beta')$. Et ici encore, compte-tenu des applications $\widetilde{\partial}_j$, l'élément $(k, (a_1, \dots, a_{n-2})) \in G$ ne peut être obtenu que de ces deux façons. \square

Les deux lemmes précédents permettent d'affirmer :

Proposition 1.3.2.9. Dans la combinaison linéaire $\partial \circ \sigma(\alpha)$, tous les éléments de F et G se simplifient, et il ne reste par conséquent que les éléments de E .

Le but maintenant est donc, pour chaque simplexe γ de E , de comparer le signe qui lui est associé dans $\sigma \circ \partial(\alpha)$ puis dans $\partial \circ \sigma(\alpha)$. Dans la suite γ désignera un simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n-1])_{n-1}$, identifié à sa liste de sauts $S = (a_1, \dots, a_{n-1})$. On pose de plus $s = \sum_{p=1}^{n-1} a_p$.

Lemme 1.3.2.10. Soit les simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n])_n$ β et β' identifiés à leurs listes de sauts, respectivement $(1, a_1, \dots, a_{n-1})$ et $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$. Alors :

$$(-1)^0 \varepsilon(\gamma) f_\gamma(\partial_0(\alpha)) = (-1)^0 \varepsilon(\beta) \partial_0(\beta) \quad (1.85)$$

$$(-1)^n \varepsilon(\gamma) f_\gamma(\partial_n(\alpha)) = (-1)^n \varepsilon(\beta') \partial_n(\beta') \quad (1.86)$$

Preuve :

Les égalités entre simplexes sont immédiates via les applications $\widetilde{\partial}_0$ et $\widetilde{\partial}_n$, et on constate aisément les égalités de signatures via la formule. \square

Lemme 1.3.2.11. *Soit $1 \leq i \leq n - 1$. Alors :*

— si $i \leq s$, on a :

$$(-1)^i \varepsilon(\gamma) f_\gamma(\partial_i(\alpha)) = (-1)^k \varepsilon(\beta) \partial_k(\beta) \quad (1.87)$$

où k est l'indice du i -ème 1 dans S et β est le simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n])_n$ associé à la liste de sauts $(a_1, \dots, a_{k-1}, 1, 1, a_{k+1}, \dots, a_{n-1})$

— si $i > s$, on a :

$$(-1)^i \varepsilon(\gamma) f_\gamma(\partial_i(\alpha)) = (-1)^l \varepsilon(\beta') \partial_l(\beta') \quad (1.88)$$

où l est tel que \bar{a}_l est le i -ème 1 dans la liste complétée $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})$ et β' est le simplexe non-dégénéré de $sd_2(\Delta[n])_n$ associé à la liste de sauts $(a_1, \dots, a_{l-1}, 0, 0, a_{l+1}, \dots, a_{n-1})$.

Preuve :

Dans le premier cas, on vérifie facilement via l'application $\widetilde{\partial}_k$ que $f_\gamma(\partial_i(\alpha)) = \partial_k(\beta)$ puisqu'en particulier on a $i = \sum_{p=1}^k a_p$. De plus, on constate, grâce à la formule de la signature, que :

$$\varepsilon(\gamma) = (-1)^{k-i} \varepsilon(\beta) \quad (1.89)$$

On procède de la même façon pour le second cas, en remarquant cette fois que $i = l + \sum_{p=l}^{n-1} a_p$. \square

Nous avons alors montré :

Théorème 1.3.2.12. *L'application $\sigma : C_*(\Delta[n]_\bullet) \rightarrow C_*(sd_2(\Delta[n]_\bullet))$ définie par :*

$$\beta \longmapsto \sum_{\gamma} \varepsilon(\gamma) f_\gamma(\beta),$$

la somme portant sur l'ensemble des $$ -simplexes γ non-dégénérés de $sd_2(\Delta[n]_\bullet)$, est un morphisme de complexes.*

1.3.3 Le cas général

Soit X_\bullet un ensemble simplicial et soit $\alpha = [0, \dots, n]$ l'unique simplexe non-dégénéré de $\Delta[n]_n$.

Alors pour tout simplexe $\beta \in X_n$, il existe un unique morphisme simplicial $g_\beta : \Delta[n]_\bullet \rightarrow X_\bullet$ tel que $g_\beta(\alpha) = \beta$.

On définit le morphisme de complexes $\sigma_* : C_*(X_\bullet) \rightarrow C_*(sd_2(X_\bullet))$ par :

$$\forall \beta \in X_n, \sigma_*(\beta) = \sum \varepsilon(\gamma) sd_2(g_\beta)(\gamma),$$

la somme portant sur la totalité des 2^n simplexes non-dégénérés γ de $sd_2(\Delta[n])_n$, de sorte que le diagramme ci-dessous commute en β :

$$\begin{array}{ccc}
 C_n(X_\bullet) & \xleftarrow{g_\beta} & C_n(\Delta[n]) \\
 \sigma_* \downarrow & & \sigma_* \downarrow \\
 C_n(sd_2(X_\bullet)) & \xleftarrow{sd_2(g_\beta)} & C_n(sd_2(\Delta[n]))
 \end{array}$$

2 Homologie cyclique

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler, pour une algèbre associative, les définitions générales des théories d'homologie qui nous intéressent dans cette thèse : d'abord l'homologie de Hochschild, puis l'homologie cyclique et enfin l'homologie cyclique périodique. Nous terminons en adaptant ces définitions aux algèbres de Fréchet, dont fera partie l'algèbre de Schwartz $\ell_{RD}^1(\Gamma)$.

2.1 Cadre général

Dans cette section on s'intéresse aux définitions purement algébriques des différentes homologies étudiées. Dans ce qui suit A désignera une algèbre associative sur le corps \mathbb{C} , sans propriété supplémentaire, sauf exceptions éventuelles qui seront évidemment précisées. On notera de plus \tilde{A} l'algèbre A à laquelle on ajoute une unité 1 . Autrement dit, on aura $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}1$ en tant qu'espace vectoriel.

Les différentes homologies que nous allons voir s'appuient sur l'algèbre des formes différentielles algébriques sur l'algèbre A . Nous commençons par définir cette algèbre et nous présentons ensuite les différentes homologies, en précisant les liens importants existant entre elles.

2.1.1 Formes différentielles algébriques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'algèbre des formes différentielles algébriques de degré n sur A comme l'algèbre $\Omega^n A := \tilde{A} \otimes A^{\otimes n}$, dont les éléments sont habituellement notés $a^0 da^1 \cdots da^n$, au lieu de $a^0 \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n$. On pose par ailleurs $\Omega^0 A := A$.

L'opérateur d est une dérivation, permettant de passer du degré n au degré $n + 1$ en tenant compte des propriétés suivantes :

$$d(a^0 da^1 \cdots da^n) = da^0 da^1 \cdots da^n, d1 = 0, d(ab) = a(db) + (da)b \text{ et } d^2 = 0 \quad (2.1)$$

L'algèbre graduée des formes différentielles algébriques sur A est alors notée $\Omega A := \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n A$.

2.1.2 Homologie de Hochschild

2.1.2.1 L'approche par les formes différentielles

Définition 2.1.2.1. *Le complexe de Hochschild de l'algèbre A noté $C_*(A)$ est le complexe Ω^*A muni de la différentielle b , appelée bord de Hochschild et définie par :*

$$\begin{aligned} b(a^0 da^1 \cdots da^n) &= a^0 a^1 da^2 \cdots da^n + (-1)^n a^n a^0 da^1 \cdots da^{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a^0 da^1 \cdots d(a^i a^{i+1}) \cdots da^n \\ &= (-1)^{n-1} [a^0 da^1 \cdots da^{n-1}, a^n] \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'homologie de ce complexe est alors appelée homologie de Hochschild de l'algèbre A , notée $HH_*(A)$.

On remarque l'identification $\Omega^n A = \tilde{A} \otimes A^{\otimes n} = A^{\otimes(n+1)} \oplus A^{\otimes n}$, ce qui nous amène à voir le complexe de Hochschild comme le complexe total d'un bicomplexe composé de deux colonnes :

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' \\ A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} \\ \downarrow b & & \downarrow -b' \\ A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} \\ \downarrow b & & \downarrow -b' \\ A & \xleftarrow{1-t} & A \end{array} \quad (2.3)$$

où t est l'opérateur cyclique $(a^0, \dots, a^n) \mapsto (-1)^n (a^n, a^0, a^1, \dots, a^{n-1})$ et b' est l'opérateur vérifiant

$$\begin{aligned} b'(a^0, \dots, a^n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a^0, \dots, a^i a^{i+1}, \dots, a^n) \\ &= b(a^0, \dots, a^n) - (-1)^n (a^n a^0, a^1, \dots, a^{n-1}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Autrement dit, on peut voir le complexe de Hochschild comme le complexe $(A^{\otimes(*+1)} \oplus A^{\otimes*}, D)$, où

$$D = \begin{pmatrix} b & 1-t \\ 0 & -b' \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

On peut voir en effet que

$$\begin{aligned} b((a^0 + \lambda \mathbb{1}, a^1, \dots, a^n)) &= b((a^0, a^1, \dots, a^n)) + \lambda(1-t)((a^1, \dots, a^n)) \\ &\quad - \lambda b'((a^1, \dots, a^n)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si A est unitale d'unité 1, la deuxième colonne du bicomplexe ci-dessus est contractile, via l'homotopie

$$h : (a^0, \dots, a^n) \mapsto -(1, a^0, \dots, a^n) \quad (2.7)$$

et on a alors le lemme suivant :

Lemme 2.1.2.2. *Si A est unitale, l'inclusion $i : (A^{\otimes^{*+1}}, b) \rightarrow (A^{\otimes^{*+1}} \oplus A^{\otimes^*}, D)$ est une équivalence d'homotopie.*

Preuve :

On définit $p : A^{\otimes^{*+1}} \oplus A^{\otimes^*} \rightarrow A^{\otimes^{*+1}}$ par $p(\alpha, \beta) = \alpha - (1-t)h(\beta)$. On vérifie alors facilement que $ip - 1 = DH + HD$, avec $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix}$. \square

En conséquence on a :

Proposition 2.1.2.3. *Si A est unitale, le complexe de Hochschild est homotopiquement équivalent au complexe $\tilde{C}_*(A) := (A^{\otimes^{*+1}}, b)$.*

Dans la suite, lorsque l'on parlera de complexe de Hochschild on pensera à ce dernier complexe.

La théorie duale de l'homologie de Hochschild est appelée cohomologie de Hochschild et peut être définie comme l'homologie du complexe $\text{Hom}(C_*(A), \mathbb{C})$ des formes \mathbb{C} -linéaires du complexe de Hochschild. La cohomologie de Hochschild de A est alors notée $HH^*(A)$.

2.1.2.2 L'approche par les foncteurs dérivés

On suppose ici que A est unitale. On s'intéresse à deux foncteurs sur la catégorie des A -bimodules, notée ${}_A\text{Mod}_A$:

$$M \mapsto M_A := M/[M, A] \quad (2.8)$$

qui est exact à droite, et

$$M \mapsto M^A := \{m \in M \mid \forall a \in A, am = ma\} \quad (2.9)$$

qui est exact à gauche.

De plus, pour un A -bimodule M on a les isomorphismes suivants :

$$M_A \simeq A \otimes_{A \otimes A^{op}} M \text{ et } M^A \simeq \text{Hom}_{{}_A\text{Mod}_A}(A, M) \quad (2.10)$$

On peut alors définir l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans le A -bimodule M comme le foncteur dérivé à gauche de $M \mapsto M_A$. De même, on peut définir la cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans le A -bimodule M comme le foncteur dérivé à droite de $M \mapsto M^A$.

En résumé, on peut voir l'homologie de Hochschild de la façon suivante :

$$HH_*(A, M) = \text{Tor}_*^{A \otimes A^{op}}(A, M) \quad (2.11)$$

le foncteur Tor étant le foncteur dérivé du foncteur de tensorisation à droite par le A -bimodule M .

Il peut être intéressant de voir comment les deux définitions de l'homologie de Hochschild $HH_*(A) = HH_*(A, A)$ se rejoignent : si P_* est une résolution projective du A -bimodule A par des A -bimodules, alors $\text{Tor}_*^{A \otimes A^{op}}(A, A)$ est donné par l'homologie du complexe $P_* \otimes_{A \otimes A^{op}} A$. Nous recherchons donc une résolution libre (donc projective) naturelle de ce type. Une telle résolution est alors donnée par les A -bimodules libres $\Omega^n A \otimes_{\mathbb{C}} A \simeq A^{\otimes(n+2)}$, munie de la différentielle $\pm b'$. Remarquant que $A^{\otimes(n+2)} \otimes_{A \otimes A^{op}} A \simeq A^{\otimes(n+1)}$, on retombe sur la définition précédente de l'homologie de Hochschild dans le cas unital, donnée par l'homologie du complexe $(A^{\otimes(*+1)}, b)$.

2.1.3 Homologie cyclique

Reprenons le bicomplexe à deux colonnes précédent (2.3). En posant $N = 1 + t + \dots + t^n$, on constate que l'on peut étendre ce bicomplexe vers la droite de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
 A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} \xleftarrow{N} \dots \\
 \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
 A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} \xleftarrow{N} \dots \\
 \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
 A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & A & \xleftarrow{1-t} & A \xleftarrow{N} \dots
 \end{array} \quad (2.12)$$

en effet, nous avons les relations

$$b(1-t) = (1-t)b', \quad N(1-t) = (1-t)N = 0 \text{ et } Nb = b'N \quad (2.13)$$

L'homologie de ce bicomplexe, appelé bicomplexe cyclique et noté $CC_*(A)$, c'est-à-dire l'homologie du complexe total associé, est appelée homologie cyclique de l'algèbre A , et est notée $HC_*(A)$.

On peut mettre en évidence la périodicité de ce bicomplexe en remarquant que l'on a l'extension de complexes :

$$0 \longrightarrow \text{Tot}(CC_*(2)) \longrightarrow \text{Tot}(CC_*) \longrightarrow \text{Tot}(CC_*)[-2] \longrightarrow 0 \quad (2.14)$$

où $CC_*(2)$ désigne le sous-bicomplexe de CC_* constitué uniquement des deux premières colonnes de celui-ci. Autrement dit, il s'agit du bicomplexe présenté précédem-

ment (2.3) dont le complexe total donne l'homologie de Hochschild.

Cette extension donne lieu a une longue suite exacte, appelée suite exacte de Connes ou suite SBI :

$$\dots \xrightarrow{B} HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \xrightarrow{I} HC_{n-1}(A) \xrightarrow{S} \dots \quad (2.15)$$

L'opérateur S , appelé opérateur de périodicité, est induit par le morphisme canonique encore noté $S : Tot(CC_*) \rightarrow Tot(CC_*)[-2]$ et défini par :

$$S : (\alpha_n, \dots, \alpha_0) \mapsto (\alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0) \quad (2.16)$$

Cette longue suite exacte permet alors d'accéder à l'homologie cyclique en connaissant l'homologie de Hochschild d'une algèbre A .

Il existe plusieurs complexes et bicomplexes permettant d'accéder à l'homologie cyclique. Par exemple, considérons le sous-bicomplexe de CC_* suivant, noté $F_1(CC_*)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ (1-t)A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & \dots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ (1-t)A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & \dots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ (1-t)A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & \dots \end{array} \quad (2.17)$$

Le quotient de CC_* par $F_1(CC_*)$ est un bicomplexe constitué uniquement d'une colonne. Cette colonne est appelée complexe cyclique, ou complexe de Connes et est notée C_*^λ . Elle correspond au complexe des coinvariants sous l'action de l'opérateur t sur la première colonne de CC_* . On note p la surjection $CC_* \rightarrow C_*^\lambda$.

Lemme 2.1.3.1. *Le complexe suivant :*

$$\dots \xleftarrow{N} A^{\otimes n} \xleftarrow{1-t} A^{\otimes n} \xleftarrow{N} A^{\otimes n} \xleftarrow{1-t} \dots \quad (2.18)$$

est contractile, et une homotopie contractante ∇ est donnée par deux morphismes :

$$\nabla_{1,n} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n kt^{n-k} \quad \text{et} \quad \nabla_{2,n} = \frac{1}{n+1} id \quad (2.19)$$

de sorte que :

$$\nabla_2 \circ N + (1-t) \circ \nabla_1 = id \text{ et } \nabla_1 \circ (1-t) + N \circ \nabla_2 = id \quad (2.20)$$

Preuve :

Ces relations s'obtiennent en remarquant que les polynômes $1 - X$ et $1 + X + \dots + X^n$ sont premiers entre eux : on a précisément

$$(1 - X)P_n(X) + (1 + X + \dots + X^n)Q_n(X) = 1 \quad (2.21)$$

avec

$$P_n(X) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n kX^{n-k} \text{ et } Q_n(X) = \frac{1}{n+1} \quad (2.22)$$

On prend alors $\nabla_{1,n} = P_n(t)$ et $\nabla_{2,n} = Q_n(t)$. \square

La conséquence de cette proposition est que les lignes de $F_1(CC_*)$ sont contractiles, comme l'indique le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & (1-t)A^{\otimes n} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes n} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes n} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes n} & \xleftarrow{N} & \dots \\ & & \searrow \nabla_{1,n} & & \searrow \nabla_{2,n} & & \searrow \nabla_{1,n} & & \searrow \nabla_{2,n} & & \\ 0 & \longleftarrow & (1-t)A^{\otimes n} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes n} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes n} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes n} & \xleftarrow{N} & \dots \end{array} \quad (2.23)$$

Proposition 2.1.3.2. *Le complexe total de $F_1(CC_*)$ est contractile et une homotopie contractante est donnée par la formule $\nabla' = \sum_{k=0}^{\infty} (-\nabla \circ \partial_v)^k \nabla$, où ∇ est l'homotopie contractante de ses lignes et ∂_v est sa différentielle verticale.*

Proposition 2.1.3.3. *Le morphisme de projection $p : CC_* \rightarrow C_*^\lambda$ est un quasi-isomorphisme. Ainsi l'homologie du complexe C_*^λ donne l'homologie cyclique de l'algèbre A .*

Preuve :

Il suffit d'écrire la longue suite exacte associée à l'extension

$$0 \longrightarrow F_1(CC_*) \longrightarrow CC_* \longrightarrow C_*^\lambda \longrightarrow 0 \quad (2.24)$$

et d'utiliser le fait que le complexe total de $F_1(CC_*)$ est contractile, donc acyclique. \square

Remarque 2.1.3.4. *Le morphisme p est même une équivalence d'homotopie, puisque $F_1(CC_*)$ est contractile, d'après la proposition 1.2.8.6.*

2.1.4 Explicitation de l'opérateur $\tilde{S} : C_*^\lambda \rightarrow C_*^\lambda[-2]$

On se pose maintenant la question suivante : à quoi ressemble un morphisme $\tilde{S} : C_*^\lambda \rightarrow C_*^\lambda[-2]$ induisant, en homologie, l'opérateur de périodicité $S : HC_*(A) \rightarrow HC_{*-2}(A)$?

Pour répondre à cela, la principale difficulté est tout d'abord de trouver un inverse homotopique à la projection $p : Tot(CC_*) \rightarrow C_*^\lambda$. Le noyau de cette projection, $F_1(CC_*)$,

étant contractile, il nous suffit pour cela de choisir une section linéaire de p , d'après la proposition 1.2.8.6. En notant σ l'inverse homotopique ainsi obtenu, nous pourrions affirmer que le morphisme $\tilde{S} = p \circ S \circ \sigma$ induit en homologie l'opérateur de périodicité S .

Une section possible de p est $s = \nabla_2 \circ N$. Alors la proposition 1.2.8.6 dit que le morphisme de complexes

$$\sigma = s - \nabla' \circ (\partial_T \circ s - s \circ b)$$

est un inverse homotopique de p . On pose alors $\tilde{S} = p \circ S \circ \sigma$. On remarque trois choses :

- la section s étant à image dans la première colonne de CC_* , la composition $S \circ s$ est nulle.
- le flèche de bord $\delta := \partial_T \circ s - s \circ b$ est à image dans la première colonne de $F_1(CC_*)$, donc la composition $S \circ \nabla \circ \delta$ est nulle.
- pour $k \geq 2$, la flèche $S \circ (-\nabla \circ \partial_v)^k \circ \nabla \circ \delta : C_* \lambda \rightarrow Tot_*(CC_*)$ est à image dans $Ker(p)$.

Au final, l'expression de \tilde{S} est simplement :

$$\tilde{S} = p \circ S \circ \nabla \circ \partial_v \circ \nabla \circ \delta \quad (2.25)$$

Nous allons maintenant expliciter la composition $\mu := p \circ S \circ \nabla \circ \partial_v \circ \nabla : F_1(CC_*) \rightarrow C_*^\lambda[-1]$. Soit pour cela $\beta_n \in (1-t)A^{\otimes n}$. Nous allons expliciter l'image par μ de la chaîne $\alpha_n = (\beta_n, 0, \dots, 0) \in Tot_n(F_1(CC_*))$. On a :

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_n) &= p \circ S \circ \nabla \circ \partial_v \circ \nabla(\beta_n, 0, \dots, 0) \\ &= p \circ S \circ \nabla \circ \partial_v(0, \nabla_{1,n}(\beta_n), 0, \dots, 0) \\ &= -p \circ S \circ \nabla(0, b' \circ \nabla_{1,n}(\beta_n), 0, \dots, 0) \\ &= -p \circ S(0, 0, \nabla_{2,n-1} \circ b' \circ \nabla_{1,n}(\beta_n), 0, \dots, 0) \\ &= p(\nabla_{2,n-1} \circ b' \circ \nabla_{1,n}(\beta_n), 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Par conséquent, l'image par μ de la chaîne α_n est donnée par la classe modulo l'image de $1-t$ de :

$$\frac{-1}{n(n+1)} b' \left(\sum_{k=1}^n k t^{n-k} \right) (\beta_n) \quad (2.27)$$

2.1.5 Homologie cyclique périodique

On définit le complexe cyclique périodique de l'algèbre A , noté $\widehat{CC}_*(A)$, comme le complexe total de la limite inverse dénombrable du bicomplexe cyclique $CC_*(A)$ suivant l'opérateur de périodicité S . Autrement dit :

$$\widehat{CC}_*(A) = Tot \left(\varprojlim_{S^n} CC_*(A) \right) \quad (2.28)$$

On remarque que l'on a affaire à un complexe \mathbb{Z}_2 -gradué, avec :

$$\widehat{CC}_0(A) = \prod_{n=0}^{\infty} \Omega^{2n} A \text{ et } \widehat{CC}_1(A) = \prod_{n=0}^{\infty} \Omega^{2n+1} A \quad (2.29)$$

L'homologie cyclique périodique de l'algèbre A , notée $HP_*(A)$, est alors définie comme l'homologie du complexe cyclique périodique $\widehat{CC}_*(A)$. Ce complexe étant \mathbb{Z}_2 -gradué, calculer l'homologie cyclique périodique revient à calculer $HP_0(A)$ et $HP_1(A)$.

De même, on peut regarder le dual du complexe cyclique périodique :

$$\widehat{CC}^*(A) = \text{Hom}(\widehat{CC}_*(A), \mathbb{C}) \quad (2.30)$$

Il s'agit encore d'un complexe \mathbb{Z}_2 -gradué, avec

$$\widehat{CC}^0(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Hom}(\Omega^{2n} A, \mathbb{C}) \text{ et } \widehat{CC}^1(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Hom}(\Omega^{2n+1} A, \mathbb{C}) \quad (2.31)$$

dont l'homologie est appelée cohomologie cyclique périodique, et notée $HP_*(A)$ avec $*$ = 0 ou 1.

L'homologie cyclique périodique est accessible via l'homologie cyclique, de par la définition même du complexe cyclique périodique. Cependant, le foncteur \varprojlim n'étant pas exact, nous n'avons pas, en homologie, en général un isomorphisme entre l'homologie cyclique périodique et la limite inverse de l'homologie cyclique. On a en effet, dans le cas général d'un système projectif à applications surjectives, une suite exacte (voir par exemple [Wei94]) :

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{S^n} {}^1 HC_{*-2n-1}(A) \longrightarrow HP_*(A) \longrightarrow \varprojlim_{S^n} HC_{*-2n}(A) \longrightarrow 0 \quad (2.32)$$

où $\varprojlim_{S^n} {}^1$ désigne le premier foncteur dérivé de \varprojlim_{S^n} , les foncteurs dérivés suivants étant nuls. Par contre, le foncteur de limite directe étant, lui, exact, la cohomologie cyclique périodique est accessible encore plus simplement, puisqu'on a un isomorphisme naturel :

$$HP^*(A) \simeq \varinjlim_{S^n} HC^{*+2n}(A) \quad (2.33)$$

Revenons au bicomplexe cyclique CC_* . Grâce à l'identification $\Omega^n A = \tilde{A} \otimes A^{\otimes n} = A^{\otimes(n+1)} \oplus A^{\otimes n}$, on peut remarquer que $Tot_n(CC_*) = \bigoplus_{k=0}^n A^{\otimes(k+1)} = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^{n-2k} A$.

Il vient alors que l'homologie cyclique de A peut se voir comme l'homologie du com-

plexe total du bicomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\
 \Omega^2 A & \xleftarrow{B} & \Omega^1 A & \xleftarrow{B} & \Omega^0 A \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \Omega^1 A & \xleftarrow{B} & \Omega^0 A & & \\
 \downarrow b & & & & \\
 \Omega^0 A & & & &
 \end{array} \tag{2.34}$$

où B est appelé opérateur de Connes, défini par :

$$B((a^0, \dots, a^n)) = \sum_{i=0}^n (-1)^{in} (\mathbb{1}, a^i, \dots, a^n, a^0, \dots, a^{i-1}) \tag{2.35}$$

et vérifiant les relations :

$$B^2 = 0, bB + Bb = 0 \tag{2.36}$$

On peut remarquer de plus que l'on a la relation $B = -(1-t) \circ h \circ N$, où h est l'homotopie contractante de la deuxième colonne de $CC_*(A)$.

En prolongeant ce bicomplexe par la gauche de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \dots \xleftarrow{B} \Omega^2 A & \xleftarrow{B} & \Omega^1 A & \xleftarrow{B} & \Omega^0 A & & \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & & & \\
 \dots \xleftarrow{B} \Omega^1 A & \xleftarrow{B} & \Omega^0 A & & & & \\
 \downarrow b & & & & & & \\
 \dots \xleftarrow{B} \Omega^0 A & & & & & &
 \end{array} \tag{2.37}$$

et en prenant son complexe total, on obtient le complexe cyclique périodique $\widehat{CC}_*(A)$. L'homologie cyclique périodique de l'algèbre A est alors l'homologie du complexe \mathbb{Z}_2 -gradué (par la parité des formes différentielles) $(\prod_{n \geq 0} \Omega^n A, b + B)$.

2.2 Le cas des algèbres de Fréchet

L'algèbre de Schwartz des fonctions à décroissance rapide définie sur le groupe discret Γ est définie comme complétion de l'anneau $\mathbb{C}\Gamma$ suivant une famille de semi-normes, ce qui en fait une algèbre de Fréchet. Ceci justifie que nous nous intéressions un court instant à cette classe d'algèbres, et aux homologies associées.

2.2.1 Espaces de Fréchet

Définition 2.2.1.1 (Espace de Fréchet). *Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique (E, \mathcal{T}) complet dont la topologie est induite par une famille dénombrable de semi-normes.*

Dire que la topologie est induite par une famille de semi-normes signifie que n'importe quel ouvert de E peut être vu comme la réunion d'intersections finies de boules ouvertes pour ces semi-normes.

La complétude est à comprendre de façon classique : l'espace est complet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes. Ici, une suite est dite convergente ou de Cauchy si elle l'est pour chacune des normes.

Il faut savoir qu'un espace de Fréchet est toujours métrisable et une distance peut être construite explicitement à l'aide des semi-normes. En général, on oublie le caractère potentiellement métrique d'un espace de Fréchet, et on ne se concentre que sur la famille de semi-normes.

On peut noter que cette définition d'espace de Fréchet implique qu'un espace de Fréchet est localement convexe, en effet les boules ouvertes centrées en 0 des semi-normes sont bien sûr elles-mêmes convexes.

2.2.2 Produit d'espaces de Fréchet

Dans cette sous-section I désigne un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ est une collection d'espaces de Fréchet indexée par I . Pour $i \in I$, les semi-normes dont est muni l'espace E_i seront notées $\|\cdot\|_{i,j}$, où j parcourt un ensemble J_i , dénombrable.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$, on munit le produit tensoriel algébrique $E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_n}$ d'une famille dénombrable de semi-normes indexées par $J_{i_1} \times \dots \times J_{i_n}$ et définies par :

$$\|x\|_{j_1, \dots, j_n} = \text{Inf} \sum \|v_1\|_{i_1, j_1} \cdots \|v_n\|_{i_n, j_n} \quad (2.38)$$

où l'infimum est pris sur les différentes présentations $x = \sum v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

Définition-Proposition 2.2.2.1 (Produit tensoriel projectif d'espaces de Fréchet). *La complétion de $E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_n}$ par rapport aux semi-normes $\|\cdot\|_{j_1, \dots, j_n}$ est notée $E_{i_1} \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_{i_n}$ et est appelée produit tensoriel projectif des espaces E_{i_1}, \dots, E_{i_n} . Il s'agit encore d'un espace de Fréchet.*

On suppose maintenant que l'ensemble I est dénombrable.
 Soit $I' = \{i_1, \dots, i_n\}$ un sous-ensemble fini de I . Pour $(j_1, \dots, j_n) \in J_{i_1} \times \dots \times J_{i_n}$, on définit une semi-norme sur le produit $\prod_{i \in I} E_i$ par :

$$\|y\|_{I', j_1, \dots, j_n} = \text{Max} (\|\pi_{i_1}(y)\|_{i_1, j_1}, \dots, \|\pi_{i_n}(y)\|_{i_n, j_n}) \quad (2.39)$$

où π_k désigne la projection de $y \in \prod_{i \in I} E_i$ sur E_k .

Proposition 2.2.2.2. *L'espace $\prod_{i \in I} E_i$, muni de la famille (dénombrable) de semi-normes définie ci-dessus, est un espace de Fréchet.*

2.2.3 Algèbre de Fréchet

Définition 2.2.3.1. *On dit qu'un espace de Fréchet A est une algèbre de Fréchet si A est muni d'une multiplication \times induisant une application linéaire continue de $A \otimes_{\pi} A$ vers A . Autrement dit, pour toute semi-norme N_1 , il existe une constante c et deux semi-normes N_2 et N_3 telles que, pour tous $a, b \in A$, on a :*

$$N_1(a \times b) \leq c N_2(a) N_3(b) \quad (2.40)$$

2.2.4 Théories d'homologie des algèbres de Fréchet

Dès qu'une algèbre est munie d'une topologie la rendant complète, il est plus intéressant de garder cette complétude quand on veut calculer les homologies évoquées précédemment. Ce sera donc le cas des algèbres de Fréchet qui apparaîtront dans la suite. Par conséquent, les produits tensoriels apparaissant dans ces calculs d'homologies seront des produits tensoriels projectifs. En particulier, le bicomplexe cyclique périodique d'une algèbre de Fréchet A sera par définition :

$$\widehat{CC}_*(A) = \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} A^{\otimes_{\pi}^{*+n}}, b + B \right) \quad (2.41)$$

L'utilisation de ces complétions nécessite que les opérateurs considérés sont bornés, et cela fera l'objet de nombreuses estimations dans la suite. En particulier, les opérateurs de Hochschild et de Connes sont bornés.

Il sera question dans cette thèse de l'homologie cyclique périodique réduite d'une telle algèbre, en voici une définition :

Définition 2.2.4.1. *On définit l'homologie cyclique périodique réduite de l'algèbre de Fréchet A comme l'homologie du complexe cyclique périodique, quotienté par l'ensemble des limites de bords de celui-ci.*

3 Homologie cyclique de l'algèbre d'un groupe discret

Dans ce chapitre G désigne un groupe discret. Le calcul de l'homologie cyclique de l'algèbre $\mathbb{C}G$ est connue grâce aux travaux de V. Nistor ([Nis90]) et D. Burghlea ([Bur85]). Notre objectif ici est de parvenir à ce résultat en explicitant les différents morphismes entrant en jeu, nous permettant ainsi par la suite d'estimer les normes de ceux-ci.

3.1 Lien entre homologie de groupe et homologie de Hochschild

Nous exposons ici un des points clés de l'étude, à savoir le lien existant entre l'homologie du groupe G et l'homologie de Hochschild de son algèbre $\mathbb{C}G$.

3.1.1 G -modules

Définition 3.1.1.1. *L'algèbre du groupe G , notée $\mathbb{C}G$ est l'algèbre des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , à coefficients dans \mathbb{C} . Ses éléments seront habituellement notés $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot g_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $g_i \in G$.*

Définition 3.1.1.2. *On appellera G -module tout \mathbb{C} -espace vectoriel M muni d'une action linéaire de G , autrement dit tout $\mathbb{C}G$ -module.*

Pour un G -module M donné, on introduit deux autres G -modules :

$$M_G = M / \{m - gm \mid m \in M, g \in G\} \quad (3.1)$$

appelé module des coinvariants qui est le plus grand quotient sur lequel G agit de façon triviale, et

$$M^G = \{m \in M \mid \forall g \in G, gm = m\} \quad (3.2)$$

appelé module des invariants.

On liste plusieurs résultats sur ces deux modules :

Proposition 3.1.1.3. *Soit M un G -module. Alors :*

$$M_G \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}G} M \text{ et } M^G \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}, M) \quad (3.3)$$

Corollaire 3.1.1.4. *Le foncteur $M \mapsto M_G$ est exact à droite et le foncteur $M \mapsto M^G$ est exact à gauche.*

Définition 3.1.1.5. Soit H un sous-groupe de G et M un H -module. On appelle G -module induit par M le G -module défini par le produit tensoriel $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} M$ des deux $\mathbb{C}H$ -modules $\mathbb{C}G$ et M . Ce G -module est noté $\text{ind}_H^G(M)$.

3.1.2 Homologie de groupe

Définition 3.1.2.1. L'homologie de G à coefficients dans un G -module M est le foncteur dérivé à gauche du foncteur $M \mapsto M_G$, elle est notée $H_*(G, M)$.

Pour calculer l'homologie du groupe G à coefficients dans un G -module M , il suffit donc de disposer d'une résolution projective de M par des G -modules, c'est-à-dire une suite exacte de la forme

$$0 \leftarrow M \leftarrow M^0 \leftarrow M^1 \leftarrow M^2 \leftarrow \dots \quad (3.4)$$

où les M_i sont des objets projectifs dans la catégorie Mod_G . Appliquant le foncteur $M \mapsto M_G$ à une telle résolution, on obtient le complexe de chaînes :

$$0 \leftarrow M_G \leftarrow M_G^0 \leftarrow M_G^1 \leftarrow M_G^2 \leftarrow \dots \quad (3.5)$$

Alors le foncteur dérivé à gauche de $M \mapsto M_G$ est donné par l'homologie de ce complexe.

Le complexe bar $C_*^{\text{bar}}(G)$ de G fournit une résolution du G -module constant \mathbb{C} par des G -modules libres. Ainsi, le complexe $C_*^{\text{bar}}(G) \otimes M := C_*^{\text{bar}}(G, M)$ fournit une résolution projective de M . L'homologie de G à coefficients dans M peut ainsi se calculer comme l'homologie du complexe $C_*^{\text{bar}}(G, M)_G$. Dans la suite, un simplexe de $C_n^{\text{bar}}(G, M)$ sera noté $[g_0, \dots, g_n; m]$.

Définition 3.1.2.2. La cohomologie de G à coefficients dans un G -module M est le foncteur dérivé à droite du foncteur $M \mapsto M^G$, elle est notée $H^*(G, M)$.

Nous aurons besoin du théorème suivant, connu sous le nom de Lemme de Schapiro :

Théorème 3.1.2.3. Soit H un sous-groupe de G et M un H -module. Alors il y a un isomorphisme canonique entre l'homologie de H à coefficients dans M et l'homologie de G à coefficients dans $\text{ind}_H^G(M)$:

$$H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{ind}_H^G(M)) \quad (3.6)$$

Preuve :

Soit $M \leftarrow P_*$ une résolution du H -module M par des H -modules projectifs. Alors $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} M \leftarrow \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} P_*$ est une résolution de $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} M = \text{ind}_H^G(M)$ par des G -modules projectifs. En effet, $\mathbb{C}G$ est en fait un $\mathbb{C}H$ -module libre et la tensorisation par un module libre envoie modules projectifs sur modules projectifs (proposition 1.2.6.6).

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
H_* \left(G, \text{ind}_H^G(M) \right) &= H_* \left((\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} P_*)_G \right) \\
&\simeq H_* \left(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}G} (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} P_*) \right) \\
&\simeq H_* \left((\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G) \otimes_{\mathbb{C}H} P_* \right) \\
&\simeq H_* \left(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}H} P_* \right) \\
&\simeq H_* (H, M)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.1.3 Homologie de Hochschild par l'homologie de groupe

Nous avons vu dans le chapitre précédent (section 2.1.2.2) que l'homologie de Hochschild d'une algèbre complexe unitale A pouvait être vue comme le foncteur dérivé à gauche du foncteur

$$M \mapsto M_A := M/[M, A] \tag{3.8}$$

On constate donc que pour calculer l'homologie de Hochschild, on a ici encore besoin d'une résolution projective du A -bimodule M .

On va maintenant établir le lien entre homologie de groupe et homologie de Hochschild dans un cas particulier. On va naturellement s'intéresser à l'algèbre $A = \mathbb{C}G$, algèbre du groupe G .

Afin de comparer l'homologie de Hochschild de $\mathbb{C}G$ à coefficients dans un $\mathbb{C}G$ -bimodule M et l'homologie du groupe G , il faut associer à M un G -module de manière pertinente.

Définition-Proposition 3.1.3.1. *Soit M un $\mathbb{C}G$ -bimodule. On lui associe le G -module $Ad(M)$ dont les éléments sont ceux de M mais où l'action de G est remplacée par l'action adjointe : $g \cdot m = gmg^{-1}$. Le passage $Ad : M \mapsto Ad(M)$ est un foncteur exact de la catégorie des $\mathbb{C}G$ -bimodules dans la catégorie des G -modules. De plus, ce foncteur envoie les objets projectifs de ${}_{\mathbb{C}G}\text{Mod}_{\mathbb{C}G}$ sur les objets projectifs de Mod_G .*

Proposition 3.1.3.2. *Le foncteur $M \mapsto M_{\mathbb{C}G}$ est la composition du foncteur Ad et du foncteur $M \mapsto M_G$.*

Nous allons avoir besoin du résultat d'algèbre homologique suivant :

Lemme 3.1.3.3. *Soit F un foncteur exact à droite et F' un foncteur exact qui envoie des objets projectifs sur des objets projectifs. Alors $L_*(F \circ F') = L_*(F') \circ F$ où $L_*(\cdot)$ désigne le foncteur dérivé à gauche.*

Compte-tenu de ce lemme et du fait que le foncteur Ad est exact, on obtient que le foncteur dérivé à gauche de $M \mapsto M_{\mathbb{C}G}$ est la composition du foncteur Ad et du foncteur dérivé à gauche de $M \mapsto M_G$. Autrement dit on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.3.4. *Soit M un $\mathbb{C}G$ -bimodule. Alors on a un isomorphisme naturel de \mathbb{C} -espaces vectoriels :*

$$HH_*(\mathbb{C}G, M) \simeq H_*(G, Ad(M)) \tag{3.9}$$

En prenant $M = \mathbb{C}G$ dans le théorème précédent, on obtient en corollaire l'isomorphisme

$$HH_*(\mathbb{C}G) \simeq H_*(G, Ad(\mathbb{C}G)) \quad (3.10)$$

L'homologie de Hochschild de $\mathbb{C}G$ peut donc être interprétée comme l'homologie du groupe G à coefficients dans un G -module convenable. Cela permet d'utiliser les outils de l'homologie du groupe pour calculer l'homologie de Hochschild de $\mathbb{C}G$. Nous avons donc besoin d'une résolution projective de $Ad(\mathbb{C}G)$ par des G -modules. Pour cela nous utiliserons le complexe bar de G , noté $C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C})$ ou plus brièvement $C_*^{\text{bar}}(G)$ qui est une résolution projective de \mathbb{C} . Ainsi, par tensorisation par $Ad(\mathbb{C}G)$ nous obtiendrons une résolution projective de $Ad(\mathbb{C}G)$ par des G -modules. Ainsi l'homologie de Hochschild de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ pourra être obtenue en calculant l'homologie du complexe $(C_*(G) \otimes_{\mathbb{C}} Ad(\mathbb{C}G))_G$. Nous noterons dans la suite $C_*(G) \otimes_{\mathbb{C}} Ad(\mathbb{C}G) := C_*(G, Ad(\mathbb{C}G))$.

3.1.4 Quelques points sur la cohomologie de groupe

Soit M un G -module. On introduit ici deux complexes de cochaînes :

Définition 3.1.4.1. On note $(C_h^*(G, M), \partial_h)$ le complexe dont les cochaînes (appelées cochaînes homogènes) sont les applications G -invariantes $G^{n+1} \rightarrow M$. La différentielle ∂_h est donnée, pour $f \in C_h^n(G, M)$, par :

$$\begin{aligned} \partial_h(f) : (g_0, \dots, g_{n+1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f((g_0, \dots, \cancel{g_i}, \dots, g_{n+1})) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(\partial_i(g_0, \dots, g_{n+1})) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Définition 3.1.4.2. On note $(C_{ih}^*(G, M), \partial_{ih})$ le complexe dont les cochaînes (appelées cochaînes inhomogènes) sont les applications $G^n \rightarrow M$ (sans propriété d'équivariance). La différentielle ∂_{ih} est donnée, pour $f \in C_{ih}^n(G, M)$, par :

$$\begin{aligned} \partial_{ih}(f) : (g_1, \dots, g_{n+1}) &\longmapsto g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Proposition 3.1.4.3. Les deux complexes $C_h^*(G, M)$ et $C_{ih}^*(G, M)$ sont isomorphes, via le morphisme de complexes $\Phi : C_h^*(G, M) \rightarrow C_{ih}^*(G, M)$ défini par :

$$\Phi(f) : (g_1, \dots, g_n) \longmapsto f(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \cdots g_n) \quad (3.13)$$

Son inverse $\Psi : C_{ih}^*(G, M) \rightarrow C_h^*(G, M)$ étant défini par :

$$\Psi(f) : (h_0, \dots, h_n) \longmapsto h_0 \cdot f(g_0^{-1} g_1, g_1^{-1} g_2, \dots, g_{n-1}^{-1} g_n) \quad (3.14)$$

Proposition 3.1.4.4. *La cohomologie du groupe G à coefficients dans le G -module M peut être définie comme l'homologie commune des deux complexes définis ci-dessus.*

3.1.4.1 Classe de cohomologie associée à une extension centrale

On appelle extension centrale toute extension de groupes

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 1 \quad (3.15)$$

dont le noyau A est abélien et tel que $\iota(A)$ est dans le centre de E .

Proposition 3.1.4.5. *Il y a une bijection canonique entre la classe d'isomorphisme de l'extension (3.15) et $H^2(G, A)$.*

Preuve :

On choisit tout d'abord une section ensembliste $s : G \rightarrow E$ de sorte que $\rho \circ s = id$. On peut de plus se permettre de la choisir de façon à avoir $s(1) = 1$ et $s(g^{-1}) = s(g)^{-1}$ pour tous $g \in G$. Cette section n'est pas nécessairement multiplicative, et c'est ce que nous allons mesurer en posant, pour tous $g, h \in G$: $c(g, h) = s(g)s(h)s(gh)^{-1}$. On définit ainsi une 2-cochaîne inhomogène, puisque $\rho(c(g, h)) = 1$, et ainsi $c(g, h)$ est dans A quels que soient les éléments g et h . Il reste à montrer que cette 2-cochaîne est un cocycle, et que le choix de la section s ne change pas la classe de cohomologie.

Soit $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$. Nous allons calculer de deux façons le produit $s(g_1)s(g_2)s(g_3)$ en utilisant l'associativité de loi de E . D'une part :

$$\begin{aligned} s(g_1)s(g_2)s(g_3) &= (s(g_1)s(g_2))s(g_3) \\ &= c(g_1, g_2)s(g_1g_2)s(g_3) \\ &= (c(g_1, g_2) + c(g_1g_2, g_3))s(g_1g_2g_3) \end{aligned} \quad (3.16)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} s(g_1)s(g_2)s(g_3) &= s(g_1)(s(g_2)s(g_3)) \\ &= s(g_1)c(g_2, g_3)s(g_2g_3) \\ &= c(g_2, g_3)s(g_1)s(g_2g_3) \\ &= (c(g_2, g_3) + c(g_1, g_2g_3))s(g_1g_2g_3) \end{aligned} \quad (3.17)$$

On obtient donc :

$$c(g_2, g_3) + c(g_1, g_2g_3) - c(g_1, g_2) - c(g_1g_2, g_3) = 0 \quad (3.18)$$

autrement dit $\partial_{ih}(c)(g_1, g_2, g_3) = 0$ et nous avons ainsi montré que c est un 2-cocycle inhomogène.

Soit maintenant s' une autre section, avec les mêmes propriétés que s . Pour tout $g \in G$, on pose $d(g) = s(g)s'(g)^{-1} \in A$. Essayons d'exprimer c en fonction de c' , le 2-cocycle

associé à la nouvelle section s' . Soient $g, h \in G$:

$$\begin{aligned}
c(g, h) &= s(g)s(h)s(gh)^{-1} \\
&= d(g)s'(g)d(h)s'(h)s'(gh)^{-1}d(gh)^{-1} \\
&= (d(g) + d(h) - d(gh))s'(g)s'(h)s'(gh)^{-1} \\
&= \partial_{ih}(d)(g, h) + c'(g, h)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ainsi les deux cocycles diffèrent seulement d'un cobord, ils représentent donc la même classe de cohomologie.

On peut voir pour conclure que le choix d'un 2-cocycle inhomogène $c : G^2 \rightarrow A$ normalisé (i.e. $c(g, 1) = c(1, g) = 0 \in A$ pour tous g) détermine entièrement la structure de groupe de E , identifié à $A \times G$: la loi de groupe sur E est alors donnée par :

$$(a, g) \cdot (b, h) = (a + gb + c(g, h), gh) \tag{3.20}$$

cette loi est bien associative par le fait que c est un cocycle. L'élément neutre pour cette loi est l'élément $(0, 1)$ et l'inverse d'un élément (a, g) est donné par :

$$(-g^{-1}a - c(g^{-1}, g), g^{-1}) \tag{3.21}$$

Ainsi à un élément de $H^2(G, A)$ correspond une et une seule classe d'extensions de G par A . □

3.1.5 Quelques points sur l'hyperhomologie de groupe

Nous aurons besoin dans ce travail de quelques notions sur la théorie d'hyperhomologie de groupe : il s'agit en réalité d'une théorie d'homologie qui, au lieu d'être à coefficients dans un G -module, est à coefficients dans un complexe de G -modules.

Dans ce qui suit, on dira de qu'un complexe de chaînes C_* est "borné inférieurement" s'il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $n \leq N$, on a $C_n = 0$.

Lemme 3.1.5.1. *Soit P_* une résolution de \mathbb{C} par des G -modules projectifs et C_* un complexe de G -modules. Alors l'homologie du complexe $(P_* \otimes C_*)_G$ ne dépend pas de la résolution P_* .*

Preuve :

Soit P'_* une autre résolution de \mathbb{C} par des G -modules projectifs. Alors il existe une équivalence d'homotopie $f_* : P_* \rightarrow P'_*$ G -équivariante. De ce fait, le morphisme $f_* \otimes id : P_* \otimes C_* \rightarrow P'_* \otimes C_*$ est également une équivalence d'homotopie G -équivariante. □

Définition 3.1.5.2. *Soit C_* un complexe de G -modules "borné inférieurement". Alors l'hyperhomologie de G à coefficients dans le complexe C_* , notée $\mathbb{H}(G, C_*)$ est par définition l'homologie du complexe $(P_* \otimes C_*)_G$, où P_* est une résolution quelconque de \mathbb{C} par des G -modules projectifs.*

On donne deux propriétés cruciales pour notre travail :

Proposition 3.1.5.3. *Soit $f_* : C_* \rightarrow C'_*$ un quasi-isomorphisme entre deux complexes "bornés inférieurement" de G -modules. Alors f_* induit un isomorphisme $\mathbb{H}(G, C_*) \simeq \mathbb{H}(G, C'_*)$ en hyperhomologie.*

Preuve :

On rappelle la définition du cône de f_* : il s'agit du complexe de chaînes $C\hat{o}ne_*(f) = C_*[1] \oplus C'_*$, qui s'inscrit dans une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow C'_* \longrightarrow C\hat{o}ne_*(f) \longrightarrow C_*[1] \longrightarrow 0.$$

La différentielle du cône étant donné par

$$(\alpha, \alpha') \mapsto (-\partial(\alpha), f(\alpha) + \partial'(\alpha')) \quad (3.22)$$

On rappelle également que la flèche de bord $H(C_*) \rightarrow H(C'_*)$ qui apparaît dans la longue suite exacte en homologie est exactement induite par f_* . De ce fait, puisque f_* est un quasi-isomorphisme, on déduit que l'homologie du cône de f_* est nulle. Par conséquent, si P_* est une résolution de \mathbb{C} par des G -modules projectifs, l'augmentation $P_* \rightarrow \mathbb{C}$ induit un quasi-isomorphisme $P_* \otimes C\hat{o}ne(f) \rightarrow C\hat{o}ne(f)$, le complexe $P_* \otimes C\hat{o}ne_*(f)$ est donc encore acyclique, et est par conséquent contractile via une homotopie G -équivariante (proposition 1.2.8.4). L'homologie du complexe $(P_* \otimes C\hat{o}ne_*(f))_G$ est donc également nulle. Ainsi, la longue suite exacte en homologie obtenue de

$$0 \longrightarrow (P_* \otimes C'_*)_G \longrightarrow (P_* \otimes C\hat{o}ne_*(f))_G \longrightarrow (P_* \otimes C_*[1])_G \longrightarrow 0$$

prouve l'isomorphisme $\mathbb{H}(G, C_*) \simeq \mathbb{H}(G, C'_*)$. \square

Proposition 3.1.5.4. *Soit C_* un complexe "borné inférieurement" de G -modules projectifs. Alors l'hyperhomologie $\mathbb{H}(G, C_*)$ de G à coefficients dans C_* est exactement donnée par l'homologie $H_*((C_*)_G)$.*

Preuve :

Soit P_* une résolution projective de \mathbb{C} par des G -modules. Alors l'augmentation $P_* \rightarrow \mathbb{C}$ induit un quasi-isomorphisme $P_* \otimes C_* \rightarrow C_*$, et donc une équivalence d'homotopie entre complexes de projectifs. Ainsi on a $H_*((P_* \otimes C_*)_G) \simeq H_*((C_*)_G)$. \square

3.2 Le bicomplexe cyclique $\widetilde{C}C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$

Dans cette section nous construisons un bicomplexe dont l'homologie donne la contribution d'une classe de conjugaison donnée $\langle v \rangle$ à l'homologie cyclique de $\mathbb{C}G$.

3.2.1 Décomposition suivant les classes de conjugaison

Nous rappelons que $Ad(\mathbb{C}G)$ désigne la représentation adjointe de G , à savoir le G -module $\mathbb{C}G$ muni de l'action adjointe de G . Cette représentation adjointe peut être décomposée suivant les classes de conjugaison du groupe G : on a $Ad(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{\langle v \rangle} \mathbb{C}\langle v \rangle$.

De ce fait, l'homologie de Hochschild de $\mathbb{C}G$ admet également une décomposition suivant les mêmes classes de conjugaison :

Proposition 3.2.1.1. *Pour une classe de conjugaison $\langle v \rangle$ de G , on note $C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ le sous-complexe du complexe de Hochschild $C_*(\mathbb{C}G)$ engendré par les produits $g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n$ tels que $g_0 g_1 \cdots g_n \in \langle v \rangle$, et on note $HH_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ l'homologie de ce sous-complexe. Alors on a la décomposition suivante :*

$$HH_*(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{\langle v \rangle} HH_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \quad (3.23)$$

Nous avons de plus des décompositions similaires en homologie cyclique et cyclique périodique. Nous allons donc nous concentrer sur ces contributions $HH_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$.

De même, nous avons une décomposition de l'homologie du groupe à coefficients dans $Ad(\mathbb{C}G)$:

$$H_*(G, Ad(\mathbb{C}G)) = \bigoplus_{\langle v \rangle} H_*(G, \mathbb{C}\langle v \rangle) \quad (3.24)$$

Les groupes d'homologie $H_*(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)$ sont alors calculés comme l'homologie des complexes $(C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle v \rangle)_G$, aussi notés $C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)_G$.

Proposition 3.2.1.2. *Soit $\langle v \rangle$ une classe de conjugaison de G . Alors le morphisme de complexes*

$$p_* : C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}\langle v \rangle) \rightarrow C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \quad (3.25)$$

défini par :

$$[g_0, \cdots, g_n; w] \mapsto g_n^{-1} w g_0 \otimes g_0^{-1} g_1 \otimes \cdots \otimes g_{n-1}^{-1} g_n \quad (3.26)$$

est surjectif, et l'application induite $C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)_G \rightarrow C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ est un isomorphisme de complexes.

Preuve :

Considérons l'application $q_* : C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \rightarrow C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)$ définie par :

$$h_0 \otimes \cdots \otimes h_n \mapsto [h_0, h_0 h_1, \cdots, h_0 h_1 \cdots h_n; h_0 h_1 \cdots h_n] \quad (3.27)$$

On remarque tout d'abord que $p_* \circ q_* = id$, et donc que p_* est bien surjectif. De plus, pour un simplexe $\alpha = [g_0, \cdots, g_n; w]$, on obtient $q_* \circ p_*(\alpha) = g_n^{-1} w \alpha$. Ainsi p_* est un isomorphisme sur les G -coinvariants. \square

Proposition 3.2.1.3. *Soit $\langle v \rangle$ une classe de conjugaison de G et v un représentant de celle-ci. Alors on a un isomorphisme de complexes $C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)_G \simeq C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}v)_{Z_v}$, où Z_v est le centralisateur de v , c'est-à-dire le sous-groupe des éléments de G qui commutent avec v et $\mathbb{C}v$ est le sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $Ad(\mathbb{C}G)$ engendré par v , sur lequel Z_v agit trivialement.*

Preuve :

Le résultat est en fait immédiat, puisque l'action de G sur $\langle v \rangle$ (par conjugaison) est transitive (i.e. elle ne possède qu'une orbite) et le stabilisateur de v pour cette action est exactement Z_v . Si on veut voir de plus près, on peut considérer le morphisme $f : C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)$ défini par :

$$[g_0, \cdots, g_n; v] \mapsto [g_0, \cdots, g_n; v] \quad (3.28)$$

Alors l'application induite sur les coinvariants (par Z_v à gauche et G à droite) est injective et surjective. En effet, pour la surjectivité on a

$$\begin{aligned} f([h^{-1}h_0, \dots, h^{-1}h_n; v]) &= [h^{-1}h_0, \dots, h^{-1}h_n; v] \\ &\sim h[h^{-1}h_0, \dots, h^{-1}h_n; v] \\ &= [h_0, \dots, h_n; hvh^{-1}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pour l'injectivité, si $f([g_0, \dots, g_n; v]) = f([h_0, \dots, h_n; v])$, il existe $h \in G$ tel que $[g_0, \dots, g_n; v] = h[h_0, \dots, h_n; v]$, et en particulier on a $v = hvh^{-1}$, et ainsi $h \in Z_v$. \square

En résumé, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.1.4. *Soit $\langle v \rangle$ une classe de conjugaison de G et v un représentant de celle-ci. Alors on a un isomorphisme de complexes :*

$$C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \simeq C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}v)_{Z_v}$$

Remarque 3.2.1.5. *Puisque Z_v agit trivialement sur $\mathbb{C}v$, on peut remarquer qu'il y a aussi un isomorphisme $C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}v)_{Z_v} \simeq C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C})_{Z_v} = C_*^{\text{bar}}(G)_{Z_v}$.*

Proposition 3.2.1.6. *Pour tout sous-groupe H de G , $C_*^{\text{bar}}(G)$ est un complexe de H -modules libres. C'est le cas en particulier pour $H = Z_v$.*

Preuve :

Une base de $C_n^{\text{bar}}(G)$ en tant que G -module est par définition donnée par l'ensemble des simplexes $[g_0, \dots, g_n]$. Le sous-groupe H agissant sur G par translation, on peut choisir un système de représentants \tilde{g} pour cette action. Alors $C_n^{\text{bar}}(G)$ est libre en tant que H -module, et une base est donnée par l'ensemble des simplexes $[\tilde{g}, g_1, \dots, g_n]$. \square

Corollaire 3.2.1.7. *On a des isomorphismes naturels en homologie :*

$$HH_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \simeq H_*(Z_v, \mathbb{C}) \simeq H_*(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)$$

Preuve :

Le deuxième isomorphisme se justifie par le lemme de Schapiro (théorème 3.1.2.3). En effet le G -module induit par le Z_v -module \mathbb{C} est exactement le module des coinvariants $(\mathbb{C}G)_{Z_v} = \mathbb{C}\langle v \rangle$. \square

3.2.2 Construction du bicomplexe cyclique

Maintenant que nous avons une "copie" du complexe de Hochschild de la contribution d'une certaine classe de conjugaison, nous pouvons nous lancer dans la construction du bicomplexe cyclique associé.

À partir de maintenant, v désignera un élément de G .

On commence par construire la "copie" de l'opérateur cyclique t , que nous noterons \tilde{T} :

Proposition 3.2.2.1. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}v) & \xrightarrow{p_*} & C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \\
\downarrow \tilde{T} & & \downarrow t \\
C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}v) & \xrightarrow{p_*} & C_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}
\end{array}$$

où l'opérateur \tilde{T} est défini par : $[g_0, \dots, g_n; v] \mapsto (-1)^n [v^{-1}g_n, g_0, \dots, g_{n-1}; v]$ et est Z_v -équivariant.

Preuve :

En effet, si $\alpha = [g_0, \dots, g_n; v] \in C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C}v)$, alors on a :

$$T \circ p_*(\alpha) = p_* \circ \tilde{T}(\alpha) = (-1)^n g_{n-1}^{-1} g_n \otimes g_n^{-1} v g_0 \otimes \dots \otimes g_{n-2}^{-1} g_{n-1}$$

□

De même, on construit une copie de l'opérateur N :

Définition 3.2.2.2. On pose $\tilde{N} = 1 + \tilde{T} + \dots + \tilde{T}^n$.

Dans le cas du bicomplexe cyclique classique, on a $(1-t) \circ N = N \circ (1-t) = 0$, ce qui fait bien de $CC_*(\mathbb{C}G)$ un bicomplexe. Ici, on s'aperçoit que la composition de $1 - \tilde{T}$ et de \tilde{N} n'est pas nulle, en effet :

Lemme 3.2.2.3. On a $(1 - \tilde{T}) \circ \tilde{N} = \tilde{N} \circ (1 - \tilde{T}) = 1 - \tilde{T}^{n+1} : \alpha \mapsto (1 - v^{-1})\alpha$.

Afin d'obtenir un bicomplexe, nous allons devoir nous débarrasser de cette anomalie. Pour cela, nous allons prendre les coinvariants par le groupe cyclique engendré par v :

Définition 3.2.2.4. On note U le sous-groupe de G engendré par l'élément v . Il s'agit bien entendu d'un sous groupe cyclique et central de Z_v .

Les G -modules $C_n^{\text{bar}}(G)$ étant également des U -modules et les nouveaux opérateurs \tilde{T} et \tilde{N} étant également U -équivariants, on peut prendre les U -coinvariants, obtenant ainsi un vrai bicomplexe :

Définition 3.2.2.5. On note $\widetilde{CC}_*(G)_{\langle v \rangle}$ le bicomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow -\partial' \\
C_2^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_2^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{\tilde{N}} & C_2^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_2^{\text{bar}}(G)_U \xleftarrow{\tilde{N}} \dots \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow -\partial' \\
C_1^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_1^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{\tilde{N}} & C_1^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_1^{\text{bar}}(G)_U \xleftarrow{\tilde{N}} \dots \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow -\partial' \\
C_0^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{0} & C_0^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{id} & C_0^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{0} & C_0^{\text{bar}}(G)_U \xleftarrow{id} \dots
\end{array}$$

où ∂ est la différentielle du complexe bar de G : $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ et $\partial' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \partial_i$.

Le problème est maintenant que le complexe de Hochschild était donné par $C_*^{\text{bar}}(G)_{Z_v}$, et non par $C_*^{\text{bar}}(G)_U$. La définition et la proposition suivantes résolvent ce problème :

Définition 3.2.2.6. On note N_v le quotient de Z_v par U , de sorte qu'on ait la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow Z_v \longrightarrow N_v \longrightarrow 1$$

De plus, on choisit une section ensembliste $s : N_v \rightarrow Z_v$ de sorte que $s(1) = 1$.

Proposition 3.2.2.7. Les espaces $C_n^{\text{bar}}(G)_U$ sont des N_v -modules libres, l'action (indépendante de s) de N_v étant donnée, pour un élément $\eta \in N_v$, par :

$$\eta \cdot [g_0, \dots, g_n] = s(\eta) \cdot [g_0, \dots, g_n] = [s(\eta)g_0, \dots, s(\eta)g_n] \quad (3.30)$$

On a de plus, en tout degré n : $(C_n^{\text{bar}}(G)_U)_{N_v} \simeq C_n^{\text{bar}}(G)_{Z_v}$. Par conséquent l'homologie du bicomplexe $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$, une fois les N_v -coinvariants pris, donne bien la contribution de la classe de conjugaison $\langle v \rangle$ à l'homologie cyclique de $\mathbb{C}G$.

Preuve :

Les $C_n^{\text{bar}}(G)$ sont des Z_v -modules libres, donc les $C_n^{\text{bar}}(G)_U$ sont bien des $Z_v/U = N_v$ -modules libres.

Soit M un Z_v -module libre et soit V un espace vectoriel complexe tel que $M = \mathbb{C}Z_v \otimes_{\mathbb{C}} V$. On a alors :

$$(M_U)_{N_v} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N_v} M_U = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N_v} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}U} M) \quad (3.31)$$

$$= \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N_v} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}U} (\mathbb{C}Z_v \otimes_{\mathbb{C}} V) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N_v} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}U} \mathbb{C}Z_v) \otimes_{\mathbb{C}} V \quad (3.32)$$

$$= \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}N_v} \mathbb{C}N_v \otimes_{\mathbb{C}} V = V \quad (3.33)$$

$$= \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}Z_v} \mathbb{C}Z_v \otimes_{\mathbb{C}} V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}Z_v} M = M_{Z_v} \quad (3.34)$$

□

En termes d'hyperhomologie, on a donc le résultat suivant :

Théorème 3.2.2.8. La contribution de la classe de conjugaison $\langle v \rangle$ à l'homologie cyclique $HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ est exactement donnée par l'hyperhomologie $\mathbb{H}(N_v, \text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}))$ du groupe N_v à coefficients dans le complexe total de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$.

Lemme 3.2.2.9. Les colonnes d'indice impair de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ sont acycliques, de façon N_v -équivariante.

Preuve :

On considère l'application linéaire et U -équivariante $h : C_*^{\text{bar}}(G) \rightarrow C_{*+1}^{\text{bar}}(G)$ définie par :

$$h : [g_0, \dots, g_n] \longmapsto [g_n, g_0, \dots, g_n] \quad (3.35)$$

On vérifie alors facilement que $(-\partial')h + h(-\partial') = \pm id$, ce qui suffit à montrer que les colonnes impaires de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ sont effectivement acycliques. □

À partir de maintenant, nous allons distinguer les cas suivant si l'élément v est de torsion ou non et calculer $HP_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ dans ces deux cas. Pour ce faire, nous aurons besoin d'établir des quasi-isomorphismes entre $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ et d'autres complexes beaucoup plus simples.

Définition 3.2.2.10. *On rappelle que $\mathbb{C} \leftarrow C_*^{bar}(G)$ est une résolution du G -module \mathbb{C} par des G -modules projectifs. On notera $\varepsilon : \mathbb{C}G = C_0^{bar}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ l'augmentation, qui est par ailleurs U -équivariante.*

3.3 Contribution elliptique à $HP_*(\mathbb{C}G)$

Dans cette section nous fixons un élément $v \in G$ de torsion. Nous commençons par montrer que dans ce cas précis, les N_v -modules projectifs $C_n^{bar}(G)_U$ sont également des Z_v -modules projectifs. Nous établissons ensuite un quasi-isomorphisme entre $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ et un certain complexe C_*^{alt} , qui nous permettra de calculer simplement $HC_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$.

3.3.1 Préliminaires

Nous établissons ici quelques résultats algébriques dans un cadre général.

Lemme 3.3.1.1. *Soit H un groupe fini et M un H -module. Alors, en posant $p = \frac{1}{\text{card}(H)} \sum_{h \in H} h$, on a :*

$$M^H = pM \text{ et } (1-p)M = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\{m - hm\}, m \in M, h \in H), \text{ d'où } M_H = M/(1-p)M$$

On a de plus :

$$M = pM \oplus (1-p)M.$$

Lemme 3.3.1.2. *Soit H un groupe fini. Alors les foncteurs $M \mapsto M^H$ et $M \mapsto M_H$ sur la catégorie des H -modules sont exacts.*

Preuve :

Soit $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ une suite exacte de H -modules. Regardons d'abord le cas des invariants : on doit montrer que la suite $M'^H \xrightarrow{\overline{\varphi}} M^H \xrightarrow{\overline{\psi}} M''^H$ est exacte. On voit facilement que $\text{Im}(\overline{\varphi})$ est inclus dans $\text{Ker}(\overline{\psi})$. Par contre, dans le cas où H est quelconque, on peut seulement dire que $\text{Ker}(\overline{\psi})$ est inclus dans $\text{Im}(\varphi)$. Comme ici H est fini, on peut définir l'élément p de $\mathbb{C}H$ par : $p = \frac{1}{\text{card}(H)} \sum_{h \in H} h$. Soit maintenant

$m \in \text{Ker}(\overline{\psi})$, il existe alors $m' \in M'$ tel que $m = \varphi(m')$. Mais alors : $m = pm = p\varphi(m') = \varphi(pm') = \overline{\varphi}(pm') \in \text{Im}(\overline{\varphi})$. Ainsi le foncteur $M \mapsto M^H$ est exact dans le cas où H est fini.

Regardons maintenant le cas des co-invariants : on doit montrer que la suite $M'_H \xrightarrow{\overline{\varphi}} M_H \xrightarrow{\overline{\psi}} M''_H$ est exacte. Il est encore clair dans ce cas que l'on a $\text{Im}(\overline{\varphi}) \subset \text{Ker}(\overline{\psi})$. Soit

alors $\bar{m} \in \text{Ker}(\bar{\psi})$, ce qui signifie que $\psi(m)$ appartient à $(1-p)M''$, et ainsi $\psi(pm) = p\psi(m) = 0$. Par conséquent, il existe $m' \in M'$ tel que $pm = \varphi(m')$. Finalement, $\bar{\varphi}(\bar{m}') = \overline{pm} = \bar{m}$. \square

3.3.2 Calcul de $HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$

Lemme 3.3.2.1. *L'espace $\mathbb{C}(N_v)$ est un Z_v -module projectif.*

Preuve :

On commence par remarquer que $\mathbb{C}(Z_v)$ est un U -module. Compte-tenu du lemme 3.3.1.1, on a donc la décomposition suivante en U -modules :

$$\mathbb{C}(Z_v) = p\mathbb{C}(Z_v) \oplus (1-p)\mathbb{C}(Z_v) \quad (3.36)$$

où $p = \frac{1}{\text{card}(U)} \sum_{u \in U} u$

Or cette décomposition est aussi une décomposition du Z_v -module libre $\mathbb{C}(Z_v)$ par des Z_v -modules, et on a l'identification $p\mathbb{C}(Z_v) \simeq \mathbb{C}(N_v)$ \square

En combinant le résultat précédent et la proposition 1.2.6.5, on obtient le suivant :

Proposition 3.3.2.2. *Soit M un N_v -module projectif. Alors M est aussi un Z_v -module projectif.*

Ainsi, le bicomplexe $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ est en fait un bicomplexe de Z_v -modules projectifs, et on a en conséquence le théorème suivant :

Théorème 3.3.2.3. *Si v est d'ordre fini, alors la contribution de sa classe de conjugaison à l'homologie cyclique de $\mathbb{C}G$ est donnée par l'hyperhomologie de Z_v , à coefficients dans le complexe total de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$:*

$$HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \simeq \mathbb{H}_*(Z_v, \text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}))$$

Définition 3.3.2.4. *On note C_*^{alt} le complexe de chaînes défini par :*

- $C_n^{\text{alt}} = 0$ si $n < 0$,
- $C_n^{\text{alt}} = \mathbb{C}$ si $n \geq 0$ et si n est pair,
- $C_n^{\text{alt}} = 0$ si $n \geq 0$ et si n est impair.

Remarque 3.3.2.5. *En notant abusivement \mathbb{C} le complexe de chaînes C_* défini par $C_0 = \mathbb{C}$ et $C_n = 0$ si $n \neq 0$, alors le complexe C_*^{alt} s'écrit aussi $C_*^{\text{alt}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}[-2k]$.*

Définition 3.3.2.6. *On note $\widetilde{CC}'_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ le bicomplexe suivant :*

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow -\partial' \\
C_2^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_2^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{\tilde{N}} & C_2^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_2^{\text{bar}}(G)_U \xleftarrow{\tilde{N}} \dots \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow -\partial' \\
C_1^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_1^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{\tilde{N}} & C_1^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{1-\tilde{T}} & C_1^{\text{bar}}(G)_U \xleftarrow{\tilde{N}} \dots \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow -\partial' \\
C_0^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{0} & C_0^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{id} & C_0^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{0} & C_0^{\text{bar}}(G)_U \xleftarrow{id} \dots \\
\downarrow \varepsilon & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\
\mathbb{C} & \xleftarrow{} & 0 & \xleftarrow{} & \mathbb{C} & \xleftarrow{} & 0 \xleftarrow{} \dots
\end{array}$$

La ligne inférieure (en degré -1) étant le complexe C_*^{alt} . On notera ε_0 l'augmentation ainsi définie du bicomplexe $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$.

Proposition 3.3.2.7. *Le complexe total de $\widetilde{CC}'_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ est acyclique.*

Preuve :

On rappelle que ε est l'augmentation $\mathbb{C} \leftarrow C_*^{\text{bar}}(G)$, cette résolution de \mathbb{C} est donc par définition acyclique. De plus, U étant fini dans le cas présent, le foncteur $M \mapsto M_U$ est exact. Ainsi, les colonnes paires du bicomplexe sont acycliques. Il en va de même pour les colonnes impaires d'après le lemme 3.2.2.9. Ainsi, par la proposition 1.2.8.5, le bicomplexe $\widetilde{CC}'_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ est acyclique. \square

Lemme 3.3.2.8. *On a la suite exacte de complexes suivante :*

$$0 \longrightarrow C_*^{\text{alt}}[1] \longrightarrow \text{Tot}(\widetilde{CC}'_*(\mathbb{C}G)_{<v>}) \longrightarrow \text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}) \longrightarrow 0$$

La flèche de bord associée à cette suite exacte est exactement induite par ε_0 .

Avec les deux résultats précédents, on obtient :

Corollaire 3.3.2.9. *L'augmentation $\varepsilon_0 : \text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}) \longrightarrow C_*^{\text{alt}}$ est un quasi-isomorphisme.*

Par conséquent, nous sommes arrivés au résultat suivant :

Théorème 3.3.2.10. *Si v est d'ordre fini, alors on a l'isomorphisme suivant :*

$$HC_*(\mathbb{C}G)_{<v>} \simeq \mathbb{H}_*(Z_v, C_*^{\text{alt}})$$

Il nous reste donc à calculer ces derniers groupes d'hyperhomologie.

Lemme 3.3.2.11. *Soit $\mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon'} P_*$ une résolution de \mathbb{C} par des Z_v -modules projectifs. On considère le bicomplexe PP_* :*

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_2 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_2 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
P_1 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_1 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
P_0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots
\end{array}$$

Alors l'homologie de ce bicomplexe, une fois pris les coinvariants par Z_v , est donnée par :
 $H_*(Tot(P P_*)_Z) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C})$.

Preuve :

On commence par remarquer que l'on a $Tot(P P_*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_*[-2n]$. Par suite on obtient $Tot(P P_*)_Z = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_*[-2n]_Z$. Chaque terme $P_*[-2n]_Z$ en homologie donne $H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C})$ par définition, et l'homologie commute avec la somme directe. \square

Proposition 3.3.2.12. *On a l'isomorphisme suivant en homologie :*

$$\mathbb{H}_*(Z_v, C_*^{alt}) \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C})$$

Preuve :

Soit $\mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon'} P_*$ une résolution de \mathbb{C} par des Z_v -modules projectifs. Considérons alors le bicomplexe $P P'_*$:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P_2 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_2 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
P_1 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_1 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
P_0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & P_0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots \\
\downarrow \varepsilon' & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow & \\
\mathbb{C} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathbb{C} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots
\end{array}$$

On note $\varepsilon'_0 : Tot(P P'_*) \rightarrow C_*^{alt}$ le morphisme de complexes associé. Par une argumentation identique à ce qui a été fait précédemment, on montre que ε'_0 est un quasi-isomorphisme. Ainsi, par les propriétés de l'hyperhomologie données dans le chapitre 2, on a : $\mathbb{H}_*(Z_v, C_*^{alt}) = \mathbb{H}_*(Z_v, Tot(P P'_*)) = H_*(Tot(P P'_*)_Z)$. \square

On arrive donc aux résultats finaux suivants :

Théorème 3.3.2.13. *Si v est d'ordre fini, on a l'isomorphisme :*

$$HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C})$$

Proposition 3.3.2.14. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}) & \xrightarrow{S} & \text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Tot}(PP_*) & \longrightarrow & \text{Tot}(PP_*)[2] \end{array} \quad (3.37)$$

où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes. Ce diagramme donne alors en homologie le suivant :

$$\begin{array}{ccc} HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} & \xrightarrow{S} & HC_{*-2}(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C}) \end{array} \quad (3.38)$$

L'opérateur S en homologie cyclique est donc donné par la projection canonique

$$\tilde{S} : \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_{*-2n}(Z_v, \mathbb{C}) \quad (3.39)$$

On obtient donc finalement la contribution de $\langle v \rangle$ à l'homologie cyclique périodique de $\mathbb{C}G$:

Théorème 3.3.2.15. *Si v est d'ordre fini, on a des isomorphismes canoniques :*

$$HP_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \simeq \prod_{n=0}^{\infty} H_{*+2n}(Z_v, \mathbb{C}) \simeq \prod_{n=0}^{\infty} H_{*+2n}(G, \mathbb{C}\langle v \rangle)$$

Preuve :

Le dernier isomorphisme s'explique, comme dans la preuve du corollaire 3.2.1.7, par le lemme de Schapiro (théorème 3.1.2.3). \square

3.4 Contribution hyperbolique à $HC_*(\mathbb{C}G)$

Dans cette section nous supposons que $v \in G$ est d'ordre infini. Nous rappelons que $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}$ est un bicomplexe de N_v -modules projectifs, et que nous avons par conséquent :

Théorème 3.4.0.1. *Si v est d'ordre infini, on a l'isomorphisme :*

$$HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \simeq \mathbb{H}_*(N_v, \text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle}))$$

Comme dans le cas où v est d'ordre fini, nous allons commencer par établir un quasi-isomorphisme entre $Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>})$ et un complexe plus simple, permettant de faciliter le calcul de $HC_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$. En revanche, nous n'aurons pas tout de suite de résultat pour la contribution à l'homologie cyclique périodique.

Comme précédemment, ε désignera l'augmentation $\mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} C_*^{\text{bar}}(G, \mathbb{C})$.

Lemme 3.4.0.2. *L'homologie de la première colonne de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ est de dimension 1 en degré 0 et 1, et nulle en les autres degrés. De plus, un générateur de son homologie en degré 1 est donné par $[1, v] \in C_1^{\text{bar}}(G)$.*

Preuve :

Le morphisme de complexes de U -modules projectifs f_* défini par :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longleftarrow & \mathbb{C}[U] & \xleftarrow{d} & \mathbb{C}[U] & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & C_0^{\text{bar}}(G) & \xleftarrow{\partial} & C_1^{\text{bar}}(G) & \xleftarrow{\partial} & C_2^{\text{bar}}(G) & \xleftarrow{\partial} & C_3^{\text{bar}}(G) & \longleftarrow & \dots \end{array} \quad (3.40)$$

avec $f_0 : v^k \mapsto [v^k]$, $f_1 : v^k \mapsto [v^{k-1}, v^k]$ et $d : v^k \rightarrow v^k - v^{k-1}$ est un quasi-isomorphisme. Prenant les U -coinvariants, on obtient un quasi-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longleftarrow & \mathbb{C} & \xleftarrow{0} & \mathbb{C} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow g_0 & & \downarrow g_1 & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & C_0^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{\partial} & C_1^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{\partial} & C_2^{\text{bar}}(G)_U & \xleftarrow{\partial} & C_3^{\text{bar}}(G)_U & \longleftarrow & \dots \end{array} \quad (3.41)$$

avec $g_0 : 1 \mapsto [1]$ et $g_1 : 1 \mapsto [1, v]$. □

Lemme 3.4.0.3. *On désigne par $C_*(k)$ le complexe total du sous-bicomplexe de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ constitué des k premières colonnes de ce dernier (comprendre les colonnes d'indices 0 à $k-1$). Alors on a, pour $n \geq 1$:*

$$H_*(C_*(2n)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } * = 2n - 1 \text{ ou } 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve :

Nous montrons ce résultat par récurrence sur $n \geq 1$. Pour faire fonctionner la récurrence, nous ajoutons le fait suivant à démontrer : pour tout $n \geq 1$, un générateur de $H_{2n-1}(C_*(2n))$ est donné par $(0, \dots, [1, v], 0) \in C_{2n-1}(2n) = CC_{0,2n-1} \oplus \dots \oplus CC_{2n-1,0}$. Pour $n = 1$, on regarde donc le sous-bicomplexe de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}$ constitué des deux premières colonnes. On vérifie aisément que l'on a la suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow Tot(CC_{0,*}) \longrightarrow C_*(2) \longrightarrow Tot(CC_{1,*})[-1] \longrightarrow 0 \quad (3.42)$$

Puisque la colonne $CC_{1,*}$ est acyclique (lemme 3.2.2.9), la longue suite exacte donne l'isomorphisme entre $H_*(C_*(2))$ et l'homologie de la première colonne, qui est de dimension 1 en degré 0 et 1 et triviale sinon, selon le lemme 3.4.0.2. On déduit de ce même

lemme qu'un générateur de $H_1(C_*(2))$ est donné par $\alpha = ([1, v], 0) \in CC_{0,1} \oplus CC_{1,0}$.

Nous supposons maintenant que nous avons établi le résultat pour des rangs inférieurs ou égaux à un certain $n \geq 1$. Commençons par remarquer que l'on a la suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow C_*(2n) \longrightarrow C_*(2n+2) \longrightarrow C_*(2)[-2n] \longrightarrow 0 \quad (3.43)$$

La suite exacte longue en homologie associée à l'extension (3.43) donne, en degré k :

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{k+1-2n}(C_*(2)) \xrightarrow{\delta} H_k(C_*(2n)) \longrightarrow H_k(C_*(2n+2)) \\ \longrightarrow H_{k-2n}(C(2)) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(C_*(2n)) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pour $k = 0$ puis $k = 2n + 1$, cette suite exacte donne déjà

$$H_0(C_*(2n+2)) \simeq H_0(C(2n)) \simeq \mathbb{C} \text{ et } H_{2n+1}(C_*(2n+2)) \simeq H_1(C(2)) \simeq \mathbb{C} \quad (3.45)$$

le deuxième isomorphisme permet au passage d'affirmer que $(0, \dots, 0, [1, v], 0) \in C_{2n+1}(2n+2)$ est un générateur de $H_{2n+1}(C_*(2n+2))$.

Pour les k distincts de $2n - 1$, $2n$ et $2n + 1$, on obtient directement $H_k(C_*(2n+2)) = 0$. Il reste donc à régler les cas $k = 2n$ et $k = 2n - 1$. La longue suite exacte donne :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{2n}(C_*(2n+2)) \longrightarrow H_0(C_*(2)) \xrightarrow{\delta} H_{2n-1}(C_*(2n)) \\ \longrightarrow H_{2n-1}(C_*(2n+2)) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pour conclure il suffit donc de montrer que la flèche de bord δ est un isomorphisme, de \mathbb{C} dans lui-même. Un générateur de $H_0(C_*(2))$ est donné par $[1]$, dont l'image par δ est engendrée par $\beta = (0, \dots, 0, [1]) \in C_{2n-1}(2n)$. Or, posant $\beta' = (0, \dots, 0, [1, 1], 0) \in C_{2n}(2n)$, on a :

$$\begin{aligned} \beta + \partial_T(\beta') &= \beta + (0, \dots, 0, (1 - \tilde{T})([1, 1]), -\partial'([1, 1])) \\ &= \beta + (0, \dots, 0, [1, 1] + [v^{-1}, 1], -[1]) \\ &= (0, \dots, 0, [1, 1], 0) + (0, \dots, 0, [v^{-1}, 1], 0) \\ &= (0, \dots, 0, [1, v], 0) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le passage vers la dernière ligne s'explique par le fait que $[1, 1]$ est dégénéré et, puisque nous travaillons avec les U -coinvariants. Ainsi $(0, \dots, 0, [1, v], 0)$ est homologue à β et engendre par ailleurs $H_{2n-1}(C_*(2n)) = \mathbb{C}$. Ainsi δ n'est pas nulle et est par conséquent un isomorphisme. On en conclut que l'on a bien $H_{2n}(C_*(2n+2)) = H_{2n-1}(C_*(2n+2)) = 0$.

□

Proposition 3.4.0.4. *L'augmentation $Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est un quasi-isomorphisme.*

Preuve :

En effet, le lemme 3.4.0.3 donne l'égalité $H_*(Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>})) = 0$ en tout degré non nul, et $H_0(Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}G)_{<v>})) = \mathbb{C}$. □

On a donc obtenu :

Théorème 3.4.0.5. *Si v est d'ordre infini, alors on a l'isomorphisme suivant :*

$$HC_*(\mathbb{C}G)_{\langle v \rangle} \simeq H_*(N_v, \mathbb{C})$$

4 Espaces $CAT(0)$, morphisme de rétraction

Dans ce chapitre nous nous intéressons tout particulièrement à l'espace X sur lequel agit le groupe Γ . Cet espace est un espace $CAT(0)$, nous en rappelons les définitions et propriétés dans un premier temps. Puis nous nous concentrons sur la nature de l'action de Γ sur X , qui est isométrique, propre et cocompacte, et sur ce que cela implique pour X . La majeure partie des résultats énoncés peuvent être retrouvés dans le livre de M. Bridson et A. Haefliger, [BH99]. Nous nous intéressons ensuite au complexe bar de X , à coefficients dans $\mathbb{C}v \subset Ad(\mathbb{C}\Gamma)$, pour un élément v de Γ . Nous commençons par construire un morphisme de complexes faisant diminuer le poids, puis, par itération finie de ce morphisme, nous en construisons un autre permettant de rétracter $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ dans un sous-complexe beaucoup plus petit, dont les simplexes sont de poids uniformément bornés. Ce morphisme sera de plus homotope à l'identité de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$.

4.1 Espaces $CAT(0)$

Dans ce qui suit on note \mathbb{E}^2 l'espace \mathbb{R}^2 muni de la métrique héritée du produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

Définition 4.1.0.1 (Segment géodésique). *Soit (X, d) un espace métrique et soient x et y deux points de X . On dira qu'une application continue $\gamma : [0, T] \rightarrow X$ est un segment géodésique joignant x à y si $\gamma(0) = x$ et $\gamma(T) = y$ et s'il existe $\lambda > 0$, tel que pour tous $t, t' \in [0, T]$, on a*

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = \lambda|t - t'| \quad (4.1)$$

Définition 4.1.0.2 (Espace uniquement géodésique). *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est géodésique si pour tous x et y de X , il existe un segment géodésique entre x et y . Si pour tous x et y il n'existe qu'un seul segment géodésique entre x et y , on dit que (X, d) est uniquement géodésique.*

Il est clair que l'espace métrique \mathbb{E}^2 est uniquement géodésique : un segment géodésique entre deux points x et y éloignés d'une distance δ est exactement l'application $t \mapsto \frac{1}{\delta}((\delta - t)x + ty)$.

Dans la suite on choisira de normaliser les segments géodésiques, c'est-à-dire que nous considérerons des applications de $[0, 1]$ dans X .

Soit maintenant (X, d) un espace géodésique. Pour deux points x et y de X , on notera $[x, y]$ un des segments géodésiques entre x et y . Pour $t \in [0, 1]$, on notera $m_t(p, q)$ le point de $[p, q]$ tel que $d(p, m_t) = td(p, q)$.

Définition 4.1.0.3 (Triangle géodésique). *Un triangle géodésique Δ est la donnée de trois points p, q et r de X appelés sommets et de trois segments géodésiques $[p, q]$, $[q, r]$ et*

$[r, p]$ appelés côtés. On notera $\Delta = \Delta([p, q], [q, r], [r, p])$ ou plus légèrement $\Delta = \Delta(p, q, r)$. On dira qu'un point $x \in X$ appartient à Δ s'il est dans l'image d'un de ses côtés.

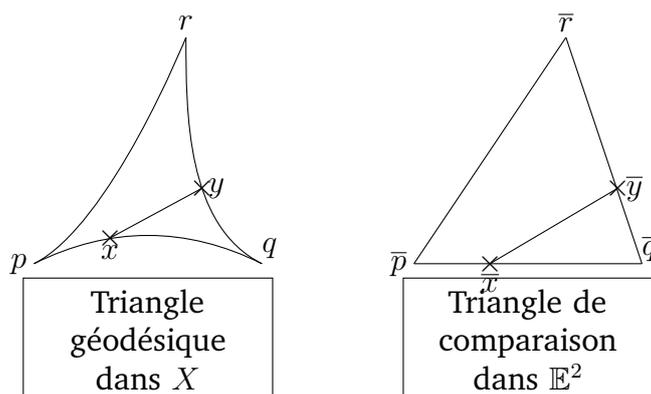
Définition 4.1.0.4 (Triangle de comparaison). Soit $\Delta = \Delta(p, q, r)$ un triangle géodésique dans X . On dira que le triangle $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ dans \mathbb{E}^2 est un triangle de comparaison pour Δ si $d(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q)$, $d(\bar{q}, \bar{r}) = d(q, r)$ et $d(\bar{r}, \bar{p}) = d(r, p)$. Si x est un point de Δ sur le segment $[p, q]$, le point \bar{x} est dit point de comparaison pour x si \bar{x} est dans $[\bar{p}, \bar{q}]$ et $d(p, x) = d(\bar{p}, \bar{x})$.

Pour un triangle géodésique de X , le triangle de comparaison dans \mathbb{E}^2 est unique, à isométrie près.

Définition 4.1.0.5 (Inégalité $CAT(0)$). Soit Δ un triangle géodésique dans X , et $\bar{\Delta}$ son triangle de comparaison. On dit que Δ vérifie l'inégalité $CAT(0)$ si pour tous points x, y de Δ et leurs points de comparaison respectifs \bar{x}, \bar{y} de $\bar{\Delta}$, on a :

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y}).$$

Définition 4.1.0.6 (Espace $CAT(0)$). On dit que (X, d) est un espace $CAT(0)$ si tous ses triangles géodésiques satisfont l'inégalité $CAT(0)$.



On donne ci-après quelques exemples d'espaces $CAT(0)$:

- les espaces euclidien et plus généralement les espaces de Hilbert,
- les arbres réels
- les variétés de Hadamard, ou variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure négative.

Proposition 4.1.0.7. Soit (X, d) un espace $CAT(0)$. Alors X est uniquement géodésique.

Preuve :

Soient p, q deux points de X et $[p, q]$ et $[p, q]'$ deux segments géodésiques entre ces deux points. On va montrer que les deux segments sont égaux. Pour cela, prenons $r \in [p, q]$ et $r' \in [p, q]'$ tels que $d(p, r) = d(p, r')$. On note alors $[p, r]$ et $[r, q]$ les deux segments dont la réunion est $[p, q]$. Alors dans un triangle de comparaison pour $\Delta([p, q]', [p, r], [r, q])$ qui sera plat, on a $\bar{r} = \bar{r}'$. D'où $r = r'$ puisque l'inégalité $CAT(0)$ donne $d(r, r') \leq d(\bar{r}, \bar{r}') = 0$. Et ainsi $[p, q] = [p, q]'$. \square

Proposition 4.1.0.8. *Soit (X, d) un espace $CAT(0)$. Alors la distance $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est convexe, c'est-à-dire que :*

$$\forall x_0, x_1, y_0, y_1 \in X, \forall t \in [0, 1], d(m_t(x_0, x_1), m_t(y_0, y_1)) \leq (1-t)d(x_0, y_0) + td(x_1, y_1).$$

Preuve :

Pour plus de clarté, on posera $x(t) = m_t(x_0, x_1)$ et $y(t) = m_t(y_0, y_1)$ pour $t \in [0, 1]$. On traite d'abord le cas $x_0 = y_0$: considérons le triangle de comparaison $\Delta(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{y_1})$ dans \mathbb{E}^2 . Soit $t \in [0, 1]$. Dans ce triangle, la géométrie euclidienne donne que $d(x(t), y(t)) = td(\overline{x_1}, \overline{y_1})$. Mais alors :

$$d(x(t), y(t)) \leq d(\overline{x(t)}, \overline{y(t)}) = td(\overline{x_1}, \overline{y_1}) = td(x_1, y_1) \quad (4.2)$$

Passons au cas général en introduisant le segment géodésique z tel que $z(0) = x_0$ et $z(1) = y_1$. Alors par ce qui précède on a d'une part :

$$d(x(t), z(t)) \leq td(x_1, y_1) \quad (4.3)$$

et d'autre part, en considérant le segment "opposé" de $[y_0, y_1]$:

$$d(y(t), z(t)) \leq (1-t)d(x_0, y_0) \quad (4.4)$$

Et finalement, par inégalité triangulaire :

$$d(x(t), y(t)) \leq d(x(t), z(t)) + d(y(t), z(t)) \leq td(x_1, y_1) + (1-t)d(x_0, y_0) \quad (4.5)$$

□

Proposition 4.1.0.9. *Soit (X, d) un espace $CAT(0)$ et x_0 un point de X . Alors l'application $x \mapsto d(x, x_0)^2$ est strictement convexe. Autrement dit, pour tout segment géodésique $c : [0, 1] \rightarrow X$, on a :*

$$\forall t \in]0, 1[, d(c(t), x_0)^2 < (1-t)d(c(0), x_0)^2 + td(c(1), x_0)^2.$$

Preuve :

Le fait que l'application $x \mapsto d(x, x_0)$ soit convexe vient de la proposition précédente. De plus, la fonction $y \mapsto y^2$ de \mathbb{R}_+ dans lui-même est strictement convexe et croissante. La composition des deux applications est donc strictement convexe. □

4.2 Groupe d'isométries d'un espace $CAT(0)$

Dans cette section nous nous intéressons à la nature isométrique, propre et cocompacte de l'action du groupe discret Γ sur l'espace $CAT(0)$ X . Dans un premier temps, nous regardons les implications sur les propriétés de X , puis nous nous penchons particulièrement sur les espaces de déplacement minimal, ainsi que sur les morphismes de projection sur ces espaces.

4.2.1 Action propre et cocompacte d'un groupe discret d'isométries

Dans cette sous-section nous nous plaçons dans un cadre général pour rappeler les différentes définitions des actions de groupe et de leur propriétés. Nous resserrons au fur et à mesure le problème jusqu'à coïncider avec les hypothèses de la thèse, afin que nous puissions identifier à chaque point quelles propriétés entrent en jeu. Nous partons donc d'un groupe G discret, et d'un espace métrique (X, d) quelconque.

Définition 4.2.1.1 (Action de groupe). *On appelle action (à gauche) du groupe G sur l'ensemble X tout morphisme de groupe f de G dans le groupe des bijections de X . On notera, pour g dans G et x dans X : $f(g)(x) := g \cdot x := gx$. On dira que G "agit" sur X .*

Définition 4.2.1.2 (Orbites). *Soit $x \in X$. On appelle orbite de x l'ensemble $\{y \in X \mid \exists g \in G, y = g \cdot x\}$.*

L'ensemble des orbites forme une partition de X . En effet, la relation "être dans la même orbite" est une relation d'équivalence sur X . On notera X/G l'ensemble des orbites, c'est-à-dire le quotient de X par cette relation d'équivalence. On notera $\pi : X \rightarrow X/G$ la projection canonique.

Définition 4.2.1.3 (Stabilisateurs). *Pour $x \in X$, on appelle stabilisateur de x le sous-groupe*

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

Pour tout $x \in X$, on peut alors considérer l'action de G_x sur X ; On note alors π_x la surjection naturelle de X sur X/G_x .

Définition 4.2.1.4 (Action isométrique). *L'action de G sur X est dite isométrique si, pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in X$, on a :*

$$d(g \cdot x, g \cdot y) = d(x, y) \tag{4.6}$$

Autrement dit, l'action de G sur X est donnée par un morphisme de groupe de G dans le groupe des isométries de X . Par abus, on pourra dire qu'un élément de G est une isométrie de X . On notera de plus qu'alors G agit par homéomorphismes. Dans tout ce qui suit on considère que G agit par isométries sur X .

On munit maintenant X/G de la topologie la plus fine rendant la projection π continue : on dira que $U \subset X/G$ est ouvert lorsque $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X .

Lemme 4.2.1.5. *L'application $\pi : X \rightarrow X/G$ est ouverte. Autrement dit, pour tout ouvert $U \subset X$, l'image $\pi(U)$ est ouverte dans X/G .*

Preuve :

Soit U un ouvert de X . On doit montrer que $\pi(U)$ est ouvert dans X/G , et donc que $U' = \pi^{-1}(\pi(U))$ est ouvert dans X . Or $U' = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$. Puisque G agit par homéomorphismes, les $g \cdot U$ sont des ouverts, et ainsi U' est ouvert comme réunion d'ouverts. \square

On considère maintenant l'application suivante :

$$\begin{aligned} F : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (g \cdot x, x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Définition 4.2.1.6 (Action propre). *On dira que l'action de G sur X est propre si l'application F est propre, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout compact doit être compacte.*

Lemme 4.2.1.7. *On suppose que l'action de G est propre. Alors, pour tout $x \in X$, le stabilisateur de x est fini.*

Preuve :

Comme le singleton $\{(x, x)\}$ est compact dans $X \times X$, son image réciproque par l'application F est compacte, puisque l'action de G est propre. Or cette image réciproque est exactement égale à $G_x \times \{x\}$. Par conséquent, le stabilisateur de x est compact, et donc fini puisque G est discret. \square

Corollaire 4.2.1.8. *On suppose que l'action de G est propre. Alors pour tout $x \in X$, l'application $\pi_x : X \rightarrow X/G_x$ est propre.*

Définition 4.2.1.9 (Boule distinguée). *Soient $x \in X$ et $r > 0$. On dira que la boule ouverte $B(x, r) \subset X$ est distinguée si :*

$$F^{-1}(B(x, r) \times B(x, r)) = G_x \times B(x, r)$$

On dira qu'une boule fermée est distinguée si elle est contenue dans une boule ouverte distinguée de même centre.

Remarque 4.2.1.10. *Il est clair que si la boule $B(x, r)$ est distinguée, alors les boules $B(x, r')$ sont distinguées pour tous $r' \leq r$.*

Lemme 4.2.1.11. *On suppose que l'action de G est propre. Alors pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r)$ soit distinguée.*

Preuve :

Soit $x \in X$. Tout d'abord, pour $r > 0$ quelconque, l'inclusion $F^{-1}(B(x, r) \times B(x, r)) \supset G_x \times B(x, r)$ a toujours lieu : en effet, si $g \in G_x$ et $y \in B(x, r)$, alors $g \cdot y \in B(x, r)$ puisque G agit par isométries.

Montrons maintenant l'inclusion inverse par l'absurde : supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $g_n \notin G_x$ et $y_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tels que $g_n \cdot y_n \in B(x, \frac{1}{n})$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n \cdot y_n = x$ et en particulier, l'ensemble

$$K = \{(g_n \cdot y_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(x, x)\} \quad (4.8)$$

est compact. L'action étant propre, son image réciproque par F est compacte, et ainsi l'ensemble $\{(g_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact dans $G \times X$. Ainsi l'ensemble $\{g_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est lui-même relativement compact dans G et est donc fini, G étant discret. Par conséquent, il existe une sous-suite de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, encore notée (g_n) et $g \in G$ tels que $g_n = g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors on a $g \cdot x = \lim_{n \rightarrow +\infty} g \cdot y_n = x$, et ainsi $g \in G_x$: contradiction. □

Lemme 4.2.1.12. *Soit $B(x, r)$ une boule ouverte distinguée. Alors pour tout $g \in G$, $g(B(x, r)) = B(g(x), r)$ est distinguée.*

Preuve :

Soient $\gamma \in G$ et $y \in B(g(x), r)$ tels que $\gamma(y) \in B(g(x), r)$. Alors $g^{-1}\gamma(y) \in B(x, r)$, mais $g^{-1}\gamma(y) = g^{-1}\gamma g g^{-1}(y)$ et $g^{-1}(y) \in B(x, r)$. Ainsi $g^{-1}\gamma g$ est dans G_x et par conséquent γ est dans $G_{g(x)}$. □

Lemme 4.2.1.13. *Soit $B(x, r)$ une boule ouverte distinguée et $g, h \in G$. Alors les boules $B(g \cdot x, r)$ et $B(h \cdot x, r)$ sont soit disjointes soit confondues.*

Preuve :

Supposons que $B(g \cdot x, r) \cap B(h \cdot x, r) \neq \emptyset$ et soit $y \in B(g \cdot x, r) \cap B(h \cdot x, r)$. Alors $(g^{-1} \cdot y, h^{-1} \cdot y) \in B(x, r) \times B(x, r)$. Par conséquent, $g^{-1}h \in G_x$, en effet $F(g^{-1}h, h^{-1} \cdot y) = (g^{-1} \cdot y, h^{-1} \cdot y) \in B(x, r) \times B(x, r)$ et $B(x, r)$ est distinguée. Ainsi $B(h \cdot x, r) = B(g(g^{-1}h) \cdot x, r) = B(g \cdot x, r)$. □

Définition 4.2.1.14. *On munit l'espace X/G de la distance, encore notée d , suivante :*

$$\forall x, y \in X, d(\pi(x), \pi(y)) = \inf_{g \in G} \{d(x, g \cdot y)\}.$$

Lemme 4.2.1.15. *On suppose que l'action de G est propre. Soit $x \in X$ et $r > 0$ telles que la boule fermée $\overline{B}(x, r)$ soit distinguée. Alors on a, dans X/G :*

$$\pi(\overline{B}(x, r)) = \overline{B}(\pi(x), r).$$

Preuve :

On peut remarquer tout d'abord que pour tous $y, y' \in X$, on a $d(\pi(y), \pi(y')) \leq d(y, y')$. Ainsi l'inclusion $\pi(\overline{B}(x, r)) \subset \overline{B}(\pi(x), r)$ est facilement établie.

Par définition, il existe $r' > r$ tel que la boule fermée $\overline{B}(x, r)$ soit incluse dans la boule ouverte distinguée $B(x, r')$. Soit maintenant $\pi(y) \in \overline{B}(\pi(x), r)$. Alors il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, g_n \cdot y) = d(\pi(x), \pi(y))$; on peut de plus se permettre de supposer que $d(x, g_n \cdot y) < r'$ pour tout n , quitte à prendre une sous-suite.

Remarquons maintenant que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $F(g_m g_n^{-1}, g_n \cdot y) = (g_m \cdot y, g_n \cdot y) \in B(x, r') \times B(x, r')$, et comme $B(x, r')$ est distinguée, que $g_m g_n^{-1} \in G_x$, ce qui entraîne que l'ensemble $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ est fini. On peut donc supposer, quitte à reprendre une sous-suite, que $g_n = g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour un certain $g \in G$.

On a alors $\pi(y) = \pi(g \cdot y) \in \pi(\overline{B}(x, r))$. En effet, $d(x, g \cdot y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, g_n \cdot y) \leq r$ □

On déduit des lemmes précédents la proposition :

Proposition 4.2.1.16. *On suppose que l'action de G est propre. Alors pour toute boule fermée distinguée $\overline{B}(x, r)$, on a un homéomorphisme*

$$\overline{B}(x, r)/G_x \simeq \pi(\overline{B}(x, r)) = \overline{B}(\pi(x), r)$$

Définition 4.2.1.17 (Action cocompacte). *On dit que l'action de G sur X est cocompacte si l'espace des orbites X/G est compact.*

Proposition 4.2.1.18. *On suppose que l'action de G est propre et cocompacte. Alors toute boule fermée distinguée est compacte.*

Preuve :

En effet, si $\overline{B}(x, r)$ est une boule fermée distinguée, alors $\overline{B}(\pi(x), r)$ est fermée dans X/G , donc compacte, ainsi $\overline{B}(x, r)/G_x$ est compact, et $\overline{B}(x, r)$ est compacte car π_x est propre. \square

La conséquence est :

Théorème 4.2.1.19. *On suppose que l'action de G est propre et cocompacte. Alors l'espace (X, d) est localement compact.*

Définition 4.2.1.20 (Domaine fondamental). *On dira qu'une partie $D \subset X$ est un domaine fondamental pour l'action de G sur X si D contient un et un seul élément de chaque orbite de l'action.*

Théorème 4.2.1.21. *On suppose que l'action de G est propre et cocompacte. Alors il existe, pour cette action, un domaine fondamental relativement compact.*

Preuve :

Pour chaque orbite $\mathcal{O} \in X/G$, on choisit $x \in X$ tel que $\pi(x) = \mathcal{O}$. Pour chacun de ces x , puisque X est localement compact, on choisit un voisinage U_x dont la fermeture \overline{U}_x est compacte. Alors l'ensemble d'ouverts $\{\pi(U_x)\}$ recouvre X/G , qui est compact. Par conséquent, il existe un nombre fini x_1, \dots, x_n de ces x tels que $\pi(U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}) = X/G$. Ainsi il existe un domaine fondamental $D \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ qui est relativement compact, puisque $\overline{U}_{x_1} \cup \dots \cup \overline{U}_{x_n}$ est compact comme réunion de compacts. \square

Lemme 4.2.1.22. *On suppose que l'action de G est propre et cocompacte. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule fermée de rayon ε est compacte dans X .*

Preuve :

X/G étant compact, il est possible de trouver un nombre fini de boules ouvertes distinguées B_1, \dots, B_k dans X dont les images par π recouvrent X/G . De ce fait, les images par G des B_i recouvrent X . Il existe donc ε assez petit pour que toute boule fermée $\overline{B}(x, \varepsilon)$ soit contenue dans une de ces images. Or ces images sont encore distinguées et ouvertes, ainsi $\overline{B}(x, \varepsilon)$ est distinguée et donc compacte. \square

Théorème 4.2.1.23. *On suppose que l'action de G est propre et cocompacte, et que X est un espace $CAT(0)$. Alors ce dernier est propre, c'est-à-dire que toutes ses boules fermées sont compactes.*

Preuve :

Soit $B = \overline{B}(x, R)$ une boule fermée de X et soit (x_n) une suite de points de B . On veut montrer que (x_n) admet une sous-suite convergente. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ tel que toute boule fermée de rayon 2ε soit compacte.

On peut tout d'abord remarquer que la suite (réelle) $(d(x, x_n))$ est bornée et que, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $(d(x, x_n))$ converge vers un réel C . Si $C < 2\varepsilon$, la suite (x_n) est contenue dans $\overline{B}(x, 2\varepsilon)$ et admet donc une sous-suite convergente. Sinon, soit N tel que $N\varepsilon \leq C < (N+1)\varepsilon$.

Pour $1 \leq k \leq N$ et $n \in \mathbb{N}$, on note x_n^k le point du segment géodésique $[x, x_n]$ tel que $d(x, x_n^k) = k\varepsilon$.

Comme $d(x, x_n^1) = \varepsilon \leq 2\varepsilon$, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite (x_n^1) converge vers un point x^1 .

Supposons maintenant que pour $1 \leq k \leq N-1$, la suite (x_n^k) converge vers un point x^k . Alors on a :

$$d(x_n^{k+1}, x^k) \leq d(x_n^{k+1}, x_n^k) + d(x_n^k, x^k) < 2\varepsilon \quad (4.9)$$

au moins pour n assez grand. Ainsi, quitte à reprendre une sous-suite, on peut supposer que (x_n^{k+1}) converge.

On a donc montré par récurrence que la suite (x_n^N) converge vers un point x^N . Mais alors on a :

$$d(x_n, x^N) \leq d(x_n, x_n^N) + d(x_n^N, x^N) < 2\varepsilon \quad (4.10)$$

au moins pour n assez grand, et ainsi (x_n) admet une sous-suite convergente. \square

Nous terminons par un résultat classique, dont nous donnons une démonstration :

Proposition 4.2.1.24. *On suppose que l'action de G est propre et cocompacte, et que X est un espace $CAT(0)$. Soient x_1, \dots, x_k des points de X . Alors la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto d(x, x_1)^2 + \dots + d(x, x_k)^2$ admet un et seul minimum, appelé barycentre des points x_1, \dots, x_k .*

Preuve :

Commençons par montrer l'existence d'un minimum à la fonction f . Soit (y_n) une suite de points de X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \inf_{x \in X} f(x)$. L'action de G sur X étant cocompacte, il existe un compact $K \subset X$ tel que GK recouvre X . Pour chaque n , il existe donc $g_n \in G$ et $z_n \in K$ tels que $y_n = g_n z_n$. Comme la suite $(f(y_n))$ est bornée, la suite $(d(y_n, x_1))$ l'est également, et ainsi la suite $(d(z_n, g_n^{-1}x_1))$ l'est aussi. Par conséquent, l'ensemble $\{d(z, g_n^{-1}x_1), z \in K\}$ est bornée par inégalité triangulaire et par le fait que K est borné. Ainsi l'ensemble $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ est fini, G étant discret. Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc supposer qu'il existe g tel que $g_n = g$ pour tout n . De même, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite (z_n) converge vers $z \in K$. Alors le minimum de g est réalisé en le point gz .

Pour l'unicité de ce minimum, il suffit de remarquer que la fonction f est strictement convexe, car les applications $x \mapsto d(x, x_i)^2$ le sont. Alors si y et y' étaient deux points distincts réalisant le minimum de f , on aurait, par exemple pour le milieu m du segment géodésique $[y, y']$: $f(m) < \inf_{x \in X} f(x)$, qui est absurde. \square

4.2.2 Déplacement minimal, théorème de projection

Nous revenons maintenant à notre cas : nous reprenons donc le groupe discret Γ , qui agit sur un espace $CAT(0)$ (X, d) de façon isométrique propre et compacte. Nous nous intéressons ici aux espaces de déplacement minimal de chaque élément de Γ , et de la projection sur ces espaces.

4.2.2.1 Théorème de projection, propriétés de la projection

Théorème 4.2.2.1. *Soit C un convexe fermé de X . Alors pour tout $x \in X$, il existe un unique point de C , noté $\pi_C(x)$, tel que $d(x, \pi_C(x)) = \inf_{y \in C} d(x, y) = d(x, C) = D$. On appelle l'application $\pi_C : x \mapsto \pi_C(x)$ la projection dite orthogonale sur C .*

Preuve :

Soient $x \in X$, (y_n) une suite d'éléments de C telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, y_n) = D$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $d(x, y_n) < D + \varepsilon$. Soient alors $p, q \geq N$ et soit $\bar{\Delta}(x, y_p, y_q)$ un triangle de comparaison dans \mathbb{E}^2 . On remarque que le segment $[\bar{y}_p, \bar{y}_q]$ est nécessairement contenu dans l'anneau fermé \mathcal{A} délimité par les cercles de rayons D et $D + \varepsilon$. En effet, dans le cas contraire, on aurait un $z \in [y_p, y_q] \subset C$ tel que $d(z, x) \leq d(\bar{z}, \bar{x}) < D$, ce qui entrerait en contradiction avec la définition de D . Or un tel segment $[\bar{y}_p, \bar{y}_q]$ est de longueur au plus $2\sqrt{2\varepsilon D + \varepsilon^2}$. Ainsi, on a montré que :

$$\forall p, q, \geq N, d(y_p, y_q) \leq d(\bar{y}_p, \bar{y}_q) < 2\sqrt{2\varepsilon D + \varepsilon^2} \quad (4.11)$$

Ainsi la suite (y_n) est de Cauchy, donc convergente dans C car C est complet. Pour l'unicité de $\pi(x)$, supposons qu'un autre point $y \in C$ réalise la distance D . Alors la suite (y_n) valant alternativement $\pi(x)$ et y vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, y_n) = D$ et est donc de Cauchy, et par conséquent $y = \pi(x)$. \square

La preuve de la proposition qui suit est très géométrique et peut être trouvée dans [BH99], chapitre II.2.

Proposition 4.2.2.2. *Soit C un convexe fermé de X . Alors la projection π_C satisfait :*

$$\forall x, y \in X, d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y).$$

4.2.2.2 Déplacement minimal

Définition 4.2.2.3. *Soit $g \in \Gamma$. On appelle fonction de déplacement de g la fonction $d_g : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout point x associe la distance $d(x, g(x))$. On appelle longueur stable de g le nombre $|g|_s = \inf_{x \in X} d_g(x)$, et l'ensemble des points x tels que $d_g(x) = |g|_s$ est noté M_g . Ce dernier ensemble est appelé espace de déplacement minimal de g .*

Proposition 4.2.2.4. *Pour tout $g \in \Gamma$, M_g est non vide.*

Preuve :

Puisque l'action de Γ est cocompacte, il existe un compact $K \subset X$ tel que l'image

de K par Γ recouvre X . Soit $g \in \Gamma$ et soit (x_n) une suite de points de X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_g(x_n) = |g|$. Pour chaque n , on choisit $y_n \in K$ et g_n tels que $x_n = g_n(y_n)$. On peut remarquer que $d_g(x_n) = d(g_n^{-1}gg_n(y_n), y_n)$ et que par conséquent cette dernière quantité est bornée. Il s'en suit que pour tout $x \in K$, la quantité $d(g_n^{-1}gg_n(x), x)$ est uniformément bornée, par inégalité triangulaire. L'action de Γ étant propre, l'ensemble $\{g_n^{-1}gg_n, n \in \mathbb{N}\}$ est nécessairement fini. Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc supposer qu'il existe $\tilde{g} \in \Gamma$ tel que $g_n^{-1}gg_n = \tilde{g}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, K étant compact, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite (y_n) converge vers un $y \in K$. Alors $g_n(y) \in \text{Min}(g)$ pour tout n . En effet :

$$d_g(g_n(y)) = d(gg_n(y), g_n(y)) = d(\tilde{g}(y), y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{g}(y_n), y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_g(x_n) \quad (4.12)$$

□

Proposition 4.2.2.5. *Soit $g \in \Gamma$. Alors M_g est un convexe fermé de X .*

Preuve :

Soient $x, y \in M_g$ et $\gamma = [x, y]$ le segment géodésique de x à y . Alors on remarque que $g(\gamma) = [g(x), g(y)]$. Par convexité de la distance de X , on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$d(g(\gamma(t)), \gamma(t)) \leq (1-t)d(g(x), x) + td(g(y), y) = (1-t)|g| + t|g| = |g| \quad (4.13)$$

□

Dans la suite, on notera π_g la projection orthogonale de X sur le convexe fermé M_g , pour $g \in \Gamma$.

Proposition 4.2.2.6. *Soient $g, u \in \Gamma$. Alors :*

- $|ugu^{-1}|_s = |g|_s$: la longueur stable est invariante par conjugaison,
- $M_{ugu^{-1}} = uM_g$,
- $\pi_{ugu^{-1}}(ux) = u\pi_g(x)$, pour tout $x \in X$. En particulier, si u commute avec g , on a $\pi_g(ux) = u\pi_g(x)$ pour tout $x \in X$.

Preuve :

Pour la dernière propriété, il suffit de remarquer que pour $C \subset X$ convexe fermé, on a $\pi_{uC}(ux) = u\pi_C(x)$. En effet :

$$d(x, C) = d(ux, uC) = d(ux, \pi_{uC}(ux)) = d(x, u^{-1}\pi_{uC}(ux)) \quad (4.14)$$

□

Proposition 4.2.2.7. *Soit $g \in \Gamma$. Alors g est de torsion (i.e. d'ordre fini) si et seulement si g admet des points fixes.*

Preuve :

Supposons que g admette un point fixe x . Alors g est dans le stabilisateur de x , qui est fini (lemme 4.2.1.7). Donc g est d'ordre fini.

Supposons maintenant que g est d'ordre fini n , et prenons $x \in X$. Alors l'ensemble $E = \{g^k x, k \in \mathbb{N}\}$ est fini et surtout stable par g . Par conséquent le barycentre de cet ensemble est un point fixe pour g , puisque g est une isométrie. \square

Définition 4.2.2.8. Soit $g \in \Gamma$. On dira que g est :

- elliptique si $|g|_s = 0$ (et donc si g est de torsion),
- hyperbolique si $|g|_s > 0$.

Proposition 4.2.2.9. Le groupe Γ n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de torsion.

Preuve :

Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de torsion de Γ deux à deux non conjugués. D'après la proposition 4.2.2.7, chaque g_n admet au moins un point fixe : pour $n \in \mathbb{N}$, notons x_n un point fixe de g_n . L'action de Γ étant cocompacte, il existe un compact K dont les translatés recouvrent X . Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n \in \Gamma$ tel que $y_n = h_n x_n$ est dans K . L'image par l'application F (4.7) d'un couple $(h_n g_n h_n^{-1}, y_n)$ est $(y_n, y_n) \in K \times K$. On en déduit, l'action de Γ étant propre, que l'ensemble des éléments $h_n g_n h_n^{-1}$ est contenu dans un compact, et est donc fini, Γ étant discret. Il existe donc des entiers n, m tels que g_n et g_m sont conjugués, c'est la contradiction cherchée. \square

Nous aurons besoin dans la suite de l'estimation donnée par le lemme et la proposition suivants :

Lemme 4.2.2.10. Soit $v \in \Gamma$. On a :

$$\inf_{d(y, M_v)=1} d_v(y) > |v|_s$$

De plus, la quantité $\inf_{d(y, M_v)=1} d_v(y) - |v|_s$ ne dépend que de la classe de conjugaison de v .

Preuve :

Supposons qu'il existe une suite (y_n) de points de X tels que $d(y_n, M_v) = 1$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_v(y_n) = |v|_s$. Soit alors K un compact dont les images par Γ recouvrent X . Pour chaque n , on choisit $g_n \in \Gamma$ et $z_n \in K$ tels que $y_n = g_n(z_n)$. En reprenant les arguments de la preuve de la proposition 4.2.2.4, on peut supposer qu'il existe $g \in \Gamma$ tel que $g_n^{-1} v g_n = g$ pour tout n et que la suite (z_n) converge vers $z \in K$. Alors pour tout n , $d(z_n, M_g) = d(y_n, M_v) = 1$, donc $d(z, M_g) = 1$. Mais $z \in M_g$: en effet $d_g(z) = \lim d_g(z_n) = \lim d_v(y_n) = |v|_s = |g|_s$: contradiction.

Pour l'invariance par conjugaison, on peut remarquer que si $w = uvu^{-1}$, on a :

$$\inf_{d(y, M_w)=1} d_w(y) = \inf_{d(u^{-1}y, M_v)=1} d_w(y) = \inf_{d(z, M_v)=1} d_w(uz) = \inf_{d(z, M_v)=1} d_v(z) \quad (4.15)$$

puisque dans ce cas $d_w(uz) = d(uz, wuz) = d(uz, uvz) = d(z, vz) = d_v(z)$. \square

Proposition 4.2.2.11. Soit $v \in \Gamma$. Alors il existe une constante $C_v > 0$, dépendant uniquement de la classe de conjugaison de v , telle que, pour tout $x \in X$ tel que $d(x, \pi_v(x)) \geq 1$:

$$d(x, \pi_v(x)) \leq C_v(d_v(x) - |v|_s) \leq C_v d_v(x)$$

Preuve :

Soit $x \in X$ tel que $\delta = d(x, \pi_v(x)) = d(x, M_v) \geq 1$. On note $\gamma : [0, d(x, \pi_v(x))] \rightarrow X$ le segment géodésique de $\pi_v(x)$ vers x . Soit alors $y = \gamma(1)$, autrement dit $y \in [\pi_v(x), x]$ et $d(y, M_v) = 1$. Alors, par convexité de la fonction $d_v : z \mapsto d(z, v)$ (héritée de celle de d), on a :

$$\begin{aligned} d_v(y) &\leq \frac{1}{\delta} ((\delta - 1)d_v(\pi_v(x)) + d_v(x)) \\ &= \frac{1}{\delta} ((\delta - 1)|v|_s + d_v(x)) \end{aligned} \tag{4.16}$$

D'où : $\delta(d_v(y) - |v|_s) \leq d_v(x) - |v|_s$. En posant $1/C_v = \inf_{d(y, M_v)=1} d(y, v) - |v|_s$, on obtient l'estimation cherchée. \square

4.3 Le morphisme de subdivision sd

Rappelons les notations précédentes : pour un ensemble X donné, $\Delta(X)_\bullet$ représente l'ensemble simplicial associé à X , et $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C})$ le complexe Bar associé. On rappelle également que $sd_2(\Delta(X)_\bullet)$ désigne la subdivision de l'ensemble simplicial $\Delta(X)_\bullet$.

Étant donné un élément $v \in \Gamma$, on note $\mathbb{C}v$ le sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $Ad(\mathbb{C}\Gamma)$ engendré par v . Le but de cette section est de construire un morphisme de complexes de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v) = C_*(X, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}v$ qui le rétracte dans un très petit sous-complexe. Nous commençons par construire un morphisme de subdivision qui aura pour effet de diminuer le poids des simplexes. Le morphisme de rétraction recherché sera *in fine* une itération finie de ce morphisme de subdivision.

Tout d'abord, nous définissons le poids d'un simplexe et d'une chaîne de simplexes de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$, ainsi qu'une famille de semi-normes sur $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$:

Définition 4.3.0.1. Soit $\alpha = [x_0, \dots, x_n; v]$ un simplexe de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$. On définit le poids $|\alpha|$ de α par :

$$|\alpha| = d(x_n, v \cdot x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Si α est une chaîne de simplexe, $|\alpha|$ désignera le maximum des poids des simplexes dans le support de α .

Nous allons munir $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ d'une famille de semi-normes, indexées par \mathbb{N} de la façon suivante :

Définition 4.3.0.2. Pour un simplexe $\alpha \in C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ et $N \in \mathbb{N}$, on définit la "norme N " de α par :

$$\|\alpha\|_N = (1 + |\alpha|)^N \tag{4.17}$$

Pour une chaîne $\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i$ de $C_n^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$, on définit la "norme N " de α par :

$$\|\alpha\|_N = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \|\alpha_i\|_N = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| (1 + |\alpha_i|)^N \quad (4.18)$$

Compte-tenu de la nature de ces semi-normes, on pourra s'autoriser à travailler uniquement sur la norme de simplexes plutôt que sur la norme de chaînes, ce qui simplifiera beaucoup les calculs qui vont suivre.

On peut de plus remarquer la chose suivante, qui sera bien utile pour les estimations à venir : si $\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \in C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$, alors on a l'inégalité

$$\|\alpha\|_N \leq \|\alpha\|_0 (1 + |\alpha|)^N \quad (4.19)$$

4.3.1 Construction du morphisme sd

Rappelons que dans le premier chapitre, nous avons construit un morphisme de complexes d'un complexe simplicial associé à un ensemble vers celui associé à sa subdivision. Ce morphisme avait été noté σ_* . Pour un simplexe $\alpha = [x_0, \dots, x_n] \in \Delta(X)_\bullet$, on a :

$$\sigma_*(\alpha) = \sum_{\gamma=[p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_n]} \pm [x_{p_0}, \dots, x_{p_n}, x_{q_0}, \dots, x_{q_n}] \quad (4.20)$$

où la somme est prise sur tous les 2^n simplexes non-dégénérés γ de $sd_2(\Delta(X))_n$.

On utilise maintenant un autre morphisme pour revenir dans $\Delta(X)_\bullet$:

Définition 4.3.1.1. On définit le morphisme simplicial $\iota : sd_2(\Delta(X)_\bullet) \rightarrow \Delta(X)_\bullet$ par :

$$\iota([x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]) \mapsto [m(x_0, y_0), \dots, m(x_n, y_n)] ,$$

où $m(x, y)$ désigne le milieu du segment géodésique $[x, y]$.

On note $\iota_* : C_*(sd_2(X_\bullet), \mathbb{C}) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C})$ le morphisme de complexes induit par ι .

Définition 4.3.1.2. On note sd_* (ou simplement sd) la composition $\iota_* \circ \sigma_* : C_*(X, \mathbb{C}v) \rightarrow C_*(X, \mathbb{C}v)$. Ce morphisme sera appelé morphisme de subdivision.

Étant donné $\alpha = [x_0, \dots, x_n] \in \Delta(X)_\bullet$, $sd(\alpha)$ se présente alors comme une somme de 2^n simplexes indexée par les simplexes non-dégénérés γ :

$$sd(\alpha) = \sum_{\gamma=[p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_n]} \pm [m(x_{p_0}, x_{q_0}), \dots, m(x_{p_n}, x_{q_n}); v]. \quad (4.21)$$

De plus, en degré 0, on a $sd([x_0; v]) = [m(x_0, x_0); v] = [x_0; v]$ pour tout $x_0 \in X$. Le morphisme sd donne donc l'identité en degré 0.

Puisque l'homologie du complexe $C_*(X, \mathbb{C}v)$ est nulle sauf en degré 0, il vient que le morphisme de complexes sd induit l'identité en homologie. Par conséquent, d'après le

lemme 1.2.8.7, sd est homotope à l'identité et on notera h_{sd} l'homotopie donnée par le lemme. Concrètement, on a :

$$h_{sd}(\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, x_i, sd(x_i, \dots, x_n); v] \quad (4.22)$$

4.3.2 Estimations des normes de sd et h_{sd}

Proposition 4.3.2.1. *Soit $\alpha = [x_0, \dots, x_n; v] \in C_n(X, \mathbb{C}v)$ un simplexe (non-dégénéré) et*

$$\alpha' = [m(x_{p_0}, x_{q_0}), \dots, m(x_{p_n}, x_{q_n}); v] \quad (4.23)$$

un des 2^n simplexes intervenant dans la formule (4.21). Alors il existe $j \in \{0, \dots, n\}$ tel que :

$$|\alpha'| \leq \frac{1}{2} (|\alpha| + d(x_j, vx_j)) \quad (4.24)$$

Preuve :

On va estimer le poids de α' à l'aide de la convexité de la distance d :

$$\begin{aligned} |\alpha'| &= d(m(x_{p_n}, x_{q_n}), vm(x_{p_0}, x_{q_0})) + \sum_{i=0}^{n-1} d(m(x_{p_i}, x_{q_i}), m(x_{p_{i+1}}, x_{q_{i+1}})) \\ &\leq d(m(x_{p_n}, x_{q_n}), m(vx_{p_0}, vx_{q_0})) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (d(x_{p_i}, x_{p_{i+1}}) + d(x_{q_i}, x_{q_{i+1}})) \\ &\leq \frac{1}{2} (d(x_{p_n}, vx_{p_0}) + d(x_{q_n}, vx_{q_0})) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (d(x_{p_i}, x_{p_{i+1}}) + d(x_{q_i}, x_{q_{i+1}})) \end{aligned} \quad (4.25)$$

On rappelle les propriétés des simplexes non-dégénérés de $sd_2(\Delta(X)_\bullet)$, à savoir que $p_n = q_0$, $p_0 = 0$, $q_n = n$, et que $(p_{i+1} - p_i) + (q_{i+1} - q_i) = 1$, pour $0 \leq i \leq n-1$. En particulier, la somme $\sum_{i=0}^{n-1} (d(x_{p_i}, x_{p_{i+1}}) + d(x_{q_i}, x_{q_{i+1}}))$ est égale à $\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$, mais dans un ordre différent.

Ensuite, le terme $d(x_{q_n}, vx_{p_0})$ est exactement égal à $d(x_n, vx_0)$.

Enfin, soit $j \in \{0, \dots, n\}$ tel que $p_n = q_0 = j$. Alors $d(x_{p_n}, vx_{q_0}) = d(x_j, vx_j)$. On obtient donc l'estimation annoncée. \square

On constate donc l'apparition d'un terme supplémentaire, $d(x_j, vx_j)$. L'objectif étant que sd fasse diminuer le poids, il faut pouvoir borner ce terme. Pour cela, nous allons au préalable projeter X sur le convexe fermé M_v .

Proposition 4.3.2.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \pi_v : C_*^{bar}(X, \mathbb{C}v) &\longrightarrow C_*^{bar}(M_v, \mathbb{C}v) \\ [x_0, \dots, x_n; v] &\longmapsto [\pi_v(x_0), \dots, \pi_v(x_n); v] \end{aligned}$$

est un morphisme de complexes de norme 1.

Preuve :

Pour estimer la norme de π_v , il suffit de comparer les poids. Utilisant le fait que $d(\pi_v(x), \pi_v(y)) \leq d(x, y)$ et que $\pi_v(vx) = v\pi_v(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\pi_v(x_0, \dots, x_n; v)| &= d(v\pi_v(x_0), \pi_v(x_n)) + \sum_{i=0}^{n-1} d(\pi_v(x_i), \pi_v(x_{i+1})) \\
&\leq d(v\pi_v(x_0), \pi_v(x_n)) + \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\
&= d(\pi_v(vx_0), \pi_v(x_n)) + \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\
&\leq d(vx_0, x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\
&= |(x_0, \dots, x_n; v)|
\end{aligned} \tag{4.26}$$

□

Proposition 4.3.2.3. *Le morphisme π_v est homotope à l'identité de $C_*^{bar}(X, \mathbb{C}v)$, et l'homotopie h_π est donnée, pour $\alpha = [x_0, \dots, x_n; v]$, par :*

$$h_\pi(\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\pi_v(x_0), \dots, \pi_v(x_i), x_i, \dots, x_n; v] \tag{4.27}$$

De plus, h_π est bornée et on a l'estimation suivante :

$$|h_\pi(\alpha)| \leq (1 + 2C_v)|\alpha| + 2 \tag{4.28}$$

où C_v est la constante mise en évidence dans la proposition 4.2.2.11. Par conséquent, il existe une constante $C_{N,v}$ dépendant uniquement de N et de la classe de conjugaison de v telle que :

$$\|h_\pi(\alpha)\|_N \leq (n + 1)C_{N,v}\|\alpha\|_N \tag{4.29}$$

Preuve :

Soit $\alpha'_i = [\pi_v(x_0), \dots, \pi_v(x_i), x_i, \dots, x_n; v]$ dans le support de $h_\pi(\alpha)$. Alors :

$$\begin{aligned}
|\alpha'_i| &= \sum_{k=0}^{i-1} d(\pi_v(x_k), \pi_v(x_{k+1})) + \sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) + d(v\pi_v(x_0), x_n) + d(\pi_v(x_i), x_i) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) + d(\pi_v(vx_0), \pi_v(x_n)) + d(\pi_v(x_n), x_n) + d(\pi_v(x_i), x_i) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) + d(vx_0, x_n) + d(\pi_v(x_n), x_n) + d(\pi_v(x_i), x_i) \\
&= |\alpha| + d(\pi_v(x_n), x_n) + d(\pi_v(x_i), x_i)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Intéressons-nous au terme $d(\pi_v(x_i), x_i)$: si $d(\pi_v(x_i), x_i) \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
d(\pi_v(x_i), x_i) &\leq C_v d(x_i, vx_i) \\
&\leq C_v \left(\sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) + d(x_n, vx_0) + \sum_{k=0}^{i-1} d(vx_k, vx_{k+1}) \right) \\
&= C_v \left(\sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) + d(x_n, vx_0) + \sum_{k=0}^{i-1} d(x_k, x_{k+1}) \right) \\
&= C_v |\alpha|
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ainsi, suivant la valeur de $d(x, \pi_v(x))$ par rapport à 1 pour x_i et x_n , on a :

$$|\alpha'_i| \leq |\alpha| + 2, \text{ ou } |\alpha'_i| \leq |\alpha|(C_v + 1) + 1, \text{ ou } |\alpha'_i| \leq (2C_v + 1)|\alpha| \tag{4.32}$$

Dans tous les cas, on a donc : $|\alpha'_i| \leq (2C_v + 1)|\alpha| + 2$. \square

Une fois que l'on a projeté sur l'espace M_v , on a la nouvelle estimation, d'après la proposition 4.3.2.1 :

Proposition 4.3.2.4. *Soit $\alpha \in C_*^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$. Alors on a l'estimation suivante :*

$$|sd(\alpha)| \leq \frac{1}{2}(|\alpha| + |v|_s)$$

Définition 4.3.2.5. *On pose $R_v = 2|v|_s$.*

Nous pouvons alors faire plusieurs constats :

- si v est de torsion, et donc si $|v|_s = 0$, alors sd fait diminuer le poids strictement, permettant, après itération, d'obtenir un poids d'arrivée aussi petit que l'on veut.
- si v n'est pas de torsion, et donc si $|v|_s > 0$, on remarque que :
 - si $|\alpha| \geq R_v$, alors $|sd(\alpha)| \leq \frac{3}{4}|\alpha|$,
 - si $|\alpha| < R_v$, alors $|sd(\alpha)| < R_v$

Pour synthétiser les deux situations, on peut énoncer la :

Proposition 4.3.2.6. *Soit $\alpha \in C_*^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$. Alors pour tout $R > R_v$, il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq K$, on a $|sd^k(\alpha)| \leq R$.*

Remarque 4.3.2.7. *La constante $R_v = 2|v|_s$ est arbitraire : on aurait pu choisir n'importe quelle constante de la forme $\lambda|v|_s$ avec $\lambda > 1$.*

Proposition 4.3.2.8. *Soit $\alpha = [x_0, \dots, x_n; v] \in C_n^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$ un simplexe. Alors on a $|h_{sd}(\alpha)| \leq |\alpha|$ et $\|h_{sd}(\alpha)\|_0 = 2^{n+1} - 1$.*

Preuve :

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$ et $[y_i, \dots, y_n]$ un des 2^{n-i} simplexes dans le support de $sd([x_i, \dots, x_n])$. On va estimer le poids du simplexe $\alpha_i = [x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_n; v]$ dans le support de $h_{sd}(\alpha)$:

$$|\alpha_i| = d(vx_0, y_n) + d(x_i, y_i) + \sum_{k=0}^{i-1} d(x_k, x_{k+1}) + \sum_{k=i}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \quad (4.33)$$

Par définition, il existe $j \in \{i, \dots, n\}$ tel que $y_i = m(x_i, x_j)$ et $y_n = m(x_j, x_n)$. On a donc :

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &\leq \frac{1}{2}(d(vx_0, x_j) + d(vx_0, x_n)) + \frac{1}{2}(d(x_i, x_i) + d(x_i, x_j)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-1} d(x_k, x_{k+1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

La justification de l'inégalité $\sum_{k=i}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$ est identique à celle évoquée dans la preuve de la proposition 4.3.2.1. Poursuivons :

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &\leq d(vx_0, x_n) + \frac{1}{2}(d(x_n, x_j) + d(x_i, x_j)) + \sum_{k=0}^{i-1} d(x_k, x_{k+1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq d(vx_0, x_n) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) + \sum_{k=0}^{i-1} d(x_k, x_{k+1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ces deux dernières inégalités utilisent l'inégalité triangulaire. On arrive finalement à $|\alpha_i| \leq |\alpha|$.

Enfin, $\|h_{sd}(\alpha)\|_0$ représente en fait le nombre de simplexes dans la chaîne, et chaque $sd([x_i, \dots, x_n])$ fait apparaître 2^{n-i} simplexes. \square

4.4 Morphisme de rétraction

Maintenant que nous avons notre morphisme de subdivision faisant diminuer le poids des simplexes (presque) autant que l'on veut, nous pouvons construire un morphisme de complexes partant de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ et arrivant dans un complexe dont tous les simplexes auront un poids uniformément borné par un certain $R > R_v$, où R_v est la constante définie en 4.2.2.11.

4.4.1 Construction

Définition-Proposition 4.4.1.1. *Soit $R > R_v$. On pose*

$$\Delta(M_v)_\bullet^R = \{\alpha \in \Delta(M_v)_\bullet, |\alpha| \leq R\}.$$

Alors $\Delta(M_v)_\bullet^R$ est un sous-ensemble simplicial de $\Delta(M_v)_\bullet$. On définit alors le complexe $C_^{\text{bar}, R}(M_v, \mathbb{C}v)$ comme le complexe simplicial associé à $\Delta(M_v)_\bullet^R$: c'est un sous-complexe de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$.*

Preuve :

La seule chose à vérifier est que le poids d'un simplexe de $\Delta(X)_\bullet^R$ ne dépasse pas R sous l'effet des applications faces et dégénérescences. Mais ceci est immédiat puisqu'on a, pour tout simplexe $\alpha : |\partial_i(\alpha)| \leq |\alpha|$ par l'inégalité triangulaire de la distance d , et $|s_j(\alpha)| = |\alpha|$. \square

Définition 4.4.1.2. Soit $R > R_v$ et P_R l'application de $C_*^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$ dans $C_*^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$ définie par :

$$P_R(\alpha) = \alpha \text{ si } |\alpha| \leq R \text{ et } P_R(\alpha) = 0 \text{ sinon} \quad (4.36)$$

On définit alors l'application $h_R : C_*^{bar}(M_v, \mathbb{C}v) \rightarrow C_{*+1}^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$ par :

$$h_R = \sum_{k=0}^{+\infty} (id - P_R) \circ h_{sd} \circ sd^k \quad (4.37)$$

Enfin, on définit l'application Φ_R par :

$$\Phi_R = id - (h_R \circ \partial + \partial \circ h_R) \quad (4.38)$$

L'application h_R est bien définie puisque nous avons remarqué que pour tout simplexe $\alpha \in C_*^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$, il existe toujours un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq K$, on ait $|sd^k(\alpha)| \leq R$ (proposition 4.3.2.6). De plus, h_{sd} n'augmente pas le poids des simplexes, comme nous l'avons vu (proposition 4.3.2.8). Par conséquent, la somme définissant h_R est toujours finie, sa taille variant en fonction du poids de départ du simplexe considéré.

Proposition 4.4.1.3. Soit $\alpha \in C_n^{bar}(M_v, \mathbb{C}v)$ un simplexe. Alors il existe un polynôme $P_{n,R}$ dépendant de n et de R tel que :

$$\|h_R(\alpha)\|_N \leq P_{n,R}(|\alpha|)\|\alpha\|_N,$$

avec $\deg(P_{n,R}) = n$ si v est de torsion et $\deg(P_{n,R}) = 3n$ sinon.

Preuve :

Soit K le plus petit des entiers k tels que $|sd^k(\alpha)| \leq R$. Si $K = 0$ alors $h_R(\alpha) = 0$.

Sinon, on a $h_R(\alpha) = \sum_{k=0}^{K-1} h_{sd} \circ sd^k(\alpha) = h_{sd} \left(\sum_{k=0}^{K-1} sd^k(\alpha) \right)$.

Tous les simplexes dans cette somme sont de poids inférieur à $|\alpha|$, on a donc $|h_R(\alpha)| \leq |\alpha|$. Estimons la norme 0 de $h_R(\alpha)$, c'est-à-dire le nombre de simplexes dans cette chaîne :

$$\|h_R(\alpha)\|_0 = (2^{n+1} - 1) \sum_{k=0}^{K-1} 2^{nk} = (2^{n+1} - 1) \frac{2^{nK} - 1}{2^n - 1} \quad (4.39)$$

Il nous faut maintenant évaluer la quantité 2^{nK} :

— si v est de torsion, on a $|sd^k(\alpha)| \leq \frac{1}{2^k} |\alpha|$, ainsi K est la partie entière de la quantité $\log_2 \left(\frac{|\alpha|}{R} \right)$, et on a ainsi l'estimation $2^K < 2 \frac{|\alpha|}{R}$.

— si v n'est pas de torsion, on a $|sd^k(\alpha)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k |\alpha|$, ainsi K est la partie entière de la quantité $\log_{4/3} \left(\frac{|\alpha|}{R}\right)$, et on peut ainsi établir l'estimation $2^K < 2 \left(\frac{|\alpha|}{R}\right)^3$.

□

Ces estimations sur h_R nous permettent d'en établir d'autres de la même nature pour l'application Φ_R :

Proposition 4.4.1.4. *Soit $\alpha \in C_n^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ un simplexe. Alors il existe un polynôme $Q_{n,R}$ tel que :*

$$\|\Phi_R(\alpha)\|_N \leq Q_{n,R}(|\alpha|)\|\alpha\|_N.$$

avec $\deg(Q_{n,R}) = n$ si v est de torsion et $\deg(Q_{n,R}) = 3n$ sinon.

Preuve :

En effet, on sait que $\|\Phi_R(\alpha)\|_N \leq \|\alpha\|_N + \|h_R \circ \partial(\alpha)\|_N + \|\partial \circ h_R(\alpha)\|_N$ par définition. Il suffit de voir ensuite que, si β est un élément de $C_n^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$, on a $\|\partial(\beta)\|_N \leq (n+1)\|\beta\|_N$. □

4.4.2 Propriétés de Φ_R

Proposition 4.4.2.1. *L'application $\Phi_R : C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ est un morphisme de complexes borné dont l'image est dans $C_*^{\text{bar},R}(M_v, \mathbb{C}v)$ et dont la restriction à ce sous-complexe est l'identité. En particulier, on a $\Phi_R \circ \Phi_R = \Phi_R$.*

Preuve :

Par construction, l'application Φ_R est un morphisme de complexes de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ dans lui-même. Essayons maintenant de trouver une autre expression de Φ_R :

$$\begin{aligned} id - \phi_R &= h_R \circ \partial + \partial \circ h_R \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (id - P_R) \circ h_{sd} \circ sd^k \circ \partial + \sum_{k=0}^{+\infty} \partial \circ (id - P_R) \circ h_{sd} \circ sd^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (id - P_R) \circ h_{sd} \circ \partial \circ sd^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \partial \circ (id - P_R) \circ h_{sd} \circ sd^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (id - P_R) \circ (id - sd - \partial \circ h_{sd}) \circ sd^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \partial \circ (id - P_R) \circ h_{sd} \circ sd^k \quad (4.40) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (id - P_R) \circ (id - sd) \circ sd^k + \sum_{k=0}^{+\infty} [\partial, id - P_R] \circ h_{sd} \circ sd^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (id - P_R)(sd^k - sd^{k+1}) + \sum_{k=0}^{+\infty} [P_R, \partial] \circ h_{sd} \circ sd^k \end{aligned}$$

On remarque que la première somme (télescopique) dans la dernière égalité est en fait égale à $id - P_R$, puisque $(id - P_R) \circ sd^k$ est nul pour k assez grand. On a donc :

$$\Phi_R = P_R + \sum_{k=0}^{+\infty} [\partial, P_R] \circ h_{sd} \circ sd^k \quad (4.41)$$

On constate par conséquent que Φ_R est à image dans $C_*^{\text{bar},R}(M_v, \mathbb{C}v)$: en effet le commutateur $[\partial, P_R]$ est déjà à image dans $C_*^{\text{bar},R}(M_v, \mathbb{C}v)$, la différentielle ∂ faisant diminuer le poids. On remarque de plus que la restriction de Φ_R à $C_*^{\text{bar},R}(M_v, \mathbb{C}v)$ est l'identité. \square

En guise de conclusion à ce chapitre, on peut énoncer le :

Théorème 4.4.2.2. *Soit $v \in \Gamma$ et $R > 2|v|_s$. Alors il existe un morphisme de complexes Φ_R de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ dans lui-même tel que :*

- Φ_R est borné,
- Φ_R est à image dans $C_*^{\text{bar},R}(M_v, \mathbb{C}v)$,
- la restriction de Φ_R à $C_*^{\text{bar},R}(M_v, \mathbb{C}v)$ est l'identité,
- Φ_R est homotope à l'identité de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$, via une homotopie bornée.

5 Résultats

Rappelons le contexte de cette thèse : nous disposons d'un groupe discret Γ , agissant de manière isométrique, propre et cocompacte sur un espace (X, d) $CAT(0)$. Ceci implique entre autres l'existence d'un domaine fondamental relativement compact pour cette action (théorème 4.2.1.21). Dans ce dernier chapitre, nous établissons tout d'abord un isomorphisme entre l'homologie de Hochschild de $\mathbb{C}\Gamma$ et celle de l'algèbre de Schwartz $\ell^1_{RD}(\Gamma)$ des fonctions à décroissance rapide définies sur Γ . Nous en déduisons un isomorphisme en homologie cyclique. Nous discutons enfin du cas de l'homologie cyclique périodique réduite.

5.1 Définition de $\ell^1_{RD}(\Gamma)$

Définition 5.1.0.1. Soit $D \subset X$ un domaine fondamental relativement compact pour l'action de Γ sur X . Nous noterons δ son diamètre, et nous fixons $\xi_0 \in D$ un point de base.

Définition 5.1.0.2. On définit l'application $d_\Gamma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tous } g, h \in \Gamma : d_\Gamma(g, h) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = h \\ 1 + d(g\xi_0, h\xi_0) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.1)$$

et on définit l'application $\ell : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tout } g \in \Gamma, \ell(g) = d_\Gamma(1, g) \quad (5.2)$$

Proposition 5.1.0.3. L'application d_Γ est une distance sur Γ .

Preuve :

Le seul point délicat est l'inégalité triangulaire. Soient g, g' et h trois éléments de Γ . Supposons $g \neq g'$. Alors :

$$d_\Gamma(g, g') = 1 + d(g\xi_0, g'\xi_0) \quad (5.3)$$

$$\leq 1 + d(g\xi_0, h\xi_0) + d(h\xi_0, g'\xi_0) \quad (5.4)$$

Par conséquent :

$$d_\Gamma(g, g') \leq \begin{cases} 1 + d(g\xi_0, h\xi_0) = d_\Gamma(g, h) + d_\Gamma(h, g') & \text{si } g' = h \\ 1 + d(h\xi_0, g'\xi_0) = d_\Gamma(g, h) + d_\Gamma(h, g') & \text{si } g = h \\ d_\Gamma(g, h) + d_\Gamma(h, g') & \text{si } g \neq h \text{ et } g' \neq h \end{cases} \quad (5.5)$$

□

Définition 5.1.0.4. On définit sur l'anneau de groupe $\mathbb{C}\Gamma$ les semi-normes suivantes, indexées par $N \in \mathbb{N}$:

$$\| \sum a_g g \|_N = \sum |a_g| (1 + \ell(g))^N \quad (5.6)$$

On note $\ell_{RD}^1(\Gamma)$ l'algèbre de Fréchet obtenue par complétion suivant cette famille de semi-normes.

Notons que la métrique choisie ici est quasi-isométrique à n'importe quelle métrique de mots associée à un système fini de générateurs de Γ .

La décomposition homogène du complexe de Hochschild de $\mathbb{C}\Gamma$ suivant les classes de conjugaison de Γ s'adapte au complexe de Hochschild de $\ell_{RD}^1(\Gamma)$, nous pouvons donc comme précédemment étudier séparément les contributions de chaque classe de conjugaison aux différentes homologies.

5.2 Calcul de $HH_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle}$

Soit $v \in \Gamma$, d'ordre pour l'instant quelconque. Nous montrons dans cette section que l'inclusion de $\mathbb{C}\Gamma$ dans sa complétion $\ell_{RD}^1(\Gamma)$ induit un isomorphisme en homologie de Hochschild pour la contribution de la classe de conjugaison de v .

Comme nous avons défini des poids et des normes sur le complexe $C_*^{bar}(X, \mathbb{C}v)$ (définitions 4.3.0.1 et 4.3.0.2), nous définissons :

Définition 5.2.0.1. Soit $\alpha = [g_0, \dots, g_n; v]$ un simplexe de $C_*^{bar}(\Gamma, \mathbb{C}v)$. On définit le poids $|\alpha|$ de α par :

$$|\alpha| = d_\Gamma(g_n, vg_0) + \sum_{i=0}^{n-1} d_\Gamma(g_i, g_{i+1}).$$

Si α est une combinaison linéaire de simplexes, $|\alpha|$ désignera le maximum des poids des simplexes dans son support.

Définition 5.2.0.2. Pour un simplexe $\alpha \in C_*^{bar}(\Gamma, \mathbb{C}v)$ et $N \in \mathbb{N}$, on définit la "norme N " de α par :

$$\|\alpha\|_N = (1 + |\alpha|)^N \quad (5.7)$$

Pour une chaîne $\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i$ de $C_n^{bar}(\Gamma, \mathbb{C}v)$, on définit la "norme N " de α par :

$$\|\alpha\|_N = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \|\alpha_i\|_N = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| (1 + |\alpha_i|)^N \quad (5.8)$$

5.2.1 Préparatifs

Lemme 5.2.1.1. Soit E un sous-ensemble de Γ de longueur bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $g \in E$, on a $\ell(g) \leq M$. Alors E est fini.

Preuve :

On écarte tout d'abord le cas trivial où $E = \{1\}$. On déduit des hypothèses que pour tout $g \in E$, le point $g\xi_0 \in X$ est dans la boule fermée $B(\xi_0, M - 1)$, qui est compacte puisque X est propre (théorème 4.2.1.23). Comme l'action de Γ sur X est propre, cela

implique que l'ensemble $E \times \{\xi_0\}$ est inclus dans un compact, et puisque Γ est discret, E est fini. \square

Définition 5.2.1.2. Pour $x \in X$, on note $D(x)$ le sous-ensemble de Γ constitué des éléments g tels que x est dans gD :

$$D(x) := \{g \in \Gamma, x \in gD\} \quad (5.9)$$

En particulier, $D(\xi_0)$ est le stabilisateur de ξ_0 .

Lemme 5.2.1.3. Pour tout point x de X , l'ensemble $D(x)$ est de longueur bornée, donc fini.

Preuve :

Soit $x \in X$ et $g \in D(x)$. Cela signifie qu'il existe $x_D \in D$ tel que $x = gx_D$. Alors :

$$\ell(g) = 1 + d(\xi_0, g\xi_0) \leq 1 + d(\xi_0, x) + d(gx_D, g\xi_0) \leq d(\xi_0, x) + \delta \quad (5.10)$$

\square

Nous aurons besoin de deux applications Z_v -équivariantes permettant des allers-retours entre le groupe Γ et l'espace X :

Définition 5.2.1.4. On note $\varphi : \Gamma \rightarrow X$ l'application Z_v -équivariante définie par :

$$\varphi : g \longmapsto g\xi_0 \quad (5.11)$$

On notera φ_* ou encore φ le morphisme de complexes bar induit.

Lemme 5.2.1.5. Soient $g, h \in \Gamma$. Alors $d(\varphi(g), \varphi(h)) \leq d_\Gamma(g, h)$.

Proposition 5.2.1.6. Le morphisme φ_* est borné et on a pour tout $\alpha \in C_*^{bar}(\Gamma, \mathbb{C}_v)$: $|\varphi(\alpha)| \leq |\alpha|$.

Définition 5.2.1.7. On définit l'application linéaire $\psi_* : C_*^{bar}(X, \mathbb{C}_v) \rightarrow C_*^{bar}(\Gamma, \mathbb{C}_v)$ en degré n par :

$$\psi_* : [x_0, \dots, x_n; v] \longmapsto \frac{1}{\prod_{i=0}^n |D(x_i)|} \sum_{\substack{g_i \in D(x_i) \\ 0 \leq i \leq n}} [g_0, \dots, g_n; v] \quad (5.12)$$

Proposition 5.2.1.8. L'application ψ_0 est Z_v -équivariante. Par extension, ψ_* l'est aussi.

Preuve :

On commence par remarquer que pour $g, h \in \Gamma$ et x dans X , on a : $g \in D(hx) \Leftrightarrow h^{-1}g \in$

$D(x)$. En particulier, les cardinaux de $D(hx)$ et de $D(x)$ sont égaux. D'où, pour $h \in Z_v$:

$$\psi([hx; v]) = \frac{1}{|D(hx)|} \sum_{g \in D(hx)} [g; v] \quad (5.13)$$

$$= \frac{1}{|D(x)|} h \sum_{g \in D(hx)} [h^{-1}g; v] \quad (5.14)$$

$$= \frac{1}{|D(x)|} h \sum_{g' \in D(x)} [g'; v] \quad (5.15)$$

$$= h\psi([x; v]) \quad (5.16)$$

□

Proposition 5.2.1.9. *L'application ψ_* est un morphisme de complexes.*

Preuve :

Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Alors :

$$\partial_j(\psi([x_0, \dots, x_n; v])) = \frac{1}{\prod_{i=0}^n |D(x_i)|} \sum_{\substack{g_i \in D(x_i) \\ 0 \leq i \leq n}} \partial_j([g_0, \dots, g_n; v]) \quad (5.17)$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=0}^n |D(x_i)|} |D(x_j)| \sum_{\substack{g_i \in D(x_i) \\ 0 \leq i \leq n, i \neq j}} [g_0, \dots, g_{j-1}, g_{j+1}, \dots, g_n; v] \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n |D(x_i)|} \sum_{\substack{g_i \in D(x_i) \\ 0 \leq i \leq n, i \neq j}} [g_0, \dots, g_{j-1}, g_{j+1}, \dots, g_n; v] \quad (5.19)$$

$$= \psi(\partial_j([x_0, \dots, x_n; v])) \quad (5.20)$$

□

Lemme 5.2.1.10. *Soient $x, y \in X$, $g \in D(x)$ et $h \in D(y)$. Alors :*

$$d_\Gamma(g, h) \leq d(x, y) + (1 + 2\delta) \quad (5.21)$$

Preuve :

On suppose que g et h sont distincts. Par hypothèse, il existe $x_D, y_D \in D$ tels que $x = gx_D$ et $y = hy_D$. On a alors :

$$d_\Gamma(g, h) = 1 + d(g\xi_0, h\xi_0) \quad (5.22)$$

$$\leq 1 + d(g\xi_0, gx_D) + d(gx_D, hy_D) + d(hy_D, h\xi_0) \quad (5.23)$$

$$\leq d(x, y) + 1 + 2\delta \quad (5.24)$$

□

Proposition 5.2.1.11. *Pour tout $\alpha \in C_n^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ on a :*

$$|\psi_n(\alpha)| \leq |\alpha| + (n + 1)(1 + 2\delta) \quad (5.25)$$

Par conséquent, le morphisme ψ_* est borné en chaque degré et pour tous $N, n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_{n,N}$ telle que :

$$\|\psi_*(\alpha)\|_N \leq C_{n,N} \|\alpha\|_N \quad (5.26)$$

Lemme 5.2.1.12. Soient $g, g' \in \Gamma$ et $h, h' \in D(\xi_0)$. Alors :

$$d_\Gamma(gh, g'h') \leq d_\Gamma(g, g') \quad (\text{si } g, g' \text{ sont distincts}) \quad (5.27)$$

$$d_\Gamma(gh, g) \leq 1 \quad (5.28)$$

$$d_\Gamma(gh, g') \leq 1 + d_\Gamma(g, g') \quad (5.29)$$

Preuve :

Inégalité (5.27) : si $gh = g'h'$ on obtient 0. Sinon, on obtient $1 + d(g\xi_0, g'\xi_0) = d_\Gamma(g, g')$ si g et g' sont distincts (on peut supposer que c'est le cas pour la suite).

Inégalité (5.28) : si $h = 1$ on obtient 0, sinon on obtient 1.

Inégalité (5.29) : si $gh = g'$, on obtient 0. Sinon, on obtient $1 + d(g\xi_0, g'\xi_0)$ qui, suivant si g et g' sont distincts ou non, vaut 1 ou $d_\Gamma(g, g')$. \square

Proposition 5.2.1.13. Si $D(\xi_0)$ est trivial, on a $\psi \circ \varphi = id$. D'une manière générale, le morphisme de complexes $\psi \circ \varphi$ est homotope à l'identité, via l'homotopie

$$h_{\psi \circ \varphi} : [g_0, \dots, g_n; v] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [\psi \circ \varphi([g_0, \dots, g_i]), g_i, \dots, g_n; v] \quad (5.30)$$

Cette application linéaire est Z_v -équivariante et bornée en chaque degré, on a plus précisément l'existence d'une constante $C_{n,N}$ telle que, pour tout $\alpha \in C_n^{\text{bar}}(\Gamma, \mathbb{C}v)$:

$$\|h_{\psi \circ \varphi}(\alpha)\|_N \leq C_{n,N} \|\alpha\|_N \quad (5.31)$$

Preuve :

Afin d'utiliser le lemme 5.2.1.12, on peut remarquer que pour $g \in \Gamma$,

$$\psi \circ \varphi([g]) = \frac{1}{|D(g\xi_0)|} \sum_{h \in D(g\xi_0)} [h] = \frac{1}{|D(\xi_0)|} \sum_{h \in D(\xi_0)} [gh] \quad (5.32)$$

Soit $\alpha = [g_0, \dots, g_n; v] \in C_n^{\text{bar}}(\Gamma, \mathbb{C}v)$. Les simplexes dans le support de $h_{\psi \circ \varphi}$ sont donc de la forme

$$[g_0 h_0, \dots, g_i h_i, g_i, \dots, g_n; v] \quad (5.33)$$

où chaque h_j est dans $D(\xi_0)$. Le lemme permet alors d'affirmer que

$$|h_{\psi \circ \varphi}(\alpha)| \leq |\alpha| + 2 \quad (5.34)$$

En conséquence, pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|h_{\psi \circ \varphi}(\alpha)\|_N \leq (n+1)(3 + |\alpha|)^N \quad (5.35)$$

\square

Lemme 5.2.1.14. Soient $x, y \in X$, $g \in D(x)$ et $h \in D(y)$. Alors :

$$d(g\xi_0, h\xi_0) \leq d(x, y) + 2\delta \quad (5.36)$$

$$d(g\xi_0, x) \leq \delta \quad (5.37)$$

$$d(vg\xi_0, y) \leq d(vx_0, y) + \delta \quad (5.38)$$

Preuve :

On introduit $x_D, y_D \in D$ tels que, par définition, $x = gx_D$ et $y = hy_D$, et l'inégalité triangulaire de d fait le reste. □

Proposition 5.2.1.15. Le morphisme de complexes $\varphi \circ \psi$ est homotope à l'identité, via l'homotopie

$$h_{\varphi \circ \psi} : [x_0, \dots, x_n; v] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [\varphi \circ \psi([x_0, \dots, x_i]), x_i, \dots, x_n; v] \quad (5.39)$$

Cette application linéaire est Z_v -équivariante et bornée en chaque degré, on a plus précisément l'existence d'une constante $C_{n,N}$ telle que, pour tout $\alpha \in C_n^{\text{bar}}(\Gamma, \mathbb{C}v)$:

$$\|h_{\varphi \circ \psi}(\alpha)\|_N \leq C_{n,N} \|\alpha\|_N \quad (5.40)$$

Preuve :

Soit $\alpha = [x_0, \dots, x_n; v] \in C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$. Alors les simplexes dans le support de $h_{\varphi \circ \psi}(\alpha)$ sont de la forme :

$$[g_0\xi_0, \dots, g_i\xi_0, x_i, \dots, x_n; v] \quad (5.41)$$

où chaque g_j est dans $D(x_j)$. L'utilisation du lemme 5.2.1.14 permet alors d'affirmer que le poids d'un tel simplexe est majoré par

$$|\alpha| + 2(i+1)\delta \leq |\alpha| + 2(n+1)\delta \quad (5.42)$$

En conséquence, pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|h_{\varphi \circ \psi}(\alpha)\|_N \leq (n+1)(1 + 2(n+1)\delta + |\alpha|)^N \quad (5.43)$$

□

Nous avons donc établi que les complexes $C_*^{\text{bar}}(\Gamma, \mathbb{C}v)_{Z_v}$ et $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)_{Z_v}$ sont continuellement homotopiquement équivalents. Nous allons travailler dans la suite avec $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$. Mais tout d'abord, nous allons regarder de plus près l'image du complexe $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ par le morphisme ψ , où M_v désigne l'espace de déplacement minimal de v (définition 4.2.2.3) :

Définition-Proposition 5.2.1.16. On pose $\Gamma' = \bigcup_{x \in M_v} D(x)$. On a également $\Gamma' = \{g \in \Gamma, gD \cap M_v \neq \emptyset\}$.

Preuve :

Soit $g \in \Gamma'$. Alors par définition il existe $x \in M_v$ tel que $x \in gD$. Réciproquement, si $g \in \Gamma$ est tel qu'il existe $x \in gD \cap M_v$, alors g est dans $D(x)$. \square

Proposition 5.2.1.17. *Le groupe Z_v agit sur Γ' par translation à gauche et l'ensemble des orbites pour cette action est fini.*

Preuve :

Remarquons tout d'abord que M_v est invariant par le groupe Z_v , en effet d'une manière générale on a $M_{gvg^{-1}} = gM_v$ pour tout $g \in \Gamma$. Il est ensuite facile de voir que Z_v laisse Γ' invariant : soit $g \in \Gamma'$. Alors il existe $x_D \in D$ tel que $gx_D \in M_v$. Or, si $z \in Z_v$, on a : $(zg)x_D = z(gx_D) \in M_v$, donc zg est dans Γ' .

Considérons maintenant l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \Gamma' &\rightarrow \langle v \rangle \\ g &\mapsto g^{-1}vg \end{aligned} \quad (5.44)$$

On peut montrer que cette application est constante sur les orbites de l'action de Z_v sur Γ' . En effet, pour g et h dans Γ' on a l'équivalence :

$$f(g) = f(h) \Leftrightarrow g^{-1}vg = h^{-1}vh \Leftrightarrow vgh^{-1} = gh^{-1}v \Leftrightarrow gh^{-1} \in Z_v \quad (5.45)$$

Ainsi, l'ensemble des orbites est équipotent à l'image de f . Il nous faut donc montrer que l'image de f est finie. Soit donc $g \in \Gamma'$, ce qui signifie par définition qu'il existe $x_D \in D$ tel que $gx_D \in M_v$. Nous allons majorer la longueur de $f(g)$:

$$\begin{aligned} \ell(f(g)) &= \ell(g^{-1}vg) \\ &= d(g^{-1}vg\xi_0, \xi_0) \\ &= d(vg\xi_0, g\xi_0) \\ &\leq d(vg\xi_0, vgx_D) + d(vgx_D, gx_D) + d(gx_D, g\xi_0) \\ &= d(\xi_0, x_D) + |v|_s + d(x_D, \xi_0) \\ &\leq 2\delta + |v|_s \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ainsi, l'image de f est de longueur bornée, et est par conséquent finie par le lemme 5.2.1.1. \square

La conséquence de cela est un résultat sur les complexes de Rips, que nous définissons au préalable :

Définition 5.2.1.18. *Soit $r > 0$ on définit le complexe de Rips $C_*^r(\Gamma', \mathbb{C}v)$ comme le sous-complexe de $C_*^{\text{bar}}(\Gamma', \mathbb{C}v)$ engendré par les simplexes de diamètre uniformément borné par r .*

Proposition 5.2.1.19. *Pour tout $r > 0$, le complexe de Rips $C_*^r(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v}$ est de dimension finie en chaque degré.*

Preuve :

Soit $\{h_j, 1 \leq j \leq k\}$ un système de représentant des k orbites de l'action de Z_v sur Γ' . Alors pour tout simplexe $\alpha \in C_*^r(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v}$, il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que

$\alpha = [h_j, g_1, \dots, g_n; v]$. Comme le diamètre de α est borné par r , tous les g_i sont à une distance au plus r de h_j . Il y a donc seulement un nombre fini de g_i possibles, et donc de simplexes $[h_j, g_1, \dots, g_n; v]$ possibles. \square

5.2.2 Calcul

Nous allons maintenant utiliser tout ce qui précède pour envoyer le complexe $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)_{Z_v}$ dans un complexe de dimension finie.

Tout d'abord, on applique à ce complexe le morphisme de projection π_v sur l'espace de déplacement minimal M_v . Ce morphisme Z_v -équivariant est borné et homotope à l'identité de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ via une homotopie bornée (propositions 4.3.2.2 et 4.3.2.3). Nous sommes maintenant dans le complexe $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$.

Fixons $R_0 > 2|v|_s$. Alors le théorème 4.4.2.2 assure l'existence d'un morphisme de complexes Φ_{R_0} Z_v -équivariant, borné, homotope à l'identité de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ via une homotopie bornée et à image dans le sous-complexe $C_*^{\text{bar}, R}(M_v, \mathbb{C}v)$ de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$ engendré par les simplexes de poids uniformément bornés par R_0 . Nous appliquons ce morphisme Φ_{R_0} et arrivons donc dans le complexe $C_*^{\text{bar}, R}(M_v, \mathbb{C}v)$, lui-même sous-complexe du complexe de Rips $C_*^R(M_v, \mathbb{C}v)$ engendré par les simplexes de diamètres uniformément bornés par R_0 .

Nous appliquons maintenant le morphisme Z_v -équivariant ψ (définition 5.2.1.7) pour arriver dans le complexe de Rips $C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v)$, où Γ' est l'image de M_v par ψ et $R'_0 = R_0 + 2\delta + 1$. Nous rappelons que les morphismes ψ et φ sont bornés (propositions 5.2.1.6 et ??), que $\varphi \circ \psi$ est l'identité de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ et que $\psi \circ \varphi$ est homotope à l'identité de $C_*^{\text{bar}}(\Gamma, \mathbb{C}v)$ via une homotopie bornée.

La proposition 5.2.1.19 nous dit alors que le complexe de Rips $C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v}$ est de dimension finie en chaque degré. Pour arriver au final dans un complexe de dimension finie, nous utilisons le morphisme d'anti-symétrisation (section 1.2.8.2) :

Proposition 5.2.2.1. *L'image du complexe de Rips $C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v)$ par le morphisme d'anti-symétrisation Z_v -équivariant π_{as} est nulle en hauts degrés.*

Preuve :

Soit $[g_0, \dots, g_n; v] \in C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v)$. Alors, l'action étant propre, il n'existe qu'un nombre fini de $g_i \in \Gamma'$ tels que $d(g_0\xi_0, g_i\xi_0) \leq R'_0$. Par conséquent, si n est suffisamment grand, il y a nécessairement des répétitions dans $[g_0, \dots, g_n; v]$, et ainsi son image par π_{as} est nulle. \square

Corollaire 5.2.2.2. *Le morphisme $\pi_{as} : C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v} \rightarrow C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v}$ est borné, homotope à l'identité via une homotopie bornée, et son image est un sous-complexe de dimension finie.*

Nous avons donc construit un morphisme de complexes de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)_{Z_v}$ dans un complexe de dimension finie, $\pi_{as}(C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v})$.

Définition 5.2.2.3. *Pour $R > 0$, on note $C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$ l'image par π_{as} du complexe $C_*^R(\Gamma', \mathbb{C}v)$.*

Regardons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v) & \xrightarrow{\pi_v} & C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v) & \xrightarrow{\Phi_{R_0}} & C_*^{R_0}(M_v, \mathbb{C}v) \\
\uparrow \varphi & & & & \downarrow \psi \\
C_*^{R'_0, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v) & \xleftarrow{\pi_{as}} & C_*^{R'_0}(\Gamma', \mathbb{C}v) & &
\end{array} \tag{5.47}$$

Lemme 5.2.2.4. *La composition $\varphi \circ \pi_{as} \circ \psi \circ \Phi_{R_0} \circ \pi_v : C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ est homotope à l'identité.*

Preuve :

Notons :

- ι_1 l'inclusion $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$, de sorte que $\iota_1 \circ \pi_v$ est homotope à l'identité de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$,
- ι_2 l'inclusion $C_*^{R_0}(M_v, \mathbb{C}v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$, de sorte que $\iota_2 \circ \Phi_{R_0}$ est homotope à l'identité de $C_*^{\text{bar}}(M_v, \mathbb{C}v)$,

On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \pi_{as} \circ \psi \circ \Phi_{R_0} \circ \pi_v &= \varphi \circ \pi_{as} \circ \psi \circ \iota_1 \circ (\iota_2 \circ \Phi_{R_0}) \circ \pi_v \\
&\sim (\varphi \circ \psi) \circ (\iota_1 \circ \pi_v) \\
&\sim id
\end{aligned} \tag{5.48}$$

□

Lemme 5.2.2.5. *Soit $R > 0$. Alors il existe $R' > R$ tel que, en notant ι l'inclusion $C^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v) \rightarrow C^{R', \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$, la composition $\pi_{as} \circ \psi \circ \Phi_{R_0} \circ \pi_v \circ \varphi \circ \iota$ est homotope à ι . Ainsi*

$$\lim_{\rightarrow} C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v) \longrightarrow C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v) \longrightarrow \lim_{\rightarrow} C_*^{R', \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v) \tag{5.49}$$

est homotope à l'identité.

Preuve :

On note ι' l'inclusion de $C^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$ dans $C^{\text{bar}}(\Gamma', \mathbb{C}v)$. Alors la composition $\pi_{as} \circ \psi \circ \Phi_{R_0} \circ \pi_v \circ \varphi \circ \iota'$ est homotope à l'inclusion ι' . Notons h cette homotopie. Le complexe $C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v}$ est de dimension finie, soit donc (α_i) une famille finie de simplexes de $C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$ dont les images sous les Z_v -coinvariants forment une base de $C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v}$. On note alors R' le maximum des diamètres des simplexes $h(\alpha_i)$. Alors h envoie $C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$ sur $C_{*+1}^{R', \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$. En notant alors ι l'inclusion $C^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v) \rightarrow C^{R', \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$, on obtient le résultat annoncé. □

La combinaison des lemmes 5.2.2.4 et 5.2.2.5 donne :

Proposition 5.2.2.6. *Le complexe $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)$ est homotopiquement équivalent à la limite directe sur $R > 0$ des complexes $C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$, sous une homotopie Z_v -équivariante. Prenant les Z_v -coinvariants puis l'homologie, on en déduit l'isomorphisme :*

$$HH_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \simeq H_* \left(C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)_{Z_v} \right) \simeq H_* \left(\lim_{\rightarrow} C_*^{R, \pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v} \right)$$

Dans le diagramme 5.47, une fois les Z_v -coinvariants pris, tous les morphismes et toutes les homotopies qui interviennent sont continus. Comme les complexes $C_*^{R,\pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v}$ sont de dimension finie, passer aux complétions ne change rien et un raisonnement identique au cas précédent (i.e. avant complétion) donne :

Proposition 5.2.2.7. *Le complexe de Hochschild $C_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle}$, obtenu par complétion de $C_*^{\text{bar}}(X, \mathbb{C}v)_{Z_v}$ est homotopiquement équivalent à la limite directe sur $R > 0$ des complexes $C_*^{R,\pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)$. On en déduit les isomorphismes :*

$$HH_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle} \simeq H_* \left(\lim_{\rightarrow} C_*^{R,\pi}(\Gamma', \mathbb{C}v)_{Z_v} \right)$$

Corollaire 5.2.2.8. *Pour toute classe de conjugaison $\langle v \rangle$, on a un isomorphisme en homologie de Hochschild :*

$$HH_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle} \simeq HH_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$$

5.3 Calcul de $HC_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle}$

On déduit de la section précédente le :

Théorème 5.3.0.1. *Pour toute classe de conjugaison $\langle v \rangle$, on a :*

$$HC_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle} \simeq HC_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \quad (5.50)$$

Pour justifier ce corollaire, nous montrons ce résultat général :

Proposition 5.3.0.2. *Soient A et A' deux algèbres et $f : A \rightarrow A'$ un morphisme d'algèbres tels que, en tout degré, on ait un isomorphisme $f_* : HH_*(A) \simeq HH_*(A')$. Alors on a un isomorphisme en homologie cyclique en chaque degré : $HC_*(A) \simeq HC_*(A')$.*

Preuve :

On va se servir de la suite exacte de Connes. En bas degré, elle donne :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & HC_1(A) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & HH_0(A) & \longrightarrow & HC_0(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & HC_1(A') & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & HH_0(A') & \longrightarrow & HC_0(A') & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5.51)$$

Il est alors clair que la flèche $HC_0(A) \rightarrow HC_0(A')$ est un isomorphisme. Ayant établi ceci, nous pouvons aller voir un peu plus loin dans ce diagramme constitué des deux suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & HC_0(A) & \longrightarrow & HH_1(A) & \longrightarrow & HC_1(A) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & HH_0(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \\ \dots & \longrightarrow & HC_0(A') & \longrightarrow & HH_1(A') & \longrightarrow & HC_1(A') & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & HH_0(A') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Par le lemme des cinq (1.2.8.1), on obtient l'isomorphisme $HC_1(A) \rightarrow HC_1(A')$.
Supposons maintenant que l'on ait montré les isomorphismes $HC_*(A) \rightarrow HC_*(A')$ pour $* \leq n$. Alors la double suite exacte donne :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & HC_n(A) & \longrightarrow & HH_{n+1}(A) & \longrightarrow & HC_{n+1}(A) & \longrightarrow & HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HH_n(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \cdots & \longrightarrow & HC_n(A') & \longrightarrow & HH_{n+1}(A') & \longrightarrow & HC_{n+1}(A') & \longrightarrow & HC_{n-1}(A') & \longrightarrow & HH_n(A') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Alors le lemme des cinq donne cette fois l'isomorphisme $HC_{n+1}(A) \rightarrow HC_{n+1}(A')$. \square

5.4 Calcul de $HP_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$ dans le cas hyperbolique

Nous allons dans cette section expliciter l'opérateur $S : HC_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \rightarrow HC_{*-2}(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$ qui nous permettra de calculer $HP_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$ dans le cas hyperbolique, nous supposons donc dans ce qui suit que l'élément v est d'ordre infini. Le but est de chercher un morphisme de complexes N_v -équivariant $C_*^{\text{bar}}(N_v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(N_v)[-2]$ induisant le diagramme ci-dessous en homologie :

$$\begin{array}{ccc} HC_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} & \xrightarrow{S} & HC_{*-2}(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \\ \uparrow \simeq & & \simeq \downarrow \\ H_*(N_v, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\tilde{S}} & H_{*-2}(N_v, \mathbb{C}) \end{array} \quad (5.52)$$

Notre base de travail sera le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}) & \xrightarrow{S} & Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle})[-2] \\ \uparrow id \otimes \varepsilon & & \uparrow \otimes \varepsilon \\ Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}) \otimes C_*^{\text{bar}}(N_v) & \xrightarrow{S \otimes id} & Tot(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}) \otimes C_*^{\text{bar}}(N_v)[-2] \\ \varepsilon_1 \otimes id \downarrow & & \varepsilon_1 \otimes id \downarrow \\ C_*^{\text{bar}}(N_v) & & C_*^{\text{bar}}(N_v)[-2] \end{array} \quad (5.53)$$

où $\varepsilon : \mathbb{C} \leftarrow C_*^{\text{bar}}(N_v)$ désigne la flèche d'augmentation du complexe bar de N_v .

Dans ce diagramme toutes les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes, et donc des équivalences d'homotopie puisque tous les complexes considérés sont des complexes d'objets projectifs.

En particulier, si nous choisissons un morphisme de complexes N_v -équivariant Ψ qui est inverse (à homotopie près) du morphisme $\varepsilon_1 \otimes id$, le morphisme $\tilde{S} = (\varepsilon_1 \otimes id) \circ (S \circ id) \circ \Psi$ induira la flèche recherchée en homologie, il nous restera ensuite à expliciter cette composition.

5.4.1 Résultat préliminaire

Nous commençons par montrer le résultat intermédiaire suivant, pour un groupe G quelconque :

Proposition 5.4.1.1. *Soit (C_*, d) un complexe de G -modules, et $h : C_* \rightarrow C_{*+1}$ une homotopie contractante. On désigne par $\mu(g) : C_* \rightarrow C_*$ l'action d'un élément $g \in G$ et par $(C_*^{\text{bar}}(G)', \partial)$ le complexe bar augmenté de G . Alors l'application linéaire $\phi : C_*^{\text{bar}}(G)' \rightarrow \text{End}(C_*)$ définie par :*

$$\begin{aligned} [g_0, \dots, g_n] &\longmapsto \prod_{i=0}^n \mu(g_i) \circ h_* \circ \mu(g_i^{-1}) \\ 1 \in \mathbb{C} &\longmapsto id : C_* \rightarrow C_* \end{aligned}$$

est un morphisme de complexes G -équivariant (même si h ne l'est pas) de degré 1. De plus, si $h^2 = 0$, ϕ s'annule sur les simplexes dégénérés.

Preuve :

Tout d'abord, en utilisant la relation $dh_* + h_*d = id$ à plusieurs reprises, on remarque que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$d \circ \phi([g_0, \dots, g_n]) = \phi \circ \partial([g_0, \dots, g_n]) + (-1)^{n+1} \phi([g_0, \dots, g_n]) \circ d \quad (5.54)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} -\partial_E \circ \phi([g_0, \dots, g_n]) &= -((-1)^{n+1} \phi([g_0, \dots, g_n]) \circ d - d \circ \phi([g_0, \dots, g_n])) \\ &= (-1)^n \phi([g_0, \dots, g_n]) \circ d + \phi \circ \partial([g_0, \dots, g_n]) \\ &+ (-1)^{n+1} \phi([g_0, \dots, g_n]) \circ d \\ &= \phi \circ \partial([g_0, \dots, g_n]) \end{aligned} \quad (5.55)$$

De plus, on a :

$$(-\partial_E \circ \phi)([g]) = -(-d \circ \phi([g]) - \phi([g]) \circ d) = id = \phi \circ \varepsilon([g]) \quad (5.56)$$

où ε est le morphisme d'augmentation. Ainsi ϕ est bien un morphisme de complexes de degré 1. \square

En vue d'appliquer ce résultat à la situation qui nous occupe, nous devons construire une homotopie contractante du complexe total du bicomplexe augmenté de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$.

5.4.2 Construction d'une homotopie contractante de l'augmentation de $\text{Tot}(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle})$

Remarque 5.4.2.1. *L'élément v étant supposé d'ordre infini, le groupe cyclique U qu'il engendre est isomorphe à \mathbb{Z} . Dans la suite il arrivera que l'on identifie $k \in \mathbb{Z}$ et $v^k \in U$.*

Définition 5.4.2.2. *Le groupe cyclique $U \simeq \mathbb{Z}$ agit sur Γ par translation à gauche. On note $p' : \Gamma \rightarrow U \backslash \Gamma$ la projection canonique, et on choisit une section ensembliste $s' : U \backslash \Gamma \rightarrow \Gamma$ à cette projection, de sorte que s' soit un prolongement de la section*

$s : N_v \rightarrow Z_v$ déjà choisie dans la définition 3.2.2.6. Pour tout $g \in \Gamma$, il existe donc par définition un et un seul entier $\tau(g) \in \mathbb{Z}$ tel que $g = v^{\tau(g)} s' \circ p'(g)$. On posera dans la suite $\tilde{s} = s' \circ p' : \Gamma \rightarrow \Gamma$.

Remarque 5.4.2.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, les éléments de $C_n^{\text{bar}}(\Gamma)_U$ sont représentés par les simplexes de la forme $[\tilde{s}(g_0), g_1, \dots, g_n]$, avec $g_0, \dots, g_n \in \Gamma$.

Définition 5.4.2.4. On définit l'application $h' : \Gamma \rightarrow C_{0,2}$ par :

$$h'(g) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\tau(g)} [1, v^{-k}g, v^{-(k-1)}g] & \text{si } \tau(g) > 0 \\ 0 & \text{si } \tau(g) = 0 \\ \sum_{k=1}^{-\tau(g)} [1, v^{k-1}g, v^k g] & \text{si } \tau(g) < 0 \end{cases}$$

Lemme 5.4.2.5. Soit $g \in \Gamma$. Alors $\partial(h'(g)) = -\tau(g)[v^{-1}g, g] - [1, \tilde{s}(g)] + [1, g]$.

Preuve :

Le cas $\tau(g) < 0$ se traitant de manière similaire, nous ne traitons que le premier cas. Nous supposons donc que l'on a $\tau(g) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \partial(h'(g)) &= -\sum_{k=1}^{\tau(g)} [v^{-k}g, v^{-(k-1)}g] + \sum_{k=1}^{\tau(g)} [1, v^{-(k-1)}g] - \sum_{k=1}^{\tau(g)} [1, v^{-k}g] \\ &= -\sum_{k=1}^{\tau(g)} v^{-(k-1)}[v^{-1}g, g] + \sum_{k=0}^{\tau(g)-1} [1, v^{-k}g] - \sum_{k=1}^{\tau(g)} [1, v^{-k}g] \\ &= -\tau(g)[v^{-1}g, g] + [1, g] - [1, \tilde{s}(g)] \end{aligned}$$

□

Proposition 5.4.2.6. Il existe une homotopie contractante h_* du complexe total augmenté de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$ qui est donnée en degrés $-1, 0$ et 1 par les formules :

$$\begin{aligned} h_{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow C_{0,0} \\ 1 &\mapsto [1] \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} h_0 : C_{0,0} &\rightarrow C_{0,1} \oplus C_{1,0} \\ [\tilde{s}(g)] &\mapsto ([1, \tilde{s}(g)], 0) \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} h_1 : C_{1,0} &\rightarrow C_{2,0} \\ [\tilde{s}(g)] &\mapsto [\tilde{s}(g)] \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} h_1 : C_{0,1} &\rightarrow C_{0,2} \oplus C_{1,1} \oplus C_{2,0} \\ [\tilde{s}(g_0), g_1] &\mapsto ([1, \tilde{s}(g_0), g_1] + h'(g_1), \tau(g_1)[g_1, g_1], \tau(g_1)[g_1]) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Preuve :

Pour rappel, ∂_T désigne dans ce qui suit la différentielle du complexe total de $\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$. Commençons par vérifier que l'on a bien $h_{-1} \circ \varepsilon + \partial_T \circ h_0 = id$: pour $g \in \Gamma$, on a :

$$(h_{-1} \circ \varepsilon + \partial_T \circ h_0)([\tilde{s}(g)]) = h_{-1}(1) + \partial_T((0, [1, \tilde{s}(g)])) = [1] + \partial([1, \tilde{s}(g)]) = [\tilde{s}(g)] \quad (5.61)$$

Nous allons maintenant vérifier la relation $h_0 \circ \partial_T + \partial_T \circ h_1 = id : C_{0,1} \oplus C_{1,0} \rightarrow C_{0,1} \oplus C_{1,0}$. Pour un simplexe $[\tilde{s}(g)] \in C_{1,0}$, cette vérification est immédiate :

$$(h_0 \circ \partial_T + \partial_T \circ h_1)([\tilde{s}(g)]) = \partial_T([\tilde{s}(g)]) = ([\tilde{s}(g)]) \quad (5.62)$$

Calculons maintenant $(h_0 \circ \partial_T + \partial_T \circ h_1)(\alpha)$ pour un simplexe $\alpha = ([\tilde{s}(g_0), g_1]) \in C_{0,1}$: tout d'abord sur $C_{1,0}$, le calcul est rapide : on obtient 0. Concentrons-nous donc sur la composante sur $C_{0,1}$: notons-la β . On a :

$$\begin{aligned} \beta &= h_0 \circ \partial([\tilde{s}(g_0), g_1]) + (1 - \tilde{T})(\tau(g_1)[g_1, g_1]) + \partial([1, \tilde{s}(g_0), g_1] + h'(g_1)) \\ &= [1, \tilde{s}(g_1)] - [1, \tilde{s}(g_0)] + \tau(g_1)[v^{-1}g_1, g_1] + [\tilde{s}(g_0), g_1] - [1, g_1] + [1, \tilde{s}(g_0)] \\ &\quad - \tau(g_1)[v^{-1}g_1, g_1] - [1, \tilde{s}(g_1)] + [1, g_1] \\ &= [\tilde{s}(g_0), g_1] \end{aligned} \quad (5.63)$$

On a donc vérifié l'égalité $h_0 \circ \partial_T + \partial_T \circ h_1 = id$ pour l'ensemble des chaînes de $C_{0,1} \oplus C_{1,0}$. On construit ensuite h_n pour $n \geq 2$ par récurrence, en utilisant le fait que l'on manipule des complexes de N_v -modules projectifs. \square

Remarque 5.4.2.7. *On peut noter que les compositions $h_0 \circ h_{-1}$ et $h_1 \circ h_0$ n'ont pour image que des simplexes dégénérés.*

5.4.3 Construction de la section Ψ

Définition-Proposition 5.4.3.1. *L'application $\nu : C_*^{\text{bar}}(N_v) \rightarrow Tot_*(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle})$ définie par :*

$$[\eta_0, \dots, \eta_n] \longmapsto \phi([\eta_0, \dots, \eta_n])(1),$$

ϕ étant le morphisme de complexes défini dans la proposition 5.4.1.1, avec $G = N_v$ et $C_* = Tot_*(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle})$, est un morphisme de complexes N_v -équivariant.

Preuve :

Soit $\alpha \in C_n^{\text{bar}}(N_v)$ un simplexe. L'application ϕ étant un morphisme de complexes de degré 1, on a :

$$(-1)^n \phi(\alpha) \circ \partial_{Tot} + \partial_{Tot} \circ \phi(\alpha) = \phi(\partial(\alpha)) \quad (5.64)$$

On en déduit que $\partial_{Tot} \circ \nu = \phi(\partial(\alpha))(1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \phi(\partial_i(\alpha))(1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \nu \circ \partial_i(\alpha) = \nu \circ \partial$.

\square

On se propose dans le lemme qui suit de calculer ν en degré 0,1 et 2 :

Lemme 5.4.3.2. *Soient $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \in N_v$. Alors :*

$$\nu([\eta_0]) = [s(\eta_0)] \quad (5.65)$$

$$\nu([\eta_0, \eta_1]) = (0, [s(\eta_0), s(\eta_0)s(\eta_0^{-1}\eta_1)]) \quad (5.66)$$

et la composante sur $C_{2,0}$ de $\nu([\eta_0, \eta_1, \eta_2])$ est donnée par

$$s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1}[s(\eta_2)] \quad (5.67)$$

avec $s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1} \in U \simeq \mathbb{Z}$.

Preuve :

En degré 0 on a : $\nu([\eta_0]) = \eta_0 h_{-1} \eta_0^{-1}(1) = \eta_0 h_{-1}(1) = \eta_0([1]) = [s(\eta_0)]$.

En degré 1 :

$$\begin{aligned} \nu([\eta_0, \eta_1]) &= \eta_0 h_0 \eta_0^{-1} \eta_1 h_{-1} \eta_1^{-1}(1) = \eta_0 h_0([s(\eta_0^{-1}\eta_1)]) = \eta_0(0, [1, s(\eta_0^{-1}\eta_1)]) \\ &= (0, [s(\eta_0), s(\eta_0)s(\eta_0^{-1}\eta_1)]) \end{aligned} \quad (5.68)$$

En degré 2, on obtient :

$$\nu([\eta_0, \eta_1, \eta_2]) = \eta_0 h_1 \eta_0^{-1} \eta_1 h_0 \eta_1^{-1} \eta_2 h_{-1} \eta_2^{-1}(1) = \eta_0 h_1((0, [s(\eta_0^{-1}\eta_1), s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)])) \quad (5.69)$$

En notant γ la composante de $\nu([\eta_0, \eta_1, \eta_2])$ sur $C_{2,0}$, on obtient donc :

$$\gamma = \tau(s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2))\eta_0[s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)] = \tau(s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2))[s(\eta_2)] \quad (5.70)$$

Notons $k = \tau(s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2))$. Alors par définition on a :

$$s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2) = v^k \tilde{s}(s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)) \quad (5.71)$$

et par conséquent $s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2) = v^k s(\eta_0^{-1}\eta_2)$, d'où

$$v^k = s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1} \quad (5.72)$$

□

Définition 5.4.3.3. On définit l'application $\psi : C_*^{\text{bar}}(N_v) \rightarrow \text{Tot}_*(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}) \otimes C_*^{\text{bar}}(N_v)$ par :

$$[\eta_0, \dots, \eta_n] \mapsto \sum_{i=0}^n \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n]$$

Proposition 5.4.3.4. L'application ψ est un morphisme de complexes N_v -équivariant qui est une section de $\varepsilon \otimes id : \text{Tot}_*(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}) \otimes C_*^{\text{bar}}(N_v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(N_v)$.

Preuve :

Soit $\alpha \in C_*^{\text{bar}}(N_v)$. Alors, en notant ∂ la différentielle de $C_*^{\text{bar}}(N_v)$, ∂_T celle de $\text{Tot}_*(\widetilde{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle})$ et ∂_{\otimes} celle de leur produit tensoriel, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_{\otimes} \circ \psi(\alpha) &= \partial_{\otimes} \left(\sum_{i=0}^n \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \partial_{\otimes}(\nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n]) \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_T \circ \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial([\eta_i, \dots, \eta_n]) \\
&= \sum_{i=1}^n \nu \circ \partial([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial([\eta_i, \dots, \eta_n]) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i (-1)^j \nu \circ \partial_j([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^{i+j} \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_j([\eta_i, \dots, \eta_n]) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \nu \circ \partial_j([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} (-1)^{i+j} \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_j([\eta_i, \dots, \eta_n])
\end{aligned} \tag{5.73}$$

et :

$$\begin{aligned}
\psi \circ \partial(\alpha) &= \psi \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(\alpha) \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \psi \circ \partial_i(\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^n \nu([\eta_1, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] + (-1)^n \sum_{i=0}^{n-1} \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_{n-1}] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{j-1} \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_{j-i}[\eta_i, \dots, \eta_n] \right) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^n \nu \circ \partial_j([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&= \sum_{i=1}^n \nu \circ \partial_0([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] + (-1)^n \sum_{i=0}^{n-1} \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_{n-i}([\eta_i, \dots, \eta_{n-1}]) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^j \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_{j-i}[\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^j \nu \circ \partial_j([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&= \sum_{i=1}^n \nu \circ \partial_0([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] + (-1)^n \sum_{i=0}^{n-1} \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_{n-i}([\eta_i, \dots, \eta_{n-1}]) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^j \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_{j-i}[\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j \nu \circ \partial_j([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^j \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_{j-i}[\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \nu \circ \partial_j([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} (-1)^{i+j} \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes \partial_j[\eta_i, \dots, \eta_n] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \nu \circ \partial_j([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n]
\end{aligned} \tag{5.74}$$

On a donc $\psi \circ \partial(\alpha) = \partial_{\otimes} \circ \psi(\alpha)$. □

5.4.4 Calcul du morphisme $\tilde{S} : C_*^{\text{bar}}(N_v) \rightarrow C_{*-2}^{\text{bar}}(N_v)$

Lemme 5.4.4.1. *On note $\tilde{S} : C_*^{\text{bar}}(N_v) \rightarrow C_*^{\text{bar}}(N_v)[-2]$ la composition des morphismes $(\varepsilon_1 \otimes id) \circ (S \otimes id) \circ \psi$. Alors si $\alpha = [\eta_0, \dots, \eta_n]$ est un simplexe de $C_*^{\text{bar}}(N_v)$ (avec $n \geq 2$), on a :*

$$\tilde{S}(\alpha) = s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1}[\eta_2, \dots, \eta_n] \quad (5.75)$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\alpha) &= (\varepsilon_1 \otimes id) \circ (S \otimes id) \circ \psi(\alpha) \\ &= (\varepsilon_1 \otimes id) \circ (S \otimes id) \left(\sum_{i=0}^n \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \right) \\ &= (\varepsilon_1 \otimes id) \left(\sum_{i=2}^n S \circ \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \right) \\ &= \sum_{i=2}^n \varepsilon_1 \circ S \circ \nu([\eta_0, \dots, \eta_i]) \otimes [\eta_i, \dots, \eta_n] \\ &= \varepsilon_1 \circ S \circ \nu([\eta_0, \eta_1, \eta_2]) \otimes [\eta_2, \dots, \eta_n] \end{aligned} \quad (5.76)$$

Il suffit ensuite de reprendre les précédents calculs concernant ν dans le lemme 5.4.3.2. \square

En guise de bilan à ce qui précède, on peut énoncer :

Théorème 5.4.4.2. *On a un diagramme commutatif en homologie :*

$$\begin{array}{ccc} HC_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} & \xrightarrow{S} & HC_{*-2}(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H_*(N_v, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\tilde{S}} & H_{*-2}(N_v, \mathbb{C}) \end{array}$$

où \tilde{S} est induite par le morphisme du même nom.

5.4.5 Relation entre \tilde{S} et le cap-product

Par ce qui précède, comprendre l'opérateur S revient à comprendre l'opérateur \tilde{S} induit par le morphisme du même nom.

Nous reprenons ici quelques résultats de chapitre 2 sur la cohomologie de groupe : à l'extension centrale

$$0 \longrightarrow U \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow Z_v \longrightarrow N_v \longrightarrow 1 \quad (5.77)$$

on peut associer une unique classe de cohomologie dans $H_2(N_v, \mathbb{Z})$, et cette classe peut être représentée par le cocycle inhomogène $c_{ih} : (\eta_0, \eta_1) \mapsto s(\eta_0)s(\eta_1)s(\eta_0\eta_1)^{-1}$.

Définition-Proposition 5.4.5.1. *On définit $c_h : N_v^3 \rightarrow U \simeq \mathbb{Z}$ l'application*

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2) \mapsto s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1},$$

de sorte que $\tilde{S}([\eta_0, \dots, \eta_n]) = c_h(\eta_0, \eta_1, \eta_2)[\eta_2, \dots, \eta_n]$. Alors c_h est la 2-cochaîne homogène associée à la 2-cochaîne inhomogène c_{ih} , elles représentent donc la même classe dans $H^2(N_v, \mathbb{Z})$.

Nous avons ici explicité le lien entre l'opérateur S et le cap-product avec cette classe de cohomologie, déjà mis en évidence par Nistor et Burghilea. Dans notre situation, nous pouvons aller plus loin en commençant par modifier la section s que nous utilisons depuis le début.

5.4.6 Modification de la section s

Tout d'abord, regardons l'effet d'un tel changement sur l'application \tilde{S} finale :

Proposition 5.4.6.1. *Soit $s' : N_v \rightarrow Z_v$ une section de la surjection $Z_v \rightarrow N_v$, a priori différente de s . Alors l'application \tilde{S}' obtenue avec s' est homotope à \tilde{S} . Un changement de section laisse donc \tilde{S} invariante.*

Preuve :

Commençons par rappeler qu'en posant $d(\eta) = s(\eta)s'(\eta)^{-1}$ pour tout η , on définit une application $d : N_v \rightarrow U \simeq \mathbb{Z}$. On définit alors l'application linéaire $h : C_*^{\text{bar}}(N_v, \mathbb{C}) \rightarrow C_{*-1}^{\text{bar}}(N_v, \mathbb{C})$ par :

$$h : [\eta_0, \dots, \eta_n] \mapsto d(\eta_0^{-1}\eta_1)[\eta_1, \dots, \eta_n] \quad (5.78)$$

Nous allons vérifier que h est une homotopie entre \tilde{S} et \tilde{S}' . Compte-tenu de la construction de ces deux applications, il suffit de vérifier cela sur un 2-simplexe $[\eta_0, \eta_1, \eta_2]$. On a :

$$\begin{aligned} & (\partial \circ h + h \circ \partial)([\eta_0, \eta_1, \eta_2]) \\ &= \partial(d(\eta_0^{-1}\eta_1)[\eta_1, \eta_2]) + h([\eta_1, \eta_2] - [\eta_0, \eta_2] + [\eta_0, \eta_1]) \\ &= d(\eta_0^{-1}\eta_1)([\eta_2] - [\eta_1]) + d(\eta_1^{-1}\eta_2)[\eta_2] - d(\eta_0^{-1}\eta_2)[\eta_2] + d(\eta_0^{-1}\eta_1)[\eta_1] \\ &= (d(\eta_0^{-1}\eta_1) + d(\eta_1^{-1}\eta_2) - d(\eta_0^{-1}\eta_2))[\eta_2] \end{aligned} \quad (5.79)$$

Or :

$$\begin{aligned} & d(\eta_0^{-1}\eta_1) + d(\eta_1^{-1}\eta_2) - d(\eta_0^{-1}\eta_2) \\ &= s(\eta_0^{-1}\eta_1)s'(\eta_0^{-1}\eta_1)^{-1}s(\eta_1^{-1}\eta_2)s'(\eta_1^{-1}\eta_2)^{-1}(s(\eta_0^{-1}\eta_2)s'(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1})^{-1} \\ &= s(\eta_0^{-1}\eta_1)s'(\eta_0^{-1}\eta_1)^{-1}s(\eta_1^{-1}\eta_2)s'(\eta_1^{-1}\eta_2)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_2)s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1} \\ &= s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1}s(\eta_0^{-1}\eta_1)s'(\eta_0^{-1}\eta_1)^{-1}s(\eta_1^{-1}\eta_2)s'(\eta_1^{-1}\eta_2)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_2) \\ &= s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1}s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)s'(\eta_1^{-1}\eta_2)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_1)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_2) \\ &= s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1}s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2) + s'(\eta_1^{-1}\eta_2)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_1)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_2) \\ &= s(\eta_0^{-1}\eta_1)s(\eta_1^{-1}\eta_2)s(\eta_0^{-1}\eta_2)^{-1} + s'(\eta_1^{-1}\eta_2)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_1)^{-1}s'(\eta_0^{-1}\eta_2) \\ &= c(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2) - c'(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2) \end{aligned} \quad (5.80)$$

□

Pour choisir judicieusement la nouvelle section, nous devons nous ramener au fait que le groupe Γ agit sur l'espace $CAT(0)$ (X, d) . Commençons par rappeler quelques propriétés :

En notant $d_v : x \mapsto d(vx, x)$, on a défini (en 4.2.2.3) l'espace M_v de déplacement minimal, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in X$ tels que $d_v(x)$ est minimal et vaut la longueur stable de v , notée $|v|_s$. Cet espace est non vide et convexe (propositions 4.2.2.4 et 4.2.2.5), il s'agit donc également d'un espace $CAT(0)$.

Définition 5.4.6.2. On appelle axe de v l'image de toute ligne géodésique $\ell : \mathbb{R} \rightarrow X$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, v \cdot \ell(t) = \ell(t + |v|_s)$$

Les deux théorèmes suivant sont énoncés et démontrés dans [BH99], page 231, théorème 6.8.

Théorème 5.4.6.3. L'isométrie hyperbolique v possède des axes (tous parallèles), et l'espace M_v de déplacement minimal est la réunion des axes de v . Plus précisément, M_v est isométrique à un produit $Y \times \mathbb{R}$, où Y est lui-même un espace $CAT(0)$.

Théorème 5.4.6.4. Tout élément qui commute avec v , i.e. tout élément de Z_v , est une isométrie de M_v . Il s'exprime donc comme un et un seul couple (f, λ) où f est une isométrie de Y et λ est un réel.

Remarque 5.4.6.5. En particulier, un élément $v^k \in U \subset Z_v$ s'exprimera comme le couple $(id, k|v|_s)$.

Corollaire 5.4.6.6. Soit z un élément de Z_v . Alors la classe de z modulo U peut toujours être représentée par un et un seul élément de la forme (f, λ) , où λ est un réel dans l'intervalle $[0, |v|_s[$.

Définition 5.4.6.7. On note $s_v : N_v \rightarrow Z_v$ la section qui, à un élément $\eta \in N_v$, associe le représentant $s_v(\eta)$ qui s'exprime sous la forme d'un couple $(f, \lambda) \in Isom(Y) \times \mathbb{R}$, avec $\lambda \in [0, |v|_s[$. On note de plus $c_2 : N_v^2 \rightarrow U \simeq \mathbb{Z}$ le 2-cocycle inhomogène associé à cette section. Enfin, on note $c_1 : N_v \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à un élément $\eta \in N_v$ associe le nombre réel $\lambda \in [0, |v|_s[$.

Lemme 5.4.6.8. Soient η_1 et η_2 deux éléments de N_v . Alors :

$$c_1(\eta_1\eta_2) = \begin{cases} c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2) & \text{si } c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2) < |v|_s \\ c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2) - |v|_s & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve :

Notons abusivement $s_v(\eta_i) = (f_i, c_1(\eta_i))$. Alors $s_v(\eta_1)s_v(\eta_2) = (f_1 \circ f_2, c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2))$, et cet élément a la même classe modulo U que $s_v(\eta_1\eta_2) = (f_1 \circ f_2, c_1(\eta_1\eta_2))$. \square

Lemme 5.4.6.9. Le 2-cocycle c_2 est le bord de la 1-cochaîne c_1 .

Preuve :

Soient $\eta_1, \eta_2 \in N_v$. Alors :

$$c_2(\eta_1, \eta_2) = s_v(\eta_1)s_v(\eta_2)s_v(\eta_1\eta_2)^{-1} = (id, c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2) - c_1(\eta_1\eta_2)) \quad (5.81)$$

Et on a par conséquent :

$$c_2(\eta_1, \eta_2) = \begin{cases} 1 \in U & \text{si } c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2) < |v|_s \\ v & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.82)$$

Calculons maintenant l'image de c_1 par la différentielle ∂_{ih} : on a

$$\partial_{ih}(c_1)(\eta_1, \eta_2) = c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2) - c_1(\eta_1\eta_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2) < |v|_s \\ |v|_s & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.83)$$

On a donc $c_2 = \partial_{ih}(c_1) : N_v^2 \rightarrow U \simeq \mathbb{Z}$. □

Proposition 5.4.6.10. *Le 2-cocycle $c_v : N_v^2 \rightarrow U \simeq \mathbb{Z}$ représentant la classe de cohomologie dans $H^2(N_v, \mathbb{Z})$ associée à l'extension centrale représente la classe nulle dans $H^2(N_v, \mathbb{C})$.*

Théorème 5.4.6.11. *Le morphisme de complexes $\tilde{S} : C_*^{bar}(N_v) \rightarrow C_{*-2}^{bar}(N_v)$ défini par :*

$$[\eta_0, \dots, \eta_n] \longmapsto c_2(\eta_0^{-1}\eta_1, \eta_1^{-1}\eta_2)[\eta_2, \dots, \eta_n]$$

induit l'application nulle en homologie. Par conséquent, l'opérateur de périodicité S est également nul.

Corollaire 5.4.6.12. *Soit $v \in \Gamma$ un élément d'ordre infini. Alors la contribution à l'homologie cyclique périodique de $\mathbb{C}\Gamma$ de la classe de conjugaison $\langle v \rangle$ est nulle.*

Conclusion

On énonce ici notre résultat final, en (co)homologie cyclique périodique réduite (définition 2.2.4.1) :

Théorème 5.4.6.13. *On a, en (co)homologie cyclique périodique réduite :*

$$\begin{aligned}\overline{HP}_* (\ell_{RD}^1(\Gamma)) &\simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_{*+2n}(\Gamma, \mathbb{C}\Gamma_{tors}) \\ \overline{HP}^* (\ell_{RD}^1(\Gamma)) &\simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^{*+2n}(\Gamma, \mathbb{C}\Gamma_{tors})\end{aligned}$$

Preuve :

Soit I un ensemble fini de classes de conjugaison de Γ , contenant toutes les classes elliptiques. Cela est possible d'après la proposition 4.2.2.9. On a alors, en notant $HP_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_I$ la contribution de ces classes à l'homologie cyclique périodique de $\ell_{RD}^1(\Gamma)$:

$$HP_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_I \simeq \bigoplus_{\langle v \rangle \in I} HP_*(\ell_{RD}^1(\Gamma))_{\langle v \rangle} \quad (1)$$

$$\simeq \bigoplus_{\langle v \rangle \in I} HP_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \quad (2)$$

$$\simeq \bigoplus_{\langle v \rangle \in I, |v|_s=0} HP_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle} \quad (3)$$

$$\simeq \bigoplus_{\langle v \rangle \in I, |v|_s=0} \prod_{n \in \mathbb{N}} H_{*+2n}(\Gamma, \mathbb{C}\langle v \rangle) \quad (4)$$

$$\simeq \prod_{n \in \mathbb{N}} H_{*+2n}(\Gamma, \mathbb{C}\Gamma_{tors}) \quad (5)$$

$$\simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_{*+2n}(\Gamma, \mathbb{C}\Gamma_{tors}) \quad (6)$$

(2) se justifie par le fait que les contributions d'une classe $\langle v \rangle$ à l'homologie cyclique de $\mathbb{C}\Gamma$ et de $\ell_{RD}^1(\Gamma)$ sont égales (théorème 5.3.0.1), il en va donc de même dans sa version périodique. (4) s'explique par le fait que les contributions des classes hyperboliques en homologie cyclique périodique sont nulles (corollaire 5.4.6.12), $|v|_s = 0$ étant équivalent au fait que v est de torsion (proposition 4.2.2.7). Le théorème 3.3.2.15 permet à son tour de justifier (4). Enfin, le passage de (5) à (6) s'explique par le fait que, la dimension de X étant finie, l'homologie de Γ à coefficients dans n'importe quel Γ -module est nécessairement nulle à partir d'un certain degré (égal à la dimension de X).

D'après le corollaire 5.4.6.12 donc, la contribution à l'homologie cyclique périodique d'une classe donnée de conjugaison hyperbolique est nulle. Cela signifie donc que tout cycle du complexe cyclique périodique $\widehat{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)_{\langle v \rangle}$ pour une classe de conjugaison hyperbolique donnée est aussi un bord.

Notons \mathcal{C} l'ensemble des classes de conjugaison de Γ , \mathcal{E} l'ensemble des classes elliptiques

et décomposons l'ensemble des classes hyperboliques comme limite inductive de sous-ensembles finis J . On a alors, pour un cycle α dans $\widehat{CC}_*(\mathbb{C}\Gamma)$:

$$\alpha = \sum_{\langle v \rangle \in \mathcal{C}} \alpha_{\langle v \rangle} = \sum_{\langle v \rangle \in \mathcal{E}} \alpha_{\langle v \rangle} + \varinjlim_J \sum_{\langle v \rangle \in J} \alpha_{\langle v \rangle} = \alpha_{\text{ell}} + \varinjlim_J \alpha_J \quad (7)$$

où α_{ell} désigne la contribution totale des classes elliptiques au cycle α , qui donne (6) en homologie, et α_J désigne celle des classes hyperboliques contenues dans J . Chaque contribution α_J est une somme finie de bords, et est par conséquent également un bord. La contribution totale des classes hyperboliques au cycle α est donc une limite de bords, c'est pourquoi nous devons nous contenter *a priori* d'un résultat en homologie cyclique périodique réduite. \square

Bibliographie

- [BHM93] Marcel BÖKSTEDT, Wu Chung HSIANG et Ib MADSEN. « The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces ». In : *Invent. Math.* 111 (1993), p. 465-539 (cf. p. [15](#), [19](#), [36](#)).
- [BH99] Martin R. BRIDSON et André HAEFLIGER. *Metric spaces of non-positive curvature*. 319. Springer, 1999 (cf. p. [75](#), [83](#), [114](#)).
- [Bur85] Dan BURGHELEA. « The cyclic homology of the group rings ». In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 60.1 (1985), p. 354-365 (cf. p. [11](#), [55](#)).
- [CE99] Henri CARTAN et Samuel EILENBERG. *Homological algebra*. Princeton University Press, 1999.
- [Con85] Alain CONNES. « Noncommutative differential geometry ». In : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 62 (1985), p. 41-144 (cf. p. [11](#)).
- [Con94] Alain CONNES. *Noncommutative geometry*. Academic Press, 1994.
- [CM90] Alain CONNES et Henri MOSCOVICI. « Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups ». In : *Topology* 29 (1990), p. 345-388 (cf. p. [12](#)).
- [Dol72] Albrecht DOLD. *Lectures on Algebraic Topology*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1972 (cf. p. [36](#)).
- [EF97] David B. A. EPSTEIN et Koji FUJIWARA. « The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups ». In : *Topology* 36 (1997), p. 1275-1289 (cf. p. [11](#)).
- [God98] Roger GODEMENT. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Actualités scientifiques et industrielles 1252. Hermann, 1998 (cf. p. [34](#)).
- [Gro82] Michael GROMOV. « Volume and bounded cohomology ». In : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 56 (1982), p. 5-99 (cf. p. [11](#)).
- [KS90] Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA. *Sheaves on Manifolds*. Springer, 1990.
- [Laf02] Vincent LAFFORGUE. « K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes ». In : *Invent. Math.* 149 (2002), p. 1-95 (cf. p. [12](#)).
- [Lod98] Jean-Louis LODAY. *Cyclic Homology*. Springer, 1998.
- [Nis90] Victor NISTOR. « Group cohomology and the cyclic cohomology of crossed products ». In : *Invent. Math.* 99.1 (déc. 1990), p. 411-424 (cf. p. [11](#), [55](#)).
- [Tsy83] Boris TSYGAN. « The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology ». In : *Uspekhi Math. Nauk* 38 (1983), p. 217-218 (cf. p. [11](#)).
- [Wei94] Charles A. WEIBEL. *An introduction to homological algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics 38. Cambridge Univ. Press, 1994 (cf. p. [50](#)).