

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
Docteur

Délivré par :  
**UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA**

Préparée au sein de l'école doctorale  
Et de l'unité de recherche  
ED 544 INTER-MED, CRESEM

Spécialité :  
SCIENCES ECONOMIQUES

Présentée par :  
Jérémie MAURANYAPIN

**La décision et les ensembles flous : contributions  
méthodologiques à la théorie des jeux  
et à l'aide à la décision**

Soutenue le 17 Décembre 2018, devant le jury composé de :

M. Walter BRIEC , Professeur, Université de Perpignan	Directeur de thèse
Mme. Audrey DUMAS, Maître de conférence, Université de Perpignan	Co-Directrice de thèse
M. Stéphane MUSSART, Professeur, Université de Nîmes	Rapporteur
M. Patrick LEONI, Professeur, KEDGE Business School	Rapporteur
Mme Françoise SEYTE, Maître de conférence, Université de Montpellier	Membre du jury
M. Hervé BLANCHARD, Maître de conférence, Université de Perpignan	Membre du jury



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Mr Walter BRIEC, Professeur à l'Université de Perpignan Via Domitia, qui m'a encadré non seulement durant la thèse mais en réalité depuis la licence. Ce fut la première personne qui, alors que j'étais en seconde année de licence, a cru en mon projet d'effectuer une thèse et pour cela je vous remercie infiniment. Votre disponibilité et patience, vos encouragements et vos connaissances ainsi que les corrections et discussions que nous avons eues, m'ont permis de mener ce projet à son terme.

Je tiens à remercier Mme Audrey DUMAS, Maître de conférences à l'Université de Perpignan Via Domitia, qui m'a encadré tout au long de ce projet. Votre sens pragmatique et votre méthodologie m'ont permis de me perfectionner. Vos encouragements ainsi que nos discussions m'ont permis, alors que je doutais, de franchir les divers obstacles. Je vous remercie aussi pour votre soutien psychologique.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Stéphane MUSSART, Professeur à l'Université de Nîmes, ainsi qu'à Monsieur Patrick LEONI, Professeur à KEDGES Business School, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Mme Françoise SEYTE, Maître de conférences à l'Université de Montpellier ainsi que Mr Hervé BLANCHARD, Maître de conférences à l'Université de Perpignan Via Domitia, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être membres du jury de la thèse.

Je souhaite adresser mes remerciements à Mr Hervé BLANCHARD, qui m'a soutenu durant ces travaux. Nos nombreuses conversations et débats, m'ont grandement aidé à comprendre ce sont les Sciences Economiques. Je vous remercie pour le temps que vous avez passé à répondre à mes interrogations.

---

Je tiens à remercier conjointement, Mr Emmanuel THIBAUT, Professeur à l'université de Toulouse, Mr Hervé BLANCHARD, Mme Cynthia ROCH et toutes les personnes du département d'Administration Economiques et Sociales de l'Université de Perpignan Via Domitia, pour m'avoir donné l'occasion d'être Attaché Temporaire de Recherche et d'Enseignement durant deux ans. Grâce à vous, j'ai eu la chance d'avoir un avant-goût du travail d'enseignant-chercheur et ainsi de cultiver la passion pour l'enseignement.

Je tiens à remercier le Département de Droit de l'Université de Perpignan qui m'a accueilli durant deux ans, afin que je puisse effectuer mes travaux de recherches et d'enseignements. Le personnel administratif (merci les filles) ayant mis en œuvre tout son possible pour me faciliter le travail.

Je tiens aussi à remercier l'Institut d'Administration des Entreprises de Perpignan qui m'a permis de dispenser des travaux dirigés au sein de son institut. Je remercie le personnel administratif d'alors, et plus particulièrement Mme Bastry pour son soutien.

Un grand merci à la famille MOLLE (Michel, Régine, Julien et Sébastien) pour leur soutien indéfectible et plus particulièrement je tiens à te remercier Julien pour ton soutien matériel et moral.

Un grand merci à Jérôme KOCH, qui m'a soutenu depuis le collège. Ça y est, j'ai réalisé un de mes objectifs.

Un grand merci à Benoît NOELL qui m'a soutenu et a vécu mes crises par message durant toutes ces années.

Un grand merci à Océane SALLES, toi docteure en biologie et moi, en sciences économiques. On en aura fait du chemin depuis le collège.

Un grand merci à David JOURDA, Johanna SCHARTZ et leur petit Théo pour leur soutien tout au long de la thèse.

Un grand merci à Alexandre THORE, qui m'a appris les bases de la programmation (merci pour ta patience) et à toi Fabien ROCA pour ton soutien tout au long de mes études.

---

Mes remerciements vont aussi à la famille FUENTES (Incarnation, Bernard, Vanessa, Guillem, Mickaël, Flora et le petit nouveau Léo) qui m'ont soutenu durant toutes ces années.

Bien évidemment, j'adresse un immense merci à ma famille qui m'a toujours soutenu et plus particulièrement à toi Timothée, qui m'a permis de comprendre certaines notions mathématiques et vous aussi Lucas et Mattéo, pour votre présence bienveillante et nos fous rires.

Bien entendu, rien de tout cela n'aurait été possible sans mes parents Jean-Claude MAURANYAPIN et Florence BERNABE que je remercie infiniment.

Adam Smith a montré à partir de l'exemple de la veste en laine,<sup>1</sup> que pour produire une "simple" veste en laine il a fallu le concours de plusieurs milliers de personnes. Il semble donc que je devrais au moins en remercier autant pour cette thèse. Les contraintes, matérielle et temporelle obligent, je remercie sans les nommer toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

Enfin, cette thèse n'aurait pas été la même si tu n'avais pas été à mes côtés, je te remercie Mélanie FUENTES (bientôt MAURANYAPIN) d'avoir partagé ce moment avec moi. Nous clôturons une page de notre vie pour en ouvrir une nouvelle...

---

1. l'exemple clôture le chapitre 1 de la richesse des nations, par la suite Leonard Read reprendra l'exemple d'un crayon dans son œuvre "I'm Pencil"

---

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE . . . . .	8
---------------------------------	---

PARTIE I LA DÉCISION EN UNIVERS FLOU : DU CONCEPT DE PROBABILITÉ AU CONCEPT D'ENSEMBLE FLOU	16
--	----

1. INFORMATION : LE NERF DE LA DÉCISION . . . . .	18
---	----

2. UNIVERS INCERTAIN ET THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS . . . . .	36
---	----

PARTIE II CONTRIBUTION À LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET À LA THÉORIE DES JEUX	58
--	----

3. FONCTION DISTANCE ET FONCTION D'APPARTENANCE : UNE STRUCTURE DE CONVEXITÉ . . . . .	60
---	----

4. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES JEUX . . . . .	90
--	----

5. C-SHAPE ET MODÈLES DE JEUX LIMITES . . . . .	134
---	-----

PARTIE III CONTRIBUTION À L'AIDE À LA DÉCISION ET	
---	--

# SOMMAIRE

---

À LA MÉTHODE MULTICRITÈRE	164
6. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DE L'AIDE À LA DÉCISION . . . . .	166
7. MÉTHODE ELECTRE III ET PSEUDO-CRITÈRE C-SHAPE . . . . .	198
CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES . . . . .	228
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	234
ANNEXES	246
A. PROGRAMME ELECTRE III C-SHAPE . . . . .	247

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

*“L’embarras du choix : un malheur qui n’attendrit personne.”*

ANNE BARRATIN<sup>2</sup>

---

En sciences économiques, l’une des questions centrales concerne l’allocation des ressources rares (capital, travail, ressources naturelles, etc.) et en particulier comment répartir ses facteurs de production pour assurer le bien-être de la population à court, moyen et long terme. La décision est ainsi au cœur des thématiques économiques, quel que soit le secteur concerné : agriculture, santé, éducation, énergie, etc. Par ailleurs, la prise de décision concerne tous les agents économiques qu’il s’agisse d’acteurs liés à l’étude micro-économique (producteurs, consommateurs) que d’acteurs liés à l’étude macro-économique (états, organismes, etc.). De fait, comprendre les tenants et les aboutissants de la prise de décision, qui est un point névralgique en économie, est l’objet de cette thèse.

Le champ d’application de la théorie de la décision est extrêmement vaste et pluridisciplinaire. Pour s’en convaincre, il suffit de remarquer que le prix Nobel d’économie décerné par la banque de Suède en l’honneur d’Alfred Nobel, a permis : soit de mettre en avant les travaux sur la théorie de la décision, soit de nobéliser des chercheurs ayant fortement contribué par leurs travaux à l’avancement de la théorie de la décision. On peut citer notamment K. Arrow (1972) ou M. Allais (1988) ou encore R. Selten (1994) comme économistes, J.F Nash (1994) et R. Aumann (2005) ou encore L. Shapley (2012) en tant que mathématiciens, H. Simon (1978) en tant que sociologue et même D. Kahneman (2002) en tant que psychologue. Par ailleurs, l’axe de recherche de la théorie de la décision

---

2. *De vous à moins* p.57, 1892

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

se retrouve dans de nombreux journaux scientifiques de disciplines diverses. C'est notamment le cas dans les journaux comme *Econometrica*, *Journal of multicriteria Decision analysis*, *Decision sciences*, *4'OR* ; *Journal of Artificial Intelligence*, *Mathematics and Social Science*, *European Journal of Operational Research*, *Journal of Mathematical Psychology*, *Journal of Political Economy*, *Theory and Decision*, *Management Sciences*, etc. Compte tenu du caractère pluridisciplinaire de notre sujet de recherche et de notre travail de thèse, l'axe de recherche s'inscrit principalement en sciences économiques mais il est également enrichi par les travaux de recherche issus des mathématiques et des sciences de gestion.

La question de la prise de décision est une question ancienne. Afin de contextualiser nos recherches, nous allons revenir sur l'origine de la théorie de la décision. Nous proposons pour cela, de mettre en évidence deux axes de recherche distincts permettant de comprendre les mécanismes de la prise de décision : la recherche opérationnelle couplée à la théorie des jeux d'une part et l'aide à la décision, d'autre part.

Le premier axe de recherche de la décision s'illustre par la recherche opérationnelle et la théorie des jeux qui trouvent leur origine des mathématiques. En effet, les mathématiciens se sont intéressés très tôt aux problèmes décisionnels, notamment grâce aux travaux de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat au XVII<sup>ème</sup> et sur leurs échanges par correspondance concernant la genèse des calculs de probabilités. Ainsi, ils s'intéressaient au comportement humain face au hasard. Au XVIII<sup>ème</sup>, Bernoulli se penchait sur les calculs de probabilité [19], puis le Marquis de Condorcet [40] travaillait sur les procédures de décisions collectives. Au XX<sup>ème</sup> Pareto [104] s'est interrogé sur les problèmes économiques à dimensions multiples et dans le même temps, Taylor [140] a analysé la gestion scientifique des entreprises. Il est intéressant de noter qu'aucune des recherches d'alors n'étaient vouées à quelconques préconisations ou marche à suivre. Elles cherchaient plus à rendre compte de ce qui se passait ou se passerait dans les divers cas possibles.

Ainsi, la théorie de la décision prendra le rôle qu'on lui connaît aujourd'hui, à savoir pouvoir effectuer des recommandations à partir de l'entre-deux guerres. Plus précisément, au début de la seconde guerre mondiale grâce à l'armée britannique. En effet, P.M.S. Blackett créa en 1939 (voir Salzmann[119]) ce que l'on pourrait appeler le premier groupe

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

de recherche opérationnelle à la demande du général Pile et nommé “Blackett Circus”. Ce groupe composé de membres de divers horizons (physiologistes, physiciens, mathématiciens, astronomes, officiers et coordinateurs) menait des recherches dans le cadre de l’installation des systèmes de radars et durant la guerre, elle s’efforcera de décrypter le code secret des communications allemandes (voir Bow [22] et Kir [80]). C’est dans ce contexte que l’on trouve la première utilisation du terme “Operational Research” qui se traduit par “recherche opérationnelle” et que l’on trouve régulièrement sous l’acronyme “RO”. Le succès de la recherche opérationnelle comme support pour des alliés durant la guerre, permit de montrer qu’il était possible d’étudier de manière scientifique les méthodes d’aide à la décision. Ainsi, dès la fin des années 1940 et le début des années 1950, nombres de chercheurs se sont mis à écrire sur le sujet. Par exemple, Dantzig [44] et Kantorovich [76] ont cherché une structure formelle pour caractériser les problèmes décisionnels grâce à l’utilisation des mathématiques et de la logique, notamment en introduisant l’algorithme de programmation linéaire, aussi connu sous le nom de méthode de Simplexe. Grâce aux divers travaux, on s’est rapidement aperçu que des problèmes complexes pouvaient être appréhendés grâce à la modélisation mathématique tout en imposant une hypothèse forte : celle de la rationalité simple.

Cette hypothèse bien connue, en économie notamment, implique qu’un décideur cherchera toujours à maximiser une fonction d’utilité qui est censée représenter ses préférences. Le résultat direct lié à cette hypothèse fut que l’optimisation de cette fonction devait être considérée comme la démarche à suivre pour trouver la meilleure solution du problème de décision.

Dans le même temps, Von Neumann et Morgenstern [155] et ensuite Nash [98], [97] développèrent la théorie des jeux. Cette dernière propose un cadre théorique en vue de trouver la réponse optimale à un problème stratégique. Les trois auteurs posèrent un cadre solide dans lequel sous certaines conditions, la fonction d’utilité et les solutions optimales existent. De sorte que les solutions proposées permettent de traduire sous forme de jeu décisionnel des situations issues du monde réel (représentation de la crise des missiles de Cuba, oligopole de Bertrand, Duopole de Cournot [42]).

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

Il apparait que la recherche opérationnelle et plus précisément la théorie des jeux permet d'expliciter les comportements stratégiques optimaux. Ainsi, nous concentrerons une partie de nos recherches à la compréhension de la théorie des jeux pour laquelle nous proposerons des apports.

Le second axe de recherche relatif à la compréhension de la prise de la décision se nomme aide à la décision. Celle-ci se positionne comme complémentaire à la recherche opérationnelle. L'origine de l'aide à la décision provient des critiques des hypothèses émises par la recherche opérationnelle. Sur ce point les travaux d'Arrow [6] pointeront du doigt un problème très puissant en économie, en publiant en 1951 "Théorème d'impossibilité". Celui-ci montre que lorsque les conditions d'universalités, d'indépendance, de respect de l'unanimité et de non existence de dictateur sont réunies, il est impossible d'agrèger les préférences de décideurs considérés comme rationnels. Ce théorème fait directement écho aux discussions qui avaient déjà été émises par Le Marquis de Condorcet et Borda, concernant le fait qu'il n'y a pas de procédures d'agrégations des préférences universelles. Ce faisant, Arrow a ouvert la voie à un autre domaine, à savoir celui de la théorie du choix social (voir Kelly [78] , Nurmi [101], [102], Sen ([125] [124]) ou Taylor [140]).

Deux ans plus tard, le futur prix Nobel d'économie Maurice Allais [5] a démontré que les axiomes proposés par Von Neumann et Morgenstern comme conditions nécessaires à l'existence d'une fonction d'utilité (qui rappelons-le, caractérise les préférences), sont systématiquement violées par le comportement réel du décideur à des choix très simples. Cette critique forte du modèle proposé par Von Neumann et Morgenstern sur la théorie de l'utilité espérée, ouvrira la voie à la science cognitive.

Par ailleurs, à la fin des années 1960, Tversky [145] démontra que les propriétés sur les relations de préférences relèvent plus d'une exigence théorique que des résultats empiriques. Il aura l'occasion de démontrer par ailleurs dans ses travaux [146], que d'une part la relation de préférence peut être intransitive et que d'autre part, dans [147] la symétrie de la relation d'indifférence n'est pas toujours validée. Les apports de Tversky sont considérables puisqu'ils ont ouvert la voie d'une recherche plus approfondie des axiomes qui composent la théorie de la décision, et notamment concernant celles sur

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

la relation de préférence et les fonctions qui y sont associées, afin de les mesurer.

Enfin, Simon [130] dès 1947, étudia les processus de décision dans les organisations. Il observe que les décideurs ont un comportement qui ne correspond pas aux postulats de la théorie de la décision. Il continuera ses recherches jusqu'à mettre au point la théorie de la rationalité limitée ([131], [132], [133]). Celle-ci énonce que face à un choix, un décideur choisira la première solution qui "satisfait" ses propres nécessités, et non pas selon un critère d'optimisation idéal, irréaliste et inutilisable. Il met en avant qu'il existe un critère de "satisfaction" de ses nécessités et non pas l'optimisation.

Ainsi, Simon considère que la théorie de la décision possède trois hypothèses implicites (cf. [Mos] [89]) :

1. les décideurs connaissent très bien leur problème ;
2. ce problème est toujours présentable comme un problème d'efficacité ;
3. l'informatique et les ressources nécessaires pour trouver une solution sont toujours disponibles.

Les résultats de ses recherches lui font conclure que dans la réalité, ces trois hypothèses ne sont pas validées. Le concept de rationalité limitée de Simon se détache totalement de ce qui était la pensée dominante jusqu'alors. Tandis que les approches de la théorie de la décision développées de l'époque, considèrent que l'hypothèse de rationalité existe indépendamment du décideur et du processus de décision, la nouvelle approche prend en considération le processus de décision (processus correspondant aux activités mentales que le décideur met en place pour faire son choix). Simon indiquera que la rationalité doit se chercher dans ce processus et non pas à l'extérieur. Ainsi, il met en avant que l'hypothèse de "rationalité externe" existe bien et correspond aux attentes des modèles d'optimisations. Ceci étant, dès lors que la subjectivité est de mise, cette hypothèse n'est pas compatible.

À partir de ces travaux, la théorie de l'aide à la décision commencera à se mettre en place. Celle-ci place le décideur au centre du processus de décision et ne le considère plus comme rationnel. Dès lors, la solution à apporter au modèle doit être construite avec le décideur [WAT [154]]. Les travaux de Roy [112] portent sur les méthodes ELECTRE

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

(ELiminations et Choix Traduisant la REalité). Ces méthodes permettent d'établir un classement des solutions proposées afin de trouver la plus satisfaisante.

L'objectif de cette thèse est de répondre à la question comment intégrer le flou, inhérent au langage naturel<sup>3</sup> mais aussi à l'imprécision de l'information, dans les prises de décision en théorie des jeux et aide à la décision ?

Pour réconcilier ces deux axes de recherche de la théorie de la décision, nous proposons dans cette thèse de mettre au cœur de l'analyse, l'information disponible du décideur. En effet, compte tenu du caractère complet et/ou parfait de l'information, le contexte de la prise de décision varie et nécessite ainsi de mobiliser des théories et des outils d'analyse différents de la décision. Cela nous permet premièrement, de souligner avec quelles hypothèses relatives à l'information disponible s'inscrit le champ de la recherche opérationnelle et la théorie des jeux d'une part, et le champ de l'aide à la décision, d'autre part.

L'analyse de l'information nous invite à comprendre la théorie des ensembles flous, théorie qui permet d'appréhender mathématiquement les imperfections du langage naturel, et elle répond de ce fait aux critiques inhérentes à l'utilisation des mathématiques et de la logique. En effet, les recherches sur la théorie des ensembles flous effectuées par Zadeh [160] permettent de capturer l'incertitude, l'imprécision et l'ambiguïté des variables linguistiques de manière plus précise et qui sont inhérentes à l'être humain. La méthodologie apportée par Zadeh permet de flexibiliser le langage formel des modèles à la décision, en incorporant la notion de fonction d'appartenance et de mesure de l'appartenance d'un élément à un ensemble. Il vient de ce fait combler un fossé entre la vision rationnelle extérieure et la rationalité de Simon.

Nos travaux de thèse proposent d'introduire la notion d'information floue, en mobilisant la théorie des ensembles flous et afin d'enrichir la compréhension des mécanismes de prise de décision dans les deux grands axes de recherche à savoir, la recherche opérationnelle et l'aide à la décision.

Le plan de cette thèse s'articule autour de trois parties suivantes :

---

3. Expression utilisée par Zadeh [160].

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

La première partie est consacrée à l'étude de l'information disponible qui permet la décision et la prise en compte de cette information. Le premier chapitre consiste à montrer que l'information disponible ne peut être une donnée parfaite et que la prise de décision doit être contextualisée dans un environnement. Nous concentrons nos recherches sur l'environnement incertain pour lequel l'information est dite imparfaite. Cette imperfection est généralement prise en compte en utilisant le concept de probabilité. Nous montrons les limites de l'utilisation de cet outil mathématique. Le second chapitre, à partir du résultat selon lequel la notion de probabilité représente imparfaitement l'incertitude, nous a amené à concentrer nos recherches sur la théorie des ensembles flous. Nous revenons alors sur les concepts de base et notamment sur le concept de nombre flou. Enfin, nous introduisons un nombre flou paramétré nommé C-Shape qui généralise la notion de nombre flou.

La deuxième partie est consacrée à la recherche opérationnelle et plus précisément à la théorie des jeux, théorie qui permet de trouver les stratégies optimales que doivent effectivement prendre des joueurs, pour une situation donnée. Le troisième chapitre, qui correspond à un chapitre de création d'outils mathématiques, permet de faire la correspondance entre les fonctions de jauges (distances) et les fonctions d'appartenances. L'objectif de ce chapitre est de faire la correspondance entre les fonctions d'appartenance et la  $\mathbb{B}$ -convexité. Cela nous servira pour le chapitre suivant sur la théorie des jeux, puisque Bricc et Horvath [24], ont démontré l'existence d'équilibre de Nash sous hypothèse de  $\mathbb{B}$ -convexité. Le quatrième chapitre est construit en deux temps. Dans un premier temps, nous proposons un survey de la théorie des jeux, ainsi que les principaux résultats. Dans un second temps, nous présentons une nouvelle classe de jeux pour lesquels il existe des solutions optimales sous hypothèses de  $\mathbb{B}$ -convexité. Nous montrerons alors qu'il est possible que les individus soient parfaitement rationnels mais qu'ils peuvent posséder des visions du jeu différentes et par conséquent, posséder des types de stratégies différentes. Le cinquième chapitre consiste à utiliser les apports proposés au chapitre deux notamment sur la fonction C-Shape.

La troisième partie de la thèse est consacrée à l'aide à la décision et plus parti-

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

culièrement à l'aide à la décision multicritère. Le décideur est placé au centre du processus de décision et la recherche porte sur la solution la plus satisfaisante possible, selon les préférences du décideur. Le sixième chapitre propose dans un premier temps, un survey de l'aide à la décision et dans un second temps, nous analysons les tenants et les aboutissants de l'aide à la décision multicritère. Il sera question dans ce chapitre, d'introduire un nouveau type de critère basé sur le nombre flou C-Shape, nommé pseudo-critère C-Shape. Le septième chapitre porte sur une application du critère développé au chapitre précédent, au modèle ELECTRE III. Ce modèle permet de classer des alternatives (solutions) entre elles.

Nous terminons par une conclusion générale explicitant les principaux résultats de nos travaux, leurs limites, ainsi que nos perspectives concernant nos futures recherches.

## PARTIE I

# LA DÉCISION EN UNIVERS FLOU : DU CONCEPT DE PROBABILITÉ AU CONCEPT D'ENSEMBLE FLOU

---

# 1. INFORMATION : LE NERF DE LA DÉCISION

*“Nulle donnée n’est parfaite.”*

MASSON<sup>1</sup>

---

## Sommaire

---

<b>1</b>	INTRODUCTION . . . . .	<b>20</b>
<b>2</b>	LES IMPERFECTIONS DE L’INFORMATION . . . . .	<b>21</b>
2.1	L’importance de l’information . . . . .	21
2.2	Les formes d’imperfections de l’information . . . . .	22
<b>3</b>	LA DÉCISION ET SON UNIVERS . . . . .	<b>26</b>
<b>4</b>	LES PROBABILITÉS COMME MESURE DE L’INCERTITUDE . . . . .	<b>30</b>
4.1	Généralité . . . . .	30
4.2	Définition mathématique du concept de probabilité . . . . .	30
4.3	La pluralité du concept de probabilité . . . . .	31
4.4	Limites à l’utilisation des probabilités . . . . .	32
<b>5</b>	CONCLUSION . . . . .	<b>34</b>

---

---

1. Masson, 2005.



## 1 INTRODUCTION

L'objectif principal de ce chapitre est de poser le cadre d'analyse dans lequel nous avons effectué les travaux de recherche tout au long de cette thèse. Nos travaux s'inscrivent dans les domaines de la recherche opérationnelle et de l'aide à la décision en mettant en évidence les liens principaux qui unissent ces deux champs d'études, à savoir : l'information disponible qui peut être détenue par un individu, ainsi que la prise en compte de l'information dans le processus de décision.

Dans un premier temps l'information, notamment en économie, a été considérée jusqu'en 1960 comme parfaite. La théorie néoclassique reposait jusqu'alors sur une parfaite circulation de l'information. Cette hypothèse sur l'information permet de caractériser l'équilibre général Walrasien, de sorte que "l'univers Walrasien"<sup>2</sup> [141] est caractérisé par une information libre d'accès, disponible instantanément et sans coût, puisque le commissaire priseur garantit la gratuité en "criant" à tous les prix. En d'autres termes, une omniscience de l'individu est avérée au sein de l'univers Walrasien.

À partir des années 1960 et sous l'impulsion des travaux de Georges Stigler[137]<sup>3</sup>, l'hypothèse d'information parfaite va être détricotée. Elle sera ainsi considérée comme imparfaite et possédant un coût. Par contre, tout individu peut potentiellement obtenir cette information. La théorie économique s'empare de cette nouvelle hypothèse et récompensera par deux prix Nobel les travaux de J. Mirrlees et W. Vickrey en 1996, portant sur des contributions fondamentales à la théorie économique des incitations dans le cas d'informations asymétriques, et de A. Akerlof, M. Spence, J. Stiglitz portant sur "les marchés avec asymétrie d'information".

La caractérisation de l'information apparaît centrale ; elle fait donc l'objet de la première section. Au cours de cette partie, nous définissons d'imperfection de l'information, en essayant de la caractériser le plus précisément possible. De fait, nous constatons qu'il n'existe pas une imperfection de l'information mais des imperfections de l'information

---

2. Terme emprunté à Y. Thépaut.

3. Il recevra le prix Nobel en 1982 pour ses apports concernant la remise en cause de l'information parfaite.

qu'il convient de classer. Par suite, nous revenons dans ce chapitre sur les notions d'univers dans lequel peut être prise une décision. En d'autres termes, il est question de déterminer dans quel contexte informationnel s'établit la prise la décision. Nous montrons qu'il en existe trois : l'univers certain (univers Walrasien), l'univers risqué et l'univers incertain. Afin de connecter les deux champs d'études, nous revenons sur l'analogie entre l'univers incertain et l'univers multicritère. Ayant rappelé les différentes formes d'imperfections de l'information ainsi que la définition d'univers incertain et ses conséquences, l'objet de la dernière section est de montrer comment l'imperfection et plus précisément l'incertitude, est appréhendée mathématiquement. Ainsi, nous nous intéressons au concept de probabilité. Après avoir montré les avantages de l'utilisation de cette mesure, nous analysons ses limites.

## 2 LES IMPERFECTIONS DE L'INFORMATION

### 2.1 L'importance de l'information

Le couple information-décision apparaît naturellement intriqué. En effet, est-il possible de prendre une décision sans information préalable sur le choix à effectuer ? Les travaux de France-Lanord, [58] mettent en avant l'idée que la décision est totalement liée à l'information disponible. Si l'information est bien le nerf de la prise de décision<sup>4</sup>, les travaux de Dubois et Prades [53] permettent de la définir comme étant :

“une collection de symboles ou de signes produits soit par l'observation de phénomènes naturels ou artificiels, soit par l'activité cognitive humaine et destinée à comprendre le monde qui nous entoure, à aider à la prise de décision ou à communiquer avec les individus”.

L'intérêt d'appréhender l'information grâce à cette définition, repose sur le fait qu'elle met en avant l'existence deux types d'informations distinctes : l'information basée sur l'observation et l'information basée sur l'activité cognitive humaine. L'information basée

---

4. Dans le sens où l'information peut être assimilée comme la “source du pouvoir”. Le lecteur pourra se référer aux travaux de Russo [118].

sur l'observation apparaît comme objective dans le sens où elle est une donnée exogène au décideur. La seconde quant à elle, est directement liée au décideur et à l'interprétation que ce dernier est capable de donner à une information objective. En d'autres termes, à partir d'une information objective, le décideur se crée une information qu'il peut comprendre et avec laquelle il peut communiquer.

Il est à noter que chaque information ne détient pas la même portée. Il est nécessaire pour que l'information soit intéressante, qu'elle soit utile au décideur. Ceci étant, les travaux de Winter [159] ont permis de mettre en évidence un paradoxe sur l'information, qui peut être énoncé de la manière suivante : considérons un individu cherchant à déterminer l'information à acquérir pour la future prise de décision. Il doit inévitablement arbitrer entre le coût d'obtention de l'information et l'utilité qu'elle lui procure. Or, pour faire cet arbitrage, il a besoin au préalable des informations relatives au coût et à l'utilité de celle-ci.

À partir de ces éléments, il est possible d'admettre que la prise de décision va dépendre de la structure des préférences de l'individu (tant sur l'utilité de l'information que sur ses choix) ainsi que de trois types de connaissances relatives à son système (Dubois et Prades [53]) et qui peut être représenté à l'aide de la figure 1.1 :

- Les connaissances qui correspondent à son expérience et à sa formation : elles forment les connaissances génériques ;
- Les connaissances issues des analyses menées pour l'objet étudié : elles forment les connaissances contingentes ;
- Les connaissances issues de l'interprétation du décideur : elles forment les croyances.

### 2.2 Les formes d'imperfections de l'information

Les connaissances apparaissent donc comme primordiales pour le décideur. Si les deux premiers types de connaissances semblent être objectifs, le troisième est en lien direct avec ce que l'on nomme l'incertitude. Dans ce contexte, le mot incertitude regroupe plusieurs notions et il est préférable d'utiliser les termes “imperfections de l'information” (Bouchon-

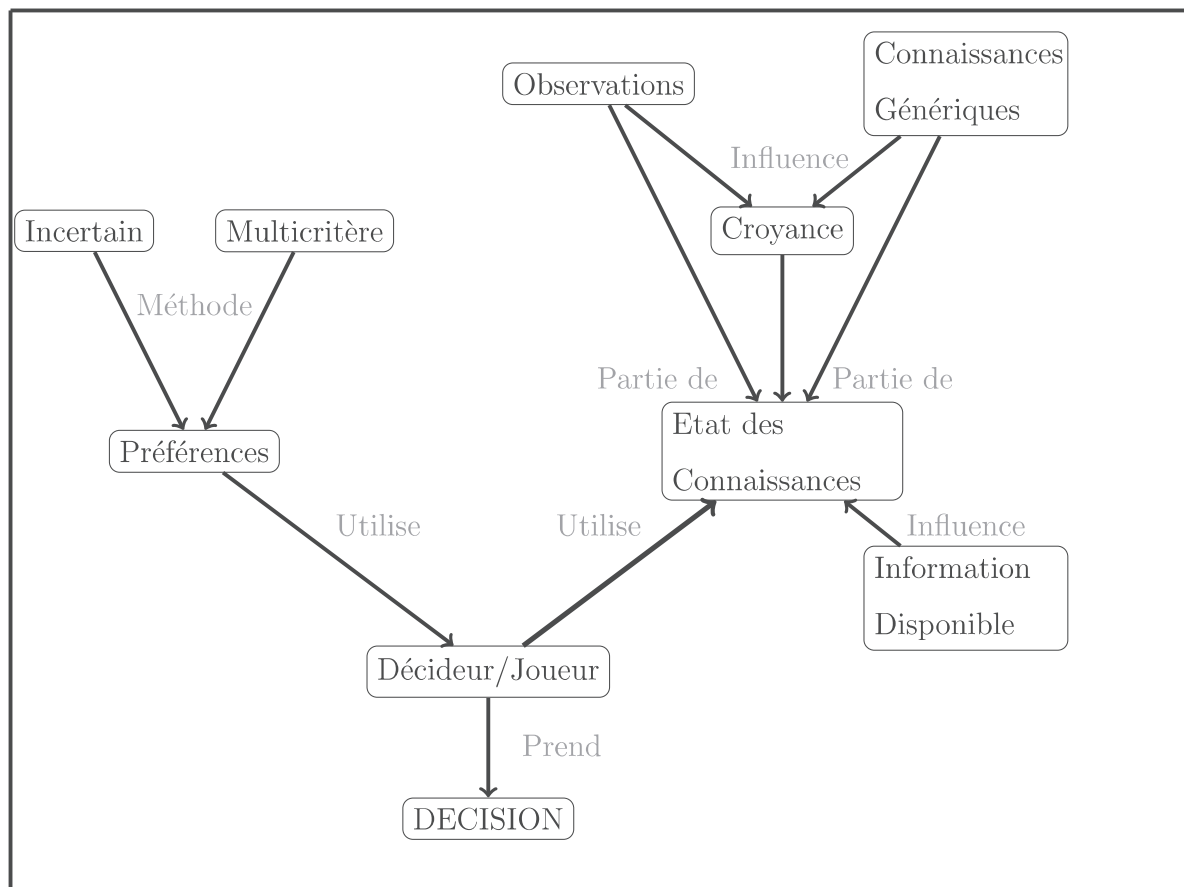


Fig. 1.1: Les préférences et la connaissance : indicateurs nécessaires pour la prise de décision

Meunier [29], [30], Dubois et Prade [53], Smets [134], [135]). Les travaux de Smets [135] permettent de découper les imperfections de l'information en 4 types distincts à savoir l'incertitude, l'imprécision, l'incomplétude et l'inconsistance.

1. **L'incertitude** : c'est une notion plurielle qui a été étudiée notamment par Helton 1997. De manière générale, elle correspond à l'état des connaissances que possède un agent (un individu, un joueur, un décideur) sur la relation entre l'état réel de la nature et son appréciation. De facto, l'incertitude est liée à la validité d'une information. L'incertitude peut alors se définir en deux parties :
  - L'incertitude aléatoire, qui est directement liée au système étudié (phénomènes aléatoires). Celle-ci est aussi nommée dans la littérature incertitude de type A, incertitude irréductible, objective, ou encore stochastique.
  - L'incertitude épistémique, qui correspond au manque de connaissance du système par l'agent (le joueur, le décideur). Dans la littérature on parle aussi d'incertitude de type B, réductible, d'état des connaissances ou encore d'ignorance.
 Cette dernière est considérée comme réductible puisque que la possibilité d'obtenir une information supplémentaire est avérée (Indrayan [72]). Enfin, il est possible de noter que l'incertitude peut provenir de la source, notamment par sa fiabilité.
2. **L'incomplétude** : elle se définit comme une absence de connaissance sur l'environnement. L'incomplétude apparaît lorsque l'on s'intéresse à un échantillon représentatif.
3. **L'imprécision** : elle intervient dès lors que l'information révélée est insuffisante afin de répondre à la question qui préoccupe le décideur. Cette imprécision peut provenir directement de l'imprécision des données (mesures d'erreurs, moyens d'observations) ou du fait que le langage naturel utilisé pour **décrire l'information, l'a rend vague. C'est par exemple le cas lorsque, pour décrire un évènement, on utilise les** mesures linguistiques suivantes : faible, moyennement faible, moyennement forte, forte. Par exemple, lorsque le gouvernement compte le nombre de manifestants dans la rue, il est obligé de donner un intervalle.
4. **L'inconsistance** : cette imperfection de l'information tire son origine d'informations dites conflictuelles. Dès lors, une possible incohérence dans les conclusions peut émerger. En économie, cela peut se traduire par deux économistes qui estiment le

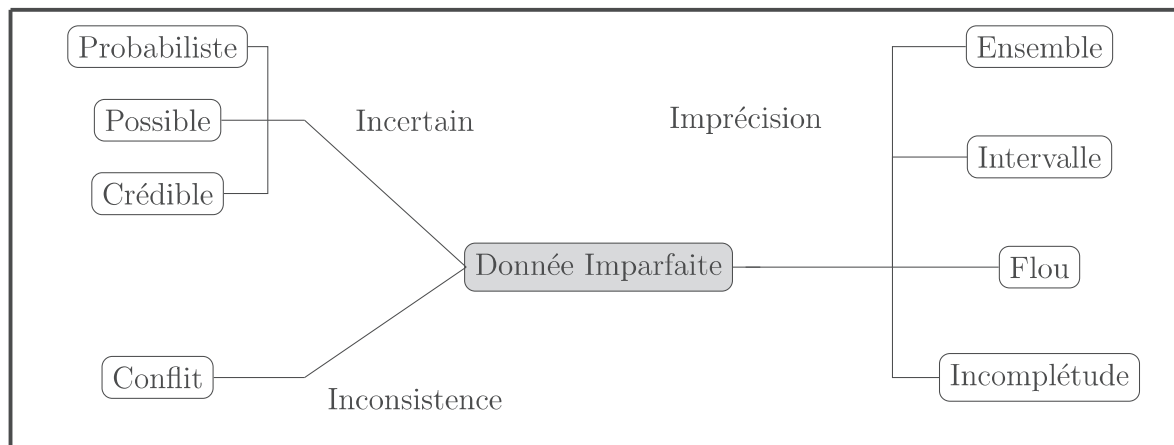


Fig. 1.2: Représentation des différentes formes d'imperfections (Masson, 2005)

taux de croissance pour l'année suivante. L'un présentera le taux de croissance à 1% tandis que l'autre proposera un taux de croissance à  $-1\%$ .

### Intrication des imperfections

Il apparaît évident que les imperfections de l'information soient intriquées. Il est facile d'admettre par exemple, que l'incomplétude entraîne l'incertitude, ou encore que l'imprécision entraîne des inconsistances. C'est aussi le cas lorsque l'on s'intéresse à l'incomplétude et à l'ignorance du décideur. Les travaux de recherche de Jean-Marc Tacnet [139] lui permettent de conclure "la sensibilité de la décision à l'imperfection de l'information dépend donc du contexte et des besoins. Ce qui est suffisant dans une configuration donnée ne le sera pas forcément pour tout type de décision."

Par ailleurs, les travaux de M.H, Masson [91] l'ont conduite à représenter les différentes imperfections des données (Fig : 1.2) sous forme graphique, ce qui permet une véritable compréhension des tenants et aboutissants de l'information. Ils lui ont également permis de montrer l'intrication entre les imperfections de données mais aussi à quel stade s'impose l'imperfection.

### 3 LA DÉCISION ET SON UNIVERS

Qu'y a-t-il de plus simple que de prendre une décision lorsque toute l'information disponible est connue? Ce cas de figure apparaît notamment lorsque le décideur (i.e. individu)<sup>5</sup> est considéré en univers certain. Dans ce type d'univers, chaque alternative (i.e. solutions)<sup>6</sup> engendre une conséquence unique.

Ceci étant, cela devient plus complexe lorsque l'individu (i.e. décideur) est placé dans un environnement risqué ou incertain. En effet, dans ce type d'environnement les conséquences dépendent d'évènements aussi appelés état de la nature. Ainsi, il est possible de décrire une solution (i.e. alternative) comme étant un couple (événement, conséquence). Les travaux de Knight [79] ont permis de montrer qu'il existe une distinction entre une décision en univers risqué et une décision en univers incertain. Afin d'apprécier cette distinction, nous reprendrons la célèbre illustration issue des travaux de Savage [120]. L'illustration peut être présentée de la manière suivante : supposons que nous souhaitons faire une omelette avec 4 œufs à partir d'un lot d'œufs pouvant être soit bon, soit mauvais. Nous avons déjà cassé 3 œufs et nous devons décider si nous utiliserons le dernier, sachant que les divers états de la nature sont soit bon, soit mauvais. Il existe 3 actions possibles :

1. Ne pas utiliser l'œuf ;
2. Utiliser directement l'œuf sans vérification ;
3. Effectuer une vérification avant de le mélanger aux autres.

La décision consiste selon l'exemple de Savage, à choisir entre ces trois alternatives possibles. Il est facile de remarquer que chacune de ces actions possède une conséquence

---

5. Il est à noter que chaque théorie a sa propre vision du preneur de décision. Ainsi, en recherche opérationnelle, celui-ci est considéré comme étant homogène et rationnel, raison pour laquelle on y emploie le terme individu au sens statistique. En théorie des jeux on appelle bien évidemment le preneur de décision un joueur. En théorie de l'aide à la décision multicritère le preneur de décision n'est pas soumis à la contrainte de rationalité ce qui implique une terminologie différente, il est ainsi nommé décideur. Tout au long de ce chapitre, nous mettrons en évidence les différences entre les deux axes de recherche au niveau terminologique.

6. En théorie des jeux puisque la recherche d'un optimum est avérée on parle de solutions, tandis qu'en théorie de l'aide à la décision on préfère utiliser le terme alternative ou action.

différente en fonction d'un état de la nature incertain. Dans le premier cas, il est possible de ne pas avoir assez d'omelette. Dans le second cas, il est possible de perdre la totalité de l'omelette. Enfin dans le troisième cas, il est possible de perdre du temps et de salir un bol supplémentaire. La différence entre un univers certain, risqué et incertain tient au fait que dans le premier on sait si l'œuf est bon ou mauvais. Dans le second, on connaît la probabilité affectée au fait que l'œuf soit bon ou mauvais. Dans le dernier univers, les probabilités sont dites subjectives voire inconnues. Les travaux d'Abdellaoui et Gonzales 2006 permettent de représenter les trois contextes dans lesquels une décision peut être prise Fig 1.3.

Bien évidemment, nous avons décidé pour la suite de nos travaux de travailler dans le cadre d'analyse d'univers incertain. Le choix de cette approche provient du fait que lorsqu'il est question de problèmes décisionnels dans le monde réel, les décisions se font au mieux dans un univers risqué, sinon dans un monde incertain. En effet :

- une décision en univers certain implique qu'une action a toujours la même conséquence et ce, quelque soit son état de nature. À notre sens, ce cas de figure est non représentatif d'un problème décisionnaire ;
- une décision en univers risqué implique qu'une action peut effectivement avoir plusieurs conséquences en fonction de l'apparition d'un évènement. Ceci étant, les évènements sont dotés d'une distribution de probabilité "objective" connue. Exemple : tous les cas se rapportant à la loterie (jeu du loto). En effet, le résultat de la décision consiste à choisir un numéro parmi une liste. Ceci dépend de la sortie de ce numéro lors du tirage, pour lequel il est possible de calculer sa probabilité. Ici encore, nous pensons que ce type de décision ne représente qu'un nombre de cas assez limité des problèmes décisionnaires réels puisque cet univers nécessite une information complète. Par ailleurs, les travaux de Von Neumann et Morgenstern [156] ont permis de définir un cadre axiomatique de la décision dans un univers risqué. Ils ont ainsi établi le modèle de relations de préférence, reposant sur la notion d'utilité espérée (concept abordé dans le chapitre relatif à la théorie des jeux) ;
- une décision en univers incertain implique aussi qu'une action peut avoir plusieurs

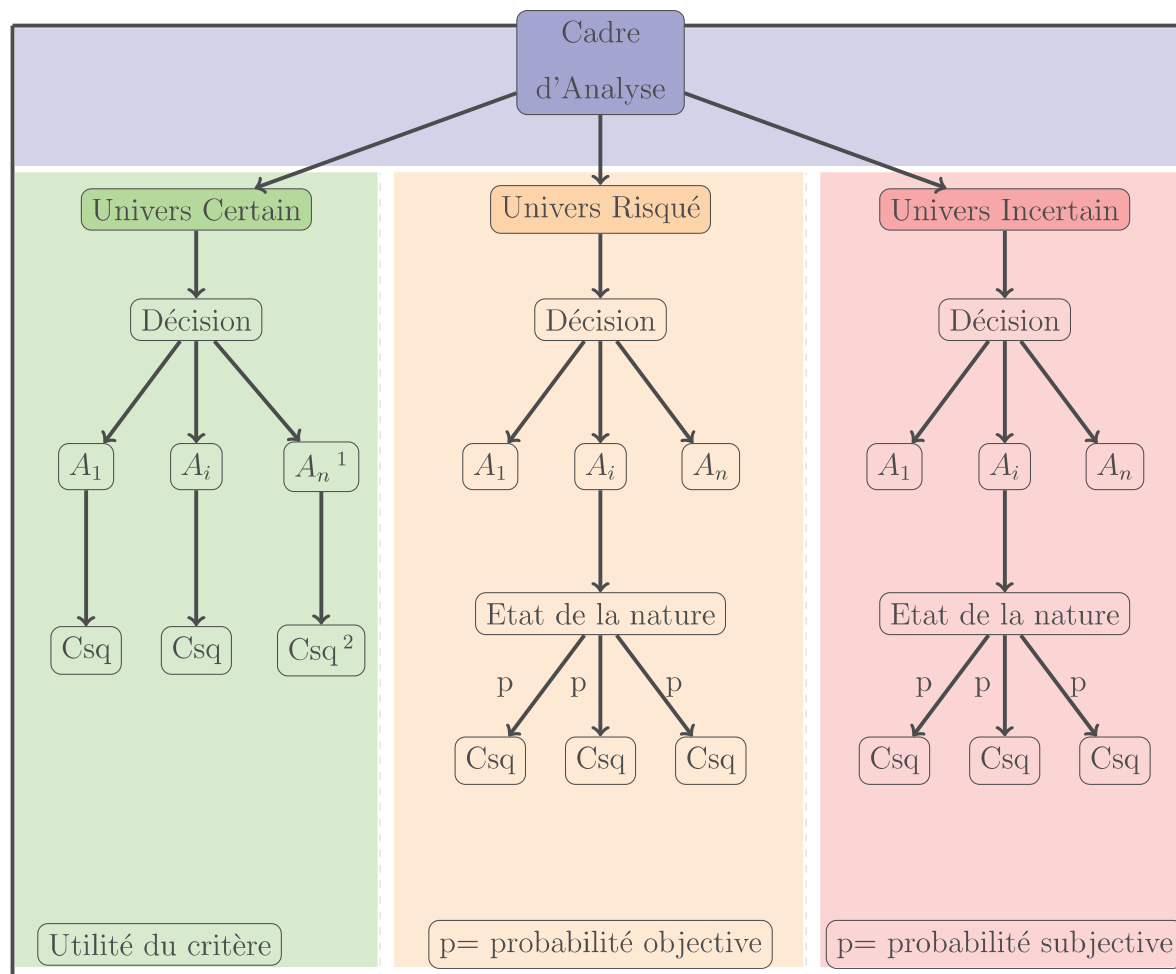


Fig. 1.3: Cadre d'analyse des différents univers dans lesquels sont prises les décisions (Abdellaoui et Gonzales). Légende : <sup>1</sup> A signifie ici action. <sup>2</sup> Csq signifie conséquence.

conséquences en fonction de l'apparition de l'évènement. Cependant, les distributions de probabilités sont considérées comme subjectives, c'est-à-dire dépendantes des croyances du décideur et ne sont pas, à priori, connues. En d'autres termes, la qualité de l'information fait défaut. Concernant les relations de préférences, Savage a proposé une utilité espérée subjective. C'est à notre sens ce type de représentation qui caractérise le mieux le problème décisionnaire en économie et en gestion.

Si l'univers incertain apparaît comme plus représentatif puisqu'il n'est pas nécessaire d'obtenir la totalité de l'information, il comporte aussi ses propres limites, notamment dues à certains paradoxes (Ellsberg, St Petersburg, ...) concernant l'utilité espérée. Ainsi, la

décision multicritère prend une place importante notamment grâce au fait qu'elle n'utilise pas le concept d'utilité espérée. Ceci étant, à partir des travaux de Matos [92], une correspondance entre la décision multicritère et la décision en univers incertain a été proposé par Rolland [110] voir la figure 3.

Incertain	Multicritère
Acte	Alternative
Etat de la nature	Critère
Conséquence	Valeur du critère
Préférence sur les conséquences	Préférence partielle
Préférence sur les actes	Préférence globale

Tab. 1.1: Correspondance entre la décision en univers incertain et en multicritère

Il est à noter qu'en théorie de l'aide à la décision, les préférences du décideur sur l'ensemble des actions sont liées aux préférences qu'il détient sur les conséquences possibles de ses actions. Pour plus de renseignements, le lecteur pourra se référer aux études de Ha Duong [66] concernant des approches comparées sur les notions d'incertitude et de risque.

Cette comparaison des divers univers dans lesquels un choix peut être pris, nous amène à réfléchir sur l'information dont le décideur (i.e. joueur) a besoin pour effectivement effectuer ses choix. Si elle est importante dans le cadre certain, elle est essentielle dans le cadre incertain et dans le cadre de la décision multicritère. Or, comme le rappelle Masson [91] “nulle information n'est parfaite”.

## 4 LES PROBABILITÉS COMME MESURE DE L'INCERTITUDE

### 4.1 Généralité

De manière assez naturelle, la théorie des probabilités constitue le cadre historique et classique de la prise en compte de l'incertitude, et cela implique notamment que la question de la paternité du concept de probabilité ne soit pas véritablement tranché (le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de Allo<sup>7</sup>). À ce titre, Laplace<sup>8</sup> écrira à ce sujet que :

“Depuis longtemps, il a été déterminé dans les jeux les plus simples, les rapports de chances favorables ou contraires aux joueurs : les enjeux et les paris étaient réglés d'après ces rapports. Mais personne avant Pascal et Fermat, n'avait donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul, et n'avait résolu des questions de ce genre un peu compliqués.”

La théorie des probabilités, dont nous montrerons l'utilité dans la partie consacrée à la recherche opérationnelle II et plus particulièrement lorsque nous traiterons de la théorie des jeux, souffre de nombreux biais lorsqu'il s'agit de représenter l'incertitude que nous avons défini lors de la section précédente, à savoir, l'incertitude subjective qui peut être par exemple liée aux phénomènes psychologiques (Bouchon-Meunier [29]).

L'objectif de cette section est de présenter ce concept et d'en déterminer les avantages et les limites.

### 4.2 Définition mathématique du concept de probabilité

La notion de probabilité intervient dès lors qu'il est question d'expérience aléatoire. En d'autres termes, pour les cas où il est impossible de déterminer le résultat avec une certitude, à priori. Notons  $\varepsilon$  l'expérience aléatoire. L'univers de  $\varepsilon$  qui correspond à l'ensemble des résultats possibles de  $\varepsilon$  est noté  $\Omega$ . Soit un espace probabilisable noté  $(\Omega, A)$ ,

---

7. Allo, E.(1984) L'émergence des probabilités. In : Actes de la recherche en sciences sociales. *Le savoir-voir*. Vol. 54 pp. 77-81.

8. P.S Laplace, Essai philosophique sur les probabilités 1821, Paris.

où  $A$  représente l'ensemble de tous les évènements pour lesquels il est possible d'affecter une probabilité. Ainsi, la probabilité devient une fonction qui permet de “capturer” la chance de réalisation d'un évènement.

Définition : Soit  $(\Omega, A)$ , un espace probabilisable. Une probabilité sur  $(\Omega, A)$ , est une application de  $P : A \rightarrow [0, 1]$  qui satisfait les trois axiomes suivants :

- $\forall a \in A : 0 \leq P(a) \leq 1$ . C'est-à-dire que les probabilités sont toujours positives et inférieures ou égales à 1 ;
- $P(\Omega) = 1$ ,  $\Omega$  représente l'évènement certain ;
- $\forall (a_i)_{i \in \mathbb{N}}, P(\cup_{i \in \mathbb{N}} a_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(a_i)$  ensemble dénombrable d'évènements disjoints.

La probabilité étant ainsi définie, le triplet  $(\Omega, A, P)$  est alors nommé espace probabilisé.

Quelques opérations sur les probabilités :

- $P(\emptyset) = 0$  ;
- $P(\bar{a}) = 1 - P(a)$  Cette opération implique que si l'on connaît la probabilité de  $A$ , il est possible d'en déduire son contraire.
- $P(a) \leq P(b)$  si  $a \subset b$  ;
- $P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)$ .

### 4.3 La pluralité du concept de probabilité

Le concept mathématique de probabilité a aussi intéressé les philosophes. Ceux-ci ont capté l'essence plurielle du concept de probabilité. Ce concept est ainsi décliné en deux parties et pour pouvoir établir cette déclinaison, les philosophes ont joué sur le vocable réflexif des sciences sociales (cf. Walliser [157]). En effet, ils ont distingué le modélisateur de l'acteur. Le modélisateur est la personne qui s'intéresse au système et qui a pour caractéristique d'être omniscient ; l'acteur appartient directement au système et sa vision n'étant que parcellaire, elle possède des incertitudes. De facto, la probabilité a été associée à un “attributeur” (modélisation ou acteur) et c'est de cette manière que la probabilité a été distinguée en probabilité objective (fréquentiste, physique) et en probabilité subjective

(bayésienne).

- Les probabilités objectives se définissent comme étant une estimation du modélisateur calculée à partir de la fréquence d'apparition du phénomène, l'exemple le plus connu étant le jeu de dés. Dans ce cas de figure, la fréquence d'obtenir un 6 est stable à un nombre d'essai inconnu. Il existe deux manières d'appréhender ces fréquences, qu'elles soient fréquentistes (Venn [149], Reichenbach[109]) ou de propension.
- Les probabilités subjectives sont établies sur les informations disponibles données par les acteurs au modélisateur ou tout simplement observées. Elles sont utilisées lorsqu'il n'existe pas de répétition dans le processus. La probabilité subjective fut initialement découverte par Bayes [13] (et Laplace [82]) qui distingua la probabilité a priori et a posteriori. La formule Bayésienne laisse donc place à l'intuition et non plus aux états de la nature. Les problèmes judiciaires ou décision médicale rentrent directement dans le champ d'application. Il existe 4 types d'interprétations des informations : l'interprétation de Laplace dite classique, l'interprétation subjective (De Finetti [49], Savage[120]), l'interprétation inductive initié par (Ramsey, Cox [43]) et l'interprétation logique (Carnap [36]).

#### 4.4 Limites à l'utilisation des probabilités

Le concept de probabilité permet de prendre en compte l'incertitude de type A. Cependant, il échoue dès lors que l'incertitude correspond à un état d'ignorance ou épistémique (Sentz and Ferson [126]). Il est possible de recenser au moins trois limites à l'utilisation du concept de probabilités pour représenter l'incertitude (Dubois et Prade [53]).

- La première est liée au fait que la probabilité est dans l'incapacité de distinguer une conclusion tirée d'un état de croyance incertain, d'une conclusion issue d'un état d'ignorance (Lardon, 2004). Concrètement, imaginons la situation où l'on demande à deux économistes leur avis sur le niveau d'inflation pour l'année  $n+1$  en leur donnant les cas possibles : l'inflation est plus forte que l'année  $n$  on note cette éventualité  $i_A$ , l'inflation est identique à l'année  $n$  cette éventualité est notée  $i_B$ , l'inflation est moins forte qu'à l'année  $n$  (désinflation) que l'on note

$i_C$ . Supposons que le premier économiste considère, au vu des différents indicateurs et de leurs incertitudes, que les trois cas ont autant de chance d'arriver. Ainsi,  $P_1(i_A) = P_1(i_B) = P_1(i_C) = 1/3$ . Le second économiste admet que malgré les données, il ignore totalement quelle valeur prendra l'inflation. Ainsi,  $P_2(i_A) = P_2(i_B) = P_2(i_C) = 1/3$ . Il est alors aisé de constater que la distinction entre l'ignorance et l'équiprobabilité n'est pas possible dans ce cas ;

- La seconde limite est liée au fait que l'utilisation de la probabilité ne permet pas de faire la différence entre l'information incomplète sur un événement et le cas où celui-ci est réellement aléatoire ;
- Enfin, il est possible que la réalité observée par les observateurs soit dans des référentiels différents. Ainsi, l'acteur fera la distinction de situations qui pourrait être ignorées par un autre. Cette limite a été montrée par Shafer [127] lors de ces travaux sur la théorie de l'évidence. Il est possible de créer un exemple adapté à l'évaluation d'une augmentation d'un déficit public dans le domaine de la santé. Considérons qu'à l'année  $n$ , un économiste statue sur l'augmentation d'un déficit public. Soit  $d$  représentant l'assertion qu'il y ait effectivement un déficit en augmentation et  $-d$  son contraire. En l'absence de connaissance, un premier acteur propose un référentiel  $R_1 = d, -d$  avec la distribution de probabilité associée  $P_1(d) = P_1(-d) = 1/2$ . Un second acteur quant à lui, propose de distinguer le déficit lié à la partie sécurité sociale et le déficit lié au fond de solidarité vieillesse. Il propose alors le référentiel  $R_2 = d_S, d_FSV, -d$  avec  $d_S$  le déficit lié à la sécurité sociale et  $d_FSV$  le déficit lié au fond de solidarité vieillesse. La distribution de probabilité sera alors  $P_2(d_S) = P_2(d_FSV) = P_2(-d) = 1/3$ .  $d$  représente ici l'union de  $d_S$  et  $d_FSV$  ce qui correspond à  $P_2(d_S) \cup P_2(d_FSV) = 2/3$ , alors que  $P_1(d) = 1/2$ . Les distributions de probabilités étant incompatibles, une même réalité n'est pas représentée de manière identique.

Une autre limite à l'utilisation des probabilités a été introduite par Bertrand [18] qui porte le nom de paradoxe de Bertrand. L'énoncé est très simple : il suffit de choisir au hasard une corde d'un cercle donné et d'estimer la probabilité que cette corde soit de longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle. Bertrand montrera qu'il

existe trois réponses différentes : une probabilité de  $1/2$ , une probabilité de  $1/3$ , une probabilité de  $1/4$ . Ces trois réponses sont valides et dépendent du protocole de choix de la corde.

## 5 CONCLUSION

Nous avons rappelé dans ce chapitre que l'information a une place centrale dans le processus de décision. Cette information en économie a longtemps été considérée comme parfaite et s'effectuant dans un environnement certain (cf. hypothèse de la concurrence pure et parfaite). Ceci étant, les travaux de Stigler ont montré que l'information ne pouvait être qu'imparfaite. Cette imperfection est caractérisée de différentes manières : elle peut-être incertaine (incertitude aléatoire ou épistémique), incomplète, imprécise ou inconsistante. En réalité, les différentes imperfections de l'information sont intriquées, de sorte qu'une information incomplète engendre nécessairement une incertitude. L'information étant à destination des individus, la caractérisation de ces individus apparaît importante. Un individu rationnel n'aura pas la même façon d'interagir avec l'information qu'un individu pour lequel cette hypothèse est levée. C'est en ce sens que la recherche opérationnelle et l'aide à la décision divergent. Tandis que les travaux en recherche opérationnelle nécessitent un individu rationnel, les travaux en aide à la décision n'utilisent pas ce concept ou au mieux, le concept de rationalité limitée [133]. Par suite, nous nous sommes intéressés à l'environnement dans lequel était l'individu, à savoir un environnement certain (à chaque action une et une seule conséquence est connue), un environnement risqué (une action a plusieurs conséquences soumises aux probabilités objectives) et un environnement incertain (une action a plusieurs conséquences soumises aux probabilités subjectives). Il a été possible d'établir une analogie entre un environnement incertain et un environnement multicritère. La caractérisation des différents types d'environnements nous a permis de mettre en évidence que le concept de probabilité est essentiel afin de prendre en compte l'incertitude.

Le concept de probabilité est en réalité un concept pluriel puisqu'il existe les probabi-

lités objectives (basées sur la fréquence d'apparition d'un phénomène) et les probabilités subjectives (qui sont établies sur l'information dont le décideur dispose). Nous avons mis en avant les limites du concept de probabilité, notamment le fait qu'il ne permet pas de distinguer une conclusion tirée d'une croyance d'une conclusion issue d'un état d'ignorance, ou que la réalité observée soit différente d'un individu à l'autre.

À partir de ces conclusions, il apparaît évident qu'un outil différent doit être mis en place afin de capter les différentes formes d'imperfections de l'information. Dans les faits, c'est le cas depuis 1965 grâce aux travaux de L.A. Zadeh [160] concernant la théorie des ensembles flous que nous allons étudier dans le prochain chapitre.

## 2. UNIVERS INCERTAIN ET THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS

*“L’incertitude n’est pas dans les choses mais dans notre tête : l’incertitude est une méconnaissance.”*

JACQUES BERNOUILLI<sup>1</sup>

---

### Sommaire

---

<b>1</b>	INTRODUCTION . . . . .	<b>38</b>
<b>2</b>	THÉORIE DES POSSIBILITÉS . . . . .	<b>39</b>
<b>3</b>	UNIVERS INCERTAIN ET THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS . . . . .	<b>41</b>
3.1	Formalisation d’un sous-ensemble flou . . . . .	41
3.2	Caractéristiques d’un sous-ensemble flou . . . . .	42
3.2.1	Support et hauteur . . . . .	43
3.2.2	Le noyau . . . . .	43
3.3	Variable linguistique . . . . .	43
<b>4</b>	INTRODUCTION DU NOMBRE FLOU PARAMÉTRÉ DE TYPE C-SHAPE .	<b>45</b>
<b>5</b>	INTRODUCTION DU NOMBRE FLOU PARAMÉTRÉ DE TYPE MULTI-C-SHAPE . . . . .	<b>53</b>
5.1	Multi-C-Shape . . . . .	53
5.2	Introduction de la S-Shape . . . . .	54
<b>6</b>	CONCLUSION . . . . .	<b>56</b>

---

---

1. *Ars Conjectandi.*



## 1 INTRODUCTION

La théorie de la logique floue fut introduite par Zadeh en 1965 [160] (qui provient de ses travaux sur les sous-ensembles flous), afin de pallier aux défaillances du concept de probabilité, que nous avons mis en évidence dans le chapitre précédent et qui porte notamment sur la représentation de l'incertitude et de l'imprécision de la langue naturelle. Ainsi, Zadeh établira une critique dans *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decisions processes*, [IEEE transactions 1973] qui s'établit comme suit :

“Au fur et à mesure que la complexité d'un système augmente, notre habilité à formuler de manière précise et significative son comportement diminue, jusqu'à une limite au-delà de laquelle la précision et la signification deviennent des caractéristiques pratiquement mutuellement exclusives.”

Il ne remet pas en cause l'aspect formel de la théorie des ensembles mais induit que cet aspect peut être jugé inadapté pour représenter la réalité. La théorie des ensembles flous doit être comprise comme une généralisation de la théorie des ensembles classiques, permettant de représenter un peu plus fidèlement la réalité que ce que ne saurait faire cette dernière. C'est pourquoi elle est nommée aussi “logique linguistique”, car des valeurs de vérités sont des mots du langage courant (vrai, presque vrai, totalement vrai, généralement, parfois, presque toujours, etc.).

L'objectif de la logique floue qui recoupe la théorie des ensembles flous de Zadeh et la théorie des possibilités, (Zadeh[161], Dubois et Prade[52]) est précisément de capturer (de l'anglais *to capture*) l'incertitude et l'imprécision du monde réel (Kaufman 1973) ainsi que de représenter les connaissances imprécises et les raisonnements approximatifs (Gacogne [60]).

Ce chapitre est construit de la manière suivante : nous présentons dans la section 2 les concepts de base de la théorie des possibilités, qui sont utilisés notamment lors de la partie concernant la recherche opérationnelle (Partie II). Dans la section 3, nous présentons la théorie des ensembles flous et nous concentrons nos travaux sur la caractérisation d'un

nombre flou. Ceci nous permet d'établir au cours de la section 4 notre contribution, en apportant un nombre flou paramétré que nous nommons C-Shape. Ce nombre flou paramétré correspond à une généralisation d'un nombre flou classique auquel nous apportons une structure convexe. Ce nouvel objet mathématique nous est utile tout au long de nos travaux, notamment lors de la partie sur la recherche opérationnelle (Partie II) et plus précisément, au cours du chapitre 5 d'une part, puis, lors de la partie sur l'aide à la décision Partie III et plus précisément lors des chapitres 6 et 7. Enfin, lors de la section 5 nous introduisons une extension du nombre flou paramétré C-Shape nommé multi-C-Shape. Cette extension permet en réalité de caractériser un objet mathématique, dont nous avons recours au chapitre 6, nommé S-Shape.

## 2 THÉORIE DES POSSIBILITÉS

La théorie des ensembles flous concerne, comme nous le verrons dans la section suivante, l'appartenance d'éléments à des ensembles et correspond à la quantification et à la manipulation de l'imprécision des mesures. La théorie des possibilités se concentre quant à elle, en une extension de la logique classique qui ne repose pas sur le cadre probabiliste et qui représente les informations imparfaites telles que nous les avons définies au chapitre 1. Ainsi, elle permet la quantification et la manipulation de l'incertitude (cf. Masson [91]).

Soit  $X$  l'ensemble de référence et  $A$  l'ensemble des éléments de  $X$ . On associe à chaque élément de  $A$  une mesure de confiance  $Co$  mesurant à quel point l'élément est possible (Bouchon-Meunier [29]). Cette mesure est définie sur  $P(X)$  à valeur dans  $[0, 1]$  et telle que pour tout  $A_i \in P(X)$  :

$$\begin{cases} Co(\cup_{i=1,2,\dots} A_i) \geq \sup_{1,2,\dots} Co(A_i) \\ Co(\cap_{i=1,2,\dots} A_i) \leq \inf_{1,2,\dots} Co(A_i) \end{cases} \quad (2.1)$$

Remarques :

- Si  $Co = 1$ , alors l'évènement est considéré comme certain, ce qui correspond à la mesure de nécessité.

- Si  $Co = 0$ , alors l'évènement est considéré comme impossible, ce qui correspond à la mesure de la possibilité.
- $\forall (A, B) \in P(X)^2$ , on a  $A \subseteq B \implies Co(A) \leq Co(B)$  ?

À partir de cette caractérisation, il est possible de définir les mesures de possibilité  $\Pi$  et de nécessité  $N$  qui sont en réalité les cas limites de  $Co$ . Ainsi, la mesure de possibilité qui caractérise dans quelle mesure l'élément  $A$  est possible, est donné par :

$$\begin{cases} \Pi(A) = 0 \iff A \text{ est impossible} \\ \forall (A, B) \in P(X)^2, \text{ on a } \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \end{cases} \quad (2.2)$$

La mesure de nécessité quant à elle, est donnée par :

$$\begin{cases} N(A) = 1 \iff A \text{ est certain} \\ \forall (A, B) \in P(X)^2, \text{ on a } N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)) \end{cases} \quad (2.3)$$

Remarque : il est possible de constater que la mesure de nécessité est une mesure duale de la possibilité. De manière triviale, un évènement  $A$  est certain si son contraire est impossible, ainsi :

$$\Pi(A) = 1 - N(\bar{A}) \quad (2.4)$$

Dans les cas où  $X$  est fini, une mesure de possibilité  $\Pi$  est caractérisée par une distribution de possibilités, c'est-à-dire une fonction  $\pi : X \longrightarrow [0, 1]$  telle que :

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega) \quad (2.5)$$

Il est possible de faire la correspondance avec la fonction d'appartenance de l'ensemble flou des éléments possibles pour la solution recherchée (Masson [91]). Il est par ailleurs possible de caractériser la mesure de nécessité :

$$N(A) = \inf_{\omega \in \bar{A}} (1 - \pi(\omega)) \quad (2.6)$$

À partir de l'information disponible, tout ce qui peut être déduit correspond au degré de nécessité. Autrement dit, c'est le degré de certitude attribué à la concrétisation d'un

évènement. Par contre, le degré de possibilité lui, mesure le degré de l'évènement qui est susceptible de se réaliser. La mesure de nécessité rend compte de l'incertitude sur les différentes propositions définies dans l'espace des possibles. C'est un degré de confiance sur l'information imparfaite et partielle. L'ignorance correspond à la situation où  $N(A) = 0$ .

### 3 UNIVERS INCERTAIN ET THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS

L'objet de cette section est de présenter les ensembles flous et plus particulièrement les nombres flous.

#### 3.1 Formalisation d'un sous-ensemble flou

Dans le cadre de la théorie classique, il n'existe que deux situations acceptables pour un élément. Soit l'assertion représentant la situation est fausse soit elle est vraie : on est dans une logique Booléenne. Zadeh [160] a permis l'émergence de la notion d'appartenance pondérée. Celle-ci permet de graduer l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble. En d'autres termes, un élément peut appartenir à un sous-ensemble plus ou moins fortement.

Soit un ensemble de référence  $X$  et  $x$  un élément quelconque de  $X$ . Un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est défini par la fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  telle que :

$$\begin{cases} \mu_A : X \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow \mu_A(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

La fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  détermine le degré d'appartenance d'un élément  $x$  à  $A$ . Il existe donc trois cas :

- lorsque  $\mu_A(x) = 0$ , alors  $x$  n'appartient pas à l'ensemble ;
- lorsque  $0 < \mu_A(x) < 1$  alors,  $x$  appartient partiellement à l'ensemble ;
- lorsque  $\mu_A(x) = 1$   $x$  appartient totalement à l'ensemble

Il est aisé de constater que lorsque  $\mu_A(x)$  ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, alors  $A$  devient un sous-ensemble classique de  $X$  de sorte que :

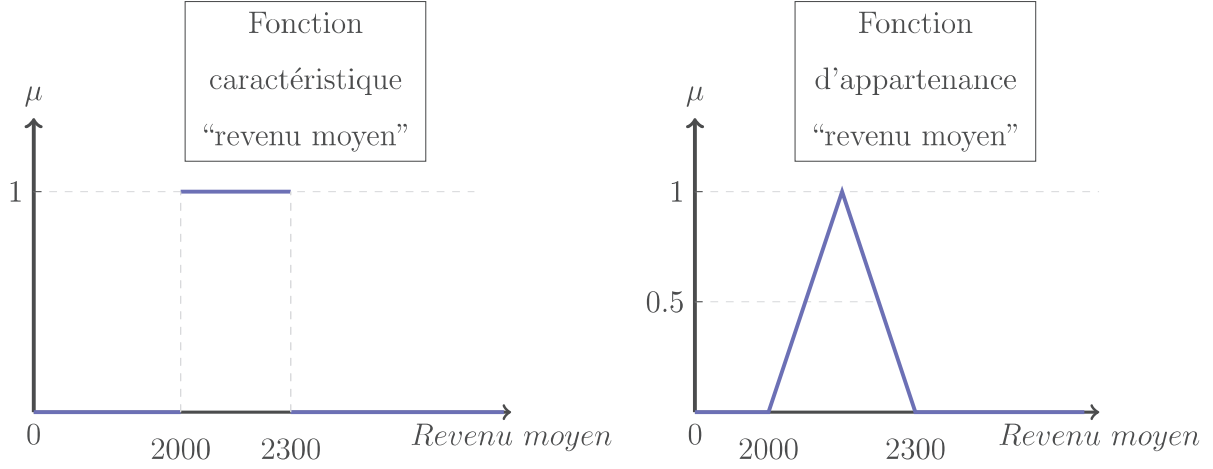


Fig. 2.1: Représentation d’une fonction caractéristique (droite) et d’une fonction d’appartenance de type triangulaire (gauche, la forme est adoptée arbitrairement)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \quad (3.2)$$

Ainsi, la fonction d’appartenance d’un ensemble flou peut être apparentée à la fonction caractéristique sur un ensemble classique.

Exemple 3.1.1: Supposons que nous cherchons à définir l’ensemble des personnes possédant un revenu moyen. En logique classique on conviendra que le revenu moyen brut pour l’ensemble “CSP : employé” se situe dans l’intervalle  $[2000 ; 2300]$ . La fonction caractéristique de l’ensemble (Fig : 2.1) permet d’attribuer “0” pour les revenus en-dehors de l’intervalle et “1” pour les revenus dans l’intervalle. L’ensemble flou quant à lui, est défini par sa fonction d’appartenance et permet d’attribuer n’importe quelle valeur dans l’intervalle  $[0,1]$ , avec un degré d’appartenance différent pour chaque taille en-dehors de l’intervalle (sauf aux extrémités où 0 est attribué).

### 3.2 Caractéristiques d’un sous-ensemble flou

Il existe plusieurs éléments permettant de définir un nombre flou (Fig. 2.2) (Bouchon-Meunier [29], Bouchon-Meunier & Marsala[30] ; Gacône [60]). Celui-ci est totalement défini

par sa fonction d'appartenance.

### 3.2.1 Support et hauteur

Le support d'un ensemble flou de  $A$  de  $X$  est noté  $Supp(A)$  et défini tel que :

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (3.3)$$

Le support(A) correspond donc à la partie de  $X$  pour laquelle  $\mu_A(x)$  est non nulle.

La hauteur d'un ensemble flou  $A$  de  $X$  est notée  $h(A)$  et définie telle que :

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad (3.4)$$

La hauteur d'un ensemble flou correspond donc à la valeur maximale de la fonction d'appartenance.

### 3.2.2 Le noyau

Le noyau d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , noté  $noy(A)$  est tel que :

$$noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\} \quad (3.5)$$

Ainsi, le noyau correspond à la partie de  $X$  pour laquelle la fonction d'appartenance vaut 1.

Le sous-ensemble ordinaire  $A_\alpha$  de  $X$  associé à  $A$  pour le seuil  $\alpha$ , est tel que :

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (3.6)$$

avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Cela correspond au sous-ensemble de niveau  $\alpha$  associé à  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartient à  $A$  avec un degré au moins égal à  $\alpha$ .

## 3.3 Variable linguistique

L'intérêt de définir des sous-ensembles est leur capacité à représenter des variables linguistiques. Considérons par exemple la variable  $V$  "taux d'inflation". Soit  $X$  la plage

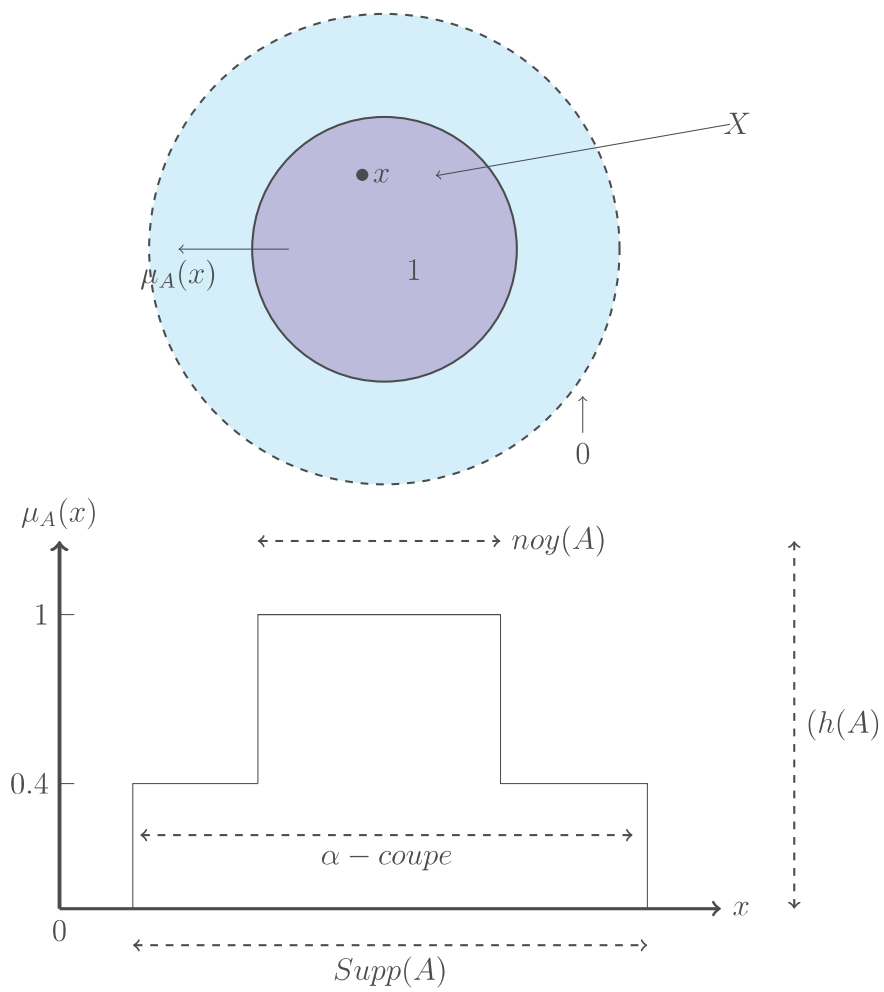


Fig. 2.2: Représentation d'un ensemble flou et de sa fonction d'appartenance à  $x$

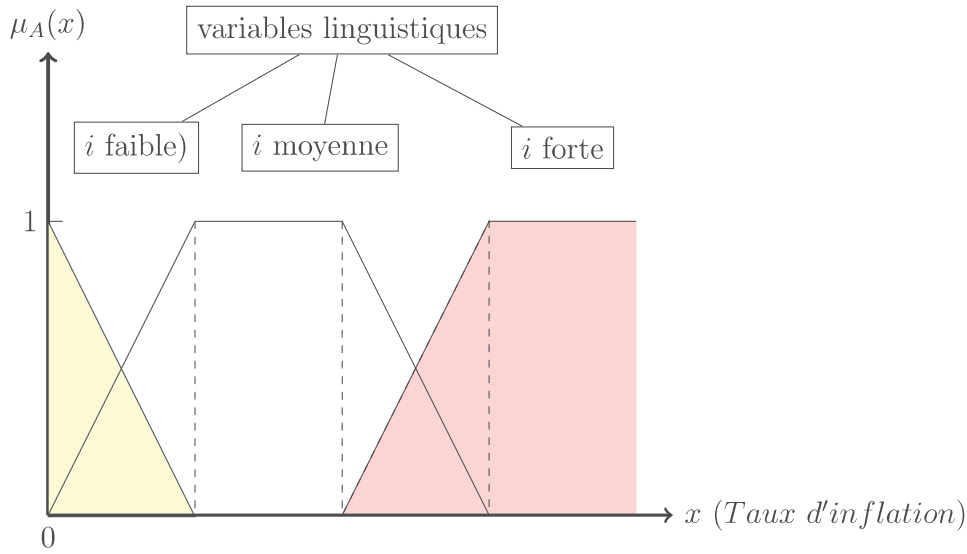


Fig. 2.3: Représentation d'une variable linguistique par un sous-ensemble flou

de valeur que peut prendre le taux d'inflation et  $T_V$  un ensemble fini de sous-ensembles flous. Une variable linguistique correspondra alors au triplet  $(V, X, T_V)$  (Fig : 2.3). La variable linguistique permet donc de quantifier des aspects flous du langage. Cependant, il est à noter qu'une variable linguistique est dépendante du décideur. Par exemple, un économiste peut juger forte une inflation à 3%, tandis qu'un autre la jugera forte qu'à partir de 4%.

#### 4 INTRODUCTION DU NOMBRE FLOU PARAMÉTRÉ DE TYPE C-SHAPE

Il a été montré qu'un ensemble flou dépend entièrement de la forme de sa fonction d'appartenance. Il est possible de trouver différentes formes d'ensembles flous dépendant de l'application qui en est faite. Ainsi, il existe les nombres triangulaires, les nombres trapézoïdaux, les ensembles de Gauss. Dans nos travaux, nous avons été amené à travailler avec ce que nous avons appelé des nombres flous paramétrés. Ces nombres flous permettent de capturer la subjectivité du décideur face à l'incertitude de l'information dont il dispose et ainsi de l'univers incertain dans lequel la décision est prise. Dans ce qui suit, nous allons montrer qu'un nombre flou paramétré est en réalité une généralisation d'un nombre flou

triangulaire mais aussi d'un ensemble classique.

**Définition 4.0.1:** Soit  $\mu_\rho(x)$  la fonction paramétrique définie comme suit :

$$\mu_\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \left(1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho)\right)^{\frac{1}{\rho}} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x = b \\ \left(1 - \frac{1}{|c-b|^\rho} \times |b-x|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{si } x > c \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $\rho$  est un paramètre compris entre  $]0; \infty[$ .

**Lemme 4.0.2:** La fonction  $\mu_\rho(x)$  est continue sur  $[a, b]$ , monotone et sa limite est telle que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mu_\rho(x) = 1 \text{ and } \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_\rho(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[$$

*Preuve :*

— **Hypothèse de continuité.** Il doit être établi que  $\mu_\rho(x)$  est continue pour tout  $x$  sur  $[a, b]$ . De manière évidente, il peut être observé que :  $\lim_{x \rightarrow a} \mu_\rho(x) = 0$ , de plus :  $\lim_{x \rightarrow a} \mu_\rho(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho)\right)^{\frac{1}{\rho}} = 0$ . Par conséquent,  $\mu_\rho(x)$  est continue à partir de  $a$ . De manière similaire, on obtient que  $\lim_{x \rightarrow b} \mu_\rho(x) = \lim_{x \rightarrow b} \left(1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho)\right)^{\frac{1}{\rho}} = 1$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow b} \mu_\rho(x) = 1$ ,  $\mu_\rho(x)$  est continue, cela montre que  $\mu_\rho(x)$  satisfait la condition de continuité.

— **Hypothèse de monotonie.**

Montrons à présent l'hypothèse selon laquelle  $\mu_\rho(x)$  est monotone. Considérons  $x, y \in [a, b]$ , tel que  $x < y$  et  $\rho \in ]0; \infty[$ . Par conséquent,  $|x-b| > |y-b| \Leftrightarrow |x-b|^\rho > |y-b|^\rho \Leftrightarrow (-|x-b|^\rho) < (-|y-b|^\rho) \Leftrightarrow \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho) < \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|y-b|^\rho)$ . Effectivement,  $\frac{1}{|b-a|^\rho}$ , est une constante positive et par conséquence,  $1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho) < 1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|y-b|^\rho)$ . À présent, appliquons aux deux cotés de l'inégalité la fonction suivante :  $h(x) = x^{\frac{1}{\rho}}$ . On remarque facilement que  $h(x)$  est une fonction croissance. Par conséquent, on obtient  $h(1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho)) <$

$h(1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|y-b|^\rho) \Leftrightarrow [1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho)]^{\frac{1}{\rho}} < [1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|y-b|^\rho)]^{\frac{1}{\rho}} \Leftrightarrow \mu_\rho(x)(x) > \mu_\rho(y)$ . Il a été montré que  $\forall x, y \in [a, b]$  tel que  $x < y$  et  $\rho \in ]0; \infty[$ , on obtient donc  $\mu_\rho(x) < \mu_\rho(y)$ . Ainsi, la fonction  $\mu_\rho(x)$  est croissance et monotone.

— **Hypothèse sur les limites.**

Prouvons à présent les hypothèses suivantes :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} [1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho)]^{\frac{1}{\rho}} = 1, \forall x \in ]a, b[$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [1 + \frac{1}{|b-a|^\rho} \times (-|x-b|^\rho)]^{\frac{1}{\rho}} = 0, \forall x \in ]a, b[$$

Pour tout  $x$  dans  $]a, b[$ , on a  $-\frac{|x-b|}{b-a} < 1$ . Notons  $c = -\frac{|x-b|}{b-a}$  et la fonction  $\mu_\rho(x)$  est décrite comme suit :

$$\mu_\rho(x) = (1 + c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

Les limites de  $\mu_\rho(x)$ , quand  $\rho \rightarrow \infty$ , sont données par :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (1 + c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

Ainsi,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln(1 + c^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \ln(1 + c^\rho)$$

On en déduit immédiatement :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \ln(1 + c^\rho) = 0$$

Il en résulte :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \exp(\ln \mu_\rho(x)) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \exp(\ln(1 + c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}) = 1.$$

La limite  $\mu_\rho(x)$  quand  $\rho \rightarrow 0$  est donnée par :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (1 + c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

Ainsi :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \ln(1 + c^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \ln(1 + c^\rho)$$

On en déduit :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \ln(1 + c^\rho) = -\infty$$

De fait, on obtient :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \exp(\ln \mu_\rho(x)) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \exp(\ln(1 + c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}) = 0. \square$$

**Corollaire 4.0.3:** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mu_\rho(x) = H(x - a) \text{ and } \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_\rho(x) = H(x - b)$$

De manière symétrique, il est possible de montrer que :

**Lemme 4.0.4:** *La fonction  $\mu_\rho(x)$  est continue et monotone sur  $[b, c]$ . De plus, elle est telle que :*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mu_\rho = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_\rho = 0 \quad \forall x \in ]b, c[.$$

*Preuve :*

— **Hypothèse de continuité.** Il doit être établi que  $\mu_\rho(x)$  est continue pour tout  $x$  sur  $[b, c]$ . De manière évidente, nous observons que :  $\lim_{x \rightarrow b} \mu_\rho(x) = 1$ , de plus :  $\lim_{x \rightarrow b} \mu_\rho(x) = \lim_{x \rightarrow b} (1 - \frac{1}{|c-b|^\rho} \times |b-x|^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = 1$ . Par conséquent,  $\mu_\rho(x)$  est continue à partir de  $b$ . De manière similaire, on obtient que  $\lim_{x \rightarrow c} \mu_\rho(x) = \lim_{x \rightarrow c} (1 - \frac{1}{|c-b|^\rho} \times |c-x|^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = 0$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow c} \mu_\rho(x) = 0$ , par conséquent  $\mu_\rho(x)$  est continue. Cela montre que  $\mu_\rho(x)$  satisfait la condition de continuité.

— **Hypothèse de monotonie.**

Montrons à présent l'hypothèse selon laquelle  $\mu_\rho(x)$  est monotone sur  $[b, c]$ . Considérons  $x, y \in [a, b]$ , tel que  $x < y$  et  $\rho \in ]0; \infty[$ . Par conséquent,  $|b-x| < |b-y| \Leftrightarrow |b-x|^\rho < |b-y|^\rho \Leftrightarrow -\frac{1}{|c-b|^\rho} \times |b-x|^\rho > -\frac{1}{|c-b|^\rho} \times |b-y|^\rho$  puisque  $-\frac{1}{|c-b|^\rho}$  est une constante positive. Par conséquence,  $1 - \frac{1}{|c-b|^\rho} \times |b-x|^\rho > 1 - \frac{1}{|c-b|^\rho} \times |b-y|^\rho$ . À présent, appliquons aux deux cotés de l'inégalité la fonction suivante :  $h(x) = x^{\frac{1}{\rho}}$ . On remarque facilement que  $h(x)$  est une fonction décroissance. Par conséquent, nous

obtenons  $h(1 - \frac{1}{|b-a|^\rho} \times |a-x|^\rho) > h(1 - \frac{1}{|b-a|^\rho} \times |a-y|^\rho) \Leftrightarrow [1 - \frac{1}{|b-a|^\rho} \times |a-x|^\rho]^{\frac{1}{\rho}} > [1 - \frac{1}{|b-a|^\rho} \times |a-y|^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \Leftrightarrow \mu_\rho(x) > \mu_\rho(y)$ . Nous avons montré que  $\forall x, y \in [a, b]$  tel que  $x < y$  et  $\rho \in ]0; \infty[$ . On obtient  $\mu_\rho(x) > \mu_\rho(y)$ . Ainsi, la fonction  $\mu_\rho(x)$  est décroissante et monotone.

— **Hypothèse sur les limites.** Prouvons à présent les hypothèses suivantes :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} [1 - \frac{1}{|c-b|^\rho} * |b-x|^\rho]^{\frac{1}{\rho}} = 1, \forall x \in ]b, c[$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [1 - \frac{1}{|c-b|^\rho} * |b-x|^\rho]^{\frac{1}{\rho}} = 0, \forall x \in ]b, c[$$

Pour tout  $x$  appartenant à  $]b, c[$ , nous obtenons  $\frac{|b-x|}{c-b} < 1$ . Notons  $c = \frac{|b-x|}{c-b}$ , et prenons  $\mu_\rho(x)$  comme étant une fonction décrite par :

$$\mu_\rho(x) = (1 - c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

La limite de  $\mu_\rho(x)$  lorsque  $\rho \rightarrow \infty$  est donnée par :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (1 - c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

Ainsi :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln(1 - c^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \ln(1 - c^\rho)$$

Nous pouvons immédiatement observer que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \ln(1 - c^\rho) = 0$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \exp(\ln \mu_\rho(x)) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \exp(\ln(1 - c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}) = 1.$$

La limite de  $g_\rho(x)$  lorsque  $\rho \rightarrow 0$  est donnée par :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (1 - c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \ln(1 - c^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \ln(1 - c^\rho)$$

Nous observons immédiatement que :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \mu_\rho(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \ln(1 - c^\rho) = -\infty$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \exp(\ln \mu_\rho(x)) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \exp(\ln(1 - c^\rho)^{\frac{1}{\rho}}) = 0. \square$$

Remarque : il est possible de montrer que lorsque  $\rho \rightarrow \infty$ , nous obtenons la fonction suivante : La fonction Heaviside  $H : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

**Corollaire 4.0.5:** *Nous obtenons ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f_\rho = 1 - H(x - b) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} f_\rho = 1 - H(x - a).$$

**Définition 4.0.6:** *La fonction  $\mu_\rho(x)$  définie sur  $[0, \infty]$  est un nombre flou possédant une hauteur  $h(x) = 1$ , un support  $\text{supp} = [a, c]$  et un noyau  $\text{noy}(\mu_\rho(x)) = b$ .*

À partir de ce corollaire, il nous est ainsi possible de caractériser par notre fonction paramétrée des nombres “crisp”<sup>2</sup> qui sont utilisés dans les ensembles classiques (Fig :2.4).

Grâce à cette fonction, nous formulons non seulement un nombre “crisp” mais également un nombre flou triangulaire, un nombre flou trapézoïdal et un nombre flou de type Gauss. En cela, nous pensons pouvoir généraliser l’utilisation d’un nombre flou. Pour cela, il est nécessaire de faire varier le paramètre  $\rho$  (cf. figure 2.4).

L’intérêt d’avoir construit cet outil provient du fait que dans les travaux que nous présenterons dans les chapitres suivants nous pourrions endogénéiser, grâce au paramètre  $\rho$ , la prise de décision des individus ne pouvant détenir au mieux qu’une rationalité limitée. En effet, l’utilisation du paramètre  $\rho$  permettra de capter la sensibilité d’un décideur face à la notion de préférence et d’indifférence. Nous pourrions également considérer des agents

---

2. A notre connaissance il n’existe pas de réelle traduction pour cette formulation.

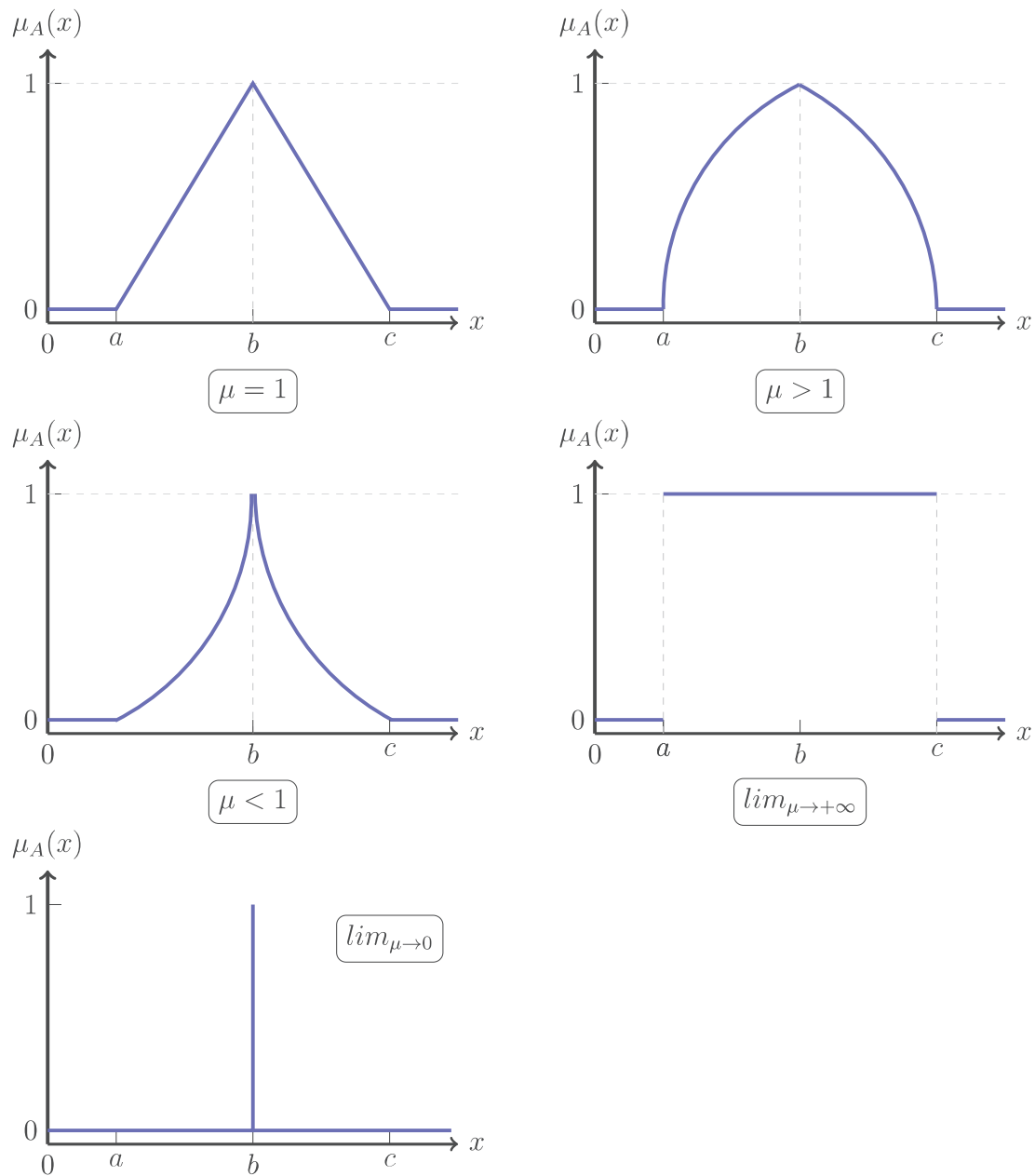


Fig. 2.4: Représentation des différentes formes d'un nombre flou paramétré

hétérogènes en fonction de ce paramètre et apprécier les interactions des choix décisionnels de ces différents individus.

Des travaux ont été réalisés en ce sens notamment pour capter l'aversion au risque lorsque la variable linguistique étudiée par le nombre flou est le risque. Ainsi, il est possible de supposer qu'un individu neutre face au risque pondère le  $\rho$  d'une valeur égale à un. Si celui-ci est riscophobe, naturellement le  $\rho$  sera inférieur à un. À contrario, s'il est riscophile, le paramètre sera supérieur à un. En réalité, il est possible de considérer le  $\rho$  comme étant lui-même un nombre flou concernant un prédicat. Ainsi, il est possible par exemple de caractériser différentes variations du  $\rho$  selon les divers prédicats suivants :

Exemple 4.0.7: Considérons que nous cherchons à caractériser le niveau de risque que le décideur est prêt à prendre, en lui proposant les valeurs arbitrairement choisies de  $\rho$  suivantes :

- Etre extrêmement riscophobe entraîne une mesure sur  $\rho \rightarrow 0$  ;
- Etre très fortement riscophobe entraîne une mesure sur  $\rho = 0,2$  ;
- Etre fortement riscophobe entraîne une mesure sur  $\rho = 0,4$  ;
- Etre très riscophobe entraîne une mesure sur  $\rho = 0,6$  ;
- Etre riscophobe entraîne une mesure sur  $\rho = 0,8$  ;
- Etre neutre entraîne une mesure sur  $\rho = 1$  ;
- Etre riscophile entraîne une mesure sur  $\rho = 1,5$  ;
- Etre très riscophile entraîne une mesure sur  $\rho = 2$  ;
- Etre fortement riscophile entraîne une mesure sur  $\rho = 4$  ;
- Etre très fortement riscophile entraîne une mesure sur  $\rho = 6$  ;
- Etre extrêmement riscophile entraîne une mesure sur  $\rho = 8$ .

La question qui peut être posée au décideur devient alors : à quelle classe appartenez vous ?

Remarques :

- Il est possible de constater que les valeurs attribuées à  $\rho$  sont arbitraires et dépendent de celui qui établit le modèle.
- Il doit être noté qu'en réalité, la fonction  $\mu_\rho(x)$  est égale à 1 lorsque  $\rho$  prend une valeur finie et non pas l'infini comme nous avons pu le montrer plus tôt. de sorte que la fonction converge rapidement vers 1.

## 5 INTRODUCTION DU NOMBRE FLOU PARAMÉTRÉ DE TYPE MULTI-C-SHAPE

### 5.1 Multi-C-Shape

Nous proposons dans cette section de construire un nombre flou paramétré basé sur le nombre flou  $C - Shape$ . Nous construisons un nombre flou qui sera défini par morceau. Chaque morceau sera construit à partir de la forme  $C - Shape$ . Nous considérons tout d'abord, une suite strictement croissante de nombre  $a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n$ . Par ailleurs, nous considérons également deux suites  $\mu_{-n}, \dots, \mu_0$  et  $\mu_0, \dots, \mu_n$  de nombres positifs respectivement, strictement croissante et décroissante, telles que  $\mu_{-n} = 0$ ,  $\mu_0 = 1$  et  $\mu_n = 0$ . Formellement, nous obtenons la forme suivante où  $\mu_i^{\rho_i}(x)$ . La fonction paramétrique est définie comme suit :

$$\mu_i^{\rho_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a_{-n} \\ \left( \mu_{i-1}^{\rho_i} + \frac{(a_{i-1}^{\rho_i} - x^{\rho_i})}{(a_{i-1}^{\rho_i} - a_i^{\rho_i})} \times (\mu_i^{\rho_i} - \mu_{i-1}^{\rho_i}) \right)^{\frac{1}{\rho_i}} & \text{si } a_i < x \leq a_{i+1}, \quad i = -n+1, \dots, n \\ 0 & \text{si } x > a_n \end{cases} \quad (5.1)$$

Où pour chaque  $i$ ,  $\rho_i$  est un paramètre compris entre  $]0; \infty[$  pour  $i = -n+1, \dots, 0, \dots, n$ . De plus,  $\ln \rho_i \times \ln \rho_{i+1} < 0$  pour  $i = -n+1, \dots, 0, \dots, n-1$ .

## 5.2 Introduction de la S-Shape

À partir du nombre flou multi-C-Shape (Eq.5.1), il est possible de construire un nombre flou nommé S-Shape, qui consistera en une simplification de la Multi-C-Shape. En effet, dans le cas de la S-Shape nous considérons qu'un seul point d'inflexion particulier pour lequel le degré de crédibilité est égal à  $\frac{1}{2}$ . Ce nombre flou représenté par 5.2 présente l'intérêt de capturer des changements dans la prise en compte de l'incertitude 2.5. Nous évoquerons ici, quelques représentations possible de la S-Shape pour des cas limites (cf. Fig 2.6, Fig 2.7)

Considérons :

$$— i = (-2, -1, 0, 1, 2,);$$

$$— \mu_{-2} = 0$$

$$— \mu_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$— \mu_0 = 1;$$

$$— \mu_1 = \frac{1}{2}$$

$$— \mu_2 = 0$$

$$\mu_i^{\rho_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a_{-2} \\ \left( \frac{(a_{-2}^{\rho_i} - x^{\rho_i})}{(a_{-2}^{\rho_i} - a_{-1}^{\rho_i})} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} & \text{si } a_{-2} < x \leq a_{-1} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = a_{-1} \\ \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho_i} + \frac{(a_{-1}^{\rho_i} - x^{\rho_i})}{(a_{-1}^{\rho_i} - a_0^{\rho_i})} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho_i}\right) \right)^{\frac{1}{\rho_i}} & \text{si } a_{-1} < x \leq a_0 \\ 1 & \text{si } x = a_0 \\ \left( 1 + \frac{(x^{\rho_i} - a_0^{\rho_i})}{(a_1^{\rho_i} - a_0^{\rho_i})} \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\rho_i} - 1\right) \right)^{\frac{1}{\rho_i}} & \text{si } a_0 < x \leq a_1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = a_1 \\ \left( \frac{(a_2^{\rho_i} - x^{\rho_i})}{(a_2^{\rho_i} - a_1^{\rho_i})} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} & \text{si } a_1 < x < a_2 \\ 0 & \text{si } x > a_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

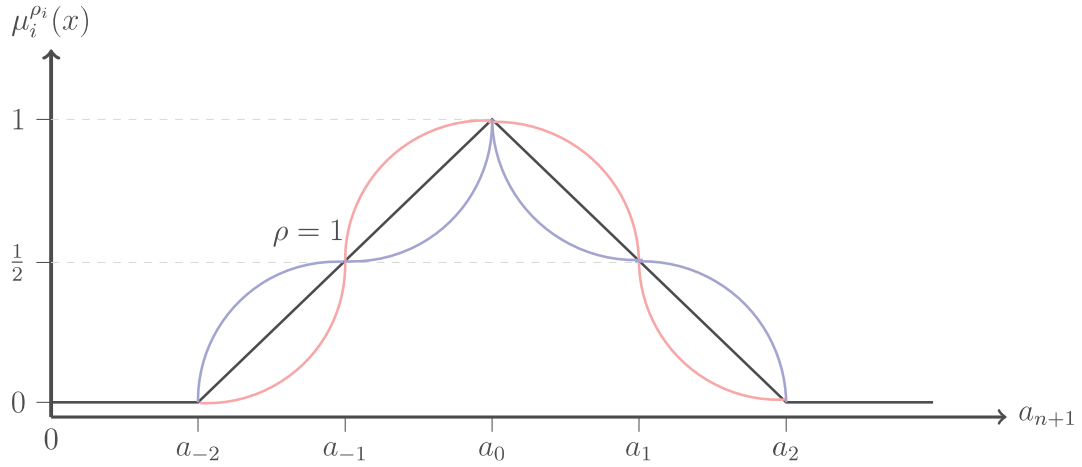


Fig. 2.5: Représentation graphique du nombre flou S-Shape lorsque  $\rho$  est supérieur ou inférieur à 1

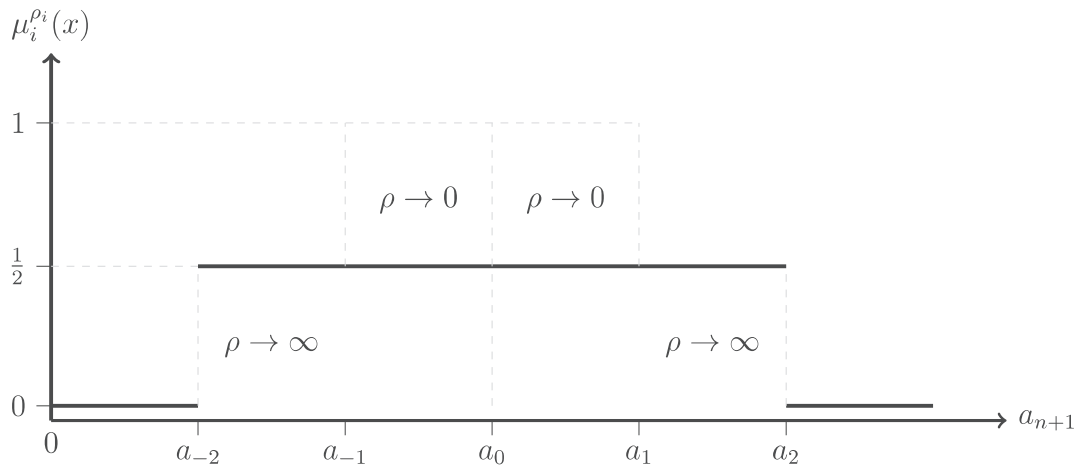


Fig. 2.6: Cas particulier limite de la S-Shape où la limite de  $\rho$  alterne entre 0 et  $\infty$

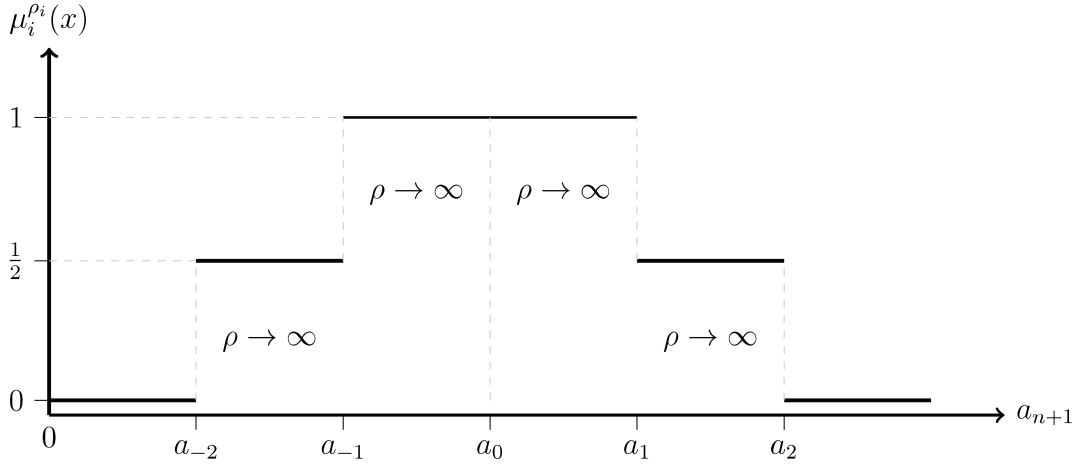


Fig. 2.7: Cas particulier limite de la S-Shape où  $\rho \rightarrow \infty$  sur tous les intervalles.

## 6 CONCLUSION

Lors de ce chapitre, nous avons dans un premier temps fait un rappel sur ce qu'était la prise en compte de l'incertitude, grâce à la théorie des possibilités. L'ensemble des possibilités étant une extension de l'ensemble des probabilités, il permet d'effectuer une meilleure prise en compte de l'incertitude. L'étude de la théorie des possibilités dont utilité est avéré en recherche opérationnelle, est décrit dans le chapitre 4.

Nous nous sommes concentrés ensuite sur la théorie des ensembles flous et plus particulièrement sur les nombres flous et le concept de fonction d'appartenance. La fonction d'appartenance permet d'exprimer avec quel degré de crédibilité (véracité) un élément appartient à un ensemble. Cette notion est au cœur des chapitres 3 et 4 pour lesquels nous faisons un parallèle entre la fonction d'appartenance et la fonction distance, ce qui nous permet de caractériser des équilibres de Nash pour les classes de jeux idempotents.

Par ailleurs, la fonction d'appartenance est aussi utile pour caractériser des nombres flous que nous avons défini (nombre trapézoïdaux, de Gauss, en cloche, ...). À partir de la définition de fonction d'appartenance, nous avons apporté une contribution en créant un nombre flou paramétré nommé C-Shape. Ce dernier possède l'avantage de caractériser les nombres trapézoïdaux, triangulaires, gaussiens. En réalité, lorsque l'on tend vers la limite de ce nombre flou, on retrouve une fonction Heaviside qui permet de caractériser

un nombre “crisp”. En cela, nous pensons que le nombre flou paramétré correspond à une généralisation d’un nombre flou.

A partir de ce nombre flou, il nous a été possible d’introduire une autre classe de nombres flous, nommée nombres flous de type Multi-C-Shape. Ces nombres sont basés sur la forme C-Shape et permettent d’étendre l’avantage de la C-Shape à plusieurs intervalles. Ce sont les cas limites qui nous apparaissent les plus importants puisqu’ils permettent de caractériser des appartenances en effet cliqué (en escalier).

La prise en compte d’un nombre flou paramétré et des diverses formes de fonction d’appartenance, nous permet de caractériser plus précisément la subjectivité d’un individu qui évolue dans un univers incertain face à un ensemble de choix. Effet, comme nous avons pu le mentionner le paramètre  $\rho$  du nombre flou paramétré peut être interprété comme un degré d’aversion au risque d’appartenir à un ensemble donné. Mais d’autres interprétations sont également possibles et peuvent refléter par exemple le pouvoir de marché et/ou de négociation associé au fait d’appartenir à un ensemble donné.

De la fonction multi-C-Shape, nous avons caractérisé un nombre flou nommé S-Shape pour lequel il n’y aura qu’un seul intervalle supplémentaire. Les contributions liées à ce chapitre sont déterminantes pour le reste de nos travaux. En effet, le nombre C-Shape (qui peut être considéré comme une fonction) est utile dans le chapitre de la théorie des jeux (chapitre 4) pour lequel il permet d’apporter un équilibre .

Enfin, en aide à la décision, cette même fonction est utilisée pour caractériser la notion de critère (qui correspond aux conséquences d’un choix) et plus particulièrement au type pseudo-critère que nous détaillons dans le chapitre 6. Ce nouveau type de critère utilisé dans le chapitre 7 lors d’une application à la méthode multicritère. Cet outil mathématique aura donc deux applications distinctes, d’une part, en recherche opérationnelle, notamment en théorie des jeux et plus particulièrement lors de jeux en stratégies mixtes, et d’autre part en aide à la décision notamment en aide à la décision multicritère et plus particulièrement concernant le modèle ELECTRE III.

## PARTIE II

# CONTRIBUTION À LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET À LA THÉORIE DES JEUX

---

### 3. FONCTION DISTANCE ET FONCTION D'APPARTENANCE : UNE STRUCTURE DE CONVEXITÉ

*“En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s’y habitue.”*

JOHN VON NEUMANN<sup>1</sup>

---

#### Sommaire

<b>1</b>	INTRODUCTION . . . . .	<b>62</b>
<b>2</b>	SUR LES FONCTIONS DISTANCES, FONCTIONS D'APPARTENANCES, MESURES DE NÉCESSITÉ ET DE POSSIBILITÉ . . . . .	<b>63</b>
2.1	Construction d'un produit externe à partir des fonctions d'ap- partenances . . . . .	63
2.2	Exemple : les ensembles radians . . . . .	67
2.3	Structure de convexité pour des collections d'ensembles convexes par union et par intersection . . . . .	72
<b>3</b>	UNE STRUCTURE CONVEXE IDEMPOTENTE . . . . .	<b>77</b>
3.1	Ensembles $\mathbb{B}$ -convexes . . . . .	77
3.2	Sur une classe particulière d'ensembles et leur relation avec la $\mathbb{B}$ -convexité . . . . .	80
3.3	Ensembles cubiques et relation avec la $\mathbb{B}$ -convexité . . . . .	82
<b>4</b>	CONCLUSION . . . . .	<b>89</b>

---

---

1. Réponse donnée au physicien Dr. Felix Smith, qui lui écrivit concernant son incompréhension de la méthodes des caractéristiques. Rapporté par Gary Zukav, “The dancing Wu Li Masters”, 1991.



## 1 INTRODUCTION

La recherche opérationnelle et la théorie des jeux sont des champs d'analyse théorique proposant un cadre d'analyse mathématique permettant de comprendre les décisions individuelles ou collectives face à des choix stratégiques possibles, appelées « jeux ». La compréhension des solutions optimales de ces « jeux » est fondée sur l'hypothèse que lorsqu'un individu choisit la stratégie A comparé à la stratégie B, il appartient complètement et parfaitement à l'ensemble qui est défini par la stratégie A et inversement s'il adopte la stratégie B. Par un calcul de probabilité et de fonctions de distances aux diverses stratégies possibles, des équilibres de Nash peuvent être définis comme solution de ces « jeux ». Or comme nous avons plus le mentionner dans la partie précédente, l'information sur laquelle se construit les choix des individus peut être floue. Par conséquent le choix d'adopter une stratégie ou une autre peut également être interprété par la notion d'ensemble floue, en mobilisant la théorie des possibilités et en considérant une fonction d'appartenance à une stratégie.

Ce chapitre vise ainsi à montrer, *in fine*, qu'une certaine classe de jeux (appelés par la suite jeux  $\mathbb{B}$ -convexes) ont une interprétation naturelle en terme des jeux flous. Pour ce faire, nous construisons d'abord une structure algébrique adaptée, qui permet de définir une notion appropriée de convexité, par union et intersection. Une telle notion vaut pour une collection de sous-ensembles dans une  $\sigma$ -algèbre définie sur un ensemble. Il est montré que notre construction peut être dérivée de la fonction d'appartenance habituelle, qui joue un rôle crucial dans la théorie des ensembles flous. Tout au long de ces travaux, il existe une relation bijective entre la notion d'enveloppe convexe liée à la  $\mathbb{B}$ -convexité et la structure convexe par intersection et union d'une classe d'ensemble, introduite dans ce chapitre. Une illustration est fournie avec la classe des ensembles radians, définis dans l'espace vectoriel euclidien. Tout au long de ce chapitre, il est montré que les fonctions d'appartenance et de jauge (fonctions distances) sont intimement liées l'une à l'autre. La fonction jauge permet de construire une mesure naturelle maxitive et minitive pour les ensembles radians. Dans un tel contexte, les mesures maxitives et minitives jouent un rôle crucial. La  $\mathbb{B}$ -convexité a été définie dans [24] comme une limite de Kuratowski-Painlevé

de convexités généralisées inspirée par Ben-Tal [17] et Avriel [8, 9]. Dans le cas où les ensembles convexes sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}_+^n$ , la  $\mathbb{B}$ -convexité est définie en faisant la transformation formelle  $+$   $\rightarrow$   $\max$  relativement à l'orthant euclidien non-négatif  $\mathbb{R}_+^n$ . Les fonctions  $\mathbb{B}$ -convexes ont quant à elles, été analysées dans [4]. Les propriétés de Hanh-Banach et de séparation, ont été étudiées dans [26] des résultats de point fixe établis [25] (-voir aussi [106]). Des ensembles  $\mathbb{B}^{-1}$ -convexes ont été introduits dans [4].

Nous montrons plus précisément dans ce chapitre, que l'on peut construire une structure de  $\mathbb{B}$ -convexité portant sur des classes d'ensembles et impliquant une multiplication basée sur la fonction d'appartenance. L'objectif recherché est principalement de donner une interprétation des jeux  $\mathbb{B}$ -convexe, basée sur les fonctions d'appartenance. L'une des idées clé est que la relation d'inclusion définit une structure d'ordre sur la  $\sigma$ -algèbre d'un ensemble. Le "min" devient analogue à l'intersection et le "max" à la réunion. Ce chapitre est donc crucial pour permettre de construire une classe de jeux flous, qui a une traduction d'un point de vue opérationnel et surtout pour lequel des équilibres existent et peuvent être calculés. La structure de convexité mise en évidence, permet de relier la structure de  $\mathbb{B}$ -convexité aux mesures de possibilité et de nécessité.

Le chapitre se déroule en deux phases. Tout d'abord, la section 2 introduit une boîte à outils de définition de notion convexe, qui sera utile dans la suite. La classe spéciale des radians est considérée comme illustrant une telle notion. Puis, la section 3 établit brièvement l'arrière-plan de la  $\mathbb{B}$ -convexité. Enfin, une connexion est établie avec la structure convexe, définie proposée dans la section 2.

## 2 SUR LES FONCTIONS DISTANCES, FONCTIONS D'APPARTENANCES, MESURES DE NÉCESSITÉ ET DE POSSIBILITÉ

### 2.1 Construction d'un produit externe à partir des fonctions d'appartenances

En considérant les notations usuelles, appelons  $(X, \mathcal{L}, \eta)$ , un espace de mesure pour lequel  $X$  est un ensemble et  $\mathcal{L}$  une  $\sigma$ -algèbre de sous-ensemble de  $X$ . Nommons  $\eta$  une

mesure définie sur  $\mathcal{L}$  et finie, avec  $\eta(X) < \infty$ .

Pour tout ensemble  $A$ , une fonction d'appartenance sur  $X$  est une fonction de  $X$  à valeur dans l'intervalle réel  $[0, 1]$ . La fonction d'appartenance qui représente un ensemble flou  $\tilde{A}$  est généralement notée  $\mu_A$ . Pour un élément  $x$  de  $X$ , la valeur  $\mu_A(x)$  est nommée degré d'appartenance de  $x$  dans l'ensemble flou  $\tilde{A}$ . Ce degré d'appartenance  $\mu_A(x)$  évalue le niveau d'appartenance de l'élément  $x$  à l'ensemble flou  $\tilde{A}$ . Ainsi, la valeur 0 signifie que  $x$  ne fait pas parti de l'ensemble flou. La valeur 1 quant à elle, signifie que  $x$  appartient totalement à l'ensemble flou. Toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 caractérisent les membres flous, qui appartiennent à l'ensemble flou seulement partiellement.

Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $X$ ,  $X \setminus A$  est l'ensemble de tous les éléments de  $X$  qui n'appartiennent pas à  $A$ . On l'appelle aussi, complément de  $A$  dans  $X$ . Etant donné  $X$  doté d'une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{L}$ ,  $X \setminus A$  est aussi un sous-ensemble de  $\mathcal{L}$ . Le but de cette section est d'introduire une structure algébrique spéciale concernant les ensembles. Pour cela, nous définissons en premier lieu une fonction d'appartenance étendue.

À ce stade, nous ne supposons aucune structure algébrique à priori définie sur  $X$ . Il est question de construire un produit spécial intimement lié à la représentation floue de tout sous-ensemble  $A$  de  $X$ .

**Définition 2.1.1:** Soit un couple  $(X, \mathcal{L}(X))$  où  $X$  est l'ensemble et  $\mathcal{L}(X)$  est la  $\sigma$ -algèbre définie sur  $X$ . Considérons  $\mathcal{A}$  comme étant un sous-ensemble de  $\mathcal{L}(X)$ . De plus, prenons  $\mathcal{M} = \{\mu_S : S \in \mathcal{L}(X)\}$  comme un ensemble de fonction d'appartenance indexé sur  $\mathcal{L}(X)$ . Pour tout nombre réel non négatif  $t$  et tout élément  $A \in \mathcal{A}$ , sous-ensemble de  $X$ , le produit  $\odot : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$  définie par :

$$t \odot A = \begin{cases} \{x \in A : \mu_{X \setminus A}(x) \leq t\} & \text{si } t < 1 \\ \{x \in X : \mu_A(x) \geq t^{-1}\} & \text{si } t \geq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

est nommé un  $\mathcal{M}$ -produit externe sur  $\mathcal{A}$ . Ce produit est dit stable s'il prend ses valeurs dans  $\mathcal{A}$ .

Cette définition est basée sur la fonction d'appartenance d'un ensemble  $A$ . Si  $t \in [0, 1]$ ,

alors nous considérons des éléments suffisamment éloignés de l'ensemble complémentaire  $X \setminus A$ . Par construction, tous ces éléments appartiennent à  $A$ . Cependant, si  $A$  est non vide et si  $t < 1$ , le sous-ensemble  $t \odot A$  est plus petit que  $A$  (au sens de l'inclusion). Si  $t \geq 1$ , alors on considère que certains éléments sont suffisamment "éloignés" de l'ensemble  $A$  (puisque  $t^{-1} \leq 1$ ,  $t \geq 1$ ). Il s'ensuit que si  $t \geq 1$ , alors le sous-ensemble  $t \odot A$  est plus grand que  $A$  (au sens de l'inclusion). Si  $t = 1$ , alors  $1 \odot A = A$ , puisque  $\mu_A(x) = 1 \iff x$  dans  $A$ .

Il est possible d'aller un peu plus loin en construisant une fonction de jauge particulière, à partir du produit  $\odot$ . En considérant les conditions ci-dessus, pour tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{L}(X)$ , la fonction est  $\delta_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :

$$\delta_A(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in t \odot A\}. \quad (2.2)$$

Cette fonction est appelée fonction de jauge (où fonction distance en économie) pour le produit  $\odot$ . Il est à noter que si  $x \notin A$ , alors  $\delta_A(x) \geq 1$ . De plus, si  $x \in A$ , alors  $\delta_A(x) \leq 1$ . Cette fonction de jauge est utile afin de définir ce que nous appellerons par la suite, une fonction d'inclusion. La fonction d'inclusion est une fonction  $\rho_A : X \longrightarrow [0, 1]$  définie par :

$$\rho_A(x) = \begin{cases} \delta_A(x) & \text{si } \delta_A(x) < 1 \\ 1 & \text{si } \delta_A(x) \geq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Remarquons que la fonction d'appartenance peut être écrite de manière similaire :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \delta_A(x)^{-1} & \text{si } \delta_A(x) > 1 \\ 1 & \text{si } \delta_A(x) \leq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

La notion de mesure de possibilité a été introduite par Zadeh en 1978, comme une description mathématique de l'information véhiculée par des propositions vagues. Zadeh suggère d'utiliser une mesure de possibilité, qui est une représentation mathématique de l'incertitude linguistique contenue dans une proposition. Les mesures de possibilité ont été longuement étudiées par Dubois et Prade [51], qui ont également introduit la notion duale de mesure de nécessité. On peut se référer à une classe de mesures plus générale appelée

mesures maxitives “et mesures minitives”. Les mesures maxitives ont été introduites par Shilkret [128].

Considérons le couple  $(X, \mathcal{L})$ . Nous dirons que :

(a) la fonction  $\phi : \mathcal{L} \longrightarrow [0, ; \infty]$  est une mesure maxitive, si pour tout  $A, B \subset \mathcal{L}$ ,  
 $\phi(A \cup B) = \max\{\phi(A), \phi(B)\}$ .

(b) la fonction  $\eta : \mathcal{L} \longrightarrow [0, \infty]$  est une mesure minitive, si pour tout  $A, B \subset \mathcal{L}$ ,  
 $\eta(A \cap B) = \min\{\eta(A), \eta(B)\}$ .

Dans le cas où  $\phi$  et  $\eta$  prennent leur valeur dans l'intervalle  $[0, 1]$  et satisfont la condition  $\phi(A) = 1 - \eta(X \setminus A)$ , les mesures maxitives et minitives sont respectivement appelées mesures de possibilité et de nécessité.

Dans ce qui suit, nous admettons qu'une mesure  $\eta : \mathcal{L}(X)$  est homogène et donc qu'elle respecte le produit externe  $\odot$ , si pour tout  $s, t \geq 0$

$$\eta(t \odot A) = t\eta(A). \quad (2.5)$$

De plus, nous affirmons que le produit externe  $\odot$  est homogène si  $\forall s, t > 0$

$$s \odot (t \odot A) = (st) \odot A. \quad (2.6)$$

**Définition 2.1.2:** *Nous dirons d'un part que le produit  $\odot$  est minitive distributif à gauche, si pour tout  $s, t \geq 0$*

$$\min\{s, t\} \odot A = (s \odot A) \cap (t \odot A), \quad (2.7)$$

*et d'autre part qu'il est minitive distributif à droite, si pour tout  $t \geq 0$*

$$t \odot (A \cap B) = (t \odot A) \cap (t \odot B). \quad (2.8)$$

*Si le produit est à la fois minitive distributif à gauche et à droite, on dit qu'il est minitive distributif.*

De manière symétrique, nous introduisons la définition suivante :

**Définition 2.1.3:** *Nous dirons d'une part que le produit  $\odot$  est maxitif distributif à gauche si pour tout  $s, t \geq 0$*

$$\max\{s, t\} \odot A = (s \odot A) \cup (t \odot A), \quad (2.9)$$

*et d'autre part qu'il est maxitif distributif à droite si pour tout  $t \geq 0$*

$$t \odot (A \cup B) = (t \odot A) \cup (t \odot B). \quad (2.10)$$

*Si le produit est à la fois maxitif distributif à droite et à gauche. On dit qu'il est maxitif distributif.*

Supposons à présent que  $\{A_1 \cdots, A_n\}$  soit une collection de  $n$  sous-ensembles de  $\mathcal{L}(X)$ . De plus, considérons que  $u$  est une fonction homogène relativement au produit minitif  $\odot$ . Nous avons alors :

$$u((t_1 \odot A_1) \cap (t_2 \odot A_2) \cap \cdots \cap (t_n \odot A_n)) = \min_{i=1 \cdots n} t_i u(A_i) \quad (2.11)$$

où  $t_i \geq 0$  pour tout  $i$ .

Si  $v$  est une fonction homogène maxitive pour le produit externe  $\odot$ , on obtient :

$$v((t_1 \odot A_1) \cup (t_2 \odot A_2) \cup \cdots \cup (t_n \odot A_n)) = \max_{i=1 \cdots n} t_i v(A_i) \quad (2.12)$$

où  $t_i \geq 0$  pour tout  $i$ .

Ces propriétés importantes sont la base de départ pour introduire une convexité particulière, basée sur l'ordre partiel lié à l'inclusion des ensembles. Elle nous servira dans la suite du chapitre.

## 2.2 Exemple : les ensembles radians

Il est possible de fournir un exemple simple en considérant le cas où  $X = \mathbb{R}^d$  et l'ensemble  $\mathcal{R}$  de tout les sous-ensembles radians de  $X$ . Un sous-ensemble  $R$  de  $X$  est un

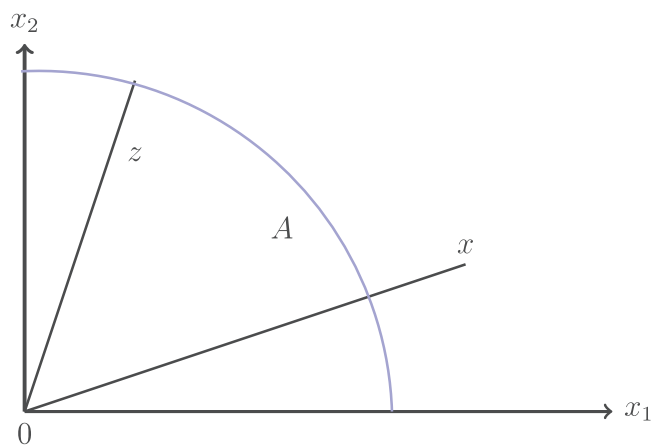


Fig. 3.1: Exemple d'ensemble radian sur  $\mathbb{R}_+^d$

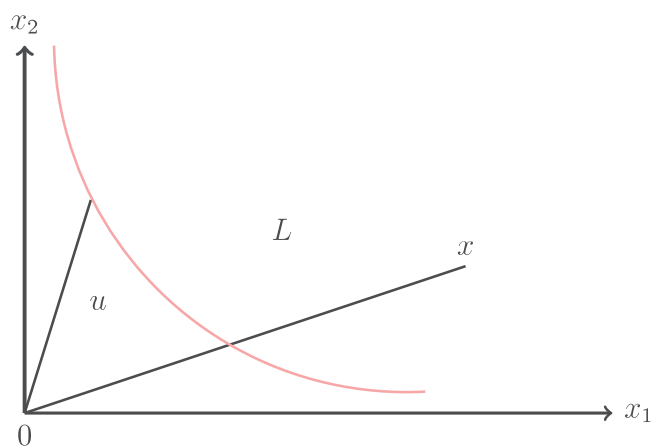


Fig. 3.2: Exemple d'ensemble co-radian sur  $\mathbb{R}_+^d$

ensemble radian si pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  et tout  $x \in R$ ,  $\lambda x \in R$ . Un sous-ensemble  $S$  est co-radian si pour tout  $\lambda \geq 1$ ,  $\lambda x \in S$ .

En mathématiques et dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, une fonction de jauge (analogue à la fonctionnelle de Minkowski pour les ensembles symétriques) est une fonction qui recouvre une sorte de notion distance sur un espace vectoriel. Pour un sous-ensemble

$A$  de  $\mathbb{R}^d$ , la fonction de jauge  $\delta_A$  est la fonction  $\delta_A : X \longrightarrow [0, \infty]$  définie par :

$$\delta_A(x) = \sup\{\delta : \delta x \in A\}, \quad (2.13)$$

par convention  $\delta_A(x) = 0$  s'il n'existe pas de  $\lambda \geq 0$  tel que  $\lambda x \in A$ . Parallèlement à cette définition, il est possible de définir une co-jauge telle que :

$$\delta_A^c(x) = \inf\{\delta : \delta x \in A\}. \quad (2.14)$$

Cette définition implique que pour un sous-ensemble radian  $R$  et son co-radian  $X \setminus R$  :

$$R = \{x \in \mathbb{R}^d : \delta_R(x) \geq 1\} \quad (2.15)$$

et

$$X \setminus R = \{x \in \mathbb{R}^d : \delta_{X \setminus R}^c(x) < 1\}. \quad (2.16)$$

On remarque que la fonction  $\delta_R$  est homogène de degré -1. Cette propriété, fournit un exemple géométrique de fonction d'appartenance ayant une interprétation simple.

**Lemme 2.2.1:** *Supposons que  $X = \mathbb{R}^d$  et considérons  $\mathcal{L}(X)$  comme étant une  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ , contenant  $\mathcal{R}$  c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles radian fermé de  $X$ . Alors, les fonctions définies par :*

$$\mu_R(x) = \min\{1, \delta_R(x)\} \quad \text{and} \quad \mu_{X \setminus R}(x) = \max\{1, \delta_{X \setminus R}^c(x)\}$$

*sont respectivement deux fonctions d'appartenance de  $R$  et  $X \setminus R$ . De plus, considérons  $\mathcal{M}$  comme étant l'ensemble des fonctions d'appartenance indexés sur  $\mathcal{L}(X)$  tel que pour tout ensemble radian fermé  $R$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $\mu_R(x)$  et  $\mu_{X \setminus R}(x)$  sont respectivement des fonctions d'appartenance de  $R$  et  $X \setminus R$ . Ainsi, l'application correspondant au  $\mathcal{M}$ -produit externe  $(t, R) \mapsto t \odot R$  défini sur  $\mathcal{R}$  satisfait la relation :*

$$t \odot R = tR = \{tx : x \in R\}. \quad (2.17)$$

*De plus, cette relation est stable et induit un produit distributif maxitif et minitif.*

*Preuve* : Il est facile de voir que  $x \in R$ ,  $\delta_R(x) \geq 1$ . En conséquence,  $\mu_R(x) = 1$ . Dans le cas où  $x \notin R$ ,  $\delta_R(x) < 1$ , Ce qui signifie que  $\mu_R(x) = \delta_R(x) < 1$ . Afin de prouver la seconde partie de notre affirmation, il est possible de remarquer que pour tout  $t \geq 1$

$$tR = \{x : \delta_R(x) \geq t^{-1}\}.$$

De plus , si  $t \leq 1$  :

$$tR = \{x : \delta_{X \setminus R}^c(x) \leq t\}.$$

Alors, la première affirmation suit. La stabilité provient du fait que pour tout  $t \geq 0$ ,  $tR$  est un ensemble radian. Enfin, la distributivité maxitive et minitive est dûe au fait que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{L}(X)$  :

$$\min\{s, t\}A = sA \cap tA \quad \text{et} \quad \max\{s, t\}A = sA \cup tA. \quad \square$$

**Lemme 2.2.2:** *Supposons que  $X = \mathbb{R}^d$  et considérons  $\mathcal{L}(X)$  comme étant  $\sigma$ -algèbre de  $X$ , contenant  $\mathcal{R}^c$  c'est à dire l'ensemble de tous les sous-ensembles co-radians fermés de  $X$ . Ainsi, les fonctions définies par :*

$$\mu_R(x) = \min\{1, \delta_R^c(x)\} \quad \text{et} \quad \mu_{X \setminus R}(x) = \max\{1, \delta_{X \setminus R^c}(x)\}$$

*sont respectivement deux fonctions d'appartenance de  $R^c$  and  $X \setminus R^c$ . De plus, considérons  $\mathcal{M}$  comme étant l'ensemble des fonctions d'appartenance indexés sur  $\mathcal{L}(X)$  tel que pour tout ensemble co-radian fermé  $R^c$  dans  $\mathcal{R}^c$ ,  $\mu_R(x)$  et  $\mu_{X \setminus R^c}(x)$  sont respectivement deux fonctions d'appartenance de  $R$  et  $X \setminus R$ . Ainsi, l'application du  $\mathcal{M}$ -produit externe  $(t, R^c) \mapsto t \odot R^c$  défine sur  $\mathcal{R}$  satisfait la relation :*

$$t \odot R = tR = \{tx : x \in R\}. \quad (2.18)$$

*De plus, elle est stable, maxitive et minitive distributive.*

Il est possible de construire une fonction maxitive et minitive à partir de la fonction de jauge. Supposons que  $A$  soit un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$  et considérons  $\delta_A$  comme étant une fonction de jauge relative à l'ensemble  $A$ . Alors, on obtient les propriétés suivantes :

$$\delta_{A \cap B}(x) = \min\{\delta_A(x), \delta_B(x)\} \quad \text{et} \quad \delta_{A \cup B}(x) = \max\{\delta_A(x), \delta_B(x)\}. \quad (2.19)$$

La prochaine affirmation se déduit directement.

**Lemme 2.2.3:** *Supposons que  $X = \mathbb{R}^d$  et considérons  $\mathcal{L}(X)$  comme étant  $\sigma$ -algèbre de  $X$ , contenant  $\mathcal{R}$ . Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $u_x(A) : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  définie par :*

$$u_x(A) = \delta_A(x)$$

*est une mesure maxitive et minitive de  $\mathcal{L}(X)$ . De plus, considérons  $\mathcal{M}$  comme étant l'ensemble des fonctions d'appartenance indexés à  $\mathcal{L}(X)$  tel que pour tout ensemble radian fermé  $R$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $\mu_R(x)$  et  $\mu_{X \setminus R}(x)$  sont respectivement des fonctions d'appartenance de  $R$  et  $X \setminus R$ . Ainsi, pour tout  $x \in X \setminus \{0\}$ ,  $\mu_x$  est homogène pour le produit  $\odot$ , et on obtient :*

$$u_x(tA) = \delta_{tA}(x) = t\delta_A(x) = tu_x(A) \quad (2.20)$$

*pour tout  $t \geq 0$ .*

*Preuve :* Supposons que  $x \neq 0$ . Si  $t = 0$ , alors  $u_x(tA) = \delta_{\{0\}}(x) = 0 = 0u_x(A)$ . Si  $t > 0$ , alors  $\sup\{\delta : \delta x \in tA\} = \sup\{\delta : \delta x \in tA\} = \sup\{\delta : \frac{\delta}{t}x \in A\} = t \sup\{\frac{\delta}{t} : \frac{\delta}{t}x \in A\} = t\delta_A(x) = tu_x(A)$ .  $\square$

**Lemme 2.2.4:** *Supposons que  $X = \mathbb{R}^d$  considérons  $\mathcal{L}(X)$  comme étant une  $\sigma$ -algèbre de  $X$ , contenant  $\mathcal{R}^c$ . Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $v_x(A) : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  définie par :*

$$v_x(A) = \delta_A^c(x)$$

*est une mesure maxitive et minitive sur  $\mathcal{L}(X)$ . De plus, considérons  $\mathcal{M}$  comme étant l'ensemble des fonctions d'appartenance de  $\mathcal{L}(X)$  tel que, pour tout ensemble co-radian fermé  $R^c$  dans  $\mathcal{R}^c$ ,  $\mu_{R^c}(x)$  et  $\mu_{X \setminus R^c}(x)$  sont respectivement des fonctions d'appartenance de  $R^c$  et  $X \setminus R^c$ . Alors, pour tout  $x \in X \setminus \{0\}$ ,  $\mu_x$  est homogène pour le produit  $\odot$ , et on obtient :*

$$v_x(tA) = \delta_{tA}^c(x) = t\delta_A^c(x) = tv_x(A) \quad (2.21)$$

*pour tout  $t \geq 0$ .*

### 2.3 Structure de convexité pour des collections d'ensembles convexes par union et par intersection

**Définition 2.3.1:** Considérons  $(X, \mathcal{L}(X))$  comme un couple, où  $X$  est un ensemble et  $\mathcal{L}(X)$  une  $\sigma$ -algèbre définie sur  $X$ . Prenons  $\mathcal{M} = \{\mu_A : A \in \mathcal{L}(X)\}$  comme étant une famille de fonction d'appartenance indexée sur  $\mathcal{L}(X)$ . Soit  $\odot$  le produit externe associé à  $\mathcal{M}$ . Un sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{L}(X)$  satisfait l'hypothèse de convexité par intersection si pour tout  $A, B \in \mathcal{C}$  et tout  $t \in [1, \infty[$ , on a :

$$A \cap (t \odot B) \in \mathcal{C}.$$

Dans ce qui suit nous admettons que l'enveloppe convexe par intersection d'une famille  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(X)$  est la plus petite collection de sous-ensemble de  $\mathcal{L}(X)$  contenant cette famille.

**Proposition 2.3.2:** Soit  $X$  un ensemble et considérons  $\mathcal{L}(X)$  comme étant la  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(X)$  contenant une famille  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ . Soit  $\mathcal{M}$  la collection des fonctions d'appartenance indexée à  $\mathcal{L}(X)$ . Supposons de plus que  $\mathcal{M}$  définit un produit homogène minitif distributif  $\odot$  sur  $\mathcal{A}$ . Alors, la collection de sous-ensemble

$$\mathbb{N}(\mathcal{F}) = \left\{ \bigcap_{i \in I} t_i \odot A_i : \min_{i \in I} t_i = 1 \right\} \quad (2.22)$$

est l'enveloppe convexe par intersection de la famille  $\{A_i\}_{i \in I}$ .

*Preuve :* Supposons que  $\mathcal{C}$  est la plus petite collection convexe par intersection contenant  $\mathcal{F}$ . Puisque  $\odot$  est un produit  $\mathcal{M}$ -externe stable sur  $\mathcal{A}$ , pour tout  $i \in I$ , et  $t_i \in [1, \infty]$ ,  $t_i \odot A_i \in \mathcal{C}$ . Montrons à présent que  $\mathbb{N}(\mathcal{F})$  est un sous-ensemble de la plus petite collection convexe par intersection contenant  $\mathcal{F}$ . Cette propriété est évidente si  $n = 1, 2$ . Supposons que cela est vrai au rang  $n$  et montrons que cela devrait être vrai au rang  $n+1$ . Supposons que  $I = [n+1]$  :

$$A = \bigcap_{i \in [n+1]} t_i \odot A_i$$

avec  $\min_{i \in I} t_i = 1$ . On obtient :

$$A = t_{n+1} \odot A_{n+1} \cap \left( \bigcap_{i \in [n]} t_i \odot A_i \right).$$

Si  $t_{n+1} \neq 1$ , alors  $\min_{i \in [n]} t_i = 1$  et à partir de l'hypothèse de convexité de  $\mathcal{C}$ ,  $A \in \mathcal{C}$ .

Supposons à présent que  $t_{n+1} = 1$ . Puisque le produit  $\odot$  est homogène, on obtient :

$$A = A_{n+1} \cap t_{i_0} \left( \bigcap_{i \in [n]} \frac{t_i}{t_{i_0}} \odot A_i \right),$$

où  $t_{i_0} = \min_{i \in [n]} t_i$ , puisque  $\min_{i \in [n]} \frac{t_i}{t_{i_0}} = 1$  on en déduit que  $\bigcap_{i \in [n]} \frac{t_i}{t_{i_0}} \odot A_i \in \mathcal{C}$ . De plus,  $t_{i_0} \geq 1$ . On en déduit que  $A \in \mathcal{C}$ . Il suffit à de prouver que  $\mathbb{N}(\mathcal{F})$  est convexe. Supposons que

$$A = \bigcap_{i \in [n]} t_i \odot A_i \quad \text{et} \quad A' = \bigcap_{i \in [n]} t'_i \odot A_i$$

Puisque que le produit  $\odot$  est minitif distributif sur l'intersection, on obtient pour tout  $s \in [1, \infty]$

$$sA \cap A' = s \left( \bigcap_{i \in [n]} t_i \odot A_i \right) \cap \left( \bigcap_{i \in [n]} t'_i \odot A_i \right) = \left( \bigcap_{i \in [n]} \min\{st_i, t'_i\} \odot A_i \right).$$

Toutefois,  $\min_{i \in [n]} \{st_i, t'_i\} = 1$ . Par conséquent, on en déduit que  $sA \cap A' \in \mathbb{N}(\mathcal{F})$ . Donc,  $sA \cap A'$  est un ensemble convexe respectant la propriété de convexité par intersection . Ainsi,  $\mathcal{C} = \mathbb{N}(\mathcal{F})$  ce qui conclut cette preuve.  $\square$

**Définition 2.3.3:** Soit  $(X, \mathcal{L}(X))$  un couple, où  $X$  est un ensemble et  $\mathcal{L}(X)$  une  $\sigma$ -algèbre définie sur  $X$ . Soit  $\mathcal{M} = \{\mu_A : A \in \mathcal{L}(X)\}$  une famille de fonctions d'appartenance indexée sur  $\mathcal{L}(X)$ . Considérons  $\odot$  comme étant le produit externe associé à  $\mathcal{M}$ . Un sous-ensemble  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{L}(X)$  satisfait l'hypothèse de convexité par union si pour tout  $A, B \in \mathcal{C}$  et tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$A \cup (t \odot B) \in \mathcal{U}.$$

L'enveloppe convexe par union d'une famille  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(X)$  est la plus petite collection convexe par union de sous-ensemble de  $\mathcal{L}(X)$  contenant  $\mathcal{F}$ .

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} t_i \odot A_i : \max_{i \in I} t_i = 1, t_i \in [0, 1] \right\}. \quad (2.23)$$

**Proposition 2.3.4:** *Soit  $X$  un ensemble et soit  $\mathcal{L}(X)$  une  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(X)$  contenant une famille  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ . Soit  $\mathcal{M}$  la collection des fonctions d'appartenance indexées à  $\mathcal{L}(X)$ . Supposons de plus, que  $\mathcal{M}$  définit un produit homogène maxitif distributif  $\odot$  défini sur  $\mathcal{A}$ . Alors, la collection de sous-ensembles*

$$\mathbb{U}(\mathcal{F}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} t_i \odot A_i : \max_{i \in I} t_i = 1, t_i \in [0, 1] \right\}. \quad (2.24)$$

*est l'enveloppe convexe par union de la famille  $\{A_i\}_{i \in I}$ .*

*Preuve :* Supposons que  $\mathcal{C}$  est la plus petite collection convexe par union contenant  $\mathcal{F}$ . Etant donné que  $\odot$  est un produit stable sur  $\mathcal{A}$ , pour tout  $i \in I$ , et  $t_i \in [0, 1]$ ,  $t_i \odot A_i \in \mathcal{C}$ . Nous allons montrer à présent que  $\mathbb{U}(\mathcal{F})$  est l'enveloppe convexe par union de  $\mathcal{F}$ . Cette propriété est évidente si  $n = 1, 2$ . Supposons que celle-ci est vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle devrait être vraie au rang  $n + 1$ . Supposons que  $I = [n + 1]$  :

$$A = \bigcup_{i \in [n+1]} t_i \odot A_i$$

avec  $\max_{i \in I} t_i = 1$ . On obtient,

$$A = (t_{n+1} \odot A_{n+1}) \cap \left( \bigcup_{i \in [n]} t_i \odot A_i \right).$$

Si  $t_{n+1} \neq 1$ , alors  $\max_{i \in [n]} t_i = 1$  à partir de l'hypothèse de convexité  $\mathcal{C}$ ,  $A \in \mathcal{C}$ . Supposons à présent que  $t_{n+1} = 1$ . Puisque que le produit  $\odot$  est homogène, on obtient :

$$A = A_{n+1} \cup t_{i_0} \left( \bigcup_{i \in [n]} \frac{t_i}{t_{i_0}} \odot A_i \right),$$

où  $t_{i_0} = \max_{i \in [n]} t_i$ , puisque  $\max_{i \in [n]} \frac{t_i}{t_{i_0}} = 1$  on en déduit que  $\bigcup_{i \in [n]} \frac{t_i}{t_{i_0}} \odot A_i \in \mathcal{C}$ . De plus,  $t_{i_0} \geq 1$ . On en déduit que  $A \in \mathcal{C}$ . Tout ce qu'il faut prouver est que  $\mathbb{U}(\mathcal{F})$  est convexe. Supposons que

$$A = \bigcup_{i \in [n]} t_i \odot A_i \quad \text{et} \quad A' = \bigcup_{i \in [n]} t'_i \odot A_i$$

Puisque le produit  $\odot$  est distributif maxitif sur l'union, on obtient pour tout  $s \in [0, 1]$

$$sA \cup A' = s \left( \bigcup_{i \in [n]} t_i \odot A_i \right) \cup \left( \bigcup_{i \in [n]} t'_i \odot A_i \right) = \left( \bigcup_{i \in [n]} \max\{st_i, t'_i\} \odot A_i \right).$$

Toutefois,  $\max_{i \in [n]} \{st_i, t'_i\} = 1$ . Par conséquent, on en déduit que  $sA \cup A' \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$ . Ainsi,  $sA \cup A'$  est convexe par ensemble pour la propriété d'intersection. Ainsi  $\mathcal{C} = \mathbb{U}(\mathcal{F})$  ce qui conclut cette preuve.  $\square$

L'enveloppe convexe par union d'une famille  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(X)$  est la collection de sous-ensembles de  $\mathcal{L}(X)$  définie telle que :

$$\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} t_i \odot A_i : \max_{i \in I} t_i = 1, t_i \in [0, 1] \right\}. \quad (2.25)$$

Il est à noter qu'il existe deux points importants :

(A) si  $t_j = 1$  et  $t_i = 0$  pour tout  $i \neq j$  alors :

$$\left\{ \bigcap_{i \in [n]} t_i \odot A_i : \min_i t_i = 1, t_i \in [0, 1] \right\} = A_j$$

(B) si  $t_j = 1$  et  $t_i = 0$  pour tout  $i \neq j$  alors :

$$\left\{ \bigcup_{i \in [n]} t_i \odot A_i : \max_i t_i = 1, t_i \in [0, 1] \right\} = A_j.$$

**Proposition 2.3.5:** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{L}(X)$  une  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(X)$  contenant une famille  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ . Soit  $\mathcal{M}$  une collection de fonctions d'appartenance indexées sur  $\mathcal{L}(X)$ . Supposons de plus que  $\mathcal{M}$  définit un produit homogène extérieur et minitif distributif  $\odot$  sur  $\mathcal{A}$ . Si  $v : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  est minitive et homogène pour le produit  $\odot$ , alors :

$$\sup\{v(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\} = \max_{i \in I} v(A_i)$$

et

$$\inf\{v(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\} = \min_{i \in I} v(A_i)$$

*Preuve :* Supposons que pour tout  $i \in I$ ,  $v(A_i) < \max\{v(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\}$ . Cela implique qu'il existe un  $A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})$ , tel que  $v(A) > v(A_i)$ , pour tout  $i \in I$ . Puisque  $A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})$ , il y

a  $t \in [1, \infty]^I$  avec  $\min_{i \in I} t_i = 1$ , tel que  $\min_{i \in I} t_i = 1$  et  $A = \bigcap_{i \in I} t_i \odot A_i$ . Puisque  $v$  est minitive et homogène pour le produit  $\odot$  :

$$v(A) = \min_{i \in I} t_i v(A_i).$$

Par hypothèse il existe  $i_0 \in I$  tel que  $t_{i_0} = 1$ . Ainsi,

$$v(A) = \min_{i \in I} t_i v(A_i) \leq v(A_{i_0}),$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, il existe  $i_* \in I$  tel que  $\sup\{v(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\} = v(A_{i_*})$ , ce qui conclut la preuve. Afin d'établir la seconde affirmation, il suffit de noter que :

$$\min_{i \in I} t_i v(A_i) \geq \min_{i \in I} v(A_i). \quad \square$$

**Proposition 2.3.6:** *Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{L}(X)$  une  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(X)$  contenant une famille  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ . Soit  $\mathcal{M}$  une collection de fonctions d'appartenance indexées sur  $\mathcal{L}(X)$ . Supposons de plus que  $\mathcal{M}$  défini un produit homogène extérieur et  $t$  maxitif distributif  $\odot$  sur  $\mathcal{A}$ .*

*Si  $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  est maxitive et homogène pour le produit  $\odot$ , alors :*

$$\sup\{u(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\} = \max_{i \in I} u(A_i)$$

et

$$\inf\{v(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\} = \min_{i \in I} u(A_i)$$

*Preuve :* Afin de prouver la première affirmation, il suffit de noter que :

$$\max_{i \in I} t_i u(A_i) \leq \max_{i \in I} u(A_i).$$

Supposons à présent que pour tout  $i \in I$ ,  $u(A_i) > \min\{u(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\}$ . Cela implique qu'il existe un  $A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})$ , tel que  $u(A) < u(A_i)$ , pour tout  $i \in I$ . Puisque  $A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})$ , il existe  $t \in [0, 1]^I$  avec  $\max_{i \in I} t_i = 1$ , tel que  $\max_{i \in I} t_i = 1$  et  $A = \bigcup_{i \in I} t_i \odot A_i$ . Puisque  $u$  est maxitive et homogène pour le produit  $\odot$ , on obtient :

$$u(A) = \max_{i \in I} t_i u(A_i).$$

Par hypothèse, il existe un  $i_0 \in I$  tel que  $t_{i_0} = 1$ . Ainsi,

$$u(A) = \max_{i \in I} t_i u(A_i) \geq u(A_{i_0}),$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, il existe un  $i_\star \in I$  tel que  $\sup\{u(A) : A \in \mathbb{N}(\mathcal{F})\} = u(A_{i_\star})$ , ce qui conclut cette preuve.  $\square$

### 3 UNE STRUCTURE CONVEXE IDEMPOTENTE

#### 3.1 Ensembles $\mathbb{B}$ -convexes

Cette sous-partie présente les fondamentaux de la  $\mathbb{B}$ -convexité. Dans ce qui suit, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , nous adoptons la notation :

$$x \vee y = (\max\{x_1, y_1\}, \dots, (\max\{x_d, y_d\})). \quad (3.1)$$

De plus,  $z_1, z_2, \dots, z_l$  sont les  $l$  points de  $\mathbb{R}^d$ , alors :

$$\bigvee_{i=1}^l z_i = (\max\{z_{1,1}, \dots, z_{l,1}\}, \dots, \max\{z_{1,d}, \dots, z_{l,d}\}). \quad (3.2)$$

Considérons l'ordre partiel habituel défini sur  $\mathbb{R}^d$ . Un sous-ensemble  $L$  de  $\mathbb{R}^d$  est un semi-treillis supérieur si pour tout  $x, y \in L$ ,  $x \vee y \in L$ .

**Définition 3.1.1:** *Un sous-ensemble  $\mathbb{B}$  de  $\mathbb{R}_+^d$  est dit  $\mathbb{B}$ -convexe, si pour tout  $s, s' \in B$  et tout  $\mu \in [0, 1]$  on a :*

$$\mu s \vee s' \in B$$

De manière équivalente, notons qu'un sous-ensemble  $B$  de  $\mathbb{R}_+^d$  est dit  $\mathbb{B}$ -convexe, si pour tout  $s, s' \in B$  et tout  $\mu, \mu' \geq 0$  satisfaisant  $\max\{\mu, \mu'\} = 1$  on obtient :

$$\mu s \vee \mu' s' \in B$$

Un ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe satisfait les propriétés suivantes (cf. Bricc and Horvath [24]) :

1. Si  $\mathbb{B}$  est un ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe, alors il est un semi-treillis supérieur ;
2.  $\mathbb{B}$  est un ensemble connexe par arc ;
3. Si  $\{s_1, \dots, s_l\} \subset B$ , avec  $\mu_k \geq 0$  pour tout  $k, 1, \dots, l$  et  $\max_{k=1, \dots, l} \{\mu_k\} = 1$  alors  $\bigvee_{k=1}^l \mu_k s_k \in B$ .
4. Si  $C \subset \mathbb{R}_+^d$  est un ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe, alors  $B \cap C$  est aussi un ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe.

À présent, nous allons définir une enveloppe  $\mathbb{B}$ -convexe. Les justifications requises pour l'utilisation d'une telle terminologie sont données par Bricc and Horvath [24]. Soit  $A = \{s_1, \dots, s_l\}$  une partie finie de  $\mathbb{R}_+^d$ . L'ensemble

$$\mathbb{B}(A) = \left\{ \bigvee_{k=1}^l \mu_k s_k, \mu_k \geq 0, \max_{k=1, \dots, l} \mu_k = 1 \right\} \quad (3.3)$$

est nommée enveloppe  $\mathbb{B}$ -convexe de  $A$ .

La représentation géométrique de l'enveloppe  $\mathbb{B}$ -convexe de deux ou plusieurs points est donnée dans les deux figures suivantes :

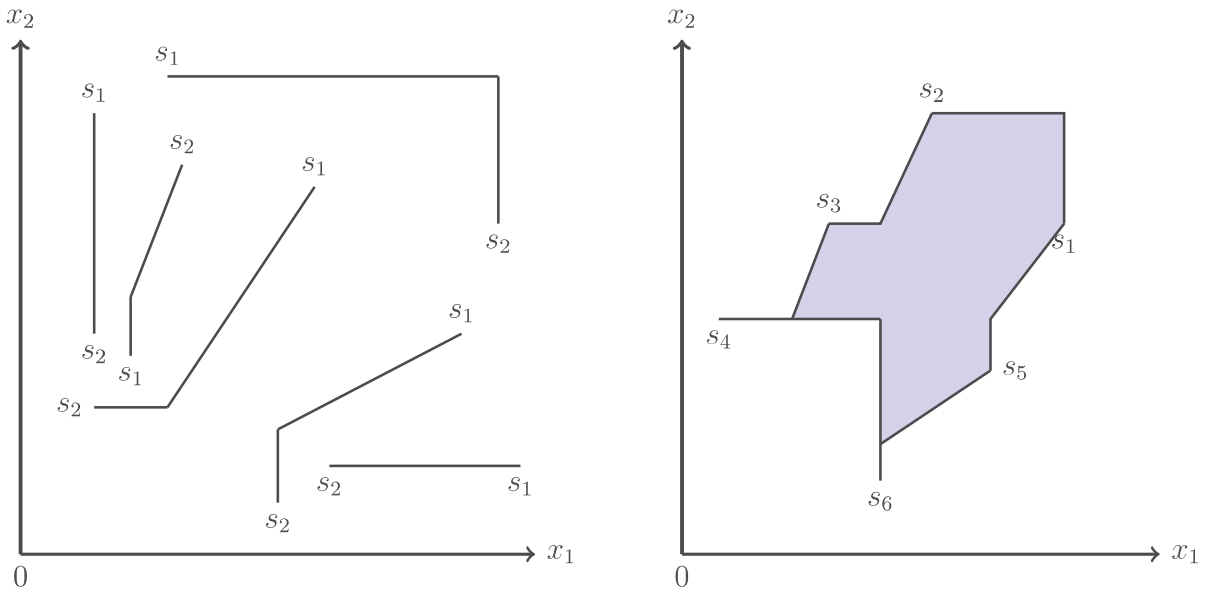


Fig. 3.3: Enveloppe  $\mathbb{B}$ -convexe de deux points (gauche),  $\mathbb{B}$ -polytope(droite).

Sur la figure 3.3 on constate que la figure de droite représentant le  $\mathbb{B}$ -polytope est obtenue par la représentation géométrique des cordes de la figure de gauche, qui est la représentation de différentes enveloppes  $\mathbb{B}$ -convexe de deux points.

À présent, nous allons nous intéresser aux propriétés fondamentales de la  $\mathbb{B}^{-1}$ -convexité qui fut introduite dans [4]. Pour cela, nous adoptons les notations suivantes. Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$  :

$$x \wedge y = (\min\{x_1, y_1\}, \dots, (\min\{x_d, y_d\}). \quad (3.4)$$

De plus, si  $z_1, z_2, \dots, z_l$  sont  $l$  points de  $\mathbb{R}^d$ , alors :

$$\bigwedge_{i=1}^l z_i = (\min\{z_{1,1}, \dots, z_{l,1}\}, \dots, \min\{z_{1,d}, \dots, z_{l,d}\}). \quad (3.5)$$

Considérons l'ordre partiel standard défini sur  $\mathbb{R}^d$ . Un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^d$  est un semi-treillis inférieur si pour tout  $x, y \in D$ ,  $x \wedge y \in D$ . Cette structure de semi-treillis inférieur peut être étendue à partir de l'orthant non négatif  $\mathbb{R}_+^d$  vers  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ , où l'opération  $x \wedge y$  est bien définie en utilisant  $\infty$ , en tant qu'élément absorbant.

**Définition 3.1.2:** Soit  $M \subset (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ .  $M$  est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe, si  $\forall u, z \in M$ , et  $\forall t \in [1, +\infty]$ , on obtient  $u \wedge tz \in M$ .

Les ensembles inverses  $\mathbb{B}$ -convexes sont isomorphiquement liés aux ensembles  $\mathbb{B}$ -convexes. Pour voir cela, considérons  $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$  comme étant la fonction inverse définie par  $\varphi(\alpha) \longrightarrow \frac{1}{\alpha}$ .

Un sous-ensemble  $M \subset \mathbb{R}_{++}^d$  est un ensemble inverse  $\mathbb{B}$ -convexe si et seulement si  $L = \phi^{-1}(M)$  est un ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe, où

$$\phi(z_1, \dots, z_d) = (\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_d)). \quad (3.6)$$

Notons que si,  $z_1, z_2, \dots, z_l$  sont  $l$  points de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ , alors :

$$\bigwedge_{i=1}^l z_i = \phi\left(\bigvee_{i=1}^l \phi^{-1}(z_i)\right). \quad (3.7)$$

En d'autres termes, un sous-ensemble de  $M \subset (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$  est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe si et seulement son inverse est  $\mathbb{B}$ -convexe. Bien que les représentation géométrique respective des ensembles  $\mathbb{B}$ -convexes et des ensembles inverses  $\mathbb{B}$ -convexes soient différentes, elles sont toutes deux liées à travers un isomorphisme sur  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ . Toutes les propriétés indiquées dans la section précédente ne s'appliquent pas dans le cas de vecteurs ayant des composantes nulles. À partir des travaux de [24] les résultats suivants sont immédiats et ne nécessitent pas de preuve.

Les propriétés suivantes ont été établies dans Briec et Liang (2011). Supposons que  $M$  est un sous-ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ . alors :

- (a)  $M$  semi-treillis inférieur.
- (b) Si  $\{z_1, \dots, z_l\} \subset M$  et  $(t_1, \dots, t_l) \in [1, +\infty]^l$  alors  $\bigwedge_{k=1}^l t_k z_k \in M$ .
- (c) Si  $W \subset (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$  est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe, alors  $M \cap W$  est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe.
- (d)  $M$  est un ensemble.

Cette dernière propriété est relative à la topologie induite sur  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$  par la norme  $x \mapsto \varphi^{-1}(\|\phi(x)\|)$ , où  $\|\cdot\|$  est une norme définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\|\cdot\|_\varphi$  cette norme. Pour tout  $A = \{z_1, \dots, z_l\} \subset (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ , l'ensemble

$$\mathbb{B}^{-1}(A) = \left\{ \bigwedge_{k=1}^l s_k z_k, s \geq 0, \min_{k=1 \dots l} s_k = 1 \right\}$$

est appelé l'enveloppe inverse  $\mathbb{B}$ -convexe de  $A$ .

### 3.2 Sur une classe particulière d'ensembles et leur relation avec la $\mathbb{B}$ -convexité

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{L}(X)$  une  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(X)$  contenant une famille  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ . Soit  $\mathcal{M}$  une collection de fonctions d'appartenance indexée à  $\mathcal{L}(X)$ . Supposons par ailleurs que  $\mathcal{M}$  définit produit homogène extérieur et minitif distributif  $\odot$  sur  $\mathcal{A}$ . Si  $v : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  est minitif et homogène pour le produit  $\odot$ , alors :

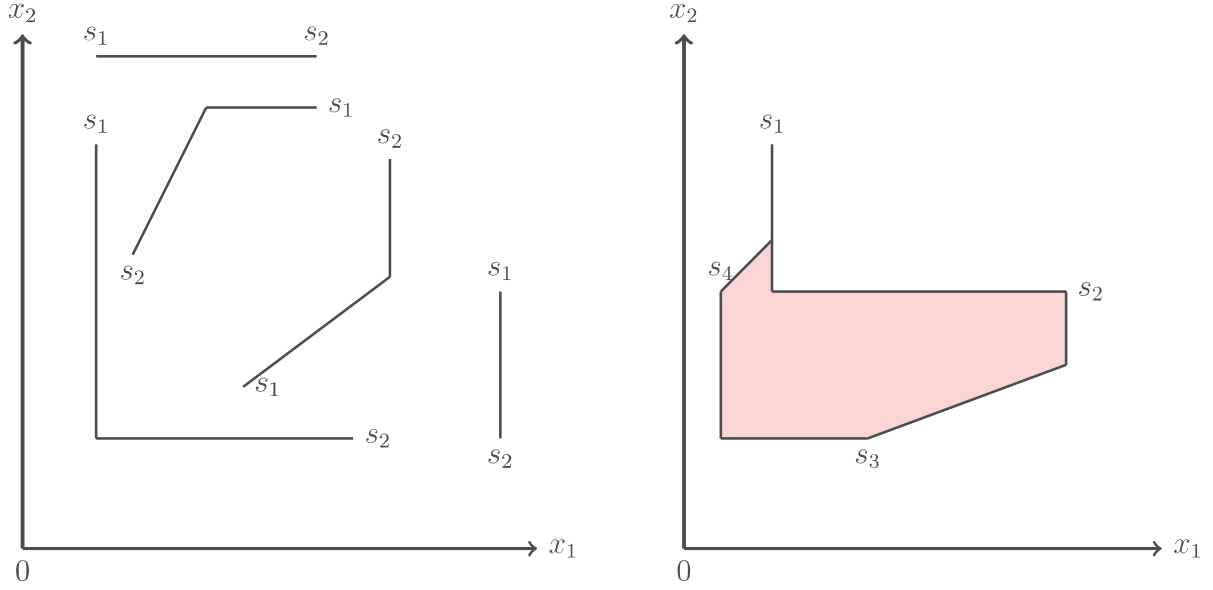


Fig. 3.4: Enveloppe inverse  $\mathbb{B}$ -convexe de deux points (gauche), inverse  $\mathbb{B}$ -polytope(droite).

$$v\left(\bigcap_{i \in I} t_i \odot A_i\right) = \min_{i \in I} t_i v(A_i)$$

Supposons de plus, que  $\mathcal{M}$  définit produit homogène extérieur et maxitif distributif  $\odot$  sur  $\mathcal{A}$ . Si  $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$  est maxitif et homogène pour le produit  $\odot$ , alors :

$$u\left(\bigcup_{i \in I} t_i \odot A_i\right) = \max_{i \in I} t_i u(A_i)$$

Plus généralement, l'ensemble des éléments d'une  $\sigma$ -algèbre est partiellement ordonné par la relation d'inclusion. La inf de deux ensembles est leur intersection, et le sup est leur union. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à une classe plus particulière d'ensembles radians et nous montrons qu'il existe une classe explicite d'isomorphisme établissant une relation entre les propriétés de  $\mathbb{B}$ -convexité et d'intersection.

Tout d'abord, il convient d'établir une connexion entre la mesure de possibilité et la mesure de nécessité. On montre qu'ils sont liés aux notions de  $\mathbb{B}$ -convexité et d'ensembles inverses  $\mathbb{B}$ -convexes. Rappelons qu'une mesure de possibilité est une mesure maxitive particulière. Notons  $\mathcal{M}(X, \mathcal{L})$  l'ensemble de toutes les mesures de possibilité définies sur

$(X, \mathcal{L})$ . De plus, soit  $\mathcal{N}(X, \mathcal{L})$  l'ensemble de toutes les mesures de nécessité. Une mesure de nécessité est une mesure minitive particulière. Le résultat suivant est également valable pour les mesures maxitives et minitives.

**Proposition 3.2.1:** *L'ensemble de toutes les mesures de possibilité est  $\mathbb{B}$ -convexe. l'ensemble de toutes les mesures de nécessité est  $\mathbb{B}$ -convexe.*

*Preuve :* Supposons que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux mesures de possibilité définies sur  $(X, \mathcal{L})$ . Cela signifie que pour tout  $A, B \subset \mathcal{L}$ ,  $\mu_1(A \cup B) = \max\{\mu_1(A), \mu_1(B)\}$  et  $\mu_2(A \cup B) = \max\{\mu_2(A), \mu_2(B)\}$ . Pour tout  $t_1 \in [0, 1]$ ,  $t_1\mu_1(A \cup B) \vee \mu_2(A \cup B) = t_1 \max\{\mu_1(A), \mu_1(B)\} \vee \max\{\mu_2(A), \mu_2(B)\} = \max\{t_1(\mu_1(A) \vee \mu_2(A)), \mu_1(B) \vee \mu_2(B)\}$ , ce qui prouve la première affirmation. La preuve de la deuxième affirmation est similaire. Supposons que  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont deux mesures de nécessité définies sur  $(X, \mathcal{L})$ . Pour tout  $A, B \subset \mathcal{L}$ ,  $\nu_1(A \cap B) = \min\{\nu_1(A), \nu_1(B)\}$  et  $\nu_2(A \cap B) = \min\{\nu_2(A), \nu_2(B)\}$ . Pour tout  $t_1 \in [1, \infty]$ ,  $t_1\nu_1(A \cap B) \wedge \nu_2(A \cap B) = t_1 \min\{\nu_1(A), \nu_1(B)\} \wedge \min\{\nu_2(A), \nu_2(B)\} = \min\{t_1(\nu_1(A) \wedge \nu_2(A)), \nu_1(B) \wedge \nu_2(B)\}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 3.3 Ensembles cubiques et relation avec la $\mathbb{B}$ -convexité

Supposons que  $X = \mathbb{R}_+^d$  et soit  $\mathcal{D}$  une classe d'ensemble cubique “descendant” de  $X$ . Cela signifie que pour tout  $D \subset X$ , il existe un  $s \in X$  tel que  $D = \{x \in X : 0 \leq x \leq s\}$ . En considérant un ordre partiel habituel sur  $\mathbb{R}_+^d$ , on obtient  $D = \downarrow s$ . Remarquons que tous les ensembles de  $\mathcal{D}$  sont radians. Notons  $\mathcal{D}$  l'ensemble de tous les ensembles ayant cette propriété. Nous les dénomerons ensembles cubiques dans ce qui suit. On a tout d'abord la propriété suivante.

**Lemme 3.3.1:** *Pour tout  $s, s' \in X$ , on a*

$$(\downarrow s) \cap (\downarrow s') = \downarrow (s \wedge s').$$

*Preuve :* Pour tout  $s \in X$ , on a  $s \wedge s' \leq s$  et  $s \wedge s' \leq s'$ . Conséquence  $\downarrow (s \wedge s') \subset \downarrow s$  et  $\downarrow (s \wedge s') \subset \downarrow s'$ . Donc  $\downarrow (s \wedge s') \subset (\downarrow s) \cap (\downarrow s')$ . Laissez-nous prouver l'inclusion inverse.

Suppose que  $u \in (\downarrow s) \cap (\downarrow s')$ . Cela implique  $u \leq s$  et  $u \leq s'$ . donc  $u \leq s \wedge s'$ . Ainsi,  $u \in \downarrow (s \wedge s')$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

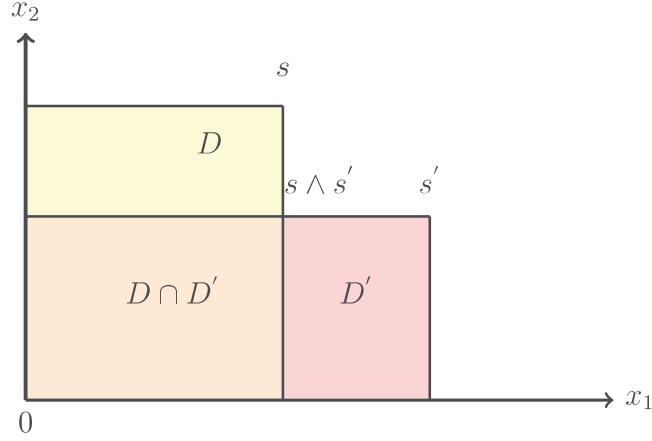


Fig. 3.5: Propriétés d'intersection

Une autre caractéristique intéressante de  $\mathcal{D}$  est qu'il induit une propriété d'homogénéité.

**Lemme 3.3.2:** *Pour tout  $s \in X$ , et tout  $\lambda \geq 0$ , on a*

$$(\downarrow \lambda s) = \lambda(\downarrow s).$$

Par ailleurs, on peut construire de manière immédiate une bijection entre les éléments de  $\mathcal{D}$  et tous les points de  $X$ .

**Lemme 3.3.3:** *Il existe un isomorphisme  $\sup : \mathcal{D} \rightarrow X$  défini par*

$$\sup(D) = \sup\{x : x \in D\}.$$

Pour tout  $\lambda \geq 1$ , le sous-ensemble  $\lambda D$  peut être considéré comme une extension floue de  $D$ . Cet ensemble comprend des éléments dont la fonction d'appartenance relative à  $D$  peut être inférieure à 1. Dans le reste, on notera  $\Phi^\downarrow : \mathcal{D} \rightarrow X$  tel un isomorphisme. Un sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{D}$  vérifie une propriété de nécessité de convexité d'intersection si pour

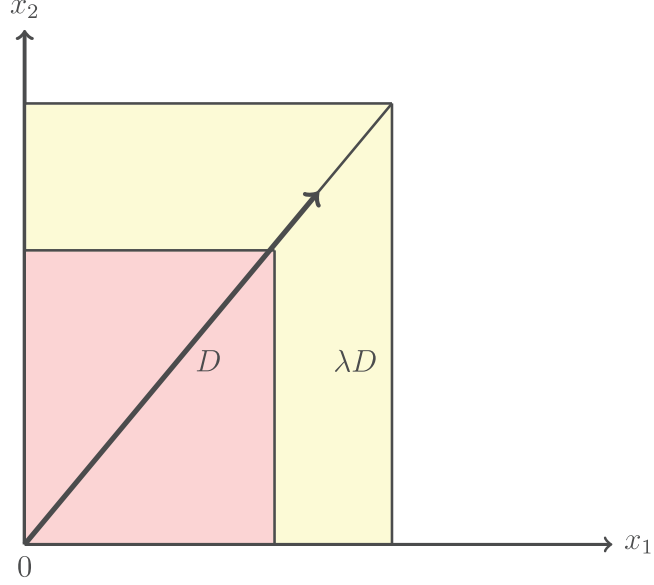


Fig. 3.6: Extension flou d'un ensemble descendant

tout  $A, B \in \mathcal{C}$  et tout  $t \in [1, \infty[$ , nous avons  $A \cap tB \in \mathcal{C}$ . L'intersection d'une enveloppe d'ensemble convexe d'une famille  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{D}$  est la collection de sous-ensemble de  $\mathcal{D}$  défini comme :

$$\mathbb{N}(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{i \in I} t_i A_i : \min_{i \in I} t_i = 1 \right\}. \quad (3.8)$$

Nous introduisons maintenant une classe  $\mathcal{U}$  sous-ensembles “cubiques inverses” de  $X$  tel que pour tout  $U$  dans  $X$ , il existe un  $s \in X$  avec  $U = \{x \in X : x \geq s\}$ . De manière équivalente, en respectant l'ordre partiel usuel défini sur  $X$ , on a  $U = \uparrow s$ . Tous les ensembles de  $\mathcal{U}$  sont des ensembles co-radicaux. Similairement à ce qui se passe dans le cas descendant, on a la propriété suivante :

**Lemme 3.3.4:** *Pour tout  $s, s' \in X$ , on a*

$$(\uparrow s) \cap (\uparrow s') = \uparrow (s \vee s').$$

$\mathcal{U}$  est également positivement homogène.

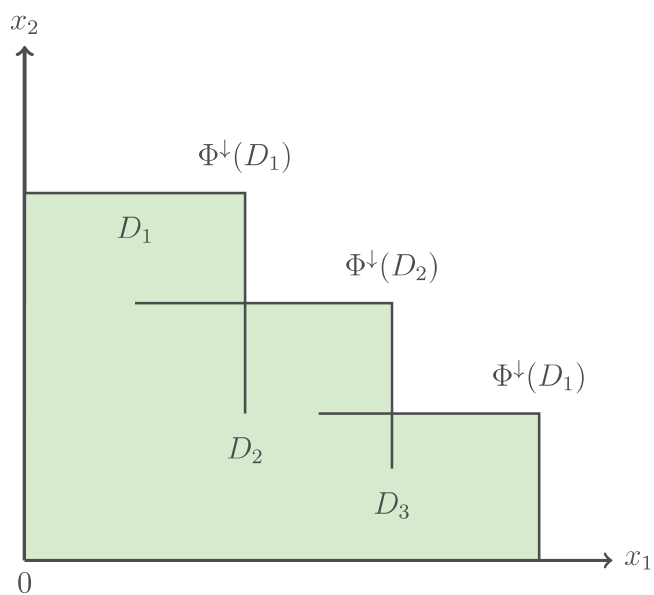


Fig. 3.7: Enveloppe de nécessité descendante

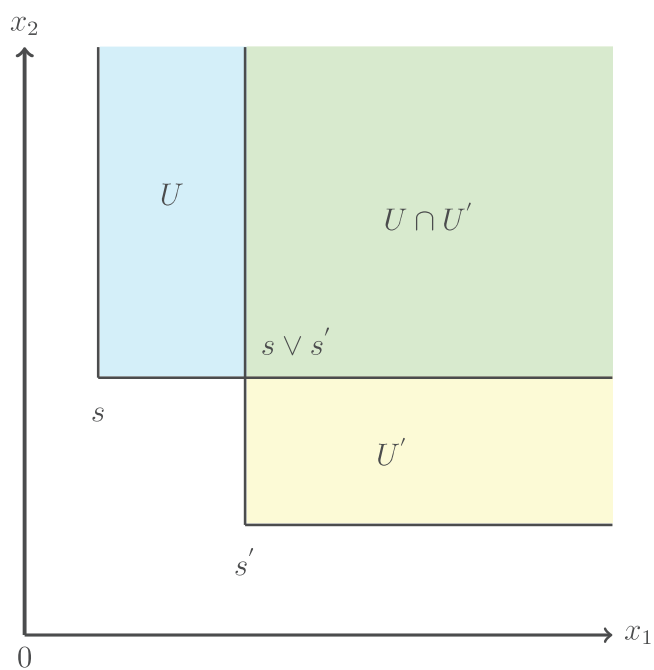


Fig. 3.8: Intersection d'ensembles ascendants

**Lemme 3.3.5:** *Pour tout  $s \in X$ , et tout  $\lambda \geq 0$ , on a*

$$(\uparrow \lambda s) = \lambda(\uparrow s).$$

On peut également identifier  $\mathcal{U}$  aux points de  $X$ .

**Lemme 3.3.6:** *Il existe un isomorphisme  $\inf : \mathcal{U} \longrightarrow X$  défini par*

$$\inf(U) = \inf\{x : x \in U\}.$$

Dans qui suit, nous noterons  $\Phi^\uparrow : \mathcal{U} \longrightarrow X$  un tel isomorphisme. L'implication d'une transformation homothétique d'un ensemble cubique inverse de référence donné dans  $\mathcal{U}$  est analysée. Parallèlement à la sous-section précédente, l'idée de base est qu'un décideur peut augmenter proportionnellement l'ensemble de référence sur lequel il (ou elle) optimise. Puisque l'ensemble dont il s'agit ici est augmenté, le facteur de proportionnalité devrait être inférieur à 1. En ce qui concerne l'ensemble de référence, il (ou elle) se réfère à la fonction d'appartenance qui sera réduite dans la même proportion. La preuve est triviale et omise.

**Lemme 3.3.7:** *Pour tout  $\lambda \leq 1$ , et tout  $U \in \mathcal{U}$  on a :*

$$\lambda U = \{x \in X : \nu_U(x) \geq \lambda\}.$$

Intuitivement, cela signifie que lorsque l'on augmente de façon homogène l'ensemble  $D$ , alors la valeur de la fonction d'appartenance est réduite de façon inverse et proportionnelle. Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , l'ensemble  $\lambda U$  peut être considéré comme une extension floue d'un ensemble ascendant  $U$  pour lequel la fonction d'appartenance est inférieure à un.

Parallèlement au cas plus général des ensembles radians et co-radians, on peut introduire une notion de convexité par intersection ou par union. Un sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{U}$  vérifie l'hypothèse de nécessité convexe ascendante si pour tout  $A, B \in \mathcal{C}$  et tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons :

$$A \cap tB \in \mathcal{C}.$$

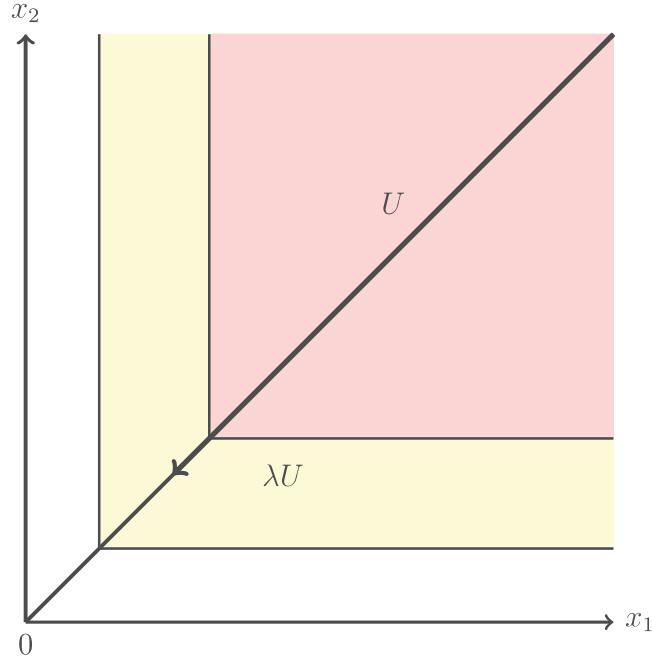


Fig. 3.9: Extension floue d'un ensemble ascendant

Dans ce cas particulier, l'enveloppe convexe par intersection  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{D}$  est la collection de sous-ensemble de  $\mathcal{U}$  définie telle que :

$$\mathbb{N}(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{i \in I} t_i A_i : \max_{i \in I} t_i = 1 \right\}. \quad (3.9)$$

On peut alors montrer que ces convexités par intersection sont respectivement équivalentes à  $\mathbb{B}^{-1}$ -convexité et  $\mathbb{B}$ -convexity.

**Proposition 3.3.8:** *Une famille  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  est convexe par intersection si et seulement si :  $\sup \mathcal{C} = \{\sup C : C \in \mathcal{C}\}$  est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe.*

*Preuve :* Supposons que  $\mathcal{C}$  est l'intersection d'ensemble convexe et prouvons que  $\sup \mathcal{C}$  est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe. Premièrement, remarquons que  $\sup \mathcal{C}$  est un sous-ensemble de  $X$ . Supposons que  $x, y \in \sup \mathcal{C}$ . Par définition  $\downarrow x \in \mathcal{C}$  et  $\downarrow y \in \mathcal{C}$ . Puisque  $\mathcal{C}$  est convexe nécessité, pour tout  $t \geq 1$ ,  $(\downarrow x) \cap t(\downarrow y) = (\downarrow x) \cap (\downarrow ty) \in \mathcal{C}$ . Donc  $\downarrow (x \wedge ty) \in \mathcal{C}$ . Ainsi,  $x \wedge ty = \sup\{\downarrow (x \wedge ty)\} \in \sup \mathcal{C}$  qui, par conséquent, est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe. Inversement,

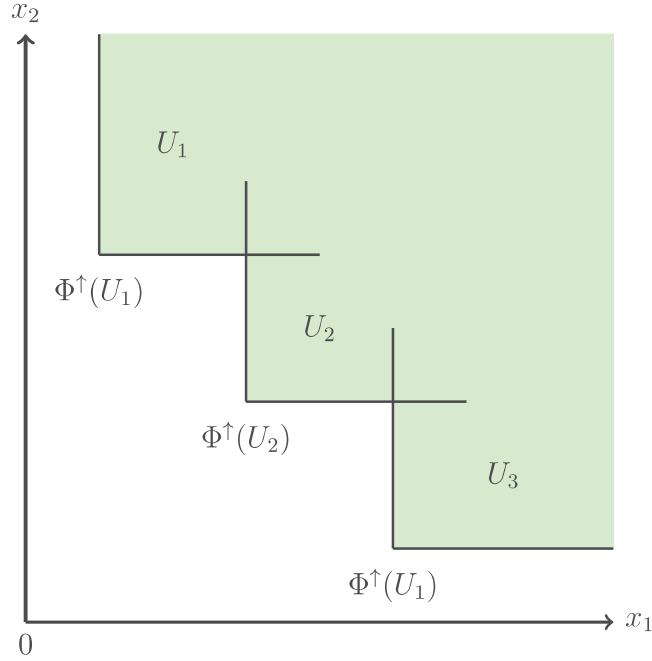


Fig. 3.10: Enveloppe de nécessité ascendante.

supposons que  $\sup \mathcal{C}$  est inverse  $\mathbb{B}$ -convexe. Supposons que  $C, D \in \mathcal{C}$ . Soit  $x = \sup C$  et  $y = \sup D$ . Par hypothèse pour tout  $t \geq 1$ , et tout  $x, y \in \sup \mathcal{C}$ , on a  $x \wedge ty \in \sup \mathcal{C}$ . Donc  $C \cap tD = \downarrow (x \wedge ty) \in \mathcal{C}$ . Ainsi  $\mathcal{C}$  est convexe par intersection ce qui conclut la preuve.  $\square$

Un résultat similaire est obtenu pour les cubes inversés reliés à la notion de  $\mathbb{B}$ -convexité.

**Proposition 3.3.9:** *Une famille  $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$  est convexe par union si et seulement si  $\inf \mathcal{C} = \{\inf C : C \in \mathcal{C}\}$  est  $\mathbb{B}$ -convexe.*

*Preuve :* Supposons  $\mathcal{C}$  est convexe par union et prouvons que  $\inf \mathcal{C}$  est  $\mathbb{B}$ -convexe. Premièrement, notons que  $\inf \mathcal{C}$  est un sous-ensemble de  $X$ . Supposons que  $x, y \in \inf \mathcal{C}$ . par définition  $\uparrow x \in \mathcal{C}$  et  $\uparrow y \in \mathcal{C}$ . Puisque  $\mathcal{C}$  est convexe par intersection pour  $t \in [0, 1]$ ,  $(\uparrow x) \cap t(\uparrow y) = (\uparrow x) \cap (\uparrow ty) \in \mathcal{C}$ . Donc  $\uparrow (x \vee ty) \in \mathcal{C}$ . Ainsi,  $x \vee ty = \inf \{\uparrow (x \vee ty)\} \in \inf \mathcal{C}$  qui, par conséquent, est  $\mathbb{B}$ -convexe. Inversement, supposons que  $\inf \mathcal{C}$  est  $\mathbb{B}$ -convexe. Supposons que  $C, D \in \mathcal{C}$ . Soit  $x = \inf C$  et  $y = \inf D$ . Par hypothèse pour tout  $t \in [0, 1]$ , et

$x, y \in \inf \mathcal{C}$ , on a  $x \vee ty \in \inf \mathcal{C}$ . Ainsi  $C \cap tD = \uparrow (x \vee ty) \in \mathcal{C}$ . Donc  $\mathcal{C}$  est convexe par intersection ce qui conclut cette preuve.  $\square$

## 4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons mobilisé la théorie des ensembles flous pour définir une structure de convexité en prenant en considérant la notion de fonction d'appartenance à un ensemble. Plus précisément nous avons proposé premièrement une structure de convexité qui porte sur des collections d'ensembles munies d'un produit, construit à partir de la notion de fonction d'appartenance. Deuxièmement, nous avons pu définir des mesures de possibilité et de nécessité liés à l'intersection et/ou à l'union des ensembles flous précédemment définis et ainsi établir un parallèle entre les fonctions de distance et d'appartenance. Troisièmement, il en découle en effet que la structure de convexité par intersection et union est étroitement liée à la  $\mathbb{B}$ -convexité, qui implique quant à elle l'ordre partiel standard défini sur un espace vectoriel Euclidien. En effet, dans ses travaux [97, 98] Nash a défini la notion d'équilibre et a prouvé son existence sous une hypothèse de convexité des ensembles de stratégies et de la quasi-concavité et de la semi-continuité supérieur des préférences. Puisque l'existence d'un équilibre peut être formalisée en terme d'un problème de point fixe approprié, la convexité joue un rôle central pour prouver l'existence d'un équilibre de Nash.

Ces éléments mis en place vont nous permettre dans le chapitre 4, de proposer une classe de jeux flous qui est rendue opératoire dans le contexte de la  $\mathbb{B}$ -convexité, qui garantit la propriété de point fixe. De plus, nous proposons au chapitre 5 d'intégrer notre contribution sur la généralisation de la fonction d'appartenance que nous avons défini au chapitre 2 à la structure de convexité définie dans ce chapitre pour proposer une compréhension plus riche des décisions individuelles et/ou collective dans un contexte d'informations floues.

## 4. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES JEUX

*“Toute connaissance dégénère en probabilité.”*

DAVID HUME<sup>1</sup>

---

### Sommaire

<b>1</b>	INTRODUCTION . . . . .	<b>92</b>
<b>2</b>	GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS . . . . .	<b>94</b>
<b>3</b>	FORMES D’UN JEU . . . . .	<b>95</b>
3.1	Représentation d’un jeu sous la forme extensive . . . . .	96
3.2	Représentation d’un jeu sous forme normale . . . . .	96
<b>4</b>	STRATÉGIE, DOMINANCE ET ÉQUILIBRE . . . . .	<b>98</b>
<b>5</b>	ÉQUILIBRE DE NASH . . . . .	<b>102</b>
5.1	Équilibre de Nash en stratégies pures . . . . .	102
5.2	Stratégies mixtes et convexification . . . . .	104
<b>6</b>	POINT FIXE ET ÉQUILIBRES . . . . .	<b>109</b>
<b>7</b>	INTRODUCTION DES NOUVEAUX TYPES DE JOUEURS . . . . .	<b>109</b>
<b>8</b>	ÉQUILIBRE DE NASH DANS LE CAS DE JEUX $\mathbb{B}$ -CONVEXE . . . . .	<b>111</b>
8.1	Points fixes et $\mathbb{B}$ -convexité . . . . .	111
8.2	Jeux ascendants . . . . .	113
8.2.1	Stratégies pures et équilibre . . . . .	114
8.2.2	Stratégies mixtes et fonction de coût inverse Léontief . . . . .	116
8.3	Jeux descendants et stratégies mixtes inverses . . . . .	121

---

1. *Traité de la nature humaine*, 1739.

8.4	Jeux avec mesures maxitives et minitives . . . . .	126
<b>9</b>	<b>CONCLUSION . . . . .</b>	<b>132</b>

---

## 1 INTRODUCTION

La théorie des jeux est avant tout un champ d'analyse théorique qui tire son origine des travaux de Von Neumann<sup>2</sup> alors que celui-ci travaillait à la démonstration du théorème du minimax en 1928<sup>3</sup>. Les mathématiciens français Borel et Ville [150] sont également contributeurs de cette nouvelle théorie, puisqu'ils démontrent de leur côté le théorème de minimax. Ce n'est qu'en 1944 que la théorie des jeux va s'imposer comme un domaine d'analyse à part entière, notamment avec la parution de l'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern "The Theory of Games and Economic Behavior", dans lequel ils détaillent la résolution des jeux à somme nulle. Avec cet ouvrage les deux chercheurs ouvrent la voie à une approche formalisée de la compréhension de la prise de décision stratégique. Ils définissent alors l'objectif de la théorie des jeux stratégiques comme suit :

"Nous souhaitons mettre au jour les principes mathématiques complets qui définissent le "comportement rationnel" des participants à une économie sociale, et en déduire les caractéristiques générales d'un tel comportement. Et, tandis que les principes pourraient être très généraux -i.e., validés dans toutes les situations, nous serons satisfaits si nous pouvons trouver des solutions qui, pour le moment ne valent que pour certains cas particuliers représentatifs." <sup>4</sup>

À partir de cette citation, nous pouvons retirer trois éléments fondamentaux de cette théorie :

---

2. En réalité la théorie des jeux, même s'y elle ne se nomme ainsi que 3 siècles plus tard, a intéressé Pascal (1654) notamment lorsqu'il travaillait sur le "Pari de Pascal". Les correspondances qu'il entretenait avec Fermat concernant le jeu "Pile ou croix" (utilisant une pièce avec une croix sur l'avvers) afin d'établir la juste répartition d'un prix, si les joueurs devaient se séparer avant la fin, peut être considérées comme les prémisses de la théorie des jeux. Les contributions de Pascal et de Fermat ont permis l'émergence d'une théorie de la décision basée sur le calcul des probabilités. Par la suite, N. Bernoulli au 18ème siècle s'interroge sur la modélisation des scores de probabilités sur des parties du jeu de paume où l'un des compétiteurs serait deux fois plus fort que son adversaire.

3. Ce théorème énonce que dans un jeu à somme nulle avec information parfaite, les joueurs possèdent un ensemble de stratégies dites optimales. Conséquence, deux joueurs rationnels ont chacun intérêt à jouer leur stratégie optimale et ne pas en changer.

4. Traduit par Gaël Giraud, *La théorie des jeux*, Champs Essais 3ème édition, 2009.

1. *L'objectif de la théorie* : la théorie des jeux stratégiques a pour objectif l'étude des comportements individuels ou collectifs en vue de déterminer la solution optimale ;
2. *La définition d'un jeu* : un jeu est une situation particulière où des joueurs ayant chacun des actions stratégiques possibles et une fonction de gain associée à chaque combinaison d'action possible, doivent effectuer un choix. Les joueurs peuvent être en situation de non coopération ou en situation de coopération.
3. *Contexte d'application* : de notre point de vue l'intérêt de cette citation tient en réalité, à la cohérence de leur propos. En effet, leur objectif n'est pas de décrire directement le comportement des individus mais bien de définir les principes mathématiques d'un comportement dit "rationnel" qui ne "vaut que dans certains cas particuliers".

La théorie des jeux a structuré la recherche de nombreux théoriciens parmi lesquels Harsanyi, Nash et Selten (1994) ; Aumann, Schelling (2005) ; Hurwicz, Maskin, Myerson (2007) ; Roth, Shapley (2012) ; et enfin Thaler (2017), lauréats du prix Nobel d'économie. Si la théorie des jeux a particulièrement intéressé l'économie son domaine d'application est bien plus vaste. En effet, elle a également impulsé un souffle nouveau dans d'autres disciplines scientifiques et ses applications sont vastes allant de la biologie évolutive (Smith 1973), aux relations internationales, à la prospection publicitaire en passant par la simulation de conflit des armées ou encore la mise en place d'aides humanitaires (Stoffaes[138]), mais aussi en science politique (Harper 1957) ou en informatique (Boussaton [31]).

L'objet de ce chapitre consiste dans une première partie à donner les résultats fondamentaux de la théorie des jeux. Nous revenons plus précisément sur les concepts, de stratégies, dominances ainsi que d'équilibre. Nous reprenons les conditions pour l'existence de cet équilibre. L'intérêt de cette partie provient du fait que nous allons définir les stratégies mixtes grâce au concept de probabilité. Nous rappelons ainsi qu'il existe des équilibres en stratégie mixte. À partir de ce rappel, nous décidons de remplacer le concept de probabilité par celui de possibilité et nous cherchons les conditions et les conséquences de ce changement de classe de jeu. Nous formons ainsi de nouveaux types de joueurs considérés comme soit optimiste, pessimiste ou neutre. Nous montrons qu'il existe des jeux pour lesquels des équilibres peuvent être trouvés et qu'il est possible de faire jouer

différents types de joueur et atteindre un équilibre de Nash.

Le chapitre est constitué de la manière suivante : une première partie qui comprend les sections 2 à 6 constitue un survey de la théorie des jeux. Nous présentons, les concepts fondamentaux d'un jeu, les formes que ce dernier peut revêtir, ainsi que les concepts de dominances, stratégie et équilibre. L'objectif de cette première partie, est de présenter les équilibres de Nash purs et mixtes d'une part et d'autre part, leurs condition d'existence à savoir le théorème du point fixe. L'intérêt provient du fait que les équilibres de Nash mixte utilisent le concept de probabilité pour capter l'indifférence des joueur. Le lecteur avertit pourra directement se référer à la section 7 qui contient l'apport que nous avons réalisé. Ainsi, nous introduisons des types de joueurs, qui ne jouent plus seulement en utilisant les probabilités mais bien les possibilités. Dans la section 8 nous plaçons les joueurs dans divers jeux  $\mathbb{B}$ -convexes. L'intérêt et que nous montrons qu'il existe effectivement des équilibres de Nash pour cette classe de jeu.

## 2 GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS

Les jeux définis par le théorie des jeux correspondent à des objets mathématiques clairement définis. Afin de définir un jeu nous reprendrons la définition donnée par H. Moulin qui énonce qu' "un jeu est un objet mathématique formalisant un conflit entre plusieurs agents (nommés joueurs), c'est-à-dire une situation qu'ils jugent selon des préférences contradictoires et dont ils peuvent influencer certains paramètres." À partir de cette définition, il ressort qu'il existe une interdépendance entre les agents par rapport à leur choix stratégiques, de sorte que le gain de chacun dépend non seulement de ses propres actions mais aussi des actions du ou des autre(s) joueur(s). Pour la suite de ces travaux nous utiliserons les notations suivantes pour définir un jeu. Ainsi, un jeu est défini par :

- Un ensemble fini de joueurs noté  $\ell = \{1, 2, \dots, n\}$ . Cet ensemble de joueur peut être (des individus, des entreprises, des établissements financiers, des états, etc.)
- Un ensemble de stratégies pour tout joueur  $i \in \ell$  noté  $S_i$  dans  $\mathbb{R}^{d_i}$ , il s'ensuit que  $S = \prod_{i \in [n]} S_i$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d = \sum_{i \in [n]} d_i$ . En outre, nous supposons

que  $S_i$  est compact.

- Une fonction d'utilité ou de gain notée  $u_i$  pour tout joueur  $i$  représentant les préférences de ce joueur. Cette fonction est donnée par :  $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ , celle ci est continue. Pour tout  $s \in S$  nous noterons :

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i})$$

où  $s_{-i} \in S_{-i}$  représente la stratégie des autres joueurs. Un jeu à  $n$  joueurs se définit alors comme une collection  $\mathcal{G} = \{(S_i)_{i \in [\ell]}, (u_i)_{i \in [\ell]}\}$ , qui inclut les préférences et les ensembles de stratégies des joueurs.

Remarque : Il est à noter qu'une des hypothèse centrale de la théorie des jeux repose sur la rationalité des joueurs. On entend ici par rationalité le fait que chaque joueur cherche à maximiser sa fonction d'utilité (représentant ses préférences). L'interdépendance entre les joueurs implique notamment que cette maximisation n'a rien de naïve mais correspond à la prise en compte d'erreurs éventuelles de la part des autres joueurs. Cette hypothèse de rationalité à été fortement critiquée notamment par H. Simon qui préféra utiliser le concept de rationalité limitée. Mais ce sont les travaux d'Axelrod [10] qui mettront en avant l'idée de la rationalité limitée au sein de la théorie des jeux. Il demanda à des informaticiens de créer les programmes qui pourraient répondre à des jeux de manière optimale (nous développerons ce point un peu plus loin). Il conclut que la stratégie du talion était optimale. Cette stratégie consiste à jouer exactement ce que le joueur précédent a joué de sorte que l'on puisse remplacer les joueurs par des machines ([62])

### 3 FORMES D'UN JEU

Pour décrire un jeu, il est avant tout essentiel de connaître les informations et les règles mises à disposition des joueurs pour les aider à faire leurs choix. Les joueurs peuvent avoir une information complète du jeu, c'est le cas par exemple des Echecs ou du jeu de Go. Dans ce cas, les deux joueurs connaissent le déroulement complet du jeu. Dans les autres cas, si les connaissances des joueurs sont limitées, le jeu est à information incomplète (ou imparfaite). Définir dans quelle dimension temporelle s'inscrit le jeu est fonde-

tale pour le bon déroulement de celui-ci. Cela revient à définir si les joueurs jouent de manière séquentielle (par exemple les Echecs ou du jeu de Go) ou si les joueurs jouent simultanément (par exemple le jeu Pierre Feuille Ciseaux). Une fois ces règles établies, il est alors possible d'obtenir une représentation du jeu. Un jeu peut être représenté sous différentes formes. Les deux formes les plus utilisées sont la forme extensive (ou arbre à jeu) et la forme normale (ou stratégique).

### 3.1 Représentation d'un jeu sous la forme extensive

La forme extensive d'un jeu est un graphe dirigé sans cycle (un arbre). Ce graphe est constitué d'un ensemble de noeuds qui correspondent à un résultat du jeu. Les noeuds non terminaux sont connectés les uns aux autres par des flèches correspondant à des événements, des décisions ou des actions associés à chaque joueur. La figure 4.1 met en lumière l'énoncé de l'illustration suivante : considérons le jeu pour lequel le joueur 1 dispose des stratégies  $\{s_1, s_1'\}$  et le joueur 2 dispose des stratégies  $\{s_2, s_2'\}$ . Dans ce cas de figure le joueur doit élaborer sa stratégie sans rien connaître de ce que fait l'autre joueur. Le joueur 1 et le joueur 2 décident au même moment mais dans les faits nous représentons le joueur 1 en premier. Le dernier noeud (c'est-à-dire celui non connecté) représente le gain associé à chaque joueur. Ainsi, le gain  $(3, 2)$  correspond au cas où le joueur 1 joue sa stratégie  $s_1$  et que le joueur 2 joue sa stratégie  $s_2$ .

Il est possible de faire des représentations extensives pour les jeux séquentiels et non séquentiels. Cependant cette représentation souffre d'un biais. En effet, lorsque le jeu admet plusieurs joueurs, chacun doté d'une multitude de stratégies la représentation des stratégies et des gains associés devient plus complexe ce qui implique l'utilisation de la forme normale.

### 3.2 Représentation d'un jeu sous forme normale

Lorsque l'ensemble de stratégies de chacun des joueurs est fini, un jeu peut être représenté par une multi-matrice de paiements dont les entrées sont les paiements (i.e.

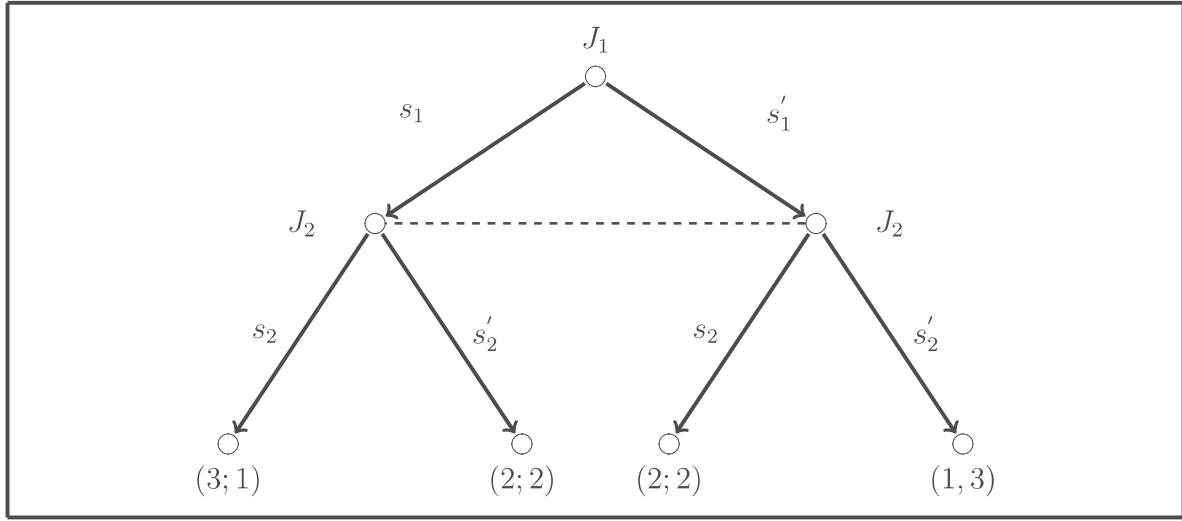


Fig. 4.1: Représentation d'un jeu sous forme extensive

gains) des joueurs résultant de chaque stratégie  $s \in S$ . Dans le cas classique à deux joueurs, le jeu peut être représenté par une bi-matrice. Le tableau 4.4 représente sous forme matriciel le jeu présenté dans le paragraphe précédent.

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	3, 1	2, 2
$s'_1$	2, 2	1, 3

Tab. 4.1: Représentation d'un jeu sous forme normale

Remarque : Lorsque la forme normale est utilisée pour représenter des jeux séquentiels, alors on fait l'hypothèse que les joueurs choisissent leur stratégie définitivement. Dès lors, qu'ils se sont engagés dans une stratégie les joueurs ne peuvent pas en changer.

Il est possible de représenter l'utilité de chaque combinaison de stratégie pour chaque joueur. Ainsi, en considérant l'exemple précédent on obtient les différentes utilités suivantes :

- pour le joueur 1 :  $u_1(s_1, s_2) = 3$  ,  $u_1(s_1, s'_2) = 2$  ,  $u_1(s'_1, s_2) = 2$  ,  $u_1(s'_1, s'_2) = 1$  ;
- pour le joueur 2 :  $u_2(s_1, s_2) = 1$  ,  $u_2(s_1, s'_2) = 2$  ,  $u_2(s'_1, s_2) = 2$  ,  $u_2(s'_1, s'_2) = 3$ .

Formellement, un jeu sous forme stratégique sera noté :  $\mathcal{G} = \{(S_i)_{i \in [\ell]}, (u_i)_{i \in [\ell]}\}$

La forme stratégique est très avantageuse pour caractériser toutes les situations pour lesquelles les joueurs jouent simultanément. C'est à partir de ce type de jeu que nous allons caractériser la notion de dominance.

## 4 STRATÉGIE, DOMINANCE ET ÉQUILIBRE

À partir de l'ensemble des stratégies pour chaque joueur, il est possible de déterminer les stratégies qui sont dites dominantes c'est-à-dire qui sont plus susceptibles d'être jouées. Caractériser ces stratégies dominantes revient à définir toutes les stratégies du jeu. De manière assez binaire, il existe deux types de stratégies les stratégies dominantes et les stratégies dominées. Pour passer de l'une à l'autre il suffit de modifier le sens des inégalités de la définition suivante :

**Définition 4.0.1:** Soit le jeu stratégique  $\mathcal{G} = \{(S_i)_{i \in [\ell]}, (u_i)_{i \in [\ell]}\}$ , la stratégie  $s_i^0$  est dite est strictement dominée par la stratégie  $s_i^1$  si et seulement si :

$$\forall s_{-i}, u_i(s_{-i}, s_i^0) < u_i(s_{-i}, s_i^1)$$

où  $s_{-i}$  représente les stratégies du joueur  $-i$ .

Par suite la stratégie  $s_i^0$  est dite faiblement dominée par  $s_i^1$  si et seulement si :

$$\forall s_{-i}, u_i(s_{-i}, s_i^0) \leq u_i(s_{-i}, s_i^1)$$

De manière générale, la stratégie  $s_i^0$  est dite faiblement dominée par  $s_i^1$  si et seulement si :

$$\forall s_{-i}, u_i(s_{-i}, s_i^0) \leq u_i(s_{-i}, s_i^1)$$

Dans le cas où la stratégie  $s_i^*$  domine toutes les autres stratégies du jeu, alors elle correspond à la stratégie dominante du jeu. Cette stratégie, lorsqu'elle existe, est unique puisque dans le cas contraire il existerait une solution qui apporterait le gain, ce qui contreviendrait à l'idée de l'inégalité stricte. Si une stratégie est du jeu est dominante alors elle sera effectivement jouée. Ceci étant, il peut exister plusieurs stratégies faiblement dominantes.

**Définition 4.0.2:** Une stratégie  $s_i^* \in S_i$  est dominante pour le joueur  $i$  si pour tout  $(s_i, s_{-i}) \in S$ ,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}).$$

Si pour tout  $i \in [\ell]$ ,  $s_i^*$  est une stratégie dominante du joueur  $i$ , alors  $s^*$  est un équilibre en stratégie dominante.

Dès lors, chacun des joueurs joue sa stratégie dominante il n'a plus intérêt à en dévier et ce même si l'autre joueur change de stratégie, de sorte qu'il existe un équilibre, nommé équilibre en stratégie dominante.

Afin d'illustrer le concept de dominance considérons les exemples suivants :

Exemple 4.0.3: Considérons le jeu suivant, ou deux journaux A et B titrent principalement sur le sport et sur l'économie. 70 % des lecteurs sont intéressés par le sport et 30 % par l'économie. Le jeu sous forme normale est donnée par le tableau 4.2.

A \ B	$s_2 = Sport$	$s'_2 = Economie$
$s_1 = Sport$	35 , 35	70 , 30
$s'_1 = Economie$	30 , 70	15 , 15

Tab. 4.2: Existence d'un équilibre en stratégie dominante

Exemple 4.0.4: Il peut cependant ne pas exister d'équilibre en stratégie dominante. C'est notamment le cas si on considère que le journal A est lu 60 % du lectorat et le journal B, est lu par les 40 % restants. Le jeu sous forme normale est donnée par le tableau 4.3.

A \ B	$s_2 = Sport$	$s'_2 = Economie$
$s_1 = Sport$	42 , 28	70 , 30
$s'_1 = Economie$	30 , 70	18 , 12

Tab. 4.3: Absence d'un équilibre en stratégie dominante

La répartition des lecteurs modifie la structure du jeu pour lequel il n'y a plus d'équilibre en stratégie dominante puisque le joueur deux ne joue plus sa stratégie dominante.

À partir de ces deux exemples, il est possible de conclure que pour le jeu 4.2 il existe un équilibre en stratégie dominante donnée par  $(s_1, s_2)$ . Par contre, pour le jeu 4.3 il n'existe pas d'équilibre en stratégie dominante.

L'exemple de jeu le plus couramment utilisé pour caractériser les équilibres en stratégie dominante reste à ce jour le jeu du dilemme du prisonnier. Il fut à l'origine proposé par Merrill Flood and Melvin Dresher lorsqu'ils travaillaient à la Rand Corporation dans les années 50. Par la suite, Albert Tucker formalisa le jeu. Ce concept a beaucoup d'applications en économie internationale (cartels), en politique internationale ou psychologie. L'énoncé peut être formulé de la manière suivante :

Deux suspects d'un crime majeur sont détenus dans des cellules séparées. La police a assez de preuves pour condamner chacun d'entre eux pour des crimes mineurs mais pas assez pour les condamner pour le crime majeur, à moins que l'un d'entre eux ne dénonce l'autre. Si les deux suspects se taisent, ils seront chacun condamnés à un an de prison. Si seulement l'un d'entre eux dénonce l'autre, il sera libéré et utilisé en tant que témoin contre l'autre qui écoperà de 10 ans de prison. Enfin si les deux se dénoncent l'un l'autre, ils passeront chacun 5 ans en prison<sup>5</sup>.

Ainsi, chaque joueur (suspect) possède deux stratégies (Dénoncer, Se taire) la première revient à coopérer avec la police, la seconde revient à coopérer avec son acolyte. Les préférences des deux joueurs sont uniquement motivées par le fait d'éviter les années de prison et peuvent être résumés de la manière suivante :

- pour le joueur 1 :  $u_1(\text{Dénoncer}, \text{Se taire}) > u_1(\text{Se taire}, \text{Se taire}) > u_1(\text{Dénoncer}, \text{Dénoncer}) > u_1(\text{Se taire}, \text{Dénoncer})$  ;
- pour le joueur 2 :  $u_2(\text{Dénoncer}, \text{Se taire}) > u_2(\text{Se taire}, \text{Se taire}) > u_2(\text{Dénoncer}, \text{Dénoncer}) > u_2(\text{Se taire}, \text{Dénoncer})$  ;.

---

5. Cette version du dilemme du prisonnier est reprise du cours de théorie des jeux de Renaud Burlès et Dominique Henriot de l'université de Centrale Marseille 2016-2017.

$1 \backslash 2$	Se taire	Dénoncer
Se taire	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
Dénoncer	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

Tab. 4.4: Représentation du jeu du dilemme du prisonnier sous forme normale

Ce jeu illustre l'intérêt que les joueurs ont à coopérer ensemble, mais aussi l'intérêt d'essayer de dénoncer l'autre en espérant que l'autre ne le dénonce pas. Le dilemme du prisonnier est un exemple standard d'un jeu où deux joueurs peuvent rationnellement être amenés à ne pas coopérer alors que ce n'est pas leur intérêt. En effet, d'après les fonctions de gains qui sont affectées à chacun des joueurs, il est possible de montrer que la stratégie "Se taire" est strictement dominée par la stratégie "Dénoncer". Cette dominance est vraie pour les deux joueurs qui ont tout intérêt à mutuellement se dénoncer ce qui correspond à la résolution du jeu. Cette résolution du jeu est aussi appelé équilibre du jeu en stratégie dominante.

Il est facile de vérifier que ce jeu possède une stratégie dominée qui correspond à la stratégie "(Se taire, Se taire)" et qui permet d'avoir un gain plus important. De sorte qu'en cherchant à maximiser son intérêt individuel on arrive à une situation sous optimale au sens de Pareto<sup>6</sup>.

La théorie des jeux repose sur quelques hypothèses concernant les joueurs du jeu qui peuvent être résumées de la manière suivante :

- H1 : Tous les joueurs sont rationnels.
- H2 : Un joueur rationnel ne joue jamais une stratégie strictement dominée.
- H3 : La rationalité et le jeu sont une connaissance commune entre les joueurs.

Ainsi grâce à ces hypothèses il est possible de supprimer chaque stratégie dominée et donc de trouver la stratégie dominante du jeu qui sera effectivement jouée par chacun des

---

6. L'optimalité au sens de Pareto peut s'énoncer de la manière suivante : c'est une situation pour laquelle on ne peut accroître sa satisfaction sans détériorer celle d'autrui. Dans ce cas, en jouant la stratégie "Se taire" le suspect ne détériore pas la satisfaction de l'autre bien au contraire il l'améliore.

joueurs. Il est à noter que l'ordre de l'élimination des stratégies strictement dominées n'a aucune incidence sur le résultat du jeu, ce qui n'est pas le cas des stratégies faiblement dominées.

## 5 ÉQUILIBRE DE NASH

### 5.1 Équilibre de Nash en stratégies pures

Dans de nombreux types de jeux, il n'existe pas de stratégie dominante ou dominée. Même une méthode itérative d'élimination des stratégies dominées ne suffit pas. Il faut alors recourir aux apports de Nash et plus précisément à l'équilibre qui porte son nom. Afin de comprendre l'équilibre de Nash, il convient de revenir sur les apports de Von Neumann et Morgenstern notamment sur le théorème du minimax.

**Proposition 5.1.1:** mini-max Soit  $K$  et  $M$  deux sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $f : K \times L \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue quasi-concave, alors :

$$\min_{x \in K} \max_{y \in L} f(x, y) = \max_{y \in L} \min_{x \in K} f(x, y).$$

Considérons un jeu en forme normale. Un profil de stratégies est un équilibre de Nash si aucun joueur ne veut dévier unilatéralement de la stratégie choisie, et ce quelque soit la stratégie choisie par l'autre joueur.

**Définition 5.1.2:** Un profil  $s^*$  est un équilibre de Nash si pour tout joueur  $i$ ,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i^*, s_{-i})$$

pour tout  $s_{-i} \in S_{-i}$

Dans le jeu sous forme normal donné par le tableau 4.5, il n'y a pas de stratégie dominante, mais il y a des équilibres de Nash qui sont donnés par  $(s_1, s_2)$  et  $(s'_1, s'_2)$ .

Il est possible de montrer que la stratégie dominante du dilemme du prisonnier est effectivement un équilibre de Nash. Ainsi la dénonciation apparaît comme l'équilibre de Nash du jeu.

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	2 , 3	1 , 1
$s'_1$	1 , 1	3 , 2

Tab. 4.5: Equilibre de Nash

Il existe une manière alternative de définir un équilibre de Nash. Pour cela, il suffit de s'intéresser au concept de meilleur réponse.

**Définition 5.1.3:** Pour tout  $i \in [n]$ , l'application  $R_i : S_{-i} \longrightarrow 2^{S_i}$  définie par :

$$R_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

est appelée fonction de meilleure réponse du joueur  $i$ .

Cette application est bien définie lorsque l'ensemble des stratégies est compact et la fonction d'utilité est continue.

On peut donner une formulation alternative de l'équilibre de Nash :  $s^* \in S$  est un équilibre de Nash si

$$s^* \in \prod_{i \in [n]} R_i(s^*_{-i}). \quad (5.1)$$

Bien que l'apport de Nash fut considérable il existe des jeux pour lesquels un équilibre n'est pas avéré. Ceci est notamment le cas pour les exemples suivants :

Exemple 5.1.4: Considérons le jeu nommé jeu du tir au but (pénalty) pour lequel un tireur et un gardien possèdent les stratégies données par le tableau 4.6. Dans le cadre de ce jeu, il est assez facile de voir qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash puisque le gardien a intérêt à modifier sa stratégie si le tireur modifie la sienne.

Exemple 5.1.5: Considérons à présent l'exemple suivant en dimension 3 nommé jeu du "pierre-feuille-ciseaux". Les stratégies et gains associés sont présentés dans le tableau 4.7. Encore une fois, il est assez facile de vérifier qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash.

$1 \setminus 2$	$G$	$D$
$G$	$-1, 1$	$1, -1$
$D$	$1, -1$	$-1, 1$

Tab. 4.6: Jeu du pénalty

$1 \setminus 2$	$s_2 = \text{Pierre}$	$s'_2 = \text{Feuille}$	$s''_2 = \text{Ciseaux}$
$s_1 = \text{Pierre}$	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
$s'_1 = \text{Feuille}$	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
$s''_1 = \text{Ciseaux}$	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$

Tab. 4.7: Jeu du pierre-feuille-ciseaux

## 5.2 Stratégies mixtes et convexification

Nous avons évoqué dans la partie précédente qu'il existait des jeux pour lesquels l'équilibre de Nash était non avéré. Nous allons maintenant étudier la question de l'existence d'un équilibre de Nash. Notons que les jeux présentés comme sans équilibre de Nash étaient des jeux particuliers nommés jeu à somme nulle c'est-à-dire que ce que gagne l'un l'autre le perd. Dans ce genre de jeu il n'existe pas de stratégie dominante pour les joueurs, par ailleurs c'est un jeu dit instable puisque chacun des joueurs a intérêt à changer sa stratégie si l'autre joueur décide de changer la sienne. Ce type de jeu a été très étudié notamment par Binmore [21]. Il permet de comprendre les situations concernant les échanges internationaux, la comptabilité nationale, les événements sportifs, les concours d'admission, concours pour obtenir les marchés publics entre entreprises, etc.

Supposons que pour tout  $i$ ,  $S_i$  est fini. Définissons pour tout  $i$  une probabilité  $p_i : S_i \rightarrow [0, 1]$  telle que  $p_i(s_i) \in [0, 1]$  pour tout  $s_i \in S_i$  et  $\sum_{s_i \in S_i} p_i(s_i) = 1$ . L'utilité espérée pour le joueur  $i$  est

$$v_i(p_i) = \sum_{s_i \in S_i} p_i(s_i) u_i(s_i).$$

Si pour tout  $p$ ,  $\text{Card} S_i = m_i$ , alors  $\Sigma_i$  l'ensemble des probabilités  $p_i$  défini sur  $S_i$  est isomorphe au  $m_i$ -simplexe. Le cas d'une mesure de Dirac  $\delta_{s_i}$  donne la stratégie pure  $s_i$ .

En d'autres termes, opérer avec des stratégies mixtes revient à considérer que l'en-

$1 \setminus 2$	Mixte	$p_2$	$p'_2 = 1 - p_2$
Mixte	Pure	$s_2$	$s'_2$
$p_1$	$s_1$	2, 3	1, 1
$p'_1 = 1 - p_1$	$s'_1$	1, 1	3, 2

Tab. 4.8: Jeu en stratégie mixte

semble des stratégies est un simplexe. On peut donc choisir une fonction d'utilité linéaire sur cet ensemble. Cela revient à considérer une utilité espérée sur les stratégies pures.

Ainsi, une stratégie mixte peut être analysée comme un coup de “bluff”. Cette notion repose sur la notion de croyance des autres joueurs. Il existe plusieurs angles d'interprétations de cette construction :

- la prise en compte des aléas ;
- le déficit dans la connaissance du choix des autres joueurs (Rubinstein) ;
- l'équilibre de Nash est un équilibre en croyance (Auman) ;
- une stratégie de bluff dépendante de l'humeur du joueur (Harsanyi).

Dans les faits, tout contrôle aléatoire effectué soit par l'Etat (justice), les entreprises (contrôle qualité, contrôle sanitaire, etc.), peut être interprété comme une stratégie mixte. Afin d'illustrer le concept de stratégie mixte considérons l'exemple suivant :

Exemple 5.2.1: Soit le jeu donnée par le tableau 4.8 pour lequel chacun des joueurs affecte une probabilité à chacune des stratégies qu'il doit choisir. Pour caractériser les stratégies mixtes considérons que les joueurs affectent une probabilité à chacune des stratégies pures.

Afin de déterminer l'équilibre de Nash étudions la meilleure réponse du joueur 1 :

- Paiement espéré du joueur 1 :  $s_1 \rightarrow 1 + p_2$ ,  $s'_1 \rightarrow 3 - 2p_2$ .
- Paiement espéré du joueur 1 :  $s_2 \rightarrow 1 + 2p_1$ ,  $s'_2 \rightarrow 2 - p_1$ .

Il apparaît évident qu'un raisonnement identique peut être proposé pour le joueur 2.

Ces fonctions de meilleures réponses induisent le concept d'application multivaluée.

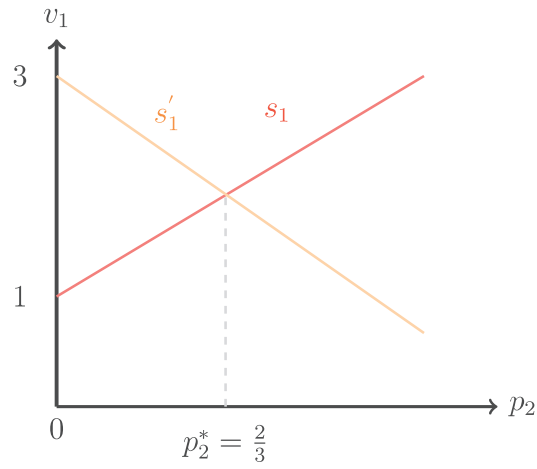


Fig. 4.2: Meilleure réponse du Joueur 1

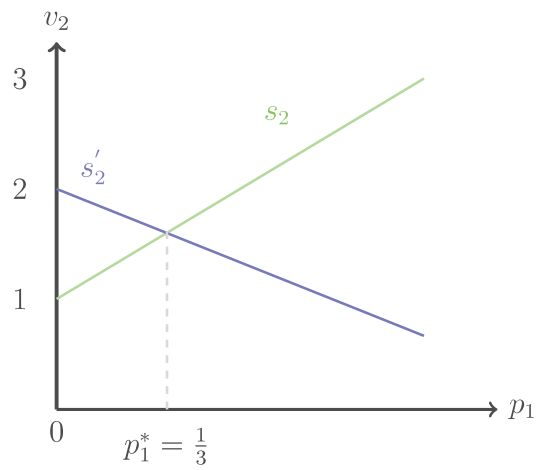


Fig. 4.3: Meilleure réponse du Joueur 2

Pour le joueur 1 :

$$p_1^*(p_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } p_2 < 2/3 \\ [0,1] & \text{if } p_2 = 2/3 \\ 0 & \text{if } p_2 > 2/3 \end{cases}$$

Pour le joueur 2 :

$$p_2^*(p_1) = \begin{cases} 1 & \text{if } p_1 < 1/3 \\ [0,1] & \text{if } p_1 = 1/3 \\ 0 & \text{if } p_1 > 1/3 \end{cases}$$

Nous pouvons représenter à l'aide de la figure 4.4 ces applications multivaluées. Il apparaît

qu'un équilibre de Nash est effectif pour la probabilité  $(p_1^*, p_2^*)$ .

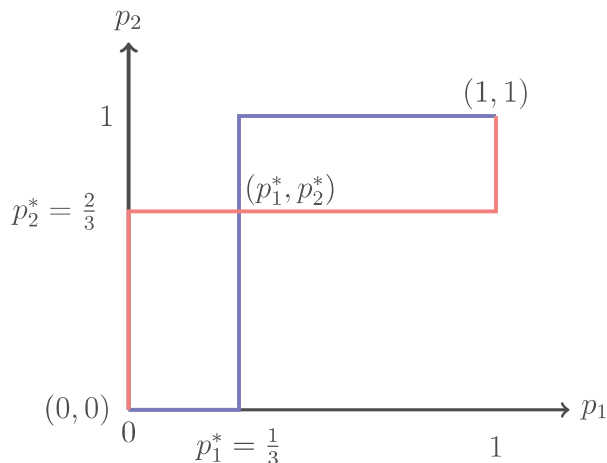


Fig. 4.4: Equilibre de Nash

Il est aussi possible de trouver un équilibre de Nash dans le cadre de l'exemple des tirs au but.

Exemple 5.2.2: : Considérons le jeu du tir au but donné par le tableau 4.9

Gardien \ Tireur	Mixte	$p_2$	$p'_2 = 1 - p_2$
Mixte	Pure	<i>Gauche</i>	<i>Droite</i>
$p_1$	<i>Gauche</i>	100 , -100	-100 , 100
$p'_1 = 1 - p_1$	<i>Droite</i>	-100 , 100	100 , -100

Tab. 4.9: Jeu des tirs au but et stratégies mixtes

Pour construire ces applications multivaluées nous pouvons utiliser la procédure suivante :

1. Dans un premier temps on détermine le paiement espéré de chaque joueur ;
2. Il convient ensuite de déterminer la fonction de réaction pour chaque joueur.

Le paiement espéré pour chaque joueur est donné de la manière suivante :

— Paiement espéré joueur 1 :  $GAUCHE \rightarrow 200p_2 - 100$ ,  $DROITE \rightarrow 100 - 200p_2$ .

— Paiement espéré joueur 2 :  $Gauche \rightarrow 100 - 200p_1$ ,  $Droite \rightarrow 200p_1 - 100$

Ces fonctions de meilleure réponse induisent le concept d'application multivaluée.

- Pour le joueur 1 :

$$p_1^*(p_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } p_2 < 1/2 \\ [0,1] & \text{if } p_2 = 1/2 \\ 0 & \text{if } p_2 > 1/2 \end{cases}$$

- Pour le joueur 2 :

$$p_2^*(p_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } p_1 < 1/2 \\ [0,1] & \text{if } p_1 = 1/2 \\ 1 & \text{if } p_1 > 1/2 \end{cases}$$

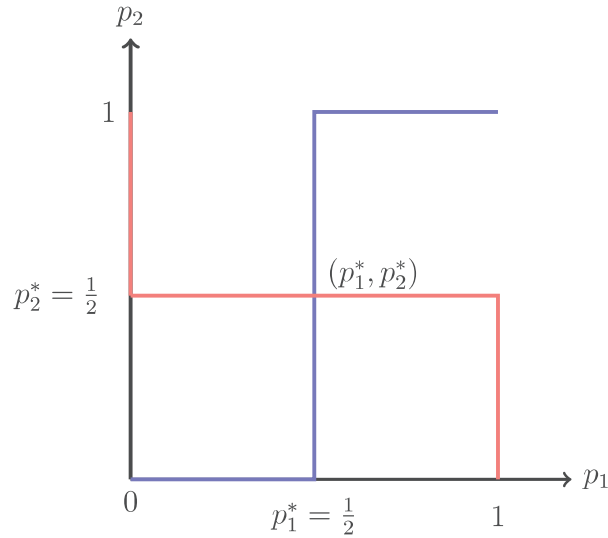


Fig. 4.5: Unicité de l'équilibre de Nash

L'apport de Nash (50) est d'avoir démontré que dans les jeux à somme nulle l'existence d'équilibre de Nash est avérée sous hypothèses topologiques usuelles. Une des hypothèses principales est l'existence d'un point fixe (Brouwer, Kakutani [74]). Sans cette condition il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégie mixte.

## 6 POINT FIXE ET ÉQUILIBRES

La propriété de point fixe de Kakutani s'énonce comme suit. Soit  $K$  un ensemble compact convexe de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $F : K \longrightarrow 2^K$  une application multivaluée ayant un graphe fermé et des valeurs convexes fermées. Alors il existe  $k \in K$  tel que  $k \in F(k)$ . Cette propriété permet de montrer l'existence d'un équilibre de Nash.

Considérons l'application  $F : S \longrightarrow 2^S$  définie par :

$$F(s) = \prod_{i \in [n]} R_i(s_{-i}).$$

Nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 6.0.1:** *Soit  $\{(S_i)_{i \in [n]}, (u_i)_{i \in [n]}\}$  un jeu à  $n$  joueurs. Si pour tout  $i$   $S_i$  est compact et convexe et si les fonctions d'utilité  $u_i$  sont semi-continues supérieurement et quasi-concaves alors il existe un équilibre de Nash.*

Dans le cas des stratégies mixtes pour tout  $i$  nous considérons le cas où  $S_i = \Delta_{m_i}$  en identifiant chaque vecteur de probabilité au simplexe. De plus pour tout  $i$  l'utilité  $v(p_i) = \sum_{s_i \in S_i} p_i(s_i) u_i(s)$  est continue relativement à  $p_i$ .

Ce résultat généralise le jeu à somme nulle de Von-Neumann [153] qui correspond à une représentation de la situation où le gain de chaque participant est équilibré par une perte de l'autre et inversement (comme dans le jeu des tirs au buts par exemple).

## 7 INTRODUCTION DES NOUVEAUX TYPES DE JOUEURS

En économie, une fonction d'utilité représente la mesure de la satisfaction, se référant à la satisfaction totale reçue par un consommateur provenant de la consommation d'un bien ou service. En théorie des jeux, en général, les jeux impliquent plusieurs joueurs essayant de maximiser leurs gains via une fonction d'utilité individuelle définie sur un ensemble de stratégie. Leur gain respectif dépend des choix stratégiques des autres agents.

Le comportement des joueurs dans un jeu dépend de l'hypothèse faite sur lui-même. Les décisions auxquelles les joueurs sont confrontés et les informations disponibles lors

de la prise de décisions dépendent également des hypothèses clés sur la nature de la concurrence. Cela a un impact sur leurs décisions pour déterminer l'issue du jeu. Cependant, dans le monde réel, les acteurs doivent prendre en compte un environnement dans lequel les objectifs, les contraintes et les résultats auxquels ils sont soumis ne sont pas connus de manière précise 1. Si les composantes du jeu sont spécifiées avec un certain flou ou si les préférences des joueurs sont basées sur une perception subjective de l'économie, il peut exister une certaine ambiguïté sur le résultat d'un jeu. Dans la suite de ces travaux, nous proposons une classe de jeux définie en théorie des ensembles flous et une procédure mathématique pour montrer l'existence d'un équilibre de Nash. Nous supposons que les composants du jeu impliquent une perception subjective de la part des joueurs. Le modèle s'appuie sur le travail de Bellman et Zadeh [15] qui analysent la prise de décision dans un environnement flou, et l'étend à un cadre de jeu théorique. Ainsi, nous caractérisons le comportement de trois types de joueurs différents. Le premier étant considéré comme optimiste, le second pouvant être considéré comme neutre et enfin le troisième considéré comme pessimiste. Ceci étant possible en ayant recours à la notion d'ensemble flou. Pour rappel, un ensemble flou diffère d'un ensemble classique en ce que la fonction caractéristique peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[0; 1]$  (pour une fonction caractéristique standard, nous nous référons ci-après à un ensemble croustillant). Initialement, les ensembles flous étaient utilisés par Butnariu [34, 35] dans la théorie des jeux non coopératifs et coopératifs [20] ont développé un modèle alternatif de jeux flous utilisant des pré-ordonnances lexicographiques floues. Cette formulation est applicable uniquement aux jeux à somme nulle. Les ensembles flous ont été utilisés pour représenter la croyance de chaque joueur pour les stratégies des autres joueurs. Ils ont été analysés d'un point de vue économique dans [7] qui fournissent quelques exemples d'application en économie industrielle dans un environnement flou.

Dans [25], l'existence d'un équilibre de Nash a été prouvée sous l'hypothèse d'une  $\mathbb{B}$ -. Cela signifie, entre autre, que les ensembles de stratégies sont supposés dotés d'une structure de semi-réseau partiellement ordonnée. Plus récemment, une classe spécifique de la fonction Quasi-Léontief a été introduite dans [27]. La fonction Qualisi-Léontief étend les fonctions d'utilité de Léontief, d'abord conceptualisées par Wassily Léontief, et est un ou-

til utile pour modéliser les préférences économiques dans le cas de biens complémentaires. Deux biens sont dits complémentaires parfaits lorsque que les deux biens doivent être obligatoirement consommés ensemble. Les fonctions d'utilité de Léontief sont un cas particulier de fonctions supermodulaires développées par Topkis [143].

Pour prendre en compte le cas de l'intersection, le cadre proposé dans [25] est étendu aux jeux  $\mathbb{B}$ -convexes inverses. Ceci est fait en accordant une attention particulière au cas où les stratégies sont définies sous forme mixte. Un résultat d'existence est donc établi dans le cas inverse  $\mathbb{B}$ -convexe. Une connexion aux fonctions utilitaires Quasi-Léontief est également affichée. Enfin, il est montré que les stratégies mixtes d'un jeu  $\mathbb{B}$ -convexe peuvent être interprétées en termes de fonctions d'inclusion et d'appartenance apparaissant dans la théorie floue. C'est ce que nous faisons en considérant une classe sur les jeux minitifs et minitifs où les stratégies pures sont remplacées par un ensemble. Il est montré que ces jeux sont équivalents aux jeux  $\mathbb{B}$ -convexes. Les stratégies mixtes correspondent à une classe appropriée sur les mesures minitives et maximales pour lesquelles la notion de possibilité et de nécessité jouent un rôle important.

Le reste du chapitre se déroule comme suit, à l'aide des notions développées dans le chapitre précédent la section suivante présente quelques résultats connus et une extension des jeux  $\mathbb{B}$ -convexes. En particulier, il y est défini une notion de stratégies mixtes et établit des résultats supplémentaires concernant les jeux  $\mathbb{B}$ -convexes inverses. Les jeux minitifs et maxitifs sont également présentés et il est démontré qu'ils sont équivalents aux jeux  $\mathbb{B}$ -convexes sous forme mixte.

## 8 ÉQUILIBRE DE NASH DANS LE CAS DE JEUX $\mathbb{B}$ -CONVEXE

### 8.1 Points fixes et $\mathbb{B}$ -convexité

Le théorème suivant établit par Briec et Horvath [24], permet de retranscrire le théorème de Kakutani pour les ensembles  $\mathbb{B}$ -convexe.

**Théorème 8.1.1:** *Supposons que  $B$  est un sous-ensemble compacte  $\mathbb{B}$ -convexe de*

$\mathbb{R}_+^d$ . Une application multivaluée  $f : B \longrightarrow 2^B$  ayant des valeurs compactes  $\mathbb{B}$ -convexe non vides respecte les propriétés du point fixe.

Il est possible de légèrement modifier ce théorème en supposant que  $f(B) = B$  avec  $f$  non décroissante. Dans ce contexte, la continuité n'est pas nécessaire et  $f$  n'a pas besoin d'avoir de valeurs  $\mathbb{B}$ -convexes. Le résultat suivant est important afin d'analyser les résultats d'un jeu  $\mathbb{B}$ -convexe.

À partir de [26], un semi-treillis supérieur compact de  $\mathbb{R}^d$  détient un élément maximal. Puisque l'ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe est un semi-treillis supérieur, on en déduit que l'ensemble compact  $\mathbb{B}$ -convexe déduit aussi un élément maximal.

Dans ce qui suit, nous dirons que l'application multivaluée  $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^d}$  est non décroissante (resp. non croissante) si  $s \leq s'$  ( $s \geq s'$ )  $\implies f(s) \subset f(s')$ . De plus, pour tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  et tout point  $s'$  dans  $\mathbb{R}^d$ , nous notons  $A \leq s$  ce qui signifie que  $s \leq s' \forall s \in A$ .

**Lemme 8.1.2:** *Supposons que  $S$  soit un semi-treillis supérieur compact de  $\mathbb{R}_+^d$ , soit  $\bar{s}$  comme étant l'élément maximal. Si  $f : S \longrightarrow 2^S$  est une application multivaluée non décroissante telle que  $\bar{s} \in f(S)$  alors  $\bar{s}$  est un point fixe maximal de  $f \in S$ .*

*Preuve :* Un semi-treillis supérieur compact de  $\mathbb{R}_+^d$  détient un élément maximal  $\bar{s}$ . Par définition, puisque  $\bar{s}$  est l'élément maximal dans  $B$ ,  $f(\bar{s}) \leq \bar{s}$ . Supposons que  $\bar{s} \notin f(\bar{s})$  et montrons la contradiction. Puisque  $f$  est non-décroissante et que  $s \leq \bar{s} \forall s \in B$  on en déduit que  $\bar{s} \notin f(s)$ . Conséquence  $\bar{s} \notin \bigcup_{s \in B} f(s) = f(S)$ . Toutefois, puisque  $\bar{s} \in f(S)$  cela devient une contradiction.

Il apparaît évident que tous les résultats ci-dessus peuvent être transposés aux ensembles inverses  $\mathbb{B}$ -convexes via l'homeomorphisme  $\Phi_{-1}$ . Dans ce qui suit, nous affirmons que le sous-ensemble  $K$  de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$  est inverse compact si et seulement si  $\phi^{-1}(K)$  est compact.

Considérons que  $\mathcal{B}_n = \{x \in \mathbb{R}_+^d : \max_{i \in [d]} x_i = 1\}$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{D}_n = \phi^{-1}(\mathcal{B}_n) = \{x \in (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d : \min_{i \in [n]} x_i = 1\}$ .  $\square$

**Théorème 8.1.3:** *Supposons que  $M$  est un sous-ensemble compact inverse  $\mathbb{B}$ -convexe de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ . Soit une application  $f : M \longrightarrow 2^B$  ayant des valeurs inverses compactes,  $\mathbb{B}^{-1}$ -convexes non vide.  $f$  a la propriété de point fixe.*

*Preuve :* Soit  $f : M \longrightarrow 2^M$  une application multivaluée ayant des valeurs inverses  $\mathbb{B}$ -convexes. Il s'ensuit que l'application  $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$  a des valeurs  $\mathbb{B}$ -convexes sur  $\phi^{-1}(M)$  qui est un ensemble  $\mathbb{B}$ -convexe et compact. De plus, l'application  $g$  est a un graphe  $\|\cdot\|$  fermé prenant ses valeurs dans  $2^{\phi^{-1}(M)}$ . En conséquence, elle a un point fixe  $t^*$  in  $\phi^{-1}(M)$ . Ainsi,  $g(t^*) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)(t^*) \subset \phi^{-1}(M)$ . En posant  $s^* = \phi(t^*)$ , on obtient  $f(s^*) \subset M$  et puisque  $s^* \in M$ , on en déduit le résultat.  $\square$

**Proposition 8.1.4:** *Un semi-treillis  $\|\cdot\|_\phi$ -compact de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$  a une borne supérieure. Un ensemble compact inverse  $\mathbb{B}^{-1}$ -convexe a quant à lui une borne inférieure.*

*Preuve :* Supposons que  $M$  est un  $\|\cdot\|_\phi$  semi-treillis compact inférieur de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$  relativement à cette topologie. Cela implique que  $\phi(M)$  est compact. De plus,  $\phi(M)$  est un semi-treillis supérieur de  $\mathbb{R}_+^d$ . Donc, il existe un élément supremum  $\bar{t} \in \phi(M)$ . Il s'ensuit que  $\bar{s} = \phi(\bar{t})$  est un infimum of  $M$ . Puisque qu'un ensemble inverse  $\mathbb{B}$ -convexe est un semi-treillis inférieur de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$ , on en déduit le résultat.  $\square$

**Lemme 8.1.5:** *Supposons que  $S$  est un  $\|\cdot\|_\phi$  semi-treillis compact inférieur de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$  et soit  $\bar{s}$  son élément minimal. Si  $f : S \longrightarrow 2^S$  est une application multivaluée non croissante telle que  $\bar{s} \in f(S)$  alors  $\bar{s}$  est un point fixe minimal de  $f$  dans  $S$ .*

## 8.2 Jeux ascendants

Considérons  $\ell$  joueurs et notons  $s_i$  la stratégie pure (ou action) pour le joueur  $i$ . À des fins de simplification de l'exposé technique, on note  $I = \{1, \dots, \ell\}$ . Supposons que  $S_i \subset \mathbb{R}_+^{d_i}$  soit l'ensemble de toutes les stratégies pures du joueur  $i$ . En outre, nous supposons que

$S_i$  est compact.  $s = (s_1, \dots, s_\ell)$  est alors le profil de stratégies pures.  $S = \prod_{i \in I} S_i \subset \mathbb{R}_+^d$  où  $d = \sum_{i=1}^\ell d_i$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies pures.  $S_{-i}$  est l'ensemble des profils de stratégies pures pour les joueurs dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $s = (s_1, \dots, s_n)$  avec  $(s_i, s_{-i})$  en dépit du fait que les  $s_j$  ne soit pas la bonne notation. Une fonction d'utilité ou un gain pour le joueur est une fonction  $s_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ .

### 8.2.1 Stratégies pures et équilibre

Pour chaque  $i \in I$  on définit une fonction de réaction comme étant une fonction multivaluée  $\mathcal{S}_i^* : S_{-i} \longrightarrow 2^{S_i}$  défini par :

$$\mathcal{S}_i^*(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \quad (8.1)$$

est non-décroissante. Cette fonction est nommée fonction de réaction pour chaque joueur. Un équilibre de Nash pur  $s^*$  est un point fixe de l'application  $\mathcal{S}^* : S \longrightarrow 2^S$  défini par :

$$\mathcal{S}^*(s) = \prod_{i \in I} \mathcal{S}_i^*(s_{-i}). \quad (8.2)$$

Pour  $i \in I$ , une fonction d'utilité  $u_i : \mathbb{R}_+^{d_i} \longrightarrow \mathbb{R}$  est appelée à être  $\mathbb{B}$ -quasi-concave si pour tout  $s, s' \in \mathbb{R}_+^d$

$$u_i(\rho s_i \vee s'_i) \geq \min\{u_i(s_i), u_i(s'_i)\}. \quad (8.3)$$

Pour tout  $\rho \in [0, 1]$ , notons que cette classe de fonction englobe comme un cas particulier le cas des fonctions non-décroissantes. Ce qui suit est la conséquence directe du théorème 4.2.1.

**Proposition 8.2.1:** *Supposons que pour tout  $i \in I$  le plan  $u_i$  est continu. De plus supposons que  $\mu_i \longmapsto u_i(s_i, \mu_i s'_i)$  est une fonction d'utilité  $\mathbb{B}$ -quasi-concave et que l'ensemble de stratégie pure  $S_i$  est compact et  $\mathbb{B}$ -convexe, alors le jeu possède un équilibre de Nash.*

*Preuve :* Puisque  $u_i$  est continue pour  $i \in I$ , on en déduit de la compacité de  $S_i$  que  $\mathcal{S}_i^*(s_{-i})$  est non vide. Notons  $u_i^* = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i)$ . On a  $\{s_i \in S_i : u_i(s_i) \geq u_i^*\}$  est  $\mathbb{B}$ -convexe et

donc  $\mathcal{S}_i^*(s_{-i})$  est  $\mathbb{B}$ -convexe et fermé. Conséquence,  $\mathcal{S}^*$  prend des valeurs  $\mathbb{B}$ -convexes non vides. De plus, puisque les  $u_i$  sont continus on en déduit que  $\mathcal{S}^*$  a un graphe qui est fermé. Ce résultat est donné en appliquant le théorème 4.2.1.  $\square$

Dans ce qui suit nous affirmons que les préférences des joueurs présentent des complémentarités stratégiques si les fonction  $S_i$  sont non-décroissantes. Cela signifie que la satisfaction des joueurs ne diminue pas par rapport au choix des autres joueurs. Cette hypothèse implique que la réaction de correspondance est non décroissante. À présent, il est possible d'appliquer le lemme 4.2.9 pour prouver l'existence d'un équilibre. Conséquence,  $\mathbb{B}$ -quasi-concavité des préférences est non nécessaire pour assurer l'existence d'un d'équilibre de Nash. De plus, c'est un équilibre dominant.

**Proposition 8.2.2:** *Supposons que les préférences présentent des complémentarités stratégiques et que pour tout  $i \in I$  les ensembles des stratégies pures  $S_i$  's sont  $\mathbb{B}$ -convexes et possèdent un élément maximal  $\bar{s}_i$ . Si  $\bar{s} \in \mathcal{S}^*(S)$  alors  $\bar{s}$  est l' équilibre maximal dominant (Nash) du jeu.*

*Preuve :* Puisque le jeu présente des complémentarités stratégiques,  $\mathcal{S}^*$  est non-décroissante. Puisque  $\bar{s} \in \mathcal{S}^*(S)$ . On en déduit du Lemme 4.2.9 que  $\bar{s}$  est un point fixe supremum du jeu.  $\square$

Le résultat suivant peut être considéré comme un cas particulier de ce qui précède. L'intuition est immédiate.

**Proposition 8.2.3:** *Supposons que les préférences sont faiblement monotones et que pour tout  $i \in I$  les ensembles de stratégies pures  $S_i$  sont  $\mathbb{B}$ -convexes et disposent d'un élément supremum  $\bar{s}_i$ .  $\bar{s}$  est l' équilibre maximal dominant (Nash) du jeu.*

*Preuve :* Si les préférences sont monotones alors chaque joueur choisira la stratégie maximale dans l'ensemble des stratégies  $\mathbb{B}$ -convexes. Par conséquent, il existe un équilibre dominant et cet équilibre est un équilibre de Nash.  $\square$

### 8.2.2 Stratégies mixtes et fonction de coût inverse Léontief

Supposons à présent, que les ensembles de stratégies sont finis et notons  $S_i$  l'ensemble fini de toutes les stratégies pures du joueur  $i$ . L'existence d'un équilibre n'est pas garanti lorsque les ensembles de stratégies ne respectent pas l'hypothèse de convexité. L'approche traditionnelle consiste alors à convexifier les ensembles de stratégies. Le poids de chaque stratégie pure est interprété comme une stratégie mixte c'est-à-dire en terme de probabilité. Il est possible de proposer, parallèlement à cette méthodologie, une  $\mathbb{B}$ -convexification des ensembles de stratégies pures afin de garantir l'existence d'un équilibre. Toutefois, il est possible de ré-interpréter les stratégies mixtes sous hypothèse de  $\mathbb{B}$ -convexité.

Pour tout joueur  $i \in I$ , l'application  $\rho_i : S_i \rightarrow [0, 1]$ , où  $\max_{s_i \in S_i} \rho_i(s_i) = 1$  est une stratégie mixte pour le joueur  $i \in I$ .  $M_i$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes pour le joueur  $i$ .  $M = \prod_{i \in I} M_i$  est l'ensemble de toutes les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . De plus,  $M_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} M_j$  est l'ensemble de toutes les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  avec  $(\rho_i, \rho_{-i})$  en dépit du fait que les  $\rho_j$  ne sont pas dans le bon ordre. Finalement, toute stratégie mixte se résumant à une stratégie pure est notée  $\delta_{s_i}$  pour tout  $i \in I$  avec  $\delta_{s_i}(s'_i) = 1$  si  $s_i = s'_i$  et  $\delta_{s_i}(s'_i) = 0$  et  $s_i \neq s'_i$ .

Considérons à présent que pour chaque joueur  $i$  une extension naturelle de sa fonction d'utilité  $u_i$  de  $S$  dans  $M$ . Nous affirmons que l'application  $\bar{u}_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une extension de l'application  $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  si pour tout  $s \in S$ , nous obtenons :

$$u_i(s) = \bar{u}_i\left(\prod_{i \in I} \delta_{s_i}\right). \quad (8.4)$$

Un exemple d'une telle application de fonction  $\bar{u}_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\bar{u}_i(\rho) = \max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \rho_i(s_i) \right) u_i(s). \quad (8.5)$$

Dans ce qui suit nous statuons que si les fonctions d'utilité sont non décroissantes dans  $\rho \in M$  alors il existe un équilibre mixte dominant. Ce résultat peut être obtenu à partir du résultat du point fixe établie plus haut ou en utilisant simplement des arguments

économiques. Chaque joueur est préférera choisir la stratégie mixte lui assurant la meilleur utilité.

**Proposition 8.2.4:** *Supposons que  $\bar{u}_i : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est continue et non décroissante pour tout  $i \in N$ . Alors, la stratégie mixte  $\rho^* : S \longrightarrow [0, 1]$  définie par  $\rho^*(s) = 1$  pour tout  $s \in S$  est un équilibre de Nash mixte dominant du jeu.*

Cela signifie que chaque joueur prend sa décision en sélectionnant le maximum de chaque vecteur de paiement.

**Proposition 8.2.5:** *Le jeu  $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i, S_i, M_i\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i$  est l'application définie en (5.1) a un équilibre de Nash mixte  $\rho^* : S \longrightarrow [0, 1]$  défini par  $\rho^*(s) = 1$  pour tout  $s \in S$ .*

*Preuve :* Par construction, pour tout  $i \in I$ , l'application  $\bar{u}_i$  est semi-continue supérieur et l'application  $\rho_i \mapsto \bar{u}_i(\rho_i, \rho_{-i})$  est une fonction d'utilité  $\mathbb{B}$ -quasi-concave de l'ensemble des stratégies mixtes  $M_i$  qui est compact et  $\mathbb{B}$ -convexe. Ainsi, le jeu possède un équilibre de Nash mixte, ce qui conclut cette preuve.  $\square$

Il est clair, qu'un tel équilibre est trivial. Il est possible d'étudier des situations intéressantes dans les cas de l'application :

$$s_i \mapsto -\bar{u}_i(\rho) = -\max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \rho_i(s_i) \right) u_i(s). \quad (8.6)$$

Clairement cette application est aussi  $\mathbb{B}$ -quasi-concave. Dans ce cas les joueurs sont confrontés au problème suivant :

$$\min_{\rho_i} \max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \rho_i(s_i) \right) u_i(s) \quad (8.7)$$

$$\rho_i \in M_i \quad (8.8)$$

Il existe ici aussi un équilibre de Nash mixte qui a la particularité de ne pas avoir un élément maximal. Ce type de jeu est nommé jeu de coût. C'est pourquoi nous devons renommer l'application  $s \mapsto \max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \rho_i(s_i) \right) u_i(s)$  application inverse Léontief.

**Proposition 8.2.6:** *Soit  $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i, S_i, M_i\}_{i \in I}$  un jeu inverse Léontief dans lequel pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i$  est l'application définie dans (5.1). Pour tout  $i \in I$ , soit  $\mathcal{M}_i(\rho_{-i}) : M_{-i} \rightarrow 2^{M_i}$  la meilleur réponse pour le joueur  $i$ . Par ailleurs, pour tout joueur  $i \in I$ , introduisons l'application  $\xi_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie comme :*

$$\xi_i(s_i) = \max_{s_{-j} \in S_{-j}} \left( \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \rho_j(s_j) \right) u_i(s).$$

*Il existe un  $s_i^* \in S_i$ , tel que  $\xi_i(s_i^*) \leq \xi_i(s_i)$  pour tout  $s_i \in S_i$ , et  $\rho_i^*(s_i^*) = 1$  pour tout  $\rho_i^* \in \mathcal{M}_i(\rho_{-i})$ . De plus, pour tout  $s_i \in S_i$  et tout  $\rho_i^* \in \mathcal{M}_i(\rho_{-i})$ ,  $\rho_i^*(s_i) \in [0, \frac{\xi_i(s_i^*)}{\xi_i(s_i)}]$ .*

*Preuve :* Le programme du joueur  $i$  est donné par :

$$\min_{\rho_i \in M_i} \max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \rho_i(s_i) \right) u_i(s).$$

De manière équivalente, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \lambda \geq \max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \rho_i(s_i) \right) u_i(s) \end{aligned}$$

Cela peut être réécrit :

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \lambda \geq \rho_i(s_i) \max_{s_{-j} \in S_{-i}} \left( \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \rho_j(s_j) \right) u_i(s), \quad s_i \in S_i. \end{aligned}$$

De manière équivalente, on obtient :

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \lambda \geq \rho_i(s_i) \xi_i(s_i), \quad s_i \in S_i. \end{aligned}$$

Puisque  $\xi_i$  est défini sur un sous-ensemble fini, il existe un  $s_i^* \in S_i$  tel que  $\xi_i(s_i^*) \leq \xi_i(s_i)$  pour tout  $s_i \in S_i$ . Dans ce cas, le minimum est obtenu en assignant  $\rho_i(s_i) = 1$  au plus

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	3, 1	2, 3
$s'_1$	1, 2	3, 2

Tab. 4.10: Jeu  $\mathbb{B}$ -convexe avec équilibre de Nash pur

petit  $\xi_i(s_i)$  et en considérant  $\rho_i(s_i)$  tel que  $\rho_i(s_i)\xi_i(s_i) \leq \rho_i(s_i^*)\xi_i(s_i^*)$ . Toutefois, puisque  $\rho_i(s_i^*) = 1$ , cela implique que  $\rho_i(s_i) \leq \frac{\xi_i(s_i^*)}{\xi_i(s_i)}$  pour tout  $s_i \in S_i$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

Exemple 8.2.7: Considérons le jeu suivant, où  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$

De manière évidente, il existe un équilibre de Nash pur  $(s'_1, s_2)$ . Supposons que les stratégies mixtes choisies par les joueurs 1 et 2 sont respectivement  $\rho_1 = (\rho_1, \rho'_1)$  et  $\rho_2 = (\rho_2, \rho'_2)$ . On peut calculer la fonction de meilleure réponse du joueur 1. La fonction d'utilité est donnée par :

$$\bar{u}_1(\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2) = \max\{3\rho_1\rho_2, 2\rho_1\rho'_2, \rho'_1\rho_2, 3\rho'_1\rho'_2\}$$

Pour tout jeu inverse Léontief, chaque joueur souhaite minimiser ses coûts de désutilité. Le programme devient donc :

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \lambda &\geq \rho_1 \max\{3\rho_2, 2\rho'_2\} \\ \lambda &\geq \rho'_1 \max\{\rho_2, 3\rho'_2\} \end{aligned}$$

Il est possible de distinguer trois cas :

- (a) si  $\max\{\rho_2, 3\rho'_2\} > \max\{3\rho_2, 2\rho'_2\}$  alors  $\rho_1 = 1$  et  $\rho'_1 \leq \frac{\max\{3\rho_2, 2\rho'_2\}}{\max\{\rho_2, 3\rho'_2\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \max\{3\rho_2, 2\rho'_2\}$  ;
- (b) si  $\max\{\rho_2, 3\rho'_2\} < \max\{3\rho_2, 2\rho'_2\}$  alors  $\rho'_1 = 1$  et  $\rho_1 \leq \frac{\max\{\rho_2, 3\rho'_2\}}{\max\{3\rho_2, 2\rho'_2\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \max\{\rho_2, 3\rho'_2\}$  ;
- (c) si  $\max\{\rho_2, 3\rho'_2\} < \max\{3\rho_2, 2\rho'_2\}$  alors  $\rho_1 = \rho'_1 = 1$ , ce qui implique que

$$\lambda = \max\{3\rho_2, 2\rho'_2\} = \max\{\rho_2, 3\rho'_2\} = \max\{3\rho_2, 2\rho'_2, \rho_2, 3\rho'_2\} = \max\{3\rho_2, 3\rho'_2\} = 3.$$

Concernant le joueur 2 , la fonction d'utilité est donnée par :

$$\bar{u}_2(\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2) = \max\{\rho_1\rho_2, 3\rho_1\rho'_2, 2\rho'_1\rho_2, 2\rho'_1\rho'_2\}$$

Le programme est comme suit :

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \lambda &\geq \rho_2 \max\{\rho_1, 2\rho'_1\} \\ \lambda &\geq \rho'_2 \max\{3\rho_1, 2\rho'_1\} \end{aligned}$$

Il est possible de distinguer trois cas :

- (d) Si  $\max\{3\rho_1, 2\rho'_1\} > \max\{\rho_1, 2\rho'_1\}$  alors  $\rho_2 = 1$  et  $\rho'_2 \leq \frac{\max\{\rho_1, 2\rho'_1\}}{\max\{3\rho_1, 2\rho'_1\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \max\{\rho_1, 2\rho'_1\}$  ;
- (e) si  $\max\{3\rho_1, 2\rho'_1\} < \max\{\rho_1, 2\rho'_1\}$  alors  $\rho'_2 = 1$  et  $\rho_2 \leq \frac{\max\{3\rho_1, 2\rho'_1\}}{\max\{\rho_1, 2\rho'_1\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \max\{3\rho_1, 2\rho'_1\}$  ;
- (f) si  $\max\{3\rho_1, 2\rho'_1\} = \max\{\rho_1, 2\rho'_1\}$  alors  $\rho_2 = \rho'_2 = 1$  ce qui implique que  $\lambda = \max\{\rho_1, 2\rho'_1\} = \max\{3\rho_1, 2\rho'_1\} = \max\{\rho_1, 2\rho'_1, 3\rho_1, 2\rho'_1\} = \max\{3\rho_1, 2\rho'_1\}$ .

Il est possible de constater qu'il est impossible d'obtenir un équilibre de Nash dans le cas où  $\rho_1 = 1$ . En effet, à partir de (d), cela impliquerait  $\rho_2 = 1$  comme meilleure réponse pour le joueur 2. Toutefois, cela implique que le cas (b) est obtenu. Ainsi, cela implique que  $\rho'_1 = 1$  et  $\rho_1 < 1$  ce qui est une contradiction.

Conséquence, il n'est possible d'avoir que  $\rho'_1 = 1$ , ce qui implique (f) et  $\rho_2 = \rho'_2 = 1$ . On retrouve alors l'équilibre de Nash pur  $(s'_1, s_2)$ .

L'exemple suivant présente le cas du jeu bien connu en théorie des jeux à savoir le "Matching penny game" (jeu à sommes nulles). Dans ce jeu, les deux joueurs ont accès aux mêmes stratégies, mais le joueur 1 gagne lorsque les stratégies jouées concordent, alors le joueur 2 gagne lorsque celles-ci divergent. On observe un jeu de "Matching Pennies"

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	4, 1	1, 4
$s'_1$	1, 4	4, 1

Tab. 4.11:  $\mathbb{B}$ -convexe “Matching-Penny game”

lors des tirs de pénalité au football : le tireur (joueur 2) doit choisir de tirer à gauche ou à droite ; le gardien arrête le ballon et gagne lorsque les stratégies concordent et perd dans le cas contraire.

Exemple 8.2.8: Considérons le jeu suivant pour lequel  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$  :

De manière évidente, il existe un équilibre de Nash pur  $(s'_1, s_2)$ . Les programmes auxquels sont respectivement confrontés les joueurs 1 et 2 sont les suivants :

$$\begin{aligned} \min \lambda_1 \\ \lambda_1 &\geq \rho_1 \max\{4\rho_2, \rho'_2\} \\ \lambda_1 &\geq \rho'_1 \max\{\rho_2, 4\rho'_2\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \min \lambda_2 \\ \lambda_2 &\geq \rho_1 \max\{\rho_2, 4\rho'_2\} \\ \lambda_2 &\geq \rho'_1 \max\{4\rho_2, \rho'_2\}. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de symétrie, il est facile de trouver l'équilibre de Nash  $\rho_1^* = (1, 1)$  et  $\rho_2^* = (1, 1)$ . Les gains attendus correspondants sont alors  $-\bar{u}_1^* = -\bar{u}_2^* = 4$ .

### 8.3 Jeux descendants et stratégies mixtes inverses

Pour tout  $i \in I$ , une fonction d'utilité  $u_i : (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d \longrightarrow \mathbb{R}$  est appelée à être  $\mathbb{B}^{-1}$ -quasi-concave si pour tout  $s, s' \in (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^d$

$$u_i(\rho s_i \wedge s'_i) \geq \min\{u_i(s_i), u_i(s'_i)\} \quad (8.9)$$

pour tout  $\rho \in [0, 1]$ . Notons que cette de fonction englobe comme cas spécial les fonctions non croissantes. Ce qui suit est une conséquence directe du théorème 8.1.1.

**Proposition 8.3.1:** *Supposons que pour tout  $i \in I$  l'ensemble des stratégies pures  $S_i$  est inverse- $\mathbb{B}$ -convexe et inverse compact. De plus, admettons que l'application  $s_i \mapsto u_i(s_i, s_{-i})$  est inverse  $\mathbb{B}$ -quasi-concave et inverse semi-continue supérieurement. Alors le jeu  $\mathcal{G} = \{u_i, S_i\}_{i \in I}$  possède d'un équilibre de Nash pur.*

*Preuve :* Soit  $T_i = \phi_{-1}^{-1}(S_i)$ . Pour tout  $i$  soit  $v_i : T_i \longrightarrow \mathbb{R}$  comme étant l'application définie par :

$$v_i(t_i) = u_i(\phi_{-1}(t_i)).$$

Puisque  $S_i$  est inverse compact et inverse  $\mathbb{B}$ -convexe,  $T_i$  est compact et  $\mathbb{B}$ -convexe. De plus,  $v_i$  est semi-continu supérieurement. Il s'ensuit que le jeu  $\mathcal{H} = \{v_i, T_i\}_{i \in I}$  possède un équilibre de Nash  $t^*$ . Ainsi  $\phi_{-1}(t^*)$  est un équilibre de Nash du jeu  $\mathcal{G} = \{u_i, S_i\}_{i \in I}$ .  $\square$

Dans ce qui suit nous admettons qu'une application  $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$  est quasi-Léontief si pour tout  $s, s' \in S$ ,  $u(s \wedge s') = \min\{u(s), u(s')\}$ .

Supposons que l'ensemble des stratégies soit fini et soit  $S_i$  l'ensemble fini de toutes les stratégies pures pour le joueur  $i$ . Comme dans le cas habituel, l'existence d'un équilibre n'est pas garanti lorsque les ensembles de stratégies ne respectent pas l'hypothèse de convexité. Parallèlement au cas ascendant, un autre type de stratégies mixtes est proposé dans un contexte inverse  $\mathbb{B}$ -convex. Pour tout joueur  $i \in I$ , l'application  $\nu_i : S_i \longrightarrow [1, \infty]$ , où  $\min_{s_i \in S_i} \nu_i(s_i) = 1$  est une stratégie mixte du joueur  $i \in I$ .  $N_i$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes du joueur  $i$ .  $N = \prod_{i \in I} N_i$  est l'ensemble de toutes les profils de stratégies mixtes pour les joueurs  $I \setminus \{i\}$ . De plus,  $N_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} N_j$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes pour le joueur  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $(\nu_1, \dots, \nu_{|I|})$  avec  $(\nu_i, \nu_{-i})$ . Toute stratégie mixtes se résumant à une stratégie pure est notée  $\epsilon_{s_i}$  pour tout  $i \in I$  avec  $\epsilon_{s_i}(s'_i) = 1$  si  $s_i = s'_i$  et  $\epsilon_{s_i}(s'_i) = +\infty$  si  $s_i \neq s'_i$ . On considère à présent pour chaque joueur  $i$  une extension naturelle de la fonction d'utilité  $u_i$  de  $S$  dans  $N$ . L'application  $\underline{u}_i : N \longrightarrow \mathbb{R}$  est une extension de l'application  $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$  si pour tout

$s \in S$ , on a :

$$u_i(s) = \underline{u}_i\left(\prod_{i \in I} \epsilon_{s_i}\right). \quad (8.10)$$

Parallèlement au cas  $\mathbb{B}$ -convexe, un exemple d'une telle application est la fonction  $\underline{u}_i : N \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\underline{u}_i(\nu) = \min_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \nu_i(s_i) \right) u_i(s). \quad (8.11)$$

Chaque joueur est intéressé par le choix de la stratégie mixte lui assurant la meilleure utilité.

**Proposition 8.3.2:** *Le jeu  $\underline{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i, S_i, N_i\}_{i \in I}$  où, pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i$  est une application définie (8.11) possède un équilibre de Nash mixte,  $\nu^* : S \longrightarrow [1, +\infty]$ .*

*Preuve :* Par construction, pour tout  $i \in I$ , l'application  $\underline{u}_i \circ \phi_{-1}$  est semi-continue supérieurement sur  $\phi_{-1}^{-1}$  et l'application  $\nu_i \mapsto \underline{u}_i(\nu_i, \nu_{-i})$  est une fonction d'utilité inverse  $\mathbb{B}$ -quasi-concave sur l'ensemble des stratégies mixtes  $N_i$  qui est inverse compact et inverse  $\mathbb{B}$ -convexe. Par conséquent, le jeu possède un équilibre de Nash mixte.  $\square$

**Proposition 8.3.3:** *Le jeu  $\underline{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i, S_i, N_i\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i$  est l'application définie en (8.11) pour tout  $i \in I$ , soit  $\mathcal{N}_i(\rho_{-i}) : N_{-i} \longrightarrow 2^{N_i}$  la meilleure réponse du joueur  $i$ . De plus, pour tout joueur  $i \in I$ , introduisons l'application  $\psi_i : S_i \longrightarrow \mathbb{R}_+$  définie comme suit :*

$$\psi_i(s_i) = \min_{s_{-j} \in S_{-j}} \left( \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \nu_j(s_j) \right) u_i(s).$$

*Il existe un  $s_i^* \in S_i$ , tel que  $\psi_i(s_i^*) \leq \psi_i(s_i)$  pour tout  $s_i \in S_i$ , et  $\nu_i^*(s_i^*) = 1$  pour tout  $\nu_i^* \in \mathcal{N}_i(\nu_{-i})$ . De plus, pour tout  $s_i \in S_i$  et tout  $\nu_i^* \in \mathcal{N}_i(\nu_{-i})$ ,  $\nu_i^*(s_i) \in \left[ \frac{\psi_i(s_i^*)}{\psi_i(s_i)} \right]$ .*

*Preuve :* Le programme pour le joueur  $i$  est donné par :

$$\max_{\nu_i \in N_i} \min_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \nu_i(s_i) \right) u_i(s).$$

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	3, 1	2, 3
$s'_1$	1, 2	3, 2

Tab. 4.12: Jeu  $\mathbb{B}$ -convexe possédant un équilibre de Nash pur

De manière équivalente, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \lambda \leq \min_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \nu_i(s_i) \right) u_i(s) \end{aligned}$$

Une réécriture peut être faite :

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \lambda \leq \nu_i(s_i) \min_{s_{-j} \in S_{-i}} \left( \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \nu_j(s_j) \right) u_i(s), \quad s_i \in S_i. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \lambda \leq \nu_i(s_i) \psi_i(s_i), \quad s_i \in S_i. \end{aligned}$$

Puisque  $\xi_i$  est défini sur une sous-ensemble fini, il existe un  $s_i^* \in S_i$  tel que  $\xi_i(s_i^*) \leq \psi_i(s_i)$  pour tout  $s_i \in S_i$ . Dans un tel cas le maximum est obtenu en assignant  $\nu_i(s_i) = 1$  au plus grand  $\psi_i(s_i)$  et en considérant  $\nu_i(s_i)$  tel que  $\nu_i(s_i) \psi_i(s_i) \geq \nu_i(s_i^*) \psi_i(s_i^*)$ . Toutefois, puisque  $\nu_i(s_i^*) = 1$ , cela implique que  $\nu_i(s_i) \geq \frac{\psi_i(s_i^*)}{\psi_i(s_i)}$  pour tout  $s_i \in S_i$ , ce qui donne le résultat attendu.  $\square$

Exemple 8.3.4: Considérons le jeu suivant où  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$ . Nous reprenons la matrice de l'exemple 8.2.7. Toutefois, dans un tel cas les joueurs cherchent à maximiser une fonction d'utilité .

Il est évident qu'il existe un équilibre de Nash pur  $(s'_1, s'_2)$ . Supposons que les stratégies mixtes choisies par les joueurs 1 et 2 soit respectivement  $\nu_1 = (\nu_1, \nu'_1)$  et  $\nu_2 = (\nu_2, \nu'_2)$ .

Calculons la fonction de meilleure réponse pour le joueur 1. La fonction d'utilité est donnée par :

$$\underline{u}_1(\nu_1, \nu'_1, \nu_2, \nu'_2) = \min\{3\nu_1\nu_2, 2\nu_1\nu'_2, \nu'_1\nu_2, 3\nu'_1\nu'_2\}.$$

Le programme est alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \lambda \leq & \nu_1 \min\{3\nu_2, 2\nu'_2\} \\ \lambda \leq & \nu'_1 \min\{\nu_2, 3\nu'_2\} \end{aligned}$$

On distingue trois cas :

- (a) si  $\min\{\nu_2, 3\nu'_2\} > \min\{3\nu_2, 2\nu'_2\}$  alors  $\nu'_1 = 1$  et  $\nu_1 \geq \frac{\min\{3\nu_2, 2\nu'_2\}}{\min\{\nu_2, 3\nu'_2\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \min\{3\nu_2, 2\nu'_2\}$  ;
- (b) si  $\min\{\nu_2, 3\nu'_2\} < \min\{3\nu_2, 2\nu'_2\}$  alors  $\nu_1 = 1$  et  $\nu'_1 \leq \frac{\min\{\nu_2, 3\nu'_2\}}{\min\{3\nu_2, 2\nu'_2\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \min\{\nu_2, 3\nu'_2\}$  ;
- (c) si  $\min\{\nu_2, 3\nu'_2\} = \min\{3\nu_2, 2\nu'_2\} = \min\{\nu_2, 3\nu'_2\} = 3$ .

Concernant le joueur 2, la fonction d'utilité est donnée par :

$$\underline{u}_2(\nu_1, \nu'_1, \nu_2, \nu'_2) = \min\{\nu_1\nu_2, 3\nu_1\nu'_2, 2\nu'_1\nu_2, 2\nu'_1\nu'_2\}$$

Le programme est alors :

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \lambda \leq & \nu_2 \min\{\nu_1, 2\nu'_1\} \\ \lambda \leq & \nu'_2 \min\{3\nu_1, 2\nu'_1\} \end{aligned}$$

On distingue également trois cas :

- (d) si  $\min\{3\nu_1, 2\nu'_1\} > \min\{\nu_1, 2\nu'_1\}$  alors  $\nu'_2 = 1$  et  $\nu_2 \geq \frac{\min\{\nu_1, 2\nu'_1\}}{\min\{3\nu_1, 2\nu'_1\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \min\{\nu_1, 2\nu'_1\}$  ;

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	4, 1	1, 4
$s'_1$	1, 4	4, 1

Tab. 4.13:  $\mathbb{B}$ -convexe “Matching-Penny game”

- (e) si  $\min\{3\nu_1, 2\nu'_1\} < \min\{\nu_1, 2\nu'_1\}$  alors  $\nu_2 = 1$  et  $\nu'_2 \leq \frac{\min\{3\nu_1, 2\nu'_1\}}{\min\{\nu_1, 2\nu'_1\}}$ , ce qui implique que  $\lambda = \min\{3\nu_1, 2\nu'_1\}$  ;
- (f) si  $\min\{3\nu_1, 2\nu'_1\} = \min\{\nu_1, 2\nu'_1\}$  then  $\nu_2 = \nu'_2 = 1$  which implies that  $\lambda = \min\{\nu_1, 2\nu'_1\} = \min\{3\nu_1, 2\nu'_1\} = \min\{\nu_1, 2\nu'_1, 3\nu_1, 2\nu'_1\} = \min\{3\nu_1, 2\nu'_1\}$ .

Dans le cas où  $\nu_1 = 1$ , il est impossible d’obtenir un équilibre de Nash. En effet, à partir de (d), cela impliquerait  $\nu_2 = 1$  comme meilleure réponse pour le joueur 2. Toutefois, cela implique que le cas (b) est obtenu. Ainsi, cela implique que  $\nu'_1 = 1$  ry  $\nu_1 > 1$  ce qui est une contradiction.

Conséquence : il n’est pas possible d’avoir que  $\nu'_1 = 1$ , ce qui implique (f) et  $\nu_2 = \nu'_2 = 1$ . On retrouve alors l’équilibre de Nash pur  $(s'_1, s'_2)$ .

L’exemple suivant présent le cas du jeu bien connu en théorie des jeux à savoir le “Matching penny game”.

Exemple 8.3.5: Considérons le jeu suivant où  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$

Il est possible de constater qu’il n’y à pas d’équilibre de Nash pur. En utilisant les propriétés de symétrie, il est aisé de trouver l’équilibre de Nash  $\nu_1^* = (1, 1)$  et  $\nu_2^* = (1, 1)$ . Les gains correspondants attendus sont  $\underline{u}_1^* = \underline{u}_2^* = 1$ .

#### 8.4 Jeux avec mesures maxitives et minitives

Dans cette sous-section, nous poursuivons afin établir l’analogie initiée au début de cette section. Les vecteurs représentant des stratégies pures dans les jeux classiques sont remplacés par des ensembles. Ces ensembles sont associés à des stratégies mixtes

représentant le degré d'appartenance (ou d'inclusion) à une communauté ou le degré auquel les joueurs satisfont une contrainte ou à un critère spécifique. Par conséquent, ces stratégies mixtes sont formalisées en tant que mesure spécifique (maxitive ou minitive). Il y a deux manières de considérer l'adhésion ou l'inclusion d'un joueur à un ensemble spécifique. Tout d'abord, on peut supposer qu'il doit satisfaire à l'un des critères possibles. Ceci est une condition de possibilité. Dans ce cas, les joueurs doivent choisir une appartenance au moins à l'un des ensembles possibles représentant les stratégies pures. Dans un tel cas, on considère l'ensemble union de l'enveloppe convexe de tous les ensembles possibles auxquels le joueur peut appartenir. La stratégie mixte choisie est maximale et peut être interprétée comme une mesure de possibilité. Cela suppose que nous considérions un critère d'inclusion pour chaque ensemble. La deuxième solution consiste à considérer que tous les critères doivent être satisfaits, tout en permettant d'assouplir le degré d'appartenance de chaque ensemble. Dans un tel cas, la stratégie mixte est minimale et peut être interprétée comme le choix d'une mesure de nécessité. Le résultat des choix est alors représenté soit par une fonction maxitive ou une fonction minitive. On peut trouver dans la littérature économique des approches étroitement liées à ce point de vue. (cf.[65]) appliquées la théorie des ensembles flous pour modéliser la concurrence oligopolistique. Leur objectif est de caractériser le problème d'un marché oligopolistique réel du point de vue du décideur. Ils peuvent être classés comme des rivaux forts ou faibles en fonction du degré de leur inclusion dans l'oligopole. En particulier, ils considèrent qu'une situation oligopolistique peut être qualifiée de concurrence entre quelques producteurs de produits similaires. Ils utilisent trois ensembles flous différents pour modéliser la définition d'un oligopole. Chaque descripteur flou illustre le degré auquel une entreprise donnée appartient au marché oligopolistique par rapport à une entreprise représentative dont l'appartenance à l'oligopole est de degré un. La première catégorie est constituée de produits similaires et sert à modéliser la notion selon laquelle les entreprises ne produisent pas exactement des produits identiques. La fonction d'appartenance exprime la manière dont le produit d'une entreprise particulière se compare au produit de la société représentative. L'ensemble flou considéré contient la valeur d'appartenance de chaque entreprise du secteur par rapport à la similarité du produit. La présence de ces termes linguistiques imprécis est citée comme

la raison principale de l'utilisation de techniques floues au lieu de recourir à des méthodes probabilistes.

Afin d'illustrer cette vision considérons la situation suivantes qui implique ce que nous appelons un jeu de budget. Un ensemble de budget de  $\mathbb{R}_+^d$  est une ensemble dont la forme est

$$B(p, R) = \{x \in \mathbb{R}_+^d : p \cdot x \leq R\}$$

où  $p$  est le vecteur prix et  $R$  la contrainte budgétaire. De manière évidente,  $B(p, R)$  est un ensemble radian. Relâcher la contrainte budgétaire revient à considérer l'ensemble :

$$t \odot B(p, R) = \{x \in \mathbb{R}_+^d : p \cdot x \leq tR\}$$

avec  $t \geq 1$ . Notons  $\mathcal{B}$ , l'ensemble de tous les ensembles de budget. Nous définissons en outre une mesure maxitive et minitive  $u : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ . Etant donnée un panier de référence  $x_0 \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  il est défini par rapport à une fonction de jauge  $\delta_{B(p,R)}$ . Nous supposons que :

$$u_0(B(p, R)) = \delta_{B(p,R)}(x_0). \quad (8.12)$$

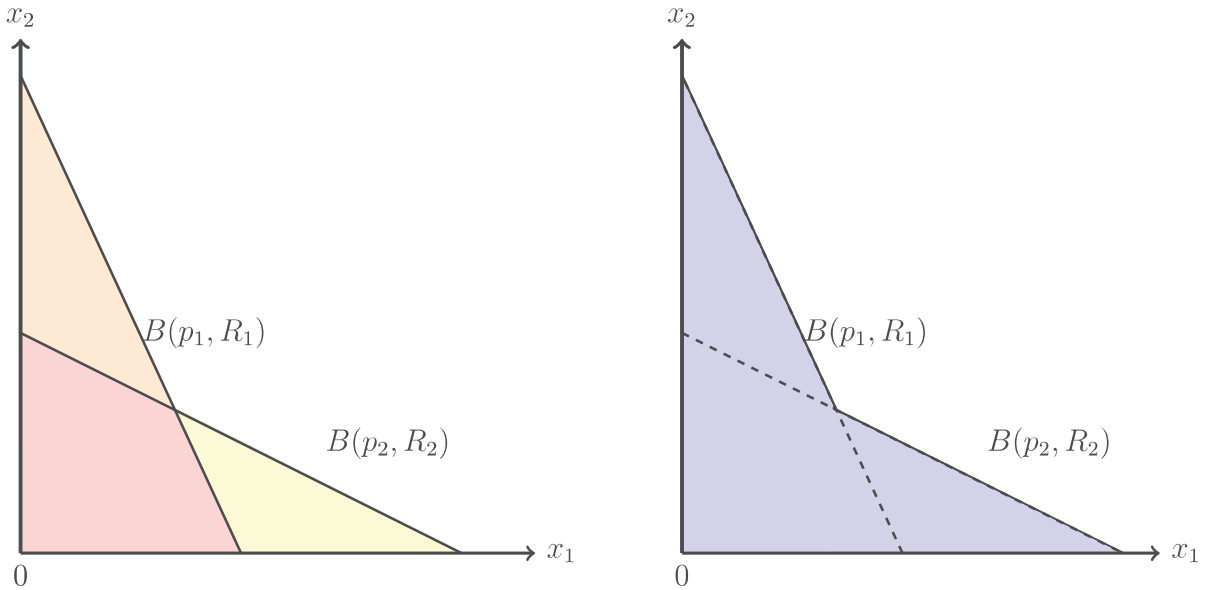


Fig. 4.6: Intersection d'ensemble de budget (gauche), Union d'ensemble de budget (droite).

Un fait intéressant à noter est que :

$$u_0(B(p, R)) = \frac{R}{p \cdot x_0}.$$

Il s'ensuit que la mesure minitive (et maxitive) satisfait, suivant un panier de référence  $x_0$  la relation :

$$\begin{aligned} u_0\left((t_1 \odot B(p_1, R_1)) \cap (t_2 \odot B(p_2, R_2)) \cap \cdots \cap (t_n \odot B(p_n, R_n))\right) \\ = \min_{i=1 \cdots n} t_i u_0(B(p_i, R_i)) \\ = \min_{i=1 \cdots n} \left\{ \frac{t_i R_i}{p_i \cdot x_0} \right\} \end{aligned}$$

L'idée est qu'un agent économique peut obtenir certains avantages en assouplissant la contrainte budgétaire. Par conséquent, une stratégie naturelle consiste à maximiser la mesure minimale sous la contrainte  $\min_{i \in [n]} t_i = 1$ .

Parallèlement à cette approche, l'agent économique peut chercher à minimiser l'impact d'une restriction budgétaire. Dans un tel cas, une mesure maximale est utile étant donnée que multiplier un ensemble de budget par  $t \in [0, 1]$  revient en une réduction proportionnelle du budget.  $R$ . Dans un tel cas, on obtient :

$$\begin{aligned} u_0\left((t_1 \odot B(p_1, R_1)) \cup (t_2 \odot B(p_2, R_2)) \cup \cdots \cup (t_n \odot B(p_n, R_n))\right) \\ = \max_{i=1 \cdots n} t_i u_0(B(p_i, R_i)) \\ = \max_{i=1 \cdots n} \left\{ \frac{t_i R_i}{p_i \cdot x_0} \right\}. \end{aligned}$$

Dans un jeu de nécessité on considère un ensemble  $I$  de joueurs. Les joueurs ne choisissent pas un gain vectoriel mais un ensemble. Cet ensemble peut être associé à une fonction de sécurité ou à une fonction d'appartenance, ce qui donne une caractérisation floue des ensembles considérés par chaque joueur. Dans ce cas, les combinaisons choisies par le joueur sont décrites en utilisant soit une union convexe soit une intersection d'ensemble convexe dans une classe d'ensemble appropriée. Dans le cas où le nombre d'ensembles de référence pure est fini, la fonction de sécurité et les fonctions d'appartenance

peuvent être interprétées comme des stratégies mixtes. Considérons plusieurs ensembles  $X_i$  ( $i \in I$ ) respectivement dotés d'une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{L}(X_i)$ . Soit  $\mathcal{L}(X)$ , la  $\sigma$ -algèbre définie sur le produit cartésien  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Supposons que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{A}_i = \{A_i^1, \dots, A_i^{n_i}\}$ . Notons  $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  et supposons qu'il existe  $\mathcal{M}$ -produit externe  $\odot$  défini sur  $\mathcal{A}$  qui est stable et distributivement maxitif. Le jeu

$$\mathcal{G} = \left\{ (\mathcal{L}(X_i))_{i \in I}, (\mathcal{A}_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I} \right\}$$

est appelé jeu maxitif. Pour tout joueur  $i \in I$ , l'application  $\rho_i : \mathcal{A}_i \rightarrow [0, 1]$ , où  $\max_{A_i \in \mathcal{A}_i} \rho_i(A_i) = 1$  est une stratégie mixte pour le joueur  $i \in I$ . Ces stratégies mixtes représentent une fonction d'inclusion pour chaque ensemble  $A_i^k$ .  $\mathcal{M}_i$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes du joueur  $i$ .  $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes du joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . De plus,  $\mathcal{M}_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \mathcal{M}_j$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes des joueurs dans  $I \setminus \{i\}$ . Finalement, toute stratégie mixte aboutissant à une stratégie pure est notée  $\delta_{A_i}$  pour tout  $i \in I$  avec  $\delta_{A_i}(A'_i) = 1$  if  $A_i = A'_i$  et  $\delta_{A_i}(A'_i) = 0$  si  $A_i \neq A'_i$ . Pour chaque joueur  $i$ , on considère une utilité  $u_i : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Nous considérons pour chaque joueur  $i$  une application maxitive  $\bar{u}_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est une extension de l'application  $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\bar{u}_i(\rho) = u_i \left( \bigcup_{A \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i} \rho(A) \odot A \right) \quad (8.13)$$

$$= u_i \left( \bigcup_{A \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i} \prod_{i \in I} \rho_i(A_i) \odot A \right) \quad (8.14)$$

$$= \max_{A \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i} \left( \prod_{i \in I} \rho_i(A_i) \right) u_i(A) \quad (8.15)$$

Dans ce cas, le jeu est équivalent à un jeu mixte  $\mathbb{B}$ -convexe. L'interprétation de ces stratégies mixtes est la suivante : chaque joueur choisi un degré afin de satisfaire un ensemble donné de critères correspondant à une stratégie pure. Ce degré est donné par l'inverse de la fonction d'inclusion pour cet ensemble de critères. En d'autres termes, les stratégies du joueur consistent à choisir le degré d'inclusion pour chaque issue du jeu. Le paiement est le résultat de l'interaction stratégique entre les joueurs. L'idée principale

est qu'un jeu  $\mathbb{B}$ -convexe en forme mixte est identifié en un jeu de nécessité pour lequel les stratégies sont une enveloppe ascendante de chaque vecteur de paiement de l'espace stratégique. Une approche similaire peut être fournie dans le cas minitif. Supposons que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{B}_i = \{B_i^1, \dots, B_i^{n_i}\}$ . Pour tout joueur  $i \in I$ , l'application  $\nu_i : \mathcal{B}_i \rightarrow [1, +\infty[$ , où  $\min_{B_i \in \mathcal{B}_i} \nu_i(B_i) = 1$  est une stratégie mixte du joueur  $i \in I$ . Notons  $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$  et supposons qu'il existe un  $\mathcal{M}$ -produit externe  $\odot$  défini sur  $\mathcal{B}$  qui est stable et distributivement minitif. Pour chaque joueur  $i$ , nous considérons une utilité  $v_i : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Le jeu

$$\mathcal{H} = \left\{ (\mathcal{L}(X_i))_{i \in I}, (\mathcal{B}_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \right\}.$$

est appelé jeu minitif.

$\mathcal{N}_i$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes du joueur  $i$ .  $\mathcal{N} = \prod_{i \in I} \mathcal{N}_i$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes des joueurs dans  $I \setminus \{i\}$ . De plus,  $\mathcal{N}_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \mathcal{N}_j$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes pour les joueurs dans  $I \setminus \{i\}$ . Chaque  $\nu_i$  est interprété comme une fonction d'appartenance renversé. Finalement, chaque stratégie mixte aboutissant à une stratégie pure est notée  $\delta_{B_i}$  pour tout  $i \in I$  avec  $\delta_{B_i}(B'_i) = 1$  si  $B_i = B'_i$  et  $\delta_{B_i}(B'_i) = 0$  si  $B_i \neq B'_i$ .

Nous considérons pour chaque joueur  $i$  l'application minitive  $\underline{v}_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est une extension de l'application  $v_i : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\underline{v}_i(\nu) = v_i \left( \bigcap_{B \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i} \nu(A) \odot A \right) \quad (8.16)$$

$$= v_i \left( \bigcap_{B \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i} \prod_{i \in I} \nu_i(B_i) \odot B \right) \quad (8.17)$$

$$= \min_{B \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i} \left( \prod_{i \in I} \nu_i(B_i) \right) v_i(B) \quad (8.18)$$

## 9 CONCLUSION

Lors de ce chapitre nous avons présenté dans une première partie les résultats fondamentaux de la théorie des jeux. Nous avons cherché à expliciter ce qu'était un équilibre de Nash pur c'est à dire lorsque chaque joueur à intérêt à jouer sa stratégie dominante. Lorsque le jeu ne dispose pas de stratégie dominante c'est à ce moment qu'intervient le concept de stratégie mixte que nous avons développé. Nash a démontré qu'il existait des équilibres en stratégies. Pour cela il suffit de doter le jeu d'une structure probabiliste. En effet, les joueurs étant indifférent à jouer une stratégie ou une autre le concept de probabilité permet de trouver une solution au jeu et ce grâce au théorème du point fixe de Kakutani.

À ce stade, nous avons pu présenter la contribution que nous avons apporté en intégrant un structure  $\mathbb{B}$ -convexe au jeu qui peut s'interpréter comme une fonction d'appartenance que nous avons construit au chapitre précédent. Ainsi, en considérant l'ensemble des possibles et non plus l'ensemble des probables nous avons étendu la structure du jeu. Cela nous a permis notamment de caractériser trois types de comportements distincts possédant leur propre convexité (hypothèse centrale en théorie des jeux). Ainsi un joueur optimiste cherchera à maximiser l'ensemble des possibles et utilisera des mesures maximales. Un joueur indifférent utilise des mesures probabilistes tel qu'ils sont intégrés dans la théorie des jeux. Enfin, un joueur pessimiste se contentera d'utiliser la mesure minitive.

Nous pensons que les apports accomplis lors de ce chapitre permettent d'élargir les cas d'application de la théorie des jeux puisqu'ils permettent de considérer des individus rationnels, recherchant toujours une solution optimale tout en ayant une vision différente du jeu.



## 5. C-SHAPE ET MODÈLES DE JEUX LIMITES

*“L’art de la guerre nous apprend à ne pas compter sur la probabilité que l’ennemi ne vienne pas, mais sur notre propre disposition à le recevoir ; non pas sur la chance de ne pas attaquer, mais plutôt sur le fait que nous avons rendu notre position inattaquable”*

SUN TZU<sup>1</sup>

---

### Sommaire

<b>1</b>	INTRODUCTION . . . . .	<b>136</b>
<b>2</b>	FONCTIONS PUISSANCES ET CONVEXITÉ GÉNÉRALISÉE . . . . .	<b>137</b>
<b>3</b>	ENSEMBLES LIMITES . . . . .	<b>139</b>
<b>4</b>	CONVEXITÉ GÉNÉRALISÉE ET PROPRIÉTÉS DE POINT FIXE . . . . .	<b>141</b>
<b>5</b>	STRATÉGIES MIXTES NON-LINÉAIRES DANS LE CAS $\rho > 0$ . . . . .	<b>143</b>
<b>6</b>	STRATÉGIES MIXTES NON-LINÉAIRES DANS LE CAS $\rho < 0$ . . . . .	<b>147</b>
<b>7</b>	JEU COBB-DOUGLAS . . . . .	<b>148</b>
<b>8</b>	CONVEXITÉS MÉLANGÉES . . . . .	<b>150</b>
<b>9</b>	ÉQUILIBRES MÉLANGÉS EN STRATÉGIE MIXTE . . . . .	<b>152</b>
<b>10</b>	CONCLUSION . . . . .	<b>157</b>

---

---

1. *L’art de la guerre.*



## 1 INTRODUCTION

La théorie des jeux permet d'étudier les interactions des choix stratégiques de joueurs et de déterminer les solutions optimales du jeu. Nous avons supposé précédemment que le joueur devait arbitrer entre des stratégies floues, qui varient selon un degré d'appartenance. De plus, dans les chapitres précédents nous avons endogénéiser la prise de décision des joueurs en paramétrant la fonction d'appartenance aux diverses stratégies. En effet, nous avons introduit la notion de *C-Shape* qui permet de construire une classe plus générale de nombres flous et de paramétrer les fonctions d'appartenance. Dans ce chapitre, nous allons construire une classe de jeux dont la structure géométrique des stratégies mixtes considérées relève du même type de transformations opérées sur la *C-Shape*. Notre objectif est de construire des classes de jeux qui sont reliées et permettent notamment de retrouver les jeux  $\mathbb{B}$ -convexes comme des cas limites. Cela va notamment nous permettre de prendre en compte des moyennes généralisées en lieu et place des moyennes « standard » utilisées dans les jeux en stratégie mixte usuels. La notion de moyenne généralisée remonte Hardy, Littlewood et Polya [67]. Un traitement systématique sera par la suite proposé par Aczel [3]. Il existe de nombreuses fonctions très utilisées en sciences économiques qui sont issues de ces notions de moyenne généralisée. C'est par exemple le cas des fonctions Cobb-Douglas qui impliquent des transformations exponentielles et leurs réciproques logarithmiques. Les fonctions CES (« Constant Elasticity Substitution ») en font également partie. Elles impliquent quant à elles des fonctions puissances et des transformations du même type que celles utilisées dans le cadre de la *C-Shape*. Leur passage à la limite conduit aux fonctions d'utilité de type Léontief déjà évoquées dans le chapitre précédent et conduisant à des interprétations floues. Les gammes de moyennes généralisées ainsi considérées ont également l'avantage de permettre de traiter des situations de complémentarité ou de substituabilité stratégique plus ou moins forte. L'idée de base de ce chapitre est donc d'utiliser ces notions de moyennes pour construire une procédure de choix stratégiques des agents. Il est montré que le choix des paramètres conduit à établir l'existence d'un équilibre de Nash lié à la moyenne généralisée choisie. On peut à partir de là étudier la limite des séquences d'équilibres de Nash ainsi

mises en évidence. Nous montrons dans ce chapitre qu'elles convergent vers des équilibres spécifiques aux structures Cobb-Douglas,  $\mathbb{B}$ -convexes et inverse  $\mathbb{B}$ -convexes. En effet, nous proposerons de considérer des joueurs hétérogènes en croisant des convexités différentes, l'un des joueurs choisissant des structures additives d'autres des structures « floues » impliquant des actions non nécessairement transférables. Le chapitre sera construit de la manière suivante : dans une première section nous reviendrons sur les fonctions puissances et des structures de convexité généralisée mises en place. Dans une seconde section nous mettrons en évidence les ensembles limites qui en découlent, leurs caractéristiques géométriques et leurs implications. Par la suite, nous nous intéressons aux propriétés de point fixe dans un contexte de convexité généralisée. Les sections 5, 6 et 7 permettent de définir des stratégies mixtes impliquant des stratégies mixtes qui ne sont pas linéaires. Nous analyserons trois cas, lorsque  $\rho > 0$ , puis lorsque  $\rho < 0$  et enfin, nous analysons le cas particulier de la Cobb-Douglas. Le dernier chapitre permet de montrer qu'il est possible de mixer les convexités. En d'autres termes, un joueur peut jouer en utilisant les probabilités tandis que l'autre joue en utilisant les possibilités. Cela peut s'interpréter comme une situation dans laquelle le premier joueur serait indifférent face aux stratégies tandis que le second serait optimiste.

## 2 FONCTIONS PUISSANCES ET CONVEXITÉ GÉNÉRALISÉE

Dans cette section, nous appliquons une notion de fonction puissance adéquate afin de considérer des classes de convexité plus générales.

Pour tout  $\rho \in ]0, +\infty[$ , soit  $\varphi_\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\varphi_\rho(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\rho & \text{si } \lambda \geq 0 \\ -|\lambda|^\rho & \text{si } \lambda \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour tout  $\rho \neq 0$ , l'application réciproque est  $\varphi_\rho^{-1} = \varphi_{\frac{1}{\rho}}$ . Il est clair que :

- $\varphi_\rho$  est définie sur  $\mathbb{R}$  ;
- $\varphi_\rho$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- $\varphi_\rho$  est bijective.

Dans ce qui suit, pour tout vecteur  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  nous utilisons les notations suivantes :

$$\Phi_\rho(x) = (\varphi_\rho(x_1), \dots, \varphi_\rho(x_d)). \quad (2.2)$$

Si  $x \in \mathbb{R}_+^d$ , alors

$$\Phi_\rho(x) = (x_1^\rho, \dots, x_d^\rho) = x^\rho. \quad (2.3)$$

Il est alors naturel d'introduire les opérations suivantes sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$x \overset{r}{+} y = \Phi_\rho^{-1}(\Phi_\rho(x) + \Phi_\rho(y)) \quad (2.4)$$

$$\lambda \overset{\rho}{\cdot} x = \Phi_\rho^{-1}(\varphi_\rho(\rho)\Phi_\rho(x)). \quad (2.5)$$

Considérons  $A = \{x_1, \dots, x_\ell\} \subset \mathbb{R}^d$ . L'  $\varphi_\rho$ -enveloppe convexe de l'ensemble  $A$  est :

$$Co^{\varphi_\rho}(A) = \left\{ \sum_{k \in [\ell]} t_k \overset{r}{\cdot} x_k : \sum_{k \in [\ell]} t_k = 1, t \geq 0 \right\}.$$

Si  $A \subset \mathbb{R}_+^d$ , alors :

$$Co^{\varphi_\rho}(A) = \left\{ \left( \sum_{k \in [\ell]} t_k \overset{r}{\cdot} x_k \right)^\frac{1}{\rho} : \left( \sum_{k \in [\ell]} t_k \right)^\frac{1}{\rho} = 1, t \geq 0 \right\}.$$

On voit clairement ici avec la notion de  $C$ -Shape en posant  $\mu = \frac{1}{\rho}$  :

$$\sum_{k \in [\ell]} t_k = \left( \sum_{k \in [\ell]} t_k^\frac{1}{\mu} \right)^\mu. \quad (2.6)$$

Concentrons nous maintenant sur les cas  $\rho \in ]-\infty, 0[$ . L'application  $x \longrightarrow x^\rho$  n'est pas définie en  $x = 0$ . Par suite, on ne peut pas construire un endomorphisme bijectif sur  $\mathbb{R}$ . Posons  $K = \{\infty\} \cup \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pour tout  $\rho \in ]-\infty, 0[$  nous considérons la fonction  $\bar{\varphi}_\rho$  définie par :

$$\bar{\varphi}_\rho(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\rho & \text{if } \lambda > 0 \\ -(|\lambda|)^\rho & \text{if } \lambda < 0 \\ 0 & \text{if } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Il est évident que la fonction  $\bar{\varphi}_\rho$  est bijective de  $K$  vers  $\mathbb{R}$ . De plus, construisons l'isomorphisme  $\bar{\Phi}_\rho : K^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ , défini par  $\bar{\Phi}_\rho(x_1, \dots, x_d) = (\bar{\varphi}_\rho(x_1), \dots, \bar{\varphi}_\rho(x_d))$ .

Pour tout  $\rho < 0$ , considérons les opérations  $\overset{\rho}{+}$  et  $\overset{\rho}{\cdot}$  définies par :

$$\begin{aligned} x \overset{\rho}{+} y &= \bar{\Phi}_\rho^{-1} (\bar{\Phi}_\rho(x) + \bar{\Phi}_\rho(y)) \\ \lambda \overset{\rho}{\cdot} x &= \bar{\Phi}_\rho^{-1} (\bar{\varphi}_\rho(\lambda) \cdot \bar{\Phi}_\rho(x)). \end{aligned}$$

Alors  $(K^d, \overset{\rho}{+}, \overset{\rho}{\cdot})$  est  $\bar{\Phi}_\rho$ -espace vectoriel. On peut remarquer que si  $\rho < 0$  alors  $\Phi_\rho = \Phi_{-1}(\Phi_{|\rho|})$ . De là, si  $A \subset \mathbb{R}_{++}^d$ , alors nous obtenons :

$$Co^{\varphi_\rho}(A) = \Phi^{-1}(Co^{\varphi_\rho}(\Phi^{-1}(A))).$$

Dans ce qui suit, nous définirons également l'inégalité  $\overset{\rho}{\geq}$  comme suit. Pour tout  $\lambda, \mu \in K$  :

$$\lambda \overset{\rho}{\geq} \mu \iff \varphi_\rho(\lambda) \geq \varphi_\rho(\mu). \quad (2.7)$$

Par extension, nous pouvons à l'aide des fonctions logarithme définir cette opération pour  $\rho = 0$ . Ainsi, nous aurons sur  $\mathbb{R}_{++}$  :

$$\lambda \overset{0}{+} \mu = \exp(\ln(\lambda) + \ln(\mu)), \quad (2.8)$$

en posant  $\varphi_0(\lambda) = \ln(\lambda)$  pour tout réel  $\lambda$  positif.

### 3 ENSEMBLES LIMITES

En faisant varier le paramètre  $\rho$ , l'enveloppe convexe généralisée d'un nombre fini de points se déforme. C'est en particulier les cas de la  $\varphi_\rho$ -enveloppe convexe. Pour simplifier les notations notons  $Co^\rho(A) = Co^{\varphi_\rho}(A)$  pour tout sous-ensemble fini  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ .

Nous allons voir dans ce qui suit que le simplexe qui traduit les probabilités mixtes dans un jeu peut se déformer en fonction de la structure de convexité qui est choisie. Nous allons donc analyser la notion de limite d'un ensemble quand  $\rho \rightarrow \rho_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ . En particulier, nous analyserons brièvement dans ce qui suit la déformation de l'enveloppe  $\varphi_\rho$ -convexe. Pour simplifier les notations, notons  $Co^\rho(E) = Co^{\varphi_\rho}(A)$  pour tout ensemble fini  $A$  of  $\mathbb{R}^d$ .

	<b>Limite d'enveloppe convexe</b>
$\rho_s \longrightarrow 0$	$Co^0(E) = \left\{ \prod_{k=1}^{\ell} x_k^{\lambda_k} : \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k \in [\ell] \right\}$
$\rho_s \longrightarrow +\infty$	$Co^{\infty}(E) = \left\{ \bigvee_{k=1}^{\ell} t_k x_k : \bigvee_{k=1}^{\ell} t_k = 1, t_k \geq 0, k \in [\ell] \right\}$
$\rho_s \longrightarrow -\infty$	$Co^{-\infty}(E) = \left\{ \bigwedge_{k=1}^{\ell} t_k x_k : \bigwedge_{k=1}^{\ell} t_k = 1, t_k \geq 0, k \in [\ell] \right\}$

Tab. 5.1: Typologie des Ensembles Limites

La limite de Painlevé-Kuratowski d'une séquence d'ensembles  $(Co^{\rho}(A))_{\rho \in \mathbb{N}}$ , sera notée  $Co^{\infty}(A)$ .

La limite de Painlevé-Kuratowski inférieure [supérieure] d'une suite d'ensemble  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est notée  $Li_{n \rightarrow \infty} E_n$  [ $Ls_{n \rightarrow \infty} A_n$ ]. La limite inférieure de Painlevé-Kuratowski est l'ensemble des points  $p$  pour lesquels il existe une séquence  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $p_n \in E_n$  pour chaque  $n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ . La limite supérieure est l'ensemble des points  $p$  tels qu'il existe une sous-suite  $\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $p_{n_k} \in E_{n_k}$  pour chaque  $k$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} = p$ . Par définition  $Li_{n \rightarrow \infty} E_n \subset Ls_{n \rightarrow \infty} E_n$ . Si les limites supérieures et inférieures sont identiques on dira que la suite  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite de Painlevé-Kuratowski et on écrira  $Ls_{n \rightarrow \infty} E_n = E = Li_{n \rightarrow \infty} E_n = Lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ . Une typologie de ces ensembles limites a été fournie par Andriamasy et collaborateurs (2017).

Nous dirons que pour tout  $\rho$ , un sous-ensemble  $C$  de  $\Phi_{\rho}(\mathbb{R}^n)$  est  $\varphi_{\rho}$ -convexe si pour toute partie finie  $A$  de  $C$ ,  $Co^{\rho}(A) \subset C$ . De manière équivalente, cela signifie que pour tout  $x, y \in C$  et pour tout  $s, t \in \varphi_{\rho}([0, 1])$ , si  $s \overset{\rho}{+} t = 1$ , alors  $sx \overset{\rho}{+} ty \in C$ . De manière équivalente nous noterons qu'un ensemble  $C$  de  $\phi_{\rho}(\mathbb{R}^n)$  est  $\varphi_{\rho}$ -convexe si  $\phi_{\rho}^{-1}(C)$  est convexe.

Il sera très utile dans ce qui suit de considérer le simplexe généralisé suivant :

$$\Delta_\ell^{(\rho)} = \left\{ (t_1, \dots, t_\ell) \in \left( \varphi_\rho(\mathbb{R}_+) \right)^\ell : \sum_{k \in [\ell]}^\rho t_k = \varphi_\rho(1), t_k \varphi_\rho^{\geq}(0) \right\}.$$

On peut alors considérer plusieurs cas :

— Si  $\rho = \infty$ , on a :

$$\Delta_\ell^{(\infty)} = \left\{ (t_1, \dots, t_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell : \bigvee_{k \in [\ell]} t_k = 1, t_k \geq 0 \right\}.$$

— Si  $\rho > 0$ , on a :

$$\Delta_\ell^{(\rho)} = \left\{ (t_1, \dots, t_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell : \sum_{k \in [\ell]} t_k^\rho = 1, t_k \geq 0 \right\}.$$

— Si  $\rho = 0$ , on a :

$$\Delta_\ell^{(0)} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}_{++}^\ell : \prod_{k \in [\ell]} \lambda_k = 1 \right\}$$

— Si  $\rho = -1$ , on a :

$$\Delta_\ell^{(-1)} = \left\{ (t_1, \dots, t_\ell) \in \left( \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\} \right)^\ell : \left( \sum_{k \in [\ell]} t_k^{-1} \right)^{-1} = 1, t_k \in [1, \infty] \right\}.$$

— Si  $\rho = -\infty$ , on a :

$$\Delta_\ell^{(-\infty)} = \left\{ (t_1, \dots, t_\ell) \in \left( \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\} \right)^\ell : \bigwedge_{k \in [\ell]} t_k = 1, t_k \in [1, \infty] \right\}.$$

#### 4 CONVEXITÉ GÉNÉRALISÉE ET PROPRIÉTÉS DE POINT FIXE

Dans ce qui suit, nous définissons une application  $u$  définie sur  $\phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^n)$  et à valeur dans  $\varphi_\rho^{-1}(\mathbb{R})$  est  $\varphi_\rho$ -semi-continue supérieurement si  $\phi_\rho\left(\{x; u(x) \stackrel{\rho}{\geq} t\}\right)$  est fermé. Bien sûr, si  $\phi_\rho$  est l'application identité nous retrouvons la définition habituelle d'une application qui est semi-continue supérieurement. De même, un sous-ensemble  $F$  de  $\phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^n)$  est  $\varphi_\rho$ -fermé si  $\phi_\rho^{-1}(F)$  est fermé.

**Théorème 4.0.1:** *Supposons que  $\rho \in \mathbb{R}$  et que  $M$  est un sous-ensemble compact  $\varphi_\rho$ -convexe de  $\phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}_+^d)$ . Soit  $f : M \longrightarrow 2^M$  une application multivaluée dont le graphe est  $\varphi_\rho$ -fermé ayant des valeurs  $\varphi_\rho$ -compactes. Alors, cette application possède un point fixe sur  $M$ .*

*Preuve* : Soit  $f : M \longrightarrow 2^M$  une correspondance dont le graphe est  $\varphi_\rho$ -fermé ayant des valeurs  $\varphi_\rho$ -compactes. Il s'ensuit que l'application  $g_\rho = \phi_\rho \circ f \circ \phi_\rho^{-1}$  a des valeurs convexes et fermées dans  $\phi_\rho(M)$  qui est un ensemble compact et convexe. De plus, l'application  $g$  est de graphe  $\varphi_\rho$ -fermé prenant ses valeurs dans  $2^{\phi_\rho(M)}$ . En conséquence, cette application a un point fixe  $t_\rho^*$  dans  $\phi_\rho(M)$ . Ainsi,  $t^* \in g_\rho(t_\rho^*) = \phi_\rho \circ f \circ \phi_\rho^{-1}(t_\rho^*) \subset \phi_\rho(M)$ . En posant  $s^* = \phi_\rho^{-1}(t_\rho^*)$ , on obtient que  $f(s^*) \subset M$  et puisque  $s^* \in M$ , on en déduit le résultat.  $\square$

Considérons maintenant  $\ell$  joueurs et notons  $s_i$  la stratégie pure (ou action) pour le joueur  $i$ . À des fins de simplification, nous notons  $I = \{1, \dots, \ell\}$ . Pour tout  $\rho \in \mathbb{R}$ , supposons que  $S_i^{(\rho)} \subset \phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^{d_i})$  soit l'ensemble de toutes les stratégies pures du joueur  $i$ . En outre, nous supposons que  $S_i^{(\rho)}$  est  $\phi_\rho$ -compacte et notons  $s = (s_1, \dots, s_\ell)$  le profil de stratégies pures.  $S^{(\rho)} = \prod_{i \in I} S_i^{(\rho)} \subset \phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^d)$  où  $d = \sum_{i=1}^\ell d_i$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies pures.  $S_{-i}^{(\rho)}$  est l'ensemble des profils de stratégie pure pour les joueurs dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $s = (s_1, \dots, s_\ell)$  avec  $(s_i, s_{-i})$  en dépit du fait que ce ne soit pas la bonne notation. Une fonction d'utilité ou un gain pour le joueur est une fonction  $u_i : S \longrightarrow \varphi_\rho(\mathbb{R})$ .

Pour chaque  $i \in I$  on définit une réaction de correspondance comme étant une fonction multivaluée  $R_i^{(\rho)} : S_{-i} \longrightarrow 2^{S_i}$  défini par :

$$R_i^{(\rho)}(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i^{(\rho)}}^{(\rho)} u_i(s_i, s_{-i}) \quad (4.1)$$

Cette fonction est nommée fonction de réaction pour chaque joueur. La notation  $\max^{(\rho)}$  signifie que l'on maximise relativement à l'ordre partiel  $\stackrel{\rho}{\geq}$ . Un équilibre de Nash pur  $s^*$  est un point fixe de la fonction de la correspondance  $R^{(\rho)} : S^{(\rho)} \longrightarrow 2^{S^{(\rho)}}$  défini par :

$$R^{(\rho)}(s) = \prod_{i \in I} R_i^{(\rho)}(s_{-i}). \quad (4.2)$$

Pour  $i \in I$ , une fonction d'utilité  $u_i : \phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^{d_i}) \longrightarrow \varphi_\rho^{-1}(\mathbb{R})$  est supposée  $\varphi_\rho$ -quasi-concave.

**Proposition 4.0.2:** *Supposons que pour tout  $i \in I$  le plan  $u_i$  est  $\varphi_\rho$ -semi-continue supérieurement. De plus supposons que  $u_i \mapsto u_i(s_i, u_i s_i')$  est une fonction d'utilité  $\varphi_\rho$ -*

*quasi-concave et que l'ensemble de stratégie pure  $S_i^{(\rho_i)}$  est  $\varphi_\rho$ -compact, alors le jeu possède un équilibre de Nash dans  $S^{(\rho)}$ .*

*Preuve :* Puisque  $u_i$  est  $\varphi_\rho$ -semi-continue supérieurement pour  $i \in I$ , on en déduit de la  $\varphi_\rho$ -compacité de  $S_i^{(\rho)}$  que  $R_i^{(\rho)}(s_{-i})$  est non vide. Notons  $u_i^* = \max_{s_i \in S_i^{(\rho)}}^\rho u_i(s_i)$ . Il en résulte que  $\{s_i \in S_i^{(\rho)} : u_i(s_i) \geq u_i^*\}$  est  $\varphi_\rho$ -convexe et donc  $R_i^{(\rho)}(s_{-i})$  est  $\varphi_\rho$ -convexe et  $\varphi_\rho$ -fermé. En conséquence,  $R$  prend des valeurs  $\varphi_\rho$ -convexes non vides. De plus, puisque les  $u_i$  sont continus on en déduit que le graphe de  $R^{(\rho)}$  est fermé. Ce résultat est donné en appliquant le théorème 4.2.1.  $\square$

## 5 STRATÉGIES MIXTES NON-LINÉAIRES DANS LE CAS $\rho > 0$

Supposons à présent, que les ensembles de stratégies sont finis et notons  $S_i$  l'ensemble fini de toutes les stratégies pures du joueur  $i$ . Comme on le sait, l'existence d'un équilibre n'est pas garanti lorsque l'ensemble des stratégies ne respecte pas l'hypothèse de convexité. Ici, nous allons convexifier l'ensemble des stratégies en utilisant les opérateurs de convexité généralisés précédemment définis. Le poids de chaque stratégie pure est interprété comme une stratégie mixte cette fois-ci de nature non-linéaire. Nous reprenons le même schéma que précédemment.

Pour tout joueur  $i \in I$ , l'application  $p_i : S_i \longrightarrow [0, 1]$ , où  $\sum_{s_i \in S_i}^\rho p_i(s_i) = \sum_{s_i \in S_i} p_i(s_i)^\rho = 1$  est une stratégie mixte pour le joueur  $i \in I$ .  $M_i^{(\rho)}$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes pour le joueur  $i$ . On peut l'identifier au  $\varphi_\rho$ -simplexe  $\Delta_{d_i}^{(\rho)} = \{p_i \in \mathbb{R}_+^{d_i} : \sum_{j \in [d_i]} p_{i,j}^\rho = 1\}$ . Comme dans le cas usuel,  $M^{(\rho)} = \prod_{i \in I} M_i^{(\rho)}$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . De plus,  $M_{-i}^{(\rho)} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} M_j^{(\rho)}$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $(p_1, \dots, p_n)$  avec  $(p_i, p_{-i})$ , toute stratégie mixte se résumant à une stratégie pure est notée  $\delta_{s_i}$  pour tout  $i \in I$  avec  $\delta_{s_i}(s'_i) = 1$  si  $s_i = s'_i$  et  $\delta_{s_i}(s'_i) = 0$  et  $s_i \neq s'_i$ .

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	3, 2	1, 1
$s'_1$	1, 1	2, 3

 Tab. 5.2: Jeu  $\phi_\rho$ -convexe avec équilibre de Nash pur

Nous allons considérer ici l'extension d'utilité suivante  $\bar{u}_i^{(\rho)} : M \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\bar{u}_i^{(\rho)}(p) = \sum_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) = \left( \sum_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} p_i^\rho \right) u_i(s_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (5.1)$$

Nous désignerons par  $\bar{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho)}, S_i, M_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  le jeu ainsi construit.

**Proposition 5.0.1:** *Pour tout réel  $\rho > 0$ , le jeu  $\bar{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho)}, S_i, M_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i^{(\rho)}$  est l'application définie en (5.1) a un équilibre de Nash en stratégie mixte  $p_\star^{(0)} : S \longrightarrow [0, 1]$ .*

*Preuve :* Pour chaque  $i$ , l'ensemble  $\Delta_{d_i}^{(\rho)}$  est  $\varphi_\rho$ -convexe. De plus  $\bar{u}_i^{(\rho)}$  est  $\varphi_\rho$ -linéaire. Le résultat en découle donc immédiatement.  $\square$

On peut ainsi extraire une séquence  $\{N_\rho\}_{\rho > 0}$  d'équilibres de Nash. Evidemment, si  $\rho = 1$  on retrouve le cas standard. Dans un jeu à deux joueurs on peut calculer l'équilibre de façon simple.

Exemple 5.0.2: Considérons le jeu suivant, où  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$

Ici, il y a clairement deux équilibres de Nash en stratégie pure  $(s_1, s_2)$  et  $(s'_1, s'_2)$ . On peut également calculer un équilibre en stratégie mixte. Si le joueur 2 joue  $s_2$ , son paiement espéré est  $(p_1^\rho 2^\rho + (1 - p_1^\rho))^\frac{1}{\rho}$ . S'il joue  $s'_2$ , il a un paiement espéré égal à  $(p_1^\rho + (1 - p_1^\rho) 3^\rho)^\frac{1}{\rho}$ . Le min-max du jeu donne

$$(2^\rho - 1)p_1^\rho + 1 = (1 - 3^\rho)p_1^\rho + 3^\rho.$$

D'où  $p_{1,\star}^{(\rho)} = \left( \frac{3^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2} \right)^\frac{1}{\rho}$  et  $p'_{1,\star}^{(\rho)} = \left( \frac{2^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2} \right)^\frac{1}{\rho}$ . Si le joueur 1 joue  $s_1$ , son paiement espéré est  $(p_2^\rho 3^\rho + (1 - p_2^\rho))^\frac{1}{\rho}$ . S'il joue  $s'_1$ , on a  $(p_2^\rho + (1 - p_2^\rho) 2^\rho)^\frac{1}{\rho}$ . On a donc l'égalité :

$$(3^\rho - 1)p_2^\rho + 1 = (1 - 2^\rho)p_2^\rho + 2^\rho.$$

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	1, -1	-1, 1
$s'_1$	-1, 1	1, -1

 Tab. 5.3:  $\mathbb{B}$ -convexe “Matching-Penny game”

Il vient  $p_{2,\star}^{(\rho)} = \left(\frac{2^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2}\right)^{\frac{1}{\rho}}$  et  $p'_{2,\star}^{(\rho)} = \left(\frac{3^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ .

Comparé à la  $\mathbb{B}$ -convexité, cette approche a l'avantage de permettre de prendre en compte le cas où les paiements sont négatifs. L'exemple suivant, présente le cas du jeu “Matching-Penny game”.

**Exemple 5.0.3:** Considérons le jeu suivant pour lequel  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$  :

De manière évidente, il n'existe pas d'équilibre de Nash pur. On peut montrer assez facilement que l'on a  $p_1^{(\rho)} = p'_1^{(\rho)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}$  et  $p_2^{(\rho)} = p'_2^{(\rho)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ .

Nous allons maintenant analyser ce qui se passe à la limite et voir que dans le cas où les paiements sont positifs la limite de la suite des équilibre de Nash tend vers un équilibre en  $\mathbb{B}$ -convexité.

**Proposition 5.0.4:** Pour tout réel  $\rho > 0$ , soit le jeu  $\mathcal{G}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho)}, S_i, M_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i^{(\rho)}$  est l'application définie en (5.1) prenant des valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i^{(\rho)}, S_i, M_i\}_{i \in I}$  un jeu  $\mathbb{B}$ -convexe. Il existe une suite  $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$  et une séquence d'équilibres de Nash  $\{p_\star^{(\rho_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $p_\star^{(\rho_k)} \in \mathcal{N}^{(\rho_k)}$  pour chaque  $k$  qui converge vers un équilibre de Nash  $\phi_\star$  du jeu  $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i, S_i, M_i\}_{i \in I}$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_\star^{(\rho_k)} = \phi_\star$ .

*Preuve :* Pour chaque entier  $\rho > 0$ , le sous-ensemble de  $\Delta_d^\rho = \prod_{i \in I} \Delta_{d_i}^\rho$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}_+^d$ . De plus pour chaque  $k$ ,  $\Delta_d^\rho$  est un sous-ensemble compact du cube  $\{u \in \mathbb{R}^d : 0 \leq u_i \leq 1, i \in [d]\}$ . Supposons que  $\{p_\star^{(\rho)}\}_{\rho \in \mathbb{R}_+}$  est une suite d'équilibres de Nash. On peut donc extraire une sous-suite  $\{p_\star^{(\rho_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui est convergente vers un élément  $\phi_\star \in \mathbb{R}_+^d$ . Il a été montré par Briec et Horvath (2004) que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_d^{(\rho_k)} = \prod_{i \in I} \Delta_{d_i}^{(\infty)} = \prod_{i \in I} M_i$ .

Par ailleurs, Bric (2015) a mis en évidence que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_i^{(\rho_k)}(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} (p_{i,\star}^{(\rho_k)})^{\rho_k} \right) u_i(s_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} = \max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} \phi_{i,\star}(s_i) \right) u_i(s).$$

Supposons que  $\phi_\star$  ne soit pas un équilibre de Nash et montrons que l'on a une contradiction. La convergence en limite de Painlevé-Kuratowski de la suite  $\{\Delta_d^{(\rho_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $\{\Delta_d^{(\infty)}\}_{k \in \mathbb{N}} = M$  implique la convergence de Hausdorff. En effet, nous avons présenté plus haut que tous ces ensembles sont des sous-ensembles du cube  $\{u \in \mathbb{R}^d : 0 \leq u_i \leq 1, i \in [d]\}$  qui est compact. Si  $\phi_\star$  n'est pas un équilibre de Nash, on peut trouver  $\tilde{\phi}_i \in M_i$  tel que  $\bar{u}_i(\tilde{\phi}_i, \phi_{-i,\star}) > \bar{u}_i(\phi_{i,\star}, \phi_{-i,\star})$ . Comme  $\{\Delta_d^{(\rho_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $M$  au sens de Hausdorff, il existe pour tout  $\epsilon > 0$ , un entier  $k_\epsilon$  tel que quelque soit  $k > k_\epsilon$

$$d\left((\tilde{\phi}_i, \phi_{-i}), \Delta_d^{(\rho_k)}\right) < \epsilon.$$

On peut donc trouver un nombre  $k$  et un élément  $\tilde{p}_i^{(\rho_k)}$  de  $\Delta_{d_i}^{(\rho_k)}$  tel que :

$$d\left((\tilde{\phi}_i, \phi_{-i}), (\tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)})\right) < \epsilon.$$

Il en vient que l'on peut construire une suite  $\{(\tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)})\}_{k \in \mathbb{N}}$  tel que :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)} = (\tilde{\phi}_i, \phi_{-i})$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_i^{(\rho_k)}(\tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)}) = \bar{u}_i(\tilde{\phi}_i, \phi_{-i})$ , on en déduit qu'il existe un nombre  $k > k_\epsilon$  tel que :

$$|u_i^{(\rho_k)}(\tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)}) - \bar{u}_i(\tilde{\phi}_i, \phi_{-i})| < \epsilon \quad \text{et} \quad |u_i^{(\rho_k)}(p_{i,\star}^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)}) - \bar{u}_i(\phi_{i,\star}, \phi_{-i,\star})| < \epsilon$$

ceci implique en utilisant l'inégalité triangulaire que :

$$|u_i^{(\rho_k)}(\tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)}) - u_i^{(\rho_k)}(p_{i,\star}^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)})| > |\bar{u}_i(\tilde{\phi}_i, \phi_{-i}) - \bar{u}_i(\phi_{i,\star}, \phi_{-i,\star})|$$

Comme  $u_i^{(\rho_k)}(\tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)}) > u_i^{(\rho_k)}(p_{i,\star}^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)})$ , en prenant  $\epsilon$  suffisamment petit, nous déduisons que

$$u_i^{(\rho_k)}(\tilde{p}_i^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)}) > u_i^{(\rho_k)}(p_{i,\star}^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)}).$$

Nous en déduisons une contradiction car  $(p_{i,\star}^{(\rho_k)}, p_{-i,\star}^{(\rho_k)})$  est un équilibre de Nash du jeu  $\mathcal{G}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho)}, S_i, M_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  pour chaque  $k$ . Par conséquent  $\phi_\star$  est un équilibre de Nash du jeu  $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i, S_i, M_i\}_{i \in I}$ .  $\square$

Exemple 5.0.5: Considérons l'exemple 5.0.2. Nous avons les équilibres

$(p_{1,\star}^{(\rho)}, p'_{1,\star}^{(\rho)}, p_{2,\star}^{(\rho)}, p'_{2,\star}^{(\rho)}) = \left( \left( \frac{3^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \left( \frac{2^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \left( \frac{2^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \left( \frac{3^\rho - 1}{3^\rho + 2^\rho - 2} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right)$ . En passant à la limite nous avons :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (p_{1,\star}^{(\rho)}, p'_{1,\star}^{(\rho)}, p_{2,\star}^{(\rho)}, p'_{2,\star}^{(\rho)}) = (\phi_1, \phi'_1, \phi_2, \phi'_2) = \left( 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right).$$

On vérifie bien les conditions sur les stratégies mixtes d'un équilibre de Nash.

## 6 STRATÉGIES MIXTES NON-LINÉAIRES DANS LE CAS $\rho < 0$

Pour chaque joueur  $i$ , nous noterons ici  $S_i^{(-1)}$  l'ensemble de toutes les stratégies pures où  $S_i^{(-1)}$  est un sous-ensemble de  $(\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^{d_i}$ . Ici, pour tout joueurs  $i \in I$ , l'application  $q_i : S_i^{(-1)} \rightarrow [1, \infty]$ , où  $\sum_{s_i \in S_i^{(-1)}} p_i(s_i) = \sum_{s_i \in S_i^{(-1)}} p_i(s_i)^\rho = 1$  est une stratégie mixte pour le joueur  $i \in I$ .  $N_i^{(\rho)}$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes pour le joueur  $i$ . Le point à noter ici est que les  $q_i$  sont tous plus grands que 1. Comme pour le cas positif, on peut l'identifier au  $\varphi_\rho$ -simplexe  $\Delta_{d_i}^{(\rho)} = \{q_i \in (\mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\})^{d_i} : \sum_{j \in [d_i]} q_{i,j}^\rho = 1\}$ . Comme dans le cas positif,  $N^{(\rho)} = \prod_{i \in I} M_i^{(\rho)}$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . De plus,  $N_{-i}^{(\rho)} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} N_j^{(\rho)}$  est l'ensemble de toutes les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $(q_1, \dots, q_n)$  avec  $(q_i, q_{-i})$ . On se ramène aux stratégies pures toujours de la même manière.

Supposons que pour chaque  $i$  on a une fonction d'utilité  $v_i : S_i^{(-1)} \rightarrow \varphi_\rho^{-1}(\mathbb{R})$ . En adoptant une démarche parallèle au cas où  $\rho$  est positif, nous allons considérer ici l'extension d'utilité suivante  $\underline{v}_i^{(\rho)} : M \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\underline{v}_i^{(\rho)}(p) = \sum_{s \in S^{(-1)}} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) v_i(s) = \varphi_\rho^{-1} \left( \sum_{s \in S^{(-1)}} \left( \prod_{i \in I} \varphi_\rho(q_i) \right) \varphi_\rho(v_i(s_i)) \right). \quad (6.1)$$

Nous désignons par  $\underline{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\underline{v}_i^{(\rho)}, S_i^{(-1)}, N_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  le jeu ainsi construit.

Nous allons tout d'abord présenter une propriété d'équivalence entre les cas  $\rho > 0$  et  $\rho < 0$ .

**Proposition 6.0.1:** *Pour tout réel  $\rho < 0$ ,  $q_\star$  est un équilibre du jeu  $\underline{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\underline{v}_i^{(\rho)}, S_1^{(-1)}, N_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\underline{v}_i^{(\rho)}$  est l'application définie en (5.1), si et seulement si  $\phi_{-1}(q_\star)$  un équilibre de Nash en stratégie mixte du jeu  $\mathbb{B}$ -convexe  $\bar{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\varphi_{-1}(\underline{u}_i^{(\rho)}), \phi_{-1}(S_i^{(-1)}), M_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$ .*

La démonstration est évidente et le résultat peut-être énoncé sans preuve. Le résultat suivant est une conséquence immédiate.

**Proposition 6.0.2:** *Pour tout réel  $\rho < 0$ , le jeu  $\underline{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\underline{v}_i^{(\rho)}, S_1^{(-1)}, N_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  a un équilibre de Nash en stratégie mixte  $q_\star^{(\rho)} : S^{(-1)} \rightarrow [1, \infty]$ .*

Nous allons maintenant analyser ce qui se passe à la limite et voir que dans le cas où les paiements sont positifs, la limite de la suite des équilibres de Nash tend vers un équilibre inverse  $\mathbb{B}$ -convexité.

**Proposition 6.0.3:** *Pour tout réel  $\rho < 0$ , soit le jeu  $\underline{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\underline{v}_i^{(\rho)}, S_i^{(-1)}, N_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\underline{v}_i^{(\rho)}$  est l'application définie en (7.1) prenant des valeurs dans  $\mathbb{R}_{++} \cup \{\infty\}$ . Soit  $\underline{\mathcal{G}} = \{\underline{v}_i^{(\rho)}, S_i^{(-1)}, N_i\}_{i \in I}$  un jeu inverse  $\mathbb{B}$ -convexe. Il existe une suite  $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $-\infty$  et une séquence d'équilibres de Nash  $\{q_\star^{(\rho_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $q_\star^{(\rho_k)} \in \mathcal{N}^{(\rho_k)}$  pour chaque  $k$  qui converge vers un équilibre de Nash  $\eta_\star$  du jeu  $\underline{\mathcal{G}} = \{\underline{v}_i, S_i^{(-1)}, N_i\}_{i \in I}$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_\star^{(\rho_k)} = \eta_\star$ .*

## 7 JEU COBB-DOUGLAS

Ce cas correspond à la situation où  $\rho \rightarrow 0$ . Pour chaque joueur  $i$ , nous notons ici  $S_i$  l'ensemble de toutes les stratégies pures où  $S_i$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}_+^{d_i}$ . Pour tout joueurs  $i \in I$ , l'application  $\theta_i : S_i \rightarrow [0, 1]$ , où  $\sum_{s_i \in S_i} \theta_i(s_i) = 1$  est une stratégie mixte pour le joueur  $i \in I$ .  $Q_i^{(0)}$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes pour le joueur  $i$ , les  $\theta_i$  sont identifiables à un simplexe, cette fois-ci  $\Delta_{d_i}^{(1)} = \{\theta_i \in \mathbb{R}_+^{d_i} : \sum_{j \in [d_i]} \theta_{i,j} = 1\}$ . Comme pour les autres cas,  $Q^{(0)} = \prod_{i \in I} Q_i^{(0)}$  est l'ensemble de toutes les profils de stratégies mixtes pour l'ensemble des joueurs. De plus,  $Q_{-i}^{(0)} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} Q_j^{(0)}$  est l'ensemble

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	4, 1	1, 4
$s'_1$	1, 3	3, 1

Tab. 5.4: Jeu Cobb-Douglas

de tous les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  avec  $(\theta_i, \theta_{-i})$ . On se ramène aux stratégies pures toujours de la même manière.

Supposons que pour chaque  $i$ , on dispose d'une fonction d'utilité  $w_i : S_i^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ . En adoptant une démarche parallèle au cas où  $\rho$  est positif, nous allons considérer ici l'extension d'utilité suivante  $w_{\circ i} : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  définie par :

$$w_i(\theta) = \sum_{s \in S^{(0)}}^0 \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) v_i(s) = \prod_{s \in S^{(0)}} \left( \prod_{i \in I} (v_i(s_i))^{\theta_i(s_i)} \right). \quad (7.1)$$

Nous désignerons par  $\mathcal{G}^{(0)} = \{w_i, S_i^{(0)}, Q_i^{(0)}\}_{i \in I}$  le jeu ainsi construit.

**Proposition 7.0.1:** *Le jeu  $\mathcal{G}^{(0)} = \{w_i, S_i^{(0)}, Q_i^{(0)}\}_{i \in I}$  possède un équilibre de Nash en stratégie mixte  $\theta_\star : S^{(0)} \rightarrow [0, 1]$ .*

Exemple 7.0.2: Considérons le jeu suivant, où  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$

Ici, il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégie pure. On peut calculer un équilibre en stratégie mixte. Si le joueur 2 joue  $s_2$ , son paiement espéré est  $1^{\theta_1} 3^{1-\theta_1}$ . S'il joue  $s'_2$ , il a un paiement espéré égal à  $2^{\theta_1} 1^{1-\theta_1}$ . Le min-max du jeu donne :

$$3^{1-\theta_1} = 2^{\theta_1}.$$

D'où  $\theta_{1,\star} = \frac{\ln(3)}{\ln(6)}$  et  $\theta'_{1,\star} = \frac{\ln(2)}{\ln(6)}$ . Si le joueur 1 joue  $s_1$ , son paiement espéré est  $4^{\theta_2} 1^{1-\theta_2}$ . S'il joue  $s'_1$ , on a  $1^{\theta_2} 3^{1-\theta_2}$ . On a donc l'égalité :

$$4^{\theta_2} = 3^{1-\theta_2}.$$

Il vient  $\theta_{2,\star} = \frac{\ln(3)}{\ln(12)}$  et  $\theta'_{2,\star} = \frac{\ln(4)}{\ln(12)}$ .

Nous allons maintenant analyser ce qui se passe à la limite et voir que dans le cas où les paiements sont positifs la limite de la suite des équilibres de Nash, mis à la puissance du paramètre considéré, tend vers un équilibre de jeu Cobb-Douglas.

**Proposition 7.0.3:** *Pour tout réel  $\rho > 0$ , soit le jeu  $\underline{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho)}, S_i, M_i^{(\rho)}\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i^{(\rho)}$  est l'application définie en (5.1) prenant des valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{u}_i^{(\rho)}, S_i, M_i\}_{i \in I}$  un jeu inverse  $\mathbb{B}$ -convexe. Il existe une suite  $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers 0 et une séquence d'équilibres de Nash  $\{p_\star^{(\rho_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $p_\star^{(\rho_k)} \in \mathcal{N}^{(\rho_k)}$  pour chaque  $k$  tel que la suite  $\{p_\star^{(\rho_k)^{\rho_k}}\}$  converge vers un équilibre de Nash  $\theta_\star$  du jeu  $\mathcal{G} = \{w_i, S_i, Q_i^{(0)}\}_{i \in I}$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_\star^{(\rho_k)^{\rho_k}} = \theta_\star$ .*

## 8 CONVEXITÉS MÉLANGÉES

Nous allons maintenant regarder une situation dans laquelle les types de moyennes généralisées choisies par les agents peuvent être différentes. Cela suppose des convexités différentes. Considérons cette fois-ci que  $\rho$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^\ell$ . Considérons également le produit cartésien

$$K = K_1 \times \dots \times K_\ell \quad (8.1)$$

où pour chaque  $i$ ,  $K_i = \phi_{\rho_i}^{-1}(\mathbb{R}^{d_i})$ . Considérons à présent l'application  $\Phi_\rho$  définie de  $K$  dans  $\mathbb{R}^d$  par

$$\Phi_\rho(x_1, \dots, x_\ell) = (\phi_{\rho_1}(x_1), \dots, \phi_{\rho_\ell}(x_\ell)). \quad (8.2)$$

Cette application définit par conséquent un isomorphisme de  $K$  vers  $\mathbb{R}^d$ . En suivant une démarche parallèle à celle des sections précédentes, nous dirons qu'une application  $u$  définie sur  $\Phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^d)$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  est  $\Phi_\rho$ -semi-continue supérieurement si  $\Phi_\rho(\{x; u(x) \geq t\})$  est fermé. De même, un sous-ensemble  $F$  de  $\Phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^d)$  est  $\Phi_\rho$ -fermé si  $\Phi_\rho^{-1}(F)$  est fermé. Ici nous voyons cependant une difficulté, cette transformation implique des modifications différentes du corps commutatif  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, nous allons considérer une forme mixte de convexité, déjà définie dans Andriamasy et. al. (2017). Nous définissons sur  $K$  l'opération :

$$x \overset{\rho}{+} y = \Phi_\rho^{-1}(\Phi_\rho(x) + \Phi_\rho(y)). \quad (8.3)$$

Nous disons qu'un sous-ensemble  $C$  de  $K$  est  $\Phi_\rho$ -convexe en forme mixte si pour tout  $x, y \in C$  et tout  $s, t \in [0, 1]$  tel que  $s + t = 1$ , on a  $sx \overset{\rho}{+} ty \in C$ .

**Théorème 8.0.1:** *Supposons que  $\rho \in \mathbb{R}^\ell$  et que  $M$  est un sous-ensemble compact  $\Phi_\rho$ -convexe de  $K = \Phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^d)$ . Soit  $f : M \longrightarrow 2^M$  une application multivaluée dont le graphe est  $\Phi_\rho$ -fermé ayant des valeurs  $\Phi_\rho$ -compactes. Alors cette application possède un point fixe sur  $M$ .*

*Preuve :* Soit  $f : M \longrightarrow 2^M$  une correspondance dont le graphe est  $\Phi_\rho$ -fermé ayant des valeurs  $\Phi_\rho$ -compactes. Il s'ensuit que l'application  $g_\rho = \Phi_\rho \circ f \circ \Phi_\rho^{-1}$  a des valeurs convexes et fermées dans  $\Phi_\rho(M)$  qui est un produit cartésien d'ensemble compacts et convexe. De plus, l'application  $g$  est de graphe  $\Phi_\rho$ -fermé prenant ses valeurs dans  $2^{\Phi_\rho(M)}$ . En conséquence, cette application possède un point fixe  $t_\rho^*$  dans  $\Phi_\rho(M)$ . Ainsi,  $t^* \in g_\rho(t_\rho^*) = \Phi_\rho \circ f \circ \Phi_\rho^{-1}(t_\rho^*) \subset \Phi_\rho(M)$ . En posant  $s^* = \Phi_\rho^{-1}(t_\rho^*)$ , on obtient que  $f(s^*) \subset M$  et puisque  $s^* \in M$ , on en déduit le résultat.  $\square$

Considérons maintenant  $\ell$  joueurs et notons  $s_i$  la stratégie pure (ou action) pour le joueur  $i$  avec  $I = \{1, \dots, \ell\}$ . Pour tout  $\rho \in \mathbb{R}^\ell$ , supposons que  $S_i^{(\rho_i)} \subset \phi_{\rho_i}^{-1}(\mathbb{R}^{d_i})$  soit l'ensemble de toutes les stratégies pures du joueur  $i$ . En outre, nous supposons que  $S_i^{(\rho_i)}$  est  $\phi_{\rho_i}$ -compact et notons  $s = (s_1, \dots, s_\ell)$  le profil de stratégies pures.  $S^{(\rho)} = \prod_{i \in I} S_i^{(\rho_i)} \subset \Phi_\rho^{-1}(\mathbb{R}^d)$  où  $d = \sum_{i=1}^\ell d_i$  est l'ensemble de tous les profils de stratégies pures.  $S_{-i}^{(\rho)}$  est l'ensemble des profils de stratégie pure pour les joueurs dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $s = (s_1, \dots, s_\ell)$  avec  $(s_i, s_{-i})$  en dépit du fait que ce ne soit pas une notation optimale. Une fonction d'utilité ou un gain pour le joueur est une fonction  $u_i : S^{(\rho)} \longrightarrow \varphi_{\rho_i}^{-1}(\mathbb{R})$ .

Pour chaque  $i \in I$  on définit une réaction de correspondance comme étant une fonction multivaluée  $R_i^{(\rho_i)} : S_{-i} \longrightarrow 2^{S_i}$  défini par :

$$R_i^{(\rho_i)}(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i^{(\rho_i)}} u_i(s_i, s_{-i}) \quad (8.4)$$

Cette fonction est nommée fonction de réaction pour chaque joueur. La notation  $\max^{(\rho_i)}$  signifie que l'on maximise relativement à l'ordre partiel  $\stackrel{\rho_i}{\geq}$ . Un équilibre de Nash pur  $s^*$  est un point fixe de la fonction de la correspondance  $R^{(\rho)} : S^{(\rho)} \longrightarrow 2^{S^{(\rho)}}$  défini par :

$$R^{(\rho)}(s) = \prod_{i \in I} R_i^{(\rho_i)}(s_{-i}). \quad (8.5)$$

Pour  $i \in I$ , une fonction d'utilité  $u_i : \phi_{\rho_i}^{-1}(\mathbb{R}^{d_i}) \longrightarrow \varphi_{\rho_i}^{-1}(\mathbb{R})$  est supposée  $\varphi_{\rho_i}$ -quasi-concave.

**Proposition 8.0.2:** *Supposons que pour tout  $i \in I$  le plan  $u_i$  est  $\varphi_{\rho_i}$ -semi-continue supérieurement. De plus, supposons que  $u_i \mapsto u_i(s_i, u_i s_i')$  est une fonction d'utilité  $\varphi_{\rho_i}$ -quasi-concave et que l'ensemble de stratégie pure  $S_i^{(\rho_i)}$  est  $\varphi_{\rho_i}$ -compact, alors le jeu possède un équilibre de Nash dans  $S^{(\rho)}$ .*

*Preuve :* Puisque  $u_i$  est  $\varphi_{\rho_i}$ -semi-continue supérieurement pour  $i \in I$ , on en déduit de la  $\varphi_{\rho_i}$ -compacité de  $S_i^{(\rho_i)}$  que  $R_i^{(\rho_i)}(s_{-i})$  est non vide. Notons  $u_i^* = \max_{s_i \in S_i^{(\rho_i)}}^{(\rho_i)} \{u_i(s_i)\}$ . On a que  $\{s_i \in S_i^{(\rho_i)} : u_i(s_i) \geq u_i^*\}$  est  $\varphi_{\rho_i}$ -convexe et donc  $R_i^{(\rho_i)}(s_{-i})$  est  $\varphi_{\rho_i}$ -convexe et  $\varphi_{\rho_i}$ -fermé. En conséquence,  $R^{(\rho)} = \prod_{i \in I} R_i^{(\rho_i)}$  prend des valeurs  $\Phi_\rho$ -convexes non vides. De plus, puisque les  $u_i$  sont  $\varphi_{\rho_i}$ -semi-continue intérieurement on en déduit que le graphe de  $R^{(\rho)}$  est fermé. Ce résultat est donné en appliquant le théorème 4.2.1.  $\square$

## 9 ÉQUILIBRES MÉLANGÉS EN STRATÉGIE MIXTE

Pour tout joueur  $i \in I$ , l'application  $p_i^{(\rho_i)} : S_i^{(\rho_i)} \longrightarrow [0, 1]$ , où  $\sum_{s_i \in S_i^{(\rho_i)}}^{(\rho_i)} p_i^{(\rho_i)}(s_i) = 1$  est une stratégie mixte pour le joueur  $i \in I$ .  $P_i^{(\rho_i)}$  est l'ensemble de toutes les stratégies mixtes pour le joueur  $i$ . Comme dans le cas précédent, mais cette fois-ci avec un  $\rho_i$  pour chaque  $i$ , on peut l'identifier au  $\varphi_{\rho_i}$ -simplexe  $\Delta_{d_i}^{(\rho_i)} = \{p_i^{(\rho_i)} \in \phi_{\rho_i}^{-1}(\mathbb{R}_+^{d_i}) : \sum_{j \in [d_i]}^{(\rho_i)} p_{i,j}^{(\rho_i)} = 1\}$ . On a  $P^{(\rho)} = \prod_{i \in I} P_i^{(\rho_i)}$  qui est l'ensemble de tous les profils de stratégies mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . De plus,  $P_{-i}^{(\rho)} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} P_j^{(\rho_j)}$  est l'ensemble de toutes les profils de stratégies

mixtes pour le joueur dans  $I \setminus \{i\}$ . On identifie  $(p_1, \dots, p_\ell)$  avec  $(p_i, p_{-i})$ , toute stratégie mixte se résumant une stratégie pure est notée  $\delta_{s_i}$  pour tout  $i \in I$  avec  $\delta_{s_i}(s'_i) = 1$  si  $s_i = s'_i$  et  $\delta_{s_i}(s'_i) = 0$  et  $s_i \neq s'_i$ .

Afin d'homogénéiser les résultats supposons que tous les paiements son strictement positifs.

Suivant les cas énumérés plus haut, nous noterons plus précisément :

$$\begin{aligned} - \sum_{s \in S}^{-\infty} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) &= \min_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) \\ - \sum_{s \in S}^{+\infty} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) &= \max_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) \\ - \sum_{s \in S}^0 \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) &= \prod_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) \\ - \sum_{s \in S}^{\rho_i} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right) u_i(s) &= \left( \sum_{s \in S} \left( \prod_{i \in I} p_i(s_i) \right)^{\rho_i} u_i(s)^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \text{ si } \rho_i \notin \{-\infty, 0, +\infty\} \end{aligned}$$

Nous devons maintenant construire une fonction d'utilité étendue en stratégie qui intègre les structures algébriques choisies par tous les joueurs mais qui soit également invariante sous l'effet d'une permutation sur l'ensemble des joueurs. En effet, les structures algébriques étant différentes les sommes ne commutent pas. Tout d'abord pour chaque stratégie, nous adopterons la convention suivante :

$$\sum_{s_i \in S_i}^{\rho_i, p_i} u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i}^{\rho_i} p_i(s_i) u_i(s). \quad (9.1)$$

Cette convention nous simplifiera la tâche dans ce qui suit. Etant donné une permutation  $\sigma$  définie sur  $[\ell]$ , nous définirons par  $\sum^{\sigma, \rho}$  la somme généralisée suivante :

$$\sum_{s \in S}^{\sigma, \rho, p} u_i(s) = \sum_{s_{\sigma(1)} \in S_{\sigma(1)}}^{\rho_{\sigma(1)}, p_{\sigma(1)}} \cdots \sum_{s_{\sigma(\ell)} \in S_{\sigma(\ell)}}^{\rho_{\sigma(\ell)}, p_{\sigma(\ell)}} u_i(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(\ell)}). \quad (9.2)$$

Remarquons que l'emboîtement de ces sommes est parfaitement défini, car même pour  $\rho_i < 0$ , les paiements espérés (dans l'algèbre choisie) sont strictement positifs. Notons  $\mathfrak{S}_\ell$ , l'ensemble de toutes les permutations définies sur  $[\ell]$ . Cet ensemble a  $\ell!$  éléments. Pour chaque  $i$ , notons par ailleurs  $\mathfrak{S}_\ell^{(i)}$  l'ensemble de toutes les permutations de  $\mathfrak{S}_\ell$  tel que  $\sigma(1) = i$ . Cela revient à considérer en premier lieu, la somme de l'agent  $i$ , c'est-à-dire  $\sum_{s_i \in S_i}^{\rho_i}$ . L'ensemble  $\mathfrak{S}_\ell^{(i)}$  a quant à lui,  $\ell - 1!$  éléments. Nous devons construire une somme

qui soit invariante par permutation de ces  $\ell - 1$  éléments restants. Le moyen le plus simple consiste à considérer une moyenne sur toutes les permutations de  $\mathfrak{S}_\ell^{(i)}$ .

Nous allons donc considérer ici, pour chaque  $i \in I$ , l'extension d'utilité suivante  $\bar{u}_i^{(\rho_i)} : M \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$  définie par :

$$\bar{u}_i^{(\rho)}(p) = \frac{1}{(\ell - 1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell^{(i)}} \sum_{s \in S}^{\sigma, \rho, p} u_i(s) \quad (9.3)$$

Cette fonction est indépendante de l'ordre dans lequel les joueurs (autres que le joueur  $i$ ) sont considérés. Si tous les  $\rho_i$  sont identiques, on retrouve le cas standard présenté dans les sections précédentes. Dans le cas de deux joueurs, l'ordre de composition des opérations de sommations ne se pose plus (chacun des deux joueurs ne fait face qu'à un seul joueur). On aura ainsi :

$$\bar{u}_1^{(\rho)}(p) = \sum_{s_1 \in S_1}^{\rho_1} p_1(s_1) \left( \sum_{s_2 \in S_2}^{\rho_2} p_2(s_2) u_1(s_1, s_2) \right) \quad (9.4)$$

et

$$\bar{u}_2^{(\rho)}(p) = \sum_{s_2 \in S_2}^{\rho_2} p_2(s_2) \left( \sum_{s_1 \in S_1}^{\rho_1} p_1(s_1) u_2(s_1, s_2) \right). \quad (9.5)$$

Ce qu'il est important de noter ici, c'est que chaque fonction d'utilité dispose de sa propre structure algébrique et qu'elles peuvent être différentes.

Etant donné un vecteur  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\ell) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})^\ell$ , nous désignerons par  $\bar{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho_i)}, S_i^{(\rho_i)}, P_i^{(\rho_i)}\}_{i \in I}$  le jeu ainsi construit.

**Proposition 9.0.1:** *Pour tout vecteur  $\rho \in \mathbb{R}^\ell$ , le jeu  $\bar{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho_i)}, S_i^{(\rho_i)}, P_i^{(\rho_i)}\}_{i \in I}$  où pour tout  $i \in I$   $\bar{u}_i^{(\rho)}$  est l'application définie en (9.5) possède un équilibre de Nash en stratégie mixte  $p_\star^{(\rho)} = (p^{(\rho_1)}, \dots, p^{(\rho_\ell)}) : \prod_{i \in I} S^{(\rho_i)} \longrightarrow \prod_{i \in I} \varphi_{\rho_i}^{-1}([0, 1])$ .*

*Preuve :* Pour chaque  $i$ , l'ensemble  $\Delta_{d_i}^{(\rho_i)}$  est  $\varphi_{\rho_i}$ -convexe. De plus  $\bar{u}_i^{(\rho_i)}$  est  $\varphi_{\rho_i}$ -linéaire. Le résultat en découle donc immédiatement.  $\square$

$1 \setminus 2$	$s_2$	$s'_2$
$s_1$	4, 1	1, 2
$s'_1$	1, 3	3, 1

Tab. 5.5: Jeu Cobb-Douglas

Il est à noter qu'ici, chaque joueur calcule sa fonction de réaction dans "sa propre algèbre". On notera  $\mathcal{N}^{(\rho)}$  l'ensemble de ces équilibres de Nash pour tous les vecteurs  $\rho$  possibles. Le résultat suivant s'obtient toujours de la même manière à partir de la convergence de Hausdorff des  $\Delta^{\rho_{k,i}}$  simplexes et la continuité des fonctions d'utilité. Notons, qu'ici les paiements sont supposés positifs ce qui permet simultanément de traiter les cas inverses  $\mathbb{B}$ -convexes et Cobb-Douglas.

**Proposition 9.0.2:** *Pour tout vecteur  $\rho \in \mathbb{R}^\ell$ , soit le jeu  $\overline{\mathcal{G}}^{(\rho)} = \{\bar{u}_i^{(\rho_i)}, S_i^{(\rho_i)}, P_i^{(\rho_i)}\}_{i \in I}$  où, pour tout  $i \in I$ ,  $\bar{u}_i^{(\rho_i)}$  est l'application définie en (9.5) prenant des valeurs dans  $\mathbb{R}_{++}$ . Il existe une suite  $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $\bar{\rho} \in (\mathbb{R}_{++} \cup \{-\infty, \infty\})^\ell$  et une séquence d'équilibres de Nash  $\{p_\star^{(\rho_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $p_\star^{(\rho_k)} \in \mathcal{N}^{(\rho_k)}$  pour chaque  $k$  qui converge vers un équilibre de Nash  $\bar{p}_\star^{\bar{\rho}}$  du jeu  $\overline{\mathcal{G}}^{(\bar{\rho})} = \{\bar{u}_i^{(\bar{\rho}_i)}, S_i^{(\bar{\rho}_i)}, P_i^{(\bar{\rho}_i)}\}_{i \in I}$  tel que pour tout  $i \in I$   $\lim_{k \rightarrow \infty} p_\star^{(\rho_k, i)} = \bar{p}_\star^{\bar{\rho}_i}$ .*

Exemple 9.0.3: Considérons le jeu suivant, où  $S_1 = \{s_1, s'_1\}$ ,  $S_2 = \{s_2, s'_2\}$

Nous reprenons l'exemple 7.0.2. Supposons que le joueur 1 une  $\varphi_{\rho_1}$  convexité et que le joueur 2 utilise une  $\varphi_{\rho_2}$ -convexité. On suppose ici que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  prennent des valeurs réelles et non nulles.

Si le joueur 2 joue  $s_2$ , son paiement espéré est  $(p_1^{\rho_1} + (1 - p_1^{\rho_1})3^{\rho_1})^{\frac{1}{\rho_1}}$ . S'il joue  $s'_2$ , il a un paiement espéré égal à  $(p_1^{\rho_1}2^{\rho_1} + (1 - p_1^{\rho_1}))^{\frac{1}{\rho_1}}$ . Le min-max du jeu donne

$$(1 - 3^{\rho_2})p_1^{\rho_1} + 3^{\rho_1} = (2^{\rho_1} - 1)p_1^{\rho_1} + 1.$$

D'où  $p_{1,\star}^{(\rho_1)} = \left(\frac{3^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}}$  et  $p'_{1,\star}^{(\rho_1)} = \left(\frac{2^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}}$ .

Considérons maintenant le point d'indifférence du joueur 1.

Si le joueur 1 joue  $s_1$ , son paiement espéré est  $(p_2^{\rho_2} 4^{\rho_2} + (1 - p_2^{\rho_2}))^{\frac{1}{\rho_2}}$ . S'il joue  $s'_1$ , on a  $(p_2^{\rho_2} + (1 - p_2^{\rho_2}) 3^{\rho_1})^{\frac{1}{\rho_2}}$ . On a donc l'égalité :

$$(4^{\rho_2} - 1)p_2^{\rho_2} + 1 = (1 - 3^{\rho_2})p_2^{\rho_2} + 3^{\rho_2}.$$

On a donc  $p_{2,\star}^{(\rho_2)} = \left(\frac{3^{\rho_2}-1}{4^{\rho_2}+3^{\rho_2}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_2}}$  et  $p'_{2,\star}^{(\rho_2)} = \left(\frac{4^{\rho_2}-1}{4^{\rho_2}+3^{\rho_2}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_2}}$ .

Cela donne l'équilibre :

$$(p_{1,\star}^{\rho_1}, p'_{1,\star}^{\rho_1}, p_{2,\star}^{\rho_2}, p'_{2,\star}^{\rho_2}) = \left(\left(\frac{3^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}}, \left(\frac{2^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}}, \left(\frac{3^{\rho_2}-1}{4^{\rho_2}+3^{\rho_2}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_2}}, \left(\frac{4^{\rho_2}-1}{4^{\rho_2}+3^{\rho_2}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_2}}\right).$$

Nous pouvons distinguer deux cas :

— (a) le cas quadratique ( $\rho_1 = \rho_2 = 2$ ). On obtient :

$$(p_{1,\star}^{(2)}, p'_{1,\star}^{(2)}, p_{2,\star}^{(2)}, p'_{2,\star}^{(2)}) = \left(\left(\frac{8}{11}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{3}{11}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{8}{23}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{15}{23}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

— (b) le cas Harmonique ( $\rho_1 = \rho_2 = -1$ ).

$$(p_{1,\star}^{(-1)}, p'_{1,\star}^{(-1)}, p_{2,\star}^{(-1)}, p'_{2,\star}^{(-1)}) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{17}{8}, \frac{17}{9}\right).$$

En passant à la limite vers  $+\infty$  nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} p_{1,\star}^{(\rho_1)} &= \lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} = 1 \\ \lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} p'_{1,\star}^{(\rho_1)} &= \lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} = \frac{2}{3} \\ \lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} p_{2,\star}^{(\rho_2)} &= \lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{\rho_2}-1}{4^{\rho_2}+3^{\rho_2}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_2}} = \frac{3}{4} \\ \lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} p'_{2,\star}^{(\rho_2)} &= \lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{4^{\rho_2}-1}{4^{\rho_2}+3^{\rho_2}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_2}} = 1. \end{aligned}$$

Nous retrouvons la condition de  $\mathbb{B}$ -convexité :  $\max\{p_1^{(\infty)}, p'_{1,\star}^{(\infty)}\} = 1$  et  $\max\{p_2^{(\infty)}, p'_{2,\star}^{(\infty)}\} =$

1.

En passant à la limite vers  $-\infty$  nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_1 \rightarrow -\infty} p_{1,\star}^{(\rho_1)} &= \lim_{\rho_1 \rightarrow -\infty} \left(\frac{3^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} = \frac{3}{2} \\ \lim_{\rho_1 \rightarrow -\infty} p'_{1,\star}^{(\rho_1)} &= \lim_{\rho_1 \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^{\rho_1}-1}{3^{\rho_1}+2^{\rho_1}-2}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\rho_2 \rightarrow -\infty} p_{2,\star}^{(\rho_2)} &= \lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{3^{\rho_2} - 1}{4^{\rho_2} + 3^{\rho_2} - 2} \right)^{\frac{1}{\rho_2}} = 1 \\ \lim_{\rho_2 \rightarrow -\infty} p'_{2,\star}^{(\rho_2)} &= \lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{4^{\rho_2} - 1}{4^{\rho_2} + 3^{\rho_2} - 2} \right)^{\frac{1}{\rho_2}} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Nous retrouvons la condition de  $\mathbb{B}$ -convexité inverse :  $\min\{p_1^{(-\infty)}, p_1'^{(-\infty)}\} = 1$  et  $\min\{p_2^{(\infty)}, p_2'^{(\infty)}\} = 1$ .

Dans le cas Cobb-Douglas nous avons :

$$(\theta_{1,\star}, \theta'_{1,\star}, \theta_{2,\star}, \theta'_{2,\star}) = \left( \frac{\ln(3)}{\ln(6)}, \frac{\ln(2)}{\ln(6)}, \frac{\ln(3)}{\ln(12)}, \frac{\ln(4)}{\ln(12)} \right).$$

On peut vérifier que :

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} (p_{1,\star}^{(\rho_1)^{\rho_1}}, p'_{1,\star}^{(\rho_1)^{\rho_1}}) = (\theta_{1,\star}, \theta'_{1,\star}) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho_2 \rightarrow 0} (p_{2,\star}^{(\rho_2)^{\rho_2}}, p'_{2,\star}^{(\rho_2)^{\rho_2}}) = (\theta_{2,\star}, \theta'_{2,\star}).$$

De ce résultat, il est immédiat de croiser les convexités. On peut, par exemple, donner les équilibres dans les cas suivants :

1.  $\rho_1 = -\infty, \rho_2 = 2 : \left( \frac{3}{2}, 1, \left( \frac{8}{23} \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \frac{15}{23} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$
2.  $\rho_1 = -\infty, \rho_2 = +\infty : \left( \frac{3}{2}, 1, 1, \frac{2}{3} \right)$
3.  $\rho_1 = -\infty, \rho_2 = 0 : \left( \frac{3}{2}, 1, \frac{\ln(3)}{\ln(12)}, \frac{\ln(4)}{\ln(12)} \right)$
4.  $\rho_1 = 0, \rho_2 = -1 : \left( \frac{\ln(3)}{\ln(6)}, \frac{\ln(2)}{\ln(6)}, \frac{17}{8}, \frac{17}{9} \right)$
5.  $\rho_1 = 2, \rho_2 = \infty : \left( \left( \frac{8}{11} \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \frac{3}{11} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{3}{4}, 1 \right)$
6.  $\rho_1 = 1, \rho_2 = \infty : \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1 \right)$

## 10 CONCLUSION

Au cours de ce chapitre nous avons élaboré une nouvelle classe de jeux en stratégie mixte impliquant une notion de moyenne généralisée. Nous avons considéré leurs propriétés limites conduisant notamment à des jeux de type Léontief et Cobb-Douglas. Des propriétés d'existence et de convergence ont été établies. Un des aspects notables abordés concerne la possibilité de croiser différents types de convexité et de confronter des joueurs

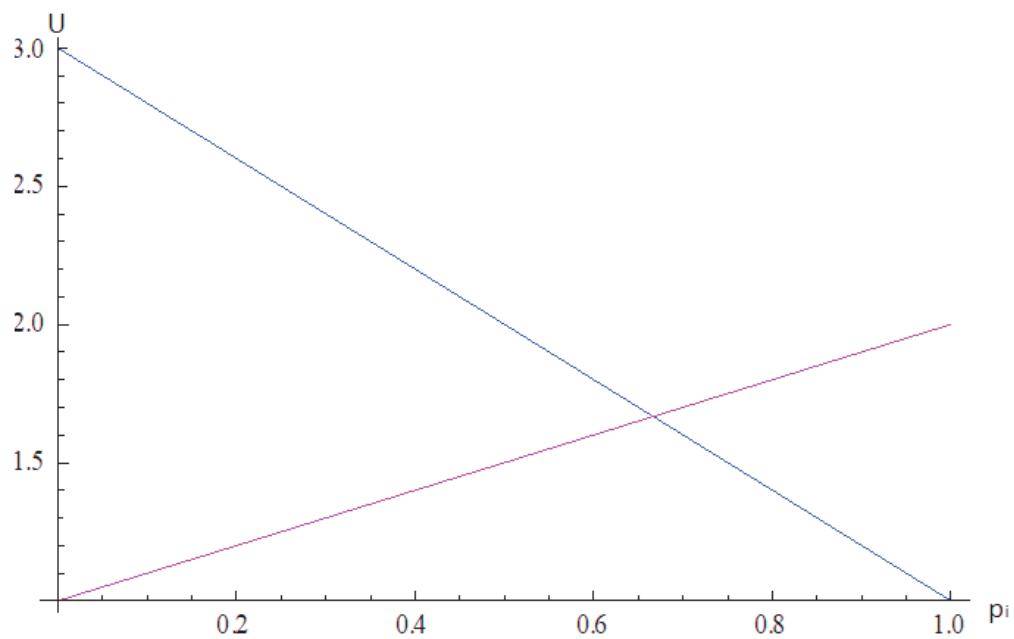


Fig. 5.1: Fonction puissance du joueur 1 avec  $\rho = 1$

ayant des préférences de nature différentes notamment en termes de substituabilité et de complémentarité stratégique. De futurs travaux devraient être réalisées pour appliquer ces concepts dans des domaines où les questions relatives à la nature des transferts joue un rôle important.

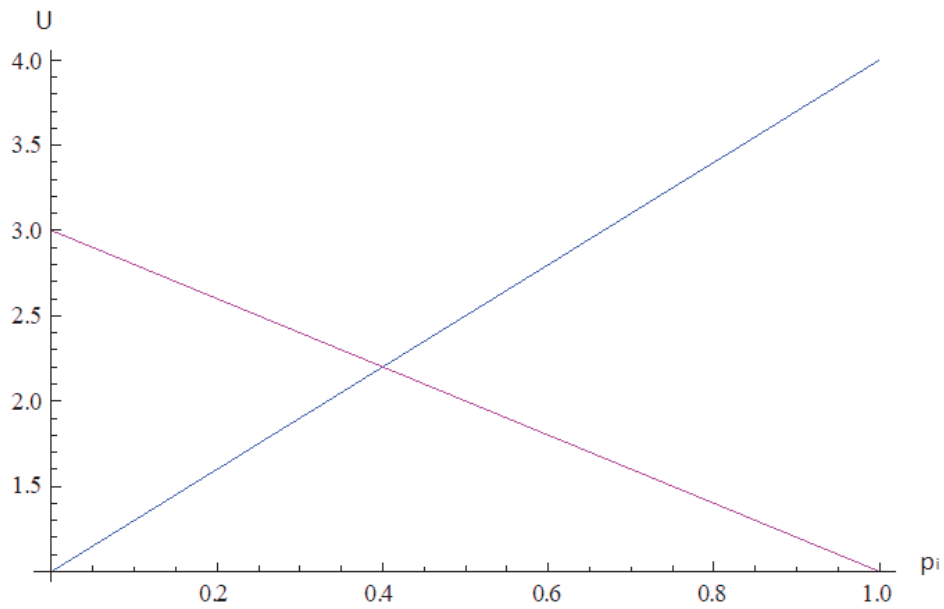


Fig. 5.2: Fonction puissance du joueur 2 avec  $\rho = 1$

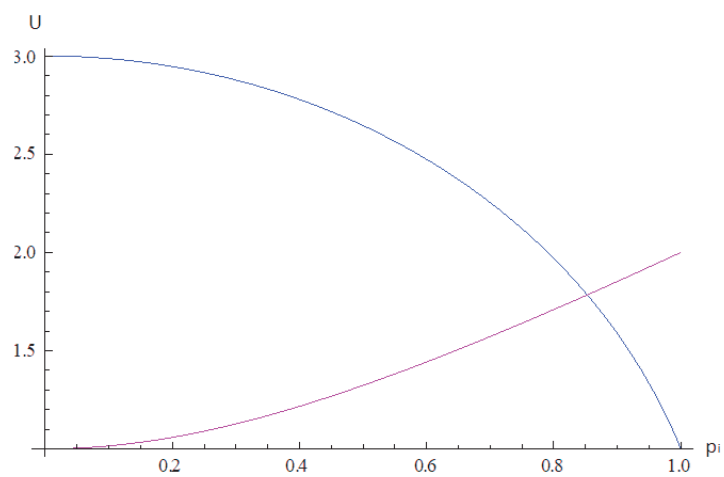


Fig. 5.3: Fonction puissance joueur 1 avec  $\rho = 2$

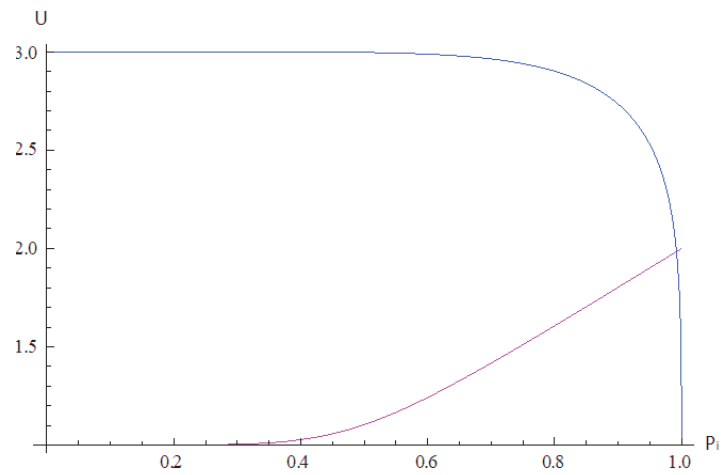


Fig. 5.4: Fonction puissance joueur 1 avec  $\rho = 7$

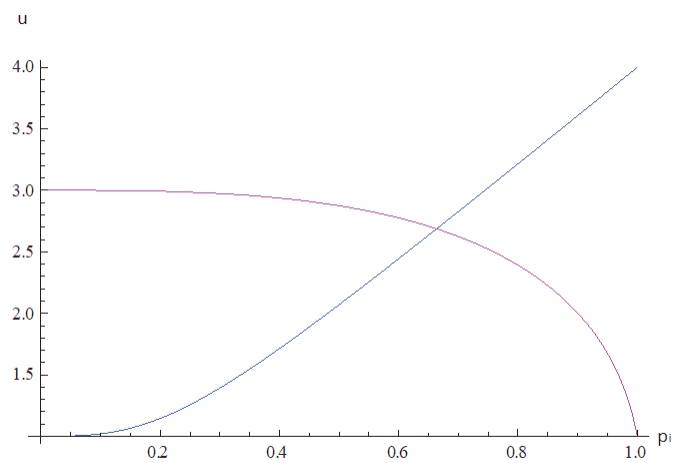


Fig. 5.5: Fonction puissance joueur 2 avec  $\rho = 2$

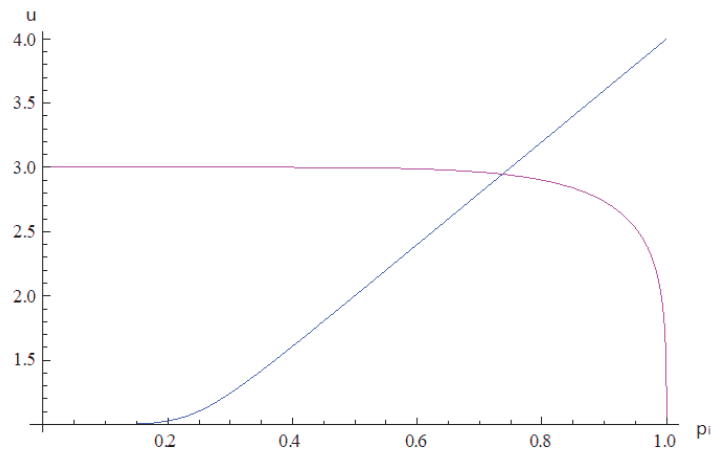


Fig. 5.6: Fonction puissance joueur 2 avec  $\rho = 7$

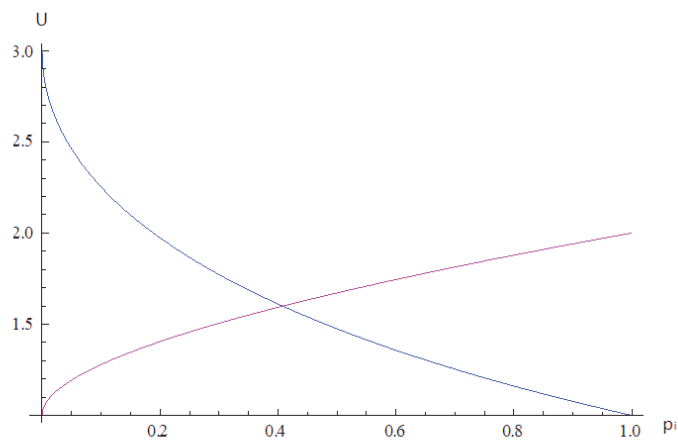


Fig. 5.7: Fonction puissance joueur 1 avec  $\rho = 0,5$

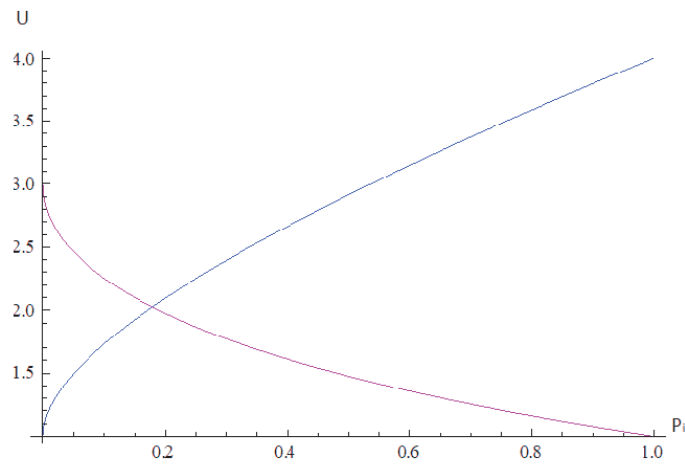


Fig. 5.8: Fonction puissance joueur 2 avec  $\rho = 0.5$

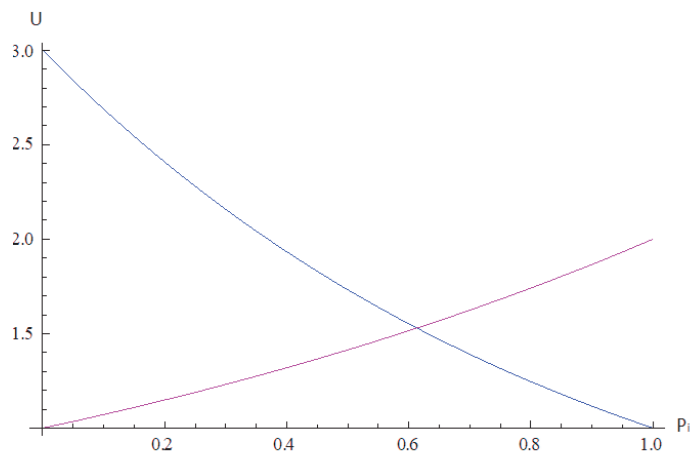


Fig. 5.9: Fonction puissance du joueur 1 de type Cobb-Douglas

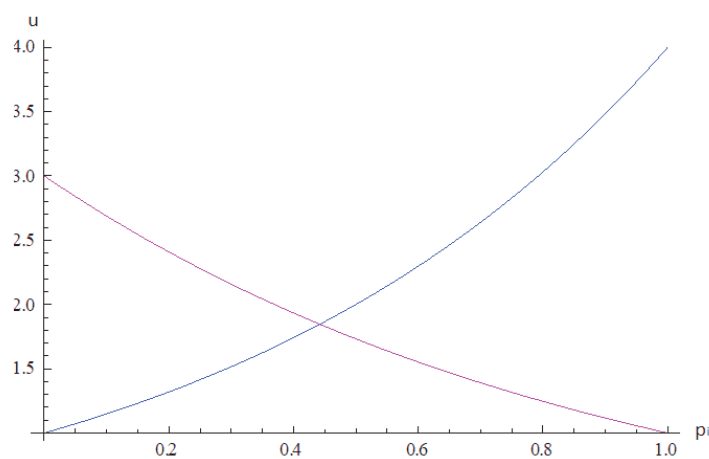


Fig. 5.10: Fonction puissance joueur 2 de type Cobb-Douglas

## PARTIE III

# CONTRIBUTION À L'AIDE À LA DÉCISION ET À LA MÉTHODE MULTICRITÈRE

---

## 6. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DE L'AIDE À LA DÉCISION

*“L’homme raisonnable s’adapte au monde ; tandis que l’homme  
déraisonnable persiste à adapter le monde à sa vision. Toutefois tout progrès  
dépend de l’homme déraisonnable.”*

GEORGES BERNARD SHAW<sup>1</sup>

---

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION . . . . .</b>	<b>168</b>
<b>2</b>	<b>EN QUOI CONSISTE L'AIDE À LA DÉCISION ? . . . . .</b>	<b>169</b>
2.1	Définition de l'aide à la décision . . . . .	170
2.2	La pluralité des approches de l'aide à la décision . . . . .	172
2.3	Les étapes du processus d'aide à la décision . . . . .	174
<b>3</b>	<b>AIDE À LA DÉCISION MULTICRITÈRE . . . . .</b>	<b>177</b>
3.1	À chaque décideur un problème différent . . . . .	178
3.2	Définition du problème décisionnel . . . . .	179
3.3	De l'intérêt de définir les critères . . . . .	181
<b>4</b>	<b>ENSEMBLE DE CRITÈRES, PRÉFÉRENCES ET AGRÉGATION DES PRÉFÉRENCES . . . . .</b>	<b>182</b>
4.1	Définition d'un critère . . . . .	182
4.2	Indifférence et préférence . . . . .	184
4.2.1	Relations binaires et relations d'ordre . . . . .	184
4.2.2	Structure des relations de préférence . . . . .	186
4.2.3	Relations usuelles . . . . .	187

---

1. Traduction effectuée par mes soins.

4.3	Représentation formelle des types de critères par les nombres flous paramétrés . . . . .	188
4.3.1	Introduction du nombre flou paramétré C-Shape . . .	190
4.3.2	Introduction du nombre flou paramétré S-Shape . . .	193
<b>5</b>	<b>LA MODÉLISATION DE L'AGRÉGATION DES PRÉFÉRENCES . . . . .</b>	<b>194</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSION . . . . .</b>	<b>196</b>

---

## 1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps, le champ d'étude de l'aide à la décision. Nous prenons le parti de présenter la théorie de l'aide à la décision comme une théorie complémentaire à la recherche opérationnelle dans le sens où n'ayant pas le même objectif elles permettent de prendre en compte des situations bien distinctes.

La recherche opérationnelle et l'aide à la décision correspondent en réalité aux deux faces d'une même pièce. Cette pièce est nommée théorie de la décision. Nous proposons dans ce chapitre de souligner les conditions sous lesquelles l'aide à la décision multicritère s'applique et peut répondre à certains types de problèmes précis, dans un cadre complémentaire à la recherche opérationnelle. C'est notamment en ce sens que les propos de Mareschal vont, en effet lors d'une conférence donnée à Gembloux le 11/03/1998, il affirme que "l'analyse multicritère est une sorte de prolongement de la recherche opérationnelle, mais certainement pas une rivale qui cherche à l'éliminer." (cf. Tsoukiàs [144])

La recherche opérationnelle de part sa formulation mathématique, permet de résoudre des problèmes très vastes, notamment les problèmes de théorie des jeux comme nous avons pu le constater dans le chapitre 4. Néanmoins, elle ne peut prendre en compte le contexte dans lequel la décision s'établit (une critique à notamment été amenée au dilemme du prisonnier par Helm (1997), celui-ci émis l'idée que le cadre dans lequel était soumis le joueur lui impliquait le résultat qu'il devait choisir et par conséquent ne permet pas la prise en compte de la subjectivité) d'une part et d'autre part, elle repose sur une analyse le plus souvent monocritère à savoir l'analyse coût-bénéfice [59].

Dès lors, nous nous sommes intéressés dans le cadre de nos travaux au comportement des individus en environnement incertain ainsi qu'à la prise de décision qui ne peut être qu'étudiée dans le contexte dans lequel elle est prise. Lorsqu'il s'agit de problèmes du monde réel<sup>2</sup> les décisions que doivent prendre les décideurs sont souvent soumises à plusieurs critères. Ces critères peuvent être contradictoires et dépendre les uns des autres.

---

2. Expression utilisée par B. Roy dans son article *The Outranking Approach and the Foundations of Electre Methods*, *Theory and Decision* 31 : 49-73, 1991.

L'objectif de l'aide à la décision multicritère est de proposer une solution qui satisfasse au mieux les différentes attentes du décideur sans jamais proposer une réponse unique, valable en tout cas et en tout temps.

Une typologie des différents types de critères a déjà été proposé dans la littérature (nous le verrons plus loin) et permet d'appréhender au mieux les attentes du décideur. Rappelons que lors du parallèle fait dans le chapitre 1 nous avons explicité que les critères correspondaient aux conséquences de l'univers incertain. De sorte que, l'étude des conséquences implique que l'on cherche à caractériser les préférences du décideur. Ce faisant, définir les critères est le point central de cette théorie.

Par conséquent, ce chapitre aura deux objectifs :

1. présenter les tenants et aboutissants de la théorie de l'aide à la décision multicritère ;
2. introduire un nouveau type de critère nommé pseudo-critère C-Shape.

Le chapitre est construit de la manière suivante, dans la section 2 nous définissons les notions essentielles de l'aide à la décision ainsi que les différentes approches qui peuvent la caractériser. Puis, dans une section 3 nous concentrons notre étude sur l'aide à la décision multicritère et à l'axiomatique qui permet de la caractériser. La section 4 traite du concept de critère qui permet de représenter les préférences du décideur. C'est dans cette partie que nous ajoutons notre contribution à savoir le pseudo-critère type C-Shape et le pseudo-critère de type S-Shape. Enfin dans la section 5, nous revenons sur les méthodes d'agréations des critères (i.e préférences).

## 2 EN QUOI CONSISTE L'AIDE À LA DÉCISION ?

Au cours de cette section, nous allons revenir sur la définition de l'aide à la décision. Ceci nous permettra d'arriver à la conclusion qu'il existe une pluralité d'approche de l'aide à la décision d'une part et d'autre part que l'aide à la décision doit être considérée comme un processus. Ainsi, nous mettrons en évidence le fait que la recherche opérationnelle et l'aide à la décision multicritère ne sont en rien exclusives mais qu'elles répondent à des

attentes différentes.

### 2.1 Définition de l'aide à la décision

De manière implicite l'aide à la décision correspond à la recherche d'une vérité partielle sur un problème décisionnel. On entend par vérité partielle le fait que la solution apportée ne sera la meilleure que par rapport au preneur de décision. Pour s'en convaincre, il est possible de se référer à la définition énoncée par Roy [114], il définit ainsi l'aide à la décision<sup>3</sup> comme :

“l'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponse aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision, éléments concourant à éclairer la décision et normalement à prescrire, ou simplement à favoriser, un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part.”

À partir de cette définition, il nous est possible de comprendre l'objectif de l'aide à la décision. En effet, B. ROY<sup>4</sup> utilise volontairement le terme “formaliser” pour caractériser le fait que les modèles utilisés en aide à la décision doivent être au mieux “clairement explicités”. L'aide est ainsi considérée comme une activité servant à “prescrire” un conseil selon les diverses données recueillies auprès du décideur, en vue de donner la solution la plus adéquate possible et en “cohérence” avec les objectifs préalablement fixés. Cette définition implique une importante conséquence, l'aide à la décision ne se limite pas à répondre nécessairement à la question finale posée par le décideur mais de manière plus générale lui permet de répondre à des préoccupations connexes (le “système de valeurs”) à sa question principale. Ceci étant, il convient toujours de s'assurer que la réponse aux préoccupations connexes reste en adéquation avec la question principale.

---

3. Pour plus de précision le lecteur pourra se référer au travaux de thèse de Dorra Ayadi AZZABI.

4. B. Roy était un professeur de mathématiques appliqués aux sciences de gestion à l'université de Paris.

De la définition de Roy, on retient que l'activité d'aide à la décision fait intervenir deux protagonistes bien distincts : le preneur de décision et celui qui apporte le conseil qui est usuellement nommé analyste. Il est entendu que le second est neutre vis-à-vis du problème décisionnaire afin de garantir la vérité partielle qui incombe au décideur. À ce titre, Martell[87], [88] mettra l'accent sur le fait que cette activité

“implique un minimum d'insertion dans le processus de décision : elle se fait essentiellement avec les acteurs du processus dans l'établissement d'une véritable relation d'aide.”

Concrètement, un problème n'est jamais préexistant. Il dépend directement du rapport qu'entretient le décideur avec la réalité, de sorte que le problème décisionnaire n'existe qu'à travers celui qui vit le problème. Cette idée est notamment soutenue par B. Roy. À partir de cette conceptualisation nous pouvons dégager au moins deux points importants :

- le premier revient à observer que l'objectivité dans la formulation du problème ne peut être, à l'instar de la vérité, que partielle. De plus, n'étant pas objective la formulation peut être évolutive.
- le second quant à lui, provient du fait que le succès de la démarche d'aide à la décision est directement liée à la compréhension de l'ensemble du processus de décision pour lequel s'inscrit l'aide. À ce titre, la capacité d'appréhender de manière adéquate le problème décisionnaire est donc nécessaire à la démarche d'aide à la décision. C'est notamment l'idée soutenue par Landry [81].

En considérant cette définition, il est ainsi possible d'appréhender l'aide à la décision non pas comme une approche mais plutôt comme un ensemble contenant plusieurs approches différentes. En effet, l'intérêt de la recherche en aide à la décision est de considérer que l'individu ici appelé décideur, est non seulement pas homogène mais de plus, pas nécessairement rationnel. Ainsi, les approches doivent être “explicitées” en fonction. Pour cela, il est évident qu'un processus doit être mis en place afin d'explicitier tous les tenants et aboutissants de l'activité.

## 2.2 La pluralité des approches de l'aide à la décision

Puisque c'est le décideur qui fait naître un problème, il apparaît évident qu'il existe différentes catégories de problèmes (étant donnée que les décideurs sont considérés comme hétérogènes). Ces derniers sont dès lors, bien naturellement subjectifs. Cependant, il est possible de rendre une partie des problèmes objectifs. Du moins, c'est ce qu'ont réussi à montrer Ishizaka et Nemery [73] dans leur article “multi-criteria decision analysis method and software”. En effet, ils obtiennent une typologie de catégorie de problème (Table (6.1)) qui permet de caractériser les problèmes décisionnaires.

	Perspective temporelle	Renouvellement	Degré de structuration	Automatisation
Opérationnelle	Court terme	Chaque jour	Elevé	Elevé
Tactique	Moyen terme	Adaptatif	Moyen	Moyen
Stratégique	Long terme	Nouveau	Faible	Faible

Tab. 6.1: Typologie des catégories de problèmes selon Ishizaka, A et Nemery, P.

Nous devons alors caractériser les modèles possibles qui serviront de base à l'aide à la décision. Les travaux de Tsoukiàs [144] en la matière, permettent de dégager quatre grands types de modèles d'aide à la décision, dans lesquels on retrouvera des modèles différents pour chacun d'entre eux.

### 1. Approche normative ou axiomatique :

Cette approche sert à comprendre les axiomes qui caractérisent la méthode choisie. Se pose alors la question pour une méthode donnée, de savoir quelles sont les propriétés sur la relation de préférence inhérentes à celle-ci et qui la caractérise. Sur quelles hypothèses implicites ou explicites se basent-elles ? L'approche axiomatique permet de définir le modèle qui convient d'utiliser selon la relation de préférence voulue par le décideur. Ce type d'approche repose sur l'hypothèse de rationalité telle qu'elle est introduite en économie, à savoir un individu cherche toujours à maximiser ses gains et à minimiser ses pertes. Pour plus de détails sur ce point voir

Fishburn [56] et Luce [85]. Ainsi, nul besoin du décideur pour élaborer le modèle, étant entendu que les axiomes de la rationalité économique garantissent la validité des résultats obtenus. La recherche opérationnelle et notamment la théorie des jeux<sup>5</sup> entre directement dans cette approche. Ainsi, les caractéristiques de cette approche sont : une rationalité exogène et un comportement économique.

**2. Approche prescriptive :**

Ce type d'approche n'est basée ni sur des faits déjà observés ni sur une information existante comme peut l'être la rationalité économique. Ainsi, celui qui prodigue l'aide récupère et structure les données pour en construire un modèle. Le décideur n'intervient qu'en dernier ressort afin de valider le modèle. Les caractéristiques de cette approche sont : une rationalité endogène et une cohérence avec la situation problématique.

**3. Approche descriptive :**

Ce type d'approche, notamment étudiée par Poulton [108] et Humphreys [69] repose sur l'observation de phénomènes, de données ou de comportements déjà produits. La description des phénomènes déjà existants et pouvant se répéter est au cœur de cette démarche. Les conclusions déjà réalisées par ces phénomènes garantissent les résultats engendrés par ces modèles et ainsi, le décideur n'est pas requis pour l'élaboration du modèle. Les caractéristiques de cette approche sont : une rationalité exogène et un modèle empirique du comportement.

**4. Approche constructive :**

À la différence des précédentes approches pour lesquelles le décideur ne jouait qu'un rôle de consultant, ici le preneur de décision participe activement à la construction et à fortiori à la validation du modèle. Les informations sont directement liées aux connaissances du décideur que l'analyste cherchera à formaliser. Les caractéristiques de cette approche sont le processus d'apprentissage et la cohérence avec le processus de décision.

---

5. Du moins d'après la définition donnée par Von Neumann et Morgenstern que nous avons rappelé dans le chapitre 4.

### 2.3 Les étapes du processus d'aide à la décision

Fondamentalement, il existe deux temps lors d'une prise de décision. Le moment de réflexion au problème posé qui correspond ni plus ni moins à une phase de doute, d'incertitude, et le moment où le décideur prend la décision. C'est le passage à l'acte qui peut s'apparenter à une certitude. Il est entendu que l'aide à la décision ne se concentre que sur le moment de réflexion puisque l'acte en lui-même prouve que le décideur a déjà tranché sur la question. À ce titre, les travaux de H.A. Simon [98] ont permis d'introduire l'idée que la décision ne repose pas sur l'acte en lui-même, mais bien sur le processus qui conduit à l'acte. Ses travaux l'on conduit à proposer le concept de rationalité limitée, qui trouve son explication dans le fait que la rationalité ne se fait qu'à un moment précis du processus de décision et donc devient une rationalité locale.

Considérer la résolution du problème décisionnel comme un processus implique certaines hypothèses dont nous ne retiendrons que les deux suivantes :

- il existe deux visions du processus. La première provient des préoccupations du preneur de décisions et la seconde provient des motivations de celui qui fournit l'aide, d'où la nécessité de la neutralité de l'analyste.
- il existe un ensemble de ressources, notamment la connaissance du preneur de décision sur le problème, le temps disponible à celui qui fournit l'aide et ses propres connaissances concernant les méthodologies d'aide à la décision.

À partir de ces éléments, il est possible de segmenter le processus de décision en 4 grandes phases (Tsoukiàs [144]) :

1. la représentation de la situation problématique ;
2. la formulation du problème ;
3. le modèle d'évaluation ;
4. la recommandation finale.

#### 1. La représentation de la situation problématique

Cette phase sert, comme son appellation l'indique, à obtenir une vision claire et précise du problème décisionnel. L'objectif de cette phase est *in fine*, que le décideur et le fournisseur d'aide comprennent le rôle qui leur est attribué durant le processus de décision. Il est à noter que les rôles établis sont évolutifs.

## 2. La formulation du problème

Le choix de la formulation du problème est directement lié à l'ensemble des actions possibles (potentielles) sur lequel porte la décision. Une solution (alternative, action) potentielle peut être définie comme une action fictive ou réelle qui est considérée comme réalisable par un décideur. Notons  $A$  l'ensemble des actions potentielles. Cet ensemble peut être défini soit de manière explicite (l'ensemble des destinations touristiques, l'ensemble des portefeuilles d'actions possibles, etc.), soit de manière implicite (un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ) défini par des contraintes, dans le cas où chaque alternative est représentée par  $n$  composantes (pour plus d'information, se référer à Mammeri [86]). À partir de l'identification de l'ensemble  $A$ , Tsoukiàs montre qu'il existe trois sortes de traitements qui peuvent être appliqués sur l'ensemble des actions potentielles : — le premier traitement consistera en une simple définition de l'ensemble  $A$  de manière formelle et sans évaluation aucune. — le second traitement consiste à construire un modèle permettant de décrire un sous-ensemble d'alternatives dans un ensemble de points de vue (notamment pour des besoins de statistiques) ; — le troisième consiste à partitionner  $A$ . En d'autres termes, ce traitement consiste à problématiser le problème décisionnel. Dans ces travaux c'est le troisième traitement qui sera abordé et qui sera détaillé dans la section suivante.

## 3. La construction du modèle d'évaluation

Une fois établi, l'ensemble des actions  $A$  ainsi que le traitement que le décideur souhaite leur accorder, il convient de construire le modèle qui permettra de solutionner le problème explicité. Un certain nombre d'éléments sont nécessaires pour formaliser le modèle :

- la dimension : elle correspond à l'information sur  $A$ . Cette information peut être établie avec ou sans le décideur suivant le modèle utilisé. Les dimensions sont généralement codées sur des échelles pour obtenir un cadre formel de  $A$ .
- les critères : ils correspondent à une ou dimension ou une agrégation de dimensions qui reflète un même point de vue permettant ainsi l'évaluation de  $A$  sur le point de vue considéré. Selon l'approche utilisée, les critères peuvent prendre en compte les préférences du décideur.
- les méthodes d'évaluations : elles correspondent aux méthodes qui permettent de traiter l'ensemble  $A$  dans le but de fournir une solution au modèle. À l'instar des deux autres éléments, le décideur peut être requis ou non pour la mise en œuvre des méthodes. Il est à noter que selon le choix du traitement de  $A$ , la dimension, les critères et les méthodes d'évaluations ne sont pas nécessaires simultanément. Ainsi, pour une approche descriptive nul critère n'est requis par exemple. Par contre, en ce qui concerne la partition de  $A$ , il est généralement nécessaire de tout construire.

#### 4. La recommandation finale

Une fois la solution établie par la méthode d'évaluation, il est important que le fournisseur d'aide vérifie que le résultat trouvé soit cohérent avec la méthode d'évaluation mais aussi avec les préoccupations du décideur. Ainsi, il est nécessaire :

- de vérifier que le résultat révélé ne soit pas sensible à des variations jugées non significatives des données utilisées pour la construction du modèle et cela grâce à une analyse de la sensibilité du modèle.
- d'être capable d'interpréter le résultat par rapport aux hypothèses sous lesquelles il a été obtenu (données, modèles choisis, évolution du processus).

### 3 AIDE À LA DÉCISION MULTICRITÈRE

Dans le monde réel, les problèmes décisionnels sont souvent exprimés avec de multiples critères. Ainsi, l'approche monocritère telle qu'elle peut être étudiée en recherche opérationnelle ne permet pas de répondre totalement aux attentes d'un décideur. Ceci étant, il est nécessaire de souligner que la recherche opérationnelle choisit volontairement d'explicitier un seul critère car elle estime qu'un seul critère est suffisant pour aider à la décision. L'approche multicritère quant à elle, renonce d'une part à l'optimum absolu et préférera un optimum local, c'est-à-dire la solution non pas optimale, mais la situation la plus satisfaisante compte tenu de la situation. D'autre part, elle renoncera à l'unicité du critère. Ce faisant, elle explore différentes parties du problème décisionnaire.

En reprenant le propos de Vincke [151], il est possible de définir l'aide à la décision multicritère comme suit :

“L'aide multicritères à la décision vise à fournir à un décideur des outils lui permettant de progresser dans la résolution d'un problème de décision où plusieurs points de vue, souvent contradictoires, doivent être pris en compte”

De cette définition, il est possible de soulever le point suivant : l'analyse multicritère ne peut être considérée comme une théorie. En effet, l'approche classique de la théorie de la décision se base sur un cadre axiomatique formellement rigoureux. Or, ce n'est pas le cas pour l'approche multicritère. Ainsi, la critique qui peut être notamment faite par les économistes est une possible “manipulation”, puisqu'en dehors d'un problème mathématique bien explicité et bien entendu, il peut exister un possible manque d'objectivité. Ce qui implique bien entendu la critique la plus forte sur une “pseudo-scientificité” (Bouyssou et Roy [115])<sup>6</sup>

---

6. cf. Jean Marc TACNET Prise en compte de l'incertitude dans l'expertise des risques naturels en montagne par analyse multicritères et fusion d'information.

### 3.1 À chaque décideur un problème différent

Comme nous l'avons rappelé dans la section précédente, l'aide à la décision multicritère ne dispose pas d'un cadre aussi rigoureux que celui de la recherche opérationnelle. Pour autant il est nécessaire décrire formellement tous les éléments qui caractérisent un problème. Il est question dans cette partie de rappeler les bases. Formellement, un problème décisionnel peut se caractériser par la triptyque suivante  $\{A, L, G\}$  (Vansnick [148]) où :

- $A = (a_i : i = 1, 2, \dots, n)$  l'ensemble des  $n$  alternatives (i.e., actions et solutions) potentielles (envisageables, admissibles). Cet ensemble peut être discret et fini ou être considéré comme infini car de taille trop importante. Par exemple,  $A$  peut désigner l'ensemble des Universités de France, ce qui correspond à un cas infini car non nommé et qui dépend de ce que l'on appelle une université (exemple Antenne de Narbonne).  $A$ , peut désigner les  $X$  universités désignées nommément. La structure des solutions possibles a bien entendu un impact sur le choix du modèle à utiliser ;
- $L = (l_j : j = 1, 2, \dots, m)$  l'ensemble des  $m$  critères. Ces critères sont considérés comme conflictuels et permettent l'évaluation des actions ;
- $G = g_j(a_i)$  L'ensemble des évaluations des performances sur les actions. Cette évaluation se fait par un vecteur de performance propre à chaque critère. Par exemple, pour une université donnée, le vecteur de performance peut être le nombre d'étudiants, la taille de l'université, la proportion de professeurs, le nombre d'UFR, etc.

L'évaluation des performances correspondant à la valeur de la conséquence d'une action (cf. Fig :3), est détenue en utilisant des formules, des mesures, ou encore des jugements. Ainsi, il est possible d'affirmer que cette évaluation est soumise à l'incertitude et plus généralement à l'imperfection dans le sens où nous l'avons défini dans le Chapitre 1. De fait, il est fondamental que le décideur prenne part à l'élaboration du problème et il le fait en définissant sa problématique.

### 3.2 Définition du problème décisionnel

Il a été rappelé dans la section précédente, que la connaissance des actions potentielles pouvait être déterminante dans la problématisation du problème décisionnel. Après avoir connaissance de ces alternatives, il convient de les traiter. En recherche opérationnelle et en aide à la décision multicritère, le point de départ de tout processus d'aide à la décision provient d'un problème existant. La problématique imposée par le décideur est nécessaire afin de définir le problème. La connaissance de cette problématique permet de cibler la recherche de la solution acceptable de sorte que la problématique de décision peut être envisagée comme l'axe (i.e. orientation) de recherche sur un problème posé. Cela permet en somme de comprendre quel type de réponse le décideur est capable d'accepter. Les travaux de Roy sur les différents types de problématiques ont permis d'en dégager quatre types, qu'il convient de présenter (Fig :3.6.1) :

1. La problématique de choix ( $P. \alpha$ ) : En considérant de l'ensemble  $A$ , on construit un sous-ensemble contenant les meilleures alternatives qui sont équivalentes ou incomparables en éliminant les moins bonnes actions par comparaison. En considérant le fait que les critères sont conflictuels, il est nécessaire de proposer plusieurs actions qui représentent différentes variantes de la meilleure action. Il est à noter que l'incomparabilité implique que toutes les actions du sous-ensemble ne sont pas forcément que des bonnes alternatives. Cette problématique permet l'apport d'information supplémentaire en cours de processus afin d'affiner le résultat (Costa [41]).
2. La problématique de tri ( $P. \beta$ ) : dans ce type de problématique, on cherche à classer les alternatives dans des catégories préalablement construites et ordonnées. Le tri par catégorie se fait en fonction de la valeur que le décideur souhaite accorder aux actions et au traitement qu'il souhaite en faire. De fait, il est possible de définir la catégorie sécurité de la manière suivante (très peu sécurisé, peu sécurisé, sécurisé, très sécurisé) et ainsi faire des préconisations pour améliorer la sécurité.
3. La problématique de rangement ( $P. \gamma$ ) : dans ce type de problématique, on cherche à ranger les alternatives de la meilleure à la moins bonne, l'idéal recherché étant d'obtenir un ordre complet. Ceci étant, le caractère conflictuel des critères, l'imprécision

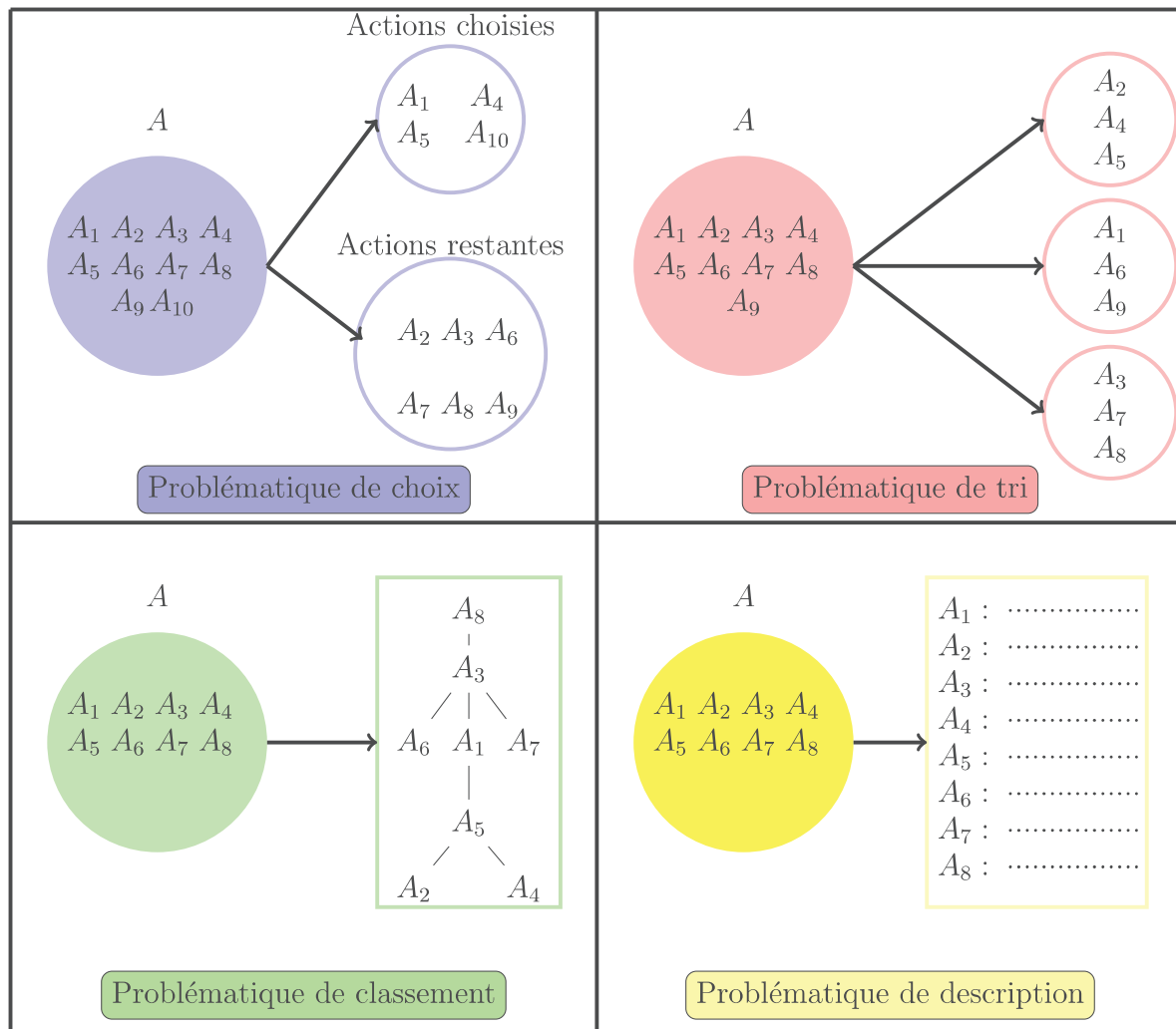


Fig. 6.1: Quatre problématiques d'aide à la décision : choisir, trier, ranger, décrire (Mousseau [95])

et l'existence des systèmes de valeurs différents, entraînent l'analyste à préférer présenter un ordre partiel au décideur.

4. La problématique de description (P.  $\delta$ ) : dans ce type de problématique, la recherche de description est le seul objectif. Il n'est nulle question de trier, de classer ou de ranger les actions. Ainsi, cette problématique n'engendre aucune prescription. Cette problématique est intéressante lorsque le décideur rencontre des difficultés à définir le problème ou à exprimer le type de résultats qu'il espère voir aboutir.

Lors de nos travaux, nous avons privilégié la problématique de classement. La raison à ce choix, provient du fait que les problèmes économiques sont des problèmes nouveaux et les décisions stratégiques qui correspondent donc à des questionnements de long terme. L'agent économique (Etat, entreprise, ménage, individu) a besoin de comparer les différentes alternatives qui s'offrent à lui.

### 3.3 De l'intérêt de définir les critères

L'ensemble de critères  $G$  correspond aux conséquences élémentaires des alternatives (Table : 1.3). En d'autres termes, c'est grâce à lui que l'on peut comparer les alternatives entre elles et ce, sur chaque critère. Il équivaut donc à la performance de l'ensemble des alternatives  $A$ . Pour cela, il est nécessaire de définir un ordre total  $<_g$  sur  $G$ . Il est nécessaire pour chaque critère de définir une échelle permettant la comparaison. Cette échelle peut être de type ordinal ou cardinal. Les critères se doivent de respecter certaines conditions puisqu'ils ont pour objectif l'évaluation globale des alternatives. Ainsi, tout décideur du processus de décision doit accepter le résultat de la comparaison entre les alternatives et sur chaque critère, ce qui implique d'une part, que l'échelle sur chaque critère est acceptée par le décideur et d'autre part, que la construction du critère doit pouvoir prendre en compte tout ce qui concerne l'incertitude, l'imprécision ou l'indétermination. En réalité la définition d'une alternative peut être réduite à l'identification de toutes ses conséquences. En somme, un critère doit pouvoir regrouper les conséquences élémentaires associées à un même point de vue afin d'en expliciter les préférences du décideur sur ce point de vue.

De fait, la construction des critères et l'évaluation s'avèrent être la pierre angulaire de la théorie de l'aide à la décision. C'est la raison pour laquelle nous allons consacrer une section à la compréhension.

## 4 ENSEMBLE DE CRITÈRES, PRÉFÉRENCES ET AGRÉGATION DES PRÉFÉRENCES

Dans le but de respecter les conditions définies dans la sous-section ci-dessus, un ensemble des critères se doit de respecter au moins les 3 propriétés suivantes :

### 1. Intelligibilité

L'ensemble des critères de la famille doit être restreint afin de garantir l'identification de la nature de l'information inter-critère. D'après les travaux de Bouyssou [29], une douzaine de critères seraient au plus suffisants.

### 2. Opérationnalité

Dans le but de garantir que l'aide à la décision se fasse dans les meilleures conditions, il est nécessaire que la famille de critères constitue une base solide aux yeux des preneurs de décision.

### 3. Cohérence

La famille de critères doit être cohérente. C'est-à-dire qu'elle respecte les hypothèses d'exhaustivité (tous les points de vue de chaque décideur sont pris en compte), de monotonie (les préférences partielles sont cohérentes avec les préférences globales sur les solutions que nous étudions lors du chapitre 7) et enfin, de minimalité (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de redondance entre les critères).

#### 4.1 Définition d'un critère

Un critère  $g_j$  peut être représenté comme une fonction à valeurs réelles définie sur  $A$ , avec pour objectif le résultat de la comparaison pour toute paire d'actions. Il n'existe pas une seule définition de la notion de critère. Nous retiendrons la définition de Vincke :

“Un critère est une fonction  $g$ , définie sur l'ensemble  $A$  des actions, qui prend ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné et qui représente les préférences du décideur selon un point de vue. Lorsque le problème repose sur la considération de plusieurs critères, nous les notons  $g_1...g_n$ . Dans la suite, nous parlerons indifféremment du critère  $g_j$  ou du critère  $j$ . L'évaluation d'une action  $a$  suivant le critère  $j$  est notée  $g_j(a)$ .”

De cette définition, il en ressort qu'un critère est donc un moyen de modéliser un point de vue. Les travaux de Roy font remarquer qu'un critère peut être l'agrégation de sous-critères. Il définit un critère de la manière suivante :

Une fonction  $g$  à valeurs réelles définies sur  $A$  est, pour un acteur  $Z$ , une fonction critère ou un critère appréhendant le sous-usage des conséquences  $v_g(A)$ , si :

1. Le nombre  $g(a)$  est déterminé si et seulement si une évaluation  $\Gamma_g(a)$  de  $v_g(a)$  est disponible ; le modèle  $\Gamma_g(a)$  qui fournit cette évaluation est appelé support de la fonction critère  $g$ .
2. L'acteur  $Z$  (ou l'homme d'étude jugeant au nom de  $Z$ ) reconnaît l'existence d'un axe de signification sur lequel deux actions potentielles quelconques  $a$  et  $a'$  peuvent être comparées relativement aux seuls aspects des conséquences que recouvrent  $v_g(A)$ . Il accepte aussi de modéliser conformément à  $:(a)' \geq g(a) \implies a' S_g a$ , où  $S_g$  désigne une relation de surclassement restreint à l'axe de signification du critère  $g$  (faisant en particulier abstraction de tous les aspects de conséquences non modélisées dans le support de  $g$ ).

À présent, notons  $P_g$  la préférence partielle d'une paire d'action  $a_k, a_l$ . La comparaison entre deux alternatives est de sorte que :  $\forall a_k, a_l \in A, g_j(a_k) > g_j(a_l) \implies a_k P_g a_l$ .

Il existe plusieurs façons de considérer cette relation de préférence partielle sur les critères et elle dépend du type de critère considéré. À notre connaissance, il existe quatre types de critères (Fig :6.2) :

1. **Le vrai-critère** : il est question de vrai-critère lorsque la comparaison entre deux actions permet d'attribuer une meilleure note à une action par rapport à une autre. Il n'existe d'indifférence entre les deux actions que lorsque les deux notes sont égales.
2. **Le quasi-critère** : il est question de quasi-critère dès lors que la comparaison entre deux actions autorise l'existence d'une plage d'indifférence  $[-q, q]$ . Ainsi, l'indifférence entre deux solutions est avérée lorsque l'écart de leur note est compris dans cette plage d'indifférence.
3. **Le pré-critère** : il correspond à une situation de vrai-critère pour lequel on aurait rajouté une plage de préférence faible  $[-p, p]$ .
4. **Le pseudo-critère** : il correspond à la réunion du quasi-critère et du pré-critère. Ainsi, on obtient une plage d'indifférence qu'il convient de caractériser, ce que nous allons faire dans la partie qui suit.

## 4.2 Indifférence et préférence

Comme nous l'avons déjà rappelé dans ce chapitre, les préférences des décideurs ne sont pas connues à l'avance. Il est donc nécessaire de créer une base de données sur les préférences du décideur. Ainsi s'intéresser aux relations binaires apparaît essentiel pour pouvoir comparer les actions entre elles.

### 4.2.1 Relations binaires et relations d'ordre

Il sera question dans cette partie de faire un rappel sur les propriétés fondamentales des relations binaires mais aussi de caractériser les relations de préférences pour les modèles AMCD.

**Définition 4.2.1:** Une relation binaire  $B$  dans  $X$  est dite :

- *réflexive*, si  $\forall x \in X, xBx$  ;
- *irréflexive*, si  $\forall x \in X, \text{non}(xBx)$  ;
- *symétrique*, si  $\forall x, y \in X, xBy \Rightarrow yBx$  ;

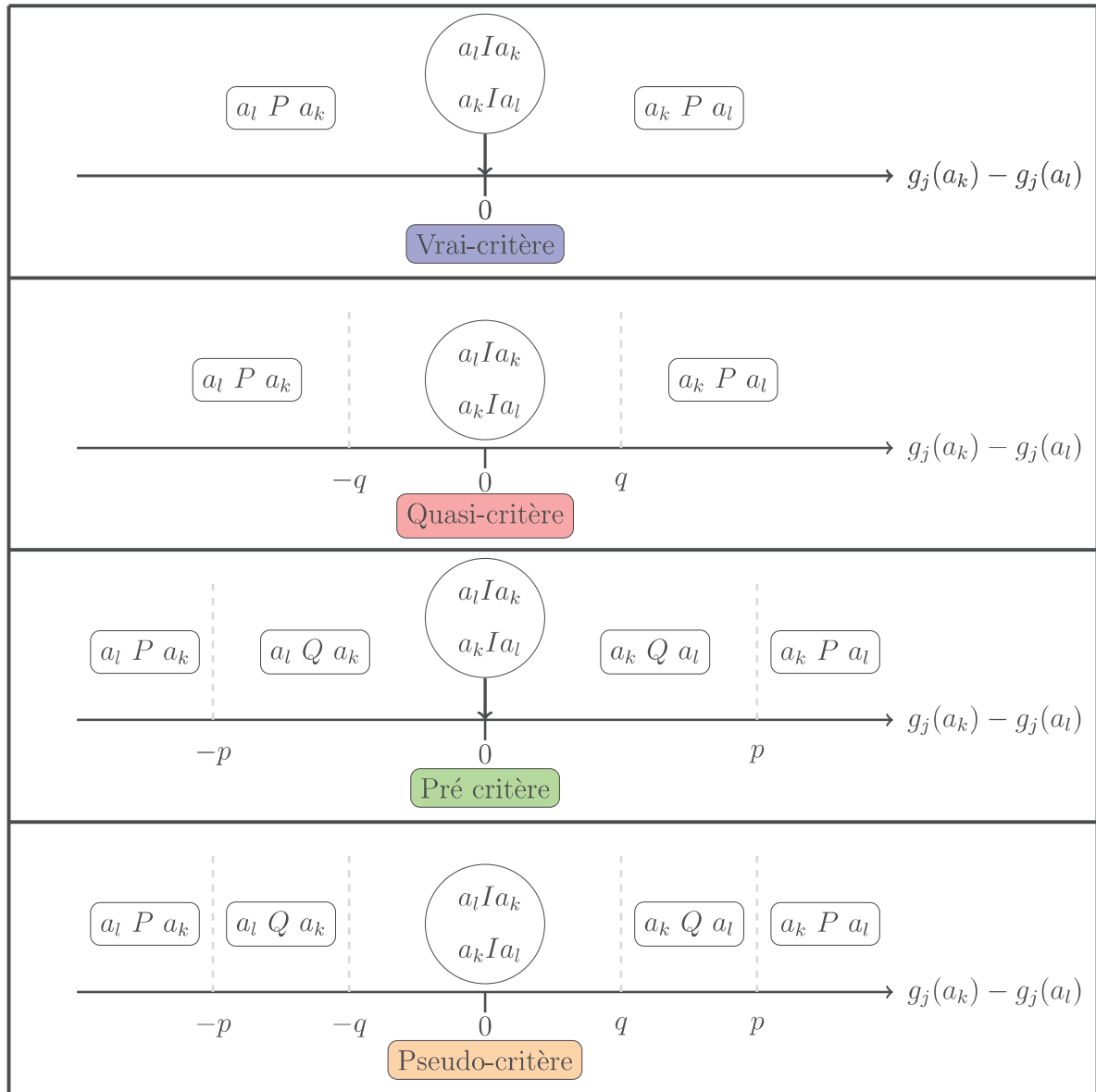


Fig. 6.2: Les différents types de critères

- *asymétrique*, si aucun couple  $(x, y) \in X \times X$  ne vérifie  $(xBy \wedge yBx)$  ;
- *transitive*, si  $(xBy \wedge yBz) \Rightarrow xBz$  ;
- *totale (complète)*, si pour tout couple  $(x, y) \in X \times X$ ,  $xBy$  ou  $yBx$ , sinon la relation est dite *partielle*.

De ces propriétés, il est possible de définir deux types de relations binaires sur  $X$  qui permettent de comparer les éléments de  $X$ .

**Définition 4.2.2:** *On appelle ordre strict, toute relation binaire réflexive, asymétrique et transitive.*

**Définition 4.2.3:** *On appelle équivalence, toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.*

#### 4.2.2 Structure des relations de préférence

Nous proposons à présent de cartographier les différentes structures de relation de préférences qui sont utilisées dans la théorie de la décision. Considérons  $\succsim$  une relation binaire sur  $X$ . Cette relation peut être de deux sortes : une partie sera une relation asymétrique, l'autre symétrique.

Concernant la partie de la relation asymétrique, celle-ci est notée  $\succ$  et se définit par  $x \succ y \Leftrightarrow (x \succsim y \text{ et non}(y \succsim x))$ . Concernant la partie de la relation symétrique, celle-ci est notée  $\sim$  et est définie par  $x \sim y \Leftrightarrow (x \succsim y \text{ et } y \succsim x)$ . Par ailleurs, si la relation  $\succsim$  est transitive, les relations  $\succ$  et  $\sim$  le sont aussi.

**Définition 4.2.4:** *La relation binaire  $\succsim$  est un pré-ordre sur  $X$  si elle est réflexive et transitive. On peut déduire un pré-ordre  $\succsim$  des relations  $\succ$  et  $\sim$  telles que :*

- $\succ$  est asymétrique et transitive, i.e. un ordre strict ;
- $\sim$  est symétrique et transitive, i.e. une relation d'équivalence.

*Un pré-ordre  $\succsim$  se décompose donc en une relation d'ordre strict et une relation d'équivalence.*

*Si  $\succsim$  est total sur  $X$ , on parle de pré-ordre total, sinon on parle de pré-ordre partiel.*

**Définition 4.2.5:** On dit que  $\succsim$  est un ordre large sur  $X$  si :

- $\succ$  est asymétrique et transitive, i.e. un ordre strict
- $\sim$  est l'égalité, i.e.  $x \sim y \Rightarrow x = y$

Si  $\succsim$  est total sur  $X$ , on parle d'ordre total. S'il existe des incomparabilités, on parle d'ordre partiel.

**Définition 4.2.6:** On dit que  $\succsim$  est une relation quasi transitive  $X$ , si seule sa partie asymétrique  $\succ$  est transitive.

De manière littéraire :

- On parle d'ordre large lorsque qu'une relation binaire permet de classer sans *ex-aequo* les éléments de  $X$ . C'est notamment le cas d'un championnat mondial d'échec.

- On parle de pré-ordre lorsque la relation binaire permet de classer les éléments de  $X$  en considérant qu'il peut y avoir des *ex-aequo*. C'est notamment le cas pour le tour de France de cyclisme, où les membres du peloton sont classés au même rang et détiennent le même temps.

- On parle de pré-ordre quasi transitif lorsque que le pré-ordre n'est pas transitif sur la partie symétrique. Pour expliciter cela, on peut partir de l'exemple suivant : considérons la relation "plus rapide que", obtenue à partir d'un compteur de vitesse de précision au dixième sur 3 cyclistes A, B, C de vitesse respective 35.19, 35.20 et 35.25. Cette relation est un quasi-ordre car le compteur ne peut distinguer la différence de vitesse entre A et B et entre A et C mais distingue la différence entre A et C.

#### 4.2.3 Relations usuelles

Fondamentalement, il existe 4 types de relations de préférences Roy [113], Vincke [151] : la relation de préférence stricte, la relation de préférence faible, la relation d'indifférence et la relation d'incomparabilité. Il est question ici de définir chacune de ces relations.

**Définition 4.2.7:** Considérons deux solutions  $a_1$  et  $a_2 \in X$  (i.e. actions, alternatives, possibilités) et les relations de préférences suivantes :

1. **La préférence stricte :** Lorsque le décideur exprime des raisons claires et positives qui justifient la préférence significative en faveur de l'une des deux possibilités, on parle de préférence stricte. Considérons ici que  $a_1$  soit significativement préférée à  $a_2$ , on notera  $a_1 \succ a_2$  (i.e.  $a_1 P a_2$ ). Cette relation est irréflexive et asymétrique.
2. **La préférence faible :** Lorsque le décideur exprime des raisons claires et positives pour infirmer une préférence stricte de  $a_2$  sur  $a_1$ , sans pour autant être capable de dire si  $a_1$  est strictement préféré à  $a_2$  ou s'il lui est indifférent. On note cette relation de préférence  $a_1 \succsim a_2$  (i.e.  $a_1 S a_2$ ). La relation de préférence stricte  $\succ$  apparaît alors comme la partie asymétrique de  $\succsim$ , l'indifférence  $\sim$  revient alors à la partie symétrique de la relation de préférence large.
3. **L'indifférence :** On parle d'une relation d'indifférence lorsqu'il existe des raisons claires et positive qui justifient une équivalence entre les deux possibilités. On note  $a_1 \sim a_2$  (i.e.  $a_1 I a_2$ ) la situation où le décideur est indifférent entre les deux solutions. Cette relation est réflexive et symétrique.
4. **Incomparabilité :** Lorsque le décideur n'est pas en mesure (ou ne souhaite pas) exprimer une préférence ou une indifférence pour une solution, on parle d'incomparabilité. On note cette relation de préférence  $a_1 R a_2$ . On dit que  $R$  est symétrique, irréflexive et non transitive.

#### 4.3 Représentation formelle des types de critères par les nombres flous paramétrés

De manière formelle, on représente par une fonction les critères. On retrouve les 5 formes fonctionnelles (liste non exhaustive) sous la (Fig : 6.3). C'est à partir de ces formes fonctionnelles qui caractérisent l'évaluation des conséquences et donc les préférences du décideur que nous avons porté notre attention. Il est possible de remarquer que la forme pseudo-critère 1 et la forme pseudo-critère 2 correspondent toutes deux à des nombres flous tels que nous les avons définis dans le chapitre 1. De sorte que nous pouvons à présent utiliser nos contributions sur les nombres flous paramétrés.

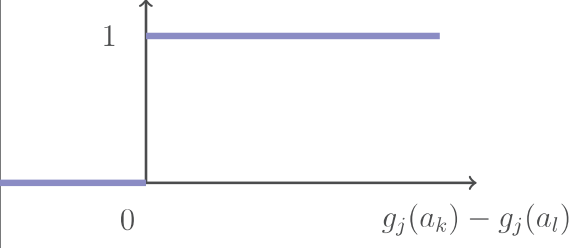
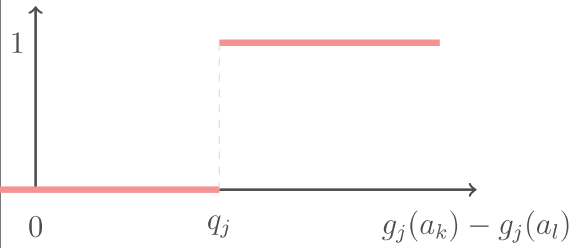
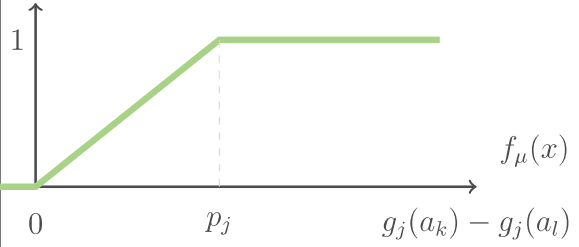
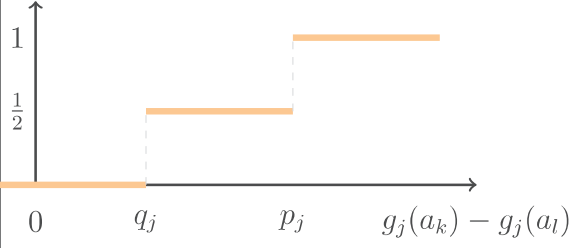
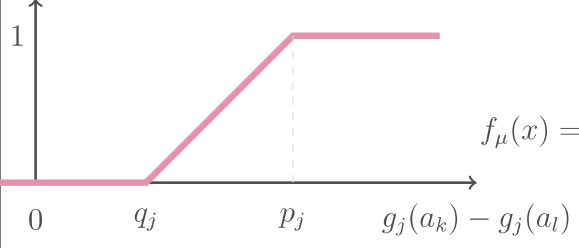
	<p>VRAI-CRITÈRE</p> $f_{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) \leq g_j(a_l) \\ 1 & \text{si } g_j(a_k) > g_j(a_l) \end{cases}$
	<p>QUASI-CRITÈRE</p> $f_{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq q_j \\ 1 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) > q_j \end{cases}$
	<p>PRÉ-CRITÈRE</p> $f_{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq 0 \\ \frac{g_j(a_k) - g_j(a_l)}{p_j} & \text{si } 0 < g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq p_j \\ 1 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) > p_j \end{cases}$
	<p>PSEUDO-CRITÈRE 1</p> $f_{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq q_j \\ \frac{1}{2} & \text{si } q_j < g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq p_j \\ 1 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) > p_j \end{cases}$
	<p>PSEUDO-CRITÈRE 2</p> $f_{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq q_j \\ \frac{g_j(a_k) - g_j(a_l)}{p_j - q_j} & \text{si } q_j < g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq p_j \\ 1 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) > p_j \end{cases}$

Fig. 6.3: Les différentes formes fonctionnelles des critères

### 4.3.1 Introduction du nombre flou paramétré C-Shape

L'idée que nous souhaitons développer est en rapport direct avec les enseignements des chapitres 1 et 2, à savoir que l'information est au mieux imparfaite (chapitre 1) et qu'il est possible de capter ces imperfections (chapitre 2). L'un des points essentiels de la formulation des préférences par le type pseudo-critère, nécessite une information extrêmement précise du décideur. En effet, il doit pour chaque critère déterminer un seuil d'indifférence (c'est-à-dire un niveau au-dessus duquel il est indifférent entre les deux actions) et un seuil de préférence au-dessus duquel sa préférence est accordée à la seconde alternative. En réalité, entre les deux seuils il existe une zone de flou qui est généralement considérée comme linéaire. Un peu comme si le décideur est neutre concernant son indifférence. Notre propos est de considérer que tel n'est pas le cas et qu'il est possible d'affiner le point de vue du décideur. Nous l'avons aussi rappelé mais la relation entre le décideur et l'analyste est extrêmement importante. L'analyste se doit d'être neutre face au problème de décision et le décideur se doit de donner le maximum d'information à sa disposition. Nous supposons que dans le monde réel, les choses ne se passent pas ainsi et qu'il est naturel d'imaginer que le décideur dispose d'une sensibilité pour une alternative et qu'il souhaite mettre en avant cette sensibilité pour une alternative. Nous considérons ainsi le fait que le décideur, à l'instar de ce qui est proposé sur les critères, pondère les alternatives entre elles. Conséquence, il lui est possible d'obtenir une certaine précision sur l'impact qu'aurait une préférence même minime pour une alternative sans que cette alternative ne fasse l'objet de comparaison. C'est ce que nous appelons la sensibilité intrinsèque du décideur. Afin de caractériser cette nouvelle information nous utilisons la formulation de type pseudo-critère 2. Nous proposons de mettre justement cette information inavouable sous un paramètre noté  $\rho$ . De sorte que  $\rho$  représente les informations ne dépendant pas des critères, mais inhérentes à la sensibilité du décideur. Formellement, en reprenant les notations de ce chapitre on obtient :

$$F_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq q_j \\ \left(1 + \frac{(-|(g_j(a_k) - g_j(a_l)) - p_j|^\rho)}{|(p_j) - q_j|^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} & \text{si } q_j < g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq p_j \\ 1 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_l) > p_j \end{cases} \quad (4.1)$$

où :

- $g_j(a_k)$  est la performance de la action  $a_k$  sur le critère  $j$  ;
- $q_j$  et  $p_j$  sont respectivement les seuils d'indifférence et de préférence sur le critère ;
- $\rho$  est un paramètre compris entre  $]0; \infty[$ .

Ce paramètre permet d'appréhender un autre point de vue concernant les conséquences élémentaires. En effet, il est facile de constater (Fig : 6.4) que la valeur du paramètre modifie la zone d'indifférence, pour mettre une meilleure captation des possibles préférences faible pour une solution par rapport aux autres. En réalité, ce genre de cas n'est pas rare. Il est possible de dire que lors d'un problème décisionnaire, le décideur dispose d'une préférence faible à priori sur une alternative sans que celle-ci soit réellement préférée. C'est-à-dire que pour des actions qui ont des valeurs quasiment identiques, le décideur a déjà une préférence faible et n'est pas neutre. Cette situation se présente lorsque  $\rho = 1$ . Dans le cas où une action est préférée faiblement, il peut alors mettre une pondération sur le  $\rho > 1$ . Dès lors, il peut constater l'impact de cette préférence à priori non objective, c'est-à-dire non basée sur la construction des critères. De manière symétrique, il est possible d'appliquer le même raisonnement pour une préférence faible amoindrie pour une alternative.

Nous considérons que ces informations non capté par les critères peuvent effectivement avoir un impact sur le classement final. En définitive, considérer des  $\rho$  différents permet de capter la sensibilité du décideur non capturée par les critères ou les seuils. Le  $\rho$  permet au décideur d'indiquer que pour lui les actions ne sont que substituables .

**Remarque 1 :** Nous avons aussi montré dans le chapitre 2 qu'un nombre flou paramétré pouvait aussi se ramener à une fonction Heaviside. Dans notre cas, cela correspond au cas où le décideur cherche à obtenir l'aide d'un analyste mais possède déjà une préférence pour une action. Il décide donc de mettre en avant celle-ci, de sorte que les seuils d'indifférence et de préférence ( $p = q$ ) soient confondus et que l'on se trouve dans une situation où les critères sont de types vrai-critères. Cela peut survenir lorsque le décideur est obligé par exemple de faire passer des candidats pour un entretien d'embauche alors qu'il souhaite favoriser (pour une raison personnelle) un candidat.

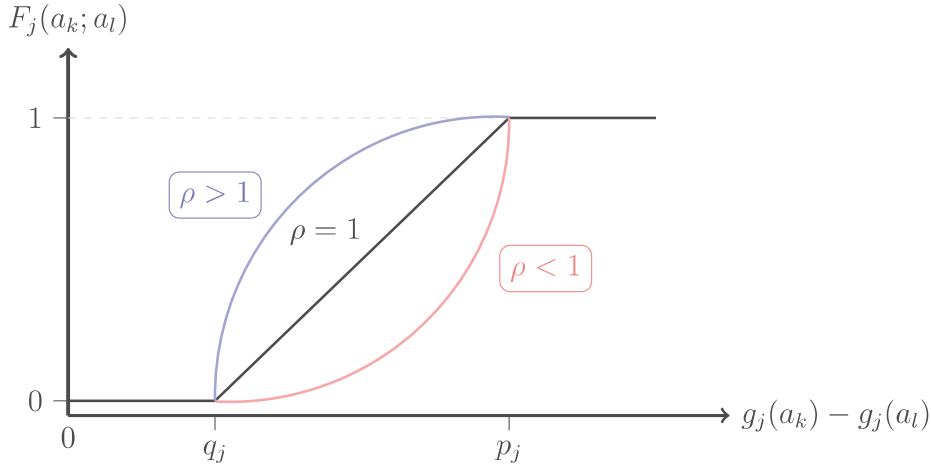


Fig. 6.4: Exemple de graphique de la fonction pseudo-critère C-Shape

**Remarque 2 :** Il est possible de montrer, que lorsque le décideur est indifférent sur un nombre important de conséquences d'actions, alors l'intérêt de cette nouvelle forme fonctionnelle est avéré. Ceci est d'autant plus vrai lorsque les conditions suivantes sont respectées :

- les actions comparées sont très proches du centre des seuils, c'est-à-dire lorsque le degré de la fonction d'appartenance est proche de  $1/2$ ;
- lorsque la valeur de  $\rho$  est de plus en plus éloignée de 1.

Lorsque que peu d'alternative se retrouve dans la zone d'indifférence il est possible de dire que la forme linéaire reste intéressante. Ceci étant le type pseudo critère C-Shape que nous proposons permet aussi de passer par la forme linéaire ce qui en fait son intérêt. Formulé de manière différente, les différents points de vue que constituent les divers critères et leurs performances sont très bien représentatifs de la préférence. Ceci étant, nous pensons que de nombreux cas peuvent être expliqués par l'utilisation de la forme pseudo-critère C-Shape.

### 4.3.2 Introduction du nombre flou paramétré S-Shape

Nous venons de caractériser une forme convexe pour exprimer les divers points de vue d'un décideur concernant les conséquences élémentaires. Il est possible d'effectuer de manière symétrique le même raisonnement en utilisant le nombre flou paramétré que nous avons créé lors du chapitre sur les ensembles flous et que nous avons nommé S-Shape.

Nous admettons sans perte de généralité, qu'un point d'inflexion peut être créé concernant la phase d'indifférence. Pour caractériser ce nouveau point d'inflexion nous considérons un nouveau seuil nommé opportunité et noté  $o_j$ . Ce seuil permet au décideur de mieux caractériser son indifférence. En réalité, nous considérons que la différence de performance entre les alternatives influence directement l'indifférence du décideur. Ainsi, le décideur peut avoir une indifférence faible jusqu'à une certaine valeur, puis une indifférence forte au-delà du seuil  $o_j$  (Fig 6.5). Ce seuil permet de caractériser une sensibilité faible sur la plage d'indifférence. En utilisant les notations, nous obtenons la forme fonctionnelle suivante :

$$Z_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0 & \text{if } g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq q_j \\ \left( \frac{q^{\rho_i} - (g_j(a_k) - g_j(a_l))^{\rho_i}}{(q_j^{\rho_i} - o_j^{\rho_i})} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} & \text{if } q_j \leq g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq o_j \\ \frac{1}{2} & \text{if } g_j(a_k) - g_j(a_l) = o_j \\ \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho_i} + \frac{(o_j^{\rho_i} - (g_j(a_k) - g_j(a_l))^{\rho_i})}{(o_j - p_j)^{\rho_i}} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho_i}\right) \right)^{1/\rho_i} & \text{if } o_j \leq g_j(a_k) - g_j(a_l) \leq p_j \\ 1 & \text{if } g_j(a_k) - g_j(a_l) > p_j \end{cases} \quad (4.2)$$

Où pour chaque  $i$ ,  $\rho_i$  est un paramètre compris entre  $]0; \infty[$  pour  $i = -n+1, \dots, 0, \dots, n$ . De plus,  $\ln \rho_i \times \ln \rho_{i+1} < 0$  pour  $i = -n+1, \dots, 0, \dots, n-1$ .

Dans nos travaux, nous avons considéré que le seuil pouvait être placé à égale distance de  $p_j$  et  $q_j$ . Ceci étant, il est possible de placer le seuil  $o_j$  n'importe où dans la plage d'indifférence. Par ailleurs lorsque  $\rho$  tend vers l'infini à droite du seuil et 0 à gauche, alors on obtient la forme fonction pré-critère que nous avons évoqué précédemment. Ainsi, nous proposons une généralisation de la forme fonctionnelle.

Remarque : Comme pour le cas précédent, plus la différence entre les alternatives est

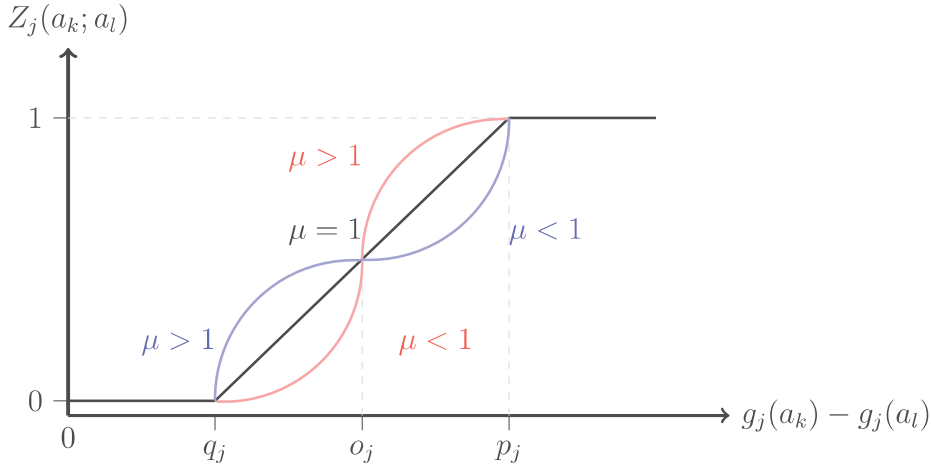


Fig. 6.5: Exemple de graphique de la fonction pseudo-critère S-Shape

au centre des seuils, plus l'impact d'un  $\rho \neq 1$ ) est important. Dans tous les autres cas, la forme linéaire représente parfaitement les divers points de vue de l'indifférence.

## 5 LA MODÉLISATION DE L'AGRÉGATION DES PRÉFÉRENCES

Les travaux de Grabisch et Perny [64] ont montrés qu'il existe deux manières différentes qui permettent d'agréger les différentes valeurs des critères de deux alternatives à comparer.

- la première peut être résumée en “agréger puis comparer”
- la seconde peut être résumée en “comparer puis agréger”.

1. Agréger puis comparer : les méthodes basées sur un critère unique de synthèse.

Il est question ici pour chaque solution, d'agréger les valeurs prises sur chacun des critères afin d'obtenir un “score” unique pour chacune des actions : un critère unique de synthèse. La seconde étape revient donc à comparer les scores respectifs de deux alternatives. Cette méthode est très utilisée en sciences économiques (les critères pouvant être ramenés à une interprétation monétaire). Le principe des

méthodes qui utilisent ce procédé consiste à créer une fonction  $g$  qui correspond au résultat de l'agrégation des performances  $g_1(a_1), g_2(a_1), \dots, g_n(a_1)$  de l'alternative  $a_1$ . La construction de cette fonction dépend notamment de la prise en compte de la dépendance entre les critères. Ainsi, il existe différents types de modèles utilisant l'approche agréger puis comparer comme les méthodes MAUT, Topsis, UTA, AHP qui ne prennent pas en compte la dépendance entre les critères. Concernant les modèles qui prennent en compte cette dépendance, les fonctions retenues sont souvent basées sur le minimum et le maximum pondéré.

## 2. Comparer puis agréger : les méthodes de surclassement.

Les méthodes de surclassement cherchent à comparer les alternatives par paires grâce à une relation de surclassement  $S$  dans un premier temps, puis d'exploiter cette relation afin de trouver une solution qui correspond à l'une des problématiques de (choix, tri, rangement). L'utilisation des méthodes multicritères est souvent avérée lorsque l'information disponible sur les alternatives est imprécise et incomplète. Il se peut qu'il soit impossible de quantifier précisément la performance de chaque alternative sur chaque critère. Le recours à des méthodes purement ordinales d'aide à la décision s'avère utile et plus particulièrement les procédures d'agrégation des préférences ordinales (cf. Roy [112]). Cette approche n'a pas été autant plébiscitée que l'approche précédente. Ainsi, on peut résumer les atouts des méthodes de surclassement de la manière suivantes :

- critères non nécessairement compensatoires ;
- absence de transitivité des préférences ;
- les échelles peuvent être hétérogènes (ordinales ; intervalles, ratio) lors de l'agrégation des critères ;
- prise en compte de l'hésitation de l'incomparabilité et de l'indétermination.

Pour autant, un cadre assez formel concernant les règles de décisions a été construit, et plus particulièrement des règles basées sur les principes de concordance et de non discordance. Ces règles ont permis l'émergence des méthodes ELECTRE, TACTIC et PROMETHEE par exemple.

## 6 CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre était de présenter l'aide à la décision comme champ d'étude complémentaire à la recherche opérationnelle. Nous avons ainsi redéfini le décideur comme étant une personne qui ne peut disposer qu'au mieux, d'une rationalité limitée. Ainsi, l'étude de celui-ci et de la relation qu'il entretient, d'une part avec le problème décisionnel et d'autre part avec l'analyste était au centre de la réflexion de ce chapitre. Contrairement à la recherche opérationnelle le décideur ne s'attend pas à avoir une solution optimale qui s'appliquerait pour tout le monde et en tout temps mais une solution qui satisfasse ses propres intérêts en considérant ses préférences et le contexte dans lequel la décision s'inscrit. Ainsi, une solution peut être satisfaisante pour un décideur donné dans un contexte donné mais non satisfaisante pour un autre.

Pour cela nous avons dû revenir sur un certain nombre de concepts élémentaires comme la définition d'un problème décisionnaire. Nous avons ensuite cherché à regrouper chaque problème décisionnaire en leur attribuant des caractéristiques communes.

Dans une seconde partie nous sommes revenus sur le fait que dans la réalité les problèmes décisionnaires mettent en relation plusieurs critères et non pas un seul. En réutilisant le parallèle établi au cours du chapitre 1 entre l'univers incertain et l'univers multicritères, nous avons rappelé que ces critères correspondent aux divers états de la nature, qu'ils sont souvent conflictuels et que leur valeur varie en conséquence. Ainsi, l'étude des critères s'avère extrêmement importante pour cette théorie puisqu'elle caractérise les préférences des décideurs tout comme l'est la fonction d'utilité dans le cas de l'univers incertain. Nous avons pu étudier de plus près les différents types de critères qui permettent de caractériser les différents points de vue d'un problème. Il a ensuite été question de comprendre la méthodologie de l'aide à la décision et donc de savoir qu'elle respecte un mode opératoire pour être au plus près des problèmes décisionnaires.

Parce que dans la réalité les problèmes décisionnaires font intervenir plusieurs critères (conséquences) qui peuvent être exclusifs, nous nous sommes concentrés à comprendre l'aide à la décision multicritère. Nous avons ainsi défini ce qu'était un critère et la manière

dont il était possible de comparer les alternatives sur ces critères.

Sur ce dernier point nous avons pu apporter notre propre contribution en identifiant un type de critère que nous avons appelé pseudo-critère C-Shape. En effet, le type pseudo-critère dans la littérature est formulé de manière linéaire. Cette forme linéaire permet de caractériser l'indifférence d'un décideur entre une alternative et une autre. Nous avons décidé grâce à la fonction C-Shape (définie au chapitre 2), de convexifier cette zone d'indifférence afin de rendre compte de la sensibilité d'un décideur envers une action plutôt qu'une autre. Puisque la forme C-Shape est une fonction paramétrée, elle est une généralisation du pseudo-critère 1. Lorsque le paramètre tend vers ses limites, nous avons montré qu'il était possible d'obtenir un critère de type "vrai-critère". D'un point de vue plus économique, cela permet de montrer que les alternatives peuvent être considérées comme substituables et non plus parfaitement substituables, comme cela l'était en utilisant la forme linéaire.

Par la suite, il nous a aussi été possible d'utiliser le nombre flou S-Shape (défini au chapitre 2), pour caractériser cette zone d'indifférence; nous avons nommé ce type de critère le pseudo-critère S-Shape. Il permet de considérer des seuils de points de vue à partir desquels un décideur peut modifier son point de vue concernant son indifférence. Cette forme plus complexe que la précédente, permet dans un certain cas de retrouver la forme de critère appelée pré-critère dans la littérature.

Dans le chapitre suivant nous proposons une illustration de notre contribution sur les critères de type "pseudo-critère", au travers de la méthode ELECTRE III.

## 7. MÉTHODE ELECTRE III ET PSEUDO-CRITÈRE C-SHAPE

*“À tout problème existe sa solution. À toute solution peut surgir un nouveau problème.”*

DANIEL DESBIENS<sup>1</sup>

---

### Sommaire

---

<b>1</b>	INTRODUCTION . . . . .	<b>200</b>
<b>2</b>	PRINCIPE DE LA MÉTHODE ET NOTATIONS . . . . .	<b>203</b>
2.1	Méthodologie . . . . .	203
2.2	Notations . . . . .	204
2.2.1	Relations binaires . . . . .	204
2.2.2	Pseudo-critères, seuils et relations partielles . . . . .	205
<b>3</b>	CONSTRUCTION DES RELATIONS DE SURCLASSEMENT . . . . .	<b>206</b>
3.1	Indice de concordance avec critère de type C-Shape . . . . .	206
3.2	Indice de discordance avec critère de type C-Shape . . . . .	209
3.3	Degré de crédibilité . . . . .	210
<b>4</b>	EXPLOITATION DES RELATIONS DE SURCLASSEMENT . . . . .	<b>211</b>
4.1	Procédures de distillations . . . . .	211
4.2	Extraction des distillations . . . . .	212
4.3	Classement final . . . . .	213
<b>5</b>	ILLUSTRATION . . . . .	<b>214</b>

---

1. *Maxime d'aujourd'hui*, 2008.

5.1	Données . . . . .	214
5.2	Relations de surclassement . . . . .	215
5.2.1	Cas 1 Substituabilité parfaite : $\rho = 1$ . . . . .	216
5.2.2	Cas 2 Substituabilité : $\rho = 2$ pour $a_1$ . . . . .	216
5.2.3	Cas 3 Substituabilité : $\rho = 0.5$ pour $a_1$ . . . . .	218
5.2.4	Cas 4 Substituabilité : $\rho = 5$ pour $a_1$ . . . . .	218
5.3	Exploitation des données . . . . .	219
5.3.1	Cas 1 : $\rho = 1$ . . . . .	220
5.3.2	Cas 2 : $\rho = 2$ . . . . .	221
5.3.3	Cas 3 : $\rho = 0.5$ . . . . .	222
5.3.4	Cas 4 : $\rho = 5$ . . . . .	222
<b>6</b>	<b>CONCLUSION . . . . .</b>	<b>224</b>

---

## 1 INTRODUCTION

Afin de résoudre un problème opérationnel, il convient de chercher une solution considérée comme optimale. Pour ce faire, utiliser les méthodes d'aide à la décision basées sur un critère unique de synthèse (analyse coût-bénéfice) apparaît comme une démarche cohérente. Cependant, il existe des situations pour lesquelles la recherche d'une solution n'est pas l'objet du problème. En réalité, c'est la multitude de solutions au problème posé qui devient le problème. L'analyse coût-bénéfice ne peut résoudre le problème qui peut être : comment classer ces différentes solutions lorsqu'il existe un certain nombre de critères importants qui peuvent être contradictoires. L'aide à la décision multicritère doit ainsi répondre aux questions suivantes : quel processus décisionnel effectuer ? Vers quelles solutions le décideur doit-il s'orienter ? C'est notamment l'idée que défendent Roy et Bouyssou (1993). Ils expriment ainsi l'aide à la décision multicritère comme suit :

“Dans un processus d'aide à la décision, le principal objectif n'est pas de découvrir une solution mais de construire ou de créer un outil considéré comme utile aux yeux d'un acteur prenant part au processus de décision.”

C'est pour cette raison que les modèles d'aide à la décision multicritères se sont multipliés et plus particulièrement le modèle ELECTRE III qui fait l'objet de ce chapitre. L'intérêt de ces modèles provient du fait qu'il est possible de caractériser plusieurs points de vue différents au cours du processus de décision. Ceci est notamment possible par l'attribution de poids aux différents critères<sup>2</sup> envisagés.

En ce qui concerne le modèle ELECTRE III, il fut développé par Bernard Roy et fait suite au modèle de type ELECTRE I, ELECTRE II et ELECTRE TRI. Il a notamment été mis en place afin de capter l'imprécision du décideur ainsi que son incertitude en utilisant la théorie des ensembles flous pour caractériser les relations de types pseudo-critères. En utilisant les caractéristiques des modèles d'aide à la décision rappelées dans le chapitre précédent, il est possible de résumer la méthode ELECTRE III par le tableau 7.1. Ainsi le type de décision est dit stratégique, la problématique correspond à une problématique

---

2. Nous rappelons ici que les critères correspondent aux conséquences pour les décisions en environnement incertain (cf. le tableau 1.1).

de classement, les solutions sont finies et discrètes. C'est un modèle constructiviste, les critères sont de types pseudo-critères pour lesquels le décideur fixe différents seuils (seuil de préférence, indifférence et veto) et l'agrégation se fait après la comparaison des alternatives.

De part ces caractéristiques, la méthode ELECTRE III trouve son utilité dans les applications telles que : le management de l'énergie ( Neji, Neifar et Turki [100] ; Karagiannidis and Moussiopoulos 1997 [77] ; Rogers et Bruen [33] ; Karagiannidis and Papadopoulos [103] ; Figueira et al. 2005), l'éducation (Giannoulis and Ishizaka [61]), la gestion des déchets (Roussat, Dujet and Mehut [111]), etc. De manière générale, tout ce qui attrait aux décisions liées à l'environnement peuvent être étudiées grâce à ce modèle.

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir la notion de critères de type "pseudo-critère 2" en utilisant le nombre flou paramétré C-Shape, introduit dans le chapitre 1. Nous cherchons à montrer tout au long de ce chapitre que s'il existe des poids pour les différents critères, il est alors possible de considérer que le décideur applique aussi des poids aux alternatives (i.e. solutions) qui s'offrent à lui. D'un point de vue plus économique, les alternatives semblent toutes être considérées comme parfaitement substituables les unes aux autres et ne se démarquent que par les performances sur chacun des critères. Nous admettons qu'il est possible qu'elles soient imparfaitement substituables. Cette imparfaite substituabilité entre les alternatives sera la conséquence de la prise en compte d'une certaine sensibilité du décideur envers l'une ou l'autre des alternatives avant même tout processus de décision.

Pour mettre en avant cela, nous avons organisé le chapitre en quatre sections. La première section est consacrée en une présentation de la méthode. La seconde section présente les apports effectués sur le modèle vis-à-vis du seuil de concordance et de discordance. La troisième partie consiste en un rappel des méthodes d'exploitation des données. Enfin, une illustration est proposée afin d'analyser l'impact des apports proposés.

Caractéristiques du modèle ELECTRE III	
Décision	<b>Stratégique :</b> c'est-à-dire de long terme
Modèle	<b>Constructiviste :</b> le décideur prend part à la construction du modèle
Problématique	<b>Problématique de classement :</b> ordonnancement des actions de la meilleure à la plus mauvaise
Solutions	<b>Ensemble de solutions :</b> discret et fini
Critères	<b>Type de critère :</b> pseudo-critère 2
Méthode d'agrégation	<b>Comparer puis agréger</b>

Tab. 7.1: Caractéristiques de la méthode ELECTRE III

## 2 PRINCIPE DE LA MÉTHODE ET NOTATIONS

### 2.1 Méthodologie

L'objectif de la méthode ELECTRE III consiste à classer des alternatives de la meilleure à la moins bonne tout en admettant possible l'incomparabilité entre deux actions. Le principal avantage de cette méthode est que les critères sont non compensatoires. En d'autres termes, une mauvaise performance sur un critère ne peut être compensée par une bonne performance sur un autre critère. Par voie de conséquence, comme les critères sont indépendants les uns des autres, il n'est pas nécessaire que ces critères aient la même unité de mesure d'une part, et d'autre part il est possible que certains critères soient à maximiser tandis que d'autres critères soient à minimiser dans le même processus de décision (pour une application de la méthode ELECTRE III le lecteur pourra se référer aux travaux de C. Martin et M. Legret [84]). Afin d'établir le classement final, cette méthode est constituée des deux phases suivantes :

1. La phase de construction des relations de surclassement entre les solutions : cette étape consiste à comparer les alternatives deux à deux. Chaque comparaison est définie par une relation de surclassement. Ainsi, déclarer "qu'une alternative  $A$  surclasse une alternative  $B$ " revient à énoncer que " $A$  est au moins aussi bonne que  $B$ ". Fondamentalement, il existe trois sortes de relations de surclassement, à savoir : l'indifférence, la préférence faible et la préférence forte. Pour caractériser ces relations de préférences, certaines données sont nécessaires. Les données peuvent être exogènes, c'est notamment le cas de la performance des solutions sur chaque critère. Elles peuvent être endogènes, cela concerne les préférences du décideur concernant l'importance des critères, ces préférences étant traduites par des seuils.
2. La phase d'exploitation des relations de surclassement des alternatives : cette étape plus procédurale consiste à établir deux pré-ordres nommés distillations. Ces deux pré-ordres ont des procédures antagonistes. En effet, la première distillation nommée distillation ascendante consiste à effectuer un classement de la meilleure alternative à

la moins bonne. La seconde distillation nommée distillation descendante se construit en classant les alternatives de la moins bonne à la meilleure. Enfin, une synthèse de ces deux distillations permet d'obtenir le classement final.

## 2.2 Notations

De manière générale, un problème décisionnel multicritère est caractérisé par un ensemble d'actions, une famille cohérente de critères, un ensemble de poids et une matrice de performances. Pour la suite de ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes, notons :

- $A = (a_i : i = 1, 2, \dots, n)$  l'ensemble des  $n$  alternatives (i.e., actions et solutions) ;
- $L = (l_j : j = 1, 2, \dots, m)$  l'ensemble des  $m$  critères ;
- $W = (w_j : j = 1, 2, \dots, m)$  l'ensemble des  $m$  poids modélisant les préférences du décideur. Par hypothèse,  $\sum_{j=1}^m w_j = 1$  ;
- $g_j(a_i)$  l'évaluation de la performance du critère  $j$  pour l'action  $a_i$ .

Afin d'appréhender les relations de surclassement, il est nécessaire de faire un rappel sur les relations entre les alternatives.

### 2.2.1 Relations binaires

Considérons deux alternatives  $(a_1, a_2) \in A \times A$  que nous souhaitons comparer. Il est possible de définir les relations binaires suivantes :

- La relation de préférence stricte envers  $a_1$  par rapport à  $a_2$  : cette relation est notée  $a_1 P a_2$  et signifie que “ $a_1$  est strictement préférée à  $a_2$ ” ;
- La relation d'indifférence entre  $a_1$  et  $a_2$  : cette relation est notée  $a_1 I a_2$  et signifie que “ $a_1$  est indifférente à  $a_2$ ” ;
- La relation de préférence faible entre  $a_1$  et  $a_2$  : cette relation est notée  $a_1 Q a_2$  et qui signifie que “ $a_1$  est faiblement préférée à  $a_2$ ”. En d'autres termes, le décideur hésite entre l'indifférence ( $I$ ) et la préférence ( $P$ ) ;
- La relation de surclassement entre  $a_1$  et  $a_2$  : cette relation notée  $a_1 S a_2$  signifie

que  $a_1$  surclasse  $a_2$  ou plus précisément  $a_1$  est au moins aussi bonne que  $a_2$ . Par ailleurs, notons que  $S = I \cup Q \cup P$ .

Il est entendu que pour un critère donné  $g_j$ , une interprétation similaire des relations binaires peut être établie. Cette relation binaire sera alors notée respectivement  $P_j$ ,  $I_j$ ,  $Q_j$ ,  $S_j$  et sera nommée relation binaire partielle. Dans le cadre de nos recherches, nous avons travaillé directement sur la relation d'indifférence entre deux alternatives. Dans le cadre du modèle ELECTRE III que nous nommerons classique, les actions sont considérées comme parfaitement substituables entre elles. C'est-à-dire que toute l'information est contenue dans les critères. Nous admettons que cette hypothèse peut être levée en redéfinissant la relation d'indifférence.

### 2.2.2 Pseudo-critères, seuils et relations partielles

À partir des différents critères inhérents à chaque problème décisionnel, il est possible de construire une fonction exprimant les préférences du décideur pour une action  $a_i$  par rapport à une autre  $a_j$ . En ce qui concerne la méthode ELECTRE III, l'utilisation de la fonction pseudo-critère 2 est la norme. La justification de l'utilisation de la fonction pseudo-critère provient du fait que le processus de décision dans le monde réel se fait avec des données pour le moins imprécises, incertaines voire même indérminables (cf. Roy [113]). Ainsi pour "capturer" cette imprécision, le recours à un objet mathématique nommé logique floue (cf. Zadeh [160]), est nécessaire. Afin d'appréhender le concept de pseudo-critère, il est nécessaire de s'intéresser aux deux seuils suivants :

- le seuil d'indifférence pour un critère  $j$  est noté  $q_j(g_j(a_i))$ ,  $\forall a_i \in A$  avec  $j \in J$  ;
- le seuil de préférence pour un critère  $j$  est noté  $p_j(g_j(a_i))$ ,  $\forall a_i \in A$  avec  $j \in J$ .

Notons que  $q_j(g_j(a_i)) \leq p_j(g_j(a_i))$ ,  $\forall g_j \in E$  avec  $a_i \in A$ .

À partir de la définition des seuils, il est possible de s'intéresser au concept de pseudo-critère.

**Définition 2.2.1:** *Un pseudo-critère est une fonction  $g_j$  possédant les deux seuils  $q_j(g_j(a_j))$ ,  $p_j(g_j(a_j))$  satisfaisant la condition suivante, pour tout  $a_j \in A$  :  $g_j(a_j) +$*

$q_j(g_j(a_j))$  et  $g_j(a_j) + p_j(g_j(a_j))$  sont des fonctions monotones non décroissantes (cf. Roy [114] Roy et Bouyssou [116]).

À partir de la définition précédente, il est possible de montrer qu'il existe trois relations binaires partielles pour les deux alternatives  $a_1$  et  $a_2$  considérées sur un critère  $j$  :

- $a_1$  et  $a_2$  sont indifférentes l'une de l'autre : ceci est notamment vrai lorsque l'écart entre la performance des deux solutions est en-deçà du seuil d'indifférence. Formellement :

$$a_1 \text{ I } a_2 \leftrightarrow g_j(a_1) - g_j(a_2) \leq q_j g_j(a_i)$$

- $a_1$  est faiblement préférée à  $a_2$  : c'est le cas lorsque la différence entre les performances des deux alternatives se situe entre le seuil d'indifférence et de préférence. Formellement :

$$a_1 \text{ Q } a_2 \leftrightarrow q_j g_j(a_i) < g_j(a_1) - g_j(a_2) \leq p_j g_j(a_i)$$

- $a_1$  est strictement préférée à  $a_2$  : c'est le cas lorsque la différence entre les performances des deux alternatives se situe au-delà du seuil de préférence. Formellement :

$$a_1 \text{ P } a_2 \leftrightarrow g_j(a_1) - g_j(a_2) \geq p_j g_j(a_i)$$

Par ailleurs, il est possible de constater que si le seuil de préférence est identique au seuil d'indifférence, la fonction pseudo-critère peut être ramenée à une fonction quasi-critère.

**Définition 2.2.2:** Lorsque les seuils  $q_j(g_j(a_i)) = p_j(g_j(a_i))$  pour tout  $a_i \in A$  alors,  $g_j$  peut être appelé quasi-critère. Bien évidemment, le quasi-critère est un cas particulier du pseudo-critère qui ne comporte pas de zone de préférence faible  $Q_j$  (Fig : 4.6.3).

### 3 CONSTRUCTION DES RELATIONS DE SURCLASSEMENT

#### 3.1 Indice de concordance avec critère de type C-Shape

L'objectif de cette section est de mettre en application les apports obtenus dans le chapitre 6 concernant l'utilisation de la fonction représentant les critères dits de types

“pseudo-critère 1”. L’intérêt est de capturer les informations que le décideur pourrait détenir sur les alternatives qui ne sont pas prises en compte par les critères et représentant une sensibilité pour une ou plusieurs alternatives données. Nous reprendrons ainsi la forme de l’équation que nous intégrons avec les notations du modèle que nous avons mis en place dans la section précédente.

Pour cette section, nous considérerons deux alternatives notées  $a_1$  et  $a_2$  que nous chercherons à comparer sur un critère “ $j$ ”. L’indice de concordance a pour but de montrer la véracité de l’assertion “ $a_1$  surclasse  $a_2$ ”. Plus l’indice est fort, plus la véracité est avérée. Ainsi, un indice de concordance égal à un indique que l’assertion est complètement vraie, tandis qu’un indice de concordance égal à zéro indique que l’assertion est fausse (cf. Eq. 3.1). L’indice de concordance total est mesuré de la manière suivante :

$$C(a_1, a_2) = \frac{1}{W} \sum_{j \in L} w_j c_j(a_1, a_2) \quad (3.1)$$

où  $W = \sum_{j \in L} w_j$ , avec  $w_j$  indiquant la relative importance accordée à ce critère. Il existe plusieurs méthodes de détermination du poids des critères permettant de refléter la relative importance des critères pour le décideur. Pour plus de précision, le lecteur peut consulter les travaux de (Figueira and Roy [8]) and (Mousseau [14] Roy and Mousseau [20]).

En utilisant les notations qui sont propres au modèle ELECTRE III définies plus haut, on obtient l’équation ci-dessous, qui permet de mesurer la concordance sur chaque critère et qui est nommée concordance partielle (3.2) :

$$c_j(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_1 \text{ est obtenu} \\ \left(1 - \frac{1}{|(g_j(a_1)+p_j)-(g_j(a_1)+q_j)|^\rho} \times |(g_j(a_1) + q_j) - g_j(a_2)|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} & \text{si } C_2 \text{ est obtenu} \\ 0 & \text{si } C_3 \text{ est obtenu} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$C_1 : g_j(a_2) \leq g_j(a_1) + q_j$$

$$C_2 : g_j(a_1) + q_j < g_j(a_2) \leq (g_j(a_1) + p_j)$$

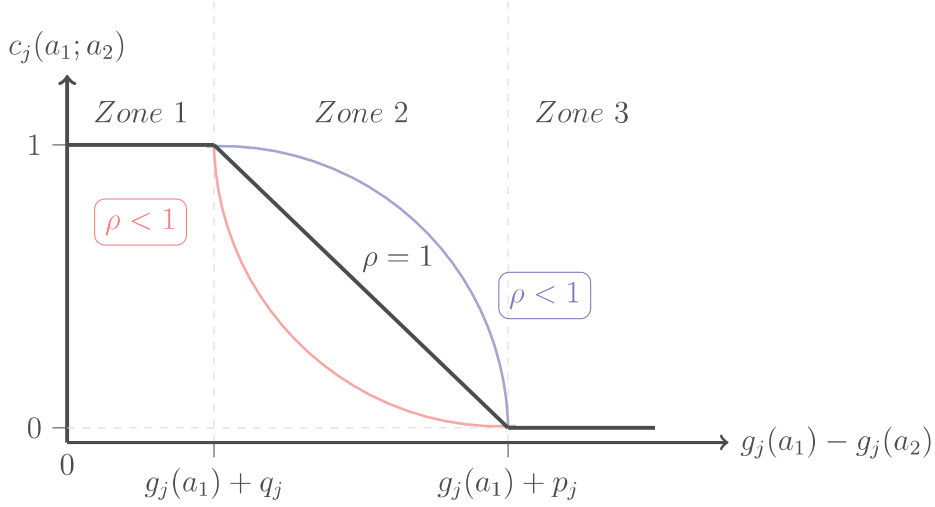


Fig. 7.1: Représentation de l'indice de concordance partiel sur le critère  $j$  de type C-Shape.

$$C_3 : g_j(a_2) > g_j(a_1) + q_j$$

**Interprétations :** nous constatons qu'il existe trois zones différentes :

- Zone 1 : Lorsque  $g_j(a_2) \leq g_j(a_1) + q_j \Rightarrow c_j(a_1, a_2) = 1$ . Dans ce cas, la concordance dans le fait que  $a_1$  surclasse  $a_2$  est confirmée. Les deux actions sont indifférentes l'une de l'autre ;
- Zone 2 : Lorsque  $g_j(a_1) + q_j < g_j(a_2) \leq (g_j(a_1) + p_j) \Rightarrow 0 < c_j(a_1, a_2) < 1$ . Dans ce cas, la concordance dans le fait que  $a_1$  surclasse  $a_2$  est partiellement avérée. Ainsi, l'action  $a_2$  est faiblement préférée par rapport à l'action  $a_1$  ;
- Zone 3 :  $g_j(a_2) > g_j(a_1) + q_j \Rightarrow c_j(a_1, a_2) = 0$ . Dans ce cas, la concordance dans le fait que  $a_1$  surclasse  $a_2$  est infirmée. Ainsi, l'action  $a_2$  est strictement préférée par rapport à l'action  $a_1$  ;

Par ailleurs, l'introduction du paramètre  $\rho$  permet d'accorder une apportance à l'une ou l'autre des alternatives. En effet, il est aisé de remarquer que :

- lorsque  $\rho > 1$  le décideur accorde un poids plus important à l'alternative  $a_1$  et ce, indépendamment du critère en question. Nous admettons que le décideur dispose d'une sensibilité intrinsèque pour cette alternative.
- lorsque  $\rho = 1$ , le décideur accorde un poids aussi important aux deux alternatives. Il est totalement neutre et ne dispose d'aucune préférence pour l'une ou l'autre du

critère.

- lorsque  $\rho < 1$ , le décideur accorde un poids moins important à l'alternative  $a_1$  et ce, indépendamment du critère en question. Nous admettons que le décideur dispose d'une non-sensibilité intrinsèque pour cette alternative. En d'autres termes, le décideur dispose d'une sensibilité intrinsèque pour l'alternative  $a_2$ .

De manière générale, l'introduction de ce paramètre se justifie en considérant que s'il existe des poids pour chaque critère, il est raisonnable d'admettre qu'il peut exister des poids pour chaque alternative, indépendamment des critères.

### 3.2 Indice de discordance avec critère de type C-Shape

Pour chaque critère  $l_j$  de  $L$ , la mesure de discordance de l'assertion " $a_1$  est au moins aussi bonne que  $a_1$ " est donnée par l'indice de discordance noté  $D_i(a_1, a_2)$ . L'indice de discordance mesure si une action n'a pas de différence de performance trop grande sur un critère, ce qui infirmerait l'assertion  $a_1$  surclasse  $a_2$ . Pour cela, le décideur fixe un seuil de veto  $v_j$  au-dessus duquel il est possible de refuser l'assertion. Dans ces travaux, nous avons utilisé la forme fonctionnelle paramétrique C-Shape en utilisant les notations propres à ce chapitre. On obtient l'équation suivante :

$$D_j(a_1, a_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_2) \leq g_j(a_1) + p_j \\ \left(1 + \frac{(-(g_j(a_k) - g_j(a_l)) - p_j)|^\rho)}{|(p_j) - q_j|^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} & \text{si } g_j(a_1) + p_j < g_j(a_2) < g_j(a_l) + v_j \\ 1 & \text{si } g_j(a_2) \geq g_j(a_1) + v_j \end{cases} \quad (3.3)$$

**Interprétations :** de manière symétrique à l'indice de concordance, l'indice de discordance possède aussi trois zones qui traduisent s'il existe une discordance maximale, faible ou nulle entre deux actions.

Par ailleurs, l'introduction du paramètre  $\rho$  permet d'accorder une apportance à l'une ou l'autre des alternatives, le raisonnement similaire à l'indice de concordance peut alors être effectué.

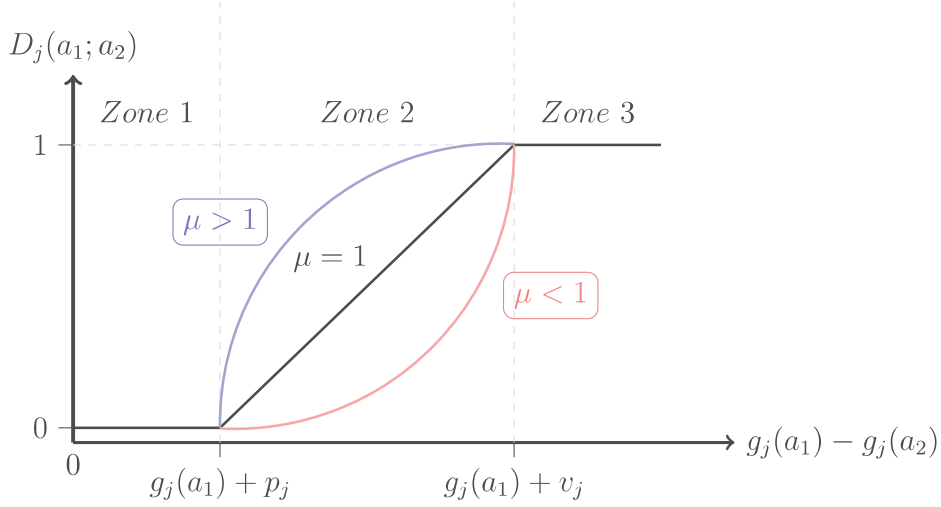


Fig. 7.2: Représentation de l'indice de discordance partiel sur le critère  $j$  de type C-Shape.

### 3.3 Degré de crédibilité

Le degré de crédibilité indique si l'hypothèse de surclassement est effectivement avérée ou non. Pour cela, il convient de comparer les indices de concordance total (Eq 3.2) et les indices de discordances partiels (Eq 3.3). La vérification effectuée permet d'attribuer un degré de crédibilité afin de confirmer la véracité de la proposition. Il existe deux cas :

- Lorsque l'indice de concordance est supérieur ou égal aux indices de discordance sur tous les critères, alors l'indice de crédibilité (Eq 3.4) prend la valeur de l'indice de concordance.
- Lorsque l'indice de concordance est strictement inférieur aux indices de discordances sur tous les critères, alors l'indice de crédibilité prendra la valeur de l'indice de concordance, qui sera elle-même atténuée par l'importance des discordances de la manière suivante (Eq 3.4) :

$$S(a_1, a_2) = \begin{cases} C(a_1, a_2) & \text{si } C(a_1, a_2) \leq D_j(a_1, a_2) \\ C(a_1, a_2) \cdot \prod_{j \in J(a_1, a_2)} \frac{(1 - D_j(a_1, a_2))}{(1 - C(a_1, a_2))} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $J(a_1, a_2)$  est l'ensemble des critères pour lequel  $D_j(a_1, a_2) > C(a_1, a_2)$

## 4 EXPLOITATION DES RELATIONS DE SURCLASSEMENT

À partir de la matrice de crédibilité, présentée dans la section précédente, il convient d'établir le classement. Cette phase se nomme exploitation des relations de surclassement et elle comporte deux phases distinctes :

1. effectuer une distillation des données ;
2. extraire des données effectuée à l'aide des distillations, permet de définir le classement final.

### 4.1 Procédures de distillations

Cette section permet de faire un rappel sur les procédures de distillations. Une matrice de crédibilité peut être représentée graphiquement. Ainsi, chaque alternative serait reliée à une ou plusieurs autres, à l'aide de deux flèches qui iraient en sens opposé indiquant l'indice de crédibilité. Ce graphe étant assez complexe lorsqu'il existe une multitude d'alternatives, deux procédures de classement plus simplifiées peuvent être construites permettant de classer les actions en pré-ordre :

1. **La première se nomme distillation descendante** : cette distillation consiste en un processus incrémental de sélection des alternatives. En premier lieu, l'alternative la mieux notée est sélectionnée depuis l'ensemble des alternatives. Cette démarche est établie en appliquant une règle restrictive (cf. Eq 4.1). Ensuite, à partir du sous-ensemble constitué de toutes les alternatives restantes et en utilisant une règle moins restrictive, (cf. Eq 4.4) il convient de retirer la ou les meilleure(s) action(s). La procédure continue ainsi avec une règle encore moins restrictive et un ensemble plus restreint de solutions. Finalement, le processus s'achève lorsqu'il existe seulement une alternative ou un groupe d'alternatives (considéré comme le pire) que l'on ne peut classer ;
2. **La seconde se nomme distillation ascendante** : elle consiste également en un processus incrémental de sélection des alternatives, à la différence que les alternatives ne seront pas choisies à partir de la ou les meilleurs mais à partir de la ou les moins

bonnes et l'objectif est de remonter vers la ou les meilleures solutions. Tout comme pour la distillation descendante et à partir de la règle restrictive (cf. Eq 4.1), la pire action est retirée de l'ensemble des alternatives. Puis, le processus continue avec les règles moins restrictives (cf. Eq 4.4). Le processus s'achève lorsqu'il n'est plus possible de distinguer les meilleures alternatives entre elles.

Pour chaque distillation, les conditions requises pour statuer que l'alternative  $a_1$  est préférée à  $a_2$  est définie comme suit : l'alternative  $a_1$  est préférée à  $a_2$  si le degré de crédibilité de  $a_1$  surclasse  $a_2$  est supérieur au seuil  $\lambda_2$  et est significativement supérieur au degré de crédibilité  $a_2$  surclasse  $a_1$  (Eq 4.1). Formellement :

$$S(a_1, a_2) > \lambda_2 \text{ et } S(a_1, a_2) - S(a_2, a_1) > s(\lambda_0) \quad (4.1)$$

où  $\lambda_2$  est le plus grand degré de crédibilité immédiatement en-dessous du seuil  $\lambda_1$ , définie comme suit :

$$\lambda_2 = \max_{S(a_1, a_2) \leq \lambda_1} S(a_1, a_2) , \forall (a_1, a_2) \in A \quad (4.2)$$

où  $\lambda_1$  est défini par :

$$\lambda_1 = \lambda_0 - s(\lambda_0) \quad (4.3)$$

où  $\lambda_0$  est défini comme le plus grand degré de crédibilité à partir de la matrice de crédibilité suivante :

$$\lambda_0 = \max_{a_1, a_2 \in A} S(a_1, a_2) \quad (4.4)$$

et  $s(\lambda_0)$  est le seuil de discrimination défini par :

$$s(\lambda_0) = \alpha + \beta \cdot \lambda_0 \quad (4.5)$$

#### 4.2 Extraction des distillations

Lorsque  $a_1$  surclasse  $a_2$ , le score +1 (Force) est donné à  $a_1$  et le score -1 est donné à  $a_2$  (Faiblesse). Le score de qualification finale pour chaque alternative est obtenu en additionnant leurs forces et leurs faiblesses.

À l'aide de la distillation décroissante, l'alternative ayant obtenu le score de qualification le plus élevé se voit attribuer un rang et est retirée de la matrice de crédibilité. Le processus est répété avec les alternatives restantes jusqu'à ce que toutes les alternatives soient classées.

En cas d'égalité de score de qualification entre plusieurs alternatives, le processus est répété dans le sous-ensemble jusqu'à ce qu'une alternative ait un score de qualification plus élevé ou le plus haut degré de crédibilité  $\lambda_0$  est égal à 0, ce qui signifie qu'il n'est pas possible de décider entre les solutions restantes dans le sous-ensemble et elles sont alors déclarées indifférentes.

De manière symétrique, la même procédure est réalisée à l'aide de la distillation ascendante. L'alternative avec le score de qualification le plus faible se voit attribuer un rang et est retirée de la matrice de crédibilité. Le processus est répété avec les alternatives restantes jusqu'à ce que toutes les alternatives soient classées.

### 4.3 Classement final

À partir de la combinaison des deux pré-ordres, nous obtenons le classement final. Les résultats provenant des pré-ordres partiels sont agrégés en une matrice de rangement. Fondamentalement, il existe quatre cas possibles :

1. Si  $a_1$  est mieux classée que  $a_2$  sur les deux distillations, ou si  $a_1$  est mieux classée que  $a_2$  sur une des deux distillations et possède le même classement sur l'autre, alors  $a_1$  est considérée comme meilleure que  $a_2$ . On note " $a_1 P^+ a_2$ ".
2. Si  $a_1$  est mieux classée que  $a_2$  sur une des deux distillations et  $a_2$  est mieux classée que  $a_1$  sur la restante alors,  $a_1$  et  $a_2$  sont considérées comme incomparables. On note : " $a_1 R a_2$ ".
3. Si  $a_1$  possède le même classement que  $a_2$  sur les distillations alors,  $a_1$  et  $a_2$  sont considérées comme indifférentes. On note : " $a_1 I a_2$ ".
4. Si  $a_1$  possède le même classement que  $a_2$  pour les deux distillations ou si  $a_1$  est moins bien classée que  $a_2$  sur une des deux distillations et possède le même classement

sur la deuxième alors,  $a_1$  est considérée comme plus mauvaise que  $a_2$ . On note : “ $a_1 P^- a_2$ ”.

Le classement final est obtenu en additionnant le nombre de  $P^+$ . En cas d’égalité, la comparaison entre deux alternatives avec le même score se fait en analysant les différentes relations d’indifférences et d’incomparabilité.

## 5 ILLUSTRATION

Cette section a pour but de donner un exemple afin de clarifier les effets liés au changement de fonction que nous avons apportés dans la section 3.

### 5.1 Données

Considérons un consommateur (le décideur) cherchant à classer trois différentes alternatives :  $a_1, a_2, a_3$ . Supposons qu’il fasse appel à une compagnie (l’analyste) afin de l’aider dans son processus de décision. Afin de simplifier l’illustration et sans perte de généralité, nous considérerons trois critères :  $l_1, l_2, l_3$  que nous chercherons à maximiser<sup>3</sup>. Le tableau 7.2 présente la performance de chaque action sur chaque critère.

	$l_1$	$l_2$	$l_3$
$a_1$	947	79	187
$a_2$	1098	91	144
$a_3$	950	120	113

Tab. 7.2: Matrice de performances

Nous admettons que le seuil d’indifférence  $q_j$ , le seuil de préférence  $p_j$  et le seuil de veto  $v_j$  sont définis de manière à ce que leur valeur soit constante, en accord avec les recommandations de Rogers and Bruen [33]. Ainsi, leurs valeurs sont présentées dans le tableau 7.3

---

3. Nous avons conscience du fait que dans la réalité, les problèmes décisionnaires font intervenir des critères à maximiser et des critères à minimiser.

	$l_1$	$l_2$	$l_3$
Seuil d'indifférence	0.10	0.10	0.10
Seuil de préférence	0.20	0.20	0.20
Seuil de veto	0.40	0.50	0.40
Poids des critères	0.5	0.3	0.2

Tab. 7.3: Seuils et poids des critères définis par le décideur

Afin d'illustrer l'impact du paramètre  $\rho$  correspondant à la prise en compte de la substituabilité entre les alternatives, nous considérons que s'il existe des poids sur les critères, il est raisonnable d'admettre qu'il existe des poids sur les alternatives. Ainsi, nous allons considérer trois cas distincts (cf. tableau 5.2) :

1. Lorsque  $\rho = 1$  pour toutes les alternatives : le décideur considère que les trois alternatives sont parfaitement substituables et que toute l'information est comprise dans les critères pour son jugement ;
2. Lorsque  $\rho > 1$  pour une des alternatives : le décideur indique alors qu'il existe une information ne dépendant pas des critères qui impacte ses préférences pour une action. Ainsi, les alternatives ne sont que substituables. Nous considérerons pour l'exemple que le décideur a une sensibilité intrinsèque (poids envers une alternative) pour l'action 1. Ainsi, il donnera toute chose égale par ailleurs, la valeur  $\rho = 2$  pour chaque comparaison avec cette action ;
3. Lorsque  $\rho < 1$  pour l'une des alternatives : de manière symétrique, le décideur est moins sensible à cette action et préfère lors des comparaisons lui imputer un  $\rho < 1$ . Pour l'exemple, nous considérerons dans un second temps toute chose égale par ailleurs, que l'action  $a_1$  est dépréciée par le décideur et lui impute un  $\rho = 0,5$ . (cf. tableau 5.2)

### 5.2 Relations de surclassement

Afin d'illustrer les apports de la fonction C-Shape, nous allons nous concentrer sur l'indice de concordance total et la matrice de crédibilité. Nous allons donc effectuer ces

deux matrices pour 4 valeurs de  $\rho$  distinctes :

	Parfaitement substituable	Alternative préférée ( $a_1$ )	Alternative délaissée ( $a_1$ )	Alternative favorite ( $a_1$ )
Valeur de $\rho$	1	2	0.50	5

Tab. 7.4: Poids des alternatives définis par le décideur

### 5.2.1 Cas 1 Substituabilité parfaite : $\rho = 1$

Lorsque les actions sont parfaitement substituables, il n'y a pas de sensibilité pour une action en particulier, on obtient alors le cas linéaire qui est utilisé dans le modèle ELECTRE III. Après le calcul des concordances partielles à partir de l'équation (Eq 3.1), on obtient la matrice de concordance totale qui est donnée par le tableau 7.5. Après le calcul des matrices de discordance, il est possible d'obtenir la matrice de crédibilité qui est donnée par le tableau 7.6. Il est possible de constater que la matrice n'est pas symétrique ce qui est logique puisque le modèle repose sur l'hypothèse de non compensation entre les critères. Par ailleurs, la matrice de crédibilité est identique à la matrice de concordance totale ce qui implique que la discordance n'est pas avérée. Dans la sous-section, nous exploiterons les données afin de procéder au classement.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0,54704931	0.7
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0.8	0.521052632	1

Tab. 7.5: Indice de concordance total lorsque  $\rho = 1$

### 5.2.2 Cas 2 Substituabilité : $\rho = 2$ pour $a_1$

Dans ce cas, le décideur possède impute à l'action 1 une préférence accentuée. Cette préférence accentuée a une conséquence lors de la comparaison des alternatives dès lors qu'elle intervient dans la zone de préférence faible. Ainsi, après le calcul des concordances

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0.54704931	0
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0	0.521052632	1

Tab. 7.6: Matrice de crédibilité lorsque  $\rho = 1$

partielles à partir de l'équation (Eq 3.1), on obtient la matrice de concordance totale qui est donnée par le tableau 7.7. Après le calcul des matrices de discordance, il est possible d'obtenir la matrice de crédibilité qui est donnée par le tableau 7.8. Il est possible de remarquer que la valeur de la concordance totale entre  $a_1$  et  $a_2$  a augmenté toute chose égale par ailleurs. Ceci est dû au fait que seule la comparaison entre les actions 1 et 2 appartient à la zone de préférence faible. Ainsi, le degré de crédibilité à l'assertion  $a_1$  surclasse  $a_2$  est plus fort dans ce cas que dans le cas où  $\rho = 1$ . Cela impacte évidemment la matrice de crédibilité.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0.858479064	0.7
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0.8	0.521052632	1

Tab. 7.7: Indice de concordance total lorsque  $\rho = 2$  pour  $a_1$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0.858479064	0
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0	0.521052632	1

Tab. 7.8: Matrice de crédibilité lorsque  $\rho = 2$  pour  $a_1$

### 5.2.3 Cas 3 Substituabilité : $\rho = 0.5$ pour $a_1$

De manière symétrique, lorsque le décideur impute à l'action 1 une préférence atténuée par rapport aux autres alternatives. Ainsi, après le calcul des concordances partielles à partir de l'équation (Eq 3.1), on obtient la matrice de concordance totale qui est donnée par le tableau 7.9. Après le calcul des matrices de discordance, il est possible d'obtenir la matrice de crédibilité qui est donnée par le tableau 7.10. Il est possible de remarquer que la valeur de la concordance totale entre  $a_1$  et  $a_2$  a diminué. Ceci est dû au fait que seule la comparaison entre les actions 1 et 2 appartient à la zone de préférence faible. Ainsi le degré de crédibilité à l'assertion  $a_1$  surclasse  $a_2$  est plus faible dans ce cas que dans le cas où  $\rho = 1$ . Cela impacte évidemment la matrice de crédibilité.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0.249661952	0.7
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0.8	0.521052632	1

Tab. 7.9: Indice de concordance total lorsque  $\rho = 0.5$  pour  $a_1$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0.249661952	0
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0	0.521052632	1

Tab. 7.10: Matrice de crédibilité lorsque  $\rho = 0.5$  pour  $a_1$

### 5.2.4 Cas 4 Substituabilité : $\rho = 5$ pour $a_1$

Il est question dans cette sous-partie de montrer que la pondération des alternatives influence naturellement le classement. Pour cela, le décideur impute la valeur  $\rho = 5$  à  $a_1$ . Ainsi, après le calcul des concordances partielles à partir de l'équation (Eq 3.2), on obtient la matrice de concordance totale qui est donnée par le tableau 7.11. Après le calcul des matrices de discordance, il est possible d'obtenir la matrice de crédibilité qui est donnée

par le tableau 7.12. Il est possible de remarquer que la valeur de la concordance totale entre  $a_1$  et  $a_2$  a augmenté. Ceci est dû au fait que seule la comparaison entre les actions 1 et 2 appartient à la zone de préférence faible. Ainsi le degré de crédibilité à l'assertion  $a_1$  surclasse  $a_2$  est plus fort dans ce cas que dans le cas où  $\rho = 1$ . Cela impacte évidemment la matrice de crédibilité.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0.990048461	0
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0	0.521052632	1

Tab. 7.11: Indice de concordance total lorsque  $\rho = 5$  pour  $a_1$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	0.990048461	0
$a_2$	0.8	1	0.7
$a_3$	0	0.521052632	1

Tab. 7.12: Matrice de crédibilité lorsque  $\rho = 5$  pour  $a_1$

### 5.3 Exploitation des données

À partir de la matrice de crédibilité, il est question dans cette section de montrer l'impact des différentes substituabilités lorsque l'on utilise le modèle ELECTRE III et plus généralement lorsque l'on utilise les modèles pseudo-critères de type C-Shape. Pour la suite de l'illustration, nous avons à définir la valeur des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  afin d'établir les différentes distillations. Les travaux de Roy et Bouyssou [116] recommandent d'accorder les valeurs  $\alpha = 0,3$  et  $\beta = -0,15$ , ce seront les valeurs que nous utiliserons dans le cadre de cette illustration.

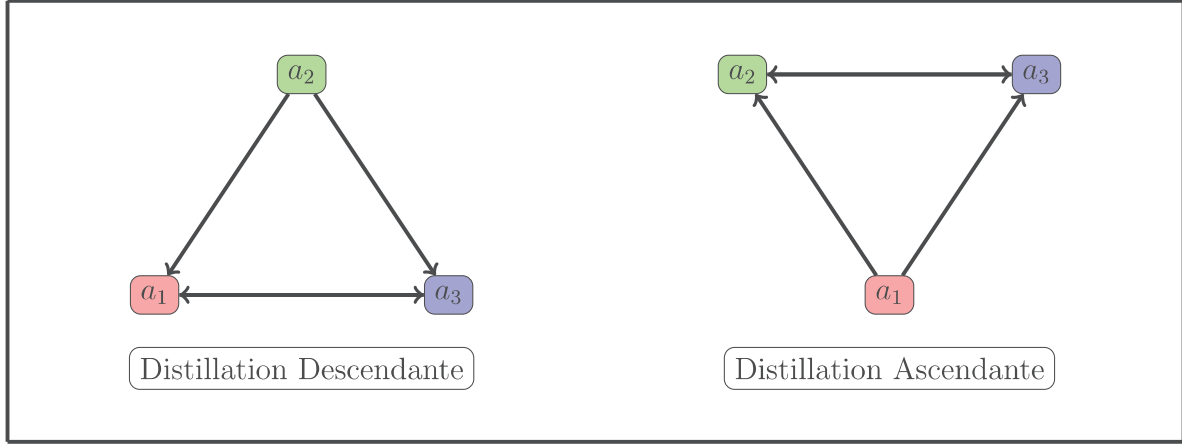


Fig. 7.3: Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où  $\rho = 1$ .

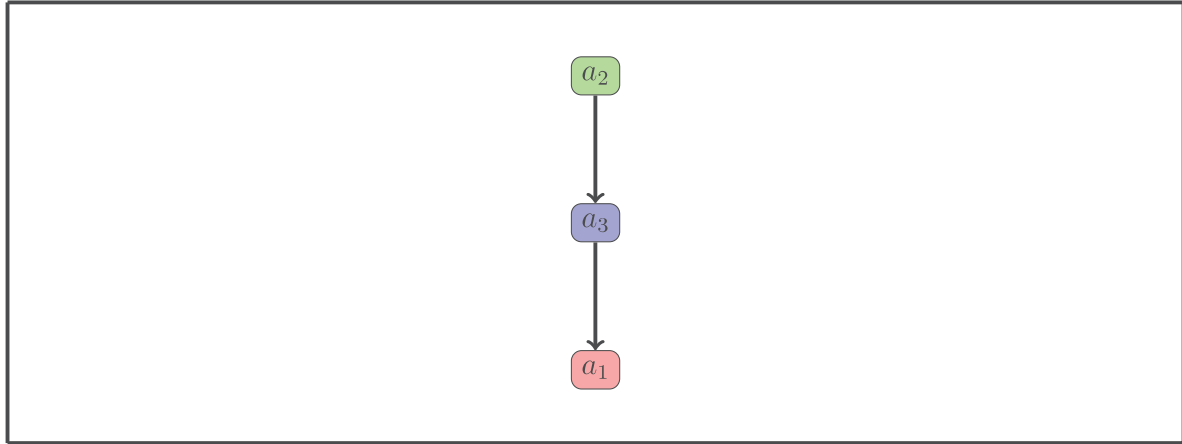


Fig. 7.4: Classement final dans le cas où  $\rho = 1$ .

### 5.3.1 Cas 1 : $\rho = 1$

De la matrice de crédibilité (Tableau 7.6), le plus haut degré est donnée par  $\lambda_0 = 0.8$ . Ainsi, nous calculons  $\lambda_1 = 0.8 - (0.3 - 0.15 \times 0.8) = 0.62$  et  $\lambda_2 = 0.54704931$ . La première alternative qualifiée est donc  $a_2$ . En répétant la distillation descendante, on obtient le classement donné par la figure (Fig.7.3). De manière similaire, on refait le même schéma pour calculer la distillation ascendante et on obtient le classement donné par la figure (Fig.7.3). Considérant les deux pré-ordres, le classement final est donné par la figure (Fig.7.4). Ainsi, dans le cadre d'ELECTRE III classique, on obtient que l'action 2 est préférée à l'action 3, elle-même préférée à l'action 1.

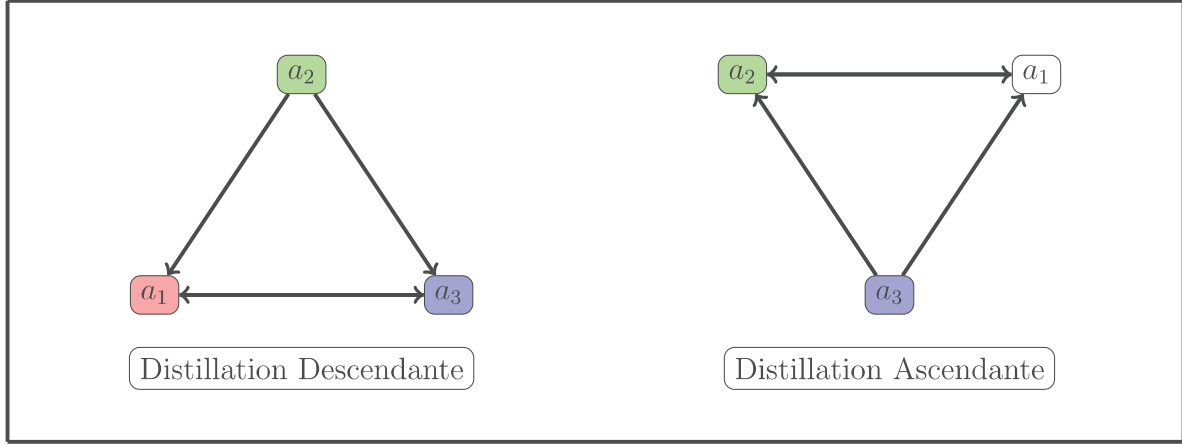


Fig. 7.5: Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où  $\rho = 2$ .

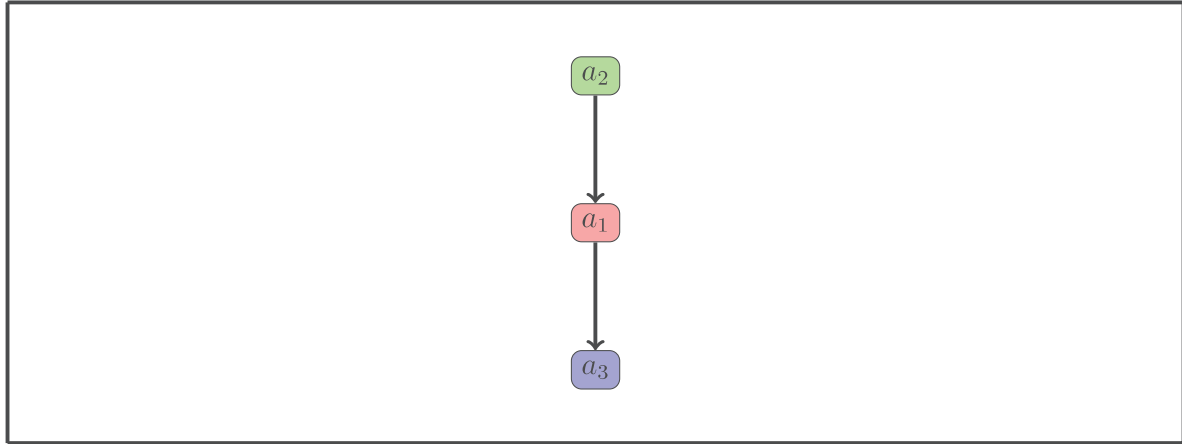


Fig. 7.6: Classement final dans le cas où  $\rho = 2$ .

### 5.3.2 Cas 2 : $\rho = 2$

À partir de la matrice de crédibilité (tableau 7.8), le plus haut degré est donné par  $\lambda_0 = 0.858479064$ . Ainsi, nous calculons  $\lambda_1 = 0.858479064 - (0.3 - 0.15 \times 0.858479064) = 0.68725092$ , et  $\lambda_2 = 0.521052631$ . La première alternative qualifiée est donc  $a_2$ . En répétant la distillation descendante, on obtient le classement donné par la figure (7.5). De manière similaire, on refait le même schéma pour calculer la distillation ascendante et on obtient le classement donné par la figure (7.5). Considérant les deux pré-ordres, le classement final est donné par la figure (7.6). Ainsi, dans le cadre d'ELECTRE III C-Shape, on obtient que l'action 2 est préférée à l'action 1, elle-même préférée à l'action 3.



Fig. 7.7: Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où  $\rho = 0.5$ .

### 5.3.3 Cas 3 : $\rho = 0.5$

Il apparaît évident que dans ce cas, le classement reviendra au cas où  $\rho = 1$ . En effet, le fait que  $a_1$  soit déjà classée dernière lorsque le décideur considère les alternatives parfaitement substituables, rend encore plus fort ce résultat s'il considère que cette alternative est faiblement moins attrayante que les autres. Ainsi, on obtient les distillations descendantes et ascendantes données par la figure (7.7). On remarque par contre que la forme des distillations est modifiée puisque  $a_1$  est choisie en dernier lors de la distillation descendante et éliminée en premier lors de la distillation ascendante. Ceci confirme la préférence atténuée du décideur envers cette alternative. Considérant les deux pré-ordres, le classement final est donné par la figure (7.8). Ainsi, dans le cadre d'ELECTRE III C-Shape, on obtient que l'action 2 est préférée à l'action 3, elle-même préférée à l'action 1.

### 5.3.4 Cas 4 : $\rho = 5$

À partir de la matrice de crédibilité (tableau 7.12), le plus haut degré est donnée par  $\lambda_0 = 0,990048462$ . Ainsi, nous calculons  $\lambda_1 = 0,990048462 - (0.3 - 0.15 \times 0,990048462) = 0,83855573$  et  $\lambda_2 = 0,521052631$ . La première alternative qualifiée est donc  $a_1$ . En répétant la distillation descendante, on obtient le classement donné par la figure (7.9).

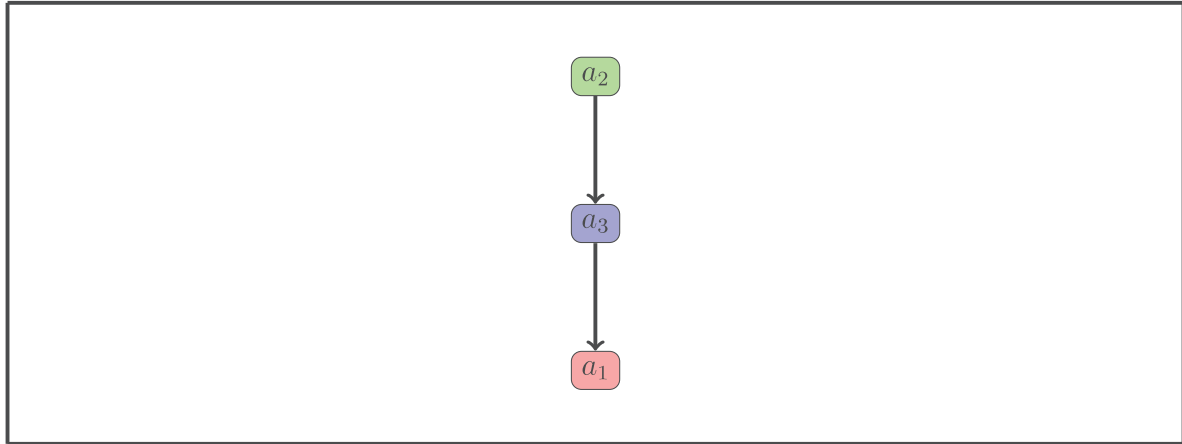


Fig. 7.8: Classement final dans le cas où  $\rho = 0.5$ .



Fig. 7.9: Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où  $\rho = 5$ .

De manière similaire, on refait le même schéma pour calculer la distillation ascendante et on obtient le classement donné par la figure (7.9). Considérant les deux pré-ordres, le classement final est donné par la figure (7.10). Ainsi, dans le cadre d'ELECTRE III C-Shape, on obtient que l'action 1 est préférée à l'action 3, elle-même préférée à l'action 2.

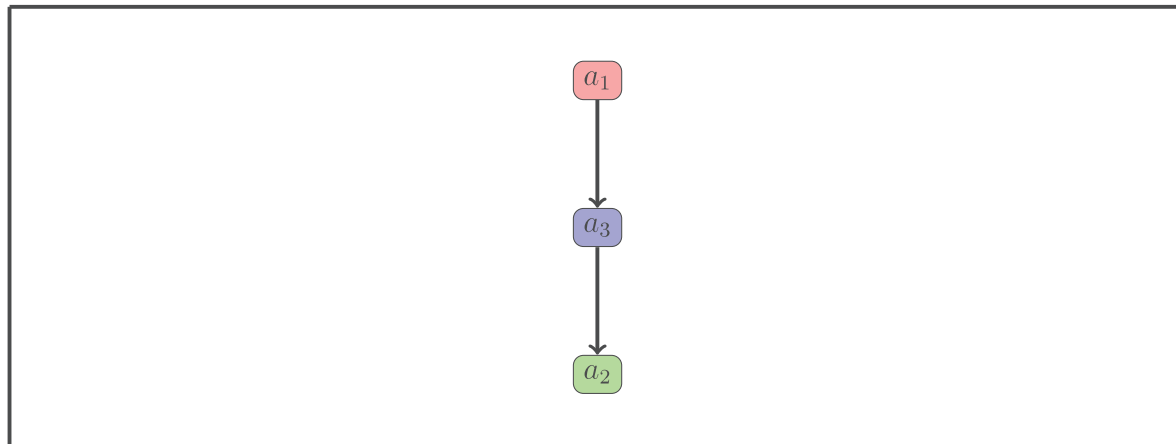


Fig. 7.10: Classement final dans le cas où  $\rho = 5$ .

## 6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons construit un indice de concordance et un indice de discordance permettant d'attribuer des poids aux alternatives. Il nous apparaît assez clairement que dans le cas d'ELECTRE III, les alternatives sont considérées comme parfaitement substituables sur chaque critère. Nous avons décidé de considérer que cela pouvait être effectivement le cas mais qu'en plus, il était possible de concevoir un cas plus général où les alternatives pourraient être imparfaitement substituables.

Partant de ce postulat, nous avons construit un indice de concordance partiel et un indice de discordance partiel, à partir d'un critère de type pseudo-critère C-Shape, étudié dans le chapitre 6. Les résultats de l'illustration s'avèrent conformes à ce que l'on pouvait intuitivement s'attendre. En effet, plus le décideur impute un poids élevé à une alternative (ou un groupe d'alternatives), plus cette alternative (ou ces alternatives) sera (seront) meilleure(s). Un raisonnement symétrique peut être effectué, pour le cas où le poids sur les alternatives est faible.

Nous sommes particulièrement attentifs au fait que la fonction paramétrique C-Shape présente un réel apport au modèle ELECTRE III dans les deux cas suivants :

- lorsque les écarts entre les alternatives sont très faibles. Cela représente le cas où le degré de concordance sur un critère donné entre deux alternatives est environ égal

- à  $\frac{1}{2}$ . Dans ce cas, pondérer les alternatives à un réel impact sur le résultat final ;
- lorsque les écarts entre les alternatives sont très éloignés. Cela représente les cas où le degré de concordance partiel sur un critère entre deux alternatives est très proche de 1 ou de 0. Dans ces cas, pondérer fortement une alternative modifie le classement.

Ceci étant, puisque la fonction C-Shape permet de considérer le cas linéaire, elle représente donc une généralisation, par une formulation mathématique plus riche. Ainsi, l'utilisation de la fonction C-Shape peut s'appliquer au modèle ELECTRE III et plus généralement à tous les modèles basés ce type de critère.

Les raisons de l'utilisation du  $\rho$  sont multiples et dépendent bien entendu du problème décisionnel en question. Ceci étant, nous pouvons considérer que le décideur n'est pas l'unique bénéficiaire de l'alternative choisie. En d'autres termes, supposons que le choix porte sur une politique collective, le  $\rho$  peut représenter le pouvoir de négociation des différents acteurs de la décision. Par ailleurs, il est aussi possible de considérer qu'une décision aura des effets sur plus ou moins long terme. Cette immédiateté de la décision par rapport aux conséquences (critères) peut justifier l'utilisation d'une pondération sur les alternatives. C'est-à-dire que le  $\rho$  peut être considéré comme un taux de préférence pour le présent. Enfin, il est possible d'affirmer que lorsqu'une décision doit être prise, le décideur ne peut être désolidarisé de son environnement. Ainsi, le contexte institutionnel peut influencer la pondération des alternatives, sans que cela soit pris en compte dans un critère. Nous évoquons ici des pistes de réflexions d'applications de futurs travaux.

Plusieurs pistes d'applications de la méthode ELECTRE III C-Shape apparaissent naturellement. Tout d'abord, la méthode ELECTRE s'applique dans le cas de l'économie de l'environnement (Froger [59]). En effet, la prise de décision dans le management des ressources, implique plusieurs parties prenantes (les pouvoirs publics, les associations de protection de l'environnement, les citoyens, etc.). La temporalité avec la prise en compte du cours du moyen et du long terme, est au coeur de la décision. Enfin, les décisions environnementales sont soumises à des normes strictes, qui peuvent intervenir dans la prise de décision. Ainsi dans cette thématique, notre contribution trouverait naturellement son cadre d'application.

Les apports de ce chapitre peuvent servir dans les problèmes liés à l'environnement ou à la gestion des ressources naturelles. En effet, la thématique de l'environnement s'intéresse de près aux recherches en aide à la décision multicritère [84]. Une thématique aussi sensible à l'utilisation de la méthode ELECTRE III C-Shape, concerne tout ce qui se rapporte à l'économie de la santé.

Enfin, la méthode ELECTRE III dont le but est d'effectuer un classement, trouve naturellement un intérêt dans le domaine de la gestion des ressources humaines, pour la gestion des recrutements notamment. En effet, considérer les candidats comme parfaitement substituables apparaît comme une hypothèse restrictive. Ainsi, notre apport pourrait prendre en compte cette imparfaite substituabilité entre les candidats.



## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

*“Nous ne pouvons résoudre les problèmes difficiles que nous rencontrons en demeurant au même niveau de réflexion où nous nous trouvions lorsque nous les avons créés.”*

ALBERT EINSTEIN

---

Nos travaux de recherche, inscrits en théorie de la décision, nous ont permis de mieux comprendre la prise de décision en mobilisant à la fois l'axe de recherche nommé “recherche opérationnelle” et l'axe de recherche nommé “théorie de l'aide à la décision”.

Les premiers résultats de ce travail de recherche sont d'avoir mis en évidence sous quelles hypothèses et contextes de la prise de décision ces deux axes de recherche reposaient. Il en ressort la différenciation suivante :

- concernant le type de solution recherchée : une solution optimale valable en tout temps et pour tous les cas dans le cadre de la recherche opérationnelle, satisfaisante et dépendante du décideur dans le cadre de l'aide à la décision ;
- concernant la place de l'individu : Il est considéré comme une donnée exogène puisque rationnelle pour la recherche opérationnelle alors que celui-ci est placé au centre de la réflexion dans le cadre de l'aide à la décision ;
- concernant la prise en compte des préférences : on considère que la fonction d'utilité représente les préférences dans le cas de la recherche opérationnelle, alors que c'est la satisfaction des critères qui représente les préférences dans le cadre de l'aide à la décision ;

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---

- concernant l'analyste : Dans le cas de la recherche opérationnelle, étant donné l'optimalité de la solution, la démarche de l'analyste est plus normative (en supposant l'hypothèse de rationalité le joueur doit adopter telle stratégie). Dans le cas de l'aide à la décision, l'analyste propose une aide et donc il fait une recommandation concernant une solution, la démarche apparaît ainsi plus positive.

Ces différences expliquent une méthodologie totalement différente pour répondre aux divers problèmes décisionnels. Ceci étant, nous pensons tout comme les chercheurs qui sont à l'origine de ces axes de recherches, qu'elles ne sont non pas exclusives mais complémentaires. Tandis que la recherche opérationnelle possède une démarche normative en donnant la “feuille de route”, un objectif un idéal à atteindre (solution optimale, équilibre de Nash), l'aide à la décision dispose une démarche plus positive, d'un point de vue économique.

De plus, nous avons montré que dans le cadre d'un univers incertain lorsque l'information est multiple et imparfaite, cette imperfection de l'information peut revêtir diverses formes. En effet, l'imperfection est un terme générique qui recoupe plusieurs éléments à savoir l'incertitude, l'imprécision, l'inconsistance et l'incomplétude. L'incertitude qui est le leitmotiv de ces travaux a historiquement été prise en compte grâce à la mesure de probabilité que nous avons rappelé lors de ce chapitre.

L'intérêt de nos travaux, qui ont une portée théorique et méthodologique a été d'utiliser un outil issu de la théorie des ensembles flous que nous avons étudié dans le chapitre 2. Cette théorie consiste à considérer que l'appartenance d'un élément à un ensemble n'est pas seulement binaire (appartient ou n'appartient pas) mais doit être nuancé (appartient avec un certain degré de vérité). La théorie des ensembles flous permet de prendre en compte l'incertitude et l'imprécision des données (informations) mais aussi de caractériser l'imprécision du langage naturel. Pour cela, les nombres sont considérés comme flous et détiennent une fonction d'appartenance comprise entre 0 et 1. À partir de ces nombres flous, nous avons construit un nombre flou paramétré que nous avons nommé “nombre flou C-Shape” puisqu'il consiste en une convexification d'un nombre flou triangulaire. L'apport central de cette construction tient au fait qu'il correspond à une généralisation des nombres flous usuels (triangulaire, trapézoïdaux, de gauss) d'une part et d'autre part

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---

qu'il permet aussi de retrouver les nombres "crips". À partir de ce nombre, nous avons proposé une extension en formulant les nombres flous multi-C-Shape qui correspond à un nombre C-Shape par morceau. Cela permet notamment dans un cas où le nombre de morceau est de deux, d'obtenir un nombre flou S-Shape. Ce nombre flou paramétré dont l'intérêt est de caractériser les effets seuils.

Nous avons utilisé cet outil mathématique tout au long de ces travaux, d'une part en recherche opérationnelle couplée à la théorie des jeux dans la partie 2 de nos travaux. En remplaçant le concept de probabilité par le concept de possibilité. Lors du chapitre 3 nous avons cherché à faire une correspondance entre les fonctions distances et la fonction d'appartenance dans le but de retrouver l'hypothèse de  $\mathbb{B}$ -convexité.

L'intérêt de cette démarche était que sous hypothèse de  $\mathbb{B}$ -convexité il existe des équilibres de Nash. Ce chapitre est ainsi un pré-requis mathématique afin de pouvoir étudier plus en détail la théorie des jeux. C'est ce que nous avons fait lors du chapitre 4 en faisant en premier lieu un survey qui explicite les équilibres de Nash en stratégies mixtes reposant sur les mesures de probabilités. Notre apport fut de modifier les probabilités par des mesures de possibilités et de considérer des ensembles de stratégies. Nous avons ainsi montré qu'il existait des équilibres de Nash en stratégies mixtes sous mesure de possibilités. L'interprétation que nous avons pu tirer à l'aide de ces travaux est qu'il est possible de caractériser trois types de joueurs différents. Le premier peut être considéré comme « optimiste », le second comme « neutre » et enfin le troisième comme « pessimiste ». Ce chapitre met finalement en avant le fait que l'on peut être rationnel et avoir une vision du jeu différente.

Concernant les perspectives de recherche sur ce point, nous allons nous concentrer à montrer qu'en réalité il est possible de faire jouer un joueur « optimiste » contre un joueur « pessimiste » et de trouver un équilibre.

De manière générale, nos futures recherches porteront sur le fait de mixer les convexités. Nos contributions théoriques pourront s'illustrer dans des champs d'application divers, notamment dans une perspective macroéconomique en commerce international. En effet, nous pouvons supposer que deux pays (joueurs) peuvent décider entre une stratégie

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---

de libre-échange ou de protectionnisme dans une perspective floue, c'est-à-dire avec des degrés divers d'appartenance à l'une ou l'autre des stratégies et que la vision du jeu entre ces joueurs peut ainsi varier selon son pouvoir de marché dans les échanges internationaux. De même, des illustrations dans une perspective microéconomique en économie de la formation peuvent également s'envisager. En effet, Becker [14] à travers la théorie du capital humain construit un modèle d'investissement dans la formation des entreprises en mettant au coeur de son analyse le problème de braconnage, à savoir le risque que le travailleur formé par l'entreprise parte dans une firme concurrente à l'issue de sa formation. Ainsi pour comprendre la décision d'investir ou non dans la formation Becker va distinguer la formation générale, entièrement transférable sur le marché, de la formation spécifique, partiellement transférable. Il en conclut que face au problème de braconnage les entreprises ne sont jamais incitées à investir dans la formation générale.

Or la littérature empirique souligne qu'au contraire les entreprises investissent et financent largement la formation générale. Plusieurs extensions du modèle de Becker en concurrence imparfaite sont alors apparues pour comprendre ces mécanismes avec notamment les travaux d'Acemoglu et Pischke (1999)[2] qui en adoptant l'approche de négociation de Nash suppose que la firme peut retirer une rente de l'investissement dans la formation générale selon son pouvoir de monopsonne sur le marché. D'autres travaux ont ensuite enrichie la littérature théorique en soulignant que la distinction stricte entre la formation générale et spécifique était inappropriée du fait de l'hétérogénéité des firmes (Stevens (1994) [136], Lazear (2003)[83]). Il apparaît ainsi que l'investissement dans la formation en entreprise peut être compris comme un jeu entre deux entreprises (joueurs) qui doivent arbitrer entre investir dans une formation générale ou spécifique (stratégies), sachant que les degrés d'appartenance à l'une ou l'autre des stratégies peuvent apparaître flous compte tenu des caractéristiques des firmes et le degré de concurrence monopolistique dans lequel elles évoluent. Nos contributions théoriques trouveraient ainsi un terrain d'application à la compréhension des mécanismes d'investissement de la formation des entreprises.

D'autre part, Lors de la partie suivante, nos contributions ont portées dans un sens

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---

général à la théorie de l'aide à la décision multicritère. Lors du chapitre 6, nous avons donné un survey de l'aide à la décision en définissant les tenants et aboutissants de cet axe de recherche. Puis, nous avons concentré nos recherches sur l'aide à la décision multicritère car les problèmes décisionnels en économie reposent généralement sur de multiples critères conflictuels. Nous avons ainsi défini le critère (i.e conséquence) comme une mesure de la préférence du décideur. Notre contribution a alors été de caractériser à partir d'un type de critère pré-existant nommé pseudo-critère, le pseudo-critère de type C-Shape (utilisant l'outil mathématique construit en chapitre 2). Cela nous a permis de mieux caractériser la zone d'indifférence faible qu'il existe lors de la comparaison entre deux solutions. L'utilisation de cette forme fonctionnelle que nous avons considéré comme une généralisation du cas linéaire permet de caractériser à la fois le type vrai-critère, et le type pseudo-critère. Il est possible de montrer que la fonction multi-C-Shape est une approche qui permet de caractériser le type de critère "pré-critère".

Enfin, nous avons appliqué du pseudo-critère type C-Shape, à une méthode de l'aide à la décision multicritère à savoir, le modèle ELECTRE III. Ce modèle qui consiste en un classement des alternatives de la meilleure à la moins bonne en comparant sur chaque critère les alternatives deux à deux, présente l'avantage d'éviter la compensation entre les critères. Lors de ce chapitre, nous avons proposé une reformulation de l'indice de concordance et de discordance ce qui nous a permis lors d'une illustration de montrer que la fonction C-Shape avait une incidence sur le classement final. En d'autres termes, nous avons considéré que le décideur possédait une sensibilité intrinsèque pour une alternative donnée sans qu'il puisse l'imputer à un critère, de sorte que les alternatives ne sont plus parfaitement substituables sinon substituables.

Les perspectives de cet axe de recherche concernent les différentes applications que nous voulons donner à nos apports théoriques. Ainsi, le nombre flou paramétré peut être utilisé dans le modèle UTA développé par Jacquet-Lagrèze et Siskos en 1982 ce modèle est basé sur l'idée que le décideur cherche à une bonne connaissance sur un sous-ensemble d'alternative pour lequel il est possible d'estimer une fonction d'utilité, afin de classer les divers sous-ensembles. L'objectif final est de caractériser la fonction d'utilité totale

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---

du décideur. Les travaux développés par Patioatakis et al (2011) [105] qui proposent d'utiliser les nombres flous pour caractériser des fonctions d'utilité additives. Nous pensons qu'utiliser le nombre flou C-Shape permettrait d'approximer la fonction d'utilité locale de manière plus précise. Par ailleurs, tout modèle reposant sur le concept de pseudo-critère peut être approximé par la fonction paramétrée.

Par ailleurs, dans le cadre de la méthode ELECTRE III nous pensons que l'utilisation de cette méthodologie est intéressante notamment en économie de la santé et en économie et management des ressources naturelles des études sur la gestions des ressources utilisant la méthode ELECTRE III ont déjà été établies par Froger [59]. Nos futurs travaux porteront donc sur ces thématiques.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE . . . . .	8
---------------------------------	---

PARTIE I LA DÉCISION EN UNIVERS FLOU : DU CONCEPT DE PROBABILITÉ AU CONCEPT D'ENSEMBLE FLOU . . . .	17
--	----

1. INFORMATION : LE NERF DE LA DÉCISION . . . . .	18
---	----

1 Introduction . . . . .	20
--------------------------	----

2 Les imperfections de l'information . . . . .	21
--	----

2.1 De l'importance de l'information . . . . .	21
--	----

2.2 Les formes d'imperfections de l'information . . . . .	22
---	----

3 La décision et son univers . . . . .	26
--	----

4 Les probabilités comme mesure de l'incertitude . . . . .	30
--	----

4.1 Généralité . . . . .	30
--------------------------	----

4.2 Définition mathématique du concept de probabilité . . . . .	30
---	----

4.3 La pluralité du concept de probabilité . . . . .	31
--	----

4.4 Limites à l'utilisation des probabilités . . . . .	32
--	----

5 Conclusion . . . . .	34
------------------------	----

2. UNIVERS INCERTAIN ET THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS . . . . .	36
---	----

1 Introduction . . . . .	38
--------------------------	----

## TABLE DES MATIÈRES

---

2 Théorie des possibilités . . . . .	39
3 Univers incertain et théorie des ensembles flous . . . . .	41
3.1 Formalisation d'un ensemble flou . . . . .	41
3.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou . . . . .	41
3.2.1 Support et hauteur . . . . .	43
3.2.2 Le noyau . . . . .	43
3.3 Variable linguistique . . . . .	43
4 Introduction du nombre flou paramétré de type C-Shape . . . . .	45
5 Introduction du nombre flou paramétré de type multi-C Shape . . . . .	53
5.1 Multi-C-Shape . . . . .	53
5.2 Introduction de la S-Shape . . . . .	54
6 Conclusion . . . . .	56

## PARTIE II CONTRIBUTION À LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET À LA THÉORIE DES JEUX . . . . . 59

3. FONCTION DISTANCE ET FONCTION D'APPARTENANCE : UNE STRUCTURE DE CONVEXITÉ . . . . .	60
1 Introduction . . . . .	62
2 Sur les fonctions distances, fonctions d'appartenances, mesures de nécessité et de possibilité . . . . .	63
2.1 Construction d'un produit externe à partir des fonctions d'appartenances . . . . .	63
2.2 Exemple : les ensembles radians . . . . .	67
2.3 Structure de convexité pour des collections d'ensembles convexes par Union et par intersection . . . . .	72

# TABLE DES MATIÈRES

---

3 Une structure convexe idempotente . . . . .	77
3.1 Les ensembles $\mathbb{B}$ -convexes . . . . .	77
3.2 Sur une classe particulière d'ensembles et leur relation avec la $\mathbb{B}$ -convexité . . . . .	80
3.3 Ensembles cubiques et relation avec la $\mathbb{B}$ -convexité . . . . .	82
4 Conclusion . . . . .	89
4. ELÉMENTS DE LA THÉORIE DES JEUX . . . . .	90
1 Introduction . . . . .	92
2 Généralité et notations . . . . .	94
3 Formes d'un jeu . . . . .	95
3.1 Représentation d'un jeu sous forme extensive . . . . .	96
3.2 Représentation d'un jeu sous forme normale. . . . .	96
4 Stratégie, dominance et équilibre . . . . .	98
5 Equilibre de Nash . . . . .	102
5.1 Equilibre de Nash et stratégies pures . . . . .	102
5.2 Stratégies mixtes et convexification . . . . .	104
6 Point fixe et équilibres . . . . .	109
7 Introduction des nouveaux types de joueurs . . . . .	109
8 Equilibre de Nash dans le cas de jeux $\mathbb{B}$ -convexe . . . . .	111
8.1 Points fixes et $\mathbb{B}$ -convexité. . . . .	111
8.2 Jeux ascendants . . . . .	113
8.2.1 Stratégies pures et équilibre . . . . .	114
8.2.2 Stratégies mixtes et fonction de coût inverse Léontief . . . . .	116
8.3 Jeux descendants et stratégies mixtes inverses . . . . .	121

## TABLE DES MATIÈRES

---

8.4 Jeux avec mesures maxitives et minitives . . . . .	126
9 Conclusion . . . . .	132
5. C-SHAPE ET MODÈLE DE JEUX LIMITE . . . . .	134
1 Introduction . . . . .	136
2 Fonctions Puissances et Convexité Généralisée . . . . .	137
3 Ensembles Limites . . . . .	139
4 Convexité généralisée propriété de point fixe . . . . .	141
5 Stratégies mixtes non-linéaires dans le cas $\rho > 0$ . . . . .	143
6 Stratégies mixtes non-linéaires dans le cas $\rho < 0$ . . . . .	147
7 Jeu Cobb-Douglas . . . . .	148
8 Convexités Mélangées . . . . .	150
9 Equilibres Mélangés en Stratégie Mixte . . . . .	152
10 Conclusion . . . . .	157
PARTIE III CONTRIBUTION À L'AIDE À LA DÉCISION ET À LA MÉTHODE MULTICRITÈRE. . . . .	165
6. ELÉMENTS DE LA THÉORIE DE L'AIDE À LA DÉCISION . . . . .	166
1 Introduction . . . . .	168
2 En quoi Consiste l'aide à la décision ? . . . . .	169
2.1 Définition de l'aide à la décision. . . . .	170
2.2 La pluralité des approches de l'aide à la décision . . . . .	172
2.3 Les étapes du processus d'aide à la décision . . . . .	172
3 Aide à la décision multicritère . . . . .	177
3.1 A chaque décideur un problème différent. . . . .	178

# TABLE DES MATIÈRES

---

3.2 Définition du problème décisionnel . . . . .	179
3.3 De l'intérêt de définir les critères . . . . .	181
4 Ensemble de critères, préférences et agrégation des préférences . . . . .	182
4.1 Définition d'un critère . . . . .	182
4.2 Indifférence et préférence. . . . .	184
4.2.1 Relations binaires et relations d'ordre . . . . .	184
4.2.2 Structure des relations de préférence . . . . .	186
4.2.3 Relations usuelles . . . . .	187
4.3 Représentation formelle des types de critères par les nombres flous paramétrés . . . . .	188
4.3.1 Introduction du nombre flou paramétré C-shape . . . . .	190
4.3.2 Introduction du nombre flou paramétré S-Shape . . . . .	193
5 La modélisation de l'agrégation des préférences . . . . .	194
6 Conclusion . . . . .	196
 7. MÉTHODE ELECTRE III ET PSEUDO-CRITÈRE C-SHAPE . . . . .	 198
1 Introduction . . . . .	200
2 Principe de la méthode et notations . . . . .	203
2.1 Méthodologie . . . . .	203
2.2 Notations . . . . .	204
2.2.1 Relations binaires . . . . .	204
2.2.2 Pseudo-critère, seuils et relations partielles . . . . .	205
3 Construction des relations de surclassement . . . . .	206
3.1 Indice de concordance avec critère de type C-Shape . . . . .	206
3.2 Indice de discordance avec critère de type C-Shape . . . . .	209
3.3 Degré de crédibilité. . . . .	210

## TABLE DES MATIÈRES

---

4 Exploitation des relations de surclassement . . . . .	211
4.1 Procédures de distillations . . . . .	211
4.2 Extraction des distillations . . . . .	212
4.3 Classement final . . . . .	213
5 Illustration . . . . .	214
5.1 Données . . . . .	214
5.2 Relations de surclassement . . . . .	215
5.2.1 Cas 1 Substituabilité parfaite : $\rho = 1$ . . . . .	216
5.2.2 Cas 2 Substituabilité : $\rho = 2$ pour $a_1$ . . . . .	216
5.2.3 Cas 3 Substituabilité : $\rho = 0.5$ pour $a_1$ . . . . .	218
5.2.4 Cas 4 Substituabilité : $\rho = 5$ pour $a_1$ . . . . .	218
5.3 Exploitation des données . . . . .	219
5.3.1 Cas 1 : $\rho = 1$ . . . . .	220
5.3.2 Cas 2 : $\rho = 2$ . . . . .	221
5.3.3 Cas 3 : $\rho = 0.5$ . . . . .	222
5.3.4 Cas 2 : $\rho = 5$ . . . . .	222
6 Conclusion . . . . .	224
CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES . . . . .	228
ANNEXE . . . . .	247
A. Programme Electre III C-Shape . . . . .	247

## Table des figures

1.1	Les préférences et la connaissance : indicateurs nécessaires pour la prise de décision . . . . .	23
1.2	Représentation des différentes formes d'imperfections (Masson, 2005) . . .	25
1.3	Cadre d'analyse des différents univers dans lesquels sont prises les décisions (Abdellaoui et Gonzales). Légende : <sup>1</sup> A signifie ici action. <sup>2</sup> Csq signifie conséquence. . . . .	28
2.1	Représentation d'une fonction caractéristique (droite) et d'une fonction d'appartenance de type triangulaire (gauche, la forme est adoptée arbitrairement) . . . . .	42
2.2	Représentation d'un ensemble flou et de sa fonction d'appartenance à x . .	44
2.3	Représentation d'une variable linguistique par un sous-ensemble flou . . . .	45
2.4	Représentation des différentes formes d'un nombre flou paramétré . . . . .	51
2.5	Représentation graphique du nombre flou S-Shape lorsque $\rho$ est supérieur ou inférieur à 1 . . . . .	55
2.6	Cas particulier limite de la S-Shape où la limite de $\rho$ alterne entre 0 et $\infty$ .	55
2.7	Cas particulier limite de la S-Shape où $\rho \rightarrow \infty$ sur tous les intervalles. . . .	56
3.1	Exemple d'ensemble radian sur $\mathbb{R}_+^d$ . . . . .	68
3.2	Exemple d'ensemble co-radian sur $\mathbb{R}_+^d$ . . . . .	68
3.3	Enveloppe $\mathbb{B}$ -convexe de deux points (gauche), $\mathbb{B}$ -polytope(droite). . . . .	78

3.4	Enveloppe inverse $\mathbb{B}$ -convexe de deux points (gauche), inverse $\mathbb{B}$ -polytope(droite).	81
3.5	Propriétés d'intersection . . . . .	83
3.6	Extension flou d'un ensemble descendant . . . . .	84
3.7	Enveloppe de nécessité descendante . . . . .	85
3.8	Intersection d'ensembles ascendants . . . . .	85
3.9	Extension floue d'un ensemble ascendant . . . . .	87
3.10	Enveloppe de nécessité ascendante. . . . .	88
4.1	Représentation d'un jeu sous forme extensive . . . . .	97
4.2	Meilleure réponse du Joueur 1 . . . . .	106
4.3	Meilleure réponse du Joueur 2 . . . . .	106
4.4	Equilibre de Nash . . . . .	107
4.5	Unicité de l'équilibre de Nash . . . . .	108
4.6	Intersection d'ensemble de budget (gauche), Union d'ensemble de budget (droite). . . . .	128
5.1	Fonction puissance du joueur 1 avec $\rho = 1$ . . . . .	158
5.2	Fonction puissance du joueur 2 avec $\rho = 1$ . . . . .	159
5.3	Fonction puissance joueur 1 avec $\rho = 2$ . . . . .	159
5.4	Fonction puissance joueur 1 avec $\rho = 7$ . . . . .	160
5.5	Fonction puissance joueur 2 avec $\rho = 2$ . . . . .	160
5.6	Fonction puissance joueur 2 avec $\rho = 7$ . . . . .	161
5.7	Fonction puissance joueur 1 avec $\rho = 0,5$ . . . . .	161
5.8	Fonction puissance joueur 2 avec $\rho = 0.5$ . . . . .	162
5.9	Fonction puissance du joueur 1 de type Cobb-Douglas . . . . .	162

5.10	Fonction puissance joueur 2 de type Cobb-Douglas . . . . .	163
6.1	Quatre problématiques d'aide à la décision : choisir, trier, ranger, décrire (Mousseau [95]) . . . . .	180
6.2	Les différents types de critères . . . . .	185
6.3	Les différentes formes fonctionnelles des critères . . . . .	189
6.4	Exemple de graphique de la fonction pseudo-critère C-Shape . . . . .	192
6.5	Exemple de graphique de la fonction pseudo-critère S-Shape . . . . .	194
7.1	Représentation de l'indice de concordance partiel sur le critère $j$ de type C-Shape. . . . .	208
7.2	Représentation de l'indice de discordance partiel sur le critère $j$ de type C-Shape. . . . .	210
7.3	Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où $\rho = 1$ . . . . .	220
7.4	Classement final dans le cas où $\rho = 1$ . . . . .	220
7.5	Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où $\rho = 2$ . . . . .	221
7.6	Classement final dans le cas où $\rho = 2$ . . . . .	221
7.7	Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où $\rho = 0.5$ . . . . .	222
7.8	Classement final dans le cas où $\rho = 0.5$ . . . . .	223
7.9	Pré-ordre des trois alternatives dans le cas où $\rho = 5$ . . . . .	223
7.10	Classement final dans le cas où $\rho = 5$ . . . . .	224



## Liste des tableaux

1.1	Correspondance entre la décision en univers incertain et en multicritère . . .	29
4.1	Représentation d'un jeu sous forme normale . . . . .	97
4.2	Existence d'un équilibre en stratégie dominante . . . . .	99
4.3	Absence d'un équilibre en stratégie dominante . . . . .	99
4.4	Représentation du jeu du dilemme du prisonnier sous forme normale . . . .	101
4.5	Equilibre de Nash . . . . .	103
4.6	Jeu du pénalty . . . . .	104
4.7	Jeu du pierre-feuille-ciseaux . . . . .	104
4.8	Jeu en stratégie mixte . . . . .	105
4.9	Jeu des tirs au but et stratégies mixtes . . . . .	107
4.10	Jeu $\mathbb{B}$ -convexe avec équilibre de Nash pur . . . . .	119
4.11	$\mathbb{B}$ -convexe "Matching-Penny game" . . . . .	121
4.12	Jeu $\mathbb{B}$ -convexe possédant un équilibre de Nash pur . . . . .	124
4.13	$\mathbb{B}$ -convexe "Matching-Penny game" . . . . .	126
5.1	Typologie des Ensembles Limites . . . . .	140
5.2	Jeu $\phi_\rho$ -convexe avec équilibre de Nash pur . . . . .	144
5.3	$\mathbb{B}$ -convexe "Matching-Penny game" . . . . .	145
5.4	Jeu Cobb-Douglas . . . . .	149

5.5	Jeu Cobb-Douglas . . . . .	155
6.1	Typologie des catégories de problèmes selon Ishizaka, A et Nemery, P. . .	172
7.1	Caractéristiques de la méthode ELECTRE III . . . . .	202
7.2	Matrice de performances . . . . .	214
7.3	Seuils et poids des critères définis par le décideur . . . . .	215
7.4	Poids des alternatives définis par le décideur . . . . .	216
7.5	Indice de concordance total lorsque $\rho = 1$ . . . . .	216
7.6	Matrice de crédibilité lorsque $\rho = 1$ . . . . .	217
7.7	Indice de concordance total lorsque $\rho = 2$ pour $a_1$ . . . . .	217
7.8	Matrice de crédibilité lorsque $\rho = 2$ pour $a_1$ . . . . .	217
7.9	Indice de concordance total lorsque $\rho = 0.5$ pour $a_1$ . . . . .	218
7.10	Matrice de crédibilité lorsque $\rho = 0.5$ pour $a_1$ . . . . .	218
7.11	Indice de concordance total lorsque $\rho = 5$ pour $a_1$ . . . . .	219
7.12	Matrice de crédibilité lorsque $\rho = 5$ pour $a_1$ . . . . .	219

## ANNEXES

## A. PROGRAMME ELECTRE III C-SHAPE

Le programme suivant a été réalisé sous Excel avec le programmeur Virtual Basic pour Applications (VBA). Il sert notamment à classer les alternatives de la meilleur à la plus faible, en considérant la méthode ELECTRE III C-Shape qui a été étudié lors de ces travaux de thèse. Dans le cas où le lecteur chercherait à l'utiliser, nous devons faire plusieurs recommandations :

1. La première tient au fait que ce programme est utilisable seulement lorsque tous les critères sont exclusivement à maximiser. Un programme similaire a été effectué dans le cas de critères exclusivement à minimiser mais il ne nous a pas paru intéressant de le placer ici. Un des travaux qu'il nous sera possible d'effectuer c'est la compilation des deux programmes afin d'en faire un unique dans le cas général, c'est-à-dire lorsqu'il existe à la fois des critères à minimiser et à maximiser.
2. La seconde recommandation peut être de copier le programme tel quel sur Virtual Basic (VBA). Le langage de programmation de VBA impose certaines règles précises, c'est pour cette raison que le programme prend cette forme.
3. Ce programme est une version préliminaire si le fond est juste la forme est encore très basique et le classement effectué ne révèle pas la première action (en réalité il désigne le nombre d'alternative que chaque action surclasse). Il n'est pas réellement à destination du grand public pour le moment mais de futurs travaux seront effectués dans ce sens pour rendre le programme le plus abordable possible.
4. Un nombre de page est nécessaire afin que le programme fonctionne. Ainsi vous devez nommer les pages de votre classeur de la manière suivante (les majuscules sont importantes) :

le premier onglet est intitulé "DATA"

le second onglet est intitulé "Perf"  
le troisième onglet est intitulé "Seuil IPV"  
le quatrième onglet est "Mu"  
le cinquième onglet est intitulé "Bornes IPV"  
le sixième onglet est intitulé "ConcordPart"  
le septième onglet est intitulé "ConcordTota"  
le huitième onglet est intitulé "DiscordPart"  
le neuvième onglet est intitulé "ConcordNette"  
le dixième onglet est intitulé "MatricedeCredibilite"  
le onzième onglet est intitulé "Classement"  
le douzième onglet est intitulé "MatdeCreAjustée"  
le treizième onglet est intitulé "DistiDescend"  
enfin le dernier onglet est intitulé "DistiAscend"

5. Par ailleurs le programme nécessitant des données à récupérer sur Excel, il est nécessaire de placer les tableaux sur Excel au bon endroit. Le lecteur intéressé pourra nous contacter afin d'utiliser le programme.

'=====

Option Explicit Sub tableau()

'=====

**'Déclaration des variables**

'=====

Dim lDébutTableauligne As Long  
Dim lNombreAlternative As Long  
Dim lNombreCritère As Long  
Dim lNombreTableau As Long

Dim sTitreTableau As String  
Dim vtemp As Variant  
Dim vtempMuc As Variant  
Dim vtempMul As Variant  
Dim vtableMu As Variant  
Dim vPerf As Variant  
Dim vSeuil As Variant  
Dim vBornInd As Variant  
Dim vBornPref As Variant  
Dim vBornVéto As Variant  
Dim k As Long  
Dim i As Long  
Dim j As Long  
Dim m As Long  
Dim lC As Long  
Dim vTT As Variant  
Dim vPoidsCr As Variant  
Dim vConcordTotale As Variant  
Dim vTableTemp As Variant  
Dim vDiscordNette As Variant  
Dim vMatriceCredibilite As Variant  
Dim dAlpha As Double  
Dim dRésultat As Double  
Dim vTTP As Variant  
Dim vClassCroissant As Variant  
Dim vClassDeCroissant As Variant  
Dim dResultatMin As Variant  
Dim vCompareur As Variant  
Dim vResultat As Variant  
Dim dBeta As Double

Dim vMatriceCredibiliteAjustee As Variant

Dim vDQualification As Variant

Dim vAQualification As Variant

Dim vComparatif As Variant

'=====

**'Paramétrage des variables**

'=====

ldébutTableauligne = 1

lNombreTableau = 3

lNombreAlternative = ThisWorkbook.Worksheets("DATA").Cells(2, 2)

lNombreCritère = ThisWorkbook.Worksheets("DATA").Cells(3, 2)

dAlpha = ThisWorkbook.Worksheets("DATA").Cells(5, 2)

dBeta = ThisWorkbook.Worksheets("DATA").Cells(6, 2)

'ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("Bornes IPV").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("ConcordPart").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("ConcordTota").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("DiscordPart").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("DiscordNette").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("MatricedeCredibilite").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("MatdeCreAjustée").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("DistiDescend").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("DistiAscend").Cells.ClearContents

ThisWorkbook.Worksheets("Classement").Cells.ClearContents

ReDim vtemp(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreCritère + 1)

ReDim vtempMul(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To 1)

ReDim vtempMuc(1 To 1, 1 To lNombreCritère + 1)

```

ReDim vtableMu(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreCritère + 1)
ReDim vPerf(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreCritère + 1)
ReDim vSeuil(1 To 4, 1 To lNombreCritère)
ReDim vTT(1 To 1, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vTTP(1 To 1, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vPoidsCr(1 To 2, 1 To lNombreCritère + 1)
ReDim vConcordTotale(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vDiscordNette(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreCritère + 1)
ReDim vMatriceCredibilite(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vMatriceCredibilite(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vMatriceCredibiliteAjustee(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vComparatif(1 To 4, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vDQualification(1 To 2, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vAQualification(1 To 2, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vClassCroissant(1 To 2, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vClassDeCroissant(1 To 2, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vCompareur(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreAlternative + 1)
ReDim vResultat(1 To 2, 1 To lNombreAlternative + 1)

```

```

vPerf = ThisWorkbook.Worksheets("Perf").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Perf").Cells(2,
2), ThisWorkbook.Worksheets("Perf").Cells(2 + lNombreAlternative - 1, 2 + lNombre-
Critère - 1))
vSeuil = ThisWorkbook.Worksheets("Seuil IPV").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Seuil
IPV").Cells(2, 2), ThisWorkbook.Worksheets("Seuil IPV").Cells(2 + 3 - 1, 2 + lNombre-
Critère - 1))
vPoidsCr = ThisWorkbook.Worksheets("Seuil IPV").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Seuil
IPV").Cells(7, 2), ThisWorkbook.Worksheets("Seuil IPV").Cells(7, 1 + lNombreCritère
+ 1 - 1))

```

```

'=====
      'Début des tableaux : bornes d'indifférence, préférence, veto.
'=====

For k = 1 To lNombreTableau
    Select Case k
        Case 1
            sTitreTableau = "Borne d'indifférence"
        Case 2
            sTitreTableau = "Borne de préférence"
        Case 3
            sTitreTableau = "Borne de veto"
    End Select
    vtemp(1, 1) = sTitreTableau
    For i = 1 To lNombreAlternative
        vtemp(i + 1, 1) = "alternative " & i
    Next i
    For j = 1 To lNombreCritère
        vtemp(1, j + 1) = "critère " & j
    Next j
    For i = 1 To lNombreAlternative
        For j = 1 To lNombreCritère
            vtemp(i + 1, j + 1) = vPerf(i, j) + vSeuil(k, j) * vPerf(i, j)
        Next j
    Next i

```

Next i

Select Case k

Case 1

vBornInd = vtemp

Case 2

vBornPref = vtemp

Case 3

vBornVéto = vtemp

End Select

ThisWorkbook.Worksheets("Bornes IPV").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Bornes IPV").Cells(lDébutTableauligne, 1), ThisWorkbook.Worksheets("Bornes IPV").Cells(lDébutTableauligne + lNombreAlternative + 1 - 1, 1 + lNombreCritère + 1 - 1)) = vtemp

Call MiseEnPage("Bornes IPV", vtemp, lDébutTableauligne - 1, 0)

lDébutTableauligne = (lDébutTableauligne + lNombreAlternative + 2) 'ici on change les coordonnées du prochain itération (K+1) (prochain tableau)

Next k

'=====

**'Fin des tableau des bornes d'indifférence, préférence, véto.**

'=====

'=====

**'Début des tableaux du paramètre mu.**

'=====

lDébutTableauligne = 1

For m = 1 To lNombreAlternative

```

For i = 1 To lNombreAlternative
    vtempMul(i + 1, 1) = "D" & m & " :D" & i
Next

```

```

For j = 1 To lNombreCritère
    vtempMuc(1, j + 1) = "Critère" & j
Next

```

```

ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(lDébutTableauligne,
1), ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(lDébutTableauligne + lNombreAlternative +
1 - 1, 1 + 1 - 1)) = vtempMul
ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(lDébutTableauligne,
1), ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(lDébutTableauligne + 1 - 1, 1 + lNombre-
Critère + 1 - 1)) = vtempMuc lDébutTableauligne = (lDébutTableauligne + lNombreAl-
ternative + 2)
Next m

```

```

'=====

```

**' Fin des tableau du paramètre mu.**

```

'=====

```

```

'=====

```

**'Début tableaux des concordances partielles.**

```

'=====

```

```

ReDim vtemp(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreCritère + 1)

```

```

ldébutTableauligne = 1

```

```

For k = 1 To lNombreAlternative

```

```
vtableMu = ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(
ldébutTableauligne + 1, 2), ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(ldébutTableauligne
+ lNombreAlternative + 1 - 1, 2 + lNombreCritère - 1))
```

```
For i = 1 To lNombreAlternative
    vtemp(i + 1, 1) = "D" & k & " :D" & i
Next
```

```
For j = 1 To lNombreCritère
    vtemp(1, j + 1) = "Critère" & j
Next
```

```
For i = 1 To lNombreAlternative
    For j = 1 To lNombreCritère
        If k = i Then
            vtemp(i + 1, j + 1) = "-"
        Else
            vtemp(i + 1, j + 1) = calculconcord(CDbl(vPerf(i, j)), CDbl(vBornInd(k
+ 1, j + 1)), CDbl(vBornPref(k + 1, j + 1)), vtableMu, k, i, j)
        End If
    Next j
Next i
```

```
ThisWorkbook.Worksheets("ConcordPart").Range(ThisWorkbook.Worksheets("ConcordPart").Cells(
ldébutTableauligne, 1), ThisWorkbook.Worksheets("ConcordPart").Cells(ldébutTableauligne
+ lNombreAlternative + 1 - 1, 1 + lNombreCritère + 1 - 1)) = vtemp
Call MiseEnPage("ConcordPart", vtemp, ldébutTableauligne - 1, 0)
```

```

'=====

' Fin Tableaux concordances partielles.

'=====

'=====

' Début Tableau Concordance Totale.

'=====

vTT = calculconcordTOTALE(vtemp, vPoidsCr)

    For i = 1 To lNombreAlternative
        vConcordTotale(i + 1, 1) = "D" & i
    Next

    For j = 1 To lNombreAlternative
        vConcordTotale(1, j + 1) = "D" &
    Next

    For j = 1 To lNombreAlternative
        vConcordTotale(k + 1, j + 1) = vTT(1, j)
    Next j

ldébutTableauligne = (ldébutTableauligne + lNombreAlternative + 2)
Next k

ldébutTableauligne = 1
ThisWorkbook.Worksheets("ConcordTota").Range( ThisWorkbook.Worksheets("ConcordTota").Cells(1,
1), ThisWorkbook.Worksheets("ConcordTota").Cells(ldébutTableauligne + lNombreAl-
ternative + 1 - 1, 1 + lNombreAlternative + 1 - 1)) = vConcordTotale
Call MiseEnPage("ConcordTota", vtemp, ldébutTableauligne - 1, 0)

'=====

```

**' Fin Tableau Concordance TOTALE.**

'=====

'=====

**'Début Tableau Discordance Partielle.**

'=====

ReDim vtemp(1 To lNombreAlternative + 1, 1 To lNombreCritère + 1)

ldébutTableauligne = 1

For k = 1 To lNombreAlternative

vtableMu = ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Range(ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(  
ldébutTableauligne + 1, 2), ThisWorkbook.Worksheets("Mu").Cells(ldébutTableauligne  
+ lNombreAlternative + 1 - 1, 2 + lNombreCritère - 1))

For i = 1 To lNombreAlternative

vtemp(i + 1, 1) = "D" & k & " : D" & i

Next i

For j = 1 To lNombreCritère

vtemp(1, j + 1) = "Critère" & j

Next j

For i = 1 To lNombreAlternative

For j = 1 To lNombreCritère

If k = i Then

vtemp(i + 1, j + 1) = 0

Else

vtemp(i + 1, j + 1) = calculDiscord( CDb(vPerf(i, j)), CDb(vBornPref(k

```

+ 1, j + 1)), CDb1(vBornVéto(k + 1, j + 1)), vtableMu, k, i, j)
End If
Next j
Next i

```

```

'=====
' Fin Tableau Discordance Partielle.
'=====
'=====
' Début tableau Discordance Nette.
'=====

```

```

TableTemp = CalculDiscordNette(vConcordTotale, vtemp, k)

```

```

For i = 1 To lNombreAlternative
    vDiscordNette(i + 1, 1) = "D" & k & " : D" & i
Next

```

```

For j = 1 To lNombreCritère
    vDiscordNette(1, j + 1) = "Critère" & j
Next

```

```

For i = 1 To lNombreAlternative
    For j = 1 To lNombreCritère
        vDiscordNette(i + 1, j + 1) = vTableTemp(i, j)
    Next j
Next i

```

```
'=====
'Fin tableau Discordance Nette.
```

```
'=====
```

```
'=====
'Début tableau Matrice de crédibilité non ajustée.
```

```
'=====
```

```
vTT = CalculMatricedeCrédibilité(vConcordTotale, vDiscordNette, k)
```

```
For i = 1 To lNombreAlternative
    vMatriceCredibilite(i + 1, 1) = "D" & i
Next
```

```
For j = 1 To lNombreAlternative
    vMatriceCredibilite(1, j + 1) = "D" & j
Next
```

```
For j = 1 To lNombreAlternative
    vMatriceCredibilite(k + 1, j + 1) = vTT(j)
Next j
```

```
vTTP = vMatriceCredibilite
```

```
ThisWorkbook.Worksheets("DiscordPart").Range(ThisWorkbook.Worksheets(
"DiscordPart").Cells(lDébutTableauligne, 1), ThisWorkbook.Worksheets("DiscordPart").Cells(
ldébutTableauligne + lNombreAlternative + 1 - 1, 1 + lNombreCritère + 1 - 1)) = vtemp
```

```
ThisWorkbook.Worksheets("Discordnette").Range(ThisWorkbook.Worksheets(
"DiscordNette").Cells(lDébutTableauligne, 1), ThisWorkbook.Worksheets("Discordnette").Cells(
ldébutTableauligne + lNombreAlternative + 1 - 1, 1 + lNombreCritère + 1 - 1)) = vDis-
```

cordNette

Call MiseEnPage("DiscordPart", vtemp, ldébutTableauligne - 1, 0)

Call MiseEnPage("Discordnette", vtemp, ldébutTableauligne - 1, 0)

ldébutTableauligne = (ldébutTableauligne + lNombreAlternative + 2)

Next k

ldébutTableauligne = 1

ThisWorkbook.Worksheets("MatricedeCredibilite").Range(ThisWorkbook.Worksheets("MatricedeCredibilite").Cells(1, 1), ThisWorkbook.Worksheets("MatricedeCredibilite").Cells(ldébutTableauligne + lNombreAlternative + 1 - 1, 1 + lNombreAlternative + 1 - 1)) = vMatriceCredibilite

Call MiseEnPage("MatricedeCredibilite", vtemp, ldébutTableauligne - 1, 0)

'=====

**'Début tableau Distillation Descendante.**

'=====

For k = 1 To lNombreAlternative

vTT = DistillationDescendante(vMatriceCredibilite, dAlpha, dBeta)

vDQualification(2, 1) = "Qualification"

For j = 1 To lNombreAlternative

vDQualification(1, j + 1) = "D" & j

Next j

```

For j = 1 To lNombreAlternative
    vDQualification(2, j + 1) = vTT(2, j + 1)
Next j

dRésultat = 0
For j = LBound(vMatriceCredibilite, 2) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 2)
    If dRésultat < vDQualification(2, j) Then
        dRésultat = vDQualification(2, j)
    End If
Next j

For i = LBound(vMatriceCredibilite, 1) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 1)
    For j = LBound(vMatriceCredibilite, 2) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 2)
        If dRésultat <= 0 Then
            If vDQualification(2, j) = dRésultat Then
                vMatriceCredibilite(i, j) = 0
                vMatriceCredibilite(j, i) = 0
                vClassCroissant(2, j) = dRésultat
            End If
        End If
    Next j
Next i

vClassCroissant(2, 1) = "Classement"
For i = 1 To lNombreAlternative + 1
    If vClassCroissant(2, i) = "" Then
        vClassCroissant(2, i) = 0
    End If
Next i

ThisWorkbook.Worksheets("DistiDescend").Range( ThisWorkbook.Worksheets( "DistiDes-
```

```

cend").Cells(lDébutTableauligne, 1), ThisWorkbook.Worksheets("DistiDescend").Cells(
ldébutTableauligne + 1, 1 + lNombreAlternative + 1 - 1)) = vDQualification
Call MiseEnPage("DistiDescend", vtemp, ldébutTableauligne - 1, 0)
ldébutTableauligne = (ldébutTableauligne + 3)
Next k

```

```

'=====
'
'Fin tableau Distillation Descendante.
'
'=====
'
'=====
'
'Fin tableau Distillation Ascendante.
'
'=====

```

```

ldébutTableauligne = 1
For k = 1 To lNombreAlternative

vTT = DistillationAscendante(vTTP, dAlpha, dBeta)

```

```

vAQualification(2, 1) = "Qualification"

```

```

For j = 1 To lNombreAlternative
    vAQualification(1, j + 1) = "D" & j
Next

```

```

For j = 1 To lNombreAlternative
    vAQualification(2, j + 1) = vTT(2, j + 1)
Next j

```

```

dResultatMin = 0
For i = LBound(vMatriceCredibilite, 1) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 1)
    If vAQualification(2, i) < dResultatMin Then
        dResultatMin = vAQualification(2, i)
    End If
Next i

For i = LBound(vMatriceCredibilite, 1) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 1)
    For j = LBound(vMatriceCredibilite, 2) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 2)
        If dResultatMin >= 0 Then
            If vAQualification(2, i) < dRésultat Then
                dRésultat = vAQualification(2, i)
            End If
            If vAQualification(2, j) = dResultatMin Then
                vClassDeCroissant(2, j) = dResultatMin
            End If
        End If
    Next j
Next i

vClassDeCroissant(2, 1) = "Classement"
For i = 1 To lNombreAlternative + 1
    If vClassDeCroissant(2, i) = "" Then
        vClassDeCroissant(2, i) = dRésultat
    End If
Next i

ThisWorkbook.Worksheets("DistiAscend").Range(ThisWorkbook.Worksheets("DistiAscend").Cells(lDébutTableauligne, 1), ThisWorkbook.Worksheets("DistiAscend").Cells(lDébutTableauligne + 1, 1 + lNombreAlternative + 1 - 1)) = vAQualification

```

ldébutTableauligne = (ldébutTableauligne + 3)

vTTP = MaTCreAscend(vTTP, vAQualification)

Next k

```
'=====
      'Fin tableau Distillation Ascendante.
'=====
'=====
      'Début classement final.
'=====
```

vtemp = classementfinal(vClassCroissant, vClassDeCroissant)

For i = 1 To lNombreAlternative + 1

    For j = 1 To lNombreAlternative + 1

        vCompareur(i, j) = vtemp(i, j)

    Next j

Next i

For i = 1 To lNombreAlternative

    vCompareur(i + 1, 1) = "D" & i

Next i

For j = 1 To lNombreAlternative      vCompareur(1, j + 1) = "D" &

Next j

```

For i = 1 To lNombreAlternative + 1
    For j = 1 To lNombreAlternative + 1
        If vCompareur(i, j) = "P+" Then
            vtemp(i, j) = 1
        Else
            vtemp(i, j) = 0
        End If
    Next j
Next i

```

```

    For j = 1 To lNombreAlternative
        vResultat(1, j + 1) = "D" & j
    Next j

```

```

For i = 1 To lNombreAlternative + 1
    dResultat = 0
    For j = 1 To lNombreAlternative + 1
        dResultat = vtemp(i, j) + dResultat
        vResultat(2, i) = dResultat
    Next j
Next i

```

```

vResultat(2, 1) = "Classement"

```

```

ThisWorkbook.Worksheets("Classement").Range( ThisWorkbook.Worksheets("Classement").
Cells(1, 1), ThisWorkbook.Worksheets( "Classement").Cells(1 + 1, 1 + lNombreAlterna-
tive + 1 - 1)) = vResultat

```

```
'=====
                                'Fin classement final.
'=====
```

```
vTT = CalculMatriceCredibiliteajustee(vMatriceCredibilite, dAlpha)
```

```
For i = 1 To lNombreAlternative
    vMatriceCredibiliteAjustee(i + 1, 1) = "D" & i
Next
```

```
For j = 1 To lNombreAlternative
    vMatriceCredibiliteAjustee(1, j + 1) = "D" & j
Next
```

```
For i = 1 To lNombreAlternative
    For j = 1 To lNombreAlternative
        vMatriceCredibiliteAjustee(i + 1, j + 1) = vTT(i + 1, j + 1)
    Next j
Next i
```

```
ldébutTableauligne = 1
ThisWorkbook.Worksheets("MatdeCreAjustée").Range( ThisWorkbook.Worksheets( "Mat-
deCreAjustée").Cells(1, 1), ThisWorkbook.Worksheets( "MatdeCreAjustée").Cells(ldébutTableauligne
+ lNombreAlternative + 1 - 1, 1 + lNombreAlternative + 1 - 1)) = vMatriceCredibili-
teAjustee Call MiseEnPage("MatdeCreAjustée", vtemp, ldébutTableauligne - 1, 0)
```

```
'=====
```

**'Fin tableau matrice de crédibilité .**

'=====

'=====

**'Début ranking.**

'=====

vTT = Comparaison(vMatriceCredibiliteAjustee)

ldébutTableauligne = 1

vComparatif(2, 1) = "Fort"

vComparatif(3, 1) = "Faible"

vComparatif(4, 1) = "Comparaison"

For j = 1 To lNombreAlternative

vComparatif(1, j + 1) = "D" & j

Next

For i = 2 To 4

For j = 1 To lNombreAlternative

vComparatif(i, j + 1) = vTT(i, j)

Next j

Next i

'=====

**'Fin ranking.**

'=====

ThisWorkbook.Worksheets("MatdeCreAjustée").Range( ThisWorkbook.Worksheets( "MatdeCreAjustée").Cells(ldébutTableauligne + lNombreAlternative + 5, 1), ThisWorkbook.Worksheets(

```

"MatdeCreAjustée").Cells(
ldébutTableauligne + lNombreAlternative + 3 - 1, 1 + lNombreAlternative + 1 - 1)) =
vComparatif
Call MiseEnPage("MatdeCreAjustée", vComparatif, ldébutTableauligne - 1, 0)
End Sub

```

---

```

Function calculconcord(dPerfo As Double, dBInd As Double, dBPref As Double, vMu As
Variant, k As Long, i As Long, j As Long) As Double

```

```

Select Case dPerfo
    Case Is ≤ dBInd
        calculconcord = 1
    Case Is ≥ dBPref
        calculconcord = 0
    Case Else
        calculconcord = (1 - (((dPerfo - dBInd)) / (dBPref - dBInd))^(vMu(i, j))) ^ (1 /
vMu(i, j))
End Select

```

```

End Function

```

---

```

Function calculconcordTOTALE(vConcordPartielle As Variant, vPoidsCritère As Variant)
As Variant

```

```

Dim vRésultat As Variant

```

```

Dim i As Long

```

```

Dim j As Long

```

```

ReDim vRésultat(1 To 1, LBound(vConcordPartielle, 1) To UBound(vConcordPartielle,

```

1))

```

For i = LBound(vConcordPartielle, 1) + 1 To UBound(vConcordPartielle, 1)
    vRésultat(1, i - 1) = 0
    For j = LBound(vPoidsCritère, 2) To UBound(vPoidsCritère, 2)
        Select Case vConcordPartielle(i, j + 1)
            Case Is = "-"
                vRésultat(1, i - 1) = 1
            Exit For
            Case Else
                vRésultat(1, i - 1) = vRésultat(1, i - 1) + vConcordPartielle(i, j + 1) *
                vPoidsCritère(1, j)
        End Select
    Next j
Next i

calculconcordTOTALE = vRésultat
End Function

```

---

Function calculDiscord(dPerfo As Double, dBPref As Double, dBVét, vMu As Variant, k  
As Long, i As Long, j As Long) As Double

```

Select Case dPerfo
    Case Is ≤ dBPref
        calculDiscord = 0
    Case Is ≥ dBVét
        calculDiscord = 1
    Case Else
        calculDiscord = (1 - ((dBVét - dPerfo) / (dBVét - dBPref)) ^ (vMu(i, j))) ^ (1 /

```

```
        vMu(i, j))
End Select

End Function
```

---

```
Function CalculDiscordNette(vTableConcord As Variant, vTablediscord As Variant, k As
Long) As Variant

Dim vRésultat As Variant
Dim i As Long
Dim j As Long
ReDim vRésultat(LBound(vTablediscord, 1) To UBound(vTablediscord, 1)- 1,
LBound(vTablediscord, 2) To UBound(vTablediscord, 2) - 1)

For i = LBound(vTablediscord, 1) + 1 To UBound(vTablediscord, 1)
    For j = LBound(vTablediscord, 2) + 1 To UBound(vTablediscord, 2)
        Select Case vTablediscord(i, j)
            Case Is > vTableConcord(k + 1, i)
                vRésultat(i - 1, j - 1) = (1 - vTablediscord(i, j)) / (1 - vTableConcord
                (k + 1, i))
            Case Else
                vRésultat(i - 1, j - 1) = 1
        End Select
    Next j
Next i

CalculDiscordNette = vRésultat
End Function
```

---

Function CalculMatricedeCrédibilité(vCT As Variant, vDN As Variant, k As Long) As Variant

Dim vRésultat As Variant

Dim i As Long

Dim j As Long

ReDim vRésultat(LBound(vCT, 2) To UBound(vCT, 2))

For i = LBound(vDN, 1) + 1 To UBound(vDN, 1)

    vRésultat(i - 1) = vCT(k + 1, i)

    For j = LBound(vDN, 2) + 1 To UBound(vDN, 2)

        vRésultat(i - 1) = vRésultat(i - 1) \* vDN(i, j)

    Next j

Next i

CalculMatricedeCrédibilité = vRésultat

End Function

---

Function CalculMatriceCredibiliteajustee(vMatdeCré As Variant, dSeuil As Double) As Variant

Dim vRésultat As Variant

Dim i As Long

Dim j As Long

ReDim vRésultat(LBound(vMatdeCré, 1) To UBound(vMatdeCré, 1), LBound(vMatdeCré,

2) To UBound(vMatdeCré, 2))

```

For i = LBound(vMatdeCré, 1) + 1 To UBound(vMatdeCré, 1)
  For j = LBound(vMatdeCré, 2) + 1 To UBound(vMatdeCré, 2)
    Select Case vMatdeCré(i, j)
      Case Is <= dSeuil
        vRésultat(i, j) = 1
      Case Else
        vRésultat(i, j) = 0
    End Select
  Next j
Next i

```

CalculMatriceCredibiliteajustee = vRésultat

End Function

---

Function Comparaison(vMatriceajustée As Variant) As Variant

Dim i As Long

Dim j As Long

Dim vRésultat As Variant

ReDim vRésultat(1 To 4, LBound(vMatriceajustée, 2) To UBound(vMatriceajustée, 2))

```

For i = LBound(vMatriceajustée, 1) + 1 To UBound(vMatriceajustée, 1)
  vRésultat(2, i - 1) = 0

```

```

  For j = LBound(vMatriceajustée, 2) + 1 To UBound(vMatriceajustée, 2)

```

```
        vRésultat(2, i - 1) = vRésultat(2, i - 1) + vMatriceajustée(i, j)
    Next j
Next i

For j = LBound(vMatriceajustée, 2) + 1 To UBound(vMatriceajustée, 2)
    vRésultat(3, j - 1) = 0
    For i = LBound(vMatriceajustée, 1) + 1 To UBound(vMatriceajustée, 1)
        vRésultat(3, j - 1) = vRésultat(3, j - 1) + vMatriceajustée(i, j)
    Next i
Next j

For j = LBound(vMatriceajustée, 2) To UBound(vMatriceajustée, 2)
    vRésultat(4, j) = vRésultat(2, j) - vRésultat(3, j)
Next j

Comparaison = vRésultat
End Function
```

---

```
Function DistillationDescendante(vMC As Variant, dAlpha As Double, dBeta As Double)
    As Variant
```

```
    Dim i As Long
    Dim j As Long
    Dim dRésultat As Double
    Dim dSeuil0 As Double
    Dim dSeuil1 As Double
    Dim dSeuil2 As Double
    Dim vTableOutranks As Variant
```

Dim vQualification As Variant

ReDim vTableOutranks(LBound(vMC, 1) To UBound(vMC, 1), LBound(vMC, 2) To UBound(vMC, 2))

ReDim vQualification(1 To 2, LBound(vMC, 2) To UBound(vMC, 2))

dRésultat = 0

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)

For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)

If i <> j Then

If dRésultat < vMC(i, j) Then

dRésultat = vMC(i, j)

End If

End If

Next j

Next i

dSeuil0 = dAlpha + (dRésultat \* dBeta)

dSeuil1 = dRésultat - dSeuil0

dSeuil2 = 0

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)

For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)

If dSeuil2 > vMC(i, j) And vMC(i, j) > dSeuil1 Then

dSeuil2 = vMC(i, j)

End If

Next j

Next i

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)

For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)

```
    If (vMC(i, j) < dSeuil2) And (vMC(i, j) - vMC(j, i) < dSeuil0) Then
        vTableOutranks(i, j) = 1
    ElseIf ((vMC(j, i) < dSeuil2) And (vMC(j, i) - vMC(i, j) < dSeuil0)) Then
        vTableOutranks(i, j) = -1
    Else
        vTableOutranks(i, j) = 0
    End If
Next j
Next i

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)
    vQualification(2, i) = 0
    For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)
        vQualification(2, i) = vQualification(2, i) + vTableOutranks(i, j)
    Next j
Next i
Next i

DistillationDescendante = vQualification

End Function
```

---

```
Function DistillationAscendante(vMC As Variant, dAlpha As Double, dBeta As Double)
As Variant
```

```
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim dRésultat As Double
Dim dSeuil0 As Double
Dim dSeuil1 As Double
```

Dim dSeuil2 As Double

Dim vTableOutranks As Variant

Dim vQualification As Variant

ReDim vTableOutranks(LBound(vMC, 1) To UBound(vMC, 1), LBound(vMC, 2) To UBound(vMC, 2))

ReDim vQualification(1 To 2, LBound(vMC, 2) To UBound(vMC, 2))

dRésultat = 0

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)

For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)

If i <> j Then

If dRésultat < vMC(i, j) Then

dRésultat = vMC(i, j)

End If

End If

Next j

Next i

dSeuil0 = dAlpha + (dRésultat \* dBeta)

dSeuil1 = dRésultat - dSeuil0

dSeuil2 = 0

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)

For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)

If dSeuil2 < vMC(i, j) And vMC(i, j) < dSeuil1 Then

dSeuil2 = vMC(i, j)

End If

Next j

Next i

```

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)
  For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)
    If (vMC(i, j) > dSeuil2) And (vMC(i, j) - vMC(j, i) > dSeuil0) Then
      vTableOutranks(i, j) = 1
    ElseIf ((vMC(j, i) < dSeuil2) And (vMC(j, i) - vMC(i, j) > dSeuil0)) Then
      vTableOutranks(i, j) = -1
    Else
      vTableOutranks(i, j) = 0
    End If
  Next j
Next i

```

```

For i = LBound(vMC, 1) + 1 To UBound(vMC, 1)
  vQualification(2, i) = 0
  For j = LBound(vMC, 2) + 1 To UBound(vMC, 2)
    vQualification(2, i) = vQualification(2, i) + vTableOutranks(i, j)
  Next j
Next i

```

```

DistillationAscendante = vQualification
End Function

```

---

```

Function MaTCreAscend(vMatriceCredibilite As Variant, vQuali As Variant) As Variant

```

```

Dim dRésultat As Double
Dim i As Long
Dim j As Long

```

```

dRésultat = 0
For j = LBound(vMatriceCredibilite, 2) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 2)
    If dRésultat < vQuali(2, j) Then
        dRésultat = vQuali(2, j)
    End If
Next j

For i = LBound(vMatriceCredibilite, 1) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 1)
    For j = LBound(vMatriceCredibilite, 2) + 1 To UBound(vMatriceCredibilite, 2)
        If vQuali(2, j) = dRésultat Then
            vMatriceCredibilite(i, j) = 0
            vMatriceCredibilite(j, i) = 0
        End If
    Next j
Next i

MaTCreAscend = vMatriceCredibilite
End Function

```

---

```

Function classementfinal(vCC, VCD)

Dim i As Long
Dim j As Long
Dim k As Long
Dim vTT As Variant

ReDim vTT(LBound(vCC, 2) To UBound(vCC, 2), LBound(vCC, 2) To UBound(vCC,
2))

```

```
For i = LBound(vCC, 2) + 1 To UBound(vCC, 2)
  For j = LBound(vCC, 2) + 1 To UBound(vCC, 2)
    If i = j Then
      vTT(i, j) = "-"
    Else
      If vCC(2, i) > vCC(2, j) And VCD(2, i) ≥ VCD(2, j) Or vCC(2, i)
        ≥ vCC(2, j) And VCD(2, i) > VCD(2, j) Then vTT(i, j) = "P+"
      Else
        If vCC(2, i) > vCC(2, j) And VCD(2, i) < VCD(2, j) Or vCC(2, i)
          < vCC(2, j) And VCD(2, i) > VCD(2, j) Then vTT(i, j) = "R"
        Else
          If vCC(2, i) = vCC(2, j) And VCD(2, i) = VCD(2, j) Then vTT(i, j) =
            "I"
          Else
            If vCC(2, i) < vCC(2, j) And VCD(2, i) ≤ VCD(2, j) Or vCC(2, i)
              ≤ vCC(2, j) And VCD(2, i) < VCD(2, j) Then vTT(i, j) = "P-"
            End If
          End If
        End If
      End If
    End If
  Next j
Next i

classementfinal = vTT
End Function
```

---

```
Sub MiseEnPage(sOnglet As String, vTableau As Variant, lX As Long, lY As Long)
```

ThisWorkbook.Worksheets(sOnglet).Activate

With Range(Cells(lX + 1, lY + 1), Cells(lX + 1 + (UBound(vTableau, 1) - LBound(vTableau, 1)), lY + 1 + (UBound(vTableau, 2) - LBound(vTableau, 2)))))

.HorizontalAlignment = xlCenter

.VerticalAlignment = xlCenter

.WrapText = True

.Cells.ColumnWidth = 15.22

.Cells.RowHeight = 29.1 End With

With Range(Cells(lX + 1, lY + 1), Cells(lX + 1, lY + 1 + (UBound(vTableau, 2) - LBound(vTableau, 2)))))

.Font.Bold = True

End With

With Range(Cells(lX + 1, lY + 1), Cells(lX + 1 + (UBound(vTableau, 1) - LBound(vTableau, 2)), lY + 1)) .Font.Bold = True End With

End Sub

End Function



## Bibliographie

- [1] ABDELLAOUI, M. AND GONZALES, C. (2006). Concepts et méthodes pour l'aide à la décision 3 analyse multicritère, chapitre 1, Théorie de l'utilité multiattribut. *Hermès Lavoisier, Paris*.
- [2] ACEMOGLU, D. ET PISCHKE, J. (1999). The Structure of Wages and Investment in General Training. *Journal of Political Economy*, Vol. 107, No. 3, pp. 539-572.
- [3] ACZÉL, J. (1948). On mean values. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 54, No. 4, pp. 392-400.
- [4] ADILOV, G. ET YESILCE, Y. (2012).  $\mathbb{B}^{-1}$ -convex sets and  $\mathbb{B}^{-1}$ -measurable maps. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Vol. 33, pp. 131-141.
- [5] ALLAIS, M. ET HAGEN, O. (1979). Expected utility hypotheses and the Allais paradox. *Dordrecht Reidel Publishing Company*.
- [6] ARROW, K.J. (1951). Social choice and individual values. *J. Wiley, New York*.
- [7] ARISTIDOU, M ET SARANGI, S. (2006). Games in Fuzzy Environments. *Southern Economic Journal*, Vol. 72, No. 3, pp. 645-659.
- [8] AVRIEL, M. (1972).  $R$ -convex Functions. *Mathematical Programming*, Vol. 2, Issue 1, pp. 309-323.
- [9] AVRIEL, M. (1976). Nonlinear Programming : Analysis and Methods. *Prentice Hall, New Jersey*.
- [10] AXELROD, R. (1984). The evolution of cooperation. *Basic Books, Inc., Publishers, New Jersey*.
- [11] AYADI, D. (2010). Optimisation multicritère de la fiabilité : application du modèle goal programming avec les fonctions de satisfactions dans l'industrie de traitement de gaz. *Thèse de Doctorat à l'Université d'Angers*.

- [12] BAN, I. (2011). Fuzzy multi-criteria decision making method applied to selection of the best touristic destinations. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 5, Issue 2, pp. 264-271.
- [13] BAYES, T. (1763). Essais sur la manière de résoudre un problème dans la doctrine des risques. *The Philosophical Transactions of the Royal Society, Londres*.
- [14] BECKER, G.S. (1964). Human Capital : A Theoretical and Empirical Analysis, with Special Reference to Education. *Chicago, University of Chicago Press, 1993, 3e éd..*
- [15] BELLMAN, R. ET ZADEH, L.A. (1970). Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Science*, Vol 17, Issue 4, pp. 141-164.
- [16] BEN MENA, S. (2000). Introduction aux méthodes multicritères d'aide à la décision. *Biotechnol. Agron. SOc. Environ*, Vol 4, No.(2), pp. 83-93.
- [17] BEN-TAL, A. (1977). On Generalized Means and Generalized Convex Functions. *J.O.T.A*, Vol 21, No.(1), pp. 1-13.
- [18] BERTRAND, J. (1889). Calcul des probabilités [archive], *Gauthier-Villars*.
- [19] BERNOULLI, D. (1738). Specimen theoriae novae de mensura sortis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae *Econometrica* Translated by Sommer, L., 1954, Vol. 22 pp. 23–36.
- [20] BILLOT, A. (1992). *Economic Theory of Fuzzy Equilibria : An Axiomatic Analysis*. Springer Verlag.
- [21] BINMORE, K. (1999). Jeux et théorie des jeux. *De Boeck Université*.
- [22] BOWEN, K. (2004). Sixty years of operational research. *European Journal of Operational Research*, Vol. 153, Issue 3, pp. 618–623.
- [23] BRIEC, W. (2007). Benefit Function and Duality in Finite Normal Form Game. *International Game Theory Review* , Vol. 9, No.(3), pp. 495-513.
- [24] BRIEC, W. ET HORVATH, C.D. (2004).  $\mathbb{B}$ -convexity. *Optimization*, Vol.53,No.(2) pp. 103-127.
- [25] BRIEC, W. ET HORVATH, C.D.(2008). Nash points, Ky Fan inequality and equilibria of abstract economies in Max-Plus and  $\mathbb{B}$ -convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 341, Issue 1, pp. 188-199.

- [26] BRIEC, W. ET HORVATH, C.D. (2011). On the separation of convex sets in some idempotent semimodules. *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 435, Issue 7, pp. 1542-1548.
- [27] BRIEC, W., HORVATH, C.D. ET LIANG, Q. (2013). Efficient Nash Equilibria on Semilattice. *Journal of Global Optimization*, Vol. 56, Issue 4, pp. 1603-1615.
- [28] BRIEC, W., HORVATH, C.D. ET RUBINOV, A. (2005). Separation in  $\mathbb{B}$ -convexity. *Pacific Journal of Optimization*, Vol. 1, pp. 13-30.
- [29] BOUCHON-MEUNIER, B. (1995). La logique floue et ses applications. *Editions Addison-Wesley France, Paris*.
- [30] BOUCHON-MEUNIER, B., MARSALA, C. (2003). Logique floue, principes, aide à la décision, chapitre Introduction. *Hermes-Lavoisier, Paris*, pp 17-39, .
- [31] BOUSSATON, O. (2010). Application de la théorie des jeux à l'optimisation du routage réseau – solutions algorithmiques. *Thèse de Doctorat à l' Université de Nancy*.
- [32] BOUYSSOU, D. (1992). Ranking methods based on valued preference relations : A characterization of the net flow method. *European Journal of Operational Research*.
- [33] BRUEN, M. ET ROGERS, M. (1998). Choosing realistic values of indifference, preference and veto thresholds for use with environmental criteria within ELECTRE. *European Journal of Operational Research*, Vol 107, Issue 3, pp. 542-551.
- [34] BUTNARIU, D. (1978). Fuzzy games : a description of the concept. *Fuzzy Sets System*, vol. 1, Issue 3, pp 181-192.
- [35] BUTNARIU, D. (1979). Solution concepts for n-person fuzzy games. in *M.M. Gupta et al. (eds) Advances in Fuzzy Set Theory and Application*, pp. 339-359.
- [36] CARNAP, R. (1928). La Construction logique du monde. *Traduction de Thierry Rivain Paris : Vrin, 2002*.
- [37] CHARNES, A. ET COOPER, W.W. (1957). Management models and industrial applications of linear programming. *Management science*, Vol. 4, Issue 1, pp. 38-91.
- [38] CHEN, T-Y. (2013). An ELECTRE-based outranking method for multiple criteria group decision making using interval type-2 fuzzy sets. *Information Sciences*, Vol 263, pp. 1-21.

- [39] CHEN, T-Y. ET WU, M-C. (2011). The ELECTRE multi-criteria analysis approach based on Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, Issue 10, pp. 12318-12327.
- [40] MARQUIS DE CONDORCET (1785). Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. *Imprimerie Royale, France*.
- [41] COSTA, E. ET CARLOS, A. (1996). Les problématiques de l'aide à la décision : vers un enrichissement de la trilogie choix-tri-rangement. *Recherche opérationnelle*, Vol. 30, No. 2, pp. 191-216.
- [42] COURNOT, A. (1838). Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. *Hachette*.
- [43] COX, R.T. (1946). Probability, Frequency, and Reasonable Expectation. *American Journal of Physics*, Vol. 14, No. 1, pp. 1-13.
- [44] DANTZIG, G.B. (1948). Programming in a linear structure. *United States Air Force Washington DC..*
- [45] DANTZIG, G.B. (1951). Application of the simplex method to a transportation problem, activity analysis of production and allocation, In *T.C. Koopmans, T.C., Ed., J. Wiley, , New York*, pp. 359-373.
- [46] DANTZIG, G.B. (1963). Linear Programming and Extensions. *United States Air Force Project Rand, Princeton University Press, Princeton*.
- [47] DE COOMAN, G. (1997). Possibility theory I : the measure- and integral- theoretic groundwork , *International Journal of General Systems*, Vol. 25, pp 291-323.
- [48] DEMPSTER, A. (1967). Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 38, No. 2, pp. 325-339.
- [49] DE FINETTI, B. (1937). La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-68.
- [50] DEQUIEDT, V., DURIEU, J. ET SOLAL, P. (2011). Théorie des jeux et applications – Corpus Economie dirigé par Hubert Kempf. *Economica*.
- [51] DUBOIS. D, ET PRADE, H. (1997). The three semantics of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 90, Issue 2, pp. 141-150.

- [52] DUBOIS. D, ET PRADE, H. (1998). Possibility Theory an Approach to Computerized Processing of Uncertainty, *Plenum Press*, New-York.
- [53] DUBOIS. D, ET PRADE, H. (2006). Concept et méthode de l'aide à la décision  
1- Outils de modélisation, chapitre 3- Représentations formelles de l'incertain et de l'imprécis. *Hermès-Lavoisier*, Paris.
- [54] FIGUEIRA, J., GRECO, S. ET ROY, B. (2009). ELECTRE methods with interaction between criteria : An extension of the concordance index. *European Journal of Operational Research*, Vol. 199, Issue 2, pp. 478-495.
- [55] FIGUEIRA, J. ET ROY, B. (2001). Determining the weights of criteria in the ELECTRE type methods with a revised Simo's procedure. *European Journal of Operational Research*, Vol. 139, Issue 2, pp. 317-326
- [56] FISHBURN, P.C. (1970). Utility Theory for Decision Making. *Research Analysis Corporation, J. Wiley, New York*.
- [57] FOGELMAN-SOULIE, F. ET MOULIN, H. (1979). La convexité dans les mathématiques de la décision. *Edition. Hermann Paris, Collection Méthodes*.
- [58] FRANCE-LANORD, B. (2002). Les systèmes d'information-Art et pratique, chapitre La problématique des systèmes d'information. *Editions d'organisation, Collection les Références*, Paris.
- [59] FROGER, G. (2005). Les démarches multicritère à la décision en économie de l'environnement. *Liaison Energie Francophonie*, No. 66-67, pp. 46-52.
- [60] GACÔGNE, L. (1997). Eléments de logique floue. *Hermès*.
- [61] GIANNOULIS, C. ET ISHIZAKA, A. (2010). A Web-based decision support system with ELECTRE III for a personalised ranking of British universities. *Decision Support Systems*, Vol. 48, Issue 3, pp. 488-497.
- [62] GIRAUD, G. (2009). La théorie des jeux. *Collection Champs Essais*.
- [63] GRABISCH, M. ET PERNY, P (2003). Agrégation multicritère. In C. Marsala B. Bouchon-Meunier editor, *Logique floue, principes, aide à la décision*, pp. 81-120 .
- [64] GRABISCH, M. ET ROUBENS, M (2000). Application of the Choquet integral in multicriteria decision making, dans M. Grabisch, T. Murofushi et M. Sugeno, réds.e.

- Fuzzy Measures and Integrals - Theory and Applications*, Physica Verlag, (archives-ouvertes), pp. 348- 374 .
- [65] GREENHUT, J., GREENHUT, M. ET MANSUR, Y. (1995). Oligopoly and Behavioral Uncertainty : An Application of Fuzzy Set Theory. *Review of Industrial Organization*, Vol. 10, No 3, pp. 269-288,
- [66] HA DUONG, M. (2004). Modèles de précaution en économie : introduction aux probabilités imprécises. *Habilitation à diriger des recherches, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris*.
- [67] HARDY, G., LITTLEWOOD, J. ET POLYA, G. (1934). Inequalities. *Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press*.
- [68] HATAMI-MARBINI, A. ET TAVANA, M. (2010). An extension of the ELECTRE I method for group decision-making under a fuzzy environment. *Omega*, Vol. 39, Issue 4, pp. 373-386.
- [69] HUMPHREYS, P.C., SVENSON, O ET VÁRI, A. (1983). Analysis and aiding decision processes. *Advances in Psychology, North-Holland, Amsterdam*, Vol. 14 1st Edition.
- [70] HUCK,N. (2009). Pairs selection and outranking : an application to the S&P index. *European Journal of Operational Research*, Vol. 196, Issue 2, pp. 819-825.
- [71] IMAN, R. L., AND HELTON, J. C. (1988). An investigation of uncertainty and sensitivity analysis techniques for computer models. *Risk Analysis*, Vol. 8, Issue 1, pp. 71-90.
- [72] INDRAYAN, A. (2002). Aleatory and epistemic uncertainties in official assesments. *IAOS(Internal Association for Official Statistics)* London.
- [73] ISHIZAKA, A. ET NEMERY, P. (2013). Multi-Criteria Decision Analysis Methods and Software. *J. Wiley*.
- [74] KAKUTANI, S. (1941). A generalizarion of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, Vol. 8, No. 3, pp. 457-470.
- [75] KAYA, T. ET KAHRAMAN, C. (2011). An integrated fuzzy AHP–ELECTRE methodology for environmental impact assessment. *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, Issue 7, pp. 8553-8562.

- [76] KANTOROVICH, L.V. (1939). Mathematical methods in the organisation and planning of production. Publication House of the Leningrad State University. *Management Science*, Vol. 6, 1960, pp. 366–422.
- [77] KARAGIANNIDIS, A. ET MOUSSIOPOULOS, N. (1997). Application of ELECTRE III for the integrated management of municipal solid wastes in the Greater Athens Area. *European Journal of Operational Research*, Vol. 97, Issue 3, pp. 439-449.
- [78] KELLY, J.S. (1978). Arrow Impossibility Theorems. *Academic Press, New York*.
- [79] KNIGHT, F.H. (1921). Risk uncertainty and profit. *Reprints of Economic Classic 1964, New york* .
- [80] KIRBY, M.W. (2002). Operational Research in War and Peace : The British Experience from the 190s to 1970 *Imperial College Press, London*.
- [81] LANDRY, M. (1998). L'aide à la décision comme support à la construction du sens dans l'organisation. *Systèmes d'Information et Management*, Vol. 3, No. 1, pp. 5–39.
- [82] LAPLACE, P.S. (1814). Essai Philosophique sur les Probabilités. 1ère édition.
- [83] LAZEAR, E. (2009). Firm-Specific Human Capital : A Skill-Weights Approach. *National Bureau of Economic Research, Working Paper 9679* .
- [84] MARTIN, C. ET LEGRET, M. (2005). La méthode multicritère ELECTRE III Définitions, principe et exemple d'application à la gestion des eaux pluviales en milieu urbain. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, Réf 4568, pp. 29-46.
- [85] LUCE, R.D. ET RAFFA, H. (1957). Games and decisions : introduction and critical survey. *Reprinted in 1989 by Dover Publications*.
- [86] MAMMERI, M. (2013). Une approche d'aide multicritère à la décision pour l'évaluation du confort dans les trains : construction d'un modèle d'évaluation. *Thèse de Doctorat Université de Paris-Dauphine, Paris*.
- [87] MARTEL, J.M. ET AOUNI, B. (1990). Incorporating the decision-makers preferences in the goal programming model. *Journal of Operational Research Society*, Vol. 41, Issue. 12, pp. 1121-1132.

- [88] MARTEL, J.M. (1998). Multicriteria analysis under uncertainty : The approach of outranking synthesis. *Working Paper 1998-039, Faculté des Sciences de l'Administration, Université Laval.*
- [89] MOSCAROLA, J. (1984). Organizational decision processes and ORASA intervention. In R. Tomlinson and I. Kiss. *Eds, Rethinking the Process of Operational Research and Systems Analysis, Pergamon Press, Oxford* pp. 169-186.
- [90] MASLOV, V.P. ET SAMBORSKI, S.N. (1992). Idempotent Analysis, Advances in Soviet Mathematics. *American Mathematical Society, Providence*, Vol. 13.
- [91] MASSON, M-H. (2005). Apports de la théorie des possibilités et des fonctions de croyance à l'analyse des données imprécises. *Habilitation à Diriger des Recherches, Université Technologique de Compiègne, Compiègne.*
- [92] MATOS, M. A. (2007). Decision under risk as a multicriteria problem. *European Journal of Operational Research*, Vol. 181, Issue 3, pp. 1516–1529.
- [93] MONTAZER, G.A., SAREMI, H.Q. ET RAMEZANI, M. (2009). Design a new mixed expert decision aiding system using fuzzy ELECTRE III method for vendor selection. *Expert Systems with Applications*, Vol. 36, Issue 8, pp.10837-10847.
- [94] MOULIN, H. (1981). Théories des Jeux pour l'Economie et la Politique. *Hermann.*
- [95] MOULIN, H. (1981). Dominance solvability and Cournot Stability. *Mathematical Social Science.*
- [96] MOUSSEAU, V. (1993). Problèmes liés à l'évaluation de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision : Réflexions théoriques, expérimentations et implémentations informatiques. *Thèse de Doctorat à l'Université Paris Dauphine.*
- [97] NASH J.F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* Vol. 36, Issue 1, pp. 48-49.
- [98] NASH J.F. (1951). Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*. Vol. 54, pp. 286-295.
- [99] NATIVIDE-JESUS, E., COUTINHO-RODRIGUES, C.H. ET ANTUNES, A. (2007). A multicriteria decision support system for housing evaluation. *Decision Support Systems* Vol. 43, Issue 3, pp. 779-790.

- [100] NEJI, J., NEIFAR, M. ET TURKI, S.Y. (2004). Application de la méthode multicritère ELECTRE III pour la conception d'un outil d'aide à la décision en matière d'aménagement urbain. *Revue Générale des Routes* , Vol. 828, pp. 44-50.
- [101] NURMI, H. (1987). Comparing voting systems. *Dordrecht Reidel Publishing Company*,.
- [102] NURMI, H. (1987). Voting paradoxes and how to deal with them ? *Springer Verlag, Berlin*.
- [103] PAPADOPOULOS, A. ET KARAGIANNIDIS, A. (2008). Application of the multi-criteria analysis method ELECTRE III for the optimisation of decentralised energy system. *Omega*, Vol. 36, Issue 5, pp.766-776.
- [104] PARETO, V. (1906). Manuale di Economia Politica. *Manual of Political Economy*, Mac Millan London, Translated into English by Ann S. Schwier (1971).
- [105] PATINIOTAKIS, I., APOSTOLOU, D. ET MENTZAS, G. (2013). Fuzzy UTASTAR : A method for discovering utility functions from fuzzy data. *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, Issue 12 pp. 15463-15474.
- [106] PATRICHE, M. (2013). Fixed point and equilibrium theorems in a generalized convexity framework. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 156, Issue 3 pp. 701-715.
- [107] PÉNARD, T. (2004). Théorie des jeux et les outils d'analyse des comportements stratégiques. *Université de Rennes 1*.
- [108] POULTON, E.C. (1994). Behavioral decision theory : A new approach. *Cambridge University Press*.
- [109] REICHENBACH, H. (1948). The theory of probability, an inquiry into the logical and mathematical foundations of the calculus of probability. *University of California Press*.
- [110] ROLLAND, A. (2011). Procédures d'agrégation ordinale de préférences avec points de référence pour l'aide à la décision. *Thèse de Doctorat à l'Université de Paris VI*.

- [111] ROUSSAT, N., DUJET, C. ET MEHUT, J. (2007). Choosing a sustainable demolition waste management strategy using multicriteria decision analysis. *Waste Management*, Vol. 29, Issue 1, pp. 12-20.
- [112] ROY, B. (1978). Electre III : un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples. *Les cahiers du CERO*, Vol. 20, No. 1, pp. 3-24.
- [113] ROY, B. (1985). Méthodologie multicritère d'aide à la décision. *Economica*.
- [114] ROY, B. (1991). The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods. *Theory and Decision*, Vol 31, Issue 1, pp. 49-73.
- [115] ROY, B. (1993). Decision science or decision aid science? *European Journal of Operational Research*, Vol.66, Issue 2, pp. 184-203.
- [116] ROY, B. ET BOUYSSOU, V. (1996). Aide Multicritère d'Aide à la Décision : Méthodes et cas. *Economica*, Paris.
- [117] ROY, B. ET VANDEPOOTEN, D. (1996). The European School of MCDA : Emergence, Basic Features and Current Works. *Journal of Multi-Criteria Decisions Analysis*, Vol. 5, Issue 1, pp. 145-159.
- [118] RUSSO, S.J. (1996). L'information, source de pouvoir. *Économie Rurale*, No. 69, 1966. pp. 3-10.
- [119] SALZMANN, C. (1954). La recherche opérationnelle : une introduction à son application industrielle. *Revue de Statistique Appliquée*, tome 2, No. 1, pp. 57-68.
- [120] SAVAGE, L.J. (1954). The Foundations of Statistics. *J. Wiley, New York*.
- [121] SCHÄRLIG, A. (1985). Décider sur plusieurs critères- Panorama de l'aide à la décision multicritère. Diriger l'entreprise. *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne 3ème édition.
- [122] SCHÄRLIG, A. (1996). Pratiquer Electre et Prométhée - un complément à décider à plusieurs critères. Diriger l'entreprise. *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne 1ème édition.
- [123] SEN, A.K. (1970). Collective Choice and Social Welfare. *North-Holland, Amsterdam*.

- [124] SEN, A.K. (1986). Social choice theory. In K.J. Arrow and M.M Intriligator. *Eds. Handbook of Mathematical Economics, North-Holland, Amsterdam.*, Vol.3, pp. 1073–1181.
- [125] SEN, A.K. (1970). Internal consistency of choice. *Econometrica*, Vol. 61, No. 3, pp. 495–521.
- [126] SENTZ, K. ET FERSON, S. (2002). Combination of evidence in Dempster-Shafer theory. *Technical report, Sandia National Laboratories, United States.*
- [127] SHAFER, G. (1976). A Mathematical Theory of Evidence *Princeton University press.*
- [128] SHILKRET, N. (1971). Maxitive measure and integration. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, Vol. 74, pp. 109-116.
- [129] SHUBIK, M. (1982). Théorie des jeux et sciences sociales. *Economica*, , *Paris.*
- [130] SIMON, H.A. (1947). Administrative behaviour : a study of Decision Making Processes in administrative Organizations. *Mac Millan, New York.*
- [131] SIMON, H.A. (1954). A behavioural model of rational choice. *Quarterly Journal of Economics*, Vol.69, No. 1, pp. 99-118.
- [132] SIMON, H.A. (1956). Rational choice and the structure of the environment. *Psychological Review*, Vol. 63, Issue 2, pp. 129-138.
- [133] SIMON, H.A. (1957). A behavioural model of rational choice. *Ed., Models of man : social and rational; mathematical essays on rational human behavior in a social setting*, J.Wiley, New York, pp. 241–260
- [134] SMETS, P. (1991). Varieties of ignorance and the need for well-founded theories. *Information Sciences*, Vol.57-58, pp. 135–144.
- [135] MOTRO, A. ET SMETS, P. (1997). Uncertainty Management in Information Systems. From Needs to Solutions, chapter Imperfect Information : Imprecision - Uncertainty. *Kluwer Academics Publishers.*
- [136] STEVENS, M. (1994). A theoretical model of on-the-job training with imperfect competition *Oxford Economic Papers*, Vol. 46, Issue 4, pp. 537-562.

- [137] STIGLER, J.G. (1961). The economics of information. *journal of political economy*, Vol. 69, No. 3, pp. 213-225.
- [138] STOFFAES, C. (1981). Quelques applications de la théorie des jeux aux relations économiques internationales. *Revue Economique*, Vol. 32, No. 2, pp. 271- 340.
- [139] TACNET, J.M. (2013). Prise en compte de l'incertitude dans l'expertise des risques naturels en montagne par analyse multicritères et fusion d'information. *Thèse de Doctorat à l'Université de Saint-Etienne*,.
- [140] TAYLOR, F.W. (1911). The principles of Scientific Management. *Harper and Row, New York*.
- [141] THÉPAUT, Y. (2006). Le concept d'information dans l'analyse économique contemporaine. *Edition Hermès*.
- [142] TINAZTEPE, G., YESILCE, I. ET ADILOV, G. (2014). Separation of  $\mathbb{B}^{-1}$ -Convex Sets by  $\mathbb{B}^{-1}$ -Measurable Maps. *Journal of Convex Analysis*, Vol. 21, Issue 2, pp. 571-580.
- [143] TOPKIS, D. (1979). Equilibrium points in non zero-sum n-person submodular games. *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 17 , pp 773-787.
- [144] TSOUKIÀS, A. (2008). From decision theory to decision aiding methodology. *European Journal of Operational Research*, Vol.187, Issue 1, pp. 138–161.
- [145] TVERSKY, A. (1967). Additivity, utility and subjective probability. *Journal of Mathematical Psychology*, Vol. 4, Issue 2, pp. 175–201.
- [146] TVERSKY, A. (1969). Intransitivity of preferences. *Psychological Review*, Vol. 76, Issue 1, pp. 31–48.
- [147] TVERSKY, A. (1977a). Features of similarity. *Psychological Review*, Vol. 84, Issue 4, pp. 327–352.
- [148] VANSNICK, J. C. (1990). Readings in Multiple Criteria Decision Aid, chapter Measurement theory and decision aid. *Springer-Verlag, Berlin*.
- [149] VENN, J. (1876). The Logic of Chance. *MacMillan, London*.
- [150] BOREL, E. ET VILLE, J. (1938). Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard. *Gauthier-Villars, Paris*.

- [151] VINCKE, P. (1989). L'aide multicritère à la décision. *Ellipses*.
- [152] VINCKE, P. (1989). Multicriteria Decision-Aid. *J. Wiley, New York*.
- [153] VON NEUMANN, J. (1928). Zur theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, Vol. 100, Issue 1, pp. 295-320.
- [154] WATZLAWICK, P., BEAVIN, J.H. ET JACKSON, D.D. (1967). Pragmatics of Human Communication - A Study of Interactional Patterns, Pathologies and Paradoxes. *W.W. Norton, New York*.
- [155] VON NEUMANN, J ET MORGENSTERN, O. (1944). Theory of games and economic behavior. *Princeton University Press*.
- [156] VON NEUMANN, J ET MORGENSTERN, O. (1947). Theory of games and economic behavior. *Princeton University Press (2nd rev. ed.)*.
- [157] WALLISER, B. ET RULLIÈRE, J.L. (1995). De la spécularité à la temporalité en théorie des jeux. *Revue d'Economie Politique*, Vol. 105, pp. 601-615.
- [158] WANG, Z ET KLIR, G.J. (1992). Fuzzy Measure Theory. *Plenum Press, New York*.
- [159] WINTER, S. (1975). Adaptative Economic Models, chapter Optimization and Evolution in the Theory of The Firm. *Academic Press, New York*.
- [160] ZADEH, L.A. (1965). Fuzzy Sets, *Information and Control*, Vol. 8, Issue 3, pp. 338-353.
- [161] ZADEH L.A. (1999). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.100, Supplement 1, pp. 3-34.

## Résumé :

En sciences économiques, l'une des questions centrales concerne l'allocation des ressources rares et plus particulièrement leur répartition. La décision apparaît ainsi au cœur des thématiques économiques, que ce soit en micro-économie ou en macro-économie. Dans un premier temps, nous revenons sur le fait que l'information, élément central de la prise de décision, est imparfaite. En utilisant la théorie des ensembles flous, qui a pour objet de capturer l'imprécision, nous construisons un nombre flou nommé nombre flou *C-Shape* qui permet de capter la sensibilité du preneur de décision. Nous étudions ensuite la théorie de la décision au travers de deux axes de recherche à savoir (1) la recherche opérationnelle couplée à la théorie des jeux et (2) l'aide à la décision. En premier lieu, Nous faisons une analogie entre la fonction distance et la fonction d'appartenance. Grâce à l'hypothèse de  $\mathcal{B}$ -convexité et à la fonction *C-Shape* nous construisons des classes de jeux pour lesquels les joueurs peuvent être optimistes, pessimistes ou neutres, et pour lesquels l'existence d'équilibre de Nash est avérée. Enfin, concernant l'aide à la décision, nous utilisons la fonction *C-Shape* pour caractériser un nouveau type de critère nommé *pseudo critère C-Shape* qui permet de considérer les alternatives comme substituables. Ceci permet de prendre en compte, par exemple le contexte institutionnel dans lequel la prise de décision est prise.

Mots clés : Théorie de la décision, Théorie des ensembles flous, Information, Théorie des jeux, Aide à la décision multicritère

## Abstract :

Determining the allocation and the distribution of scarce resources is fundamental in economics. Thus, the decision appears as the core of economic aims whether in micro-economy or in macro-economy. Here, we firstly made a state of the art on the fact that information, the central element of decision-making, is imperfect. Secondly, using the fuzzy set theory, which aims to capture imprecision, we constructed a fuzzy number called *C-Shape* that captures the sensitivity of the decision-maker. Thirdly, we studied the theory of decision through two research axes: (1) the operational research coupled with game theory and (2) the decision aiding. We made an analogy between the gauge function of convex set and the membership function. Coupling the  $\mathcal{B}$ -convexity hypothesis with the *C-Shape* function, we built classes of games for which the players can be optimistic, pessimistic or neutral, and for which the existence of Nash equilibrium is proved. Finally, concerning the decision aiding, we used the *C-Shape* function to characterize a new type of criterion called *pseudo-criterion C-Shape*, which makes it possible to consider the alternatives as substitutable. This should be of interest to take into account, for example, the institutional context in which decision-making is taken.

Keywords: Decision theory, Fuzzy sets theory, Information, Game theory, Multi-criteria decision aiding