

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
**Docteur**

Délivré par  
**UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA**

Préparée au sein de l'école doctorale

**544 INTER-MED**

Et de l'unité de recherche

**CDED (EA UPVD 4216)**

Spécialité :  
**Sciences économiques**

Présentée par  
**RAVELOJAONA Mamiharivola**

## TITRE DE LA THESE

Etude de l'Efficienc e en Economie de la Production :  
de Nouvelles Mesures de l'Efficacité et leurs Extensions  
Théorie et Applications

Soutenue le 18 septembre 2018 devant le jury composé de

<b>M. Hervé BLANCHARD</b> , MCF à l'Université de Perpignan	Examineur
<b>M. Jean-Philippe BOUSSEMART</b> , Professeur à l'Université de Lille 3	Rapporteur
<b>M. Walter BRIEC</b> , Professeur à l'Université de Perpignan	Directeur
<b>Mme. Audrey DUMAS</b> , MCF à l'Université de Perpignan	Co-directrice
<b>M. Hervé LELEU</b> , Directeur de Recherche CNRS - Lille	Examineur
<b>M. Patrick LEONI</b> , Professeur à KEDGE Business School-Marseille	Examineur
<b>M. Stéphane MUSSARD</b> , Professeur à l'Université de Nîmes	Rapporteur



*L'Université n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans la thèse. Ces opinions doivent être considérées comme propres à l'auteur.*



# Remerciements

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à Monsieur le Professeur W. Briec pour avoir accepté de diriger cette thèse. Sa disponibilité, sa rigueur scientifique et ses conseils m'ont permis de mener à bien ces travaux. Je remercie également Madame A. Dumas, ma co-directrice, pour ses conseils précieux quant à la réalisation de cette thèse.

Je remercie chaleureusement Monsieur H. Blanchard pour sa participation au jury de cette thèse.

Je présente un remerciement appuyé à Monsieur le Professeur J-P. Boussemart pour avoir accepté de rapporter ces travaux.

J'exprime également mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur H. Leleu, Directeur de Recherche CNRS, pour sa présence et sa participation au sein de ce jury.

Je remercie chaleureusement Monsieur le Professeur P. Léoni pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur S. Mussard, qui a accepté de rapporter cette thèse. Les remarques qu'il a exprimé, ont permis une exposition plus forte de mes recherches.

Je présente un remerciement accentué à A. Abad pour nos discussions constructives et encourageantes durant la conception de ces travaux et de mes activités de recherche.

Je remercie mes parents W. Razafinirina et Jouissance et, toute ma famille pour leur soutien. J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Mamisoa, Jessica et Mamitantely pour leurs soutiens, leurs encouragements indéfectibles et pour les moments distractions.

Enfin, je tiens à adresser mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à cette thèse : B. Solonandrasana, N. Peypoch, Dongmei, Marie-Claire, Agathe, ...

# Sommaire

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 De la Caractérisation de la Technologie aux Mesures d'Efficacité et de Productivité</b>	<b>13</b>
1 La Technologie de Production . . . . .	14
1.1 Généralités . . . . .	14
1.1.1 La Correspondance en Inputs . . . . .	14
1.1.2 La Correspondance en Outputs . . . . .	17
1.1.3 Le Graphe de la Technologie . . . . .	19
1.2 Modélisations . . . . .	21
1.2.1 Les Fondements de la méthode DEA . . . . .	21
1.2.2 Les Modèles CCR, BCC et leurs Extensions . . . . .	23
1.2.3 Les Modèles Non Convexes . . . . .	27
2 Les Mesures d'Efficacité et la Caractérisation de la Technologie . . . . .	31
2.1 Les Fonctions de Distance . . . . .	31
2.1.1 Les Mesures de Debreu-Farrell . . . . .	31
2.1.2 La Fonction de Distance Directionnelle . . . . .	35
2.1.3 La Fonction de Distance Proportionnelle . . . . .	39
2.2 La Théorie de la Dualité . . . . .	44
2.2.1 La Fonction de Coût . . . . .	45
2.2.2 La Fonction de Revenu . . . . .	48
2.2.3 La Fonction de Profit . . . . .	51
3 Des Mesures d'Efficacité aux Mesures de la Productivité . . . . .	54
3.1 Les Indices et les Indicateurs de Productivité Usuels . . . . .	54

3.1.1	Les Indices de Productivité de Malmquist . . . . .	55
3.1.2	Les Indicateurs de Productivité de Luenberger . . . . .	58
3.1.3	La Relation entre les Indices de Productivité de Malmquist et les Indicateurs de Productivité de Luenberger . . . . .	62
3.2	Les Extensions des Mesures de Productivité de Malmquist et de Luenberger	64
3.2.1	Les Indices de Productivité de Hicks-Moorsteen . . . . .	64
3.2.2	Les Indicateurs de Productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen	67
3.2.3	La Relation entre l'Indice de Hicks-Moorsteen et l'Indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen . . . . .	69
<b>2</b>	<b>Une Approche Exponentielle de la Mesure de l'Efficienc</b>	<b>73</b>
1	Environnement et Outils . . . . .	74
2	La Fonction de Distance Exponentielle . . . . .	75
2.1	Définitions et Propriétés . . . . .	76
2.1.1	Orientation dans le graphe . . . . .	76
2.1.2	Orientation en Input . . . . .	78
2.1.3	Orientation en Output . . . . .	79
2.2	Contexte Logarithmique et Extensions . . . . .	80
2.2.1	Définition et Propriétés . . . . .	80
2.2.2	Fonction de Distance Népérienne en Input et en Output . . . . .	83
2.2.3	Équivalence entre les Mesures d'Efficienc	85
3	La Théorie de la Dualité . . . . .	88
3.1	Pseudo Fonctions de Coût et de Revenu Cobb-Douglas . . . . .	89
3.1.1	Pseudo Fonction de Coût : Définitions et Propriétés . . . . .	89
3.1.2	Pseudo Fonction de Revenu : Définitions et Propriétés . . . . .	92
3.1.3	Fonctions de Prix Ajustés . . . . .	96
3.2	Fonctions de Profit Cobb-Douglas et Log-linéaire . . . . .	98
3.2.1	Pseudo Fonction de Profit Cobb-Douglas : définition, propriétés et dualité . . . . .	98
3.2.2	Fonction de Profit népérienne . . . . .	100

3.2.3	Fonctions de Prix Implicites . . . . .	102
4	Les Notions Additionnelles . . . . .	103
4.1	Rendements d'Echelle . . . . .	103
4.1.1	Rendements d'Echelle Constants . . . . .	103
4.1.2	Rendements d'Echelle Locaux et Spécifiques . . . . .	105
4.1.3	Facettes Cobb-Douglas et Approximation de la Technologie . . .	107
4.2	Cadre Non-Paramétrique . . . . .	109
4.2.1	Efficiency Technique, de Coût et de Revenu . . . . .	110
4.2.2	Approche Primale . . . . .	114
4.2.3	Approche Duale . . . . .	117
<b>3</b>	<b>Une Mesure Additive Non-linéaire de l'Efficiency</b>	<b>121</b>
1	Environnement et Outils . . . . .	122
2	La Fonction de Distance Directionnelle CES-CET . . . . .	124
2.1	Définitions et Propriétés . . . . .	124
2.1.1	Orientation dans le Graphe . . . . .	124
2.1.2	Orientation en Input . . . . .	126
2.1.3	Orientation en Output . . . . .	128
2.2	Des Propriétés Additionnelles . . . . .	129
2.2.1	Graphe Translation Homothéticité . . . . .	129
2.2.2	Translation Homothéticité Réciproque . . . . .	133
2.2.3	Équivalence aux Mesures Radiales . . . . .	134
3	Une Dualité Non-linéaire . . . . .	135
3.1	Pseudo-Fonctions de Profit, de Coût et de Revenu CES-CET . . . . .	135
3.1.1	Pseudo-Fonction de Profit CES-CET . . . . .	135
3.1.2	Pseudo-Fonction de Coût CES-CET . . . . .	137
3.1.3	Pseudo-Fonction de Revenu CES-CET . . . . .	139
3.2	Dualité . . . . .	141
3.2.1	Formulations Duales . . . . .	141
3.2.2	Fonctions de Prix Implicites Non-linéaires . . . . .	144



3.2.3	Notions d'Efficiences . . . . .	147
4	Formalisation et Application . . . . .	148
4.1	Cadre Non-Paramétrique . . . . .	149
4.1.1	Technologie CES-CET et Hypothèse de Convexité . . . . .	149
4.1.2	Estimation Primale . . . . .	152
4.1.3	Programmation Duale . . . . .	155
4.2	Exemple Numérique . . . . .	157
4.2.1	Cadre d'analyse . . . . .	157
4.2.2	Résultats . . . . .	158
4.2.3	Analyse . . . . .	158
<b>4</b>	<b>Des Mesures de Productivité Exponentielles et Logarithmiques</b>	<b>163</b>
1	Environnement et Outils . . . . .	164
2	Des Mesures de Productivité Exponentielles . . . . .	165
2.1	Indicateurs de Luenberger Exponentiels . . . . .	165
2.1.1	Définitions en Input . . . . .	165
2.1.2	Orientation en Output . . . . .	168
2.1.3	Mesures dans le Graphe de la Technologie . . . . .	170
2.2	Indicateur Exponentiel de Luenberger-Hicks-Moorsteen . . . . .	173
2.2.1	Indicateur de la Période ( $t$ ) . . . . .	174
2.2.2	Indicateur de la Période ( $t + 1$ ) . . . . .	176
2.2.3	Indicateur Global de Luenberger-Hicks-Moorsteen Exponentiel	179
3	Notions Additionnelles . . . . .	181
3.1	Dynamisme à Deux Périodes . . . . .	181
3.1.1	Fonctions de Distance Dynamiques . . . . .	181
3.1.2	Paramètre d'Influence Dynamique . . . . .	183
3.2	Décomposition et Dynamisme des Indicateurs Exponentiels . . . . .	185
3.2.1	Décomposition des Mesures de Productivité . . . . .	186
3.2.2	Mesures de Productivité Dynamiques . . . . .	188
4	Application Numérique . . . . .	192

4.1	Mesures de Performance . . . . .	192
4.1.1	Cadre d'Etude . . . . .	192
4.1.2	Résultats . . . . .	193
4.1.3	Interprétations . . . . .	193
4.2	Mesures de Productivité . . . . .	195
4.2.1	Environnement d'Analyse . . . . .	195
4.2.2	Résultats . . . . .	196
4.2.3	Analyse . . . . .	200
<b>5</b>	<b>Mesures d'Efficacité et Rendements d'Echelle Optimaux</b>	<b>207</b>
1	Contexte d'Analyse . . . . .	208
2	Rendements d'Echelle Globaux . . . . .	210
2.1	Mesures Radiales Non-paramétriques . . . . .	210
2.1.1	Efficacité en Input . . . . .	210
2.1.2	Performance en Output . . . . .	212
2.1.3	Extrapolation Minimale et Approche Globale . . . . .	213
2.2	Mesures Directionnelles Non-paramétriques . . . . .	215
2.2.1	Orientation en Input et en Output . . . . .	216
2.2.2	Relations d'Equivalence . . . . .	219
2.2.3	Orientation dans le Graphe . . . . .	221
3	Rendements d'Echelle Spécifiques . . . . .	223
3.1	Principes et Mesures de Debreu-Farrell . . . . .	224
3.1.1	Généralités . . . . .	224
3.1.2	Mesure de Debreu-Farrell en Input . . . . .	226
3.1.3	Mesure de Debreu-Farrell en Output . . . . .	228
3.2	Mesures CES-CET . . . . .	230
3.2.1	Orientation en Input . . . . .	230
3.2.2	Orientation en Output . . . . .	233
3.2.3	Orientation dans le Graphe . . . . .	235
4	Illustration Empirique . . . . .	237

4.1	Rendements d'Echelle Globaux . . . . .	237
4.1.1	Cadre d'Etude . . . . .	237
4.1.2	Résultats . . . . .	239
4.1.3	Analyse . . . . .	243
4.2	Rendements d'Echelle Spécifiques . . . . .	245
4.2.1	Environnement d'Analyse . . . . .	246
4.2.2	Résultats . . . . .	247
4.2.3	Interprétations . . . . .	247
<b>Conclusion Générale</b>		<b>263</b>
<b>Annexe 1 : Présentation des Données</b>		<b>269</b>
<b>Annexe 2 : Notations et Notions Mathématiques</b>		<b>271</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>273</b>

# Table des figures

1	Correspondance en inputs et ses sous-ensembles . . . . .	16
2	Correspondance en outputs et ses sous-ensembles . . . . .	18
3	Graphe de la technologie et sous-ensembles . . . . .	20
4	Modèle à rendements d'échelle constants . . . . .	24
5	Modèle à rendements d'échelle variables . . . . .	25
6	Modèle à rendements d'échelle non décroissants . . . . .	25
7	Modèle à rendements d'échelle non croissants . . . . .	26
8	Technologie Multiplicative . . . . .	28
9	Technologie CES-CET . . . . .	29
10	Rendements d'échelle croissants . . . . .	30
11	Rendements d'échelle croissants . . . . .	30
12	Mesure de Debreu-Farrell en input . . . . .	34
13	Mesure de Debreu-Farrell en output . . . . .	34
14	Mesures de Debreu-Farrell dans le graphe de la technologie . . . . .	35
15	Fonction de Distance Directionnelle orientée dans le graphe . . . . .	37
16	Fonction de Distance Directionnelle orientée en input . . . . .	39
17	Fonction de Distance Directionnelle orientée en output . . . . .	39
18	Fonction de Distance Proportionnelle orientée dans le graphe . . . . .	41
19	Fonction de Distance Proportionnelle orientée en input . . . . .	43
20	Fonction de Distance Proportionnelle orientée en output . . . . .	43
21	Mesures d'efficacité, fonction de coût et dualité. . . . .	47
22	Mesures de performance, fonction de revenu et dualité. . . . .	50

## TABLE DES FIGURES

---

23	Mesures d'efficience, fonction de profit et dualité. . . . .	53
24	Indice de productivité de Malmquist orienté en output. . . . .	58
25	Indicateurs de productivité de Luenberger orientés dans le graphe. . . . .	61
26	Indice de productivité de Hicks-Moorsteen. . . . .	66
27	Indice de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen. . . . .	68
1	Ensemble de production approximé . . . . .	109
2	Efficacité de coût . . . . .	111
3	Efficacité de Revenu . . . . .	111
4	Efficacité de Profit . . . . .	112
5	Technologie Cobb-Douglas. . . . .	115
6	Technologie népérienne log-linéaire par morceaux. . . . .	115
1	Correspondance en inputs CES-CET pour $\alpha \leq 1$ . . . . .	150
2	Correspondance en outputs CES-CET pour $\beta \geq 1$ . . . . .	150
1	Indice de productivité exponentiel de Luenberger et infaisabilité. . . . .	173
2	Indice de productivité exponentiel de Luenberger-Hicks-Moorsteen. . . . .	180
3	Paramètre d'influence dynamique. . . . .	185

# Liste des tableaux

3.1	Scores d'efficacité CES-CET en inputs et en outputs pour $\alpha \neq \beta$ . . . . .	159
3.2	Scores d'efficacité CES-CET lorsque $\alpha = \beta$ . . . . .	160
4.1	Scores d'efficacité exponentiels . . . . .	194
4.2	Indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels . . . . .	197
4.3	Décomposition des indicateurs de productivité de Luenberger . . . . .	198
4.4	Indicateurs de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen . . . . .	199
4.5	Paramètres d'influence dynamiques . . . . .	200
5.1	Mesures de performance directionnelles CES-CET pour $\alpha \neq \beta$ (partie 1) . . . . .	239
5.2	Mesures de performance directionnelles CES-CET pour $\alpha \neq \beta$ (partie 2) . . . . .	240
5.3	Mesures de performance directionnelles CES-CET pour $\alpha \neq \beta$ (partie 3) . . . . .	241
5.4	Scores d'efficacité CES-CET pour $\alpha = \beta$ . . . . .	242
5.5	Indicateur d'ajustement en inputs . . . . .	243
5.6	Indicateur d'ajustement $\gamma$ en outputs . . . . .	243
5.7	Indicateur d'ajustement $\gamma$ dans le graphe . . . . .	243
5.8	Scores en inputs CES-CET lorsque $\alpha = 0,5$ . . . . .	248
5.9	Scores en input CES-CET lorsque $\alpha = 0,75$ . . . . .	249
5.10	Scores en input CES-CET lorsque $\alpha = 1$ . . . . .	250
5.11	Scores en input CES-CET lorsque $\alpha = 1,5$ . . . . .	251
5.12	Scores en input CES-CET lorsque $\alpha = 1,75$ . . . . .	252
5.13	Scores en output CES-CET pour $\beta = 0,5$ . . . . .	253
5.14	Scores en output CES-CET pour $\beta = 0,75$ . . . . .	254

5.15	Scores en output CES-CET pour $\beta = 1$ . . . . .	255
5.16	Scores en output CES-CET pour $\beta = 1,5$ . . . . .	256
5.17	Scores en output CES-CET pour $\beta = 1,75$ . . . . .	257
5.18	Indicateurs d'ajustement en input . . . . .	259
5.19	Indicateur d'ajustement en output . . . . .	261
5.20	Description des données en 2008 . . . . .	269
5.21	Description des données en 2009 . . . . .	269





# Introduction Générale

La science économique est une notion qui concentre plusieurs définitions selon les auteurs. Étymologiquement, l'expression "économie" a pour origine le mot grec *oikonomía* qui signifie "administrer la maison". Ainsi, Robbins (1932) indique que l'économie est *"la science qui étudie le comportement humain comme une relation entre des fins et des moyens rares qui ont des usages alternatifs"*. Mankiw (2004), quant à lui, considère que cette science est *"l'étude de la manière dont la société gère ses ressources rares."* Nous pouvons dire que cette notion est définie différemment selon le courant de pensée dans lequel s'insère l'auteur.

Les prémices de la pensée économique, connus et prouvés, remontent à l'antiquité. Dans son ouvrage, Poulalion (1995) stipule que l'absence de traces écrites rend difficile l'affirmation de l'existence de réflexions économiques avant l'invention de l'écriture. Néanmoins, on peut raisonnablement supposer que l'activité économique existait déjà à l'ère de ces civilisations anciennes. Après l'apparition de l'écriture, certaines civilisations ont laissé des preuves témoignant de l'existence de pensées économiques rudimentaires. On peut citer comme exemples, les civilisations égyptienne, mésopotamienne, phénicienne ou palestinienne. Poulalion (1995) constate que ces réflexions montrent *"la permanence de certains désirs de l'homme : recherche du mieux-être par la production et par l'échange, recherche de la justice dans la répartition des ressources et dans l'échange"*. L'histoire considère que les précurseurs de la réflexion économique remontent à la Grèce antique avec les écrits de Platon, à travers ses ouvrages relatifs à la politique et à la philosophie. Néanmoins, il est communément admis que l'économiste écossais Adam Smith est le père de la science économique moderne avec son ouvrage intitulé *"Recherches sur la nature et les causes de la richesse des nations"* (1776). Certaines idées émises par Adam Smith, ont été reprises et développées par d'autres auteurs tels Ricardo (1817), Malthus (1798), Stuart Mill (1848), etc. Ces auteurs s'inscrivent dans l'école de pensée classique dont le principe majeur est le libre échange

suivant une logique d'accumulation de la richesse tel que le capital est la source du surplus. Leurs théories reposent sur celles de la valeur et des prix tandis que de nouveaux auteurs tels Jevons (1871), Marshall (1890), Menger (1871) ou Walras (1874), etc., fondent les leurs sur le raisonnement à la marge et l'existence de plusieurs marchés. Ces derniers sont considérés comme étant les néo-classiques et font leur apparition vers les années 1870. Les auteurs de cette école de pensée sont les premiers à illustrer leurs théories à travers un formalisme mathématique notamment Jevons (1862). Les économistes classiques et néo-classiques s'intéressent plus particulièrement à la production et à la création de richesse suivant le modèle économique capitaliste. Ils admettent que les Hommes sont parfaitement rationnels puisqu'ils sont capables d'évaluer les avantages et les inconvénients relatifs à une situation et chacune de leur décision est prise afin de maximiser leur utilité (*homo oeconomicus*). Jusqu'à nos jours, il existe d'autres courants de pensée tels le keynésianisme et le monétarisme, etc. Cependant, ces réflexions économiques ne seront pas exposées dans ces travaux.

On distingue deux branches majeures en sciences économiques, à savoir : la macroéconomie et la microéconomie. La première analyse les principaux agrégats économiques tels l'investissement, l'épargne, la consommation ou le revenu national. La seconde, quant à elle, étudie le comportement des agents économiques et leurs interactions. Sont considérés comme étant agent économique tout individu composant à la fois les ménages et les entreprises. Ces deux branches principales se déclinent elles-mêmes en plusieurs sous-catégories telles l'économie publique, l'économie monétaire, l'économie de l'éducation, l'économie de la production, l'économie de la consommation, etc. Dans ces travaux nous nous intéressons à l'analyse micro-économique à travers l'économie de la production.

La production est l'activité économique d'une unité institutionnelle qui combine des facteurs de production<sup>1</sup> (travail, capital) afin de les transformer en produits<sup>2</sup> (biens, services) s'échangeant sur un ou plusieurs marchés. L'économie de la production, selon la vision classique et néoclassique, étudie la manière d'augmenter la richesse grâce à une hausse de l'efficience et de la productivité. Ces dernières peuvent être appréhendées de diverses manières grâce à une baisse des coûts, une hausse des revenus, etc. Dans son ouvrage, Adam Smith (1776) illustre ces concepts par le biais

---

1. Dans ces travaux, nous utiliserons indifféremment les termes "inputs" et "intrants" pour désigner les facteurs de production.

2. Les termes "outputs" et "extrants" qualifieront la production dans ces travaux.

de l'usine d'épingle où l'application de la division du travail permet un gain de temps dans la production . Par conséquent, il existe une augmentation de l'efficacité et de la productivité des ouvriers grâce à la spécialisation et la réduction des temps morts<sup>3</sup>.

## Efficacité et Efficience

L'efficacité désigne la réalisation des résultats attendus. En effet, selon McFadden et Fuss (1978), *"la théorie de la production a comme point de départ, un ensemble de possibilités de processus de production physique, illustré par des fonctions de production ou de transformation. L'entité de production cherche, ainsi, à atteindre ses objectifs malgré sa technologie limitée et son environnement économique."*

Fondamentalement, les entités de production cherchent l'efficience. Celle-ci qualifie l'action d'atteindre les objectifs fixés avec le minimum de moyens possible. On peut dire que cette définition rejoint celle de Koopmans (1951) concernant l'efficacité technique. Celui-ci décrit qu'un producteur est *"techniquement efficace si toute augmentation d'un output exige la réduction d'au moins un autre output ou l'augmentation d'au moins un input, et si toute diminution d'input conduit à la hausse d'au moins un autre input ou la réduction d'au moins un output"*. Dans ces travaux, nous utilisons indifféremment les termes "efficacité", "efficience" et "performance" pour désigner cette notion. En effet, nous pouvons constater que la définition de l'efficacité technique fournie par Koopmans (1951) coïncide avec celle de l'efficience.

Il existe des outils et des approches, permettant de mesurer l'efficacité des entités de production. Traditionnellement, cette grandeur est évaluée grâce à une fonction de production (ou de transformation) selon une méthode économétrique. Il est à noter qu'une fonction de production ne peut tenir compte que des technologies de production mono-output. Une approche alternative à celle-ci a été introduite par Shephard (1953, 1970). En s'inspirant des travaux de Debreu (1951) et de Farrell (1957), ce dernier présente la fonction de distance radiale qui mesure la distance entre l'unité de production et la frontière efficiente. Cette grandeur peut considérer les processus de production multi-dimensionnels avec de multiples intrants et de multiples extrants. Par ailleurs,

---

3. Temps nécessaire correspondant au passage d'une étape de réalisation à une autre dans la réalisation de la production. Il est considéré comme étant une période d'inactivité dans le processus de production.

cet outil n'exige aucune information sur les prix qui peuvent être difficiles à appréhender et, il caractérise parfaitement la technologie de production. Il est alors possible de retrouver l'ensemble productif à partir de la mesure de distance.

La méthode économétrique a certaines limites pratiques et opérationnelles. En effet, celle-ci requiert le choix *a priori* d'une forme fonctionnelle qui, doit décrire au mieux les mécanismes de production de l'entreprise. Par ailleurs, l'utilisation de l'approche économétrique impose également l'adoption *a priori* des lois de probabilité inhérentes à l'étude réalisée. Une alternative à l'approche économétrique existe. En effet, suite aux travaux de Shephard (1970) et Afriat (1972), Charnes, Cooper et Rhodes (1978) proposent une méthode d'évaluation non-paramétrique qui repose sur la programmation linéaire. Cette nouvelle approche par l'enveloppement des données (*Data Envelopment Analysis - DEA*), construit la frontière optimale, linéaire par morceaux, grâce aux entités de productions considérées comme des références (ou benchmark). Celle-ci a l'avantage de ne requérir aucune forme fonctionnelle *a priori*. Le modèle additif présenté par Charnes et al. (1978) considère des ensembles de production opérant sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Suivant l'approche DEA, Banker, Charnes, Cooper et Schinnar (1981) proposent un modèle log-linéaire par morceaux de la frontière efficiente. Cette version multiplicative s'inscrit comme une extension des travaux initiaux de Charnes et al. (1978). En s'inspirant de ces derniers, Banker, Charnes et Cooper (1984) présentent, quant à eux, un modèle additif linéaire par morceaux sous l'hypothèse de rendements d'échelle variables. Dans un souci d'améliorer les propriétés des technologies de production représentées par ces modèles, Banker et Maindiratta (1986) introduisent un ensemble de production multiplicatif de type Cobb-Douglas. Celui-ci est log-linéaire par morceaux. Enfin, Färe, Grosskopf et Njinku (1988) proposent une technologie de production non-linéaire, qu'ils nomment l'ensemble de production CES<sup>4</sup>-CET<sup>5</sup>. Les auteurs démontrent que ce modèle est la généralisation des technologies de production présentées par Charnes et al. (1978), Banker et al. (1984) et, Banker et Maindiratta (1986). Deprins, Simar et Tulkens (1984) ainsi que Tulkens (1993) définissent un autre type de technologie de production nommée "ensemble de production FDH" (Free Disposal Hull). Celui-ci se présente sous la forme d'un ensemble de produc-

---

4. Constant Elasticity of Substitution : la partie relative aux inputs est décrite grâce à une fonction CES (Solow (1956)).

5. Constant Elasticity of Transformation : la partie concernant les extrants est représentée par une fonction CET (Powell et Gruen (1968)).

tion non-paramétrique et linéaire par morceaux tel que seule l'hypothèse de disponibilité forte est retenue<sup>6</sup>.

Les travaux de Shephard (1970) permettent de reconstituer les technologies de production grâce à l'estimation des mesures de distance. Nous verrons, par la suite, que selon la nature des fonctions et de la technologie, il n'est pas évident de caractériser l'ensemble de production lorsque certaines approches non-paramétriques sont adoptées.

## Ensemble de Production et Mesures d'Efficacité

Un ensemble de production représente toutes les combinaisons possibles d'inputs et d'outputs qui sont faisables. En ce sens, la frontière de production efficiente correspond la quantité d'outputs maximale qui est atteignable pour chaque niveau d'inputs. Ainsi, la technologie de production traduit le processus qui permet de transformer les facteurs de production en extrants. Dans ces travaux nous utilisons indifféremment les termes "technologie de production" et "ensemble de production" afin de désigner toutes les combinaisons d'intrants et d'extrants qui sont techniquement réalisables.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les mesures de distance caractérisent parfaitement la technologie de production, selon les travaux de Shephard (1970). Les fonctions de Shephard sont l'inverse des mesures de Debreu(1951)-Farrell(1957). Elles sont de nature multiplicative et sont radiales. Elles permettent d'évaluer, soit la contraction maximale des intrants pour un niveau donné d'extrants (orientation en inputs), soit l'expansion maximale de la production pour une quantité donnée de facteurs (orientation en outputs). Luenberger (1992a), dans le contexte de la théorie du consommateur, introduit la fonction de bénéfice. Il la transpose dans la théorie du producteur sous le nom de "*shortage function*" (Luenberger (1992b)). Outre les orientations en inputs et outputs, cette nouvelle mesure rend possible la réduction et l'augmentation simultanées des intrants et des extrants (orientation dans le graphe). De nature additive, cette fonction est non-radiale puisqu'elle n'offre pas de mesure proportionnelle. suite aux travaux de Chambers, Chung et Färe (1996), elle est plus connue sous le nom de "*fonction de distance directionnelle*". En s'inspirant des travaux de Farrell (1957), Briec (1997) propose une nouvelle mesure dans le graphe qu'il nomme

---

6. La disponibilité forte signifie que pour une unité de production  $(x^t, y^t)$  où  $x^t$  et  $y^t$  sont les vecteurs d'inputs et d'outputs,  $y^t$  peut toujours être produit par  $\tilde{x}^t$  tel que  $\tilde{x}^t \geq x^t$  ou  $x^t$  peut toujours produire  $\tilde{y}^t$  avec  $\tilde{y}^t \leq y^t$ .

*"fonction de distance proportionnelle de Farrell"*. En effet, de nature multiplicative, cette fonction radiale permet la contraction et l'expansion simultanées des inputs et des outputs, contrairement aux mesures de Debreu(1951)-Farrell(1957) et de Shephard (1970).

Notons que les fonctions de distance sont des mesures d'efficacité technique. Cependant, lorsque nous souhaitons faire une étude, nous devons répondre aux questions suivantes : "Quelle technologie de production doit-on choisir?", "Quelle mesure de distance semble la plus appropriée?". Tout d'abord, la technologie de production doit être choisie suivant plusieurs critères : le domaine d'activité, les données analysées, les hypothèses et objectifs des chercheurs. Ensuite, la fonction de distance doit tenir compte du fait si les entreprises peuvent influencer uniquement leurs inputs ou leurs outputs ou, les deux à la fois. La littérature démontre que les fonctions de distance multiplicatives peuvent être estimées dans le cadre des technologies linéaires et non-linéaires. En effet, suivant une approche non-paramétrique, Charnes et al. (1978), Banker et al. (1984), Banker et Maindiratta (1986), Boussemart, Briec, Peypoch et Tavéra (2009), et, Briec et Liang (2011) appliquent les mesures de distance radiale dans le cadre des ensembles de production linéaires ou non-linéaires. Cherchye, Kuosmanen et Post (2011) évaluent, quant à eux, la fonction de distance directionnelle dans le contexte d'une technologie de type FDH. Ces études ont été réalisées dans le cadre d'une approche non-paramétrique de type DEA.

Dans ces travaux, le premier chapitre expose plus en détail les mesures de performances évoquées précédemment. Les deux chapitres suivants proposent des mesures non-radiales qui concordent aux technologies de production non-linéaires. En effet, dans un premier temps, nous présentons une fonction de distance exponentielle qui devient une mesure log-additive grâce à une transformation logarithmique. Nous verrons que l'évaluation de cette mesure conduit à estimer la fonction de distance directionnelle lorsque les données ont subi une mutation logarithmique. Par ailleurs, nous montrerons qu'elle s'insère parfaitement dans un ensemble de production de type Cobb-Douglas (Banker et Maindiratta (1986)). Dans un second temps, nous introduisons une mesure de distance non-linéaire CES-CET. De nature additive, celle-ci allie la structure de la technologie de production CES-CET et celle de la fonction de distance directionnelle. Elle permet l'estimation de l'efficacité technique non-radiale dans le contexte d'un ensemble de production non-linéaire de type CES-CET. La mesure CES-CET rend possible la contraction et l'expansion simultanées des intrants et des extrants dans ce genre de modèle.

## Notions de Dualité

La dualité représente les relations causales entre les données économiques observables et le processus de production physique. En ce sens, Fuss et McFadden (1978) écrivent que *"Une approche alternative [à la technologie de production physique] peut cependant être menée directement grâce aux données économiques observées (approvisionnement, demande, prix, coûts et profits)."* Le point de départ de la théorie de la dualité en économie de la production est les travaux de Hotelling (1932). En effet, ce dernier observe qu'il existe une relation entre la variation du profit et le changement de l'offre et de la demande. Ces résultats ont été repris par Hicks (1946), Roy (1942) et Samuelson (1947). Shephard (1953), quant à lui, prouve et donne une formalisation plus concrète de la relation duale ayant lieu entre le coût et la production. McFadden (1978) étend les résultats obtenus par Shephard (1953) tel qu'il démontre l'existence d'une relation duale entre la fonction de production et les fonctions de profit et de revenu.

D'un point de vue dual, réduire l'utilisation des inputs pour une quantité donnée d'outputs, signifie baisser les coûts pour un niveau donné de revenu. On se situe ainsi, dans une analyse axée sur les intrants. De ce fait, les mesures d'efficacité technique orientées en inputs sont duales aux fonctions de coût. Suivant la même raisonnement logique, augmenter la production pour une quantité fixe de facteurs, consiste à accroître le revenu pour un niveau donné de coûts. Il est évident que ce type d'étude correspond à une orientation en outputs de sorte que les fonctions de distance axées sur les extrants sont duales aux fonctions de revenu. Enfin, hausser et diminuer simultanément les inputs et les outputs indique que l'on cherche à maximiser son profit. En ce sens, on peut noter que l'on se place dans une orientation dans le graphe. Ainsi, on peut en déduire que les mesures de distance orientées dans le graphe sont duales aux fonctions de profit. Il est alors possible d'exprimer les mesures de distance à partir des fonctions de coût, de revenu et de profit.

L'existence de la relation duale entre les mesures de distance et les fonctions de coût, de revenu ou de profit, est conditionnée par la convexité de la technologie de production. Lorsque cette hypothèse est vérifiée alors, l'ensemble de production peut être caractérisée d'un point de vue dual. Effectivement, la frontière efficiente est constituée de l'intersection des hypersurfaces ou hyperplans que représentent les fonctions de coût, de revenu ou de profit. Généralement, dans la littérature, nous observons que ces dernières ont une structure linéaire (hyperplan). En effet, les auteurs

avancent que ces fonctions doivent être homogènes de degré 1<sup>7</sup>. Cependant, McFadden (1978) note que ces dernières peuvent être non-linéaires (hypersurface) lorsque des facteurs internes et/ou externes influencent les coûts, les revenus et le profit des unités de production.

Le *Lemme de Shephard* stipule que les différentiels des fonctions de coût, de revenu et de profit permettent d'obtenir les fonctions de demande et d'offre conditionnelles. Par ailleurs, selon le *Lemme dual de Shephard* et le théorème de l'enveloppe, les différentiels des mesures de distance duales donnent la possibilité de déduire les fonctions de prix ajustés (ou implicites). Ceux-ci représentent les prix correspondant à l'optimum de Pareto<sup>8</sup> sur un marché concurrentiel. Ces résultats ont été démontrés par les travaux de Shephard (1953, 1970). Des fonctions de coût, de revenu ou de profit non-linéaires peuvent induire des fonctions de prix implicites non-linéaires. Dans le cadre de la théorie du consommateur, Chavas et Briec (2012) remarquent que la structure non-linéaire des prix peut indiquer des tarifications non-linéaires (pénalités ou bonus écologiques par exemple). Par ailleurs, elle peut également révéler que la relation entre la production et les coûts (ou le revenu, ou les profits) n'est pas constante.

Les relations de dualité entre les mesures de distance et les fonctions de coût, de revenu et de profit sont présentées plus en détail dans le premier chapitre de ces travaux. De plus, nous explorons l'existence d'un tel lien dans le cadre des nouvelles mesures de performances que nous proposons dans les deuxième et troisième chapitres de ces travaux.

## Influence des Rendements d'Echelle

Les rendements d'échelle représentent les relations existant entre l'évolution de la production et la variation des facteurs. Ceux-ci indiquent le changement dans les quantités produites lorsque les inputs varient dans une même proportion. Il existe trois grandes classes de rendements d'échelle :

- (i) croissant : lorsque tous les intrants sont modifiés dans une même proportion alors, les extrants évoluent plus que proportionnellement,
- (ii) constant : une variation dans une même proportion de tous les inputs conduit à une modi-

---

7. Si nous prenons par exemple, le cas de la fonction de coût. Cette dernière est homogène de degré 1 si une augmentation des inputs dans une proportion  $\lambda$  engendre une hausse des coûts dans une proportion  $\lambda$ , également.

8. L'optimum de Pareto signifie qu'il n'est plus possible d'augmenter un output (ou de diminuer un input) sans réduire au moins un autre extrant (ou accroître au moins un intrant).



fication dans les mêmes proportions des outputs,

- (iii) décroissant : un changement dans une même proportion de tous les facteurs a pour conséquence une évolution moins que proportionnelle de la production.

Les rendements d'échelle s'intègrent dans le processus de production et sont étroitement liés à l'efficacité des entreprises. En effet, de ceux-ci dépendent le rendement des inputs. Dans la plupart des cas, lorsqu'il est nécessaire, les rendements d'échelle sont des hypothèses présentées sous formes de contraintes dans l'estimation des performances des firmes.

L'ensemble de production présentée par Charnes et al. (1978) suppose que les entités de production produisent sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Banker et al. (1984), Banker et Maindiratta (1986) ainsi que Färe et al. (1988) proposent, quant à eux, des technologies de production opérant sous l'hypothèse de rendements d'échelle variables. Cette dernière signifie que l'ensemble de production tient compte des rendements d'échelle croissants, constants et décroissants simultanément. Ainsi, ces modèles imposent *a priori* les rendements d'échelle qui s'appliquent au processus de production.

Boussemart et al. (2009) démontrent que puisque les rendements d'échelle influencent fortement l'efficacité des entités de production, il peut être possible d'évaluer le meilleur rendement d'échelle qui permet d'optimiser la performance. Dans leurs travaux, ce rendement d'échelle optimal correspond au "*rendement d'échelle  $\alpha$* " tel que les rendements d'échelle strictement croissants ou strictement décroissants sont pris en compte. Par ailleurs, Boussemart, Briec, Leleu et Ravelojaona (2018) considèrent qu'il peut exister un rendement d'échelle optimal relatif à l'ensemble des entités de production. En effet, celui-ci permet au plus grand nombre ou à l'ensemble productif d'être le plus efficace possible. Dans ce cas, le rendement d'échelle de la technologie de production n'est plus une contrainte mais devient une variable à estimer. Boussemart et al. (2009) et Boussemart et al. (2018) établissent leur théorie et leur méthodologie dans le cadre de l'ensemble de production CES-CET introduite initialement par Färe et al. (1988). De ce fait, cette méthode accorde la possibilité d'analyser (affirmer ou réfuter) certaines hypothèses avancées dans certains secteurs d'activité.

Nous exposerons ces différentes notions de rendements d'échelle dans le premier chapitre de ces travaux. Dans le chapitre 5, nous examinerons l'application du modèle introduit par Boussemart et al. (2009), à la mesure non-linéaire additive que nous proposons dans le chapitre 3.

## Concept de Productivité

La productivité est le ratio entre les outputs produits et les inputs utilisés. Dans le cadre d'une production mono-input mono-output, il est évident que cette mesure est facile à estimer. Cependant, cette situation ne correspond pas à la réalité. En effet, de manière générale, soit une entité de production utilise plusieurs facteurs pour produire un output, soit elle consomme plusieurs intrants afin de créer plusieurs extrants. Il est alors nécessaire d'agréger, selon un modèle économique, les inputs et les outputs de sorte que la productivité soit toujours le ratio entre deux scalaires. Dans ce cas, nous parlons de productivité totale des facteurs. Il est à noter qu'il existe des mesures de productivité partielle. Ces dernières représentent la productivité d'un facteur spécifique par rapport aux outputs. Cependant, elles ne reflètent pas la performance réelle des entités de production. En ce sens, il est primordial d'évaluer la productivité totale des facteurs pour apprécier l'efficacité totale d'une institution. Ces mesures sont des outils de comparaison des performances dans le temps et dans l'espace. De ce fait, il est logique de calculer les changements de productivité. Elles sont traduites par des indices (ratio) ou des indicateurs (différences) entre les variations des intrants et des extrants.

Dans la littérature, les indices et les indicateurs de productivités sont généralement estimés afin de comparer les performances d'une entité de production dans le temps. Ainsi, elles permettent d'apprécier les mutations positives ou négatives de la productivité des firmes. Selon les travaux de Coelli, Rao, O'Donnell et Battese (2005), il existe quatre manières de mesurer le changement de productivité dans le temps :

- (i) la variation de la productivité est mesurée par la variation des outputs diminuée de la variation des inputs. Cette méthode a été nommée l'approche de Hicks (1961)-Moorsteen (1961) par Diewert (1992a, 1992b),
- (ii) le changement de productivité est estimée à partir de la variation de la rentabilité après un ajustement temporel des prix des facteurs et des produits. Cette méthode est l'approche par la rentabilité,
- (iii) Caves, Christensen et Diewert (1982a, 1982b) préconisent d'évaluer la productivité grâce à la comparaison entre les extrants observés et la quantité d'outputs maximal qui peut être produit pour un niveau d'inputs constant. Cette méthode est l'approche de Caves, Christen-

sen et Diewert,

- (iv) la variation de la productivité est constituée de l'agrégation de toutes les sources identifiables de la variation de la productivité (par exemple : le changement technique, d'efficacité, d'échelle, etc). Cette méthode est l'approche basée sur les composantes (Balk (2001)).

Dans ces travaux, nous nous concentrons uniquement sur les approches (i) et (iii). Ces deux méthodes font intervenir des mesures orientées en inputs et en outputs. Caves et al. (1982a, 1982b) évaluent leurs indices de productivité grâce aux fonctions de distance radiale axées sur les inputs et les outputs. Les mesures obtenues par le biais cette approche sont communément nommés les indices de productivité de Malmquist. Diewert (1992a, 1992b) évalue sa mesure de productivité de Hicks-Moorsteen sur la base des indices de quantité de Malmquist. Sachant que ces mesures de productivité reflètent les variations de la performance, elles reposent donc sur les résultats d'efficacité. De ce fait, puisque les mesures d'efficience peuvent être obtenues à partir des fonctions de distance, les indices de productivité peuvent également être déduites grâce à celles-ci. Les indices de Malmquist et de Hicks-Moorsteen sont constitués par le ratio entre des fonctions de distance de Shephard. En ce sens, la nature (additive ou multiplicative) des mesures de distance influencent la structure des mesures de productivité. L'apparition des fonctions de distance additives, notamment la fonction de distance directionnelle, a engendré l'avènement de nouveaux indicateurs de productivité. De ce fait, Chambers, Färe et Grosskopf (1996b) proposent une mesure de productivité additive de Luenberger. Briec et Kerstens (2004) introduisent, par la suite, l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen afin de corriger les infaisabilités pouvant survenir dans celle de Chambers et al. (1996b). Les deux indicateurs de productivité additives découlent des mesures de distance directionnelle.

Nous verrons plus précisément ces indices et indicateurs dans le premier chapitre. Dans le cadre de ces travaux, nous nous intéresserons à l'application des indicateurs de productivité présentés par Chambers et al. (1996b) et, Briec et Kerstens (2004) à la mesure de performance log-additive présentée dans le chapitre 2.

Le premier chapitre de ces travaux établit la revue de littérature relative aux nouvelles notions que nous introduirons dans les chapitres suivants. Le deuxième chapitre, quant à lui, sera dédié à la présentation d'une nouvelle mesure de performance exponentielle, que ce soit d'un point de

vue primal ou d'une perspective duale. Le chapitre 3 présentera également une mesure d'efficacité dans la lignée du modèle de Färe et al. (1988) et des travaux de Luenberger (1992b). Le chapitre 4 montrera que la mesure de distance exponentielle proposée dans le chapitre 2, peut amener à des indicateurs de productivité exponentiels. Ces derniers conduisent l'obtention des formes dynamiques des fonctions de distance log-additives. Enfin, le cinquième chapitre sera consacré à l'application de la théorie des rendements d'échelle  $\alpha$  aux mesures présentées dans le chapitre 3. Par ailleurs, nous proposerons une version individuelle (ou spécifique) de cette théorie des rendements d'échelle introduite par Boussemart et al. (2009).

# Chapitre 1

## De la Caractérisation de la Technologie aux Mesures d'Efficacité et de Productivité

Dans un système capitaliste, l'objectif des entités de production est la recherche de l'efficacité et de l'efficience. Nous avons vu que ces deux expressions n'ont pas la même définition. Cependant, dans la théorie de la production, il est courant d'utiliser ces termes de manière indifférente. En effet, dans ce contexte, la recherche de l'efficacité consiste à produire le maximum avec le minimum de moyens de production possible (Koopmans (1951)). Cette interprétation correspond à la définition de l'efficience. Ainsi, nous utiliserons ces termes indifféremment dans ces travaux.

La caractérisation de la technologie, c'est-à-dire du processus de production, peut se faire selon une vision dans le graphe (dimension inputs et outputs), dans la correspondance en inputs ou dans la correspondance en outputs. Nous avons pu constater que selon les travaux de Shephard (1970), nous avons la possibilité de retrouver les caractéristiques de ces ensembles de production grâce aux mesures d'efficacité technique. Ces dernières se présentent sous la forme de fonctions de distance à la frontière efficiente. Ces mesures peuvent être appréhendées d'un point de vue primal ou dual à travers une formulation faisant intervenir les fonctions de coût, de revenu et de profit (Hotelling (1932), Shephard (1953)). Sachant que la recherche de l'efficience est au cœur de la préoccupation des firmes, il est logique que celles-ci analysent l'évolution de leur performance dans le temps. Ainsi, les indices et les indicateurs de productivité permettent d'apprécier ces variations de la performance. Dans ce cas, ceux-ci font intervenir les mesures d'efficacité (Caves et al. (1982a, 1982b), Diewert (1992a, 1992b)).

Ce chapitre a pour vocation d'être une revue de littérature. Dans la première section, nous définissons la technologie de production selon une vision dans le graphe, orientée en inputs et orientée en outputs. Nous la formalisons également dans le cadre de la méthode d'enveloppement des données (Charnes et al. (1978)). La deuxième section présente les mesures d'efficacité radiales et non-radiales qui permettent de caractériser les ensembles de production introduits dans la section précédente. Enfin, la troisième et dernière section est le recueil des indices et indicateurs de productivité tels que ceux-ci évaluent les variations de la performance dans le temps.

## 1 La Technologie de Production

La technologie de production peut être représentée de diverses manières à savoir par la correspondance en inputs, la correspondance en outputs et la représentation dans le graphe. Ces notions ainsi que la modélisation de cette technologie seront approfondies dans cette section.

### 1.1 Généralités

La technologie de production est le processus, qui permet la transformation d'un vecteur d'inputs (ou intrants)  $x^t = (x_1^t, \dots, x_m^t) \in \mathbb{R}_+^m$  en vecteur d'outputs (ou extrants)  $y^t = (y_1^t, \dots, y_n^t) \in \mathbb{R}_+^n$  à la période ( $t$ ). Ainsi, l'ensemble de production peut être appréhendée de trois manières différentes à savoir, par la correspondance en inputs, par la correspondance en outputs ou dans le graphe de la technologie. Selon les travaux de Shephard (1953, 1970), ces représentations du processus productif vérifient certaines propriétés.

#### 1.1.1 La Correspondance en Inputs

La correspondance en inputs peut être définie comme étant les différentes combinaisons d'intrants qui permettent de produire un niveau donné d'outputs donné grâce au processus de production. Celle-ci peut être définie de manière formelle.

Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  et  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$ , la correspondance en inputs  $L^t(y^t)$  caractérise la technologie

$T^t(x^t, y^t)$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} L^t : \mathbb{R}_+^n &\longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m} \\ L^t(y^t) &= \{x^t \in \mathbb{R}_+^m : y^t \text{ peut être produit par } x^t\} \\ &= \{x^t \in \mathbb{R}_+^m : (x^t, y^t) \in T^t\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Selon les travaux de Shephard (1953, 1970), la correspondance en inputs peut être associée aux axiomes suivants :

- L1 : Pour tout  $y^t > 0$  alors,  $0 \notin L^t(y^t)$  et  $L^t(0) = \mathbb{R}_+^m$ .
- L2 : Pour tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$  alors  $\bigcap_{y^t \in \mathbb{R}_+^n} L^t(y^t) = \emptyset$ .
- L3 : Pour tout  $x^t \in L^t(y^t)$  et  $\hat{x}^t \geq x^t$  alors,  $\hat{x}^t \in L^t(y^t)$ .
- L4 : Pour tout  $\hat{y}^t, y^t \in \mathbb{R}_+^n$  si Pour tout  $\hat{y}^t \geq y^t$  alors,  $L^t(\hat{y}^t) \subseteq L^t(y^t)$ .
- L5 : Pour tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$  alors  $L^t(y^t)$  est fermée.
- L6 : Pour tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$  alors  $L^t(y^t)$  est convexe.
- L7 : Pour tout  $x^t \in L^t(y^t)$  et Pour tout  $\lambda \geq 1$  alors,  $\lambda x^t \in L^t(y^t)$ .
- L8 : Pour tout  $\theta \geq 1$  alors,  $L^t(\theta y^t) \subseteq L^t(y^t)$ .

L'axiome L1 signifie que l'utilisation d'une quantité nulle d'inputs ne peut conduire à la production d'un niveau non-nul d'outputs. De ce fait, il n'y a pas de repas gratuit (no free lunch). La propriété L2 stipule qu'il est impossible de produire une quantité infinie d'outputs à partir d'une quantité finie d'inputs. La troisième hypothèse représente l'hypothèse de libre disposition forte des inputs c'est-à-dire qu'une quantité donnée d'outputs peut toujours être produite par quantité plus importante d'inputs. L4 indique qu'une quantité plus importante d'outputs ne peut être associée à un ensemble d'inputs plus grand. L5 est le garant de l'existence d'une frontière technologique tandis que L6 est l'hypothèse de convexité de la correspondance en inputs. Les axiomes L7 et L8 sont respectivement les versions faibles des axiomes L3 et L4 c'est-à-dire que les variations entre les inputs utilisés et la correspondance en inputs sont proportionnelles.

Puisque la correspondance en inputs est associée à la notion de frontière de production, il est possible de définir les sous-ensembles suivants :

- Pour tout  $y^t \geq 0$ ,  $IsoqL^t(y^t) = \{x^t \in L^t(y^t) : \lambda x^t \notin L^t(y^t), \forall \lambda \in [0, 1]\}$  est l'isoquant de la correspondance en inputs.
- Pour tout  $y^t \geq 0$ ,  $\partial^W L^t(y^t) = \{x^t \in L^t(y^t) : \hat{x}^t \leq x^t, \hat{x}^t < x^t \Rightarrow \hat{x}^t \notin L^t(y^t)\}$  est le sous-ensemble faiblement efficient de  $L^t(y^t)$ .
- Pour tout  $y^t \geq 0$ ,  $\partial L^t(y^t) = \{x^t \in L^t(y^t) : \hat{x}^t \leq x^t, \hat{x}^t \neq x^t \Rightarrow \hat{x}^t \notin L^t(y^t)\}$  est le sous-ensemble efficient de  $L^t(y^t)$ .

Il est à noter que pour  $y^t = 0$  alors,  $IsoqL^t(y^t) = \{0\}$ ,  $\partial^W L^t(y^t) = \{0\}$  et  $\partial L^t(y^t) = \{0\}$ .

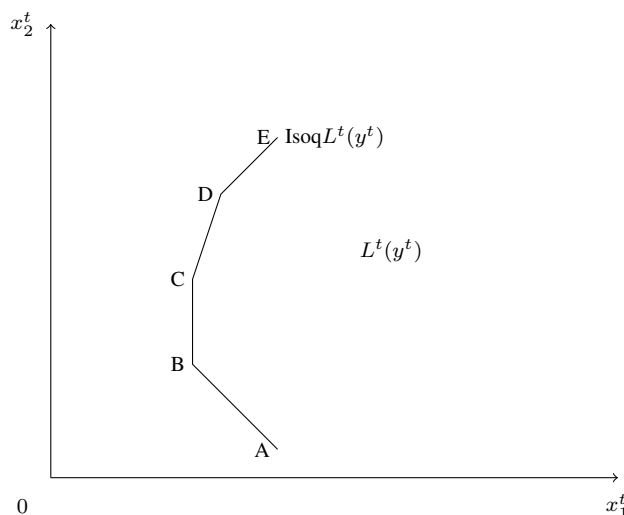


FIGURE 1 – Correspondance en inputs et ses sous-ensembles

La figure 1 représente la correspondance en inputs  $L^t(y^t)$  ainsi que les sous-ensembles la composant dans un espace à deux dimensions tel que les outputs ( $y^t$ ) sont produits à partir de deux facteurs de production  $x_1^t$  et  $x_2^t$ . Ainsi, la frontière constituée par les segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DE]$  est l'isoquant d'inputs pour un niveau donné d'extrants. Tous les points situés sur cette frontière sont des combinaisons d'intrants qui permettent de produire une même quantité d'outputs. Le segment  $[BC]$  représente le sous-ensemble faiblement efficient puisque la quantité de facteur  $x_2^t$  peut être réduite tout en produisant le même niveau d'outputs et en utilisant la même quantité d'inputs  $x_1^t$ . Le segment  $[AB]$  correspond au sous-ensemble efficient de  $L^t(y^t)$  puisque la quantité de facteurs de production utilisée est la plus faible.



### 1.1.2 La Correspondance en Outputs

La correspondance en outputs peut être définie comme étant l'ensemble des combinaisons d'outputs pouvant être produits par une même quantité d'inputs. Formellement, on peut la définir de comme ci-dessous.

Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  et  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$ , la correspondance en inputs  $P^t(x^t)$  caractérise la technologie  $T^t(x^t, y^t)$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} P^t : \mathbb{R}_+^m &\longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n} \\ P^t(x^t) &= \{y^t \in \mathbb{R}_+^n : x^t \text{ peut produire } y^t\} \\ &= \{y^t \in \mathbb{R}_+^n : (x^t, y^t) \in T^t\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

De manière analogue à la correspondance en inputs, la correspondance en outputs  $P^t(x^t)$  peut être associée aux axiomes suivants :

- P1 : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  alors,  $P^t(0) = \{0\}$  et  $0 \in P^t(x^t)$ .
- P2 : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  alors  $P^t(x^t)$  est bornée.
- P3 : Pour tout  $y^t \in P^t(x^t)$  et  $0 \leq \hat{y}^t \leq y^t$  alors,  $\hat{y}^t \in P^t(x^t)$ .
- P4 : Pour tout  $\hat{x}^t, x^t \in \mathbb{R}_+^m$  si Pour tout  $\hat{x}^t \geq x^t$  alors,  $P^t(\hat{x}^t) \subseteq P^t(x^t)$ .
- P5 : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  alors  $P^t(x^t)$  est fermée.
- P6 : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  alors  $P^t(x^t)$  est convexe.
- P7 : Pour tout  $y^t \in P^t(x^t)$  alors,  $\lambda y^t \in P^t(x^t)$ , Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ .
- P8 : Pour tout  $\theta \geq 1$  alors,  $P^t(\theta x^t) \subseteq P^t(x^t)$ .

L'axiome P1 signifie qu'il est toujours possible de produire une quantité nulle d'outputs et qu'il n'y a pas de repas gratuit. L'hypothèse P2 fait référence à l'impossibilité de produire une quantité infinie d'outputs grâce à une quantité finie d'inputs. La propriété P3 stipule la libre disposition forte des outputs c'est-à-dire qu'il est possible de produire une quantité plus faible d'outputs avec la même quantité d'inputs. P4 indique qu'un niveau d'outputs moins important peut toujours être associé à un ensemble plus grand d'inputs. L'axiome P5 garantit l'existence d'une frontière technologique tandis que P6 impose la convexité de l'ensemble  $P^t(x^t)$ . Les axiomes P7 et P8 sont quant à eux, les versions affaiblies des axiomes P3 et P4.

Puisque la correspondance en outputs  $P^t(x^t)$  est un ensemble compact (P2 et P5), on peut lui associer les sous-ensembles suivant :

- Pour tout  $P^t(x^t) \neq \emptyset$ ,  $IsoqP^t(x^t) = \{y^t \in P^t(x^t) : \lambda y^t \notin P^t(x^t), \forall \lambda > 1\}$  est l'isoquant de la correspondance en outputs.
- Pour tout  $P^t(x^t) \neq \emptyset$ ,  $\partial^W P^t(x^t) = \{y^t \in P^t(x^t) : \hat{y}^t \geq y^t, \hat{y}^t > y^t \Rightarrow \hat{y}^t \notin P^t(x^t)\}$  est le sous-ensemble faiblement efficient de  $P^t(x^t)$ .
- Pour tout  $P^t(x^t) \neq \emptyset$ ,  $\partial P^t(x^t) = \{y^t \in P^t(x^t) : \hat{y}^t \geq y^t, \hat{y}^t \neq y^t \Rightarrow \hat{y}^t \notin P^t(x^t)\}$  est le sous-ensemble efficient de  $P^t(x^t)$ .

On peut également noter que pour  $x^t = 0$ , les sous-ensembles définis ci-dessus deviennent  $IsoqP^t(0) = \{0\}$ ,  $\partial^W P^t(0) = \{0\}$  et  $\partial P^t(0) = \{0\}$ .

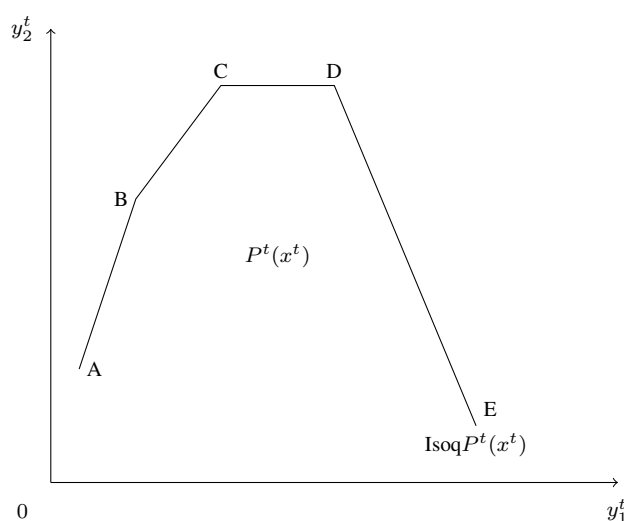


FIGURE 2 – Correspondance en outputs et ses sous-ensembles

La figure 2 est la représentation graphique d'une correspondance en outputs  $P^t(x^t)$ . Nous nous plaçons dans un espace à deux dimensions tel que les facteurs de production permettent de produire deux outputs  $y_1^t$  et  $y_2^t$ . L'isoquant de  $P^t(x^t)$  pour un niveau donné d'inputs est décrit par les segments reliant les points A, B, C, D et E. Le sous-ensemble faiblement efficient est quant à lui représenté par le segment  $[CD]$  puisqu'il est toujours possible de produire plus d'outputs  $y_1^t$  pour un même niveau d'outputs  $y_2^t$ . Les combinaisons optimaux d'outputs produits pour un même niveau d'inputs correspondent au segment  $[DE]$ . Par conséquent, celui-ci est le sous-ensemble

efficient de  $P^t(x^t)$ .

### 1.1.3 Le Graphe de la Technologie

Le graphe de la technologie  $T^t(x^t, y^t)$  peut être définie comme étant l'ensemble de tous les vecteurs d'inputs et d'outputs réalisables. De manière formelle, sa définition est présentée ci-dessous.

Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  et tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$ , le graphe de la technologie  $T^t(x^t, y^t)$  est l'ensemble :

$$\begin{aligned} T^t(x^t, y^t) &= \{x^t \in \mathbb{R}_+^m : y^t \text{ peut être produit par } x^t\} \\ &\equiv \{y^t \in \mathbb{R}_+^n : x^t \text{ peut produire } y^t\} \\ &= \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \in L^t(y^t) \Leftrightarrow y^t \in P^t(x^t)\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Les propriétés des correspondances en inputs et en outputs peuvent être condensées pour caractériser les axiomes auxquels le graphe de la technologie  $T^t(x^t, y^t)$  peut être associé (Shephard (1953, 1970)).

- T1 : Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  si  $(0, y^t) \in T^t(x^t, y^t)$  alors,  $y^t = 0$ .
- T2 : Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ ,  $T^t(x^t, y^t)$  est bornée.
- T3 : Pour tout  $(x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t)$  et Pour tout  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  alors,  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) \in T^t(x^t, y^t)$  si  $(x^t, -y^t) \leq (\hat{x}^t, -\hat{y}^t)$ .
- T4 : Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ ,  $T^t(x^t, y^t)$  est fermée.
- T5 : Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ ,  $T^t(x^t, y^t)$  est convexe.
- T6 : Pour tout  $\lambda \geq 1$ ,  $(\lambda x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t)$  si  $(x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t)$ .
- T7 : Pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,  $(x^t, \theta y^t) \in T^t(x^t, y^t)$  si  $(x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t)$ .

L'hypothèse T1 stipule qu'il n'est pas possible de produire des outputs avec une quantité nulle d'inputs. T2 signifie qu'on ne peut produire une infinité d'outputs avec une quantité finie d'inputs. L'axiome T3 fait référence à la libre disposition forte des inputs et des outputs. T4 garantit l'existence d'une frontière de production fermée et T5 impose la convexité de l'ensemble. T6 et T7 sont respectivement les propriétés relatives à la libre disposition faible des inputs et des outputs.

Il est également possible d'associer le graphe de la technologie aux sous-ensembles ci-dessous.

— Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ ,

$$IsoqT^t(x^t, y^t) = \{(x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t) : (\lambda x^t, \lambda^{-1} y^t) \notin T^t(x^t, y^t), \forall \lambda \in ]0, 1[ \}$$

est l'isoquant du graphe de la technologie.

— Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ ,

$$\begin{aligned} \partial^W T^t(x^t, y^t) = \{ (x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t) : (x^t, -y^t) \geq (\hat{x}^t, -\hat{y}^t), \\ (x^t, -y^t) > (\hat{x}^t, -\hat{y}^t) \Rightarrow (\hat{x}^t, \hat{y}^t) \notin T^t(x^t, y^t) \} \end{aligned}$$

est le sous-ensemble faiblement efficient de  $T^t(x^t, y^t)$ .

— Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ ,

$$\begin{aligned} \partial T^t(x^t, y^t) = \{ (x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t) : (x^t, -y^t) \geq (\hat{x}^t, -\hat{y}^t), \\ (x^t, -y^t) \neq (\hat{x}^t, -\hat{y}^t) \Rightarrow (\hat{x}^t, \hat{y}^t) \notin T^t(x^t, y^t) \} \end{aligned}$$

est le sous-ensemble efficient de  $T^t(x^t, y^t)$ .

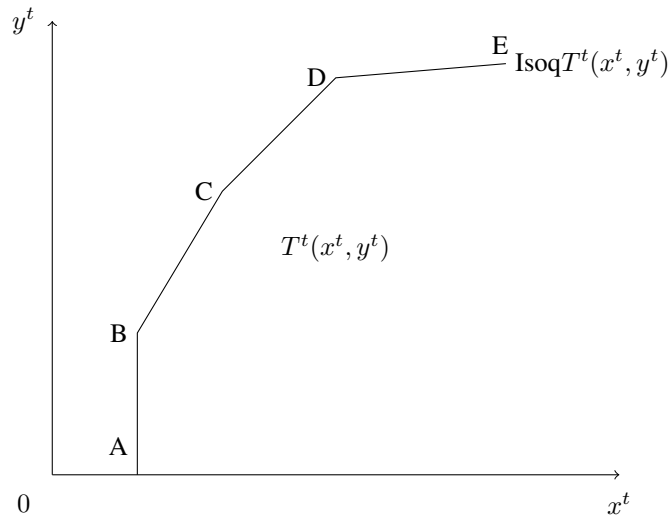


FIGURE 3 – Graphe de la technologie et sous-ensembles

La figure 3 est la représentation du graphe de la technologie  $T^t(x^t, y^t)$  dans un espace à deux dimensions où un facteur de production permet de produire un output. La frontière de production est décrite par les segments reliant les points  $A, B, C, D$  et  $E$ . Le sous-ensemble faiblement efficient correspond au segment  $[AB]$  puisqu'il est toujours possible de produire plus d'outputs en utilisant la même quantité d'inputs. Le sous-ensemble fortement efficient est constitué des segments reliant les points  $B, C$  et  $D$  car il n'est plus possible d'augmenter la production pour un niveau donné d'inputs ou de baisser l'utilisation des facteurs pour une quantité fixe d'extrants.

## 1.2 Modélisations

Dans la sous-partie précédente, les notions générales des correspondances de la technologie de production ont été présentées. Ces concepts peuvent être modélisés à travers différentes méthodes d'estimation à savoir les approches paramétriques et les modèles non-paramétriques. Dans un cadre paramétrique, la méthode privilégiée par les auteurs est l'approche par la frontière stochastique (SFA) initiée par Aigner, Lovell et Schmidt (1977) et, Meeusen et Van den Broeck (1977). Elle rentre dans la lignée des estimations économétriques et consiste à considérer l'inefficacité technique comme étant une variable aléatoire. Dans cette thèse, on ne présente que les modélisations non-paramétriques et notamment, l'approche par l'enveloppement des données (DEA) introduite par Charnes et al. (1978).

### 1.2.1 Les Fondements de la méthode DEA

La méthode DEA proposée par Charnes et al. (1978) trouve son inspiration dans les travaux de Farrell (1957) et de Afriat (1972). Farrell (1957) s'est appuyé sur les travaux de Debreu (1951) et de Koopmans (1951) afin de mesurer l'efficacité des unités de production par rapport à une frontière de production linéaire par morceaux. Celle-ci est constituée par l'ensemble des meilleures pratiques possibles (benchmark) qui représentent des références. La méthode DEA est une méthode qualifiée de non-paramétrique qui ne nécessite aucune spécification de la forme fonctionnelle de la technologie. Elle permet mesurer l'efficacité technique des unités de décision (DMU) homogènes<sup>1</sup> et, de déterminer les benchmarks auxquels les DMUs inefficaces devraient se référer. Par

---

1. Qui utilisent les mêmes inputs et produisent les mêmes outputs

ailleurs, elle peut considérer des technologies de production à multiple inputs et à multiple outputs, contrairement aux méthodes d'estimation économétriques standards.

L'estimation des scores d'efficacité s'effectue par l'optimisation du programme présenté ci-dessous.

Soit un ensemble  $\mathcal{J}$  d'unités de production qui utilisent  $m$  inputs pour produire  $n$  outputs. Le score de chaque DMU  $j$  est déterminé relativement aux autres DMUs tel que  $j \in \mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$ . Ainsi, il est nécessaire de résoudre le programme d'optimisation primal ci-dessous pour chaque unité de décision. Soit la DMU 1 dont on souhaite connaître le score, le programme qui lui est associé se présente comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{u,v} \frac{\sum_{r=1}^n v_r^t y_{r,1}^t}{\sum_{i=1}^m u_i^t x_{i,1}^t} \\ \text{s.c} \quad &\frac{\sum_{r=1}^n v_r^t y_{r,j}^t}{\sum_{i=1}^m u_i^t x_{i,j}^t} \leq 1 \quad j = 1, \dots, J \\ &u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned}$$

Il est évident que le programme ci-dessus est non-linéaire et ne peut être évalué de manière non paramétrique. Pour ce faire, une normalisation est alors effectuée afin d'obtenir le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{u,v} \sum_{r=1}^n v_r^t y_{r,1}^t \\ \text{s.c} \quad &\sum_{i=1}^m u_i^t x_{i,1}^t = 1 \\ &\sum_{r=1}^n v_r^t y_{r,j}^t \leq \sum_{i=1}^m u_i^t x_{i,j}^t \quad j = 1, \dots, J \\ &u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned}$$

Ce programme d'optimisation est particulièrement lourde notamment lorsqu'il existe un nombre assez conséquent de DMUs à évaluer puisque chaque optimisation comporte  $(J + m + n + 1)$  contraintes. Cependant, il est possible de retrouver les scores d'efficacité à partir de la version

duale qui ne nécessite que  $m + n$  contraintes. Le programme dual de la DMU 1, est présenté ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 \lambda^* &= \min_{\lambda, \theta} \lambda_1^t \\
 \text{s.c} \quad \lambda_1 x_{i,1}^t &\geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t x_{i,j}^t & i = 1, \dots, m \\
 y_{r,1}^t &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t y_{r,j}^t & r = 1, \dots, n \\
 \lambda &\geq 0, \quad \theta \geq 0.
 \end{aligned}$$

Chaque variable  $\theta$  est une pondération associée à une unité de décision. Elle donne une indication quant à la proportion à laquelle l'entité de production évaluée devrait s'inspirer de l'unité de décision associée à  $\theta$  afin d'être efficiente. Elle sert également à satisfaire la contrainte de convexité de l'ensemble de production. Ainsi, on peut dire que cette variable permet d'obtenir des informations quant aux gains potentiels en terme d'efficience technique et quant à l'existence d'un référent.

### 1.2.2 Les Modèles CCR, BCC et leurs Extensions

Dans leurs travaux, Charnes et al. (1978) imposent aux pondérations  $\theta^t$  une valeur positive ou nulle. Cette contrainte permet de cantonner leur analyse dans un cadre à rendements d'échelle constants (CRS<sup>2</sup>). De ce fait, l'ensemble de production est constitué du plus petit cône polyédrique convexe contenant toutes les observations. Cette contrainte de rendements d'échelle constants peut être formalisée de la manière suivant :

$$\Theta_{CRS} = \{\theta^t \in \mathbb{R}^J \mid \theta_j^t \geq 0, j \in \mathcal{J}\}.$$

La figure 4 présente la frontière de production DEA sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants dans un espace à deux dimensions tel qu'un input permet de produire un output. La frontière à deux dimensions est entièrement linéaire. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  situés le long de cette droite sont techniquement efficaces tandis que les observations  $D$  et  $E$  sont des points inefficaces.

---

2. Constant Returns-to-Scale

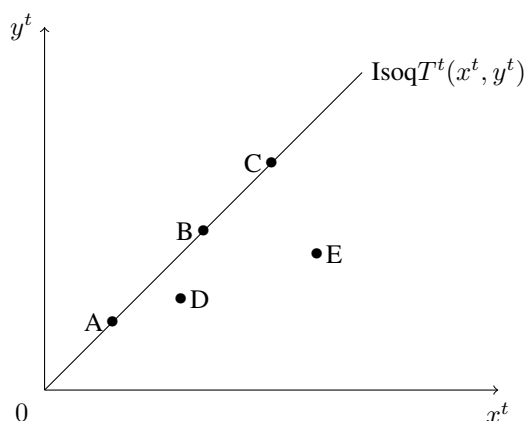


FIGURE 4 – Modèle à rendements d'échelle constants

Dans la pratique, toutes les unités de décision n'opèrent pas sous le même rendement d'échelle dans leur processus de production. Banker et al. (1984) étendent les travaux de Charnes et al. (1978) dans un contexte de rendements d'échelle variables (VRS<sup>3</sup>). La distinction entre les deux modèles proposés se trouve au niveau de la contrainte sur les pondérations. Le premier modèle à rendements d'échelle constants est plus connu sous l'acronyme CCR tandis que le second modèle à rendements d'échelle variables a pour acronyme BCC, du nom de leurs auteurs. Ainsi, la frontière de production de ce dernier est linéaire par morceaux et est localement à rendements d'échelle croissants, constants et décroissants. Formellement, cette contrainte est définie comme suit :

$$\Theta_{VRS} = \{\theta^t \in \mathbb{R}^J : \theta_j^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1, j \in \mathcal{J}\}.$$

La figure 5 décrit une frontière de production à rendements d'échelle variables dans un processus de production où un input permet de produire un output. Les points  $B$ ,  $C$  et  $D$ , situés sur la frontière de production, sont des unités de production techniquement efficaces tandis que le point  $E$  situé en-dessous de la frontière est inefficace. Le segment qui relie les points  $A$  et  $B$  est la partie de la frontière efficace qui correspond localement à des rendements d'échelle croissants. Le point  $B$  représente la section à rendement d'échelle constant de la frontière tandis que les segments reliant les points  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont les parties relatives aux rendements d'échelle décroissants.

Nous pouvons spécifier deux autres types de rendements d'échelle qui existent dans la litté-

---

3. Variable Returns-to-Scale



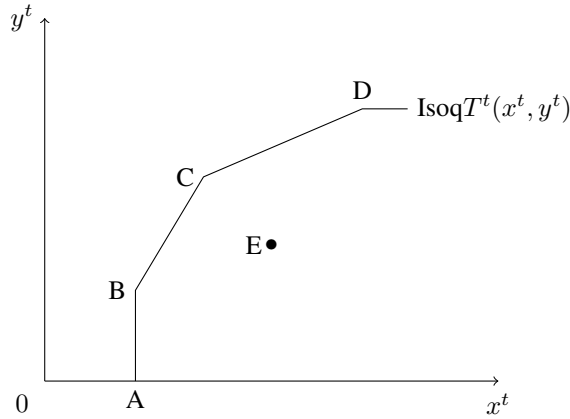


FIGURE 5 – Modèle à rendements d'échelle variables

ture.

Dans la même démarche que Charnes et al. (1978) et Banker et al. (1984), Grosskopf (1986) identifie les rendements d'échelle non-décroissants (NDRS<sup>4</sup>). Ils se traduisent par une contrainte sur les pondérations  $\theta^t$  qui est définie de la manière suivante :

$$\Theta_{NDRS} = \{\theta^t \in \mathbb{R}^J : \theta_j^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \geq 1, j \in \mathcal{J}\}.$$

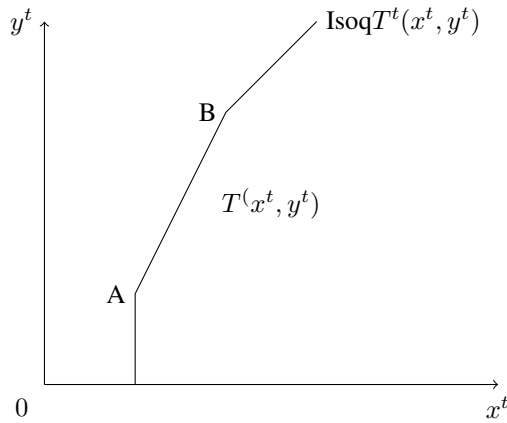


FIGURE 6 – Modèle à rendements d'échelle non décroissants

La figure 6 représente une frontière de production DEA dans le cadre des rendements d'échelle non décroissants de telle sorte que tous les points situés sur cette frontière opèrent sous l'hypothèse de rendements d'échelle soit constants soit croissants.

4. Non Decreasing Returns-to-Scale

Seiford (1990) présente quant à lui, les rendements d'échelle non-croissant (NIRS<sup>5</sup>). Ainsi, l'ensemble de production inclut le point d'origine  $(0, 0)$  et la spécification de ce type de rendements d'échelle est faite par la contrainte suivante :

$$\Theta_{NIRS} = \{\theta^t \in \mathbb{R}^J : \theta_j^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \leq 1, j \in \mathcal{J}\}.$$

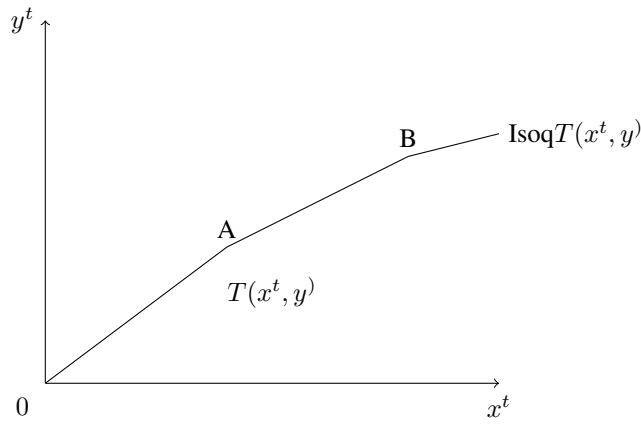


FIGURE 7 – Modèle à rendements d'échelle non croissants

La figure 7 décrit une frontière DEA pour laquelle tous les points appartenant à la frontière ont des rendements d'échelle soit constants soit décroissants. Dans ce cas, les rendements d'échelle sont au plus constants.

Grâce aux travaux de Charnes et al. (1978) et à la contribution des autres auteurs, on peut définir de manière formelle la technologie de production DEA comme suit :

$$T_{DEA}(x^t, y^t) = \left\{ (x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t x_j^t, \quad y^t \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t y_j^t, \quad \theta^t \in \Theta \right\} \quad (1.4)$$

où  $\Theta \in \{\Theta_{CRS}, \Theta_{VRS}, \Theta_{NDRS}, \Theta_{NIRS}\}$ .

---

5. Non Increasing Returns-to-Scale

### 1.2.3 Les Modèles Non Convexes

Les modèles présentés dans les deux sous-sections précédentes opèrent dans le cadre d'une hypothèse de convexité de l'ensemble de production. Il est néanmoins possible que les technologies de production soient non-convexes. Cette dernière situation est la conséquence de la particularité des processus de production individuels.

Banker et Maindiratta (1986) remarquent que la technologie linéaire par morceaux présentée Banker et al.(1984) dans le cadre des rendements d'échelle variables, requiert des productivités marginales non-croissantes. Afin de pallier à cette limite, ils introduisent une technologie multiplicative ( $T_{CD}$ ) non-convexe de type Cobb-Douglas qui permet de tenir compte de ces productivités marginales croissantes. Dans ce cas, la fonction de production est localement concave et l'ensemble de production est non-convexe. Cette technologie de production est définie comme suit :

$$T_{CD}^t(x^t, y^t) = \left\{ (x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \geq \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t}, \quad y^t \leq \prod_{j \in \mathcal{J}} (y_j^t)^{\theta_j^t}, \quad \theta^t \in \Theta \right\}. \quad (1.5)$$

La technologie multiplicative satisfait les propriétés suivantes :

$T_{CD}1$  : Pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{CD}^t$  et  $\theta^t \geq 0$  avec  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1$  alors,  $\left( \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t}, \prod_{j \in \mathcal{J}} (y_j^t)^{\theta_j^t} \right) \in T_{CD}^t$ .

$T_{CD}2$  : Pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{CD}^t$ , si  $(x^t, -y^t) \leq (\hat{x}^t, -\hat{y}^t)$  alors,  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) \in T_{CD}^t$ .

$T_{CD}3$  : Pour tout  $\hat{T}_{CD}$  satisfaisant  $T_{CD}1$ - $T_{CD}2$ , alors  $T_{CD}^t = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \hat{T}_{CD,j}^t$  avec  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{CD}^t$ .

La première propriété fait référence à l'hypothèse de convexité géométrique tandis que la deuxième stipule que la technologie multiplicative satisfait la libre disposition des inputs et des outputs. Le dernier axiome stipule que la technologie globale est l'intersection de toutes les technologies satisfaisant les deux postulats précédents. Celui-ci correspond au principe de l'extrapolation minimale.

En appliquant une transformation logarithmique, les auteurs retrouvent la technologie linéaire par morceaux de Banker et al. (1984) de telle sorte que  $\tilde{x}^t = \ln x^t$  et  $\tilde{y}^t = \ln y^t$ . Ainsi, la technologie multiplicative devient :

$$T_{ln}^t(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) = \left\{ (\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n} : \tilde{x}^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \tilde{x}_j^t, \quad \tilde{y}^t \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \tilde{y}_j^t, \quad \theta^t \in \Theta \right\}. \quad (1.6)$$

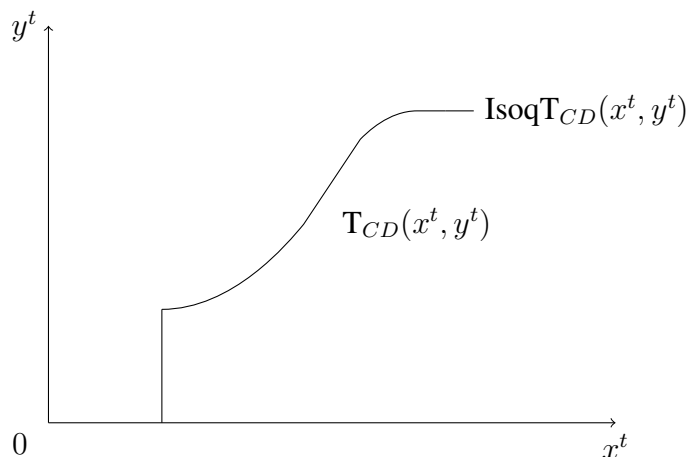


FIGURE 8 – Technologie Multiplicative

La figure 8 présente une frontière de production multiplicative au sens de Banker et Maindiratta (1986). La linéarisation de l'ensemble de production par une transformation logarithmique exclut l'origine c'est-à-dire le point  $(0, 0)$  du domaine de définition de l'ensemble.

Solow (1956) et Arrow et al. (1961) présentent la fonction de production CES<sup>6</sup>. Celle-ci intègre l'existence d'une élasticité de substitution constante entre le facteur travail et le facteur capital. Cette fonction peut être considérée comme une généralisation des fonctions de production Cobb-Douglas et Leontieff. En s'inspirant de Solow (1956) et de Arrow et al. (1961), Powell et Gruen (1968) proposent quant à eux, la fonction de production CET<sup>7</sup> afin de prendre en compte la substituabilité entre deux types de productions. Suite à ces travaux, Färe et al. (1988) présentent une nouvelle technologie de production CES-CET de telle sorte que les correspondances en inputs et en outputs soient caractérisées respectivement par les fonctions CES et CET. Les auteurs présentent cette technologie CES-CET comme étant une technologie de référence qui donne une formulation généralisée des technologie de production présentées par Banker et al. (1984) et par Banker et Maindiratta (1986).

6. Constant Elasticity of Substitution.

7. Constant Elasticity of Transformation

La technologie CES-CET est définie de la manière suivante :

$$T_{\alpha,\beta}^t = \left\{ (x^t, y^t) : x^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_j^t)^{\alpha^t} \right)^{1/\alpha^t}, y^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_j^t)^{\beta^t} \right)^{1/\beta^t}, \theta \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\}. \quad (1.7)$$

A partir de la technologie CES-CET, il est possible de retrouver les ensembles de production sus mentionnés lorsque les conditions suivantes sont remplies :

- $T_{\alpha,\beta}^t = T_{DEA}^t$  si  $\alpha = \beta = 1$  ;
- $T_{\alpha,\beta}^t = T_{CD}^t$  si  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ .

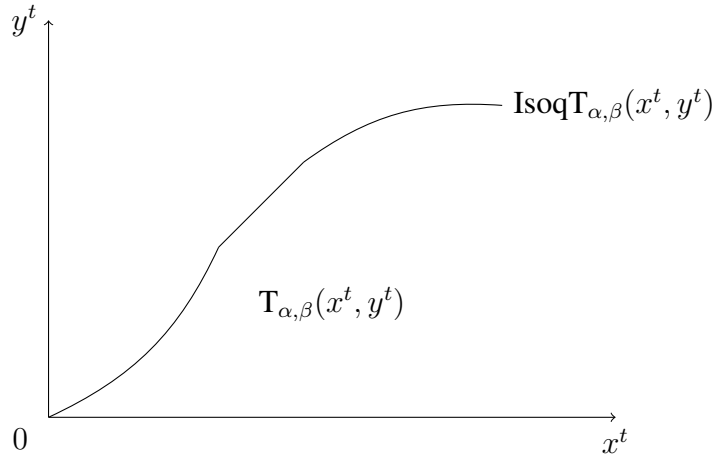


FIGURE 9 – Technologie CES-CET

La figure 9 décrit une technologie CES-CET qui présente trois différents rendements d'échelle à savoir croissants, constants et décroissants. Il est évident que cet ensemble de production est non-convexe localement notamment lorsque le rendement d'échelle est croissant. Cependant, les auteurs démontrent que les correspondances en inputs  $L_{\alpha,\beta}^t(y^t)$  et en outputs  $P_{\alpha,\beta}^t(x^t)$  sont respectivement convexes lorsque  $\alpha \leq 1$  et  $\beta \geq 1$ . Par ailleurs, lorsque les deux correspondances sont simultanément convexes, il peut en être déduit que l'ensemble de production  $T_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t)$  est également convexe.

Boussemart et al. (2009) proposent un modèle à "rendements d'échelle  $\alpha$ " basé sur la technologie CES-CET présentée par Färe et al. (1988). Notons que dans un souci de clarté, nous nous référerons à l'expression "rendements d'échelle  $\gamma$ " afin de désigner la notion de "rendements d'échelle  $\alpha$ ". Dans leurs travaux, les auteurs affirment que cet ensemble de production satisfait les axiomes

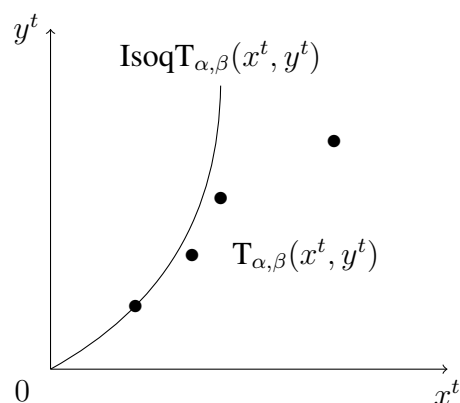


FIGURE 10 – Rendements d'échelle croissants

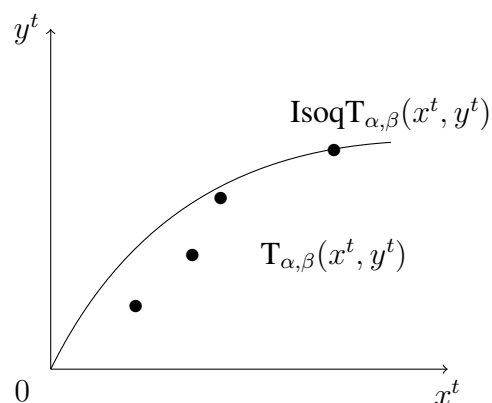


FIGURE 11 – Rendements d'échelle croissants

T1-T4 du graphe de la technologie. En utilisant la technologie de production CES-CET, Boussemart et al. (2009) démontrent que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la technologie CES-CET donnent des indications sur les rendements d'échelle globaux  $\gamma$  de l'ensemble référence tel que  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ . Ce modèle permet de trouver de manière endogène le rendement d'échelle global  $\gamma$  pour lequel le plus grand nombre de DMU est le moins inefficent possible grâce à l'extrapolation minimale (Boussemart et al. (2018)). De ce fait, la technologie de production CES-CET satisfait des rendements d'échelle :

- croissants si  $\alpha > \beta \implies \gamma > 1$  ;
- constants si  $\alpha = \beta \implies \gamma = 1$  ;
- décroissants si  $\alpha < \beta \implies \gamma < 1$ .

Les figures 10 et 11 décrivent respectivement l'enveloppement des données sous l'hypothèse de rendements d'échelle croissants et décroissants. Le premier graphique ne satisfait pas l'hypothèse de convexité de l'ensemble de production tandis que le second représente une frontière de production classique vérifiant l'axiome de convexité.

## **2 Les Mesures d'Efficacité et la Caractérisation de la Technologie**

Dans la section précédente, les concepts généraux des ensembles et des sous-ensembles de production mais également, la modélisation non paramétrique ont été présentés. Cette section est quant à elle, dédiée à l'exposition des mesures d'efficacité dans le cadre des processus productifs à multiple inputs et à multiple outputs.

Dans la théorie de la production, il est difficile de connaître mais également d'imposer une fonction de production (ou de transformation) qui décrirait au mieux le processus de production des unités productives. Par ailleurs, les fonctions de production ne permettent pas la prise en compte des technologies à multiple outputs. Afin de pallier à cette difficulté, les auteurs ont proposé une mesure alternative de l'efficacité dans un cadre multi-outputs à travers les fonctions de distance. Celles-ci estiment l'écart entre l'unité de production et la frontière efficiente. Elles peuvent être exprimées tant d'un point de vue primal que dual. Suite aux travaux de Shephard (1953, 1970), nous savons également qu'elles caractérisent complètement les technologies de production.

### **2.1 Les Fonctions de Distance**

Structurellement, une fonction de distance peut prendre une forme soit multiplicative soit additive. Par ailleurs, elles sont soit radiales soit non-radiales. Les sous-sections ci-dessous détaillent les mesures de distance les plus couramment utilisées dans la littérature.

#### **2.1.1 Les Mesures de Debreu-Farrell**

Farrell (1957) propose des mesures d'efficacité en s'inspirant des travaux de Debreu (1951). Celles-ci se présentent comme étant l'inverse des fonctions de distance de Shephard (1953). Lorsque la mesure est orientée en inputs, elle donne la proportion à laquelle les inputs utilisés peuvent être réduits à un niveau minimal pour une quantité donnée d'outputs. Dans une orientation en outputs, elle permet l'expansion maximale des extrants pour un niveau donné d'intrants. Dans cette sous-section, les fonctions de distance de Shephard sont définies brièvement tandis que les mesures de Debreu-Farrell sont exposées plus en détail.

La fonction de distance de Shephard orientée en input est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 D_I^t &: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\
 D_I^t(x^t, y^t) &= \begin{cases} \sup_{\lambda > 0} \left\{ \lambda^t : \left( \frac{x^t}{\lambda^t}, y^t \right) \in T^t \right\} & \text{si } \left( \frac{x^t}{\lambda^t}, y^t \right) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \sup_{\lambda > 0} \left\{ \lambda^t : \frac{x^t}{\lambda^t} \in L^t(y^t) \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Lorsque l'unité de production est efficiente,  $D_I^t(x, y) = 1$ .

Comme la mesure d'efficacité de Debreu-Farrell est l'inverse de celle de Shephard, on peut la définir de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 E_I^t &: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\
 E_I^t(x^t, y^t) &= \begin{cases} \inf_{\lambda \geq 0} \{ \lambda^t : (\lambda^t x^t, y^t) \in T^t \} & \text{si } (\lambda^t x^t, y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \inf_{\lambda \geq 0} \{ \lambda^t : \lambda^t x^t \in L^t(y^t) \}.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Si la correspondance en inputs satisfait les axiomes L1-L8, alors la mesure de Farrell vérifie les propriétés suivantes :

$E_I1$  : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  alors,  $E_I^t(x^t, 0) = 0$ .

$E_I2$  : Pour tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  alors,  $E_I^t(x^t, y^t) \in [0, +\infty[$ .

$E_I3$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $E_I^t(\lambda^t x^t, y^t) = (\lambda^t)^{-1} E_I^t(x^t, y^t)$ .

$E_I4$  : Pour tout  $\theta^t \geq 1$ ,  $E_I^t(x^t, \theta^t y^t) \geq E_I^t(x^t, y^t)$ .

$E_I5$  : Pour tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$  et s'il y a libre disposition faible des inputs alors,

$$L^t(y^t) = \{x^t : 0 \leq E_I^t(x^t, y^t) \leq 1\}.$$

$E_I6$  : Pour tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $IsoqL^t(y^t) = \{x^t : E_I^t(x^t, y^t) = 1\}$ .

$E_I7$  : Pour tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$  si  $u^t \geq x^t$  alors,  $E_I^t(x^t, y^t) \geq E_I^t(u^t, y^t)$ .

Le premier axiome stipule que lorsque la production est nulle, la mesure d'efficacité de Farrell est nulle également. La seconde propriété donne une définition précise du domaine de définition de la mesure tandis que  $E_I3$  se réfère à l'homogénéité de degré (-1) en inputs de la fonction. La



quatrième hypothèse signifie que la mesure est non-décroissante en outputs.  $E_I5$  indique que sous l'hypothèse de libre disposition faible des inputs, elle est permet la caractérisation complète de la technologie de production. La frontière de production techniquement efficiente est caractérisée par les unités de production dont la mesure de Farrell est égale à 1 ( $E_I6$ ). Enfin, lorsqu'il y a forte disposition des inputs, la mesure est faiblement monotone.

De manière analogue, il est possible de définir les mesures de Shephard et de Debreu-Farrell selon une orientation en outputs.

La fonction de distance de Shephard orientée en output est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 D_O^t & : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\
 D_O^t(x^t, y^t) &= \begin{cases} \inf_{\lambda > 0} \left\{ \lambda^t : \left( x^t, \frac{y^t}{\lambda^t} \right) \in T^t \right\} & \text{si } \left( x^t, \frac{y^t}{\lambda^t} \right) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \inf_{\lambda > 0} \left\{ \lambda^t : \frac{y^t}{\lambda^t} \in P^t(x^t) \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ainsi, lorsque l'unité de décision est techniquement efficiente, alors  $D_O^t(x^t, y^t) = 1$ .

De ce fait, la mesure de Debreu-Farrell en output a pour définition :

$$\begin{aligned}
 E_O^t & : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\
 E_O^t(x^t, y^t) &= \begin{cases} \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : (x^t, \lambda^t y^t) \in T^t \right\} & \text{si } (x^t, \lambda^t y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \lambda^t y^t \in P^t(x^t) \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Lorsque la correspondance en outputs satisfait les propriétés P1-P8, alors la mesure de Debreu-Farrell vérifie les axiomes suivants :

$E_O1$  : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $E_O^t(x^t, 0) = \infty$ .

$E_O2$  : Pour tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  si  $y \neq 0$  alors,  $E_O^t(x^t, y^t) \in [0, +\infty[$ .

$E_O3$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  si  $(x^t, y^t) \in T^t$  et, si  $y^t \neq 0$ ,  $E_O^t(x^t, \lambda^t y^t) = (\lambda^t)^{-1} E_O^t(x^t, y^t)$ .

$E_O4$  : Pour tout  $\theta^t \geq 1$ ,  $E_O^t(\theta^t x^t, y^t) \geq E_O^t(x^t, y^t)$ .

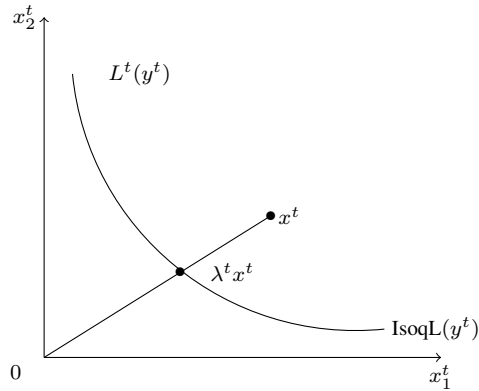


FIGURE 12 – Mesure de Debreu-Farrell en input

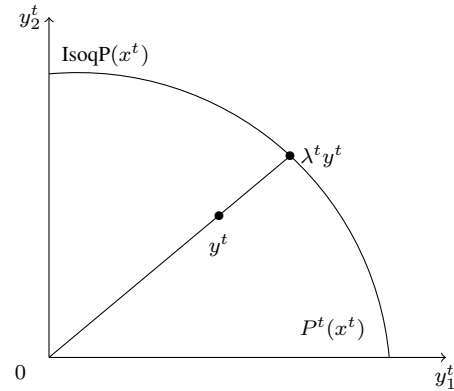


FIGURE 13 – Mesure de Debreu-Farrell en output

$E_{O5}$  : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  et s'il y a libre disposition faible des outputs alors,

$$P^t(x^t) = \{y^t : E_O^t(x^t, y^t) \geq 1\} \text{ pour } P^t(x^t) \neq \{0\}.$$

$E_{O6}$  : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $IsoqP^t(x^t) = \{y^t : E_O^t(x^t, y^t) = 1\}$ .

$E_{O7}$  : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  si  $v^t \geq y^t$  alors,  $E_O^t(x^t, y^t) \geq E_O^t(x^t, v^t)$ .

Le premier axiome stipule que lorsque le vecteur des inputs est nul alors la mesure de Debreu-Farrell en output est indéfini. La deuxième propriété donne le domaine de définition de la mesure. Les troisième et quatrième hypothèses concernent respectivement l'homogénéité de degré (-1) de la mesure et sa nature non-décroissante en inputs. ( $E_{O5}$ ) signifie que lorsqu'il y a libre disposition faible des outputs alors, la technologie est parfaitement caractérisée par la mesure. Le sixième axiome stipule que lorsqu'une unité de production est techniquement efficiente alors, sa mesure de Debreu-Farrell est égale à 1. Enfin, la dernière propriété est relative à la faible monotonie de la mesure lorsque les outputs sont fortement disponibles.

Les figures 12 et 13 décrivent respectivement la contraction maximale des inputs pour un niveau donné d'output et l'expansion maximale de la production pour une quantité donnée de facteurs. Les mesures de Debreu-Farrell et de Shephard sont dites radiales car les unités techniquement inefficientes sont projetées sur les frontières efficientes par le biais d'une droite passant par l'origine. De ce fait les grandeurs obtenues sont des mesures proportionnelles. La distance radiale entre l'observation initiale et la projection constitue la mesure de l'efficacité technique.

La figure 14 présente les mesures de Debreu-Farrell orientées en input et en output dans un

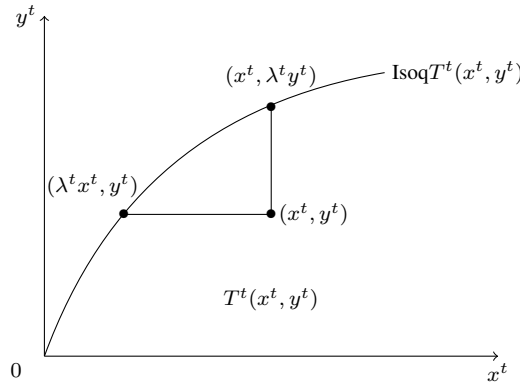


FIGURE 14 – Mesures de Debreu-Farrell dans le graphe de la technologie

espace à deux dimensions où un facteur produit un extrant. Rappelons que ces mesures permettent uniquement soit la contraction des inputs soit l'expansion des outputs.

### 2.1.2 La Fonction de Distance Directionnelle

La fonction de distance directionnelle a été introduite pour la première fois par Luenberger (1992a) dans la théorie du consommateur sous le nom de "Benefit Function" (fonction de bénéfice). L'auteur a, par la suite, transposé cette fonction en économie de la production sous le nom de "Shortage Function" (Luenberger (1992b, 1995)). De par les travaux de Chambers et al. (1996) qui ont repris ce concept, cette fonction est plus connue comme étant la fonction de distance directionnelle (FDD). Contrairement aux mesures de Debreu-Farrell qui ne permettent d'agir que dans une orientation soit en input soit en output, la FDD rend également possible une analyse dans le graphe de la technologie. Lorsque l'étude est faite dans le graphe, le score d'efficacité obtenu permet la contraction maximale des inputs et l'expansion maximale des outputs simultanément selon une direction  $g^t$  préalablement choisie.

Ainsi, pour toute direction  $g^t = (h^t, k^t)$  tel que  $h^t \in \mathbb{R}_+^m$  et  $k^t \in \mathbb{R}_+^n$ , la fonction de distance

directionnelle est définie comme suit :

$$D^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

$$D^t(x^t, y^t; g^t) = \begin{cases} \sup_{\delta \geq 0} \{\delta^t : (x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t) \in T^t\} & \text{si } (x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.12)$$

Cette définition de la FDD concerne une analyse globale dans le graphe telle que le vecteur de direction est  $g^t = (h^t, k^t)$ . Comme les autres mesures présentées précédemment, la FDD satisfait les propriétés suivantes :

D1 : Si  $(x^t, y^t) \in T^t$  alors,  $D^t(x^t, y^t; g) \geq 0$ .

D2 : Pour tout  $\alpha^t \in \mathbb{R}$ ,  $D^t(x^t - \alpha^t h^t, y^t + \alpha^t k^t; g^t) = D^t(x^t, y^t; g^t) - \alpha^t$ .

D3 : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $D^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; g^t) = \lambda^t D^t(x^t, y^t; g^t)$ .

D4 : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $D^t(x^t, y^t; \lambda^t g^t) = (\lambda^t)^{-1} D^t(x^t, y^t; g^t)$ .

D5 : Pour tout  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  et Pour tout  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$ , si  $(u^t, -v^t) \geq (x^t, -v^t)$  alors,  $D^t(u^t, v^t; g^t) \geq D^t(x^t, y^t; g^t)$ .

Le premier axiome stipule que la fonction de distance directionnelle permet de caractériser parfaitement la technologie de production. Le deuxième hypothèse indique que la mesure est translation homothétique. Les propriétés (D3) et (D4) signifient respectivement que sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la fonction est homogène de degré 1 et qu'elle est homogène de degré (-1) par rapport à la direction  $g^t$ . Le dernier axiome stipule que s'il y a libre disposition des inputs et des outputs alors, la fonction est non-décroissante en  $x^t$  et non-croissante en  $y^t$ .

La figure 15 décrit le processus de projection de l'unité de production  $(x^t, y^t)$  dans la direction  $g = (h, k)$ . Cette dernière est choisie préalablement de telle sorte que le couple  $(x^t, y^t)$  est translaté par le vecteur direction sur la frontière efficiente de la technologie de production.

Lorsque la direction fixée est  $g^t = (h^t, 0)$ , la FDD devient orientée en input et est définie de la

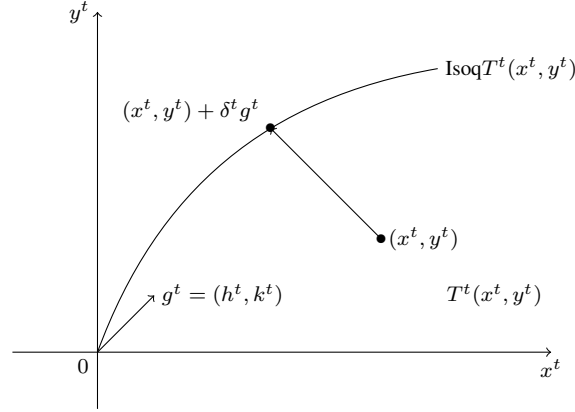


FIGURE 15 – Fonction de Distance Directionnelle orientée dans le graphe

manière suivante :

$$D_I^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

$$D_I^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \begin{cases} \sup_{\delta \geq 0} \{\delta^t : (x^t - \delta^t h^t, y^t) \in T^t\} & \text{si } (x^t - \delta^t h^t, y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.13)$$

De manière analogue à la fonction définie dans le graphe, celle-ci satisfait également certaines propriétés telles que :

$D_I1$  : Si  $x^t \in L^t(y^t)$  alors,  $D_I^t(x^t, y^t; h^t, 0) \geq 0$ .

$D_I2$  : Pour tout  $\alpha^t \in \mathbb{R}$ ,  $D_I^t(x^t - \alpha^t h^t, y^t; h^t, 0) = D_I^t(x^t, y^t; h^t, 0) - \alpha^t$ .

$D_I3$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $D_I^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, 0) = \lambda^t D_I^t(x^t, y^t; h^t, 0)$ .

$D_I4$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $D_I^t(x^t, y^t; \lambda^t h^t, 0) = (\lambda^t)^{-1} D_I^t(x^t, y^t; h^t, 0)$ .

$D_I5$  : Pour tout  $x^t \in L^t(y^t)$  et Pour tout  $u^t \in L^t(y^t)$ , si  $u^t \geq x^t$  alors,  $D_I^t(u^t, y^t; h^t, 0) \geq D_I^t(x^t, y^t; h^t, 0)$ .

( $D_I1$ ) et ( $D_I2$ ) indiquent respectivement que la fonction orientée en input permet de caractériser complètement la technologie de production et qu'elle est translation homothétique. Les axiomes ( $D_I3$ ) et ( $D_I4$ ) signifient respectivement que la fonction est homogène de degré 1 sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants et homogène de degré (-1) par rapport à la direction  $g^t$ . Enfin, la dernière propriété stipule que la fonction est non-décroissante en  $x^t$  lorsqu'il y a libre disposition des inputs.

En fixant la direction  $g^t = (0, k^t)$ , on obtient une FDD orientée en output dont la définition est la suivante :

$$D_O^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

$$D_O^t(x^t, y^t; 0, k^t) = \begin{cases} \sup_{\delta \geq 0} \{\delta^t : (x^t, y^t + \delta^t k^t) \in T^t\} & \text{si } (x^t, y^t + \delta^t k^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.14)$$

Cette mesure orientée en output vérifie les propriétés comme ci-dessous :

D<sub>O</sub>1 : Si  $y^t \in P^t(x^t)$  alors,  $D_O^t(x^t, y^t; 0, k^t) \geq 0$ .

D<sub>O</sub>2 : Pour tout  $\alpha^t \in \mathbb{R}$ ,  $D_O^t(x^t, y^t + \alpha^t k^t; 0, k^t) = D_O^t(x^t, y^t; 0, k^t) - \alpha^t$ .

D<sub>O</sub>3 : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $D_O^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; 0, k^t) = \lambda^t D_O^t(x^t, y^t; 0, k^t)$ .

D<sub>O</sub>4 : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $D_O^t(x^t, y^t; 0, \lambda^t k^t) = (\lambda^t)^{-1} D_O^t(x^t, y^t; 0, k^t)$ .

D<sub>O</sub>5 : Pour tout  $y^t \in P^t(x^t)$  et Pour tout  $v^t \in P^t(x^t)$ , si  $y^t \geq v^t$  alors,  $D_O^t(x^t, v^t; 0, k^t) \geq D_O^t(x^t, y^t; 0, k^t)$ .

Les deux premiers axiomes (D<sub>O</sub>1) et (D<sub>O</sub>2) signifient que la fonction orientée en output caractérise la technologie de production et qu'elle est translation homothétique. (D<sub>O</sub>3) et (D<sub>O</sub>4) font respectivement référence à l'homogénéité de degré 1 de la mesure lorsque les rendements d'échelle sont constants et à son homogénéité de degré (-1) par rapport à la direction. Quant à la dernière propriété, elle stipule que lorsque les outputs sont librement disponibles, la fonction est non-croissante en  $y^t$ .

Les figures 16 et 17 décrivent respectivement les fonctions de distance directionnelle orientées en input et en output. Notons que contrairement aux mesures de Debreu-Farrell, les mesures directionnelles sont non-radiales puisque la réduction des facteurs ou l'expansion des produits se font dans une direction préalablement définie. Ainsi, les unités de production sont translatées par un vecteur de direction sur la frontière efficiente.

Chambers et al. (1996a) démontrent que les FDD orientées en input et en output peuvent être reliées aux mesures de Debreu-Farrell sous certaines conditions. Lorsque le vecteur de direction

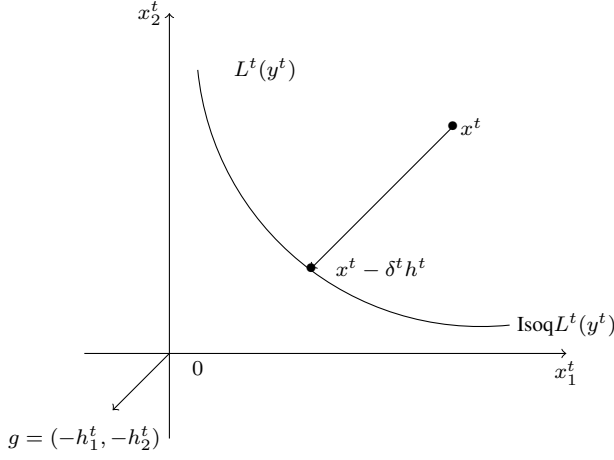


FIGURE 16 – Fonction de Distance Directionnelle orientée en input

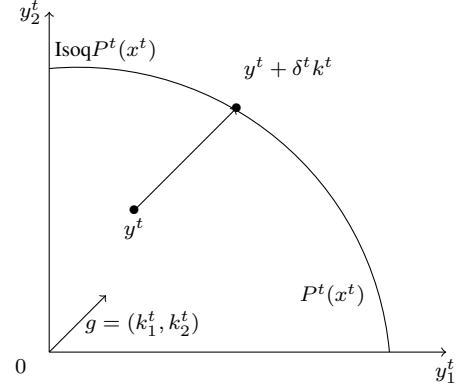


FIGURE 17 – Fonction de Distance Directionnelle orientée en output

choisi est  $g^t = (x^t, 0)$  alors, nous avons la relation suivante :

$$D_I^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - E_I^t(x^t, y^t) = 1 - \frac{1}{D_I^t(x^t, y^t)}.$$

L'équivalence entre la mesure de Debreu-Farrell en extrants et la FDD orientée en output peut être établie lorsque  $g^t = (0, y^t)$ . De ce fait nous avons la relation qui suit :

$$D_O^t(x^t, y^t; 0, y^t) = E_O^t(x^t, y^t) - 1 = \frac{1}{D_O^t(x^t, y^t)} - 1.$$

### 2.1.3 La Fonction de Distance Proportionnelle

Indépendamment des travaux de Luenberger (1992a, 1992b, 1995), Briec (1997) propose la fonction de distance proportionnelle (FDP) qui permet la réduction et l'expansion proportionnelles et simultanées des inputs et des outputs. Dans ses travaux, Briec (1997) présente cette fonction comme étant une généralisation des mesures de Debreu-Farrell et la nomme "mesure proportionnelle de Farrell". De manière générale, pour toutes matrices diagonales  $A = \text{diag}(\alpha^t) \in \mathbb{R}_+^m$  et  $B = \text{diag}(\beta^t) \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$ , la fonction de distance proportionnelle pondérée est

définie comme suit :

$$D_{\alpha,\beta}^{\infty,t} : \mathbb{R}_+^{m+n} \times [0, 1]^{m+n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t) = \begin{cases} \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \{ \delta^t : ((I - \delta^t A) x^t, (I + \delta^t B) y^t) \in T^t \} & \text{si } ((I - \delta^t A) x^t, (I + \delta^t B) y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.15)$$

Soit l'opération algébrique définie sur  $\mathbb{R}^s$  suivante :

$$u \odot v = (u_1 v_1, \dots, u_s v_s).$$

Cette définition permet de donner l'expression détaillée de la mesure proportionnelle ci-dessous :

$$D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t) = \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \{ \delta^t : (x^t - \delta^t \alpha^t \odot x^t, y^t + \delta^t \beta^t \odot y^t) \in T^t \}$$

.

De par cette caractérisation, il est évident que lorsque l'unité de production est techniquement efficiente, la mesure est nulle. Certains auteurs considèrent cette fonction de distance proportionnelle comme étant un cas spécial de la FDD lorsque le vecteur de direction choisi est  $g^t = (x^t, y^t)$ . Néanmoins, afin que les deux fonctions de distances coïncident, il est nécessaire que la FDP ne soit pas pondérée ou que les matrices de pondération soient des matrices identité c'est-à-dire  $(\alpha^t, \beta^t) = (\mathbb{1}_m, \mathbb{1}_n)$ . De ce fait, cette fonction de distance non pondérée a pour définition :

$$D^{\infty,t}(x^t, y^t) = \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \{ \delta^t : ((1 - \delta^t) x^t, (1 + \delta^t) y^t) \in T^t \}$$

.

Cependant, Russell et Schworm (2011) remarquent que la FDD et la FDP vérifient des propriétés différentes. Ainsi, cette dernière satisfait les axiomes suivants :

$D^\infty 1$  : Si  $(x^t, y^t) \in T^t$  alors,  $(D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t) \geq 0$ .

$D^\infty 2$  : Pour tout  $\delta^t \in \mathbb{R}$ ,  $D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t - \delta^t \alpha^t \odot x^t, y^t + \delta^t \beta^t \odot y^t) = D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t) - \delta^t$ .

$D^\infty 3$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) = D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t)$ .



$D^{\infty}4$  : Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , si  $(u^t, -v^t) \geq (x^t, -y^t)$  alors,  $D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(u^t, v^t) \geq D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t)$ .

$D^{\infty}5$  : Pour tout  $\lambda^t \geq 1$  on a  $D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(\lambda^t x^t, y^t) \geq D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t)$  et, Pour tout  $\theta \in [0, 1]$  on a  $D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, \theta^t y^t) \geq D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t)$ .

$D^{\infty}6$  : Pour tout  $(\omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  si  $\hat{x}^t = x^t \odot \omega_x$  et  $\hat{y}^t = y^t \odot \omega_y$  avec  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) \in T$  alors  $D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(\hat{x}^t, \hat{y}^t) = D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t)$ .

$(D^{\infty}1)$  signifie que  $D_{\alpha,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t)$  permet de caractériser la technologie de production.  $(D^{\infty}2)$  et  $(D^{\infty}3)$  stipulent respectivement qu'elle est translation homothétique et qu'elle est homogène de degré 0 sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Lorsqu'il y a libre disposition des inputs et des outputs, la fonction est non-décroissante en  $x^t$  et non-croissante en  $y^t$  ( $D^{\infty}4$ ). L'avant dernière propriété indique que la libre disposition faible des inputs et des outputs engendre une variation proportionnelle de la mesure. Notons que cette fonction de distance satisfait l'hypothèse de commensurabilité (Russell (1987)) c'est-à-dire qu'elle est indépendante des unités de mesure. Elle est présentée par l'axiome ( $D^{\infty}6$ ). De manière comparative, il est évident que la FDD et la FDP ne satisfont pas exactement les mêmes propriétés. En effet, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la FDD est homogène de degré 1 tandis que la FDP l'est de degré 0. Par ailleurs, cette dernière vérifie l'axiome de commensurabilité tandis que la FDD ne le satisfait pas.

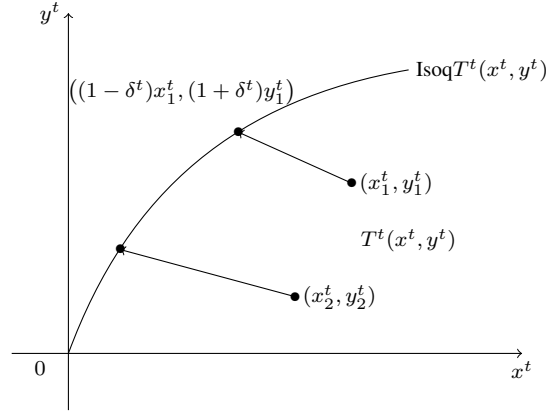


FIGURE 18 – Fonction de Distance Proportionnelle orientée dans le graphe

Dans un espace à deux dimensions, la figure 18 décrit la FDP dans le graphe telle que  $(\alpha^t, \beta^t) = (1, 1)$ . Il est évident que les deux unités de production  $(x_1^t, y_1^t)$  et  $(x_2^t, y_2^t)$  sont projetées dans deux directions différentes puisque leur vecteur de direction équivaut aux observations.

Cette mesure d'efficacité proportionnelle peut également être définie en input ou en output.

Ainsi, lorsque  $\beta^t = 0$ , la fonction est axée sur les intrants et est caractérisée de la manière suivante :

$$ID_{\alpha,0}^{\infty,t} : \mathbb{R}_+^{m+n} \times [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t) = \begin{cases} \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \{\delta^t : ((I - \delta^t A)x^t, y^t) \in T^t\} & \text{si } ((I - \delta^t A)x^t, y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.16)$$

La fonction orientée en input satisfait les propriétés présentées ci-dessous :

ID<sup>∞</sup>1 : Si  $(x^t, y^t) \in T^t$  alors,  $ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t) \geq 0$ .

ID<sup>∞</sup>2 : Pour tout  $\delta^t \in \mathbb{R}$ ,  $ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t - \delta^t \alpha^t \odot x^t, y^t) = ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t) - \delta^t$ .

ID<sup>∞</sup>3 : Pour tout  $\lambda^t > 0$ ,  $ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) = ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t)$ .

ID<sup>∞</sup>4 : Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , si  $u^t \geq x^t$  alors,  $ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(u^t, y^t) \geq ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t)$ .

ID<sup>∞</sup>5 : Pour tout  $\lambda^t \geq 1$  on a  $ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(\lambda^t x^t, y^t) \geq ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t)$  et, Pour tout  $\theta \in [0,1]$  on a

$$ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, \theta^t y^t) \geq ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t).$$

ID<sup>∞</sup>6 : Pour tout  $(\omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  si  $\hat{x}^t = x^t \odot \omega_x$  et  $\hat{y}^t = y^t \odot \omega_y$  avec  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) \in T$  alors

$$ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(\hat{x}^t, \hat{y}^t) = ID_{\alpha,0}^{\infty,t}(x^t, y^t).$$

Il est évident que ces hypothèses sont les mêmes que celles concernant la fonction définie dans le graphe de la technologie. Ainsi, les axiomes (ID<sup>∞</sup>1), (ID<sup>∞</sup>2) et (ID<sup>∞</sup>3) font respectivement référence à la caractérisation de la technologie par la mesure de l'efficacité, à sa translation homothéticité et à son homogénéité de degré 0 sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Les deux propriétés suivante sont relatives à la disponibilité forte des facteurs et à la disponibilité faible des intrants et des extrants. Enfin, le dernier axiome concerne la commensurabilité de la mesure orientée en input.

Lorsque  $\alpha^t = 0$ , nous obtenons une FDP orientée en output comme suit :

$$OD_{0,\beta}^{\infty,t} : \mathbb{R}_+^{m+n} \times [0,1]^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$OD_{0,\beta}^{\infty,t}(x^t, y^t) = \begin{cases} \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \{\delta^t : (x^t, (I + \delta^t B)y^t) \in T^t\} & \text{si } (x^t, (I + \delta^t B)y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.17)$$

Il est admis que cette mesure axée sur les extrants vérifie les propriétés suivantes :



$x^t$ . Il en est de même pour la correspondance en outputs (figure 20). De ce fait, on peut affirmer que la FDP est une mesure radiale qui peut être considérée comme une généralisation des mesure de Debreu-Farrell.

Suite à cette dernière affirmation, on peut établir une relation d'équivalence entre les mesures de Debreu-Farrell et la FDP lorsque certaines conditions sont remplies. Ainsi, pour  $(\alpha^t, \beta^t) = (\mathbb{1}_m, 0)$ , la FDP et la mesure de Debreu-Farrell orientées en input sont reliées de telle sorte que :

$$ID_{\mathbb{1}_m, 0}^{\infty, t}(x^t, y^t) = 1 - E_I^t(x^t, y^t).$$

Par ailleurs, lorsque  $(\alpha^t, \beta^t) = (0, \mathbb{1}_n)$ , la FDP orientée en output peut être obtenue grâce à la mesure de Debreu-Farrell en output. Cette relation est caractérisée par :

$$OD_{0, \mathbb{1}_n}^{\infty, t}(x^t, y^t) = E_O^t(x^t, y^t) - 1.$$

Remarquons que les relations entre les FDP et les mesures de Debreu-Farrell sont similaires à celles entre les FDD et les mesures de Debreu-Farrell (sous-section 2.1.2). En effet, puisque les FDD et la FDP sont équivalentes lorsque  $g^t = (x^t, y^t)$  alors, il est cohérent de retrouver les mêmes relations d'équivalence avec les mesures de Debreu-Farrell.

## 2.2 La Théorie de la Dualité

Hotelling (1932) fait le lien entre le changement du profit et la variation de l'offre et de la demande. Plus connue sous le nom de *Lemme de Hotelling*, cette relation est le point de départ de la théorie de la dualité. Shephard (1953, 1970) formalise la dualité qui existe entre les fonctions de production et les fonctions de coût. McFadden (1978) quant à lui, étend l'analyse aux fonctions de revenu et de profit. Nous savons que la fonction de production décrit la technologie de production, et que cette dernière peut être caractérisée par les mesures de distance. De ce fait, une relation duale existe également entre les fonctions de distance et les fonctions de coût, de revenu et de profit.

### 2.2.1 La Fonction de Coût

La fonction de coût peut être définie grâce à la correspondance des facteurs. Soit le vecteur prix des intrants  $w^t = (w_1^t, \dots, w_m^t) \in \mathbb{R}_+^m$  associé au vecteur des inputs  $x^t \in \mathbb{R}_+^n$ . Ainsi, le coût minimum de production peut être défini comme suit :

$$\begin{aligned} C^t &: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ C^t(w^t, y^t) &= \begin{cases} \inf_x \{w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in T^t\} & \text{si } L^t(y^t) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \inf_x \{w^t \cdot x^t : x^t \in L^t(y^t)\}. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses T1-T7 du graphe de la technologie, la fonction de coût, vérifie les propriétés suivantes :

- C1 : Pour tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  on a,  $C^t(w^t, 0) = 0$ .
- C2 : Pour tout  $(w^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  alors,  $C^t(w^t, y^t) > 0$ .
- C3 : Pour tout  $w^t, \hat{w}^t \in \mathbb{R}_+^m$  si  $\hat{w}^t \geq w^t$  alors,  $C^t(\hat{w}^t, y^t) \geq C^t(w^t, y^t)$ .
- C4 : Pour tout  $\hat{y}^t, y^t \in \mathbb{R}_+^n$  si  $\hat{y}^t \geq y^t$  alors,  $C^t(w^t, \hat{y}^t) \geq C^t(w^t, y^t)$ .
- C5 : Pour tout  $\lambda > 0$  on a,  $C^t(\lambda w^t, y^t) = \lambda C^t(w^t, y^t)$ .
- C6 :  $C^t(w^t, y^t)$  est concave et continue en  $w^t$ .
- C7 : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, Pour tout  $\lambda > 0$  alors,  $C^t(w^t, \lambda y^t) = \lambda C^t(w^t, y^t)$ .
- C8 : Si  $T^t(x^t, y^t)$  est convexe alors,  $C^t(w^t, y^t)$  est également convexe en  $y^t$ .

L'axiome C1 stipule que les coûts fixes ne sont pas pris en considération tandis que C2 indique que toute production effective engendre des coûts non nuls. Les propriétés C3 et C4 concernent respectivement la monotonie de la fonction de coût en  $w^t$  et en  $y^t$ . L'hypothèse C5 signifie que la fonction est semi-homogène de degré 1 en prix. Cette propriété implique C6. L'axiome C7 concerne la semi-homogénéité de degré 1 en outputs de la mesure lorsque les rendements d'échelle sont constants.

Comme mentionnée précédemment, il existe une relation duale entre la fonction de coût et la technologie de production. Celle-ci peut être exprimée grâce à la correspondance en inputs lorsque

$L^t(y^t)$  satisfait les hypothèses L1-L7. Ce sous-ensemble peut être défini par la structure des prix tel que :

$$\begin{aligned} L^t(y^t) &= \{x^t \in \mathbb{R}_+^m : w^t \cdot x^t \geq C^t(w^t, y^t), w^t \in \mathbb{R}_+^m\} \\ &= \bigcap_{w \geq 0} \{x^t \in \mathbb{R}_+^m : w^t \cdot x^t \geq C^t(w^t, y^t)\}. \end{aligned}$$

La dernière définition est liée au théorème de séparation des convexes tel que le sous-ensemble convexe  $L^t(y^t)$  est constitué par l'intersection de tous les demi-plans qui le contiennent.

Sous certaines hypothèses, une relation duale existe entre la fonction de coût et les fonctions de distance orientées en input. En effet, ces dernières caractérisent la correspondance en intrants or, celle-ci peut également être exprimée par la fonction de coût. Ainsi, la dualité entre la fonction de distance de Shephard en input et la fonction de coût peut être établie comme suit.

Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$  et tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$ , si  $L^t(y^t)$  satisfait L1-L7 alors,

$$\begin{aligned} C^t(w^t, y^t) &= \inf_x \{w^t \cdot x^t : D_I^t(x^t, y^t) = 1\} \\ D_I^t(x^t, y^t) &= \inf_{w \geq 0} \{w^t \cdot x^t : C^t(w^t, y^t) = 1\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le *Lemme de Shephard* indique qu'il est possible d'obtenir la fonction de demande conditionnelle des facteurs grâce à la fonction de coût. Ce lemme a son dual qui permet de dériver la fonction de prix ajustés des facteurs grâce à la technologie de production (*Lemme dual de Shephard*). Ainsi, aux points où la fonction de coût est différentiable par rapport aux prix des facteurs, si elle admet un minimum  $x^{*,t}(w^t, y^t)$  alors, le *Lemme de Shephard* permet de déduire que :

$$\nabla_w C^t(w^t, y^t) = x^{*,t}(w^t, y^t).$$

Si la FDS en input est différentiable par rapport aux facteurs alors, le *Lemme dual de Shephard* stipule que :

$$\nabla_x D_I^t(x^t, y^t) = w^{*,t}(x^t, y^t)$$

où  $w^{*,t}(x^t, y^t) = \arg \min_w \{w^t \cdot x^t : C^t(w^t, y^t) = 1\}$ .

De manière analogue, nous pouvons établir une relation duale entre la FDD axée sur les intrants et la fonction de coût. Si  $L^t(y^t)$  vérifie les axiomes L1-L7 alors, quel que soit  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  avec  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  :

$$\begin{aligned} C^t(w^t, y^t) &= \inf_x \{w^t \cdot x^t - D^t(x^t, y^t; h^t, 0) : D^t(x^t, y^t; h^t, 0) \geq 0\} \\ D^t(x^t, y^t; h^t, 0) &= \inf_{w \geq 0} \{w^t \cdot x^t - C^t(w^t, y^t) : w^t \cdot h^t = 1\}. \end{aligned}$$

Grâce au *Lemme de Shephard* et au *Lemme dual de Shephard*, aux points où la FDD orientée en input et la fonction de coût sont différentiables, nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_w C^t(w^t, y^t) &= x^{*,t}(w^t, y^t; h^t, 0), \\ \nabla_x D^t(x^t, y^t; h^t, 0) &= w^{*,t}(x^t, y^t; h^t, 0), \end{aligned}$$

où,  $x^{*,t}(w^t, y^t; h^t, 0)$  et  $w^{*,t}(x^t, y^t; h^t, 0)$  sont respectivement la fonction de demande conditionnelle et la fonction de prix ajustés.

Cette dualité entre la fonction de coût et les fonctions de distance s'applique également à la FDP. En effet, rappelons que lorsque  $g^t = (x^t, 0)$ , la FDD coïncide avec la FDP.

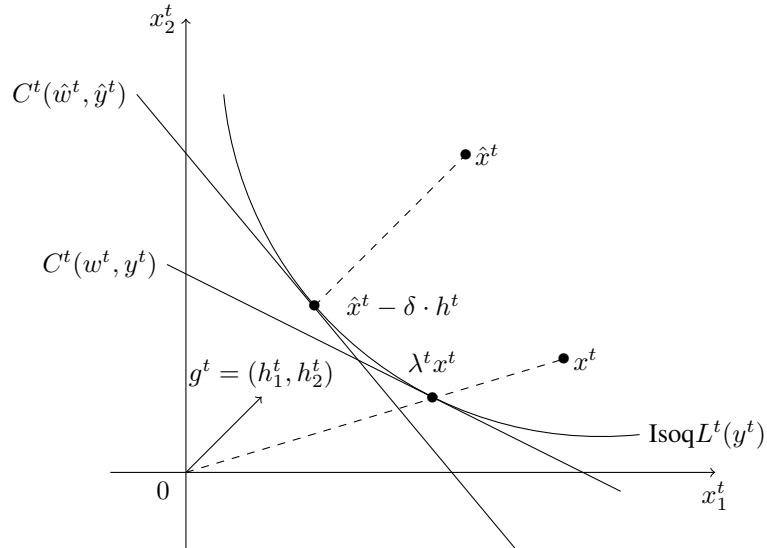


FIGURE 21 – Mesures d'efficacité, fonction de coût et dualité.

La Figure 21 illustre la dualité entre les fonctions de distance et la fonction de coût. Soient les observations inefficientes  $(x^t, y^t)$  et  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t)$ . Leur projection sur l'isoquant de  $L^t(y^t)$  permet de

minimiser les coûts. En effet, en ce point, le vecteur prix permet de déterminer le vecteur optimal d'inputs qui minimise les coûts.

### 2.2.2 La Fonction de Revenu

La fonction de revenu peut être définie sur la base soit, de la technologie de production soit, de la correspondance en outputs. Pour tout vecteur prix des outputs  $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t) \in \mathbb{R}_+^n$  associé au vecteur d'outputs  $y^t \in \mathbb{R}_+^n$ , le revenu maximal de la production est défini par :

$$R^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$R^t(p^t, x^t) = \begin{cases} \sup_y \{p^t \cdot y^t : (x^t, y^t) \in T^t\} & \text{si } P^t(x^t) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \sup_y \{p^t \cdot y^t : y^t \in P^t(x^t)\}.$$

Lorsque la technologie de production satisfait les hypothèses T1-T7, on admet que la fonction de revenu satisfait les propriétés ci-dessous :

- R1 : Pour tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  on a  $R^t(p^t, 0) = 0$ .
- R2 : Pour tout  $(p^t, x^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  alors,  $R(p^t, x^t) > 0$ .
- R3 : Pour tout  $p^t, \hat{p}^t \in \mathbb{R}_+^n$  si  $\hat{p}^t \geq p^t$  alors,  $R(\hat{p}^t, x^t) \geq R(p^t, x^t)$ .
- R4 : Pour tout  $x^t, \hat{x}^t \in \mathbb{R}_+^m$  si  $\hat{x}^t \geq x^t$  alors,  $R(p^t, \hat{x}^t) \geq R(p^t, x^t)$ .
- R5 : Pour tout  $\lambda > 0$  on a,  $R(\lambda p^t, x^t) = \lambda R(p^t, x^t)$ .
- R6 :  $R(p^t, x^t)$  est convexe et continue en  $p^t$ .
- R7 : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, Pour tout  $\lambda > 0$  on a,  $R(p^t, \lambda x^t) = \lambda R(p^t, x^t)$ .
- R8 : Si  $T^t(x^t, y^t)$  est convexe alors,  $R(p^t, x^t)$  est concave en  $y^t$ .

L'axiome R1 stipule qu'il n'y a pas de repas gratuit. La propriété R2 signifie qu'une utilisation des inputs induit un revenu non nul. Les axiomes R3 et R4 font respectivement référence à la monotonie de la fonction de revenu par rapport aux prix et aux inputs. La propriété R5 implique que la fonction est positivement semi-homogène de degré 1 par rapport aux prix et celle-ci induit directement l'axiome R6. L'hypothèse R7 concerne l'homogénéité de degré 1 de la fonction de revenu lorsque les rendements d'échelle sont constants.



Lorsque la correspondance en outputs satisfait P1-P7, la relation duale qui existe entre la fonction de revenu et la technologie de production permet d'exprimer ce sous-ensemble de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P^t(x^t) &= \{y^t \in \mathbb{R}_+^n : p^t \cdot y^t \leq R^t(p^t, x^t), p^t \in \mathbb{R}_+^n\} \\ &= \bigcap_{p \geq 0} \{y^t \in \mathbb{R}_+^n : p^t \cdot y^t \leq R^t(p^t, x^t)\}. \end{aligned}$$

Ainsi, selon le théorème de la séparation des convexes, le sous-ensemble  $P^t(x^t)$  est formé par l'intersection de tous les demi-plans le contenant.

Les fonctions de distance axées sur les extrants permettent de caractériser la correspondance en outputs et donc, la technologie de production. Puisqu'une relation duale existe entre le sous-ensemble  $P^t(x^t)$  et la fonction de revenu, cette dernière est donc duale aux mesures de distance orientées en outputs. Ainsi, la FDS en output et la fonction de revenu peuvent être redéfinie de la manière suivante.

Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$  et  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$ , si  $P^t(x^t)$  satisfait P1-P7 alors :

$$\begin{aligned} R^t(p^t, x^t) &= \sup_y \{p^t \cdot y^t : D_O^t(x^t, y^t) = 1\} \\ D_O^t(x^t, y^t) &= \sup_{p \geq 0} \{p^t \cdot y^t : R^t(p^t, x^t) = 1\}. \end{aligned}$$

Le *Lemme de Shephard* et le *Lemme dual de Shephard* permettent respectivement de déduire la fonction d'offre conditionnelle et la fonction de prix ajustés des produits. Par conséquent, lorsque la fonction de revenu est différentiable par rapport aux prix des outputs nous avons :

$$\nabla_p R^t(p^t, x^t) = y^{*,t}(p^t, x^t),$$

où  $y^{*,t}(p^t, x^t)$  est la fonction d'offre conditionnelle.

De plus, si la FDS en output est également différentiable relativement aux outputs alors,

$$\nabla_y D_O^t(x^t, y^t) = p^{*,t}(x^t, y^t)$$

tel que  $p^{*,t}(x^t, y^t) = \arg \min_p \{p^t \cdot y^t : R^t(p^t, x^t) = 1\}$  est la fonction de prix ajustés.

Comme dans la sous-section précédente, il est possible de traduire la relation duale qui existe entre la FDD orientée en output et la fonction de revenu comme suit.

Si  $P^t(x^t)$  satisfait les propriétés P1-P7 alors, pour tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  :

$$\begin{aligned} R^t(p^t, x^t) &= \sup_y \{p^t \cdot y^t + D^t(x^t, y^t; 0, k^t)p^t \cdot k^t : D^t(x^t, y^t; 0, k^t) \geq 0\} \\ D^t(x^t, y^t; 0, k^t) &= \inf_{w \geq 0} \{R^t(p^t, x^t) - p^t \cdot y^t : p^t \cdot k^t = 1\}. \end{aligned}$$

De plus, lorsque la fonction de revenu et la FDD orientée en output sont respectivement différentiables par rapport aux prix des produits et aux extrants, le *Lemme de Shephard* et le *Lemme dual de Shephard* permettent d'établir que :

$$\begin{aligned} \nabla_p R^t(p^t, x^t) &= y^{*,t}(p^t, x^t; 0, k^t) \\ \nabla_y D^t(x^t, y^t; 0, k^t) &= p^{*,t}(x^t, y^t; 0, k^t). \end{aligned}$$

Lorsque le vecteur de direction  $g^t = (0, y^t)$ , on retrouve la FDP non-pondérée. Dans ce cas, la théorie de la dualité peut également être appliquée à cette mesure.

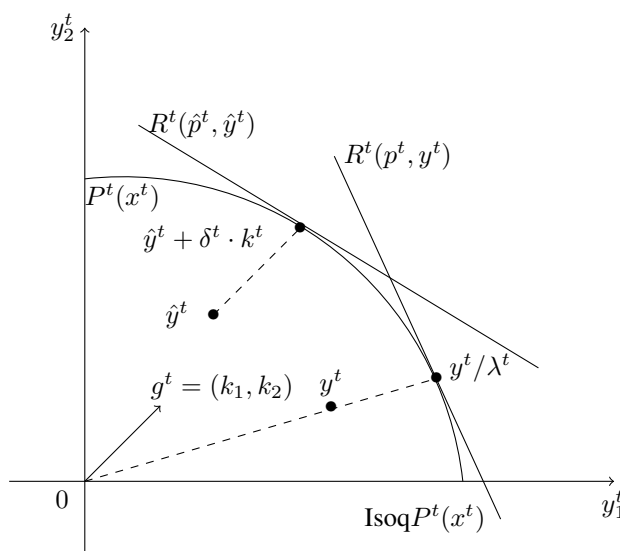


FIGURE 22 – Mesures de performance, fonction de revenu et dualité.

La figure 22 décrit le principe de la dualité entre les fonctions de coût et les fonctions de distance. Les unités de production  $(x^t, y^t)$  et  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t)$  étant inefficaces, la projection de ces unités

sur la frontière efficiente permet de déterminer le vecteur prix des produits qui permet de maximiser le revenu.

### 2.2.3 La Fonction de Profit

La fonction de profit représente le bénéfice des entités de production et repose sur la technologie de production. Soient  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  les vecteurs prix associés respectivement aux inputs  $x^t \in \mathbb{R}_+^m$  et aux outputs  $y \in \mathbb{R}_+^n$ . Le profit maximal est défini par la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \Pi^t & : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \Pi^t(w^t, p^t) & = \begin{cases} \sup_{(x,y)} \{p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in T^t\} & \text{si } T^t(x^t, y^t) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsque les axiomes T1-T7 sont satisfaits par la technologie alors, la fonction de profit vérifie les propriétés suivantes :

Π1 : Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , on a  $\Pi^t(0, 0) = 0$ .

Π2 : Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  alors,  $\Pi^t(w^t, p^t) \geq 0$ .

Π3 : Pour tout  $(\hat{w}^t, \hat{p}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , si  $\hat{w}^t \geq w^t$  et  $\hat{p}^t \geq p^t$  alors,  $\Pi^t(\hat{w}^t, \hat{p}^t) \geq \Pi^t(w^t, p^t)$ .

Π4 : Pour tout  $\lambda > 0$ , on a  $\Pi^t(\lambda w^t, \lambda p^t) = \lambda \Pi^t(w^t, p^t)$ .

Π5 :  $\Pi^t(w^t, p^t)$  est convexe et continue en  $w^t$  et en  $p^t$ .

Π6 : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, soit  $\Pi^t(w^t, p^t) = 0$  soit,  $\Pi^t(w^t, p^t) = +\infty$ .

L'axiome (Π1) stipule qu'il n'y a pas de repas gratuit. (Π2) signifie qu'une utilisation effective des facteurs et une production effective induisent un profit non-nul tandis que le point  $(0, 0)$  est toujours réalisable. Les propriétés (Π3) et (Π4) font respectivement référence à la monotonie de la fonction de profit et à sa semi-homogénéité de degré 1 par rapport aux prix. L'hypothèse (Π5) découle directement de la (Π4). (Π6) est une conséquence de la structure de la technologie lorsque les rendements d'échelle sont constants.

La fonction de profit permet de représenter le graphe de la technologie, lorsque celui-ci respecte

les axiomes T1-T7. Par conséquent, nous pouvons établir que :

$$\begin{aligned} T^t(x^t, y^t) &= \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t \leq \Pi^t(w^t, p^t), (w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}\} \\ &= \bigcap_{(w,p) \geq 0} \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t \leq \Pi^t(w^t, p^t)\}. \end{aligned}$$

Cette dernière définition est déduite directement du théorème de séparation des convexes. En effet, le graphe de la technologie est constitué par l'intersection de tous les demi-plans qui le contiennent.

Une relation duale existe entre les fonctions de mesure définies dans le graphe et la fonction de profit. Ce résultat est dû aux travaux de Luenberger(1992a,1992b,1995) ainsi que de Chambers, Chung et Färe (1998). Sachant que les FDS et les mesures de Debreu-Farrell ne sont orientées que soit en input soit en output, celles-ci ne sont donc pas liées de manière duale aux fonctions de profit. Dans ces conditions, nous pouvons définir la dualité entre la FDD orientée dans le graphe et la fonction de profit comme ci-dessous.

Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$ , si  $T^t(x^t, y^t)$  satisfait T1-T7 alors,

$$\begin{aligned} \Pi^t(w^t, p^t) &= \sup_{(x,y)} \{p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t + D^t(x^t, y^t; h^t, k^t)(w^t \cdot h^t + p^t \cdot k^t)\} \\ D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) &= \inf_{(w,p) \geq 0} \{\Pi^t(w^t, p^t) - (p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t) : w^t \cdot h^t + p^t \cdot k^t = 1\}. \end{aligned}$$

Lorsque la fonction de profit est différentiable par rapport aux prix des inputs et des outputs, le *Lemme de Shephard* permet de déduire les fonctions de demande et d'offre conditionnelles comme suit :

$$\begin{aligned} \nabla_w \Pi^t(w^t, p^t) &= x^{*,t}(w^t, y^t; h^t, k^t), \\ \nabla_p \Pi^t(w^t, p^t) &= y^{*,t}(x^t, p^t; h^t, k^t). \end{aligned}$$

Le *Lemme dual de Shephard* donne quant à lui, la possibilité de trouver les fonctions de prix ajustés (ou prix implicites) qui représentent les prix d'équilibre lorsque le marché est librement concurrentiel. De ce fait, ils permettent la maximisation du profit. Par conséquent, lorsque la FDD est différentiable par rapport aux facteurs et aux produits, les fonctions de prix implicites sont

représentées par :

$$\begin{aligned}\nabla_x D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) &= w^{*,t}(x^t, y^t; h^t, k^t), \\ \nabla_y D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) &= -p^{*,t}(x^t, y^t; h^t, k^t).\end{aligned}$$

L'ensemble des prix implicites, qui vérifie la représentation duale de la fonction de distance orientée dans le graphe, est défini par la correspondance des prix ajustés suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^t &: \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^{m+n} \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{m+n}} \\ \mathcal{P}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) &= \arg \min_{(w,p) \geq 0} \{ \Pi^t(w^t, p^t) - (p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t) : p^t \cdot k^t + w^t \cdot h^t = 1 \}.\end{aligned}$$

Notons que lorsque  $g^t = (x^t, y^t)$ , la FDD est équivalente à la FDP à laquelle la théorie de la dualité dans le graphe de la technologie peut être appliquée.

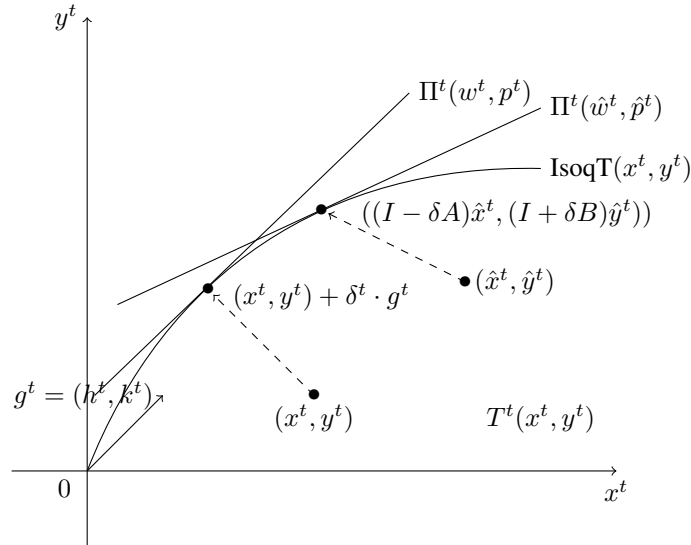


FIGURE 23 – Mesures d'efficacité, fonction de profit et dualité.

La figure 23 présente le processus de dualité entre les mesures de distance orientées dans le graphe et la fonction de profit. Les unités de production étant inefficaces, leur projection sur la droite de profit donne le score d'efficacité technique. Par ailleurs, il en résulte les prix ajustés permettant la maximisation du profit si le marché est parfaitement concurrentiel. Au point d'intersection des hyperplans qui correspond à une observation, les vecteurs prix vérifiant l'optimisation

de la mesure de distance, peuvent ne pas être uniques.

### 3 Des Mesures d'Efficacité aux Mesures de la Productivité

Les mesures d'efficacité introduites dans la section précédente ne permettent l'analyse de la performance des unités de production que pour une période donnée soit  $(t)$ . Dans cette section, nous présentons les mesures de productivité. Celles-ci permettent de comparer l'efficacité des entités productives dans le temps et/ou dans l'espace. Dans ces travaux, nous nous intéressons uniquement à la dimension temporelle. Dans ce cas, elles évaluent les changements de l'efficacité des relativement à deux périodes consécutives afin de mieux appréhender les gains (ou pertes) de performance. Les mesures exposées dans cette section sont fondées sur les fonctions de distance. Dans le cadre de ces travaux, nous nous situons dans une étude à multiple outputs et à multiple inputs. De ce fait, les grandeurs présentées sont des mesures de productivité totale des facteurs. Avant de définir les différentes mesures de productivité, il est nécessaire de définir certaines notions. Soient deux périodes consécutives  $(t)$  et  $(t + 1)$  et, les vecteurs  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  qui dénotent respectivement les inputs et les outputs des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ . On définit par  $D^{t+1}(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{(x,y)} \{ \delta^{t+1(t)} : (x^t - \delta^{t+1(t)} \cdot h^t, y^t + \delta^{t+1(t)} \cdot k^t) \in T^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) \}$ , la fonction de distance directionnelle orientée dans le graphe, de l'observation  $(x^t, y^t)$  évaluée relativement à la technologie de production  $T^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$ . Pour simplifier les notations, on admettra que

$$T^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = T^{t+1} \text{ et } T^t(x^t, y^t) = T^t.$$

#### 3.1 Les Indices et les Indicateurs de Productivité Usuels

Dans cette sous-section, nous présentons deux types de mesures de la productivité. La première grandeur fait intervenir des fonctions de distance radiales et, ont une structure multiplicative. Nous nous y référons comme étant les "indices" de productivité. La seconde mesure est basée sur les fonctions de distance non-radiales. Elle est structurellement additive et, nous leur attribuons le terme "indicateur" de productivité.

### 3.1.1 Les Indices de Productivité de Malmquist

Suite aux travaux de Malmquist (1953), les indices de productivité de Malmquist ont été présentés par Caves et al. (1982a, 1982b). Ils reposent sur les fonctions de distance de Shephard. En ce sens, les auteurs introduisent des mesures de productivité orientées en input et en output.

Les indices de productivité de Malmquist axés sur les intrants des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement définis par :

$$M_I^t(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{D_I^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^t(x^t, y^t)}$$

$$M_I^{t+1}(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^{t+1}(x^t, y^t)}.$$

Le premier est le ratio entre la mesure de Shephard en input des observations de la période  $(t + 1)$  relativement à la technologie de la période  $(t)$  et, la mesure de Shephard en intrant des observations de la période  $(t)$  relativement à la technologie de la même période.

Les deux indices présentés ci-dessus ne sont périodiques. Cependant, Färe, Grosskopf, Lindgren et Roos(1989) introduisent la notion d'indice de productivité global de Malmquist. Ainsi, la mesure de productivité globale de Malmquist orientée en input est représentée par :

$$M_I(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = (M_I^t(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) \times M_I^{t+1}(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}))^{1/2}$$

$$= \left( \frac{D_I^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^t(x^t, y^t)} \times \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^{t+1}(x^t, y^t)} \right)^{1/2}.$$

Cette grandeur se présente comme étant la moyenne géométrique des deux indices de productivité périodiques de Malmquist. Lorsque la valeur de cette mesure est inférieure à 1 (respectivement supérieure à 1) alors, il existe un gain de productivité (respectivement une perte de productivité). Par ailleurs, lorsqu'elle est égale à 1, la productivité de l'entreprise reste stable.

De manière analogue, les indices de productivité de Malmquist orientés en output des périodes

$(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement définis par :

$$M_O^t(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)}$$

$$M_O^{t+1}(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^t, y^t)}.$$

Ces deux indices sont basés sur les mesures de Shephard axées sur les extrants des observations des période  $(t)$  et  $(t + 1)$  relativement aux technologies  $T^t$  et  $T^{t+1}$ .

L'indice de productivité global de Malmquist orienté en output est la suivante :

$$M_O(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = (M_O^t(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) \times M_O^{t+1}(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}))^{1/2}$$

$$= \left( \frac{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)} \times \frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^t, y^t)} \right)^{1/2}.$$

L'interprétation de la mesure de productivité globale de Malmquist en output est l'inverse de celle suivant une orientation en input. Ainsi, lorsque sa valeur est inférieure à 1 (respectivement supérieure à 1), l'unité de production fait face à une perte de productivité (respectivement un gain de productivité) d'une période sur l'autre. Une valeur égale à 1, signifie que la performance de l'entreprise reste inchangée.

Les indices de productivité de Malmquist indiquent s'il y a eu gain ou perte de productivité d'une période sur une autre. Cependant, ils ne permettent pas de connaître les sources de ces variations. De ce fait, Nishimizu et Page (1982) proposent une décomposition des indices de productivité globaux afin de différencier les gains ou les pertes de performance imputables au changement d'efficacité technique et au progrès technique. Suite à ces travaux, Färe et al. (1989) proposent une décomposition des mesures de productivité globales de Malmquist en termes de variation de la performance et de mutation technologique.

L'indice de productivité global de Malmquist axé sur les facteurs peut être reformulé de la manière suivante :

$$M_I(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^t(x^t, y^t)} \times \left( \frac{D_I^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \times \frac{D_I^t(x^t, y^t)}{D_I^{t+1}(x^t, y^t)} \right)^{1/2}.$$



tels que

$$\begin{aligned} EFFCH_I &= \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^t(x^t, y^t)} \\ TECH_I &= \left( \frac{D_I^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \times \frac{D_I^t(x^t, y^t)}{D_I^{t+1}(x^t, y^t)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$EFFCH_I$  désigne le changement de l'efficacité technique entre la période  $(t)$  et la période  $(t + 1)$ . Lorsque ce ratio est inférieur à 1, il y a un gain de performance qui est dû à une hausse de l'efficacité technique. En ce sens, l'unité de production réussit à produire plus d'outputs en utilisant moins d'inputs (meilleure allocation des ressources) tout en gardant le même processus de production.  $TECH_I$  quant à lui, fait référence à la variation de la performance qui peut être imputée au progrès technologique. Lorsque cette grandeur est inférieure à 1, on peut en déduire qu'une partie du gain de productivité de l'entreprise a été induite par une transformation technologique du processus productif.

De manière similaire, l'indice de productivité global de Malmquist orienté en output peut également être décomposé. En suivant le même raisonnement logique que dans le cas d'une orientation en intrant, on obtient les composantes  $EFFCH_O$  et  $TECH_O$  de l'indice de productivité global en output. Notons que les valeurs de ces composantes sont interprétées de manière inverse à celles obtenues selon une orientation en input.

La figure 24 présente les différentes mesures de Shephard orientées en output. Il est à noter que  $y^{t+1(t)}$  et  $y^{t(t+1)}$  sont les projections respectives de  $y^t$  et de  $y^{t+1}$  sur les frontières des technologies  $T^{t+1}$  et  $T^t$ . Ainsi, l'indice de productivité de Malmquist orienté en output de la période  $(t)$  est :

$$M_O^t = \frac{0y^{t+1}}{0y^{t(t+1)}} \times \frac{0y_*^t}{0y^t}$$

tandis que l'indice global de Malmquist est :

$$M_O(x^t, y^t; x^{t+1}, y^{t+1}) = \left( \frac{0y^{t+1}}{0y^{t(t+1)}} \times \frac{0y_*^t}{0y^t} \times \frac{0y^{t+1}}{0y_*^{t+1}} \times \frac{0y^{t+1(t)}}{0y^t} \right)^{1/2}.$$

Lorsqu'une observation de la période  $(t + 1)$  est projetée sur la frontière de la technologie de production, la mesure de l'efficacité technique peut être négative.

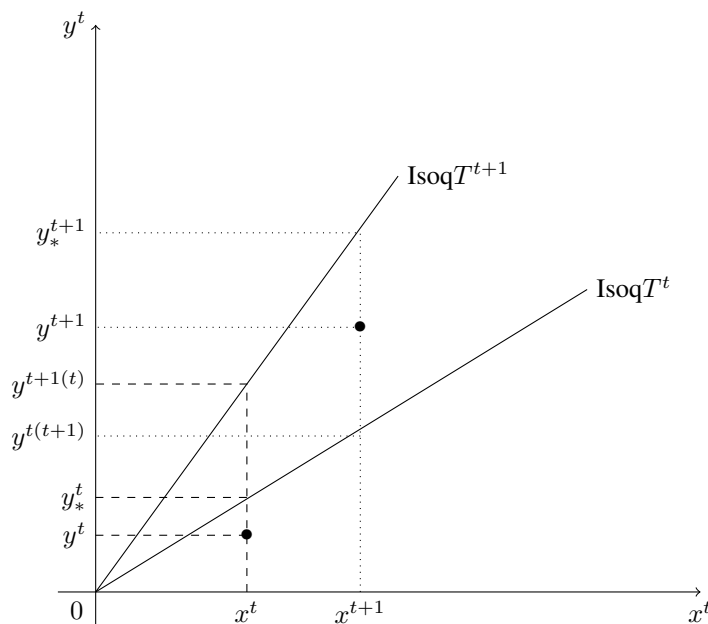


FIGURE 24 – Indice de productivité de Malmquist orienté en output.

### 3.1.2 Les Indicateurs de Productivité de Luenberger

Chambers et al. (1996b) présentent les indicateurs de productivité de Luenberger et, les nomment ainsi en l'honneur de Luenberger (1992a, 1992b). Ces mesures de la productivité sont fondées sur les fonctions de distance directionnelles. De ce fait, elle peuvent être définies suivant trois orientations possibles.

Soient  $g^t = (h^t, 0)$  et  $g^{t+1} = (h^{t+1}, 0)$ . Les indicateurs de productivité de Luenberger orientés en input des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) &= D^t(x^t, y^t; h^t, 0) - D^t(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, 0) \\ L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) &= D^{t+1}(x^t, y^t; h^t, 0) - D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, 0). \end{aligned}$$

Le premier est constitué de la différence entre les mesures directionnelles des observations  $(x^t, y^t)$  et  $(x^{t+1}, y^{t+1})$  par rapport à la technologie  $T^t$ . En revanche, le second est composé de la différence entre les mesures directionnelles des couples  $(x^t, y^t)$  et  $(x^{t+1}, y^{t+1})$  relativement à la technologie  $T^{t+1}$ .

Nous pouvons également définir un indicateur de productivité global de Luenberger par rapport aux deux périodes. La mesure de globale orientée en input est caractérisée de la manière suivante :

$$L_I(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}, 0, 0) = \frac{1}{2} \left[ L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) + L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) \right].$$

Nous pouvons constater que la grandeur définie ci-dessus est la moyenne arithmétique des indicateurs des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ .

Soient  $g^t = (0, k^t)$  et  $g^{t+1} = (0, k^{t+1})$ . De manière analogue à l'orientation en intrant, les indicateurs de Luenberger orientés en output sont :

$$\begin{aligned} L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) &= D^t(x^t, y^t; 0, k^t) - D^t(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, k^{t+1}) \\ L_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) &= D^{t+1}(x^t, y^t; 0, k^t) - D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, k^{t+1}). \end{aligned}$$

La première mesure concerne la période  $(t)$  tandis que la seconde est relative à la période  $(t + 1)$ . L'indicateur de productivité global de Luenberger orienté en output est mesuré par la moyenne arithmétique des deux indicateurs périodiques. Il se présente comme suit :

$$L_O(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; 0, 0, k^t, k^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[ L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) + L_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) \right].$$

Contrairement à l'indice de productivité de Malmquist, l'indicateur de productivité de Luenberger peut être défini selon une orientation dans le graphe. En posant  $g^t = (h^t, k^t)$  et  $g^{t+1} = (h^{t+1}, k^{t+1})$ , les indicateurs des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} L^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) - D^t(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1}) \\ L^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= D^{t+1}(x^t, y^t; h^t, k^t) - D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1}). \end{aligned}$$

Le mesure de la productivité globale de Luenberger relative aux deux périodes est donc :

$$L(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = \frac{1}{2} [L^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) + L^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1})].$$

Il est également possible d'identifier les sources du gain (ou de la perte) de performance révélé par les indicateurs de productivité. Ainsi, nous décomposons les mesures de productivité de Luenberger en deux composantes. La première reflète un gain d'efficacité technique d'une période par rapport à une autre et la seconde met en évidence un changement technologique dans le processus de production. Dans le cas de l'indicateur de productivité global de Luenberger orienté dans le graphe, ces deux composantes sont respectivement :

$$\begin{aligned} EFFCH &= D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) - D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1}), \\ TECH &= \frac{1}{2} \left[ D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1}) - D^t(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1}) \right. \\ &\quad \left. + D^{t+1}(x^t, y^t; h^t, k^t) - D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \right], \end{aligned}$$

où EFFCH est la variation de l'efficacité technique tandis que TECH est le changement technologique. A partir de ces deux composantes, on peut reformuler la mesure de productivité globale de Luenberger orientée dans le graph, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= [D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) - D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1})] \\ &\quad + \frac{1}{2} [D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1}) - D^t(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, k^{t+1}) \\ &\quad + D^{t+1}(x^t, y^t; h^t, k^t) - D^t(x^t, y^t; h^t, k^t)]. \end{aligned}$$

La Figure 25 présente deux technologies de production relatives à deux périodes consécutives,  $(t)$  et  $(t + 1)$ . Soit le point  $A$  qui correspond à l'observation  $(x^t, y^t)$  de la période  $(t)$  tandis que  $B$  est le couple  $(x^{t+1}, y^{t+1})$  de la période  $(t + 1)$ . Selon une orientation dans le graphe, les mesures

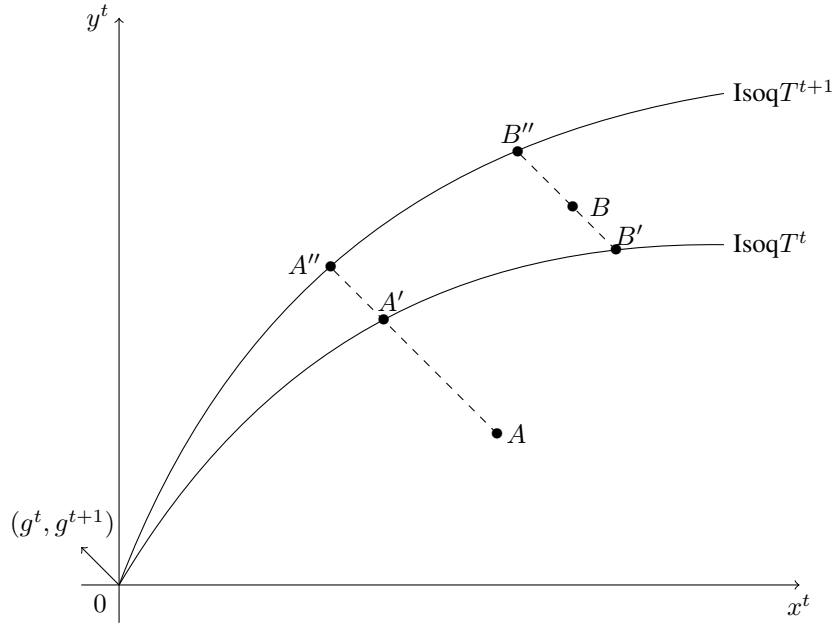


FIGURE 25 – Indicateurs de productivité de Luenberger orientés dans le graphe.

d'efficacité en terme de distance algébrique de ces observations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 D^t(x^t, y^t; g^t) &= \frac{1}{\|g^t\|} \|A' - A\| \\
 D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1}) &= \frac{1}{\|g^{t+1}\|} \|B'' - B\| \\
 D^{t+1}(x^t, y^t; g^t) &= \frac{1}{\|g^t\|} \|A'' - A\| \\
 D^t(x^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1}) &= \frac{1}{\|g^{t+1}\|} \|B - B'\|.
 \end{aligned}$$

De ce fait, l'expression de l'indicateur de productivité global de Luenberger selon la distance algébrique est :

$$\begin{aligned}
 L(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\|g^t\|} (\|A' - A\| + \|A'' - A\|) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\|g^{t+1}\|} (\|B - B'\| + \|B'' - B\|) \right].
 \end{aligned}$$

### 3.1.3 La Relation entre les Indices de Productivité de Malmquist et les Indicateurs de Productivité de Luenberger

Boussemart, Briec, Kerstens et Poutineau (2003) démontrent qu'il existe une relation d'approximation linéaire entre les indicateurs de productivité de Luenberger et les indices de productivité de Malmquist. Ainsi, pour  $g^t = (x^t, y^t)$  et  $g^{t+1} = (x^{t+1}, y^{t+1})$  lorsque la FDD coïncide avec la FDP alors, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants et, suite aux relations d'équivalence entre les mesures de Debreu-Farrell et la FDP, les auteurs établissent que :

$$\begin{aligned}
 \ln(M_I(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})) &\cong -2.L(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, ; g^t, g^{t+1}) \\
 \ln(M_O(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})) &\cong 2.L(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, ; g^t, g^{t+1}) \\
 \ln(M_I(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})) &\cong -L_I(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, ; g^t, g^{t+1}) \\
 \ln(M_O(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})) &\cong L_O(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, ; g^t, g^{t+1}) \\
 L(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, ; g^t, g^{t+1}) &\cong \frac{1}{2} [L_O(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, ; g^t, g^{t+1}) \\
 &\quad - L_I(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, ; g^t, g^{t+1})] .
 \end{aligned}$$

On peut constater que les mesures de productivité de Luenberger peuvent être approximées par les logarithmes des indices de productivité de Malmquist. Rappelons que ces relations ne sont valables que si les technologies de production étudiées opèrent sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants.

Balk, Färe, Grosskopf et Margaritis(2008) prouvent quant à eux, que les mesures de productivité de Malmquist et de Luenberger sont équivalentes lorsque certaines conditions sont respectées. Les résultats qu'ils présentent ne sont valables que si les unités de productions sont techniquement efficaces à chaque période avec  $g^t = (x^t, y^t)$  et  $g^{t+1} = (x^{t+1}, y^{t+1})$ . Supposons que  $(x^t, y^t)$  et  $(x^{t+1}, y^{t+1})$  appartiennent respectivement aux frontières efficaces des technologies  $T^t$  et  $T^{t+1}$ . En posant la même hypothèse que Caves et al. (1982a) telle que  $D_I^t(x^t, y^t) = D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = D_O^t(x^t, y^t) = D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) = 1$  ainsi que  $D^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, 0) = D^t(x^t, y^t; 0, k^t) = D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, k^{t+1}) = 0$ , alors pour chaque

période, les relations suivantes existent :

$$\begin{aligned}
 M_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= [1 + L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})]^{-1} \\
 M_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= 1 - L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) \\
 M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= [1 - L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})]^{-1} \\
 M_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= 1 + L_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) \quad .
 \end{aligned}$$

Grâce à ces équivalences, il est alors possible d'exprimer les indices de productivité globaux de Malmquist en fonction des indicateurs de productivité de Luenberger de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
 M_I(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= \left( \frac{1 - L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})}{1 + L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})} \right)^{1/2} \\
 M_O(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= \left( \frac{1 + L_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})}{1 - L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})} \right)^{1/2} .
 \end{aligned}$$

De la même manière, on peut obtenir l'expression des indicateurs de productivité de Luenberger en fonction des indices de productivité de Malmquist comme suit :

$$\begin{aligned}
 L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) &= (M_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} - 1 \\
 L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) &= 1 - M_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) \\
 L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) &= 1 - (M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} \\
 L_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) &= M_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) - 1 \quad .
 \end{aligned}$$

Par conséquent, les indicateurs de productivité globaux de Luenberger sont :

$$\begin{aligned}
 L_I(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) &= \frac{1}{2} \left[ (M_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} - M_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) \right] \\
 L_O(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) &= \frac{1}{2} \left[ M_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) - (M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} \right] .
 \end{aligned}$$

Nous pouvons noter que les travaux de Balk et al. (2008) ne présentent que les relations d'équivalence selon une orientation en inputs ou en outputs.

## 3.2 Les Extensions des Mesures de Productivité de Malmquist et de Luenberger

La littérature fait apparaître que les mesures de productivité de Malmquist et de Luenberger peuvent amener à des infaisabilités (Briec et Kerstens (2009a, 2009b)). Ainsi, Diewert (1992a, 1992b) présente une mesure de productivité fondée sur les indices de quantité de Malmquist. Dans le même esprit, Briec et Kerstens (2004) introduisent une mesure de productivité basée sur les indicateurs de quantité de Luenberger. Notons que l'expression "mesure de quantité" signifie que seule la composante étudiée varie dans le temps. Par exemple, si nous prenons une mesure de quantité en input de la période  $(t)$ , seuls les intrants varient à la période  $(t + 1)$ . Dans ce cas, nous étudions les observations  $(x^t, y^t)$  et  $(x^{t+1}, y^t)$ .

### 3.2.1 Les Indices de Productivité de Hicks-Moorsteen

Afin de pallier aux infaisabilités qui peuvent apparaître dans l'estimation des indices de productivité de Malmquist, Diewert (1992a, 1992b) propose un indice de productivité basé sur le ratio entre les indices de quantité de Malmquist orientés en input et en output. Il attribue cette approche à Hicks (1961) et Moorsteen (1961).

Bjurek (1996) reprend les travaux de Diewert (1992a, 1992b) et définit l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen de la période  $(t)$  de la manière suivante :

$$HM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = \frac{MO^t(x^t, y^t, y^{t+1})}{MI^t(x^t, x^{t+1}, y^t)}.$$

Cette mesure est donc constituée du ratio entre les indices de quantité de Malmquist orientés en output et en input qui sont respectivement :

$$\begin{aligned} MO^t(x^t, y^t, y^{t+1}) &= \frac{D_O^t(x^t, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)} \\ MI^t(x^t, x^{t+1}, y^t) &= \frac{D_I^t(x^{t+1}, y^t)}{D_I^t(x^t, y^t)}. \end{aligned}$$

Notons que les mesures de distance de Shephard font intervenir les observations fictives suivantes  $(x^t, y^{t+1})$  et  $(x^{t+1}, y^t)$ .

De la même manière, la mesure de productivité de Hicks-Moorsteen de la période  $(t + 1)$  est



caractérisée par :

$$HM^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = \frac{MO^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1})}{MI^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1})},$$

avec les indices de quantité de Malmquist définis comme suit :

$$\begin{aligned} MO^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= \frac{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(x^{t+1}, y^t)} \\ MI^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}) &= \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_I^{t+1}(x^t, y^{t+1})}. \end{aligned}$$

Nous pouvons également présenter un indice de productivité global de type Hicks-Moorsteen qui englobe les deux périodes ( $t$ ) et ( $t + 1$ ). Celle-ci est mesurée par la moyenne géométrique des deux mesures de productivité périodiques présentées ci-dessus. L'indice de productivité global de Hicks-Moorsteen est défini par :

$$HM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = [HM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) \times HM^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1})]^{1/2}.$$

Lorsque cette mesure prend une valeur inférieure (supérieure) à 1 alors, il existe un gain (une perte) de productivité de l'unité de productive d'une période à l'autre.

Färe, Grosskopf et Margaritis(2008) précisent que l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen orienté en output (en input) coïncide avec la mesure de productivité de Malmquist en output (en input) si et seulement si, la technologie de production vérifie à la fois, une homothéticité inverse<sup>8</sup> et des rendements d'échelle constants. Dans ce cas, pour un vecteur de facteurs-produits  $(\bar{x}, \bar{y})$  choisi arbitrairement, ils proposent la décomposition de l'indice de Hicks-Moorsteen suivante :

$$\begin{aligned} HM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= \left( \frac{D_O^{t+1}(\bar{x}, y^{t+1})}{D_O^t(\bar{x}, y^t)} \times \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, \bar{y})}{D_I^t(x^t, \bar{y})} \right) \\ &\times \left[ \left( \frac{D_O^t(\bar{x}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(\bar{x}, y^{t+1})} \frac{D_O^t(\bar{x}, y^t)}{D_O^{t+1}(\bar{x}, y^t)} \right) \times \left( \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, \bar{y})}{D_I^t(x^{t+1}, \bar{y})} \frac{D_I^{t+1}(x^t, \bar{y})}{D_I^t(x^t, \bar{y})} \right) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

---

8. Une technologie est inversement homothétique si, dans le cas de la fonction de distance de Shephard orientée en output,  $D_O(x, y) = D_O(\bar{x}, y)/F[D_I(x, \bar{y})]$ . Notons que  $F$  est une fonction croissante et le vecteur  $(\bar{x}, \bar{y})$  est un vecteur fixé arbitrairement.

où la variation de l'efficacité technique et le changement technologique sont respectivement :

$$EFFCH = \left( \frac{D_O^{t+1}(\bar{x}, y^{t+1})}{D_O^t(\bar{x}, y^t)} \times \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, \bar{y})}{D_I^t(x^t, \bar{y})} \right)$$

$$TECH = \left[ \left( \frac{D_O^t(\bar{x}, y^{t+1})}{D_O^{t+1}(\bar{x}, y^{t+1})} \frac{D_O^t(\bar{x}, y^t)}{D_O^{t+1}(\bar{x}, y^t)} \right) \times \left( \frac{D_I^{t+1}(x^{t+1}, \bar{y})}{D_I^t(x^{t+1}, \bar{y})} \frac{D_I^{t+1}(x^t, \bar{y})}{D_I^t(x^t, \bar{y})} \right) \right]^{1/2}.$$

Remarquons que le gain de productivité dû à une variation de l'efficacité technique peut être induit soit par les facteurs soit par les produits. Ainsi, la part du changement de la performance imputée aux outputs est représentée par le premier ratio intervenant dans la composante *EFFCH*. Celle attribuée aux inputs est caractérisée par le second ratio. Cette même interprétation peut être effectuée pour la composante *TECH*.

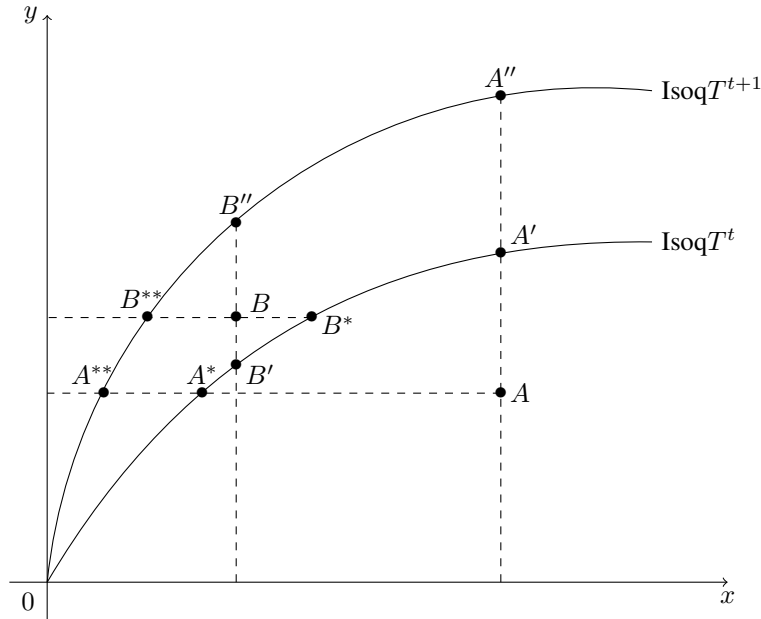


FIGURE 26 – Indice de productivité de Hicks-Moorsteen.

La figure 26 décrit le processus d'estimation de l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen. Soient les observations  $A = (x^t, y^t)$  et  $B = (x^{t+1}, y^{t+1})$  des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ . L'indice de quantité de Malmquist orienté en input est représentée par :

$$MI = \left[ \frac{OB}{OB^*} \times \frac{OA^*}{OA} \times \frac{OB}{OB^{**}} \times \frac{OA^{**}}{OA} \right]^{1/2},$$

tandis que celui orienté en output est :

$$MO = \left[ \frac{0B}{0B'} \times \frac{0A'}{0A} \times \frac{0B}{0B''} \times \frac{0A''}{0A} \right]^{1/2}.$$

L'indice de productivité de Hicks-Moorsteen devient donc :

$$HM = \left[ \frac{0B^*}{0B'} \times \frac{0A'}{0A^*} \times \frac{0B^{**}}{0B''} \times \frac{0A''}{0A^{**}} \right]^{1/2}.$$

### 3.2.2 Les Indicateurs de Productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen

Les indicateurs de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen (LHM) ont été introduits par Briec et Kerstens (2004) afin de résoudre les problèmes d'infaisabilités qui surviennent dans les mesures de productivité de Luenberger. Il sont caractérisés par la différence entre les indicateurs de quantité de Luenberger orientés en input et en output. De ce fait, l'indicateur de productivité de LHM de la période  $(t)$  est défini par :

$$LHM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = LO^t(x^t, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) - LI^t(x^t, x^{t+1}, y^t; h^t, h^{t+1}).$$

Remarquons que des observations fictives  $(x^t, y^{t+1})$  et  $(x^{t+1}, y^t)$  interviennent dans la mesure. Précisons que :

$$\begin{aligned} LO^t(x^t, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) &= D^t(x^t, y^t; 0, k^t) - D^t(x^t, y^{t+1}; 0, k^{t+1}) \\ LI^t(x^t, x^{t+1}, y^t; h^t, h^{t+1}) &= D^t(x^{t+1}, y^t; h^{t+1}, 0) - D^t(x^t, y^t; h^t, 0). \end{aligned}$$

De la même manière, on peut définir l'indicateur de productivité de LHM de la période  $(t + 1)$  par :

$$LHM^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = L_O^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) - L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}),$$

avec

$$\begin{aligned} LO^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) &= D^{t+1}(x^{t+1}, y^t; 0, k^t) - D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, k^{t+1}) \\ LI^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) &= D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, 0) - D^{t+1}(x^t, y^{t+1}; h^t, 0). \end{aligned}$$

Afin d'éviter le choix d'une période de base arbitraire, nous pouvons présenter un indicateur de productivité global de LHM qui intègre simultanément les périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ . Cette mesure globale est caractérisée par la moyenne arithmétique des indicateurs LHM périodiques et est définie comme suit :

$$LHM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = \frac{1}{2} [LHM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) + LHM^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1})].$$

Lorsque la valeur de l'indicateur de productivité global de LHM est supérieure (inférieure) à zero alors, il y a un gain (une perte) de productivité.

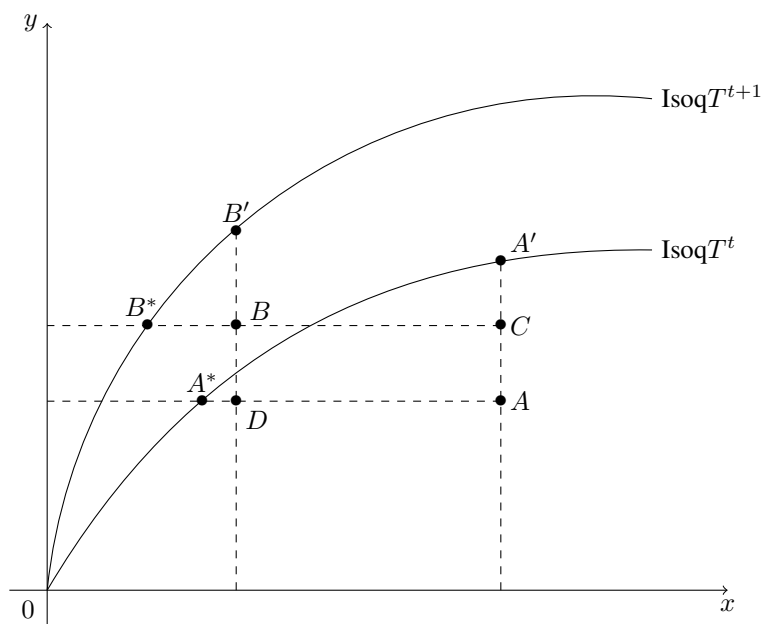


FIGURE 27 – Indice de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

La figure 27 décrit les projections des observations sur la frontière efficiente de la technologie de production des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ . Soient les observations réelles  $A = (x^t, y^t)$  et  $B = (x^{t+1}, y^{t+1})$  ainsi que les observations fictives  $C = (x^{t+1}, y^t)$  et  $D = (x^t, y^{t+1})$ . Posons  $g^t, g^{t+1} \in$

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ . Les indicateurs de quantité de Luenberger sont définis par :

$$\begin{aligned} LO^t(x^t, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= \frac{1}{\|(0, 1)\|} (\|A' - A\| - \|A' - C\|) \\ LI^t(x^t, x^{t+1}, y^t; g^t, g^{t+1}) &= \frac{1}{\|(1, 0)\|} (\|D - A^*\| - \|A - A^*\|) \\ LO^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= \frac{1}{\|(0, 1)\|} (\|B' - D\| - \|B' - B\|) \\ LI^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= \frac{1}{\|(1, 0)\|} (\|B - B^*\| - \|C - B^*\|). \end{aligned}$$

A partir de ces mesures de quantité de Luenberger, les indicateurs de productivité de LHM des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  se présentent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} LHM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= \frac{1}{\|(0, 1)\|} (\|A' - A\| - \|A' - C\|) \\ &\quad - \frac{1}{\|(1, 0)\|} (\|D - A^*\| - \|A - A^*\|) \\ LHM^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) &= \frac{1}{\|(0, 1)\|} (\|B' - D\| - \|B' - B\|) \\ &\quad - \frac{1}{\|(1, 0)\|} (\|B - B^*\| - \|C - B^*\|). \end{aligned}$$

### 3.2.3 La Relation entre l'Indice de Hicks-Moorsteen et l'Indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen

Färe, Grosskopf et Roos(1996) démontrent que lorsque la technologie est inversement homothétique et qu'elle satisfait des rendements d'échelle constants alors, l'indice de productivité de Malmquist est équivalent à l'indice de Hicks-Moorsteen. En effet, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la fonction de distance de Shephard en input est la réciproque de celle en output. De ce fait, si les conditions citées ci-dessus sont remplies alors, l'égalité suivante est valable :

$$\begin{aligned} M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) &= HM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) \\ \frac{D_O^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)} &= \frac{D_O^t(x^t, y^{t+1})}{D_O^t(x^t, y^t)} \times \frac{D_O^t(x^{t+1}, y^t)}{D_O^t(x^t, y^t)}. \end{aligned}$$

Briec et Kerstens (2004) établissent dans un premier temps, une relation d'équivalence entre les mesures de productivité de HM et de LHM. En effet, lorsque les vecteurs de direction sont

$g^t = (x^t, y^t)$  et  $g^{t+1} = (x^{t+1}, y^{t+1})$  alors, la FDD coïncide avec la FDP. Ainsi,

$$LHM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) \cong \ln (HM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1})).$$

Dans un second temps, les mêmes auteurs prouvent l'existence d'une relation d'équivalence entre l'indicateur de productivité global de LHM et les mesures de productivité global de Luenberger orientés en input et en output. Cette identité n'est possible que si la technologie vérifie la translation homothéticité réciproque et la graphe translation homothéticité, dans la direction  $g^{t,t+1}$ . Dans ce cas, nous obtenons :

$$LHM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = L_I(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) = L_O(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}).$$

Sous les conditions mentionnées précédemment, nous pouvons relier les mesures de productivité de HM et les indicateurs de productivité de Luenberger. Une relation existe également entre les mesures de productivité de LHM et les indices de productivité de Malmquist. Lorsque  $g^t = (x^t, y^t)$  et  $g^{t+1} = (x^{t+1}, y^{t+1})$ , nous avons vu que l'indice de productivité de Malmquist en output est  $M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = [1 - L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})]^{-1}$  tandis que celle en input est,  $M_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = [1 + L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})]^{-1}$ . Par conséquent, l'indice de productivité de HM de la période  $(t)$  peut être réécrit comme suit :

$$HM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = \frac{1 + L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})}{1 - L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})}.$$

La mesure de productivité de HM de la période  $(t + 1)$  est quant à lui, caractérisé par :

$$HM^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = \frac{1 + L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})}{1 - L_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})}.$$

Ainsi, l'indice de productivité global de HM relatif aux deux périodes est :

$$HM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = \left[ \frac{1 + L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})}{1 - L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})} \times \frac{1 + L_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})}{1 - L_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})} \right]^{1/2}.$$

Dans cette même démarche, puisque

$$L_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) = 1 - (M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1}$$

et

$$L_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) = (M_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} - 1$$

alors, on peut établir que l'indicateur de productivité de LHM pour la période  $(t)$  est :

$$LHM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = - (M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} - (M_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1},$$

tandis que celui de la période  $(t + 1)$  est :

$$LHM^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = M_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) + M_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}).$$

L'indicateur de productivité global de LHM est donc :

$$LHM(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[ M_O^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) - (M_O^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} \right. \\ \left. + M_I^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) - (M_I^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}))^{-1} \right].$$

## Conclusion

Nous avons pu voir dans ce chapitre, un recueil non-exhaustif des mesures de performance et de productivité totale des facteurs proposées dans la littérature. Nous les avons spécifiées dans le cadre d'une approche non-paramétrique par enveloppement de données. Cependant, nous pouvons constater que la théorie n'est pas immuable et qu'elle peut être étendue ou améliorée. En effet, nous admettons que dans certaines circonstances, les outils de mesure de la performance existant dans la littérature peuvent être inappropriés ou incomplètes. Dans ce cas, nous proposons, dans le chapitre suivant, un nouvel outil de mesure de l'efficacité.





## Chapitre 2

# Une Approche Exponentielle de la Mesure de l'Efficiencia

Les ensembles de productions représentent le processus de transformation des facteurs en produits. Ces technologies prennent en compte plusieurs aspects de la production tels le rendement d'échelle, les productivités marginales, etc. Charnes et al. (1978) et Banker et al. (1984) proposent des ensembles productifs non-paramétriques et, linéaires par morceaux. Les premiers auteurs imposent une hypothèse de rendements d'échelle constants tandis que les seconds considèrent des rendements d'échelle variables. Cependant, Banker et Maindiratta (1986) remarquent que ces technologies ne prennent pas en compte les productivités marginales croissantes survenant dans certaines branches de l'économie ou, lorsqu'il existe des spécialisations. De ce fait, ils introduisent un nouvel ensemble de production log-linaire par morceaux inspiré de la fonction de production Cobb-Douglas. Celui-ci est structurellement multiplicatif et nous le désignons comme étant la technologie de production Cobb-Douglas.

La technologie multiplicative de Banker et Maindiratta (1986) peut être caractérisée par des mesures d'efficiencia. Généralement, les fonctions de distance ayant une structure multiplicative sont adaptées à ce type d'ensemble productif. Dans ces travaux, nous proposons une mesure de distance multiplicative non-linéaire qui permet la réduction des inputs et l'augmentation des outputs simultanément. Celle-ci se présente sous la forme d'une fonction exponentielle. De ce fait, nous la nommons "fonction de distance exponentielle" (FDE). Cette dernière peut convenir à l'évaluation de la performance que ce soit dans un cadre microéconomique ou macroéconomique. En

effet, dans certains secteurs économiques (exemple : nouvelles technologies), la croissance de l'activité peut être soit positivement soit négativement exponentielle. De plus, d'un point de vue macroéconomique, certains pays sont confrontés à une croissance (ou une récession) exponentielle. Cette mesure s'inscrit dans la lignée de la fonction de distance directionnelle (Luenberger (1992a, 1992b), Chambers et al. (1996)). En effet, celle-ci est log-linéaire et, dans le cas d'une transformation logarithmique, nous retrouvons la FDD. Par ailleurs, nous montrerons que la FDE présente les mêmes avantages que la FDD et qu'elle vérifie certaines propriétés additionnelles. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord, le cadre d'analyse puis définissons la FDE que ce soit dans une orientation dans le graphe, en input ou en output. Nous explorons également la théorie de la dualité grâce à l'introduction de pseudo-fonctions de coût, de revenu et de profit. Enfin, nous formalisons les notions présentées dans les deux premières sections dans un cadre non-paramétrique selon l'approche par enveloppement de données.

## 1 Environnement et Outils

Nous présentons dans cette section, les outils et les notions utilisés dans ce chapitre. La technologie de production est le processus qui permet de transformer les inputs  $x^t = (x_1^t, \dots, x_m^t) \in \mathbb{R}_+^m$  en outputs  $y^t = (y_1^t, \dots, y_n^t) \in \mathbb{R}_+^n$  à la période  $(t)$ . Elle peut être définie de manière formelle par :

$$T^t(x^t, y^t) = \{y^t \in \mathbb{R}_+^n : x^t \text{ peut produire } y^t\}.$$

Dans tout le chapitre, on supposera que cette technologie satisfait les propriétés T1-T4 (1.1.3).

Rappelons que les mesures de distances permettent de caractériser les ensembles de production. Par ailleurs, notons que les mesures de Debreu-Farrell (Debreu (1951) et Farrell (1957)) mais également les fonctions de distance directionnelle et proportionnelle (Luenberger (1992a, 1992b),

Chambers et al. (1996) et Briec (1997)) sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned} E_I^t(x^t, y^t) &= \inf\{\lambda^t > 0 : \lambda^t x^t \in L^t(y^t)\}, \\ E_O^t(x^t, y^t) &= \sup\{\lambda^t > 0 : \lambda^t y^t \in P^t(x^t)\}, \\ D^t(x^t, y^t; g^t) &= \sup\{\delta^t \geq 0 : (x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t) \in T^t\}, \\ D_{\alpha, \beta}^{\infty, t}(x^t, y^t) &= \sup\{\delta^t : ((I - \delta^t A)x^t, (I + \delta^t B)y^t) \in T^t\}. \end{aligned}$$

Remarquons que le vecteur de direction est  $g^t = (h^t, k^t)$  dans le cas de la FDD  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$ . Pour chacune de ces mesures d'efficacité, il est possible de définir le sous-ensemble efficient du graphe de la technologie. Cependant, on ne définira que celui de la FDP, qui sera une notion évoquée par la suite. Celui-ci est défini par :

$$\partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t = \{(x^t, y^t) \in T^t : \delta^t > 0, (x^t - \delta^t \alpha^t \odot x^t, y^t + \delta^t \beta^t \odot y^t) \notin T^t\}.$$

Suite aux travaux de Hotelling (1932), Shephard (1970) et McFadden (1978), nous pouvons établir qu'une relation duale peut exister entre les mesures d'efficacité et les fonctions de coût, de revenu et de profit. Rappelons que ces dernières sont respectivement :

$$\begin{aligned} C^t(w^t, y^t) &= \inf\{w^t \cdot x^t : x^t \in L^t(y^t)\}, \\ R^t(p^t, x^t) &= \sup\{p^t \cdot y^t : y^t \in P^t(x^t)\}, \\ \Pi^t(w^t, p^t) &= \sup\{p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in T^t\}. \end{aligned}$$

$w^t = (w_1^t, \dots, w_m^t)$  sont les prix associés aux inputs tandis que  $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t)$  sont ceux identifiés pour les outputs.

## 2 La Fonction de Distance Exponentielle

Cette section du chapitre est consacrée à la définition de la fonction de distance exponentielle (FDE) d'un point de vue primal. Par ailleurs, nous présentons ses propriétés. Enfin, nous démon-

trons que cette mesure peut être approximée grâce à une transformation logarithmique.

## 2.1 Définitions et Propriétés

### 2.1.1 Orientation dans le graphe

La FDD est un outil largement utilisé dans la littérature afin de mesurer l'efficacité technique des entités de production. Elle est évaluée suivant une approche paramétrique ou non-paramétrique. Dans certaines circonstances, elle s'avère inadaptée. En effet, lorsque l'approche non-paramétrique est privilégiée, celle-ci ne concorde pas aux ensembles productifs non-linéaires. De ce fait, Briec et Ravelojaona (2015) introduisent une fonction de distance exponentielle. Cette mesure est à la fois multiplicative et non-linéaire.

**Définition 2.1** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$ , soit l'application  $D_{\text{exp}}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow [0, 1]^{m+n} \cup \{\infty\}$  telle que :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \{\delta^t : \Phi_{\alpha, \beta}^{\delta}(x^t, y^t) \in T^t\} & \text{si } \Phi_{\alpha, \beta}^{\delta}(x^t, y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

est la fonction de distance exponentielle.

Notons que  $\Phi_{\alpha, \beta}^{\delta}$  est une application linéaire définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \beta}^{\delta} &: \mathbb{R}_+^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}_+^{m+n} \times [0, 1]^{m+n} \\ \Phi_{\alpha, \beta}^{\delta}(x^t, y^t) &= (e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t), \end{aligned}$$

où  $A$  et  $B$  sont respectivement les matrices diagonales  $A = \text{diag}(\alpha^t)$  et  $B = \text{diag}(\beta^t)$ .

La définition de la FDE démontre que cette mesure permet la réduction des inputs et l'augmentation des outputs de manière simultanée.

**Proposition 2.2** Lorsque la technologie satisfait les axiomes T1-T4, on démontre que la mesure exponentielle satisfait les propriétés suivantes :

$D_e1 : (x^t, y^t) \in T^t$  si et seulement si,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \geq 0$ .

$D_e2 : \text{Si } D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = 0$  alors,  $(x^t, y^t) \in \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t$ .

$D_e3$  : Pour tout  $(x^t, y^t), (u^t, v^t) \in T^t$  si  $(-u^t, v^t) \geq (-x^t, y^t)$  alors on a,  $D_{\text{exp}}^t(u^t, v^t; \alpha^t, \beta^t) \leq D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$ .

$D_e4$  : Pour tout  $\theta \geq 0$ ,  $D_{\text{exp}}^t(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t); \alpha^t, \beta^t) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - \theta^t$ .

$D_e5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\text{exp}}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; \alpha^t, \beta^t) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$ .

$D_e6$  : La fonction de distance exponentielle satisfait la condition de commensurabilité.

*Preuves :*

$(D_e1)$  et  $(D_e2)$  découlent directement de la définition de la fonction de distance  $\square$ .

$(D_e3)$  Soit le cône de la libre disposition des inputs et des outputs défini de la manière suivante :

$K = \mathbb{R}_+^m \times (-\mathbb{R}_+^n)$ . Si  $(-u^t, v^t) \geq (-x^t, y^t)$  alors  $\{\delta^t : (e^{\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in ((u^t, v^t) - K)\} \subset \{\delta^t : (e^{\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in ((x^t, y^t) - K)\}$  et  $\{\delta^t : (e^{\delta^t A} u^t, e^{\delta^t B} v^t) \in ((u^t, v^t) + K)\} \subset \{\delta^t : (e^{\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in ((u^t, v^t) + K)\}$ . Ceci implique que  $\{\delta^t : (e^{\delta^t A} u^t, e^{\delta^t B} v^t) \in ((u^t, v^t) + K)\} \subset \{\delta^t : (e^{\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in ((x^t, y^t) + K)\}$ . Ainsi,  $D_{\text{exp}}^t(u^t, v^t; \alpha^t, \beta^t) \leq D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \square$ .

$(D_e4)$  Soient  $\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t) = (e^{-\theta A} x^t, e^{\theta B} y^t)$  et  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\delta : \Phi_{\alpha, \beta}^\delta(x^t, y^t) \in T^t\}$ . Alors,  $D_{\text{exp}}^t(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\delta^t : \Phi_{\alpha, \beta}^\delta \circ \Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t) \in T^t\}$  et  $\Phi_{\alpha, \beta}^\delta \circ \Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t) = (e^{-\delta A} e^{-\theta A} x^t, e^{\delta B} e^{\theta B} y^t)$ . En factorisant par  $A$  et  $B$  nous obtenons,  $D_{\text{exp}}^t(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\delta^t : (e^{-(\delta+\theta)A} x^t, e^{(\delta+\theta)B} y^t) \in T^t\}$ . Si  $\Delta^t = \delta^t + \theta^t$  alors,  $D_{\text{exp}}^t(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\Delta^t : (e^{-\Delta^t A} x^t, e^{\Delta^t B} y^t) \in T^t\} - \theta^t \equiv D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - \theta^t \square$ .

$(D_e5)$  Soit  $\lambda > 0$ , sous l'hypothèse d'un rendement d'échelle constant on a  $(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) \in T$ . Ainsi,  $D_{\text{exp}}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\delta^t : (e^{-\delta^t A} \lambda^t x^t, e^{\delta^t B} \lambda^t y^t) \in T^t\}$ . En factorisant par  $\lambda^t$ , on a  $D_{\text{exp}}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\delta^t : \lambda^t (e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in T^t\} \equiv D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \square$ .

$(D_e6)$  Soit l'unité de production  $(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) \in \tilde{T}^t$  avec  $\tilde{x}^t = w_x \otimes x^t$  et  $\tilde{y}^t = w_y \otimes y^t$  où  $(w_x, w_y) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ . Ainsi,  $D_{\text{exp}}^t(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\delta^t : (e^{-\delta^t A} \tilde{x}^t, e^{\delta^t B} \tilde{y}^t) \in \tilde{T}^t\}$ . En divisant par  $w_x$  et  $w_y$  nous avons  $D_{\text{exp}}^t(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup\{\delta^t : (e^{-\delta^t A} (w_x \otimes x^t) \oslash w_x, e^{\delta^t B} (w_y \otimes y^t) \oslash w_y) \in T^t\} \equiv D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \square$ .

La première propriété stipule que la fonction de distance exponentielle caractérise complètement la technologie de production. La deuxième hypothèse signifie que lorsque sa valeur équivaut à 0, l'observation appartient à la frontière efficiente du graph de la technologie. Le troisième axiome concerne la monotonie de la fonction relativement aux inputs et aux outputs.  $(D_e4)$  désigne la

translation homothéticité. Enfin,  $(D_e5)$  et  $(D_e6)$  indiquent respectivement que la FDE est homogène de degré 0 sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants et qu'elle est invariante par rapport aux unités de mesure. Cette dernière propriété est importante car elle signifie que tout changement dans l'unité de mesure des inputs ou des outputs, n'a aucune incidence quant à l'évaluation de la performance, des unités de production.

### 2.1.2 Orientation en Input

En s'inspirant des travaux de Briec et Ravelojaona (2015), cette sous-section est consacrée à la présentation de la FDE orientée en input. En effet, dans certaines circonstances, il est possible que l'unité de production ne souhaite (ou ne peut) que réduire les inputs tout en produisant un même niveau d'outputs.

**Définition 2.3** Si  $L^t(y^t)$  vérifie L1-L5 alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ ,  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$  avec  $A = \text{diag}(\alpha^t)$ , soit l'application  $D_{\text{exp}}^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times [0, 1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  telle que :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \begin{cases} \sup_{\delta} \{ \delta^t : (e^{-\delta^t A} x^t, y^t) \in T^t \} & \text{si } (e^{-\delta^t A} x^t, y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

est la fonction de distance exponentielle orientée en input.

Cette définition peut être reformulée en faisant intervenir la correspondance en inputs  $L^t(y^t)$ . Dans ce cas, nous avons :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : e^{-\delta^t A} x^t \in L^t(y^t) \right\} \quad \text{si } e^{-\delta^t A} x^t \cap L^t(y^t) \neq \emptyset.$$

**Proposition 2.4** Lorsque la correspondance en facteurs satisfait L1-L5 alors, la fonction de distance exponentielle en input vérifie les hypothèses suivantes :

$ID_e1$  :  $x^t \in L^t(y^t)$  si et seulement si,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \geq 0$ .

$ID_e2$  : Si  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = 0$  alors,  $x^t \in \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} L$ .

$ID_e3$  : Pour tout  $x^t \in L^t(y^t)$  et  $u^t \in L^t(y^t)$  avec  $u^t \geq x^t$  alors,  $D_{\text{exp}}^t(u^t, y^t; \alpha^t, 0) \geq D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0)$ .

$$ID_e4 : D_{\exp}^t(\Phi_{\alpha,0}^\theta(x^t, y^t); \alpha^t, 0) = D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - \theta^t.$$

$$ID_e5 : \text{Pour tout } \lambda^t > 0 \text{ on a, } D_{\exp}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; \alpha^t, 0) = D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0).$$

$ID_e6$  : La fonction de distance exponentielle orientée en input satisfait la condition de commensurabilité.

Les preuves de ces propriétés sont similaires à celles relatives à une orientation dans le graphe. De ce fait, elles sont omises.

Les hypothèses ( $ID_e1$ ) et ( $ID_e2$ ) font respectivement référence à la caractérisation complète de la technologie par la fonction et à l'appartenance de l'unité de production à la frontière efficiente lorsque la mesure est nulle. La troisième propriété indique la disponibilité forte des inputs tandis que la quatrième désigne la translation homothéticité de la fonction par rapport aux facteurs. Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la FDE en input est homogène de degré 0 ( $ID_e5$ ). Elle est également invariante relativement aux unités de mesure ( $ID_e6$ ).

### 2.1.3 Orientation en Output

Nous pouvons également définir la FDE suivant une orientation en output. Dans ce cas, elle mesure l'augmentation potentielle pouvant être appliquée à la production pour une quantité donnée de facteurs.

**Définition 2.5** Si  $P^t(x^t)$  satisfait P1-P5 alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$  avec  $B = \text{diag}(\beta^t)$ , soit l'application  $D_{\exp}^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  telle que :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \{ \delta^t : (x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in T^t \} & \text{si } (x^t, e^{\delta^t B} y^t) \cap T^t \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

est la fonction de distance exponentielle orientée en output.

En faisant intervenir la correspondance en extrants, la définition ci-dessus peut être réécrite de la manière suivante :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : e^{\delta^t B} y^t \in P^t(x^t) \right\} \quad \text{si } e^{\delta^t B} y^t \cap P^t(x^t) \neq \emptyset.$$

**Proposition 2.6** *Lorsque la correspondance  $P^t(x^t)$  satisfait P1-P5 alors, la fonction de distance exponentielle en output vérifie les propriétés suivantes :*

$OD_e1$  :  $y^t \in P^t(x^t)$  si et seulement si,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) \geq 0$ .

$OD_e2$  : Si  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = 0$  alors,  $y^t \in \partial_{\alpha, \beta}^\infty P$ .

$OD_e3$  : Pour tout  $y^t \in P^t(x^t)$  et  $v^t \in P^t(x^t)$  avec  $v^t \geq y^t$  alors,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) \geq D_{\text{exp}}^t(x^t, v^t; 0, \beta^t)$ .

$OD_e4$  :  $D_{\text{exp}}^t(\Phi_{0, \beta}^\theta(x^t, y^t); 0, \beta^t) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - \theta^t$ .

$OD_e5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\text{exp}}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; 0, \beta^t) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t)$ .

$OD_e6$  : La fonction de distance exponentielle en output satisfait la condition de commensurabilité.

Les preuves de ces axiomes sont similaires à celles proposées selon une orientation dans le graphe. Par conséquent, elles sont donc omises.

( $OD_e1$ ) et ( $OD_e2$ ) sont respectivement relatives à la caractérisation complète de la technologie par la mesure et à l'appartenance de l'unité de production à la frontière efficiente lorsque la mesure est nulle. La troisième propriété désigne la disponibilité forte des outputs tandis que la quatrième indique la translation homothéticité de la fonction relativement aux produits. Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la FDE en output est homogène de degré 0 ( $OD_e5$ ). Elle est également invariante par rapport aux unités de mesure ( $OD_e6$ ).

## 2.2 Contexte Logarithmique et Extensions

La fonction de distance présentée précédemment a une forme exponentielle. De ce fait, il est possible de lui appliquer une transformation logarithmique. Nous constatons que la mesure devient log-linéaire. Nous nommons cette mesure "fonction de distance népérienne". Cette section est consacrée à ce cas de figure.

### 2.2.1 Définition et Propriétés

La transformation logarithmique implique l'existence de contraintes supplémentaires. De ce fait, il est nécessaire de définir préalablement l'environnement technologique de la production.



**Définition 2.7** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et toute technologie positive  $T_{++}^t = T^t \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,

$$T_{\ln}^t = \{(\ln(x^t), \ln(y^t)) : (x^t, y^t) \in T_{++}^t\}, \quad (2.4)$$

est la technologie de production népérienne.

Notons que la technologie  $T_{++}^t$  est ln-convexe puisque quels que soient  $z_1, z_2 \in T_{++}^t$  et pour tout  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  tel que  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  on a,  $z_1^{\alpha_1} \odot z_2^{\alpha_2} \in T_{++}^t$ .

**Définition 2.8** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$ , lorsque la technologie de production népérienne satisfait les propriétés T1-T4 alors, l'application  $D_{\ln}^t : \mathbb{R}_{++}^{m+n} \times [0, 1]^{m+n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  définie par :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \ln \left( \Phi_{\alpha, \beta}^{\delta}(x^t, y^t) \right) \in T_{\ln}^t \right\} & \text{si } \ln \left( \Phi_{\alpha, \beta}^{\delta}(x^t, y^t) \right) \cap T_{\ln}^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$

est la fonction de distance népérienne.

Nous pouvons détailler la définition ci-dessus de la manière suivante :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : (\ln(x^t) - \delta^t \alpha^t, \ln(y^t) + \delta^t \beta^t) \in T_{\ln}^t \right\}.$$

Rappelons que la fonction de distance directionnelle est définie comme suit :

$$D(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : (x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t) \in T^t \right\}.$$

On peut constater que la FDD et la fonction de distance népérienne (FDN) sont structurellement similaires. Cependant, des différences résident. La FDN est estimée relativement à des observées transformées de manière logarithmique. Par ailleurs, les pondérations et les vecteurs de direction ont des domaines de définition différents.

Notons que pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  la Définition 2.8 nous permet d'établir l'équivalence suivante :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t). \quad (2.6)$$

**Proposition 2.9** *Lorsque  $T_{\ln}^t$  satisfait les axiomes T1-T4, la fonction de distance népérienne vérifie les propriétés suivantes :*

$D_{\ln}1$  :  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  si et seulement si,  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \geq 0$ .

$D_{\ln}2$  : Si  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = 0$  alors,  $(x^t, y^t) \in \partial T_{++}^t$ .

$D_{\ln}3$  : Pour tout  $(x^t, y^t), (u^t, v^t) \in T_{++}^t$  si  $(-x^t, y^t) \leq (-u^t, v^t)$  alors,

$$D_{\ln}^t(\ln(u^t), \ln(v^t); \alpha^t, \beta^t) \leq D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t).$$

$D_{\ln}4$  :  $D_{\ln}^t(\ln(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t)); \alpha^t, \beta^t) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) - \theta^t$ .

$D_{\ln}5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\ln}^t(\ln(\lambda^t x^t), \ln(\lambda^t y^t); \alpha^t, \beta^t) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$ .

$D_{\ln}6$  : La fonction de distance népérienne est indépendante des unités de mesure.

*Preuves :*

$(D_{\ln}1)$  et  $(D_{\ln}2)$  sont les conséquences directes de la définition 2.8  $\square$ .

$(D_{\ln}3)$  Soit le cône de libre disposition des inputs et des outputs  $K_+ = \mathbb{R}_+^m \times (-\mathbb{R}_+^n)$  de telle sorte que lorsque  $(-u^t, v^t) \geq (-x^t, y^t)$  alors  $\{\delta^t : \ln(e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in (\ln(u^t, v^t) + K_+)\} \subset \{\delta^t : \ln(e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in (\ln(x^t, y^t) + K_+)\}$  et  $\{\delta^t : \ln(e^{-\delta^t A} u^t, e^{\delta^t B} v^t) \in (\ln(u^t, v^t) + K_+)\} \subset \{\delta^t : \ln(e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in (\ln(u^t, v^t) + K_+)\}$ . Par conséquent on a,  $\{\delta^t : \ln(e^{-\delta^t A} u^t, e^{\delta^t B} v^t) \in (\ln(u^t, v^t) + K_+)\} \subset \{\delta^t : \ln(e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t) \in (\ln(x^t, y^t) + K_+)\}$ . D'où la propriété  $(D_{\ln}3)$ ,  $D_{\ln}^t(\ln(u^t), \ln(v^t); \alpha^t, \beta^t) \leq D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$   $\square$ .

$(D_{\ln}4)$  Soit  $\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t) = (e^{-\theta^t \alpha^t} x^t, e^{\theta^t \beta^t} y^t)$  alors,  $D_{\ln}^t(\ln(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t)); \alpha^t, \beta^t) = \sup \{\delta^t : \ln(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta \Phi_{\alpha, \beta}^\delta(x^t, y^t)) \in T_{\ln}^t\}$ . Sachant que  $\Phi_{\alpha, \beta}^\theta \Phi_{\alpha, \beta}^\delta(x^t, y^t) = (\ln(x^t) - (\theta^t + \delta^t)\alpha^t, \ln(y^t) + (\theta^t + \delta^t)\beta^t)$  et, en posant  $\Delta^t = \theta^t + \delta^t$  on a,  $D_{\ln}^t(\ln(\Phi_{\alpha, \beta}^\theta(x^t, y^t)); \alpha^t, \beta^t) = \sup \{\Delta^t : (\ln(x^t) - \Delta^t \alpha^t, \ln(y^t) + \Delta^t \beta^t) \in T_{\ln}^t\} - \theta^t \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) - \theta^t$   $\square$ .

$(D_{\ln}5)$  Soit  $\lambda^t > 0$  tel que  $D_{\ln}^t(\ln(\lambda^t x^t), \ln(\lambda^t y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup \{\delta^t : (\ln(x^t) + \ln(\lambda^t) - \delta^t \alpha^t, \ln(y^t) + \ln(\lambda^t) + \delta^t \beta^t) \in T_{\ln}^t\}$ . En factorisant par  $\ln(\lambda^t)$  on a,  $D_{\ln}^t(\ln(\lambda^t x^t), \ln(\lambda^t y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup \{\delta^t : (\ln(x^t) - \delta^t \alpha^t, \ln(y^t) + \delta^t \beta^t) + \ln(\lambda^t) \in T_{\ln}^t\} \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$   $\square$ .

$(D_{\ln}6)$  Soit  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$  qui est invariante par rapport aux unités de mesure (Proposition 2.2). Puisque  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$  alors, cette dernière vérifie également cette propriété  $\square$ .

La première et la deuxième propriété indiquent respectivement que la fonction de distance népérienne caractérise complètement la technologie et que lorsque l'unité de production est techniquement efficiente, la FDN prend une valeur nulle.  $(D_{\ln}3)$  concerne quant à elle la libre disposition des inputs et des outputs.  $(D_{\ln}4)$  stipule que la FDN est translation homothétique. Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la mesure est homogène de degré 0  $(D_{\ln}5)$ . Enfin, la dernière propriété désigne la propriété de commensurabilité. Cet axiome est une conséquence directe de l'équivalence entre la FDE et la FDN.

Notons que malgré la similitude entre la FDN et la FDD, des différences subsistent. En effet, la première satisfait  $(D_{\ln}6)$  contrairement à la seconde. Par ailleurs, lorsque les rendements d'échelle sont constants alors, la FDD est homogène de degré  $(-1)$  tandis que la FDN est homogène de degré 0.

### 2.2.2 Fonction de Distance Népérienne en Input et en Output

Cette sous-section nous permet de présenter la fonction de distance népérienne dans le contexte des orientations en input et en output.

**Définition 2.10** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$ , l'application  $D_{\ln}^t : \mathbb{R}_{++}^{m+n} \times [0, 1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  définie par :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) = \begin{cases} \sup_{\delta} \{ \delta^t : (\ln(x^t) - \delta^t \alpha^t, \ln(y^t)) \in T_{\ln}^t \} & \text{si } (x^t, y^t) \in T_{++}^t \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

est la fonction de distance népérienne orientée en input.

Soit la correspondance logarithmique des facteurs  $L_{\ln}^t(y^t) = \{ \ln(x^t) : x^t \in L_{++}^t(y^t) \}$  où  $L_{++}^t(y^t) = L^t(y^t) \cap \mathbb{R}_{++}^m$ . Cette dernière permet de réécrire la définition ci-dessus de la manière suivante :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta^t : \ln(x^t) - \delta^t \alpha^t \in L_{\ln}^t(y^t) \} \quad \text{si } x^t \in L_{++}^t(y^t).$$

**Proposition 2.11** *Lorsque  $L_{\ln}^t(y^t)$  satisfait L1-L5, la mesure de distance népérienne orientée en input vérifie les propriétés suivantes :*

$ID_{\ln 1}$  :  $x^t \in L_{++}^t(y^t)$  si et seulement si,  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) \geq 0$ .

$ID_{\ln 2}$  : Si  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) = 0$  alors,  $x^t \in \partial L_{++}^t(y^t)$ .

$ID_{\ln 3}$  : Pour tout  $x^t, u^t \in L_{++}^t(y^t)$  si  $u^t \geq x^t$  alors,  $D_{\ln}^t(\ln(u^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) \geq D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0)$ .

$ID_{\ln 4}$  :  $D_{\ln}^t(\ln(\Phi_{\alpha,0}^\theta(x^t, y^t)); \alpha^t, 0) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) - \theta^t$ .

$ID_{\ln 5}$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\ln}^t(\ln(\lambda^t x^t), \ln(\lambda^t y^t); \alpha^t, 0) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0)$ .

$ID_{\ln 6}$  : La fonction de distance népérienne en input est indépendante des unités de mesure.

Les preuves de ces hypothèses sont similaires à celles présentées dans le cadre d'une orientation dans le graphe. Ainsi, elles ne sont pas présentées.

Les deux premières propriétés concernent respectivement la caractérisation complète de la technologie par la fonction de distance et l'efficiencie technique de l'unité de production lorsque la mesure prend une valeur nulle. L'axiome ( $ID_{\ln 3}$ ) fait référence à la monotonicité de la fonction par rapport aux facteurs tandis que ( $ID_{\ln 4}$ ) stipule qu'elle est translation homothétique en inputs. Lorsque les unités de décision opèrent sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la mesure de distance est homogène de degré 0 ( $ID_{\ln 5}$ ). Par ailleurs, celle-ci vérifie la condition de commensurabilité ( $ID_{\ln 6}$ ).

**Définition 2.12** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$ , l'application  $D_{\ln}^t : \mathbb{R}_{++}^{m+n} \times [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  qui définit par :*

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \{\delta^t : (\ln(x^t), \ln(y^t) + \delta^t \beta^t) \in T_{\ln}^t\} & \text{si } (x^t, y^t) \in T_{++}^t \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

*est la fonction de distance népérienne orientée en output.*

Notons que la correspondance logarithmique (ou népérienne) en outputs est caractérisée par  $P_{\ln}^t(x^t) = \{\ln(y^t) : y^t \in P_{++}^t(x^t)\}$  où  $P_{++}^t(x^t) = P^t(x^t) \cap \mathbb{R}_{++}^n$ . Ainsi, la mesure de distance népérienne en extrant peut être reformulée comme suit :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) = \sup_{\delta} \{\delta^t : \ln(y^t) + \delta^t \beta^t \in P_{\ln}^t(x^t)\} \quad \text{si } y^t \in P_{++}^t(x^t).$$

**Proposition 2.13** *Si la correspondance  $P_{\ln}^t(x^t)$  vérifie P1-P5 alors, la mesure népérienne axée sur les produits présentée ci-dessus satisfait les propriétés suivantes :*

*OD<sub>ln</sub>1 :  $y^t \in P_{++}^t(x^t)$  si et seulement si,  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) \geq 0$ .*

*OD<sub>ln</sub>2 : Si  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) = 0$  alors,  $y^t \in \partial P_{++}^t(x^t)$ .*

*OD<sub>ln</sub>3 : Pour tout  $y^t, v^t \in P_{++}^t(x^t)$  si  $v^t \geq y^t$  alors,  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(v^t); 0, \beta^t) \leq D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t)$ .*

*OD<sub>ln</sub>4 :  $D_{\ln}^t(\ln(\Phi_{0,\beta}^\theta(x^t, y^t)); 0, \beta^t) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) - \theta^t$ .*

*OD<sub>ln</sub>5 : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\ln}^t(\ln(\lambda^t x^t), \ln(\lambda^t y^t); 0, \beta^t) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t)$ .*

*OD<sub>ln</sub>6 : La fonction de distance népérienne en output est invariante par rapport aux unités de mesure.*

Nous omettons de présenter les preuves de ces hypothèses puisqu'elles sont similaires à celles présentées dans le cadre de la mesure népérienne orientée dans le graphe de la technologie.

Les axiomes (OD<sub>ln</sub>1) et (OD<sub>ln</sub>2) désignent respectivement la caractérisation de la technologie de production de la mesure népérienne et l'appartenance de l'unité de production au sous-ensemble efficient lorsque la valeur de la mesure est nulle. La monotonicité de la fonction de distance par rapport aux outputs est définie par la troisième propriété tandis que la translation homothéticité l'est par la quatrième. Les deux dernières hypothèses concernent quant à elles, l'homogénéité de degré 0 de la fonction sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants (OD<sub>ln</sub>5) et, la commensurabilité (OD<sub>ln</sub>6).

### 2.2.3 Équivalence entre les Mesures d'Efficienne

Sous certaines conditions, des mesures de distance sont équivalentes entre elles. C'est le cas entre les mesures de Debreu-Farrell, les fonctions de distance de Shephard, la fonction de distance

directionnelle et la fonction de distance proportionnelle. Suivant le même logique, nous présentons les relations d'équivalence existant entre la fonction de distance exponentielle (et népérienne) et certaines mesures d'efficacité présentes dans la littérature.

**Les mesures de Debreu-Farrell.** Nous pouvons démontrer que lorsque certaines conditions sont vérifiées alors, les mesures de Debreu-Farrell et la FDE sont équivalentes.

**Proposition 2.14** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$ , on peut établir que :*

- (i) Si  $\alpha^t = \mathbb{1}_m$  et  $\beta^t = 0$  alors,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) \equiv -\ln(E_I^t(x^t, y^t))$ ,
- (ii) Si  $\alpha^t = 0$  et  $\beta^t = \mathbb{1}_n$  alors,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_n) \equiv \ln(E_O^t(x^t, y^t))$ .

On peut en déduire que l'équivalence entre la FDE et les mesures de Debreu-Farrell n'est possible que lorsque la première est orientée soit en input ou en output.

*Preuves :*

Rappelons que  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$ .

(i) Lorsque  $\alpha^t = \mathbb{1}_m$  et  $\beta^t = 0$  alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  on a  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) = \sup \{ \delta^t : (e^{-\delta^t \mathbb{1}_m} x^t, y^t) \in T_{++}^t \}$ . Ainsi, en posant  $e^{\delta^t}$  et en utilisant l'équivalence entre la FDE et la FDN on obtient  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) = \ln \left( \sup \left\{ \lambda^t : ((\lambda^{-1})^t x^t, y^t) \in T_{++}^t \right\} \right)$ . Supposons que  $\lambda^{-1} = \mu$  alors,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) = \ln \left( \sup \left\{ \mu : (\mu x^t, y^t) \in T_{++}^t \right\} \right)$ . Sachant que  $\ln \left( \sup \left\{ \lambda^t : ((\lambda^{-1})^t x^t, y^t) \in T_{++}^t \right\} \right) = -\ln \left( \inf \left\{ \mu : (\mu x^t, y^t) \in T_{++}^t \right\} \right)$  nous avons,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) = -\ln(E_I^t(x^t, y^t))$  □.

(ii) Pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  tel que  $\alpha^t = 0$  et  $\beta^t = \mathbb{1}_n$  on a  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_n) = \sup \left\{ \delta^t : (x^t, e^{\delta^t \mathbb{1}_n} y^t) \in T_{++}^t \right\}$ . Puisque la FDE est équivalente à la FDN, en posant  $e^{\delta^t} = \lambda^t$ , nous obtenons  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_n) = \ln \left( \sup \left\{ \lambda^t : ((\lambda)^t x^t, y^t) \in T_{++}^t \right\} \right)$ . Par conséquent,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_n) = \ln(E_O^t(x^t, y^t))$  □

**La mesure hyperbolique.** La mesure hyperbolique de l'efficacité technique a été introduite par Färe, Grosskopf et Lovell (1985). Celle-ci est une extension des mesures de Debreu-Farrell selon une orientation dans le graphe de la technologie. Elle permet une modification proportionnelle et

simultanée de toutes les variables (facteurs et produits). Pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$ , l'application  $H^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  est définie par la fonction (mesure hyperbolique) suivante :

$$H^t(x^t, y^t) = \inf_{\lambda} \{ \lambda^t > 0 : (\lambda^t x^t, (\lambda^{-1})^t y^t) \in T^t \}.$$

**Proposition 2.15** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  avec  $\alpha^t = \mathbb{1}_m$  et  $\beta^t = \mathbb{1}_n$ , on peut affirmer que :*

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, \mathbb{1}_n) \equiv \ln(H^t(x^t, y^t)).$$

*Preuve :*

Si  $\alpha^t = \mathbb{1}_m$  et  $\beta^t = \mathbb{1}_n$  alors,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, \mathbb{1}_n) = \sup \{ \delta^t : (e^{-\delta^t \mathbb{1}_m} x^t, e^{\delta^t \mathbb{1}_n} y^t) \in T_{++}^t \}$ . Selon l'équivalence entre la FDE et la FDN et, en posant  $\lambda^t = e^{-\delta^t}$ , on a  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, \mathbb{1}_n) \equiv \ln(\sup \{ \lambda^t : (\lambda^t x^t, (\lambda^{-1})^t y^t) \in T_{++}^t \})$ . Puisque on a  $\ln(\sup \{ \lambda^t : (\lambda^t x^t, (\lambda^{-1})^t y^t) \in T_{++}^t \}) = -\ln(\inf \{ \lambda^t : (\lambda^t x^t, (\lambda^{-1})^t y^t) \in T_{++}^t \})$ . De ce fait,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, \mathbb{1}_n) = -\ln(H^t(x^t, y^t))$   $\square$ .

**La mesure proportionnelle** La FDE peut être approximée par la FDP et, réciproquement.

**Proposition 2.16** *Soient  $(x^t, y^t) \in T^t$  et  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  tels que pour tout  $\delta^t$  suffisamment petit ou, pour tout point suffisamment proche de la frontière efficiente, on a :*

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \approx D^{\infty, t}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t).$$

*Preuve :*

Soit  $\Phi_{\alpha, \beta}^\delta(x^t, y^t) = (e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t)$ . Pour  $A = \text{diag}(\alpha^t)$  et  $B = \text{diag}(\beta^t)$ , le développement de Taylor au voisinage de (0) permet d'établir que  $e^{-\delta^t A} x^t = x^t - \delta^t \alpha^t x^t + \frac{(\delta^t \alpha^t)^2}{2!} (x^t) + \dots + \frac{(\delta^t \alpha^t)^k}{k!} (x^t) + o((\delta^t \alpha^t)^{k+1} x^t)$  et,  $e^{\delta^t B} y^t = y^t + \delta^t \beta^t y^t + \frac{(\delta^t \beta^t)^2}{2!} (y^t) + \dots + \frac{(\delta^t \beta^t)^k}{k!} (y^t) + o((\delta^t \beta^t)^{k+1} y^t)$ . Lorsque l'unité de production est suffisamment proche de la frontière efficiente et donc,  $\delta^t$  suffisamment proche de zéro, les fonctions de Taylor ci-dessus deviennent  $e^{-\delta^t A} x^t = x^t - \delta^t \alpha^t x^t = (I - \delta^t \alpha^t) x^t$  et  $e^{\delta^t B} y^t = y^t + \delta^t \beta^t y^t = (I + \delta^t \beta^t) y^t$  où  $I$  est la matrice identité. Ainsi, on peut dire que  $\Phi_{\alpha, \beta}^\delta(x^t, y^t) = ((I - \delta^t \alpha^t) x^t, (I + \delta^t \beta^t) y^t)$ . Puisque  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup \{ \delta^t : \Phi_{\alpha^t, \beta^t}^\delta(x^t, y^t) \in T^t \}$  alors, pour tout  $\delta^t$  suffisamment petit et tout point proche de la fron-

tière efficiente,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \approx \sup \{ \delta^t : ((I - \delta^t \alpha^t)x^t, (I + \delta^t \alpha^t)y^t) \in T^t \}$ . Par conséquent,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \approx D^\infty(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$   $\square$ .

**La mesure directionnelle multiplicative** Mehdiiloozad, Sahoo et Roshdi (2014) reprennent la fonction de distance directionnelle multiplicative (FDDM) introduite par Peyrache et Coelli (2009). Soient respectivement  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  et  $g^t = (h^t, k^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , les vecteurs inputs-outputs et le vecteur de direction préalablement choisi. A l'application  $M^t : \mathbb{R}_{++}^{m+n} \times \mathbb{R}_{++}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  est associée la fonction de distance directionnelle multiplicative suivante :

$$M^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda^t : \left( (\lambda^t)^{-h^t} x^t, (\lambda^t)^{k^t} y^t \right) \in T_{++}^t \right\}.$$

Grâce cette définition, nous pouvons établir une relation d'équivalence entre la FDE et la FDDM.

**Proposition 2.17** Soit  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$ , pour tout  $g^t = (h^t, k^t)$  et tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$ , on peut statuer que :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \ln \left( M^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \right).$$

*Preuve :*

Soit  $\ln \left( M^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \right) = \sup_{\delta} \{ \lambda^t : (\ln(x^t) - \ln(\lambda^t) \cdot h^t, \ln(y^t) + \ln(\lambda^t) \cdot k^t) \in T_{\ln}^t \}$ . On sait que  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$  avec  $D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup \{ \delta^t : (\ln(x^t) - \delta^t \alpha^t, \ln(y^t) + \delta^t \beta^t) \in T_{\ln}^t \}$ . En posant  $\delta^t = \ln(\lambda^t)$  et  $(\alpha^t, \beta^t) = (h^t, k^t)$  on a,  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv \sup \{ \lambda^t : (\ln(x^t) - \ln(\lambda^t) h^t, \ln(y^t) + \ln(\lambda^t) k^t) \in T_{\ln}^t \}$ . Donc, on peut affirmer que  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv \ln \left( M^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \right)$   $\square$ .

### 3 La Théorie de la Dualité

Les travaux de Hotelling (1932), Shephard (1953, 1970) et McFadden (1978) ont permis de mettre en lumière les relation duales entre les mesures de distance et les fonctions de coût, de revenu et de profit. Nous explorons ces relations dans le cadre de la fonction de distance exponentielle. Pour ce faire, nous présentons les pseudo fonctions de coût, de revenu et de profit Cobb-Douglas.



### 3.1 Pseudo Fonctions de Coût et de Revenu Cobb-Douglas

Cette sous-section présente les pseudo fonctions de coût et de revenu tant selon une structure multiplicative que log-additive. Nous montrons également que celles-ci sont duales aux mesures de distance exponentielle (népérienne) en input et en output. Les travaux de Shephard (1953, 1970) nous permettent de déduire les fonctions de prix ajustés relatives à la théorie de la dualité.

#### 3.1.1 Pseudo Fonction de Coût : Définitions et Propriétés

Dans certains secteurs d'activité, les unités de production ne peuvent modifier (ou influencer) que leurs facteurs de production. En effet, leur production est une variable exogène à l'entreprise (ex : production de service, etc.). Dans ce cas, lorsque les prix sur les marchés sont disponibles, il est plus intéressant pour la firme d'évaluer son efficacité technique relativement à ses coûts et à ses facteurs productifs.

**Définition 2.18** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout prix des inputs  $w^t = (w_1^t, \dots, w_m^t) \in \mathbb{R}_+^m$ , l'application  $C_{CD}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par :

$$C_{CD}^t(w^t, y^t) = \begin{cases} \inf_x \{(x^t)^{w^t} : x^t \in L^t(y^t)\} & \text{si } L^t(y^t) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

est la pseudo fonction de coût Cobb-Douglas.

McFadden(1978) présente une fonction de coût Cobb-Douglas basée sur les prix et des pondérations normalisées. Cependant, dans ces travaux, nous introduisons une formulation basée sur la quantité des facteurs et leur prix.

**Proposition 2.19** Lorsque  $L^t(y^t)$  satisfait L1-L5 alors, la pseudo fonction de coût Cobb-Douglas vérifie les propriétés suivantes :

$C_{CD}1$  : Pour tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  on a,  $C_{CD}^t(w^t, 0) = 0$ .

$C_{CD}2$  : Pour tout  $(w^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $w^t > 0$  et  $y^t > 0$  alors,  $C_{CD}^t(w^t, y^t) > 0$ .

$C_{CD}3$  : Pour tout  $w^t, \tilde{w}^t \in \mathbb{R}_+^m$  avec  $w^t \geq \tilde{w}^t$  on a,  $C_{CD}^t(w^t, y^t) \geq C_{CD}^t(\tilde{w}^t, y^t)$ .

$C_{CD}4$  : Pour tout  $y^t, \tilde{y}^t \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $y^t \geq \tilde{y}^t$  alors,  $C_{CD}^t(w^t, y^t) \geq C_{CD}^t(w^t, \tilde{y}^t)$ .

$C_{CD5}$  : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, pour  $\lambda^t > 0$  on a,  $C_{CD}^t(w^t, \lambda^t y^t) = (\lambda^t)^{w^t} \cdot C_{CD}^t(w^t, y^t)$ .

*Preuves :*

$(C_{CD1})$  à  $(C_{CD4})$  sont des axiomes qui découlent directement de la définition de la fonction de coût  $\square$ .

$(C_{CD5})$  Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) \in T^t$ . Ainsi,  $C_{CD}^t(w^t, \lambda^t y^t) = \inf_x \{(\lambda^t x^t)^{w^t} : x^t \in L^t(y^t)\}$ . En développant l'expression  $(\lambda^t x^t)^{w^t}$  on a,  $C_{CD}^t(w^t, \lambda^t y^t) = (\lambda^t)^{w^t} \cdot (\inf_x \{(x^t)^{w^t} : x^t \in L^t(y^t)\})$ . De ce fait,  $C_{CD}^t(w^t, \lambda^t y^t) = (\lambda^t)^{w^t} \cdot C_{CD}^t(w^t, y^t) \quad \square$ .

La première propriété stipule que tous les intrants sont variables c'est-à-dire que des coûts fixes ne sont pas considérés. Le deuxième axiome signifie que des productions et des prix de facteurs non-nuls engendrent des coûts effectifs. Les hypothèses  $(C_{CD3})$  et  $(C_{CD4})$  sont relatifs à la monotonicité de la fonction de coût par rapport au prix des facteurs et aux outputs. La fonction est semi-homogène de degré  $(w^t)$  relativement à la production sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants  $(C_{CD5})$ .

**Lemme 2.20**  $L_{++}^t(y^t)$  est ln-convexe si et seulement si,  $L_{\ln}^t(y^t)$  est convexe.

Il existe une relation duale entre la fonction de coût présentée précédemment et la FDE orientée en input. Afin de pouvoir établir celle-ci, il est nécessaire que  $x^t \in L_{++}^t(y^t)$ .

**Proposition 2.21** Lorsque  $L_{++}^t(y^t)$  satisfait L1-L6 alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$ ,  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  et  $A = \text{diag}(\alpha^t) \in [0, 1]^m$ , la pseudo fonction de coût Cobb-Douglas duale est :

$$C_{CD}^t(w^t, y^t) = \inf_x \left\{ \left( e^{-\delta^t A} x^t \right)^{w^t} : D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \geq 0 \right\}, \quad (2.10)$$

et la fonction de distance exponentielle duale orientée en input est :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \inf_w \left\{ \frac{(x^t)^{w^t}}{C_{CD}^t(w^t, y^t)} : w^t \cdot \alpha^t \neq 0 \right\}. \quad (2.11)$$

Pour tout couple  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  tel que  $j = (1, \dots, J) \in \mathcal{J}$  et tout input  $i = (1, \dots, m) \in [m]$ , cette formulation duale de la FDE orientée en input peut être détaillée de la manière suivante :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \inf_w \left\{ \frac{\prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{w_i^t}}{\prod_{i \in [m]} (x_{j,i}^t)^{w_i^t}} : w^t \cdot \alpha^t \neq 0 \right\}. \quad (2.12)$$

Une normalisation peut être imposée de telle sorte que  $w^t \cdot \alpha^t = 1$ .

Nous pouvons effectuer une transformation logarithmique de la pseudo fonction de coût Cobb-Douglas. De ce fait, la pseudo fonction de coût népérienne est duale à la mesure de distance népérienne.

**Définition 2.22** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$ , l'application  $C_{\ln}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par

$$C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t)) = \begin{cases} \inf_x \{w^t \cdot \ln(x^t) : x^t \in L_{++}^t(y)\} & \text{si } L_{++}^t(y) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

est la fonction de coût népérienne.

La fonction présentée ci-dessus peut être associée à certaines hypothèses.

**Proposition 2.23** Lorsque  $L_{++}^t(y^t)$  satisfait L1-L5 alors, la fonction de coût népérienne vérifie les propriétés suivantes :

$C_{\ln}1$  : Pour tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  on a,  $C_{\ln}^t(w^t, 0) = 0$ .

$C_{\ln}2$  : Pour tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $y^t \in \mathbb{R}_{++}^n$  avec  $w^t > 0$  et  $\ln(y^t) > 0$  alors,  $C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t)) > 0$ .

$C_{\ln}3$  : Pour tout  $w^t, \tilde{w}^t \in \mathbb{R}_+^m$  avec  $w^t \geq \tilde{w}^t$  on a,  $C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t)) \geq C_{\ln}^t(\tilde{w}^t, \ln(y^t))$ .

$C_{\ln}4$  : Pour tout  $y^t, \tilde{y}^t \in \mathbb{R}_{++}^n$  avec  $\ln(y^t) \geq \ln(\tilde{y}^t)$  alors,  $C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t)) \geq C_{\ln}^t(w^t, \ln(\tilde{y}^t))$ .

$C_{\ln}5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $C_{\ln}^t(\lambda^t w^t, \ln(y^t)) = \lambda^t C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t))$ .

$C_{\ln}6$  : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $C_{\ln}^t(w^t, \ln(\lambda^t y^t)) = C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t)) + w^t \ln(\lambda^t)$ .

Les preuves ainsi que les interprétations des axiomes cités ci-dessus sont omises dans le contexte logarithmique. En effet, elles sont similaires à celles présentées dans le cadre de la pseudo fonction de coût Cobb-Douglas, dans un contexte logarithmique.

La relation duale entre la fonction de coût népérienne et la FDN en input est présentée ci-dessous.

**Définition 2.24** Lorsque  $L_{++}^t(y^t)$  satisfait L1-L6 alors pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  et tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$ , la fonction de coût népérienne duale est :

$$C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t)) = \inf_x \{w^t \cdot \ln(x^t) - \delta^t \alpha^t w^t : D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) \geq 0\}, \quad (2.14)$$

et la fonction de distance népérienne duale orientée en input est :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) = \inf_w \{w^t \cdot \ln(x^t) - C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t)) : w^t \cdot \alpha^t \neq 0\}. \quad (2.15)$$

De manière détaillée, pour tout  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  tel que  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $i \in [m]$ , la FDN duale en intrant peut être exprimée comme suit :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) = \inf_w \left\{ \sum_{i \in [m]} w_i^t \cdot \ln(x_i^t) - \sum_{i \in [m]} w_i^t \cdot \ln(x_{j,i}^t) : w^t \cdot \alpha^t \neq 0 \right\}. \quad (2.16)$$

Notons que les expressions duales de la fonction de coût népérienne et de la FDN en input sont structurellement similaires à celles relatives à la FDD.

### 3.1.2 Pseudo Fonction de Revenu : Définitions et Propriétés

Dans certains secteurs d'activité, les unités productives ont uniquement la possibilité d'agir sur leurs productions (rigidité structurelle des firmes). Ainsi, lorsque les prix sur les marchés sont disponibles, il peut être plus intéressant pour les firmes de chercher à maximiser leur revenu compte tenu des facteurs utilisés. De ce fait, l'estimation de leur efficacité s'effectue par rapport à leurs revenus et leurs productions.

**Définition 2.25** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout prix des outputs  $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , l'application  $R_{CD}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  définie par :

$$R_{CD}^t(p^t, x^t) = \begin{cases} \sup_y \left\{ (y^t)^{p^t} : y^t \in P^t(x^t) \right\} & \text{si } P^t(x^t) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17)$$

est la pseudo fonction de revenu Cobb-Douglas.

**Proposition 2.26** Lorsque  $P^t(x^t)$  satisfait P1-P5 alors, la pseudo fonction de revenu Cobb-Douglas vérifie les propriétés suivantes :

$R_{CD1}$  : Pour tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  on a,  $R_{CD}^t(p^t, 0) = 0$ .

$R_{CD2}$  : Pour tout  $(p^t, x^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $p^t > 0$  et  $x^t > 0$  alors,  $R_{CD}^t(p^t, x^t) > 0$ .

$R_{CD3}$  : Pour tout  $p^t, \tilde{p}^t \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $p^t \geq \tilde{p}^t$  on a,  $R_{CD}^t(p^t, x^t) \geq R_{CD}^t(\tilde{p}^t, x^t)$ .

$R_{CD4}$  : Pour tout  $x^t, \tilde{x}^t \in \mathbb{R}_+^m$  avec  $x^t \geq \tilde{x}^t$  alors,  $R_{CD}^t(p^t, x^t) \geq R_{CD}^t(p^t, \tilde{x}^t)$ .

$R_{CD5}$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$ , sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants on a,  $R_{CD}^t(p^t, \lambda^t x^t) = (\lambda^t)^{p^t} \cdot R_{CD}^t(p^t, x^t)$ .

*Preuves :*

( $R_{CD1}$ ) à ( $R_{CD4}$ ) sont les conséquences directes de la Définition 2.25.

( $R_{CD5}$ ) Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, pour tout  $\lambda^t > 0$  on a  $(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) \in T^t$  tel que  $R_{CD}^t(p^t, \lambda^t x^t) = \sup_y \left\{ (\lambda^t y^t)^{p^t} : y^t \in P^t(x^t) \right\}$ . En développant  $(\lambda^t y^t)^{p^t}$  puis, en factorisant par  $(\lambda^t)^{p^t}$  on obtient,  $R_{CD}^t(p^t, \lambda^t x^t) = (\lambda^t)^{p^t} \cdot \left( \sup_y \left\{ (y^t)^{p^t} : y^t \in P^t(x^t) \right\} \right)$  Donc,  $R_{CD}^t(p^t, \lambda^t x^t) = (\lambda^t)^{p^t} \cdot R_{CD}^t(p^t, x^t)$  □.

La propriété ( $R_{CD1}$ ) signifie que tous les facteurs sont variables. Donc, lorsque les ressources sont inutilisées, il n'existe ni production effective ni revenu. La deuxième hypothèse stipule qu'une utilisation effective des facteurs et des prix non-nuls engendrent des revenus effectifs. Les deux axiomes suivants sont relatifs à la monotonicité de la fonction par rapport au prix des outputs ( $R_{CD3}$ ) et aux inputs ( $R_{CD4}$ ). Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la fonction est semi-homogène de degré  $(p^t)$  relativement aux inputs.

Une relation duale existe entre la FDE orientée en output et la pseudo fonction de revenu Cobb-Douglas si et seulement si,  $y^t \in P_{++}^t(x^t)$  et que  $P_{++}^t$  est ln-convexe.

**Lemme 2.27**  $P_{++}^t(x^t)$  est ln-convexe si et seulement si,  $P_{\ln}^t(x^t)$  est convexe.

**Proposition 2.28** Si  $P_{++}^t(x^t)$  satisfait P1-P6 alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  et tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $B = \text{diag}(\beta^t)$ , la pseudo fonction de revenu Cobb-Douglas duale est :

$$R_{CD}^t(p^t, x^t) = \sup_y \left\{ \left( e^{\delta^t B} y^t \right)^{p^t} : D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) \geq 0 \right\}, \quad (2.18)$$

et la fonction de distance exponentielle duale orientée en output est :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \inf_p \left\{ \frac{R_{CD}^t(p^t, x^t)}{(y^t)^{p^t}} : p^t \cdot \beta^t \neq 0 \right\}. \quad (2.19)$$

Pour tout couple  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  avec  $j \in \mathcal{J}$  et tout output  $r = (1, \dots, n) \in [n]$ , la FDE duale orientée en output peut être détaillée comme suit :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \inf_p \left\{ \frac{\prod_{r \in [n]} (y_{j,r}^t)^{p_r^t}}{\prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{p_r^t}} : p^t \cdot \beta^t \neq 0 \right\}. \quad (2.20)$$

Une normalisation est possible telle que  $p^t \cdot \beta^t = 1$ .

Dans un contexte logarithmique, la FDN orientée en output est duale à la fonction de revenu népérienne. Cette dernière est caractérisée ci-dessous.

**Définition 2.29** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$ , l'application  $R_{\ln}^t : \mathbb{R}_{++}^m \times \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  définie par :

$$R_{\ln}^t(p^t, \ln(x^t)) = \begin{cases} \sup_y \{p^t \cdot \ln(y^t) : y^t \in P_{++}^t(x^t)\} & \text{si } P_{++}^t(x^t) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.21)$$

est la fonction de revenu népérienne.

**Proposition 2.30** Lorsque  $P_{++}^t(x^t)$  satisfait P1-P5, la fonction de revenu népérienne vérifie :

$R_{\ln} I$  : Pour tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  on a,  $R_{\ln}^t(p^t, 0) = 0$ .

$R_{\ln 2}$  : Pour tout  $(p^t, x^t) \in \mathbb{R}_{++}^m \times \mathbb{R}_+^n$  avec  $p^t > 0$  et  $x^t > 0$  alors,  $R_{\ln}^t(p^t, \ln(x^t)) > 0$ .

$R_{\ln 3}$  : Pour tout  $p^t, \tilde{p}^t \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $p^t \geq \tilde{p}^t$  on a,  $R_{\ln}^t(p^t, \ln(x^t)) \geq R_{\ln}^t(\tilde{p}^t, \ln(x^t))$ .

$R_{\ln 4}$  : Pour tout  $x^t, \tilde{x}^t \in \mathbb{R}_{++}^m$  avec  $x^t \geq \tilde{x}^t$  alors,  $R_{\ln}^t(p^t, \ln(x^t)) \geq R_{\ln}^t(p^t, \ln(\tilde{x}^t))$ .

$R_{\ln 5}$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $R_{\ln}^t(\lambda^t p^t, \ln(x^t)) = \lambda^t (R_{\ln}^t(p^t, \ln(x^t)))$ .

$R_{\ln 6}$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$ , sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants on a,  $R_{\ln}^t(p^t, \ln(\lambda^t x^t)) = R_{\ln}^t(p^t, x^t) + p^t \ln(\lambda^t)$ .

Les preuves et les interprétations des hypothèses présentées ci-dessus sont similaire à celles fournies dans le cadre de la pseudo fonction de revenu Cobb-Douglas. Ainsi, elles sont omises.

La relation duale existant entre la fonction de revenu népérienne et la FDN orientée en output est présentée dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 2.31** Lorsque la correspondance en outputs  $P_{++}^t(x^t)$  vérifie P1-P6 alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  et tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $\beta^t \in [0, 1]^n$ , la fonction de revenu népérienne duale est :

$$R_{\ln}^t(p^t, \ln(x^t)) = \sup_y \{p^t \cdot \ln(y^t) + \delta^t \beta^t p^t : D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) \geq 0\}, \quad (2.22)$$

et la fonction de distance népérienne duale orientée en output est :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) = \inf_p \{R_{\ln}^t(p^t, \ln(x^t)) - p^t \cdot \ln(y^t) : p^t \cdot \beta^t \neq 0\}. \quad (2.23)$$

Ainsi, pour tout  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  tel que  $j \in \mathcal{J}$  et, tout  $r \in [n]$ , la fonction de distance népérienne duale en extrant peut être réécrite de la manière suivante :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) = \inf_p \left\{ \sum_{r \in [n]} p_r^t \cdot \ln(y_{j,r}^t) - \sum_{r \in [n]} p^t \cdot \ln(y_r^t) : p^t \cdot \beta^t \neq 0 \right\}. \quad (2.24)$$

Nous retrouvons des formulations duales structurellement similaires à celles relatives à la mesure de distance directionnelle.

### 3.1.3 Fonctions de Prix Ajustés

Les fonctions de prix ajustés représentent les prix d'équilibre si le marché est parfaitement concurrentiel. Les mesures de distance définies d'un point de vue dual permettent de les retrouver. De manière analogue, les fonctions de coût et de revenu peuvent fournir les fonctions de demande de facteur et d'offre conditionnelles. Ces résultats proviennent des travaux de Shephard (1953, 1970) et McFadden (1978).

#### Proposition 2.32

(i) Aux points où la pseudo fonction de coût Cobb-Douglas est différentiable par rapport au prix des facteurs  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  et, si elle admet un minimum  $\tilde{x}^t(w^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^m$  alors, selon le Lemme de Shephard :

$$\nabla_w C_{CD}^t(w^t, y^t) = \tilde{x}^t(w^t, y^t; \alpha^t, 0) \quad (2.25)$$

est la fonction de demande conditionnelle de facteurs.

(ii) Aux points où la fonction de distance exponentielle orientée en input est différentiable relativement aux facteurs  $x^t \in \mathbb{R}_{++}^m$  alors, selon le Lemme dual de Shephard :

$$\nabla_{\ln(x)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \tilde{w}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \quad (2.26)$$

est la fonction de prix ajustés des inputs.

*Preuves :*

(i) Soit  $C_{CD}^t(w^t, y^t) = \exp[C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t))]$  avec  $x_*^t(w^t, y^t; \alpha^t, 0)$ , la fonction de demande de facteurs à l'optimum. Puisque  $C_{CD}^t(w^t, y^t) = \exp[C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t))]$  alors,  $\nabla_w C_{CD}^t(w^t, y^t) = \nabla_w \exp[C_{\ln}^t(w^t, \ln(y^t))]$ . En effectuant une transformation logarithmique à la pseudo fonction de coût, on obtient  $\nabla_w \ln(C_{CD}^t(w^t, y^t)) = \nabla_w C_{\ln}^t(w^t, (y^t))$ . De ce fait,  $\nabla_w \ln(C_{CD}^t(w^t, y^t)) = \ln(\tilde{x}^t(w^t, y^t))$  et  $\nabla_w C_{CD}^t(w^t, y^t) = \tilde{x}^t(w^t, y^t; \alpha^t, 0)$   $\square$ .

(ii) On sait que  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0)$  tel que  $\tilde{w}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0)$  est la fonction de prix ajustés. D'où,  $\nabla_{\ln(x)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \equiv \nabla_{\ln(x)} D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0)$ . De ce fait,  $\nabla_{\ln(x)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \tilde{w}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0)$   $\square$ .

#### Proposition 2.33

(iii) Aux points où la pseudo fonction de revenu Cobb-Douglas est différentiable par rapport au



prix des outputs  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  et, si elle admet un maximum  $\tilde{y}^t(p^t, x^t) \in \mathbb{R}_{++}^n$  alors, selon le Lemme de Shephard :

$$\nabla_p R_{CD}^t(p^t, x^t) = \tilde{y}^t(p^t, x^t; 0, \beta^t) \quad (2.27)$$

est la fonction d'offre conditionnelle d'outputs.

(iv) Aux points où la fonction de distance exponentielle orientée en output est différentiable relativement aux outputs  $y^t \in \mathbb{R}_{++}^n$  alors, selon le Lemme dual de Shephard :

$$\nabla_{\ln(y)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = -\tilde{p}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) \quad (2.28)$$

est la fonction de prix ajustés des extrants.

*Preuves :*

(iii) Soit  $R_{CD}^t(p^t, x^t) = \exp [R_{\ln}(p^t, \ln(x^t))]$  avec  $\tilde{y}^t(x^t, p^t; 0, \beta^t)$ , la fonction d'offre d'outputs à l'optimum. Ainsi,  $\ln [R_{CD}^t(p^t, x^t)] = R_{\ln}(p^t, \ln(x^t))$  tel que  $\nabla_p \ln [R_{CD}^t(p^t, x^t)] = \nabla_p R_{\ln}(p^t, \ln(x^t))$  Sachant que  $\nabla_p R_{\ln}(p^t, \ln(x^t)) = \ln(\tilde{y}^t(x^t, p^t; 0, \beta^t))$  alors,  $\nabla_p R_{CD}^t(p^t, x^t) = \tilde{y}^t(x^t, p^t; 0, \beta^t)$  □.

(iv) Pour  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t)$  tel que  $\tilde{p}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t)$  est la fonction de prix ajustés des outputs alors, on a  $\nabla_{\ln(y)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \nabla_{\ln(y)} D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t)$ . Ainsi,  $\nabla_{\ln(y)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = -\tilde{p}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t)$  □.

De manière plus formelle, les correspondances des prix ajustés à des inputs et des outputs qui permettent l'optimisation des fonctions de coût et de revenu sont respectivement :

$$\begin{aligned} \tilde{w}^t &: \mathbb{R}_{++}^{m+n} \times [0, 1]^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m} \\ \tilde{w}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) &= \arg \min_x \left\{ \frac{(x^t)^{w^t}}{C_{CD}^t(w^t, y^t)} : w^t \cdot \alpha^t = 1 \right\}, \\ \tilde{p}^t &: \mathbb{R}_{++}^{m+n} \times [0, 1]^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n} \\ \tilde{p}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) &= \arg \min_y \left\{ \frac{R_{CD}^t(p^t, x^t)}{(y^t)^{p^t}} : p^t \cdot \beta^t = 1 \right\}. \end{aligned}$$

## 3.2 Fonctions de Profit Cobb-Douglas et Log-linéaire

Dans certains secteurs d'activité, les entreprises ont la possibilité d'influencer à la fois la quantité de facteurs utilisée et le niveau de la production. Dans ce cas, elles peuvent chercher à maximiser leur profit grâce à une meilleure combinaison des facteurs et/ou une production plus optimale. La fonction de profit permet de déterminer les quantités d'inputs et d'outputs qui maximisent le bénéfice des unités productives.

### 3.2.1 Pseudo Fonction de Profit Cobb-Douglas : définition, propriétés et dualité

**Définition 2.34** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , l'application  $\Pi_{CD}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  définie par :

$$\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = \begin{cases} \sup_{x,y} \left\{ \frac{(y^t)^{p^t}}{(x^t)^{w^t}} : (x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t) \right\} & \text{si } T^t(x^t, y^t) \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.29)$$

est la pseudo fonction de profit Cobb-Douglas.

Cette fonction est associée à quelques hypothèses.

**Proposition 2.35** Lorsque  $T^t(x^t, y^t)$  satisfait T1-T4 alors, la pseudo fonction de profit Cobb-Douglas admet les propriétés suivantes :

$\Pi_{CD}1$  : Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  si  $(0, 0) \in T^t(x^t, y^t)$  on a,  $\Pi_{CD}^t(0, 0) = 0$ .

$\Pi_{CD}2$  : Pour  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  on a,  $\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) \geq 0$ .

$\Pi_{CD}3$  : Pour tout  $(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , si  $\tilde{w}^t \leq w^t$  et  $\tilde{p}^t \geq p^t$  alors,  $\Pi_{CD}^t(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) \geq \Pi_{CD}^t(w^t, p^t)$ .

$\Pi_{CD}4$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $\Pi_{CD}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = (\Pi_{CD}^t(w^t, p^t))^{\lambda^t}$ .

$\Pi_{CD}5$  : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants,  $\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = 1$  ou  $\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = \infty$ .

Le premier axiome stipule qu'il n'y pas de repas gratuit tandis que le deuxième signifie que des inputs et des outputs positifs induisent un profit non-nul. ( $\Pi_{CD}3$ ) fait référence à la monotonie de la fonction de profit par rapport aux prix. L'hypothèse ( $\Pi_{CD}4$ ) désigne l'homogénéité de degré

$\lambda^t$  relativement au prix. Lorsque la technologie satisfait des rendements d'échelle constants alors, la fonction de profit est réduite à 1 ou à  $\infty$ .

*Preuves :*

( $\Pi_{CD1}$ ) à ( $\Pi_{CD3}$ ) découlent directement de la définition de la fonction  $\square$ .

( $\Pi_{CD4}$ ) Soient  $\lambda^t > 0$  et  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tels que  $\Pi_{CD}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = \sup_{x,y} \left\{ \frac{(y^t)^{\lambda^t p^t}}{(x^t)^{\lambda^t w^t}} : (x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t) \right\}$ . En factorisant par  $\lambda^t$  on a,  $\Pi_{CD}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = \left( \sup_{x,y} \left\{ \frac{(y^t)^{p^t}}{(x^t)^{w^t}} : (x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t) \right\} \right)^{\lambda^t}$ . Ainsi,  $\Pi_{CD}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = (\Pi_{CD}^t(w^t, p^t))^{\lambda^t} \quad \square$ .

( $\Pi_{CD5}$ ) Supposons que  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) \equiv \ln(\Pi_{CD}^t(w^t, p^t))$  tel que lorsque  $T_{\ln}^t(x^t, y^t)$  satisfait des rendements d'échelle constants alors,  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = 0$  ou  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = \infty$ . D'où,  $\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = 1$  ou  $\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = \infty$ .

**Lemme 2.36**  $T_{++}^t(x^t, y^t)$  est *ln-convexe* si et seulement si,  $T_{\ln}^t(x^t, y^t)$  est *convexe*.

La convexité de  $T_{++}^t(x^t, y^t)$  permet l'existence d'une relation duale entre la pseudo fonction de profit Cobb-Douglas et la fonction de distance exponentielle orientée dans le graphe.

**Proposition 2.37** Si  $T_{++}^t(x^t, y^t)$  satisfait T1-T5 alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $A = \text{diag}(\alpha^t)$  et  $B = \text{diag}(\beta^t)$ , la pseudo fonction de profit Cobb-Douglas duale est :

$$\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = \sup_{x,y} \left\{ \frac{(e^{\delta^t B} y^t)^{p^t}}{(e^{-\delta^t A} x^t)^{w^t}} : D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \geq 0 \right\}, \quad (2.30)$$

et la fonction de distance exponentielle duale orientée dans le graphe est :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{x,y} \left\{ \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) \frac{(x^t)^{w^t}}{(y^t)^{p^t}} : w^t \alpha^t + p^t \beta^t \neq 0 \right\}. \quad (2.31)$$

De par cette proposition, pour tout  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  avec  $j \in \mathcal{J}$ , tout input  $i = (1, \dots, m) \in [m]$  et tout output  $r = (1, \dots, n) \in [n]$ , la FDE duale peut être caractérisée de la manière suivante :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{x,y} \left\{ \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) \frac{\prod_{i \in [m]} (x_{j,i}^t)^{w_i^t}}{\prod_{r \in [n]} (y_{j,r}^t)^{p_r^t}} : w^t \alpha^t + p^t \beta^t \neq 0 \right\}. \quad (2.32)$$

Les pondérations peuvent être normalisées de telle sorte que  $w^t \alpha^t + p^t \beta^t = 1$ .

### 3.2.2 Fonction de Profit népérienne

La fonction de profit népérienne est la réciproque de la pseudo fonction de profit Cobb-Douglas dont la définition est présentée ci-dessous.

**Définition 2.38** Pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , l'application  $\Pi_{\ln}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  définie par :

$$\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = \begin{cases} \sup_{\ln(x), \ln(y)} \{p^t \cdot \ln(y^t) - w^t \cdot \ln(x^t) : (x^t, y^t) \in T_{++}^t\} & \text{si } T_{++}^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.33)$$

est la fonction de profit népérienne.

**Proposition 2.39** Lorsque  $T_{++}^t(x^t, y^t)$  vérifie T1-T4 alors, la fonction de profit népérienne satisfait les propriétés suivantes :

$\Pi_{\ln}1$  : Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , si  $(0, 0) \in T_{++}^t(x^t, y^t)$  alors,  $\Pi_{\ln}^t(0, 0) = 0$ .

$\Pi_{\ln}2$  : Pour  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  on a,  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) \geq 0$ .

$\Pi_{\ln}3$  : Pour tout  $(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , si  $\tilde{w}^t \leq w^t$  et  $\tilde{p}^t \geq p^t$  alors

$$\Pi_{\ln}^t(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) \geq \Pi_{\ln}^t(w^t, p^t).$$

$\Pi_{\ln}4$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $\Pi_{\ln}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = \lambda^t \Pi_{\ln}^t(w^t, p^t)$ .

$\Pi_{\ln}5$  : Sous l'hypothèse des rendements d'échelle constants,  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = 0$  ou  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = \infty$ .

La première propriété stipule qu'il n'existe pas de repas gratuit. Le deuxième axiome signifie qu'une utilisation des facteurs et une production effective génèrent un profit positif ou nul. ( $\Pi_{\ln}3$ ) est relative à la monotonicité de la fonction de profit par rapport aux prix des inputs et des outputs. ( $\Pi_{\ln}4$ ) fait référence à l'homogénéité de degré (1) de la fonction relativement aux prix. La dernière hypothèse est relative à la structure de la technologie lorsque les rendements d'échelle sont constants.

*Preuves :*

( $\Pi_{\ln}1$ ) à ( $\Pi_{\ln}3$ ) sont des propriétés inhérentes à la définition de la fonction de profit log-linéaire  $\square$ .

( $\Pi_{\ln}4$ ) Soit  $\lambda^t > 0$  tel que  $\Pi_{\ln}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = \sup_{\ln(x), \ln(y)} \{ \lambda^t p^t \cdot \ln(y^t) - \lambda^t w^t \cdot \ln(x^t) : (x^t, y^t) \in T_{++}^t \}$ .

La factorisation par  $\lambda^t$  permet d'obtenir  $\Pi_{\ln}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = \lambda^t \cdot \left( \sup_{\ln(x), \ln(y)} \{ p^t \cdot \ln(y^t) - w^t \cdot \ln(x^t) : (x^t, y^t) \in T_{++}^t \} \right)$ . Donc,  $\Pi_{\ln}^t(\lambda^t w^t, \lambda^t p^t) = \lambda^t \cdot \Pi_{\ln}^t(w^t, p^t)$   $\square$ .

( $\Pi_{\ln}5$ ) Cette propriété découle de la structure de la technologie lorsque les rendements d'échelle sont constants. Dans ce cas, l'ensemble de production est réduit à un cône convexe tel que la fonction de profit se confond avec la frontière efficiente (c'est-à-dire  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = 0$ ) ou bien elle tend vers l'infini ( $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = \infty$ ).

On sait que  $T_{\ln}^t(x^t, y^t)$  est convexe. De ce fait, il existe une relation duale entre la FDN orientée dans le graphe et la fonction de profit log-linéaire.

**Proposition 2.40** *Quel que soit  $T_{++}^t(x^t, y^t)$  vérifiant T1-T5, pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t(x^t, y^t)$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $A = \text{diag}(\alpha^t)$  et  $B = \text{diag}(\beta^t)$ , la fonction de profit népérienne duale est :*

$$\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = \sup_{\ln(x), \ln(y)} \left\{ p^t \cdot \ln(y^t) + w^t \cdot \ln(x^t) + D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) (w^t \cdot \alpha^t + p^t \cdot \beta^t) : D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \geq 0 \right\}, \quad (2.34)$$

et, la fonction de distance népérienne duale orientée dans le graphe est :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup_{w, p} \left\{ \Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) - p^t \cdot \ln(y^t) + w^t \cdot \ln(x^t) : w^t \cdot \alpha^t + p^t \cdot \beta^t \neq 0 \right\}. \quad (2.35)$$

La normalisation des pondérations peut également être effectuée telle que  $w^t \cdot \alpha^t + p^t \cdot \beta^t = 1$ .

Pour tout  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  avec  $j \in \mathcal{J}$  entités de production, tout input  $i = (1, \dots, m) \in [m]$  et tout output  $r = (1, \dots, n) \in [n]$  outputs, la FDN duale dans le graphe peut être détaillée comme

suit :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup_{w, p} \left\{ \Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) - \sum_{r \in [n]} p_r^t \cdot \ln(y_{j,r}^t) + \sum_{i \in [m]} w_i^t \cdot \ln(x_{j,i}^t) : \right. \\ \left. w^t \cdot \alpha^t + p^t \cdot \beta^t \neq 0 \right\}. \quad (2.36)$$

### 3.2.3 Fonctions de Prix Implicites

Nous avons abordé la notion de fonctions de prix ajustés dans le cadre des orientations en input et en output. Dans cette sous-section, nous proposons une étude des fonctions de demande et d'offre conditionnelles ainsi que des fonctions de prix ajustés selon une orientation dans le graphe de la technologie.

#### Proposition 2.41

(i) Aux points où la pseudo fonction de profit Cobb-Douglas est différentiable par rapport aux prix des facteurs  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et, si elle admet un minimum  $\tilde{x}^t(w^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^m$  et un maximum  $\tilde{y}^t(p^t, x^t) \in \mathbb{R}_{++}^n$  alors, selon le Lemme de Shephard :

$$\begin{aligned} \nabla_w \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) &= \tilde{x}^t(w^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \\ \nabla_p \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) &= \tilde{y}^t(x^t, p^t; \alpha^t, \beta^t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

sont respectivement les fonctions de demande de facteur et d'offre de produit conditionnelles.

(ii) Aux points où la fonction de distance exponentielle orientée dans le graphe est différentiable relativement au couple  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  alors, d'après le Lemme dual de Shephard :

$$\begin{aligned} \nabla_{\ln(x)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) &= \tilde{w}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \\ \nabla_{\ln(y)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) &= -\tilde{p}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

sont respectivement les fonctions de prix ajustés des inputs et des outputs.

*Preuves :*

(i) On sait que  $\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) \equiv \ln(\Pi_{CD}^t(w^t, p^t))$  et  $\Pi_{CD}^t(w^t, p^t) \equiv \exp(\Pi_{\ln}^t(w^t, p^t))$  alors, par le théorème de l'enveloppe on a  $\nabla_w \Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = \ln(\tilde{x}^t(w^t, y^t))$  et  $\nabla_y \Pi_{\ln}^t(w^t, p^t) = \ln(\tilde{y}^t(w^t, y^t))$ .

Ainsi,  $\nabla_w \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = \tilde{x}^t(w^t, y^t)$  et  $\nabla_y \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) = \tilde{y}^t(w^t, y^t)$   $\square$ .

(ii) On sait que  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$  ainsi,  $\nabla_{\ln(x)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \nabla_{\ln(x)} D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$  et  $\nabla_{\ln(y)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \nabla_{\ln(y)} D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$ . Par le théorème de l'enveloppe on a  $\nabla_{\ln(x)} D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \tilde{w}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$  et  $\nabla_{\ln(y)} D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = -\tilde{p}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$ . Par conséquent,  $\nabla_{\ln(x)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \tilde{w}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$  et  $\nabla_{\ln(y)} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = -\tilde{p}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$   $\square$ .

La correspondance des prix ajustés peut ainsi être définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) & : \mathbb{R}_{++}^{m+n} \times [0, 1]^{m+n} \rightarrow 2^{\mathbb{R}_{++}^{m+n}} \\ (\tilde{w}^t, \tilde{p}^t)(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) & = \arg \max_{x, y} \left\{ \Pi_{CD}(w^t, p^t) \frac{(x^t)^{w^t}}{(y^t)^{p^t}} : w^t \cdot \alpha^t + p^t \cdot \beta^t = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

## 4 Les Notions Additionnelles

Dans cette section, nous abordons les concepts additionnels à la mesure exponentielle de l'efficiencie. En effet, dans un premier temps, nous proposons une analyse des rendements d'échelle relatives à cette mesure. Dans un second temps, nous formalisons la fonction de distance exponentielle dans un cadre non-paramétrique.

### 4.1 Rendements d'Echelle

La notion de rendements d'échelle est étroitement liée au processus productif. Sachant que les mesures d'efficacité caractérisent les ensembles de production, il est intéressant d'analyser les liens existant entre ce concept et la fonction de distance exponentielle. Tout d'abord, nous abordons le cas des technologies à rendements d'échelle constants. Ensuite, nous explorons le cas des rendements d'échelle locaux et leurs implications.

#### 4.1.1 Rendements d'Echelle Constants

Notons que  $T_{\ln}(\ln(x^t), \ln(y^t)) = \ln(T_{++}(x^t, y^t))$ . Ainsi,  $T_{\ln}(\ln(x^t), \ln(y^t)) = \ln(T \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n})$ .

**Proposition 2.42** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , l'ensemble de production  $T^t(x^t, y^t)$  satisfait l'hypothèse de rendements d'échelle log-constants si  $T_{\ln}(\ln(x^t), \ln(y^t))$  vérifie l'hypothèse de rende-*

ments d'échelle constants.

*Preuve :*

Supposons que  $T_{\ln}^t$  satisfait des rendements d'échelle constants. Ainsi, Pour tout  $\lambda^t > 0$  si  $(\ln(x^t), \ln(y^t)) \in T_{\ln}^t$  alors,  $(\lambda^t \ln(x^t), \lambda^t \ln(y^t)) \in T_{\ln}^t, \forall \lambda^t > 0$ . Puisque  $T_{++}^t(x^t, y^t) = \exp(T_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t)))$  alors, pour tout  $(x^t, y^t) \in T_{++}^t$  et tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $((x^t)^{\lambda^t}, (y^t)^{\lambda^t}) \in T_{++}^t$ . D'où,  $((x^t)^{\lambda^t}, (y^t)^{\lambda^t}) \in T^t$   $\square$ .

Supposons que le processus productif d'une firme est caractérisée par une fonction de production Cobb-Douglas dont les rendements d'échelle sont constants, dans un cadre mono-output et multi-inputs. Ainsi, pour tout input  $i = (1, \dots, m) \in [m]$ , l'expression de la technologie relative à cette situation est :

$$T^t = \left\{ (x^t, y^t) \in \mathbb{R}^{m+1} : y^t \leq A \prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{\gamma_i^t}, \gamma^t > 0, \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t = 1 \right\}. \quad (2.40)$$

Dans ce cas, il est possible d'obtenir l'expression des fonctions de distance exponentielle tels que pour tout  $\gamma^t > 0$  avec  $\sum_{i \in [m]} \gamma_i^t = 1$  et  $\alpha^t = \mathbb{1}_m$ , la FDE orientée en input est :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : y^t \leq A \prod_{i \in [m]} (e^{-\delta^t} x_i^t)^{\gamma_i^t} \right\}. \quad (2.41)$$

Sachant que  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \mathbb{1}_m, 0)$  alors, on peut poser que :

$$\begin{aligned} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) &\equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \mathbb{1}_m, 0) \\ &\equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \ln(y^t) \leq \ln(A) + \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t \ln(x_i^t) - \delta^t \right\} \\ D_{\exp}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) &\equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \delta^t \leq \ln(A) + \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t \ln(x_i^t) - \ln(y^t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

De même, nous pouvons exprimer la FDE orientée en output pour  $\beta^t = \mathbb{1}_n$  avec  $\gamma^t > 0$  et



$\sum_{i \in [m]} \gamma_i^t = 1$ , de la manière suivante :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_m) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : e^{\delta^t} y^t \leq A \prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{\gamma_i^t} \right\}. \quad (2.43)$$

En faisant intervenir l'équivalence entre la FDE et la FDN, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_n) &\equiv D_{\text{ln}}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \mathbb{1}_n) \\ &\equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \delta^t + \ln(y^t) \leq \ln(A) + \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t \ln(x_i^t) \right\} \\ D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_n) &\equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \delta^t \leq \ln(A) + \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t \ln(x_i^t) - \ln(y^t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nous pouvons constater que,

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \mathbb{1}_m, 0) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \mathbb{1}_n).$$

Ce résultat n'est pas surprenant puisque la technologie vérifie des rendements d'échelle constants.

#### 4.1.2 Rendements d'Echelle Locaux et Spécifiques

Dans cette sous-section, nous nous intéressons aux différents types de rendements d'échelle s'intégrant aux processus de production. Les fonctions de production de type Cobb-Douglas mono-output et multi-inputs, peuvent être étendues aux cas où plusieurs facteurs et productions interviennent. Dans ce cas, ces fonctions Cobb-Douglas peuvent être définies de la manière suivante :

$$G_{CD}^t(x^t, y^t) = \prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{-\gamma_i^t} \prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{\eta_r^t}. \quad (2.45)$$

Notons que lorsque  $n = 1$  et  $\eta = 1$  alors, nous retrouvons la fonction Cobb-Douglas classique. La définition ci-dessus permet de proposer une technologie Cobb-Douglas par morceaux.

**Lemme 2.43** Soit le sous-ensemble  $A^t \subset \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  tel que

$$Co^t(A^t) = \left\{ \prod_{j \in \mathcal{J}} z^{\theta_j} : \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j = 1, \theta \geq 0 \right\}, \quad (2.46)$$

est l'enveloppe convexe multiplicative de  $A^t$ .

Ainsi, la technologie de production classique peut être représentée par l'ensemble

$$T^t = [Co^t(A^t) + (\mathbb{R}_+^m \times (-\mathbb{R}_+^n))] \cap \mathbb{R}_+^{m+n}, \quad (2.47)$$

et la technologie strictement positive par

$$T_{++}^t = [Co^t(A^t) + (\mathbb{R}_+^m \times (-\mathbb{R}_+^n))] \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}. \quad (2.48)$$

Nous utilisons les notions introduites ci-dessus afin de présenter une technologie de production dans un contexte spécifique. En effet, dans le cas d'une technologie Cobb-Douglas, elle peut être définie par l'ensemble présentée dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 2.44** Pour tout  $\varepsilon_j \in \mathbb{R}$  avec  $j \in \mathcal{J}$ , il existe  $j$  fonctions Cobb-Douglas  $G_{CD}^{j,t}(x_j^t, y_j^t)$ , telle que

$$T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n} = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n} : G_{CD}^{j,t}(x_j^t, y_j^t) \leq \varepsilon_j^t\}, \quad (2.49)$$

est la technologie Cobb-Douglas par morceaux.

*Preuve :*

Soit la technologie logarithmique,  $\ln(T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}) = Co^t(\ln(A^t)) + (\mathbb{R}_+^m \times (-\mathbb{R}_+^n))$  telle que  $\ln(A^t) = \{(\ln(x_j^t), \ln(y_j^t)) : j \in \mathcal{J}\}$ . Il existe  $j$  fonctions linéaires telle que l'application  $(\ln(x^t), \ln(y^t)) \rightarrow \eta_j^t \ln(y_j^t) - \gamma_j^t \ln(x_j^t)$  avec  $(\gamma^t, \eta^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  permet de réécrire la technologie logarithmique de la manière suivante :

$$\ln(T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}) = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \{(\ln(x^t), \ln(y^t)) : \eta_j^t \ln(y_j^t) - \gamma_j^t \ln(x_j^t) \leq \ln(\varepsilon_j^t)\}.$$

La transformation exponentielle fournit le résultat de la Proposition 2.44  $\square$ .

**Proposition 2.45** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la technologie  $T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  satisfait une hypothèse de :*

- (i) *rendements d'échelle quasi-croissants si et seulement si,  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \eta_j^t < \sum_{j \in \mathcal{J}} \gamma_j^t$ ,*
- (ii) *rendements d'échelle quasi-décroissants si et seulement si,  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \eta_j^t > \sum_{j \in \mathcal{J}} \gamma_j^t$ ,*
- (iii) *rendements d'échelle quasi-constants si et seulement si,  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \eta_j^t = \sum_{j \in \mathcal{J}} \gamma_j^t$ .*

*Preuves :*

Pour  $n = 1$  et  $\eta^t > 0$ , soit la fonction de production Cobb-Douglas classique suivante :

$$G_{CD}^t(x^t, y^t) = \prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{-\gamma_i^t} (y^t)^{\eta^t} \implies (y^t)^{\eta^t} = \prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{\gamma_i^t}.$$

Dans ce cas, si  $\sum_{i \in [m]} \gamma_i^t / \eta^t > 1$  alors, la technologie satisfait un rendement d'échelle quasi-croissant (i) tandis que, si  $\sum_{i \in [m]} \gamma_i^t / \eta^t < 1$  alors, le processus productif vérifie un rendement d'échelle quasi-décroissant (ii). Enfin, lorsque  $\sum_{i \in [m]} \gamma_i^t / \eta^t = 1$  alors, la technologie satisfait un rendement d'échelle quasi-constant. La généralisation de cette notion à un processus de production multi-output donne le résultat de la Proposition 2.45  $\square$ .

Nous pouvons considérer que les facteurs utilisés contribuent différemment à l'élaboration de chaque produit dans un processus de production. Ainsi, il est possible d'obtenir une indication du rendement d'échelle spécifique associé à chaque output  $r$ . On peut donc dire que le rendement d'échelle spécifique associé à l'output  $r$  est :

- (iv) croissant si  $\eta_r^t < \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t$ ,
- (v) décroissant si  $\eta_r^t > \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t$ ,
- (vi) constant si  $\eta_r^t = \sum_{i \in [m]} \gamma_i^t$ .

#### 4.1.3 Facettes Cobb-Douglas et Approximation de la Technologie

On sait que pour tout  $j \in \mathcal{J}$ , il existe un ensemble  $\mathcal{G}_{CD}^{\sqcup} = \{G_{CD}^{1,t}, \dots, G_{CD}^{j,t}\}$  tel que  $T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n} = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n} : G_{CD}^{j,t}(x_j^t, y_j^t) \leq \varepsilon_j\}$ . La fonction Cobb-Douglas généralisée  $G_{CD}^{j,t}(x_j^t, y_j^t)$  caractérise la facette  $F_{CD}^{j,t}$  non-linéaire d'une forme géométrique. Or, on sait que  $T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  est la transformation exponentielle de la technologie logarithmique, linéaire par mor-

ceaux  $\ln (T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n})$ . Ainsi, on peut également affirmer que cette facette  $F_{CD}^{j,t}$  est elle-même la transformation exponentielle d'une facette logarithmique linéaire  $F_{\ln}^{j,t}$  relative à  $\ln (T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n})$ . Dans ce cas,  $(x_j^t, y_j^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  montre localement un rendement d'échelle quasi-croissant, quasi-décroissant ou quasi-constant si :

- (i) il existe une facette  $F_{CD}^{j,t}$  telle que  $(x_j^t, y_j^t)$  appartient à l'intérieur relatif de celle-ci,
- (ii)  $G_{CD}^{j,t}(x_j^t, y_j^t)$  satisfait une hypothèse de rendements d'échelle quasi-croissants, quasi-décroissants ou quasi-constants.

Supposons que  $(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  soit la solution permettant l'optimisation de la fonction de distance exponentielle duale. Nous admettons qu'elle est unique pour l'observation  $(x_j^t, y_j^t)$ . Si de plus,  $D_{\exp}^t(x_j^t, y_j^t; \alpha^t, \beta^t) = 0$  alors, il existe une facette  $F_{\exp}^{j,t}$  dont l'intérieur relatif contient  $(x_j^t, y_j^t)$ .

**Proposition 2.46** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , si  $(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t)$  est une solution unique de la fonction de distance exponentielle duale telle que  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = 0$  alors, la fonction Cobb-Douglas généralisée  $G_{CD}^t(x^t, y^t)$  peut être approximée par l'application  $\tilde{G}_{CD}^t : \mathbb{R}_{++}^m \times \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par :*

$$\tilde{G}_{CD}^t(x^t, y^t) = \prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{-\tilde{w}_i^t} \prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{\tilde{p}_r^t} \quad (2.50)$$

et, appelée fonction Cobb-Douglas généralisée implicite.

Dans ce cas, la nature des rendements d'échelle locaux peut s'apprécier par le ratio  $\frac{\sum_{i \in [m]} \tilde{w}_i^t}{\sum_{r \in [n]} \tilde{p}_r^t}$ .

*Preuve :*

Pour  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = 0$  avec une unique solution  $(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , on sait que la courbe de profit définie par  $\Pi_{CD}^t(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) = \sup_{x,y} \left\{ \frac{\prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{\tilde{p}_r^t}}{\prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{\tilde{w}_i^t}} : (x^t, y^t) \in T_{++}^t \right\}$  passe par  $(x^t, y^t)$ . Sachant que  $G_{CD}^t(x^t, y^t) = \prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{-\gamma_i^t} \prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{\eta_r^t}$  alors, celle-ci peut être approximée par la fonction de profit  $\square$ .

Grâce à cette fonction Cobb-Douglas implicite, il est également possible de donner une approximation de la technologie Cobb-Douglas par morceaux. Pour toute observation  $j \in \mathcal{J}$  avec  $(\tilde{w}^t(x_j^t, y_j^t), \tilde{p}^t(x_j^t, y_j^t))$  pour solution de  $D_{\exp}^t(x_j^t, y_j^t; \alpha^t, \beta^t)$  on a, l'ensemble de production Cobb-

Douglas caractérisé par :

$$\tilde{T}^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n} = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \left\{ (x_j^t, y_j^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n} : \tilde{G}_{CD}^t(x_j^t, y_j^t) \leq \varepsilon_j^t \right\} . \quad (2.51)$$

Remarquons qu'un échantillon de données ne peut fournir toutes les facettes Cobb-Douglas de l'ensemble de production  $T^{G^t} \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ . Afin d'obtenir le plus grand nombre de facettes, il semble nécessaire d'utiliser une méthode d'estimation inférentielle qui génère plus de données.

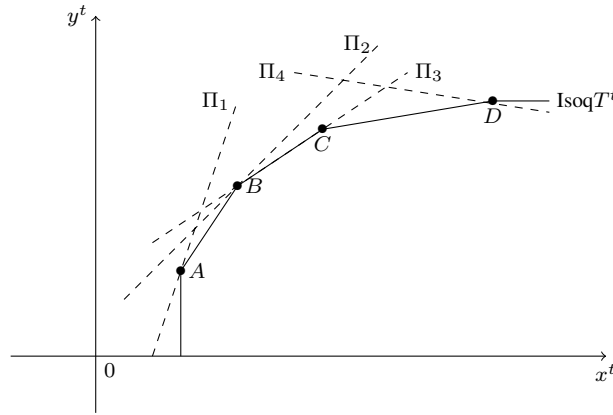


FIGURE 1 – Ensemble de production approximé

Sans perte de généralité et dans un contexte de technologie linéaire par morceaux, la figure 1 présente le processus d'approximation de la technologie de production. Soient les droites de profit qui, lorsqu'elles sont tangentes aux observations, maximisent le profit pour un couple  $(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t)$ . L'intersection de ces droites permet d'approximer la structure de l'ensemble de production.

## 4.2 Cadre Non-Paramétrique

Cette sous-section est dédiée à la formalisation des notions présentées auparavant, dans le cadre d'une approche non-paramétrique par enveloppement de données (DEA). Banker et Maindiratta (1986) introduisent une nouvelle technologie multiplicative de type Cobb-Douglas selon le modèle DEA. En effet, la technologie de production DEA standard ne permet pas de prendre en compte les productivités marginales croissantes. Le nouvel ensemble de production qu'ils présentent, permet de surmonter cet obstacle dans un contexte non-paramétrique par le biais d'une transformation logarithmique. Cependant, nous exposons d'abord quelques notions d'efficiencie

liées aux mesures définies dans les sections précédentes.

#### 4.2.1 Efficienne Technique, de Coût et de Revenu

Les mesures de distance mais également les fonctions de coût, de revenu et de profit permettent d'apprécier plusieurs notions d'efficienne. En effet, on peut mesurer l'efficacité technique, de coût, de revenu, de profit, et allocative des entreprises grâce à celles-ci.

La première notion d'efficacité que nous allons voir, est celle du coût. Elle représente l'aptitude de l'entreprise à produire une quantité donnée d'outputs en réduisant au maximum ses coûts de production. Ce concept nécessite des informations sur les prix du marché lorsque ceux-ci sont exogènes à la firme. En effet, l'optimisation est effectuée relativement aux facteurs. L'efficienne de coût exponentielle peut être exprimée comme suit :

$$CE_{\text{exp}}^t = \left( \frac{(x^t)^{w^t}}{C_{CD}^t} \right)^{1/\alpha^t w^t} . \quad (2.52)$$

La version logarithmique de celle-ci est définie de la manière suivante :

$$CE_{\text{ln}}^t = \frac{w^t x^t - C_{\text{ln}}^t}{\alpha^t w^t} . \quad (2.53)$$

Nous pouvons retrouver ce résultat en appliquant l'équivalence entre les coûts exponentiels et les coûts logarithmiques telle que  $C_{CD}^t(w^t, y^t) = \exp(C_{\text{ln}}^t(w^t, \ln(y^t)))$ .

L'efficienne de revenu est quant à elle, la capacité de l'entreprise à maximiser son revenu compte tenu du niveau de facteurs utilisé et des prix exogènes de la production. Dans ce cas, l'optimisation est relative à la quantité produite. De ce fait, l'efficacité de revenu est :

$$RE_{\text{exp}}^t = \left( \frac{R_{CD}^t}{(y^t)^{p^t}} \right)^{1/\beta^t p^t} , \quad (2.54)$$

tandis que l'efficienne de revenu logarithmique est :

$$RE_{\text{ln}}^t = \frac{R_{\text{ln}}^t - p^t y^t}{\beta^t p^t} . \quad (2.55)$$

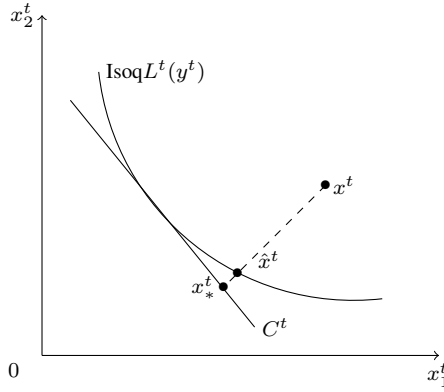


FIGURE 2 – Efficacité de coût

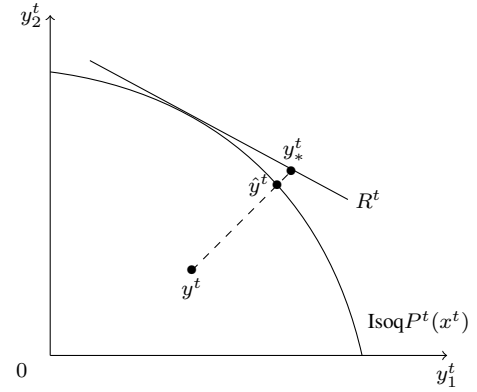


FIGURE 3 – Efficacité de Revenu

Les figures 2 et 3 décrivent respectivement les notions d'efficacité de coût et de revenu. Dans la première illustration, la distance  $d(x^t, x_*^t)$  représente  $CE^t$  selon le vecteur de direction  $g^t = (1, 1)$ . Dans la seconde figure, la distance  $d(y^t, y_*^t)$  correspond à l'efficacité de revenu  $RE^t$ .

L'efficacité de profit désigne l'habileté de la firme à maximiser son profit relativement aux prix des facteurs et des produits sur le marché. Ces derniers sont considérés comme exogènes. Dans ce cas, l'optimisation se fait par rapport au niveau des intrants et des extrants. Soit l'efficacité de profit exponentielle définie par :

$$PE_{\text{exp}}^t = \left( \Pi_{CD}^t \frac{(x^t)^{w^t}}{(y^t)^{p^t}} \right)^{1/(\alpha^t w^t + \beta^t p^t)}. \quad (2.56)$$

Et, l'efficacité de profit népérienne est :

$$PE_{\text{ln}}^t = \frac{\Pi_{\text{ln}}^t - (p^t y^t - w^t x^t)}{\alpha^t w^t + \beta^t p^t}. \quad (2.57)$$

La figure ci-dessus décrit l'efficacité de profit telle que celle-ci est constituée par la distance  $d((x^t, y^t), (x_*^t, y_*^t))$  suivant le vecteur de direction  $g^t = (1, 1)$ .

Les notions d'efficacité présentées ci-dessus peuvent être considérées comme étant les efficacités globales (OE) ou efficacité économique. L'efficacité globale orientée en input est l'efficacité de coût, celle orientée en output correspond à l'efficacité de revenu et celle orientée dans le graphe renvoie à l'efficacité de profit. Les efficacités globales exponentielles et népériennes

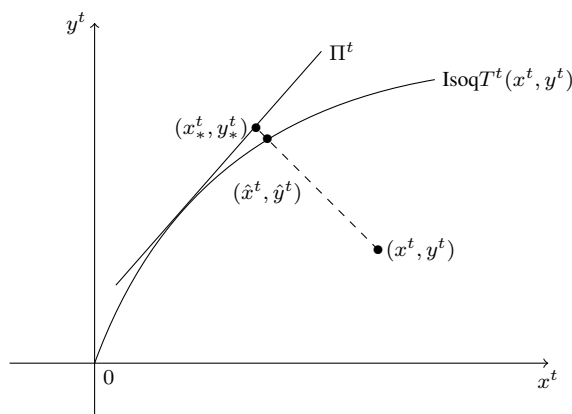


FIGURE 4 – Efficacité de Profit

peuvent être décomposées de la manière suivante :

$$OE_{\text{exp}}^t = TE_{\text{exp}}^t \times AE_{\text{exp}}^t \quad , \quad OE_{\text{ln}}^t = TE_{\text{ln}}^t + AE_{\text{ln}}^t \quad , \quad (2.58)$$

où  $TE^t$  et  $AE^t$  sont respectivement l'efficacité technique et allocative.

L'efficacité technique représente la capacité de l'entité de production à produire le maximum d'outputs pour un niveau donné d'inputs (orientation en output) ou bien son aptitude à utiliser le minimum de facteurs pour une quantité définie de produits (orientation en input). Selon une orientation dans le graphe, cette efficience désigne l'habileté de la firme à produire le plus d'outputs en utilisant le moins d'inputs. Les fonctions de distance permettent de déterminer celles-ci. Ainsi, selon les travaux de Mehdiloozad et al. (2014), on peut exprimer la mesure exponentielle de l'efficacité technique ( $TE_{\text{exp}}^t$ ) comme suit :

$$TE_{\text{exp}}^t = \exp \left( D_{\text{ln}}^t (\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \right) \equiv \exp \left( D_{\text{exp}}^t (x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \right). \quad (2.59)$$

Ainsi, on peut dire qu'une firme est techniquement efficace lorsque son ensemble de production appartient à la frontière efficace. Suivant Luenberger (1992a, 1992b) et Chambers et al.



(1996), on peut statuer que :

$$TE_{\text{exp}}^t \begin{cases} = 1 & \text{si } (x^t, y^t) \in \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t \\ > 1 & \text{si } (x^t, y^t) \in T / \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t \\ < 1 & \text{si } (x^t, y^t) \notin \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t \end{cases} . \quad (2.60)$$

Par conséquent, on a :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \begin{cases} = 0 & \text{alors } (x^t, y^t) \in \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t \\ > 0 & \text{alors } (x^t, y^t) \in T / \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t \\ < 0 & \text{alors } (x^t, y^t) \notin \partial_{\alpha, \beta}^{\infty} T^t \end{cases} . \quad (2.61)$$

De manière analogue, dans un contexte logarithmique, l'efficacité technique est caractérisée par :

$$TE_{\text{ln}}^t = D_{\text{ln}}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \equiv (D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)) , \quad (2.62)$$

de telle sorte que lorsque :

$$TE_{\text{ln}}^t \begin{cases} = 0 & \text{alors } (\ln(x^t), \ln(y^t)) \in \partial_{\alpha, \beta} T_{\text{ln}}^t \\ > 0 & \text{alors } (\ln(x^t), \ln(y^t)) \in T_{\text{ln}} / \partial_{\alpha, \beta} T_{\text{ln}}^t \\ < 0 & \text{alors } (\ln(x^t), \ln(y^t)) \notin \partial_{\alpha, \beta} T_{\text{ln}}^t \end{cases} \quad (2.63)$$

Dans les figures 2, 3 et 4, les efficacités techniques sont représentées respectivement par les distances  $d(x^t, \hat{x}^t)$ ,  $d(y^t, \hat{y}^t)$  et  $d((x^t, y^t)(\hat{x}^t, \hat{y}^t))$ .

L'efficiencie allocative intervient lorsque l'entreprise alloue ses ressources dans des proportions optimales qui lui permettent de minimiser ses coûts compte tenu des prix des facteurs sur le marché. Ainsi, il est possible de déterminer celle-ci grâce à la décomposition de l'efficacité économique telle que :

$$AE_{\text{exp}}^t = \frac{OE_{\text{exp}}^t}{TE_{\text{exp}}^t} \quad (2.64)$$

$$AE_{\text{ln}}^t = OE_{\text{ln}}^t - TE_{\text{ln}}^t . \quad (2.65)$$

Dans les trois illustrations précédentes, les efficacités allocatives correspondent à la distance entre les frontières efficientes et les droites de coût, de revenu ou de profit. Ainsi, elles sont représentées par les distances  $d(\hat{x}^t, x_*^t)$ ,  $d(\hat{y}^t, y_*^t)$  et  $d((\hat{x}^t, \hat{y}^t), (x_*^t, y_*^t))$ .

#### 4.2.2 Approche Primale

Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$ , soit la technologie multiplicative  $T_{CD}^t$  présentée par Banker et Maindiratta (1986) suivante :

$$T_{CD}^t = \left\{ (x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \geq \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t}, y^t \leq \prod_{j \in \mathcal{J}} (y_j^t)^{\theta_j^t}, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1, \theta^t > 0 \right\}. \quad (2.66)$$

Notons que cet ensemble de production opère sous l'hypothèse de rendements d'échelle variables. Dans un contexte à rendements d'échelle constants, la normalisation  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1$  est relaxée. Par ailleurs, lorsque cette technologie est strictement positive alors  $T_{++}^t = T_{CD}^t \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  c'est-à-dire que  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ .

La transformation logarithmique de l'ensemble de production strictement positive engendre la technologie de production népérienne ou logarithmique suivante :

$$T_{\ln}^t = \left\{ (\ln(x^t), \ln(y^t)) : \ln(x^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t), \ln(y^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(y_j^t), \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1, \theta^t > 0 \right\}. \quad (2.67)$$

Cette dernière est structurellement identique à une technologie DEA standard (Banker et al. (1984)). Ainsi, nous pouvons affirmer que la technologie népérienne est un ensemble de production log-linéaire par morceaux.

La figure 5 décrit la technologie multiplicative de type Cobb-Douglas présentée par Banker et Maindiratta (1986). La figure 6 quant à elle, présente la technologie népérienne obtenue grâce à la transformation logarithmique de l'ensemble multiplicative. Notons que lorsque  $(x^t, y^t) \in ]0, 1]^{m+n}$  alors,  $(\ln(x^t), \ln(y^t)) \in \mathbb{R}_-^{m+n}$ .

Grâce aux définitions de  $T_{CD}^t$  et de  $T_{\ln}^t$ , nous présentons le programme d'optimisation qui permet d'évaluer la fonction de distance exponentielle. Pour toute observation  $j \in \mathcal{J}$  tel que  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  avec  $i \in [m]$  inputs et  $r \in [n]$  outputs, soient les programmes suivants :

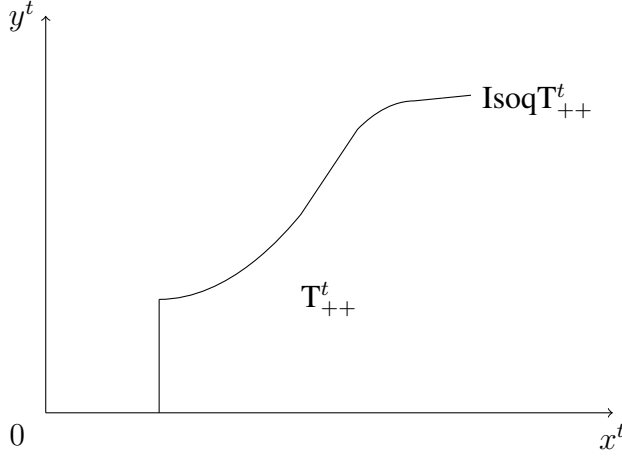


FIGURE 5 – Technologie Cobb-Douglas.

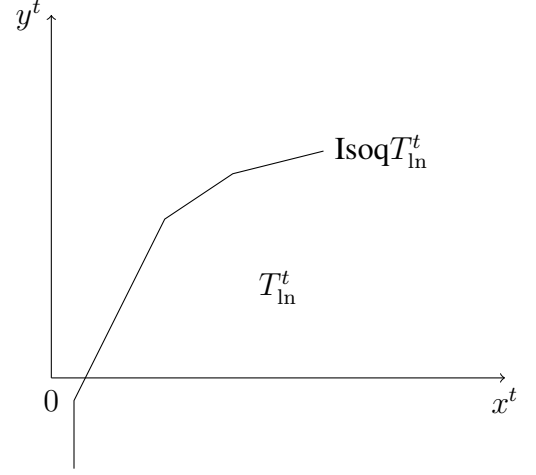


FIGURE 6 – Technologie népérienne log-linéaire par morceaux.

$$\begin{aligned}
 D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c} \quad &e^{-\delta^t \alpha^t} x^t \geq \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t} \\
 &y^t \leq \prod_{j \in \mathcal{J}} (y_j^t)^{\theta_j^t} \quad (2.68) \\
 &\delta^t, \theta^t \geq 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c} \quad &x^t \geq \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t} \\
 &e^{\delta^t \beta^t} y^t \leq \prod_{j \in \mathcal{J}} (y_j^t)^{\theta_j^t} \quad (2.69) \\
 &\delta^t, \theta^t \geq 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c} \quad &e^{-\delta^t \alpha^t} x^t \geq \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t} \\
 &e^{\delta^t \beta^t} y^t \leq \prod_{j \in \mathcal{J}} (y_j^t)^{\theta_j^t} \quad (2.70) \\
 &\delta^t, \theta^t \geq 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1.
 \end{aligned}$$

Les programmes (2.68), (2.69) et (2.70) sont respectivement ceux des fonctions de distance exponentielles orientées en input, en output et dans le graphe. Notons que ces programmes d'optimisation sont relatifs à des rendements d'échelle variables et, sont non-linéaires. Sachant que

$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$  alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c} \quad &\ln(x^t) - \delta^t \alpha^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t) \\
 &\ln(y^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(y_j^t) \\
 &\delta^t, \theta^t \geq 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c} \quad &\ln(x^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t) \\
 &\ln(y^t) + \delta^t \beta^t \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(y_j^t) \\
 &\delta^t, \theta^t \geq 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c} \quad &\ln(x^t) - \delta^t \alpha^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t) \\
 &\ln(y^t) + \delta^t \beta^t \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(y_j^t) \\
 &\delta^t, \theta^t \geq 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1.
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Nous pouvons voir que ces programmes sont linéaires. Il est donc possible d'estimer grâce à la méthode de programmation linéaire, la valeur de la fonction de distance exponentielle puisqu'elle est équivalent à la fonction de distance népérienne.

Lorsqu'une analyse sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants est souhaitée, il est nécessaire de relaxer la normalisation sur les pondérations  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1$ .

### 4.2.3 Approche Duale

Cette sous-section présente une manière d'estimer la mesure de distance exponentielle selon un point de vue dual.

Rappelons que pour tout input  $i \in [m]$  et tout output  $r \in [n]$ , la fonction de distance exponentielle duale, orientée en input, est définie par :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \inf_w \left\{ \frac{\prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{w_i^t}}{\prod_{i \in [m]} (x_{j,i}^t)^{w_i^t}} : w^t \cdot \alpha^t \neq 0 \right\}.$$

La figure 2 démontre que l'efficacité technique est supérieure ou égale à la droite de coût. Ainsi, nous pouvons réécrire la fonction ci-dessus de la manière suivante :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \inf_w \left\{ \delta^t : \left( \frac{\prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{w_i^t}}{\prod_{i \in [m]} (x_{j,i}^t)^{w_i^t}} \right)^{1/\alpha^t w^t} \geq e^{\delta^t}, w^t \cdot \alpha^t = 1 \right\}. \quad (2.74)$$

Notons qu'une normalisation est effectuée au niveau des pondérations telle que  $w^t \cdot \alpha^t = 1$ . Pour tout  $(x_j^t, y_j^t) \in T_{++}^t$  avec  $j \in \mathcal{J}$ , le programme associé à cette mesure est le suivant :

$$\begin{aligned} D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) &= \min \delta^t \\ \text{s.c} \quad & \frac{\prod_{i \in [m]} (x_i^t)^{w_i^t}}{\prod_{i \in [m]} (x_{j,i}^t)^{w_i^t}} \geq e^{\delta^t} \\ & \delta^t, w^t \geq 0, \quad w^t \cdot \alpha^t = 1. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Puisque la FDE est équivalente à la FDN, nous pouvons obtenir la première en estimant la seconde. Ainsi, après une transformation logarithmique, nous avons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} D_{\text{ln}}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) &= \min \delta^t \\ \text{s.c} \quad & \sum_{i \in [m]} w_i^t \ln(x_i^t) - \sum_{i \in [m]} w_i^t \ln(x_{j,i}^t) \geq \delta^t \\ & \delta^t, w^t \geq 0, \quad w^t \cdot \alpha^t = 1. \end{aligned} \quad (2.76)$$

La fonction de distance exponentielle duale orientée en output, est quant à elle, définie par :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \sup_w \left\{ \frac{\prod_{r \in [n]} (y_{j,r}^t)^{p_r^t}}{\prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{p_r^t}} : p^t \cdot \beta^t \neq 0 \right\}.$$

La figure 3 nous montre que la mesure de l'efficacité technique est inférieure ou égale à la droite de revenu. Ainsi, nous pouvons reformuler la fonction ci-dessus comme suit :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \sup_w \left\{ \delta^t : \left( \frac{\prod_{r \in [n]} (y_{j,r}^t)^{p_r^t}}{\prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{p_r^t}} \right)^{1/\beta^t p^t} \geq e^{\delta^t}, p^t \cdot \beta^t = 1 \right\}. \quad (2.77)$$

Nous appliquons également une normalisation sur les pondérations telle que  $p^t \cdot \beta^t = 1$ . Le programme rattaché à cette définition est la suivante :

$$\begin{aligned} D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) &= \max \delta^t \\ \text{s.c} \quad &\frac{\prod_{r \in [n]} (y_{j,r}^t)^{p_r^t}}{\prod_{r \in [n]} (y_r^t)^{p_r^t}} \geq e^{\delta^t} \\ &\delta^t, p^t \geq 0, \quad p^t \cdot \beta^t = 1. \end{aligned} \quad (2.78)$$

La transformation logarithmique ainsi que l'équivalence entre la FDE et la FDN permettent une estimation de la mesure d'efficacité grâce à la méthode de programmation linéaire. Dans ce cas, nous avons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} D_{\text{ln}}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) &= \max \delta^t \\ \text{s.c} \quad &\sum_{r \in [n]} p_r^t \ln(y_{j,r}^t) - \sum_{r \in [n]} p_r^t \ln(y_r^t) \geq \delta^t \\ &\delta^t, p^t \geq 0, \quad p^t \cdot \beta^t = 1. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Dans le graphe de la technologie, rappelons que la fonction de distance exponentielle duale est la suivante :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{x,y} \left\{ \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) \frac{(x^t)^{w^t}}{(y^t)^{p^t}} : w^t \alpha^t + p^t \beta^t \neq 0 \right\}.$$

La figure 4 indique que l'efficacité technique est inférieure ou égale à la droite de profit. Dans ce cas, nous pouvons réécrire la définition comme suit :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{x, y} \left\{ \delta^t : \left( \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) \frac{(x^t)^{w^t}}{(y^t)^{p^t}} \right)^{1/(\alpha^t w^t + \beta^t p^t)} \geq e^{\delta^t}, w^t \alpha^t + p^t \beta^t = 1 \right\}. \quad (2.80)$$

Le programme d'optimisation à résoudre est alors :

$$\begin{aligned} D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) &= \max \delta^t \\ \text{s.c} \quad & \Pi_{CD}^t(w^t, p^t) \frac{(x^t)^{w^t}}{(y^t)^{p^t}} \geq e^{\delta^t} \\ & \delta^t, w^t, p^t \geq 0, \quad w^t \alpha^t + p^t \beta^t = 1. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Nous pouvons obtenir la mesure ci-dessous grâce à l'équivalence entre la FDE et la FDN. Dans ce ca, l'efficacité technique est estimée selon la méthode de la programmation linéaire et, le programme d'optimisation à résoudre est la suivante :

$$\begin{aligned} D_{\text{ln}}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) &= \max \delta^t \\ \text{s.c} \quad & \Pi_{\text{ln}}^t(w^t, p^t) - (p^t \ln(y^t) - w^t \ln(x^t)) \geq \delta^t \\ & \delta^t, w^t, p^t \geq 0, \quad w^t \alpha^t + p^t \beta^t = 1. \end{aligned} \quad (2.82)$$

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle mesure de l'efficacité technique qui a une forme exponentielle et, est log-additive. Nous avons vu que dans ce cas, elle est structurellement similaire à la mesure directionnelle de Luenberger (1992b). Nous avons constaté que cette fonction de distance est duale à des pseudo fonctions de coût, de revenu et de profit non-linéaires. Il n'est pas étonnant d'obtenir ce type de fonctions non-linéaires lorsque des facteurs internes et externes influencent le processus de production ou bien, lorsque la relation entre les inputs et les outputs n'est pas linéaire. Ces pseudo fonctions de coût, de revenu et de profit sont structurellement similaires à la fonction de production Cobb-Douglas. En ce sens, leurs exposants sont reliés à la

notion de rendements d'échelle. Dans la dernière section de ce chapitre, nous donnons une formalisation non-paramétrique aux nouvelles mesures selon une approche par enveloppement des données lorsque l'ensemble de production considéré est de type Cobb-Douglas (Banker et Maindiratta (1986)).

Ces nouvelles fonctions sont des outils de mesure alternatifs à la performance lorsque l'analyse est effectuée dans le graphe de la technologie et, lorsque les ensembles de production considèrent des productivités marginales croissantes. En effet, lorsque la méthode DEA est retenue, les technologies de production usuelles sont linéaires et ne permettent que des productivités marginales non-croissantes. Or, la réalité ne se conforme pas à cette vision simplifiée. Ainsi, dans certains secteurs d'activité tels les nouvelles technologies, où les productivités marginales peuvent être strictement croissantes, l'analyse de la performance peut être réalisée grâce à cette nouvelle mesure de l'efficacité.

Le chapitre suivant traite également d'une nouvelle mesure de distance qui combine la structure de la fonction de distance directionnelle et celle de la technologie de référence présentée par Färe et al. (1988).



## Chapitre 3

# Une Mesure Additive Non-linéaire de l'Efficiencia

### Introduction

La littérature économique démontre que les ensembles de production convexes sont majoritairement privilégiés. Cependant, Banker et Maindiratta (1986) remarquent que cette propriété néglige de prendre en compte les productivités marginales croissantes. Par ailleurs, plusieurs auteurs dont Färe et al. (1988) notifient que la convexité des ensembles n'est attractive que grâce à la théorie de la dualité qu'elle permet. Afin de pallier à ces lacunes, Banker et Maindiratta (1986) proposent la technologie de production log-linéaire qui est inspirée de la fonction de production Cobb-Douglas. Färe et al. (1988) présentent quant à eux, une technologie de production non-linéaire et non-convexe, nommée ensemble de production CES (Constant Elasticity of Substitution)- CET (Constant Elasticity of Transformation). Celle-ci trouve sa particularité dans la caractérisation des frontières efficientes en inputs et en outputs respectivement par une fonction CES et une fonction CET. Färe et al. (1988) démontrent que cet ensemble de production est une généralisation des technologies introduites par Charnes et al. (1978), Banker et al. (1984) et Banker et Maindiratta (1986). De ce fait, elle considère des unités de production ayant une productivité marginale croissante.

Les fonctions de distance permettent d'estimer l'efficacité technique des unités de production grâce à une parfaite caractérisation de la technologie. Les mesures d'efficacité linéaires et radiales de Shephard (1953) et de Debreu(1951)-Farrell (1957) peuvent être implémentées dans tout type

d'ensemble de production (convexe ou non-convexe, linéaire ou non-linéaire). Cependant, celles-ci ne permettent pas une évaluation de la contraction et de l'expansion simultanée des intrants et des extrants. Par ailleurs, les outils autorisant ce type d'analyse tels que la mesure hyperbolique (Färe et al. (1985)) ou la mesure directionnelle (Luenberger (1992a, 1992b)), ne peuvent être implémentés dans une technologie non-linéaire. En effet, celles-ci sont soit non-linéaires soit de structure additive. De ce fait, dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle mesure à la fois additive et non-linéaire. Elle hérite de la structure de la technologie de production CES-CET et celle de la fonction de distance directionnelle. Nous montrons que celle-ci est une fonction pouvant être estimée dans le graphe, en input ou en output. Nous présentons ses propriétés et développons une analyse duale de la mesure. La dualité nous amène à déduire des fonctions de prix implicites non-linéaires associées à l'optimum de Pareto. Cette structure des prix peut être reliée aux tarifications non-linéaire lorsque l'ensemble de production n'est pas convexe. A la fin de ce chapitre, nous donnons la formalisation non-paramétrique de cette nouvelle fonction de distance grâce à la méthode DEA. Puis, nous illustrons, par un exemple empirique, les notions introduites dans les premières sections.

## 1 Environnement et Outils

Pour tous vecteurs d'intrants  $x^t = (x_1^t, \dots, x_m^t) \in [m]$  et d'extrants  $y^t = (y_1^t, \dots, y_n^t) \in [n]$  relatifs à la période  $(t)$ , soit la technologie de production  $T^t(x^t, y^t) = \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \text{ peut produire } y^t\}$ . Nous supposons que cette dernière satisfait les hypothèses T1-T4.

Rappelons que pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  les mesures de Debreu-Farrell et la fonction de distance directionnelle sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned} E_I^t(x^t, y^t) &= \inf \{ \lambda^t > 0 : \lambda^t x^t \in L^t(y^t) \}, \\ E_O^t(x^t, y^t) &= \sup \{ \lambda^t > 0 : \lambda^t y^t \in P^t(x^t) \}, \\ D^t(x^t, y^t; h^t, k^t) &= \sup \{ \delta^t \geq 0 : (x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t) \in T^t \}, \quad \forall g^t = (h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}. \end{aligned}$$

Dans le premier chapitre, nous avons exposé la théorie de la dualité existant entre les mesures

de distance et les fonctions de coût, de revenu et de profit. Notons que pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , les fonctions de coût, de revenu et de profit sont respectivement caractérisées par :

$$\begin{aligned} C^t(w^t, y^t) &= \inf \{w^t \cdot x^t : x^t \in L^t(y^t)\} \\ R^t(p^t, x^t) &= \sup \{p^t \cdot y^t : y^t \in P^t(x^t)\} \\ \Pi^t(w^t, p^t) &= \sup \{p^t \cdot y^t - w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in T^t\}. \end{aligned}$$

Ci-après, nous présentons les opérateurs algébriques qui seront utilisés dans ce chapitre. Notons, tout d'abord, que tout isomorphisme est un morphisme  $f_s$  admettant une réciproque  $f_s^{-1}$  et, est une application bijective permettant de préserver la structure entre deux structures algébriques tel que :  $(\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, \overset{s}{+}, \overset{s}{\cdot})$ .

Selon les travaux de Andriamasy et al. (2017) et inspiré par Ben-Tal (1977), pour tout  $s > 0$  et tout scalaire  $\lambda^t \in \mathbb{R}$ , soit l'application isomorphe  $\varphi_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi_s(\lambda^t) = \begin{cases} (\lambda^t)^s & \text{si } \lambda^t \geq 0 \\ -|\lambda^t|^s & \text{si } \lambda^t < 0 \end{cases}.$$

Cette fonction satisfait les propriétés suivantes :

- (i) elle est définie sur  $\mathbb{R}$ ,
- (ii) elle est continue sur  $\mathbb{R}$ ,
- (iii) elle est bijective.

De même, pour tout vecteur  $z^t = (z_1^t, \dots, z_d^t) \in \mathbb{R}_+^d$  et tout  $s > 0$ , soit l'application isomorphe  $\Phi_s : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$  définie par :

$$\Phi_s(z^t) = (\varphi_s(z_1^t), \dots, \varphi_s(z_d^t)) = ((z_1^t)^s, \dots, (z_d^t)^s) = (z^t)^s.$$

Elle admet une réciproque  $\Phi_s^{-1} : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$  représentée comme suit :

$$\Phi_s^{-1}(z^t) = (\varphi_s^{-1}(z_1^t), \dots, \varphi_s^{-1}(z_d^t)) = ((z_1^t)^{1/s}, \dots, (z_d^t)^{1/s}) = (z^t)^{1/s}.$$

De ce fait, pour tout  $s > 0$ , tout scalaire  $\lambda^t \in \mathbb{R}$  et tout couple de vecteurs  $(u^t, v^t) \in \mathbb{R}_+^d$  avec

$[d] = \{1, \dots, d\}$ , soient les opérateurs algébriques suivants :

$$\begin{aligned}
 u \overset{s}{+} v &= \Phi_s^{-1} (\Phi_s(u) + \Phi_s(v)) = (u^s + v^s)^{1/s} \quad ; \\
 u \overset{s}{\odot} v &= \Phi_s^{-1} (\Phi_s(u) \odot \Phi_s(v)) = (u^s \odot v^s)^{1/s} = u \odot v \quad ; \\
 u \overset{s}{\cdot} v &= \Phi_s^{-1} (\Phi_s(u) \cdot \Phi_s(v)) = \left( \sum_{[d]} u^s v^s \right)^{1/s} \quad ; \\
 \lambda \overset{s}{\cdot} u &= \Phi_s^{-1} (\varphi_s(\lambda) \Phi_s(u)) = (\lambda^s u^s)^{1/s} = \lambda u \quad ; \\
 v \overset{s}{-} \lambda \overset{s}{\cdot} u &= \Phi_s^{-1} (\Phi_s(v) - \varphi_s(\lambda) \Phi_s(u)) = (v^s - \lambda^s u^s)^{1/s} = (v^s - (\lambda u)^s)^{1/s} \quad .
 \end{aligned}$$

Remarquons que pour tous vecteurs  $(u, v) \in \mathbb{R}_+^d$  alors,  $(u^s \odot v^s)^{1/s} = (u_1^s v_1^s, \dots, u_d^s v_d^s)^{1/s} = (u_1 v_1, \dots, u_d v_d)$ . Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, nous admettrons que  $s > 0$ .

## 2 La Fonction de Distance Directionnelle CES-CET

Cette section permet d'introduire la notion de fonctions de distance directionnelle CES (Constant Elasticity of Substitution)-CET (Constant Elasticity of Transformation). Cette mesure de l'efficacité est présentée selon une orientation dans le graphe, en input et en output. Les propriétés usuelles et additionnelles de celles-ci sont également proposées.

### 2.1 Définitions et Propriétés

Dans la première sous-section, nous présentons la mesure dans le graphe de la technologie. Les deux sous-sections suivantes permettent de proposer la fonction selon des orientations en input et en output.

#### 2.1.1 Orientation dans le Graphe

Ravelojaona (2019) introduit la fonction de distance directionnelle CES-CET (FDD CES-CET) dans le cadre de la technologie de production CES-CET. Cette mesure est construite grâce à la combinaison structurelle de la FDD et de la technologie de production CES-CET. De ce fait, elle est à la fois additive et non-linéaire.

**Définition 3.1** *Quels que soient  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  et, tout vecteur directionnel  $g^t = (h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , l'application  $D_{\alpha,\beta}^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^{m+n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  définie par :*

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \left( x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t \right) \in T^t \right\} & \text{si } \left( x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t \right) \cap T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

*est la fonction distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe.*

Il est évident que cette mesure dans le graphe permet la réduction et l'augmentation simultanées des facteurs et de la production.

**Proposition 3.2** *Lorsque l'ensemble de production satisfait les hypothèses T1-T4, la FDD CES-CET vérifie les propriétés suivantes :*

$D_{\alpha,\beta}1$  :  $(x^t, y^t) \in T^t$  si et seulement si,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \geq 0$ .

$D_{\alpha,\beta}2$  : Si  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = 0$  alors,  $(x^t, y^t) \in \partial_{\alpha,\beta} T^t$ .

$D_{\alpha,\beta}3$  : Pour tout  $(x^t, y^t), (u^t, v^t) \in T^t$ , si  $(-u^t, v^t) \geq (-x^t, y^t)$  alors,  $D_{\alpha,\beta}^t(u^t, v^t; h^t, k^t) \leq D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t)$ .

$D_{\alpha,\beta}4$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, k^t) = \lambda^t \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t)$ .

$D_{\alpha,\beta}5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; \lambda^t h^t, \lambda^t k^t) = (\lambda^t)^{-1} \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t)$ .

*Preuves :*

$(D_{\alpha,\beta}1)$  et  $(D_{\alpha,\beta}2)$  découlent directement de la définition de la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe  $\square$ .

$(D_{\alpha,\beta}3)$  Considérons deux unités de productions  $(x^t, y^t), (u^t, v^t) \in T^t$  telles que  $(x^t, -y^t) \leq (u^t, -v^t)$  avec  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \delta^t$  et  $D_{\alpha,\beta}^t(u^t, v^t; h^t, k^t) = (\delta')^t$ . Ainsi,  $\left( x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t \right) = ((x')^t, (y')^t) \in T^t$  et  $\left( u^t - (\delta')^t h^t, v^t + (\delta')^t k^t \right) = ((u')^t, (v')^t) \in T^t$ . Alors,  $((x')^t, -(y')^t) \leq ((u')^t, -(v')^t)$  est valable  $\square$ .

$(D_{\alpha,\beta}4)$  Pour tout  $\lambda^t > 0$  et sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants on a,  $(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) \in T^t$  alors,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( \lambda^t x^t - \delta^t h^t, \lambda^t y^t + \delta^t k^t \right) \in T^t \right\}$  Dans ce cas,

en factorisant par  $\lambda^t$  et, en posant  $(\delta')^t = \delta^t / \lambda^t$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta'} \left\{ (\delta')^t : \lambda^t \left( x^t - (\delta')^t h^t, y^t + (\delta')^t k^t \right) \in T^t \right\}$ . Donc,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, k^t) = \lambda^t \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t)$   $\square$ .

( $D_{\alpha,\beta}5$ ) Soit  $\lambda^t > 0$  tel que  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; \lambda^t h^t, \lambda^t k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t - \delta^t (\lambda^t h^t), y^t + \delta^t (\lambda^t k^t) \right) \in T^t \right\}$ . En posant  $(\delta')^t = \delta^t \lambda^t$  on obtient,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, k^t) = \frac{1}{\lambda^t} \cdot \left\{ (\delta')^t : \left( x^t - (\delta')^t h^t, y^t + (\delta')^t k^t \right) \in T^t \right\}$ . D'où,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, k^t) = (\lambda^t)^{-1} \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t)$   $\square$ .

La propriété ( $D_{\alpha,\beta}1$ ) stipule que la FDD CES-CET caractérise de manière complète l'ensemble de production. Lorsque la valeur de la mesure est nulle, l'unité de production appartient à l'isoquant du graphe de la technologie ( $D_{\alpha,\beta}2$ ). La troisième hypothèse est relative à la monotonicité de la fonction par rapport aux inputs et aux outputs. Le quatrième axiome indique l'homogénéité de degré (1) de la mesure lorsque la technologie satisfait des rendements d'échelle constants. ( $D_{\alpha,\beta}5$ ) indique que la fonction est homogène de degré (-1) par rapport à la direction  $g^t$ .

### 2.1.2 Orientation en Input

Cette sous-section est dédiée à la caractérisation de la fonction de distance directionnelle CES-CET axée sur les intrants. Nous proposons sa définition et les propriétés qui y sont associées. En effet, la plupart des firmes n'ont pas la possibilité d'influencer à la fois leurs facteurs et leurs productions. Dans ce cas, la recherche de l'efficacité ne peut être effectuée qu'en agissant sur les inputs.

**Définition 3.3** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$  avec un vecteur directionnel  $g^t = (h^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$ , l'application  $D_{\alpha,\beta}^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\infty\}$  définie par :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \left( x^t - \delta^t h^t, y^t \right) \in T^t \right\} & \text{si } x^t - \delta^t h^t \cap L^t(y^t) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2)$$

est la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée en input.

Cette orientation de la mesure permet de maintenir un niveau de production et de diminuer la quantité de facteurs utilisée, simultanément.

**Proposition 3.4** *Lorsque  $L^t(y^t)$  satisfait les hypothèses L1-L5 alors, la FDD CES-CET orientée en input vérifie les propriétés suivantes :*

$ID_{\alpha,\beta}1$  :  $(x^t, y^t) \in T^t$  si et seulement si,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \geq 0$ .

$ID_{\alpha,\beta}2$  : Si  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = 0$  alors,  $(x^t, y^t) \in \partial_{\alpha,\beta} T^t$ .

$ID_{\alpha,\beta}3$  : Pour tout  $(x^t, y^t), (u^t, y^t) \in T^t$  si,  $(x^t, -y^t) \leq (u^t, -y^t)$  alors,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \leq D_{\alpha,\beta}^t(u^t, y^t; h^t, 0)$ .

$ID_{\alpha,\beta}4$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, 0) = \lambda^t \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0)$ .

$ID_{\alpha,\beta}5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; \lambda^t h^t, 0) = (\lambda^t)^{-1} \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0)$ .

$ID_{\alpha,\beta}6$  : Quel que soit  $\gamma^t \in \mathbb{R}_+$ ,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t; h^t, 0) = D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) - \gamma^t$ .

*Preuves :*

$(ID_{\alpha,\beta}1)$  et  $(ID_{\alpha,\beta}2)$  découlent directement de la définition de la mesure de l'efficacité  $\square$ .

$(ID_{\alpha,\beta}3)$  Si  $(x^t, -y^t) \leq (u^t, -y^t)$  alors pour tout cône de libre disposition des inputs et des outputs  $K = \mathbb{R}_+^m \times (-\mathbb{R}_+^n)$  on a  $\left\{ \delta^t : (x^t - \delta^t h^t, y) \in ((x^t, y^t) + K) \right\} \subset \left\{ \delta^t : (x^t - \delta^t h^t, y) \in ((u^t, y^t) + K) \right\}$  et  $\left\{ \delta^t : (x^t - \delta^t h^t, y) \in ((u^t, y^t) + K) \right\} \subset \left\{ \delta^t : (u^t - \delta^t h^t, y) \in ((u^t, y^t) + K) \right\}$ . Ainsi,  $\left\{ \delta^t : (x^t - \delta^t h^t, y) \in ((x^t, y^t) + K) \right\} \subset \left\{ \delta^t : (u^t - \delta^t h^t, y) \in ((u^t, y^t) + K) \right\}$  tel que,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \leq D_{\alpha,\beta}^t(u^t, y^t; h^t, 0) \quad \square$ .

$(ID_{\alpha,\beta}4)$  Soit  $\lambda^t > 0$  tel que  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : (\lambda^t x^t - \delta^t h^t, \lambda^t y^t) \in T^t \right\}$ . En factorisant par  $\lambda^t$  et, en posant  $(\delta')^t = \delta^t / \lambda^t$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, 0) = \lambda^t \cdot \sup_{\delta'} \left\{ (\delta')^t : (x^t - (\delta')^t h^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Ainsi,  $D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; h^t, 0) = \lambda^t \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \quad \square$ .

$(ID_{\alpha,\beta}5)$  Pour tout  $\lambda^t > 0$  soit,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; \lambda^t h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : (x^t - \delta^t \lambda^t h^t, y^t) \in T^t \right\}$ . En posant  $(\delta')^t = \delta^t \lambda^t$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; \lambda^t h^t, 0) = (\lambda^t)^{-1} \cdot \sup_{\delta'} \left\{ (\delta')^t : (x^t - (\delta')^t h^t, y^t) \in T^t \right\}$ . De ce fait,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; \lambda^t h^t, 0) = (\lambda^t)^{-1} \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \quad \square$ .

$(ID_{\alpha,\beta}6)$  Soit  $\gamma^t \in \mathbb{R}_+$  tel que  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t; h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : (x^t - \gamma^t h^t - \delta^t h^t, y^t) \in T^t \right\}$ . En factorisant par  $h^t$  on a,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t; h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : (x^t - (\gamma^t + \delta^t) h^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Si  $(\delta')^t = \gamma^t + \delta^t$  alors,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t; h^t, 0) = \sup_{\delta'} \left\{ (\delta')^t : (x^t - (\delta')^t h^t, y^t) \in T^t \right\} - \gamma^t$ . D'où,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t; h^t, 0) = D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) - \gamma^t \quad \square$ .

Les deux premières hypothèses signifient que la mesure caractérise complètement la technologie de production et, que l'observation est efficiente lorsque sa valeur est nulle. L'axiome  $(ID_{\alpha,\beta}3)$  est relative à la monotonicité de la fonction par rapport aux inputs.  $(ID_{\alpha,\beta}4)$  fait référence à l'homogénéité de degré (1) de la fonction sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants.  $(ID_{\alpha,\beta}5)$  indique que la mesure est homogène de degré (-1) par rapport à la direction  $g^t$ . Enfin, la cinquième propriété stipule que la fonction vérifie l'hypothèse de translation homothéticité.

### 2.1.3 Orientation en Output

Dans cette sous-section, nous introduisons la fonction de distance CES-CET dans le contexte d'une orientation en output. Nous proposons d'abord de la définir puis, de présenter ses propriétés.

**Définition 3.5** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $\beta \in \mathbb{R}_{++}$  tel que pour un vecteur de direction  $g^t = (0, k^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , l'application  $D_{\alpha,\beta}^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}\{+\infty\}$  définie par :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \left( x^t, y^t + \delta^t k^t \right) \in T^t \right\} & \text{si } y^t + \delta^t k^t \in P^t(x^t) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

est la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée en output.

La définition ci-dessus signifie que la mesure directionnelle CES-CET évalue l'augmentation potentielle de la production compte tenu d'un niveau de facteurs.

**Proposition 3.6** Lorsque  $P^t(x^t)$  satisfait les hypothèses P1-P5 alors, la FDD CES-CET orientée en output vérifie les propriétés suivantes :

$$OD_{\alpha,\beta}1 : (x^t, y^t) \in T^t \text{ si et seulement si, } D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) \geq 0.$$

$$OD_{\alpha,\beta}2 : \text{Si } D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) = 0 \text{ alors, } (x^t, y^t) \in \partial_{\alpha,\beta} T^t.$$

$$OD_{\alpha,\beta}3 : \text{Pour tout } (x^t, y^t), (x^t, v^t) \in T^t \text{ si, } (x^t, -y^t) \leq (x^t, -v^t) \text{ alors, } D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) \leq D_{\alpha,\beta}^t(x^t, v^t; 0, k^t).$$

$$OD_{\alpha,\beta}4 : \text{Pour tout } \lambda^t > 0 \text{ on a, } D_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t; 0, k^t) = \lambda^t \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t).$$

$$OD_{\alpha,\beta}5 : \text{Pour tout } \lambda^t > 0 \text{ on a, } D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, \lambda^t k^t) = (\lambda^t)^{-1} \cdot D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t).$$

$$OD_{\alpha,\beta}6 : \text{Quel que soit } \gamma^t \in \mathbb{R}_+, D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t + \gamma^t k^t; 0, k^t) = D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) + \gamma^t.$$



Les preuves de ces propriétés sont similaires à celles présentées dans le cadre de la fonction orientée en input. Ainsi, elles sont omises.

Les deux premières propriétés signifient que la fonction donne une parfaite caractérisation de la technologie et que par ailleurs, sa valeur est nulle lorsque la production est optimale. L'hypothèse  $(OD_{\alpha,\beta}3)$  indique la monotonicité de la fonction par rapport aux outputs. L'axiome  $(OD_{\alpha,\beta}4)$  stipule que la mesure est homogène de degré (1) sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. La fonction est homogène de degré (-1) par rapport à la direction  $g^t$  selon la propriété  $(OD_{\alpha,\beta}5)$ . La dernière hypothèse indique que la mesure est translation homothétique.

## 2.2 Des Propriétés Additionnelles

Cette sous-section présente des propriétés additionnelles pouvant être associées aux fonctions de distance directionnelle CES-CET. En effet, puisque les mesures directionnelles CES-CET reflètent la technologie de production, elles permettent de déduire des axiomes particuliers relatifs à la technologie de production et à ses correspondances.

### 2.2.1 Graphe Translation Homothéticité

Notons que lorsque  $\alpha = \beta = s \in \mathbb{R}_{++}$  alors, la FDD CES-CET orientée dans le graphe peut être réécrite de la manière suivante :

$$D_s^t(x^t, y^t; g^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \left( x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t \right) \in T^t \right\} . \quad (3.4)$$

**Proposition 3.7** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout vecteur de direction  $g^t = (h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , si quels que soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  on a  $\alpha = \beta = s$  alors, la mesure directionnelle CES-CET orientée dans le graphe vérifie la propriété de translation homothéticité, comme suit :*

$$D_{\alpha,\beta}6 : \text{ Pour tout } \gamma^t \in \mathbb{R}_+ \text{ on a, } D_s^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t + \gamma^t k^t; h^t, k^t) = D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) - \gamma^t.$$

*Preuve :*

Soit  $\gamma^t \geq 0$  tel que  $D_s^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t + \gamma^t k^t; g^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t - \gamma^t h^t - \delta^t h^t, y^t + \gamma^t k^t + \delta^t k^t \right) \in T^t \right\}$ . En factorisant par  $h^t$  et  $k^t$  on a,  $D_s^t(x^t - \gamma^t h^t, y^t + \gamma^t k^t; g^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t :$

$\left(x^t \stackrel{s}{-} \left(\gamma^t \stackrel{s}{+} \delta^t\right) h^t, y^t \stackrel{s}{+} \left(\gamma^t \stackrel{s}{+} \delta^t\right) k^t\right) \in T^t\}$ . En posant  $(\delta')^t = \gamma^t \stackrel{s}{+} \delta^t$ , on obtient  $D_s^t(x^t \stackrel{s}{-} \gamma^t h^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t; g^t) = \sup_{\delta'} \left\{(\delta')^t : \left(x^t \stackrel{s}{-} (\delta')^t h^t, y^t \stackrel{s}{+} (\delta')^t k^t\right) \in T^t\right\} \stackrel{s}{-} \gamma^t$ . Par conséquent,  $D_s^t(x^t \stackrel{s}{-} \gamma^t h^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t; g^t) = D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \stackrel{s}{-} \gamma^t \quad \square$ .

Shephard (1953) introduit la notion de translation homothéticité de la technologie grâce à une fonction de distance ayant une structure multiplicative. Par la suite, Chambers et Färe (1998), Chambers (2002) et, Briec et Kerstens (2004) développent ce concept à la fonction de distance directionnelle qui est structurellement additive. Cette propriété est intéressante car elle permet d'établir des relations d'équivalence entre les mesures de productivité.

**Définition 3.8** *Pour toute technologie  $T^t$  satisfaisant T1-T4 et tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  avec  $\delta^t \in \mathbb{R}_+$ , l'ensemble de production vérifie une graphe translation homothéticité CES-CET dans la direction  $g^t = (h^t, k^t)$  si et seulement si :*

$$\left(x^t \stackrel{\alpha}{-} \delta^t h^t, y^t \stackrel{\beta}{+} \delta^t k^t\right) \geq 0 \quad \text{et donc,} \quad \left(x^t \stackrel{\alpha}{-} \delta^t h^t, y^t \stackrel{\beta}{+} \delta^t k^t\right) \in T^t \quad . \quad (3.5)$$

Nous pouvons retrouver cette définition grâce à la proposition ci-dessous.

**Proposition 3.9** *Pour tout ensemble de production  $T^t$  vérifiant T1-T5 et, tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tels que  $\alpha = \beta = s$ , la technologie  $T^t$  satisfait une graphe translation homothéticité CES-CET si et seulement si :*

$$(i) \quad D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) = 2^{\frac{1}{s}} D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \quad , \quad (3.6)$$

$$(ii) \quad D_s^t(x^t, y^t \stackrel{\beta}{+} \gamma^t k^t; h^t, 0) = D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \stackrel{\beta}{-} \gamma^t \quad , \quad (3.7)$$

$$(iii) \quad D_s^t(x^t \stackrel{\alpha}{-} \gamma^t h^t, y^t; 0, k^t) = D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) \stackrel{\alpha}{+} \gamma^t \quad . \quad (3.8)$$

*Preuves :*

(i) Soient deux observations  $(x^t, y^t)$  et  $(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t)$  tels que  $(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) = (x^t, y^t) \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot (h^t, 0)$ . En développant l'expression, nous avons  $(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) = \left(x^t \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot h^t, y^t\right)$ . Considérons une observation  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t)$  définie par  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) = (\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) \stackrel{s}{+} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot (h^t, k^t)$ . En détaillant celle-ci, nous obtenons  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) = \left(x^t \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot h^t \stackrel{s}{+} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot\right.$

$h^t, y \stackrel{s}{+} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot k^t$ . Ainsi,  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) = \left(x^t, y^t \stackrel{s}{+} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot k^t\right)$ . On peut affirmer que  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t)$  est la projection orientée en input de  $(x^t, y^t)$ , sur la frontière efficiente. Étant donné que  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t)$  dépend de  $(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t)$  alors,  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t)$  appartient également à la frontière. De ce fait, on peut en déduire que  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) = \left(x^t, y^t \stackrel{\beta}{+} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot k^t\right)$ . Par conséquent,  $(\hat{x}^t, \hat{y}^t) = \left(x^t, y^t \stackrel{\beta}{+} D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) \cdot k^t\right)$ . Nous pouvons en déduire que  $D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t)$ . Soit une autre observation  $(\bar{x}^t, \bar{y}^t)$  caractérisée par  $(\bar{x}^t, \bar{y}^t) = \frac{1}{2^{1/s}} \left[ (\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) \stackrel{s}{+} (\hat{x}^t, \hat{y}^t) \right]$ . En détaillant l'expression, nous obtenons  $(\bar{x}^t, \bar{y}^t) = \frac{1}{2^{1/s}} \left( x^t \stackrel{s}{+} x^t \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot h^t, y^t \stackrel{s}{+} y^t \stackrel{s}{+} D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) \cdot k^t \right)$ . Par ailleurs, on a  $(\bar{x}^t, \bar{y}^t) = \left( x^t \stackrel{s}{-} \frac{1}{2^{1/s}} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot h^t, y^t \stackrel{s}{+} \frac{1}{2^{1/s}} D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) \cdot k^t \right)$ . Puisque  $D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t)$  alors, si  $D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \frac{1}{2^{1/s}} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0)$  ou  $D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \frac{1}{2^{1/s}} D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t)$ , nous avons  $(\bar{x}^t, \bar{y}^t) = \left( x^t \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \cdot h^t, y^t \stackrel{s}{+} D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \cdot k^t \right) \quad \square$ .

(ii) De l'équation (3.6), on a établi que  $D_s^t \left( x^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t; h^t, 0 \right) = D_s^t \left( x^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t; 0, k^t \right)$ . On sait que  $D_s^t \left( x^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t; 0, k^t \right) = \sup \left\{ \delta^t : \left( x^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t \stackrel{s}{+} \delta^t k^t \right) \in T^t \right\}$ . En factorisant par  $k^t$  et, en posant  $(\delta')^t = \gamma^t \stackrel{s}{+} \delta^t$ , on obtient  $D_s^t \left( x^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t; 0, k^t \right) = \sup \left\{ (\delta')^t : \left( x^t, y^t \stackrel{s}{+} (\delta')^t k^t \right) \in T^t \right\} \stackrel{s}{-} \gamma^t$ . Ainsi, on déduit que  $D_s^t \left( x^t, y^t \stackrel{s}{+} \gamma^t k^t; 0, k^t \right) = D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) \stackrel{s}{-} \gamma^t \equiv D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \stackrel{s}{-} \gamma^t \quad \square$ .

(iii) En appliquant le même raisonnement logique que précédemment, la preuve de celle-ci peut se faire de manière simple  $\square$ .

Suivant les travaux de Färe et Primont (1995), de Chambers et Färe (1998) et, de Chambers (2002), nous pouvons définir la translation homothéticité des correspondances en intrants et en extrants. Pour ce faire, nous nous intéressons aux fonctions de distance directionnelle CES-CET orientées en input et en output.

**Proposition 3.10** *Soit une technologie de production satisfaisant T1-T4. Quels que soient  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$ , pour toutes fonctions non-décroissantes  $H^t(y^t, \cdot)$  et  $G^t(x^t, \cdot)$ , cohérentes avec les propriétés des fonctions de distances directionnelles CES-CET,*

(iv) *l'ensemble de production vérifie une translation homothéticité CES-CET orientée en in-*

put si et seulement si :

$$\begin{cases} L^t(y^t) = H^t(y^t, h^t) \cdot h^t \overset{\alpha}{+} L^t(\bar{y}^t) & \text{pour } y^t \in \mathbb{R}_+^n \\ D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_{\alpha, \beta}^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \end{cases}, \quad (3.9)$$

(v) la technologie de production satisfait une translation homothéticité CES-CET orientée en output si et seulement si :

$$\begin{cases} P^t(x^t) = G^t(x^t, k^t) \cdot k^t \overset{\beta}{+} P^t(\bar{x}^t) & \text{pour } x^t \in \mathbb{R}_+^m \\ D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) = D_{\alpha, \beta}^t(\bar{x}^t, y^t; 0, k^t) \overset{\beta}{+} G^t(x^t, k^t) \end{cases}, \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

où  $\bar{x}^t$  et  $\bar{y}^t$  sont respectivement des vecteurs de facteurs et de productions fixes.

*Preuves :*

(iv) (3.9) Soit la correspondance en inputs  $L^t(y^t) = \{x^t \in \mathbb{R}_+^m : D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \geq 0\}$ . Grâce à l'équation (3.10), on sait que  $D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_{\alpha, \beta}^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t)$ . Ainsi,  $L^t(y^t) = \{x^t : D_{\alpha, \beta}^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \geq 0\}$  et, par à la propriété (I5) on a,  $L^t(y^t) = \{x^t : D_{\alpha, \beta}^t(x^t \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \geq 0\}$ . De plus on peut écrire que  $L^t(y^t) = \{x^t \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t : D_{\alpha, \beta}^t(x^t \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \geq 0\} \overset{\alpha}{+} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$ . En posant  $\tilde{x}^t = x^t \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$  on obtient,  $L^t(y^t) = \{\tilde{x}^t : D_{\alpha, \beta}^t(\tilde{x}^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \geq 0\} \overset{\alpha}{+} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$ . De ce fait,  $L^t(y^t) = L^t(\bar{y}^t) \overset{\alpha}{+} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$   $\square$ .

(3.10) Soit la fonction de distance CES-CET orientée en input définie par  $D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \sup \left\{ \delta^t : \left( x^t \overset{\alpha}{-} \delta^t h^t \right) \in L^t(y^t) \right\}$ . Puisque  $L^t(y^t) = L^t(\bar{y}^t) \overset{\alpha}{+} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$  alors nous avons,  $D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \sup \left\{ \delta^t : \left( x^t \overset{\alpha}{-} \delta^t h^t, y^t \right) \in L^t(\bar{y}^t) \overset{\alpha}{+} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t \right\}$ . En soustrayant l'expression  $H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$  de  $L^t(\bar{y}^t)$  on a,  $D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \sup \left\{ \delta^t : \left( x^t \overset{\alpha}{-} \delta^t h^t, y^t \right) \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t \in L^t(\bar{y}^t) \right\}$ . La factorisation par  $h^t$  permet d'obtenir  $D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \sup \left\{ \delta^t : x^t \overset{\alpha}{-} \left( \delta^t \overset{\alpha}{+} H^t(y^t, h^t) \right) \cdot h^t \in L^t(\bar{y}^t) \right\}$ . En posant  $(\delta')^t = \delta^t \overset{\alpha}{+} H^t(y^t, h^t)$ , nous pouvons écrire que  $D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \sup \left\{ (\delta')^t : \left( x^t \overset{\alpha}{-} (\delta')^t h^t, y^t \right) \in L^t(\bar{y}^t) \right\} \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$ . Par conséquent,  $D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_{\alpha, \beta}^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \overset{\alpha}{-} H^t(y^t, h^t) \cdot h^t$   $\square$ .

(v) Les preuves des équations (3.11) et (3.12) sont similaires à celles proposées pour les équations (3.9) et (3.10). De ce fait, elles sont omises.

### 2.2.2 Translation Homothéticité Réciproque

La définition de la translation homothéticité réciproque a été présentée par Fukuyama (2002). Cette notion établit les implications structurelles des fonctions de coût et de revenu spécifiques. Dans le même esprit, nous présentons la notion de translation homothéticité réciproque CES-CET.

**Définition 3.11** Soient des vecteurs arbitraires  $(\bar{x}^t, \bar{y}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , pour toute fonction inversible et non-croissante  $F^t$  avec  $\alpha = \beta = s \in \mathbb{R}_+$ , la technologie de production vérifie une translation homothéticité réciproque CES-CET si et seulement si :

$$(vi) \quad D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) = D_s^t(\bar{x}^t, y^t; 0, k^t) \stackrel{s}{-} F^t(D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0)) \quad (3.13)$$

$$(vii) \quad D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \stackrel{s}{-} (F^t)^{-1}(D_s^t(x^t, \bar{y}^t; 0, k^t)) \quad (3.14)$$

Selon les travaux de Briec et Kerstens (2004), nous pouvons fournir la proposition qui suit.

**Proposition 3.12** Pour  $D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) = 0$  et  $D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) = 0$ , une technologie vérifiant T1-T4, satisfait la propriété de translation homothéticité CES-CET orientée en input et output si et seulement si, l'ensemble de production vérifie également une translation homothéticité réciproque CES-CET.

*Preuves :*

(vi) Nous pouvons affirmer que la proposition  $D_s^t(x^t \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot h^t, y^t; h^t, 0) = 0$ , est toujours vraie. De ce fait, pour tout  $s \in \mathbb{R}_{++}$ , la technologie vérifie la translation homothéticité réciproque CES-CET telle que  $D_s^t(x^t \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot h^t, y^t; 0, k^t) = 0$ . La Définition 3.10 ainsi que l'équation (3.10) permettent d'établir que  $D_s^t(x^t \stackrel{s}{-} D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot h^t, y^t; 0, k^t) = D_s^t(x^t \stackrel{s}{-} [D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \stackrel{s}{-} H^t(y^t, h^t)] \cdot h^t, y^t; h^t, 0)$ . Par ailleurs, grâce à l'équation (3.12) on sait que  $D_s^t(x^t \stackrel{s}{-} [D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \stackrel{s}{-} H^t(y^t, h^t)] \cdot h^t, y^t; h^t, 0) = D_s^t(\bar{x}^t, y^t; 0, k^t) \stackrel{s}{+} G^t(x^t \stackrel{s}{-} [D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \stackrel{s}{-} H^t(y^t, h^t)] \cdot h^t, k^t) = 0$ . Ainsi,  $D_s^t(\bar{x}^t, y^t; 0, k^t) = -G^t(x^t \stackrel{s}{-} [D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \stackrel{s}{-} H^t(y^t, h^t)] \cdot h^t, k^t)$  et,  $-G^t(x^t \stackrel{s}{-} [D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \stackrel{s}{-} H^t(y^t, h^t)] \cdot h^t, k^t) = F^t(H^t(y^t, h^t))$ . Il apparaît évident que la fonction  $F^t$  est non-croissante. Dans ce cas, on peut la réécrire telle que  $F^t(H^t(y^t, h^t)) = F^t(D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0)) = F^t(D_s^t(x^t, \bar{y}^t; 0, k^t))$ . Enfin, la Proposition 3.12 induit  $D_s^t(x^t, y^t; 0, k^t) = D_s^t(\bar{x}^t, y^t; 0, k^t) \stackrel{s}{-} F^t(D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0)) \square$ .

(vii) Précédemment, nous avons pu voir que la fonction  $F^t$  dépend de la fonction  $H^t(y^t, h^t)$  telle que  $H^t(y^t, h^t) = (F^t)^{-1}(H^t(y^t, h^t))$ . Par ailleurs, puisque  $D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) = D_s^t(x^t, \bar{y}^t; 0, k^t)$  alors, la Définition 3.10 et l'équation (3.10) permettent d'affirmer que  $D_s^t(x^t, y^t; h^t, 0) = D_s^t(x^t, \bar{y}^t; h^t, 0) \stackrel{s}{=} (F^t)^{-1}(D_s^t(x^t, \bar{y}^t; 0, k^t)) \quad \square$ .

### 2.2.3 Équivalence aux Mesures Radiales

Chambers et al. (1996a) ainsi que Briec (1997) démontrent que les fonctions de distance directionnelle peuvent être reliées aux fonctions de distance radiale (Shephard (1953, 1970), Debreu (1951) et, Farrell (1957)). Dans ce cas, les vecteurs de direction doivent être choisis de manière spécifique.

Rappelons que les mesures de Debreu-Farrell et de Shephard sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned} E_I^t(x^t, y^t) &= \inf_{\theta} \left\{ \theta^t : (\theta^t x^t, y^t) \in T^t \right\} = \left[ D_I^t(x^t, y^t) = \sup_{\theta} \left\{ \theta^t : \left( \frac{x^t}{\theta^t}, y^t \right) \in T^t \right\} \right]^{-1} \\ E_O^t(x^t, y^t) &= \sup_{\theta} \left\{ \theta^t : (x^t, \theta^t y^t) \in T^t \right\} = \left[ D_O^t(x^t, y^t) = \inf_{\theta} \left\{ \theta^t : \left( x^t, \frac{y^t}{\theta^t} \right) \in T^t \right\} \right]^{-1} . \end{aligned}$$

**Proposition 3.13** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$ , nous pouvons établir que :*

$$D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - \frac{\alpha}{E_I^t(x^t, y^t)} = 1 - \frac{\alpha}{D_I^t(x^t, y^t)} \quad \forall g^t = (x^t, 0) \quad (3.15)$$

$$D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) = E_O^t(x^t, y^t) - 1 = \frac{1}{D_O^t(x^t, y^t)} - 1 \quad \forall g^t = (0, y^t) \quad (3.16)$$

*Preuves :*

*Equation (3.15)* Pour une direction  $g^t = (h^t, 0)$  avec  $h^t = x^t$ , soit la FDD CES-CET orientée en input définie par  $D_s^t(x^t, y^t; x^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t - \delta^t x^t, y^t \right) \in T^t \right\}$ . En factorisant par  $x^t$  et, en posant  $(\delta')^t = 1 - \delta^t$  on a,  $D_s^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - \inf_{\delta'} \left\{ (\delta')^t : ((\delta')^t x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Par conséquent,  $D_s^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - [E_I^t(x^t, y^t)] = 1 - \frac{\alpha}{D_I^t(x^t, y^t)} \quad \square$ .

*Equation (3.16)* Pour toute direction  $g^t = (0, k^t)$  avec  $k^t = y^t$ , la FDD CES-CET orientée en output est caractérisée par  $D_s^t(x^t, y^t; 0, y^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t, y^t + \delta^t y^t \right) \in T^t \right\}$ . En factorisant par  $y^t$  et, en posant  $(\delta')^t = 1 + \delta^t$  on obtient,  $D_s^t(x^t, y^t; 0, y^t) = \sup_{\delta'} \left\{ (\delta')^t : (x^t, (\delta')^t y^t) \in T^t \right\} - 1$ . De ce fait,  $D_s^t(x^t, y^t; 0, y^t) = [E_O^t(x^t, y^t)] - 1 = \frac{1}{D_O^t(x^t, y^t)} - 1 \quad \square$ .

### 3 Une Dualité Non-linéaire

Dans cette section, nous présentons la relation duale existant entre la FDD CES-CET et des pseudo fonctions de profit, de coût et de revenu. Pour ce faire, nous définissons dans un premier temps, les pseudo-fonctions de profit, de coût et de revenu CES-CET non-linéaires. Puis dans un second temps, nous établissons la dualité entre la FDD CES-CET et ces dernières. Enfin, nous introduisons les fonctions de prix implicites et quelques notions d'efficiencia.

#### 3.1 Pseudo-Fonctions de Profit, de Coût et de Revenu CES-CET

Cette première sous-section introduit les pseudo fonctions de profit, de coût et de revenu CES-CET non-linéaires. Nous caractérisons tout d'abord, la fonction de profit non-linéaire. Puis, nous constatons que cette dernière est une généralisation des fonctions de coût et de revenu non-linéaires.

##### 3.1.1 Pseudo-Fonction de Profit CES-CET

Une fonction de profit prend en compte simultanément les facteurs productifs et les productions. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , intervenant dans les fonctions CES et CET, peuvent prendre des valeurs différentes. Ainsi, établir une unique fonction de profit telle que la valeur de  $\alpha$  soit différente de celle  $\beta$  semble improbable. Nous nous proposons ainsi, de définir une pseudo fonction de profit telle que  $\alpha = \beta = s \in \mathbb{R}_{++}$ .

**Définition 3.14** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $\alpha = \beta = s \in \mathbb{R}_{++}$ , l'application  $\Pi_s^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  définie par :

$$\Pi_s^t(w^t, p^t) = \begin{cases} \sup_{x,y} \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \varphi_s \left( p^t \cdot^s y^t \right) - \varphi_s \left( w^t \cdot^s x^t \right) \right) : (x^t, y^t) \in T^t \right\} & \text{si } T^t \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.17)$$

est la pseudo-fonction de profit CES-CET.

La fonction de profit permet une optimisation des bénéfices soit par la diminution des coûts soit par l'augmentation des revenus soit les deux simultanément.

**Proposition 3.15** *Lorsque l'ensemble de production satisfait les hypothèses T1-T4 alors, la pseudo fonction de profit CES-CET vérifie les propriétés suivantes :*

$\Pi_s1$  : Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tel que pour  $(0, 0) \in T^t$  on a,  $\Pi_s^t(w^t, p^t) = 0$ .

$\Pi_s2$  : Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , on a  $\Pi_s^t(0, 0) = 0$ .

$\Pi_s3$  : Si  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  alors,  $\Pi_s^t(w^t, p^t) > 0$ .

$\Pi_s4$  : Pour tout  $(w^t, p^t), (\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tel que  $(w^t, -p^t) \leq (\tilde{w}^t, -\tilde{p}^t)$  on a,  $\Pi_s^t(w^t, p^t) \geq \Pi_s^t(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t)$ .

$\Pi_s5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,  $\Pi_s^t(\lambda^t \cdot^s w^t, \lambda^t \cdot^s p^t) = \lambda^t \cdot \Pi_s^t(w^t, p^t)$ .

$\Pi_s6$  : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants,  $\Pi_s^t(w^t, p^t) = 0$  ou  $\Pi_s^t(w^t, p^t) = +\infty$ .

*Preuves :*

$(\Pi_s1)$  à  $(\Pi_s4)$  découlent directement de la définition de la pseudo fonction de profit CES-CET  $\square$ .

$(\Pi_s5)$  Soit  $\lambda^t > 0$  tel que  $\Pi_s^t(\lambda^t \cdot^s w^t, \lambda^t \cdot^s p^t) = \sup_{x,y} \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \Phi_s \left( \lambda^t \cdot^s p^t \right) \Phi_s(y^t) - \Phi_s \left( \lambda^t \cdot^s w^t \right) \Phi_s(x^t) \right) : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . La factorisation de l'expression par  $\lambda^t$  donne,  $\Pi_s^t(\lambda^t \cdot^s w^t, \lambda^t \cdot^s p^t) = \sup_{x,y} \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \varphi_s(\lambda^t) \left( \Phi_s(p^t) \Phi_s(y^t) - \Phi_s(w^t) \Phi_s(x^t) \right) \right) : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Par conséquent,  $\Pi_s^t(\lambda^t \cdot^s w^t, \lambda^t \cdot^s p^t) = \lambda^t \cdot \sup_{x,y} \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \varphi_s \left( p^t \cdot^s y^t \right) - \varphi_s \left( w^t \cdot^s x^t \right) \right) : (x^t, y^t) \in T^t \right\} \square$ .

$(\Pi_s6)$  Lorsque le processus de production opère sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la structure de la frontière de production devient linéaire. Ainsi, la droite de profit se confond avec celle-ci lorsque le bénéfice est optimal tel que  $\Pi_s^t(w^t, p^t) = 0$ . Par ailleurs, lorsque la droite de profit n'est pas tangente à la frontière de production on a  $\Pi_s^t(w^t, p^t) = +\infty$ .

Les deux premières hypothèses stipulent respectivement qu'il n'y a pas de repas gratuit et, que des prix nuls engendrent de profits nuls. L'axiome  $(\Pi_s3)$  signifie que des prix non-nuls ainsi que une utilisation des facteurs et une production effective engendrent des profits positifs. La quatrième propriété est relative à la monotonie de la fonction de profit par rapport aux prix des inputs et des outputs.  $(\Pi_s5)$  fait référence à la semi-homogénéité de degré 1 de la fonction par rapport aux prix. Enfin, le dernier axiome indique que lorsque le processus de production opère sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, les profits sont soit nuls soit indéfinis.



### 3.1.2 Pseudo-Fonction de Coût CES-CET

La fonction de coût permet la minimisation des coûts par rapport aux prix du marché. De ce fait, l'optimisation est relative aux quantités de facteurs utilisées. La fonction de profit est une généralisation de la fonction de coût. Cette dernière résulte de la maximisation de la première pour une quantité fixe d'extrants. En effet, lorsque l'on cherche à optimiser le profit alors que le niveau de production est fixé alors, on minimise les coûts relativement à la quantité de facteurs utilisée étant donné que la firme est assujettie aux prix du marché.

**Définition 3.16** Pour tout vecteur de prix de facteurs  $w^t = (w_1^t, \dots, w_m^t) \in \mathbb{R}_+^m$  et, tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ , l'application  $C_{\alpha,\beta}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  définie par :

$$C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) = \begin{cases} \inf_x \left\{ w^t \cdot^\alpha x^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\} & \text{si } L^t(y^t) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.18)$$

est la pseudo-fonction de coût CES-CET.

Cette fonction peut être associée à certaines propriétés.

**Proposition 3.17** Pour toute correspondance en inputs satisfaisant L1-L5, la pseudo fonction de coûts CES-CET vérifie les propriétés suivantes :

$C_{\alpha,\beta}1$  : Pour tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  on a,  $C_{\alpha,\beta}^t(w^t, 0) = 0$ .

$C_{\alpha,\beta}2$  : Si  $(w^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  alors,  $C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) > 0$ .

$C_{\alpha,\beta}3$  : Pour tout  $(w^t, y^t), (\tilde{w}^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $w^t \geq \tilde{w}^t$  on a,  $C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \geq C_{\alpha,\beta}^t(\tilde{w}^t, y^t)$ .

$C_{\alpha,\beta}4$  : Pour tout  $(w^t, y^t), (w^t, \tilde{y}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tels que  $y^t \geq \tilde{y}^t$  on a,  $C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \geq C_{\alpha,\beta}^t(w^t, \tilde{y}^t)$ .

$C_{\alpha,\beta}5$  : Quel que soit  $\lambda^t > 0$  alors,  $C_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t \cdot^\alpha w^t, y^t) = \lambda^t \cdot C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t)$ .

$C_{\alpha,\beta}6$  : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, pour tout  $\lambda^t > 0$  on a,

$$C_{\alpha,\beta}^t(w^t, \lambda^t \cdot^\alpha y^t) = \lambda^t \cdot C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t).$$

*Preuves :*

$(C_{\alpha,\beta})$  à  $(C_{\alpha,\beta}4)$  découlent immédiatement de la définition de la pseudo-fonction de coût CES-CET  $\square$ .

$(C_{\alpha,\beta}5)$  Pour tout  $\lambda^t > 0$ , on a  $C_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t \cdot^\alpha w^t, y^t) = \inf_x \left\{ \left( \lambda^t \cdot^\alpha w^t \right) \cdot^\alpha x^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . En

factorisant par  $\lambda^t$  on obtient,  $C_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t \cdot w^t, y^t) = \lambda^t \cdot \inf_x \left\{ w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . De ce fait,  $C_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t \cdot w^t, y^t) = \lambda^t \cdot C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \equiv \lambda^t \cdot C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \quad \square$ .

( $C_{\alpha,\beta}6$ ) Supposons que le processus de production satisfait des rendements d'échelle constants. Dans ce cas, Pour tout  $\lambda^t > 0$  et pour tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  on a  $(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) \in T^t$ . Ainsi,  $C_{\alpha,\beta}^t(w^t, \lambda^t \cdot y^t) = \inf_x \left\{ w^t \cdot \left( \lambda^t \cdot x^t \right) : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . La factorisation par  $\lambda^t$  donne l'expression suivante  $C_{\alpha,\beta}^t(w^t, \lambda^t \cdot y^t) = \lambda^t \cdot \inf_x \left\{ w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Ainsi,  $C_{\alpha,\beta}^t(w^t, \lambda^t \cdot y^t) = \lambda^t \cdot C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \equiv \lambda^t \cdot C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \quad \square$ .

La première propriété est relative à l'absence de charges fixes tandis que la deuxième fait référence à l'absence de repas gratuits. Les axiomes ( $C_{\alpha,\beta}3$ ) et ( $C_{\alpha,\beta}4$ ) signifient que la fonction de coût est monotone respectivement par rapport au prix des inputs et par rapport aux outputs. Selon ( $C_{\alpha,\beta}5$ ), la fonction est semi-homogène de degré (1) par rapport au prix des intrants. Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, elle est semi-homogène de degré 1.

**Proposition 3.18** Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tel que  $s = \alpha \in \mathbb{R}_{++}$  et  $y^t = \bar{y}^t$ , la pseudo-fonction de profit CES-CET devient :

$$\max \Pi_{\alpha,\beta}^t(w^t, p^t) \equiv \min C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t), \quad (3.19)$$

où  $\bar{y}^t$  est un vecteur d'outputs fixe.

*Preuve :* Pour  $y^t = \bar{y}^t$ , on a  $\Pi_{\alpha,\beta}^t(w^t, p^t) = \max_{x, \bar{y}} \left\{ \varphi_\beta^{-1} \left( \varphi_\alpha \left( p^t \cdot \bar{y}^t \right) - \varphi_\alpha \left( w^t \cdot x^t \right) \right) : (x^t, \bar{y}^t) \in T^t \right\}$ . Puisque  $\bar{y}^t$  ne varie pas alors,  $\Pi_{\alpha,\beta}^t(w^t, p^t) \equiv \min_x \left\{ w^t \cdot x^t : (x, y) \in T^t \right\} \quad \square$ .

Notons que lorsque  $\alpha = 1 - \sigma$  tel que  $\sigma \neq 1$ , où  $\sigma$  représente l'élasticité de substitution positive alors, nous retrouvons la fonction de coût CES (Constant Elasticity of Substitution) définie par McFadden (1978). Par ailleurs, lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  alors, la pseudo fonction de coût CES-CET devient une fonction de coût moyen géométrique tel que pour tout facteur  $i \in [m]$  et en appliquant la règle

de l'Hôpital, nous avons :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha, \beta}^t(w^t, y^t) = \left( \prod_{i \in [m]} w_i^t x_i^t \right)^{\frac{1}{m}}.$$

### 3.1.3 Pseudo-Fonction de Revenu CES-CET

La fonction de revenu permet une maximisation des recettes par rapport à la quantité produite lorsque les prix sont fixés par le marché. Cette fonction est un cas particulier de la fonction de profit. En effet, optimiser cette dernière pour une quantité fixe d'intrants amène à maximiser uniquement le revenu.

**Définition 3.19** Pour tout vecteur de prix des outputs  $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t) \in \mathbb{R}_+^n$  et, tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $\beta \in \mathbb{R}_{++}$ , l'application  $R_{\alpha, \beta}^t : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$  définie par :

$$R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t) = \begin{cases} \sup_y \left\{ p^t \cdot^\beta y^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\} & \text{si } P^t(x^t) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.20)$$

est la pseudo fonction de revenu CES-CET.

Cette définition nous permet d'établir les propriétés relatives à la pseudo fonction de revenu CES-CET.

**Proposition 3.20** Pour toute correspondance en outputs  $P^t(x^t)$  satisfaisant P1-P5, la pseudo fonction de revenu CES-CET vérifie les propriétés suivantes :

$R_{\alpha, \beta}1$  : Pour tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  on a,  $R_{\alpha, \beta}^t(p^t, 0) = 0$ .

$R_{\alpha, \beta}2$  : Si  $(p^t, x^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  alors,  $R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t) > 0$ .

$R_{\alpha, \beta}3$  : Quel que soit  $(p^t, x^t), (\tilde{p}^t, \tilde{x}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tel que  $p^t \geq \tilde{p}^t$  on a,  $R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t) \geq R_{\alpha, \beta}^t(\tilde{p}^t, \tilde{x}^t)$ .

$R_{\alpha, \beta}4$  : Pour tout  $(p^t, x^t), (p^t, \tilde{x}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $x^t \geq \tilde{x}^t$  on a,  $R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t) \geq R_{\alpha, \beta}^t(p^t, \tilde{x}^t)$ .

$R_{\alpha, \beta}5$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a  $R_{\alpha, \beta}^t(\lambda^t \cdot^\beta p^t, x^t) = \lambda^t \cdot R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t)$ .

$R_{\alpha, \beta}6$  : Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a  $R_{\alpha, \beta}^t(p^t, \lambda^t \cdot^\beta x^t) = \lambda^t \cdot R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t)$ , sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants.

*Preuves :*

$(R_{\alpha,\beta}1)$  à  $(R_{\alpha,\beta}4)$  sont les conséquences directes de la définition de la pseudo fonction de revenu CES-CET.

$(R_{\alpha,\beta}5)$  Pour tout  $\lambda^t > 0$  on a  $R_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t \cdot p^t, x^t) = \sup_y \left\{ \left( \lambda^t \cdot p^t \right)^\beta \cdot y^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . En factorisant par  $\lambda^t$ , nous avons  $R_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t \cdot p^t, x^t) = \lambda^t \cdot \sup_y \left\{ p^t \cdot y^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Ainsi,  $R_{\alpha,\beta}^t(\lambda^t \cdot p^t, x^t) = \lambda^t \cdot R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t) \equiv \lambda^t \cdot R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t) \quad \square$ .

$(R_{\alpha,\beta}6)$  Lorsque la technologie de production officie sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants alors, pour tout  $\lambda^t > 0$  et tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  on a,  $(\lambda^t x^t, \lambda^t y^t) \in T^t$ . De ce fait,  $R_{\alpha,\beta}^t(p^t, \lambda^t \cdot x^t) = \sup_y \left\{ p^t \cdot \left( \lambda^t \cdot y^t \right) : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Une factorisation par  $\lambda^t$  permet d'obtenir  $R_{\alpha,\beta}^t(p^t, \lambda^t \cdot x^t) = \lambda^t \cdot \sup_y \left\{ p^t \cdot y^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\}$ . Par conséquent,  $R_{\alpha,\beta}^t(p^t, \lambda^t \cdot x^t) = \lambda^t \cdot R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t) \equiv \lambda^t \cdot R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t) \quad \square$ .

L'axiome  $(R_{\alpha,\beta}1)$  signifie qu'il n'y a pas de repas gratuit tandis que  $(R_{\alpha,\beta}2)$  stipule que toute utilisation effective d'inputs engendre des revenus. Les propriétés  $(R_{\alpha,\beta}3)$  et  $(R_{\alpha,\beta}4)$  sont relatives à la monotonicité de la fonction respectivement par rapport au prix des outputs et par rapport aux facteurs. La fonction est semi-homogène de degré (1) par rapport aux prix  $(R_{\alpha,\beta}5)$ . Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, elle est semi-homogène de degré (1) relativement aux facteurs.

**Proposition 3.21** Pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tel que  $s = \beta \in \mathbb{R}_{++}$  avec  $x^t = \bar{x}^t$ , la pseudo-fonction de profit CES-CET devient :

$$\max \Pi_{\alpha,\beta}^t(w^t, p^t) \equiv \max R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t), \quad (3.21)$$

où  $\bar{x}^t$  est un vecteur d'inputs fixe.

*Preuve :* Soit  $x^t = \bar{x}^t$  alors, la fonction de profit CES-CET peut s'écrire de la manière suivante :

$$\Pi_{(\alpha,\beta)}^t(w^t, p^t) = \max_{\bar{x}, y} \left\{ \varphi_\beta^{-1} \left( \varphi_\beta \left( p^t \cdot y^t \right) - \varphi_\beta \left( w^t \cdot \bar{x}^t \right) \right) : (\bar{x}^t, y^t) \in T^t \right\}. \text{ Sachant que } \bar{x}^t \text{ ne varie pas alors, on a } \Pi_{(\alpha,\beta)}^t(w^t, p^t) \equiv \max_y \left\{ p^t \cdot y^t : (x^t, y^t) \in T^t \right\} \quad \square.$$

Remarquons que lorsque  $\beta \rightarrow 0$  alors, pour tout extrant  $r \in [n]$  et en appliquant la règle de l'Hôpital, la pseudo-fonction de revenu CES-CET a pour limite une fonction de revenu moyen géométrique tel que :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t) = \left( \prod_{r \in [n]} p_r^t y_r^t \right)^{\frac{1}{n}}.$$

## 3.2 Dualité

Shephard (1953, 1970) introduit la relation de dualité qui existe entre la mesure de distance orientée en input et la fonction de coût. Ce concept consiste à caractériser la correspondance en inputs à partir de la fonction coût. Sachant que les fonctions de distance donnent une caractérisation complète de l'ensemble de production alors, celles-ci peuvent être exprimées grâce à la fonction de coût et réciproquement. McFadden (1978) étend cette analyse à la fonction de profit et, de revenu qui peuvent représenter le graphe de la technologie. De ce fait, nous présentons les formulations duales de la fonction de distance CES-CET mais également des fonctions de coût, de revenu et de profit. Par ailleurs, nous montrons que des fonctions de prix implicites peuvent être déduites des fonctions de distance duales. Enfin, ces expressions duales nous amènent à diverses notions d'efficiencie que nous proposons effectivement.

### 3.2.1 Formulations Duales

Chambers, Chung et Färe (1998) présentent la dualité entre la fonction de distance directionnelle orientée dans le graphe et la fonction de profit. Ils s'inspirent de l'analyse faite par McFadden (1978) qui établit cette relation entre la fonction de production et la fonction de profit. Notons qu'une relation duale existe entre les fonctions de distance et les fonctions de profit, de coût et de revenu si et seulement si, l'ensemble de production ou les correspondances en inputs et en outputs sont convexes.

La FDD CES-CET orientée dans le graphe et la pseudo fonction de profit CES-CET sont duales si et seulement si, la technologie de production  $T^t$  est convexe et donc, satisfait  $T1 - T5$ .

**Proposition 3.22** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et, tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  tel que pour  $\alpha = \beta = s \in$*

$\mathbb{R}_{++}$ , si  $T^t$  est convexe alors, la pseudo fonction de profit CES-CET duale est :

$$\Pi_s^t(w^t, p^t) = \sup_{(x,y)} \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \varphi_s \left( p^t \cdot^s y^t \right) - \varphi_s \left( w^t \cdot^s x^t \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varphi_s \left( D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \cdot \left( p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t \right) \right) \right) : D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) \geq 0 \right\} \quad (3.22)$$

et, la fonction de distance directionnelle CES-CET duale orientée dans le graphe est :

$$D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \inf_{(w,p) \geq 0} \left\{ \frac{\varphi_s^{-1} \left( \varphi_s \left( \Pi_s^t(w^t, p^t) \right) - \left( \varphi_s \left( p^t \cdot^s y^t \right) - \varphi_s \left( w^t \cdot^s x^t \right) \right) \right)}{p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t} : \right. \\ \left. p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t \neq 0 \right\}. \quad (3.23)$$

Pour tout  $(x_j^t, y_j^t) \in T^t$  avec  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $i \in [m]$  et  $r \in [n]$ , la FDD CES-CET duale orientée dans le graphe peut être détaillée de la manière suivante :

$$D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \inf \left\{ \frac{\left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t y_{j,r}^t)^s - \sum_{i \in [m]} (w_i^t x_{j,i}^t)^s - \left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t y_r^t)^s + \sum_{i \in [m]} (w_i^t x_i^t)^s \right) \right)^{1/s}}{p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t} : \right. \\ \left. p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t \neq 0 \right\}. \quad (3.24)$$

Usuellement, une normalisation peut être effectuée par rapport aux pondérations telle que  $p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t = 1$ .

Dans la lignée de Shephard (1953, 1970), nous pouvons proposer une relation duale entre la fonction de coût et la FDD CES-CET orientée en input si  $L^t(y^t)$  est convexe. Dans ce cas, la correspondance satisfait  $L1 - L6$ .

**Proposition 3.23** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $w^t \in \mathbb{R}_+^m$  tel que  $\alpha \leq 1$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ , la

*pseudo fonction de coût CES-CET duale est :*

$$C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) = \inf_x \left\{ \varphi_{\alpha}^{-1} \left( \varphi_{\alpha} \left( w^t \cdot^{\alpha} x^t \right) - \varphi_{\alpha} \left( D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \cdot \left( w^t \cdot^{\alpha} h^t \right) \right) \right) : \right. \\ \left. D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) \geq 0 \right\} \quad (3.25)$$

*et, la fonction de distance directionnelle CES-CET duale orientée en input est :*

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \inf_w \left\{ \frac{\varphi_{\alpha}^{-1} \left( \varphi_{\alpha} \left( w^t \cdot^{\alpha} x^t \right) - \varphi_{\alpha} \left( C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \right) \right)}{w^t \cdot^{\alpha} h^t} : w^t \cdot^{\alpha} h^t \neq 0 \right\}. \quad (3.26)$$

Pour toute unité de production  $(x_j^t, y_j^t) \in T^t$  avec  $j \in \mathcal{J}$  et, tout  $i \in [m]$ , la FDD CES-CET duale en input peut être écrite de la manière suivante :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \inf_w \left\{ \frac{\left( \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^{\alpha} \cdot (x_i^t)^{\alpha} - \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^{\alpha} \cdot (x_{j,i}^t)^{\alpha} \right)^{1/\alpha}}{\left( \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^{\alpha} \cdot (h_i^t)^{\alpha} \right)^{1/\alpha}} : \right. \\ \left. \left( \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^{\alpha} \cdot (h_i^t)^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \neq 0 \right\}. \quad (3.27)$$

Une normalisation des pondérations peut être réalisée telle que  $w^t \cdot^{\alpha} h^t = 1$ .

La fonction de revenu est quant à elle, duale à la FDD CES-CET orientée en output si  $P^t(x^t)$  est convexe. Dans ce cas, la correspondance satisfait  $P1 - P6$ .

**Proposition 3.24** *Quel que soit  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $p^t \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $\beta \geq 1$  tel que  $\beta \in \mathbb{R}_{++}$ , la pseudo fonction de revenu CES-CET duale est :*

$$R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t) = \sup_y \left\{ \varphi_{\beta}^{-1} \left( \varphi_{\beta} \left( p^t \cdot^{\beta} y^t \right) + \varphi_{\beta} \left( D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) \cdot \left( p^t \cdot^{\beta} k^t \right) \right) \right) : \right. \\ \left. D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) \geq 0 \right\} \quad (3.28)$$

et, la fonction de distance directionnelle CES-CET duale orientée en output est :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) = \inf_p \left\{ \frac{\varphi_{\beta}^{-1} \left( \varphi_{\beta} \left( R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t) \right) - \varphi_{\beta} \left( p^t \cdot^{\beta} y^t \right) \right)}{p^t \cdot^{\beta} k^t} : p^t \cdot^{\beta} k^t \neq 0 \right\}. \quad (3.29)$$

De manière détaillée, pour toute unité de production  $(x_j^t, y_j^t) \in T^t$  tel que  $j \in \mathcal{J}$  et, tout  $r \in [n]$ , la FDD CES-CET duale en output peut être caractérisée par :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) = \inf_p \left\{ \frac{\left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^{\beta} \cdot (y_{j,r}^t)^{\beta} - \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^{\beta} \cdot (y_r^t)^{\beta} \right)^{1/\beta}}{\left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^{\beta} \cdot (k_r^t)^{\beta} \right)^{1/\beta}} : \left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^{\beta} \cdot (k_r^t)^{\beta} \right)^{1/\beta} \neq 0 \right\}. \quad (3.30)$$

Les pondérations peuvent être normalisées tel que  $p^t \cdot^{\beta} k^t = 1$ .

### 3.2.2 Fonctions de Prix Implicites Non-linéaires

La théorie de la dualité permet également de déterminer les fonctions de prix ajustés. Ces prix implicites (ou ajustés) correspondent aux prix d'équilibre des facteurs et des produits si le marché est parfaitement concurrentiel (prix relatifs à l'optimum de Pareto). Ces fonctions sont obtenues grâce au *Lemme dual de Shephard* et au théorème de l'enveloppe. La formulation duale des FDD CES-CET permet de déduire les équations des prix implicites. Les fonctions de coût, de revenu et de profit donnent quant à elles, la possibilité de déterminer les fonctions de demande et d'offre conditionnelles grâce au *Lemme de Shephard*.

**Définition 3.25** Pour tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  tel que  $\alpha = \beta = s \in \mathbb{R}_{++}$ , l'application  $(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t) : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^{m+n} \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{m+n}}$  définie par :

$$(\tilde{w}^t, \tilde{p}^t)(x^t, y^t; h^t, k^t) = \arg \max_{x, y} \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \varphi_s \left( \Pi_s^t(w^t, p^t) \right) - \left( \varphi_s \left( p^t \cdot^s y^t \right) - \varphi_s \left( w^t \cdot^s x^t \right) \right) \right) : p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t = 1 \right\} \quad (3.31)$$



est la correspondance des prix ajustés.

Remarquons que la FDD CES-CET orientée soit en input soit en output, peut également fournir des fonctions de prix implicites.

**Définition 3.26** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}^2$ ,

(a) lorsque  $g^t = (h^t, 0)$  alors, l'application  $(\tilde{w}^t)^\alpha : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m}$  définie par :

$$(\tilde{w}^t)^\alpha(x^t, y^t; h^t, 0) = \arg \min_w \left\{ \varphi_\alpha^{-1} \left( \varphi_\alpha \left( w^t \cdot^\alpha x^t \right) - \varphi_\alpha \left( C_{\alpha, \beta}^t(w^t, y^t) \right) \right) : w^t \cdot^\alpha h^t = 1 \right\} \quad (3.32)$$

est la correspondance des prix ajustée en inputs.

(b) lorsque  $g^t = (0, k^t)$  alors, l'application  $(\tilde{p}^t)^\beta : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n}$  définie par :

$$(\tilde{p}^t)^\beta(x^t, y^t; 0, k^t) = \arg \min_p \left\{ \varphi_\beta^{-1} \left( \varphi_\beta \left( R_{\alpha, \beta}^t(p^t, x^t) \right) - \varphi_\beta \left( p^t \cdot^\beta y^t \right) \right) : p^t \cdot^\beta k^t = 1 \right\} \quad (3.33)$$

est la correspondance des prix implicites en outputs.

Nous pouvons obtenir les fonctions d'offre et de demande conditionnelles grâce au *Lemme de Shephard*. Par ailleurs, les fonctions de prix ajustés sont fournies par le biais du théorème de l'enveloppe et du *Lemme dual de Shephard*.

**Proposition 3.27**

(i) Aux points où la pseudo fonction de profit CES-CET est différentiable par rapport aux prix  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et, si elle admet un minimum  $\tilde{x}^t(w^t, y^t; h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^m$  et un maximum  $\tilde{y}^t(x^t, p^t; h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^n$  alors, selon le *Lemme de Shephard* :

$$\nabla_{w^s} [\Pi_s^t(w^t, p^t)]^s = [\tilde{x}^t(w^t, y^t; h^t, k^t)]^s, \quad (3.34)$$

$$\nabla_{p^s} [\Pi_s^t(w^t, p^t)]^s = [\tilde{y}^t(x^t, p^t; h^t, k^t)]^s, \quad (3.35)$$

sont respectivement les fonctions de demande de facteur et d'offre de produit conditionnelles.

(ii) Aux points où la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe est différentiable par rapport aux inputs et aux outputs tel que  $\alpha = \beta = s \in \mathbb{R}_{++}$  alors, selon le

*Lemme dual de Shephard :*

$$\nabla_{x^s} [D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t)]^s = [\tilde{w}^t(x^t, y^t; h^t, k^t)]^s, \quad (3.36)$$

$$\nabla_{y^s} [D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t)]^s = - [\tilde{p}^t(x^t, y^t; h^t, k^t)]^s, \quad (3.37)$$

*sont respectivement les fonctions de prix implicites des facteurs et des produits.*

Notons que nous pouvons fournir ces fonctions dans le cadre d'une analyse orientée soit en input soit en output.

### Corollaire 3.28

(iii) *Aux points où les pseudo-fonctions de coût et de revenu CES-CET sont différentiables par rapport aux prix et, si elles admettent respectivement un minimum  $\tilde{x}^t(w^t, y^t; h^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$  et un maximum  $\tilde{y}^t(x^t, p^t; 0, k^t) \in \mathbb{R}_+^n$  alors, selon le Lemme de Shephard :*

$$\nabla_{w^\alpha} [C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t)]^\alpha = [\tilde{x}^t(w^t, y^t; h^t, 0)]^\alpha, \quad (3.38)$$

$$\nabla_{p^\beta} [R_{\alpha,\beta}^t(p^t, x^t)]^\beta = [\tilde{y}^t(x^t, p^t; 0, k^t)]^\beta, \quad (3.39)$$

*sont respectivement les fonctions de demande de facteurs et d'offre de produits conditionnelles.*

(iv) *Aux points où les fonctions de distance directionnelle CES-CET orientées en input et en output sont différentiables respectivement par rapport aux intrants et par rapport aux extrants alors, selon le Lemme dual de Shephard :*

$$\nabla_{x^\alpha} [D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0)]^\alpha = [\tilde{w}^t(x^t, y^t; h^t, 0)]^\alpha, \quad (3.40)$$

$$\nabla_{y^\beta} [D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t)]^\beta = - [\tilde{p}^t(x^t, y^t; 0, k^t)]^\beta, \quad (3.41)$$

*sont les fonctions de prix implicites respectifs des facteurs et des produits.*

Nous pouvons noter que les fonctions de prix ajustés présentées dans cette sous-section sont non-linéaires. Nous avons pu obtenir ces résultats en appliquant le théorème de séparation des hyperplans puisque nous supposons la convexité des ensembles de production. Cependant, en présence de prix non-linéaires, nous pouvons en déduire que la relation existant entre les coûts (reve-

nus ou bénéfiques) et la quantité produite n'est pas constante. En ce sens, on peut supposer que la firme fait face à une tarification non-linéaire que ce soit en interne ou en externe.

### 3.2.3 Notions d'Efficienne

Les mesures de distance permettent d'évaluer l'écart entre les observations et les frontières efficients. De ce fait, la valeur de celles-ci est une appréciation de l'efficienne technique. Par ailleurs, il est également possible d'obtenir les efficiennes économique et allocative grâce aux fonctions de distance.

Chambers et al. (1998) présentent la notion d'efficienne de Nerlove qui est équivalente à l'efficienne de profit. Celle-ci est représentée par la différence entre le profit maximal réalisable et le profit observé. Elle est non-négative telle que l'équation :

$$PE_s^t = \frac{\varphi_s^{-1} \left( \varphi_s \left( \Pi_s^t(w^t, p^t) \right) - \left( \varphi_s \left( p^t \cdot^s y^t \right) - \varphi_s \left( w^t \cdot^s x^t \right) \right) \right)}{\varphi_s^{-1} \left( \varphi_s \left( w^t \cdot^s h^t \right) + \varphi_s \left( p^t \cdot^s k^t \right) \right)} \quad (3.42)$$

représente l'efficacité de profit CES-CET.

Soit l'efficienne de coût qui est caractérisée par la différence entre les coûts réellement supportés et les coûts minimaux réalisables. Dans ce cas, sa valeur est non-négative et, la fonction :

$$CE_{\alpha,\beta}^t = \frac{\varphi_\alpha^{-1} \left( \varphi_\alpha \left( w^t \cdot^\alpha x^t \right) - \varphi_\alpha \left( C_{\alpha,\beta}^t(w^t, y^t) \right) \right)}{w^t \cdot^\alpha h^t} \quad (3.43)$$

définit l'efficacité de coût CES-CET.

L'efficienne de revenu correspond à l'écart entre le revenu maximal réalisable à l'optimum et le revenu observé. Cette mesure est également non-négative de sorte que la formulation :

$$RE_{\alpha,\beta}^t = \frac{\varphi_\beta^{-1} \left( \varphi_\beta \left( R^t(p^t, x^t) \right) - \varphi_\beta \left( p^t \cdot^\beta y^t \right) \right)}{p^t \cdot^\beta k^t} \quad (3.44)$$

représente la mesure de l'efficacité de revenu CES-CET.

Les trois notions d'efficienne définies ci-dessus, sont relatives à l'efficienne économique (OE).

Lorsque celle-ci est atteinte, l'entreprise est à la fois efficace techniquement (dans son processus de production) et allocativement (dans la répartition de ses ressources). En effet, l'efficacité de coût, de revenu et de profit sont respectivement l'efficienne économique dans une orientation en input, en output et dans le graphe.

L'efficacité technique est mesurée par les fonctions de distance elles-mêmes. Ainsi, on peut établir que :

$$TE_{\alpha,\beta}^t = D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) \quad (3.45)$$

est l'efficacité technique CES-CET selon la direction  $g^t$ .

On remarquera que  $g^t \in \{(h^t, k^t); (h^t, 0); (0, k^t)\}$  désignent respectivement les orientations dans le graphe, en input et en output.

Comme mentionné précédemment, l'efficacité économique est composée à la fois de l'efficacité technique et de l'efficienne allocative. Ainsi, nous pouvons dire que dans le cadre d'une mesure de distance additive, on a l'efficienne allocative suivante :

$$AE_{\alpha,\beta}^t = OE_{\alpha,\beta}^t - TE_{\alpha,\beta}^t. \quad (3.46)$$

Lorsque l'étude est orientée dans le graphe,  $\alpha = \beta = s \in \mathbb{R}_{++}$ . Notons également que dans une analyse en input ou en output, cette expression de l'efficacité allocative devient respectivement  $AE_{\alpha,\beta}^t = OE_{\alpha,\beta}^t - TE_{\alpha,\beta}^t$  ou,  $AE_{\alpha,\beta}^t = OE_{\alpha,\beta}^t - TE_{\alpha,\beta}^t$ .

Enfin, remarquons que plus la valeur prise par les mesures d'efficienne présentées précédemment est proche de zéro, plus l'unité productive est efficiente.

## 4 Formalisation et Application

Ce chapitre a pour objectif de présenter une nouvelle mesure de l'efficienne ayant une structure à la fois additive et CES-CET. En effet, Färe et al. (1988) introduisent une nouvelle structure de la technologie basée sur les fonctions CES et CET. Dans ce cas, l'estimation des mesures additives, telle la fonction de distance directionnelle, semble laborieuse par la méthode de programmation linéaire. Ainsi, la fonction de distance directionnelle CES-CET est une alternative ce problème.

De ce fait, cette section est dédiée à la formalisation non-paramétrique de la mesure ainsi qu'à la mise en place d'un exemple démonstratif.

## 4.1 Cadre Non-Paramétrique

Nous introduisons dans un premier temps, la technologie de production CES-CET ainsi que ses correspondances en inputs et en outputs. Dans un second temps, nous présentons les programmes linéaires relatives à l'estimation de la fonction de distance CES-CET grâce à la méthode d'enveloppement des données.

### 4.1.1 Technologie CES-CET et Hypothèse de Convexité

Färe et al. (1988) introduisent une nouvelle technologie de référence sous l'hypothèse de rendements d'échelle variables. La particularité de celle-ci réside dans sa structure telle que la partie relative aux inputs est formulée suivant une fonction CES tandis que celle concernant les outputs est représentée par une fonction CET. Les auteurs présentent ce nouvel ensemble de production comme étant une généralisation des technologies proposées par Charnes et al. (1978), par de Banker et al. (1984) et, par Banker et Maindiratta (1986). Rappelons que pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$ , la technologie de production CES-CET est définie de la manière suivante :

$$T_{\alpha,\beta}^t = \left\{ (x^t, y^t) : x^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \cdot \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right), y^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \cdot \Phi_{\beta}(y_j^t) \right), \right. \\ \left. \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\}.$$

Remarquons que lorsque  $\alpha = \beta = 1$ , nous retrouvons la technologie DEA standard Banker et al. (1984). Par ailleurs, l'ensemble CES-CET tend vers la technologie multiplicative de type Cobb-Douglas introduite par Banker et Maindiratta (1986) lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  et  $\beta \rightarrow 0$ . Enfin, Andriamasy et al. (2017) démontrent que si  $\alpha \rightarrow \infty$  et  $\beta \rightarrow \infty$  alors, l'ensemble de production défini ci-dessus tend vers la technologie de production  $\mathbb{B}$ -convexe proposée par Briec et Horvath (2004, 2009). Les correspondances en intrants et en extrants de cette technologie de production sont respectivement :

$$L_{\alpha,\beta}^t(\bar{y}^t) = \left\{ (x^t, \bar{y}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \geq \Phi_\alpha^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\alpha(x_j^t) \right), \bar{y}^t \leq \Phi_\beta^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\beta(y_j^t) \right), \right. \\ \left. \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\},$$

$$P_{\alpha,\beta}^t(\bar{x}^t) = \left\{ (\bar{x}^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : \bar{x}^t \geq \Phi_\alpha^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\alpha(x_j^t) \right), y^t \leq \Phi_\beta^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\beta(y_j^t) \right), \right. \\ \left. \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\},$$

où  $\bar{x}^t$  et  $\bar{y}^t$  sont respectivement des vecteurs fixes d'intrants et d'extrants.

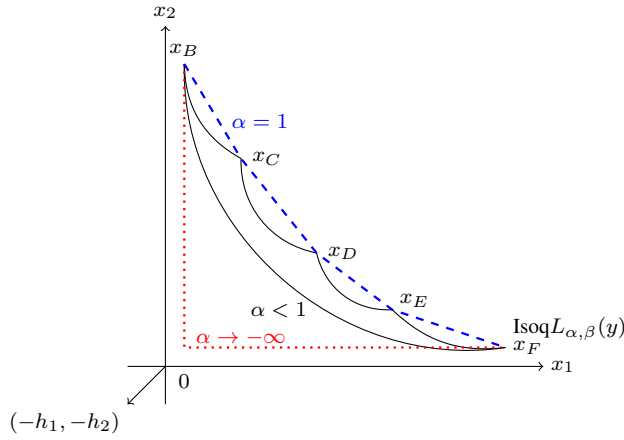


FIGURE 1 – Correspondance en inputs CES-CET pour  $\alpha \leq 1$ .

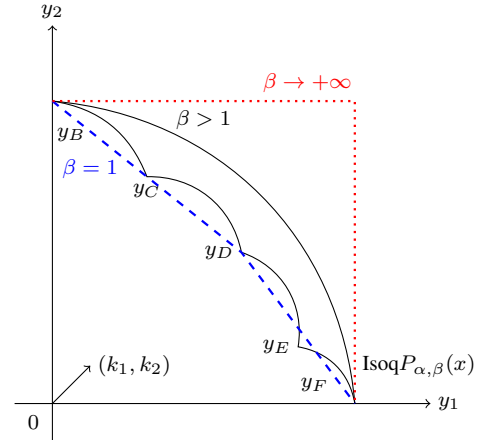


FIGURE 2 – Correspondance en outputs CES-CET pour  $\beta \geq 1$ .

La Figure 1 décrit les différentes structures possibles de la correspondance en inputs lorsque la valeur du paramètre  $\alpha$  est inférieure ou égale à 1. Nous pouvons constater que lorsque  $\alpha = 1$ , nous retrouvons la technologie DEA linéaire par morceaux de Banker et al. (1984) (frontière en pointillés bleus). Lorsque  $\alpha < 1$  alors, la frontière efficiente correspond à une courbe (lignes courbées noires) tandis que plus  $\alpha$  tend vers  $-\infty$  plus la frontière devient  $\mathbb{B}$ -convexe (pointillés rouges). Notons que si  $\alpha \geq 1$  alors, la figure correspondant au sous-ensemble des inputs, devient similaire

à celle de la correspondance en outputs lorsque  $\beta \geq 1$  (Figure 2).

La Figure 2 présente quant à elle, les différentes structures de la frontière efficiente en outputs lorsque  $\beta \geq 1$ . Si  $\beta = 1$  alors, la correspondance des extrants devient linéaire par morceaux et s'identifie à celle Banker et al. (1984) (pointillés bleus). Cependant, si  $\beta > 1$  alors, la frontière devient une courbe (lignes pleines noires) et plus le paramètre tend vers  $+\infty$  plus la frontière de la correspondance tend vers une frontière  $\mathbb{B}$ -convexe (pointillés rouges). Remarquons également que lorsque  $\beta \leq 1$ , nous avons une correspondance en outputs qui est similaire au sous-ensemble des intrants lorsque  $\alpha \leq 1$  (Figure 1).

Notons que l'ensemble de production CES-CET satisfait les axiomes T1-T4 (Boussemart et al. (2009), Ravelojaona (2019)).

**Proposition 3.29** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$ , la technologie de production CES-CET  $T_{\alpha, \beta}^t$  satisfait une hypothèse de convexité dans certains cas :*

- (i) *si  $\alpha = \beta = 1$  alors, la technologie devient un ensemble de production linéaire par morceaux (Banker et al.(1984)) et, est convexe,*
- (ii) *pour  $\alpha = \beta = s$  tel que  $(\alpha, \beta) > 1$ , la technologie est  $\Phi_{\alpha, \beta}$ -convexe (Ben-Tal (1977) et Andriamasy et al. (2017))<sup>1</sup>.*

*Preuves :*

- (i) Pour  $\alpha = \beta = 1$  alors, la technologie de production CES-CET devient  $T_{\alpha, \beta}^t = \left\{ (x^t, y^t) : x^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t x_j^t, y^t \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t y_j^t, \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\}$ .
- (ii) Supposons que  $\{(x^t, y^t), (u^t, v^t)\} \in T_{\alpha, \beta}^t$  et, qu'il existe  $\theta^t \in \mathbb{R}_+^s$  et  $\lambda^t \in \mathbb{R}_+^s$  avec  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t = 1$  tels que  $\left\{ x^t \geq \Phi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_s(x_j^t) \right), y^t \leq \Phi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_s(y_j^t) \right) \right\}$  et  $\left\{ u^t \geq \Phi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t \Phi_s(x_j^t) \right), v^t \leq \Phi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t \Phi_s(y_j^t) \right) \right\}$ . Ainsi, on a  $\left\{ \Phi_s(x^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_s(x_j^t), \Phi_s(y^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_s(y_j^t) \right\}$  et,  $\left\{ \Phi_s(u^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t \Phi_s(x_j^t), \Phi_s(v^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t \Phi_s(y_j^t) \right\}$ . De ce fait, quel que soit  $\mu^t \in [0, 1]$  on a,  $\left\{ \mu^t \Phi_s(x^t) + (1 - \mu^t) \Phi_s(u^t) \geq \mu^t \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_s(x_j^t) + (1 - \mu^t) \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t \Phi_s(x_j^t), \mu^t \Phi_s(y^t) + (1 - \mu^t) \Phi_s(v^t) \leq \mu^t \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_s(y_j^t) + (1 - \mu^t) \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t \Phi_s(y_j^t) \right\}$  et  $\left\{ \mu^t \Phi_s(x^t) + (1 - \mu^t) \Phi_s(u^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} (\mu^t \theta_j^t + (1 - \mu^t) \lambda_j^t) \Phi_s(x_j^t), \mu^t \Phi_s(y^t) + (1 - \mu^t) \Phi_s(v^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} (\mu^t \theta_j^t + (1 - \mu^t) \lambda_j^t) \Phi_s(y_j^t) \right\}$ .

---

1. Ben-Tal (1977) présente cette convexité particulière dans un cadre généralisé tandis que Andriamasy et al.(2017) analysent les implications de celle-ci dans le cadre des technologies de production DEA

$\sum_{j \in \mathcal{J}} (\mu^t \theta_j^t + (1 - \mu^t) \lambda_j^t) \Phi_s(y_j^t) \Big\}$ . Remarquons que nous avons,  $\sum_{j \in \mathcal{J}} (\mu^t \theta_j^t + (1 - \mu^t) \lambda_j^t) = \mu^t \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t + (1 - \mu^t) \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^t = \mu^t + (1 - \mu^t) = 1$ . D'où, les deux expressions précédentes deviennent  $\mu^t \Phi_s(x^t, -y^t) + (1 - \mu^t) \Phi_s(u^t, -v^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} (\mu^t \theta_j^t + (1 - \mu^t) \lambda_j^t) \Phi_s(x_j^t, y_j^t)$  et,  $\Phi_s^{-1} \left( \mu^t \Phi_s(x^t, -y^t) + (1 - \mu^t) \Phi_s(u^t, -v^t) \right) \geq \Phi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} (\mu^t \theta_j^t + (1 - \mu^t) \lambda_j^t) \Phi_s(x_j^t, y_j^t) \right)$ . Par conséquent,  $\mu^t(x^t, -y^t) \overset{s}{+} (1 - \mu^t)(u^t, v^t) \in T_{\alpha, \beta}^t$  et l'on peut dire que la technologie est  $\Phi_{\alpha, \beta}$ -convexe ou  $\Phi_s$ -convexe  $\square$ .

Nous pouvons également définir l'enveloppe  $\Phi_s$ -convexe relative à cette technologie tel pour tout  $j \in \mathcal{J}$  et tout ensemble d'observations  $A^t = \{(x_1^t, y_1^t), \dots, (x_j^t, y_j^t)\} = \{z_1^t, \dots, z_j^t\} \subset \mathbb{R}_+^{m+n}$ , celle-ci est définie par :

$$Co^{\varphi_s, t}(A^t) = \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \varphi_s(\theta_j^t) \Phi_s(z_j^t) \right) : \varphi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \varphi_s(\theta_j^t) \right) = 1, \theta \geq 0 \right\}.$$

Andriamasy et al. (2017) remarquent que cette enveloppe convexe ne correspond pas exactement à la structure de l'ensemble de production CES-CET. En ce sens, ils introduisent l'enveloppe convexe mixte présentée de la manière suivante :

$$Co_M^{\varphi_s, t}(A^t) = \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_s(z_j^t) \right) : \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1, \theta \geq 0 \right\}.$$

#### 4.1.2 Estimation Primale

Dans cette sous-section, nous proposons l'estimation non-paramétrique de la FDD CES-CET. En effet, nous appliquons la méthode DEA qui consiste à évaluer grâce à un programme linéaire, les scores d'efficacité des observations.

Rappelons que pour tout  $g^t = (h^t, k^t)$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe est définie de la manière suivante :

$$D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; g^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \left( x^t \overset{\alpha}{-} \delta^t h^t, y^t \overset{\beta}{+} \delta^t k^t \right) \in T^t \right\}.$$

En intégrant cette mesure à la technologie CES-CET de Färe et al. (1988), pour toute observa-



tion  $j \in \mathcal{J}$  tel que  $T^t = T_{\alpha,\beta}^t$ , nous avons :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x^t - \delta^t h^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_j^t)^\alpha \right)^{1/\alpha}, \right. \\ \left. y^t + \delta^t k^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_j^t)^\beta \right)^{1/\beta}, \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\}. \quad (3.47)$$

Pour tout input  $i \in [m]$  et tout output  $r \in [n]$  avec  $j \in \mathcal{J}$  observations, le programme linéaire relatif à cette mesure est donc :

$$\begin{aligned} D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) &= \max \delta^t &= \max \delta^t \\ \text{s.c.} \quad & x_i^t - \delta^t h_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^\alpha \right)^{1/\alpha} & (x_i^t)^\alpha - (\delta^t h_i^t)^\alpha \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^\alpha \\ & y_r^t + \delta^t k_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^\beta \right)^{1/\beta} & (y_r^t)^\beta + (\delta^t k_r^t)^\beta \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^\beta \\ & \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 & \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \\ & \delta^t, \theta^t \geq 0 & \delta^t, \theta^t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nous pouvons remarquer que cette optimisation est non-linéaire par rapport à la variable  $\delta^t$ . Par ailleurs, substituer celle-ci par une autre variable afin d'obtenir un programme linéaire est impossible puisque les exposants relatifs aux intrants et aux extrants peuvent prendre des valeurs différentes. Néanmoins, si les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  prennent les mêmes valeurs alors, pour tout  $\alpha =$

$\beta = s \in \mathbb{R}_{++}$  nous avons :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) &= \max \delta^t &= \max \delta^t \\
 \text{s.c.} \quad x_i^t - \delta^t h_i^t &\geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^s \right)^{1/s} & (x_i^t)^s - (\delta^t h_i^t)^s \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^s \\
 y_r^t + \delta^t k_r^t &\leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^s \right)^{1/s} & (y_r^t)^s + (\delta^t k_r^t)^s \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^s \\
 \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t &= 1 & \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \\
 \delta^t, \theta^t &\geq 0 & \delta^t, \theta^t \geq 0.
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $(\delta^t)^s$  par  $\Delta^t$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 [D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t)]^s &= \max \Delta^t \\
 \text{s.c.} \quad (x_i^t)^s - \Delta^t (h_i^t)^s &\geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^s \\
 (y_r^t)^s + \Delta^t (k_r^t)^s &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^s \\
 \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t &= 1 \\
 \Delta^t, \theta^t &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Il est évident que le programme (3.49) est linéaire relativement à  $\Delta^t$ . Ainsi, l'évaluation de la mesure par la méthode de programmation linéaire est possible lorsque  $\alpha = \beta = s$ .

Si nous nous intéressons à l'analyse orientée en input tel que  $g^t = (h^t, 0)$  alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$  et  $\beta \in \mathbb{R}_{++}$ , le programme (3.48) devient :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) &= \max \delta^t &= \max \delta^t \\
 \text{s.c.} \quad x_i^t - \delta^t h_i^t &\geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^\alpha \right)^{1/\alpha} & (x_i^t)^\alpha - (\delta^t h_i^t)^\alpha \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^\alpha \\
 y_r^t &\leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^\beta \right)^{1/\beta} & (y_r^t)^\beta \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^\beta \\
 \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t &= 1 & \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \\
 \delta^t, \theta^t &\geq 0 & \delta^t, \theta^t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Nous pouvons constater que la substitution de  $(\delta^t)^\alpha$  par  $\Delta_I^t$ , engendre un programme d'optimisation qui devient linéaire. Notons que  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent prendre des valeurs équivalentes ou différentes.

La spécification non-paramétrique de la fonction orientée en output est similaire à celle de la mesure en input tel que  $g^t = (0, k^t)$ . De ce fait, nous omettons de la présenter.

### 4.1.3 Programmation Duale

A présent, nous nous intéressons aux spécifications non-paramétriques des mesures duales. En effet, nous pouvons également étudier l'efficacité technique d'un point de vue dual par la méthode de programmation linéaire.

Rappelons que pour tout  $(w^t, p^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , la fonction de distance CES-CET duale orientée dans le graphe est la suivante :

$$D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \inf_{(w, p) \geq 0} \left\{ \frac{\varphi_s^{-1} \left( \varphi_s(\Pi_s^t(w^t, p^t)) - \left( \varphi_s(p^t \cdot^s y^t) - \varphi_s(w^t \cdot^s x^t) \right) \right)}{p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t} : p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t \neq 0 \right\}.$$

La normalisation des pondérations ainsi que la méthode DEA nous permettent de réécrire la fonction ci-dessus comme suit :

$$D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \inf_{(w, p) \geq 0} \left\{ \varphi_s^{-1} \left( \varphi_s(\Pi_s^t(w^t, p^t)) - \left( \varphi_s(p^t \cdot^s y^t) - \varphi_s(w^t \cdot^s x^t) \right) \right) \geq \delta^t : p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t = 1, w^t \geq 0, p^t \geq 0 \right\}.$$

Pour tout intrant  $i \in [m]$  et tout extrant  $r \in [n]$ , quelle que soit l'observation  $j \in \mathcal{J}$ , le

programme linéaire associé à la formulation ci-dessus est :

$$\begin{aligned}
 D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) &= \min \delta^t \\
 \text{s.c.} \quad &\varphi_s^{-1} \left( \varphi_s(\Pi_s^t(w^t, p^t)) - \left( \varphi_s(p^t \cdot^s y^t) - \varphi_s(w^t \cdot^s x^t) \right) \right) \geq \delta^t \\
 &p^t \cdot^s k^t + w^t \cdot^s h^t = 1 \\
 &w^t, p^t, \delta^t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ce programme peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t) &= \min \delta^t \\
 \text{s.c.} \quad &\left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^s (y_{j,r}^t)^s - \sum_{i \in [m]} (w_{j,i}^t)^s (x_{j,i}^t)^s \right) \\
 &\quad - \left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^s (y_r^t)^s - \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^s (x_i^t)^s \right) \geq (\delta^t)^s \quad \forall j \in \mathcal{J} \\
 &\left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^s (y_r^t)^s + \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^s (x_i^t)^s \right)^{1/s} = 1 \\
 &w^t, p^t, \delta^t \geq 0.
 \end{aligned}$$

En posant  $\Delta^t = (\delta^t)^s$ , nous obtenons un programme linéaire tel que :

$$\begin{aligned}
 [D_s^t(x^t, y^t; h^t, k^t)]^s &= \min \Delta^t \\
 \text{s.c.} \quad &\left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^s (y_{j,r}^t)^s - \sum_{i \in [m]} (w_{j,i}^t)^s (x_{j,i}^t)^s \right) \\
 &\quad - \left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^s (y_r^t)^s - \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^s (x_i^t)^s \right) \geq \Delta^t \quad \forall j \in \mathcal{J} \quad (3.51) \\
 &\left( \sum_{r \in [n]} (p_r^t)^s (y_r^t)^s + \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^s (x_i^t)^s \right)^{1/s} = 1 \\
 &w^t, p^t, \Delta^t \geq 0.
 \end{aligned}$$

La valeur de  $\delta^t$  est donc déduite de celle de  $\Delta^t$ .

En suivant le même raisonnement logique, nous pouvons obtenir le programme d'optimisation associé à une mesure orientée en input. De ce fait, le programme associé à la FDD CES-CET duale

en input lorsque  $g^t = (h^t, 0)$  est :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \min \delta^t \\
 \text{s.c} \quad & \varphi_{\alpha}^{-1} \left( \varphi_{\alpha} \left( w^t \cdot^{\alpha} x^t \right) - \varphi_{\alpha} (C_{\alpha,\beta}(w^t, y^t)) \right) \leq \delta^t \quad \forall j \in \mathcal{J} \\
 & w^t \cdot^{\beta} h^t = 1 \\
 & \delta^t, w^t \geq 0.
 \end{aligned}$$

De manière équivalente, nous pouvons exprimer ce programme comme suit :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \min \delta^t \\
 \text{s.c} \quad & \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^{\alpha} \cdot (x_i^t)^{\alpha} - \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^{\alpha} \cdot (x_{j,i}^t)^{\alpha} \leq (\delta^t)^{\alpha} \quad \forall j \in \mathcal{J} \\
 & \sum_{i \in [m]} (w_i^t)^{\alpha} \cdot (h_i^t)^{\alpha} = 1 \\
 & \delta^t, w^t \geq 0.
 \end{aligned}$$

En substituant  $(\delta^t)^{\alpha}$  par  $\Delta_j^t$ , nous pouvons en déduire la valeur de l'efficacité technique orientée en input.

Le programme linéaire associé à une estimation axée sur les extrants tel que  $g^t = (0, k^t)$  est similaire à celui proposé dans le cadre d'une analyse focalisée sur les intrants. Par conséquent, la spécification relative à la FDD CES-CET duale orientée en output est omise.

## 4.2 Exemple Numérique

Cette sous-section permet d'illustrer de manière empirique les apports théoriques présentés dans les sections précédentes. Tout d'abord, nous exposons le cadre d'analyse puis les résultats obtenus. Enfin, nous analysons ces derniers.

### 4.2.1 Cadre d'analyse

Dans cet exemple empirique, nous utilisons les données agricoles de 12 pays européens relatives à l'année 2008. Ces dernières proviennent de la base de données de l'Eurostat et sont présentées dans l'Annexe 1 de ces travaux. Nous disposons de deux intrants et de deux extrants.

Nous réalisons des analyses orientées successivement en input, en output et dans le graphe

tels que les vecteurs de direction sont respectivement  $g^t = (1, 0)$ ,  $g^t = (0, 1)$  et  $g^t = (1, 1)$ . Par ailleurs, nous savons que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  doivent également être choisis préalablement. Ainsi, puisque nous effectuons uniquement une illustration empirique, nous prenons des valeurs d'exemple de ceux-ci telles que :

$\alpha$	1/2	1	3/2
$\beta$	1/2	1	3/2

Dans cette section, nous analysons uniquement l'efficacité des unités de production d'un point de vue primal. Remarquons que la mesure CES-CET orientée dans le graphe ne peut être estimée de manière linéaire et non-paramétrique que lorsque  $\alpha = \beta$ .

#### 4.2.2 Résultats

Le tableau 3.1 relate les résultats obtenus lorsque les mesures sont axées successivement sur les intrants et les extrants, tel que  $\alpha \neq \beta$ . Le tableau 3.2 quant à lui, concerne les scores d'efficacité orientés successivement en input, en output et, dans le graphe. De ce fait, les paramètres ont des valeurs similaires tel que  $\alpha = \beta$ .

#### 4.2.3 Analyse

##### Tableau 3.1

Nous pouvons constater que quelles que soient les valeurs des paramètres, un pays efficace dans une orientation en input, a également un score nul selon une orientation en output. Notons que la France, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg et la Slovaquie (5 pays sur 12) sont les unités de production efficaces lorsque  $(\alpha, \beta) \in \{(1/2, 1), (1/2, 3/2)\}$ . La France, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg, la Slovaquie et le Royaume-Uni (6 pays sur 12) ont quant à eux, une mesure de performance nulle lorsque  $(\alpha, \beta) = (1, 3/2)$ . Nous remarquons également que 9 pays sur 12 (République Tchèque, Danemark, France, Lettonie, Lituanie, Luxembourg, Pays-Bas, Slovaquie, Royaume-Uni) sont efficaces lorsque les paramètres prennent les valeurs suivantes :

$\alpha$	1	3/2	3/2
$\beta$	1/2	1/2	1

	$\alpha = 1/2;$ $\beta = 1$	$\alpha = 1/2;$ $\beta = 3/2$	$\alpha = 1;$ $\beta = 1/2$	$\alpha = 1;$ $\beta = 3/2$	$\alpha = 3/2;$ $\beta = 1/2$	$\alpha = 3/2;$ $\beta = 1$
<b>Scores en inputs</b>						
<b>Rép. Tchèque</b>	49,61	103,14	0	595,09	0	0
<b>Danemark</b>	387,27	778,80	0	933,35	0	0
<b>Espagne</b>	1355,49	21,74	2645,03	4499,20	3775,24	4452,39
<b>France</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Lettonie</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Lituanie</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Luxembourg</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Pays-Bas</b>	36,60	83,31	0	123,33	0	0
<b>Slovaquie</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Finlande</b>	188,06	249,62	445,73	735,39	757,29	764,69
<b>Suède</b>	59,66	104,41	78,58	437,03	168,80	260,98
<b>Royaume Uni</b>	31,05	361,86	0	0	0	0
<b>Scores en outputs</b>						
<b>Rép. Tchèque</b>	379,81	1055,71	0	605,59	0	0
<b>Danemark</b>	727,42	1543,93	0	753,76	0	0
<b>Espagne</b>	2099,04	2775,72	554,23	2455,67	424,61	1698,07
<b>France</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Lettonie</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Lituanie</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Luxembourg</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Pays-Bas</b>	223,64	732,91	0	193,74	0	0
<b>Slovaquie</b>	0	0	0	0	0	0
<b>Finlande</b>	825,68	1351,42	100,29	714,45	81,67	318,64
<b>Suède</b>	459,21	1012,12	4,49	510,78	2,06	96,04
<b>Royaume Uni</b>	205,96	1195,82	0	0	0	0

TABLE 3.1 – Scores d'efficacité CES-CET en inputs et en outputs pour  $\alpha \neq \beta$ .

	$\alpha = \beta = 1/2$	$\alpha = \beta = 1$	$\alpha = \beta = 3/2$
<b>Scores en inputs</b>			
<b>République Tchèque</b>	0,12	135,96	553,96
<b>Danemark</b>	19,43	299,71	633,43
<b>Espagne</b>	547,93	3330,68	5043,40
<b>France</b>	0	0	0
<b>Lettonie</b>	0	0	0
<b>Lituanie</b>	0	0	0
<b>Luxembourg</b>	0	0	0
<b>Pays-Bas</b>	0	0	0
<b>Slovaquie</b>	0	0	0
<b>Finlande</b>	76,13	514,66	815,89
<b>Suède</b>	9,22	175,89	410,36
<b>Royaume Uni</b>	0	0	0
<b>Scores en outputs</b>			
<b>République Tchèque</b>	0,06	53,73	219,66
<b>Danemark</b>	36,25	294,11	489,63
<b>Espagne</b>	606,60	1909,05	2291,61
<b>France</b>	0	0	0
<b>Lettonie</b>	0	0	0
<b>Lituanie</b>	0	0	0
<b>Luxembourg</b>	0	0	0
<b>Pays-Bas</b>	0	0	0
<b>Slovaquie</b>	0	0	0
<b>Finlande</b>	180,80	456,61	556,31
<b>Suède</b>	19,78	188,27	325,32
<b>Royaume Uni</b>	0	0	0
<b>Scores dans le graphe</b>			
<b>République Tchèque</b>	0,02	38,51	191,91
<b>Danemark</b>	10,17	193,00	395,22
<b>Espagne</b>	221,92	1369,64	2002,11
<b>France</b>	0	0	0
<b>Lettonie</b>	0	0	0
<b>Lituanie</b>	0	0	0
<b>Luxembourg</b>	0	0	0
<b>Pays-Bas</b>	0	0	0
<b>Slovaquie</b>	0	0	0
<b>Finlande</b>	42,30	296,91	448,65
<b>Suède</b>	4,88	122,08	284,22
<b>Royaume Uni</b>	0	0	0

TABLE 3.2 – Scores d'efficacité CES-CET lorsque  $\alpha = \beta$ .



Nous pouvons observer que lorsque  $\alpha < \beta$ , les scores d'efficacité non-nuls axés sur les intrants sont inférieurs à ceux axés sur les extrants. Inversement, les mesures de performance non-nulles orientées en input sont supérieures à celles orientées en output lorsque  $\alpha > \beta$ .

### Tableau 3.2

Nous pouvons noter que quelles que soient les valeurs des paramètres pour  $\alpha = \beta$ , les pays ayant un score d'efficacité nul selon une orientation en input, est également performant suivant une orientation en output ou dans le graphe. Par ailleurs, le nombre des unités productives efficients reste constant soit 7 pays sur 12 (France, Lettonie, Lituanie, Luxembourg, Pays-Bas, Slovaquie, Royaume-Uni). Nous pouvons remarquer que lorsque la valeur des paramètres augmente, les scores de performance non-nuls s'accroissent également. Ainsi, les unités de production sont plus proche de la frontière efficiente lorsque  $\alpha = \beta = 0,5$ . De plus, d'un point de vue général, on peut faire une comparaison des scores d'efficacité non-nuls selon la valeur des paramètres. Ce recoupement est présenté dans le tableau ci-dessous :

$\alpha = \beta$	1/2	1      3/2
Scores orientés	graphe < inputs < outputs	graphe < outputs < inputs

On constate que lorsque  $\alpha = \beta = 1$ , nous retrouvons le modèle DEA standard sous l'hypothèse de rendements d'échelle variables ainsi que la fonction de distance directionnelle classique. De ce fait, comparativement aux résultats du tableau 3.1, on peut en déduire que pour certaines valeurs des paramètres, un plus grand nombre d'unités de production est efficient dans le cadre d'une mesure CES-CET et d'une technologie CES-CET que suivant une approche DEA traditionnelle et une fonction de distance directionnelle classique.

## Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'introduire une nouvelle mesure de distance additive non-linéaire. Celle-ci coïncide avec la fonction de distance directionnelle (Luenberger (1992b), Chambers et al. (1996)) sous certaines conditions. En effet, elle hérite de la structure de la mesure directionnelle et celle de la technologie de production CES-CET (Färe et al. (1988)). La théorie de la dualité amène à définir des pseudo fonctions de coût, de revenu et de profit non-linéaires. De plus, le

théorème de l'enveloppe conduit à l'obtention de fonctions de prix implicites, également non-linéaires. Ces dernières peuvent intervenir lorsque des tarifications non-linéaires sont effectuées (ou subies). Sous l'hypothèse d'un ensemble de production CES-CET, nous avons implanté les fonctions de distance directionnelle CES-CET dans le cadre de la méthode par enveloppement de données. Enfin, l'illustration empirique nous a permis de constater que la technologie de référence CES-CET implique un nombre plus important d'unités productives efficientes que la technologie de production DEA standard.

Cette nouvelle fonction de distance ouvre de nouvelles perspectives en terme d'analyse de l'efficacité. En effet, elle permet l'évaluation de la performance non-radiale dans le cadre d'une technologie de production non-linéaire grâce à la méthode de programmation linéaire. Nous verrons dans un autre chapitre de ces travaux que grâce à cette mesure de distance directionnelle CES-CET, nous pouvons étudier les effets des rendements d'échelle sur l'efficacité des firmes.

## Chapitre 4

# Des Mesures de Productivité Exponentielles et Logarithmiques

Les mesures de productivité permettent évaluer les variations de la performance d'une période par rapport à une autre. En effet, une firme peut gagner en productivité à travers le temps grâce à des ajustements techniques et/ou technologiques afin d'atteindre l'efficacité technique. Dans le premier chapitre, nous avons présenté différents indices et indicateurs tel que nous utilisons le terme "indice" pour désigner les mesures de productivité multiplicatives et, le terme "indicateur" pour qualifier celles ayant une structure additive.

Nous avons constaté dans le deuxième chapitre que les fonctions de distance exponentielle et népérienne sont équivalentes. Sachant que cette dernière est structurellement additive, nous présentons dans ce chapitre des indicateurs exponentiels et népériens en s'inspirant des travaux de Chambers et al. (1996b) et, Briec et Kerstens (2004). Ainsi, nous introduisons des indicateurs de Luenberger exponentiels (Chambers (1996b)). Cependant, ces mesures de productivité peuvent présenter des infaisabilités. De ce fait, nous définissons des indicateurs de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiels, dans la lignée de Briec et Kerstens (2004) afin de corriger ces problèmes. Grâce à l'équivalence entre la mesure de distance exponentielle et la fonction de distance népérienne, nous montrons que les indicateurs exponentiels et népériens sont également équivalents. Par ailleurs, nous en déduisons des formulations dynamiques des fonctions de distance croisées, c'est-à-dire lorsque les observations d'une période sont évaluées relativement à l'ensemble de production d'une autre période. Ces mesures dynamiques de l'efficacité mettent en évidence l'exis-

tence d'un paramètre d'influence qui ne permet pas à l'unité de production d'atteindre l'efficience à la période suivante.

Dans ce chapitre, la première section est consacrée à l'environnement et aux outils d'analyse tandis que la deuxième section présente les indicateurs de Luenberger et de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiels. La Section 3. introduit des notions additionnelles relatives au dynamisme de la fonction de distance exponentielle ainsi qu'à la décomposition des mesures de productivité. Enfin, la quatrième section est dédiée à une illustration empirique des concepts présentés dans ce chapitre.

## 1 Environnement et Outils

Pour tous vecteurs d'inputs  $x^t = (x_1^t, \dots, x_m^t) \in \mathbb{R}_+^m$  et d'outputs  $y^t = (y_1^t, \dots, y_n^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , soit l'ensemble de production  $T^t(x^t, y^t) = \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \text{ peut produire } y^t\}$  associé à la période  $(t)$ . Notons que la technologie de production positive est  $T_{++}^t = T^t \cap \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et, que la technologie népérienne est représentée par  $T_{\ln}^t = \{(\ln(x^t), \ln(y^t)) : (x^t, y^t) \in T_{++}^t\}$ . Nous supposons que  $T^t(x^t, y^t)$  et  $T_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t))$  satisfont les hypothèses  $T1 - T4$ .

Rappelons que pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  la fonction de distance exponentielle (FDE) orientée dans le graphe associée à la période  $(t)$  se présente de la manière suivante :

$$D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( e^{-\delta^t A} x^t, e^{\delta^t B} y^t \right) \in T^t \right\},$$

où  $A = \text{diag}(\alpha^t)$  et  $B = \text{diag}(\beta^t)$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$ .

Pour  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et, grâce à une transformation logarithmique de la mesure exponentielle, nous obtenons la fonction de distance népérienne (FDN). Nous constatons que la FDE et la FDN sont équivalentes. Notons que pour tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et, que quel que soit  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la FDN se définit par :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \ln(\ln(x^t) - \delta^t \alpha^t, \ln(y^t) + \delta^t \beta^t) \in T_{\ln}^t \right\}.$$

Ainsi,  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$ .

Rappelons également que l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen (Briec

et Kerstens (2004)) de la période ( $t$ ) est :

$$LHM^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = LO^t(x^t, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) - LI^t(x^t, x^{t+1}, y^t; h^t, h^{t+1}),$$

où  $LO^t(x^t, y^t, y^{t+1}; k^t, k^{t+1})$  et  $LI^t(x^t, x^{t+1}, y^t; h^t, h^{t+1})$  sont respectivement les mesures de quantité de Luenberger orientées en output et en input. Ces indicateurs (de productivité et de quantité) sont évalués sur la base des fonctions de distance directionnelle (Luenberger (1992a, 1992b) et Chambers et al. (1996a)).

## 2 Des Mesures de Productivité Exponentielles

Nous avons pu voir dans le Chapitre 2 que la fonction de distance exponentielle (FDE) et népérienne (FDN) sont équivalentes. Par ailleurs, cette dernière est structurellement similaire à la fonction de distance directionnelle (FDD). Sachant que ces fonctions permettent d'estimer l'efficacité des unités productives, elles sont également le fondement de l'évaluation de la variation de la productivité. En s'inspirant des travaux de Chambers et al. (1996b), Briec et Kerstens (2004) et, Abad et Ravelojaona (2017), nous proposons de présenter les indicateurs de productivité de Luenberger et de Luenberger-Hicks-Moorsteen dans un contexte exponentiel.

### 2.1 Indicateurs de Luenberger Exponentiels

Cette sous-section est dédiée à la caractérisation de la mesure de productivité de Luenberger basée sur la FDE. Abad et Ravelojaona (2017) proposent cette estimation exponentielle de la productivité, dans le cadre des productions polluantes. Dans ces travaux, nous proposons de la définir de manière standard c'est-à-dire, aucune distinction n'est faite entre les productions polluantes et non-polluantes.

#### 2.1.1 Définitions en Input

L'indicateur de productivité de Luenberger permet de mesurer l'évolution de la performance relativement à deux périodes successives. Une évaluation axée sur les inputs signifie que les décisions managériales visent à diminuer la quantité de facteurs utilisée pour un niveau donné de

production.

**Définition 4.1** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\phi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$  et  $\phi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^m \times 0$ , l'indicateur de productivité global de Luenberger exponentiel orienté en input est défini par :

$$L_{I,\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \phi^t, \phi^{t+1}) = \frac{1}{2} [L_{I,\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) + L_{I,\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1})], \quad (4.1)$$

où  $L_{I,\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1})$  et  $L_{I,\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1})$  sont respectivement les indicateurs de productivité de Luenberger orientés en input de la période  $(t)$  et  $(t + 1)$ .

Les mesures de productivité en intrants, relatives aux périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  reposent sur la fonction de distance exponentielle orientée en input.

**Proposition 4.2** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$  et  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^m \times 0$ , on a :

$$L_{I,\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) = D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0), \quad (4.2)$$

$$L_{I,\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) = D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0), \quad (4.3)$$

qui sont les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels orientés en input des période  $(t)$  et  $(t + 1)$ .

Notons que les mesures de distance sont également orientées en input.

$D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0)$  est la mesure de la performance de l'observation de la période  $(t + 1)$  par rapport à la technologie de production de la période  $(t)$ . Elle est définie de la manière suivante :

$$D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t(t+1)} : \left( e^{-\delta^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} x^{t+1}, y^{t+1} \right) \in T_{++}^t \right\}.$$

De manière analogue,  $D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, 0)$  est l'estimation de l'efficacité de l'observation de la période  $(t)$  relativement à l'ensemble de production de la période  $(t + 1)$ . Dans ce cas, elle se

présente de la manière suivante :

$$D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t(t+1)} : \left( e^{-\delta^{t(t+1)} \alpha^t} x^t, y^t \right) \in T_{++}^{t+1} \right\}.$$

Sachant que  $D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$ , on obtient la proposition ci-dessous.

**Proposition 4.3** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$  et  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^m \times 0$ , on a les équivalences suivantes :*

$$L_{I, \exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) \equiv L_{I, \ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}), \quad (4.4)$$

$$L_{I, \exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) \equiv L_{I, \ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}), \quad (4.5)$$

où  $L_{I, \ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1})$  et  $L_{I, \ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1})$  sont respectivement les mesures de productivité de Luenberger népériennes orientées en input des périodes  $(t)$  et  $(t+1)$ .

Ainsi, les mesures de productivité népériennes sont équivalentes aux indicateurs de productivité exponentiels. Les premières sont détaillées dans le corollaire ci-dessous.

**Corollaire 4.4** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$  et  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^m \times 0$ , on a :*

$$\begin{aligned} L_{I, \ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}) &= D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) \\ &\quad - D_{\ln}^t(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^{t+1}, 0), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} L_{I, \ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}) &= D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) \\ &\quad - D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^{t+1}, 0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les fonctions de distance népériennes croisées sont caractérisées par :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^{t+1}, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta^{t(t+1)} : (\ln(x^{t+1}) - \delta^{t(t+1)} \alpha^{t+1}, \ln(y^{t+1})) \in T_{\ln}^t \}, \quad (4.8)$$

$$D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta^{t+1(t)} : (\ln(x^t) - \delta^{t+1(t)} \alpha^t, \ln(y^t)) \in T_{\ln}^{t+1} \}. \quad (4.9)$$

**Corollaire 4.5** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\phi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$  et  $\phi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^m \times 0$ , l'indicateur de productivité global de Luenberger exponentiel orienté en input peut être reformulée de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} L_{I,\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \phi^t, \phi^{t+1}) &\equiv L_{I,\ln}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \phi^t, \phi^{t+1}) \quad (4.10) \\ &= \frac{1}{2} \left[ L_{I,\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}) \right. \\ &\quad \left. + L_{I,\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}) \right]. \end{aligned}$$

### 2.1.2 Orientation en Output

En s'inspirant des travaux de Chambers et al. (1996b), on peut définir les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels orientés en output. Ces derniers permettent de mesurer les gains de productivité par rapport à deux années consécutives, de telle sorte que les unités de production cherchent à augmenter les extrants pour une quantité donnée d'intrants.

**Définition 4.6** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\psi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$  et  $\psi^{t+1} = (\alpha^t, \beta^{t+1}) \in 0 \times [0, 1]^n$ , l'indicateur de productivité global de Luenberger exponentiel orienté en output est défini par :*

$$\begin{aligned} L_{O,\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \psi^t, \psi^{t+1}) &= \frac{1}{2} [L_{O,\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) \\ &\quad + L_{O,\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1})], \quad (4.11) \end{aligned}$$

où  $L_{O,\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1})$  et  $L_{O,\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1})$  sont respectivement les mesures de productivité de Luenberger exponentielles orientées en output des périodes  $(t)$  et  $(t+1)$ .

Les mesures périodiques de la productivité sont obtenues grâce aux fonctions de distance ex-



ponentielles axées sur les extrants.

**Proposition 4.7** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\psi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$  et  $\psi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in 0 \times [0, 1]^n$ , les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels orientés en output de la période  $(t)$  et  $(t+1)$  sont respectivement :*

$$L_{O,\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) = D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}), \quad (4.12)$$

$$L_{O,\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) = D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; 0, \beta^t) - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}). \quad (4.13)$$

La fonction de distance croisée  $D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1})$  signifie que l'on évalue l'observation de la période  $(t+1)$  relativement à l'ensemble de production de la période  $(t)$ . Elle est définie par :

$$D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t(t+1)} : \left( x^{t+1}, e^{\delta^{t(t+1)} \beta^{t+1}} y^{t+1} \right) \in T_{++}^t \right\}.$$

De manière analogue,  $D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; 0, \beta^t)$  estime l'efficacité de l'observation en  $(t)$  par rapport à la technologie en  $(t+1)$ . De ce fait, on la présente comme suit :

$$D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; 0, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t+1(t)} : \left( x^t, e^{\delta^{t+1(t)} \beta^t} y^t \right) \in T_{++}^{t+1} \right\}.$$

Nous savons que la FDE et la FDN sont équivalentes. Ainsi, les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels sont également équivalentes aux mesures de productivité de Luenberger népériennes.

**Proposition 4.8** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\psi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$  et  $\psi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in 0 \times [0, 1]^n$ , on a :*

$$L_{O,\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) \equiv L_{O,\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}), \quad (4.14)$$

$$L_{O,\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) \equiv L_{O,\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}), \quad (4.15)$$

où  $L_{O,\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1})$  et  $L_{O,\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1})$  sont respectivement les mesures de productivité de Luenberger népériennes orientées en output des périodes  $(t)$  et  $(t+1)$ .

Ces indicateurs sont fondées sur les fonctions de distance népériennes. Nous pouvons donc, fournir la proposition ci-après.

**Corollaire 4.9** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\psi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$  et  $\psi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in 0 \times [0, 1]^n$ , les indicateurs de productivité de Luenberger népériens orientés en output de la période  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement :*

$$L_{O,\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) - D_{\ln}^t(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); 0, \beta^{t+1}), \quad (4.16)$$

$$L_{O,\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) = D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) - D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); 0, \beta^{t+1}). \quad (4.17)$$

Ainsi, l'indicateur de productivité global de Lueberger exponentiel orienté en output peut être redéfini comme ci-dessous.

**Corollaire 4.10** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\psi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$  et  $\psi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in 0 \times [0, 1]^n$ , la mesure de productivité global de Luenberger exponentielle orienté en output peut être présentée de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} L_{O,\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \psi^t, \psi^{t+1}) &\equiv L_{O,\ln}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \psi^t, \psi^{t+1}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ L_{O,\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) \right. \\ &\quad \left. + L_{O,\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

### 2.1.3 Mesures dans le Graphe de la Technologie

Une mesure dans le graphe de la technologie signifie que les décisions managériales des unités de production se concentrent à la fois sur la diminution potentielle des inputs et l'augmentation éventuelle des outputs. Dans ce cas, les variations de la productivité sont également évaluées relativement à cette orientation.

**Définition 4.11** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité global de Luenberger exponentiel orienté dans le graphe est défini par :*

$$L_{\text{exp}}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \frac{1}{2} [L_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) + L_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1})]. \quad (4.19)$$

Les mesures relatives aux périodes  $(t)$  et  $(t+1)$  reposent sur les fonctions de distance exponentielles orientées dans le graphe. Dans ce cas, nous avons la proposition ci-dessous.

**Proposition 4.12** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels orientés dans le graphe des périodes  $(t)$  et  $(t+1)$  sont respectivement :*

$$L_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}), \quad (4.20)$$

$$L_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}). \quad (4.21)$$

La fonction  $D^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$  consiste à évaluer l'observation de la période  $(t+1)$  relativement à la technologie de production de la période  $(t)$  tandis que  $D^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$  est l'inverse. Chacune de ces fonctions est détaillée comme suit :

$$D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t(t+1)} : \left( e^{-\delta^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} x^{t+1}, e^{\delta^{t(t+1)} \beta^{t+1}} y^{t+1} \right) \in T_{++}^t \right\},$$

$$D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t+1(t)} : \left( e^{-\delta^{t+1(t)} \alpha^t} x^t, e^{\delta^{t+1(t)} \beta^t} y^t \right) \in T_{++}^{t+1} \right\}.$$

Sachant que la fonction de distance exponentielle est équivalente à la mesure de distance népérienne alors, les mesures de productivité exponentielles et népériennes le sont également.

**Proposition 4.13** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in$*

$[0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , les équivalences suivantes sont valables :

$$L_{\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) \equiv L_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}), \quad (4.22)$$

$$L_{\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) \equiv L_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}), \quad (4.23)$$

où  $L_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1})$  et  $L_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1})$  sont les indicateurs de productivité de Luenberger népériens orientés dans le graphe, des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ .

En faisant appel à la fonction de distance népérienne, nous pouvons fournir une expression plus détaillée de chacune des mesures introduites ci-dessus.

**Corollaire 4.14** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , les mesures de productivité de Luenberger népériennes des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement :*

$$\begin{aligned} L_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) &= D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \\ &\quad - D_{\ln}^t(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} L_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) &= D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) \\ &\quad - D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

**Corollaire 4.15** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et tout  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , la mesure de productivité globale de Luenberger exponentielle orientée dans le graphe est reformulée de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} L_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) &\equiv L_{\ln}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ L_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) \right. \\ &\quad \left. + L_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Lorsque les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels ont une valeur positive

alors, l'unité de production présente un gain de productivité tandis qu'une valeur négative indique une perte de productivité. Une valeur nulle démontre qu'il n'existe aucun changement, que ce soit au niveau des inputs ou des outputs, d'une période à une autre.

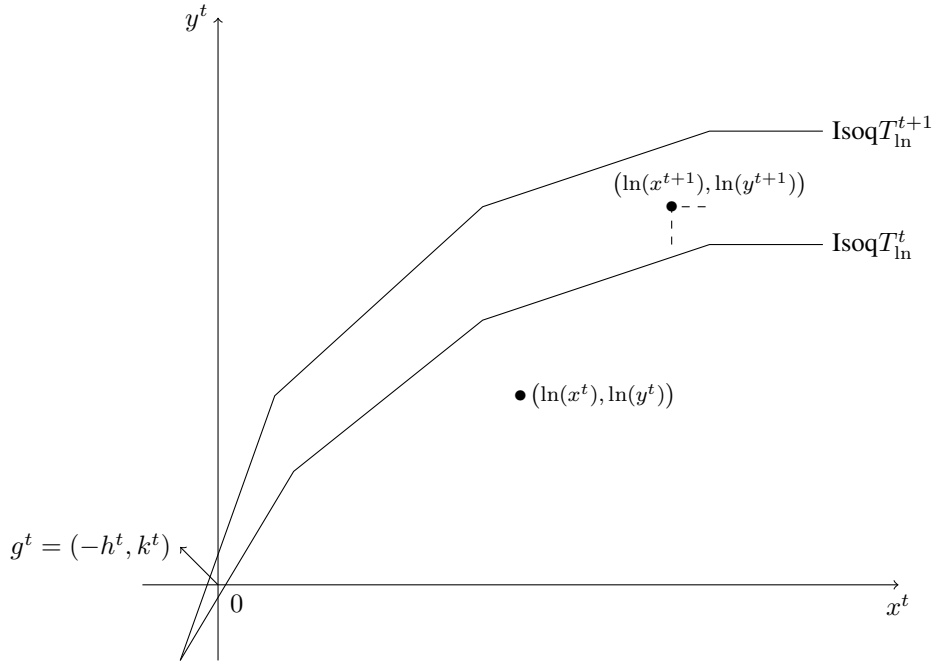


FIGURE 1 – Indice de productivité exponentiel de Luenberger et infaisabilité.

La figure 1 montre que la projection de  $(x^{t+1}, y^{t+1})$  sur la technologie  $T_{ln}^t$  se fait dans le cadre du cône délimité par les pointillés. Nous pouvons voir que certaines valeurs de  $(\alpha, \beta)$ , peuvent engendrer des infaisabilités lorsque la projection ne rencontre pas la frontière efficiente de la technologie relative à la période  $(t)$ . Cette situation peut survenir dès lors que l'ensemble de production de la période  $(t+1)$  est supérieur à celui de la période  $(t)$ . De manière similaire, cette infaisabilité peut également survenir lors de la projection de l'unité de production  $(x^t, y^t)$  sur  $T_{ln}^{t+1}$  lorsque  $T_{ln}^t$  est supérieur à  $T_{ln}^{t+1}$ .

## 2.2 Indicateur Exponentiel de Luenberger-Hicks-Moorsteen

Les indicateurs de productivité de Luenberger présentent des infaisabilités. En effet, ce cas peut survenir lorsque les mesures de distance croisées sont évaluées. Ainsi, Briec et Kerstens (2004) introduisent un nouvel indicateur basé sur les mesures directionnelles, qui permet d'éviter ces éventuels infaisabilités. La mesure de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen (LHM) dépend

des indicateurs de quantité de Luenberger. Nous présentons d'abord sa formulation exponentielle par rapport à la période  $(t)$  puis,  $(t + 1)$ . Enfin, nous définissons l'indicateur de productivité global de LHM relativement aux deux périodes successives.

### 2.2.1 Indicateur de la Période $(t)$

L'indicateur de productivité de LHM de la période  $(t)$  est évalué grâce à la différence entre la mesure de quantité de Luenberger orientée en output et celle orientée en input de la période  $(t)$ . Ainsi, en s'inspirant des travaux de Briec et Kerstens (2004), nous pouvons définir un indicateur de productivité LHM exponentiel pour la période  $(t)$  tel que celui-ci dépend des mesures de distance exponentielles présentées dans le Chapitre 2.

**Définition 4.16** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  tels que  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiel de la période  $(t)$  est défini de la manière suivante :*

$$LHM_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = OL_{\text{exp}}^t(x^t, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) - IL_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t; \alpha^t, \alpha^{t+1}), \quad (4.27)$$

où  $OL_{\text{exp}}^t(x^t, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1})$  et  $IL_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t; \alpha^t, \alpha^{t+1})$  sont les mesures de quantité de Luenberger orientées respectivement en output et en input de la période  $(t)$ .

Ces mesures de quantité de Luenberger ne sont pas les mesures initialement introduites par Chambers et al. (1996b). En effet, afin de résoudre les problèmes d'infaisabilités, Briec et Kerstens (2004) font intervenir des observations fictives composées simultanément des observations des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ . Lorsque la mesure de quantité de Luenberger est axée sur les intrants alors, les extrants sont considérés comme fixes. Inversement, lorsqu'elle est orientée en output, les facteurs sont considérés comme stables.

**Proposition 4.17** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in 0 \times [0, 1]^n$  ou  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^m \times 0$ , les indicateurs de quantité de Luenberger exponentiels orientés en output et*

en input de la période  $(t)$  sont respectivement :

$$OL_{\text{exp}}^t(x^t, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - D_{\text{exp}}^t(x^t, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}), \quad (4.28)$$

$$IL_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t; \alpha^t, \alpha^{t+1}) = D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^t; \alpha^{t+1}, 0) - D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0). \quad (4.29)$$

Nous pouvons observer que les mesures de quantité en output et en input font respectivement intervenir les observations  $(x^t, y^{t+1})$  et  $(x^{t+1}, y^t)$ . Les fonctions de distance exponentielles croisées relatives à celles-ci sont définies comme suit :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t(t+1)} : \left( x^t, e^{\delta^{t(t+1)} \beta^{t+1}} y^{t+1} \right) \in T_{++}^t \right\},$$

$$D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^t; \alpha^{t+1}, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t(t+1)} : \left( e^{\delta^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} x^{t+1}, y^t \right) \in T_{++}^t \right\}.$$

Ainsi, l'indicateur de productivité de LHM exponentiel de la période  $(t)$  signifie que la mesure de productivité est estimée relativement à l'ensemble de production de la période  $(t)$ . L'équivalence entre la fonction de distance exponentielle et la mesure de distance népérienne permet d'établir la proposition ci-dessous.

**Proposition 4.18** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in 0 \times [0, 1]^n$  ou  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^m \times 0$ , les indicateurs de quantité de Luenberger exponentiels orientés en output et en input de la période  $(t)$  peuvent être réécrites de la manière suivante :*

$$OL_{\text{exp}}^t(x^t, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) \equiv OL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}), \quad (4.30)$$

$$IL_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t; \alpha^t, \alpha^{t+1}) \equiv IL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t); \alpha^t, \alpha^{t+1}), \quad (4.31)$$

où  $OL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1})$  et  $IL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t); \alpha^t, \alpha^{t+1})$  sont respectivement les mesures de quantité de Luenberger népériennes en output et en input de la période  $(t)$ .

**Corollaire 4.19** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in 0 \times [0, 1]^n$  ou  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^m \times 0$ , les indicateurs de quantité de Luenberger népériens orientés en output et en*

input de la période  $(t)$  sont :

$$OL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) = D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); 0, \beta^t) - D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^{t+1}); 0, \beta^{t+1}), \quad (4.32)$$

$$IL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t); \alpha^t, \alpha^{t+1}) = D_{\ln}^t(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t); \alpha^{t+1}, 0) - D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, 0). \quad (4.33)$$

Ainsi, les deux mesures de distance croisées présentées ci-dessous sont :

$$D_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^{t+1}); 0, \beta^{t+1}) = \sup_{\delta} \{ \delta^{t(t+1)} : (\ln(x^t), \ln(y^{t+1}) + \delta^{t(t+1)} \beta^{t+1}) \in T_{\ln}^t \},$$

$$D_{\ln}^t(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t); \alpha^{t+1}, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta^{t(t+1)} : (\ln(x^{t+1}) - \delta^{t(t+1)} \alpha^{t+1}, \ln(y^t)) \in T_{\ln}^t \}.$$

**Corollaire 4.20** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiel de la période  $(t)$  peut être caractérisé comme suit :*

$$\begin{aligned} LHM_{\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) &\equiv LHM_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) \\ &= OL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) \\ &\quad - IL_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t); \alpha^t, \alpha^{t+1}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

De manière similaire à l'indicateur de productivité de Luenberger, lorsque la mesure de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen est positive (respectivement négative) alors, il existe un gain (respectivement une perte) de productivité tandis qu'une valeur nulle indique qu'il n'y a pas de modification de la performance entre les deux périodes successives.

## 2.2.2 Indicateur de la Période $(t + 1)$

Dans cette sous-section, nous présentons l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiel de la période  $(t + 1)$ . Ce dernier est évalué relativement à la technologie de production de la période  $(t + 1)$ .

**Définition 4.21** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$*



et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , la mesure de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentielle de la période  $(t + 1)$  est définie de la manière suivante :

$$LHM_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = OL_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) - IL_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}), \quad (4.35)$$

où  $OL_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1})$  et  $IL_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1})$  sont respectivement les indicateurs de quantité de Luenberger exponentiels orientés en output et en input de la période  $(t + 1)$ .

Nous pouvons donner une définition plus détaillée de ces mesures de quantité de Luenberger orientées grâce à la fonction de distance exponentielle.

**Proposition 4.22** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in 0 \times [0, 1]^n$  ou  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^m \times 0$ , les indicateurs de quantité de Luenberger exponentiels orientés en output et en input de la période  $(t + 1)$  sont :*

$$OL_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) = D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^t; 0, \beta^t) - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}), \quad (4.36)$$

$$IL_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) = D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^{t+1}; \alpha^t, 0). \quad (4.37)$$

Les mesures de distance exponentielles croisées qui font intervenir les observations fictives  $(x^{t+1}, y^t)$  et  $(x^t, y^{t+1})$ , définies par :

$$D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^t; 0, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t+1(t)} : (x^{t+1}, e^{\delta^{t+1(t)} \beta^t} y^t) \in T_{++}^{t+1} \right\},$$

$$D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^{t+1}; \beta^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t+1(t)} : (e^{-\delta^{t+1(t)} \alpha^t} x^t, y^{t+1}) \in T_{++}^{t+1} \right\}.$$

**Proposition 4.23** *Sachant que la fonction de distance exponentielle est équivalente à la mesure de distance népérienne, pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in 0 \times [0, 1]^n$  ou  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^m \times 0$ , les indicateurs de quantité de Luenberger exponentiels orientés en output et*

en input de la période  $(t + 1)$  peuvent être exprimés de la manière suivante :

$$OL_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \beta^t, \beta^{t+1}) \equiv OL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}), \quad (4.38)$$

$$IL_{\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) \equiv IL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}), \quad (4.39)$$

où  $OL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1})$  et  $IL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1})$  sont respectivement les indicateurs de quantité de Luenberger népériens orientés en output et en input.

**Corollaire 4.24** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in 0 \times [0, 1]^n$  ou  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^m \times 0$ , les mesures de quantité de Luenberger népériennes orientés en output et en input de la période  $(t + 1)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} OL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) &= D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t); 0, \beta^t) \\ &\quad - D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); 0, \beta^{t+1}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} IL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}) &= D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^{t+1}, 0) \\ &\quad - D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, 0). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dans ce cas, les mesures de distance népériennes croisées orientées en output et en input, relatives aux observations  $(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t))$  et  $(\ln(x^t), \ln(y^{t+1}))$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t); 0, \beta^t) &= \sup_{\delta} \{ \delta^{t+1(t)} : (\ln(x^{t+1}), \ln(y^t) + \delta^{t+1(t)} \beta^t) \in T_{\ln}^{t+1} \}, \\ D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, 0) &= \sup_{\delta} \{ \delta^{t+1(t)} : (\ln(x^t) - \delta^{t+1(t)} \alpha^t, \ln(y^{t+1})) \in T_{\ln}^{t+1} \}. \end{aligned}$$

**Corollaire 4.25** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen

exponentiel de la période  $(t + 1)$  peut être redéfini comme suit :

$$\begin{aligned} LHM_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) &\equiv LHM_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) \\ &= OL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \beta^t, \beta^{t+1}) \\ &\quad - IL_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^{t+1}); \alpha^t, \alpha^{t+1}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

### 2.2.3 Indicateur Global de Luenberger-Hicks-Moorsteen Exponentiel

Les indicateurs de productivité LHM exponentiels des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  permettent d'obtenir une mesure globale relative à ces deux périodes successives. Celle-ci est constituée par la moyenne arithmétique des indicateurs des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ .

**Définition 4.26** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiel global est défini par :

$$\begin{aligned} LHM_{\text{exp}}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) &= \frac{1}{2} [LHM_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) \\ &\quad + LHM_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1})]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nous avons établi précédemment que les indicateurs de productivité LHM exponentiels et népériens en  $(t)$  et en  $(t + 1)$  sont équivalents. Nous pouvons constater cette similitude au niveau de la mesure de productivité globale.

**Proposition 4.27** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'équivalence suivante est valable :

$$LHM_{\text{exp}}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) \equiv LHM_{\ln}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}), \quad (4.44)$$

où  $LHM_{\ln}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1})$  est la mesure de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen népérienne globale.

L'indicateur de productivité de LHM népérien global est également obtenu grâce à la moyenne arithmétique des indicateurs de productivité de LHM népériens des période  $(t)$  et  $(t + 1)$ .

**Corollaire 4.28** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen népérien global est :*

$$\begin{aligned} LHM_{\ln}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) = \\ \frac{1}{2} [LHM_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1}) \\ + LHM_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1})] . \end{aligned} \quad (4.45)$$

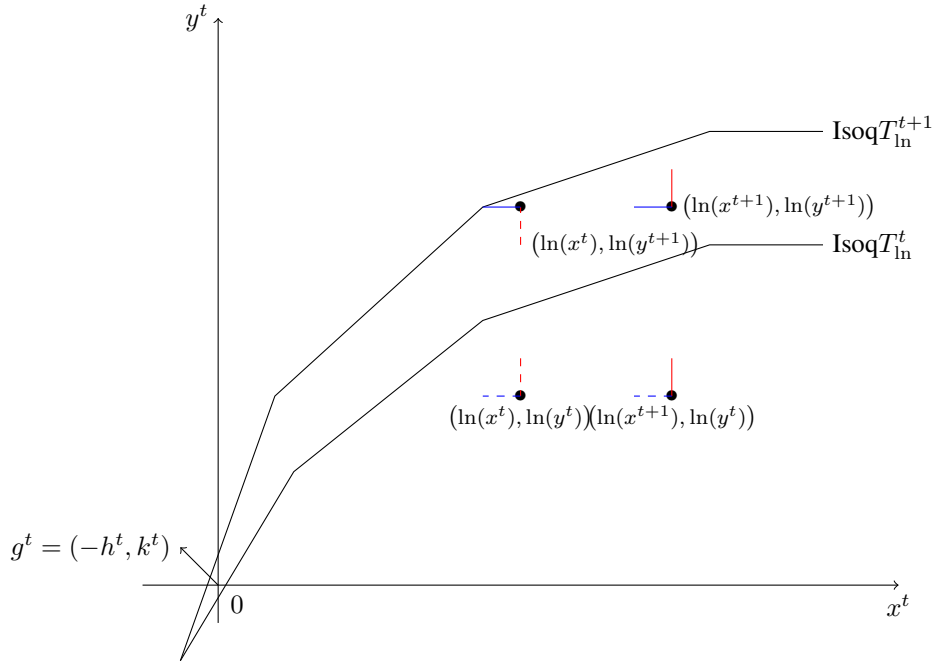


FIGURE 2 – Indice de productivité exponentiel de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

La figure 2 décrit les mesures de distance dans le cadre de l'estimation de l'indicateur de productivité de LHM exponentiel global. Les pointillés et les lignes rouges sont relatifs aux mesures de distance intervenant dans l'évaluation des indicateurs de quantité de Luenberger orientés en output des périodes  $(t)$  ou  $(t + 1)$ . Les pointillés et les lignes bleus concernent quant à eux, les mesures de quantité de Luenberger orientées en input des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$ . Nous pouvons constater

qu'aucune infaisabilité ne peut survenir dans l'estimation de l'indicateur de productivité de LHM puisque la projection de chaque observation rencontre effectivement, les frontières efficaces de  $T_{\ln}^t$  et, de  $T_{\ln}^{t+1}$ .

### 3 Notions Additionnelles

Dans cette section nous présentons des concepts additionnels relatifs aux indicateurs de productivité présentés la section précédente. En effet, nous montrons que l'estimation des fonctions de distance croisées par rapport à deux périodes peut conduire à l'obtention d'une formulation dynamique des fonctions de distance. Par ailleurs, grâce à cette spécification dynamique, nous identifions un nouveau paramètre influençant la performance des unités de production. Par ailleurs, nous décomposons les mesures de productivité introduites précédemment afin de différencier les sources de la variation de la performance, à savoir le gain de productivité et le changement technologique.

#### 3.1 Dynamisme à Deux Périodes

Dans un premier temps, nous présentons les fonctions de distance dynamiques que ce soit de forme exponentielle ou népérienne. Nous constatons que cette formulation fait intervenir un nouveau paramètre. Celui-ci est exposé plus en détail dans un second temps.

##### 3.1.1 Fonctions de Distance Dynamiques

Soient deux périodes consécutives  $(t)$  et  $(t+1)$ . La performance d'une unité de production à la période  $(t+1)$  dépend de son efficacité en  $(t)$  mais également des décisions managériales. Cette interdépendance est mise en évidence grâce à l'estimation des fonctions de distance croisées qui interviennent dans les mesures de productivité.

**Proposition 4.29** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  tel que s'il existe un couple de paramètres  $(\rho_i^{t+1(t)}, \rho_o^{t+1(t)}) \in \mathbb{R}^{m+n}$  alors, la fonction de distance exponentielle  $D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$  orientée dans le graphe, peut être définie de manière dynamique,*

comme ci-dessous :

$$D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \begin{cases} \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} \\ \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} \end{cases} \quad (4.46)$$

*Preuve :*

Nous savons que la fonction de distance exponentielle équivaut à la fonction de distance népérienne. Posons,  $D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\ln}^{t+1}(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t) = \delta^{t+1(t)}$ . Si  $(x^t, y^t)$  est inefficace à la période  $(t)$ , l'unité de production cherchera à réduire cette inefficacité afin de l'être pleinement à la période  $(t+1)$ . Cependant, il est possible que cet objectif ne soit pas atteint malgré les ajustements managériaux et, l'inefficacité n'est réduite que pour une proportion  $\rho^{t+1(t)}$ . De ce fait, nous pouvons établir que l'observation de la période  $(t+1)$  dépend de celle de la période  $(t)$  ainsi que des efforts managériaux. Ainsi, nous avons :

$$\begin{cases} \ln(x^{t+1}) = \ln(x^t) - \rho_i^{t+1(t)} \delta^{t+1(t)} \alpha^t \\ \ln(y^{t+1}) = \ln(y^t) + \rho_o^{t+1(t)} \delta^{t+1(t)} \beta^t \end{cases} \iff \begin{cases} \delta^{t+1(t)} = \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} \\ \delta^{t+1(t)} = \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} \quad \square. \end{cases}$$

**Proposition 4.30** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$  tel que s'il existe un couple de paramètres  $(\rho_i^{t(t+1)}, \rho_o^{t(t+1)}) \in \mathbb{R}^{m+n}$  alors, la fonction de distance exponentielle  $D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$  dynamique orientée dans le graphe, peut être définie par :*

$$D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) = \begin{cases} \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} \\ \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}} \end{cases} \quad (4.47)$$

*Preuve :*

Nous savons que  $(x^{t+1}, y^{t+1})$  dépend à la fois des décisions managériaux afin d'atteindre l'efficacité, mais également de l'observation en  $(t)$ . De ce fait, nous pouvons établir une relation inverse telle que l'on peut retrouver  $(x^t, y^t)$  grâce à l'observation de la période  $(t+1)$ . Posons

$D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) = \delta^{t(t+1)}$  Ainsi, nous avons les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(x^t) = \ln(x^{t+1}) + \delta^{t(t+1)} \rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1} \\ \ln(y^t) = \ln(y^{t+1}) + \delta^{t(t+1)} \rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \delta^{t(t+1)} = \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} \\ \delta^{t(t+1)} = \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}} \quad \square. \end{array} \right.$$

### 3.1.2 Paramètre d'Influence Dynamique

Nous avons introduit dans la sous-section précédente un nouveau paramètre  $\rho$ . Celui-ci représente la proportion de réduction de l'inefficacité d'une période à l'autre. Il correspond à l'influence de facteurs internes et externes qui entravent la recherche de l'efficience par les entreprises. En effet, les unités productives peuvent améliorer leur performance grâce à un gain de productivité et/ou à un ajustement technologique. Les facteurs internes concernent essentiellement le processus de production ainsi que les décisions managériales. Les facteurs externes tels les politiques et/ou les conjonctures économiques, quant à eux, ne peuvent être influencés par l'unité de production.

**Proposition 4.31** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$ , les paramètres d'influence dynamiques orientés en input et en output de la période  $(t)$ , relativement à la technologie de production de la période  $(t+1)$ , sont respectivement :*

$$\rho_i^{t+1(t)} = \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\delta^{t+1(t)} \alpha^t}, \quad (4.48)$$

$$\rho_o^{t+1(t)} = \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\delta^{t+1(t)} \beta^t}. \quad (4.49)$$

La définition ci-dessus présente la caractérisation des paramètres d'influence dynamiques relatifs aux observations de la période  $(t)$  et, à l'ensemble de production  $(t+1)$ .

**Proposition 4.32** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , les paramètres d'influence dynamique orientés en input et en output de la période  $(t+1)$ , relati-*

vient à la technologie de production de la période  $(t)$ , sont respectivement :

$$\rho_i^{t(t+1)} = \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\delta^{t(t+1)} \alpha^{t+1}}, \quad (4.50)$$

$$\rho_o^{t(t+1)} = \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\delta^{t(t+1)} \beta^{t+1}}. \quad (4.51)$$

Lorsque le paramètre  $\rho^{t+1(t)}$  est inférieur à 1 alors, les facteurs à la fois internes et externes ne permettent pas à la firme d'être pleinement efficiente. Ainsi, ils freinent les ajustements techniques et/ou technologiques. Cependant, ces contraintes n'influencent pas de manière similaire les intrants et les extrants. De ce fait, il existe de deux paramètres distincts relatifs aux inputs et aux outputs. Par ailleurs, lorsque ce paramètre est supérieur à 1 alors, les influences externes et internes permettent la réduction plus que proportionnelle de l'inefficacité de l'unité de production. Il est à noter que lorsque la valeur de  $\rho^{t(t+1)}$  est inférieure à 1 alors, des sources externes et internes contribuent à une hausse plus que proportionnel de l'efficacité. Cependant, si celui-ci a une valeur supérieure à 1 alors, ces facteurs d'influence freinent la recherche de la performance. Enfin, lorsque  $\rho^{t+1(t)}$  et/ou  $\rho^{t(t+1)}$  prennent une valeur unitaire, les contraintes internes et externes n'ont aucun impact sur les transformations techniques et/ou technologiques de l'unité de production relatives à la recherche de l'efficacité.

La figure 3 décrit les différentes possibilités d'évolution de l'unité de production de la période  $(t)$  à la période  $(t + 1)$ . Elle illustre le paramètre d'influence dynamique  $\rho^{t+1(t)}$ . Posons  $A = (x^t, y^t)$  tel que à la période  $(t + 1)$ , la firme produit  $(x^{t+1}, y^{t+1})$ . Selon les facteurs internes et externes influençant les activités de l'unité productive, la production de la période  $(t + 1)$  peut être représentée entre autres par les points  $B, C, D, E$  ou  $F$ . Dans ce cas, nous pouvons donner les interprétations suivantes :

- $B$  correspond au cas où l'entreprise est techniquement efficiente à la période  $(t + 1)$  tel que  $\rho_i^{t+1(t)} = \rho_o^{t+1(t)} = 1$ .
- $C$  représente la situation où les inputs sont réduits et les outputs sont augmentés. Cependant, la firme n'est pas efficace techniquement tel que  $\rho_i^{t+1(t)} \neq \rho_o^{t+1(t)}$  avec  $(\rho_i^{t+1(t)}, \rho_o^{t+1(t)}) > 0$ .
- $D$  décrit la circonstance où l'entité de production augmente sa production pour un même



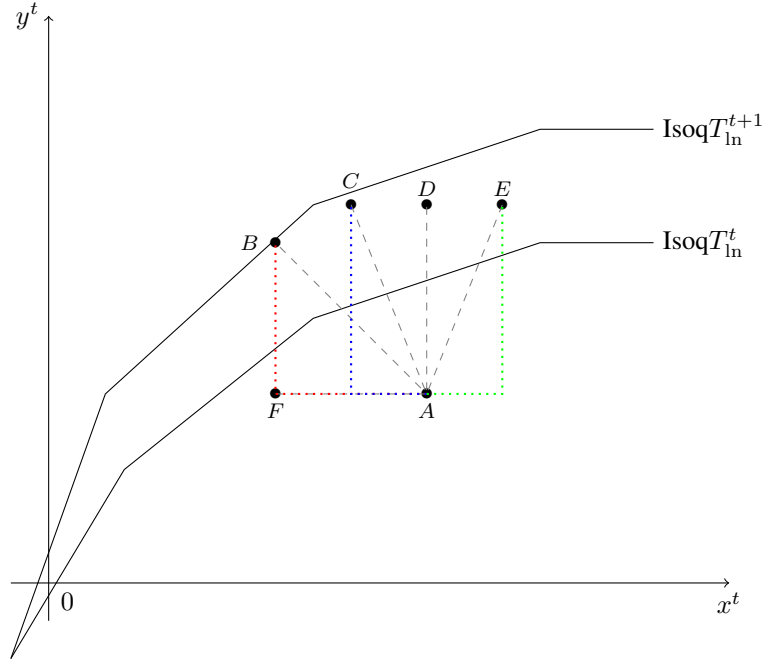


FIGURE 3 – Paramètre d'influence dynamique.

niveau de facteurs, correspondant à celui de la période  $(t)$ . Dans ce cas,  $\rho_i^{t+1(t)} = 0$  et  $\rho_o^{t+1(t)} > 0$ .

- $E$  est le cas où les inputs et les outputs augmentent simultanément tel que  $\rho_i^{t+1(t)} \neq \rho_o^{t+1(t)}$  avec  $\rho_i^{t+1(t)} < 0$  et  $\rho_o^{t+1(t)} > 0$ .
- Lorsque la quantité de facteurs utilisée diminue tandis que la production reste constante alors, nous avons  $F$  de telle sorte que  $\rho_i^{t+1(t)} > 0$  et  $\rho_o^{t+1(t)} = 0$ .

### 3.2 Décomposition et Dynamisme des Indicateurs Exponentiels

Dans cette sous-section, nous proposons une décomposition des indicateurs définis précédemment. En effet, les mesures de la productivité concentrent à la fois la réduction (ou non) de l'inefficacité et la mutation (ou non) technologique de l'unité de production. Par ailleurs, nous donnons une formulation dynamique de ces mesures de productivité grâce aux fonctions de distance dynamiques, présentées dans la sous-section précédente.

### 3.2.1 Décomposition des Mesures de Productivité

Dans un premier temps, nous donnons la décomposition de l'indicateur de productivité de Luenberger exponentiels puis, dans un second temps, celle de la mesure de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiel. Nous avons mentionné précédemment que les indicateurs de productivité sont composés d'un gain en efficacité technique et d'une augmentation de la performance imputable aux transformations technologiques dans le processus de production.

**Proposition 4.33** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité global de Luenberger exponentiel peut être exprimé de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} L_{\text{exp}}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) &= \left[ D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) - D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})) \right. \\ &\quad \left. + (D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)) \right]. \quad (4.52) \end{aligned}$$

*Preuve :*

D'abord, rappelons que l'indicateur de productivité global de Luenberger exponentiel est défini par l'expression suivante,  $L_{\text{exp}}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \frac{1}{2} [L_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) + L_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1})]$ . Si  $L_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$  et si de plus,  $L_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$  alors, on a  $L_{\text{exp}}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \frac{1}{2} [(D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})) + (D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}))]$ . Sachant que  $\frac{1}{2} D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - \frac{1}{2} D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)$  et que par ailleurs on a,  $\frac{1}{2} D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) = D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) - \frac{1}{2} D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$  alors,  $L_{\text{exp}}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \left[ D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \right] + \frac{1}{2} \left[ (D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) - D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1})) + (D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t)) \right] \quad \square$ .

Nous avons vu dans le premier chapitre que lorsque les mesures de productivité sont structurellement additives alors, elles sont composées de la somme de la part imputée aux gains d'efficacité

et de celle attribuée aux changements technologiques.

**Corollaire 4.34** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , le gain d'efficacité et le changement technologique sont respectivement définis par :*

$$EFFCH = D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}), \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} TECH &= \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) - D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Une valeur positive (négative) des composantes  $EFFCH$  et  $TECH$  indique qu'il existe respectivement un gain (une perte) d'efficacité et un progrès (une régression) technologique.

Ang et Kerstens (2017) proposent une décomposition de l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen standard de telle sorte que celui-ci est la somme de trois composantes à savoir, le changement d'efficacité, la transformation technologique et, un résidu qu'ils considèrent comme étant la modification de l'efficacité d'échelle. Nous nous inspirons de ces travaux afin d'identifier les composantes de la mesure de productivité de LHM exponentielle.

**Proposition 4.35** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiel peut être redéfini par :*

$$\begin{aligned} LHM_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) &= \left[ D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; 0, \beta^t) - D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) - D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) \right) \right] + \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.55)$$

ou

$$\begin{aligned}
 LHM_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) &= \left[ D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \right) \right. \\
 &\left. - \left( D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) - D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) \right) \right] + \varepsilon. \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  correspond à un résidu.

Notons que la décomposition proposée par Ang et Kerstens (2017) est caractérisée soit en input soit en output. A partir de ces définitions, nous pouvons identifier chaque composante.

**Corollaire 4.36** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , la variation de l'efficacité et le progrès technologique sont respectivement :*

$$EFFCH = \begin{cases} D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) \\ D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0), \end{cases} \quad (4.57)$$

$$TECH = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; 0, \beta^t) - D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) \right) \right. \\ \left. - \left( D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) - D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) \right) \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \right) \right. \\ \left. - \left( D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) - D_{\exp}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) \right) \right]. \end{cases} \quad (4.58)$$

Une valeur positive (négative) de la composante  $EFFCH$  signifie qu'il y a un gain (une perte) d'efficacité technique. De manière similaire, lorsque  $TECH$  est positive (négative) alors, il existe un progrès (une régression) technologique.

### 3.2.2 Mesures de Productivité Dynamiques

Nous reformulons les indicateurs de productivité présentés précédemment à l'aide des mesures de distance exponentielles dynamiques. De ce fait, nous obtenons des mesures de productivité dynamiques.

Dans la section précédente nous avons établi que  $L_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) \equiv L_{\ln}(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1})$ . De ce fait, nous pouvons fournir la proposition suivante.

**Proposition 4.37** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , la mesure de productivité globale de Luenberger exponentiel dynamique orientée dans le graphe est définie par :*

$$L_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} \right) + \left( \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \right) \right], \quad (4.59)$$

ou

$$L_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}} \right) + \left( \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \right) \right]. \quad (4.60)$$

Notons que les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels dynamiques orientés dans le graphe des périodes  $(t)$  et  $(t+1)$  sont respectivement :

$$L_{\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \begin{cases} D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} \\ D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) - \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}} \end{cases}$$

$$L_{\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = \begin{cases} \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \\ \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \end{cases}$$

Les expressions dynamiques des indicateurs de productivité de Luenberger orientés en input et en output peuvent également être pourvus.

**Proposition 4.38** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  et  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\phi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^m \times 0$ ,  $\phi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^m \times 0$ ,  $\psi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in 0 \times [0, 1]^n$  et  $\psi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in 0 \times [0, 1]^n$*

$0 \times [0, 1]^n$ , les indicateurs de productivité globaux de Luenberger exponentiels dynamiques orientés en input et en output sont respectivement définis par :

$$IL_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \phi^t, \phi^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} \right) + \left( \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) \right) \right], \quad (4.61)$$

$$OL_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \psi^t, \psi^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[ \left( D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}} \right) + \left( \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) \right) \right]. \quad (4.62)$$

Chaque mesure de productivité globale est la moyenne arithmétique des indicateurs de productivité de deux périodes successives. De ce fait, nous pouvons indiquer que les mesures de productivité exponentiels orientées en input et en output des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} IL_{\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) &= D_{\exp}^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) - \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}}, \\ IL_{\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) &= \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0), \\ OL_{\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \psi^t, \psi^{t+1}) &= D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}}, \\ OL_{\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \psi^t, \psi^{t+1}) &= \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}). \end{aligned}$$

De manière similaire, nous pouvons donner une expression dynamique aux indicateurs de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiels. Sachant que  $LHM_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = LHM_{\ln}^t(\ln(x^t), \ln(x^{t+1}), \ln(y^t), \ln(y^{t+1}); \xi^t, \xi^{t+1})$ , nous avons la proposition ci-dessous.

**Proposition 4.39** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ ,  $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $\xi^t = (\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $\xi^{t+1} = (\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen*

exponentiel dynamique de la période  $(t)$  est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} LHM_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = & \frac{1}{2} \left[ \left( \left( D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}} \right) \right. \right. \\ & - \left. \left( \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} - D^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \right) \right) \\ & + \left( \left( \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) \right) \right. \\ & \left. \left. - \left( D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) - \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} LHM_{\exp}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = & \frac{1}{2} [LHM_{\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) \\ & + LHM_{\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1})]. \end{aligned}$$

Ainsi, les mesures de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiel dynamiques des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} LHM_{\exp}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = & \left( D_{\exp}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}} \right) \\ & - \left( \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} - D^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0) \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} LHM_{\exp}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \xi^t, \xi^{t+1}) = & \left( \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} - D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}) \right) \\ & - \left( D_{\exp}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) - \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t} \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

De ce fait, les indicateurs de quantité de Luenberger exponentiels dynamiques orientés en input

et en output des périodes  $(t)$  et  $(t + 1)$  sont définis par :

$$\begin{aligned}
 IL_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) &= \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t(t+1)} \alpha^{t+1}} - D^t(x^t, y^t; \alpha^t, 0), \\
 IL_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \alpha^t, \alpha^{t+1}) &= D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, 0) - \frac{\ln(x^t) - \ln(x^{t+1})}{\rho_i^{t+1(t)} \alpha^t}, \\
 OL_{\text{exp}}^t(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \psi^t, \psi^{t+1}) &= D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; 0, \beta^t) - \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t(t+1)} \beta^{t+1}}, \\
 OL_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; \psi^t, \psi^{t+1}) &= \frac{\ln(y^{t+1}) - \ln(y^t)}{\rho_o^{t+1(t)} \beta^t} - D_{\text{exp}}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; 0, \beta^{t+1}).
 \end{aligned}$$

## 4 Application Numérique

Dans cette section, nous donnons un exemple empirique relatif aux mesures de performance et de productivité définies dans les chapitres 2 et 4.

### 4.1 Mesures de Performance

Dans cette sous-section, nous présentons, à titre d'exemple, les mesures de distance exponentielles orientées dans le graphe, en input et en output. Nous plaçons notre analyse selon un point de vue primal.

#### 4.1.1 Cadre d'Etude

Dans cette application, nous utilisons les données agricoles de 12 pays européens relatives aux années 2008 et 2009. Celles-ci sont présentées dans l'Annexe 1. Notons que les données de la période 2008, ont également été utilisées dans le Chapitre 3.

Tout d'abord, rappelons que pour tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  la fonction de distance exponentielle orientée dans le graphe est définie de la manière suivante :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( e^{-\delta^t \alpha^t} x^t, e^{\delta^t \beta^t} y^t \right) \in T_{++}^t \right\}.$$

Suivant l'approche DEA et la technologie Cobb-Douglas de Banker et Maindiratta (1986),



rappelons que la spécification non-paramétrique de la mesure définie ci-dessus, est :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : e^{-\delta^t \alpha^t} x^t \geq \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t}, e^{\delta^t \beta^t} y^t \leq \prod_{j \in \mathcal{J}} (x_j^t)^{\theta_j^t}, \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta^t = 1 \right\}.$$

Sachant que  $D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv D_{\text{ln}}^t(\ln(x^t), \ln(y^t); \alpha^t, \beta^t)$ , nous obtenons :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \ln(x^t) - \delta^t \alpha^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t), \right. \\ \left. \ln(y^t) + \delta^t \beta^t \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t), \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta^t = 1 \right\}.$$

Nous effectuons une étude empirique d'un point de vue primal de la mesure d'efficacité exponentielle tels que les paramètres  $(\alpha^t, \beta^t) \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$ . Par ailleurs, notons que la normalisation des pondérations  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1$  indique une hypothèse de rendements d'échelle variables.

#### 4.1.2 Résultats

Le tableau 4.1 présente les scores de performance exponentiels de 12 pays européens suivant une approche primale que ce soit dans une orientation en input, en output ou dans le graphe. La première partie du tableau concentre les résultats relatifs à l'année d'exercice 2008 tandis que la seconde partie concerne les performances des entités de production durant la période 2009. L'étude se fait pour les mêmes unités de production soit 12 pays européens sur les 27 Etats composant la communauté.

#### 4.1.3 Interprétations

Nous pouvons constater que la République Tchèque, la France, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas, la Slovaquie et le Royaume-Uni (7 pays) sont efficaces durant la période 2008. De ce fait, ces unités de production reposent sur la frontière efficiente et possèdent un score d'efficacité nul. Ces pays sont efficaces que ce soit dans une orientation en input, en output ou, dans le graphe. Ainsi, on peut raisonnablement déduire qu'il n'existe aucun slack dans les mesures présentées.

<b>Orientation</b>	<b>Inputs</b>	<b>Outputs</b>	<b>Graphe</b>
<b>Année 2008</b>			
<b>République Tchèque</b>	0	0	0
<b>Danemark</b>	0,2752	0,2637	0,1347
<b>Espagne</b>	0,6719	0,7214	0,3667
<b>France</b>	0	0	0
<b>Lettonie</b>	0,0834	0,3071	0,0834
<b>Lituanie</b>	0	0	0
<b>Luxembourg</b>	0	0	0
<b>Pays-Bas</b>	0	0	0
<b>Slovaquie</b>	0	0	0
<b>Finlande</b>	0,5991	0,7198	0,3269
<b>Suède</b>	0,2309	0,2774	0,1260
<b>Royaume Uni</b>	0	0	0
<b>Année 2009</b>			
<b>République Tchèque</b>	0	0	0
<b>Danemark</b>	0,2049	0,1937	0,0996
<b>Espagne</b>	0,8057	0,9568	0,4583
<b>France</b>	0	0	0
<b>Lettonie</b>	0	0	0
<b>Lituanie</b>	0	0	0
<b>Luxembourg</b>	0	0	0
<b>Pays-Bas</b>	0	0	0
<b>Slovaquie</b>	0	0	0
<b>Finlande</b>	0,4846	0,6394	0,2757
<b>Suède</b>	0,0925	0,1221	0,0526
<b>Royaume Uni</b>	0,0065	0,0055	0,0030

TABLE 4.1 – Scores d'efficacité exponentiels

Remarquons que les scores de performance non-nuls sont moins élevés selon une orientation dans le graphe que suivant une orientation en input ou en output.

Relativement à l'année 2009, nous observons que la République Tchèque, la France, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas et la Slovaquie (7 pays) sont efficaces. Ainsi, leur mesure de performance est nul que ce soit suivant une direction en input, en output ou dans le graphe. Cette constance indique qu'il n'existe aucun slack en input ou en output, pour les unités de production efficaces. Par ailleurs, notons que les scores d'efficacité non-nuls sont également plus élevés lorsque les mesures sont axées sur les facteurs et la production que selon une orientation dans le graphe. Enfin, remarquons que la Lettonie, qui est inefficace en 2008, devient efficace en 2009. Inversement, le Royaume-Uni n'est pas performant en 2009 tandis qu'elle l'était durant la période

2008.

## 4.2 Mesures de Productivité

Dans cette sous-section, nous appliquons les mesures de productivité de Luenberger et de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentielles dans le cadre d'un exemple empirique. Nous nous appuyons sur les données utilisées dans la sous-section précédente ainsi qu'aux résultats obtenus dans celle-ci.

### 4.2.1 Environnement d'Analyse

Rappelons que les indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels nécessitent l'estimation des fonctions de distance croisées entre deux périodes consécutives. Ainsi, pour tout  $(\alpha^t, \beta^t) \in [0, 1]^{m+n}$  et  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \in [0, 1]^{m+n}$ , la mesure de distance exponentielle des unités de production de la période  $(t)$  évaluées relativement à la technologie de la période  $(t + 1)$ , et inversement, sont respectivement :

$$D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( e^{-\delta^t \alpha^t} x^t, e^{\delta^t \beta^t} y^t \right) \in T_{++}^{t+1} \right\},$$

$$D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t+1} : \left( e^{-\delta^{t+1} \alpha^{t+1}} x^{t+1}, e^{\delta^{t+1} \beta^{t+1}} y^{t+1} \right) \in T_{++}^t \right\}.$$

Sachant que la mesure exponentielle est équivalente à la mesure népérienne, la spécification non-paramétrique népérienne de ces mesures sont respectivement :

$$D_{\text{exp}}^{t+1}(x^t, y^t; \alpha^t, \beta^t) \equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \ln(x^t) - \delta^t \alpha^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^{t+1} \ln(x_j^{t+1}), \right.$$

$$\left. \ln(y^t) + \delta^t \beta^t \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^{t+1} \ln(y_j^{t+1}), \theta^{t+1} \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^{t+1} = 1 \right\},$$

$$D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^{t+1}; \alpha^{t+1}, \beta^{t+1}) \equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t+1} : \ln(x^{t+1}) - \delta^{t+1} \alpha^{t+1} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t), \right. \\ \left. \ln(y^{t+1}) + \delta^{t+1} \beta^{t+1} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(y_j^t), \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\}.$$

De manière similaire, les mesures de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen exponentiels nécessitent des scores d'efficacité croisés relatifs à des unités de production fictives. Ces dernières sont composées de la combinaison des inputs et des outputs des périodes  $(t)$  et  $(t+1)$  tel que nous avons  $(x^t, y^{t+1})$  et  $(x^{t+1}, y^t)$ . Ainsi, les mesures de distance orientées en input de ces observations selon la méthode DEA, par rapport à la technologie de la période  $(t)$ , peuvent être définies comme suit :

$$D_{\text{exp}}^t(x^t, y^{t+1}; \alpha^t, 0) \equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \ln(x^t) - \delta^t \alpha^t \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t), \right. \\ \left. \ln(y^{t+1}) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(y_j^t), \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\},$$

$$D_{\text{exp}}^t(x^{t+1}, y^t; \alpha^{t+1}, 0) \equiv \sup_{\delta} \left\{ \delta^{t+1} : \ln(x^{t+1}) - \delta^{t+1} \alpha^{t+1} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(x_j^t), \right. \\ \left. \ln(y^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \ln(y_j^t), \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\}.$$

Pour chaque période, selon l'orientation des mesures, les paramètres  $(\alpha^t, \beta^t)$  et  $(\alpha^{t+1}, \beta^{t+1})$  prendront successivement les valeurs suivantes :  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . L'évaluation des performances se fait sous l'hypothèse de rendements d'échelle variables.

#### 4.2.2 Résultats

Le tableau 4.2 présente les mesures de productivité de Luenberger exponentielles orientées à la fois en input, en output et dans le graphe. Nous avons les indicateurs par période puis les estimations globales. Dans le tableau 4.3, nous offrons une décomposition des indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels en deux composantes à savoir, le changement d'efficacité (EFFCH) et

Période	2008	2009	2008/2009
<b>Orientation en inputs</b>			
République Tchèque	-0,0167	-0,0339	-0,0253
Danemark	0,1240	0,1256	0,1248
Espagne	-0,1568	-0,1369	-0,1469
France	Infini	Infini	Infini
Lettonie	0,3572	0,1926	0,2749
Lituanie	0,1979	0,0552	0,1266
Luxembourg	0,0228	-0,0545	-0,0159
Pays-Bas	0,0922	0,0260	0,0591
Slovaquie	-0,0021	-0,1381	-0,0701
Finlande	0,0426	0,0409	0,0417
Suède	0,0601	0,0625	0,0613
Royaume Uni	-0,0644	-0,1567	-0,1105
<b>Orientation en outputs</b>			
République Tchèque	-0,0260	-0,0476	-0,0368
Danemark	0,1188	0,1187	0,1188
Espagne	-0,2050	-0,2063	-0,2056
France	0,0932	-0,0035	0,0448
Lettonie	Infini	0,2977	Infini
Lituanie	Infini	0,1095	Infini
Luxembourg	Infini	Infini	Infini
Pays-Bas	0,1089	0,0388	0,0739
Slovaquie	-0,0555	-0,2127	-0,1341
Finlande	0,0512	0,0540	0,0526
Suède	0,0722	0,0825	0,0773
Royaume Uni	-0,0644	-0,1314	-0,0979
<b>Orientation dans le graphe</b>			
République Tchèque	-0,0102	-0,0198	-0,0150
Danemark	0,0607	0,0610	0,0609
Espagne	-0,0856	-0,0779	-0,0817
France	0,0609	-0,0035	0,0287
Lettonie	0,3572	0,1169	0,2371
Lituanie	0,1332	0,0392	0,0862
Luxembourg	0,0228	-0,0442	-0,0107
Pays-Bas	0,0473	0,0156	0,0315
Slovaquie	-0,0021	-0,0829	-0,0425
Finlande	0,0232	0,0233	0,0233
Suède	0,0328	0,0356	0,0342
Royaume Uni	-0,0331	-0,0715	-0,0523

TABLE 4.2 – Indicateurs de productivité de Luenberger exponentiels

Décomposition	EFFCH	TECH	Indicateur
<b>Orientation en inputs</b>			
République Tchèque	0	-0,0253	-0,0253
Danemark	0,0703	0,0545	0,1248
Espagne	-0,1337	-0,0131	-0,1469
France	0	Infini	Infini
Lettonie	0,0834	0,1915	0,2749
Lituanie	0	0,1266	0,1266
Luxembourg	0	-0,0159	-0,0159
Pays-Bas	0	0,0591	0,0591
Slovaquie	0	-0,0701	-0,0701
Finlande	0,1145	-0,0727	0,0417
Suède	0,1383	-0,0770	0,0613
Royaume Uni	-0,0065	-0,1040	-0,1105
<b>Orientation en outputs</b>			
République Tchèque	0	-0,0368	-0,0368
Danemark	0,0701	0,0487	0,1188
Espagne	-0,2354	0,0298	-0,2056
France	0	0,0448	0,0448
Lettonie	0,3071	Infini	Infini
Lituanie	0	Infini	Infini
Luxembourg	0	Infini	Infini
Pays-Bas	0	0,0739	0,0739
Slovaquie	0	-0,1341	-0,1341
Finlande	0,0804	-0,0278	0,0526
Suède	0,1553	-0,0780	0,0773
Royaume Uni	-0,0055	-0,0924	-0,0979
<b>Orientation dans le graphe</b>			
République Tchèque	0	-0,0150	-0,0150
Danemark	0,0351	0,0257	0,0609
Espagne	-0,0916	0,0099	-0,0817
France	0	0,0287	0,0287
Lettonie	0,0834	0,1536	0,2371
Lituanie	0	0,0862	0,0862
Luxembourg	0	-0,0107	-0,0107
Pays-Bas	0	0,0315	0,0315
Slovaquie	0	-0,0425	-0,0425
Finlande	0,0513	-0,0280	0,0233
Suède	0,0734	-0,0392	0,0342
Royaume Uni	-0,0030	-0,0493	-0,0523

TABLE 4.3 – Décomposition des indicateurs de productivité de Luenberger

	<b>IL</b>	<b>2008 OL</b>	<b>LHM</b>
<b>République Tchèque</b>	-0,0275	-0,0689	-0,0414
<b>Danemark</b>	-0,0104	0,1088	0,1193
<b>Espagne</b>	-0,0968	-0,3048	-0,2080
<b>France</b>	-0,0295	0,0609	0,0904
<b>Lettonie</b>	-0,3572	0,0596	0,4168
<b>Lituanie</b>	-0,1014	0,1985	0,2999
<b>Luxembourg</b>	-0,0228	-0,0058	0,0169
<b>Pays-Bas</b>	-0,0632	0,0267	0,0899
<b>Slovaquie</b>	-0,0301	-0,0857	-0,0556
<b>Finlande</b>	-0,0363	0,0075	0,0438
<b>Suède</b>	-0,0522	0,0094	0,0616
<b>Royaume Uni</b>	-0,0708	-0,1235	-0,0526
	<b>IL</b>	<b>2009 OL</b>	<b>LHM</b>
<b>République Tchèque</b>	-0,0177	-0,0725	-0,0548
<b>Danemark</b>	-0,0104	0,1088	0,1193
<b>Espagne</b>	-0,0941	-0,3048	-0,2107
<b>France</b>	-0,0058	-0,0035	0,0023
<b>Lettonie</b>	-0,1684	-0,0157	0,1527
<b>Lituanie</b>	0,0129	0,1065	0,0936
<b>Luxembourg</b>	0,0442	-0,0668	-0,1110
<b>Pays-Bas</b>	-0,0081	0,0126	0,0208
<b>Slovaquie</b>	-0,0018	-0,2170	-0,2152
<b>Finlande</b>	-0,0352	0,0075	0,0427
<b>Suède</b>	-0,0554	0,0094	0,0648
<b>Royaume Uni</b>	-0,0625	-0,1838	-0,1214
	<b>2008/2009 LHM</b>		
<b>République Tchèque</b>	-0,0481		
<b>Danemark</b>	0,1193		
<b>Espagne</b>	-0,2093		
<b>France</b>	0,0464		
<b>Lettonie</b>	0,2847		
<b>Lituanie</b>	0,1968		
<b>Luxembourg</b>	-0,0470		
<b>Pays-Bas</b>	0,0553		
<b>Slovaquie</b>	-0,1354		
<b>Finlande</b>	0,0433		
<b>Suède</b>	0,0632		
<b>Royaume Uni</b>	-0,0870		

TABLE 4.4 – Indicateurs de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen

	$\rho^{2008(2009)}$				$\rho^{2009(2008)}$			
	Prix SAU	SAU	Prod. (mill€)	Prod. (KT)	Prix SAU	SAU	Prod. (mill€)	Prod. (KT)
Orientation	Inputs		Outputs		Inputs		Outputs	
Rép. Tchèque	3,2557	0,4257	-2,6473	-2,8869	-1,6036	-0,2097	1,4481	1,5792
Danemark	1,3215	0,0690	1,0193	0,7512	0,6047	0,0316	0,4728	0,3484
Espagne	0,0573	0,1257	0,1303	-0,3290	0,0710	0,1558	0,1608	-0,4061
France	Infini	Infini	-0,6533	0,0377	Infini	Infini	-17,3473	1,0000
Lettonie	-2,3671	-0,0229	Infini	Infini	3,3646	0,0325	0,2003	-0,0527
Lituanie	-0,5124	0,3876	Infini	Infini	1,8378	-1,3904	1,8127	0,9728
Luxembourg	4,9883	-1,0000	Infini	Infini	2,0839	-0,4177	Infini	Infini
Pays-Bas	1,5145	-0,6851	-0,2448	-0,1159	-5,3716	2,4298	0,6871	0,3252
Slovaquie	-17,8219	19,2958	-1,5444	-3,9110	0,2681	-0,2902	0,4029	1,0204
Finlande	0,0298	0,0706	0,4988	0,0112	0,0315	0,0748	0,4810	0,0108
Suède	0,6399	0,2562	0,3024	0,0457	0,7050	0,2822	0,3033	0,0458
Royaume Uni	1,4985	0,9699	-2,8530	-1,8035	-0,6429	-0,4161	1,4597	0,9227
Orientation	Graphe							
Rép. Tchèque	5,3442	0,6988	-6,7743	-7,3874	-2,7460	-0,3591	3,4809	3,7959
Danemark	2,7006	0,1410	1,9960	1,4710	1,2444	0,0650	0,9197	0,6778
Espagne	0,1050	0,2303	0,2668	-0,6738	0,1248	0,2738	0,3172	-0,8011
France	-0,0958	-0,4848	-1,0000	0,0576	-1,6614	-8,4095	-17,3473	1,0000
Lettonie	-2,3671	-0,0229	-0,2178	0,0573	5,5417	0,0536	0,5099	-0,1342
Lituanie	-0,7615	0,5761	-1,4907	-0,8000	2,5860	-1,9565	5,0625	2,7167
Luxembourg	4,9883	-1,0000	2,9351	0,2555	2,5690	-0,5150	1,5116	0,1316
Pays-Bas	2,9520	-1,3353	-0,5635	-0,2667	-8,9707	4,0578	1,7124	0,8105
Slovaquie	-17,8219	19,2958	-41,2631	-104,4917	0,4466	-0,4835	1,0340	2,6183
Finlande	0,0545	0,1293	1,0981	0,0247	0,0554	0,1314	1,1156	0,0251
Suède	1,1725	0,4693	0,6657	0,1006	1,2393	0,4961	0,7036	0,1063
Royaume Uni	2,9139	1,8860	-5,5498	-3,5083	-1,4093	-0,9122	2,6841	1,6968

TABLE 4.5 – Paramètres d'influence dynamiques

la transformation technologique (TECH). Le tableau 4.4 concentre les indicateurs de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen (LHM) exponentiels pour chaque période ainsi que la mesure globale relative aux deux périodes consécutives. Notons que IL et OL sont respectivement les indicateurs de quantité de Luenberger exponentiels en input et en output. Ils interviennent dans l'évaluation de la mesure de LHM. Enfin, le tableau 4.5 propose les estimations des paramètres d'influence dynamiques des scores de performance croisés relatifs à deux périodes consécutives. En effet, ces derniers sont nécessaires afin d'obtenir les mesures de productivité dynamiques.

### 4.2.3 Analyse

#### Tableau 4.2

Nous pouvons constater que le Danemark, la Lettonie, la Lituanie, les Pays-Bas, la Finlande et



la Suède ont une mesure de productivité global de Luenberger en input positive. Cette dernière signifie que les pays ont un gain de productivité tel que la quantité de facteurs utilisée a diminué entre 2008 et 2009, pour la production d'un niveau donné d'outputs. A l'inverse, la République Tchèque, l'Espagne, le Luxembourg, la Slovaquie et le Royaume-Uni présentent un indicateur de productivité de Luenberger en output négatif. Ces pays subissent une perte de productivité puisque le niveau d'inputs nécessaire à la production d'une quantité donnée d'outputs a augmenté d'une période à l'autre. Enfin, la France a une mesure de productivité en input infinie telle que la projection des observations ne rencontrent pas les frontières efficientes.

Selon une orientation en output, le Danemark, la France, les Pays-Bas, la Finlande et la Suède possèdent une mesure de productivité de Luenberger positive. En effet, ces pays présentent un gain de productivité c'est-à-dire que la quantité produite a augmenté d'une période à l'autre pour un niveau donné de facteurs. Inversement, la République Tchèque, l'Espagne, la Slovaquie et le Royaume-Uni ont un indicateur négatif. Ce dernier signifie qu'une perte de productivité intervient telle que la production d'outputs a baissé pour une quantité fixe d'inputs utilisés. Enfin, la Lettonie, la Lituanie et le Luxembourg ont une mesure de productivité indéterminée.

Suivant une orientation dans le graphe, le Danemark, la France, la Lettonie, la Lituanie, les Pays-Bas, la Finlande et la Suède présentent un gain de productivité (mesure positive) tel que ces unités de production ont réussi à augmenter leur production et à baisser leurs facteurs utilisés de manière simultanée. En revanche, la République Tchèque, l'Espagne, le Luxembourg, la Slovaquie et le Royaume-Uni subissent une perte de productivité (mesure négative). De ce fait, les outputs produits ont diminué tandis que les inputs utilisés ont accru simultanément d'une période à l'autre. Notons qu'aucun pays ne possède une mesure indéterminée puisque la direction choisie a permis aux projections d'atteindre les frontières efficientes.

### **Tableau 4.3**

Nous observons que la perte de productivité de la République Tchèque, du Luxembourg et de la Slovaquie est provoquée par un retard de mutation technologique que ce soit suivant une orientation en input, en output ou dans le graphe. En effet, on peut voir que ces pays ne présentent aucun changement d'efficacité d'une période à l'autre, ce qui explique leurs scores de performance nuls, toutes orientations confondues, durant les périodes 2008 et 2009 (tableau 4.1). Par ailleurs, on

constate que l'Espagne subit des pertes de productivité provoquées par une baisse de l'efficacité. Un retard dans les changements technologiques existe également selon l'orientation en input. On observe alors, que la diminution de l'efficacité explique les scores de performances positives de l'Espagne en 2008 et en 2009.

Concernant la Finlande et la Suède, nous pouvons noter que ces pays ont des mesures de productivité positives engendrées par un gain d'efficacité, qui pallie un ralentissement de la transformation technologique (composante négative). Cette dernière justifie leurs scores d'efficacité positifs durant les périodes 2008 et 2009.

La France, la Lituanie et les Pays-Bas quant à eux, possèdent des scores de performance nuls et des mesures de productivité positives. Ces dernières sont dues à des transformations technologiques positives.

Le Danemark a un indicateur positif grâce à une hausse de l'efficacité et à un progrès technologique. Cependant, ses scores de performance sont positives c'est-à-dire que les changements induits dans le processus de production ne sont pas suffisants pour que le pays puisse être pleinement efficace.

Enfin, le Royaume-Uni subit une perte de productivité engendrée à la fois par une perte d'efficacité et un ralentissement dans la transformation technologique. La combinaison de ces deux facteurs conduit à l'inefficacité du pays en 2009 alors qu'il était performant en 2008. Réciproquement, la Lettonie connaît la situation inverse puisqu'elle présente un gain d'efficacité et une transformation technologique positive. Ces derniers conduisent le pays à être efficace en 2009 alors qu'elle était inefficace en 2008.

Il est nécessaire de remarquer que suite aux infaisabilités intervenant dans les mesures de productivité de Luenberger (Chambers et al. (1996b)), Briec et Kerstens (2004) proposent l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen basé sur les indicateurs de quantité en input et en output de Luenberger. Ainsi, nous pouvons observer qu'aucune indétermination n'apparaît dans le tableau 4.4. En effet, ce dernier présente les indicateurs de productivité LHM exponentiels périodiques et global relatifs aux périodes 2008 et 2009.

**Tableau 4.4**

Nous notons que la République Tchèque, l'Espagne, la Slovaquie et le Royaume-Uni ont des mesures de productivité de LHM exponentielles négatives que ce soit relativement à la période 2008, 2009 ou dans un contexte global. Ainsi, ces pays présentent une perte de productivité telles que la quantité de facteurs utilisée a augmenté pour la production d'un niveau donné d'outputs, et/ que la quantité produite a baissé pour un niveau fixé d'inputs. Inversement, le Danemark, la France, la Lettonie, la Lituanie, les Pays-Bas, la Finlande et la Suède possèdent des indicateurs de productivité positifs par rapport aux périodes 2008 et 2009 puis, dans un cadre global. En effet, ce pays ont un gain de productivité tel que le niveau de facteurs consommé, pour produire une quantité donnée d'outputs, s'est accru et/ou le niveau de la production a diminué pour une quantité fixe d'inputs. Remarquons que le Luxembourg a un gain de productivité relativement à la période 2008 mais subit une perte de productivité durant l'année 2009 et de manière globale.

Notons que durant la période 2008, les 12 pays européens ont une mesure de quantité de Luenberger en input négative. Cette dernière signifie que ces pays ont vu leur quantité utilisée de facteurs augmenter Pour la production d'un niveau donné d'outputs. Cependant, le Danemark, la France, la Lettonie, la Lituanie et les Pays-Bas possèdent des indicateurs de quantité en output positifs c'est-à-dire que leur quantité produite a haussé pour un même niveau de facteurs. De la même manière, 11 pays européens ont un indicateur de quantité en input négatif pour l'année 2009. En effet, la Lituanie a une mesure positive. On constate également que le Danemark, la Lituanie, les Pays-Bas, la Finlande et la Suède ont un indicateur de quantité en output positif durant cette période.

**Tableau 4.5**

Les mesures de productivité permettent de déduire les paramètres d'influence dynamiques. En effet, ces derniers interviennent lorsque des scores de performances croisés sont estimés. Dans notre exemple empirique, nous retrouvons ces paramètres, estimés de manière non-paramétrique, dans le tableau 4.5. Nous présentons les paramètres  $\rho^{2008(2009)}$  et  $\rho^{2009(2008)}$  pour chaque input et output que ce soit selon une orientation en intrant, en extrants ou, dans le graphe. Notons que les inputs sont composés du prix des SAU<sup>1</sup> et des SAU elles-mêmes. Les outputs sont, quant à eux, constitués de la production en valeur (millions d'euro) et en volume (milliers de tonne).

---

1. SAU est l'acronyme désignant les surfaces agricoles utilisées.

Suivant une orientation en input, nous constatons que le paramètre  $\rho^{2008(2009)}$  du prix des SAU est inférieur à 1 pour l'Espagne, la Lettonie, la Lituanie, la Slovaquie, la Finlande et la Suède. Il est également en dessous de 1 par rapport à la SAU pour la République Tchèque, le Danemark, l'Espagne, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas, la Finlande, la Suède et le Royaume-Uni. Suivant une orientation en output, ce paramètre est inférieur à 1 quant à la production en valeur de la République Tchèque, de l'Espagne, de la France, des Pays-Bas, de la Slovaquie, de la Finlande, de la Suède et du Royaume-Uni. Il est en dessous de 1 relativement à la production en quantité de la République Tchèque, du Danemark, de l'Espagne, de la France, des Pays-Bas, de la Slovaquie, de la Finlande, de la Suède et du Royaume-Uni. Lorsque l'étude est concentrée dans le graphe, le paramètre est inférieur à 1 par rapport au prix des SAU pour l'Espagne, la France, la Lettonie, la Lituanie, la Slovaquie et la Finlande. Il l'est également à l'égard des SAU pour tous les pays exceptés la Slovaquie et le Royaume-Uni. Hormis le Danemark, le Luxembourg et la Finlande, tous les autres pays ont un paramètre ayant une valeur en-dessous de 1 pour la production en euro et, seul le Danemark a un paramètre supérieur à 1 concernant la production en tonne.

A présent, nous nous concentrons sur le paramètre  $\rho^{2009(2008)}$ . Nous observons que suivant une orientation en intrants, la Lettonie, la Lituanie et le Luxembourg ont un paramètre prenant une valeur supérieure à 1 relativement au prix des SAU. Concernant les SAU, seuls les Pays-Bas ont une grandeur au-dessus de 1. De manière similaire, selon une orientation sur les extrants, la République Tchèque, la Lituanie et le Royaume-Uni possèdent un paramètre supérieur à 1 par rapport à la production en valeur et, seuls la République Tchèque et la Slovaquie sont concernés pour la production en quantité. Lorsque l'on s'intéresse à une analyse dans le graphe, on note que le Danemark, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg et la Suède ont une grandeur au-dessus de 1 selon le prix des SAU et, seuls les Pays-Bas sont concernés relativement à la SAU. La République Tchèque, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas, la Slovaquie, la Finlande et le Royaume-Uni ont, quant à eux, un paramètre supérieur à 1 pour la production en euro. Conformément à la production en tonne, la République Tchèque, la Lituanie, la Slovaquie et le Royaume-Uni ont également une grandeur au-dessus de 1. Lorsque ce paramètre prend une valeur supérieure à 1 alors, les influences internes et/ou externes permettent une mutation positive de l'efficacité des unités de production. Remarquons que suivant une étude axée sur les outputs et dans le graphe, la France a un paramètre égal à 1 relativement à la production en quantité. Cette valeur signifie que les facteurs internes et/ou

externes n'interviennent pas dans l'ajustement de la performance du pays à travers les périodes.

## Conclusion

Ce chapitre présente des mesures de productivité exponentielles grâce à la fonction de distance exponentielle présentée dans le chapitre 2. Nous constatons que celles-ci ont une équivalence ayant une nature additive puisque les mesures de distance exponentielles sont log-additives. Ainsi, nous estimons les variations de productivité grâce aux indicateurs de productivité de Luenberger et de Luenberger-Hicks-Moorsteen tels que les mesures de performances sont fournies par les fonctions de distance exponentielles. La définition de ces mesures de productivité nous conduit à déduire une formulation dynamique des mesures d'efficacité exponentielles. Nous observons que dans ce cas, un nouveau paramètre intervient tel que celui-ci représente les contraintes internes et externes influençant la performance des entités productives dans le temps.

Ce chapitre introduit quelques extensions théoriques à la mesure de distance présentée dans le chapitre 2. Cependant, il est possible de réaliser d'autres études qui peuvent amener à de nouveaux résultats, telles les efficacités d'échelle. En effet, nous verrons dans le chapitre suivant que les rendements d'échelle peuvent avoir une influence non-négligeable sur la performance d'une unité de production.



## Chapitre 5

# Mesures d'Efficacité et Rendements d'Echelle Optimaux

Färe et al. (1988) proposent une technologie CES (Constant Elasticity of Substitution) - CET (Constant Elasticity of Transformation) dans un cadre non-paramétrique selon une approche par enveloppement de données. Cet ensemble de production se présente comme étant la généralisation de différentes technologies de production non-paramétriques telle celle de Banker et al. (1984) ou celle de Banker et Maindiratta (1986). En s'appuyant sur la notion de technologies homogènes de degré  $\alpha$ , dans les travaux de Lau (1978) et de Färe et Mitchell (1993), Boussemart et al. (2009) proposent de modéliser ce qu'ils nomment les "rendements d'échelle  $\alpha$ ". Dans un contexte non-paramétrique, ce concept considère des rendements d'échelle strictement croissants et strictement décroissants. En effet, ces derniers sont négligés par les modèles non-paramétriques usuels tels ceux de Charnes et al. (1978), de Banker et al. (1984) ou de Banker et Maindiratta (1986). Les auteurs introduisent cette notion à travers l'analyse de l'efficacité des firmes, relativement à la frontière efficiente de l'ensemble de production. De ce fait, plusieurs mesures d'efficacités ont été appliquées telles les mesures de Debreu (1951)-Farrell (1957), la mesure hyperbolique de Färe et al. (1985) ou la fonction de distance généralisée de Chavas et Cox (1999). L'étude évalue l'impact que peuvent avoir les rendements d'échelle sur la performance des entités de production.

Boussemart et al. (2018), grâce au concept de rendements d'échelle  $\alpha$  et aux mesures de Debreu-Farrell, appliquent le principe de l'extrapolation minimale sur un ensemble d'unités de production. Cette méthode permet de déterminer, de manière non-paramétrique, le meilleur rende-

ment d'échelle global d'un secteur d'activité ou d'un ensemble. En effet, celui-ci signifie que le plus grand nombre de firmes est efficiente relativement au rendement d'échelle considéré. Deux méthodes d'estimation sont proposées par les auteurs, à savoir l'approche par une grille de recherche et la programmation linéaire. La première ne permet pas une évaluation endogène du rendement d'échelle optimal  $\alpha$  tandis que la seconde rend possible cette démarche. Par ailleurs, ils proposent une endogénéisation complète de la détermination de ce rendement d'échelle optimal dans le cadre d'une technologie FDH (Free Disposal Hull) à la fois individuelle mais également globale. Notons que cette dernière est la réunion des ensembles de production individuels.

Ce chapitre est consacré à l'application de la notion de rendements d'échelle optimaux  $\alpha$  à travers des mesures d'efficacité multiplicatives et additives. De ce fait, nous présentons dans une première section le cadre d'analyse adopté dans ce chapitre. La deuxième section est dévolue à l'analyse des rendements d'échelle optimaux globaux tandis que la troisième section introduit le concept de rendements d'échelle optimaux spécifiques. Enfin, la dernière section présente une illustration empirique des éléments qui auront été introduits précédemment.

## 1 Contexte d'Analyse

Soient respectivement les vecteurs d'inputs  $x^t = (x_1^t, \dots, x_m^t) \in \mathbb{R}_+^m$  et d'outputs  $y^t = (y_1^t, \dots, y_n^t) \in \mathbb{R}_+^n$  de la période  $(t)$ , qui permettent de définir la technologie de production  $T^t(x^t, y^t) = \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \text{ peut produire } y^t\}$ , associée à la même période.

Boussemart et al. (2009) présentent le concept de rendement d'échelle  $\alpha$ , associé à un ensemble de production homogène de degré  $\alpha$  (Färe et Mitchell (1993)). Ils considèrent des ensembles productifs qui tiennent compte de rendements d'échelle strictement croissants ou décroissants. Notons que  $T^t$  est homogène de degré  $\alpha$  si pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  on a  $(\lambda x^t, \lambda^\alpha y^t) \in T^t$ . Les auteurs établissent une relation directe entre cette notion d'homogénéité et les rendements d'échelle. De ce fait, pour tout ensemble de production  $T^t$  satisfaisant T1-T4 alors, un  $\alpha > 1$  est relatif à un rendement d'échelle strictement croissant tandis que  $0 < \alpha < 1$  indique un rendement d'échelle strictement décroissant. Ainsi, toute technologie de production vérifiant une homogénéité de degré  $\alpha$ , satisfait également un rendement d'échelle de degré  $\alpha$ . Pour illustrer cette notion, Boussemart et al. (2009) reprennent l'ensemble de production CES-CET (Färe et al. (1988)) qui



est définie de la manière suivante :

$$T_{\alpha,\beta}^t = \left\{ (x^t, y^t) : x^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \cdot \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right), y^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \cdot \Phi_{\beta}(y_j^t) \right), \right. \\ \left. \theta^t \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1 \right\}.$$

Rappelons que cette définition de Färe et al. (1988) est relative à un ensemble productif correspondant à des rendements d'échelle variables et, cette hypothèse est matérialisée par la contrainte  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t = 1$ . Cependant, celle-ci n'est pas compatible avec le concept de rendement d'échelle  $\alpha$ . Ainsi, Boussemart et al. (2009) relaxent celle-ci.

Dans ces travaux, afin de différencier le rendement d'échelle  $\alpha$  et le paramètre intervenant dans de la technologie CES-CET, nous utiliserons dans ce chapitre le terme "rendement d'échelle  $\gamma$ " tel que  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ . Ainsi, selon les travaux de Boussemart et al. (2009), l'ensemble de production CES-CET satisfait : un rendement d'échelle strictement croissant si  $\gamma > 1$ , un rendement d'échelle strictement décroissant si  $0 < \gamma < 1$  et un rendement d'échelle constant si  $\gamma = 1$ . Notons que les auteurs imposent le choix *a priori* des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Rappelons que les mesures de Debreu-Farrell orientées en inputs et en outputs sont respectivement :

$$E_I^t(x^t, y^t) = \inf_{\lambda} \{ \lambda^t : (\lambda^t x^t, y^t) \in T^t \}, \\ E_O^t(x^t, y^t) = \sup_{\lambda} \{ \lambda^t : (x^t, \lambda^t y^t) \in T^t \}.$$

Par ailleurs, la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe pour un vecteur de direction  $g^t = (h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  est définie par :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t \right) \in T^t \right\}.$$

Lorsque le vecteur de direction est  $g^t = (h^t, 0)$  et  $g^t = (0, k^t)$  alors, nous obtenons les mesures CES-CET respectivement orientées en input et en output.

## 2 Rendements d'Echelle Globaux

Dans cette section, nous nous intéressons aux concepts introduits par Boussemart et al. (2009). Suivant les travaux de Boussemart et al. (2010) et Boussemart et al. (2018), nous les appliquons successivement aux mesures de Debreu-Farrell et à la fonction de distance directionnelle CES-CET. Nous montrons que grâce ces mesures d'efficacité, nous pouvons déduire le rendement d'échelle global permettant l'efficacité du plus grand nombre.

### 2.1 Mesures Radiales Non-paramétriques

Cette sous-section est dédiée à l'analyse du meilleur rendement d'échelle global ( $\gamma$ ) relatif à l'ensemble des firmes. Nous menons une première étude en terme d'efficacité individuelle que ce soit dans une orientation en input ou en output. Puis, nous évaluons le rendement d'échelle global  $\gamma$  qui permet au plus grand nombre d'être pleinement performant.

#### 2.1.1 Efficacité en Input

Comme mentionné dans les chapitres précédents, la mesure de Debreu-Farrell en input permet d'évaluer les réductions potentielles à l'utilisation des facteurs de production pour une quantité donnée d'outputs. Dans cette sous-section, nous proposons de définir celle-ci dans le cadre d'une technologie de production CES-CET qui est compatible avec la notion de rendements d'échelle  $\gamma$ .

**Proposition 5.1** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$ , la mesure de Debreu-Farrell en input peut être définie selon le modèle CES-CET, de la manière suivante :*

$$E_I^t(x^t, y^t) = \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \left( \lambda^t x^t \geq \Phi_\alpha^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\alpha(x_j^t) \right), y^t \leq \Phi_\beta^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\beta(y_j^t) \right) \right) \in T_{\alpha, \beta}^t \right\}. \quad (5.1)$$

Boussemart et al. (2009) proposent un programme non-paramétrique selon la méthode DEA,

qui permet d'évaluer la mesure de distance en input. Celui-ci se présente comme suit :

$$\begin{aligned}
 E_I^t(x^t, y^t) &= \min \lambda^t \\
 \text{s.c.} \quad \lambda^t x^t &\geq \Phi_\alpha^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\alpha(x_j^t) \right) \\
 y^t &\leq \Phi_\beta^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\beta(y_j^t) \right) \\
 \lambda^t, \theta^t &\geq 0 .
 \end{aligned}$$

En posant  $\Lambda^t = (\lambda^t)^\alpha$ , nous obtenons le programme linéaire ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 [E_I^t(x^t, y^t)]^\alpha &= \min \Lambda^t \\
 \text{s.c.} \quad \Lambda^t \Phi_\alpha(x^t) &\geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\alpha(x_j^t) \\
 \Phi_\beta(y^t) &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\beta(y_j^t) \\
 \Lambda^t, \theta^t &\geq 0 .
 \end{aligned}$$

Sachant que la notion de rendements d'échelle  $\gamma$  n'exige pas la convexité des ensembles de production, Boussemart et al. (2009) proposent l'estimation de cette mesure de Debreu-Farrell orientée en input dans le cadre d'un ensemble de production FDH. Dans ce cas, pour chaque firme  $j \in \mathcal{J}$ , la technologie de production FDH individuelle est définie par :

$$Q_{\alpha,\beta}^t(x_j^t, y_j^t) = \left\{ (x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha} x_j^t, y^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta} y_j^t, \theta^t \geq 0, j \in \mathcal{J} \right\}. \quad (5.2)$$

Relativement à  $Q_{\alpha,\beta}^t$  et pour tout  $j \in \mathcal{J}$ , Boussemart et al. (2009) et, Boussemart et al. (2010) démontrent que la mesure de performance orientée en input de la firme, ayant pour observation

$(x_l, y_l)$ , est :

$$E_I^{t(j)}(x_l^t, y_l^t) = \inf_{\lambda} \{ \lambda^t : (\lambda^t x_l^t, y_l^t) \in Q_{\alpha, \beta}(x_j^t, y_j^t) \} \quad (5.3)$$

$$= \left[ \max_{r \in [n]} \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right]^{\beta/\alpha} \times \left[ \max_{i \in [m]} \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right]. \quad (5.4)$$

Ainsi, nous obtenons par énumération, les mesures de Debreu-Farrell relative à chaque technologie de production individuelle  $Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t)$ . Il est à noter que  $E_I^{t(l)}(x_l^t, y_l^t) = 1$ .

### 2.1.2 Performance en Output

La mesure d'efficacité de Debreu-Farrell orientée en output permet d'estimer les gains potentiels de production pour un niveau donné de facteurs. En s'inspirant des travaux de Boussemart et al. (2009), nous présentons cette mesure selon le modèle non-paramétrique CES-CET de Färe et al. (1988), adapté au concept de rendements d'échelle  $\gamma$ .

**Proposition 5.2** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$ , la mesure de distance de Debreu-Farrell en output selon le modèle CES-CET, peut être définie de la manière suivante :*

$$E_O^t(x^t, y^t) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \left( x^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right), \lambda^t y^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right) \right) \in T_{\alpha, \beta}^t \right\}. \quad (5.5)$$

Le programme d'optimisation non-paramétrique associé à cette définition est le suivant :

$$\begin{aligned} E_O^t(x^t, y^t) &= \max \lambda^t \\ \text{s.c.} \quad & x^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right) \\ & \lambda^t y^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right) \\ & \lambda^t, \theta_j^t \geq 0. \end{aligned}$$

Par un changement de variable tel que  $\Lambda^t = (\lambda^t)^{\beta}$ , le programme ci-dessus devient linéaire et,

caractérisé par :

$$\begin{aligned}
 [E_O^t(x^t, y^t)]^\alpha &= \max \Lambda^t \\
 \text{s.c.} \quad \Phi_\alpha(x^t) &\geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\alpha(x_j^t) \\
 \Lambda^t \Phi_\beta(y^t) &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_\beta(y_j^t) \\
 \Lambda^t, \theta^t &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Dans le cadre du modèle FDH, nous pouvons également obtenir la mesure d'efficacité des firmes grâce à la méthode d'énumération individuelle. Pour tout  $j \in \mathcal{J}$ , la mesure de Debreu-Farrell orientée en output de l'observation  $(x_l, y_l)$  est :

$$E_O^{t(j)}(x_l^t, y_l^t) = \sup_{\lambda} \{ \lambda^t : (x_l^t, \lambda^t y_l^t) \in Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t) \} \quad (5.6)$$

$$= \left[ \min_{i \in [m]} \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right]^{\alpha/\beta} \times \left[ \min_{r \in [n]} \frac{y_{j,r}^t}{y_{l,r}^t} \right]. \quad (5.7)$$

L'évaluation de la performance est faite relativement à la technologie de production individuelle de chaque entité de production  $j \in \mathcal{J}$ . Remarquons que  $E_O^{t(l)}(x_l^t, y_l^t) = 1$ .

### 2.1.3 Extrapolation Minimale et Approche Globale

Nous avons vu précédemment que nous pouvons obtenir les mesures d'efficacité radiales de telle sorte le score de performance est le meilleur possible compte tenu du rendement d'échelle  $\gamma$ . Suivant Boussemart et al. (2009), nous présentons dans un premier temps, l'estimation de mesures de Debreu-Farrell dans le cadre d'un modèle FDH global. Suivant les travaux de Boussemart et al. (2018), nous introduisons, dans un second temps, une approche pour évaluer le rendement d'échelle  $\gamma$  global relatif à l'ensemble des unités de production.

Pour chaque entité de production  $j \in \mathcal{J}$ , soit la technologie de production individuelle  $Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t)$ . L'ensemble de production FDH global  $S_{\alpha, \beta}^t$  est constitué par la réunion de chaque

technologie individuelle telle que :

$$S_{\alpha,\beta}^t = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} Q_{\alpha,\beta}^t(x_j^t, y_j^t) . \quad (5.8)$$

Pour tout ensemble  $A^t = \{(x_1^t, y_1^t), \dots, (x_J^t, y_J^t)\}$ , si  $(0, 0) \in A^t$  alors,  $S_{\alpha,\beta}^t$  satisfait les propriétés  $T1 - T4$  et, vérifie un rendement d'échelle  $\gamma = \alpha/\beta$ . Par ailleurs, grâce à la définition de  $S_{\alpha,\beta}^t$ , nous pouvons établir que les mesures de Debreu-Farrell orientées en input et en output de l'observation  $(x_l^t, y_l^t) \in S_{\alpha,\beta}^t$ , dans le cadre d'un modèle FDH global, sont respectivement :

$$E_I^{t(*)}(x_l^t, y_l^t) = \min_{j \in \mathcal{J}} \left( \left[ \max_{r \in [n]} \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right]^{\beta/\alpha} \times \left[ \max_{i \in [m]} \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right] \right) , \quad (5.9)$$

$$E_O^{t(*)}(x_l^t, y_l^t) = \max_{j \in \mathcal{J}} \left( \left[ \min_{i \in [m]} \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right]^{\alpha/\beta} \times \left[ \min_{r \in [n]} \frac{y_{j,r}^t}{y_{l,r}^t} \right] \right) . \quad (5.10)$$

Les mesures présentées ci-dessus permettent de déterminer les meilleurs scores de performance en input et en output, de chaque unité de production relativement à l'ensemble de production global. Grâce à ces derniers, nous pouvons déterminer le meilleur rendement d'échelle global  $\gamma^*$ . Pour ce faire, nous introduisons des indices d'ajustement en input ( $M_I$ ) et en output ( $M_O$ ) tels que  $\gamma_I^*$  maximise  $M_I$  et,  $\gamma_O^*$  minimise  $M_O$ . Ces deux indices sont définie de la manière suivante :

$$M_I^t(X, Y) = \max_{\gamma} \prod_{j \in \mathcal{J}} E_I^{t(*)}(x_j^t, y_j^t) ,$$

$$M_O^t(X, Y) = \min_{\gamma} \prod_{j \in \mathcal{J}} E_O^{t(*)}(x_j^t, y_j^t) .$$

Deux méthodes d'estimation sont présentées par Boussemart et al. (2018). La première consiste à appliquer la méthode de grille de recherche de telle sorte que les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixées *a priori*. Dans ce cas, la détermination du rendement d'échelle  $\gamma^*$  n'est pas incorporé dans l'estimation de l'indice. La seconde approche permet d'évaluer de manière endogène le rendement d'échelle  $\gamma^*$  grâce à la méthode de programmation linéaire. Dans cette sous-section, nous nous intéressons à cette dernière méthode.

Sachant que  $\gamma = \alpha/\beta$ , l'indice d'ajustement en input défini de manière détaillée, est :

$$M_I^t(X, Y) = \max_{\gamma} \prod_{l \in \mathcal{J}} \min_{j \in \mathcal{J}} \left( \left[ \max_{r \in [n]} \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right]^{1/\gamma_I} \times \left[ \max_{i \in [m]} \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right] \right). \quad (5.11)$$

La transformation logarithmique de (5.11) s'écrit :

$$\ln(M_I(X, Y)) = \max_{\gamma} \sum_{l \in \mathcal{J}} \min_{j \in \mathcal{J}} \left( \frac{1}{\gamma_I} \cdot \ln \left[ \max_{r \in [n]} \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right] + \ln \left[ \max_{i \in [m]} \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right] \right). \quad (5.12)$$

Posons,  $\eta = 1/\gamma_I$ ,  $a_{l,j} = \ln \left[ \max_{r \in [n]} \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right]$  et,  $b_{l,j} = \ln \left[ \max_{i \in [m]} \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right]$ . De ce fait, l'indice logarithmique (5.12) devient,

$$\ln(M_I(X, Y)) = \max_{\eta} \sum_{l \in \mathcal{J}} \min_{j \in \mathcal{J}} (\eta \cdot a_{l,j} + b_{l,j}). \quad (5.13)$$

Le programme linéaire associé à (5.13) est alors,

$$\begin{aligned} \ln(M_I(X, Y)) &= \max_{\eta, \lambda} \sum_{l \in \mathcal{J}} \lambda_l \\ \text{s.c.} \quad \lambda_l &\leq \eta \cdot a_{l,j} + b_{l,j} \quad \forall l, j \in \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nous pouvons voir que le programme ci-dessus permet une estimation endogène du paramètre  $\eta$  de telle sorte que le rendement d'échelle  $\gamma_I^*$  peut en être déduit. Étant relativement similaire au cas d'une orientation en input, nous omettons de présenter l'indice d'ajustement en output.

## 2.2 Mesures Directionnelles Non-paramétriques

Dans cette sous-section, nous présentons la notion de rendements d'échelle  $\gamma$  dans le cadre de la fonction de distance directionnelle CES-CET, introduite dans le Chapitre 3. De ce fait, nous proposons d'estimer le meilleur rendement d'échelle global relatif à un ensemble de firmes grâce à une mesure non-radiale directionnelle.

### 2.2.1 Orientation en Input et en Output

Nous avons vu dans le Chapitre 3 que la fonction de distance directionnelle CES-CET (FDD CES-CET) peut s'inscrire dans un ensemble de production CES-CET suivant une approche non-paramétrique. En ce sens, la performance de chaque firme est évaluée de manière linéaire. La FDD CES-CET orientée en input estime la réduction potentielle des facteurs utilisés pour une quantité donnée de production tandis que la mesure orientée en output évalue l'augmentation éventuelle de la production pour un niveau défini d'inputs.

**Proposition 5.3** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (h^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$  ou  $g^t = (0, k^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , les fonctions de distance directionnelles CES-CET orientées en input et en output définies selon le modèle CES-CET, sont respectivement :*

$$D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x^t - \delta^t h^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right), \right. \\ \left. y^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}, \quad (5.15)$$

$$D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right), \right. \\ \left. y^t + \delta^t k^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.16)$$

Le programme d'optimisation non-paramétrique relatif à chaque mesure présentée ci-dessus, peut être fourni. Cependant, nous présentons uniquement celui de la mesure en input. En s'inspirant



des travaux de Boussemart et al. (2009), nous pouvons établir que :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c.} \quad & x^t - \delta^t h^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right) \\
 & y^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right) \\
 & \delta^t, \theta^t \geq 0 .
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

En développant chaque contrainte, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0) &= \max \delta^t \\
 \text{s.c.} \quad & (x^t)^{\alpha} - (\delta^t)^{\alpha} (h^t)^{\alpha} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_j^t)^{\alpha} \\
 & (y^t)^{\beta} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_j^t)^{\beta} \\
 & \delta^t, \theta^t \geq 0 .
 \end{aligned}$$

En posant  $\Delta^t = (\delta^t)^{\alpha}$ , nous avons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 [D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0)]^{\alpha} &= \max \Delta^t \\
 \text{s.c.} \quad & (x^t)^{\alpha} - \Delta^t (h^t)^{\alpha} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_j^t)^{\alpha} \\
 & (y^t)^{\beta} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_j^t)^{\beta} \\
 & \delta^t, \theta^t \geq 0 .
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

De même que dans la sous-section précédente et en s'inspirant de Boussemart et al. (2018), nous proposons de déterminer le meilleur rendement d'échelle  $\gamma^*$  grâce aux mesures de performance directionnelles CES-CET. De ce fait, nous proposons également des indicateurs d'ajustement en input ( $M_{I,CES}^t$ ) et en output ( $M_{O,CES}^t$ ) tels que  $\gamma_I^*$  et  $\gamma_O^*$  minimisent ces deux grandeurs.

Ces dernières sont définies par :

$$M_{I,CES}^t(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{J}} D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0), \quad (5.19)$$

$$M_{O,CES}^t(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{J}} D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t). \quad (5.20)$$

Les rendements d'échelle  $\gamma_I^*$  et  $\gamma_O^*$  correspondent aux valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  qui permettent au plus grand nombre d'unités de production d'être efficace. De ce fait, plus la valeur des indicateurs est faible, plus les observations sont proches de la frontière efficiente.

Dans la lignée de Boussemart et al. (2009) et Boussemart et al. (2018), nous pouvons également inscrire les FDD CES-CET dans le cadre du modèle FDH. Rappelons que la technologie de production FDH individuelle de chaque firme  $j \in \mathcal{J}$  est définie par :  $Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t) = \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha} x_j^t, y^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta} y_j^t, \theta_j^t \geq 0, j \in \mathcal{J}\}$ . Ainsi, nous pouvons fournir les propositions ci-dessous.

**Proposition 5.4** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (h^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$ , la mesure de performance directionnelle CES-CET axée sur les intrants selon le modèle FDH, de l'observation  $(x_l^t, y_l^t)$  est :*

$$D_{\alpha, \beta}^{t(j)}(x_l^t, y_l^t; h^t, 0) = \min_{i \in [m]} \left[ \frac{1}{h_i^t} \left( (x_{l,i}^t)^\alpha - \left[ \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^\beta \right] \cdot (x_{j,i}^t)^\alpha \right)^{1/\alpha} \right]. \quad (5.21)$$

*Preuve :*

Soit la FDD CES-CET orientée en input définie dans le cadre du modèle FDH tel que  $D_{\alpha, \beta}^{t(j)}(x_l^t, y_l^t; h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x_l^t - \delta^t h^t, y_l^t \right) \in Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t) \right\}$ . En développant cette définition, pour tout  $i \in [m]$  et tout  $r \in [n]$ , nous avons :  $D_{\alpha, \beta}^{t(j)}(x_l^t, y_l^t; h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : x_{l,i}^t - \delta^t h_i^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha} x_{j,i}^t, y_{l,r}^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta} y_{j,r}^t, \theta_j^t \geq 0 \right\}$ . Nous pouvons obtenir l'expression de  $\theta_j^t$  grâce à la contrainte concernant les extrants tel que  $D_{\alpha, \beta}^{t(j)}(x_l^t, y_l^t; h^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : x_{l,i}^t - \delta^t h_i^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha} x_{j,i}^t, \theta_j^t \geq \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^\beta, \theta_j^t \geq 0 \right\}$ . En remplaçant  $\theta_j^t$  par son expression dans la contrainte relative aux intrants,

nous obtenons,  $D_{\alpha,\beta}^{t(j)}(x_l^t, y_l^t; h^t, 0) = \min_{i \in [m]} \left[ \frac{1}{h_i^t} \left( (x_{l,i}^t)^\alpha - \left[ \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^\beta \right] \cdot (x_{j,i}^t)^\alpha \right)^{1/\alpha} \right] \square$ .

**Proposition 5.5** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (0, k^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , la mesure de distance directionnelle CES-CET orientée en output selon le modèle FDH, de toute unité de production  $(x_l^t, y_l^t)$  est :*

$$D_{\alpha,\beta}^{t(j)}(x_l^t, y_l^t; h^t, 0) = \min_{r \in [n]} \left[ \frac{1}{k_r^t} \left( \left[ \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^\alpha \right] \cdot (y_{j,r}^t)^\beta - (y_{l,r}^t)^\beta \right)^{1/\beta} \right]. \quad (5.22)$$

La preuve de cette proposition étant similaire à celle de la Proposition 5.4. Ainsi, elle est omise.

Les indicateurs d'ajustement relatifs au modèle FDH deviennent alors,

$$M_{I,CES}^t(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{l \in \mathcal{J}} \min_{i \in [m]} \left[ \frac{1}{h_i^t} \left( (x_{l,i}^t)^\alpha - \left[ \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^\beta \right] \cdot (x_{j,i}^t)^\alpha \right)^{1/\alpha} \right], \quad (5.23)$$

$$M_{O,CES}^t(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{l \in \mathcal{J}} \min_{r \in [n]} \left[ \frac{1}{k_r^t} \left( \left[ \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^\alpha \right] \cdot (y_{j,r}^t)^\beta - (y_{l,r}^t)^\beta \right)^{1/\beta} \right]. \quad (5.24)$$

### 2.2.2 Relations d'Equivalence

Boussemart et al. (2009) établissent des relations d'équivalence entre la fonction de distance hyperbolique et les mesures de Debreu-Farrell lorsque l'ensemble de production satisfait un rendement d'échelle  $\gamma$ . Ils démontrent qu'un lien existe également entre les mesures de Debreu-Farrell et la fonction de distance généralisée de Chavas et Cox (1999). Nous démontrons dans cette sous-section que sous l'hypothèse d'un rendement d'échelle  $\gamma$ , il existe des relations d'équivalence entre les mesures radiales usuelles et la FDD CES-CET. Par ailleurs, nous montrons que les mesures directionnelles CES-CET orientées en input et en output sont liées lorsque la technologie de production vérifie cette hypothèse.

Rappelons que dans le cadre de la technologie de production CES-CET, les fonctions de dis-

tance de Shephard orientées en input et en output sont respectivement :

$$D_I^t(x^t, y^t) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda^t : \left( \frac{x^t}{\lambda^t}, y^t \right) \in T^t \right\},$$

$$D_O^t(x^t, y^t) = \inf_{\lambda} \left\{ \lambda^t : \left( x^t, \frac{y^t}{\lambda^t} \right) \in T^t \right\}.$$

Notons que les mesures de Debreu-Farrell sont l'inverse des fonctions de distance de Shephard.

**Proposition 5.6** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (x^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$  ou  $g^t = (0, y^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , on a les relations suivantes :*

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - \frac{\alpha}{E_I^t(x^t, y^t)} = 1 - \frac{\alpha}{D_I^t(x^t, y^t)}, \quad (5.25)$$

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) = E_O^t(x^t, y^t) - \beta = \frac{1}{D_O^t(x^t, y^t)} - \beta. \quad (5.26)$$

*Preuves :*

*Equation (5.25) :* Supposons que  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t - \delta^t x^t, y^t \right) \in T_{\alpha,\beta}^t \right\}$ . Nous pouvons factoriser  $\left( x^t - \delta^t x^t \right)$  afin d'obtenir  $\left( 1 - \delta^t \right) x^t$ . En posant  $\lambda^t = \left( 1 - \delta^t \right)$ , nous avons  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - \frac{\alpha}{\inf_{\lambda} \left\{ \lambda^t : (\lambda^t x^t, y^t) \in T_{\alpha,\beta}^t \right\}}$ . Dans ce cas,  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - \frac{\alpha}{E_I^t(x^t, y^t)} \equiv 1 - \frac{\alpha}{D_I^t(x^t, y^t)} \square$ .

*Equation (5.26) :* Admettons que  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t, y^t + \delta^t y^t \right) \in T_{\alpha,\beta}^t \right\}$ . En factorisant  $\left( y^t + \delta^t y^t \right)$  par  $y^t$ , nous avons  $\left( 1 + \delta^t \right) y^t$ . De ce fait, si nous posons  $\lambda^t = \left( 1 + \delta^t \right)$ , nous avons  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda^t : (x^t, \lambda^t y^t) \in T_{\alpha,\beta}^t \right\} - \beta = 1$ . Ainsi, nous obtenons effectivement  $D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) = E_O^t(x^t, y^t) - \beta \equiv \frac{1}{D_O^t(x^t, y^t)} - \beta \square$ .

Cette proposition démontre qu'il est possible de déduire les valeurs des fonctions de distance directionnelles CES-CET orientées en input et en output grâce aux mesures de Debreu-Farrell ou de Shephard. Nous pouvons également établir que lorsque l'ensemble de production satisfait un rendement d'échelle  $\gamma$ , il existe une relation d'équivalence entre les mesures directionnelles CES-CET orientées en input et en output.

**Proposition 5.7** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (x^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$  ou  $g^t = (0, y^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , on a :*

$$D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) = 1 - \left( D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t)^\beta + 1 \right)^{-1/\gamma}, \quad (5.27)$$

$$D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) = \left( 1 - D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) \right)^{-\gamma} - 1. \quad (5.28)$$

*Preuves :*

*Equation (5.27) :* Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , on sait que  $(x^t, E_O^t(x^t, y^t) \cdot y^t)$  appartient à la frontière efficiente de l'ensemble de production. Par ailleurs, si la technologie de production est homogène de degré  $\gamma$  alors,  $(\lambda x^t, \lambda^\gamma E_O^t(x^t, y^t) \cdot y^t)$  appartient également à cette frontière. On peut établir que l'unité de production  $(x^t - D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) \odot x^t, y^t)$  appartient également à cette dernière. De ce fait, on peut affirmer que  $(\lambda x^t, \lambda^\gamma E_O^t(x^t, y^t) \cdot y^t) = (x^t - D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0) \odot x^t, y^t)$  tel que  $\lambda = 1 - D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; x^t, 0)$  et  $\lambda^\gamma E_O^t(x^t, y^t) = 1$ . En remplaçant  $\lambda$  par son expression dans la dernière égalité, nous obtenons l'équation (5.27)  $\square$ .

*Equation (5.28) :* Pour  $(E_I^t(x^t, y^t) \cdot x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  appartenant à la frontière de production efficiente, si l'ensemble de production est homogène de degré  $\gamma$  alors,  $(\lambda E_I^t(x^t, y^t) \cdot x^t, \lambda^\gamma y^t)$  repose également sur cette frontière. Par ailleurs, on peut statuer que  $(x^t, y^t + D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) \odot y^t)$  appartient à cette dernière. Ainsi, on a  $(\lambda E_I^t(x^t, y^t) \cdot x^t, \lambda^\gamma y^t) = (x^t, y^t + D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t) \odot y^t)$  avec  $\lambda E_I^t(x^t, y^t) = 1$  et  $\lambda^\gamma = 1 + D_{\alpha, \beta}^t(x^t, y^t; 0, y^t)$ . En remplaçant  $\lambda$  par son expression dans la première égalité, on obtient (5.28)  $\square$ .

### 2.2.3 Orientation dans le Graphe

Nous avons vu précédemment la notion de rendements d'échelle  $\gamma$  dans le cadre des mesures directionnelles CES-CET orientées en input et en output. Dans cette sous-section, nous inscrivons la FDD CES-CET orientée dans le graphe, dans ce concept et selon une approche non-paramétrique.

**Proposition 5.8** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (h^t, k^t)$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe selon*

le modèle CES-CET est définie par :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x^t - \delta^t h^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right), \right. \\ \left. y^t + \delta^t k^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.29)$$

Le programme associé à cette définition est présenté ci-dessous :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \max \delta^t \\ \text{s.c.} \quad x^t - \delta^t h^t \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right) \\ y^t + \delta^t k^t \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right) \\ \delta^t, \theta^t \geq 0. \quad (5.30)$$

Grâce au Chapitre 3, nous savons que ce programme d'optimisation ne peut être estimé de manière non-paramétrique et linéaire que si et seulement si,  $\alpha = \beta = s$ . Cette contrainte signifie que la technologie de production vérifie un rendement d'échelle constant puisque  $\gamma = 1$ . Dans ce cas, le programme (5.30) peut devenir linéaire grâce à un changement de variable.

En ce sens, afin de déterminer un rendement d'échelle  $\gamma$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$ , nous proposons une mesure de distance directionnelle CES-CET mixte orientée dans le graphe. Cette dernière est définie ci-dessous.

**Définition 5.9** Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , l'application  $MD_{\alpha,\beta}^t : \mathbb{R}_+^{m+n} \times \mathbb{R}_+^{m+n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  définie par :

$$MD_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) = \begin{cases} \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \left( \Phi_{\alpha}^{-1}(\Phi_{\alpha}(x^t) - \delta^t \Phi_{\alpha}(h^t)), \Phi_{\beta}^{-1}(\Phi_{\beta}(y^t) + \delta^t \Phi_{\beta}(k^t)) \right) \in T_{\alpha,\beta}^t \right\} \\ \text{si } \left( \Phi_{\alpha}^{-1}(\Phi_{\alpha}(x^t) - \delta^t \Phi_{\alpha}(h^t)), \Phi_{\beta}^{-1}(\Phi_{\beta}(y^t) + \delta^t \Phi_{\beta}(k^t)) \right) \cap T_{\alpha,\beta}^t \neq \emptyset \\ \infty \quad \text{sinon} \end{cases} \quad (5.31)$$

est la fonction de distance directionnelle CES-CET mixte orientée dans le graphe.

Cette mesure peut être inscrite dans le cadre d'un modèle CES-CET. Ce cas est décrite dans la

proposition ci-dessous.

**Proposition 5.10** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^2$  tel que  $g^t = (h^t, k^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET mixte orientée dans le graphe, définie selon le modèle CES-CET est caractérisée par :*

$$MD_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; g^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \Phi_{\alpha}^{-1}(\Phi_{\alpha}(x^t) - \delta^t \Phi_{\alpha}(h^t)) \geq \Phi_{\alpha}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha}(x_j^t) \right), \right. \\ \left. \Phi_{\beta}^{-1}(\Phi_{\beta}(y^t) + \delta^t \Phi_{\beta}(k^t)) \leq \Phi_{\beta}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta}(y_j^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.32)$$

Il est évident que cette optimisation peut être évaluée suivant la méthode de programmation linéaire. Le programme associé à cette définition est la suivante :

$$MD_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \max \delta^t \\ s.c. \quad (x^t)^{\alpha} - \delta^t (h^t)^{\alpha} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_j^t)^{\alpha} \\ (y^t)^{\beta} + \delta^t (k^t)^{\beta} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_j^t)^{\beta} \\ \delta^t, \theta^t \geq 0. \quad (5.33)$$

Les mesures de performance obtenues dépendent des valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Ainsi, on peut en déduire la valeur du meilleur rendement d'échelle  $\gamma^*$ , à l'aide d'un indicateur d'ajustement orienté dans le graphe. Cette mesure d'ajustement est définie de la manière suivante :

$$M_{CES}^t(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{J}} MD_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t). \quad (5.34)$$

Le meilleur rendement d'échelle  $\gamma^*$  correspond aux valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  qui minimisent la valeur de  $(M_{CES}^t)$ . En ce sens, la valeur de ces paramètres permettent au plus grand nombre d'être efficace.

### 3 Rendements d'Echelle Spécifiques

Dans la première section, nous considérons qu'une modification dans les mêmes proportions des quantités de facteurs implique un changement homogène de la production d'outputs. Cepen-

dant, il est possible que chaque input soit augmenté ou réduit différemment et que l'impact sur chaque produit de tout changement du niveau des intrants, soit différent. Cette section est dédiée à l'analyse de ce cas. Par ailleurs, nous l'appliquons aux mesures étudiées dans la section précédente.

### 3.1 Principes et Mesures de Debreu-Farrell

Tout d'abord, nous exposons les principes relatifs aux rendements d'échelle spécifiques, en l'intégrant dans la logique des rendements d'échelle globaux présentés précédemment. Ensuite, nous analysons les mesures de Farrell axées sur les inputs et les outputs dans le cadre de cette nouvelle notion de rendements d'échelle.

#### 3.1.1 Généralités

Dans cette sous-section, nous proposons une définition plus générale de la notion de "technologie homogène de degré  $\gamma$ "<sup>1</sup>, évoquée dans la première section. Nous montrons également que l'ensemble de production CES-CET vérifie cette propriété. Enfin, nous déduisons les rendements d'échelle spécifiques inhérents à ce concept généralisé.

**Définition 5.11** *Pour tout  $(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la technologie de production  $T^t$  est homogène de degré  $\gamma$  si, quel que soit  $\lambda > 0$ ,  $(x^t, y^t) \in T^t$  implique que  $(\lambda^{1/\alpha} x^t, \lambda^{1/\beta} y^t) \in T^t$ .*

*Preuve :* On sait qu'une technologie  $T^t$  est homogène de degré  $\gamma$  si pour tout  $(x^t, y^t) \in T^t$  et si quel que soit  $\mu > 0$  on a,  $(\mu x^t, \mu^\gamma y^t) \in T^t$ . Posons  $\mu = \lambda^{1/\alpha}$ . Ainsi, puisque  $\gamma = \alpha/\beta$  nous avons,  $(\mu x^t, \mu^\gamma y^t) = (\lambda^{1/\alpha} x^t, (\lambda^{1/\alpha})^{\alpha/\beta} y^t)$ . Donc,  $(\mu x^t, \mu^\gamma y^t) = (\lambda^{1/\alpha} x^t, \lambda^{1/\beta} y^t)$ . Par conséquent,  $(\lambda^{1/\alpha} x^t, \lambda^{1/\beta} y^t) \in T^t$   $\square$ .

Nous pouvons montrer que l'ensemble de production CES-CET satisfait cette propriété.

**Proposition 5.12** *Pour tout  $(x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  avec  $i \in [m]$  et  $r \in [n]$ , si  $(x^t, y^t) \in T_{\alpha, \beta}^t$  alors  $(\lambda^{1/\alpha_i} x_i^t, \lambda^{1/\beta_r} y_r^t) \in T_{\alpha, \beta}^t$ .*

---

1. Nous faisons référence à la notion d' "homogénéité de degré  $\alpha$ " introduite par Lau (1978). Afin d'éviter toute confusion par rapport aux notations, nous décidons de désigner le concept comme étant l' "homogénéité de degré  $\gamma$ ".



Cette proposition indique que la technologie de production CES-CET est homogène de degré  $\gamma$  suivant la nouvelle définition 5.11.

*Preuve :*

Nous savons que pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  tel que les paramètres  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  soient propres à chaque input  $i$  et à chaque output  $r$  alors, l'ensemble CES-CET est définie par :

$$T_{\alpha, \beta}^t(x_i^t, y_r^t) = \left\{ (x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \right)^{1/\alpha_i}, y_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r}, \theta^t \geq 0 \right\}.$$

Ainsi, pour tout  $\lambda > 0$  on a,  $T_{\alpha, \beta}^t(\lambda^{1/\alpha_i} x_i^t, \lambda^{1/\beta_r} y_r^t) = \left\{ (x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : \lambda^{1/\alpha_i} x_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \right)^{1/\alpha_i}, \lambda^{1/\beta_r} y_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r}, \theta^t \geq 0 \right\} \equiv \left\{ (x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : \lambda^{1/\alpha_i} x_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \right)^{1/\alpha_i}, \lambda^{1/\beta_r} y_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r}, \theta^t \geq 0 \right\}$ . En posant  $\mu_j^t = \lambda \theta_j^t$ , nous avons :  $T_{\alpha, \beta}^t(\lambda^{1/\alpha_i} x_i^t, \lambda^{1/\beta_r} y_r^t) = \left\{ (x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : \lambda^{1/\alpha_i} x_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \right)^{1/\alpha_i}, \lambda^{1/\beta_r} y_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r}, \theta^t \geq 0 \right\} \square$ .

Pour tout  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , nous pouvons également redéfinir la technologie FDH individuelle de la manière suivante :

$$Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t) = \{ (x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x_i^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, y_r^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0, j \in \mathcal{J} \}. \quad (5.35)$$

La proposition précédente nous permet de voir que les paramètres relatifs aux inputs et aux outputs sont spécifiques à chaque composante. Ainsi, il existe  $m$  paramètres  $\alpha$  et  $n$  paramètres  $\beta$ . Ces derniers permettent de définir les rendements d'échelle spécifiques de sorte qu'une modification d'une composante du vecteur d'inputs impacte différemment chaque composante du vecteur d'outputs.

**Proposition 5.13** *Pour tout  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$  tel que  $\gamma_{i,r} = \alpha_i / \beta_r$ , l'unité de production satisfait localement :*

— un rendement d'échelle croissant si  $\gamma_{i,r} > 1$ ,

- un rendement d'échelle constant si  $\gamma_{i,r} = 1$ ,
- un rendement d'échelle décroissant si  $\gamma_{i,r} < 1$ .

$\gamma_{i,r} > 1$  signifie qu'une augmentation dans une proportion de la quantité d'input  $i$  contribue à une augmentation plus que proportionnelle de la production d'output  $r$ . Pareillement,  $\gamma_{i,r} = 1$  indique qu'une modification du niveau de facteur  $i$  utilisé, induit un changement proportionnel du niveau de l'output  $r$ . Enfin, lorsque  $\gamma_{i,r} < 1$  alors, une variation du niveau de l'input  $i$  provoque une modification moins que proportionnelle de la production  $r$ .

### 3.1.2 Mesure de Debreu-Farrell en Input

Cette sous-section nous permet d'appliquer la notion de rendements d'échelle spécifiques à la mesure de Debreu-Farrell en input. Nous présentons dans un premier temps, cette fonction de distance dans un ensemble de production CES-CET puis, dans un second temps, dans le cadre d'une technologie FDH.

**Proposition 5.14** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la mesure de Debreu-Farrell en input peut être définie selon le modèle CES-CET, de la manière suivante :*

$$E_I^t(x_i^t, y_r^t) = \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \lambda^t x_i^t \geq \Phi_{\alpha_i}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t) \right), y_r^t \leq \Phi_{\beta_r}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.36)$$

Cette définition permet d'établir le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} E_I^t(x^t, y^t) &= \min \lambda^t \\ \text{s.c.} \quad & \Phi_{\alpha_i}(\lambda^t x_i^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t) \\ & \Phi_{\beta_r}(y_r^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t) \\ & \lambda^t, \theta^t \geq 0. \end{aligned}$$

Ce dernier devient linéaire lorsque  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$ . Posons  $\Lambda^t = (\lambda^t)^\alpha$ . Ainsi, nous

avons :

$$\begin{aligned}
 [E_I^t(x^t, y^t)]^\alpha &= \min \Lambda^t \\
 \text{s.c.} \quad \Lambda^t (x_i^t)^\alpha &\geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^\alpha \\
 (y_r^t)^{\beta_r} &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \\
 \Lambda^t, \theta^t &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, le rendement d'échelle spécifique  $\gamma_{i,r}$  devient  $\gamma_r = \alpha/\beta_r$ . Ce cas signifie que chaque composante du vecteur d'inputs est modifiée de manière similaire mais chaque production  $r$  est impacté différemment.

Il est également possible d'évaluer cette mesure dans le cadre d'un modèle FDH.

**Proposition 5.15** *Pour toute unité de production  $j = (1, \dots, J) \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_{j,i}^t, y_{j,r}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la mesure de distance de Debreu-Farrell en input selon le modèle FDH, de l'observation  $(x_l^t, y_l^t)$  avec  $l \in \mathcal{J}$  relativement à la technologie  $j$  s'écrit comme suit :*

$$E_I^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \lambda^t x_{l,i}^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, y_{l,r}^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0, j \in \mathcal{J} \right\}. \quad (5.37)$$

Cette proposition permet de déduire l'expression énumérative de la mesure définie ci-dessus.

**Lemme 5.16** *Pour tout  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la mesure de Debreu-Farrell axée sur les facteurs de l'observation  $(x_l^t, y_l^t)$ , relativement à l'ensemble de production global  $S_{\alpha,\beta}^t$ , est la suivante :*

$$E_I^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \min_{j \in \mathcal{J}} \left[ \max_{i \in [m]} \left( \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right) \times \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r/\alpha_i} \right]. \quad (5.38)$$

*Preuve :* Soit  $E_I^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \lambda^t x_{l,i}^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, y_{l,r}^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0, j \in \mathcal{J} \right\}$ . Nous pouvons déduire l'expression de la pondération  $\theta_j^t$  par le biais de la contrainte relative aux extrants tel que,  $E_I^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \lambda^t x_{l,i}^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, \theta_j^t \geq \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r}, \theta^t \geq \right\}$

$0, j \in \mathcal{J}\}$ . En remplaçant  $\theta_j^t$  par son expression, nous obtenons  $E_I^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \max_{i \in [m]} \left( \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right) \times \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r / \alpha_i}$ . Sachant que  $S_{\alpha, \beta}^t = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t)$  alors,  $E_I^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \inf_{\lambda \geq 0} \{ \lambda^t : (\lambda^t x_l^t, y_l^t) \in S_{\alpha, \beta}^t \} \equiv \min_{j \in \mathcal{J}} E_I^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t)$ . Ainsi,  $E_I^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \min_{j \in \mathcal{J}} \left[ \max_{i \in [m]} \left( \frac{x_{j,i}^t}{x_{l,i}^t} \right) \times \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r / \alpha_i} \right] \square$ .

Dans ce cas, le résultat obtenu permet de déduire le meilleur rendement d'échelle pour chaque observation avec  $\gamma_{i,r}^* = \alpha_i / \beta_r$ .

### 3.1.3 Mesure de Debreu-Farrell en Output

La mesure de Debreu-Farrell axée sur les extrants peut être estimée suivant la notion de rendements d'échelle spécifiques. Pour ce faire, nous présentons cette fonction dans le cadre d'un modèle CES-CET plus général puis, selon un ensemble de production FDH.

**Proposition 5.17** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la mesure de Debreu-Farrell en output selon le modèle CES-CET, peut être définie de la manière suivante :*

$$E_O^t(x_i^t, y_r^t) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : x_i^t \geq \Phi_{\alpha_i}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t) \right), \lambda^t y_r^t \leq \Phi_{\beta_r}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.39)$$

Nous pouvons associer à cette définition le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
 E_O^t(x^t, y^t) &= \max \lambda^t \\
 \text{s.c.} \quad &\Phi_{\alpha_i}(x_i^t) \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t) \\
 &\Phi_{\beta_r}(\lambda^t y_r^t) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t) \\
 &\lambda^t, \theta^t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Il est évident que le programme ci-dessus ne devient linéaire que si et seulement si,  $\beta_1 = \dots =$

$\beta_n = \beta$ . En posant  $\Lambda^t = (\lambda^t)^\beta$ , nous obtenons le programme linéaire ci-dessous :

$$\begin{aligned} [E_O^t(x^t, y^t)]^\beta &= \max \Lambda^t \\ \text{s.c.} \quad (x_i^t)^{\alpha_i} &\geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \\ \Lambda^t (y_r^t)^\beta &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^\beta \\ \Lambda^t, \theta^t &\geq 0. \end{aligned}$$

Cette situation signifie que les paramètres influençant les intrants sont spécifiques à chaque composante du vecteur d'intrants tandis que le paramètre  $\beta$  est unique pour toutes les composantes du vecteur d'outputs. Ainsi, le rendement d'échelle spécifique  $\gamma_{i,r}$  devient  $\gamma_i = \alpha_i / \beta$ .

Lorsque  $\beta_r \in \mathbb{R}_{++}^n$ , l'estimation non-paramétrique de la mesure en output selon un modèle FDH, est possible. Rappelons que la technologie FDH individuelle est  $Q_{\alpha,\beta}^t(x_j^t, y_j^t)$  et, que l'ensemble de production FDH global est  $S_{\alpha,\beta}^t$ .

**Proposition 5.18** *Pour toute unité de production  $j = (1, \dots, J) \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_{j,i}^t, y_{j,r}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la mesure de Debreu-Farrell en output selon le modèle FDH, de l'observation  $(x_l^t, y_l^t)$  avec  $l \in \mathcal{J}$  relativement à la technologie  $j$ , s'écrit comme suit :*

$$E_O^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : x_{l,i}^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, \lambda^t y_{l,r}^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0, j \in \mathcal{J} \right\}. \quad (5.40)$$

L'expression énumérative de la mesure de Debreu-Farrell en output relativement à la technologie de production FDH globale est proposée ci-dessus.

**Lemme 5.19** *Pour tout  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_{++}^{m+n}$ , la mesure de Debreu-Farrell axée sur les extrants de l'observation  $(x_l^t, y_l^t)$  relativement l'ensemble de production  $S_{\alpha,\beta}^t$ , est la suivante :*

$$E_O^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \max_{j \in \mathcal{J}} \left[ \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i / \beta_r} \times \min_{r \in [n]} \left( \frac{y_{j,r}^t}{y_{l,r}^t} \right) \right]. \quad (5.41)$$

*Preuve :* Soit  $E_O^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : x_{l,i}^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, \lambda^t y_{l,r}^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0, j \in \mathcal{J} \right\}$

$\mathcal{J}\}$ . Nous pouvons déduire l'expression de la pondération  $\theta_j^t$  grâce à la contrainte relative aux extrants tel que,  $E_O^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : \theta_j^t \leq \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i}, \lambda^t y_{l,r}^t \leq \theta_j^t y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0, j \in \mathcal{J} \right\}$ .

En remplaçant  $\theta_j^t$  par son expression, nous obtenons  $E_O^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i / \beta_r} \times \min_{r \in [n]} \left( \frac{y_{j,r}^t}{y_{l,r}^t} \right)$ . Pour  $S_{\alpha, \beta}^t = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t)$  on a,  $E_O^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \sup_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda^t : (x_l^t, \lambda^t y_l^t) \in S_{\alpha, \beta}^t \right\} \equiv \max_{j \in \mathcal{J}} E_O^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t)$ . Ainsi,  $E_O^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t) = \max_{j \in \mathcal{J}} \left[ \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i / \beta_r} \times \min_{r \in [n]} \left( \frac{y_{j,r}^t}{y_{l,r}^t} \right) \right] \square$ .

De ce fait, dans le cadre d'un ensemble de production FDH global, on peut obtenir les rendements d'échelle spécifiques  $\gamma_{i,r} = \alpha_i / \beta_r$ .

## 3.2 Mesures CES-CET

Cette sous-section nous permet de présenter les mesures directionnelles CES-CET dans le contexte des rendements d'échelle spécifiques. Cette notion permet d'évaluer l'influence de la modification de chaque facteur sur chaque produit, individuellement. En effet, nous supposons qu'il est possible d'augmenter ou de diminuer les inputs de manière non-homogène selon les circonstances. Par ailleurs, nous admettons que la contribution de chaque intrant à la production de chaque extrant n'est pas homogène. De ce fait, nous présentons chaque orientation de la fonction de distance directionnelle suivant cette hypothèse de rendements d'échelle spécifiques.

### 3.2.1 Orientation en Input

Nous montrons que le principe de rendements d'échelle spécifiques peut être appliqué dans le cadre d'une mesure directionnelle CES-CET axée sur les facteurs. Pour ce faire, nous la présentons dans un ensemble de production CES-CET tel que nous pouvons définir un programme linéaire d'optimisation. Puis, nous la définissons selon un modèle FDH de telle sorte que l'on peut faire une estimation par énumération de la mesure.

**Proposition 5.20** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $g^t = (h_i^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée en input*

selon le modèle CES-CET, est définie de la manière suivante :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; h_i^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x_i^t - \delta^t h_i^t \geq \Phi_{\alpha_i}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t) \right), \right. \\ \left. y_r^t \leq \Phi_{\beta_r}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.42)$$

Nous pouvons associer à cette définition non-paramétrique de la fonction de distance CES-CET, un programme d'optimisation. Ce dernier se présente comme suit :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x^t, y^t; h^t, 0) = \max \delta^t \\ s.c. \quad (x_i^t)^{\alpha_i} - (\delta^t)^{\alpha_i} (h_i^t)^{\alpha_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \\ (y_r^t)^{\beta_r} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \\ \delta^t, \theta^t \geq 0.$$

Il est évident que le programme ci-dessus est non-linéaire puisque le paramètre  $\alpha$  peut être différent pour chaque intrant. De ce fait, cette optimisation n'est linéaire que si et seulement si,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$ . Dans ce cas, en posant  $\Delta^t = (\delta^t)^\alpha$ , nous pouvons obtenir le programme linéaire suivant :

$$[D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x^t, y^t; h^t, 0)]^\alpha = \max \Delta^t \\ s.c. \quad (x_i^t)^\alpha - \Delta^t (h_i^t)^\alpha \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^\alpha \\ (y^t)^{\beta_r} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \\ \delta^t, \theta^t \geq 0.$$

Dans ce contexte, le rendement d'échelle spécifique se présente comme suit :  $\gamma_r = \alpha/\beta_r$ . En effet, cette expression signifie que les inputs sont modifiés de manière homogène tandis que l'influence de chaque facteur sur chaque extrant est différent.

Nous pouvons également exprimer la mesure CES-CET orientée en input dans le cadre d'un modèle FDH. Dans ce cas, il est possible de déduire l'expression énumérative de la fonction.

**Proposition 5.21** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_{j,i}^t, y_{j,r}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $g^t = (h_i^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET axée sur les facteurs selon le modèle FDH, de l'observation  $(x_i^t, y_i^t)$  relativement à la technologie  $j \in \mathcal{J}$ , est définie de la manière suivante :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; h_i^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x_{l,i}^t - \delta^t h_i^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, y_{l,r}^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.43)$$

La solution par énumération de cette mesure est présentée dans la proposition ci-dessous.

**Lemme 5.22** *Pour tout  $(x_{j,i}^t, y_{j,r}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $g^t = (h_i^t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$ , la mesure directionnelle CES-CET axée sur les intrants pour l'observation  $(x_i^t, y_i^t)$ , relativement à l'ensemble de production  $S_{\alpha, \beta}^t$ , est la suivante :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; h_i^t, 0) = \max_{j \in \mathcal{J}} \left( \min_{i \in [m]} \frac{1}{h_i^t} \left[ (x_{l,i}^t)^{\alpha_i} - \left( \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r} \right) (x_{j,r}^t)^{\alpha_i} \right]^{1/\beta_i} \right). \quad (5.44)$$

*Preuve :* Soit  $D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_i^t, y_r^t; h_i^t, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta^t \geq 0 : x_i^t - \delta^t h_i^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, y_r^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0 \}$ . La contrainte relative aux outputs permet de déduire l'expression de la pondération  $\theta_j^t$  tel que  $D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_i^t, y_r^t; h_i^t, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta^t \geq 0 : x_i^t - \delta^t h_i^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, \theta_j^t \geq \left( \frac{y_r^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r}, \theta^t \geq 0 \}$ . En remplaçant  $\theta_j^t$  par son expression dans le contrainte relative aux inputs, nous obtenons :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_i^t, y_r^t; h_i^t, 0) = \min_{i \in [m]} \frac{1}{h_i^t} \left[ (x_{l,i}^t)^{\alpha_i} - \left( \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r} \right) (x_{j,r}^t)^{\alpha_i} \right]^{1/\beta_i}. \text{ Comme } S_{\alpha, \beta}^t = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} Q_{\alpha, \beta}^t(x_j^t, y_j^t) \text{ alors, nous avons } D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; h_i^t, 0) = \max_{j \in \mathcal{J}} D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_i^t, y_r^t; h_i^t, 0). \text{ Donc,}$$

$$D^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; h_i^t, 0) = \max_{j \in \mathcal{J}} \left( \min_{i \in [m]} \frac{1}{h_i^t} \left[ (x_{l,i}^t)^{\alpha_i} - \left( \max_{r \in [n]} \left( \frac{y_{l,r}^t}{y_{j,r}^t} \right)^{\beta_r} \right) (x_{j,r}^t)^{\alpha_i} \right]^{1/\beta_i} \right) \quad \square.$$

Dans ce cas, nous avons bien une estimation globale des rendements d'échelle spécifiques avec  $\gamma_{i,r} = \alpha_i / \beta_r$ .



### 3.2.2 Orientation en Output

Nous présentons la mesure CES-CET orientée en output dans le contexte des rendements d'échelle spécifiques. Nous la définissons successivement dans le cadre plus général du modèle CES-CET puis suivant un ensemble de production FDH.

**Proposition 5.23** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $g^t = (0, k_r^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET axée sur les extrants selon le modèle CES-CET, est définie de la manière suivante :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; 0, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x_i^t \geq \Phi_{\alpha_i}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t) \right), \right. \\ \left. y_r^t + \delta^t k_r^t \leq \Phi_{\beta_r}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.45)$$

Le programme d'optimisation associé à cette définition est la suivante :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x^t, y^t; 0, k^t) = \max \delta^t \\ \text{s.c.} \quad (x_i^t)^{\alpha_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \\ (y_r^t)^{\beta_r} + (\delta^t)^{\beta_r} (k_r^t)^{\beta_r} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \\ \delta^t, \theta^t \geq 0.$$

Cette optimisation devient linéaire si et seulement si,  $\beta_1 = \dots = \beta_n = \beta$  tel que nous obtenons :

$$[D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x^t, y^t; 0, k^t)]^\beta = \max \Delta^t \\ \text{s.c.} \quad (x_i^t)^{\alpha_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \\ (y_r^t)^\beta + \Delta^t (k_r^t)^\beta \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^\beta \\ \delta^t, \theta^t \geq 0.$$

Ainsi, les rendements d'échelle spécifiques deviennent  $\gamma_i = \alpha_i / \beta$ . Cette expression signifie que chaque facteur de production est modifié différemment tandis que leur impact sur chaque extrant est homogène.

**Proposition 5.24** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_{j,i}^t, y_{j,r}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $g^t = (0, k_r^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée en output selon le modèle FDH, de l'observation  $(x_l^t, y_l^t)$  relativement à la technologie  $j \in \mathcal{J}$ , est définie de la manière suivante :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x_{l,i}^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, y_{l,r}^t + \delta^t k_r^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.46)$$

Cette définition permet d'obtenir l'expression énumérative de la mesure.

**Lemme 5.25** *Pour tout  $(x_{j,i}^t, y_{j,r}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et tout  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $g^t = (0, k_r^t) \in \mathbb{R}_+^n$ , la mesure CES-CET axée sur les extrants de l'observation  $(x_l^t, y_l^t)$ , relativement à chaque l'ensemble de production FDH globale  $S_{\alpha, \beta}^t$ , est la suivante :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) = \max_{j \in \mathcal{J}} \left( \min_{r \in [n]} \frac{1}{k_r^t} \left[ \left( \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i} \right) (y_{j,r}^t)^{\beta_r} - (y_{l,r}^t)^{\beta_r} \right]^{1/\beta_r} \right). \quad (5.47)$$

*Preuve :* Soit  $D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x_{l,i}^t \geq (\theta_j^t)^{1/\alpha_i} x_{j,i}^t, y_{l,r}^t + \delta^t k_r^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0 \right\}$ . L'expression de la pondération  $\theta_j^t$  peut être déduite de la contrainte concer-

nant les intrants. De ce fait, nous avons :  $D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \theta_j^t \leq \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i}, y_{l,r}^t + \delta^t k_r^t \leq (\theta_j^t)^{1/\beta_r} y_{j,r}^t, \theta^t \geq 0 \right\}$ . En remplaçant  $\theta_j^t$  par son expression, nous obtenons :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) = \min_{r \in [n]} \frac{1}{k_r^t} \left[ \left( \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i} \right) (y_{j,r}^t)^{\beta_r} - (y_{l,r}^t)^{\beta_r} \right]^{1/\beta_r}. \quad \text{Puisque}$$

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) = \max_{j \in \mathcal{J}} D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) \text{ alors, nous pouvons exprimer la fonction comme}$$

$$\text{suit : } D^t(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; 0, k_r^t) = \max_{j \in \mathcal{J}} \left( \min_{r \in [n]} \frac{1}{k_r^t} \left[ \left( \min_{i \in [m]} \left( \frac{x_{l,i}^t}{x_{j,i}^t} \right)^{\alpha_i} \right) (y_{j,r}^t)^{\beta_r} - (y_{l,r}^t)^{\beta_r} \right]^{1/\beta_r} \right) \square.$$

Par cette méthode d'estimation énumérative, nous avons les rendements d'échelle spécifiques  $\gamma_{i,r} = \alpha_i / \beta_r$ .

### 3.2.3 Orientation dans le Graphe

A présent, nous introduisons la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe dans le contexte des rendements d'échelle spécifiques. Pour ce faire, nous la définissons successivement dans le cadre du modèle CES-CET puis selon le modèle FDH.

**Proposition 5.26** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $g^t = (h_i^t, k_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe selon le modèle CES-CET, est définie de la manière suivante :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; h_i^t, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : x_i^t - \delta^t h_i^t \geq \Phi_{\alpha_i}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t) \right), \right. \\ \left. y_r^t + \delta^t k_r^t \leq \Phi_{\beta_r}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t) \right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.48)$$

Nous pouvons associer un programme d'optimisation à la proposition ci-dessus. Il se présente comme suit :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x^t, y^t; 0, k^t) = \max \delta^t \\ \text{s.c.} \quad (x_i^t)^{\alpha_i} - (\delta^t)^{\alpha_i} (h_i^t)^{\alpha_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \\ (y_r^t)^{\beta_r} + (\delta^t)^{\beta_r} (k_r^t)^{\beta_r} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \\ \delta^t, \theta^t \geq 0.$$

Il est évident que ce programme n'est linéaire que si et seulement si,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$  et, si et seulement si,  $\beta_1 = \dots = \beta_n = \beta$  avec  $\alpha = \beta$ . Dans ce cas, nous obtenons un rendement d'échelle global tel que  $\gamma = \alpha / \beta$ . Afin d'obtenir de manière non-paramétrique les rendements d'échelle spécifiques, nous proposons une analyse grâce à la fonction de distance directionnelle CES-CET mixte.

**Proposition 5.27** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_i^t, y_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $g^t = (h_i^t, k_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET mixte orientée dans le graphe selon le modèle CES-CET, est définie de la manière suivante :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; h_i^t, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : \Phi_{\alpha_i}^{-1}(\Phi_{\alpha_i}(x_i^t) - \delta^t \Phi_{\alpha_i}(h_i^t)) \geq \Phi_{\alpha_i}^{-1}\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\alpha_i}(x_{j,i}^t)\right), \right. \\ \left. \Phi_{\beta_r}^{-1}(\Phi_{\beta_r}(y_r^t) + \delta^t \Phi_{\beta_r}(k_r^t)) \leq \Phi_{\beta_r}^{-1}\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t \Phi_{\beta_r}(y_{j,r}^t)\right), \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.49)$$

Dans ce cas, le programme d'optimisation associé à cette mesure est linéaire et se caractérise de la manière suivante :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; 0, k_r^t) = \max \delta^t \\ \text{s.c.} \quad (x_i^t)^{\alpha_i} - \delta^t (h_i^t)^{\alpha_i} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \\ (y_r^t)^{\beta_r} + \delta^t (k_r^t)^{\beta_r} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \\ \delta^t, \theta^t \geq 0.$$

Grâce à cette estimation linéaire non-paramétrique, nous pouvons déduire les rendements d'échelle spécifiques, à savoir  $\gamma_{i,r} = \alpha_i / \beta_r$ .

**Proposition 5.28** *Pour toute unité de production  $j \in \mathcal{J}$  et tout  $(x_{j,i}^t, y_{j,r}^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  avec  $(\alpha_i, \beta_r) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$  et  $g^t = (h_i^t, k_r^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ , la fonction de distance directionnelle CES-CET mixte selon le modèle FDH, de l'observation  $(x_i^t, y_r^t)$  relativement à la technologie  $j \in \mathcal{J}$ , est définie par :*

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^{t(j)}(x_{l,i}^t, y_{l,r}^t; h_i^t, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t \geq 0 : (x_{l,i}^t)^{\alpha_i} - \delta^t (h_i^t)^{\alpha_i} \geq \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i}, \right. \\ \left. (y_{l,r}^t)^{\beta_r} + \delta^t (k_r^t)^{\beta_r} \leq \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r}, \theta^t \geq 0 \right\}. \quad (5.50)$$

Cette formulation peut être estimée grâce à la méthode de programmation linéaire. Cependant, contrairement aux mesures directionnelles CES-CET orientées en input et en output, nous ne pouvons pas donner une expression énumérative de la fonction mixte orientée dans le graphe. Néan-

moins, le cadre d'analyse FDH permet de déduire de manière non-paramétrique les rendements d'échelle spécifiques tels que  $\gamma_{i,r} = \alpha_i / \beta_r$ .

## 4 Illustration Empirique

Dans cette section, nous donnons un exemple numérique relatif aux notions de rendements d'échelle  $\gamma$ , définies dans les sections précédentes. Nous nous intéressons dans un premier temps, aux rendements d'échelle globaux. Dans un second temps, nous nous concentrons sur les rendements d'échelle spécifiques. Remarquons que notre analyse se base sur la mesure de distance directionnelle CES-CET.

### 4.1 Rendements d'Echelle Globaux

Tout d'abord, nous introduisons le cadre d'analyse de notre illustration empirique. Puis, nous présentons les résultats. Enfin, nous donnons une interprétation de ces derniers.

#### 4.1.1 Cadre d'Etude

Dans cette section, nous utilisons les données agricoles de 12 pays européens, durant la période 2008. Ces données ont également été utilisées dans les chapitres 3 et 4.

Rappelons que la fonction de distance directionnelle CES-CET orientée dans le graphe est définie de la manière suivante :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : \left( x^t - \delta^t h^t, y^t + \delta^t k^t \right) \in T_{\alpha,\beta}^t \right\}.$$

Lorsque  $g^t = (h^t, 0)$  (respectivement  $g^t = (0, k^t)$ ) alors, cette fonction est axée sur les intrants (respectivement sur les extrants). Nous évaluons ces mesures dans le cadre d'une technologie de production CES-CET tel que la contrainte sur les rendements d'échelle  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta^t = 1$ , est relaxée. En effet, Boussemart et al. (2009) ont démontré que cette contrainte est incompatible avec la notion de rendements d'échelle  $\gamma$  que nous étudions dans ce chapitre. Ainsi, selon l'approche DEA, nous

pouvons caractériser la fonction ci-dessus, comme suit :

$$D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : x^t - \delta^t h^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_j^t)^\alpha \right)^{1/\alpha}, \right. \\ \left. y^t + \delta^t k^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_j^t)^\beta \right)^{1/\beta}, \theta^t \geq 0 \right\}.$$

Remarquons que la mesure dans le graphe ne peut être évaluée de manière non-paramétrique que si et seulement si,  $\alpha = \beta$ . De ce fait, lorsque  $\alpha \neq \beta$ , nous proposons d'estimer la fonction de distance CES-CET mixte ci-après :

$$MD_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : (x^t)^\alpha - \delta^t (h^t)^\alpha \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_j^t)^\alpha, \right. \\ \left. (y^t)^\beta + \delta^t (k^t)^\beta \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_j^t)^\beta, \theta^t \geq 0 \right\}.$$

Afin de mener à bien notre analyse, nous faisons une comparaison entre les mesures de performance axées sur les intrants, sur les extrants et dans le graphe. Par ailleurs, afin de déterminer le meilleur rendement d'échelle  $\gamma$ , nous évaluons les indicateurs d'ajustement suivants :

$$M_{I,CES}(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{J}} D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, 0), \\ M_{O,CES}(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{J}} D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; 0, k^t), \\ M_{CES}(X, Y; \alpha, \beta) = \min_{\gamma} \sum_{j \in \mathcal{J}} D_{\alpha,\beta}^t(x^t, y^t; h^t, k^t).$$

Nous utilisons la méthode de grille de recherche afin de déterminer le meilleur rendement d'échelle  $\gamma^*$ .

Dans notre analyse, nous choisissons successivement les vecteurs de direction  $g^t = (1, 0)$ ,  $g^t = (0, 1)$  et  $g^t = (1, 1)$ . De plus, les paramètres prennent successivement les valeurs suivantes :

$\alpha$	1/2	3/4	1	3/2	7/4
$\beta$	1/2	3/4	1	3/2	7/4

## 4.1.2 Résultats

	$\alpha = 0,5;$ $\beta = 0,75$	$\alpha = 0,5;$ $\beta = 1$	$\alpha = 0,5;$ $\beta = 1,5$	$\alpha = 0,5;$ $\beta = 1,75$	$\alpha = 0,75;$ $\beta = 0,5$	$\alpha = 0,75;$ $\beta = 1$	$\alpha = 0,75;$ $\beta = 1,5$	$\alpha = 0,75;$ $\beta = 1,75$
<b>Orientation en inputs</b>								
Rép. Tchèque	373,98	761,18	1246,67	1368,44	0	660,00	1222,46	1355,86
Danemark	238,52	584,60	1098,87	1244,81	125,11	485,47	1059,26	1223,08
Espagne	1438,29	2329,32	3874,71	4474,67	2786,77	3030,21	4474,21	4983,42
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	300,16	439,49	527,23	537,49	20,15	398,76	520,92	535,00
Lituanie	474,21	738,77	955,55	990,50	41,98	680,80	943,78	985,06
Luxembourg	18,33	27,74	30,91	31,05	0	22,28	30,56	30,97
Pays-Bas	36,50	123,03	214,13	229,57	0	60,88	194,28	220,27
Slovaquie	272,99	505,56	721,93	760,74	0	421,02	702,21	751,13
Finlande	548,81	867,65	1150,68	1200,93	268,86	809,17	1138,46	1195,07
Suède	356,86	653,58	952,51	1011,89	69,17	566,14	931,32	1001,13
Royaume Uni	0	67,60	511,93	792,54	0	0	402,46	759,28
<b>Orientation en outputs</b>								
Rép. Tchèque	8281,58	94,95·10 <sup>04</sup>	5,28·10 <sup>09</sup>	3,39·10 <sup>11</sup>	0	3928,36	1,50·10 <sup>06</sup>	2,51·10 <sup>07</sup>
Danemark	5343,08	71,51·10 <sup>04</sup>	4,62·10 <sup>09</sup>	3,07·10 <sup>11</sup>	6,98	3402,17	1,29·10 <sup>06</sup>	2,25·10 <sup>07</sup>
Espagne	55470,19	45,42·10 <sup>05</sup>	2,19·10 <sup>10</sup>	1,40·10 <sup>12</sup>	108,18	24752,98	6,83·10 <sup>06</sup>	1,09·10 <sup>08</sup>
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	6511,43	53,81·10 <sup>04</sup>	2,21·10 <sup>09</sup>	1,32·10 <sup>11</sup>	0,94	2446,03	6,37·10 <sup>05</sup>	9,87·10 <sup>06</sup>
Lituanie	11366,02	96,37·10 <sup>04</sup>	4,09·10 <sup>09</sup>	2,46·10 <sup>11</sup>	1,38	4098,39	1,17·10 <sup>06</sup>	1,83·10 <sup>07</sup>
Luxembourg	399,60	33939,66	1,30·10 <sup>08</sup>	7,65·10 <sup>09</sup>	0	142,82	3,73·10 <sup>04</sup>	5,71·10 <sup>05</sup>
Pays-Bas	791,02	15,05·10 <sup>04</sup>	9,00·10 <sup>08</sup>	5,66·10 <sup>10</sup>	0	381,36	2,37·10 <sup>05</sup>	4,06·10 <sup>06</sup>
Slovaquie	7864,29	71,64·10 <sup>04</sup>	3,16·10 <sup>09</sup>	1,91·10 <sup>11</sup>	0	2989,55	9,07·10 <sup>05</sup>	1,42·10 <sup>07</sup>
Finlande	20460,46	13,85·10 <sup>05</sup>	5,19·10 <sup>09</sup>	3,07·10 <sup>11</sup>	28,19	7091,48	1,50·10 <sup>06</sup>	2,29·10 <sup>07</sup>
Suède	10731,55	94,31·10 <sup>04</sup>	4,22·10 <sup>09</sup>	2,57·10 <sup>11</sup>	4,72	4459,14	1,21·10 <sup>06</sup>	1,91·10 <sup>07</sup>
Royaume Uni	0	82698,06	2,15·10 <sup>09</sup>	1,95·10 <sup>11</sup>	0	0	4,92·10 <sup>05</sup>	1,40·10 <sup>07</sup>
<b>Orientation dans le graphe</b>								
Rép. Tchèque	16,30	27,09	35,31	36,99	0	108,27	206,73	223,44
Danemark	12,83	23,51	33,13	35,28	3,91	87,09	184,78	206,69
Espagne	37,08	48,20	62,25	66,89	31,10	402,83	547,03	593,12
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	14,37	20,39	22,95	23,18	0,88	73,35	108,54	111,18
Lituanie	19,10	27,14	30,91	31,47	1,18	111,76	170,27	175,83
Luxembourg	3,53	5,12	5,56	5,57	0	8,33	12,93	13,12
Pays-Bas	4,97	10,78	14,63	15,15	0	17,40	51,79	57,14
Slovaquie	15,81	22,45	26,87	27,58	0	87,49	136,40	143,48
Finlande	22,90	29,41	33,92	34,65	10,96	149,64	195,98	203,26
Suède	18,22	25,53	30,86	31,81	2,87	109,57	168,58	177,98
Royaume Uni	0	7,99	22,61	28,15	0	0	89,42	144,55

TABLE 5.1 – Mesures de performance directionnelles CES-CET pour  $\alpha \neq \beta$  (partie 1)

Les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3 présentent les scores de performance des 12 pays européens selon les valeurs des paramètres lorsque  $\alpha \neq \beta$ . Ainsi, les grandeurs relatifs à une orientation dans le graphe sont évalués grâce à la mesure de distance directionnelle CES-CET mixte orientée dans le graphe de la production. Le tableau 5.4, quant à lui, relate les mesures d'efficacité quand  $\alpha = \beta$ . De ce fait, les scores orientés dans le graphe sont estimés à travers la fonction de distance directionnelle CES-CET, définie dans le Chapitre 3. Les indicateurs d'ajustement relatifs aux rendements d'échelle  $\gamma$  sont exposés dans les tableaux 5.5, 5.6 et 5.7. Ces résultats nous permettent de déduire le meilleur rendement d'échelle  $\gamma$  selon chaque orientation.

	$\alpha = 1;$ $\beta = 0,5$	$\alpha = 1;$ $\beta = 0,75$	$\alpha = 1;$ $\beta = 1,5$	$\alpha = 1;$ $\beta = 1,75$	$\alpha = 1,5;$ $\beta = 0,5$	$\alpha = 1,5;$ $\beta = 0,75$	$\alpha = 1,5;$ $\beta = 1$	$\alpha = 1,5;$ $\beta = 1,75$
<b>Orientation en inputs</b>								
Rép. Tchèque	214,58	0	1150,06	1315,63	850,82	532,01	0	1127,90
Danemark	493,96	171,46	959,71	1160,19	1106,50	720,74	271,07	958,91
Espagne	4833,24	3750,50	4788,82	5245,49	6348,87	6036,43	5623,29	5486,90
France	0	0	0	0	3348,11	0	0	0
Lettonie	0	124,44	508,16	530,01	0	0	157,22	503,57
Lituanie	0	212,88	918,12	973,20	0	0	288,41	919,34
Luxembourg	0	0	29,42	30,70	0	0	0	27,00
Pays-Bas	0	0	151,98	199,41	135,65	0	0	94,41
Slovaquie	0	0	661,31	731,37	0	0	0	632,71
Finlande	485,46	469,05	1108,57	1180,60	853,02	782,57	776,31	1116,63
Suède	203,34	144,48	884,01	977,13	562,41	427,48	372,92	865,12
Royaume Uni	898,62	0	0	416,89	2604,51	1644,80	0	0
<b>Orientation en outputs</b>								
Rép. Tchèque	3,11	0	24536,95	$21,16 \cdot 10^{04}$	5,32	7,77	0	1684,84
Danemark	8,05	29,55	21042,76	$18,53 \cdot 10^{04}$	8,78	11,92	16,07	1966,46
Espagne	74,08	253,04	121697,61	$97,17 \cdot 10^{04}$	41,73	91,53	205,03	9016,16
France	0	0	0	0	16,03	0	0	0
Lettonie	0	10,86	10878,30	84693,31	0	0	6,34	825,30
Lituanie	0	13,70	19816,12	$15,78 \cdot 10^{04}$	0	0	8,79	1341,67
Luxembourg	0	0	638,27	4904,06	0	0	0	50,41
Pays-Bas	0	0	3293,27	31859,35	1,08	0	0	170,95
Slovaquie	0	0	15107,31	$12,18 \cdot 10^{04}$	0	0	0	1030,19
Finlande	13,64	80,30	26647,11	$19,86 \cdot 10^{04}$	8,38	17,78	49,19	2247,48
Suède	4,73	28,16	20732,43	$16,36 \cdot 10^{04}$	5,25	9,17	21,65	1631,88
Royaume Uni	14,50	0	0	66603,97	20,67	27,21	0	0
<b>Orientation dans le graphe</b>								
Rép. Tchèque	3,07	0	1113,88	1315,58	12,28	21,63	0	25943,27
Danemark	7,93	27,40	919,48	1152,97	26,01	41,09	63,50	25069,82
Espagne	73,02	239,89	4786,33	5245,32	269,42	874,11	2917,11	$32,11 \cdot 10^{04}$
France	0	0	0	0	64,18	0	0	0
Lettonie	0	10,30	487,05	526,81	0	0	15,86	8345,95
Lituanie	0	13,02	903,16	973,16	0	0	25,92	18435,51
Luxembourg	0	0	28,16	30,50	0	0	0	104,15
Pays-Bas	0	0	145,27	198,17	1,12	0	0	650,41
Slovaquie	0	0	660,96	731,35	0	0	0	12404,07
Finlande	13,43	74,45	1107,99	1180,56	24,24	74,79	341,96	31003,97
Suède	4,66	25,77	883,55	977,10	12,03	27,72	99,99	22604,74
Royaume Uni	14,27	0	0	414,29	93,94	141,66	0	0

TABLE 5.2 – Mesures de performance directionnelles CES-CET pour  $\alpha \neq \beta$  (partie 2)



	$\alpha = 1,75;$ $\beta = 0,5$	$\alpha = 1,75;$ $\beta = 0,75$	$\alpha = 1,75;$ $\beta = 1$	$\alpha = 1,75;$ $\beta = 1,5$
<b>Orientation en inputs</b>				
République Tchèque	1060,48	828,10	453,72	212,51
Danemark	1266,39	990,39	459,89	489,91
Espagne	6562,88	6388,46	6185,01	5376,10
France	4130,76	2480,35	0	0
Lettonie	0	0	0	397,02
Lituanie	0	0	0	673,65
Luxembourg	0	0	0	0
Pays-Bas	228,47	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0
Finlande	972,64	884,49	880,41	944,09
Suède	704,09	543,66	498,68	512,81
Royaume Uni	2914,95	2420,14	923,45	0
<b>Orientation en outputs</b>				
République Tchèque	5,24	8,45	9,54	55,72
Danemark	8,18	12,01	10,47	161,91
Espagne	34,06	67,72	133,37	729,68
France	15,65	18,97	0	0
Lettonie	0	0	0	62,54
Lituanie	0	0	0	88,87
Luxembourg	0	0	0	0
Pays-Bas	2,03	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0
Finlande	7,19	13,63	25,87	221,47
Suède	5,01	8,46	13,53	132,31
Royaume Uni	18,82	29,35	21,02	0
<b>Orientation dans le graphe</b>				
République Tchèque	18,14	41,90	51,77	1111,47
Danemark	39,52	77,46	60,82	7000,01
Espagne	480,19	1597,93	5227,96	100198,06
France	123,18	172,41	0	0
Lettonie	0	0	0	1360,38
Lituanie	0	0	0	2516,05
Luxembourg	0	0	0	0
Pays-Bas	3,44	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0
Finlande	31,54	96,64	296,34	12110,44
Suède	16,75	41,95	95,32	5048,37
Royaume Uni	170,00	369,92	205,99	0

TABLE 5.3 – Mesures de performance directionnelles CES-CET pour  $\alpha \neq \beta$  (partie 3)

	$\alpha = 0,5$ $\beta = 0,5$	$\alpha = 0,75$ $\beta = 0,75$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$	$\alpha = 1,5$ $\beta = 1,5$	$\alpha = 1,75$ $\beta = 1,75$
<b>Orientation en inputs</b>					
République Tchèque	29,66	180,61	396,92	780,36	921,41
Danemark	19,47	129,99	301,63	635,23	768,56
Espagne	608,93	2083,95	3437,88	5091,49	5552,54
France	0	0	0	0	0
Lettonie	68,00	204,65	316,73	440,97	472,96
Lituanie	106,44	344,32	552,44	796,58	862,46
Luxembourg	0,72	4,10	8,72	16,59	19,40
Pays-Bas	0	0	0	0	0
Slovaquie	20,28	111,60	233,13	435,76	507,19
Finlande	134,84	429,36	683,87	980,11	1059,76
Suède	40,32	193,34	377,31	657,39	749,86
Royaume Uni	0	0	0	0	0
<b>Orientation en outputs</b>					
République Tchèque	24,95	108,78	201,68	334,63	377,06
Danemark	37,55	159,70	294,38	490,47	554,46
Espagne	641,02	1432,45	1910,58	2295,62	2363,29
France	0	0	0	0	0
Lettonie	48,78	120,11	167,77	209,86	217,89
Lituanie	66,20	171,04	245,32	317,08	333,34
Luxembourg	1,43	5,39	9,32	14,43	15,92
Pays-Bas	0	0	0	0	0
Slovaquie	36,63	109,72	168,82	232,68	248,61
Finlande	318,26	513,59	594,87	642,77	649,22
Suède	90,14	231,24	329,70	420,95	439,62
Royaume Uni	0	0	0	0	0
<b>Orientation dans le graphe</b>					
République Tchèque	9,53	64,47	147,02	292,99	344,79
Danemark	10,33	84,70	193,66	396,09	472,76
Espagne	244,89	848,91	1392,76	2010,02	2161,03
France	0	0	0	0	0
Lettonie	18,64	71,18	122,30	183,75	199,25
Lituanie	25,29	101,36	178,83	277,63	304,81
Luxembourg	0,40	2,61	5,65	10,91	12,79
Pays-Bas	0	0	0	0	0
Slovaquie	10,80	65,02	123,07	203,73	227,33
Finlande	71,82	272,39	391,35	519,09	553,55
Suède	21,46	137,04	240,34	368,58	402,00
Royaume Uni	0	0	0	0	0

TABLE 5.4 – Scores d'efficacité CES-CET pour  $\alpha = \beta$

$\beta \backslash \alpha$	0,5	0,75	1	1,5	1,75
0,5	1028,66	3312,05	7129,21	15809,89	17840,66
0,75	4058,65	3681,92	4872,82	10144,02	14535,58
1	7098,52	7134,74	6308,63	7489,22	9401,15
1,5	11285,11	11619,91	11160,17	9834,49	8606,09
1,75	12642,65	13040,28	12760,61	11732,48	10914,14

TABLE 5.5 – Indicateur d'ajustement en inputs

$\beta \backslash \alpha$	0,5	0,75	1	1,5	1,75
0,5	1264,96	150,40	118,12	107,25	96,17
0,75	$1272,19 \cdot 10^{02}$	2852,02	415,62	165,39	158,59
1	$1102,10 \cdot 10^{04}$	53692,29	3922,43	307,07	213,79
1,5	$5396,13 \cdot 10^{07}$	$1585,84 \cdot 10^{04}$	$2643,90 \cdot 10^{02}$	4958,49	1452,51
1,75	$34439,18 \cdot 10^{08}$	$2609,85 \cdot 10^{05}$	$2198,86 \cdot 10^{03}$	19965,33	5199,41

TABLE 5.6 – Indicateur d'ajustement  $\gamma$  en outputs

$\beta \backslash \alpha$	0,5	0,75	1	1,5	1,75
0,5	413,15	50,89	116,36	503,22	882,76
0,75	165,13	1647,68	390,83	1181,01	2398,21
1	247,62	1155,73	2794,99	3464,34	5938,19
1,5	319,00	1872,46	11035,84	4262,79	129344,78
1,75	336,74	2049,79	12745,84	465720,92	4678,30

TABLE 5.7 – Indicateur d'ajustement  $\gamma$  dans le graphe

### 4.1.3 Analyse

#### Tableaux 5.1, 5.2 et 5.3

Nous pouvons noter que lorsque  $\alpha = 0,5$ , seule la France est efficace quelle que soit la valeur prise par le paramètre  $\beta$ . Cependant, lorsque  $\beta = 0,75$  alors, le Royaume-Uni est également performant.

Pour une valeur  $\alpha = 0,75$ , la République Tchèque, la France, le Luxembourg, les Pays-Bas, la Slovaquie et le Royaume-Uni sont efficaces avec  $\beta = 0,5$ . On remarque que plus la valeur de  $\beta$  augmente, moins il y a d'unités de production performantes. De ce fait, lorsque  $\beta = 1$  alors, seuls la France et le Royaume-Uni ont un score nul. Enfin, pour  $\beta = 1,5$  et  $\beta = 1,75$ , la France est l'unique pays performant parmi les 12.

Avec  $\alpha = 1$ , la France, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas et la Slovaquie

sont les pays efficaces pour une valeur de  $\beta$  égale à 0,5. Lorsque  $\beta = 0,75$ , la République Tchèque, la France, le Luxembourg, les Pays-Bas, la Slovaquie et le Royaume-Uni ont des mesures d'efficacité nulles. Plus la valeur de  $\beta$  augmente moins il existe d'unités de production performantes. Donc, lorsque  $\beta = 1,5$  alors, la France et le Royaume-Uni sont les seuls pays efficaces et enfin, pour  $\beta = 1,75$ , la France est l'unique pays performant.

On constate que lorsque  $\alpha = 1,5$ , la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg et la Slovaquie ont un score nul avec  $\beta = 0,5$ . Quand  $\beta = 0,75$ , la France, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas et la Slovaquie sont les pays efficaces. De manière similaire, pour une valeur de  $\beta$  égale à 1, les pays performants sont la République Tchèque, la France, le Luxembourg, les Pays-Bas, la Slovaquie et le Royaume-Uni tandis que lorsque  $\beta = 1,75$  alors, seuls la France et le Royaume-Uni présentent une mesure nulle.

Pour  $\alpha = 1,75$ , la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg et la Slovaquie sont les pays performants lorsque  $\beta = 0,5$  tandis que la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas et la Slovaquie sont efficaces pour une valeur de  $\beta$  égale à 0,75. Quand  $\beta = 1$ , la France, la Lettonie, la Lituanie, le Luxembourg, les Pays-Bas et la Slovaquie sont les pays efficaces tandis que lorsque  $\beta = 1,5$  alors, la France, le Luxembourg, les Pays-Bas, la Slovaquie et le Royaume-Uni sont les pays performants.

Nous notons que lorsqu'une unité de production est efficace suivant une orientation, celle-ci l'est également selon les autres orientations. Ainsi, nous pouvons déduire qu'aucun slack n'existe pour chaque mesure estimée. Nous pouvons constater que le plus grand nombre de pays (soit 6 pays sur 12) est efficace pour les combinaisons des paramètres suivantes :

$\alpha$	0,75	1	1	1,5	1,5	1,75
$\beta$	0,5	0,5	0,75	0,75	1	1
$\gamma$	3/2	2	4/3	2	3/2	7/4

Selon les valeurs des paramètres, nous pouvons comparer, de manière générale en terme de valeur, les scores d'efficacité relativement à l'orientation des mesures. Les résultats sont exposés dans le tableau ci-dessous :

Ce tableau récapitulatif donne une indication quant à la nature du rendement d'échelle qui permet l'efficacité du plus grand nombre d'unités de production. Suivant les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$ ,

$\alpha < \beta$	$\alpha \leq 1$	Outputs > Inputs > Graphe
	$\alpha > 1$	Graphe > Outputs > Inputs
$\alpha > \beta$	$\alpha \leq 1$	Inputs > Outputs > Graphe
	$\alpha > 1$	Inputs > Graphe > Outputs

on peut supposer que  $\gamma \geq 1$ . Ainsi, on peut présumer que l'extrapolation minimale est réalisée sous l'hypothèse de rendements d'échelle croissants. Nous pouvons confirmer ou non cette hypothèse grâce aux indicateurs d'ajustement en input, en output et dans le graphe. Ceux-ci sont relatés dans les tableaux 5.5, 5.6 et 5.7.

#### Tableau 5.4

Nous pouvons constater que lorsque  $\alpha = \beta$ , quelles que soient les valeurs prises par ces paramètres, seuls la France, les Pays-Bas et le Royaume-Uni ont un score de performance nul. Ainsi, ces pays sont efficaces. Nous remarquons également que les scores non-nuls sont moins élevés suivant une orientation dans le graphe que selon une orientation en input et en output. Par ailleurs, on observe que plus la valeur des paramètres augmente plus les mesures non-nulles croissent.

#### Tableaux 5.5, 5.6 et 5.7

Nous pouvons constater que lorsque l'on évalue les indicateurs d'ajustement orientés en input, en output et dans le graphe, nous obtenons les meilleurs rendements d'échelle  $\gamma^*$  suivants :  $\gamma_I^* = 1$ ,  $\gamma_O^* = 7/2$  et  $\gamma^* = 3/2$ . En effet, lorsque  $\alpha = \beta = 0,5$  nous avons  $M_{I,CES} = 1028,66$ . Pour  $\alpha = 1,75$  et  $\beta = 0,5$  on a,  $M_{O,CES} = 96,17$ . Enfin, si  $\alpha = 0,75$  et  $\beta = 0,5$  alors,  $M_{CES} = 50,89$ . Ainsi, dans une orientation en input, le meilleur rendement d'échelle est constant tandis que lorsque les mesures sont axées sur les outputs et dans le graphe, le rendement d'échelle optimal est croissant. Nous pouvons voir que les résultats fournis par les indicateurs confirment notre hypothèse à savoir,  $\gamma \geq 1$ .

## 4.2 Rendements d'Echelle Spécifiques

Cette sous-section nous permet d'illustrer le concept de rendements d'échelle spécifiques. En effet, l'impact de chaque facteur sur chaque produit n'est pas homogène. De ce fait, il est pertinent de connaître sous quelle hypothèse de rendements d'échelle spécifique, l'ensemble des unités de

production est le plus efficace. Nous présentons tout d'abord l'environnement d'analyse. Puis, nous montrons les résultats obtenus. Enfin, nous interprétons ces derniers.

#### 4.2.1 Environnement d'Analyse

Dans la lignée de la sous-section précédente, nous utilisons les données agricoles relatives à la période 2008 concernant 12 pays européens. Nous avons deux facteurs ainsi que deux produits.

Pour tout intrant  $i \in [m]$  et tout extrant  $r \in [n]$ , la mesure de distance directionnelle CES-CET dans le graphe, sous l'hypothèse de rendements d'échelle spécifiques et, suivant la méthode DEA est définie comme suit :

$$D_{\alpha_i, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; h_i^t, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : x_i^t - \delta^t h_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \right)^{1/\alpha_i}, \right. \\ \left. y_r^t + \delta^t k_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r}, \theta^t \geq 0 \right\}.$$

Notons que lorsque  $g^t = (h_i^t, 0)$  et  $g^t = (0, k_r^t)$  alors, la mesure dans le graphe ci-dessus devient des fonctions de distance directionnelles CES-CET orientées respectivement en input et en output.

Dans le cadre de notre étude, nous analysons uniquement les mesures orientées en input et en output tels que  $g^t = (1, 0)$  et  $g^t = (0, 1)$ . Remarquons que la fonction axée sur les intrants ne peut être évaluée grâce à la programmation linéaire que si et seulement si,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$ . De manière similaire, une mesure axée sur les extrants n'est possible grâce à la programmation linéaire que si  $\beta_1 = \dots = \beta_n = \beta$ . Ainsi, les fonctions de distance directionnelles CES-CET orientées en input et en output sont respectivement :

$$D_{\alpha, \beta_r}^t(x_i^t, y_r^t; h_i^t, 0) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : x_i^t - \delta^t h_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha} \right)^{1/\alpha}, \right. \\ \left. y_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r}, \theta^t \geq 0 \right\},$$

$$D_{\alpha_i, \beta}^t(x_i^t, y_r^t; 0, k_r^t) = \sup_{\delta} \left\{ \delta^t : x_i^t \geq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (x_{j,i}^t)^{\alpha_i} \right)^{1/\alpha_i}, \right. \\ \left. y_r^t + \delta^t k_r^t \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j^t (y_{j,r}^t)^{\beta} \right)^{1/\beta}, \theta^t \geq 0 \right\}.$$

Afin de pouvoir déterminer les meilleurs rendements d'échelle, nous évaluons également les indicateurs d'ajustement en input et en output définis auparavant. Ces derniers nous permettent de déduire les rendements d'échelle spécifiques tel que l'ensemble des unités productives ont le plus bas score d'efficacité possible.

Comme précédemment, les valeurs prises par les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont successivement :

$\alpha$	1/2	3/4	1	3/2	7/4
$\beta$	1/2	3/4	1	3/2	7/4

Lorsque nous évaluons les mesures orientées en input, nous prenons les valeurs  $\beta$  telles que  $\beta_1 \neq \beta_2$ . De manière similaire, quand nous estimons les mesures axées sur les extrants, nous choisissons les valeurs de  $\alpha$  telles que  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

## 4.2.2 Résultats

Les scores d'efficacité orientés en input lorsque le paramètre  $\alpha$  prend successivement les valeurs  $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right\}$  sont relatés dans les tableaux 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 et 5.12. De manière similaire, quand  $\beta$  prend successivement les valeurs  $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right\}$ , nous présentons les mesures de performance orientées en output dans les tableaux 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 et 5.17.

## 4.2.3 Interprétations

**Tableaux 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12** Nous pouvons constater que certaines unités de production sont efficaces de manières récurrentes selon les valeurs de  $\alpha$ . Par ailleurs, d'autres pays possèdent des scores de performance positives similaires par rapport aux valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta_r$ .

Si l'on considère par exemple le tableau 5.8, nous pouvons observer que les mesures d'efficacité positives sont sensiblement similaires lorsque :

- a)  $\beta_1 = 0,5$  et  $\beta_2 \in \{0,75; 1; 1,5; 1,75\}$ ,

$\beta_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\beta_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	65,34	65,34	65,34	65,34	29,66	394,38	394,38	394,38
Danemark	69,88	73,81	73,81	73,81	19,47	246,57	246,57	246,57
Espagne	1382,67	1643,09	1678,98	1678,98	608,93	2329,32	2636,50	2641,59
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	117,25	117,25	117,25	117,25	68,00	304,70	304,70	304,70
Lituanie	173,39	173,39	173,39	173,39	106,44	541,27	541,27	541,27
Luxembourg	2,21	2,21	2,21	2,21	0,72	18,44	18,44	18,44
Pays-Bas	0	0	0	0	0	36,50	36,50	36,50
Slovaquie	95,93	95,93	95,93	95,93	20,28	374,51	374,51	374,51
Finlande	523,43	612,67	625,50	625,50	134,84	867,65	944,21	944,21
Suède	210,33	210,33	210,33	210,33	40,32	499,29	501,45	501,45
Royaume Uni	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	2640,44	2994,02	3042,75	3042,75	1028,66	5612,64	5998,55	6003,64
$\beta_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\beta_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	29,66	373,98	776,20	776,20	29,66	373,98	761,18	1256,58
Danemark	19,47	309,53	584,60	584,60	19,47	309,53	679,94	1098,87
Espagne	608,93	1438,29	3712,76	3712,76	608,93	1438,29	2329,32	4474,67
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	68,00	300,16	439,90	439,90	68,00	300,16	439,49	527,33
Lituanie	106,44	474,21	787,76	787,76	106,44	474,21	738,77	972,90
Luxembourg	0,72	19,47	27,74	27,74	0,72	19,47	28,21	30,91
Pays-Bas	0	74,40	123,03	123,03	0	74,40	161,59	214,13
Slovaquie	20,28	272,99	585,66	585,66	20,28	272,99	505,56	753,20
Finlande	134,84	548,81	1132,40	1132,40	134,84	548,81	867,65	1200,93
Suède	40,32	356,86	770,96	770,96	40,32	356,86	653,58	1004,22
Royaume Uni	0	67,60	67,60	67,60	0	166,62	511,93	511,93
$M_{I,CES}$	1028,66	4236,31	9008,61	9008,61	1028,66	4335,33	7677,22	12045,67
$\beta_1$	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
$\beta_2$	0,5	0,75	1	1,5	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	29,66	373,98	761,18	1246,67	29,66	373,98	761,18	1246,67
Danemark	19,47	309,53	679,94	1170,27	19,47	309,53	679,94	1170,27
Espagne	608,93	1438,29	2329,32	3874,71	608,93	1438,29	2329,32	3874,71
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	68,00	300,16	439,49	527,23	68,00	300,16	439,49	527,23
Lituanie	106,44	474,21	738,77	955,55	106,44	474,21	738,77	955,55
Luxembourg	0,72	19,47	28,21	30,95	0,72	19,47	28,21	30,95
Pays-Bas	0	74,40	161,59	228,12	0	74,40	161,59	228,12
Slovaquie	20,28	272,99	505,56	721,93	20,28	272,99	505,56	721,93
Finlande	134,84	548,81	867,65	1150,68	134,84	548,81	867,65	1150,68
Suède	40,32	356,86	653,58	952,51	40,32	356,86	653,58	952,51
Royaume Uni	0	166,62	540,25	792,54	0	166,62	540,25	792,54
$M_{I,CES}$	1028,66	4335,33	7705,54	11651,15	1028,66	4335,33	7705,54	11651,15

TABLE 5.8 – Scores en inputs CES-CET lorsque  $\alpha = 0, 5$



$\beta_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\beta_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	0	0	0	0	1,91	289,04	289,04	289,04
Danemark	129,99	175,03	175,03	175,03	107,51	292,65	309,34	309,34
Espagne	2083,95	2721,88	2958,14	3010,24	2536,91	3030,21	3741,03	3805,99
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	29,05	29,05	29,05	29,05	50,07	280,38	280,38	280,38
Lituanie	48,19	48,19	48,19	48,19	48,11	454,46	454,46	454,46
Luxembourg	0	0	0	0	0	8,33	8,33	8,33
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0	0	0
Slovaquie	4,92	4,92	4,92	4,92	0	291,51	291,51	291,51
Finlande	429,36	692,08	719,97	719,97	268,86	809,17	985,46	994,81
Suède	168,85	168,85	168,85	168,85	67,34	481,36	525,13	525,13
Royaume Uni	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	2894,30	3839,99	4104,15	4156,25	3080,71	5937,10	6884,67	6958,99
$\beta_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\beta_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	28,01	180,61	716,47	716,47	67,86	180,61	660,00	1233,43
Danemark	117,12	129,99	543,13	543,13	141,35	129,99	562,78	1059,26
Espagne	2500,49	2083,95	4358,61	4434,31	2582,18	2083,95	3030,21	4983,42
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	50,41	204,65	414,57	414,57	50,41	204,65	398,76	521,06
Lituanie	48,11	344,32	747,48	747,48	48,11	344,32	680,80	964,32
Luxembourg	0	4,10	22,80	22,80	0	4,10	23,10	30,56
Pays-Bas	0	0	60,88	60,88	0	0	105,80	194,28
Slovaquie	0	111,60	545,24	545,24	0	111,60	421,02	741,65
Finlande	268,86	429,36	1121,54	1129,91	268,86	429,36	809,17	1195,07
Suède	66,24	193,34	750,39	750,39	67,31	193,34	566,14	992,16
Royaume Uni	0	0	0	0	0	0	402,46	402,46
$M_{I,CES}$	3079,25	3681,92	9281,10	9365,17	3226,09	3681,92	7660,24	12317,67
$\beta_1$	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
$\beta_2$	0,5	0,75	1	1,5	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	80,23	180,61	660,00	1222,46				
Danemark	151,94	129,99	562,78	1139,95				
Espagne	2619,78	2083,95	3030,21	4474,21				
France	0	0	0	0				
Lettonie	50,41	204,65	398,76	520,92				
Lituanie	48,11	344,32	680,80	943,78				
Luxembourg	0	4,10	23,10	30,67				
Pays-Bas	0	0	105,80	217,83				
Slovaquie	0	111,60	421,02	702,21				
Finlande	268,86	429,36	809,17	1138,46				
Suède	67,87	193,34	566,14	931,32				
Royaume Uni	0	0	439,42	759,28				
$M_{I,CES}$	3287,21	3681,92	7697,21	12081,09				

TABLE 5.9 – Scores en input CES-CET lorsque  $\alpha = 0,75$

$\beta_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\beta_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	188,38	51,44	106,31	139,86	0	0	0	0
Danemark	230,61	236,43	319,67	353,84	240,15	301,63	376,06	376,06
Espagne	3750,50	3437,88	4014,52	4203,61	4455,15	3437,88	4407,32	4513,87
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	0	0	0	0	37,41	198,07	198,07	198,07
Lituanie	0	0	0	0	0	264,09	264,09	264,09
Luxembourg	0	0	0	0	0	0	0	0
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0	0	82,62	92,33	92,33
Finlande	469,05	683,87	789,78	809,25	485,46	683,87	1011,11	1021,74
Suède	144,48	177,69	222,59	243,07	190,78	377,31	484,31	484,31
Royaume Uni	333,79	0	0	0,14	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	<b>5116,82</b>	<b>4587,31</b>	<b>5452,86</b>	<b>5749,77</b>	<b>5408,94</b>	<b>5345,46</b>	<b>6833,29</b>	<b>6950,48</b>
$\beta_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\beta_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	33,37	27,32	542,46	542,46	247,27	121,61	396,92	1171,72
Danemark	278,39	172,57	566,07	566,07	371,04	190,27	301,63	969,48
Espagne	4351,12	3692,64	4729,45	4932,66	4486,62	3676,33	3437,88	5245,49
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	42,36	140,46	387,90	387,90	42,36	142,61	316,73	509,71
Lituanie	0	214,89	659,82	659,82	0	214,89	552,44	946,29
Luxembourg	0	0	14,38	14,38	0	0	8,72	29,46
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0	0	151,98
Slovaquie	0	0	454,09	454,09	0	0	233,13	718,79
Finlande	485,46	469,05	1096,35	1128,29	485,46	469,05	683,87	1180,60
Suède	188,24	143,41	741,77	741,77	194,47	143,00	377,31	966,05
Royaume Uni	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	<b>5378,95</b>	<b>4860,34</b>	<b>9192,29</b>	<b>9427,44</b>	<b>5827,23</b>	<b>4957,76</b>	<b>6308,63</b>	<b>11889,57</b>
$\beta_1$	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
$\beta_2$	0,5	0,75	1	1	1	1	1	1
Rép Tchèque	305,19	145,58	396,92	1150,06				
Danemark	410,21	198,51	301,63	1054,76				
Espagne	4536,49	3686,74	3437,88	4788,82				
France	0	0	0	0				
Lettonie	42,36	142,61	316,73	508,16				
Lituanie	0	214,89	552,44	918,12				
Luxembourg	0	0	8,72	29,74				
Pays-Bas	0	0	0	194,69				
Slovaquie	0	0	233,13	661,31				
Finlande	485,46	469,05	683,87	1108,57				
Suède	197,24	143,38	377,31	884,01				
Royaume Uni	0	0	0	416,89				
$M_{I,CES}$	<b>5976,95</b>	<b>5000,75</b>	<b>6308,63</b>	<b>11715,12</b>				

TABLE 5.10 – Scores en input CES-CET lorsque  $\alpha = 1$

$\beta_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\beta_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	799,69	610,04	390,17	545,25	532,01	532,01	235,62	301,24
Danemark	831,98	573,02	459,89	599,33	720,74	564,10	351,38	428,21
Espagne	6036,43	5623,29	5042,12	5288,04	6197,49	5623,29	5091,49	5327,74
France	980,55	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	0	0	0	0	0	0	0	0
Lituanie	0	0	0	0	0	0	0	0
Luxembourg	0	0	0	0	0	0	0	0
Pays-Bas	0	0	0	7,17	0	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0	0	0	0	0
Finlande	782,57	776,31	886,10	942,10	853,02	776,31	975,78	1014,48
Suède	427,48	372,92	381,80	454,80	554,42	372,92	394,56	443,26
Royaume Uni	2219,78	1473,62	0	169,00	1644,80	1362,63	0	0
$M_{I,CES}$	12078,47	9429,20	7160,07	8005,69	10502,48	9231,26	7048,83	7514,94

$\beta_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\beta_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	0	0	0	0	366,53	263,29	170,31	916,72
Danemark	381,63	312,00	484,93	484,93	654,60	502,99	371,10	876,72
Espagne	5942,39	5880,31	5091,49	5425,07	6023,21	5843,81	5538,97	5486,90
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	0	55,01	184,27	184,27	0	114,31	229,77	486,49
Lituanie	0	0	310,57	310,57	0	0	313,12	868,66
Luxembourg	0	0	0	0	0	0	0	22,27
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0	0	0
Slovaquie	0	0	101,55	101,55	0	0	0	625,27
Finlande	853,02	782,57	980,11	1096,99	853,02	782,57	776,31	1116,63
Suède	464,01	408,18	635,72	635,72	498,06	410,39	366,47	859,52
Royaume Uni	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	7641,05	7438,07	7788,64	8239,11	8395,43	7917,35	7766,05	11259,19

$\beta_1$	1,75	1,75	1,75	1,75
$\beta_2$	0,5	0,75	1	1,5
Rép Tchèque	610,13	492,85	363,39	780,36
Danemark	783,82	578,02	414,85	635,23
Espagne	6075,76	5863,85	5538,77	5091,49
France	0	0	0	0
Lettonie	0	114,31	231,57	440,97
Lituanie	0	0	313,12	796,58
Luxembourg	0	0	0	16,59
Pays-Bas	59,39	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	435,76
Finlande	853,02	782,57	776,31	980,11
Suède	519,41	415,15	367,58	657,39
Royaume Uni	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	8901,54	8246,75	8005,59	9834,49

TABLE 5.11 – Scores en input CES-CET lorsque  $\alpha = 1, 5$

$\beta_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\beta_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	1003,59	868,14	390,21	577,63	828,10	828,10	390,21	449,69
Danemark	1013,40	827,94	407,95	595,41	990,39	819,97	359,85	456,39
Espagne	6388,46	6185,01	5376,10	5514,65	6494,49	6185,01	5376,10	5531,43
France	2970,01	0	0	0	2480,35	0	0	0
Lettonie	0	0	0	0	0	0	0	0
Lituanie	0	0	0	0	0	0	0	0
Luxembourg	0	0	0	0	0	0	0	0
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0	0	0	0	0
Finlande	884,49	880,41	910,90	965,31	972,64	880,41	940,47	1013,66
Suède	543,66	498,68	438,43	481,77	697,62	498,68	442,83	480,83
Royaume Uni	2646,14	2226,21	0	0	2420,14	2185,54	0	0
$M_{I,CES}$	15449,75	11486,38	7523,58	8134,77	14883,72	11397,70	7509,46	7932,00

$\beta_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\beta_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	453,72	453,72	390,21	194,19	0	0	0	488,15
Danemark	459,89	459,89	247,53	303,06	695,14	551,86	447,81	768,56
Espagne	6307,69	6307,69	5376,10	5552,54	6302,68	6220,55	6085,64	5552,54
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	0	0	0	0	0	16,40	212,59	464,28
Lituanie	0	0	0	0	0	0	165,62	778,60
Luxembourg	0	0	0	0	0	0	0	16,82
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0	0	0	0	500,52
Finlande	972,64	884,49	944,09	1059,76	972,64	884,49	880,41	1059,76
Suède	594,52	543,12	512,81	549,53	622,29	517,58	484,96	749,86
Royaume Uni	923,45	923,45	0	0	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	9711,90	9572,35	7470,73	7659,08	8592,75	8190,88	8277,03	10379,10

$\beta_1$	1,75	1,75	1,75	1,75
$\beta_2$	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	575,50	476,39	362,93	311,94
Danemark	861,46	666,66	539,46	489,91
Espagne	6351,37	6238,05	6085,42	5376,10
France	0	0	0	0
Lettonie	0	16,40	218,44	397,02
Lituanie	0	0	165,62	673,65
Luxembourg	0	0	0	0
Pays-Bas	0	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0
Finlande	972,64	884,49	880,41	944,09
Suède	649,66	525,04	487,56	512,81
Royaume Uni	0	0	0	0
$M_{I,CES}$	9410,62	8807,03	8739,83	8705,53

TABLE 5.12 – Scores en input CES-CET lorsque  $\alpha = 1,75$

$\alpha_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\alpha_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	0	0	0	0	16,01	0,17	1,27	1,42
Danemark	18,16	25,94	279,57	471,85	37,76	53,57	515,70	1121,56
Espagne	680,02	862,76	913,40	882,94	636,08	1876,02	2354,75	2383,70
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	3,36	0	0	0	33,03	0	0	0
Lituanie	6,34	2,76	0,75	0,47	40,96	0,03	0	0
Luxembourg	0	0	0	0	1,43	0	0	0
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0	26,16	0	0	0
Finlande	170,19	150,87	292,93	369,77	278,49	179,35	419,40	547,93
Suède	13,48	13,00	40,48	56,34	67,35	18,42	64,61	92,06
Royaume Uni	0	35,78	202,78	218,07	0	140,11	2425,71	2849,84
$M_{O,CES}$	891,56	1091,10	1729,91	1999,43	1137,27	2267,67	5781,43	6996,51

$\alpha_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\alpha_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	12,69	0	22,77	28,98	0,82	0	13,38	190,18
Danemark	37,80	18,24	606,20	1315,95	37,55	18,33	76,70	1448,80
Espagne	627,13	1223,27	8602,45	8645,08	605,07	1262,20	7274,57	111171,81
France	0	0	0	0	0	387,92	3480,93	4122,17
Lettonie	26,96	0,22	0	0	21,59	0,03	0	0
Lituanie	0	0	0	0	0	0	0	0
Luxembourg	1,43	0	0	0	1,22	0	0	0
Pays-Bas	0	0	0	0	0	0,10	1,20	0,71
Slovaquie	0	0	0	0	0	0	0	0
Finlande	251,82	134,64	572,92	795,32	220,96	115,16	183,79	992,00
Suède	55,86	8,58	93,70	135,97	45,69	5,63	22,84	260,41
Royaume Uni	0	0	5199,03	11503,11	0	0	235,98	28524,05
$M_{O,CES}$	1013,71	1384,95	15097,07	22424,41	932,89	1789,37	11289,40	146710,13

$\alpha_1$	1,75	1,75	1,75	1,75
$\alpha_2$	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	0	0	14,95	168,18
Danemark	37,33	25,44	97,57	750,83
Espagne	593,71	1257,77	7337,99	87932,17
France	0	419,64	7389,58	15174,41
Lettonie	12,23	0,02	0	0
Lituanie	0	0	0	0
Luxembourg	1,06	0	0	0
Pays-Bas	0	3,93	11,06	13,41
Slovaquie	0	0	0	0
Finlande	211,46	109,23	182,57	588,85
Suède	43,37	4,91	22,73	145,59
Royaume Uni	0	0	243,72	8970,17
$M_{O,CES}$	899,16	1820,95	15300,17	113743,61

 TABLE 5.13 – Scores en output CES-CET pour  $\beta = 0,5$

$\alpha_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\alpha_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	155,45	1,12	0	0	405,24	0	0	0
Danemark	159,55	92,74	39,70	112,70	305,63	92,38	99,66	251,12
Espagne	1439,90	1397,42	1276,35	1209,30	1453,92	1382,80	1705,67	1722,08
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	147,55	53,36	0,41	0	343,81	44,61	0	0
Lituanie	215,26	110,00	25,59	20,51	455,11	47,64	18,11	12,33
Luxembourg	5,39	0	0	0	54,25	0	0	0
Pays-Bas	0	0	0	0	85,53	0	0	0
Slovaquie	153,84	0	0	0	391,64	0	0	0
Finlande	517,62	370,03	245,92	291,18	742,60	354,81	275,93	340,72
Suède	274,41	144,92	46,92	63,25	480,99	119,51	56,71	80,34
Royaume Uni	0	0	0	0	0	0	230,94	485,98
$M_{O,CES}$	3068,97	2169,59	1634,89	1696,94	4718,72	2041,74	2387,02	2892,57

$\alpha_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\alpha_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	403,44	87,03	0	0	185,02	71,33	0	79,87
Danemark	305,63	159,59	130,44	306,61	305,63	158,86	88,09	332,63
Espagne	1452,91	1419,11	2543,45	2654,59	1450,40	1385,60	1765,32	11287,90
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	341,62	94,80	0	0	322,73	76,50	10,53	0
Lituanie	202,19	154,67	1,88	0	0	0	0	0
Luxembourg	54,25	5,39	0	0	54,25	5,39	0	0
Pays-Bas	85,53	0	0	0	85,53	0	0	0
Slovaquie	256,61	92,47	0	0	3,57	0	0	0
Finlande	738,69	468,85	310,12	399,85	733,89	407,26	281,20	444,13
Suède	477,85	193,30	67,53	98,19	474,79	155,83	53,78	139,71
Royaume Uni	0	0	471,05	1463,27	0	0	0	2630,53
$M_{O,CES}$	4318,72	2675,23	3524,47	4922,52	3615,82	2260,77	2198,93	14914,77

$\alpha_1$	1,75	1,75	1,75	1,75
$\alpha_2$	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	99,65	68,89	0	64,95
Danemark	305,63	158,34	86,07	139,18
Espagne	1449,09	1368,07	1776,86	8988,98
France	0	0	202,40	959,87
Lettonie	214,77	73,49	8,73	0
Lituanie	0	0	0	0
Luxembourg	54,25	5,39	0	0
Pays-Bas	85,53	0	0	0
Slovaquie	0	0	0	0
Finlande	732,35	387,68	261,25	314,78
Suède	474,05	146,51	46,44	84,31
Royaume Uni	0	0	0	747,42
$M_{O,CES}$	3415,32	2208,37	2381,74	11299,50

 TABLE 5.14 – Scores en output CES-CET pour  $\beta = 0,75$

$\alpha_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\alpha_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	525,06	336,04	0	0	974,47	248,53	0	0
Danemark	445,47	294,78	69,89	12,10	845,69	294,68	74,68	19,72
Espagne	1975,96	1933,22	1809,59	1739,87	2131,23	1924,60	1786,38	1715,32
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	363,77	205,94	55,34	15,19	733,60	202,90	41,90	1,21
Lituanie	537,07	354,04	168,27	95,42	923,78	277,97	103,53	76,42
Luxembourg	41,31	9,32	0	0	184,23	9,32	0	0
Pays-Bas	86,30	0	0	0	387,95	0	0	0
Slovaquie	431,60	276,31	0	0	846,46	205,74	0	0
Finlande	772,77	599,86	376,77	299,00	1177,01	596,66	361,99	281,47
Suède	567,68	390,29	139,42	85,22	971,18	387,17	123,36	77,38
Royaume Uni	0	0	0	0	287,57	0	0	0
$M_{O,CES}$	5746,98	4399,82	2619,28	2246,80	9463,17	4147,56	2491,83	2171,52
$\alpha_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\alpha_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	974,47	481,72	0	0	670,10	470,69	162,48	1,81
Danemark	845,69	445,47	73,19	45,56	845,69	445,47	293,40	62,35
Espagne	2131,23	1968,88	1973,72	2091,75	2131,23	1957,42	1875,95	3600,66
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	733,60	331,35	33,58	0	710,03	318,75	127,08	0
Lituanie	579,85	502,63	61,89	49,53	190,49	190,49	190,49	4,74
Luxembourg	184,23	41,31	0	0	184,23	41,31	9,32	0
Pays-Bas	387,95	86,30	0	0	387,95	86,30	0	0
Slovaquie	664,25	392,91	0	0	248,30	248,30	144,78	0
Finlande	1177,01	753,00	353,13	284,01	1177,01	724,82	516,50	296,96
Suède	971,18	524,87	114,75	79,07	971,18	503,28	262,24	93,20
Royaume Uni	287,57	0	0	0	287,57	0	0	196,17
$M_{O,CES}$	8937,03	5528,45	2610,26	2549,92	7803,79	4986,84	3582,25	4255,89
$\alpha_1$	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
$\alpha_2$	0,5	0,75	1	1,5	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	480,79	468,93	155,06	0	480,79	468,93	155,06	0
Danemark	845,69	445,47	292,79	59,05	845,69	445,47	292,79	59,05
Espagne	2131,23	1951,40	1857,87	2996,95	2131,23	1951,40	1857,87	2996,95
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	538,09	316,61	119,43	9,09	538,09	316,61	119,43	9,09
Lituanie	84,43	84,43	84,43	14,54	84,43	84,43	84,43	14,54
Luxembourg	184,23	41,31	9,32	0	184,23	41,31	9,32	0
Pays-Bas	387,95	86,30	0	0	387,95	86,30	0	0
Slovaquie	129,50	129,50	129,50	0	129,50	129,50	129,50	0
Finlande	1177,01	715,64	488,32	323,42	1177,01	715,64	488,32	323,42
Suède	971,18	497,72	244,30	86,09	971,18	497,72	244,30	86,09
Royaume Uni	287,57	0	0	0	287,57	0	0	0
$M_{O,CES}$	7217,68	4737,31	3381,02	3489,15	7217,68	4737,31	3381,02	3489,15

 TABLE 5.15 – Scores en output CES-CET pour  $\beta = 1$

$\alpha_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\alpha_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	1228,40	859,14	610,12	500,31	1741,91	849,55	509,13	431,31
Danemark	1138,37	762,20	491,92	383,69	1665,75	762,20	491,62	382,69
Espagne	2615,13	2457,24	2347,99	2285,25	2800,87	2456,68	2338,37	2270,39
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	798,41	495,96	258,46	186,96	1304,13	495,96	256,00	180,21
Lituanie	1086,15	745,09	488,72	391,55	1542,38	736,14	432,86	376,05
Luxembourg	193,35	74,13	14,43	0	506,58	74,13	14,43	0
Pays-Bas	487,52	221,35	0	0	965,73	221,35	0	0
Slovaquie	952,54	624,92	362,77	270,94	1468,69	615,89	361,12	266,40
Finlande	1228,38	892,14	646,44	554,91	1731,98	892,14	644,73	550,53
Suède	1101,73	761,35	499,30	402,54	1616,48	761,35	497,40	397,54
Royaume Uni	701,68	0	0	0	1291,31	0	0	0
$M_{O,CES}$	11531,67	7893,52	5720,15	4976,16	16635,81	7865,40	5545,65	4855,12

$\alpha_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\alpha_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	1741,91	1228,40	422,21	303,29	1443,68	1228,40	840,07	152,10
Danemark	1665,75	1138,37	491,27	381,59	1665,75	1138,37	762,20	379,22
Espagne	2800,87	2615,13	2325,44	2251,78	2800,87	2615,13	2453,53	2210,26
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	1304,13	798,41	254,92	177,14	1278,50	798,41	485,06	159,93
Lituanie	1177,54	1086,15	366,32	280,09	676,04	676,04	676,04	201,10
Luxembourg	506,58	193,35	14,43	0	506,58	193,35	74,13	0
Pays-Bas	965,73	487,52	0	0	965,73	487,52	221,35	0
Slovaquie	1276,40	952,54	297,13	235,24	766,29	766,29	608,00	0
Finlande	1731,98	1228,38	643,71	547,85	1731,98	1228,38	883,74	545,29
Suède	1616,48	1101,73	496,42	394,88	1616,48	1101,73	746,80	351,32
Royaume Uni	1291,31	701,68	0	0	1291,31	701,68	0	0
$M_{O,CES}$	16078,67	11531,67	5311,85	4571,85	14743,20	10935,30	7750,92	3999,21

$\alpha_1$	1,75	1,75	1,75	1,75
$\alpha_2$	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	1241,67	1228,40	839,25	314,59
Danemark	1665,75	1138,37	762,20	490,04
Espagne	2800,87	2615,13	2452,37	2280,42
France	0	0	0	0
Lettonie	1082,84	798,41	483,94	187,12
Lituanie	505,29	505,29	505,29	309,69
Luxembourg	506,58	193,35	74,13	14,43
Pays-Bas	965,73	487,52	221,35	0
Slovaquie	587,68	587,68	587,68	221,63
Finlande	1731,98	1228,38	880,70	608,34
Suède	1616,48	1101,73	744,70	384,92
Royaume Uni	1291,31	701,68	0	0
$M_{O,CES}$	13996,17	10585,95	7551,61	4811,19

 TABLE 5.16 – Scores en output CES-CET pour  $\beta = 1, 5$



$\alpha_1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,75
$\alpha_2$	0,75	1	1,5	1,75	0,5	1	1,5	1,75
Rép. Tchèque	1485,46	1104,76	770,60	666,71	1969,86	1104,76	700,22	612,62
Danemark	1417,83	1023,98	665,52	555,94	1914,44	1023,98	665,52	555,68
Espagne	2793,24	2639,15	2484,90	2425,96	2954,85	2639,15	2479,37	2416,24
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	994,83	654,51	352,53	269,41	1506,06	654,51	352,53	267,31
Lituanie	1298,45	934,11	606,67	507,27	1743,87	934,11	565,21	495,61
Luxembourg	293,37	128,50	28,80	15,92	666,88	128,50	28,80	15,92
Pays-Bas	680,08	374,35	82,01	0	1181,07	374,35	82,01	0
Slovaquie	1164,86	805,69	479,85	382,56	1674,10	805,69	479,85	381,24
Finlande	1428,56	1065,20	746,25	652,04	1914,72	1065,20	746,25	650,82
Suède	1321,13	953,79	622,98	523,30	1820,02	953,79	622,98	521,90
Royaume Uni	1155,82	570,54	0	0	1682,75	570,54	0	0
$M_{O,CES}$	14033,62	10254,58	6840,10	5999,11	19028,61	10254,58	6722,73	5917,35
$\alpha_1$	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5
$\alpha_2$	0,5	0,75	1,5	1,75	0,5	0,75	1	1,75
Rép. Tchèque	1969,86	1485,46	640,77	512,21	1690,74	1485,46	1104,76	403,62
Danemark	1914,44	1417,83	665,52	555,39	1914,44	1417,83	1023,98	554,77
Espagne	2954,85	2793,24	2471,94	2404,06	2954,85	2793,24	2639,15	2376,92
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	1506,06	994,83	352,53	266,36	1480,89	994,83	654,51	251,15
Lituanie	1389,36	1298,45	515,64	412,02	877,07	877,07	877,07	344,49
Luxembourg	666,88	293,37	28,80	15,92	666,88	293,37	128,50	15,92
Pays-Bas	1181,07	680,08	82,01	0	1181,07	680,08	374,35	0
Slovaquie	1487,62	1164,86	430,76	354,26	973,22	973,22	805,69	265,40
Finlande	1914,72	1428,56	746,25	650,08	1914,72	1428,56	1065,20	649,37
Suède	1820,02	1321,13	622,98	521,16	1820,02	1321,13	953,79	484,67
Royaume Uni	1682,75	1155,82	0	0	1682,75	1155,82	570,54	0
$M_{O,CES}$	18487,61	14033,62	6557,19	5691,46	17156,64	13420,60	10197,54	5346,31
$\alpha_1$	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
$\alpha_2$	0,5	0,75	1	1,5	0,5	0,75	1	1,5
Rép. Tchèque	1498,22	1485,46	1104,76	570,12	1498,22	1485,46	1104,76	570,12
Danemark	1914,44	1417,83	1023,98	665,52	1914,44	1417,83	1023,98	665,52
Espagne	2954,85	2793,24	2639,15	2446,09	2954,85	2793,24	2639,15	2446,09
France	0	0	0	0	0	0	0	0
Lettonie	1286,42	994,83	654,51	297,95	1286,42	994,83	654,51	297,95
Lituanie	693,56	693,56	693,56	474,20	693,56	693,56	693,56	474,20
Luxembourg	666,88	293,37	128,50	28,80	666,88	293,37	128,50	28,80
Pays-Bas	1181,07	680,08	374,35	82,01	1181,07	680,08	374,35	82,01
Slovaquie	784,30	784,30	784,30	374,28	784,30	784,30	784,30	374,28
Finlande	1914,72	1428,56	1065,20	720,76	1914,72	1428,56	1065,20	720,76
Suède	1820,02	1321,13	953,79	540,73	1820,02	1321,13	953,79	540,73
Royaume Uni	1682,75	1155,82	570,54	0	1682,75	1155,82	570,54	0
$M_{O,CES}$	16397,21	13048,17	9992,64	6200,45	16397,21	13048,17	9992,64	6200,45

TABLE 5.17 – Scores en output CES-CET pour  $\beta = 1,75$

- b)  $\beta_1 \in \{0,75; 1; 1,5; 1,75\}$  et  $\beta_2 = 0,5$ ,
- c)  $\beta_1 = 0,75$  et  $\beta_2 \in \{1; 1,5; 1,75\}$ ,
- d)  $\beta_1 \in \{1; 1,5; 1,75\}$  et  $\beta_2 = 0,75$ ,
- e)  $\beta_1 = 1$  et  $\beta_2 \in \{1,5; 1,75\}$ ,
- f)  $\beta_1 \in \{1,5; 1,75\}$  et  $\beta_2 = 1$ ,
- g)  $\beta_1 \in \{1,5; 1,75\}$  et  $\beta_2 \in \{1,5; 1,75\}$ ,

Pour les cas (a) et (b), on dénombre 3 unités de production efficaces. Les pays efficaces sont identiques relativement aux deux situations, à savoir la France, les Pays-Bas et le Royaume-Uni. Pour (c) et (d), on peut constater que le premier cas recense deux unités efficaces (la France et le Royaume-Uni) tandis que le second ne fait apparaître qu'un seul pays performant (la France). Les situations (e), (f) et (g), quant à elles, ne dénombrent que la France comme unité de production efficace.

Néanmoins, nous remarquons que le constat évoqué ci-dessus est valable si  $\alpha < 1$ . En effet, lorsque le paramètre est supérieur à 1, nous observons des écarts assez conséquents relativement aux scores de performance mais également une différence par rapport au nombre et à l'identité des unités de production efficaces. Notons également que plus la valeur de  $\alpha$  augmente, plus les mesures de performance positives s'accroissent. Ainsi, le paramètre  $\alpha$  conduit à une déformation de la frontière efficiente telle que plus la valeur de celle-ci est grande, plus la distance à la frontière augmente également.

Grâce aux résultats des indicateurs d'ajustement, nous pouvons identifier les meilleurs rendements d'échelle spécifiques. Les cinq premiers tableaux permettent de produire le tableau récapitulatif suivant :

Le tableau 5.18 montre que l'indicateur d'ajustement axé sur les intrants est le plus faible possible pour  $\alpha = 0,5$  et  $(\beta_1, \beta_2) \in \left\{ \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right), \left( 1, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{7}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ . Ainsi, les rendements d'échelle spécifiques relatifs aux outputs 1 et 2, pour chaque couple  $(\beta_1, \beta_2)$ , sont les suivants :  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \left\{ \left( \frac{2}{3}, 1 \right), \left( \frac{1}{2}, 1 \right), \left( \frac{1}{3}, 1 \right), \left( \frac{2}{7}, 1 \right) \right\}$ . Ces résultats démontrent que l'indicateur minimal est obtenu lorsque les rendements d'échelle par rapport à l'output 1 et à l'output 2 sont respectivement décroissants et constants.

$\alpha$		<b>0,5</b>				
$\beta_2$	$\beta_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	1028,66	1028,66	1028,66	1028,66
<b>0,75</b>		2640,44	-	4236,31	4335,33	4335,33
<b>1</b>		2994,02	5612,64	-	7677,22	7705,54
<b>1,5</b>		3042,75	5998,55	9008,61	-	11651,15
<b>1,75</b>		3042,75	6003,64	9008,61	12045,67	-

$\alpha$		<b>0,75</b>				
$\beta_2$	$\beta_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	3080,71	3079,25	3226,09	3287,21
<b>0,75</b>		2894,30	-	3681,92	3681,92	3681,92
<b>1</b>		3839,99	5937,10	-	7660,24	7697,21
<b>1,5</b>		4104,15	6884,67	9281,10	-	12081,09
<b>1,75</b>		4156,25	6958,99	9365,17	12317,67	-

$\alpha$		<b>1</b>				
$\beta_2$	$\beta_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	5408,94	5378,95	5827,23	5976,95
<b>0,75</b>		5116,82	-	4860,34	4957,76	5000,75
<b>1</b>		4587,31	5345,46	-	6308,63	6308,63
<b>1,5</b>		5452,86	6833,29	9192,29	-	11715,12
<b>1,75</b>		5749,77	6950,48	9427,44	11889,57	-

$\alpha$		<b>1,5</b>				
$\beta_2$	$\beta_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	10502,48	7641,05	8395,43	8901,54
<b>0,75</b>		12078,47	-	7438,07	7917,35	8246,75
<b>1</b>		9429,20	9231,26	-	7766,05	8005,59
<b>1,5</b>		7160,07	7048,83	7788,64	-	9834,49
<b>1,75</b>		8005,69	7514,94	8239,11	11259,19	-

$\alpha$		<b>1,75</b>				
$\beta_2$	$\beta_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>			14883,72	9711,90	8592,75	9410,62
<b>0,75</b>		15449,75		9572,35	8190,88	8807,03
<b>1</b>		11486,38	11397,70		8277,03	8739,83
<b>1,5</b>		7523,58	7509,46	7470,73		8705,53
<b>1,75</b>		8134,77	7932,00	7659,08	10379,10	

TABLE 5.18 – Indicateurs d'ajustement en input

**Tableaux 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17** Nous observons que contrairement aux résultats de la mesure axée sur les inputs, hormis certains cas, les scores orientées en output ne montrent pas de similitude selon les différentes valeurs prises par  $\beta$ . En effet, nous constatons que les scores de performance non-nuls et les unités de production efficaces, sont différents pour chaque combinaison des paramètres sauf dans certains situations. Cependant, nous remarquons que plus la valeur de

$\beta$  s'accroît, plus les mesures de performance positives augmentent. Par ailleurs, cette hausse des scores engendre une diminution du nombre de pays efficaces.

Le tableau 5.19 montre que lorsque  $\beta = 0,5$  et  $(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  alors, l'indicateur d'ajustement est minimal. Ce résultat indique que les rendements d'échelle spécifiques optimaux sont respectivement  $\gamma_1 = 1$  et  $\gamma_2 = \frac{2}{3}$  tels que ceux relatifs à l'input 1 et à l'input 2 sont respectivement constants et décroissants.

$\beta$		<b>0,5</b>				
$\alpha_2$	$\alpha_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	1137,27	1013,71	932,89	899,16
<b>0,75</b>		891,56	-	1384,95	1789,37	1820,95
<b>1</b>		1091,10	2267,67	-	11289,40	15300,17
<b>1,5</b>		1729,91	5781,43	15097,07	-	113743,61
<b>1,75</b>		1999,43	6996,51	22424,41	146710,13	-
$\beta$		<b>0,75</b>				
$\alpha_2$	$\alpha_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	4718,72	4318,72	3615,82	3415,32
<b>0,75</b>		3068,97	-	2675,23	2260,77	2208,37
<b>1</b>		2169,59	2041,74	-	2198,93	2381,74
<b>1,5</b>		1634,89	2387,02	3524,47	-	11299,50
<b>1,75</b>		1696,94	2892,57	4922,52	14914,77	-
$\beta$		<b>1</b>				
$\alpha_2$	$\alpha_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	9463,17	8937,03	7803,79	7217,68
<b>0,75</b>		5746,98	-	5528,45	4986,84	4737,31
<b>1</b>		4399,82	4147,56	-	3582,25	3381,02
<b>1,5</b>		2619,28	2491,83	2610,26	-	3489,15
<b>1,75</b>		2246,80	2171,52	2549,92	4255,89	-
$\beta$		<b>1,5</b>				
$\alpha_2$	$\alpha_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	16635,81	16078,67	14743,20	13996,17
<b>0,75</b>		11531,67	-	11531,67	10935,30	10585,95
<b>1</b>		7893,52	7865,40	-	7750,92	7551,61
<b>1,5</b>		5720,15	5545,65	5311,85	-	4811,19
<b>1,75</b>		4976,16	4855,12	4571,85	3999,21	-
$\beta$		<b>1,75</b>				
$\alpha_2$	$\alpha_1$	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>1,75</b>
<b>0,5</b>		-	19028,61	18487,61	17156,64	16397,21
<b>0,75</b>		14033,62	-	14033,62	13420,60	13048,17
<b>1</b>		10254,58	10254,58	-	10197,54	9992,64
<b>1,5</b>		6840,10	6722,73	6557,19	-	6200,45
<b>1,75</b>		5999,11	5917,35	5691,46	5346,31	-

TABLE 5.19 – Indicateur d'ajustement en output

## Conclusion

Ce dernier chapitre applique la théorie des rendements d'échelle  $\alpha$  à la mesure non-linéaire présentée dans le chapitre 3. En effet, la structure particulière de celle-ci permet de l'implanter dans le modèle à rendements d'échelle  $\alpha$  de Boussemart et al. (2009). Nous pouvons voir que lorsque l'on considère une situation globale où tous les inputs varient dans une même proportion et où tous les outputs fluctuent dans une autre même proportion, il existe un rendement d'échelle global relatif à l'ensemble du processus de production (Boussemart et al. (2009), Boussemart et al. (2018)). Cependant, lorsque chaque intrant et chaque extrant sont modifiés différemment, on ne peut fournir un rendement d'échelle global à la totalité du processus productif. En effet, dans ce cas, nous obtenons le rendement d'échelle relatifs à chaque facteur et à chaque produit. L'exemple numérique nous montre que les rendements d'échelle impactent fortement la performance des entités de production. Les propositions faites dans ce chapitre ne sont qu'une partie des extensions possibles de la fonction de distance directionnelle CES-CET.

# Conclusion Générale

Ces travaux introduisent de nouvelles mesures d'efficacité relatives à l'économie de la production. Ces nouveaux outils sont des réponses éventuelles aux difficultés rencontrées avec les outils traditionnels, proposés dans la littérature. Par ailleurs, nous démontrons que ces mesures s'insèrent dans les diverses méthodes d'analyse de la performance notamment, l'appréciation de la productivité des firmes et l'étude de l'influence des rendements d'échelle sur l'efficacité des entités de production.

Nous exposons notre positionnement économique dans l'introduction générale. En effet, nous nous plaçons dans la lignée des écoles de pensées classique et néoclassique. En ce sens, nous supposons que l'objectif des entités de production est la recherche de l'efficacité. Par ailleurs, nous admettons que les résultats que nous proposons ne tiennent pas compte des interventions de l'Etat, que ce soit à l'échelle des firmes ou sur les marchés. Afin de pouvoir mieux appréhender les apports théoriques de ce travail, nous relatons dans le premier chapitre, les outils d'analyse traditionnels existant dans la littérature. Nous définissons tout d'abord, les concepts de technologie de production, de correspondance en inputs et en outputs. Ces notions sont les bases de toute analyse en économie de la production puisque les mesures de performance sont définies dans le cadre des hypothèses relatives aux ensembles de production. Ensuite, nous présentons les fonctions de distance fréquemment rencontrées dans la littérature à savoir, les mesures de Debreu( 1951)-Farrell(1957), de Shephard (1953), la fonction de distance directionnelle (Luenberger (1992b), Chambers et al. (1996a)) et la fonction de distance proportionnelle de Farrell (Briec (1997)). Enfin, nous exposons les diverses mesures de productivité relatives aux fonctions de distance présentées auparavant. Nous définissons d'abord les indices de Malmquist (Caves et al. (1982a, 1982b) et les indicateurs de Luenberger (Chambers et al. (1996b)). Puis nous présentons les extensions de ces mesures de productivité à savoir, les indices de Hicks-Moorsteen (Diewert (1992a, 1992b)) et les

indicateurs de Luenberger-Hicks-Moorsteen (Briec et Kerstens (2004)). Cette revue de littérature chronologique n'est pas exhaustive mais contribue à la compréhension des apports théoriques, exposés dans les chapitres restants.

Le deuxième chapitre de ces travaux est consacré à la proposition d'une mesure de distance exponentielle. Celle-ci est de nature log-additive telle que, dans ce cas, nous obtenons une fonction structurellement similaire à la fonction de distance directionnelle. En effet, nous pouvons avancer qu'il existe des firmes qui ont des productivités marginales strictement croissantes (par exemple le secteur de la nouvelle technologie) ou strictement décroissantes (par exemple les entreprises ayant un monopole naturel). Cette mesure de performance s'adresse à ce type d'unités productives. A cet effet, nous présentons cette fonction selon une orientation dans le graphe (respectivement en input et en output). Nous explorons également la théorie de la dualité qui nous amène à définir des pseudo fonctions de coût, de revenu et de profit non-linéaires. Ces fonctions possèdent cette structure non-linéaire lorsqu'il existe des facteurs internes et/ou externes qui influencent les coûts, le revenu ou le profit des firmes. Ce cas peut également survenir lorsqu'il y a un lien non-constant entre la production et les intrants. Cette relation duale nous permet de déduire des fonctions de prix implicites grâce au théorème de l'enveloppe. Ces fonctions de prix ajustés correspondent aux prix lorsque la firme est efficiente au sens de Pareto-Koopmans. Par ailleurs, nous relierons la notion de rendements d'échelle à la mesure de distance exponentielle tel que nous obtenons une analogie avec les fonctions de production de type Cobb-Douglas. De ce fait, nous pouvons déterminer les rendements d'échelle spécifiques de chaque facteur relativement à chaque produit.

Dans le troisième chapitre de ces travaux, nous définissons une mesure de performance non-linéaire de type CES-CET. Cette fonction hérite de la structure de la mesure de distance directionnelle (Luenberger (1992b), Chambers et al. (1996a)) et celle de la technologie de production CES-CET (Färe et al. (1988)). En effet, celle-ci coïncide avec la mesure de distance directionnelle, dans un cas particulier. Nous la présentons dans un cadre orienté que ce soit en input, en output ou dans le graphe. Nous constatons que cette fonction est équivalente aux mesures de distance radiales de Shephard (1953) et de Debreu(1951)-Farrell(1957), sous certaines conditions. Nous explorons la propriété relative à la translation homothéticité que la fonction vérifie. Nous abordons également la théorie de la dualité telle que nous obtenons des pseudo fonctions de coût, de revenu et de profit non-linéaires. Grâce au *Lemme dual de Shephard*, nous en déduisons des fonctions de



prix ajustés non-linéaires qui peuvent survenir lorsque des tarifications non-linéaires sont appliquées. Ces prix correspondent aux prix lorsque l'efficacité de Pareto est atteinte. La fonction de distance directionnelle CES-CET est également définie dans un cadre non-paramétrique grâce à la méthode DEA telle que nous supposons que la technologie de production est de type CES-CET. Enfin, un exemple numérique est présenté dans le chapitre afin d'illustrer les notions définies auparavant. Nous constatons que lorsque nous estimons la mesure dans un ensemble de production CES-CET, le nombre d'unités de production efficaces est supérieur au nombre d'entités de production efficaces dans une technologie DEA classique. Dans ce cas, nous avons la confirmation que la technologie non-linéaire permet d'apprécier l'efficacité des unités productives ayant des productivités marginales strictement croissantes ou décroissantes. En effet, celles-ci sont négligées dans l'approche standard tel qu'elles peuvent être considérées comme étant inefficaces.

Nous proposons une extension de la mesure de performance exponentielle dans le chapitre quatre de ces travaux. En effet, sachant que la productivité d'une firme est liée à sa performance, nous proposons de mesurer les variations de la productivité grâce à la fonction de distance exponentielle. Puisque celle-ci est log-additive, nous mettons en relation la mesure d'efficacité exponentielle et les indicateurs de productivité de Luenberger (Chambers et al. (1996b)) et de Luenberger-Hicks-Moorsteen (Briec et Kerstens (2004)). Nous les présentons selon une orientation dans le graphe (respectivement en input et en output). Nous observons que dans ce cas, la structure des mesures de productivité ne changent pas. De plus, nous proposons une décomposition de ces mesures de productivité en deux composantes distinctes à savoir, le changement d'efficacité entre deux périodes et, la mutation technologique. Nous constatons que l'estimation des mesures de distance croisées par rapport à deux périodes consécutives peut amener à une définition dynamique de celles-ci. Cette nouvelle formulation conduit à l'apparition d'un nouveau paramètre qui représente les contraintes internes et externes influençant la performance des firmes. Effectivement, malgré la recherche active de l'efficacité, les entités de production peuvent se heurter à des difficultés internes (par exemple les syndicats) et/ou externes (par exemple les contraintes du marché), quant à la mise en place de leurs stratégies. Enfin, nous illustrons nos apports théoriques dans la dernière section du chapitre.

Le dernier chapitre de ces travaux est consacré à l'extension de la mesure de distance directionnelle CES-CET à la notion de rendements d'échelle  $\alpha$  (Boussemart et al. (2009)). En effet,

nous admettons que lorsque cette fonction de distance est estimée dans le cadre d'une technologie de production CES-CET, nous pouvons étendre l'analyse économique au modèle de rendements d'échelle optimaux  $\alpha$ . Ce dernier a été proposé par Boussemart et al. (2009) en s'inspirant de l'ensemble de production CES-CET de Färe et al. (1988). Les travaux de Boussemart et al. (2018) démontrent que dans un objectif d'extrapolation minimale, la notion de rendements d'échelle  $\alpha$  conduit à la détermination d'un rendement d'échelle optimal qui est global à l'ensemble des firmes. Celui-ci permet au plus grand nombre des entités de production d'être efficaces ou bien, d'être les moins inefficaces possible. Nous adoptons cette démarche dans le cadre de notre fonction de distance directionnelle CES-CET. Nous montrons également que nous pouvons identifier ces rendements d'échelle optimaux de manière non-paramétrique, grâce à la méthode de grille de recherche lorsque l'ensemble de production considéré est de type CES-CET. De plus, lorsque la technologie de production est de type FDH (Deprins (1984), Tulkens (1993)), nous pouvons déduire ceux-ci par une méthode énumérative. Nous étendons les travaux de Boussemart et al. (2009) à la notion de rendements d'échelle spécifiques optimaux. En effet, nous considérons que chaque facteur contribue différemment à la production de chaque produit lorsque la production est multi-output. Dans ce cas, nous ne pouvons fournir un rendement d'échelle global quant à l'ensemble du processus productif. Néanmoins, nous pouvons identifier les rendements d'échelle spécifiques à chaque intrant et à chaque extrant qui permettent aux firmes d'être les moins inefficaces possibles. Dans certains cas particuliers, nous pouvons retrouver ceux-ci grâce à la méthode de grille de recherche lorsque l'on considère un ensemble de production CES-CET. Sous certaines conditions, une identification par énumération peut être réalisée lorsque nous retenons une technologie de production FDH.

Nous pouvons constater que les apports théoriques de cette thèse peuvent paraître incomplets au regard des nouvelles mesures de performances proposées. En effet, nous n'explorons que les propriétés traditionnelles et non-exhaustives, de celles-ci. Nous proposons également des extensions possibles à ces mesures d'efficacité. Ainsi, les futures recherches peuvent se porter sur l'approfondissement des propriétés de ces nouvelles fonctions de distance (exponentielle et directionnelle CES-CET). D'une part, il serait intéressant d'étudier la propriété de translation homothéticité de la mesure exponentielle de sorte qu'il serait possible de mettre en lumière des relations d'équivalence entre les indices et les indicateurs de productivité. D'autre part, proposer des mesures de productivité basées sur les fonctions de distance directionnelles CES-CET serait une extension possible de

ces mesures de performance.



# Annexe 1 : Présentation des Données

Les données utilisées dans ces travaux proviennent de la base de données de l'office de statistique rattaché à l'Union Européenne "Eurostat". Celles-ci concernent les productions céréalières de l'année 2008 et de l'année 2009. Deux inputs et deux outputs ont été sélectionnés, à savoir :

- input 1 : surface agricole utilisée (SAU) exprimée en milliers d'hectares (1000ha ou Kha),
- input 2 : le prix moyen des surfaces agricoles utilisées (Prix SAU) manifesté en milliers d'euros par hectare (1000€/ha ou K€/ha),
- output 1 : la production en quantité exprimée en milliers de tonnes (1000T ou KT),
- output 2 : la production en volume manifestée en milliers d'euros (1000€ ou K€).

Les grandeurs statistiques relatives à ces données sont exposées dans les tableaux ci-dessous.

Grandeurs	Minimum	Moyenne	Maximum	Ecart-type
Prix des SAU	1075,07	11842,48	40916	12427,17
SAU	31,1	2308,55	9662,2	2813,59
Production	189,7	13096,28	70246	18896,97
Production en valeur	10,83	631,17	3438,11	959,81

TABLE 5.20 – Description des données en 2008

Grandeurs	Minimum	Moyenne	Maximum	Ecart-type
Prix des SAU	971,39	47 051,00	11735,64	13226,28
SAU	30,40	9 381,20	2205,55	2665,16
Production	188,6	69999,9	12331,85	18489,63
Production en valeur	10,13	3 653,93	642,7925	989,02

TABLE 5.21 – Description des données en 2009



# Annexe 2 : Notations et Notions

## Mathématiques

### Notations

Dans cette section, nous présentons quelques notations mathématiques utilisées dans ces travaux :

- $\mathbb{N}$  : ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^s$  : espace Euclidien de dimension  $s$ .
- $k \in [s] : k = 1, \dots, s \longleftrightarrow k \in [s]$ .
- $\mathbb{1}_s$  : matrice identité ayant  $s$  éléments.
- $k \in \mathcal{S} : k = 1, \dots, S \iff k \in \mathcal{S}$ .
- $\nabla_x f(x, y)$  : différentiel de la fonction  $f(x, y)$  par rapport à la variable  $x$ .

### Notions

**Monotonie :** Une fonction monotone est une fonction ayant un sens de variation constant. Elle est soit croissante soit décroissante. Cette affirmation peut être stricte. Ainsi, une fonction  $f$  définie sur  $D_f$  est croissante si  $\forall (x_1, x_2) \in D_f^2$  avec  $x_1 \geq x_2$  on a,  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . Elle est décroissante si  $\forall (x_1, x_2) \in D_f^2$  avec  $x_1 \geq x_2$  on a,  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

**Ensemble convexe :** Un ensemble  $E$  est convexe si Pour tout  $(x_1, x_2) \in E$  et Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  on a,  $(\lambda x_1, (1 - \lambda)x_2) \in E$ .

**Quasi-convexité :** Une fonction  $f$  définie sur  $D_f$  est quasi-convexe si  $\forall (x_1, x_2) \in D_f^2$  et  $\forall \lambda \in [0, 1]$  on a,  $f(\lambda x_1, (1 - \lambda)x_2) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\}$ .

**Isomorphisme :** Soient deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$ . Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est isomorphe si elle est linéaire et bijective. Elle admet une réciproque  $f^{-1}$  telle que  $f$  et  $f^{-1}$  préservent la structure algébrique.



# Bibliographie

- [1] Abad, A. et P. Ravelojaona (2017), Exponential Environmental Productivity Index and Indicators, *Journal of Productivity Analysis*, 48(2-3), 147-166.
- [2] Afriat, S.N. (1972), Efficiency Estimation of Production Functions, *International Economic Review*, 13, 568-598.
- [3] Aigner, D.J., Lovell C.A.K. et P. Schmidt (1977), Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models, *Journal of Econometrics*, 6, 21-37.
- [4] Andriamasy, L., Briec W. et S. Mussard (2017), On Some Relations between Several Generalized Convex DEA Models, *Optimization*, 66(4), 547-570.
- [5] Ang, F. et P.J. Kerstens (2017), Decomposing the Luenberger-Hicks-Moorsteen Total Factor Productivity Indicator : An Application to U.S. Agriculture, *European Journal of Operational Research*, 260, 359-375.
- [6] Arrow, K.J., Chenery H.B., Minhas B.S. et R.M. Solow (1961), Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *The MIT Press*, 43(3), 225-250.
- [7] Balk, B. (2001), Scale Efficiency and Productivity Change, *Journal of Productivity Analysis*, 15, 159-183.
- [8] Balk, B., Färe R., Grosskopf S. et D. Margaritis (2008), Exact Relations between Luenberger Productivity Indicators and Malmquist Productivity Indexes, *Economic Theory*, 35(1), 187-190.
- [9] Banker, R.D., Charnes A. et W.W. Cooper (1984), Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, 30, 1078-92.
- [10] Banker, R. et A. Maindiratta (1986), Piecewise Loglinear Estimation of Efficient Production Surfaces, *Management Science*, 32(1), 126-135.

- [11] Ben-Tal, A. (1977), On Generalized Means and Generalized Convex Functions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 21(1), 1-13.
- [12] Boussemart, J-P, Briec W., Kerstens K. et J-C. Poutineau (2003), Luenberger and Malmquist Productivity Indices : Theoretical Comparisons and Empirical Illustration, *Bulletin of Economic Research*, 55(4), 391-405.
- [13] Boussemart, J-P., Briec W., Peypoch N. et C. Tavéra (2009),  $\alpha$ -Returns to scale and multi-output production technologies, *European Journal of Operational Research*, 197, 332-339.
- [14] Boussemart, J-P., Briec W. et H. Leleu (2010), Linear Programming Solutions and Distance Functions under a  $\alpha$ -returns to scale technology, *Journal of the Operational Research Society*, 61(8), 1297-1301.
- [15] Boussemart, J-P., Briec W., Leleu H. et P. Ravelojaona (2018), On Estimating Optimal  $\alpha$ -returns to scale, *Journal of the Operational Research Society*, <https://doi.org/10.1080/01605682.2017.1418148>.
- [16] Briec, W. (1997), A Graph Type Extension of Farrell Technical Efficiency Measure, *Journal of Productivity Analysis*, 8, 95-110.
- [17] Briec, W. et K. Kerstens (2004), A Luenberger-Hicks-Moorsteen Productivity Indicator : its Relation to the Hicks-Moorsteen Productivity Index and the Luenberger Productivity Indicator, *Economic Theory*, 23, 925-939.
- [18] Briec, W. et C.D. Horvath (2004),  $\mathbb{B}$ -convexity, *Optimization* 53, 103 ?127.
- [19] Briec, W. et C.D. Horvath (2009), A  $\mathbb{B}$ -convex Production Model for Evaluating Performance of Firms, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 355, 131-144.
- [20] Briec, W. et K. Kerstens (2009a), Infeasibilities and Directional Distance Functions : With an Application to the Determinateness of the Luenberger Productivity Indicator, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 141, 55-73.
- [21] Briec, W. et K. Kerstens (2009b), The Luenberger Productivity Indicator :An Economic specification Leading to Infeasibilities, *Economic Modelling*, 26, 597-600.
- [22] Briec, W., Dumas A. et A. Stenger (2013), On the Standard Achievement and Well-Being Indexes and their Relation to the Hick-Moorsteen Productivity Index, *Economic Modelling*, 35, 900-909.

- [23] Briec, W. et P. Ravelojaona (2015), Multiplicative Duality Theory in Production Economics, Document de travail, Disponible sur : <http://ssrn.com/abstract=2644581>
- [24] Caves, D., Christensen L. et W.E. Diewert (1982a), The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity, *Econometrica*, 50, 1393-1414.
- [25] Caves, D., Christensen L. et W.E. Diewert (1982b), Multilateral Comaprison of Output, Input and Productivity using Superlative Index Numbers, *Economic Journal*, 92, 73-86.
- [26] Chambers, R.G., Chung Y. et R. Färe (1996a), Benefit and Distance Functions, *Journal of Economic Theory*, 70(2), 407-419.
- [27] Chambers, R.G., Färe R. et S. Grosskopf (1996b), Productivity Growth in APEC Countries, *Pacific Economic Review*, 1(3), 181-190.
- [28] Chambers, R.G. et R. Färe (1998), Translation Homotheticity, *Economic Theory*, 11, 629-641.
- [29] Chambers, R.G., Chung Y. et R. Färe (1998), Profit, Directional Distance Functions, and Nerlovian Efficiency, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98(2), 351-364.
- [30] Chambers, R.G. (2002), Exact Nonradial Input, Output, and Productivity Measurement, *Economic Theory*, 20, 751-765.
- [31] Charnes, A. , Cooper W.W. et E. Rhodes (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- [32] Chavas, J.P. et T.L. Cox (1999), A Generalized Distance Function and the Analysis of Production Efficiency, *Southern Economic Journal*, 66, 294-318.
- [33] Coelli, T.J., Rao D.S.P, O'Donnell C.J. et G.E. Battese (2005), *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, New York : Springer (2è ed).
- [34] Debreu, G. (1951), The Coefficient of Resource Utilization, *Econometrica*, 19, 273-292.
- [35] Deprins, D., L. Simar et H. Tulkens (1984), Measuring Labour Efficiency in Post Offices. In Marchand, M., P. Pastieau and H. Tulkens (eds). *The Performance of Public Entreprises*, North-Holland, Amsterdam.
- [36] Diewert, W.E. (1992a), The Measurement of Productivity, *Bulletin of Economic Research*, 44, 163-198.

- [37] Diewert, W.E. (1992ab), Fisher Ideal Output, Input and Productivity Indexes Revisited, *Journal of Productivity Analysis*, 3, 211-248.
- [38] Färe, R., Grosskopf S. et C.A.K. Lovell (1985), *The Measurement of Efficiency of Production*, Kluwer Academic Publisher, Boston.
- [39] Färe, R., Grosskopf S. et D. Njinkeu (1988), On Piecewise Reference Technologies, *Management Science*, 34, 1507-1511.
- [40] Färe, R., Grosskopf S., Lindgren, B. et P. Roos (1989), Productivity Developments in Swedish Hospitals : a Malmquist Output Index Approach, dans *Data Envelopment Analysis : theory, methodology and applications* , A. Charnes, V.W. Cooper, A. Lewin et L. Seiford (eds), Boston, Kluwer Academic Publishers.
- [41] Färe, R. et T. Mitchell (1993), Multiple outputs and homotheticity, *Southern Economic Journal*, 60, 287-296.
- [42] Färe, R. et D. Primont (1995), *Multi-output production and duality : theory and applications*, Boston : Kluwer.
- [43] Färe, R., Grosskopf S. et P. Roos (1996), On Two Definitions Of Productivity, *Economic Letters*, 53, 269-274.
- [44] Färe, R., Grosskopf S. et D. Margaritis (2008), Efficiency and Productivity : Malmquist and More, dans *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*, H.O. Fried, C.A.K. Lovell et S.S. Schmidt (eds), New York, Oxford University Press.
- [45] Farrell, M.J. (1957), The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, 120(3), 253-290.
- [46] Fukuyama, H. (2002), *Inverse Translation Homotheticity and its Implications*, Fukuoka, Fukuoka University : Faculty of Commerce (mimeo).
- [47] Fuss, M. A. et McFadden, D. (1978), *Production Economics : a Dual Approach to Theory and Applications*, Amsterdam : North-Holland Publishing Company.
- [48] Grosskopf, S. (1986), The Role of the Reference Technology in Measuring Production Efficiency, *The Economic Journal*, 96, 499-513.
- [49] Hicks, J.R. (1946), *Value and Capital : An Inquiry into some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford : Clarendon Press (2è ed).

- [50] Hicks, J.R. (1961), Measurement of Capital in Relation to the Measurement of Economic Aggregates, dans F.A. Lutz et D.C. Hague (eds.), *The Theory of Capital*, London : MacMillan.
- [51] Hotelling, H. (1932), Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply functions, *Journal of Political Economy*, 40, 577-616.
- [52] Jevons, S. (1862), *A General Mathematical Theory of Political Economy*, London : Section F, British Association.
- [53] Jevons, S. (1871), *The Theory of Political Economy*, London : Macmillan (3è éd, 1888).
- [54] Koopmans, T.C. (1951), *Activity Analysis of Production and Allocation*, J. Wiley, New York.
- [55] Luenberger, D.G. (1992a), Benefit Function and Duality, *Journal of Mathematical Economics*, 21, 461-481.
- [56] Luenberger, D.G. (1992b), New Optimality Principles for Economic Efficiency and Equilibrium, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 75(2), 221-264.
- [57] Luenberger, D.G. (1995), *Microeconomic Theory*, McGraw Hill.
- [58] Malmquist, S. (1953), Index Numbers and Indifference Surfaces, *Trabajos de Estadística*, 4, 209-242.
- [59] Malthus, T.R. (1798), *An Essay on the Principle of Population*, London : Macmillan.
- [60] Mankiw, N.G. (2004), *Principes de l'Economie*, Paris : Economica.
- [61] Marshall, A. (1890), *Principles of Economics*, London : Macmillan.
- [62] McFadden, D. (1978), Cost, Revenue and Profit Functions, *M.Fuss et McFadden eds.*
- [63] Meeusen, W. et J. Van den Broeck (1977), Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error, *International Economic Review*, 18, 435-444.
- [64] Mehdiloozad, M., Sahoo B.K. et I. Roshdi (2014), A Generalized Multiplicative Directional Distance Function for Efficiency Measurement in DEA, *European Journal of Operational Research*, 232, 679-688.
- [65] Menger, C. (1871), *Principles of Economics*, Vienna : Braumüller.
- [66] Mill, J.S. (1848), *Principles of Political Economy*, London : J.W. Parker.

- [67] Moorsteen, R.H. (1961), On Measuring Productive Potential and Relative Efficiency, *Quarterly Journal of Economics*, 96, 477-503.
- [68] Nishimizu, M. et J.M. Page (1982), Total Factor Productivity Growth, Technological Progress and Technical Efficiency Change : Dimensions of Productivity Change in Yugoslavia 1965-78, *The Economic Journal*, 92(368), 883-891.
- [69] Peyrache, A. et T.J. Coelli (2009), Multiplicative directional distance function, CEPA working paper, School of Economics, University of Queensland, Australia.
- [70] Poulalion, G. (1995), *Histoire de la Pensée Economique : des origines à nos jours*, L'Hermès (2è édition).
- [71] Powell, A.A. et F.H.G. Gruen (1968), The Constant Elasticity of Transformation Production Frontier and Linear Supply System, *International Economic Review*, 9(3), 315-328.
- [72] Ravelojaona, P. (2019), *On Constant Elasticity of Substitution-Constant Elasticity of Transformation Directional Distance Functions*, *European Journal of Operational Research*, 272(2), 780-791.
- [73] Ricardo, D. (1817), *On the Principles of Political Economy and Taxation*, London : J. Murray.
- [74] Robbins, L. (1932), *The Subject Matter of Economics, an Essay on the Nature and Significance of Economic Science*, London : Macmillan.
- [75] Roy, R. (1942), *De l'utilité*, Paris : Hermann.
- [76] Russell, R.R. (1987), *On the Axiomatic Approach to the Measurement of Technical Efficiency*, *Measurement in Economics : Theory and Application of Economic Indices*, Heidelberg : Physica-Verlag.
- [77] Russell, R.R. et W. Schworm (2011), Properties of Inefficiency Indexes on  $\langle$  Input, Output  $\rangle$  Space, *Journal of Productivity Analysis*, 36, 143-156.
- [78] Samuelson, P.A. (1947), *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge : Harvard University Press.
- [79] Seiford, L.M. (1990), Recent Development in DEA : the Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis, *Journal of Econometrics*, 46, 7-38.

- [80] Shephard, R.W. (1953), *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton (NJ).
- [81] Shephard, R.W. (1970), *Theory of Cost and Production Function*, Princeton University Press, Princeton (NJ).
- [82] Smith, A. (1776), *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, London : W. Strahan and T. Cadell.
- [83] Solow, R.M (1956), A contribution to the Theory of Economic Growth, *The Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.
- [84] Tulkens, H. (1993), On FDH efficiency analysis : some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit, *Journal of Productivity Analysis*, 4, 183-210.
- [85] Walras, L. (1874), *Eléments d'Economie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale*, Lausanne : L. Corbaz.

## RÉSUMÉ

Ces travaux proposent deux nouvelles mesures de l'efficacité. La première est une fonction de distance log-additive qui peut être orientée soit en input, soit en output, soit dans le graphe. Celle-ci est duale à des pseudo fonctions de coût, de revenu et de profit non-linéaires. Cette structure des fonctions, indique une relation non-constante entre les intrants et les extrants. Cet outil de mesure de l'efficacité peut servir à estimer la variation de la productivité dans le temps. A cet effet, nous proposons des indicateurs de productivité, de type Luenberger (Chambers, Färe et Grosskopf (1996)) et Luenberger-Hicks-Moorsteen (Briec et Kerstens (2004)), exponentiels. La seconde mesure, est une fonction de distance non-linéaire structurellement inspiré des fonctions CES (Solow (1956)) et CET (Powell et Gruen (1968)). La théorie de la dualité amène à présenter des fonctions de coût, de revenu et de profit non-linéaires. De ce fait, des fonctions de prix ajustés non-linéaires en sont déduites. Une telle structure des prix peut être rencontrée lorsque les unités productives font face à des tarifications non-linéaires en interne et, en externe. Nous appliquons cette nouvelle mesure de l'efficacité au modèle de rendements d'échelle  $\alpha$  (Boussemart, Briec, Peypoch et Tavéra (2009)). En effet, ce modèle permet d'estimer l'influence des rendements d'échelle sur l'efficacité.

This thesis aims to present two efficiency measures. First, a log-additive distance function is introduced. It is dual to non-linear pseudo cost, revenue and profit functions. This structure means that the relation between factors and products is not constant. Moreover, exponential Luenberger (Chambers, Färe and Grosskopf (1996)) and Luenberger-Hicks-Moorsteen (Briec and Kerstens (2004)) indicators are proposed. Second, a non-linear distance function is defined. It inherits the structure of CES (Solow (1956)) and CET (Powell and Gruen (1968)) functions. The duality theory allows to present non-linear cost, revenue and profit functions. In this sense, non-linear adjusted price functions are deduced. Non-linear prices occur when the production unit faces internal and/or non-linear tariffs. The  $\alpha$ -returns to scale model (Boussemart, Briec, Peypoch and Tavéra (2009)) is applied to this new non-linear efficiency measure. Indeed, it is shown that returns-to-scale impact efficiency of production units.