AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm







Ecole doctorale IAEM Lorraine – CM Automatique
Université de Lorraine – UFR Sciences et Technologies

Ecole doctorale SSI
Université de Gabès – ENIG

Observateurs adaptatifs pour les systèmes à retards

Thèse

présentée et soutenue publiquement le 03 décembre 2018

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine – France

(spécialité automatique)

et

Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès – Tunisie

(spécialité génie électrique)

par

Ahlem SASSI

Composition du jury

Rapporteurs :	Mohamed CHAABANE	Professeur, Université de Sfax
	Driss MEHDI	Professeur, Université de Poitiers
Examinateurs :	Moufida LAHMARI KSOURI	Professeur, Université de Tunis El Manar
	Kamel ABDERRAHIM	Professeur, Université de Gabès
	Michel ZASADZINSKI	Professeur, Université de Lorraine
	Harouna SOULEY ALI	Maître de conférences, Université de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) – UMR 7039
Unité de Recherche COmmande Numérique des PRocédés Industriels (CONPRI) – ENIG

Mis en page avec la classe thloria.

"S'engager dans un doctorat est un challenge, une expérience, et une aventure parfois très solitaire durant laquelle le doctorant est constamment poussé au-delà de ses limites. Il y a donc de la souffrance dans le parcours doctoral, mais il y a aussi beaucoup de plaisir : le plaisir de la recherche, la joie d'apprendre, la constante stimulation intellectuelle. Le jeune docteur ressort grandi de cette expérience avec un enrichissement personnel et professionnel considérable."

TIS, La thèse nuit gravement à la santé.

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme. Autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes soient-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers tous ceux et celles qui m'ont aidée et soutenue.

Mes plus profondes gratitudes vont d'abord à mes directeurs de thèse. Je ne pourrais jamais exprimer le respect que j'ai pour vous. Merci pour votre suivi scientifique et votre partage des expériences de recherche. Merci pour votre encadrement régulier, vos précieux conseils ainsi que votre patience. Votre relecture finale méticuleuse de chacun des chapitres m'a sans aucun doute permis de préciser mes propos. Je suis particulièrement reconnaissante envers Mr Kamel ABDERRAHIM, directeur de thèse et professeur à l'université de Gabès, d'avoir sélectionné ma candidature pour cette belle aventure, de m'avoir accordé sa confiance et permis d'effectuer cette thèse au sein de l'équipe du CONPRI. C'est à lui que je dois mon entrée dans le monde de la recherche ce dont je lui suis très reconnaissante. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Mr Michel ZASADZINSKI, directeur de thèse et professeur à l'université de Lorraine. Il m'a accompagnée et conseillée tout au long de ce travail de thèse et m'a véritablement donné le goût de la recherche, du problème à sa résolution. Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi. Son écoute, sa générosité, sa patience, son optimisme et sa force de travail extraordinaire font de lui un exemple, dont j'espère encore pouvoir longtemps profiter ! Je tiens aussi à remercier Mr Harouna SOULEY ALI, co-directeur de thèse et maître de conférence à l'université de Lorraine, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour toutes les discussions et les conseils qui m'ont accompagnée tout au long de ces années. C'est grâce aussi à son soutien et sa confiance que j'ai pu m'accomplir dans mes travaux. Ces remerciements ne concernent pas uniquement vos compétences scientifiques car le talent n'est rien sans vision et bonne gestion. Je vous remercie profondément pour vos nombreuses qualités humaines, pour votre soutien moral ainsi que de votre précieuse amitié. Je ne pouvais jamais souhaiter meilleur encadrement.

J'adresse tous mes remerciements à Mr Driss MEHDI, professeur à l'université de Poitiers, ainsi qu'à Mr Mohamed CHAABANE, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant la charge d'être rapporteurs de cette thèse. Je leur suis reconnaissante pour le temps qu'ils ont bien voulu consacrer à cette tâche et à leurs nombreuses remarques et conseils qui m'ont permis d'améliorer grandement mon manuscrit de thèse.

Je suis profondément reconnaissante à Mme Moufida LAHMARI KSOURI, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, pour l'enthousiasme avec lequel elle a accepté de participer à ce jury, et pour l'intérêt qu'elle a accordé à ce travail et l'attention qu'elle lui a réservée.

Je suis très honorée de présenter mes travaux de thèse devant un jury de cette envergure.

Je tiens à remercier Mme Saïda Bedoui de m'avoir accompagnée au début de mes travaux et qui m'a prodigué de nombreux conseils pour bien débuter cette aventure.

Mention spéciale à tous mes amis thésards et docteurs du CRAN et du CONPRI, et encore d'autres avec qui j'ai partagé des moments très agréables et parfois même difficiles. Pour moi l'aventure de la thèse est gravée à jamais dans mes pensées car en dépit de nos différences, la

science nous a permis d'enrichir nos vies à travers le partage.

Je sais tout particulièrement gré à ma collègue et amie Noussaiba GASMI avec laquelle j'ai partagé l'expérience de la thèse et avec laquelle je termine celle-ci. Merci de m'avoir accompagnée dans "le bonheur et dans les épreuves".

Je remercie ma chère amie Faiza MNASRI qui a fait un bout de chemin avec moi et qui a sûrement rendu la vie à Longwy plus agréable.

Je remercie chaleureusement l'ensemble du personnel de l'IUT de Longwy parmi lesquels je peux citer, Marouane ALMA, Ali ZEMOUCHE, Cédric DELATTRE, Latifa BOUTAT BADDAS, Mohamed BOUTAYEB, Mohamed DAROUACH, Hugues RAFARALAHY, Antoine DI SANO et M. EL GANAOUI. Merci pour cette formidable aventure humaine que nous avons partagée et pour ces bons moments de rigolade !

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, mes remerciements vont à mes parents et à ma famille qui m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final et qui ont accepté mes choix sans pour autant toujours forcément les comprendre.

A mes parents, à ma famille,
A tous ceux qui m'ont encouragée et soutenue durant ces années,
que je ne nomme pas, mais qui se reconnaîtront ...

Table des matières

Remerciements iii

Table des figures xi

Symboles et abréviations xiii

Introduction générale 1

1 Plan du manuscrit . . . 2

2 Publications issues de la thèse . . . 3

3 Publications hors du thème principal de la thèse . . . 4

Chapitre 1
Etat de l'art

1.1 Introduction . . . 6

1.2 Les systèmes à retards . . . 6

1.2.1 Introduction aux systèmes à retards . . . 6

1.2.2 Exemples de systèmes à retards . . . 7

1.3 Stabilité des systèmes dynamiques . . . 9

1.3.1 Définitions de la stabilité . . . 10

1.3.2 Analyse de la stabilité avec la seconde méthode de Lyapunov . . . 11

1.4 Stabilité des systèmes à retards . . . 12

1.5 Stabilité dépendante/indépendante des retards . . . 13

1.6 Observateurs fonctionnels . . . 14

1.7 Observateurs adaptatifs . . . 16

1.7.1 Définition et applications . . . 16

1.7.2 Discussion . . . 19

1.7.2.1 Présentation du problème . . . 19

1.7.2.2 Liens entre les observateurs adaptatifs et les observateurs à entrées inconnues . . . 20

1.7.2.3 Convergence du vecteur des paramètres inconnus et la contrainte d'excitation persistante . . . 25
1.7.3 Motivation de la démarche utilisée . . . 25
1.8 Conclusion . . . 26

Chapitre 2
Synthèse d'observateurs robustes pour une classe de systèmes bilinéaires à retards

2.1 Introduction . . . 28
2.2 Systèmes bilinéaires et observateurs . . . 29
2.2.1 Définitions . . . 29
2.2.2 Observateurs pour les systèmes bilinéaires . . . 32
2.2.3 Observateurs robustes pour les systèmes bilinéaires . . . 33
2.3 Observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel d'ordre réduit pour des systèmes bilinéaires à retards 34
2.3.1 Formulation du problème . . . 34
2.3.2 Conditions d'existence de l'observateur . . . 37
2.3.3 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation . . . 38
2.3.4 Résultats de simulation . . . 43
2.4 Observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel robuste d'ordre réduit pour les systèmes bilinéaires à retards . . . 45
2.4.1 Modèle et hypothèses . . . 45
2.4.2 Synthèse de l'observateur fonctionnel robuste . . . 46
2.4.3 Exemple numérique . . . 57
2.5 Conclusion . . . 59

Chapitre 3
Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes bilinéaires à retards

3.1 Introduction . . . 62
3.2 Modèle et hypothèses . . . 63
3.3 Observateur adaptatif fonctionnel dans le cas général . . . 63
3.3.1 Conditions d'existence de l'observateur et paramétrage des gains . . . 65
3.3.2 Analyse de la stabilité de l'erreur d'estimation . . . 67
3.4 Observateurs adaptatifs d'ordre plein . . . 72
3.4.1 Simplification de l'équation (3.3b) dans l'observateur adaptatif (3.3) . . . 72
3.4.2 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$ . . . 74
3.4.2.1 Paramétrage des gains de l'observateur . . . 75

3.4.2.2 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation 77
3.4.2.3 Exemple numérique 79
3.4.3 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$ 81
3.4.3.1 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation 82
3.4.3.2 Exemple illustratif 83
3.5 Observateur adaptatif fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit 84
3.5.1 Synthèse de l'observateur adaptatif fonctionnel avec $J^\theta = 0$ 84
3.5.2 Exemple numérique 88
3.6 Conclusion 91

Chapitre 4
Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires à retards

4.1 Introduction 94
4.2 Modèle et hypothèses 95
4.3 Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires à retards . . . 96
4.3.1 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$ 96
4.3.2 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$ 108
4.3.3 Observateur adaptatif fonctionnel d'ordre réduit avec $J^\theta = 0$ 112
4.4 Observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires singuliers à retards 114
4.4.1 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$ 114
4.4.2 Observateur adaptatif fonctionnel d'ordre réduit avec $J^\theta = 0$ 122
4.5 Conclusion 129

Conclusion générale et perspectives **131**

Annexe A
Compléments mathématiques

A.1 Normes vectorielles et matricielles 133
A.2 Pseudo-inverses 133
A.2.1 Notion de pseudo-inverse 133
A.2.2 Application à la résolution des équations linéaires 134
A.3 Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequality : LMI) 135
A.3.1 Introduction aux LMIs 135
A.3.2 Lemmes utiles pour les LMIs 136
A.3.2.1 Lemmes de majoration 136
A.3.2.2 Lemme de Schur 137

A.4 Fonction lipschitzienne 137

Annexe B
LMI explicite du théorème 2.4.1

Bibliographie **145**

Table des figures

1.1 Système de rendez-vous spatial : orbite et axes. 8
1.2 Observateur fonctionnel. 15
1.3 Observateur adaptatif. 17
1.4 Variation des valeurs propres de la matrice Q_K en fonction du gain K_{22}^x. 24
1.5 Fonctions $K_{11}^x = \frac{1}{K_{22}^x + 1} + 1$ (①) et $K_{11}^x = \frac{1}{K_{22}^x + 2}$ (②). 24

2.1 Modèle moyen d'un pont actif double (DAB : Dual Actif Bridge). 31
2.2 La réaction de fission nucléaire. 32
2.3 Convergence des fonctionnelles estimées $\hat{z}_1$ et $\hat{z}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs z_1 et z_2 (—). 44
2.4 Convergence des fonctionnelles estimées $\hat{z}_1$ et $\hat{z}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs z_1 et z_2 (—). 59
2.5 Variation des erreurs d'estimation liées aux fonctionnelles z_1 et z_2. 59

3.1 Variation des états x_1 et x_2 (—) et leurs estimations respectives $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$. . 81
3.2 Variation du paramètre inconnu θ (—) et son estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$. 81
3.3 Convergence des états estimés $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs x_1 et x_2 (—). 84
3.4 Convergence de l'estimation du paramètre inconnu $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers θ (—). 84
3.5 Perturbation appliquée sur le système. 89
3.6 Dynamique du système numérique considéré. 89
3.7 Convergence des fonctionnelles estimées $\hat{z}_1$ et $\hat{z}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs respectives z_1 et z_2 (—). 91
3.8 Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—). 91

4.1 Convergence de l'estimation des états $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs respectives x_1 et x_2 (—). 107
4.2 Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—). 107
4.3 Convergence des états estimés $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs respectives x_1 et x_2 (—). 112
4.4 Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—). 112
4.5 Variation des états x_1, x_2 et x_3 (—) et leurs estimations respectives $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ et $\hat{x}_3$ $(\cdots)$. 122
4.6 Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—). 122

Symboles et abréviations

Symboles et notations

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{C}^{n\times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
$\|.\|$	norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice (ou norme de Frobenius notée $\|.\|_F$)
$\|.\|_2$	norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
$P > 0$, $P \geqslant 0$	matrice P symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$P > Q$, $P \geqslant Q$	$P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geqslant 0$) pour P, Q symétriques $\in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
A^T, A^{-T}	transposée de A (resp. de l'inverse de A) $\in \mathbb{R}^{n\times m}$
A^{-1}	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$
$A^\dagger$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ vérifiant $AA^\dagger A = A$
I, 0	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
I_n, $0_{n\times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$)
$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p)$	matrice diagonale constituée avec les éléménts de la diagonale des matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, p$
$\mathrm{bdiag}(A_1, \ldots, A_p)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $A_1, \ldots, A_p$ ($A_i \in \mathbb{C}^{n\times m}$) matrices $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, p$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ * & A_{22} \end{bmatrix}$	matrice partitionnée telle que le symbole $*$ représente le transposé du bloc A_{12}, soit A_{12}^T
A^x	Matrice gain de l'observateur liée à l'estimation de l'état x
A^z	Matrice gain de l'observateur liée à l'estimation de la fonctionnelle d'état z
A^θ	Matrice gain de l'observateur liée à l'estimation du vecteur des paramètres θ

Abréviations

EDF	Equations Différentielles Fonctionnelles
EDO	Equations Différentielles Ordinaires
EADO	Equations Algébro-Différentielles Ordinaires
BMI	*Bilinear Matrix Inequality* - Inégalité Matricielle Bilinéaire
BLS	*Bilinear System* - Système Bilinéaire (non singulier)
LMI	*Linear Matrix Inequality* - Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	*Linear Parameter Varying* - Linéaire à Paramètres Variants
LTI	*Linear Time Invariant* - Linéaire à Temps Invariant
LTV	*Linear Time Varying* - Linéaire à Temps Variant
SBLS	*Singular Bilinear System* - Système Bilinéaire Singulier
UIO	*Unknown Input Observer* - Observateur à Entrées Inconnues

Introduction générale

"Je privilégie la vitesse à la précision, car le coût d'un retard
dépasse de loin celui d'une erreur."
Percy Barnevik

Un observateur ou reconstructeur d'états est un système dynamique auxiliaire permettant de donner une estimation de la valeur de l'état non mesuré d'un système à partir des entrées de commande et des sorties mesurées. En automatique, l'observateur joue un rôle primordial dans la synthèse des lois de commande, la surveillance des processus afin de détecter une défaillance ou encore la supervision des procédés dans le but d'entreprendre une action appropriée. En effet, le problème de la synthèse d'observateurs a été établi afin d'obtenir des valeurs d'états qui ne sont pas disponibles. La conception d'un observateur suppose l'existence d'un modèle mathématique permettant de décrire le comportement du processus, i.e. de décrire les relations entre les variables du système. Avec un tel modèle, les trajectoires des variables non mesurées du système peuvent être estimées via cet observateur. Cependant, il s'avère que le modèle considéré peut être affecté par certains comportements inconnus, par des retards, par des incertitudes de mesure, etc. Dès lors, il est nécessaire de prendre en compte ces imperfections du modèle lors de la synthèse d'un observateur.

La recherche scientifique, particulièrement dans le domaine de l'automatique, s'est toujours orientée vers les applications pratiques et c'est la rigueur des techniques utilisées qui rend l'analyse de systèmes de plus en plus complexes. Dans ce mémoire, les retards et la présence de paramètres inconnus dans le modèle du système ont été considérés. Les systèmes soumis à des retards, qui sont l'objet des contributions dans cette thèse, représentent une classe particulière des systèmes physiques assez difficiles à analyser. Ils sont, généralement, modélisés mathématiquement par des Equations Différentielles Fonctionnelles (EDF) et font partie de la classe des systèmes de dimension infinie. Contrairement aux systèmes dynamiques modélisés par des Equations Différentielles Ordinaires (EDO), l'évolution du système à retards à un instant initial nécessite la connaissance de l'état du système sur un intervalle précédant cet instant, i.e. sur un intervalle de la longueur des retards. Ainsi, l'état initial du système n'est plus un ensemble fini de valeurs mais une fonction définie sur l'intervalle des retards, et donc un ensemble infini de valeurs. Cette classe de systèmes fera l'objet de synthèse d'observateurs dans ce mémoire, notamment, la synthèse d'observateurs adaptatifs. En effet, la synthèse de ces observateurs représente un challenge vu qu'ils doivent fournir une estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus qui peuvent affecter sa dynamique. Avec la présence des retards dans le modèle, ce problème devient encore plus complexe. L'intérêt porté à ces observateurs est motivé par les applications dans la commande tolérante aux fautes et dans la détection et diagnostic de défauts.

Les problèmes de synthèse d'observateurs traités dans ce manuscrit s'appuient sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Avec le début des années 90, des méthodes de programmation convexe ont été proposées pour la résolution des problèmes complexes en automatique. Ces méthodes ont montré une efficacité et une simplicité d'implantation vu qu'elles combinent les possibilités mathématiques avec la puissance de calcul informatique. L'introduction des LMI dans les problèmes d'automatique a permis d'énormes progrès, non seulement sur le plan théorique, mais aussi sur le plan pratique. Encouragé par ces résultats, le développement des solveurs n'a cessé de se développer, permettant ainsi d'avoir des résultats de plus en plus rapides et mieux adaptés. Pour aboutir à des résultats sous un tel formalisme, plusieurs stratégies ont été utilisées pour la synthèse de ces observateurs telles que l'utilisation de fonctions de Lyapunov, le formalisme de type "descripteur" et le paramétrage des matrices des observateurs via la résolution des équations de Sylvester.

1 Plan du manuscrit

La thèse se compose de 4 chapitres. Le premier chapitre fournit une introduction à la thèse et établit un contexte théorique pour l'analyse de stabilité de différents systèmes dynamiques, ainsi qu'une discussion sur la synthèse d'observateurs adaptatifs. Le deuxième chapitre met l'accent sur la synthèse d'observateurs robustes pour les systèmes bilinéaires à états retardés. Les troisième et quatrième chapitres contiennent des contributions sur la synthèse d'observateurs adaptatifs pour des classes de systèmes non linéaires à états retardés. Tout au long du mémoire, les retards affectant les systèmes seront considérés constants et connus.

Chapitre 1 : Etat de l'art

Pour commençer ce manuscrit, il nous semble primordial de présenter un état de l'art pour situer et motiver nos travaux. Une première partie est consacrée à la présentation de bases théoriques sur les systèmes à retards, notamment les outils nécessaires à l'étude de la stabilité basés sur la théorie de Lyapunov et qui seront utiles pour la suite de ce mémoire. Une deuxième partie s'intéresse particulièrement à la synthèse d'observateurs fonctionnels des systèmes dynamiques. Après avoir mis l'accent sur leur intérêt, une étude bibliographique des méthodes présentes dans la littérature est donnée. Une dernière partie est consacrée à la présentation des observateurs adaptatifs à travers des travaux de la littérature, ainsi qu'une discussion comparative permettant d'expliciter la motivation des contributions de ce mémoire.

Chapitre 2 : Synthèse d'observateurs robustes pour une classe de systèmes bilinéaires à retards

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'observateurs robustes pour des classes de systèmes non linéaires à retards. Cette classe est constituée par des systèmes faisant intervenir des non linéarités états/commandes, appelés systèmes bilinéaires. Nous rappellerons, dans un premier temps, quelques définitions liées à cette classe de systèmes ainsi que des résultats de synthèse d'observateurs. Il s'agit, ensuite, de relaxer les conditions de convergence des erreurs d'estimation associées aux observateurs proposés pour la classe de systèmes considérée en présence de retards. Deux pistes de travail ont été considérées : la robustesse de la convergence en présence de perturbations à énergie finie faisant appel à la théorie $\mathcal{H}_\infty$ et la robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques affectant les paramètres du modèle du système à observer. Les observateurs fonctionnels proposés sont développés avec un ordre réduit. L'analyse de la

stabilité de l'erreur d'estimation fait appel à la théorie de la stabilité de Lyapunov-Krasovskii dédiée aux systèmes à retards et aboutit à des conditions suffisantes, exprimées sous forme de LMI (Inégalités Matricielles Linéaires). L'efficacité et la faisabilité des approches étudiées sont testées à l'aide de simulations numériques.

Chapitre 3 : Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes bilinéaires à retards

Les travaux présentés dans ce chapitre concernent la conception d'observateurs adaptatifs pour des classes de systèmes bilinéaires. Il s'agit d'une extension des travaux de recherche traités dans le chapitre précédent lorsque l'on souhaite estimer simultanément l'état du système considéré et certains paramètres inconnus de ce dernier. Ce problème représente un enjeu double, tant sur l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus, que sur la prise en compte des retards qui affectent la dynamique du système.

Chapitre 4 : Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires à retards

Ce chapitre porte sur l'extension des résultats proposés au chapitre précédent à une classe de systèmes non linéaires à retards. Deux problèmes seront traîtés dans ce chapitre. Le premier sera d'étendre la synthèse d'observateurs adaptatifs proposés dans le chapitre précédent en présence de comportements non linéaires affectant la dynamique du système à retards considéré. Le deuxième sera de relaxer les conditions d'excitation persistante en présence de non linéarités qui multiplient le vecteur des paramètres inconnus à estimer. La méthode de synthèse d'observateurs d'ordres plein et réduit que nous proposons est d'abord présentée pour des systèmes dynamiques non singuliers à retards. Puis, une extension à une classe de systèmes singuliers non linéaires à retards est considérée. En effet, cette problématique n'a pas été traîtée dans la littérature dans le cas des systèmes singuliers non linéaires. Les résultats obtenus sont illustrés par des simulations numériques, afin de montrer la convergence simultanée des estimations des états et des paramètres inconnus vers leurs valeurs respectives, ainsi que la faisabilité des problèmes posés.

2 Publications issues de la thèse

[SSB+16] A. Sassi, H. Souley Ali, S. Bedoui, K. Abderrahim and M. Zasadzinski. Design of a functional adaptive observer for bilinear delayed systems. In 13^{rd} *IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS).* June 2016, Istanbul, Turkey.

[SZSA17a] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski and K. Abderrahim. Design of an $\mathcal{H}_\infty$ adaptive observer for bilinear delayed systems. In 20^{th} *IFAC World Congress.* July 2017, Toulouse, France.

[SZSA17b] A. Sassi, M. Zasadzinski, H. Souley Ali and K. Abderrahim. A robust reduced order functional $\mathcal{H}_\infty$ observer for time delay bilinear systems. In 25^{th} *Mediterranean Conference on Control and Automation (MED).* July 2017, Valetta, Malta.

[SSZA17c] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski and K. Abderrahim. Full order adaptive observer design for time delay bilinear system. In 6^{th} *International Conference on Systems and Control (ICSC).* May 2017, Batna, Algeria.

[SSZA17b] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski and K. Abderrahim. Adaptive observer design for bilinear descriptor system with time delays. In 14^{th} *International Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD).* November 2017, Bucharest, Romania.

[SSZA17a] A. Sassi, M. Zasadzinski, H. Souley Ali and K. Abderrahim. Adaptive observer design for a class of nonlinear systems with time delays. Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal (ASTESJ). volume 3, issue 3, pp 373-383, 2018.

[SSZA18a] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski and K. Abderrahim. Adaptive observer design for a class of descriptor nonlinear systems. European Journal of Control (EJC). https ://doi.org/10.1016/j.ejcon.2018.09.014.

[SSZA18d] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski and K. Abderrahim. Functional $\mathcal{H}_\infty$ observer design for a class of bilinear systems with time delays. Book Chapter : Stability, control and application of Time-delay systems, 2018. (soumis).

3 Publications hors du thème principal de la thèse

[SBA13] A. Sassi, S. Bedoui, K. Abderrahim. Time delay system identification based on optimization approaches. In 17^{th} *International Conference System Theory, Control and Computing (ICSTCC).* October 2013, Sinaia, Romania.

[SSZ+17b] H. Souley Ali, A. Sassi, M. Zasadzinski, K. Abderrahim and M. El Ganaoui. Fault tolerant control for energy power systems. In International Conference on Materials & Energy (ICOME). July 2017, Tianjin, China.

[SSZA18c] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski and K. Abderrahim. Observer-based control of a wind driven doubly fed induction generator. In International Conference on Materials & Energy (ICOME). June 2018, San Sebastian, Spain.

[SSZ+17a] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, K. Abderrahim, A. Di Sano. Observateur adaptatif pour des systèmes proie-prédateur. Congrès National de la Recherche des IUT. Auxerre, France. 2017.

[SSB+17] H. Souley Ali, A. Sassi, A. Barbata, M. Zasadzinski, A. Di Sano. Modélisation et contrôle appliqués à la maîtrise de la demande en énergie des bâtiments. Congrès National de la Recherche des IUT. Auxerre, France. 2017.

[SSZA18b] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, K. Abderrahim, Commande basée observateur d'un système LPV : Application à une génératrice asynchrone à double alimentation. Congrès National de la Recherche des IUT. Aix en Provence, France. 2018.

Chapitre 1

Etat de l'art

Sommaire

1.1 Introduction 6
1.2 Les systèmes à retards 6
1.2.1 Introduction aux systèmes à retards 6
1.2.2 Exemples de systèmes à retards 7
1.3 Stabilité des systèmes dynamiques 9
1.3.1 Définitions de la stabilité 10
1.3.2 Analyse de la stabilité avec la seconde méthode de Lyapunov 11
1.4 Stabilité des systèmes à retards 12
1.5 Stabilité dépendante/indépendante des retards 13
1.6 Observateurs fonctionnels 14
1.7 Observateurs adaptatifs 16
1.7.1 Définition et applications 16
1.7.2 Discussion 19
1.7.2.1 Présentation du problème 19
1.7.2.2 Liens entre les observateurs adaptatifs et les observateurs à entrées inconnues 20
1.7.2.3 Convergence du vecteur des paramètres inconnus et la contrainte d'excitation persistante 25
1.7.3 Motivation de la démarche utilisée 25
1.8 Conclusion 26

1.1 Introduction

En automatique, la modélisation d'un processus physique est une étape essentielle puisqu'elle conditionne les méthodes appropriées à la bonne analyse et/ou la synthèse des lois de commande. Du fait de la sensibilité de nombreuses lois de commande aux retards, la prise en compte de ces derniers est cruciale dans la boucle de commande, notamment lorsque la taille de ceux-ci devient significative au regard des performances temporelles du système. En effet, même si la valeur des retards paraît négligeable par rapport aux constantes de temps du système en boucle ouverte, sa valeur peut accroître dans une boucle de commande (boucle fermée) du fait des temps de réaction des capteurs ou des actionneurs, des temps de transmission des informations, ou des temps de calcul. Comme nous nous intéressons particulièrement dans ce mémoire à l'étude des systèmes comportant des retards, nous entamons ce chapitre par des définitions, qui y sont liées, ainsi que quelques exemples tirés de la littérature afin d'illustrer les phénomènes qui régissent le comportement dynamique de tels systèmes.

Au delà de l'intérêt de la modélisation des systèmes, la conception d'observateurs trouve sa justification dans de nombreux problèmes appliqués. En effet, dans la pratique, l'état d'un système n'est pas complètement accessible, ce qui donne aux observateurs d'états un rôle primordial dans l'élaboration des lois de commande, la supervision ou le diagnostic et la détection de défauts. Le but de la conception des observateurs est la reconstruction de la trajectoire des états d'un système dynamique. Un observateur pour un système donné doit être un système auxiliaire tel que l'erreur entre l'état de l'observateur et l'état du système décroît asymptotiquement vers zéro, à savoir que zéro est un point équilibre asymptotiquement stable pour l'erreur d'estimation. De ce fait, les outils pour l'analyse de la stabilité sont déterminants dans la conception d'observateurs. Pour ce faire, nous introduisons dans un second temps les concepts de stabilité, notamment les approches temporelles dans le cadre de la théorie de Lyapunov, qui nous seront utiles pour la suite de ce mémoire. Ensuite, quelques types d'observateurs seront définis dans ce chapitre, tels que les observateurs fonctionnels et les observateurs adaptatifs. Ceux-ci feront l'objet des contributions principales de ce mémoire. Pour terminer, une littérature sur la synthèse d'observateurs adaptatifs sera présentée, suivie d'une discussion comparative avec la contribution majeure de ce mémoire sur ce sujet avec des travaux existants afin d'expliquer la motivation de la problématique traitée.

1.2 Les systèmes à retards

1.2.1 Introduction aux systèmes à retards

Une hypothèse classique dans la modélisation des processus physiques consiste à supposer que le comportement futur du système peut être déterminé par la connaissance de son état actuel. Cependant, la modélisation de certains systèmes nécessite l'initialisation d'une partie de leur historique pour connaître leur évolution. C'est le cas des systèmes héréditaires, aussi appelés des systèmes à retards. En effet, l'évolution des systèmes à retards dépend des valeurs passées de l'état, ce qui revient à dire que l'état initial n'est plus un ensemble fini de valeurs mais une fonction définie sur un intervalle de la longueur des retards, et donc un ensemble infini de valeurs. Ils appartiennent à la classe de systèmes de dimension infinie [Ric03b]. Dans le contexte de la commande des systèmes, un retard peut être défini comme l'intervalle de temps entre l'application d'un signal de commande et tout changement observable dans l'état du processus [WLT99]. Il peut être d'origine intrinsèque notamment dans les processus présentant des phénomènes de transport et de propagation de matière, d'énergie ou d'information. Par ailleurs, si un processus

ne présente pas de retards intrinsèques (en boucle ouverte), l'instauration d'un dispositif de commande (en boucle fermée) peut générer des retards aux travers des transmissions d'information en provenance des capteurs ou en destination des actionneurs ou encore des temps de calculs nécessaires à la commande.

D'une manière générale, un système à retards est modélisé par une équation différentielle fonctionnelle (EDF). Un système non linéaire à retard s'écrit sous la forme suivante (Le retard sur la dérivée de l'état n'est pas considéré dans ce mémoire),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) \\ y(t) &= h(t, x(t), x(t-\tau)) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta)), \qquad \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned}$$

où $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur des entrées de commande et le vecteur des mesures. τ est un retard. f et g sont des fonctionnelles (des fonctions vectorielles). ϕ est une fonction continue définie sur $[-\tau, 0]$. $x(t-\tau)$ et $u(t-\tau)$ sont l'état retardé et l'entrée retardée.

Lors de la modélisation des processus physiques, des informations sur les valeurs probables des retards peuvent être fournies à travers les propriétés intrinsèques du système. Une bonne identification de la nature des retards permet de faire le bon choix des approches d'analyse du système. Si la valeur des retards est inconnue, aucune hypothèse n'est considérée. Cependant, les retards peuvent être connus avec des valeurs constantes. Nombreuses sont les recherches qui considèrent la présence des retards constants (connus ou inconnus) dans les modèles des systèmes [GKC03, LD97, FS03, Nic01, KNR99].

L'analyse des systèmes à retards a toujours été parmi les problèmes les plus difficiles dans la commande et l'observation des systèmes dynamiques. Même si leur étude date de près d'un siècle, ce domaine reste toujours l'objet d'une recherche très active. De nombreuses méthodes ont été développées pour l'étude de ces systèmes, notamment dans l'analyse de stabilité [CL09, BG97, DL16, FS03, FS06, GKC03, KNR99, LM07, LD97, LZZ17, Yu99, KR99], la synthèse d'observateurs [BD01, Bou01, CL07, Dar06, De 00a, EDSM13, FSCM10, HZB11, Sen01, Tri99, XLZY04, ZBB06], l'élaboration des lois de commande appropriées [BCP10, CC95, CC97, CL07, De 00b, FS02, Nic01].

1.2.2 Exemples de systèmes à retards

Beaucoup de modèles de systèmes à retards ont été considérés dans la littérature. Nous pouvons mentionner le modèle d'un moteur diesel équipé d'une soupape de recirculation des gaz d'échappement dans [MI17] et celui d'un moteur d'allumage dans [BCP10]. Un procédé de transfert thermique PT-326, pouvant être utilisé dans des systèmes industriels tels que les fours, la climatisation, etc, est décrit dans [Fra11]. Beaucoup d'autres modèles et d'applications des systèmes à retards peuvent être trouvés dans [GKC03, CL07].

Afin de mieux décrire la présence des retards dans le modèle de certains systèmes physiques, nous proposons, dans ce qui suit, un modèle de système de rendez-vous spatial entre deux vaisseaux spatiaux [XZD18], où le retard, supposé constant, affecte les vecteurs de commande et de mesure. En outre, nous considérons un exemple de système de réseau TCP (Transmission Control Protocol - Protocole de contrôle de transmission) [MCCL17] avec un retard variant affectant l'état du système.

Un système de rendez-vous spatial : Le rendez-vous de l'engin spatial est très utile dans l'exploration spatiale. C'est la condition préalable de nombreuses missions spatiales, telles que l'assemblage de stations spatiales en orbite, la capture et la formation de satellites, l'interception de missiles et le sauvetage spatial. La réussite d'un rendez-vous spatial nécessite des manœuvres complexes et un calcul bien précis des positions et des vitesses des deux engins. Cependant la présence de retards dans les mesures et les commandes posent des problèmes dont il faut tenir compte.

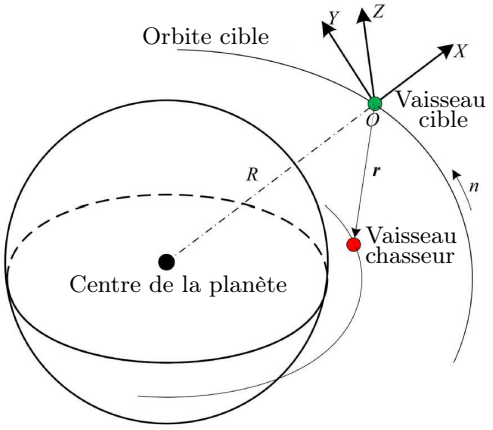


FIGURE 1.1 – Système de rendez-vous spatial : orbite et axes.

Afin de réaliser un rendez-vous spatial [XZD18], un vaisseau cible est considéré, fonctionnant sur une orbite circulaire auquel un vaisseau chasseur est lancé pour se placer dans son voisinage (i.e. un plan orbital proche). Dans ce but et afin de faciliter l'analyse du problème, le système est linéarisé et est décrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_0u(t-h_0) + B_1u(t-h_1) + B_2u(t-h_2)\\ y(t) &= C_0x(t-\tau_0) + C_1x(t-\tau_1) + C_2x(t-\tau_2)\end{aligned}$$

où $x^T(t) = [x_1(t)\ y_1(t)\ z_1(t)\ \dot{x}_1(t)\ \dot{y}_1(t)\ \dot{z}_1(t)]$ est le vecteur d'état tel que $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ et $\dot{x}_1(t)$, $\dot{y}_1(t)$, $\dot{z}_1(t)$ représentent la position relative et la vitesse relative entre l'engin spatial visé et le vaisseau chasseur. $u^T(t) = [a_x(t)\ a_y(t)\ a_z(t)]$ est le vecteur des entrées de commande correspondant à l'accélération due à la force exercée sur le vaisseau chasseur. $y(t)$ est le vecteur des mesures disponibles. h_i et τ_i, pour $i = 0, 1, 2$, sont respectivement des retards constants sur le vecteur de commande et le vecteur de mesures. Les matrices A, B_i et C_i pour $i = 0, 1, 2$ sont les suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\omega = \frac{\mu^{1/2}}{R^{3/2}}$, où $\mu = GM$ est le paramètre gravitationnel de la planète centrale, G et M désignent respectivement la constante gravitationnelle et la masse de la planète et R est le rayon orbital.

Un système de réseau TCP (Transmission Control Protocol - Protocole de Contrôle de Transmission) : Dans les réseaux informatiques tels qu'Internet, une application d'une importance particulière est le transfert de fichiers sans perte de données. Par conséquent, un protocole de transfert de données doit être conçu pour le transfert de fichiers. La procédure de contrôle la plus répandue pour le transfert de fichiers est le protocole TCP. Les systèmes contrôlés en réseau (NCS) constituent une catégorie particulière de problèmes de commande. Le système est commandé à distance par un contrôleur qui échange les mesures et les signaux de commande via un réseau de communication. Ce réseau est utilisé par plusieurs systèmes et une loi de gestion des paquets (routeur, commutateur, niveau de priorité ...) est introduite pour distribuer l'information. Un TCP est implémenté pour permettre aux utilisateurs d'envoyer et de recevoir des données sur le réseau. L'impact d'un tel réseau est d'introduire un retard variable dans la transmission des données entre le système et le contrôleur en raison de l'interaction des utilisateurs multiples.

Le modèle linéarisé d'un système de réseau en considérant la présence du retard est donné par l'EDF suivante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) + Bu(t - \tau(t)) + Dd(t)$$

où $x^T(t) = [W(t)\ q(t)]$ est le vecteur d'état tel que $W(t)$ et $q(t)$ sont respectivement la taille de la fenêtre TCP et la longueur de file d'attente du routeur. $u(t) = p(t)$ est la probabilité de marquage/chute d'un paquet et peut être considérée comme une entrée mesurée connue. Les signaux $d(t)$ représentent des anomalies ou des incertitudes. Les mesures disponibles sont que $y(t) = q(t)$. $\tau(t)$ est le RTT (Round Trip Time : le temps mis pour parcourir le circuit). Les matrices A, A_d, B et D sont

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-N}{\tau_0^2 C} & \frac{1}{\tau_0^2 C} \\ \frac{N}{\tau_0} & \frac{-1}{\tau_0} \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} \frac{-N}{\tau_0^2 C} & \frac{-1}{\tau_0^2 C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{-C^2 \tau_0}{2N^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où C représente la capacité de transmission du routeur, N est le nombre de sessions et τ_0 est le paquet des RTT.

1.3 Stabilité des systèmes dynamiques

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux systèmes à retards. Les notions de stabilité des systèmes à retards ne peuvent pas être introduites avant d'avoir présenté quelques définitions de base concernant la stabilité des systèmes dynamiques non retardés. Pour ce faire, nous entamons

cette section par des définitions liées à la stabilité des systèmes dynamiques, précisément celles des systèmes non linéaires. Ensuite, nous serons en position de définir les approches les plus utilisées, pour étudier la stabilité des systèmes à retards.

1.3.1 Définitions de la stabilité

La notion de stabilité des systèmes dynamiques consiste dans l'étude de l'évolution de ses trajectoires au voisinage des points d'équilibre. Les approches les plus utilisées pour l'analyse de stabilité des systèmes non linéaires ont été introduites à la fin du dix-neuvième siècle par le mathématicien russe A.M. Lyapunov, dites d'ailleurs les approches de Lyapunov [Vid93]. Ses travaux reposent sur deux approches majeures, l'approche indirecte et l'approche directe. L'approche indirecte, ou l'approche de linéarisation telle que son nom l'indique, repose sur l'analyse de stabilité locale d'un système non linéaire autour du point d'équilibre de son approximation linéaire. En revanche, la méthode directe ou dite aussi la seconde méthode de Lyapunov permet l'analyse de stabilité du système non linéaire en construisant une fonction d'énergie pour le système et en examinant sa variation temporelle. Cette méthode est devenue l'outil le plus important pour l'analyse de stabilité des systèmes non linéaires et sera considérée dans ce qui suit. D'abord, nous entamons cette section en donnant les définitions nécessaires à l'étude de stabilité.

Dans cette section, nous considérons un système non linéaire décrit par l'EDO suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Un point $x_e \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre du système (1.1) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall t \in \mathbb{R}, f(t, x_e) = 0$,
- La solution du système pour $x_0 = x_e$ est unique $\forall t_e \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $x(t_e, x_e)$ est unique.

Sans perte de généralité, nous supposons par la suite que le point d'équilibre correspond à l'origine $x_e = 0$ (solution triviale), vu que la stabilité de toute solution peut être ramenée à l'étude de stabilité de la solution triviale [KN86].

Définition 1.3.1. *(Stabilité) [GKC03] La solution triviale est stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0 \quad tel \quad que \quad \forall x_0, \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

D'une manière générale, cela signifie que la trajectoire du système (1.1) au voisinage du point d'équilibre x_e en reste suffisamment proche. Dans ce mémoire, l'étude de stabilité concernée est celle de l'erreur d'estimation autour de l'origine.

Définition 1.3.2. *(Attractivité) [GKC03] La solution triviale est un point d'équilibre attractif pour le système (1.1), si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \geq t_0, \exists \delta(t_0) > 0 \quad tel \quad que \quad \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon,$$

Cela signifie qu'après un certain temps éventuellement infini, toutes les trajectoires du système convergeront vers son état d'équilibre même si elles ont présenté de larges déviations

Remarque 1.3.1. *Lorsque $\delta \longrightarrow \infty$, la solution triviale est dite globalement attractive.*

Comme les systèmes non linéaires peuvent avoir un comportement beaucoup plus complexe que les systèmes linéaires, la simple notion de stabilité ne suffit pas pour décrire les caractéristiques essentielles de leur mouvement. Un certain nombre de concepts de stabilité plus raffinés, tels que la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle et la stabilité asymptotique globale, sont nécessaires [SL91].

Définition 1.3.3. *(Stabilité asymptotique) Si la solution triviale est stable et attractive (resp. globalement attractive), alors elle est asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable.*

La notion de stabilité asymptotique découle du fait qu'un système attractif n'est pas nécessairement stable et ainsi vient la notion de stabilité asymptotique qui garantit que les trajectoires du système convergent vers le point d'équilibre sans trop s'en éloigner.

Définition 1.3.4. *(Stabilité exponentielle) Notons B_r une boule de centre 0 et de rayon $r > 0$. La solution triviale est dite exponentiellement stable si*

$$\exists\ \alpha, \beta > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall x_0 \in B_r, \quad \textit{tel que} \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)}$$

où α est appelé le taux de convergence exponentielle.

Remarque 1.3.2. *Lorsque $B_r = \mathbb{R}^n$, la solution triviale est dite globalement exponentiellement stable.*

Remarque 1.3.3. *Il est à noter que la stabilité exponentielle d'un système implique sa stabilité asymptotique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.*

Remarque 1.3.4. *Hormis l'hypothèse sur les conditions initiales, les notions de stabilité évoquées ci-dessus, sont analogues à celles des systèmes à retards.*

1.3.2 Analyse de la stabilité avec la seconde méthode de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov permet d'obtenir une condition suffisante pour l'analyse de stabilité du point d'équilibre x_e du système (1.1). Cette méthode est basée sur l'existence d'une fonction, appelée fonction de Lyapunov, définie positive sur un voisinage du point d'équilibre, dont la dérivée temporelle le long des trajectoires du système est définie négative. Ceci traduit le fait que l'énergie totale du système (1.1) se dissipe continûment avec le temps quand sa trajectoire tend à rejoindre sa position d'équilibre.

Définition 1.3.5. *(Fonction de Lyapunov) [Vid93] Notons $\mathcal{V}_e$ un voisinage du point d'équilibre x_e du système (1.1) et $V(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur $\mathcal{V}_e$. $V(t,x)$ est dite une fonction candidate de Lyapunov si elle vérifie les propriétés suivantes :*

— *$\forall x \in \mathcal{V}_e$, $V(t,x)$ est définie positive ($V(t,x) > 0$),*

— *$\forall x \in \mathcal{V}_e$, la dérivée de $V(t,x)$ le long des trajectoires de (1.1) est définie négative, i.e.*

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x) \leq 0$$

Si $\dot{V}(t,x) < 0$, alors $V(t,x)$ est une fonction de Lyapunov au sens strict.

Définition 1.3.6. *(Stabilité locale et asymptotique au sens de Lyapunov) La solution triviale est un point d'équilibre localement stable au sens de Lyapunov pour le système (1.1), s'il existe une fonction de Lyapunov $V(t,x)$ vérifiant la définition 1.3.5 au sens large. Si $\dot{V}(t,x) < 0$, alors la solution triviale est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Définition 1.3.7. *(Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov) La solution triviale est un point d'équilibre exponentiellement stable au sens de Lyapunov pour le système (1.1), s'il existe des scalaires α, β et γ strictement positifs, un entier $p > 0$ et une fonction de Lyapunov $V(t,x)$ continûment différentiable sur $\mathcal{V}_e$, tels que les propriétés suivantes sont vérifiées*

— $\forall x \in \mathcal{V}_e$, $\alpha||x||^p \leq V(t,x) \leq \beta||x||^p$,

— $\forall x \in \mathcal{V}_e$, $\dot{V}(t,x) < \gamma V(t,x)$

1.4 Stabilité des systèmes à retards

Comme mentionné ci-dessus, la seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction définie positive décroissante le long des trajectoires de (1.1) (sa dérivée temporelle le long des trajectoires de (1.1) est définie négative). Dans le cas des systèmes à retards, la fonction de Lyapunov requise pour l'analyse de stabilité dépend de la valeur de l'état $x(t)$ dans l'intervalle $[t-\tau,\ t]$, i.e. dépend des valeurs passées de $x(t)$, ce qui rend le problème difficilement exploitable pour la majorité des systèmes à retards. Pour ce faire, deux extensions de la seconde méthode de Lyapunov ont été développées : la méthode de Lyapunov-Razumikhin et la méthode de Lyapunov-Krasovskii. Comme les systèmes à retards sont des systèmes de dimension infinie, il est évident qu'il faut manipuler des fonctionnelles $V(t,x)$ qui dépendent des valeurs passées de l'état afin de mesurer la déviation de la trajectoire dans l'intervalle $[t-\tau,\ t]$ par rapport à la solution triviale.

Dans cette section, nous considérons le système non linéaire à retard suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t \geq t_0 \\ x(t_0) = \psi \end{cases} \tag{1.2}$$

où ψ est une fonction continue de $[-\tau, 0]$ sur $\mathbb{R}^n$.

Approche de Lyapunov-Krasovskii : C'est une généralisation de la seconde méthode de Lyapunov dans le cas des systèmes à retards développée par N.N. Krasovskii dans [Kra63]. La fonctionnelle utilisée sera nommée fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Un résumé des différentes méthodes élaborées depuis peut être trouvé dans [Ric03b]. Les résultats de cette approche sont énoncés dans le théorème suivant.

Théorème 1.4.1. *(Théorème de Lyapunov Krasovskii [Kra63, GKC03, Nic01]) Soit $u, v, w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ des fonctions continues croissantes, $u(\theta)$ et $v(\theta)$ sont strictement positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que le champ de vecteur f soit borné pour des valeurs bornées de ses arguments. S'il existe une fonctionnelle continue $V : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ telle que :*

— $u(\|\psi(0)\|) \leq V(t,\psi) \leq v(\|\psi\|_c)$

— $\dot{V}(t,\psi) \leq -w(\|\psi(0)\|)$

alors la solution triviale du système (1.2) est uniformément stable.

Si de plus $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$, alors la solution nulle est uniformément asymptotiquement stable.

Ainsi, le problème de stabilité consiste à trouver une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii candidate qui soit définie positive au voisinage du point d'équilibre et dont la dérivée temporelle est définie négative. Ceci conditionne l'analyse de stabilité des systèmes à retards : d'une part,

le choix de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (et la nature de la matrice de Lyapunov invariante, dépendante de certains paramètres, etc) et, d'autre part, la majoration de sa dérivée temporelle le long des trajectoires du système considéré en utilisant des inégalités plus ou moins conservatives. Malgré cela, cette approche est la plus utilisée, dans la littérature, dans l'analyse des systèmes à retards.

Approche de Lyapunov-Razumikhin : Contrairement à l'approche de Krasovskii qui nécessite la manipulation des fonctionnelles, la méthode proposée par Razumikhin prend en considération l'état instantané $x(t)$. Cela conduit à la recherche d'une fonction candidate et non pas une fonctionnelle, ce qui donne à cette approche le nom de l'approche par fonctions de Razumikhin. En outre, cette approche présente la particularité de vérifier la décroissance de la fonction candidate seulement pour les trajectoires du système qui ont tendance à s'éloigner du point d'équilibre. Cette approche est donnée par le théorème suivant

Théorème 1.4.2. *(Théorème de Lyapunov Razumikhin [GKC03, Nic01]) Soit $u, v, w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ des fonctions continues croissantes, $u(\theta)$ et $v(\theta)$ sont strictement positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que le champ de vecteur f soit borné pour des valeurs bornées de ses arguments. S'il existe une fonction continue $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que :*

- *$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq u(\|x\|)$*
- *$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|)$ pour toutes les trajectoires du système vérifiant :*

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)) \qquad \forall \theta \in [-\tau, 0]$$

alors la solution nulle est uniformément stable.

Dans le cas des retards constants, il a été montré que l'existence d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin entraîne celle d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii [Dri77]. Dans le cas des retards variables, cette approche permet d'éviter les restrictions sur la dérivée des retards. Toutefois, l'approche de Razumikhin mène souvent à des conditions plus conservatives que celle de Lyapunov-Krasovskii et présente l'inconvénient de ne pas être applicable dans le cas de la commande $\mathcal{H}_\infty$ [LM07].

Remarque 1.4.1. *Les deux approches, mentionnées ci-dessus, basées sur la méthode directe de Lyapunov, en combinaison avec des méthodes d'optimisation convexe (telles que les LMIs) permettent d'établir des critères systématiques de stabilité pour les systèmes à retards.*

1.5 Stabilité dépendante/indépendante des retards

Les méthodes d'analyse de stabilité pour des systèmes présentant des retards dans leurs dynamiques diffèrent entre celles dépendantes des retards et celles indépendantes des retards du modèle considéré [BEFB94, KNR99, Fri01, FS03, Yu99, Fri14, ZLC17, LZZ17, DL16]. Dans la pratique, on opte pour les méthodes de conception d'observateurs indépendantes des retards puisqu'elles sont plus faciles à implémenter et moins coûteuses en calcul. Par contre, si on souhaite prendre en compte les effets parfois déstabilisant des retards sur la dynamique du système, on adopte des méthodes dépendantes de ces derniers. L'étude de la stabilité d'un processus dynamique comportant un retard indépendamment de la connaissance de sa valeur conduit à des résultats conservatifs. Afin de diminuer ce conservatisme, il est nécessaire de poser une condition sur la taille du retard et donc d'utiliser des méthodes d'analyse de la stabilité dépendante du retard. Dans ce qui suit, les fonctionnelles de Lyapunov utilisées dans ce but seront données. Au préalable, nous définissons la transformation de Leibniz. Cette transformation est très utile dans

la construction de critères de stabilité dépendant du retard. Elle permet d'écrire l'expression de l'état retardé comme suit

$$x(t-\tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(s)ds \tag{1.3}$$

ce qui permet de réécrire le système (1.2) comme un système à retards distribués.

Stabilité indépendante des retards : La fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii choisie dans l'analyse de stabilité indépendamment du retard s'écrit sous la forme suivante

$$V(x) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x^T(s)Qx(s)ds \tag{1.4}$$

avec $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $P = P^T > 0$ et $Q > 0$, ce qui permet de garantir que la fonctionnelle candidate est définie positive. Le premier terme de la fonctionnelle représente un terme quadratique standard utilisé généralement dans l'étude de stabilité des systèmes dynamiques. Le second terme est lié à la stabilité indépendante des retards [Fri01]. Les conditions de stabilité tirées dans ce type de problème ne contiennent aucune information sur les retards. Ainsi, elles sont considérées trop conservatives, en particulier lorsque le retard est faible. Afin de relaxer ce conservatisme, il est nécessaire d'avoir des informations sur la taille des retards. Ceci a conduit à définir des approches d'analyse de stabilité dépendante des retards.

Stabilité dépendante des retards : Dans ce cas, un terme est ajouté à la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii décrite par (1.4) qui permettra d'avoir des conditions de stabilité dépendant des retards. Dans ce type de problème, l'utilisation des transformations telles que celle de Leibniz décrite précédemment permet de faire apparaître l'information sur le retard dans le système d'origine. Ainsi, la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii devient

$$V(x) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} x^T(s)Rx(s)dsd\beta \tag{1.5}$$

avec $P, Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $P = P^T > 0$, $Q > 0$ et $R > 0$. L'ajout de ce terme conduit à l'apparition d'un terme quadratique contenant une intégrale dans la dérivée temporelle de la fonctionnelle candidate. La présence de ce terme augmente la complexité d'analyse. Pour ce faire, il faut savoir comment y faire face.

1.6 Observateurs fonctionnels

L'élaboration d'une loi de commande appropriée est souvent réalisée en supposant que tous les composants du vecteur d'état sont disponibles. Puisque cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée dans la pratique, il devient nécessaire d'estimer les états d'un système, d'où le besoin d'un observateur d'état. En automatique, un observateur d'état est un système dynamique auxiliaire qui reflète le comportement dynamique d'un système. A l'aide des mesures des entrées et des sorties du système, un observateur permet de fournir une estimation des états du système considéré. Le but de la conception d'un observateur est que l'estimation des états soit proche de la valeur réelle des états du système. En revanche, un observateur fonctionnel permet d'estimer une ou plusieurs fonctions linéaires des états du système à partir des entrées et des mesures disponibles sans reconstruire la totalité des états. Un observateur fonctionnel peut donc être considéré comme une forme générale de l'observateur d'état et est représenté par la figure 1.2. En effet, lorsque les fonctions linéaires sont choisies comme étant les états individuels du système, le problème de l'observation fonctionnelle se réduit au problème de l'observation d'état.

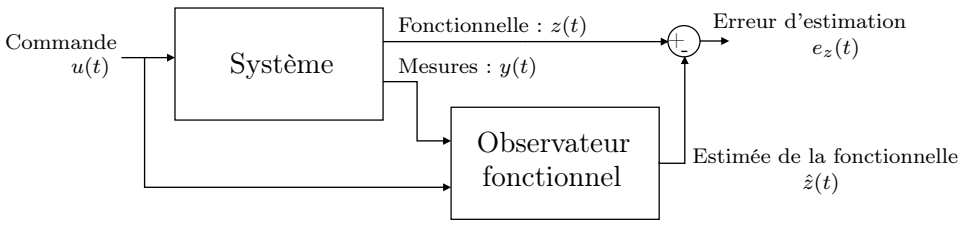


FIGURE 1.2 – Observateur fonctionnel.

Puisque les observateurs fonctionnels présentent l'avantage d'estimer directement une fonctionnelle de l'état $z(t)$ telle que $z(t) = Lx(t)$ (où $x(t)$ est le vecteur d'état) sans devoir estimer entièrement ou séparément les composantes du vecteur d'état, ils permettent de simplifier les lois de commandes basées sur un observateur en remplaçant que la commande par retour d'état estimé $u(t) = L\hat{x}(t)$ (où $u(t)$ est le vecteur de commande et $\hat{x}(t)$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$) par l'estimation $\hat{z}(t)$ de la fonctionnelle $z(t) = Lx(t)$.

La conception de ce type d'observateurs a suscité un intérêt considérable depuis les années 60, du fait qu'ils permettent de réduire l'ordre et la complexité de l'observateur et par conséquent le coût des systèmes de commande.

Les observateurs fonctionnels ont été introduits par Luenberger dans [Lue66] pour les systèmes linéaires. En raison de leur potentiel à réduire la complexité et le coût des systèmes de commande, le problème de conception d'observateurs fonctionnels a suscité un intérêt considérable qui n'a pas cessé de progresser [GFH81, Nak97, HPM99, Dar00a, Dar00b, Dar04, SZRD06, FTJ10, Dar12, EDSM13, RZ16, DAA17]. L'ordre d'un observateur fonctionnel peut être significativement inférieur à celui du système d'origine [Lue71]. Ceci a constitué l'une des directions de recherche les plus importantes dans le domaine de conception d'observateur fonctionnel [RZ11, FT14, AB18]. En effet, l'observateur fonctionnel d'ordre réduit est le plus intéressant dans les applications, où l'on souhaite estimer un ensemble réduit de fonctions linéaires d'état, vu qu'il peut conduire à une manière plus simple et moins coûteuse pour l'élaboration d'une loi de commande. Dans ce but, beaucoup de travaux dans la littérature ont proposé diverses méthodes pour la conception d'observateurs fonctionnels d'ordre r inférieur à celui du système d'origine, où r traduit le nombre de fonctions linéaires à estimer. Darouach dans [Dar00a] a donné des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un observateur fonctionnel d'ordre réduit, pour un système linéaire décrit par l'EDO suivante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.6a}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{1.6b}$$
$$z(t) = Lx(t) \tag{1.6c}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et $z(t) \in \mathbb{R}^r$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur des entrées de commande, le vecteur des mesures et le vecteur des fonctionnelles d'état. Les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, et $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$ sont des matrices à valeurs connues. Sans perte de généralité, supposons que $\text{rang}(C) = p$ et $\text{rang}(L) = r$. L'observateur fonctionnel d'ordre r qui permet d'estimer la fonctionnelle $z(t)$ a la forme suivante

$$\dot{\eta}(t) = N\eta(t) + My(t) + Fu(t) \tag{1.7a}$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Jy(t) \tag{1.7b}$$

où $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'état de l'observateur et $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de la fonctionnelle $z(t)$. Les matrices $N \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $F \in \mathbb{R}^{r\times m}$, et $J \in \mathbb{R}^{r\times p}$ sont des matrices à déterminer telles que l'erreur d'estimation entre la fonctionnelle d'état $z(t)$ et son estimée $\hat{z}(t)$ converge vers zéro. Pour ce faire, notons $e(t)$ l'erreur d'estimation comme suit

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t) = (L - JC)\, x(t) - \eta(t)$$

Sa dynamique est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= (L - JC)\dot{x}(t) - \dot{\eta}(t) \\ &= Ne(t) + (N\,(L - JC) + (L - JC)\, A - MC)\, x(t) + ((L - JC)\, B - F)\, u(t)\end{aligned} \tag{1.8}$$

La convergence de l'observateur est assurée par le théorème suivant.

Théorème 1.6.1. *[Dar00a] Soit le système (1.6) et l'observateur fonctionnel (1.7). $\hat{z}(t)$ est une estimation asymptotique de la fonctionnelle $z(t)$, pour tout $x(0)$, $\hat{z}(0)$ et $u(t)$ si et seulement si N est une matrice Hurwitz et si les équations suivantes sont vérifiées*

$$F = (L - JC)\, B \tag{1.9a}$$

$$N\,(L - JC) + (L - JC)\, A - MC = 0 \tag{1.9b}$$

En effet, pour que l'erreur d'estimation soit non biaisée, il suffit d'annuler les termes qui dépendent de l'état $x(t)$ et de l'entrée $u(t)$ dans l'équation de la dynamique de l'erreur (1.8). Il est clair que le problème de conception d'un observateur fonctionnel est lié à l'équation (1.9b), dite équation de Sylvester. L'équation (1.9a) est déduite de la résolution de l'équation (1.9b).

1.7 Observateurs adaptatifs

1.7.1 Définition et applications

D'une manière générale, en présence d'un vecteur de paramètres inconnus dans la dynamique d'un système, un observateur qui permet de fournir une estimation de ceux-ci, et du vecteur d'état est appelé un observateur adaptatif. Considérons le système non linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = f(t, u, x) + g(t, u, x)\theta \tag{1.10a}$$

$$\dot{\theta} = 0 \tag{1.10b}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.10c}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $\theta \in \mathbb{R}^q$ sont respectivement le vecteur d'état, d'entrées, de mesures et des paramètres inconnus. f, g et h sont des fonctions continues. Un observateur se mettant sous la forme suivante (voir figure 1.3)

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t, u, \hat{x}) + g(t, u, \hat{x})\hat{\theta} + K^x(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{1.11a}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = K^\theta g(t, u, \hat{x})(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{1.11b}$$

fournissant ainsi une estimation $\hat{x}(t)$ et $\hat{\theta}$ des vecteurs d'état et des paramètres inconnus $x(t)$ et θ respectivement, est dit un observateur adaptatif si ces estimations convergent asymptotiquement vers leurs vraies valeurs, où K^x et K^θ sont les gains de l'observateur.

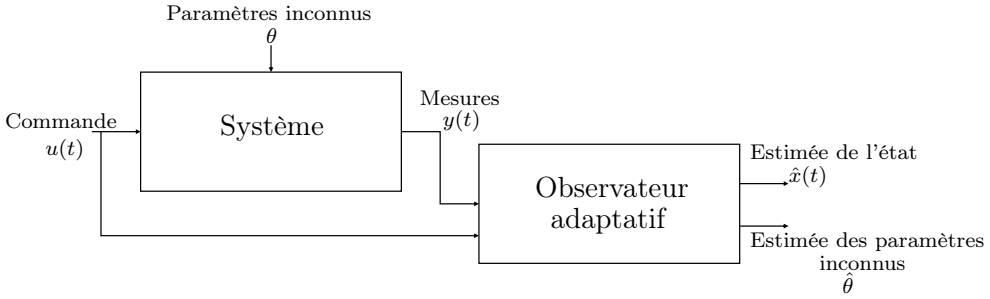


FIGURE 1.3 – Observateur adaptatif.

Le problème de la conception d'un observateur adaptatif représente un domaine de recherche important et actif. Dans les processus industriels, l'observateur adaptatif joue un rôle crucial dans la commande robuste tolérante aux fautes et la détection et l'isolement des défauts. Du fait qu'il peut générer une estimation précise des paramètres inconnus et des états non mesurés, il permet d'avoir une meilleure connaissance de la dynamique du système. Dans la majorité des travaux de la littérature, le vecteur de paramètres inconnus à estimer est supposé constant ou varie suffisamment lentement, de sorte que sa dérivée est supposée égale à zéro. Il y a peu de travaux traitant le cas où le paramètre est variant dans le temps [BG88, JS02, WWLL08].

La conception d'observateurs adaptatifs a été étudiée depuis les années 70 pour des systèmes LTI. Dans [LN73], l'observateur adaptatif proposé est similaire au système considéré avec l'ajout de signaux permettant de garantir la stabilité de l'erreur d'estimation. Dans cette contribution, le modèle de système LTI est considéré sous la forme canonique observable et ne prend pas en compte la présence des paramètres inconnus, ce sont les paramètres de l'observateur qui sont ajustés de manière adaptative pour correspondre à ceux du système. En revanche, dans [BG88], les auteurs ont considéré que le système non linéaire peut être transformé afin de faire apparaître le vecteur des paramètres inconnus, supposé variant dans le temps et qui va être estimé en ligne, simultanément avec le vecteur d'état. Dans les années 90, Marino et Tomei dans [MT92] ont proposé un observateur adaptatif pour une classe de systèmes dont le modèle d'état dépend du vecteur des paramètres inconnus et qui, avec un changement de coordonnées non linéaire, peut être mis sous une forme canonique observable. La convergence de cet observateur a été montrée en utilisant le lemme de Barbalat. Dans cette méthode, tandis que l'équation d'estimation d'état est relativement simple, l'équation d'estimation des paramètres est complexe et implique plusieurs étapes de filtrage. Ensuite, Rajamani et Hedrick ont développé un observateur adaptatif afin d'estimer le vecteur des paramètres inconnus simultanément avec le vecteur d'état d'un système non linéaire dans [RH95] avec une application à un modèle réel d'une suspension automobile active. Puisque la masse suspendue dépend du nombre de passagers et de la charge sur l'automobile, elle doit être régulièrement mise à jour. L'observateur adaptatif proposé permet d'identifier la masse suspendue de l'automobile qui est supposée inconnue.

Lorsque le vecteur des paramètres inconnus est constant, Cho et Rajamani dans [CR97] ont reformulé ces résultats sous la forme de contraintes LMI. Cependant, la convergence du vecteur des paramètres inconnus est garantie sous une contrainte d'excitation persistante. Sur la base de ces travaux de conception d'observateurs adaptatifs, Besançon a donné dans [Bes00] une formule unifiée d'observateurs adaptatifs pour les systèmes qui peuvent se mettre sous une forme canonique observable en soulignant des propriétés permettant une estimation d'état asymptotique en dépit de la présence des paramètres inconnus, ainsi que des propriétés supplémentaires permettant l'estimation des paramètres sous la condition d'excitation persistante. De plus, l'observateur

a été traité sous une forme d'ordre réduit. En 2001, une nouvelle approche dans la conception d'observateurs adaptatifs a été proposée dans [ZD01]. Aucune transformation du système non linéaire considéré n'est nécessaire. L'équation d'estimation des paramètres dépend de signaux multipliant le vecteur des paramètres inconnus filtrés par un filtre LTI stable. En plus d'inégalité de type Lyapunov, l'étude de la convergence de l'erreur d'estimation des paramètres inconnus nécessite une condition d'excitation persistante.

Les contributions évoquées ci-dessus représentent les premières des méthodes de conception d'observateurs adaptatifs. En s'appuyant sur ces travaux, le problème de l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus est devenu un problème d'actualité durant ces dernières décennies [MFM+08, FBM+14, GY03, Ibr09, APL09, MC13].

Il faut noter que à la classe des systèmes dynamiques "standard" ou réguliers, s'ajoute la classe des systèmes singuliers, aussi appelés descripteurs ou algébro-différentiels, pour lesquels il y a peu de travaux dans la littérature concernant la synthèse des observateurs adaptatifs. La synthèse d'observateurs fonctionnels adaptatifs pour une classe des système descripteurs linéaires a été développée dans [AD14]. La robustesse de l'observateur proposé a été étudié lorsque le système est affecté par un bruit à énergie finie. Cependant, la synthèse de ces observateurs nécessite une contrainte d'excitation persistante. Dans [MZ13], un observateur adaptatif est utilisé pour la détection des défauts, modélisés comme des changements de paramètres, susceptibles d'affecter un système dynamique modélisé par des EADO non linéaires.

Dans le contexte de la synthèse d'observateurs adaptatifs, deux approches principales peuvent être trouvées dans la littérature. Tout d'abord, l'observateur adaptatif peut être considéré comme un observateur classique avec une loi d'adaptation en ligne appropriée des paramètres inconnus. Ici, l'estimée du vecteur des paramètres inconnus est déduite de l'analyse de stabilité d'un observateur d'état classique et la propriété de convergence de l'erreur d'estimation des paramètres inconnus est obtenue par une contrainte de type excitation persistante. En utilisant cette hypothèse, des conditions suffisantes de convergence de l'observateur adaptatif proposées dans [CR97] ont été développées pour une classe générale de systèmes non linéaires et, dans [BDH06], pour une classe de systèmes affines ou à temps variant. Sur la base de ces résultats, la présence de perturbations bornées est considérée dans [PM12]. Cependant, la loi adaptative a été modifiée pour surmonter certaines contraintes dans l'estimation des paramètres. Dans [ESHY13], des résultats moins conservateurs dans la conception de l'observateur adaptatif pour les systèmes non linéaires ont été proposés. La deuxième approche pour la conception d'un observateur adaptatif peut être décrite comme une synthèse d'un observateur d'état pour un système augmenté, où le modèle de dynamique d'état est augmenté avec la dynamique de ses paramètres inconnus. Nous pouvons renvoyer le lecteur à de nombreux travaux antérieurs [AD14, ASDG15, FBM+14].

Dans ce mémoire, la synthèse d'observateurs adaptatifs sera basée sur la synthèse d'observateurs pour un système augmenté états-paramètres inconnus. De plus, la présence de retards dans la dynamique du système augmente la complexité de son analyse, ce qui complique le problème de la conception de l'observateur adaptatif. L'existence de retards constitue un fait important qui doit être pris en compte dans l'étude du système dynamique, car ils peuvent modifier le comportement de la dynamique d'un système et conduire, dans certains cas, à son instabilité [Ric03b]. A notre connaissance, le problème de la conception d'observateurs adaptatifs pour une telle classe de systèmes est peu étudié dans la littérature.

Dans la section suivante, nous étudierons la motivation de la problématique investiguée dans ce mémoire dans le cas d'un système non linéaire (sans retard) en se comparant à certains travaux de la littérature.

1.7.2 Discussion

Dans cette section, la discussion va porter sur la synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires dans le but d'expliciter les motivations du problème abordé dans ce mémoire en comparaison avec des travaux existants. Puisque de nombreuses contributions sur la synthèse d'observateurs adaptatifs se basent sur les travaux de Cho et Rajamani dans [CR97] (on peut aussi se référer à [MC13, MLY14]), nous allons nous concentrer, pour plus de clarté dans cette discussion, uniquement sur les résultats de l'article [CR97].

1.7.2.1 Présentation du problème

Pour ce faire, considérons le système non linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Gg(x,u)\theta \tag{1.12a}$$
$$\dot{\theta} = 0 \tag{1.12b}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{1.12c}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur des entrées de commande et le vecteur des mesures. $\theta \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des paramètres inconnus tel que $||\theta||_2 < b_\theta$, $b_\theta > 0$. Les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times s}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont connues et à valeurs constantes. La fonction $g(x,u)$ est, avec $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{s\times q}$, est lipschitzienne et vérifie la relation

$$||g(x,u) - g(x^*,u)|| \leq b_g||x - x^*|| \tag{1.13}$$

Le principe d'un observateur adaptatif est d'estimer simultanément l'état $x(t)$ et les paramètres inconnus θ. Dans [CR97], les auteurs ont proposé un observateur adaptatif sous la forme suivante

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Gg(\hat{x},u)\hat{\theta} + K^x(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{1.14a}$$
$$\dot{\hat{\theta}}(t) = g(\hat{x},u)K^\theta(x(t) - \hat{x}(t)) \tag{1.14b}$$

où K^x et $K^\theta = \frac{TC}{\rho}$ sont des gains de l'observateur à déterminer tels que les erreurs d'estimation de l'état et du vecteur des paramètres inconnus, respectivement $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et $e_\theta(t) = \theta - \hat{\theta}$, convergent vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$, avec $\rho > 0$ et T une matrice de dimension appropriée. La convergence de l'observateur est garantie par le théorème suivant [CR97].

Théorème 1.7.1. *Le système (1.14) est un observateur adaptatif pour le système (1.12) s'il existe des matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$, et des matrices K^x et T telles que*

$$(A - K^xC)^TP + P(A - K^xC) < -Q \tag{1.15}$$
$$G^TP = TC \tag{1.16}$$
$$b_gb_\theta||G|| < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \tag{1.17}$$

Dans la preuve de ce théorème, les auteurs ont montré que la LMI

$$(A - K^xC)^TP + P(A - K^xC) + b_gb_\theta||G||PP + b_gb_\theta I < 0 \tag{1.18}$$

est satisfaite si les conditions (1.16) et (1.17) sont vérifiées.

Pour prouver ce théorème, les auteurs se basent sur l'approche de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité. Ainsi, la fonction de Lyapunov candidate, choisie dans [CR97], s'écrit sous la forme suivante

$$V(e) = e_x^T(t)Pe_x(t) + \rho e_\theta^T(t)e_\theta(t) = e(t)\mathbb{P}e(t) \tag{1.19}$$

où $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \rho I_q \end{bmatrix}$, $P = P^T > 0$ et ρ est un scalaire strictement positif.

Notons $e(t)$ l'erreur d'estimation telle que $e^T(t) = \begin{bmatrix} e_x^T(t) & e_\theta^T(t) \end{bmatrix}$.

Nous allons d'abord montrer que le choix de la fonction de Lyapunov dans (1.19) implique qu'on ne peut obtenir que la stabilité de $e_x(t)$, mais pas celle de $e_\theta(t)$. Pour simplifier l'analyse, nous allons d'abord considérer, dans un premier temps, la fonction $g(x,u) = 1$. Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation, entre le système (1.12) et l'observateur (1.14), est définie comme suit

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - K^x C & G \\ -K^\theta C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

En utilisant cette expression, la dérivée temporelle de la fonction (1.19) le long de la trajectoire du système (1.12) est telle que

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T(t) \left(\begin{bmatrix} (A - K^x C)^T & -(K^\theta C)^T \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \rho I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \rho I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - K^x C & G \\ -K^\theta C & 0 \end{bmatrix} \right) e(t) \\ &= e^T(t) \begin{bmatrix} (A - K^x C)^T P + P(A - K^x C) & -\rho (K^\theta C)^T + PG \\ G^T P - \rho K^\theta C & 0 \end{bmatrix} e(t) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Nous constatons qu'il n'y a pas de terme quadratique en $e_\theta^T e_\theta$ dans $\dot{V}(e)$ dans l'équation (1.21) du fait du bloc nul.

Dans le cas général où $g(x,u) \neq 1$, il y a aussi ce bloc de zéros. Ainsi, la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov ne contient pas de terme quadratique en $e_\theta^T e_\theta$, et donc la condition $\dot{V}(e) < 0$ ne peut pas être vérifiée. C'est pourquoi, les auteurs dans [CR97] vont chercher à avoir $\dot{V}(e_x) < 0$. Pour ce faire, les auteurs vont obtenir une majoration de $\dot{V}(e)$ qui ne contient pas de termes en e_θ en ajoutant la condition (1.16). La stabilité de l'erreur d'estimation de l'état est donc démontrée car l'inégalité $\dot{V}(e_x) < 0$ est garantie par (1.15) et (1.17). La stabilité de l'erreur d'estimation du vecteur des paramètres inconnus e_θ est obtenue en ajoutant une condition d'excitation persistante dans [CR97].

Les conditions (1.15) et (1.16) sont celles qui sont utilisées pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues. Dans la section 1.7.2.2, nous montrons le lien entre ces deux types d'observateurs (les observateurs adaptatifs et les observateurs à entrées inconnues).

1.7.2.2 Liens entre les observateurs adaptatifs et les observateurs à entrées inconnues

Dans [CT98], il est montré que les conditions (1.15) et (1.16), avec $P = P^T > 0$, sont vérifiées si et seulement si $\text{rang}(CG) = \text{rang}(G)$ et si les zéros invariants du triplet (A, G, C) sont stables, c'est-à-dire si et seulement si les conditions d'existence des observateurs à entrées inconnues sont

satisfaites [KVR80, HM92, DZX94]. Cependant, dans la synthèse d'UIO, les zéros invariants du triplet (A, G, C) sont des pôles fixes de l'erreur d'estimation $e_x(t)$, ce qui n'est pas le cas pour l'observateur adaptatif.

Pour illustrer le paragraphe précédent et mettre en évidence les limitations de l'approche considérée dans [CR97], nous allons étudier les conditions (1.15), (1.16) et (1.17) lorsque les zéros invariants du triplet (A, G, C) sont stables ou instables.

Zéro invariant instable : Nous considérons le système (1.12) où les matrices A, G et C sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

avec $b_g = b_\theta = 1$.

Le triplet (A, G, C) possède trois pôles instables $\{1, 2, 3\}$ et un zéro invariant instable $\{4\}$. Notons bien que, pour cet exemple, $CG = [1 \;\; 0]^T$, et donc $\text{rang}(CG) = \text{rang}(G) = 1$. Commençons par vérifier la condition (1.16). on a

$$\begin{aligned} G^T P = TC \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il faut donc que $P_{13} = 0$. Afin d'étudier la stabilité du système (1.22), nous considérons la condition (1.15). En posant

$$K^x = \begin{bmatrix} K^x_{11} & K^x_{12} \\ K^x_{21} & K^x_{22} \\ K^x_{31} & K^x_{32} \end{bmatrix}$$

nous obtenons l'inégalité suivante

$$(A - K_x C)^T P + P(A - K_x C) = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ * & (2,2) & (2,3) \\ * & * & 8P_{33} \end{bmatrix} < -Q < 0 \tag{1.23}$$

avec

$$\begin{aligned} (1,1) &= 2P_{12}(2 - K^x_{21}) - 2P_{11}K^x_{11} \\ (1,2) &= -K^x_{11}P_{12} + (2 - K^x_{21})P_{22} + (3 - K^x_{31})P_{23} + P_{12}(2 - K^x_{22}) - K^x_{12}P_{11} \\ (1,3) &= (2 - K^x_{21})P_{23} + (3 - K^x_{31})P_{33} - P_{11} \\ (2,2) &= -2K^x_{12}P_{12} + 2P_{22}(2 - K^x_{22}) - 2K^x_{32}P_{23} \\ (2,3) &= 4P_{23} - P_{12} + (2 - K^x_{22})P_{23} - K^x_{32}P_{33} \end{aligned}$$

Afin de satisfaire l'inégalité (1.23), il faut que $8P_{33} < 0$, ce qui est impossible puisque $P_{33} > 0$ pour avoir $P = P^T > 0$.

Ainsi, nous constatons que la condition (1.15) ne peut pas être satisfaite dans le cas d'un système à zéro invariant instable.

Zéro invariant stable : Nous considérons le système (1.12), où les matrices A, G et C sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

avec $b_g = b_\theta = 1$.

Le triplet (A, G, C) possède trois pôles stables $\{-1, -2, -3\}$ et un zéro invariant stable $\{-4\}$. En choisissant $T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, la vérification de la condition (1.16) donnera $P_{11} = 1$, $P_{12} = 0$ et $P_{13} = 0$. Dans ce qui suit, nous considérons que la matrice P est diagonale comme suit

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Avec le gain K^x suivant

$$K^x = \begin{bmatrix} K^x_{11} & 0 \\ 0 & K^x_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

la matrice $A - K^x C$ est donnée par

$$A - K^x C = \begin{bmatrix} -K^x_{11} & 0 & 1 \\ -2 & -K^x_{22} - 2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

La condition de stabilité (1.15) appliquée sur le système (1.24) donne l'inégalité suivante

$$(A - K_x C)^T P + P(A - K_x C) = \begin{bmatrix} -2K^x_{11} & -2P_{22} & 1 - 3P_{33} \\ -2P_{22} & -2P_{22}(2 + K^x_{22}) & 0 \\ 1 - 3P_{33} & 0 & -8P_{33} \end{bmatrix} = -Q < 0 \tag{1.28}$$

Considérons alors que $P_{22} > 0$, $P_{33} > 0$, $K^x_{11} > 0$ et $K^x_{22} > -2$. L'application du lemme de Schur (voir section A.3.2.2 dans l'annexe A) sur l'inégalité (1.28) donne

$$-2K^x_{11} - \begin{bmatrix} -2P_{22} & 1 - 3P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2P_{22}(K^x_{22} + 2)} & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{8P_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2P_{22} \\ 1 - 3P_{33} \end{bmatrix}$$

$$= -2K^x_{11} + \begin{bmatrix} -2P_{22} & 1 - 3P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2P_{22}(K^x_{22} + 2)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8P_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2P_{22} \\ 1 - 3P_{33} \end{bmatrix}$$

$$= -2K_{11}^x + \begin{bmatrix} -1 & \frac{1-3P_{33}}{8P_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2P_{22} \\ 1-3P_{33} \end{bmatrix}$$
$$= -2K_{11}^x + \frac{2P_{22}}{K_{22}^x+2} + \frac{(1-3P_{33})^2}{8P_{33}} < 0 \tag{1.29}$$

Ainsi, l'inégalité suivante est obtenue

$$2K_{11}^x > \frac{2P_{22}}{K_{22}^x+2} + \frac{(1-3P_{33})^2}{8P_{33}} \tag{1.30}$$

Il reste donc à étudier la relation (1.17). On bloc-diagonalise la matrice Q, donnée dans (1.28), en choisissant $P_{22} = 1$ et $P_{33} = \frac{1}{3}$, ce qui donne $\lambda_{\max}(P) = 1$. Ainsi, la matrice Q est donnée par

$$Q = \begin{bmatrix} 2K_{11}^x & 2 & 0 \\ 2 & 2(2+K_{22}^x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

et il s'ensuit que l'inégalité (1.30) se simplifie comme suit

$$K_{11}^x > \frac{1}{K_{22}^x+2} > 0. \tag{1.32}$$

Afin que l'inégalité (1.17) soit vérifiée avec $b_g = b_\theta = 1$ et $||G|| = 1$, il faut donc que

$$2 \leqslant \min\left(\frac{8}{3}, \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} 2K_{11}^x & 2 \\ 2 & 2(2+K_{22}^x) \end{bmatrix}\right)\right)$$

ce qui est équivalent à

$$1 \leqslant \min\left(\frac{4}{3}, \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} K_{11}^x & 1 \\ 1 & 2+K_{22}^x \end{bmatrix}\right)\right) \tag{1.33}$$

Pour ce faire, nous étudierons dans ce qui suit la variation des valeurs propres de la matrice $Q_K = \begin{bmatrix} K_{11}^x & 1 \\ 1 & 2+K_{22}^x \end{bmatrix}$ en fonction des gains K_{11}^x et K_{22}^x. Pour des valeurs de K_{22}^x, le tableau suivant donne les valeurs de K_{11}^x pour que les valeurs propres de Q_K soient strictement supérieures à 1.

K_{22}^x	$\lambda(Q_K)$	K_{11}^x	relation (1.32)
-1	$0.5K_{11}^x \pm 0.5\sqrt{(K_{11}^x)^2 - 2K_{11}^x + 5} + 0.5$	$\times$	$\times$
-0.5	$0.5K_{11}^x \pm 0.5\sqrt{(K_{11}^x)^2 - 3K_{11}^x + 6.25} + 0.75$	$K_{11}^x > 3$	$3 > 2/3$
0	$0.5K_{11}^x \pm 0.5\sqrt{(K_{11}^x)^2 - 4K_{11}^x + 8} + 1$	$K_{11}^x > 2$	$2 > 0.5$
0.5	$0.5K_{11}^x \pm 0.5\sqrt{(K_{11}^x)^2 - 5K_{11}^x + 10.25} + 1.25$	$K_{11}^x > 5/3$	$5/3 > 0.4$
1	$0.5K_{11}^x \pm 0.5\sqrt{(K_{11}^x)^2 - 6K_{11}^x + 13} + 1.5$	$K_{11}^x > 1.5$	$1.5 > 1/3$
1.5	$0.5K_{11}^x \pm 0.5\sqrt{(K_{11}^x)^2 - 7K_{11}^x + 16.25} + 1.75$	$K_{11}^x > 1.4$	$1.4 > 1/3.5$
2	$0.5K_{11}^x \pm 0.5\sqrt{(K_{11}^x)^2 - 8K_{11}^x + 20} + 2$	$K_{11}^x > 4/3$	$2 > 0.25$

TABLE 1.1 – Conditions sur K_{11}^x en fonction de K_{22}^x pour vérifier (1.33).

Le tableau ci-dessus est établi pour des valeurs de $K_{22}^x > -1$ car, si $-2 < K_{22}^x \leq -1$, les valeurs propres minimales de la matrice Q_K vérifient $0 < \lambda_{\min}(Q_K) < 1$. Pour $K_{22}^x > -1$, les valeurs du gain K_{11}^x vérifiant la relation (1.33) données dans le tableau 1.1 satisfont aussi la relation

$$K_{11}^x > \frac{1}{K_{22}^x + 1} + 1 \tag{1.34}$$

ce qui est confirmé par la figure 1.4.

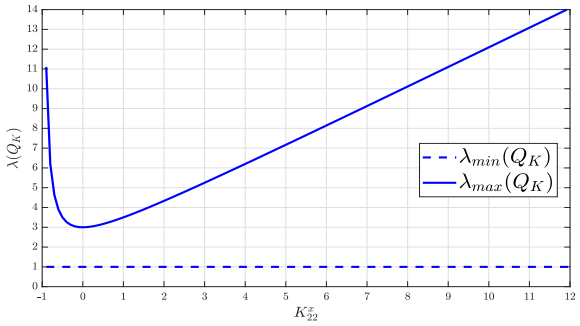


FIGURE 1.4 – Variation des valeurs propres de la matrice Q_K en fonction du gain K_{22}^x.

Notons que, lorsque le gain K_{11}^x vérifie la relation (1.34), la relation (1.32) est toujours satisfaite puisque

$$K_{11}^x > \frac{1}{K_{22}^x + 1} + 1 > \frac{1}{K_{22}^x + 2}. \tag{1.35}$$

En effet, avec $K_{22}^x > 1$, on a

$$\frac{1}{K_{22}^x + 1} + 1 = \frac{K_{22}^x + 2}{K_{22}^x + 1} > \frac{1}{K_{22}^x + 2} \iff (K_{22}^x + 2)^2 = (K_{22}^x)^2 + 4K_{22}^x + 4 > K_{22}^x + 1$$
$$\iff (K_{22}^x)^2 + 3K_{22}^x + 3 > 0$$

et le discriminant de $(K_{22}^x)^2 + 3K_{22}^x + 3 = 0$ est $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$, ce qui est confirmé par la figure 1.5.

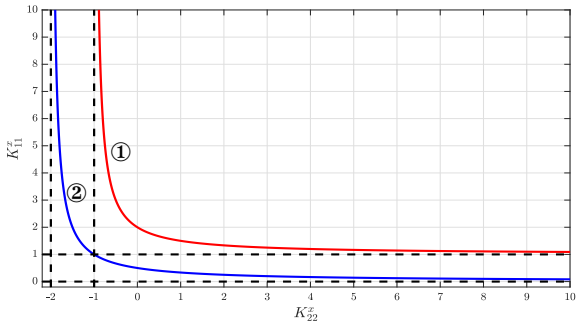


FIGURE 1.5 – Fonctions $K_{11}^x = \dfrac{1}{K_{22}^x + 1} + 1$ (①) et $K_{11}^x = \dfrac{1}{K_{22}^x + 2}$ (②).

Les valeurs propres de la matrice $A - K^x C$, décrite par (1.27), sont les solutions de l'équation suivante

$$\det\left(sI - (A - K^x C)\right) = (s + 2 + K_{22}^x)\left((s + K_{11}^x)(s + 4) + 3\right)$$

$$= (s + 2 + K_{22}^x)\left(s^2 + (K_{11}^x + 4)s + 4K_{11}^x + 3\right) = 0 \tag{1.36}$$

D'une part, $s = -4$ est le zéro invariant du triplet (A, G, C), mais n'est pas un pôle fixe de $A - K^xC$. Ainsi, on a les mêmes conditions d'existence que les observateurs à entrées inconnues [DZX94, Hau83], mais les zéros invariants du triplet (A, G, C) sont des pôles fixes de la matrice d'état décrivant la dynamique de l'erreur d'estimation dans le cas des observateurs à entrées inconnues.

Puisque $s^2 + (K_{11}^x + 4)s + 4K_{11}^x + 3 \neq (s+4)(s+\alpha)$, $\forall K_{11}^x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la seule façon d'avoir un mode $s = -4$ pour la matrice $A - K^xC$ est de poser $K_{22}^x = 2$. Ainsi, tous les placements de pôles ne sont pas autorisés avec les gains K^x donné par (1.26), par exemple, on ne peut pas avoir un pôle multiple en $s = -4$.

D'autre part, avec $K_{22}^x > -2$, une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A - K^xC$ soit stable est $K_{11}^x > -0.75$ lorsque le gain K^x est choisi par (1.26). Or, pour qu'il y ait une matrice $P = P^T > 0$ donnée par (1.25) et vérifiant l'inégalité (1.15), il faut que $K_{11}^x > 0$. Ainsi, tous les placements de pôles ne sont pas autorisés avec le choix de P et K^x fait dans (1.25) et (1.26).

Dans [CT98], il est montré que la condition (1.16) sur la solution P de l'équation de Lyapunov (1.15) (voir les conditions (1) et (4) du théorème II.1 dans [CR97]) est équivalente aux conditions d'existence d'un UIO pour un système linéaire donné (voir [KVR80, HM92, DZX94]). Cette contrainte sur la matrice de Lyapunov P est conservative puisque le vecteur des paramètres inconnus est supposé constant (voir équation (3b)) et ne représente pas un signal arbitraire variant dans le temps comme dans le cas des entrées inconnues dans [KVR80, HM92, DZX94].

C'est pourquoi les observateurs adaptatifs synthétisés dans la suite de ce mémoire n'utiliseront pas la condition (1.16).

1.7.2.3 Convergence du vecteur des paramètres inconnus et la contrainte d'excitation persistante

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov donnée par (1.15) avec la condition (1.16) permet de garantir la convergence du vecteur d'état $x(t)$ vers son estimée puisque les termes dépendant de l'erreur d'estimation du vecteur des paramètres inconnus ont été éliminés dans la majoration de cette dérivée avec la condition (1.16) (voir la démonstration dans [CR97]). Cette majoration ne dépend plus que de l'erreur d'estimation d'état $e_x(t)$ et donne l'inégalité (1.15). Ainsi, il est nécessaire de garantir la convergence du vecteur des paramètres inconnus θ vers son estimée.

Si on considère la présence des signaux $g(x, u)$ dans le système (1.12), l'expression de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est comme suit

$$\dot{e}_x(t) = (A - K^xC)e_x(t) + G(g(x, u)\theta - g(\hat{x}, u)\hat{\theta}) \tag{1.37}$$

Comme la convergence de la partie linéaire a été vérifiée dans la section précédente, il reste à montrer la convergence du terme $g(x, u)\theta - g(\hat{x}, u)\hat{\theta}$ vers 0, ce qui est fait en supposant que les signaux modélisés par la fonction $g(x, u)$ vérifient une condition d'excitation persistante dans [CR97].

1.7.3 Motivation de la démarche utilisée

En s'appuyant sur la discussion précédente, nous proposons, à travers ce mémoire, d'étudier la convergence du vecteur d'état simultanément avec le vecteur des paramètres inconnus, i.e. la

convergence des vecteurs d'état et des paramètres inconnus $\hat{x}$ et $\hat{\theta}$, respectivement, vers leurs vraies valeurs.

Afin d'éviter d'utiliser la condition (1.16), avec la contrainte d'excitation persistante, nous allons procéder comme suit : nous résolverons le problème d'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus de manière simultanée sans avoir recours à l'étude de la convergence des paramètres inconnus une fois que la convergence de l'état est garantie, comme c'est le cas avec un choix d'une matrice de Lyapunov bloc-diagonale comme dans [CR97] et de nombreux travaux dans la littérature. Les matrices de Lyapunov utilisées dans ce manuscrit ne seront pas bloc-diagonales. Cette approche globale nous permettra d'éviter la contrainte (1.16) et la contrainte d'excitation persistante. En revanche, une condition de bornitude est posée sur la fonction non linéaire multipliant le vecteur des paramètres inconnus.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons présenté les outils qui nous seront nécessaires pour traiter les problémes abordés dans ce mémoire. Tout d'abord, nous avons défini la notion de systèmes à retards et énoncé quelques applications issues de la littérature. En effet, l'apparition fréquente du phénomène du retard dans la modélisation des processus physiques a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Aussi, nous avons passé en revue quelques concepts relatifs à la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires et notamment les systèmes non linéaires à retards. Les méthodes d'analyse de stabilité des systèmes à retards seront exploitées dans ce mémoire dans le but de garantir la stabilité de l'erreur entre l'état d'un système considéré et l'estimation de cet état via un observateur.

En tenant compte du rôle primordial des observateurs dans nos travaux de recherche, nous avons présenté un type d'observateur, ne fournissant pas une estimation de l'état interne du système, mais d'une fonctionnelle d'état, nommé observateur fonctionnel. Celui-ci fera l'objet d'une grande partie de ce mémoire.

Nos travaux ne se sont pas penchés uniquement sur l'estimation de l'état d'un système ou d'une fonctionnelle d'état, mais ils ont notamment porté sur l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus qui affectent la dynamique du système. Ainsi, un tour de littérature sur les observateurs adaptatifs, suivi d'une discussion mettant l'accent sur la motivation de nos travaux, ont été abordés dans ce chapitre. Bien entendu, cet état de l'art n'est pas complet. Certaines notions seront développées au fur et à mesure. Nous avons favorisé une discussion sur la synthèse d'observateurs adaptatifs pour se positionner par rapport à certains résultats de base dans la littérature.

Dans le chapitre suivant, des observateurs fonctionnels d'ordre réduit seront étudiés pour une classe de système à retards. Le problème de la convergence des observateurs, qui est un problème d'analyse de la stabilité de l'erreur d'estimation, a fait appel à la théorie de la stabilité de Lyapunov-Krasovskii. Des conditions suffisantes seront énoncées en terme de LMI.

Chapitre 2

Synthèse d'observateurs robustes pour une classe de systèmes bilinéaires à retards

Sommaire

2.1 Introduction 28
2.2 Systèmes bilinéaires et observateurs 29
2.2.1 Définitions 29
2.2.2 Observateurs pour les systèmes bilinéaires 32
2.2.3 Observateurs robustes pour les systèmes bilinéaires 33
2.3 Observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel d'ordre réduit pour des systèmes bilinéaires à retards 34
2.3.1 Formulation du problème 34
2.3.2 Conditions d'existence de l'observateur 37
2.3.3 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation 38
2.3.4 Résultats de simulation 43
2.4 Observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel robuste d'ordre réduit pour les systèmes bilinéaires à retards 45
2.4.1 Modèle et hypothèses 45
2.4.2 Synthèse de l'observateur fonctionnel robuste 46
2.4.3 Exemple numérique 57
2.5 Conclusion 59

2.1 Introduction

Dans la mise en œuvre de la commande, de la supervision ou de la détection et l'isolation des défauts, il est nécessaire d'avoir un accès aux variables d'états du système. En revanche, celles-ci ne sont pas toujours disponibles dans leur totalité pour des raisons physiques ou financières. Pour ce faire, la reconstruction de l'état d'un système tient une place primordiale en automatique. La reconstruction de l'état se fait à partir des entrées de commande et des sorties du système.

Ce chapitre est consacré à la synthèse d'observateurs pour les systèmes bilinéaires à états retardés. Dans la pratique, beaucoup de systèmes physiques, chimiques biologiques, électriques, etc, sont modélisés par des systèmes bilinéaires [Moh73, Rug81, Moh91]. Cette classe particulière de systèmes est caractérisée par un terme non linéaire, qui est un produit de l'état et de l'entrée de commande. Ils peuvent aussi être décrits comme des systèmes affines en l'état. La section 2.2 est dédiée à des définitions liées aux systèmes bilinéaires. Des exemples issus de la littérature sont développés pour des systèmes modélisés par des modèles bilinéaires. Pour clore cette section, une brève revue bibliographique sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes bilinéaires est donnée.

Cependant, des retards apparaissent dans la plupart des processus physiques dus aux phénomènes de transport d'énergie, de matière ou d'information, aux temps de calcul, à la dynamique des actionneurs et des capteurs, etc. L'apparition de retards dans un système dynamique augmente la complexité de son analyse. Ceci est justifié par le fait que le retard introduit un décalage supplémentaire dans la phase du système, ce qui détériore ses marges de phase et de gain. Sur le plan industriel, ce phénomène n'est pas suffisamment pris en compte, faute d'outils de synthèse adéquats. Par ailleurs, il est important, voire impératif, de mettre en évidence la présence des retards dans le modèle d'un système dynamique afin de modéliser plus fidèlement son comportement. Dans ce contexte, nous considérons, dans les sections 2.3 et 2.4, la présence de retards dans les systèmes bilinéaires. La synthèse d'observateurs pour cette classe de systèmes est quasiment inexistante dans la littérature à notre connaissance. Dans [IHB14], un système bilinéaire avec des retards connus au niveau des mesures disponibles a été considéré pour lequel une synthèse d'observateur a été faite. Dans nos travaux, nous considérons que les retards qui affectent le système sont connus et agissent sur le vecteur d'état. De plus, la présence de perturbations est prise en compte dans la dynamique du système. Afin d'atténuer l'effet des perturbations sur le système, la technique $\mathcal{H}_\infty$ est utilisée. En effet, le problème $\mathcal{H}_\infty$ standard est fondamentalement un problème de rejet de perturbations. La norme $\mathcal{H}_\infty$ est très utilisée pour étudier les problèmes de robustesse. La théorie des problèmes $\mathcal{H}_\infty$ standard a été unifiée dans [FD87, Fra87]. Par la suite, des solutions à ce problème ont été proposées et successivement améliorées dans [GD88, DGKF89, BEFB94, ZDG96, EOA97, ZSD06, AN17].

Dans la section 2.3, nous proposons de synthétiser un observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel d'ordre réduit. En supposant que l'entrée de commande et sa dérivée sont bornées, nous montrons qu'avec une approche de Lyapunov pour les systèmes descripteurs, l'observateur a une erreur d'estimation quadratiquement stable pour des valeurs connues des retards. Les résultats sont obtenus à travers la résolution de LMIs sur les sommets d'un polytope convexe. Ensuite, des incertitudes paramétriques sont ajoutées au système bilinéaire retardé dans la section 2.4. Dans cette section, l'hypothèse sur la dérivée de l'entrée est supprimée et les entrées de commande du système bilinéaire sont considérées comme des incertitudes structurées. Ainsi, l'hypothèse considérée dans cette section ne concerne que la bornitude des entrées.

La synthèse d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel d'ordre réduit pour une classe de systèmes bilinéaires à retards dans la section 2.3 a fait l'objet de la contribution [SSZA18d]. Une extension de la synthèse d'observateurs robustes dans la section 2.4 a été développée dans [SZSA17b].

2.2 Systèmes bilinéaires et observateurs

2.2.1 Définitions

De nombreux processus physiques sont modélisés de façon appropriée par des systèmes bilinéaires (BLS) plutôt que linéaires ou non linéaires. Cette classe particulière de systèmes a attiré l'attention de nombreux chercheurs depuis de nombreuses années : voir [Moh73, Wil77, EL77, Lon80, Rug81, Moh91, Kin99, SSSA99, SZRD06, VKZ07, GSZD10, ZBDS10].

D'une manière générale, un BLS est représenté par l'EDO suivante

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i(t) x(t) + B u(t) \tag{2.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur des entrées de commande. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour $i = 0, \ldots, m$, et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sont à valeurs connues.

Une motivation importante pour étudier les BLS est que certaines applications dans l'industrie sont bien modélisées avec un modèle bilinéaire. En effet, les BLS apparaissent comme des modèles naturels pour de nombreux processus dynamiques. Quelques exemples de processus dynamiques qui peuvent être décrits par des modèles bilinéaires sont la conduction thermique, le système immunitaire, les processus biomédicaux, biologiques, humoraux et compartimentaux. Une application magnétique réalisée à travers une plate-forme expérimentale de laboratoire constituée d'un réseau de bobines a été développée dans [ZvH17] avec une modélisation par un BLS. Les BLS sont aussi utilisés pour modéliser des quadrotors pour la conception des véhicules aériens sans pilote [SIW17]. Un autre exemple est le processus de la fission nucléaire [PRGF14]. Un aperçu des processus dynamiques qui peuvent être décrits par des modèles bilinéaires, et des applications typiques des BLS, peut être trouvé dans [Moh91]. Des aperçus sur la théorie et les applications des BLS sont également donnés dans [BdK71] et [MK80]. On trouve aussi une application des BLS à la chimiothérapie dans [LS02, LS03, ŚLS03] et à la biochimie dans [Wil77, EL77].

A cause du terme bilinéaire qui est le produit du vecteur des entrées de commande et du vecteur d'état, plusieurs approches ont été développées dans le problème d'observation des BLS. L'une des méthodes proposées dans la littérature est de considérer le vecteur des entrées de commande comme étant une incertitude structurée. Cela s'explique par le fait de remplacer les entrées de commande $u_i(t)$ par des variables incertaines $\beta_i(t)$ dont l'intervalle de variation est compris entre $[-1 \quad 1]$. Cette approche transforme le problème de stabilité d'un BLS en un problème de stabilité robuste d'un système incertain dont les incertitudes sont bornées en norme [SZRD06], [HSRZ09]. Ainsi, pour une entrée $u_i(t) \in \mathcal{U}_m$ avec

$$\mathcal{U}_m = \{u : t \to \mathbb{R}^m | \forall t \in \mathbb{R}^+, u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}\} \tag{2.2}$$

on définit la variable $\beta_i(t)$ comme suit

$$u_i(t) = a_i + b_i \beta_i(t) \tag{2.3}$$

où $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes définies par

$$a_i = \frac{u_{i,\min} + u_{i,\max}}{2} \quad \text{et} \quad b_i = \frac{u_{i,\max} - u_{i,\min}}{2}$$

avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Les variables $\beta_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, appartiennent au polytope convexe $\mathfrak{B}$ défini par

$$\mathfrak{B} = \{\beta(t) \in \mathbb{R}^{m+1} | -1 \leq \beta_i(t) \leq 1 \text{ for } i = 0, \ldots, m\} \tag{2.4}$$

La réécriture des entrées $u_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, sous la forme (2.3) entraîne la forme suivante

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_m(t) \end{bmatrix}}_{\Delta^\beta} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

où la matrice Δ^β vérifie la propriété $\Delta^\beta \Delta^{\beta T} \leq I_m$.

Les BLS peuvent également être analysés en utilisant de nombreux outils associés aux systèmes linéaires, ce qui motive notamment une introduction aux systèmes LPV, puisque les BLS peuvent être assimilés à des systèmes LPV où le vecteur d'ordonnancement correspond au vecteur des entrées de commande. Pour ce faire, définissons le système LPV suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + B(\rho)w(t) \\ y(t) &= C(\rho)x(t) + D(\rho)w(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

où ρ est le vecteur d'ordonnancement, x est le vecteur d'états, y est le vecteur des sorties et w est le vecteur des perturbations. Dans [CM04], une approche d'analyse de stabilité basée sur l'approche de Lyapunov a été proposée pour ces systèmes. En effet, pour une fonction de Lyapunov choisie comme suit [CM04]

$$V(x) = x^T P(\rho) x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(\rho) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

où $P(\rho) = P^T(\rho) > 0$ et M est une matrice donnée, l'étude de stabilité aboutit au théorème suivant.

Théorème 2.2.1. *[CM04] Le système (2.6) est asymptotiquement stable et l'inégalité $||H_{yw}||_\infty < \gamma$, où H_{yw} est la fonction de transfert de l'entrée w à la sortie y, et $\gamma > 0$, est satisfaite si et seulement s'il existe une matrice M et une matrice symétrique $P(\rho) > 0$ telles que l'inégalité suivante*

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(\rho) + A(\rho)M + M^T A^T(\rho) & P(\rho) - M + M^T A^T(\rho) & B(\rho) & M^T C^T(\rho) \\ * & -M - M^T & B(\rho) & 0 \\ * & * & -\gamma I & D^T(\rho) \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

soit vérifiée.

Les deux approches présentées succinctement dans cette section pour traiter la commande $u(t)$ seront utilisées dans la suite du manuscrit.

Exemple 1 : Convertisseur DC/DC [JDB+14] Un exemple qui peut être modélisé par un BLS est celui du modèle moyen d'convertisseur DC/DC bidirectionnel adapté aux applications à tension et puissance moyennes [JDB+14] et utilisé dans un réseau DC multi-terminal afin d'intégrer l'énergie renouvelable. Le modèle moyen d'un convertisseur est schématisé par la figure suivante.

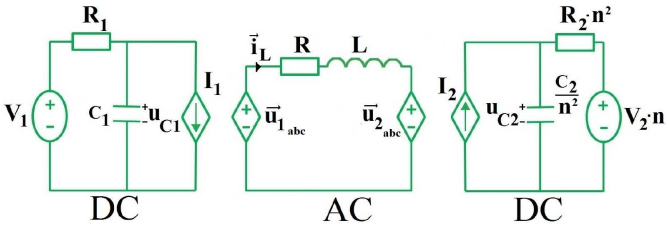


FIGURE 2.1 – Modèle moyen d'un pont actif double (DAB : Dual Actif Bridge).

Le système, décrit dans la figure ci-dessus, est régi par les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}i_{Ld} &= \frac{1}{L}\left(-Ri_{Ld} + \omega L i_{Lq} + \sqrt{\frac{3}{2}}\left(m_{1d}u_{C1} - m_{2d}u_{C2}\right)\right)\\
\frac{d}{dt}i_{Lq} &= \frac{1}{L}\left(-Ri_{Lq} - \omega L i_{Lq} + \sqrt{\frac{3}{2}}m_{1q}u_{C1}\right)\\
\frac{d}{dt}u_{C1} &= \frac{-1}{C_1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\left(m_{1d}i_{Ld} - m_{1q}i_{Lq}\right) - \frac{V_1 - u_{C_1}}{R_1}\right)\\
\frac{d}{dt}u_{C2} &= \frac{n^2}{C_2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}m_{2d}i_{Ld} - \frac{-u_{C_2} - V_2 n}{R_2 n^2}\right)
\end{aligned}$$

où n est le rapport du transformateur, ω est la pulsation, $m_{1d} = m_1\cos(\delta)$, $m_{1q} = m_1\sin(\delta)$, $m_{2d} = m_2$, avec $0 < m_1 < 1$, $0 < m_2 < 1$ et δ est la phase de la partie gauche du circuit AC. Selon ces équations, une modélisation sous la forme d'un BLS a été déduite comme suit

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{5} A_i u_i(t) x(t) + Bu(t) \tag{2.7}$$

où $x^T(t) = \begin{bmatrix} i_{Ld} & i_{Lq} & u_{C1} & u_{C2}\end{bmatrix}$ est le vecteur d'état et $u^T(t) = \begin{bmatrix} m_{1d} & m_{2d} & m_{1q} & V_1 & V_2\end{bmatrix}$ est le vecteur de commande. Les matrices A_i, pour $i = 0, \ldots, 5$, et B sont données par

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \omega & 0 & 0\\ -\omega & \frac{-R}{L} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{R_1C_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_2C_2}\end{bmatrix} \quad A_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{-1}{C_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad A_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{L}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{n^2}{C_2} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1C_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{R_2C_2}\end{bmatrix} \quad A_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0\\ 0 & \frac{-1}{C_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad A_4 = A_5 = 0$$

Exemple 2 : Fission nucléaire [Moh91] L'exemple considéré décrit la cinétique des neutrons dans la fissuration nucléaire (voir figure 2.2). La variation nette de la population de neutrons sur une génération est

$$\frac{dn}{dt} = (k-1)\frac{n}{l} \tag{2.8}$$

où n est la population de neutrons, k est la constante de multiplication et l est le temps moyen de génération des neutrons. l est généralement exprimé en millisecondes ou en microsecondes.

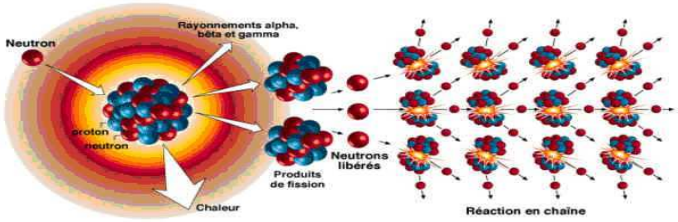


FIGURE 2.2 – La réaction de fission nucléaire.

Le modèle (2.8) peut être modifié afin de tenir compte des neutrons retardés émis par des produits de fission instables, dits précurseurs, comme suit

$$\frac{dn}{dt} = ((k-1) - \beta)\frac{n}{l} + \gamma c \tag{2.9}$$

$$\frac{dc}{dt} = \beta\frac{n}{l} - \gamma c \tag{2.10}$$

où c est un précurseur moyen des populations de neutrons, β est la partie des neutrons générés à partir du précurseur et γ est le taux de décroissance moyen des précurseurs. En supposant que k peut être manipulé, la variable de commande est choisie telle que $u = (k-1)$. Ainsi le système (2.9) peut être écrit sous le modèle d'état suivant,

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t) u(t) \tag{2.11}$$

où $x^T(t) = \begin{bmatrix} n & c \end{bmatrix}$ est le vecteur d'état et les matrices A_0 et A_1 sont données par

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{l} & \gamma \\ \frac{\beta}{l} & -\gamma \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Observateurs pour les systèmes bilinéaires

Comme cela est souligné précédemment, les BLS représentent une classe particulière de systèmes non linéaires qui permettent de modéliser de façon appropriée de nombreux processus. C'est pourquoi, beaucoup de travaux ont été accordés à l'estimation de l'état de cette classe de systèmes. Cependant, l'influence des entrées de commande est cruciale et rend le problème d'observation plus complexe. Le problème de la synthèse d'observateurs pour les BLS est un domaine de recherche actif et de nombreuses méthodes ont été développées.

L'un des premiers résultats sur les observateurs des BLS a été obtenu dans [Wil77] pour une classe de BLS uniformément observables. Des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'observateurs pour les BLS avec une erreur d'estimation linéaire ont été données dans [DN81, GI81, ZRMD98].

Certains observateurs de la littérature, peuvent avoir une erreur d'estimation linéaire [HF76] et [Sai93]. En pratique, la dynamique du système est dans la plupart du temps affectée par des perturbations non mesurables qui peuvent être modélisées comme des entrées inconnues. Dans [Hać92], Hać a proposé un observateur pour les BLS dont l'erreur d'estimation est découplée des entrées inconnues. Plus tard, il a été montré dans [ZRMD98] que sous une transformation appropriée, la conception des observateurs proposés dans [HF76], [Hać92] et [Sai93] est équivalente

à un observateur à entrées inconnues pour un système linéaire spécifique, ce qui peut conduire à des conditions d'existence restrictives. Dans [YSR91], les auteurs ont considéré l'estimation simultanée de l'état et des perturbations pour les BLS, où une connaissance de la dynamique des perturbations est nécessaire. La conception des observateurs à entrées inconnues susmentionnés nécessite de fortes contraintes structurelles et/ou la résolution d'un ensemble d'équations de Lyapunov.

Dans [GHO92], les auteurs ont proposé d'utiliser la forme canonique d'un BLS observable pour concevoir un observateur à grand gain. La technique utilisée dans [Sou02, SZRD06] pour la synthèse d'observateurs pour les BLS considère l'entrée de commande comme étant une incertitude paramétrique (voir la section 2.2.1). La technique a été utilisée aussi dans [ZBDS10] pour une classe de système bilinéaire singulier (SBLS) et dans [BZSM16] pour une classe de BLS stochastiques. Les travaux de B. Gérard pour la conception d'observateurs pour les BLS dans [Gér08, GSZD07, GSZD10], sont basés notamment sur l'approche LPV décrite dans la section 2.2.1. Un observateur PI (Proportionnel-Integral) a été proposé dans [SC12] pour une classe de BLS où le terme bilinéaire de l'erreur d'estimation a été majoré pour assurer la convergence de l'observateur. Cet observateur n'a montré des résultats efficaces que pour des systèmes affectés par des perturbations constantes.

On peut souligner également qu'il existe plusieurs techniques dans la littérature pour l'analyse de la convergence de l'erreur d'estimation des observateurs pour les BLS afin de surmonter la présence des entrées de commande dans la dynamique de l'erreur d'estimation. Ce sujet a toujours été un domaine actif de recherche [BCC88, AK13, HSR+06, DI16, IHB14, SCB14, Dem17], etc.

2.2.3 Observateurs robustes pour les systèmes bilinéaires

Dans la pratique, un modèle d'un système dynamique ne peut pas être parfait et les paramètres ne peuvent pas être tous mesurés avec précision. Du fait de la présence des incertitudes paramétriques, la synthèse d'observateurs robustes devient nécessaire. Un observateur est dit robuste lorsque les paramètres estimés du système par l'observateur convergent vers leurs vraies valeurs malgré la présence d'incertitudes qui affectent le système. Très peu de travaux dans la littérature traitent la classe des systèmes bilinéaires incertains.

Dans [SZRD06], la synthèse d'un filtre $\mathcal{H}_\infty$ robuste d'ordre réduit a été développée. Cette approche repose sur le fait de considérer la commande $u(t)$ comme étant une incertitude structurée (voir section 2.2.1). Dans cette contribution, les auteurs ont considéré le système bilinéaire incertain suivant

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + \sum_{i=1}^{m}(A_i + \Delta A_i(t))u_i(t)x(t) + (B + \Delta B(t))w(t) \tag{2.12a}$$

$$y(t) = (C + \Delta C(t))x(t) + (D + \Delta D(t))w(t) \tag{2.12b}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{2.12c}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées de commande, $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des mesures, $w \in \mathbb{R}^\varpi$ représente le vecteur des perturbations et $z \in \mathbb{R}^r$ est la fonctionnelle à estimer avec $r \leqslant n$. Les matrices A_i, pour $i = 0, \ldots, m$, C, D et L sont des matrices à valeurs connues et constantes et de dimensions appropriées, avec $\text{rang}(L) = r \leq n$. Les matrices $\Delta A_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, $\Delta C(t)$ et $\Delta D(t)$ sont des incertitudes paramétriques qui affectent le système (2.12) et sont exprimées comme suit

$$\begin{bmatrix} \Delta A_0(t) & \Delta D(t) \\ \Delta C(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_C \end{bmatrix} \Delta_0(t) \begin{bmatrix} J_0 & J_D \end{bmatrix} \tag{2.13a}$$

$$\Delta A_i(t) = H_i \Delta_i(t) J_i \tag{2.13b}$$

pour $i = 1, \ldots, m$, où les matrices $\Delta_i(t)$ sont des matrices inconnues, variantes dans le temps et mesurables au sens de Lebesgue, satisfaisant l'inégalité suivante

$$\Delta_i(t)\Delta_i^T(t) \leqslant I, \quad \text{pour } i = 0, \ldots, m$$

Le filtre fonctionnel d'ordre réduit proposé est sous la forme

$$\dot{\eta}(t) = N_0\eta(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t)\eta(t) + M_0 y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i u_i(t) y(t) \tag{2.14a}$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Jy(t) \tag{2.14b}$$

avec $\hat{z} \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de z et $\eta \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur d'état de l'observateur. Les matrices N_i, M_i, pour $i = 0, \ldots, m$, et J sont à déterminer dans le but d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation [SZRD06]. Ces conditions de stabilité sont obtenues sur la base de l'approche de Lyapunov, ce qui a conduit à des LMIs, tout en assurant que l'erreur d'estimation soit non biaisée via la résolution des équations de Sylvester.

A l'instar de cette contribution, un observateur robuste d'ordre réduit a été établi pour une classe de système bilinéaire stochastique incertain dans [BZSM16]. Dans [WQ02], un filtre de Kalman robuste a été synthétisé pour un système bilinéaire incertain stochastique à temps discret.

D'autres contributions ont été développées sur la synthèse d'observateurs robustes pour la classe de systèmes bilinéaires, la robustesse étant traitée comme un rejet de perturbations. Dans [KKKW15], un système bilinéaire avec des entrées bornées et des perturbations a été considéré. Etant motivé par les techniques LPV dans l'approche $\mathcal{H}_\infty$, un filtre $\mathcal{H}_2$ a été synthétisé en utilisant une approche floue Takagi-Sugeno (T-S) en considérant l'entrée de commande comme une variable de décision (variable de prémisse) afin de ramener le système bilinéaire considéré à un système dynamique flou T-S.

2.3 Observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel d'ordre réduit pour des systèmes bilinéaires à retards

En raison de phénomènes de transport (d'énergie, d'informations,...) et du calcul de la loi de commande, de nombreux systèmes réels rencontrés en mécanique, aéronautique, économie, physique, chimie, biologie, etc, présentent des retards dans leur dynamique. Le fait de négliger ou d'ignorer la présence de retards dans la modélisation des systèmes affecte les performances des observateurs [Ric03a] et introduit souvent des erreurs dans leur synthèse. Les retards représentent un facteur important qui doit être pris en compte. En effet, il a été montré qu'un retard relativement faible peut entraîner l'instabilité du système ou mener à des performances significativement dégradées [NG04]. De ce fait, dans cette section, la présence d'états retardés dans la dynamique du système bilinéaire est prise en compte.

2.3.1 Formulation du problème

Dans cette section, un modèle bilinéaire à états retardés considéré est décrit par la représentation d'état suivante

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i(t) x(t) + A_{d_0} x(t - \tau_0) + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i} u_i(t) x(t - \tau_i)$$

$$+ Bu(t) + Dw(t) \tag{2.15a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.15b}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{2.15c}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées de commande, $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des mesures, $w \in \mathbb{R}^\varpi$ représente le vecteur des perturbations et $z \in \mathbb{R}^r$ est la fonctionnelle à estimer avec $r \leqslant n$. τ_i pour $i = 0, \ldots, m$, sont des retards connus et à valeurs constantes. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{d_i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour $i = 0, \ldots, m$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times\varpi}$ et $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$ sont des matrices à valeurs connues et constantes, avec $\text{rang}(L) = r \leq n$.

Hypothèse 2.3.1. *L'entrée de commande $u(t)$ est supposée continue et bornée, telle que $u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, où*

$$\mathcal{U} = \{u : t \to \mathbb{R}^m | \forall t \in \mathbb{R}^+, u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, \mu_{i,\min} \leq \dot{u}_i(t) \leq \mu_{i,\max}\} \tag{2.16}$$

Dès lors l'hypothèse 2.3.1 est satisfaite, les entrées $u_i(t)$, pour $i = 1, \ldots, m$, et leurs dérivées sont regroupées dans un même vecteur, noté $\delta(t)$, donné par

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \\ \delta_{m+1} \\ \vdots \\ \delta_{2m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_m \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

et appartiennent à un polytope convexe $\mathcal{P}$ défini par

$$\mathcal{P} = [u_{1,\min}, u_{1,\max}] \times \ldots \times [u_{m,\min}, u_{m,\max}] \times [\mu_{1,\min}, \mu_{1,\max}] \times \ldots \times [\mu_{m,\min}, \mu_{m,\max}] \tag{2.18}$$

Notons Φ l'ensemble des sommets du polytope convexe $\mathcal{P}$, de cardinal égal à 2^{2m}, avec

$$\begin{aligned} \Phi = \{\sigma = [\phi_1, \ldots, \phi_{2m}]^T \in \mathbb{R}^{2m} / \forall i \in [0, m], \phi_i \in \{u_{i,\min}, u_{i,\max}\} \\ et \ \ \forall i \in [m+1, 2m], \phi_i \in \{\mu_{i,\min}, \mu_{i,\max}\}\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Pour le modèle (2.15) considéré, nous proposons de synthétiser un observateur fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit, décrit comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) = N_0\eta(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i \eta(t) + N_{d_0}\eta(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i} u_i \eta(t-\tau_i) + Fu(t) \\ + M_0 y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i u_i y(t) + M_{d_0} y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i} u_i y(t-\tau_i) \end{aligned} \tag{2.20a}$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Jy(t) \tag{2.20b}$$

où $\eta \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur d'état de l'observateur et $\hat{z} \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de z. Les matrices N_i, M_i, N_{d_i}, M_{d_i}, pour $i = 0, \ldots, m$, et J sont à déterminer afin d'obtenir une estimation appropriée du vecteur $z(t)$ et d'avoir une erreur d'estimation stable qui converge vers zéro. Pour ce faire, notons $e_z(t)$ l'erreur d'estimation décrite par

$$e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t) = \Psi_L x(t) - \eta(t) \tag{2.21}$$

avec

$$\Psi_L = L - JC \tag{2.22}$$

Le calcul explicite de la dynamique de l'erreur d'estimation donne

$$\begin{aligned}\dot{e}_z(t) = &\left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t)\right) e_z(t) + N_{d_0} e_z(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i} u_i(t) e_z(t-\tau_i) + (F - \Psi_L B)u(t) \\ &+ \Psi_L D w(t) + (\Psi_L A_0 - N_0\Psi_L - M_0 C)x(t) + \sum_{i=1}^{m}(\Psi_L A_i - N_i\Psi_L - M_i C)u_i(t)x(t) \\ &+ (\Psi_L A_{d_0} - N_{d_0}\Psi_L - M_{d_0} C)x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m}(\Psi_L A_{d_i} - N_{d_i}\Psi_L - M_{d_i} C)u_i(t)x(t-\tau_i)\end{aligned}$$

Afin d'éviter des biais dans l'erreur d'estimation dus aux termes qui dépendent de l'état $x(t)$, de l'état retardé $x(t-\tau_i)$ et de l'entrée de commande $u(t)$, ces termes sont annulés en posant les contraintes suivantes, pour $i = 0, \ldots, m$,

$$\Psi_L B = F \tag{2.23a}$$

$$\Psi_L A_i - N_i\Psi_L - M_i C = 0 \tag{2.23b}$$

$$\Psi_L A_{d_i} - N_{d_i}\Psi_L - M_{d_i} C = 0 \tag{2.23c}$$

et l'erreur d'estimation $e_z(t)$ devient

$$\dot{e}_z(t) = \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t)\right) e_z(t) + N_{d_0} e_z(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i} u_i(t) e_z(t-\tau_i) + \Psi_L D w(t) \tag{2.24}$$

Ainsi, le système (2.20) est un observateur fonctionnel pour le système (2.15), si la dynamique de l'erreur d'estimation $e_z(t)$, décrite par (2.24), est stable.

Afin de caractériser l'atténuation des perturbations entre le vecteur de l'erreur d'estimation $e_z(t)$ et le vecteur des perturbations $w(t)$, il faut que le critère $J_{e_z w}$ vérifie l'inégalité suivante lorsque les conditions initiales sont nulles [GSZD10]

$$J_{e_z w} = \int_0^\infty (e_z^T e_z - \gamma^2 w^T w)dt < 0 \qquad \text{avec} \quad \gamma > 0. \tag{2.25}$$

Problème 2.3.1. *Le problème de synthèse d'un observateur fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit dans cette section se formule comme celui de la résolution des contraintes (2.23), de l'analyse de stabilité quadratique du point d'équilibre du système d'erreur d'estimation $e_z(t)$ décrit par (2.24) et de l'atténuation des perturbations $w(t)$ formulée par (2.25).*

Pour la résolution de ce problème, une approche LPV est utilisée. Le problème est traité en deux sous-problèmes. Le premier consiste à résoudre des équations (2.23). Cette résolution permet le paramétrage des gains de l'observateur et conduit à une condition nécessaire à l'existence de l'observateur. Une fois cette condition vérifiée, l'étude de la convergence de l'observateur est faite en assurant la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation (2.24). Celle-ci est établie en trois étapes. En premier lieu, l'approche de Lyapunov pour les systèmes LPV à retards est utilisée sur une transformation du système en un système descripteur équivalent. Ensuite, le problème $\mathcal{H}_\infty$ standard qui est fondamentalement un problème de rejet de perturbations, est introduit afin d'atténuer l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation (voir (2.25)). Finalement, un appel à l'approche polytopique permet d'étudier la stabilité de l'erreur d'estimation dans le polytope convexe $\mathcal{P}$. Les différentes étapes mentionnées sont détaillées au fur et à mesure dans la suite de cette section.

2.3.2 Conditions d'existence de l'observateur

Nous commençons dans cette partie par la résolution des équations (2.23). Uniquement les équations (2.23b) et (2.23c) sont résolues car l'équation (2.23a) est déduite à partir de cette résolution. Pour ce faire, réécrivons les équations (2.23b) et (2.23c) sous la forme d'une équation linéaire donnée ci-après

$$\mathbb{W} = \mathbb{X}\mathbb{V} \tag{2.26}$$

où $\mathbb{X}$ est une matrice inconnue regroupant les gains de l'observateur à déterminer et donnée par

$$\mathbb{X} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:c} N_0 & \dots & N_m & N_{d_0} & \dots & N_{d_m} & K_0 & \dots & K_m & K_{d_0} & \dots & K_{d_m} & J \end{array}\right] \tag{2.27}$$

avec pour $i = 0, \dots, m$

$$K_i = M_i - N_i J \tag{2.28a}$$
$$K_{d_i} = M_{d_i} - N_{d_i} J \tag{2.28b}$$

Les matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{V}$ sont connues et données par

$$\mathbb{W} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} LA_0 & \dots & LA_m & LA_{d_0} & \dots & LA_{d_m} \end{array}\right] \tag{2.29a}$$

$$\mathbb{V} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} L & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & L \\ \hdashline C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & C \\ \hdashline CA_0 & \dots & CA_m & CA_{d_0} & \dots & CA_{d_m} \end{array}\right] \tag{2.29b}$$

En se référant à la résolution des équations linéaires décrites dans la section A.2.2, l'équation (2.26) admet une solution si et seulement si la condition suivante

$$\operatorname{rang}(\mathbb{V}) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{W}^T & \mathbb{V}^T\end{bmatrix}\right) \tag{2.30}$$

est vérifiée et la solution est donnée sous la forme suivante

$$\mathbb{X} = \mathbb{W}\mathbb{V}^\dagger + Z(I_k - \mathbb{V}\mathbb{V}^\dagger) \tag{2.31}$$

où $Z \in \mathbb{R}^{r\times k}$ est une matrice arbitraire, $k = 2(r+p)(m+1)+p$ et $\mathbb{V}^\dagger$ est une pseudo-inverse de $\mathbb{V}$ qui vérifie la relation (A.2.2).

A travers l'expression de $\mathbb{X}$ donnée ci-dessus par (2.31), les gains de l'observateur sont exprimés en fonction du gain Z comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_0 & \dots & N_m & N_{d_0} & \dots & N_{d_m} & K_0 & \dots & K_m & K_{d_0} & \dots & K_{d_m} & J \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}} =$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,1} & \dots & N_{m,1} & N_{d_0,1} & \dots & N_{d_m,1} & K_{0,1} & \dots & K_{m,1} & K_{d_0,1} & \dots & K_{d_m,1} & J_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbb{W}\mathbb{V}^\dagger}$$
$$+ Z \underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,2} & \dots & N_{m,2} & N_{d_0,2} & \dots & N_{d_m,2} & K_{0,2} & \dots & K_{m,2} & K_{d_0,2} & \dots & K_{d_m,2} & J_{12} \end{bmatrix}}_{I_k - \mathbb{V}\mathbb{V}^\dagger} \tag{2.32}$$

Ainsi, si la condition (2.30) est vérifiée, la relation (2.32) permet de réécrire le système (2.24) en fonction de Z comme suit

$$\begin{aligned} \dot{e}_z(t) = &\left((N_{0,1} + ZN_{0,2}) + \sum_{i=1}^{m} (N_{i,1} + ZN_{i,2})\, u_i(t) \right) e_z(t) + (N_{d_0,1} + ZN_{d_0,2})\, e_z(t-\tau_0) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} (N_{d_i,1} + ZN_{d_i,2})\, u_i(t) e_z(t-\tau_i) + (L - (J_{11}C + ZJ_{12}C))\, Dw(t) \end{aligned} \tag{2.33}$$

et le problème 2.3.1 devient celui de la détermination d'un gain Z qui stabilise le système (2.33). Dans la section suivante, ce gain Z est obtenu via la résolution de LMIs.

2.3.3 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation

Après avoir établi la condition d'existence de l'observateur, les conditions de stabilité du système (2.33) sont établies par le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *[SSZA18d] Supposons que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (2.30) sont vérifiées. Le système (2.20) est un observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel pour le système (2.15), et a une erreur d'estimation quadratiquement stable si pour $\sigma^j \in \Phi$, il existe*

— *une matrice symétrique définie positive $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ décrite sous la forme suivante*

$$P(\sigma^j) = P^T(\sigma^j) = P_0 + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_i > 0 \tag{2.34}$$

— *une matrice non singulière $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$,*
— *une matrice $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{r\times k}$,*
— *des scalaires $\ell > 0$ et $\gamma > 0$*

tels que les LMIs suivantes, pour $j = 1, \dots, 2^{2m}$,

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,d_0) & (1,d_1) & \dots & (1,d_m) & (1,3) \\ * & -M - M^T & (1,d_0) & (1,d_1) & \dots & (1,d_m) & (1,3) \\ * & * & -\frac{1}{\ell} I_{r+q} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\ell} I_{r+q} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\ell} I_{r+q} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I_\varpi \end{bmatrix} < 0 \tag{2.35}$$

soient vérifiées où

$$(1,1) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{m+i}^{j} P_i + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{i,1} + \mathbb{Y}N_{i,2}\right) \sigma_i^j + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{i,1} + \mathbb{Y}N_{i,2}\right)^T \sigma_i^j + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right) \sigma_i^j + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right)^T \sigma_i^j + I_r \quad (2.36a)$$

$$(1,2) = P_0 + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_i - M + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{i,1} + \mathbb{Y}N_{i,2}\right)^T \sigma_i^j + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right)^T \sigma_i^j \quad (2.36b)$$

$$(1,d_0) = MN_{d_0,1} + \mathbb{Y}N_{d_0,2} \quad (2.36c)$$

$$(1,d_i) = \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right) \sigma_i^j \qquad \textit{pour } i = 1,\ldots,m \quad (2.36d)$$

$$(1,3) = MLD - MJ_{11}D - \mathbb{Y}J_{12}CD \quad (2.36e)$$

Le gain Z est donné par

$$Z = M^{-1}\mathbb{Y} \quad (2.37)$$

Démonstration. Comme décrit auparavant, l'analyse de stabilité du système de l'erreur d'estimation, dont le résultat est donné dans le théorème ci-dessus, se décompose en trois étapes. Dans un premier temps, la deuxième méthode de Lyapunov est utilisée pour assurer une stabilité dépendante des retards. Celle-ci est basée sur la transformation du système (2.33) en un système descripteur équivalent, avec un choix adéquat d'une fonctionelle de Lyapunov liée aux systèmes singuliers. Ensuite, l'approche $\mathcal{H}_\infty$ est appliquée pour atténuer l'effet des perturbations sur le système de l'erreur d'estimation. Finalement, en utilisant l'hypothèse 2.3.1, l'étude de stabilité sera étudiée sur les sommets du polytope convexe $\mathcal{P}$.

Transformation en système descripteur. Dans l'étude de stabilité de l'erreur d'estimation, nous faisons appel à l'approche descripteur. Cette dernière permet d'éviter les produits de la matrice dynamique du système et la matrice de Lyapunov. De plus, la transformation du système considéré en un système descripteur équivalent donnent des degrés de liberté supplémentaires à la résolution du problème (voir la matrice M dans l'équation (2.39)). Dans ce but, posons $\varepsilon_z(t) = \dot{e}_z(t)$ et réécrivons le système (2.24) sous une forme descripteur comme suit [Fri01, CM04]

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_z(t) \\ \dot{\varepsilon}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ \sum_{i=0}^{m} N_i u_i(t) + \sum_{i=0}^{m} N_{d_i} u_i(t) & -I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} 0 \\ N_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \int_t^{t-\tau_i} \varepsilon_z(s)ds + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_L D \end{bmatrix} w(t) \quad (2.38)$$

avec $u_0(t) = 1$.

Etape 1 : Approche de Lyapunov. Pour les systèmes dynamiques non singuliers à retards, une fonction de Lyapunov-Krasovskii a été introduite dans [Fri01], basée sur un modèle augmenté équivalent, appelé système descripteur. Cette transformation conduit à des conditions moins conservatives pour l'étude de stabilité [CM04, GSZD10]. Dans cette étape, nous développons la deuxième méthode de Lyapunov pour les systèmes descripteurs à retards en définissant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii appropriée qui permettra d'obtenir des conditions de stabilité en termes de LMI. En effet, les fonctions de Lyapunov associées à la forme descripteur en général, outre la matrice de Lyapunov classique (symétrique et définie positive), contiennent

une autre matrice, dite instrumentale. Celle-ci permet d'éviter les produits entre les matrices du système et la matrice de Lyapunov, ce qui est important lorsque cette dernière dépend des entrées de commande. Ainsi, la fonction de Lyapunov qui est choisie a la forme suivante

$$\begin{aligned} V(e_z) &= e_z^T(t)P(u)e_z(t) + \frac{1}{\ell}\sum_{i=0}^{m}\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t}^{t+\beta}\dot{e}_z^T(s)\dot{e}_z(s)dsd\beta \\ &= \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\ell}\sum_{i=0}^{m}\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t}^{t+\beta}\varepsilon_z^T(s)\varepsilon_z(s)dsd\beta \end{aligned} \tag{2.39}$$

où $P(u) = P(u)^T > 0$, $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$ est une matrice instrumentale à déterminer et ℓ est un scalaire défini positif. Notons que le premier terme de la fonction de Lyapunov est la partie quadratique de la fonction de Lyapunov correspondante aux systèmes descripteurs et le second terme correspond à la stabilité dépendante des retards [Fri01]. La dérivée temporelle de la fonctionnelle $V(e_z)$ le long de la trajectoire de la solution du système (2.38) est

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_z) = &\begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_z(t) \\ \dot{\varepsilon}_z(t) \end{bmatrix}} + \underline{\begin{bmatrix} \dot{e}_z(t) \\ \dot{\varepsilon}_z(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} - \frac{1}{\ell}\sum_{i=0}^{m}\int_{t}^{t-\tau_i}\dot{e}_z^T(s)\dot{e}_z(s)ds \end{aligned} \tag{2.40}$$

En remplaçant les termes soulignés par leurs expressions données par (2.38), nous obtenons

$$\dot{V}(e_z) = \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} & M\Psi_L D \\ * & -M - M^T & M\Psi_L D \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{m} S_i(t) - \frac{1}{\ell}\sum_{i=0}^{m}\int_{t}^{t-\tau_i}\varepsilon_z^T(s)\varepsilon_z(s)ds \tag{2.41}$$

avec

$$\begin{aligned} a_{(1,1)} &= \dot{P}(u) + \sum_{i=0}^{m} MN_iu_i(t) + \sum_{i=0}^{m} N_i^TM^Tu_i(t) + \sum_{i=0}^{m} MN_{d_i}u_i(t) + \sum_{i=0}^{m} N_{d_i}^TM^Tu_i(t) \\ a_{(1,2)} &= P(u) - M + \sum_{i=0}^{m} N_i^TM^Tu_i(t) + \sum_{i=0}^{m} N_{d_i}^TM^Tu_i(t) \\ S_i(t) &= \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N_{d_i}u_i(t) \end{bmatrix} \int_{t}^{t-\tau_i}\dot{e}_z(s)ds \\ &\quad + \int_{t}^{t-\tau_i}\dot{e}_z^T(s)ds \begin{bmatrix} 0 \\ N_{d_i}u_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme A.3.1 dans l'annexe A, les termes $S_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, sont majorés comme suit

$$S_i(t) \leq \ell \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N_{d_i}u_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N_{d_i}u_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{\ell}\int_{t}^{t-\tau_i}\varepsilon_z^T(s)\varepsilon_z(s)ds \quad (2.42)$$

En injectant l'inégalité (2.42) obtenue dans l'équation (2.41), on obtient

$$\dot{V}(e_z) \leq \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} & \overline{a}_{(1,2)} & M\Psi_L D \\ * & \overline{a}_{(2,2)} & M\Psi_L D \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

avec

$$\overline{a}_{(1,1)} = \dot{P}(u) + \sum_{i=0}^{m} MN_i u_i(t) + \sum_{i=0}^{m} N_i^T M^T u_i(t) + \sum_{i=0}^{m} MN_{d_i} u_i(t) + \sum_{i=0}^{m} N_{d_i}^T M^T u_i(t) + \ell \sum_{i=0}^{m} MN_{d_i} N_{d_i}^T M^T u_i^2(t)$$

$$\overline{a}_{(1,2)} = P(u) - M + \sum_{i=0}^{m} N_i^T M^T u_i(t) + \sum_{i=0}^{m} N_{d_i}^T M^T u_i(t) + \ell \sum_{i=0}^{m} MN_{d_i} N_{d_i}^T M^T u_i^2(t)$$

$$\overline{a}_{(2,2)} = -M - M^T + \ell \sum_{i=0}^{m} MN_{d_i} N_{d_i}^T M^T u_i^2(t)$$

Etape 2 : Critère $\mathcal{H}_\infty$. Du fait que les conditions initiales sont nulles, $V(e_z(0)) = 0$ et que $V(e_z(\infty)) \geq 0$, nous pouvons majorer le critère $J_{e_z w}$ (2.25) comme suit

$$\begin{aligned} J_{e_z w} &\leq \int_0^\infty (e_z^T e_z - \gamma^2 w^T w)dt + V(e_z(\infty)) - V(e_z(0)) \\ &\leq \int_0^\infty (e_z^T e_z - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(e_z))dt \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité (2.43) et en la remplaçant dans l'inégalité (2.44), nous obtenons l'inégalité suivante

$$J_{e_z w} \leq \int_0^\infty \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} + I_r & \overline{a}_{(1,2)} & M\Psi_L D \\ * & \overline{a}_{(2,2)} & M\Psi_L D \\ * & * & -\gamma^2 I_\varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt < 0 \quad (2.45)$$

ce qui conduit à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} + I_r & \overline{a}_{(1,2)} & M\Psi_L D \\ * & \overline{a}_{(2,2)} & M\Psi_L D \\ * & * & -\gamma^2 I_\varpi \end{bmatrix} < 0 \quad (2.46)$$

Nous constatons bien la présence du terme non linéaire $\ell \sum_{i=0}^{m} MN_{d_i} N_{d_i}^T M^T u_i^2(t)$ dans les blocs $\overline{a}_{(1,1)}$, $\overline{a}_{(1,2)}$ et $\overline{a}_{(2,2)}$ de l'inégalité (2.46). Afin de surmonter ce problème, le lemme de Schur (voir section A.3.2.2 dans l'annexe A) est appliqué sur cette dernière, ce qui conduit à l'inégalité

suivante

$$\begin{bmatrix} a_{(1,1)}+I_r & a_{(1,2)} & MN_{d_0} & MN_{d_1}u_1(t) & \dots & MN_{d_m}u_m(t) & M\Psi_L D \\ * & -M-M^T & MN_{d_0} & MN_{d_1}u_1(t) & \dots & MN_{d_m}u_m(t) & M\Psi_L D \\ * & * & -\frac{1}{\ell}I_r & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\ell}I_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\ell}I_r & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I_\varpi \end{bmatrix} < 0 \tag{2.47}$$

En insérant (2.32) et (2.37) dans l'inégalité (2.47), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,d_0) & (1,d_1) & \dots & (1,d_m) & (1,3) \\ * & -M-M^T & (1,d_0) & (1,d_1) & \dots & (1,d_m) & (1,3) \\ * & * & -\frac{1}{\ell}I_{r+q} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\ell}I_{r+q} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\ell}I_{r+q} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I_\varpi \end{bmatrix} < 0 \tag{2.48}$$

où

$$\begin{aligned}
(1,1) &= \dot{P}(u) + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{i,1} + \mathbb{Y}N_{i,2}\right) u_i + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{i,1} + \mathbb{Y}N_{i,2}\right)^T u_i \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right) u_i + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right)^T u_i + I_r \\
(1,2) &= P_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i P_i - M + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{i,1} + \mathbb{Y}N_{i,2}\right)^T u_i + \sum_{i=0}^{m} \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right)^T u_i \\
(1,d_0) &= MN_{d_0,1} + \mathbb{Y}N_{d_0,2} \\
(1,d_i) &= \left(MN_{d_i,1} + \mathbb{Y}N_{d_i,2}\right) u_i \qquad \text{pour } i = 1,\dots,m \\
(1,3) &= MLD - MJ_{11}D - \mathbb{Y}J_{12}CD
\end{aligned}$$

Etape 3 : Approche polytopique. Cependant, l'inégalité (2.48) dépend du vecteur de commande $u(t)$, ce qui ne permet pas une résolution simple du problème. Or, du fait que les entrées et leurs dérivées sont bornées (hypothèse 2.3.1), elles appartiennent au polytope convexe $\mathcal{P}$ décrit par (2.18), ce qui permet de résoudre le problème sur l'ensemble Φ des sommets du polytope $\mathcal{P}$ donné par (2.19). Ainsi, en utilisant le vecteur $\delta(t)$ décrit par (2.17), les matrices $N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i$, $N_{d_i} u_i$, pour $i = 0,\dots,m$, $P(u)$ et sa dérivée se réécrivent comme suit

$$P(u) \longrightarrow \qquad P(\delta) = P_0 + \sum_{i=1}^{m} \delta_i P_i, \tag{2.49a}$$

$$\dot{P}(u) \longrightarrow \qquad \overline{P}(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \delta_{m+i} P_i \tag{2.49b}$$

$$N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i \longrightarrow \quad N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i \delta_i \tag{2.49c}$$

$$N_{d_i} u_i \longrightarrow \quad N_{d_i} \delta_i \tag{2.49d}$$

Finalement, le développement des blocs de l'inégalité (2.47) sur l'ensemble Φ, décrit par (2.19), conduit aux LMIs (2.35) du théorème 2.3.1, ce qui met fin à la démonstration. •

2.3.4 Résultats de simulation

Afin de montrer la pertinence et la faisabilité de notre approche dans le cas des systèmes bilinéaires à retards et sujet à des perturbations à énergie finie, décrits par (2.15), nous proposons un exemple dont les matrices sont les suivantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{d_0} = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{d_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 1 \\ -1 & 0.1 & -1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notons que $n = 4$, $m = 1$, $p = 2$, $\varpi = 1$ et $r = 2$. Les retards affectant le système sont $\tau_0 = \tau_1 = 0.8$s. Selon l'hypothèse 2.3.1, l'entrée de commande est $-0.2 \leq u(t) = 0.2\sin(0.02t) \leq 0.2$ et sa dérivée est bornée ainsi $|\dot{u}(t)| \leq 0.004$. Après avoir vérifié la condition (2.30) et défini les sommets du polytope convexe $\mathcal{P}$, la résolution des LMIs (2.35) donne les résultats suivants

$$P(\sigma^j) = \begin{bmatrix} 14.993 & 0.34682 \\ 0.34682 & 13.029 \end{bmatrix} + \sigma_1^j \begin{bmatrix} 2.2975 & -4.8025 \\ -4.80252.6881 & \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 4.699 & -1.9599 \\ -0.069731 & 2.0627 \end{bmatrix}$$

$\gamma = 8.3717\ 10^{-5}$ et $\ell = 0.052657$. Le gain Z, déduit via l'équation (2.37), est donné par

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0079986 & -3.2652 & -2.6976\ 10^8 & -3.2652 & -6.5818 & -5.5244 & -156.17 \\ 1.5307 & -3.4228 & -1.501\ 10^9 & -3.4228 & -7.7643 & 11.89 & -252.99 \\ 2.8684\ 10^8 & -0.091651 & 1.0394 & 0.62025 & 2.0787 & -0.65818 & \\ 7.2512\ 10^8 & -0.26911 & 0.72775 & -0.4107 & 1.4555 & -0.77643 & \\ -0.054335 & 0.62025 & 0.62025 & & & & \\ 2.2987 & -0.4107 & -0.4107 & & & & \end{bmatrix}$$

En utilisant le gain Z, les matrices de l'observateur sont déduites de l'équation (2.32) et sont données par

$$N_0 = \begin{bmatrix} -2.705 & -2.7705 \\ -0.29458 & -3.6295 \end{bmatrix} \quad N_1 = \begin{bmatrix} -1 & -0.7705 \\ 2 & -1.6295 \end{bmatrix} \quad N_{d_0} = \begin{bmatrix} -0.0541 & 0.054101 \\ -0.025891 & -1.9741 \end{bmatrix}$$

$$N_{d_1} = \begin{bmatrix} -0.13115 & 1 \\ -0.088837 & -1 \end{bmatrix} \quad M_0 = \begin{bmatrix} 4.8692 & -3.5333 \\ 0.21071 & -1.6866 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1.511 & -2.1435 \\ -1.0306 & 2.3227 \end{bmatrix}$$

$$M_{d_0} = \begin{bmatrix} -0.42574 & -0.35074 \\ 0.26622 & -2.4399 \end{bmatrix} \quad M_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.58254 & 1.3869 \\ 0.83643 & -0.37542 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -0.67215 \\ 0.65225 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -0.541 & 1.3115 \\ -0.25892 & 1.8884 \end{bmatrix}$$

Une fois les gains de l'observateur calculés, ils sont injectés dans l'observateur proposé avec des retards $\tau_0 = \tau_1 = 0.8$s. Les perturbations affectent le système d'origine dans l'intervalle de temps entre 50s et 60s. Les conditions initiales sont $x^T(0) = [1\ 1\ 1\ 1]$ et $\eta^T(0) = [0\ 0]$. La figure 2.3 montre bien la convergence de la fonctionnelle estimée $\hat{z}(t)$ vers sa vraie valeur $z(t)$.

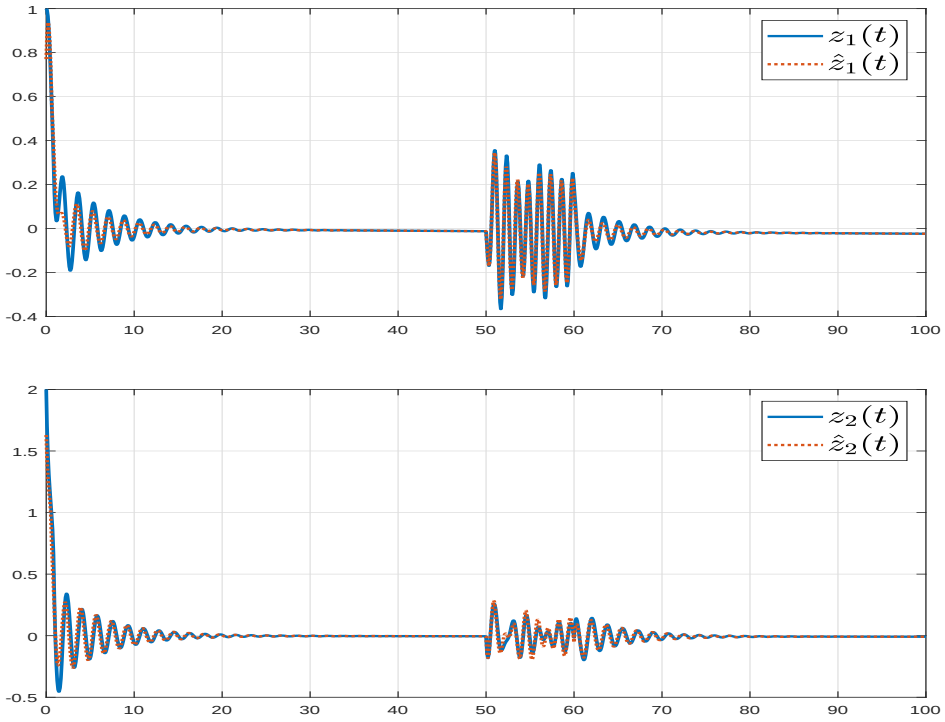


FIGURE 2.3 – Convergence des fonctionnelles estimées $\hat{z}_1$ et $\hat{z}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs z_1 et z_2 (—).

2.4 Observateur $\mathcal{H}_\infty$ fonctionnel robuste d'ordre réduit pour les systèmes bilinéaires à retards

La théorie de synthèse d'observateurs robustes provient de la nécessité de faire face à la présence des incertitudes de modélisation des systèmes dynamiques et de fournir une estimation convenable. Puisqu'aucun modèle mathématique ne peut exactement modéliser un système dynamique, les incertitudes sont généralement présentes et il y a toujours des paramètres incertains ou/et une dynamique non modélisée [FK95]. C'est pourquoi, nous considérons, dans cette section, en plus des retards la présence des incertitudes dans le système. Ici, les entrées de commande sont traitées comme étant des incertitudes paramétriques afin d'éviter la contrainte de bornitude sur la dérivée de l'entrée (voir la section 2.3).

2.4.1 Modèle et hypothèses

Dans cette section, nous considérons un système bilinéaire incertain à retards, modélisé par la représentation d'état suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + \sum_{i=1}^{m}(A_i + \Delta A_i(t))u_i(t)x(t) + (A_{d_0} + \Delta A_{d_0}(t))x(t-\tau_0) \\ + \sum_{i=1}^{m}(A_{d_i} + \Delta A_{d_i}(t))u_i(t)x(t-\tau_i) + (D + \Delta D(t))w(t) \qquad (2.50a)\end{aligned}$$

$$y(t) = (C + \Delta C(t))x(t) \qquad (2.50b)$$

$$z(t) = Lx(t) \qquad (2.50c)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est la vecteur des entrées de commande, $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des mesures, $w \in \mathbb{R}^\varpi$ représente le vecteur des perturbations et $z \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur des états à estimer avec $r \leqslant n$. τ_i pour $i = 0, \ldots, m$ sont des retards connus et à valeurs constantes. Les matrices : $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{d_i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour $i = 0, \ldots, m$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times\varpi}$ et $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$ sont des matrices à valeurs connues et constantes, avec $\text{rang}(L) = r \leq n$. où les matrices $\Delta A_i(t)$, $\Delta A_{d_i}(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, $\Delta C(t)$ et $\Delta D(t)$ sont des incertitudes paramétriques qui affectent le système (2.50) et sont exprimées comme suit

$$\begin{bmatrix}\Delta A_0(t) & \Delta A_{d_0}(t) & \Delta D(t) \\ \Delta C(t) & 0_{p\times n} & 0_{p\times\varpi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}H_0 \\ H_C\end{bmatrix}\Delta_0(t)\begin{bmatrix}J_0 & J_{d_0} & J_D\end{bmatrix} \qquad (2.51a)$$

$$[\Delta A_i(t)\ \Delta A_{d_i}(t)] = H_i\Delta_i(t)[J_i\ J_{d_i}] \qquad (2.51b)$$

avec $H_i, H_{d_i} \in \mathbb{R}^{n\times h}$, $J_i, J_{d_i} \in \mathbb{R}^{j\times n}$, pour $i = 0, \ldots, m$, et $H_C \in \mathbb{R}^{p\times h}$. Les matrices $\Delta_i(t) \in \mathbb{R}^{h\times j}$ sont des matrices inconnues, variant dans le temps et mesurables au sens de Lebesgue, satisfaisant l'inégalité suivante

$$\Delta_i(t)\Delta_i^T(t) \leqslant I_h, \qquad \text{pour } i = 0, \ldots, m$$

Hypothèse 2.4.1. *L'entrée de commande $u(t)$ est supposée continue et bornée, telle que $u(t) \in \mathcal{U}_m$, avec $\mathcal{U}_m$ est décrit par (2.2).*

Remarque 2.4.1. *La présence de perturbations dans le vecteur des mesures a été omise afin d'éviter la présence des perturbations retardées dans la dynamique de l'erreur d'estimation.*

2.4.2 Synthèse de l'observateur fonctionnel robuste

En présence de retards dans la dynamique du système bilinéaire incertain, la synthèse d'observateurs robustes n'a pas été traitée à notre connaissance. En considérant le modèle (2.50), nous proposons de synthétiser un observateur fonctionnel robuste. L'objectif de cette synthèse est d'estimer une fonctionnelle de l'état, notée $z(t)$, à partir des mesures disponibles $y(t)$ et les entrées de commande $u(t)$ et d'atténuer les perturbations en présence d'incertitudes paramétriques et de retards dans la dynamique du système. Afin d'avoir une forme générale pour l'observateur robuste, nous proposons un observateur fonctionnel d'ordre réduit décrit par

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) = N_0\eta(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i \eta(t) + N_{d_0}\eta(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i} u_i \eta(t-\tau_i) + M_0 y(t) \\ + \sum_{i=1}^{m} M_i u_i y(t) + M_{d_0} y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i} u_i y(t-\tau_i) \qquad (2.52a)\end{aligned}$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Jy(t) \qquad (2.52b)$$

où $\eta \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur d'état de l'observateur. $\hat{z} \in \mathbb{R}^r$ est l'estimée de z. Les matrices N_i, M_i, N_{d_i}, M_{d_i}, pour $i = 0, \ldots, m$, et J sont à déterminer afin d'obtenir une estimation du vecteur $z(t)$ et d'avoir une erreur d'estimation stable qui converge vers zéro. Pour ce faire, notons $e_z(t)$ l'erreur d'estimation décrite par

$$\begin{aligned}e_z(t) &= z(t) - \hat{z}(t) \\ &= \Psi_L x(t) - \eta(t) - J\Delta C(t)x(t) \\ &= \Psi_L x(t) - \eta(t) - JH_C\Delta_0(t)J_0 x(t)\end{aligned}$$

où Ψ_L est donné par (2.22).

Afin de supprimer le terme $JH_C\Delta_0(t)J_0x(t)$ de l'expression de l'erreur d'estimation, nous posons la contrainte suivante

$$JH_C = 0 \qquad (2.53)$$

et nous obtenons

$$e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t) = \Psi_L x(t) - \eta(t) \qquad (2.54)$$

Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'EDF suivante

$$\begin{aligned}\dot{e}_z(t) = N_0 e_z(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t) e_z(t) + N_{d_0} e_z(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i} u_i(t) e_z(t-\tau_i) \\ + (\Psi_L A_0 - N_0\Psi_L - M_0 C)x(t) + \sum_{i=1}^{m}(\Psi_L A_i - N_i\Psi_L - M_i C)u_i(t)x(t) \\ + (\Psi_L A_{d_0} - N_{d_0}\Psi_L - M_{d_0}C)x(t-\tau_0) + \sum_{i=0}^{m}(\Psi_L A_{d_i} - N_{d_i}\Psi_L - M_{d_i}C)u_i(t)x(t-\tau_i) \\ + (\Psi_L\Delta A_0(t) - M_0\Delta C(t))x(t) + \sum_{i=1}^{m}(\Psi_L\Delta A_i(t) - M_i\Delta C(t))u_i(t)x(t) \\ + (\Psi_L\Delta A_{d_0}(t) - M_{d_0}\Delta C(t))x(t-\tau_0) + \sum_{i=0}^{m}(\Psi_L\Delta A_{d_i}(t) - M_{d_i}\Delta C(t))u_i(t)x(t-\tau_i)\end{aligned}$$

$$+ \Psi_L(D + \Delta D(t))w(t) \tag{2.55}$$

Afin de caractériser l'atténuation des perturbations entre le vecteur augmenté composé par l'état du système d'origine $x(t)$ et l'erreur d'estimation $e_z(t)$ et le vecteur des perturbations $w(t)$, il faut que le critère $J_{\xi w}$ vérifie l'inégalité suivante

$$J_{\xi w} = \int_0^\infty (\xi^T \xi - \gamma^2 w^T w)dt < 0 \tag{2.56}$$

avec $\gamma > 0$ et

$$\xi = [x^T(t) \;\; e_z^T(t)]^T \tag{2.57}$$

Problème 2.4.1. *Le problème de synthèse d'observateur robuste $\mathcal{H}_\infty$, dans cette section, se formule, d'une part, comme celui de l'analyse de la stabilité quadratique du point d'équilibre d'un système augmenté composé par l'erreur d'estimation $e_z(t)$ et l'état du système d'origine $x(t)$ et, d'autre part, comme un problème d'atténuation des perturbations $w(t)$ défini par le critère (2.56).*

Ce problème est traité en 3 étapes. Tout d'abord, il faut assurer le non biais de l'erreur d'estimation en annulant les termes qui dépendent de l'état retardé ou non. Puis, une étude de la stabilité de cette erreur est faite en utilisant l'approche de Lyapunov basée sur une transformation descripteur. Finalement, le problème $\mathcal{H}_\infty$ est introduit afin d'atténuer l'effet des perturbations.

Dans ce qui suit, le résultat est donné à la fin après avoir établi, étape par étape, les conditions d'existence et de convergence de l'observateur robuste proposé.

Etape 1 : Paramétrage des gains. Comme la dynamique de l'erreur d'estimation dépend de l'état $x(t)$ et de l'état retardé $x(t-\tau_i)$, pour $i = 0, \ldots, m$, il faut annuler ces termes. Ceci nécessite de résoudre les équations (2.23b) et (2.23c), obtenues lors de la synthèse d'un observateur fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ dans la section 2.3.2. Si la condition donnée par (2.30) est satisfaite, la dynamique de l'erreur d'estimation devient

$$\begin{aligned}\dot{e}_z(t) = (N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t))e_z(t) + N_{d_0} e_z(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i} u_i(t) e_z(t-\tau_i) \\ + \Psi_L(D + \Delta D(t))w(t) + \sum_{i=0}^{m} (\Psi_L \Delta A_i(t) - M_i \Delta C(t))u_i(t)x(t) \\ + \sum_{i=0}^{m} (\Psi_L \Delta A_{d_i}(t) - M_{d_i} \Delta C(t))u_i(t)x(t-\tau_i)\end{aligned} \tag{2.58}$$

Puisque le vecteur d'état $x(t)$ apparaît encore dans l'expression de la dynamique de l'erreur d'estimation du fait des incertitudes paramétriques, la stabilité du point d'équilibre de l'équation différentielle (2.58) dépend de la stabilité du point d'équilibre du système bilinéaire (2.50) décrivant la dynamique de l'état $x(t)$. Ainsi, le problème de la synthèse d'un observateur fonctionnel pour le système (2.50) requiert de garantir simultanément la stabilité de l'EDF (2.50) associée à l'état $x(t)$ du système et la stabilité de l'EDF (2.58) relative à l'erreur de filtrage $e_z(t)$.

En utilisant les EDFs (2.50a) et (2.58), nous introduisons le système augmenté suivant

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=0}^{m} \overline{\Lambda}_i(u)\xi(t) + \sum_{i=0}^{m} \overline{\Lambda}_{d_i}(u)\xi(t-\tau_i) + \Lambda_D w(t) \tag{2.59}$$

où $\xi(t)$ est le vecteur d'état augmenté défini par (2.57) et les matrices du système (2.59), pour $i = 0, \ldots, m$, sont

$$\overline{\Lambda}_i(u) = \begin{bmatrix} (A_i + \Delta A_i(t))u_i(t) & 0 \\ (\Psi_L \Delta A_i(t) - M_i \Delta C(t))u_i(t) & N_i u_i(t) \end{bmatrix} \tag{2.60a}$$

$$\overline{\Lambda}_{d_i}(u) = \begin{bmatrix} (A_{d_i} + \Delta A_{d_i}(t))u_i(t) & 0 \\ (\Psi_L \Delta A_{d_i}(t) - M_{d_i} \Delta C(t))u_i(t) & N_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \tag{2.60b}$$

$$\Lambda_D = \begin{bmatrix} D + \Delta D(t) \\ \Psi_L (D + \Delta D(t)) \end{bmatrix} \tag{2.60c}$$

Celles-ci peuvent être réécrites comme suit en remplaçant les matrices d'incertitudes paramétriques par leurs expressions données par (2.51a) et (2.51b)

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda}_i(u) &= \begin{bmatrix} A_i u_i(t) & 0 \\ 0 & N_i u_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_i(t) u_i(t) & 0 \\ (\Psi \Delta A_i(t) - M_i \Delta C(t))u_i(t) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_i u_i(t) & 0 \\ 0 & N_i u_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i u_i(t) \\ \Psi H_i u_i(t) \end{bmatrix} \Delta_i(t) \begin{bmatrix} J_i & 0 \end{bmatrix} \\ &\qquad - \begin{bmatrix} 0 \\ M_i H_C u_i(t) \end{bmatrix} \Delta_0(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.61a}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda}_{d_i}(u) &= \begin{bmatrix} A_{d_i} u_i(t) & 0 \\ 0 & N_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{d_i}(t) u_i(t) & 0 \\ (\Psi \Delta A_{d_i}(t) - M_{d_i} \Delta C(t))u_i(t) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{d_i} u_i(t) & 0 \\ 0 & N_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{d_i} u_i(t) \\ \Psi H_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \Delta_i(t) \begin{bmatrix} J_{d_i} & 0 \end{bmatrix} \\ &\qquad - \begin{bmatrix} 0 \\ M_{d_i} H_C u_i(t) \end{bmatrix} \Delta_0(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.61b}$$

$$\Lambda_D = \begin{bmatrix} D \\ \Psi D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta D(t) \\ \Psi \Delta D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ \Psi D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi H_0 \end{bmatrix} \Delta_0(t) J_D \tag{2.61c}$$

Afin de diminuer le conservatisme dû au domaine de définition des commandes $u_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, nous utilisons dans cette synthèse l'une des approches décrites dans la section 2.2.1 pour le traitement des BLS. Pour ce faire, nous considérons chaque commande $u_i(t)$ comme une *incertitude structurée*. Puisque l'hypothèse 2.4.1 est satisfaite, ceci revient à remplaçer les commandes $u_i(t)$ par une nouvelle variable $\beta_i(t)$ dont l'intervalle de variation est compris entre $[-1 \quad 1]$ et qui est exprimée par l'équation (2.3), les variables $\beta_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, étant considérées comme de nouvelles variables incertaines appartenant à l'ensemble $\mathfrak{B}$ défini par (2.4). En utilisant la nouvelle expression des entrées de commande $u_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, définie par (2.3), les matrices $\overline{\Lambda}_i(u)$ et $\overline{\Lambda}_{d_i}(u)$, décrites par (2.61a) et (2.61b), sont remplacées par

$$\tilde{\Lambda}_i(\beta) = \begin{bmatrix} A_i a_i & 0 \\ 0 & N_i a_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i b_i & 0 \\ 0 & N_i b_i \end{bmatrix} \beta_i(t) + \begin{bmatrix} H_i a_i \\ \Psi_L H_i a_i \end{bmatrix} \Delta_i(t) \begin{bmatrix} J_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} H_i b_i \\ \Psi_L H_i b_i \end{bmatrix} \Delta_i^\beta(t) \begin{bmatrix} J_i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ M_i H_C a_i \end{bmatrix} \Delta_0(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ M_i H_C b_i \end{bmatrix} \Delta_0^\beta(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.62a}$$

$$\tilde{\Lambda}_{d_i}(\beta) = \begin{bmatrix} A_{d_i} a_i & 0 \\ 0 & N_{d_i} a_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d_i} b_i & 0 \\ 0 & N_{d_i} b_i \end{bmatrix} \beta_i(t) + \begin{bmatrix} H_i b_i \\ \Psi_L H_i b_i \end{bmatrix} \Delta_i^\beta(t) \begin{bmatrix} J_{d_i} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i a_i \\ \Psi_L H_i a_i \end{bmatrix} \Delta_i(t) \begin{bmatrix} J_{d_i} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ M_{d_i} H_C a_i \end{bmatrix} \Delta_0(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ M_{d_i} H_C b_i \end{bmatrix} \Delta_0^\beta(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.62b}$$

avec $\Delta_0^\beta(t) = \beta_i(t)\Delta_0(t)$ et $\Delta_i^\beta(t) = \beta_i(t)\Delta_i(t)$.

Notons bien la présence des gains de l'observateur M_i et M_{d_i}, pour $i = 0, \ldots, m$, dans le système augmenté (2.59). Vu les expressions de ces gains à travers les équations (2.28) et le paramétrage des gains de l'observateur en utilisant la matrice Z (voir section 2.3.2), le calcul des gains M_i et M_{d_i}, pour $i = 0, \ldots, m$, peut générer des non linéarités dans le système. En effet, pour obtenir le gain Z, le raisonnement développé entre les relations (2.26) et (2.32) est utilisé et il s'en suit que nous avons $M_i = K_i + N_i J$ et $M_{d_i} = K_{d_i} + N_{d_i} J$. Puisque les matrices N_i, N_{d_i} et J dépendent de Z, nous allons avoir des termes bilinéaires en Z dans les produits $N_i J$ et $N_{d_i} J$ dans (2.62). Puisque nous avons posé la contrainte (2.53), ces bilinéarités sont supprimées.

Les matrices $\tilde{\Lambda}_i(u)$ et $\tilde{\Lambda}_{d_i}(u)$ décrites par (2.62a) et (2.62b) sont remplacées par

$$\Lambda_i(\beta) = \begin{bmatrix} A_i a_i & 0 \\ 0 & N_i a_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i b_i & 0 \\ 0 & N_i b_i \end{bmatrix} \beta_i(t) + \begin{bmatrix} H_i a_i \\ \Psi_L H_i a_i \end{bmatrix} \Delta_i(t) \begin{bmatrix} J_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i b_i \\ \Psi_L H_i b_i \end{bmatrix} \Delta_i^\beta(t) \begin{bmatrix} J_i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K_i H_C a_i \end{bmatrix} \Delta_0(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K_i H_C b_i \end{bmatrix} \Delta_0^\beta(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.63a}$$

$$\Lambda_{d_i}(\beta) = \begin{bmatrix} A_{d_i} a_i & 0 \\ 0 & N_{d_i} a_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d_i} b_i & 0 \\ 0 & N_{d_i} b_i \end{bmatrix} \beta_i(t) + \begin{bmatrix} H_i b_i \\ \Psi_L H_i b_i \end{bmatrix} \Delta_i^\beta(t) \begin{bmatrix} J_{d_i} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i a_i \\ \Psi_L H_i a_i \end{bmatrix} \Delta_i(t) \begin{bmatrix} J_{d_i} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K_{d_i} H_C a_i \end{bmatrix} \Delta_0(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K_{d_i} H_C b_i \end{bmatrix} \Delta_0^\beta(t) \begin{bmatrix} J_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.63b}$$

Finalement, le système (2.59) est réécrit ainsi

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=0}^{m} \Lambda_i(u)\xi(t) + \sum_{i=0}^{m} \Lambda_{d_i}(u)\xi(t - \tau_i) + \Lambda_D w(t) \tag{2.64}$$

Notons que la contrainte (2.26) est nécessaire mais pas suffisante car elle n'intègre pas la relation (2.53). Afin de prendre en compte cette dernière, nous remplaçons la relation (2.26) par

$$\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{X}\overline{\mathbb{V}} \tag{2.65}$$

où $\mathbb{X}$ est une matrice inconnue regroupant les gains de l'observateur à déterminer et donnée par

$$\mathbb{X} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:c} N_0 & \dots & N_m & N_{d_0} & \dots & N_{d_m} & K_0 & \dots & K_m & K_{d_0} & \dots & K_{d_m} & J \end{array}\right] \tag{2.66}$$

avec, pour $i = 0, \dots, m$,

$$K_i = M_i - N_i J \tag{2.67a}$$

$$K_{d_i} = M_{d_i} - N_{d_i} J \tag{2.67b}$$

Les matrices $\overline{\mathbb{W}}$ et $\overline{\mathbb{V}}$ sont connues et données par

$$\overline{\mathbb{W}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:c} LA_0 & \dots & LA_m & LA_{d_0} & \dots & LA_{d_m} & 0 \end{array}\right] \tag{2.68a}$$

$$\overline{\mathbb{V}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:c} L & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ \hdashline C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ \hdashline CA_0 & \dots & CA_m & CA_{d_0} & \dots & CA_{d_m} & H_C \end{array}\right] \tag{2.68b}$$

En se référant à la résolution des équations linéaires décrites dans la section A.2.2, l'équation (2.65) admet une solution si et seulement si la condition suivante

$$\operatorname{rang}(\overline{\mathbb{V}}) = \operatorname{rang}\left(\left[\overline{\mathbb{W}}^T \quad \overline{\mathbb{V}}^T\right]\right) \tag{2.69}$$

est vérifiée et la solution est donnée sous la forme suivante

$$\mathbb{X} = \overline{\mathbb{W}}\,\overline{\mathbb{V}}^{\dagger} + Z(I_k - \overline{\mathbb{V}}\,\overline{\mathbb{V}}^{\dagger}) \tag{2.70}$$

où $Z \in \mathbb{R}^{r\times k}$ est une matrice arbitraire, $k = 2(r+p)(m+1)+p$ et $\overline{\mathbb{V}}^{\dagger}$ est une pseudo-inverse de $\overline{\mathbb{V}}$ qui vérifie la relation (A.2.2).

A travers l'expression de $\mathbb{X}$ donnée ci-dessus par (2.31), les gains de l'observateur sont exprimés en fonction du gain Z comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_0 & \dots & N_m & N_{d_0} & \dots & N_{d_m} & K_0 & \dots & K_m & K_{d_0} & \dots & K_{d_m} & J \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}} =$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,1} & \dots & N_{m,1} & N_{d_0,1} & \dots & N_{d_m,1} & K_{0,1} & \dots & K_{m,1} & K_{d_0,1} & \dots & K_{d_m,1} & J_{11} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbb{W}}\,\overline{\mathbb{V}}^\dagger}$$
$$+ Z \underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,2} & \dots & N_{m,2} & N_{d_0,2} & \dots & N_{d_m,2} & K_{0,2} & \dots & K_{m,2} & K_{d_0,2} & \dots & K_{d_m,2} & J_{12} \end{bmatrix}}_{I_k - \overline{\mathbb{V}}\,\overline{\mathbb{V}}^\dagger} \tag{2.71}$$

Remarque 2.4.2. *La contrainte* (2.65) *est équivalente aux équations* (2.23b)-(2.23c) *et* (2.53)*, alors que la contrainte* (2.26) *est équivalente aux équations* (2.23b)-(2.23c)*. Il s'en suit que la condition de rang* (2.69) *implique la condition de rang* (2.30)*.*

Etape 2 : Approche de Lyapunov basée sur un système descripteur. Avant d'appliquer une approche de type Lyapunov pour étudier la convergence de l'erreur d'observation, il faut préalablement transformer le système (2.64) en un système descripteur.

Transformation en système descripteur. Vu les avantages qu'offre la transformation descripteur décrits dans la section précédente, elle est aussi utilisée pour la synthèse d'observateur robuste. Dans ce but, en posant $\overline{\xi}(t) = \dot{\xi}(t)$, le système augmenté (2.64) se réécrit comme suit

$$\begin{bmatrix} I_{n+r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\overline{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n+r} \\ \sum_{i=0}^{m} (\Lambda_i(\beta) + \Lambda_{d_i}(\beta)) & -I_{n+r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix}$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda_{d_i}(\beta) \end{bmatrix} \int_t^{t-\tau_i} \overline{\xi}(s) ds + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda_D \end{bmatrix} w(t) \tag{2.72}$$

Puisque les matrices $\Lambda_i(\beta)$ et $\Lambda_{d_i}(\beta)$ dépendent des incertitudes paramétriques affectant le système, les blocs de matrices $\sum_{i=0}^{m} (\Lambda_i(\beta) + \Lambda_{d_i}(\beta))$ et $\Lambda_{d_i}(\beta)$ sont réécrits sous les formes ci-après afin de séparer les incertitudes des matrices du système

$$\sum_{i=0}^{m} (\Lambda_i(\beta) + \Lambda_{d_i}(\beta)) = \mathbb{A} + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{H}_i \overline{\Delta}_i \mathbb{J}_i \tag{2.73a}$$
$$\Lambda_{d_i}(\beta) = \mathbb{A}_{d_i} + \mathbb{H}_{d_i} \overline{\Delta}_{d_i} \mathbb{J}_{d_i}, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m \tag{2.73b}$$

avec

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} (A_i + A_{d_i}) a_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{m} (N_i + N_{d_i}) a_i \end{bmatrix} \tag{2.74a}$$

$$\mathbb{H}_i = \begin{bmatrix} A_i b_i & 0 & A_{d_i} b_i & 0 & H_i a_i & H_i a_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i b_i & 0 & N_{d_i} b_i & \Psi_L H_i a_i & \Psi_L H_i a_i & K_i H_C a_i & k_{d_i} H_C a_i \\ & & & & H_i b_i & H_i b_i & 0 & 0 \\ & & & & \Psi_L H_i b_i & \Psi_L H_i b_i & K_i H_C b_i & K_{d_i} H_C b_i \end{bmatrix} \tag{2.74b}$$

$$\overline{\Delta}_i = \text{bdiag}\left(\Delta_n^\beta, \Delta_r^\beta, \Delta_n^\beta, \Delta_r^\beta, \Delta_i, \Delta_i, \Delta_0, \Delta_0, \Delta_i^\beta, \Delta_i^\beta, \Delta_0^\beta, \Delta_0^\beta\right) \tag{2.74c}$$

$$\mathbb{J}_i^T = \begin{bmatrix} I_n & 0 & I_n & 0 & J_i^T & J_{d_i}^T & J_0^T & J_0^T & J_i^T & J_{d_i}^T & J_0^T & J_0^T \\ 0 & I_r & 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2.74d}$$

$$\mathbb{A}_{d_i} = \begin{bmatrix} A_{d_i}a_i & 0 \\ 0 & N_{d_i}a_i \end{bmatrix} \tag{2.74e}$$

$$\mathbb{H}_{d_i} = \begin{bmatrix} A_{d_i}a_i & 0 & H_ia_i & 0 & H_ib_i & 0 \\ 0 & N_{d_i}a_i & \Psi_L H_i a_i & K_{d_i}H_C a_i & \Psi_L H_i b_i & K_{d_i}H_C b_i \end{bmatrix} \tag{2.74f}$$

$$\overline{\Delta}_{d_i} = \text{bdiag}\left(\Delta_n^\beta, \Delta_r^\beta, \Delta_i, \Delta_i, \Delta_i^\beta, \Delta_i^\beta\right) \tag{2.74g}$$

$$\mathbb{J}_{d_i}^T = \begin{bmatrix} I_n & 0 & J_{d_i}^T & J_0^T & J_{d_i}^T & J_0^T \\ 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.74h}$$

$$\Delta_n^\beta = \beta_i(t) I_n \tag{2.74i}$$

$$\Delta_r^\beta = \beta_i(t) I_r \tag{2.74j}$$

$$\Delta_i^\beta = \beta_i(t)\Delta_i(t) \tag{2.74k}$$

Ainsi, le système descripteur (2.72) devient sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} I_{n+r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\overline{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n+r} \\ \mathbb{A} + \sum_{i=0}^m \mathbb{H}_i \overline{\Delta}_i \mathbb{J}_i & -I_{n+r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}_{d_i} + \mathbb{H}_{d_i} \overline{\Delta}_{d_i} \mathbb{J}_{d_i} \end{bmatrix} \int_t^{t-\tau_i} \overline{\xi}(s) ds + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda_D \end{bmatrix} w(t) \tag{2.75}$$

Approche de Lyapunov. En se basant sur le système descripteur équivalent (2.75), la fonctionnelle candidate de Lyapunov $V(\xi)$ est choisie ainsi

$$V(\xi) = V_1(\xi) + V_2(\xi)$$

avec

$$V_1(\xi) = \xi^T(t) P \xi(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r+n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix}$$

$$V_2(\xi) = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^m \int_{-\tau_i}^0 \int_t^{t+\alpha} \overline{\xi}^T(s) \overline{\xi}(s) ds d\alpha$$

où P et M sont des matrices de dimension $\mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}$ avec $P = P^T > 0$. κ est un scalaire défini positif. En procédant à la dérivation de la fonctionnelle $V(\xi)$ par rapport à t le long de la trajectoire de la solution de (2.75), nous obtenons

$$\dot{V}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} I_{r+n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\overline{\xi}}(t) \end{bmatrix}} + \underline{\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\overline{\xi}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{r+n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} P & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix} - \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^m \int_t^{t-\tau_i} \overline{\xi}^T(s) \overline{\xi}(s) ds \tag{2.76}$$

En remplaçant les termes soulignés par leurs expression décrites dans (2.75), la dérivée temporelle de $V(\xi)$ devient

$$\dot{V}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_{(1,1)} & h_{(1,2)} & M\Lambda_D \\ * & -M - M^T & M\Lambda_D \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{m} S_i(t) - \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{m} \int_t^{t-\tau_i} \overline{\xi}^T(s)\overline{\xi}(s)ds \quad (2.77)$$

où

$$h_{(1,1)} = M\left(\mathbb{A} + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{H}_i \overline{\Delta}_i \mathbb{J}_i\right) + \left(\mathbb{A} + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{H}_i \overline{\Delta}_i \mathbb{J}_i\right)^T M^T \quad (2.78a)$$

$$h_{(1,2)} = P - M + \left(\mathbb{A} + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{H}_i \overline{\Delta}_i \mathbb{J}_i\right)^T M^T \quad (2.78b)$$

et, pour $i = 0, \ldots, m$,

$$S_i(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}_{d_i} + \mathbb{H}_{d_i} \overline{\Delta}_{d_i} \mathbb{J}_{d_i} \end{bmatrix} \int_t^{t-\tau_i} \dot{e}(s)ds + \int_t^{t-\tau_i} \dot{e}^T(s)ds \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}_{d_i} + \mathbb{H}_{d_i} \overline{\Delta}_{d_i} \mathbb{J}_{d_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

En utilisant le lemme de majoration (A.3.1), les termes $S_i(t)$, $i = 0, \ldots, m$, sont majorés comme suit

$$S_i(t) \leq \kappa \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}_{d_i} + \mathbb{H}_{d_i} \overline{\Delta}_{d_i} \mathbb{J}_{d_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}_{d_i} + \mathbb{H}_{d_i} \overline{\Delta}_{d_i} \mathbb{J}_{d_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \int_t^{t-\tau_i} \overline{\xi}^T(s)\overline{\xi}(s)ds \quad (2.80)$$

En utilisant cette inégalité, la dérivée temporelle de la fonctionnelle de Lyapunov $V(\xi)$, décrite par l'équation (2.77), est majorée comme suit

$$\dot{V}(\xi) \leq \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_{(1,1)} & h_{(1,2)} & M\Lambda_D \\ * & & M\Lambda_D \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

où

$$h_{(1,1)} = M\left(\mathbb{A} + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{H}_i \overline{\Delta}_i \mathbb{J}_i\right) + \left(\mathbb{A} + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{H}_i \overline{\Delta}_i \mathbb{J}_i\right)^T M^T$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\kappa M\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)^T M^T \tag{2.82a}$$

$$h_{(1,2)}=P-M+\left(\mathbb{A}+\sum_{i=0}^{m}\mathbb{H}_i\overline{\Delta}_i\mathbb{J}_i\right)^T M^T$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\kappa M\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)^T M^T \tag{2.82b}$$

$$h_{(2,2)}=-M-M^T+\sum_{i=0}^{m}\kappa M\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)^T M^T \tag{2.82c}$$

Cette inégalité contient des incertitudes paramétriques. Afin de les éliminer, nous utilisons les lemmes de majoration donnés dans la section A.3.2.1. Ci-après, nous n'allons appliquer ces lemmes de majoration que sur le bloc $h_{(1,1)}$, les calculs étant similaires pour les blocs $h_{(1,2)}$, $h_{(2,2)}$ et $M\Lambda_D$. L'application du lemme A.3.1 sur le terme (1) et du lemme A.3.2 sur le terme (2) permet de majorer le bloc $h_{(1,1)}$ comme suit

$$h_{(1,1)}=M\mathbb{A}+\mathbb{A}^TM^T+\underbrace{\sum_{i=0}^{m}\left(M\mathbb{H}_i\overline{\Delta}_i\mathbb{J}_i\right)+\sum_{i=0}^{m}\left(\mathbb{J}_i^T\overline{\Delta}_i^T\mathbb{H}_i^TM^T\right)}_{(1)}$$
$$+\underbrace{\sum_{i=0}^{m}\kappa M\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)\left(\mathbb{A}_{d_i}+\mathbb{H}_{d_i}\overline{\Delta}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}\right)^T M^T}_{(2)}$$
$$\leq M\mathbb{A}+\mathbb{A}^TM^T+\ell_1\sum_{i=0}^{m}\left(M\mathbb{H}_i\mathbb{H}_i^TM^T\right)+\frac{1}{\ell_1}\sum_{i=0}^{m}\mathbb{J}_i\mathbb{J}_i^T+\sum_{i=0}^{m}\frac{\kappa}{\ell_2}M\mathbb{J}_{d_i}\mathbb{J}_{d_i}^TM^T$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\kappa M\mathbb{A}_{d_i}^T\left(I_{n+r}-\ell_2\mathbb{H}_{d_i}^T\mathbb{H}_{d_i}\right)\mathbb{A}_{d_i}M^T$$
$$\leq M\mathbb{A}+\mathbb{A}^TM^T+\ell_1M\overline{\mathbb{H}}\,\overline{\mathbb{H}}^TM^T+\frac{1}{\ell_1}\overline{\mathbb{J}}\,\overline{\mathbb{J}}^T+M\overline{\mathbb{A}}_d\mathbb{S}\overline{\mathbb{A}}_d^TM^T+\frac{\kappa}{\ell_2}M\overline{\mathbb{J}}_d\overline{\mathbb{J}}_d^TM^T$$

avec

$$\overline{\mathbb{J}}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_0^T & \dots & \mathbb{J}_m^T\end{bmatrix} \tag{2.83a}$$

$$\overline{\mathbb{H}}=\begin{bmatrix}\mathbb{H}_0 & \dots & \mathbb{H}_m\end{bmatrix} \tag{2.83b}$$

$$\overline{\mathbb{A}}_d=\begin{bmatrix}\mathbb{A}_{d_0}^T & \dots & \mathbb{A}_{d_m}^T\end{bmatrix} \tag{2.83c}$$

$$\mathbb{S}=\text{bdiag}\left((\kappa I_{n+r}-\kappa\ell_2M\mathbb{H}_{d_0}\mathbb{H}_{d_0}^TM^T)^{-1},\dots,(\kappa I_{n+r}-\kappa\ell_2M\mathbb{H}_{d_m}\mathbb{H}_{d_m}^TM^T)^{-1}\right) \tag{2.83d}$$

$$\overline{\mathbb{J}}_d=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_{d_0}^T & \dots & \mathbb{J}_{d_m}^T\end{bmatrix} \tag{2.83e}$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux scalaires définis positifs. En procédant de la même façon pour la majoration des autres blocs de l'inégalité (2.77) afin d'éliminer les incertitudes paramétriques, la dérivée

temporelle de la fonction de Lyapunov $V(\xi)$ est majorée comme suit

$$\dot{V}(\xi) \leq \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{h}_{(1,1)} & \overline{h}_{(1,2)} & M \begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\ * & \overline{h}_{(2,2)} & M \begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\ * & * & \frac{1}{\ell_4} J_D^T J_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

où

$$\overline{h}_{(1,1)} = M\mathbb{A} + \mathbb{A}^T M^T + \ell_1 M \overline{\mathbb{H}}\,\overline{\mathbb{H}}^T M^T + \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_4}\right) \overline{\mathbb{J}}\,\overline{\mathbb{J}}^T + M\overline{\mathbb{A}}_d \mathbb{S} \overline{\mathbb{A}}_d^T M^T + \frac{\kappa}{\ell_2} M \overline{\mathbb{J}}_d \overline{\mathbb{J}}_d^T M^T + \ell_3 M \begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix}^T M^T \tag{2.85a}$$

$$\overline{h}_{(1,2)} = P - M + \mathbb{A}^T M^T + M\overline{\mathbb{A}}_d \mathbb{S} \overline{\mathbb{A}}_d^T M^T + \frac{\kappa}{\ell_2} M \overline{\mathbb{J}}_d \overline{\mathbb{J}}_d^T M^T \tag{2.85b}$$

$$\overline{h}_{(2,2)} = -M - M^T + M\overline{\mathbb{A}}_d \mathbb{S} \overline{\mathbb{A}}_d^T M^T + \frac{\kappa}{\ell_2} M \overline{\mathbb{J}}_d \overline{\mathbb{J}}_d^T M^T + \ell_4 M \overline{\mathbb{H}}\,\overline{\mathbb{H}}^T M^T + \ell_3 M \begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix}^T M^T \tag{2.85c}$$

Etape 3 : Atténuation des perturbations. L'approche $\mathcal{H}_\infty$ est utilisée comme dans la démonstration du théorème 2.3.1. Vu le critère (2.56), il suffit donc de trouver une fonctionnelle de Lyapunov vérifiant l'inégalité suivante

$$J_{\xi w} \leq \int_0^\infty (\xi^T \xi - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(\xi)) dt < 0 \tag{2.86}$$

En utilisant l'inégalité (2.84), l'inégalité (2.86) se réécrit comme suit

$$J_{\xi w} \leq \int_0^\infty \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{h}_{(1,1)} + I_{r+n} & \overline{h}_{(1,2)} & M \begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\ * & \overline{h}_{(2,2)} & M \begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\ * & * & \frac{1}{\ell_4} J_D^T J_D - \gamma^2 I_\varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \overline{\xi}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt \tag{2.87}$$

où les termes $\overline{h}_{(1,1)}$, $\overline{h}_{(1,2)}$ et $\overline{h}_{(2,2)}$ sont définis respectivement par (2.85a), (2.85b) et (2.85c).

Obtention de LMI : Finalement, vu la présence des non linéarités dans l'inégalité (2.87) dues à certains termes dans les blocs $\overline{h}_{(1,1)}$, $\overline{h}_{(1,2)}$ et $\overline{h}_{(2,2)}$, le lemme de Schur est utilisé pour se

ramener à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix}
(1,1) & (1,2) & M\overline{\mathbb{H}} & 0 & M\begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix} & 0 & M\overline{\mathbb{J}}_d & M\overline{\mathbb{A}}_d & 0 & M\begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\
* & (2,2) & 0 & M\overline{\mathbb{H}} & 0 & M\begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix} & M\overline{\mathbb{J}}_d & M\overline{\mathbb{A}}_d & 0 & M\begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\
* & * & -\ell_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\ell_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\ell_3^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\ell_3^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \frac{-\ell_2}{\kappa} I & 0 & 0 & \\
* & * & * & * & * & * & * & -\kappa I & M\mathbb{H}_{d_0} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{\kappa \ell_2} I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & (3,3)
\end{bmatrix} < 0 \tag{2.88}$$

où

$$(1,1) = M\mathbb{A} + \mathbb{A}^T M^T + \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_4}\right)\overline{\mathbb{J}}\,\overline{\mathbb{J}}^T + I_{r+n} \tag{2.89a}$$

$$(1,2) = P - M + \mathbb{A}^T M^T \tag{2.89b}$$

$$(2,2) = -M - M^T \tag{2.89c}$$

$$(3,3) = \frac{1}{\ell_4} J_D^T J_D - \gamma^2 I_\varpi \tag{2.89d}$$

et où les matrices $\mathbb{A}$, $\overline{\mathbb{A}}_d$, $\overline{\mathbb{J}}$, $\overline{\mathbb{J}}_d$, $\overline{\mathbb{H}}$ et $\mathbb{S}$ sont définies respectivement par (2.74a), (2.83c), (2.83a), (2.83e), (2.83b) et (2.83d).

En insérant (2.71) dans l'inégalité (2.88), on obtient une la LMI du théorème 2.4.1 ci-dessous, décrite par (B.2). A cette étape, nous sommes en position d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.4.1. *[Sas17] Supposons que l'hypothèse 2.4.1 et la condition (2.69) sont vérifiées. Soit $S \in \mathbb{R}^{n\times r}$ une matrice de réglage choisie a priori et $k = 2(r+p)(m+1)+p$. Le système décrit par (2.52) est un observateur fonctionnel robuste $\mathcal{H}_\infty$ pour le système bilinéaire incertain à retards (2.50), s'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n+r\times n+r}$ symétrique définie positive, une matrice $M \in \mathbb{R}^{n+r\times n+r}$ données par*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \qquad M = \begin{bmatrix} M_{11} & SM_{22} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

une matrice $Y_{22} \in \mathbb{R}^{r\times k}$ et des scalaires $\ell_1 > 0$, $\ell_2 > 0$, $\ell_3 > 0$, $\ell_4 > 0$, $\kappa > 0$ et $\gamma > 0$, tels que la LMI (B.2) soit satisfaite.

Le gain Z est donné par (Y_{22} est donnée dans l'annexe B)

$$Z = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{2.90}$$

Remarque 2.4.3. *A partir de l'inégalité (2.88), un développement explicite de la LMI (B.2) est donné dans l'annexe B.*

2.4.3 Exemple numérique

Considérons le système (2.50) avec une seule entrée de commande et une seule incertitude affectant la matrice du système A_0 et un seul retard $\tau_0 = 8$s. Les matrices du système sont les suivantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{d_0} = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad J_0^T = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 1 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $A_{d_1} = 0$, $J_{d_0} = 0$, $J_D = 0$, $H_1 = 0$ et $H_C = 0$.

La commande est $u(t) = 1 + 0.5\sin(0.1t)$ et vérifie l'hypothèse 2.4.1. Après avoir vérifié la condition (2.69) et fixé la matrice S à

$$S = \begin{bmatrix} 6.1 & -6.1 \\ 5.4 & -5.4 \\ -55.8 & 63.7 \\ -2.7 & 3.8 \end{bmatrix}$$

la résolution de la LMI (2.88) donne les résultats suivants

$$P = \begin{bmatrix} 3.3419 & 1.1944 & -4.5717 & -2.9719 & -4.2461 & -4.6829 \\ 1.1944 & 7.8657 & -8.8058 & 0.49244 & 1.3501 & -2.7428 \\ -4.5717 & -8.8058 & 18.828 & 7.1155 & 11.827 & 13.385 \\ -2.9719 & 0.49244 & 7.1155 & 12.179 & 16.117 & 12.373 \\ -4.2461 & 1.3501 & 11.827 & 16.117 & 35.777 & 23.11 \\ -4.6829 & -2.7428 & 13.385 & 12.373 & 23.11 & 23.758 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3.2707 & 4.5708 & -1.6689 & 1.907 & 1.9609 & 0.44092 \\ 3.8958 & 5.7607 & -2.4438 & 1.9951 & 1.725 & 0.38745 \\ 1.9595 & 4.8478 & 0.043281 & 2.2046 & 3.9158 & 1.2774 \\ 2.2567 & 4.088 & -1.6803 & 1.4023 & 2.1979 & 0.55027 \\ 2.85 & 5.1951 & -2.3172 & 1.6516 & 3.2157 & 0.77578 \\ 1.9421 & 4.4057 & -0.93032 & 1.5975 & 2.8789 & 0.69975 \end{bmatrix}$$

$$Y_{22} = \begin{bmatrix} 2.7071\ 10^5 & 4.9184\ 10^5 & 4.8631\ 10^{-16} & -32190 & 60850 & 84627 & -27639 & 2.5238\ 10^5 \\ 1.1296\ 10^5 & 2.3327\ 10^5 & 9.6763\ 10^{-16} & -4205 & 6106 & 6465.1 & -77.298 & 1.0763\ 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 50.807 & 9759.7 & 5016 & 1.1397\ 10^{-14} & -1578.3 & -1.0326\ 10^{-13} \\ 5135.7 & 9796 & -2.6211 & 1918.7 & -3.0361\ 10^{-15} & 9.1406\ 10^{-14} \end{bmatrix}$$

avec les scalaires $\ell_1 = 0.17607$, $\ell_2 = 0.17864$, $\ell_3 = 0.17864$, $\ell_4 = 0.055835$, $\kappa = 1$ et $\gamma = 3.1212\ 10^{-5}$. Ceci permet d'obtenir le gain Z suivant avec la relation (2.90)

$$Z = \begin{bmatrix} 6.0631\ 10^{6} & 9.7208\ 10^{6} & -2.4443\ 10^{-14} & -1.1473\ 10^{6} & 2.254\ 10^{6} & 3.2284\ 10^{6} \\ -2.4784\ 10^{7} & -3.966\ 10^{7} & 1.0195\ 10^{-13} & 4.7144\ 10^{6} & -9.2648\ 10^{6} & -1.3273\ 10^{7} \\ -1.1484\ 10^{6} & 5.5458\ 10^{6} & -2.3519\ 10^{5} & -45878 & 2.0918\ 10^{5} & -88658 \\ 4.7246\ 10^{6} & -2.2663\ 10^{7} & 9.7497\ 10^{5} & 2.0275\ 10^{5} & -8.6063\ 10^{5} & 3.675\ 10^{5} \\ & & & & -65783 & -8.5273\ 10^{-12} \\ & & & & 2.7064\ 10^{5} & 3.5214\ 10^{-11} \end{bmatrix}$$

et les gains de l'observateur, donnés par (2.71), sont les suivants

$$N_0 = \begin{bmatrix} -24.854 & -4.5626 \\ 63.994 & -6.2893 \end{bmatrix} \quad N_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2.5626 \\ 2 & -4.2893 \end{bmatrix} \quad N_{d_0} = \begin{bmatrix} -0.51821 & 0.51821 \\ 1.7143 & -3.7143 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 54682 & 17789 \\ -2.3038\ 10^{5} & -75163 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 43682 & 14746 \\ -1.85\ 10^{5} & -62438 \end{bmatrix} \quad M_{d_0} = \begin{bmatrix} 4163.3 & 1468.7 \\ -17635 & -6211.6 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -91.726 & -25.72 \\ 372.15 & 125.79 \end{bmatrix}$$

La perturbation à énergie finie, $w(t)$, affecte le système dans l'intervalle de temps $t = [50\text{s}\ 60\text{s}]$. L'incertitude injecté dans la dynamique est $\Delta_0(t) = 0.001 \sin(0.001t)$. Les conditions initiales $x^T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\eta^T(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$. Les résultats de simulation, donnés dans les figures 2.4.3 et 2.4.3 montrent la convergence de l'erreur d'estimation.

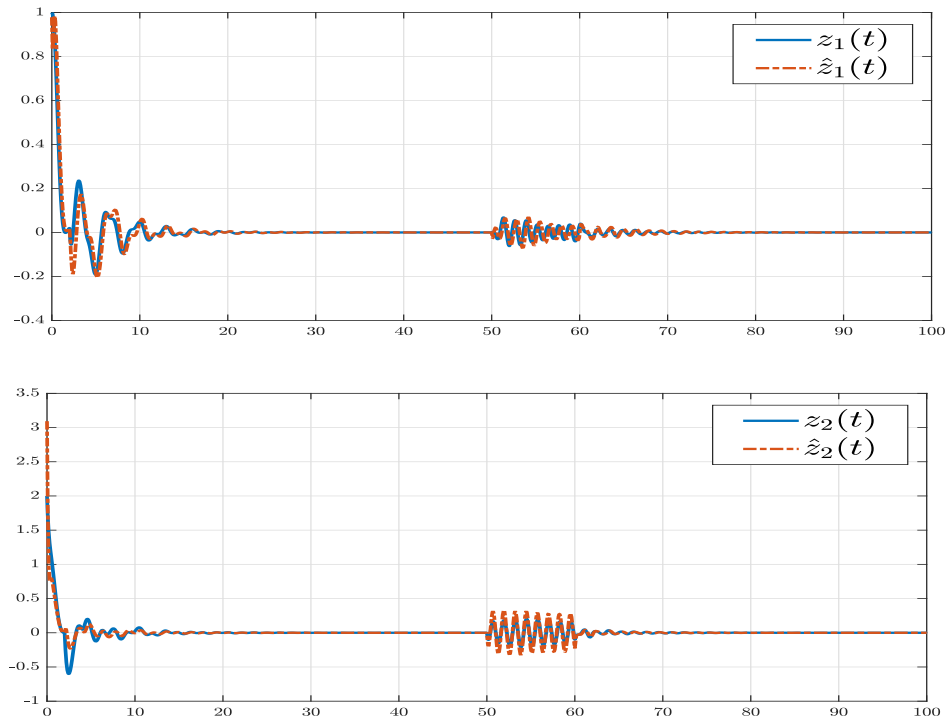


FIGURE 2.4 – Convergence des fonctionnelles estimées $\hat{z}_1$ et $\hat{z}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs z_1 et z_2 (—).

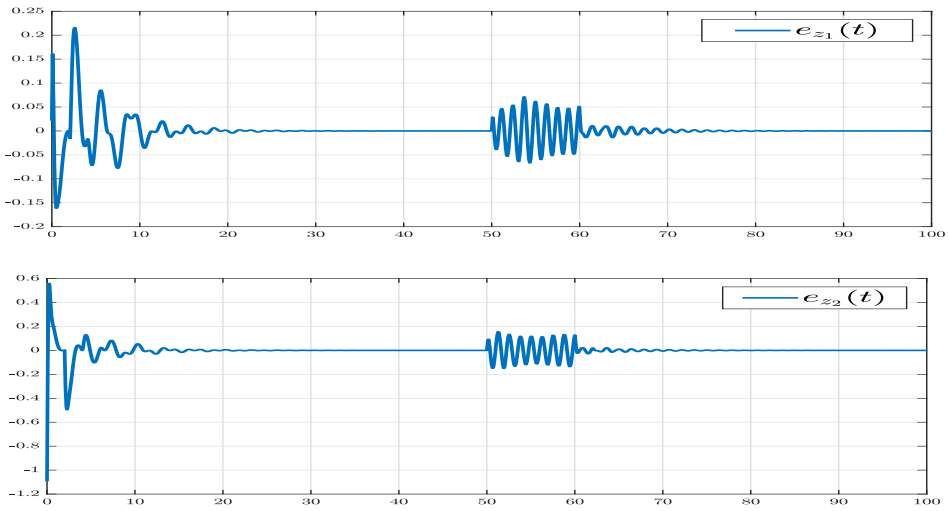


FIGURE 2.5 – Variation des erreurs d'estimation liées aux fonctionnelles z_1 et z_2.

2.5 Conclusion

Ce chapitre donne, en premier lieu, une vision d'ensemble sur les systèmes bilinéaires avec quelques exemples tirés de la littérature. Une étude bibliographique faite sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes bilinéaires à retards nous a permis de constater que les contributions

traitant de ce problème sont peu nombreuses. Nous avons proposé, dans ce chapitre, un observateur fonctionnel de type $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit pour une classe de systèmes bilinéaires à états retardés dont la dynamique est affectée par des perturbations à énergie finie. Des incertitudes paramétriques ont été considérées dans un second temps afin de synthétiser un observateur robuste d'ordre réduit. Les conditions d'existence dans ces deux cas ont été déduites à partir de la résolution d'équations matricielles, dites aussi de Sylvester. Cette résolution a permis le paramétrage des gains des observateurs via un seul gain à déterminer afin de garantir la stabilité de l'erreur d'estimation. Ces observateurs ont été synthétisés en résolvant des LMIs. Pour prendre en compte le produit état-commande dans la dynamique du système, deux approches ont été considérées. La structure polytopique de l'ensemble des entrées de commande a été exploitée dans un premier temps et, dans un second temps, les entrées de commande ont été traitées comme des incertitudes paramétriques.

Dans les prochains chapitres, l'accent est mis sur la synthèse d'observateurs adaptatifs pour des systèmes bilinéaires et non linéaires à retards. Ce problème représente un double enjeu, tant pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus, que pour la prise en compte des retards affectant la dynamique des systèmes considérés. Vu que l'approche LPV conduit à des LMIs moins compliquées à résoudre, elle est utilisée dans les prochains chapitres pour la synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes bilinéaires et non linéaires à retards.

Chapitre 3

Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes bilinéaires à retards

Sommaire

3.1 Introduction 62
3.2 Modèle et hypothèses 63
3.3 Observateur adaptatif fonctionnel dans le cas général 63
3.3.1 Conditions d'existence de l'observateur et paramétrage des gains 65
3.3.2 Analyse de la stabilité de l'erreur d'estimation 67
3.4 Observateurs adaptatifs d'ordre plein 72
3.4.1 Simplification de l'équation (3.3b) dans l'observateur adaptatif (3.3) . . 72
3.4.2 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$ 74
3.4.2.1 Paramétrage des gains de l'observateur 75
3.4.2.2 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation 77
3.4.2.3 Exemple numérique 79
3.4.3 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$ 81
3.4.3.1 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation 82
3.4.3.2 Exemple illustratif 83
3.5 Observateur adaptatif fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit 84
3.5.1 Synthèse de l'observateur adaptatif fonctionnel avec $J^\theta = 0$ 84
3.5.2 Exemple numérique 88
3.6 Conclusion 91

3.1 Introduction

La synthèse d'observateurs s'avère un problème primordial pour la commande et la supervision des systèmes dynamiques car celles-ci requièrent, dans la plupart des cas, la connaissance de toutes les variables alors que certaines sont non mesurées. Par ailleurs, un observateur peut servir aussi à la détection et au diagnostic de défaillances et joue donc un rôle important dans la commande tolérante aux défauts. Ce type de commande est basé sur une adaptation de la loi de commande en fonction des défauts afin de continuer à commander le composant défectueux [BFK+00, BBZ12]. Ainsi, le problème du diagnostic peut être résolu en tenant compte de la présence des défauts, considérés comme des paramètres inconnus, dans un modèle grâce à l'estimation simultanée de ces paramètres et du vecteur d'état, ce qui permet de fournir une loi de commande adéquate. Le type d'observateurs fournissant cette estimation simultanée est appelé observateurs adaptatifs.

Plusieurs contributions traitent le problème de la synthèse d'observateurs adaptatifs. Une méthode de synthèse d'observateurs adaptatifs a été proposée pour une classe de systèmes singuliers LTI dans [ASDG15] en introduisant une transformation permettant d'avoir un vecteur de mesures augmentées (entrées/sorties). Dans [ZJC08], un observateur adaptatif a été synthétisé où le paramètre inconnu représente un défaut dans l'actionneur. L'approche proposée permet l'amélioration de la rapidité de l'estimation des défauts. Ces résultats ont été ensuite développés dans le cas où des défauts apparaissent dans les capteurs. Dans [JS02], les auteurs ont développé une méthode de synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes LTI dont le vecteur des paramètres inconnus (défauts) affectent la dynamique et les mesures du système. L'analyse de la stabilité repose sur le choix d'une fonction de Lyapunov bloc-diagonale. Cette approche a été appliquée avec succès sur un moteur à induction. Un exemple développé dans la littérature est celui de la commande de vol d'un avion [WL07] où les défauts affectant le système sont estimés afin d'élaborer une loi de commande assurant le bon fonctionnement du système. Dans [BBZ12], une commande tolérante aux défauts est élaborée pour un système ayant des non linéarités de type "one-sided" Lipschitz. Dans ces contributions, le vecteur des paramètres inconnus agit linéairement par rapport à la dynamique du modèle, ce qui est aussi le cas dans ce chapitre.

Malgré l'intérêt porté durant ces dernières décennies au problème de la synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes dynamiques, l'attention prêtée aux systèmes bilinéaires est quasiment inexistante et encore moins pour les systèmes bilinéaires à retards. Dans ce chapitre, une méthode de synthèse d'observateurs adaptatifs est réalisée pour une classe de systèmes bilinéaires à états retardés dont la dynamique est affectée par des paramètres inconnus. Ces derniers sont supposés constants et agissent linéairement par rapport à la dynamique du système. Le but est d'estimer simultanément l'état du système et les paramètres inconnus, tout en garantissant une stabilité quadratique de l'erreur d'estimation.

Dans la section 3.2, le modèle proposé est décrit et les hypothèses pour la synthèse sont explicitées. Un observateur adaptatif sous une forme générale est développé dans la section 3.3. Dans cette section, un observateur fonctionnel d'ordre réduit est synthétisé en se basant sur le paramétrage des solutions de plusieurs équations de Sylvester. Dans la section 3.4, la même démarche est adoptée pour synthétiser deux observateurs adaptatifs d'ordre plein. Dans la section 3.5, une extension au filtrage adaptatif fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ est réalisée en minimisant l'influence des perturbations affectant la dynamique du système.

Des extensions des résultats obtenus dans ce chapitre sur la synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes bilinéaires à retards peuvent être trouvées dans [SSB+16] avec $J^\theta = 0$ (dans la section 3.4.2), dans [SSZA17a, SSZA17c] avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$ (dans la section 3.4.3) et dans

[SZSA17a] pour la synthèse d'observateurs adaptatifs fonctionnels d'ordre réduit de type $\mathcal{H}_\infty$ (dans la section 3.5).

3.2 Modèle et hypothèses

Nous considérons dans ce chapitre la classe de systèmes bilinéaires à états retardés dont le modèle d'état est décrit par l'EDF suivante

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i(t)\right) x(t) + A_{d_0} x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i} u_i(t) x(t-\tau_i) + Bu(t) + G\theta \tag{3.1a}$$

$$\dot{\theta} = 0 \tag{3.1b}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.1c}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{3.1d}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur des entrées de commande, le vecteur des paramètres inconnus et le vecteur des sorties mesurées. $z \in \mathbb{R}^r$ est la fonctionnelle à estimer. τ_i, pour $i = 0, \ldots, m$, sont des retards constants et connus. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{d_i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour $i = 0, \ldots, m$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont connues à valeurs constantes avec $\operatorname{rang}(L) = r \leq n$.

Pour ce système, nous considérons que le vecteur des entrées de commande vérifie l'hypothèse 2.3.1 mentionnée dans le chapitre 2. Dans ce chapitre, nous proposons de synthétiser des observateurs adaptatifs pour la classe de systèmes bilinéaires à retards décrite par (3.1).

3.3 Observateur adaptatif fonctionnel dans le cas général

Notons $\varrho_x(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta^T \end{bmatrix}^T$ et $\varrho_z(t) = \begin{bmatrix} z^T(t) & \theta^T \end{bmatrix}^T$. Le système bilinéaire à états retardés décrit par (3.1) se réécrit sous la forme augmentée suivante

$$\dot{\varrho}_x(t) = \mathcal{A}(u(t))\varrho_x(t) + \mathcal{A}_{d_0}\varrho_x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_{d_i} u_i(t)\varrho_x(t-\tau_i) + \mathcal{B}u(t) \tag{3.2a}$$

$$y(t) = \mathcal{C}\varrho_x(t) \tag{3.2b}$$

$$\varrho_z(t) = \mathcal{L}\varrho_x(t) \tag{3.2c}$$

avec

$$\mathcal{A}(u(t)) = \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i(t) & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{A}_{d_0} = \begin{bmatrix} A_{d_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{A}_{d_i} = \begin{bmatrix} A_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

L'observateur adaptatif proposé dans le cas général, permettant d'estimer $\varrho_z(t)$ (i.e. estimer simultanément la fonctionnelle $z(t)$ et le vecteur des paramètres inconnus θ), s'écrit sous la forme suivante

$$\dot{\eta}_{\text{red}}(t) = \mathbb{N}(u(t))\eta_{\text{red}}(t) + \mathbb{N}_{d_0}\eta_{\text{red}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t)\eta_{\text{red}}(t-\tau_i) + \mathbb{F}u(t)$$

$$+ \mathbb{M}(u(t))y(t) + \mathbb{M}_{d_0} y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{M}_{d_i} u_i(t) y(t-\tau_i) \tag{3.3a}$$

$$\hat{\varrho}_z(t) = \eta_{\text{red}}(t) + \mathbb{J}y(t) \tag{3.3b}$$

où $\eta_{\text{red}}(t) = \begin{bmatrix} \eta_z^T(t) & \eta_\theta^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+q}$ est le vecteur d'état de l'observateur adaptatif et $\hat{\varrho}_z(t) = \begin{bmatrix} \hat{z}^T(t) & \hat{\theta}^T \end{bmatrix}^T$, avec $\hat{z} \in \mathbb{R}^r$ et $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$, est l'estimation de z et θ. Les matrices de gain de l'observateur sont données par

$$\mathbb{N}(u(t)) = \begin{bmatrix} N_0^z + \sum_{i=1}^m N_i^z u_i(t) & Q^z \\ Q^\theta & N_0^\theta \end{bmatrix} \qquad \mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} N_{d_0}^z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i}^z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} F^z \\ F^\theta \end{bmatrix} \quad \mathbb{M}(u(t)) = \begin{bmatrix} M_0^z + \sum_{i=1}^m M_i^z u_i(t) \\ M_0^\theta \end{bmatrix} \quad \mathbb{M}_{d_0} = \begin{bmatrix} M_{d_0}^z \\ M_{d_0}^\theta \end{bmatrix} \quad \mathbb{M}_{d_i} = \begin{bmatrix} M_{d_i}^z \\ M_{d_i}^\theta \end{bmatrix} \quad \mathbb{J} = \begin{bmatrix} J^z \\ J^\theta \end{bmatrix}$$

où les matrices N_i^z, M_i^z , M_i^θ, $N_{d_i}^z$, $M_{d_i}^z$, $M_{d_i}^\theta$ pour $i = 0, \ldots, m$, N_0^θ, F^z, F^θ, J^z, J^θ, Q^z et Q^θ sont à déterminer afin que la convergence de $\hat{z}$ et $\hat{\theta}$ vers z et θ soit garantie.

En définissant l'erreur d'estimation $e_{\text{red}}(t)$ comme suit

$$e_{\text{red}}(t) = \begin{bmatrix} e_z(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \varrho_z(t) - \hat{\varrho}_z(t) = \Psi_{\text{red}} \varrho_x(t) - \eta_{\text{red}}(t) \tag{3.4}$$

avec

$$\Psi_{\text{red}} = \mathcal{L} - \mathbb{J}\mathcal{C} = \begin{bmatrix} L - J^z C & 0 \\ -J^\theta C & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_L & 0 \\ -J^\theta C & I_q \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Le système (3.3) est un observateur adaptatif pour le système (3.2) (i.e. pour le système (3.1)), si l'EDF décrivant la dynamique de l'erreur*

$$\dot{e}_{\text{red}}(t) = \mathbb{N}(u(t)) e_{\text{red}}(t) + \mathbb{N}_{d_0} e_{\text{red}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) e_{\text{red}}(t-\tau_i) \tag{3.6}$$

est stable et si les équations suivantes sont vérifiées

$$\Psi_{\text{red}} \mathcal{B} = \mathbb{F} \tag{3.7a}$$

$$\Psi_{\text{red}} \mathcal{A}(u(t)) - \mathbb{N}(u(t)) \Psi_{\text{red}} - \mathbb{M}(u(t)) \mathcal{C} = 0 \tag{3.7b}$$

$$\Psi_{\text{red}} \mathcal{A}_{d_0} - \mathbb{N}_{d_0} \Psi_{\text{red}} - \mathbb{M}_{d_0} \mathcal{C} = 0 \tag{3.7c}$$

$$\Psi_{\text{red}} \mathcal{A}_{d_i} - \mathbb{N}_{d_i} \Psi_{\text{red}} - \mathbb{M}_{d_i} \mathcal{C} = 0 \tag{3.7d}$$

Démonstration. Le calcul de la dynamique de l'erreur $e_{\text{red}}(t)$, décrite par (3.4), donne

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\text{red}}(t) &= \Psi_{\text{red}} \dot{\rho}_x(t) - \dot{\eta}_{\text{red}}(t) \\ &= \mathbb{N}(u(t)) e_{\text{red}}(t) + \mathbb{N}_{d_0} e_{\text{red}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) e_{\text{red}}(t-\tau_i) \end{aligned}$$

$$+ \left(\Psi_{\text{red}}\mathcal{A}(u(t)) - \mathbb{N}(u(t))\Psi_{\text{red}} - \mathbb{M}(u(t))\mathcal{C}\right)\varrho_x(t) + \left(\Psi_{\text{red}}\mathcal{B} - \mathbb{F}\right)u(t)$$
$$+ \left(\Psi_{\text{red}}\mathcal{A}_{d_0} - \mathbb{N}_{d_0}\Psi_{\text{red}} - \mathbb{M}_{d_0}\mathcal{C}\right)\varrho_x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m}\left(\Psi_{\text{red}}\mathcal{A}_{d_i} - \mathbb{N}_{d_i}\Psi_{\text{red}} - \mathbb{M}_{d_i}\mathcal{C}\right)u_i(t)\varrho_x(t-\tau_i)$$

Or, la dynamique de l'erreur dépend de l'état $\varrho_x(t)$ et du vecteur de commande $u(t)$. Afin de garantir le non biais de l'erreur, les équations (3.7) doivent être satisfaites. •

3.3.1 Conditions d'existence de l'observateur et paramétrage des gains

La résolution des équations (3.7b)-(3.7d) garantit le non biais de l'erreur d'estimation et permet de déduire les conditions d'existence de l'observateur, la solution $\mathbb{F}$ de l'équation (3.7a) étant déduite de cette résolution. En utilisant la matrice $\Psi_L = L - J^z C$ donnée par (3.5), le développement des équations (3.7b)-(3.7d) donne

$$\Psi_L G - Q^z = 0 \tag{3.8a}$$
$$N_0^\theta + J^\theta C G = 0 \tag{3.8b}$$
$$\Psi_L A_0 - N_0^z \Psi_L - M_0^z C + Q^z J^\theta C = 0 \tag{3.8c}$$
$$\Psi_L A_{d_0} - N_{d_0}^z \Psi_L - M_{d_0}^z C = 0 \tag{3.8d}$$
$$\Psi_L A_i - N_i^z \Psi_L - M_i^z C = 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.8e}$$
$$\Psi_L A_{d_i} - N_{d_i}^z \Psi_L - M_{d_i}^z C = 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.8f}$$
$$M_0^\theta C + J^\theta C A_0 - N_0^\theta J^\theta C + Q^\theta \Psi_L = 0 \tag{3.8g}$$
$$M_{d_0}^\theta C + J^\theta C A_{d_0} = 0 \tag{3.8h}$$
$$M_i^\theta C + J^\theta C A_i = 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.8i}$$
$$M_{d_i}^\theta C + J^\theta C A_{d_i} = 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.8j}$$

Puisque les solutions des équations (3.8a) et (3.8b) peuvent être déduites de la résolution des équations (3.8c) et (3.8j), nous ne considérons que les équations (3.8c) et (3.8j) qui peuvent être réécrites de la façon suivante

$$LG = J^z C G + Q^z \tag{3.9a}$$
$$0 = N_0^\theta + J^\theta C G \tag{3.9b}$$
$$LA_0 = J^z C A_0 + N_0^z L + K_0^z C \tag{3.9c}$$
$$LA_{d_0} = J^z C A_{d_0} + N_{d_0}^z L + K_{d_0}^z C \tag{3.9d}$$
$$LA_i = J^z C A_i + N_i^z L + K_i^z C, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.9e}$$
$$LA_{d_i} = J^z C A_{d_i} + N_{d_i}^z L + K_{d_i}^z C, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.9f}$$
$$0 = Q^\theta L + K_0^\theta C + J^\theta C A_0 \tag{3.9g}$$
$$0 = M_{d_0}^\theta C + J^\theta C A_{d_0} \tag{3.9h}$$
$$0 = M_i^\theta C + J^\theta C A_i, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.9i}$$
$$0 = M_{d_i}^\theta C + J^\theta C A_{d_i}, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.9j}$$

avec

$$K_0^z = M_0^z - N_0^z J^z - Q^z J^\theta \tag{3.10a}$$
$$K_i^z = M_i^z - N_i^z J^z, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \tag{3.10b}$$

$$K_{d_0}^z = M_{d_0}^z - N_{d_0}^z J^z \tag{3.10c}$$
$$K_{d_i}^z = M_{d_i}^z - N_{d_i}^z J^z, \qquad \text{pour } i = 1, \dots, m \tag{3.10d}$$
$$K_0^\theta = M_0^\theta - N_0^\theta J^\theta - Q^\theta J^z \tag{3.10e}$$

Nous réécrivons les équations (3.9c)-(3.9j) sous la forme condensée suivante

$$\mathbb{W}_{\text{red}} = \mathbb{X}_{\text{red}} \mathbb{V}_{\text{red}} \tag{3.11}$$

où la matrice $\mathbb{X}_{\text{red}}$ regroupe les matrices gains de l'observateur comme suit

$$\mathbb{X}_{\text{red}} = \left[\begin{array}{cccc:ccc:cccc:ccc:c} N_0^z & N_1^z & \dots & N_m^z & N_{d_0}^z & \dots & N_{d_m}^z & K_0^z & K_1^z & \dots & K_m^z & K_{d_0}^z & \dots & K_{d_m}^z & J^z \\ Q^\theta & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & K_0^\theta & M_1^\theta & \dots & M_m^\theta & M_{d_0}^\theta & \dots & M_{d_m}^\theta & J^\theta \end{array}\right] \tag{3.12}$$

et les matrices connues $\mathbb{V}_{\text{red}}$ et $\mathbb{W}_{\text{red}}$ sont données par

$$\mathbb{W}_{\text{red}} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} LA_0 & LA_1 & \dots & LA_m & LA_{d_0} & \dots & LA_{d_m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.13a}$$

$$\mathbb{V}_{\text{red}} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} L & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & L \\ \hdashline C & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & C \\ \hdashline CA_0 & CA_1 & \dots & CA_m & CA_{d_0} & \dots & CA_{d_m} \end{array}\right] \tag{3.13b}$$

En se référant à la résolution des équations linéaires décrites dans la section A.2.2, l'équation (3.11) admet une solution $\mathbb{X}_{\text{red}}$ si et seulement si la condition suivante

$$\text{rang}\left(\mathbb{V}_{\text{red}}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{W}_{\text{red}} \\ \mathbb{V}_{\text{red}} \end{bmatrix}\right) \tag{3.14}$$

est vérifiée et la solution générale est donnée par

$$\mathbb{X}_{\text{red}} = \mathbb{W}_{\text{red}} \mathbb{V}_{\text{red}}^\dagger + \mathcal{Z}_{\text{red}} (I_{k_{\text{red}}} - \mathbb{V}_{\text{red}} \mathbb{V}_{\text{red}}^\dagger) \tag{3.15}$$

où $\mathcal{Z}_{\text{red}} \in \mathbb{R}^{(r+q)\times k_{\text{red}}}$ est une matrice arbitraire et $k_{\text{red}} = (r+p)(m+1)+p+q$. La résolution de l'équation (3.11) permet le paramétrage des matrices gain de l'observateur via une seule matrice $\mathcal{Z}_{\text{red}}$. En utilisant (3.12), la relation (3.15) se réécrit comme suit

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} N_0^{zT} & Q^{\theta T} \\ N_1^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ N_m^{zT} & 0 \\ N_{d_0}^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ N_{d_m}^{zT} & 0 \\ K_0^{zT} & K_0^{\theta T} \\ K_1^{zT} & M_1^{\theta T} \\ \vdots & \vdots \\ K_m^{zT} & M_m^{\theta T} \\ K_{d_0}^{zT} & M_{d_0}^{\theta T} \\ \vdots & \vdots \\ K_{d_m}^{zT} & M_{d_m}^{\theta T} \\ J^{zT} & J^{\theta T} \end{array}\right]}_{\mathbb{X}_{\text{red}}^T} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} N_{0,1}^{zT} & 0 \\ N_{1,1}^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ N_{m,1}^{zT} & 0 \\ N_{d_0,1}^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ N_{d_m,1}^{zT} & 0 \\ K_{0,1}^{zT} & 0 \\ K_{1,1}^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ K_{m,1}^{zT} & 0 \\ K_{d_0,1}^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ K_{d_m,1}^{zT} & 0 \\ J_1^{zT} & 0 \end{array}\right]}_{\left(\mathbb{W}_{\text{red}}\mathbb{V}_{\text{red}}^{\dagger}\right)^T} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} N_{0,2}^{zT} & Q_2^{\theta T} \\ N_{1,2}^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ N_{m,2}^{zT} & 0 \\ N_{d_0,2}^{zT} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ N_{d_m,2}^{zT} & 0 \\ K_{0,2}^{zT} & K_{0,2}^{\theta T} \\ K_{1,2}^{zT} & M_{1,2}^{\theta T} \\ \vdots & \vdots \\ K_{m,2}^{zT} & M_{m,2}^{\theta T} \\ K_{d_0,2}^{zT} & M_{d_0,2}^{\theta T} \\ \vdots & \vdots \\ K_{d_m,2}^{zT} & M_{d_m,2}^{\theta T} \\ J_2^{zT} & J_2^{\theta T} \end{array}\right]}_{\left(I_{k_{\text{red}}}-\mathbb{V}_{\text{red}}\mathbb{V}_{\text{red}}^{\dagger}\right)^T} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathcal{Z}_{\text{red},1}^T \\ \hline \mathcal{Z}_{\text{red},2}^T \end{array}\right]}_{\mathcal{Z}_{\text{red}}^T} \tag{3.16}$$

avec $\mathcal{Z}_{\text{red},1} \in \mathbb{R}^{r\times k_{\text{red}}}$ et $\mathcal{Z}_{\text{red},2} \in \mathbb{R}^{q\times k_{\text{red}}}$.

En utilisant (3.16), les matrices $\mathbb{N}(u(t))$, $\mathbb{N}_{d_0}$ et $\mathbb{N}_{d_i}$, pour $i = 1, \ldots, m$, se réécrivent comme suit

$$\mathbb{N}(u(t)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m}\left(N_{i,1}^z + \mathcal{Z}_{\text{red},1}N_{i,2}^z\right)u_i(t) & LG - J_1^zCG - \mathcal{Z}_{\text{red},1}J_2^zCG \\ \mathcal{Z}_{\text{red},2}Q_2^{\theta} & -\mathcal{Z}_{\text{red},2}J_2^{\theta}CG \end{bmatrix} \tag{3.17a}$$

$$\mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} N_{d_0,1}^z + \mathcal{Z}_{\text{red},1}N_{d_0,2}^z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.17b}$$

$$\mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i,1}^z + \mathcal{Z}_{\text{red},1}N_{d_i,2}^z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.17c}$$

avec $u_0(t) = 1$.

3.3.2 Analyse de la stabilité de l'erreur d'estimation

En utilisant l'approche de Lyapunov pour la stabilité des systèmes à retards, les conditions de stabilité de l'erreur d'estimation sont données dans le théorème ci-après en termes de LMIs dont la résolution permettra de déterminer les matrices de gain $\mathcal{Z}_{\text{red},1}$ et $\mathcal{Z}_{\text{red},2}$ et, par la suite, les matrices de gain de l'observateur N_i^z, M_i^z , M_i^{θ}, $N_{d_i}^z$, $M_{d_i}^z$, $M_{d_i}^{\theta}$, pour $i = 0, \ldots, m$, N_0^{θ}, F^z, F^{θ}, J^z, J^{θ}, Q^z et Q^{θ}.

Théorème 3.3.2. *Supposons que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.14) sont vérifiées. Le système (3.3) est un observateur adaptatif pour le système (3.1), et a une erreur d'estimation quadratiquement stable s'il existe, pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \dots, 2^{2m}$,*

— *une matrice $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(r+q)\times(r+q)}$ donnée par*

$$P(\sigma^j) = P^T(\sigma^j) = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} \\ P_{02}^T & P_{03} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i2}^T & P_{i3} \end{bmatrix} > 0 \tag{3.18}$$

avec $P_{i1} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{r\times q}$ et $P_{i3} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, pour $i = 0, \dots, m$,

— *une matrice $M \in \mathbb{R}^{(r+p)\times(r+p)}$ donnée par*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & S_2 M_{22} \\ S_1 M_{11} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

où $M_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ et $M_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ sont des matrices non singulières, $S_1 \in \mathbb{R}^{q\times r}$ et $S_2 \in \mathbb{R}^{r\times q}$ étant des matrices de réglage choisies a priori,

— *des matrices $Y_{11} \in \mathbb{R}^{r\times p}$ et $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$*

— *un scalaire $\kappa > 0$,*

tels que les LMIs suivantes, pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \dots, 2^{2m}$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|cc}
a^j_{(1,1)} & a^j_{(1,2)} & a^j_{(1,3)} & a^j_{(1,4)} & a_0 & 0 & a^j_1 & 0 & \dots & a^j_m & 0 \\
* & a^j_{(2,2)} & a^j_{(2,3)} & a^j_{(2,4)} & S_1 a_0 & 0 & S_1 a^j_1 & 0 & \dots & S_1 a^j_m & 0 \\
\hline
* & * & a_{(3,3)} & a_{(3,4)} & a_0 & 0 & a^j_1 & 0 & \dots & a^j_m & 0 \\
* & * & * & a_{(4,4)} & S_1 a_0 & 0 & S_1 a^j_1 & 0 & \dots & S_1 a^j_m & 0 \\
\hline
* & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q
\end{array}\right] < 0 \tag{3.20}$$

soient vérifiées avec

$$\begin{aligned}
a^j_{(1,1)} = {} & \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i1} + (M_{11} N^z_{0,1} + Y_{11} N^z_{0,2}) + \sum_{i=1}^{m} (M_{11} N^z_{i,1} + Y_{11} N^z_{i,2}) \sigma^j_i + S_2 Y_{22} Q^\theta_2 \\
& + (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11}) \sigma^j_i + (M_{11} N^z_{d_0,1} + Y_{11} N^z_{d_0,2}) \\
& + \sum_{i=1}^{m} (M_{11} N^z_{d_i,1} + Y_{11} N^z_{d_i,2}) \sigma^j_i + (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11}) + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} S^T_2 \\
& + \sum_{i=0}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11}) \sigma^j_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a^j_{(1,2)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i2} + (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11} S^T_1) + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11} S^T_1)\sigma^j_i \\
&\quad + (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11} S^T_1) + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11} S^T_1)\sigma^j_i + S_2 Y_{22} N^{\theta}_{0,2} \\
&\quad + M_{11} Q^z_1 + Y_{11} Q^z_2 + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} \\
a^j_{(2,2)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3} + S_1 M_{11} Q^z_1 + S_1 Y_{11} Q^z_2 + Y_{22} N^{\theta}_{0,2} + Q^{zT}_1 M^T_{11} S^T_1 + Q^{zT}_2 Y^T_{11} S^T_1 \\
&\quad + N^{\theta T}_{0,2} Y^T_{22} \\
a^j_{(1,3)} &= P_{01} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i1} - M_{11} + (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11})\sigma^j_i \\
&\quad + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} S^T_2 + (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11})\sigma^j_i \\
a^j_{(1,4)} &= P_{02} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i2} + (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11} S^T_1) + (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11}) \\
&\quad - S_2 M_{22} + \sum_{i=1}^{n} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11} S^T_1)\sigma^j_i + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11})\sigma^j_i + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} \\
a^j_{(2,3)} &= P^T_{02} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P^T_{i2} - S_1 M_{11} + Q^{zT}_1 M^T_{11} + Q^{zT}_2 Y^T_{11} + N^{\theta T}_{0,2} Y^T_{22} S^T_2 \\
a^j_{(2,4)} &= P_{03} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i3} - M_{22} + Q^{zT}_1 M^T_{11} S^T_1 + Q^{zT}_2 Y^T_{11} S^T_1 + N^{\theta T}_{0,2} Y^T_{22} \\
a_{(3,3)} &= -M_{11} - M^T_{11} \\
a_{(3,4)} &= -S_2 M_{22} - M^T_{11} S^T_1 \\
a_{(4,4)} &= -M_{22} - M^T_{22} \\
a_0 &= (M_{11} N^z_{d_0,1} + Y_{11} N^z_{d_0,2}) \\
a^j_i &= (M_{11} N^z_{d_i,1} + Y_{11} N^z_{d_i,2})\sigma^j_i \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Les gains $\mathcal{Z}_{\text{red},1}$ *et* $\mathcal{Z}_{\text{red},2}$ *sont donnés par*

$$\mathcal{Z}_{\text{red},1} = M^{-1}_{11} Y_{11} \tag{3.21a}$$

$$\mathcal{Z}_{\text{red},2} = M^{-1}_{22} Y_{22} \tag{3.21b}$$

Démonstration. La démonstration repose sur l'approche descripteur déjà décrite dans la section 2.3.3. Ainsi, en notant $\varepsilon_{\text{red}}(t) = \dot{e}_{\text{red}}(t)$, le système (3.6) se réécrit comme suit

$$\begin{bmatrix} I_{r+q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_{\text{red}}(t) \\ \dot{\varepsilon}_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r+q} \\ \mathbb{N}(u) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) & -I_{r+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \int_t^{t-\tau_i} \varepsilon_{\text{red}}(s) ds \tag{3.22}$$

Une fonction de Lyapunov choisie pour l'analyse de stabilité est composée d'un terme qua-

dratique et d'un terme pour la stabilité dépendante du retard comme suit (voir [Fri01, Fri14])

$$V(e_{\text{red}}) = \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r+q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{m} \int_{-\tau_i}^{0} \int_{t}^{t+\beta} \varepsilon_{\text{red}}^T(s)\varepsilon_{\text{red}}(s) ds d\beta \tag{3.23}$$

avec $P(u) = P(u)^T > 0 \in \mathbb{R}^{(r+q)\times(r+q)}$. $M \in \mathbb{R}^{(r+q)\times(r+q)}$ est une matrice donnée et κ est un scalaire strictement positif. La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov $V(e_{\text{red}})$ le long de la trajectoire du système (3.22) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_{\text{red}}) = & \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_{\text{red}}(t) \\ \dot{\varepsilon}_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \dot{e}_{\text{red}}(t) \\ \dot{\varepsilon}_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{n+q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{m} \int_{t}^{t-\tau_i} \varepsilon_{\text{red}}^T(s)\varepsilon_{\text{red}}(s) ds \\ = & \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} \\ * & -M - M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{m} S_i(t) - \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{m} \int_{t}^{t-\tau_i} \dot{e}_{\text{red}}^T(s)\dot{e}_{\text{red}}(s) ds \end{aligned} \tag{3.24}$$

avec

$$a_{(1,1)} = \dot{P}(u) + M\mathbb{N}(u) + \mathbb{N}^T(u)M^T + \sum_{i=0}^{m} M\mathbb{N}_{d_i} u_i(t) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{N}_{d_i}^T u_i(t) M^T \tag{3.25a}$$

$$a_{(1,2)} = P(u) - M + \mathbb{N}^T(u)M^T + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{N}_{d_i}^T u_i(t) M^T \tag{3.25b}$$

$$\begin{aligned} S_i(t) = & \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \int_{t}^{t-\tau_i} \dot{e}_{\text{red}}(s) ds \\ & + \int_{t}^{t-\tau_i} \dot{e}_{\text{red}}^T(s) ds \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.25c}$$

En utilisant le lemme de majoration A.3.1, les termes $S_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, sont majorés comme suit

$$\begin{aligned} S_i(t) \leq \kappa & \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{\kappa} \int_{t}^{t-\tau_i} \dot{e}_{\text{red}}^T(s)\dot{e}_{\text{red}}(s) ds \end{aligned} \tag{3.26}$$

En injectant l'inégalité ci-dessus dans l'expression de la dérivée de $V(e_{\text{red}})$, cette dernière est majorée ainsi

$$\dot{V}(e_{\text{red}}) \leq \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} & \overline{a}_{(1,2)} \\ * & \overline{a}_{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

avec

$$\overline{a}_{(1,1)} = a_{(1,1)} + \kappa \sum_{i=0}^{m} M\mathbb{N}_{d_i}\mathbb{N}_{d_i}^T u_i^2(t) M^T$$
$$\overline{a}_{(1,2)} = a_{(1,2)} + \kappa \sum_{i=0}^{m} M\mathbb{N}_{d_i}\mathbb{N}_{d_i}^T u_i^2(t) M^T$$
$$\overline{a}_{(2,2)} = -M - M^T + \kappa \sum_{i=0}^{m} M\mathbb{N}_{d_i}\mathbb{N}_{d_i}^T u_i^2(t) M^T$$

La stabilité de l'erreur d'estimation est donc garantie si

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} & \overline{a}_{(1,2)} \\ * & \overline{a}_{(2,2)} \end{bmatrix} < 0$$

En appliquant le lemme de Schur (voir (A.3.7b)), on obtient

$$\begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} & M\mathbb{N}_{d_0} & M\mathbb{N}_{d_1} & \dots & M\mathbb{N}_{d_m} \\ * & -M - M^T & M\mathbb{N}_{d_0} & M\mathbb{N}_{d_1} & \dots & M\mathbb{N}_{d_m} \\ * & * & -\frac{1}{\kappa} I_{r+q} & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\kappa} I_{r+q} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\kappa} I_{r+q} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.28}$$

L'inégalité (3.28) dépend du vecteur de commande $u(t)$, ce qui ne permet pas une résolution simple du problème. Puisque les entrées et leurs dérivées sont bornées, elles appartiennent au polytope convexe $\mathcal{P}$ donné par (2.18), ce qui permet de résoudre le problème sur l'ensemble des sommets Φ donné par (2.19) du polytope $\mathcal{P}$. Ainsi, en utilisant le vecteur $\delta(t)$ décrit par (2.17), les matrices $\mathbb{N}(u)$, $\mathbb{N}_{d_i} u_i$ pour $i = 0, \dots, m$, $P(u)$ et sa dérivée se réécrivent comme suit

$$P(u) \longrightarrow \quad P(\delta) = P_0 + \sum_{i=1}^{m} \delta_i P_i, \tag{3.29a}$$

$$\dot{P}(u) \longrightarrow \quad \overline{P}(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \delta_{m+i} P_i \tag{3.29b}$$

$$\mathbb{N}(u) \longrightarrow \quad \mathbb{N}(\delta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} (N_{i,1}^z + \mathcal{Z}_{\text{red},1} N_{i,2}^z)\delta_i & LG - J_1^z CG - \mathcal{Z}_{\text{red},1} J_2^z CG \\ \mathcal{Z}_{\text{red},2} Q_2^\theta & -\mathcal{Z}_{\text{red},2} J_2^\theta CG \end{bmatrix} \tag{3.29c}$$

$$\mathbb{N}_{d_i} u_i \longrightarrow \quad \mathbb{N}_{d_i} \delta_i = \begin{bmatrix} N_{d_i,1}^z + \mathcal{Z}_{\text{red},1} N_{d_i,2}^z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_i \tag{3.29d}$$

Le développement des blocs de l'inégalité (3.28) aux sommets du polytope $\mathcal{P}$ donne les LMIs (3.20), ce qui termine la démonstration. •

Remarque 3.3.1. *Dans la section 3.3, nous avons posé le problème de synthèse d'un observateur adaptatif avec un ordre réduit $r < n$. Le passage de l'ordre réduit à l'ordre plein se fait en remplaçant la matrice L par I_n et en changeant la dimension de l'erreur d'estimation de $r + q$ par $n + q$.*

Remarque 3.3.2. *La matrice M est choisie avec la forme donnée par (3.19) pour les raisons suivantes.*

(i) *Si la matrice M est choisie sous la forme suivante*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

avec $M_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ et $M_{21} \in \mathbb{R}^{q\times n}$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix} \mathcal{Z}_{\text{red},1} \qquad \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} \mathcal{Z}_{\text{red},2}$$

Par conséquent, l'existence des gains de l'observateur dépend des conditions de rang suivantes

$$\text{rang} \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} M_{11} & Y_{11} \\ M_{21} & Y_{21} \end{bmatrix} \qquad \text{rang} \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} M_{12} & Y_{12} \\ M_{22} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

ce qui rajoute des contraintes non-convexes à satisfaire dans le théorème 3.3.2.

(ii) *Le fait de considérer la matrice M sous une forme bloc-diagonale, c'est-à-dire avec $M_{12} = 0$ et $M_{21} = 0$, implique que le bloc $a^j_{(2,2)}$ sur la diagonale des LMIs (3.20) devient*

$$a^j_{(2,2)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3}$$

et les LMIs (3.20) peuvent ne pas être satisfaites car il n'y a pas de gains Y_{11} et Y_{22} pour garantir $a^j_{(2,2)} < 0$.

Pour résoudre les deux problèmes mentionnés ci-dessus, nous avons posé $M_{21} = S_1 M_{11}$ et $M_{12} = S_2 M_{22}$ où les matrices S_1 et S_2 sont des matrices de réglage choisies a priori. Cela mène à $Y_{21} = S_1 Y_{11}$ et $Y_{12} = S_2 Y_{22}$.

Remarque 3.3.3. *Contrairement à la matrice S_1, la matrice S_2 n'apparait pas dans les blocs $a^j_{(2,2)}$, pour $j = 1, \ldots, 2^{2m}$, des LMI (3.20). Nous pouvons donc définir $S_2 = 0$. En revanche, nous avons besoin de la condition $S_1 \neq 0$.*

Remarque 3.3.4. *Vu la forme des blocs $a_{(3,3)}$ et $a_{(4,4)}$ apparaissant dans la diagonale des LMIs (3.20), les matrices M_{11} et M_{22} doivent être non singulières pour satisfaire ces LMIs.*

Remarque 3.3.5. *La matrice M doit être non singulière ($\det(M) \neq 0$) puisque les LMIs (3.20) exigent que $-M - M^T < 0$. Le choix des matrices de réglage S_1 et S_2 tel que $\det(I_r - S_2 S_1) \neq 0$ garantit $\det(M) \neq 0$.*

3.4 Observateurs adaptatifs d'ordre plein

3.4.1 Simplification de l'équation (3.3b) dans l'observateur adaptatif (3.3)

Les observateurs adaptatifs que l'on trouve dans la littérature (voir les références citées dans la section 1.7.2) ne contiennent pas les termes J^z et J^θ, c'est-à-dire que l'équation (3.3b) n'existe pas dans ces observateurs et que $\eta^z(t)$ et $\eta^\theta(t)$ y sont remplacées respectivement par $\hat{x}(t)$ et $\hat{\theta}(t)$. A titre d'exemple, le lecteur peut se référer à l'observateur adaptatif synthétisé dans [CR97]. Afin de comparer nos résultats avec ceux de la littérature, nous allons donc étudier les deux cas suivants : $J^\theta = 0$ puis $J^z = 0$ et $J^\theta = 0$.

- Cas $J^\theta = 0$
  - Contrainte (3.7a) $\longrightarrow F^z = \Psi_L B = (L - J^z C)B$ et $F^\theta = 0$.
  - Contrainte (3.9a) $\longrightarrow Q^z = \Psi_L G = (L - J^z C)G$.
  - Contrainte (3.9b) $\longrightarrow N^\theta = 0$.
  - Contraintes (3.9h), (3.9i) et (3.9j) $\longrightarrow M_i^\theta C = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta C = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$, puisque, sans perte de généralité, la matrice C est de rang plein lignes (en effet les mesures ne sont pas redondantes), nous avons donc $M_i^\theta = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$.
  - $\eta_\theta(t) = \hat{\theta}(t)$.
  - Il reste à résoudre les contraintes (3.9c), (3.9d), (3.9e), (3.9f) et(3.9g).
- Cas $J^z = 0$ et $J^\theta = 0$
  - Contrainte (3.7a) $\longrightarrow F^z = B$ et $F^\theta = 0$.
  - Contrainte (3.9a) $\longrightarrow Q^z = LG$.
  - Contrainte (3.9b) $\longrightarrow N^\theta = 0$.
  - Contraintes (3.9h), (3.9i) et (3.9j) $\longrightarrow M_i^\theta C = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta C = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$, puisque, sans perte de généralité, la matrice C est de rang plein lignes (en effet les mesures ne sont pas redondantes), nous avons donc $M_i^\theta = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$.
  - Equations (3.10a) à (3.10e) $\longrightarrow K_i^z = M_i^z$, pour $i = 1, \ldots, m$, $K_{d_i}^z = M_{d_i}^z$, pour $i = 0, \ldots, m$, et $K_0^\theta = M_0^\theta$.
  - On a $\eta_z(t) = \hat{z}(t)$ et $\eta_\theta(t) = \hat{\theta}(t)$.
  - Il reste à résoudre les contraintes (3.9c), (3.9d), (3.9e), (3.9f) et (3.9g).

Vu que les observateurs adaptatifs dans la littérature sont d'ordre plein, nous allons étudier ces deux cas lorsque l'observateur (3.3) est d'ordre plein, c'est-à-dire avec $\hat{x}(t) = \hat{z}(t)$. Pour plus de clarté dans les développements suivants, nous allons remplacer l'indice et l'exposant "z" dans les équations de la section 3.3 par l'indice et l'exposant "x" dans la section 3.4. Puisque $z(t) = x(t)$, nous avons $L = I_n$, ce qui a les incidences suivantes sur les matrices de l'observateur adaptatif.

- Cas $L = I_n$ et $J^\theta = 0$
  - Contrainte (3.7a) $\longrightarrow F^x = \Psi_{\text{pln}} B = (I_n - J^x C)B$ et $F^\theta = 0$.
  - Contrainte (3.9a) $\longrightarrow Q^x = \Psi_{\text{pln}} G = (I_n - J^x C)G$.
  - Contrainte (3.9b) $\longrightarrow N^\theta = 0$.
  - Contrainte (3.9g) $\longrightarrow Q^\theta = -K_0^\theta C$.
  - Contraintes (3.9h), (3.9i) et (3.9j) $\longrightarrow M_i^\theta C = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta C = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$, puisque, sans perte de généralité, la matrice C est de rang plein lignes (en effet les mesures ne sont pas redondantes), nous avons donc $M_i^\theta = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$.
  - $\eta_\theta(t) = \hat{\theta}(t)$.
  - Equation (3.10e) $\longrightarrow M_0^\theta = K_0^\theta (I_p - C J^x)$.
  - Il reste à résoudre les contraintes (3.9c), (3.9d), (3.9e) et (3.9f).
- Cas $L = I_n$, $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$
  - Contrainte (3.7a) $\longrightarrow F^x = B$ et $F^\theta = 0$.
  - Contrainte (3.9a) $\longrightarrow Q^x = G$.
  - Contrainte (3.9b) $\longrightarrow N^\theta = 0$.
  - Contraintes (3.9c), (3.9d), (3.9e) et (3.9f) $\longrightarrow N_i^x = A_i - K_i^x$ et $N_{d_i}^x = A_{d_i} - K_{d_i}^x$, pour $i = 0, \ldots, m$.
  - Contrainte (3.9g) $\longrightarrow Q^\theta = -K_0^\theta C$.

- Contraintes (3.9h), (3.9i) et (3.9j) $\longrightarrow$ $M_i^\theta C = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta C = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$, puisque, sans perte de généralité, la matrice C est de rang plein lignes (en effet les mesures ne sont pas redondantes), nous avons donc $M_i^\theta = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$, et $M_{d_i}^\theta = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$.
- Equations (3.10a) à (3.10e) $\longrightarrow$ $M_i^x = K_i^x$, pour $i = 1, \ldots, m$, $M_{d_i}^x = K_{d_i}^x$, pour $i = 0, \ldots, m$, et $M_0^\theta = K_0^\theta$.
- On a $\eta_x(t) = \hat{x}(t)$ et $\eta_\theta(t) = \hat{\theta}(t)$.

Puisque $L = I_n$ pour l'observateur adaptatif d'ordre plein, la condition de rang (3.14) est toujours vérifiée.

Ainsi, poser $J^\theta = 0$ ou poser $J^z = 0$ et $J^\theta = 0$ (ou $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$) permet de simplifier la structure de l'observateur adaptatif. Cependant, J^z (ou J^x) et J^θ permettent d'avoir plus de degrés de liberté pour résoudre les LMIs lors de la synthèse des observateurs adaptatifs.

3.4.2 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$

En se basant sur l'analyse faite dans la section 3.4.1, l'observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$ donné par (3.3) se réécrit comme suit

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_x(t) = N_0^x \eta_x(t) + \Psi_{\text{pln}} G\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{m} N_i^x u_i \eta_x(t) + N_{d_0}^x \eta_x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i}^x u_i \eta_x(t-\tau_i) \\ + \Psi_{\text{pln}} B u(t) + M_0^x y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i^x u_i y(t) + M_{d_0}^x y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i}^x u_i y(t-\tau_i) \quad (3.30a)\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -K_0^\theta C \eta_x(t) + K_0^\theta (I_p - CJ^x) y(t) \quad (3.30b)$$

$$\hat{x}(t) = \eta_x(t) + J^x y(t) \quad (3.30c)$$

où $\hat{x}(t)$ et $\hat{\theta}(t)$ sont respectivement les estimations de $x(t)$ et θ. $\eta_x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état de l'observateur. Les matrices N_i^x, M_i^x, $N_{d_i}^x$, $M_{d_i}^x$, pour $i = 0, \ldots, m$, J^x et K_0^θ sont les gains de l'observateur à déterminer telles que l'erreur d'estimation $e_{\text{pln}}(t)$ définie par

$$e_{\text{pln}}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ \theta - \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{\text{pln}} x(t) - \eta_x(t) \\ \theta - \hat{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

converge vers zéro avec $\Psi_{\text{pln}} = I_n - J^x C$.

En insérant (3.30c) dans (3.30b), on obtient

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = K_0^\theta (y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (3.32)$$

Ainsi, comme dans les observateurs adaptatifs donnés dans la littérature, la dynamique de l'estimation du vecteur des paramètres inconnus est obtenue en injectant l'erreur d'estimation de la mesure via le gain K_0^θ.

L'existence de l'observateur est garantie par le théorème suivant.

Théorème 3.4.1. *Le système (3.30) est un observateur adaptatif d'ordre plein pour le système (3.1) si la dynamique de l'erreur donnée ci-dessous*

$$\dot{e}_{\text{pln}}(t) = \mathbb{N}(u(t)) e_{\text{pln}}(t) + \mathbb{N}_{d_0} e_{\text{pln}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) e_{\text{pln}}(t-\tau_i) \quad (3.33)$$

avec

$$\mathbb{N}(u(t)) = \begin{bmatrix} N_0^x + \sum_{i=1}^m N_i^x u_i(t) & \Psi_{\text{pln}} G \\ -K_0^\theta C & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} N_{d_0}^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i}^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est stable et si les équations suivantes sont vérifiées, pour $i = 0, \dots, m$,

$$\Psi_{\text{pln}} A_i - N_i^x \Psi_{\text{pln}} - M_i^x C = 0 \tag{3.34a}$$

$$\Psi_{\text{pln}} A_{d_i} - N_{d_i}^x \Psi_{\text{pln}} - M_{d_i}^x C = 0 \tag{3.34b}$$

Démonstration. Il suffit de calculer les dynamiques des erreurs d'estimation $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) = \Psi_{\text{pln}} \dot{x}(t) - \dot{\eta}_x(t)$ et $\dot{e}_\theta(t) = -\dot{\hat{\theta}}$ et d'annuler les termes qui dépendent du vecteur d'état $x(t)$ (voir la démonstration du théorème 3.3.1). •

Notons qu'en se basant sur les équivalences faites dans la section 3.4.1, les contraintes (3.9c), (3.9d), (3.9e) et (3.9f) qui restent à résoudre, sont équivalentes aux équations (3.34a) et (3.34b), pour $i = 0, \dots, m$.

3.4.2.1 Paramétrage des gains de l'observateur

Les gains de l'observateur (3.30) sont obtenus par la résolution des équations (3.34a)-(3.34b). En utilisant l'expression $\Psi_{\text{pln}} = I_n - J^x C$, ces dernières se réécrivent comme suit, pour $i = 0, \dots, m$,

$$A_i = N_i^x + K_i^x C + J^x C A_i \tag{3.35a}$$

$$A_{d_i} = N_{d_i}^x + K_{d_i}^x C + J^x C A_{d_i} \tag{3.35b}$$

avec $K_i^x = M_i^x - N_i^x J^x$ et $K_{d_i}^x = M_{d_i}^x - N_{d_i}^x J^x$. Mettre ces équations sous forme compacte donne l'équation linéaire suivante

$$\mathbb{W}_{\text{pln}} = \mathbb{X}_{\text{pln}} \mathbb{V}_{\text{pln}} \tag{3.36}$$

où la matrice $\mathbb{X}_{\text{pln}}$, regroupant les gains à déterminer de l'observateur, est donnée par

$$\mathbb{X}_{\text{pln}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:c} N_0^x & \dots & N_m^x & N_{d_0}^x & \dots & N_{d_m}^x & K_0^x & \dots & K_m^x & K_{d_0}^x & \dots & K_{d_m}^x & J^x \end{array}\right] \tag{3.37}$$

et où $\mathbb{W}_{\text{pln}}$ et $\mathbb{V}_{\text{pln}}$ sont les matrices connues suivantes

$$\mathbb{W}_{\text{pln}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} A_0 & \dots & A_m & A_{d_0} & \dots & A_{d_m} \end{array}\right]$$

$$\mathbb{V}_{\text{pln}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} I_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & I_n \\ \hdashline C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & C \\ \hdashline CA_0 & \dots & CA_m & CA_{d_0} & \dots & CA_{d_m} \end{array}\right]$$

De même que dans la section 3.3, l'équation (3.36) admet une solution si et seulement si la condition suivante est vérifiée

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{V}_{\text{pln}}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{W}_{\text{pln}}\\ \mathbb{V}_{\text{pln}}\end{bmatrix}\right) \tag{3.38}$$

Cependant, cette condition est toujours satisfaite en raison de la structure de la matrice $\mathbb{V}_{\text{pln}}$. En effet, cette dernière est une matrice de rang plein colonnes avec $\operatorname{rang}(\mathbb{V}_{\text{pln}}) = 2n(m+1)$. La solution de l'équation (3.36) est donnée par

$$\mathbb{X}_{\text{pln}} = \mathbb{W}_{\text{pln}}\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger} + \mathcal{Z}_{\text{pln},1}(I_{k_{\text{pln}}} - \mathbb{V}_{\text{pln}}\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger}) \tag{3.39}$$

où $\mathcal{Z}_{\text{pln},1} \in \mathbb{R}^{(n+q)\times k_{\text{pln}}}$ et $k_{\text{pln}} = 2(m+1)(n+p)+p$. Vu que la matrice $\mathbb{V}_{\text{pln}}$ est de rang plein colonnes, une inverse généralisée de $\mathbb{V}_{\text{pln}}$ peut toujours être choisie comme suit

$$\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger} = \begin{bmatrix} I_{n(m+1)} & 0_{n(m+1)} & 0_{n(m+1)\times p(m+1)} & 0_{n(m+1)\times p(m+1)} & 0_{n(m+1)\times p}\\ 0_{n(m+1)} & I_{n(m+1)} & 0_{n(m+1)\times p(m+1)} & 0_{n(m+1)\times p(m+1)} & 0_{n(m+1)\times p}\end{bmatrix} \tag{3.40}$$

ce qui permet de calculer le terme $I_{k_{\text{pln}}} - \mathbb{V}_{\text{pln}}\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger}$ ainsi

$$I_{k_{\text{pln}}} - \mathbb{V}_{\text{pln}}\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger} = \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline -C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_p & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & -C & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & I_p\\ \hdashline 0 & \dots & 0 & -C & 0 & 0 & I_p & 0 & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & I_p\\ \hdashline -CA_0 & \dots & -CA_m & -CA_{d_0} & \dots & -CA_{d_m} & 0 & 0 & I_p \end{array}\right]$$

et selon la partition de la matrice $\mathbb{X}_{\text{pln}}$, la matrice $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ peut être décomposée ainsi

$$\mathcal{Z}_{\text{pln},1} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \mathcal{Z}_{1,1} & \mathcal{Z}_{1,1d} & \mathcal{Z}_{1,2} & \mathcal{Z}_{1,2d} & \mathcal{Z}_{1,3}\end{array}\right] \tag{3.41}$$

Vu les blocs nuls de la matrice $I_{k_{\text{pln}}} - \mathbb{V}_{\text{pln}}\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger}$, nous constatons que les gains $\mathcal{Z}_{1,1}$ et $\mathcal{Z}_{1,1d}$ n'interviennent pas dans le calcul des gains de l'observateur. Ainsi, le gain $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ devient

$$\mathcal{Z}_{\text{pln},1} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} 0 & 0 & \mathcal{Z}_{1,2} & \mathcal{Z}_{1,2d} & \mathcal{Z}_{1,3}\end{array}\right] \tag{3.42}$$

En notant $\mathcal{Z}_{1,2} = \begin{bmatrix} Z_{1,20} & \dots & Z_{1,2m}\end{bmatrix}$ et $\mathcal{Z}_{1,2d} = \begin{bmatrix} Z_{1,2d,0} & \dots & Z_{1,2d,m}\end{bmatrix}$ et en utilisant (3.37),

la relation (3.39) se réécrit comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_0^{xT} \\ \vdots \\ N_m^{x\,T} \\ N_{d_0}^{x\,T} \\ \vdots \\ N_{d_m}^{x\,T} \\ K_0^{xT} \\ \vdots \\ K_m^{x\,T} \\ K_{d_0}^{x\,T} \\ \vdots \\ K_{d_m}^{x\,T} \\ J_x^{\,T} \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}_{\text{pln}}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,1}^{x\;T} \\ \vdots \\ N_{m,1}^{x\;T} \\ N_{d_0,1}^{x\;T} \\ \vdots \\ N_{d_m,1}^{x\;T} \\ K_{0,1}^{x\;T} \\ \vdots \\ K_{m,1}^{x\;T} \\ K_{d_0,1}^{x\;T} \\ \vdots \\ K_{d_m,1}^{x\;T} \\ J_1^{xT} \end{bmatrix}}_{(\mathbb{W}_{\text{pln}}\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger})^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} N_{0,2}^{x\;T} \\ \vdots \\ N_{m,2}^{x\;T} \\ N_{d_0,2}^{x\;T} \\ \vdots \\ N_{d_m,2}^{x\;T} \\ K_{0,2}^{x\;T} \\ \vdots \\ K_{m,2}^{x\;T} \\ K_{d_0,2}^{x\;T} \\ \vdots \\ K_{d_m,2}^{x\;T} \\ J_2^{xT} \end{bmatrix}}_{(I_{k_{\text{pln}}} - \mathbb{V}_{\text{pln}}\mathbb{V}_{\text{pln}}^{\dagger})^T} \quad \mathcal{Z}_{\text{pln},1}^T = \begin{bmatrix} (A_0 - Z_{1,20}C - \mathcal{Z}_{1,3}CA_0)^T \\ \vdots \\ (A_m - Z_{1,2m}C - \mathcal{Z}_{1,3}CA_m)^T \\ (A_{d_0} - Z_{1,2d,0}C - \mathcal{Z}_{1,3}CA_{d_0})^T \\ \vdots \\ (A_{d_m} - Z_{1,2d,m}C - \mathcal{Z}_{1,3}CA_{d_0})^T \\ (Z_{1,20})^T \\ \vdots \\ (Z_{1,2m})^T \\ (Z_{1,2d,0})^T \\ \vdots \\ (Z_{1,2d,m})^T \\ (\mathcal{Z}_{1,3})^T \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Les matrices $\mathbb{N}(u(t))$, $\mathbb{N}_{d_0}$ et $\mathbb{N}_{d_i}$, pour $i = 1, \ldots, m$, se réécrivent donc comme suit

$$\mathbb{N}(u(t)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} (A_i - Z_{1,2i}C - \mathcal{Z}_{1,3}CA_i)\, u_i(t) & G - \mathcal{Z}_{1,3}CG \\ -K_0^{\theta}C & 0 \end{bmatrix} \tag{3.44a}$$

$$\mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} A_{d_0} - Z_{1,2d,0}C - \mathcal{Z}_{1,3}CA_{d_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.44b}$$

$$\mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} A_{d_i} - Z_{1,2d,i}C - \mathcal{Z}_{1,3}CA_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.44c}$$

avec $u_0(t) = 1$.

Remarque 3.4.1. *A la différence de la matrice $\mathbb{X}_{\text{red}}$ dans (3.12) qui contient des gains notés avec un exposant "z" et un exposant "θ", la matrice $\mathbb{X}_{\text{pln}}$ dans (3.37) ne contient que des gains notés avec un exposant "x" car le gain K_0^{θ} n'intervient pas dans $\mathbb{X}_{\text{pln}}$. Ainsi, par analogie avec les notations introduites dans (3.16), nous n'avons que le gain $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ dans (3.43), le gain $\mathcal{Z}_{\text{pln},2}$ n'existant pas.*

3.4.2.2 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation

En utilisant le théorème 3.4.1 et les relations (3.43) et (3.44), nous pouvons énoncer sans démonstration le théorème suivant en adaptant le théorème 3.3.2 au cas où $L = I_n$ et $J^{\theta} = 0$, et en prenant en compte la remarque 3.3.1.

Théorème 3.4.2. *Supposons que l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée. Le système (3.30) est un observateur adptatif pour le système (3.1a), (3.1b) et (3.1c) garantissant la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation s'il existe, pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \ldots, 2^{2m}$,*

— *une matrice* $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$ *donnée par*

$$P(\sigma^j) = P^T(\sigma^j) = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} \\ P_{02}^T & P_{03} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i2}^T & P_{i3} \end{bmatrix} > 0 \tag{3.45}$$

avec $P_{i1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ *et* $P_{i3} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, *pour* $i = 0, \ldots, m$,

— *une matrice* $M \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, *donnée par*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & S_2 M_{22} \\ S_1 M_{11} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

avec $M_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $M_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ *sont des matrices non singulières.* $S_1 \in \mathbb{R}^{q\times n}$ *et* $S_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ *sont des matrices de réglage.*

— *des matrices* $Y_{11} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *et* $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$,

— *un scalaire* $\kappa > 0$

tels que les LMIs suivantes

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|ccc|cc} a^j_{(1,1)} & a^j_{(1,2)} & a^j_{(1,3)} & a^j_{(1,4)} & a_0 & 0 & a^j_1 & 0 & \dots & a^j_m & 0 \\ * & a^j_{(2,2)} & a^j_{(2,3)} & a^j_{(2,4)} & S_1a_0 & 0 & S_1a^j_1 & 0 & \dots & S_1a^j_m & 0 \\ \hline * & * & a_{(3,3)} & a_{(3,4)} & a_0 & 0 & a^j_1 & 0 & \dots & a^j_m & 0 \\ * & * & * & a_{(4,4)} & S_1a_0 & 0 & S_1a^j_1 & 0 & \dots & S_1a^j_m & 0 \\ \hline * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_q & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_q & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline * & * & * & * & * & \dots & \dots & \dots & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 \\ * & * & * & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * & \frac{-1}{\kappa}I_q \end{array}\right] < 0 \tag{3.47}$$

soient vérifiées où

$$\begin{aligned} a_{(1,1)} = {} & \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i1} + (M_{11}N^x_{0,1} + Y_{11}N^x_{0,2}) + \sum_{i=1}^{m} (M_{11}N^x_{i,1} + Y_{11}N^x_{i,2})\sigma^j_i + (N^{xT}_{0,1}M^T_{11} + N^{xT}_{0,2}Y^T_{11}) \\ & + \sum_{i=1}^{m} (N^{xT}_{i,1}M^T_{11} + N^{xT}_{i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i + (M_{11}N^x_{d_0,1} + Y_{11}N^x_{d_0,2}) + \sum_{i=1}^{m} (M_{11}N^x_{d_i,1} + Y_{11}N^x_{d_i,2})\sigma^j_i \\ & + (N^{xT}_{d_0,1}M^T_{11} + N^{xT}_{d_0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=0}^{m} (N^{xT}_{d_i,1}M^T_{11} + N^{xT}_{d_i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i - S_2Y_{22}C - C^TY^T_{22}S^T_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{(1,2)} = {} & \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i2} + (N^{xT}_{0,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{0,2}Y^T_{11}S^T_1) + \sum_{i=1}^{m} (N^{xT}_{i,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{i,2}Y^T_{11}S^T_1)\sigma^j_i - C^TY^T_{22} \\ & + (N^{xT}_{d_0,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{d_0,2}Y^T_{11}S^T_1) + \sum_{i=1}^{m} (N^{xT}_{d_i,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{d_i,2}Y^T_{11}S^T_1)\sigma^j_i \\ & + M_{11}G - M_{11}J^x_1CG - Y_{11}J^x_2CG \end{aligned}$$

$$a_{(2,2)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{m+i}^{j} P_{i3} + S_1 M_{11} G - S_1 M_{11} J_1^x CG - S_1 Y_{11} J_2^x CG + G^T M_{11}^T S_1^T - G^T C^T J_1^{xT} M_{11}^T S_1^T - G^T C^T J_2^{xT} Y_{11}^T S_1^T$$

$$a_{(1,3)} = P_{01} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_{i1} - M_{11} + (N_{0,1}^{xT} M_{11}^T + N_{0,2}^{xT} Y_{11}^T) + \sum_{i=1}^{m} (N_{i,1}^{xT} M_{11}^T + N_{i,2}^{xT} Y_{11}^T)\sigma_i^j - C^T Y_{22}^T S_2^T + (N_{d_0,1}^{xT} M_{11}^T + N_{d_0,2}^{xT} Y_{11}^T) + \sum_{i=1}^{m} (N_{d_i,1}^{xT} M_{11}^T + N_{d_i,2}^{xT} Y_{11}^T)\sigma_i^j$$

$$a_{(1,4)} = P_{02} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_{i2} - S_2 M_{22} + (N_{0,1}^{xT} M_{11}^T S_1^T + N_{0,2}^{xT} Y_{11}^T S_1^T) + (N_{d_0,1}^{xT} M_{11}^T S_1^T + N_{d_0,2}^{xT} Y_{11}^T S_1^T) + \sum_{i=1}^{n} (N_{i,1}^{xT} M_{11}^T S_1^T + N_{i,2}^{xT} Y_{11}^T S_1^T)\sigma_i^j + \sum_{i=1}^{m} (N_{d_i,1}^{xT} M_{11}^T S_1^T + N_{d_i,2}^{xT} Y_{11}^T S_1^T)\sigma_i^j - C^T Y_{22}^T$$

$$a_{(2,3)} = P_{02}^T + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_{i2}^T - S_1 M_{11} + G^T M_{11}^T - G^T C^T J_1 x T M_{11}^T - G^T C^T J_2^{xT} Y_{11}^T$$

$$a_{(2,4)} = P_{03} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_{i3} - M_{22} + G^T M_{11}^T S_1^T - G^T C^T J_1^{xT} M_{11}^T S_1^T - G^T C^T J_2^{xT} Y_{11}^T S_1^T$$

$$a_{(3,3)} = -M_{11} - M_{11}^T$$

$$a_{(3,4)} = -S_2 M_{22} - M_{11}^T S_1^T$$

$$a_{(4,4)} = -M_{22} - M_{22}^T$$

$$a_0 = (M_{11} N_{d_0,1}^x + Y_{11} N_{d_0,2}^x)$$

$$a_i^j = (M_{11} N_{d_i,1}^x + Y_{11} N_{d_i,2}^x)\sigma_i^j \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, m$$

Les gains $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ et K_0^θ sont donnés par

$$\mathcal{Z}_{\text{pln},1} = M_{11}^{-1} Y_{11} \tag{3.48a}$$

$$K_0^\theta = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{3.48b}$$

Les matrices des gains de l'observateur N_i^x, M_i^x, $N_{d_i}^x$, $M_{d_i}^x$, pour $i = 0, \ldots, m$, et J^x sont déduites avec l'équation (3.43).

3.4.2.3 Exemple numérique

Afin d'illustrer les développements faits sur l'observateur d'ordre plein (3.30), nous considérons le système (3.1) avec $m = 1$, $L = I_2$ et les matrices suivantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A_{d_0} = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.5 \\ -1.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$A_{d_1} = \begin{bmatrix} -1.8 & 2.4 \\ -1.2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.22 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les retards affectant le système sont $\tau_0 = 0.2$s et $\tau_1 = 0.5$s. L'entrée de commande choisie est $u(t) = 1 + 0.2\sin(0.01t)$ et vérifie l'hypothèse 2.3.1.

Avec les matrices S_1 et S_2 choisies comme suit

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2.4915\ 10^{-6} & 0.37144 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 2.7523\ 10^{-6} \\ -1.7078\ 10^{-5} \end{bmatrix}$$

la résolution des LMIs (3.47) aux sommets du polytope $\mathcal{P}$ génère les résultats suivants

$$P = \begin{bmatrix} 41.355 & * & * \\ 4475\ 10^{-7} & 16.895 & * \\ 30802\ 10^{-8} & 3.0055 & 30.78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.5409 & * & * \\ -17971\ 10^{-8} & 24.441 & * \\ -9.1451\ 10^{-5} & 2.2814 & 0.45821 \end{bmatrix} \sigma_1^j$$

$$M = \left[\begin{array}{cc:c} 25.023 & 65329\ 10^{-8} & 7435\ 10^{-8} \\ 65329\ 10^{-8} & 19.671 & -46134\ 10^{-8} \\ \hdashline 0.305\ 10^{-3} & 7.3065 & 27.014 \end{array}\right]$$

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} 94.174 & 51.557 & -0.016676 & -0.015275 & 250.23 \\ -289.07 & 149.02 & -411.29 & -321.87 & -47.673 \end{bmatrix}$$

$$Y_{22} = -180.15$$

Le calcul des gains $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ et K_0^θ avec les équations (3.48a) et (3.48b) donne

$$\mathcal{Z}_{\text{pln},1} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc:c} 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7638 & 2.0602 & -0.00012056 & -0.00018323 & 9.9999 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14.695 & 7.5756 & -20.909 & -16.363 & -2.4239 \end{array}\right]$$

$$K_0^\theta = -6.6686$$

et la relation (3.43) donne les gains de l'observateur suivants

$$N_0^x = \begin{bmatrix} -0.37646 & 2.038\ 10^{-5} \\ -1.4696 & 0.98477 \end{bmatrix} \qquad N_1^x = \begin{bmatrix} -0.20603 & 1.019\ 10^{-5} \\ 5.2178\ 10^{-5} & -1.7576 \end{bmatrix}$$

$$N_{d_0}^x = \begin{bmatrix} -1.7191\ 10^{-7} & 5.0951\ 10^{-6} \\ -1.3304\ 10^{-6} & -0.47881 \end{bmatrix} \qquad N_{d_1}^x = \begin{bmatrix} -1.9146\ 10^{-8} & 2.4457\ 10^{-5} \\ -1.9938\ 10^{-6} & -0.018271 \end{bmatrix}$$

$$M_0^x = \begin{bmatrix} -0.00082625 \\ -31.778 \end{bmatrix} \qquad M_1^x = \begin{bmatrix} -0.00010561 \\ 11.836 \end{bmatrix} \qquad M_{d_0}^x = \begin{bmatrix} -0.00013463 \\ -19.748 \end{bmatrix}$$

$$M_{d_1}^x = \begin{bmatrix} -0.0002427 \\ -16.319 \end{bmatrix} \qquad J^x = \begin{bmatrix} 9.9999 \\ -2.4239 \end{bmatrix}$$

Ces gains sont injectés dans l'observateur afin de visualiser ses performances. Les résultats de simulation sont présentés dans les figures 3.1 et 3.2.

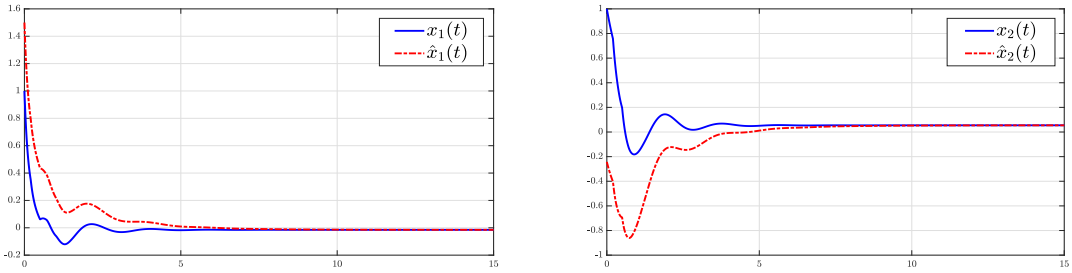


FIGURE 3.1 – Variation des états x_1 et x_2 (—) et leurs estimations respectives $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$.

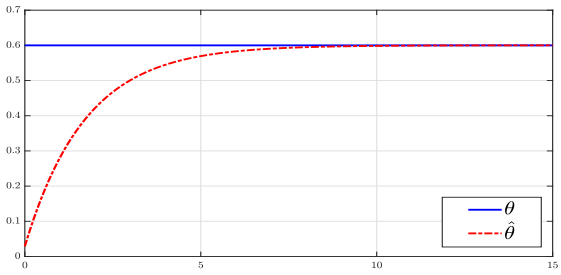


FIGURE 3.2 – Variation du paramètre inconnu θ (—) et son estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$.

Les figures 3.1 et 3.2 obtenues permettent de valider la convergence de l'état estimé vers l'état réel, ainsi que la convergence de l'estimation du paramètre inconnu vers sa valeur réelle. La prise en compte de la présence des retards et des paramètres inconnus dans la dynamique des systèmes bilinéaires conduit à une estimation fidèle de la dynamique du système.

3.4.3 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$

En se basant sur l'analyse faite dans la section 3.4.1, l'observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$ donné par (3.3) se réécrit comme suit

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i \hat{x}(t) + Bu(t) + A_{d_0}\hat{x}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i} u_i(t)\hat{x}(t-\tau_i) + G\hat{\theta}(t) + K_0^x(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{3.49a}$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = K_0^\theta(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{3.49b}$$

où $\hat{x}(t)$ et $\hat{\theta}(t)$ sont respectivement les estimations de $x(t)$ et θ. Les matrices K_0^x et K_0^θ sont les gains de l'observateur à déterminer telles que l'erreur d'estimation $e_{\text{pln}}(t)$ définie par

$$e_{\text{pln}}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ \theta - \hat{\theta} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

converge vers zéro.

Dans l'observateur (3.49), nous avons choisi une structure qui soit proche de celle utilisée dans la littérature en posant K_i^x, pour $i = 1, \ldots, m$, et $K_{d_i}^x$, pour $i = 0, \ldots, m$.

Le calcul de la dynamique de l'erreur d'estimation conduit à l'EDF suivante

$$\dot{e}_{\text{pln}}(t) = \mathbb{N}(u)e_{\text{pln}}(t) + \mathbb{N}_{d_0}e_{\text{pln}}(t-\tau_0) + \sum_{i=0}^{m}\mathbb{N}_{d_i}u_i(t)e_{\text{pln}}(t-\tau_i) \tag{3.51}$$

où

$$\mathbb{N}(u) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} A_i u_i - K_0^x C & G \\ -K_0^\theta C & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} A_{d_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} A_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

3.4.3.1 Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation

En utilisant les développements faits dans la section 3.4.2, avec de plus $J^x = 0$, nous pouvons énoncer sans démonstration le théorème suivant en adaptant le théorème 3.4.2

Théorème 3.4.3. *Supposons que l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée. Le système (3.49) est un observateur adaptatif pour le système (3.1), et a une erreur d'estimation quadratiquement stable s'il existe, pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \ldots, 2^{2m}$,*

— *une matrice $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$ telle que*

$$P(\sigma^j) = P^T(\sigma^j) = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} \\ P_{02}^T & P_{03} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{m}\sigma_i^j \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i2}^T & P_{i3} \end{bmatrix} > 0 \tag{3.53}$$

avec $P_{i1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ et $P_{i3} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, pour $i = 0, \ldots, m$,

— *une matrice $M \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$, donnée par*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & S_2 M_{22} \\ S_1 M_{11} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

avec $M_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $M_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ sont des matrices non singulières. $S_1 \in \mathbb{R}^{q\times n}$ and $S_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ sont des matrices de réglage.

— *des matrices $Y_{11} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$*

— *un scalaire $\kappa > 0$*

tels que les LMIs suivantes

$$\left[\begin{array}{cccc:cc:cc:c:cc} a^j_{(1,1)} & a^j_{(1,2)} & a^j_{(1,3)} & a^j_{(1,4)} & a_0 & 0 & a^j_1 & 0 & \ldots & a^j_m & 0 \\ * & a^j_{(2,2)} & a^j_{(2,3)} & a^j_{(2,4)} & S_1a_0 & 0 & S_1a^j_1 & 0 & \ldots & S_1a^j_m & 0 \\ \hdashline * & * & a_{(3,3)} & a_{(3,4)} & a_0 & 0 & a^j_1 & 0 & \ldots & a^j_m & 0 \\ * & * & * & a_{(4,4)} & S_1a_0 & 0 & S_1a^j_1 & 0 & \ldots & S_1a^j_m & 0 \\ \hdashline * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_q & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \hdashline * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_q & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline * & * & * & * & * & * & * & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_q \end{array}\right] < 0 \tag{3.55}$$

soient vérifiées où

$$a^j_{(1,1)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i1} + \sum_{i=0}^{m} M_{11} A_i \sigma^j_i + \sum_{i=0}^{m} A_i^T M_{11}^T \sigma^j_i - Y_{11} C - C^T Y_{11}^T - S_2 Y_{22} C - C^T Y_{22}^T S_2^T + \sum_{i=0}^{m} M_{11} A_{d_i} \sigma^j_i + \sum_{i=0}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T \sigma^j_i$$

$$a^j_{(1,2)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i2} + M_{11} G + \sum_{i=0}^{m} A_i^T \sigma^j_i M_{11}^T S_1^T + \sum_{i=0}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T S_1^T \sigma^j_i - C^T Y_{22}^T - C^T Y_{11}^T S_1^T$$

$$a^j_{(2,2)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3} + S_1 M_{11} G + G^T M_{11}^T S_1^T$$

$$a^j_{(1,3)} = \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i1} + \sum_{i=0}^{m} A_i^T M_{11}^T \sigma^j_i + \sum_{i=0}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T \sigma^j_i - M_{11} - C^T Y_{11}^T - C^T Y_{22}^T S_2^T$$

$$a^j_{(1,4)} = \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i2} - M_{12} + \sum_{i=0}^{m} A_i^T M_{11}^T S_1^T \sigma^j_i - C^T Y_{11}^T S_1^T - C^T Y_{22}^T + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T S_1^T \sigma^j_i$$

$$a^j_{(2,3)} = \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i2}^T - S_1 M_{11} + G^T M_{11}^T$$

$$a^j_{(2,4)} = \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i3} - M_{22} + G^T M_{11}^T S_1^T$$

$$a_{(3,3)} = -M_{11} - M_{11}^T$$

$$a_{(4,4)} = -M_{22} - M_{22}^T$$

$$a_{(3,4)} = -S_2 M_{22} - M_{11}^T S_1^T$$

$$a_0 = M_{11} A_{d_0}$$

$$a^j_i = M_{11} A_{d_i} \sigma^j_i \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, m$$

Les gains de l'observateur K_0^x et K_0^θ sont donnés par

$$K_0^x = M_{11}^{-1} Y_{11} \tag{3.56a}$$

$$K_0^\theta = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{3.56b}$$

3.4.3.2 Exemple illustratif

Afin de mettre en évidence la faisabilité de notre approche et les performances de l'observateur (3.49), nous considérons un exemple de système bilinéaire à retards décrit par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.27 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0.01 \\ -0.11 & -0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau_0) \\ x_2(t-\tau_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.8 & 0.08 \\ -0.2 & -0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau_1) \\ x_2(t-\tau_1) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.01 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -0.09 \\ 0.9 \end{bmatrix} \theta$$

Notons qu'une seule entrée de commande est considérée dans cet exemple. Selon l'hypothèse 2.3.1, l'entrée de commande et sa dérivée sont bornées : $-0.2 < u(t) = 0.2\sin(0.01t) < 0.2$ et $-0.002 < \dot{u}(t) < 0.002$. Les mesures disponibles sont $y(t) = x_1(t)$ et les retards sont $\tau_0 = 2$s et

$\tau_1 = 10$s. En choisissant les matrices $S_1 = [-0.8065 \quad -0.46911]$ et $S_2^T = [-0.01688 \quad -0.014379]$, la résolution des LMIs (3.55) donne

$$P = \begin{bmatrix} 18.116 & -2.1824 & -4.1934 \\ -2.1824 & 21.9 & -7.9442 \\ -4.1934 & -7.9442 & 19.771 \end{bmatrix} + \sigma_1^j \begin{bmatrix} 3.0379 & -1.8811 & -0.72525 \\ -1.8811 & 2.5885 & 0.57824 \\ -0.72525 & 0.57824 & 0.090878 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 5.2509 & 1.3615 & -0.26858 \\ 1.3615 & 7.7635 & -0.22878 \\ -4.8736 & -4.74 & 15.911 \end{bmatrix}$$

$Y_{11}^T = \begin{bmatrix} -8.2037 & -12.377 \end{bmatrix}$, $Y_{22} = 21.42$ et $\kappa = 0.041978$. Ceci permet le calcul des gains K_0^x et K_0^θ selon les équations (3.56a) et (3.56b)

$$K_0^x = \begin{bmatrix} -1.2037 \\ -1.3831 \end{bmatrix} \qquad K_0^\theta = 1.3462$$

Les simulations sont illustrées par les figures 3.3 et 3.4 qui montrent la convergence des états et des paramètres inconnus vers leurs vraies valeurs.

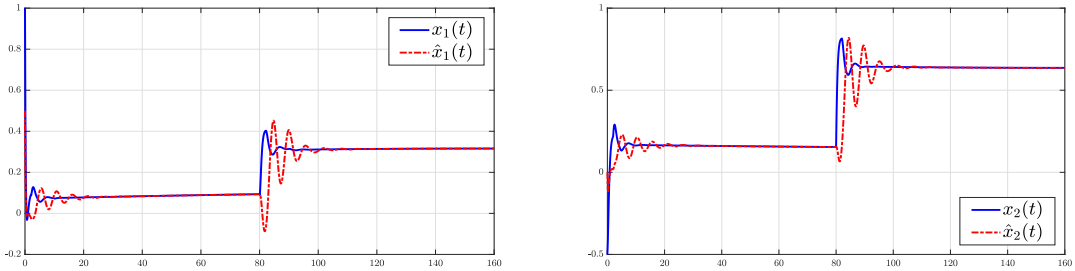


FIGURE 3.3 – Convergence des états estimés $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs x_1 et x_2 (—).

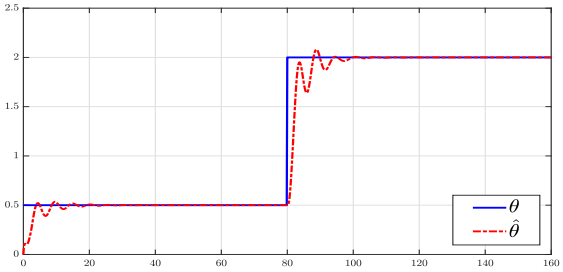


FIGURE 3.4 – Convergence de l'estimation du paramètre inconnu $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers θ (—).

3.5 Observateur adaptatif fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit

3.5.1 Synthèse de l'observateur adaptatif fonctionnel avec $J^\theta = 0$

Dans cette section, une extension aux résultats établis dans les sections précédentes est développée en considérant la présence de perturbations à énergie finie dans la dynamique du système.

Pour ce faire, nous considérons le système bilinéaire à états retardés décrit par (3.1) en insérant des perturbations dans l'EDF (3.1a) comme suit

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i(t)\right) x(t) + A_{d_0} x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i} u_i(t) x(t-\tau_i) + Bu(t) + G\theta + Dw(t) \tag{3.57a}$$

$$\dot{\theta} = 0 \tag{3.57b}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.57c}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{3.57d}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $w(t) \in \mathbb{R}^\varpi$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur des entrées de commande, le vecteur des paramètres inconnus, le vecteur des sorties mesurées et le vecteur des perturbations. $z \in \mathbb{R}^r$ est la fonctionnelle à estimer. τ_i, pour $i = 0, \ldots, m$, sont des retards constants et connus. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{d_i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour $i = 0, \ldots, m$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times \varpi}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont connues à valeurs constantes avec $\text{rang}(L) = r \leq n$.

Pour le système (3.57), nous proposons de synthétiser un observateur adaptatif fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit afin de reconstruire simultanément le vecteur $z(t)$ et le vecteur des paramètres inconnus. L'ordre de l'observateur est inférieur à celui du système : $r < n$. La synthèse de l'observateur adaptatif est faite dans le cas où $J^\theta = 0$ en tenant compte de la discussion faite dans la section 3.4.1. Cet observateur est décrit par

$$\dot{\eta}_z(t) = N_0^z \eta_z(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i^z u_i \eta_z(t) + N_{d_0}^z \eta_z(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i}^z u_i \eta_z(t-\tau_i) + \Psi_L B u(t) + M_0^z y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i^z u_i y(t) + M_{d_0}^z y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i}^z u_i y(t-\tau_i) + \Psi_L G\hat{\theta} \tag{3.58a}$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = Q^\theta \eta_z(t) + M_0^\theta y(t) \tag{3.58b}$$

$$\hat{z}(t) = \eta_z(t) + J^z y(t) \tag{3.58c}$$

avec $\Psi_L = L - J^z C$. Les matrices $N_i^z \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $M_i^z \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $N_{d_i}^z \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $M_{d_i}^z \in \mathbb{R}^{r\times p}$, pour $(i = 0, \ldots, m)$, $Q^\theta \in \mathbb{R}^{q\times r}$, $M_0^\theta \in \mathbb{R}^{q\times p}$ et $J^z \in \mathbb{R}^{r\times p}$ sont les gains de l'observateur à déterminer.

Nous définissons le vecteur d'erreur d'estimation comme suit

$$e_{\text{red}}(t) = \begin{bmatrix} e_z(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) - \hat{z}(t) \\ \theta - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_L x(t) - \eta_z(t) \\ \theta - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

En utilisant la même approche que dans la section 3.3, nous considérons que les équations suivantes sont satisfaites,

$$Q^\theta \Psi_L + M_0^\theta C = 0 \tag{3.60a}$$

$$\Psi_L A_i - N_i^z \Psi_L - M_i^z C = 0 \tag{3.60b}$$

$$\Psi_L A_{d_i} - N_{d_i}^z \Psi_L - M_{d_i}^z C = 0 \tag{3.60c}$$

alors la dynamique de l'erreur d'estimation $e_{\text{red}}(t)$ décrite par (3.59) est régie par l'EDF suivante

$$\dot{e}_{\text{red}}(t) = \mathbb{N}(u) e_{\text{red}}(t) + \mathbb{N}_{d_0} e_{\text{red}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) e_{\text{red}}(t-\tau_i) + \mathbb{D} w(t) \tag{3.61}$$

avec

$$\mathbb{N}(u) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} N_i^z u_i(t) & \Psi_L G \\ Q^\theta & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} N_{d_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \Psi_L D \\ 0 \end{bmatrix}$$

et $u_0(t) = 1$.

Afin de caractériser l'atténuation des perturbations entre le vecteur de l'erreur d'estimation $e_{\text{red}}(t)$ et le vecteur des perturbations $w(t)$, il faut que le critère $J_{e_{\text{red}}w}$ vérifie l'inégalité suivante lorsque les conditions initiales sont nulles

$$J_{e_{\text{red}}w} = \int_0^\infty (e_{\text{red}}^T e_{\text{red}} - \gamma^2 w^T w) dt < 0 \qquad \text{avec} \quad \gamma > 0. \tag{3.62}$$

Les équations (3.60a), (3.60b) et (3.60c) peuvent être réécrites sous la forme compacte (3.11), où les matrices $\mathbb{V}_{\text{red}}$ et $\mathbb{W}_{\text{red}}$ sont données respectivement par (3.13a) et (3.13b), alors que la matrice $\mathbb{X}_{\text{red}}$, regroupant les gains de l'observateur, devient

$$\mathbb{X}_{\text{red}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:c} N_0^z & \dots & N_m^z & N_{d_0}^z & \dots & N_{d_m}^z & K_0^z & \dots & K_m^z & K_{d_0}^z & \dots & K_{d_m}^z & J^z \\ Q^\theta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & K_0^\theta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array}\right] \tag{3.63}$$

où K_i^z, $K_{d_i}^z$, pour $i = 0, \dots, m$, sont donnés par (3.10a)-(3.10d) et $K_0^\theta = M_0^\theta - Q^\theta J^z$.

Si la condition d'existence de solutions, donnée par (3.14), est satisfaite, alors la solution est sous la forme (3.15). Ceci permet le paramètrage des gains de l'observateur via le gain $\mathcal{Z}_{\text{red}}$. Nous adoptons dans la suite la notation (3.16) en tenant compte des simplifications mentionnées dans la section 3.4.1, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.5.1. *Supposons que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.14) sont vérifiées. Le système (3.58) est un observateur adaptatif pour le système (3.57), satisfaisant le critère $\mathcal{H}_\infty$ (3.62) et ayant une erreur d'estimation quadratiquement stable, s'il existe une matrice $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(r+q)\times(r+q)}$ symétrique, définie positive et décrite par (3.18), une matrice $M \in \mathbb{R}^{(r+p)\times(r+p)}$, donnée par (3.19), des matrices $Y_{11} \in \mathbb{R}^{r\times p}$ et $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ et des scalaires positifs κ et γ, tels que, pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \dots, 2^{2m}$, les LMIs suivantes*

$$\left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc:ccc:c} a_{(1,1)}^j & a_{(1,2)}^j & a_{(1,3)}^j & a_{(1,4)}^j & a_0 & 0 & a_1^j & 0 & \dots & a_m^j & 0 & a_{(1,5)} \\ * & a_{(2,2)}^j & a_{(2,3)}^j & a_{(2,4)}^j & S_1 a_0 & 0 & S_1 a_1^j & 0 & \dots & S_1 a_m^j & 0 & S_1 a_{(1,5)} \\ \hdashline * & * & a_{(3,3)} & a_{(3,4)} & a_0 & 0 & a_1^j & 0 & \dots & a_m^j & 0 & a_{(1,5)} \\ * & * & * & a_{(4,4)} & S_1 a_0 & 0 & S_1 a_1^j & 0 & \dots & S_1 a_m^j & 0 & S_1 a_{(1,5)} \\ \hdashline * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \hdashline * & * & * & * & * & \dots & \dots & \dots & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 \\ \hdashline * & * & * & * & * & * & * & * & \dots & * & * & -\gamma^2 I_\varpi \end{array}\right] < 0 \tag{3.64}$$

soient vérifiées avec

$$
\begin{aligned}
a^j_{(1,1)} &= \sum_{i=1}^{m}\sigma^j_{m+i}P_{i1} + I_r + (M_{11}N^z_{0,1} + Y_{11}N^z_{0,2}) + \sum_{i=1}^{m}(M_{11}N^z_{i,1} + Y_{11}N^z_{i,2})\sigma^j_i + Q_2^{\theta T}Y_{22}^T S_2^T \\
&\quad + S_2Y_{22}Q_2^\theta + (N^{zT}_{0,1}M^T_{11} + N^{zT}_{0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m}(N^{zT}_{i,1}M^T_{11} + N^{zT}_{i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i \\
&\quad + (M_{11}N^z_{d_0,1} + Y_{11}N^z_{d_0,2}) + \sum_{i=1}^{m}(M_{11}N^z_{d_i,1} + Y_{11}N^z_{d_i,2})\sigma^j_i \\
&\quad + (N^{zT}_{d_0,1}M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=0}^{m}(N^{zT}_{d_i,1}M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i \\
a^j_{(1,2)} &= \sum_{i=1}^{m}\sigma^j_{m+i}P_{i2} + (N^{zT}_{0,1}M^T_{11}S_1^T + N^{zT}_{0,2}Y^T_{11}S_1^T) + \sum_{i=1}^{m}(N^{zT}_{i,1}M^T_{11}S_1^T + N^{zT}_{i,2}Y^T_{11}S_1^T)\sigma^j_i \\
&\quad + (N^{zT}_{d_0,1}M^T_{11}S_1^T + N^{zT}_{d_0,2}Y^T_{11}S_1^T) + \sum_{i=1}^{m}(N^{zT}_{d_i,1}M^T_{11}S_1^T + N^{zT}_{d_i,2}Y^T_{11}S_1^T)\sigma^j_i + Q_2^{\theta T}Y_{22}^T \\
&\quad + M_{11}LG - M_{11}J_1^zCG - Y_{11}J_2^zCG \\
a^j_{(2,2)} &= \sum_{i=1}^{m}\sigma^j_{m+i}P_{i3} + I_q + S_1M_{11}LG - S_1M_{11}J_1^zCG - S_1Y_{11}J_2^zCG + G^TL^TM^T_{11}S_1^T \\
&\quad - G^TC^TJ_1^{zT}M^T_{11}S_1^T - G^TC^TJ_2^{zT}Y^T_{11}S_1^T \\
a^j_{(1,3)} &= P_{01} + \sum_{i=1}^{m}\sigma^j_iP_{i1} - M_{11} + (N^{zT}_{0,1}M^T_{11} + N^{zT}_{0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m}(N^{zT}_{i,1}M^T_{11} + N^{zT}_{i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i \\
&\quad + (N^{zT}_{d_0,1}M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m}(N^{zT}_{d_i,1}M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i + Q_2^{\theta T}Y_{22}^TS_2^T \\
a^j_{(1,4)} &= P_{02} + \sum_{i=1}^{m}\sigma^j_iP_{i2} + (N^{zT}_{0,1}M^T_{11}S_1^T + N^{zT}_{0,2}Y^T_{11}S_1^T) + \sum_{i=1}^{n}(N^{zT}_{i,1}M^T_{11}S_1^T + N^{zT}_{i,2}Y^T_{11}S_1^T)\sigma^j_i \\
&\quad - S_2M_{22} + (N^{zT}_{d_0,1}M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m}(N^{zT}_{d_i,1}M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i + Q_2^{\theta T}Y_{22}^T \\
a^j_{(2,3)} &= P_{02}^T + \sum_{i=1}^{m}\sigma^j_iP_{i2}^T - S_1M_{11} + G^TL^TM^T_{11} - G^TC^TJ_1^{zT}M^T_{11} - G^TC^TJ_2^{zT}Y^T_{11} \\
a^j_{(2,4)} &= P_{03} + \sum_{i=1}^{m}\sigma^j_iP_{i3} - M_{22} + G^TL^TM^T_{11}S_1^T - G^TC^TJ_1^{zT}M^T_{11}S_1^T - G^TC^TJ_2^{zT}Y^T_{11}S_1^T \\
a_{(3,3)} &= -M_{11} - M^T_{11} \\
a_{(3,4)} &= -S_2M_{22} - M^T_{11}S_1^T \\
a_{(4,4)} &= -M_{22} - M^T_{22} \\
a_{(1,5)} &= M_{11}LD - M_{11}J_1^zCD - Y_{11}J_2^zCD \\
a_0 &= (M_{11}N^z_{d_0,1} + Y_{11}N^z_{d_0,2}) \\
a^j_i &= (M_{11}N^z_{d_i,1} + Y_{11}N^z_{d_i,2})\sigma^j_i \quad \textit{pour} \;\; i = 1,\ldots,m
\end{aligned}
$$

Les gains $\mathcal{Z}_{\text{red},1}$ *et* $\mathcal{Z}_{\text{red},2}$ *sont donnés par*

$$\mathcal{Z}_{\text{red},1} = M_{11}^{-1} Y_{11} \tag{3.65a}$$
$$\mathcal{Z}_{\text{red},2} = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{3.65b}$$

Démonstration. En se basant sur la démonstration du théorème 3.3.2, une fonction de Lyapunov est choisie sous la forme (3.23), qui, avec une transformation en système descripteur, se réécrit comme suit

$$\begin{bmatrix} I_{r+q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_{\text{red}}(t) \\ \dot{\varepsilon}_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r+q} \\ \mathbb{N}(u) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) & -I_{r+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \int_{t}^{t-\tau_i} \varepsilon_{\text{red}}(s) ds + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{D} \end{bmatrix} w(t) \tag{3.66}$$

avec $\varepsilon_{\text{red}}(t) = \dot{e}_{\text{red}}(t)$ et $u_0(t) = 1$.

En dérivant la fonction de Lyapunov candidate (3.23) par rapport au temps le long de la trajectoire du système (3.66) et en majorant les termes $S_i(t)$ comme dans (3.26), l'inégalité suivante est obtenue

$$\dot{V}(e_{\text{red}}) \leq \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} & \overline{a}_{(1,2)} & M\mathbb{D} \\ * & \overline{a}_{(2,2)} & M\mathbb{D} \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

où $\overline{a}_{(1,1)}$, $\overline{a}_{(1,2)}$ et $\overline{a}_{(2,2)}$ ont la même forme que dans l'inégalité (3.27). Du fait que les conditions initiales sont nulles pour évaluer le critère (3.62), $V(e_z(0)) = 0$, et que $V(e_z(\infty)) \geq 0$, nous pouvons majorer le critère $J_{e_{\text{red}}w}$ (3.62) comme suit

$$\begin{aligned} J_{e_{\text{red}}w} &\leq \int_0^\infty (e_{\text{red}}^T e_{\text{red}} - \gamma^2 w^T w) dt + V(e_{\text{red}}(\infty)) - V(e_{\text{red}}(0)) \\ &\leq \int_0^\infty (e_{\text{red}}^T e_{\text{red}} - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(e_{\text{red}})) dt < 0 \end{aligned} \tag{3.68}$$

En utilisant l'inégalité (3.67), l'inégalité (3.68) est équivalente à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} + I_{r+q} & \overline{a}_{(1,2)} & M\mathbb{D} \\ * & \overline{a}_{(2,2)} & M\mathbb{D} \\ * & * & -\gamma^2 I_\varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\text{red}}(t) \\ \varepsilon_{\text{red}}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.69}$$

En appliquant le lemme de Schur sur l'inégalité ci-dessus et en utilisant l'approche polytopique comme cela est fait dans la preuve du théorème 3.3.2, nous obtenons les résultats du théorème 3.5.1. •

3.5.2 Exemple numérique

Afin de montrer l'efficacité de notre approche, nous considérons l'EDF (3.57a) avec $m = 1$ dont les matrices sont décrites comme suit

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0.1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{d_0} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A_{d_1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & -0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.1 & 0.1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -1 \\ 2.8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Comme le montre la figure 3.5, une perturbation à énergie finie $w(t)$ est appliquée au système (3.1) entre les instants $t_1 = 150$s et $t_2 = 170$s, avec une amplitude égale à 1.2V et une fréquence de 3Hz.

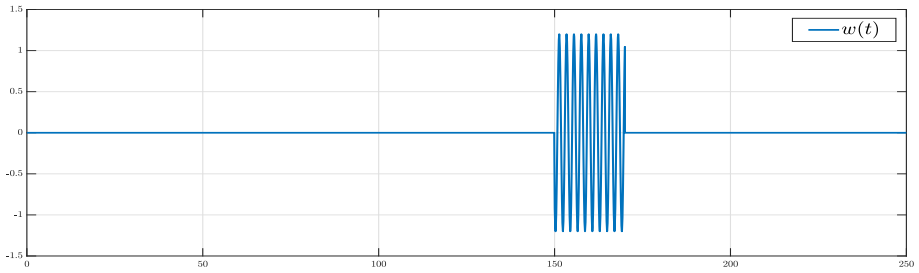


FIGURE 3.5 – Perturbation appliquée sur le système.

L'entrée de commande appliquée est $u(t) = 0.2\sin(0.02t)$ et vérifie l'hypothèse 2.3.1. La dynamique du système (3.57a), avec les valeurs ci-dessus des matrices et des retards constants égaux à $\tau_0 = 1s$ et $\tau_1 = 0.5$s, est illustrée dans la figure suivante.

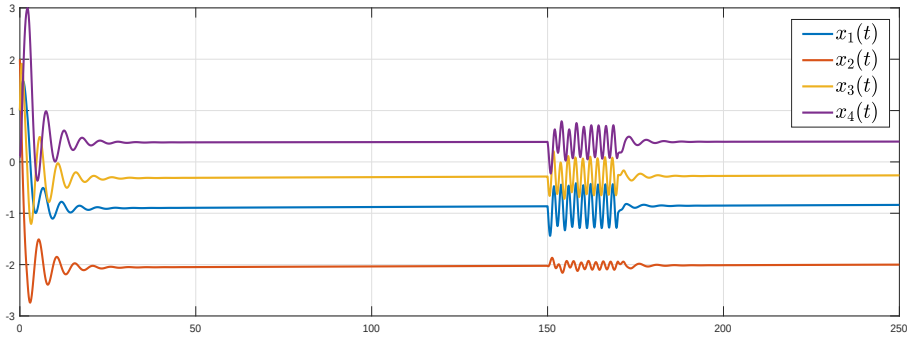


FIGURE 3.6 – Dynamique du système numérique considéré.

Les mesures disponibles sont

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) + x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

et la fonctionnelle $z(t)$, d'ordre réduit $r = 2 < n = 4$, que nous souhaitons estimer à travers

l'observateur adaptatif (3.58) est décrite par

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) + x_4(t) \\ x_3(t) + x_4(t) \end{bmatrix}$$

Etant donné que la condition d'existence (3.14) est vérifiée, la résolution des LMIs (3.64) aux sommets du polytope $\mathcal{P}$, avec $S_1 = \begin{bmatrix} 0.20451 & -0.06672 \end{bmatrix}$ et $S_2^T = \begin{bmatrix} -0.18273 & 0.11121 \end{bmatrix}$, donne les matrices suivantes

$$P(\sigma_1^j) = \underbrace{\begin{bmatrix} 16.013 & -1.5742 & 0.074078 \\ -1.5742 & 15.071 & 0.30202 \\ 0.074078 & 0.30202 & 16.835 \end{bmatrix}}_{P_0} + \sigma_1^j \underbrace{\begin{bmatrix} -8.5581 & 2.0222 & 1.2658 \\ 2.0222 & 10.687 & -1.2643 \\ 1.2658 & -1.2643 & -7.0103 \end{bmatrix}}_{P_1}$$

$$M = \begin{bmatrix} 6.9668 & -1.6056 & -1.4575 \\ -1.6056 & 5.0483 & 0.88709 \\ 1.5319 & -0.66519 & 7.9765 \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} -23.731 & -7.5262 & 2.7374 & -19.211 & -118.66 & 80.677 & -33.125 & 36.643 & 8.9197 \\ -2.5447 & -4.458 & 1.5494 & -5.7789 & -12.723 & 14.044 & -14.857 & 2.0988 & 0.84259 \end{bmatrix}$$

$$Y_{22} = \begin{bmatrix} -7.2004 & 1.0202 & 2.9103 & -73.855 & 2.4682 & 0.87097 & 1.5489 & -0.096755 & 3.8962 \end{bmatrix}$$

ainsi que le scalaire $\kappa = 0.063908$ et un facteur d'atténuation des perturbations $\gamma = 7.1836\ 10^{-5}$.

En utilisant les valeurs obtenues des matrices M, Y_{11} et Y_{22}, les gains $\mathcal{Z}_{\text{red},1}$ et $\mathcal{Z}_{\text{red},2}$ sont

$$\mathcal{Z}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{\text{red},1} \\ \hline \mathcal{Z}_{\text{red},2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|cccc} -3.8011 & -1.3853 & 0.50032 & -3.2603 & -19.006 & 13.188 & -5.8626 & 5.779 & 1.4231 \\ -1.713 & -1.3237 & 0.46603 & -2.1817 & -8.565 & 6.9764 & -4.8075 & 2.2538 & 0.61951 \\ \hline -0.9027 & 0.1279 & 0.36486 & -9.259 & 0.30943 & 0.10919 & 0.19418 & -0.01213 & 0.48846 \end{array}\right]$$

ce qui conduit aux matrices de gain de l'observateur suivantes

$$N_0^z = \begin{bmatrix} -4.7494 & 2.5251 \\ -2.3201 & 1.468 \end{bmatrix} \quad N_1^z = \begin{bmatrix} 0.67428 & -1.9488 \\ 1.4162 & -3.2043 \end{bmatrix} \quad N_{d_0}^z = \begin{bmatrix} -0.14989 & -0.37756 \\ -0.064027 & -0.51479 \end{bmatrix}$$

$$N_{d_1}^z = \begin{bmatrix} -0.22984 & -0.77517 \\ 0.11036 & -1.204 \end{bmatrix} \quad M_0^z = \begin{bmatrix} 0.22274 & 0.99028 \\ -0.096578 & 2.0334 \end{bmatrix} \quad M_1^z = \begin{bmatrix} -0.56843 & -2.3133 \\ -0.52849 & -0.86382 \end{bmatrix}$$

$$M_{d_0}^z = \begin{bmatrix} -0.010765 & -0.43461 \\ -0.12757 & 0.040235 \end{bmatrix} \quad M_{d_1}^z = \begin{bmatrix} -0.24307 & 0.36419 \\ -0.35988 & 0.10409 \end{bmatrix}$$

$$Q^\theta = \begin{bmatrix} -0.1389 & 0.20741 \end{bmatrix} \quad M_0^\theta = \begin{bmatrix} 0.10808 & -0.33962 \end{bmatrix} \quad J^z = \begin{bmatrix} 0.74944 & -0.22439 \\ 0.32013 & 1.1479 \end{bmatrix}$$

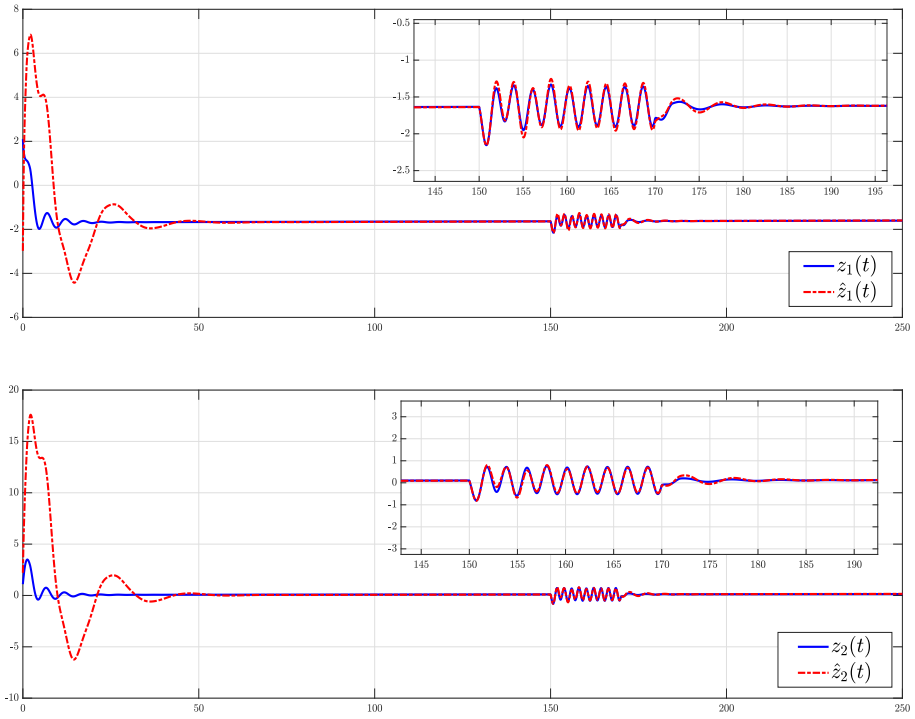


FIGURE 3.7 – Convergence des fonctionnelles estimées $\hat{z}_1$ et $\hat{z}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs respectives z_1 et z_2 (—).

Les résultats de simulation sont illustrés par les figures suivantes.

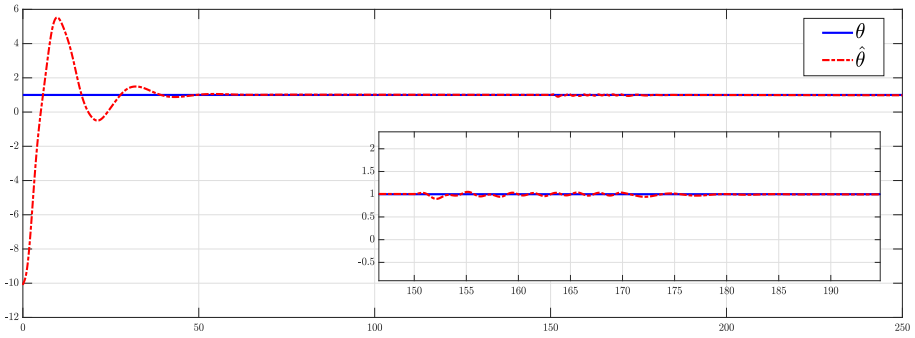


FIGURE 3.8 – Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—).

Les estimations des fonctionnelles et des paramètres inconnus convergent vers leurs vraies valeurs. La perturbation est atténuée avec le critère $\mathcal{H}_\infty$.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de synthèse d'observateurs adaptatifs fonctionnels d'ordre réduit a été présentée d'une manière générale pour une classe de systèmes bilinéaires à états retardés. L'intérêt de ces observateurs réside dans le fait d'estimer simultanément le vecteur

d'état d'un système (ou une fonctionnelle) et le vecteur des paramètres inconnus. Nous avons ramené le problème de l'étude de la convergence des observateurs adaptatifs proposés à l'étude de la stabilité des erreurs d'estimation de l'état (ou d'une fonctionnelle) et des paramètres inconnus. Cette étude est faite en deux étapes. Dans un premier temps, nous avons assuré le non-biais des erreurs d'estimation en annulant les termes qui dépendent de l'état, de l'état retardé et des entrées de commande. Cette étape a permis le paramétrage des gains de l'observateur à travers la résolution d'équations de Sylvester, qui décrivent d'une manière implicite une équation linéaire à résoudre. Ainsi, la résolution du problème devient moins compliquée et se limite à la détermination d'un seul gain permettant d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation. Une fois que les conditions d'existence des équations de Sylvester sont établies, nous passons, dans un second temps, à l'analyse de la stabilité des erreurs d'estimation. Cette analyse repose sur la transformation du système d'erreur en un système descripteur sur lequel est appliqué l'approche de Lyapunov-Krasovskii. Finalement, comme les résultats obtenus dépendent des entrées de commande du système bilinéaire considéré, une approche polytopique a été utilisée, ce qui a permis de ramener le problème à la résolution de LMIs sur les sommets d'un polytope convexe.

En se basant sur cette étude, différents observateurs adaptatifs ont été proposés. Deux observateurs adaptatifs d'ordre plein ont été étudiés. Avant de clore le chapitre, il était intéressant d'introduire des perturbations dans la dynamique du système pour généraliser les systèmes étudiés. Afin d'atténuer leur effet, l'approche $\mathcal{H}_\infty$ a été utilisée pour synthétiser un observateur fonctionnel d'ordre réduit. Des exemples numériques ont été proposés pour chaque cas afin d'illustrer la faisabilité et l'efficacité de notre approche.

Chapitre 4

Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires à retards

Sommaire

4.1 Introduction 94
4.2 Modèle et hypothèses 95
4.3 Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires à retards 96
4.3.1 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$ 96
4.3.2 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$ 108
4.3.3 Observateur adaptatif fonctionnel d'ordre réduit avec $J^\theta = 0$ 112
4.4 Observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires singuliers à retards 114
4.4.1 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$ 114
4.4.2 Observateur adaptatif fonctionnel d'ordre réduit avec $J^\theta = 0$ 122
4.5 Conclusion 129

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons de généraliser les résultats trouvés dans le chapitre précédent en rajoutant des comportements non linéaires dans la dynamique du système, notamment dans le terme qui multiplie le vecteur des paramètres inconnus qui doit être estimé simultanément avec le vecteur d'état via les observateurs adaptatifs proposés dans ce chapitre. En effet, les observateurs adaptatifs étant utilisés pour la commande robuste et/ou tolérante aux défauts, l'ajout du terme $Gg(x,u)\theta$ dans la dynamique du système, où $g(x,u)$ est une fonction non linéaire, permet de modéliser les incertitudes affectant le système dans le cas d'une commande robuste, ou peut être utilisé pour modéliser des défauts dans des procédures de détection et d'isolation des défauts [ZD01, Zha05]. Ce terme est plus général que le terme $G\theta$ qui a été considéré dans le chapitre 3. Dans la littérature, plusieurs contributions considèrent que le vecteur des paramètres inconnus agit non linéairement par rapport à la dynamique de l'état. Par exemple, un obsevateur adaptatif est proposé dans [RH95] pour estimer simultanément le vecteur d'état avec le paramètre inconnu qui représente le coefficient de friction dans le modèle d'une suspension active d'automobiles. Un autre exemple de synthèse d'observateurs adaptatifs pour un système avec une non linéarité état-paramètres est traité dans [JS02] pour le modèle de Park d'une machine à induction. Zhang *et al* ont considéré dans [GZ03, Zha02, ZD01] le modèle d'une orbite nominale d'un satellite comme application des techniques qu'ils proposent pour la synthèse d'observateurs adaptatifs. Dans [RRPN14], les auteurs ont considéré l'exemple d'un robot omnidirectionnel à quatre roues (dont le modèle est représenté par un système LPV à commutations) comme application pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus via un observateur adaptatif. Le robot est sujet à des décalages inconnus dans les tensions du moteur qui représentent le vecteur des paramètres inconnus multipliant une fonction non linéaire par rapport au temps. Dans [EEZ14], un modèle de pendule est considéré où les paramètres inconnus à estimer interviennent non linéairement par rapport à l'état.

Etant donné l'existence de toutes ces applications dans le domaine industriel et la nécessité de traiter le cas où le vecteur des paramètres agit non linéairement dans la dynamique du système, nous proposons, dans ce chapitre, de mettre l'accent sur ce problème. Pour ce faire, nous considérons dans ce chapitre que le vecteur des paramètres agit linéairement et non linéairement par rapport au vecteur d'état. Nous avons ainsi ajouté un comportement non linéaire dans la dynamique des systèmes bilinéaires à retards traités dans le chapitre 3. La classe de systèmes non linéaires considérée est décrite dans la section 4.2. Afin de synthétiser des observateurs adaptatifs pour ces systèmes, quelques hypothèses supplémentaires sont prises en compte en plus de l'hypothèse 2.3.1 utilisée dans le chapitre 3.

Dans la section 4.3, la classe de systèmes décrite ci-avant est restreinte aux systèmes non singuliers. Dans la section 4.3.1, un premier observateur adaptatif d'ordre plein est proposé dans le cas où la matrice J^θ est nulle. Un deuxième observateur est développé dans la section 4.3.2 lorsque les matrices J^x et J^θ sont nulles. Finalement, une extension à l'observateur fonctionnel d'ordre réduit est présentée dans la section 4.3.3 dans le cas où $J^\theta = 0$.

La section 4.4 est dédiée aux observateurs adaptatifs lorsque la dynamique du système est singulière. Le modèle des systèmes singuliers permet d'inclure des relations algébriques en plus des relations dynamiques Les observateurs adaptatifs proposés sont soit d'ordre plein, soit d'ordre réduit.

Les exemples numériques considérés dans les sections 4.3 et 4.4 viennent illstrer nos techniques et montrent bien la faisabilité des résultats, ainsi que la convergence des valeurs estimées de l'état et des paramètres inconnus vers leurs vraies valeurs.

Les résultats de la section 4.3.2 ont été extraits des développements faits dans [SSZA17a].

Les résultats obtenus dans la section 4.4 ont fait l'objet des travaux dans [SSZA18a].

4.2 Modèle et hypothèses

Le système non linéaire considéré dans ce chapitre est décrit par la forme suivante

$$\begin{aligned}\Upsilon\dot{x}(t) &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_iu_ix(t) + A_{d_0}x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i}u_i(t)x(t-\tau_i) + Bu(t) \\ &\quad + G_1\theta + G_2g(Lx,u)\theta + \ell(Lx,u) && (4.1a)\\ \dot{\theta} &= 0 && (4.1b)\\ y(t) &= Cx(t) && (4.1c)\\ z(t) &= Lx(t) && (4.1d)\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'états, le vecteur des entrées de commande, le vecteur des paramètres inconnus et le vecteur des sorties mesurées. $z \in \mathbb{R}^r$ est la fonctionnelle à estimer. τ_i, pour $i = 0, \ldots, m$, sont des retards constants et connus. Les matrices $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{d_i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour $i = 0, \ldots, m$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $G_1 \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times s}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont connues à valeurs constantes. La matrice L vérifie $\text{rang}(L) = r \leq n$.

Dans ce chapitre, la matrice Υ est considérée égale à la matrice identité ($\Upsilon = I_n$) dans la section 4.3 et le système (4.1) présente un système non linéaire à retards. Dans la section 4.4, nous considérons que $\Upsilon = E$, avec $\text{rang}(E) = v < n$ et le système (4.1) est un système non linéaire singulier à retards.

Pour la synthèse d'observateurs adaptatifs pour de tels systèmes, outre l'hypothèse 2.3.1, nous adoptons les hypothèses suivantes.

Hypothèse 4.2.1. *Soit $z(t) = Lx(t)$ avec $z \in \mathbb{R}^r$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\ell(z,u) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ est supposée Lipschitzienne en z, $\forall u \in \mathcal{U}$, i.e il existe un scalaire positif b_1 tel que*

$$||\ell(z,u) - \ell(z^*,u)|| \leq b_1||z - z^*|| \tag{4.2}$$

La fonction $g(z,u) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{s\times q}$ est bornée $\forall z \in \mathbb{R}^r$ et $\forall u \in \mathcal{U}$, il s'en suit qu'il existe un scalaire positif b_g tel que

$$||g(z,u)|| \leq b_g \tag{4.3}$$

aussi, elle est supposée Lipschitzienne en z, $\forall u \in \mathcal{U}$, i.e il existe un scalaire positif b_2 tel que

$$||g(z,u) - g(z^*,u)|| \leq b_2||z - z^*|| \tag{4.4}$$

Hypothèse 4.2.2. *Le vecteur des paramètres inconnus θ est supposé borné. Par conséquent, il existe un scalaire $b_3 > 0$ vérifiant l'inégalité suivante*

$$||\theta|| \leq b_3 \tag{4.5}$$

Les hypothèses 4.2.1 et 4.2.2 seront utiles dans la majoration de la dérivée de la fonction de Lyapunov dans l'analyse de convergence des observateurs synthétisés.

4.3 Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires à retards

Dans cette section, la conception d'observateurs adaptatifs est étudiée pour la classe de systèmes non linéaires à retards décrite par (4.1) avec $\Upsilon = I_n$.

4.3.1 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$

Une généralisation de l'observateur (3.30) développé dans la section 3.4.2 est étudiée dans cette section où nous prenons en compte la présence de comportements non linéaires dans la dynamique du système. Ces non linéarités sont modélisées par des fonctions non linéaires lipschitziennes. Nous supposons que le vecteur des paramètres inconnus agit non linéairement dans la dynamique du système. Dans ce cas, l'observateur adaptatif d'ordre plein est décrit par

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_x(t) &= N_0^x \eta_x(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i^x u_i \eta_x(t) + N_{d_0}^x \eta_x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i}^x u_i \eta_x(t-\tau_i) \\ &\quad + M_0^x y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i^x u_i y(t) + M_{d_0}^x y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i}^x u_i y(t-\tau_i) \\ &\quad + \Psi_{\text{pln}} B u(t) + \Psi_{\text{pln}} G_1 \hat{\theta} + Q_g^x g(\hat{x},u)\hat{\theta} + Q_\ell^x \ell(\hat{x},u) \qquad (4.6a)\\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= K_0^\theta (y(t) - C\hat{x}(t)) \qquad (4.6b)\\ \hat{x}(t) &= \eta_x(t) + J^x y(t) \qquad (4.6c)\end{aligned}$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$ sont les estimations de x et θ respectivement. Les matrices N_i^x, M_i^x, $N_{d_i}^x$, $M_{d_i}^x$, pour $i = 0, \ldots, m$, Q_g^x, Q_ℓ^x, et J^x sont à déterminer afin que $\hat{x}$ et $\hat{\theta}$ convergent vers leurs vraies valeurs x et θ.

Puisque l'observateur (4.6) est d'ordre plein, nous avons $L = I_n$ et donc $z(t) = x(t)$ dans le système (4.1).

En définissant $\Psi_{\text{pln}} = I_n - J^x C$, le vecteur de l'erreur d'estimation augmenté $\overline{e}_{\text{pln}}(t)$ est défini comme suit

$$\overline{e}_{\text{pln}}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ \theta(t) - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{\text{pln}} x(t) - \eta_x(t) \\ \theta(t) - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

En posant

$$\begin{aligned} Q_g^x &= \Psi_{\text{pln}} G_2 \\ Q_\ell^x &= \Psi_{\text{pln}} \end{aligned}$$

les dynamiques des erreurs d'estimation sont données par

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &= \sum_{i=0}^{m} N_i^x u_i(t) e_x(t) + \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_{\text{pln}} A_i - N_i^x \Psi_{\text{pln}} - M_i^x C\right) u_i(t) x(t) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_{\text{pln}} A_{d_i} - N_{d_i}^x \Psi_{\text{pln}} - M_{d_i}^x C\right) u_i(t) x(t-\tau_i) + \Psi_{\text{pln}} \left(\ell(x,u) - \ell(\hat{x},u)\right) \\ &\quad + \Psi_{\text{pln}} G_2 \left(g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta}\right) \qquad (4.8a)\\ \dot{e}_\theta(t) &= -K_0^\theta C e_x(t) \qquad (4.8b)\end{aligned}$$

avec $u_0(t) = 1$.

Les équations (4.8a) et (4.8b) font apparaître des termes qui dépendent de l'état et de l'état retardé. Pour supprimer le biais induit par ces termes, ils vont être annulés à l'exception des non linéarités qui seront traitées via des majorations. Ainsi, si les égalités suivantes

$$\Psi_{\text{pln}} A_i - N_i^x \Psi_{\text{pln}} - M_i^x C = 0 \tag{4.9a}$$
$$\Psi_{\text{pln}} A_{d_i} - N_{d_i}^x \Psi_{\text{pln}} - M_{d_i}^x C = 0 \tag{4.9b}$$

sont vérifiées, la dynamique de l'erreur d'estimation donnée par (4.8) est régie par l'EDF suivante

$$\dot{\bar{e}}_{\text{pln}}(t) = \mathbb{N}(u)\bar{e}_{\text{pln}}(t) + \mathbb{N}_{d_0}\bar{e}_{\text{pln}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \bar{e}_{\text{pln}}(t-\tau_i) + \mathbb{L}\mathbb{N}_\ell + \mathbb{G}\mathbb{N}_g \tag{4.10}$$

avec

$$\mathbb{N}(u) = \begin{bmatrix} N_0^x + \sum_{i=1}^m N_i^x u_i & \Psi_{\text{pln}} G_1 \\ -K_0^\theta C & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} N_{d_0}^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i}^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_\ell = \begin{bmatrix} \ell(x,u) - \ell(\hat{x},u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_g = \begin{bmatrix} g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{G} = \begin{bmatrix} \Psi_{\text{pln}} G_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{L} = \begin{bmatrix} \Psi_{\text{pln}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De même que dans les chapitres précédents, le problème de la synthèse d'observateurs adaptatifs se ramène à celui de l'analyse de la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation donnée par (4.10), après la résolution des équations (4.9a) et (4.9b). Cette résolution va permettre de déduire les gains de l'observateur à travers un paramétrage via une matrice $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$. Puisque les équations (3.34) et (4.9) sont identiques, toutes les relations développées dans la section 3.4.2.1 peuvent être utilisées dans la synthèse de l'observateur (4.6). Du fait que la condition (3.38) est toujours vérifiée, les gains de l'observateur se réécrivent sous la forme (3.43). En utilisant le paramètrage des gains de l'observateur (4.6) développé dans la section 3.4.2.1, la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation est garantie par le thèorème suivant.

Théorème 4.3.1. *Supposons que les hypothèses 2.3.1, 4.2.1 et 4.2.2 sont vérifiées. Le système (4.6) est un observateur adaptatif d'ordre plein pour le système (4.1) (avec $\Upsilon = I_n$) avec une erreur d'estimation quadratiquement stable s'il existe, pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \ldots, 2^{2m}$,*

— *une matrice $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$ telle que*

$$P(\sigma^j) = P^T(\sigma^j) = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} \\ P_{02}^T & P_{03} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i2}^T & P_{i3} \end{bmatrix} > 0 \tag{4.11}$$

avec $P_{i1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ et $P_{i3} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, pour $i = 0, \ldots, m$,

— *une matrice $M \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, donnée par*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & S_2 M_{22} \\ S_1 M_{11} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

avec $M_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $M_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ sont des matrices non singulières. $S_1 \in \mathbb{R}^{q\times n}$ et $S_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ sont des matrices de réglage.

— *des matrices $Y_{11} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$,*

— *des scalaires $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $\kappa > 0$,*

tels que les LMIs suivantes

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\dot{o}^j_{(1,1)} & \dot{o}^j_{(1,2)} & \dot{o}^j_{(1,3)} & \dot{o}^j_{(1,4)} & 0 & o_{(1,5)} & 0 & 0 & o_{(1,6)} & 0 & o_0 & 0 & \dot{o}^j_1 & 0 & \dots & o^j_m & 0 \\
* & \dot{o}^j_{(2,2)} & \dot{o}^j_{(2,3)} & \dot{o}^j_{(2,4)} & 0 & S_1 o_{(1,5)} & 0 & 0 & S_1 o_{(1,6)} & 0 & S_1 o_0 & 0 & S_1 \dot{o}^j_1 & 0 & \dots & S_1 o^j_m & 0 \\
* & * & o_{(3,3)} & o_{(3,4)} & 0 & o_{(1,5)} & 0 & 0 & o_{(1,6)} & 0 & o_0 & 0 & \dot{o}^j_1 & 0 & \dots & o^j_m & 0 \\
* & * & * & o_{(4,4)} & 0 & S_1 o_{(1,5)} & 0 & 0 & S_1 o_{(1,6)} & 0 & S_1 o_0 & 0 & S_1 \dot{o}^j_1 & 0 & \dots & S_1 o^j_m & 0 \\
\hline
* & * & * & * & \frac{-1}{c_1} I_{n+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & \frac{-1}{c_1} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_1} I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2} I_{s+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2} I_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2} I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_n & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_n & 0 & \dots & \dots & \vdots \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_n & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q
\end{array}\right] < 0 \tag{4.13}
$$

sont vérifiées avec

$$o^j_{(1,1)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i1} + (M_{11}N^x_{0,1} + Y_{11}N^x_{0,2}) + \sum_{i=1}^{m}(M_{11}N^x_{i,1} + Y_{11}N^x_{i,2})\sigma^j_i + (N^{xT}_{0,1}M^T_{11} + N^{xT}_{0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m}(N^{xT}_{i,1}M^T_{11} + N^{xT}_{i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i + (M_{11}N^x_{d_0,1} + Y_{11}N^x_{d_0,2}) + \sum_{i=1}^{m}(M_{11}N^x_{d_i,1} + Y_{11}N^x_{d_i,2})\sigma^j_i + (N^{xT}_{d_0,1}M^T_{11} + N^{xT}_{d_0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=0}^{m}(N^{xT}_{d_i,1}M^T_{11} + N^{xT}_{d_i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i - S_2Y_{22}Q^\theta_2 - Q^{\theta T}_2 Y^T_{22}S^T_2 + \left(\frac{d_1}{c_2} + \frac{b_1^2}{c_1}\right) I_r$$

$$o^j_{(1,2)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i2} + (N^{xT}_{0,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{0,2}Y^T_{11}S^T_1) - C^T Y^T_{22} + M_{11}G_1 - M_{11}J_{x,1}CG_1 - Y_{11}J_{x,2}CG_1 + \sum_{i=1}^{m}(N^{xT}_{i,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{i,2}Y^T_{11}S^T_1)\sigma^j_i + (N^{xT}_{d_0,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{d_0,2}Y^T_{11}S^T_1) + \sum_{i=1}^{m}(N^{xT}_{d_i,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{d_i,2}Y^T_{11}S^T_1)\sigma^j_i$$

$$o^j_{(2,2)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3} + G^T_1 M^T_{11}S^T_1 - G^T_1 C^T J^{xT}_1 M^T_{11}S^T_1 - G^T_1 C^T J^{xT}_2 Y^T_{11}S^T_1 + S_1M_{11}G_1 - S_1M_{11}J^x_1CG_1 - S_1Y_{11}J^x_2CG_1 + \frac{d_2}{c_2}I_q$$

$$o^j_{(1,3)} = P_{01} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i1} - M_{11} - C^T Y^T_{22}S^T_2 + (N^{xT}_{0,1}M^T_{11} + N^{xT}_{0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m}(N^{xT}_{i,1}M^T_{11} + N^{xT}_{i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i + (N^{xT}_{d_0,1}M^T_{11} + N^{xT}_{d_0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m}(N^{xT}_{d_i,1}M^T_{11} + N^{xT}_{d_i,2}Y^T_{11})\sigma^j_i$$

$$o^j_{(1,4)} = P_{02} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i2} - S_2M_{22} - C^T Y^T_{22} + (N^{xT}_{0,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{0,2}Y^T_{11}S^T_1) + \sum_{i=1}^{n}(N^{xT}_{i,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{i,2}Y^T_{11}S^T_1)\sigma^j_i + (N^{xT}_{d_0,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{d_0,2}Y^T_{11}S^T_1) + \sum_{i=1}^{m}(N^{xT}_{d_i,1}M^T_{11}S^T_1 + N^{xT}_{d_i,2}Y^T_{11}S^T_1)\sigma^j_i$$

$$o^j_{(2,3)} = P^T_{02} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P^T_{i2} - S_1M_{11} + G^T_1 M^T_{11} - G^T_1 C^T J^{xT}_1 M^T_{11} - G^T_1 C^T J^{xT}_2 Y^T_{11}$$

$$
\begin{aligned}
o^j_{(2,4)} &= P_{03} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_{i3} - M_{22} + G_1^T M_{11}^T S_1^T - G_1^T C^T J_1^{xT} M_{11}^T S_1^T - G_1^T C^T J_2^{xT} Y_{11}^T S_1^T \\
o_{(3,3)} &= -M_{11} - M_{11}^T \\
o_{(3,4)} &= -S_2 M_{22} - M_{11}^T S_1^T \\
o_{(4,4)} &= -M_{22} - M_{22}^T \\
o_{(1,5)} &= M_{11} - M_{11} J_1^x C - Y_{11} J_2^x C \\
o_{(1,6)} &= M_{11} G_2 - M_{11} J_1^x C G_2 - Y_{11} J_2^x C G_2 \\
o_0 &= (M_{11} N^x_{d_0,1} + Y_{11} N^x_{d_0,2}) \\
o_i^j &= (M_{11} N^x_{d_i,1} + Y_{11} N^x_{d_i,2}) \sigma_i^j \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

et[1]

$$d_1 = b_2^2 b_3^2 + b_2 b_3 b_g \tag{4.14a}$$

$$d_2 = b_g^2 + b_2 b_3 b_g \tag{4.14b}$$

Les gains $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ *et* K_0^θ *sont donnés par*

$$\mathcal{Z}_{\text{pln},1} = M_{11}^{-1} Y_{11} \tag{4.15a}$$

$$K_0^\theta = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{4.15b}$$

Les matrices de gain de l'observateur N_i^x, M_i^x, $N_{d_i}^x$, $M_{d_i}^x$, *pour* $i = 0, \ldots, m$, *et* J^x *sont déduites de la relation* (3.43).

Démonstration. Comme dans les chapitres précédents, la preuve de ce théorème est basée sur la transformation du système d'erreur en un système descripteur équivalent. Pour ce faire, notons $\overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) = \dot{\overline{e}}_{\text{pln}}(t)$. Le système (4.10) se réécrit sous la forme descripteur suivante

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_{n+q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\overline{e}}_{\text{pln}}(t) \\ \dot{\overline{\varepsilon}}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n+q} \\ \mathbb{N}(u) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) & -I_{n+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \int_t^{t-\tau_i} \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(s) ds + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_g \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

En considérant la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\overline{e}_{\text{pln}}) = \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{m} \int_{-\tau_i}^{0} \int_t^{t+\beta} \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}^T(s) \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(s) ds d\beta \tag{4.17}$$

avec $P(u) = P(u)^T > 0 \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$. $M \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$ est une matrice donnée et κ est un scalaire strictement positif. La dérivée temporelle de cette fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (4.10) est décrite comme suit

$$\dot{V}(\overline{e}_{\text{pln}}) = \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} \\ * & -M - M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{m} S_i(t)$$

1. Une autre expression de d_1 et d_2 est proposée dans la remarque 4.3.2, page 104.

$$+ v_1(\overline{e}_{\text{pln}}) + v_2(\overline{e}_{\text{pln}}) - \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{m}\int_{t}^{t-\tau_i} \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}^T(s)\overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(s)ds \quad (4.18)$$

où $a_{(1,1)}$, $a_{(1,2)}$ et $S_i(t)$ sont définis respectivement par (3.25a), (3.25b) et (3.25c). Les termes $v_1(\overline{e}_{\text{pln}})$ et $v_2(\overline{e}_{\text{pln}})$ sont donnés par

$$v_1(\overline{e}_{\text{pln}}) = \begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & M\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_\ell\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_\ell\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{L}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & 0\\ M^T & M^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix} \quad (4.19a)$$

$$v_2(\overline{e}_{\text{pln}}) = \begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & M\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_g\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_g\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{G}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & 0\\ M^T & M^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

Notons que la dérivée de la fonction de Lyapunov décrite par (4.18) est la somme de la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.24) utilisée dans la démonstration du théorème 3.3.2 avec les termes $v_1(\overline{e}_{\text{pln}})$ et $v_2(\overline{e}_{\text{pln}})$ en plus. Ainsi, nous allons nous baser dans cette démonstration sur la démonstration du théorème 3.4.2 où les termes $S_i(t)$ ont été majorés par l'inégalité (3.26). Il en résulte qu'il reste à majorer les termes $v_1(\overline{e}_{\text{pln}})$ et $v_2(\overline{e}_{\text{pln}})$.

Commençons par $v_1(\overline{e}_{\text{pln}})$, qui, en utilisant le lemme de majoration A.3.1, peut être majoré comme suit

$$v_1(\overline{e}_{\text{pln}}) \leq \underline{\frac{1}{c_1}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_\ell\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_\ell\end{bmatrix}} + c_1 \begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & M\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{L}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & 0\\ M^T & M^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix}$$

En utilisant le lemme de majoration A.3.1, le terme souligné ci-dessus peut être majoré comme suit

$$\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_\ell\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_\ell\end{bmatrix} = \mathbb{N}_\ell^T\mathbb{N}_\ell = \left(\ell(x,u) - \ell(\hat{x},u)\right)^T\left(\ell(x,u) - \ell(\hat{x},u)\right) \leq b_1^2 e_x^T(t)e_x(t)$$

Il s'en suit que le terme $v_1(\overline{e}_{\text{pln}})$ peut être majoré par l'expression suivante

$$v_1(\overline{e}_{\text{pln}}) \leq \frac{b_1^2}{c_1}e_x^T(t)e_x(t) + c_1 \begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & M\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{L}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & 0\\ M^T & M^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}\end{bmatrix} \quad (4.20)$$

En procédant de la même manière que pour le terme $v_1(\overline{e}_{\text{pln}})$, le terme $v_2(\overline{e}_{\text{pln}})$ est majoré ci-après en utilisant l'inégalité (A.3.5)

$$v_2(\overline{e}_{\text{pln}}) \leq \underline{\frac{1}{c_2}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_g\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_g\end{bmatrix}} + c_2 \begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}(t)\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & M\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{G}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P(u) & 0\\ M^T & M^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{e}_{\text{pln}}(t)\\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t)\end{bmatrix}$$

et le terme souligné est majoré comme suit

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_g\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0\\ \mathbb{N}_g\end{bmatrix} = \mathbb{N}_g^T\mathbb{N}_g &= \left[g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta}\right]^T\left[g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta}\right]\\ &\leq \Big(\left(g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\theta\right) + \Big(g(\hat{x},u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta}\Big)\Big)^T\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left((g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\theta) + \left(g(\hat{x},u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta} \right) \right) \\
&\leq b_2^2 b_3^2 e_x^T(t) e_x(t) + b_g^2 e_\theta^T(t) e_\theta + b_2 b_3 b_g \left(||e_x^T(t)||\ ||e_\theta(t)|| + ||e_\theta^T(t)||\ ||e_x(t)|| \right) \\
&\leq b_2^2 b_3^2 e_x^T(t) e_x(t) + b_g^2 e_\theta^T(t) e_\theta + b_2 b_3 b_g (e_x^T(t) e_x(t) + e_\theta^T(t) e_\theta) \\
&= \underbrace{(b_2^2 b_3^2 + b_2 b_3 b_g)}_{d_1} e_x^T(t) e_x(t) + \underbrace{(b_g^2 + b_2 b_3 b_g)}_{d_2} e_\theta^T(t) e_\theta
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Il en résulte la majoration du terme $v_2(\overline{e}_{\text{pln}})$ donnée par

$$
\begin{aligned}
v_2(\overline{e}_{\text{pln}}) \leq \overline{e}_{\text{pln}}^T(t) &\begin{bmatrix} \frac{d_1}{c_2} I_n & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{c_2} I_q \end{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\
&+ c_2 \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{G} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Finalement, en utilisant la majoration des termes $S_i(t)$, pour $i = 0, \ldots, m$, donnée par la relation (3.26), ainsi que les inégalités (4.20) et (4.22), la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov (4.17) le long de la trajectoire du système (4.10) peut être majorée comme suit

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(\overline{e}_{\text{pln}}) \leq &\begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} a_{(1,1)} + Q & a_{(1,2)} \\ * & -M - M^T \end{bmatrix} \right. \\
&+ c_1 \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{G} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \\
&\left. + \kappa \sum_{i=0}^{m} \begin{bmatrix} P(u) & M \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ M^T & M^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

avec $Q = \begin{bmatrix} \left(\frac{d_1}{c_2} + \frac{b_1^2}{c_1} \right) I_n & 0 \\ 0 & \left(\frac{d_2}{c_2} \right) I_q \end{bmatrix}$.

En développant les blocs de l'inégalité ci-dessus, celle-ci se réécrit sous la forme suivante

$$
\dot{V}(\overline{e}_{\text{pln}}) \leq \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} & \overline{a}_{(1,2)} \\ * & \overline{a}_{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_{\text{pln}}(t) \\ \overline{\varepsilon}_{\text{pln}}(t) \end{bmatrix} \tag{4.23}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_{(1,1)} &= a_{(1,1)} + Q + c_1 M \mathbb{L}\mathbb{L}^T M^T + c_2 M \mathbb{G}\mathbb{G}^T M^T + \kappa \sum_{i=0}^{m} M \mathbb{N}_{d_i} \mathbb{N}_{d_i}^T M^T u_i^2(t) \\
\overline{a}_{(1,2)} &= a_{(1,2)} + c_1 M \mathbb{L}\mathbb{L}^T M^T + c_2 M \mathbb{G}\mathbb{G}^T M^T + \kappa \sum_{i=0}^{m} M \mathbb{N}_{d_i} \mathbb{N}_{d_i}^T M^T u_i^2(t) \\
\overline{a}_{(2,2)} &= -M - M^T + c_1 M \mathbb{L}\mathbb{L}^T M^T + c_2 M \mathbb{G}\mathbb{G}^T M^T + \kappa \sum_{i=0}^{m} M \mathbb{N}_{d_i} \mathbb{N}_{d_i}^T M^T u_i^2(t)
\end{aligned}
$$

La stabilité de l'erreur d'estimation est donc garantie si

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_{(1,1)} & \overline{a}_{(1,2)} \\ * & \overline{a}_{(2,2)} \end{bmatrix} < 0$$

En appliquant le lemme de Schur (voir le lemme A.3.3), l'inégalité ci-dessus est équivalente à l'inégalité suivante

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{(1,1)}+Q & a_{(1,2)} & 0 & M\mathbb{L} & 0 & M\mathbb{G} \\ * & -M-M^T & 0 & M\mathbb{L} & 0 & M\mathbb{G} \\ \hline * & * & \frac{-1}{c_1}I_{n+q} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{-1}{c_1}I_{n+q} & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * & \frac{-1}{c_2}I_{s+q} & 0 \\ * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2}I_{s+q} \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c} M\mathbb{N}_{d_0} & M\mathbb{N}_{d_1}u_1(t) & \dots & M\mathbb{N}_{d_m}u_m(t) \\ M\mathbb{N}_{d_0} & M\mathbb{N}_{d_1}u_1(t) & \dots & M\mathbb{N}_{d_m}u_m(t) \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \frac{-1}{\kappa}I_{n+q} & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & \frac{-1}{\kappa}I_{n+q} & 0 & 0 \\ \hline * & * & \ddots & 0 \\ \hline * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_{n+q} \end{array}\right] < 0 \quad (4.24)$$

L'inégalité (4.24) dépend du vecteur de commande $u(t)$, ce qui ne permet pas une résolution simple du problème. Puisque les entrées et leurs dérivées sont bornées, elles appartiennent au polytope convexe $\mathcal{P}$ donné par (2.18), ce qui permet de résoudre le problème sur l'ensemble des sommets Φ donné par (2.19) du polytope $\mathcal{P}$. Ainsi, en utilisant le vecteur $\delta(t)$ décrit par (2.17), les matrices $\mathbb{N}(u)$, $\mathbb{N}_{d_i}u_i$ pour $i = 0, \dots, m$, $P(u)$ et sa dérivée se réécrivent comme suit

$$P(u) \longrightarrow \quad P(\delta) = P_0 + \sum_{i=1}^{m} \delta_i P_i, \quad (4.25a)$$

$$\dot{P}(u) \longrightarrow \quad \overline{P}(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \delta_{m+i} P_i \quad (4.25b)$$

$$\mathbb{N}(u) \longrightarrow \quad \mathbb{N}(\delta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m}(N_{i,1}^x + \mathcal{Z}_{\text{pln},1}N_{i,2}^x)\delta_i & G_1 - J_1^x C G_1 - \mathcal{Z}_{\text{pln},1}J_2^x C G_1 \\ -K_0^\theta C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25c)$$

$$\mathbb{N}_{d_i} u_i \longrightarrow \qquad \mathbb{N}_{d_i}\delta_i = \begin{bmatrix} N^x_{d_i,1} + \mathcal{Z}_{\text{pln},1} N^x_{d_i,2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_i \tag{4.25d}$$

Le développement des blocs de l'inégalité (4.24) aux sommets du polytope $\mathcal{P}$ donne les LMIs (4.13), ce qui termine la démonstration. •

Remarque 4.3.1. *La discussion faite sur la matrice M dans les remarques 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5 dans la section 3.3.2 reste valable pour la synthèse de l'observateur (4.6). Il suffit de remplacer dans ces remarques $a^j_{(2,2)}$, $a^j_{(3,3)}$ et $a^j_{(4,4)}$ par $o^j_{(2,2)}$, $o^j_{(3,3)}$ et $o^j_{(4,4)}$. De plus, l'équation dans le second item de la remarque 3.3.2 devient*

$$o^j_{(2,2)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3} + \frac{d_2}{c_2} I_q$$

Remarque 4.3.2. *En utilisant les relations (4.3), (4.4) et (4.5), on a la majoration suivante*

$$\begin{aligned} \left\| g(x)\theta - g(\hat{x})\widehat{\theta} \right\| &= \left\| g(x)\theta - g(\hat{x})\widehat{\theta} + g(\hat{x})\theta - g(\hat{x})\theta \right\| \\ &\leqslant \|g(x)\theta - g(\hat{x})\theta\| + \left\| g(\hat{x})\theta - g(\hat{x})\widehat{\theta} \right\| \\ &\leqslant \|\theta\| \, \|g(x) - g(\hat{x})\| + \|g(\hat{x})\| \left\| \theta - \widehat{\theta} \right\| \\ &\leqslant b_2 b_3 \|e_x\| + b_g \|e_\theta\| \end{aligned} \tag{4.26}$$

En utilisant l'inégalité (4.26) et le lemme de majoration A.3.1, on peut remplacer l'inégalité (4.21) dans la démonstration du théorème 4.3.1 par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_g \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_g \end{bmatrix} = \mathbb{N}_g^T \mathbb{N}_g &= (g(x)\theta - g(\hat{x})\widehat{\theta})^T (g(x)\theta - g(\hat{x})\widehat{\theta}) \\ &\leqslant b_2^2 b_3^2 e_x^T e_x + b_g^2 e_\theta^T e_\theta + 2 b_2^2 b_3^2 b_g^2 \|e_x\| \, \|e_\theta\| \\ &\leqslant b_2^2 b_3^2 e_x^T e_x + b_g^2 e_\theta^T e_\theta + \alpha b_2^2 b_3^2 b_g^2 e_x^T e_x + \alpha^{-1} b_2^2 b_3^2 b_g^2 e_\theta^T e_\theta \\ &= \underbrace{b_2^2 b_3^2 (\alpha + b_g^2)}_{d_{1,a}} e_x^T e_x + \underbrace{b_g^2 (1 + \alpha^{-1} b_2^2 b_3^2)}_{d_{2,a}} e_\theta^T e_\theta \end{aligned} \tag{4.27}$$

avec $\alpha > 0$.

L'inégalité (4.22) reste valable en utilisant $d_{1,a}$ et $d_{2,a}$ à la place de d_1 et d_2. Ainsi on peut remplacer d_1 et d_2 donnés respectivement par (4.14a) et (4.14b) dans le théorème 4.3.1 par $d_{1,a}$ et $d_{2,a}$.

Nous allons maintenant comparer les majorations (4.21) et (4.27).

(i) *On suppose que la majoration (4.21) est meilleure que la majoration (4.27), c'est-à-dire que l'on a*

$$d_1 \leqslant d_{1,a} \Longleftrightarrow b_2 b_3 + b_g \leqslant b_2 b_3 (\alpha + b_g^2) \Longleftrightarrow 1 + \frac{b_g}{b_2 b_3} - b_g^2 \leqslant \alpha \tag{4.28a}$$

$$d_2 \leqslant d_{2,a} \Longleftrightarrow b_2 b_3 b_g \leqslant \alpha^{-1} b_2^2 b_3^2 b_g^2 \Longleftrightarrow \alpha \leqslant b_2 b_3 b_g \tag{4.28b}$$

ce qui donne

$$1 + \frac{b_g}{b_2 b_3} - b_g^2 \leqslant \alpha \leqslant b_2 b_3 b_g \tag{4.29}$$

Puisqu'il existe $\alpha > 0$ *vérifiant* (4.29)*, il faut que*

$$1 + \frac{b_g}{b_2 b_3} - b_g^2 \leqslant b_2 b_3 b_g$$

c'est-à-dire que

$$0 \leqslant b_2 b_3 b_g^2 + (b_2^2 b_3^2 - 1) b_g - b_2 b_3 \tag{4.30}$$

On a le discriminant $\Delta = (b_2^2 b_3^2 - 1)^2 + 4 b_2^2 b_3^2 > 0$ *et les racines* $b_g = b_{g_1}$ *et* $b_g = b_{g_2}$ *de l'équation* $0 = b_2 b_3 b_g^2 + (b_2^2 b_3^2 - 1) b_g - b_2 b_3$ *sont données par*

$$b_{g_1} = \frac{1 - b_2^2 b_3^2 + \sqrt{(b_2^2 b_3^2 - 1)^2 + 4 b_2^2 b_3^2}}{2 b_2 b_3} = \frac{1}{b_2 b_3} \tag{4.31a}$$

$$b_{g_2} = \frac{1 - b_2^2 b_3^2 - \sqrt{(b_2^2 b_3^2 - 1)^2 + 4 b_2^2 b_3^2}}{2 b_2 b_3} = -b_2 b_3 \tag{4.31b}$$

On a donc toujours $b_{g_1} > 0$ *et* $b_{g_2} < 0$.
Donc, $\forall\, b_2 > 0$ *et* $\forall\, b_3 > 0$*, il existe toujours* $b_g > 0$ *qui vérifie* $b_2 b_3 b_g > 1$ *et l'inégalité* (4.30).
Si $b_g = b_{g_1}$*, c'est-à-dire si* $b_2 b_3 b_g = 1$*, alors les inégalités* (4.28a) *et* (4.28b) *sont satisfaites si on a* $\alpha = 1$*, ce qui donne* $d_1 = d_{1,a}$ *et* $d_2 = d_{2,a}$*. Dans ce cas, l'inégalité* (4.30) *est satisfaite et devient une égalité.*

(ii) *On suppose que la majoration* (4.27) *est meilleure que* (4.21)*, c'est-à-dire que l'on a*

$$d_1 \geqslant d_{1,a} \Longleftrightarrow b_2 b_3 + b_g \geqslant b_2 b_3 (\alpha + b_g^2) \Longleftrightarrow 1 + \frac{b_g}{b_2 b_3} - b_g^2 \geqslant \alpha \tag{4.32a}$$

$$d_2 \geqslant d_{2,a} \Longleftrightarrow b_2 b_3 b_g \geqslant \alpha^{-1} b_2^2 b_3^2 b_g^2 \Longleftrightarrow \alpha \geqslant b_2 b_3 b_g \tag{4.32b}$$

ce qui donne

$$1 + \frac{b_g}{b_2 b_3} - b_g^2 \geqslant \alpha \geqslant b_2 b_3 b_g \tag{4.33}$$

Pour qu'il existe $\alpha > 0$ *vérifiant* (4.33)*, il faut que*

$$1 + \frac{b_g}{b_2 b_3} - b_g^2 \geqslant b_2 b_3 b_g$$

c'est-à-dire que

$$0 \geqslant b_2 b_3 b_g^2 + (b_2^2 b_3^2 - 1) b_g - b_2 b_3 \tag{4.34}$$

On a le discriminant $\Delta = (b_2^2 b_3^2 - 1)^2 + 4 b_2^2 b_3^2 > 0$ *et les racines* $b_g = b_{g_1}$ *et* $b_g = b_{g_2}$ *de l'équation* $0 = b_2 b_3 b_g^2 + (b_2^2 b_3^2 - 1) b_g - b_2 b_3$ *sont données par* (4.31a) *et* (4.31b).
Donc, $\forall\, b_2 > 0$ *et* $\forall\, b_3 > 0$*, il existe toujours* $b_g > 0$ *qui vérifie* $b_2 b_3 b_g < 1$ *et l'inégalité* (4.34).

Le choix entre les majorations obtenues avec (4.21) *et* (4.27) *dépend donc de la valeur de* $b_2 b_3 b_g$ *:*

- *soit* $b_2 b_3 b_g < 1 \longrightarrow$ *majoration* (4.27) *et il faut que* α *vérifie* (4.33)*,*

- *soit* $b_2b_3b_g = 1 \longrightarrow$ *les majorations* (4.21) *et* (4.27) *sont équivalentes et il faut que* $\alpha = 1$,
- *soit* $b_2b_3b_g > 1 \longrightarrow$ *majoration* (4.21).

Exemple numérique : Afin d'illustrer la faisabilité de notre approche et les performances de l'observateur (4.6), nous considérons un exemple de système non linéaire à retards décrit comme suit

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 2\\ -1 & -1.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0.4 & 0.8\\ 0.27 & -0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}-0.1 & 0.01\\ -0.11 & -0.68\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-\tau_0)\\ x_2(t-\tau_0)\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}-0.8 & 0.08\\ -0.2 & -0.04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-\tau_1)\\ x_2(t-\tau_1)\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}-0.2\\ 0.22\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}-0.2\\ -0.3\end{bmatrix}\theta + \begin{bmatrix}0.9\\ -1\end{bmatrix}g(x,u)\theta + \ell(x,u)$$

où les fonctions non linéaires sont décrites par

$$\ell(x,u) = \begin{bmatrix}0.5\sin(x_1(t)+u(t))\\ 0.5\sin(x_2(t)+u(t))\end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad g(x,u) = 0.3\sin(u(t)-x_1(t))$$

avec les constantes de Lipschitz respectives $b_1 = 0.5$ et $b_2 = 0.3$ et avec $|g(x,u)| \leq b_g = 0.3$. Le paramètre inconnu affectant le système est borné comme suit $|\theta| < b_3 = 0.8$ et vérifie l'hypothèse 4.2.2. Le vecteur des mesures est décrit par $y(t) = 0.5x_1(t)$ et les retards qui affectent le vecteur d'état sont $\tau_0 = 2$s et $\tau_1 = 1$s.

Avec un choix des matrices $S_1 = \begin{bmatrix}1.6136\,10^{-7} & 0.6644\end{bmatrix}$ et $S_2^T = \begin{bmatrix}4.4321\,10^{-7} & 0.079348\end{bmatrix}$, la résolution des LMIs (4.13) donnent les matrices et les scalaires suivants

$$P_0 = \begin{bmatrix}18.344 & 3.8888\,10^{-6} & 3.6677\,10^{-6}\\ 3.8888\,10^{-6} & 9.9575 & 3.4396\\ 3.6677\,10^{-6} & 3.4396 & 12.077\end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix}0.0029655 & -1.6578\,10^{-7} & -5.5194\,10^{-7}\\ -1.6578\,10^{-7} & 0.99968 & -0.33591\\ -5.5194\,10^{-7} & -0.33591 & -0.7789\end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix}8.6358 & 3.4849\,10^{-6} & 5.2374\,10^{-6}\\ 3.4849\,10^{-6} & 4.794 & 0.93767\\ 3.7088\,10^{-6} & 3.1852 & 11.817\end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \begin{bmatrix}-2.4352 & -3.5966 & -14.415 & -8.9915 & -3.7121 & -719.32 & -7.1153\\ -0.080364 & -0.67927 & -10.415 & -1.6982 & 2.3731 & -135.85 & -4.914\\ -89.915 & 18.999 & -7.2001 & -1.8561 & -3.5577 & -2.5035 & \\ -16.982 & -21.683 & -4.394 & -0.31188 & -7.9247 & -2.8752 & \end{bmatrix}$$

$$Y_{22} = -7.004$$

$$c_1 = 0.050109, \quad c_2 = 0.32974, \quad \kappa = 0.060235$$

Le calcul des matrices $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ et K_0^θ selon les relations (4.15a) et (4.15b) donne les valeurs suivantes

$$Q^\theta = -0.5927$$

$$\mathcal{Z}_{\text{pln},1} = \begin{bmatrix} -0.28199 & -0.41647 & -1.6692 & -1.0412 & -0.42985 & -83.295 & -0.82393 \\ -0.016763 & -0.14169 & -2.1726 & -0.35423 & 0.49502 & -28.338 & -1.025 \\ -10.412 & 2.2 & -0.83374 & -0.21492 & -0.41197 & -0.2899 & \\ -3.5423 & -4.523 & -0.91654 & -0.065055 & -1.653 & -0.59974 & \end{bmatrix}$$

Ainsi, les matrices gain de l'observateur sont déduites comme suit

$$N_0^x = \begin{bmatrix} -0.936 & 9.352\,10^{-7} \\ -0.475 & -0.974 \end{bmatrix} \quad N_1^x = \begin{bmatrix} -3.482\,10^{-4} & 3.740\,10^{-7} \\ 1.156\,10^{-7} & -0.0297 \end{bmatrix} \quad M_0^x = \begin{bmatrix} -3.730\,10^{-6} \\ -4.800 \end{bmatrix}$$

$$N_{d_0}^x = \begin{bmatrix} -5.159\,10^{-7} & 4.676\,10^{-9} \\ 1.643\,10^{-7} & -0.675 \end{bmatrix} \quad N_{d_1}^x = \begin{bmatrix} -4.431\,10^{-8} & 3.740\,10^{-8} \\ -3.337\,10^{-7} & -2.974\,10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$M_1^x = \begin{bmatrix} -7.200\,10^{-7} \\ 0.197 \end{bmatrix} \quad M_{d_0}^x = \begin{bmatrix} -9.784\,10^{-8} \\ 0.312 \end{bmatrix} \quad M_{d_1}^x = \begin{bmatrix} -7.827\,10^{-7} \\ -1.137 \end{bmatrix} \quad J^x = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.92564 \end{bmatrix}$$

$$Q_g^x = \begin{bmatrix} 4.208\,10^{-7} \\ -0.583 \end{bmatrix} \quad Q_\ell^x = \begin{bmatrix} 4.676\,10^{-7} & 0 \\ 0.462 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous injectons les valeurs des matrices gain obtenues ci-dessus dans l'observateur. Les résultats de simulation sont illustrés par les figures 4.1 et 4.2 qui montrent la convergence des estimations des états et du paramètre inconnu vers leurs vraies valeurs.

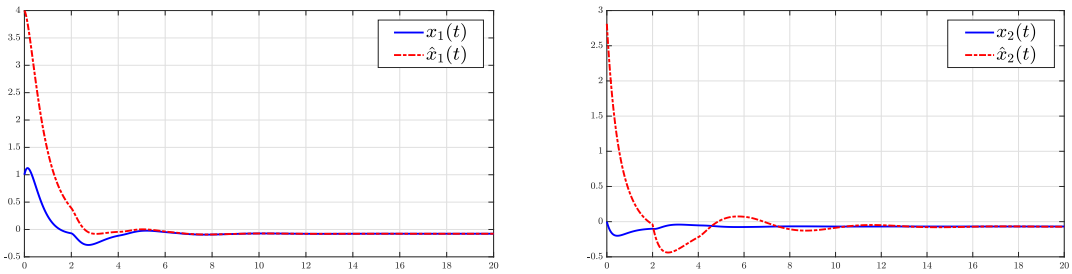


FIGURE 4.1 – Convergence de l'estimation des états $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs respectives x_1 et x_2 (—).

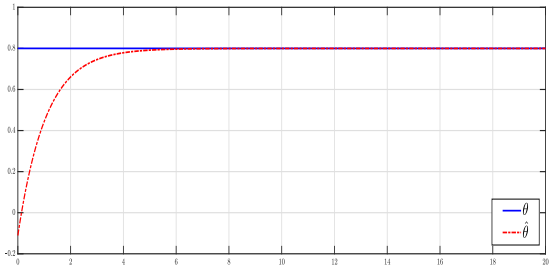


FIGURE 4.2 – Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—).

4.3.2 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$

En se basant sur les résultats de la section 4.3.1, nous proposons de synthétiser un observateur adaptatif avec $J^x = 0$ et $J^\theta = 0$. En annulant les gains K_i^x, pour $i = 1, \dots, m$, et $K_{d_i}^x$, pour $i = 0, \dots, m$, la structure de l'observateur devient proche de celle souvent utilisée dans la littérature. Cet observateur est décrit par

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) = &\left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i\right)\hat{x}(t) + A_{d_0}\hat{x}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i} u_i(t)\hat{x}(t-\tau_i) + Bu(t) \\ &+ \ell(\hat{x},u) + G_1\hat{\theta} + G_2 g(\hat{x},u)\hat{\theta} + K_0^x(y - C\hat{x}) \qquad (4.35a)\\ \dot{\hat{\theta}} = &\, K_0^\theta(y - C\hat{x}) \qquad (4.35b)\end{aligned}$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$ sont respectivement les estimations de x et θ. $K_0^x \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $K_0^\theta \in \mathbb{R}^{q\times p}$ sont les matrices des gains de l'observateur à déterminer afin que les erreurs d'estimation du vecteur d'état et des paramètres inconnus convergent vers zéro.

En considérant $J^x = 0$, la matrice Ψ_{pln} devient égale à la matrice identité de dimension n ce qui engendre que les erreurs d'estimations sont $\overline{e}_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et $\overline{e}_\theta(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$. Le calcul des dynamiques des erreurs d'estimation donne

$$\begin{aligned}\dot{\overline{e}}_x(t) = &\left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i - K_0^x C\right)\overline{e}_x(t) + A_{d_0}\overline{e}_x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i} u_i \overline{e}_x(t-\tau_i) \\ &+ (\ell(x,u) - \ell(\hat{x},u)) + G\left(g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta}\right) \qquad (4.36a)\\ \dot{\overline{e}}_\theta(t) = &-K_0^\theta C\overline{e}_x(t) \qquad (4.36b)\end{aligned}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $\overline{e}^T(t) = \begin{bmatrix}\overline{e}_x^T(t) & \overline{e}_\theta^T(t)\end{bmatrix}$ est décrite par l'EDF suivante

$$\dot{\overline{e}}_{\text{pln}}(t) = \mathbb{N}(u)\overline{e}_{\text{pln}}(t) + \mathbb{N}_{d_0}\overline{e}_{\text{pln}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t)\overline{e}_{\text{pln}}(t-\tau_i) + \mathbb{N}_\ell + \mathbb{G}\mathbb{N}_g \qquad (4.37)$$

où les matrices $\mathbb{N}(u)$, $\mathbb{N}_{d_0}$, $\mathbb{N}_{d_i}$, $\mathbb{N}_\ell$, $\mathbb{N}_g$ et $\mathbb{G}$ sont données par

$$\mathbb{N}(u) = \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i - K_0^x C & G_1 \\ -K_0^\theta C & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} A_{d_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_i}(u) = \begin{bmatrix} A_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_\ell = \begin{bmatrix} \ell(x,u) - \ell(\hat{x},u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_g = \begin{bmatrix} g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{G} = \begin{bmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En se basant sur les développements faits dans la section 4.3.1, nous pouvons énoncer sans démonstration le théorème suivant en adaptant le théorème 4.3.1 dans le cas où $J^x = 0$, $K_i^x = 0$, pour $i = 1, \dots, m$, et $K_{d_i}^x = 0$, pour $i = 0, \dots, m$.

Théorème 4.3.2. *Si les hypothèses 2.3.1, 4.2.1 and 4.2.2 sont vérifiées, alors le système (4.35) est un observateur adaptatif pour le système non linéaire (4.1) et l'erreur d'estimation donnée par (4.37) est quadratiquement stable s'il existe, pour $\sigma^j \in \Phi$, avec $j = 1, \dots, 2^{2m}$*

- *une matrice $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$ donnée par (4.11),*
- *une matrice $M \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$ donnée par (4.12),*
- *des matrices $Y_{11} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$,*
- *et des scalaires $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $\kappa > 0$,*

tels que les LMIs

$$
\begin{bmatrix}
\dot{\overline{\sigma}}^j_{(1,1)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(1,2)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(1,3)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(1,4)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(1,5)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(1,6)} & M_{11} & S_2M_{22} & 0 & \overline{o}_{(1,7)} & 0 & \overline{o}_0 & 0 & \overline{\sigma}^j_1 & 0 & \dots & \dot{\overline{\sigma}}^j_m & 0 \\
* & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(2,2)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(2,3)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(2,4)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(2,5)} & \dot{\overline{\sigma}}^j_{(2,6)} & S_1M_{11} & M_{22} & 0 & S_1\overline{o}_{(1,7)} & 0 & S_1\overline{o}_0 & 0 & S_1\overline{\sigma}^j_1 & 0 & \dots & S_1\dot{\overline{\sigma}}^j_m & 0 \\
* & * & o_{(3,3)} & o_{(3,4)} & 0 & 0 & M_{11} & S_2M_{22} & 0 & \overline{o}_{(1,7)} & 0 & \overline{o}_0 & 0 & \overline{\sigma}^j_1 & 0 & \dots & \dot{\overline{\sigma}}^j_m & 0 \\
* & * & * & o_{(4,4)} & 0 & 0 & S_1M_{11} & M_{22} & 0 & S_1\overline{o}_{(1,7)} & 0 & S_1\overline{o}_0 & 0 & S_1\overline{\sigma}^j_1 & 0 & \dots & S_1\dot{\overline{\sigma}}^j_m & 0 \\
\hline
* & * & * & * & \frac{-1}{c_1}I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & \frac{-1}{c_1}I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_1}I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_1}I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2}I_{s+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2}I_s & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2}I_q & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_q & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_n & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa}I_q
\end{bmatrix} < 0 \tag{4.38}
$$

sont satisfaites avec

$$
\begin{aligned}
\overline{o}^j_{(1,1)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i1} + \sum_{i=0}^{m} M_{11} A_i \sigma^j_i + \sum_{i=0}^{m} A_i^T M_{11}^T \sigma^j_i - Y_{11} C - C^T Y_{11}^T - S_2 Y_{22} C \\
&\qquad - C^T Y_{22}^T S_2^T + \sum_{i=0}^{m} M_{11} A_{d_i} \sigma^j_i + \sum_{i=0}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T \sigma^j_i + \left(\frac{d_1}{c_2} + \frac{b_1^2}{c_1} \right) I_n \\
\overline{o}^j_{(1,2)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i2} + M_{11} G_1 + \sum_{i=0}^{m} A_i^T \sigma^j_i M_{11}^T S_1^T + \sum_{i=0}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T S_1^T \sigma^j_i - C^T Y_{22}^T \\
&\qquad - C^T Y_{11}^T S_1^T \\
\overline{o}^j_{(2,2)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3} + S_1 M_{11} G_1 + G_1^T M_{11}^T S_1^T + \frac{d_2}{c_2} I_q \\
\overline{o}^j_{(1,3)} &= \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i1} + \sum_{i=0}^{m} A_i^T M_{11}^T \sigma^j_i + \sum_{i=0}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T \sigma^j_i - M_{11} - C^T Y_{11}^T - C^T Y_{22}^T S_2^T \\
\overline{o}^j_{(1,4)} &= \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i2} - M_{12} + \sum_{i=0}^{m} A_i^T M_{11}^T S_1^T \sigma^j_i - C^T Y_{22}^T + \sum_{i=1}^{m} A_{d_i}^T M_{11}^T S_1^T \sigma^j_i \\
&\qquad - C^T Y_{11}^T S_1^T \\
\overline{o}^j_{(2,3)} &= \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i2}^T - S_1 M_{11} + G_1^T M_{11}^T \\
\overline{o}^j_{(2,4)} &= \sum_{i=0}^{m} \sigma^j_i P_{i3} - M_{22} + G_1^T M_{11}^T S_1^T \\
\overline{o}_{(3,3)} &= -M_{11} - M_{11}^T \\
\overline{o}_{(4,4)} &= -M_{22} - M_{22}^T \\
\overline{o}_{(3,4)} &= -S_2 M_{22} - M_{11}^T S_1^T \\
\overline{o}^j_{(1,5)} &= P_{01} + \sum_{i=1}^{m} P_{i1} \sigma^j_i \\
\overline{o}^j_{(1,6)} &= P_{02} + \sum_{i=1}^{m} P_{i2} \sigma^j_i \\
\overline{o}^j_{(2,5)} &= P_{02}^T + \sum_{i=1}^{m} P_{02}^T \sigma^j_i \\
\overline{o}^j_{(2,6)} &= P_{03} + \sum_{i=1}^{m} P_{i3} \sigma^j_i \\
\overline{o}_{(1,7)} &= M_{11} G_2 \\
\overline{o}^j_0 &= M_{11} A_{d_0} \\
\overline{o}^j_i &= M_{11} A_{d_i} \sigma^j_i \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

et[2]

2. Une autre expression de d_1 et d_2 est proposée dans la remarque 4.3.2, page 104.

$$d_1 = b_2^2 b_3^2 + b_2 b_3 b_g$$
$$d_2 = b_g^2 + b_2 b_3 b_g$$

Les gains de l'observateur sont donnés par

$$K_0^x = M_{11}^{-1} Y_{11} \tag{4.39a}$$
$$K_0^\theta = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{4.39b}$$

Exemple d'illustration : Considérons l'exemple suivant

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 2\\ -1 & -1.52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0.4 & 0.8\\ 0.27 & -0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}-0.1 & 0.01\\ -0.11 & -0.68\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-\tau_0)\\ x_2(t-\tau_0)\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}-0.8 & 0.08\\ -0.2 & -0.04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-\tau_1)\\ x_2(t-\tau_1)\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}0.8\\ 0.01\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}-0.2\\ 0.3\end{bmatrix}\theta + \begin{bmatrix}0.99\\ -0.9\end{bmatrix}g(x,u)\theta + \ell(x,u)$$

Les fonctions non linéaires $\ell(x,u)$ et $g(x,u)$ sont décrites comme suit

$$\ell(x,u) = \begin{bmatrix}0.2\sin(x_1(t)e^{-0.2u(t)})\\ 0.2\sin(x_2(t)e^{-0.2u(t)})\end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad g(x,u) = 0.2\sin(u(t) - x_1(t))$$

avec les constantes de Lipschitz respectives $b_1 = 0.2$ et $b_2 = 0.2$ et avec $|g(x,u)| \leq b_g = 0.2$. Le paramètre inconnu est borné comme suit $|\theta| < b_3 = 0.5$ et vérifie ainsi l'hypothèse 4.2.2. Les mesures disponibles sont $y(t) = x_1(t)$ et les retards sont les suivants $\tau_0 = 1.5$s et $\tau_1 = 2$s. La résolution des LMIs (4.38) aux sommets du polytope convexe $\mathcal{P}$, avec $S_1 = \begin{bmatrix}1.6484 & -0.34381\end{bmatrix}$ et $S_2^T = \begin{bmatrix}0.7037 & 1.03\end{bmatrix}$, donne les valeurs suivantes des matrices P_0, P_1, M, Y_{11}, Y_{22} et des constantes c_1, c_2 et κ,

$$P_0 = \begin{bmatrix}15.068 & -0.89688 & 2.6085\\ -0.89688 & 13.441 & 2.6283\\ 2.6085 & 2.6283 & 2.9814\end{bmatrix}$$
$$P_1 = \begin{bmatrix}1.7529 & -1.3438 & -0.058127\\ -1.3438 & 1.8824 & -0.38556\\ -0.058127 & -0.38556 & 0.24273\end{bmatrix}$$
$$M = \begin{bmatrix}3.8369 & 1.643 & 0.2776\\ 1.643 & 7.1203 & 1.3041\\ 3.2369 & 3.4346 & 2.9919\end{bmatrix}$$
$$Y_{11} = \begin{bmatrix}73.239\\ -50.43\end{bmatrix}$$
$$Y_{22} = -52.141$$
$$c_1 = 0.030433, \quad c_2 = 0.068368, \quad \kappa = 0.038903$$

Le calcul des gains de l'observateur K_0^x et K_0^θ avec les expressions (4.39) donne

$$K_0^x = M_{11}^{-1} Y_{11} = \begin{bmatrix} 0.13455 \\ -1.0155 \end{bmatrix}$$
$$K_0^\theta = M_{22}^{-1} Y_{22} = -2.5382$$

Ces gains sont injectés dans l'observateur et les résultats de simulation illustrés par les figures 4.3 et 4.4 montrent la convergence des états et des paramètres estimés vers leurs vraies valeurs.

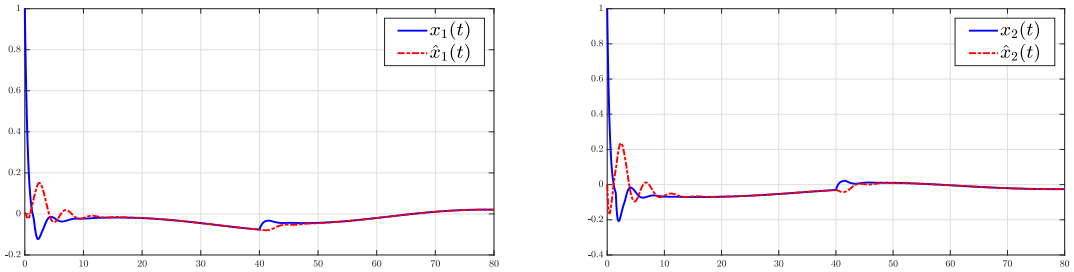


FIGURE 4.3 – Convergence des états estimés $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ $(\cdots)$ vers leurs vraies valeurs respectives x_1 et x_2 (—).

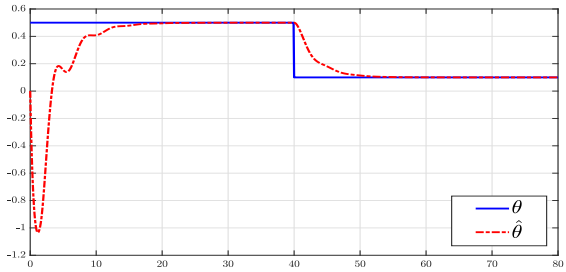


FIGURE 4.4 – Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—).

4.3.3 Observateur adaptatif fonctionnel d'ordre réduit avec $J^\theta = 0$

Dans cette section, nous considérons le système (4.1) où $\text{rang}(L) = r$ et nous proposons un observateur adaptatif d'ordre réduit donné par la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_z(t) = N_0^z \eta_z(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i^z u_i \eta_z(t) + \Psi_L B u(t) + N_{d_0}^z \eta_z(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i}^z u_i \eta_z(t-\tau_i) \\ + M_0^z y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i^z u_i y(t) + M_{d_0}^z y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i}^z u_i y(t-\tau_i) \\ + Q_\ell^z \ell(\hat{z}, u) + \Psi_L G_1 \hat{\theta} + Q_g^z g(\hat{z}, u)\hat{\theta} \qquad (4.40a)\end{aligned}$$
$$\dot{\hat{\theta}}(t) = Q^\theta \eta_z(t) + M_0^\theta y(t) \qquad (4.40b)$$
$$\hat{z}(t) = \eta_z(t) + J^z y(t) \qquad (4.40c)$$

où $\eta_z \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur d'état de l'observateur. $\hat{z} \in \mathbb{R}^r$ et $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$ sont respectivement les estimées de z et θ. Les matrices $N_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $M_i \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $N_{d_i} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $M_{d_i} \in \mathbb{R}^{r\times p}$, pour

$i = 0, \ldots, m$, $Q_\ell^z \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $Q_g^z \in \mathbb{R}^{r\times s}$ et $J^z \in \mathbb{R}^{r\times p}$ sont les matrices des gains de l'observateur à déterminer dans le but d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation. Pour ce faire, notons $\overline{e}_{\text{red}}(t)$ l'erreur d'estimation définie par

$$\overline{e}_{\text{red}}(t) = \begin{bmatrix} \overline{e}_z(t) \\ \overline{e}_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) - \hat{z}(t) \\ \theta - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_L x(t) - \eta_z(t) \\ \theta - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Posons $\Psi_L = L - J^z C$. En procédant comme dans les sections précédentes et en supposant que

$$Q_g^z = \Psi_L G_2 \tag{4.42a}$$
$$Q_\ell^z = \Psi_L \tag{4.42b}$$

le calcul de la dynamique de l'erreur d'estimation fait apparaître des termes dépendant de l'état et de l'état retardé comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\overline{e}}_z(t) = &\sum_{i=0}^{m} N_i^z u_i(t)\overline{e}_z(t) + \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_L A_i - N_i^z \Psi_L - M_i^z C\right) u_i(t)x(t) \\ &+ \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_L A_{d_i} - N_{d_i}^z \Psi_L - M_{d_i}^z C\right) u_i(t)x(t-\tau_i) + \Psi_L \left(\ell(z,u) - \ell(\hat{z},u)\right) \\ &+ \Psi_L G_2 \left(g(z,u)\theta - g(\hat{z},u)\hat{\theta}\right) \end{aligned} \tag{4.43a}$$

$$\dot{\overline{e}}_\theta(t) = Q^\theta \overline{e}_z(t) - \left(Q^\theta \Psi_L + M_0^\theta C\right) x(t) \tag{4.43b}$$

avec $u_0(t) = 1$. Afin de déterminer les biais dans l'erreur d'estimation induits par ces termes, ces derniers sont annulés en posant, pour $i = 0, \ldots, m$,

$$Q^\theta \Psi_L + M_0^\theta C = 0 \tag{4.44a}$$
$$\Psi_L A_i - N_i^z \Psi_L - M_i^z C = 0 \tag{4.44b}$$
$$\Psi_L A_{d_i} - N_{d_i}^z \Psi_L - M_{d_i}^z C = 0 \tag{4.44c}$$

Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation est régie par l'EDF suivante

$$\dot{\overline{e}}_{\text{red}}(t) = \mathbb{N}_r(u)\overline{e}_{\text{red}}(t) + \mathbb{N}_{r,d_0}\overline{e}_{\text{red}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{r,d_i} u_i(t)\overline{e}_{\text{red}}(t-\tau_i) + \mathbb{L}_r \mathbb{N}_{r,\ell} + \mathbb{G}_r \mathbb{N}_{r,g} \tag{4.45}$$

avec

$$\mathbb{N}_r(u) = \begin{bmatrix} N_0^z + \sum_{i=1}^m N_i^z u_i & \Psi_L G_1 \\ Q^\theta & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{r,d_0} = \begin{bmatrix} N_{d_0}^z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{r,d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i}^z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_{r,\ell} = \begin{bmatrix} \ell(z,u) - \ell(\hat{z},u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{r,g} = \begin{bmatrix} g(z,u)\theta - g(\hat{z},u)\hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{G}_r = \begin{bmatrix} \Psi_L G_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{L}_r = \begin{bmatrix} \Psi_L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (4.45) est similaire à la relation (4.10) si on remplace la dimension r par n et les équations (4.44a)-(4.44c) sont identiques aux relations (3.60a)-(3.60c) dans la section 3.5. Avant d'étudier la stabilité de l'erreur d'estimation (4.45), il faut résoudre les équations (4.44a)-(4.44c). Cette résolution permet d'obtenir les conditions d'existence de l'observateur (4.40) et

de paramétrer les matrices des gains de l'observateur via une seule matrice à déterminer. Nous trouvons la résolution des équations (4.44a)-(4.44c) dans la section 3.5. Si la condition d'existence des solutions de ces équations donnée par (3.14) avec $J^\theta = 0$ est satisfaite, alors ces solutions sont données par (3.15). L'analyse de la stabilité de l'erreur d'estimation (4.45) est donnée par le théorème 4.3.1 en adaptant les dimensions de l'erreur d'estimation, $r+q$ dans $\overline{e}_{\text{red}}$ au lieu de $n+q$ dans $\overline{e}_{\text{pln}}$, en remplaçant les matrices du système (4.10) par celles de l'équation (4.45) et le gain $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ par $\mathcal{Z}_{\text{red},1}$, et en ajoutant la condition (3.14).

4.4 Observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires singuliers à retards

L'étude des systèmes dynamiques (mécanique, électrique, chimique, etc) nécessite généralement une modélisation mathématique du comportement du système. Habituellement, cette modélisation orientée sur l'interconnexion décrit le comportement dynamique des composants par des équations différentielles et le couplage des sous-systèmes par des équations algébriques, i.e. des équations algébriques sont établies à partir des relations entre les variables du système. Ainsi, le modèle mathématique est représenté par un ensemble combiné d'équations différentielles et algébriques, c'est-à-dire par des équations algébro-différentielles ordinaires (EADO). En automatique, nous parlons de systèmes singuliers ou de systèmes descripteurs. Des applications des systèmes descripteurs peuvent être trouvées dans divers domaines tels que la robotique [McC86], les réseaux de circuits électriques [New81], la chimie [Dai89]. En effet, dans les systèmes robotiques, les équations différentielles décrivent généralement la dynamique des sous-systèmes et les équations algébriques caractérisent les couplages par des contraintes telles que les articulations. Les réseaux électriques peuvent également être considérés comme étant un ensemble des sous-systèmes d'éléments de ces réseaux (tels que des résistances, des condensateurs, des inductances décrits par différents types d'équations différentielles) et par des couplages dus aux lois de Kirchhoff (décrites par des équations algébriques). Les modèles de processus chimiques décrivent des équations différentielles afin de modéliser les équilibres dynamiques de masse et d'énergie, tandis que les équations algébriques permettent de tenir compte des relations d'équilibre thermodynamique, des hypothèses d'équilibre, des corrélations empiriques, etc.

Dans cette section, le problème de synthèse d'observateurs adaptatifs est traité pour la classe des systèmes non linéaires singuliers. Pour ce faire, nous considérons le système (4.1) où $\Upsilon = E$ est une matrice singulière de rang $\upsilon < n$. Nous proposons dans la suite des observateurs adaptatifs avec $J^\theta = 0$ d'ordres plein et réduit.

4.4.1 Observateur adaptatif d'ordre plein avec $J^\theta = 0$

Pour le système (4.1) où $\Upsilon = E$ est une matrice singulière de rang $\upsilon < n$ et $L = I_n$, nous associons l'observateur adaptatif d'ordre plein décrit par

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_x(t) = {} & N_0^x \eta_x(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i^x u_i \eta_x(t) + N_{d_0}^x \eta_x(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i}^x u_i \eta_x(t-\tau_i) \\ & + M_0^x y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i^x u_i y(t) + M_{d_0}^x y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i}^x u_i y(t-\tau_i) \\ & + \Psi_{\text{pln}} B u(t) + \Psi_{\text{pln}} G_1 \hat{\theta} + Q_g^x g(\hat{x},u)\hat{\theta} + Q_\ell^x \ell(\hat{x},u) \qquad (4.46a)\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = K_0^\theta (y(t) - C\hat{x}(t)) \qquad (4.46b)$$

$$\hat{x}(t) = \eta_x(t) + J^x y(t) \tag{4.46c}$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$ sont les estimations de x et θ. Les matrices N_i^x, M_i^x, $N_{d_i}^x$, $M_{d_i}^x$, pour $i = 0, \ldots, m$, Q_g^x, Q_ℓ^x, et J^x sont à déterminer afin que $\hat{x}$ et $\hat{\theta}$ convergent vers leurs vraies valeurs x et θ.

Dans cette section, nous considérons les hypothèses 2.3.1, 4.2.1 et 4.2.2, et les matrices E et C satisfont l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.4.1. *Supposons que*

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\right) = n$$

.

Sous l'hypothèse 4.4.1, il existe une matrice non singulière $\rho \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$ sous la forme suivante

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

vérifiant les relations ci-dessous

$$\rho_1 E + \rho_2 C = I_n \tag{4.48a}$$
$$\rho_3 E + \rho_4 C = 0_{p\times n} \tag{4.48b}$$

Les matrices ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 sont données par

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^\dagger \tag{4.49a}$$

$$\begin{bmatrix} \rho_3 & \rho_4 \end{bmatrix} = Z_{\rho n}\left(I_{n+p} - \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^\dagger\right) \tag{4.49b}$$

où $Z_{\rho n} \in \mathbb{R}^{p\times(n+p)}$ est une matrice arbitraire permettant de sélectionner les p lignes indépendantes de la matrice $\left(I_{n+p} - \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^\dagger\right)$.

L'équation (4.46c) de l'observateur (4.46) devient (voir [BD95, DB95])

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \eta_x(t) + J^x y(t) \\ &= \eta_x(t) + (\rho_2 + R^x\rho_4) y(t) \end{aligned} \tag{4.50}$$

où $R^x \in \mathbb{R}^{n\times p}$ est un gain à déterminer. En utilisant l'équation (4.50), l'erreur d'estimation $e_x(t)$ devient

$$\begin{aligned} e_x(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ &= x(t) - \eta_x(t) - (\rho_2 + R^x\rho_4)Cx(t) \\ &= (I_n - \rho_2 C - R^x\rho_4 C)\, x(t) - \eta_x(t) \\ &= (\rho_1 + R^x\rho_3)\, Ex(t) - \eta_x(t) \end{aligned} \tag{4.51}$$

Remarque 4.4.1. *L'hypothèse 4.4.1 correspond à l'observabilité à l'infini pour les systèmes singuliers [Dai89]. La propriété d'observabilité à l'infini signifie qu'on peut écrire l'erreur d'estimation de l'état $x(t)$ en fonction de $Ex(t)$ et de l'état de l'observateur $\eta_x(t)$, ce qui est le cas dans l'équation (4.51).*

En définissant $\Psi_\rho = \rho_1 + R^x\rho_3$, le vecteur de l'erreur d'estimation augmenté $\overline{e}_{\text{pln}}(t)$ est défini comme suit

$$\overline{e}_{\text{pln}}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ \theta(t) - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_\rho E x(t) - \eta_x(t) \\ \theta(t) - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

En posant

$$\begin{aligned} Q_g^x &= \Psi_\rho G_2 \\ Q_\ell^x &= \Psi_\rho \end{aligned}$$

les dynamiques des erreurs d'estimation sont données par

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) = &\sum_{i=0}^{m} N_i^x u_i(t) e_x(t) + \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_\rho A_i - N_i^x \Psi_\rho E - M_i^x C\right) u_i(t) x(t) \\ &+ \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_\rho A_{d_i} - N_{d_i}^x \Psi_\rho E - M_{d_i}^x C\right) u_i(t) x(t-\tau_i) + \Psi_\rho \left(\ell(x,u) - \ell(\hat{x},u)\right) \\ &+ \Psi_\rho G_2 \left(g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta}\right) \end{aligned} \tag{4.53a}$$

$$\dot{e}_\theta(t) = -K_0^\theta C e_x(t) \tag{4.53b}$$

avec $u_0(t) = 1$.

En utilisant la même démarche que dans la section 4.3.1, si les équations suivantes

$$\Psi_\rho A_i - N_i^x \Psi_\rho E - M_i^x C = 0 \tag{4.54a}$$

$$\Psi_\rho A_{d_i} - N_{d_i}^x \Psi_\rho E - M_{d_i}^x C = 0 \tag{4.54b}$$

sont satisfaites, la dynamique du vecteur augmenté de l'erreur d'estimation $\overline{e}_{\text{pln}}(t)$ est régie par l'EDF suivante

$$\dot{\overline{e}}_{\text{pln}}(t) = \mathbb{N}(u)\overline{e}_{\text{pln}}(t) + \mathbb{N}_{d_0}\overline{e}_{\text{pln}}(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}_{d_i} u_i(t) \overline{e}_{\text{pln}}(t-\tau_i) + \mathbb{L}\mathbb{N}_\ell + \mathbb{G}\mathbb{N}_g \tag{4.55}$$

avec

$$\mathbb{N}(u) = \begin{bmatrix} N_0^x + \sum_{i=1}^{m} N_i^x u_i & \Psi_\rho G_1 \\ -K_0^\theta C & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_0} = \begin{bmatrix} N_{d_0}^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i}^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_\ell = \begin{bmatrix} \ell(x,u) - \ell(\hat{x},u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_g = \begin{bmatrix} g(x,u)\theta - g(\hat{x},u)\hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{G} = \begin{bmatrix} \Psi_\rho G_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{L} = \begin{bmatrix} \Psi_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le paramétrage des gains de l'observateur se fait par la résolution des équations (4.54), qui se réécrivent comme suit pour $i = 0, \ldots, m$,

$$\rho_1 A_i = N_i^x \rho_1 E + K_i^x C - R^x \rho_3 A_i \tag{4.56a}$$

$$\rho_1 A_{d_i} = N_{d_i}^x \rho_1 E + K_{d_i}^x C - R^x \rho_3 A_{d_i} \tag{4.56b}$$

où

$$K_i^x = M_i^x - N_i^x R^x \rho_4$$
$$K_{d_i}^x = M_{d_i}^x - N_{d_i}^x R^x \rho_4$$

Les équations (4.56a)-(4.56b) se reformulent sous la forme compacte suivante

$$\mathbb{W}_\rho = \mathbb{X}_{\text{pln}} \mathbb{V}_\rho \tag{4.57}$$

où la matrice $\mathbb{X}_{\text{pln}}$ regroupant les gains à déterminer de l'observateur est décrite par

$$\mathbb{X}_{\text{pln}} = \begin{bmatrix} N_0^x & \dots & N_m^x & N_{d_0}^x & \dots & N_{d_m}^x & K_0^x & \dots & K_m^x & K_{d_0}^x & \dots & K_{d_m}^x & R_x \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

et où $\mathbb{W}_\rho$ et $\mathbb{V}_\rho$ sont des matrices données par

$$\mathbb{W}_\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 A_0 & \dots & \rho_1 A_m & \rho_1 A_{d_0} & \dots & \rho_1 A_{d_m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{V}_\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \rho_1 E & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \rho_1 E \\ C & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & C \\ -\rho_3 A_0 & \dots & -\rho_3 A_m & -\rho_3 A_{d_0} & \dots & -\rho_3 A_{d_m} \end{bmatrix}$$

La résolution de l'équation linéaire (4.57) permet de déduire les gains de l'observateur à travers le paramètrage de ceux-ci via la matrice $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$ comme dans la section 4.3.1. Les gains de l'observateur sont donc donnés par (3.43) en remplaçant J^x par R^x, W_{pln} par W_ρ et V_{pln} par V_ρ si et seulement si

$$\text{rang}\left(\mathbb{V}_\rho\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{W}_\rho \\ \mathbb{V}_\rho \end{bmatrix}\right) \tag{4.59}$$

En utilisant le paramétrage des gains de l'observateur via la matrice $\mathcal{Z}_{\text{pln},1}$, la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation est garantie par le théorème suivant.

Théorème 4.4.1. *Supposons que les hypothèses 2.3.1, 4.2.1, 4.2.2 et 4.4.1 sont vérifiées. Le système (4.46) est un observateur adaptatif pour le système (4.1) avec $\Upsilon = E$, $\text{rang}(E) = \upsilon < n$ et $L = I_n$, et a une erreur d'estimation quadratiquement stable pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \dots, 2^{2m}$, s'il*

existe une matrice $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$ *symétrique, définie positive et décrite par* (4.11)*, une matrice* $M \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$*, donnée par* (4.12)*, des matrices* $Y_{11} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *et* $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ *et des scalaires définis positifs* κ*,* c_1 *et* c_2 *tels que les LMIs* (4.13) *soient vérifiées, où les blocs* $o^j_{(1,2)}$*,* $o^j_{(2,2)}$*,* $o^j_{(2,3)}$*,* $o^j_{(2,4)}$*,* $o^j_{(1,5)}$ *et* $o^j_{(1,6)}$ *sont remplacés par*

$$
\begin{aligned}
o^j_{(1,1)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i1} + (M_{11}N_{d_0,1} + Y_{11}N_{d_0,2}) + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i (M_{11}N_{d_1,i} + Y_{11}N_{d_i,2}) - C^T Y_{22}^T S_2^T \\
&\quad - S_2 Y_{22} C + \left(\frac{d_1}{c_2} + \frac{b_1^2}{c_1}\right) I_n + (N^T_{d_0,1}M^T_{11} + N^T_{d_0,2}Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i (N^T_{d_i,1}M^T_{11} + N^T_{d_i,2}Y^T_{11}) \\
&\quad + (M_{11}N_{0,1} + Y_{11}N_{0,2}) + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i (M_{11}N_{i,1} + Y_{11}N_{i,2}) + (N^T_{0,1}M^T_{11} + N^T_{0,2}Y^T_{11}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i (N^T_{i,1}M^T_{11} + N^T_{i,2}Y^T_{11}) \\
o^j_{(1,2)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i2} + (N^{xT}_{0,1}M^T_{11}S_1^T + N^{xT}_{0,2}Y^T_{11}S_1^T) + \sum_{i=1}^{m} (N^{xT}_{i,1}M^T_{11}S_1^T + N^{xT}_{i,2}Y^T_{11}S_1^T)\sigma^j_i \\
&\quad + (N^{xT}_{d_0,1}M^T_{11}S_1^T + N^{xT}_{d_0,2}Y^T_{11}S_1^T) + \sum_{i=1}^{m} (N^{xT}_{d_i,1}M^T_{11}S_1^T + N^{xT}_{d_i,2}Y^T_{11}S_1^T)\sigma^j_i \\
&\quad + M_{11}\rho_1 G_1 + M_1 R_1^x \rho_3 G_1 + Y_{11} R_2^x \rho_3 G_1 - C^T Y_{22}^T \\
o^j_{(2,2)} &= \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3} + G_1^T \rho_1^T M^T_{11} S_1^T + G_1^T \rho_3^T R_1^{xT} M^T_{11} S_1^T + G_1^T \rho_3^T R_2^{xT} Y^T_{11} S_1^T + S_1 M_{11} \rho_1 G_1 \\
&\quad + S_1 M_{11} R_1^x \rho_3 G_1 + S_1 Y_{11} R_2^x \rho_3 G_1 + \frac{d_2}{c_2} I_q \\
o^j_{(2,3)} &= P_{02}^T + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i2}^T - S_1 M_{11} + G_1^T \rho_1^T M^T_{11} + G_1^T \rho_3^T R_1^{xT} M^T_{11} + G_1^T \rho_3^T R_2^{xT} Y^T_{11} \\
o^j_{(2,4)} &= P_{03} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i3} - M_{22} + G_1^T \rho_1^T M^T_{11} S_1^T + G_1^T \rho_3^T R_1^{xT} M^T_{11} S_1^T + G_1^T \rho_3^T R_2^{xT} Y^T_{11} S_1^T \\
o_{(1,5)} &= M_{11}\rho_1 + M_{11} R_1^x \rho_3 + Y_{11} R_2^x \rho_3 \\
o_{(1,6)} &= M_{11}\rho_1 G_2 + M_{11} R_1^x \rho_3 G_2 + Y_{11} R_2^x \rho_3 G_2
\end{aligned}
$$

et[3]

$$
\begin{aligned}
d_1 &= b_2^2 b_3^2 + b_2 b_3 b_g \\
d_2 &= b_g^2 + b_2 b_3 b_g
\end{aligned}
$$

Les gains $\mathcal{Z}_{pln,1}$ *et* K_0^θ *sont donnés par*

$$\mathcal{Z}_{pln,1} = M_{11}^{-1} Y_{11} \tag{4.60a}$$

$$K_0^\theta = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{4.60b}$$

3. Une autre expression de d_1 et d_2 est proposée dans la remarque 4.3.2, page 104.

Ce théorème est donné sans démonstration car cette dernière est similaire à celle du théorème 4.3.1.

Exemple illustratif : Nous considérons le système (4.1) avec $m = 1$, où les matrices ont les valeurs numériques suivantes

$$E = \begin{bmatrix} -1.5 & 3 & -1.5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} 11 & -14.6 & 9 \\ 6.5 & -9.4 & 7.5 \\ 0.58 & -4.1 & 2.55 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.84 & -1.2 & 0.6 \\ 0.56 & -0.8 & 0.4 \\ -0.535 & 0.27 & -0.135 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.24 \\ 0.12 \end{bmatrix} \quad A_{d_0} = \begin{bmatrix} 2.1 & -3.6 & 1.8 \\ 1.4 & -2.4 & 1.2 \\ 1.58 & -1.8 & 0.9 \end{bmatrix} \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 1.2 \\ 1.6 & -1.6 & 0.8 \\ -0.7 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.64 \\ 0.84 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple, nous choisissons de traiter uniquement les non linéarités qui multiplient le vecteur des paramètres inconnus, (i.e. la fonction $\ell(x, u) = 0$) ce qui permet d'éliminer quelques blocs des LMIs du théorème 4.4.1. La fonction $g(x, u)$ est choisie comme suit

$$g(x, u) = \begin{bmatrix} 0.2 \sin(u(t) + x_1(t)) \\ 0.2 \sin(u(t) + x_2(t)) \\ 0.2 \sin(u(t) + x_3(t)) \end{bmatrix}$$

avec $|g(x, u)| \leq b_g = 0.2$ et une constante de Lipschitz $b_2 = 0.2$. Le paramètre inconnu θ est borné comme suit $|\theta| \leq 3$. Notons que $\text{rang}(E) = 2 < 3$ et $\text{rang}([E^T \quad C^T]) = 3$.

La matrice ρ est donnée par

$$\rho = \left[\begin{array}{ccc:c} 6.8352\ 10^{-18} & -6.6919\ 10^{-16} & 1 & -4.9107\ 10^{-16} \\ 0.23077 & 0.15385 & -0.5 & 1 \\ -1.37\ 10^{-15} & 1.9145\ 10^{-15} & -2 & 2 \\ \hdashline 6.7815\ 10^{-16} & -2.8808\ 10^{-16} & 0 & 4.4409\ 10^{-16} \end{array}\right]$$

Avec le choix des matrices S_1 et S_2 comme suit

$$S_1 = \begin{bmatrix} -0.31801 & 0.14709 & 0.6359 \end{bmatrix}$$
$$S_2^T = \begin{bmatrix} -0.0010579 & 0.047129 & 0.0022709 \end{bmatrix}$$

la résolution des LMIs du théorème 4.4.1 permet d'obtenir les gains $K_0^\theta = M_{22}^{-1} Y_{22} = -0.074403$ et $\mathcal{Z}_{\text{pln},1} = M_{11}^{-1} Y_{11}$ donné par

$$\mathcal{Z}_{\text{pln},1}^T = \begin{bmatrix} 5.2885 & -2.1867 & -13.129 \\ -1.7118\,10^{14} & -2.6031\,10^{13} & 3.4242\,10^{14} \\ 9.0673 & -4.9545 & -23.457 \\ -3.424 & -0.31853 & 6.6581 \\ -2.5747\,10^{13} & -3.7999\,10^{12} & 5.1578\,10^{13} \\ 6.9015 & 0.64926 & -13.423 \\ 0.75318 & 0.032044 & -1.3968 \\ 2.8065\,10^{13} & 4.6559\,10^{12} & -5.6044\,10^{13} \\ -1.5742 & -0.07562 & 2.9292 \\ 2.3192 & 0.66503 & -4.336 \\ 4.641\,10^{13} & 7.1719\,10^{12} & -9.2733\,10^{13} \\ -4.7737 & -1.351 & 8.9424 \\ 1.7884\,10^{13} & 2.8616\,10^{12} & -3.5681\,10^{13} \\ 2.9882\,10^{13} & 4.5147\,10^{12} & -5.968\,10^{13} \\ 8.6126\,10^{12} & 1.2957\,e12 & -1.714\,10^{13} \\ -2.1069\,10^{13} & -3.1338\,10^{12} & 4.2221\,10^{13} \\ -1.3863\,10^{14} & -2.164\,10^{13} & 2.7734\,10^{14} \end{bmatrix}$$

où

$$P(\sigma^j) = \begin{bmatrix} 12647 & 151.17 & 6227.3 & -30.018 \\ 151.17 & 8866.7 & -302.32 & 1051.1 \\ 6227.3 & -302.32 & 3306.2 & 58.544 \\ -30.018 & 1051.1 & 58.544 & 8957.1 \end{bmatrix} + \sigma_1^j \begin{bmatrix} -14.522 & -25.009 & 28.744 & 23.459 \\ -25.009 & 4404.3 & 48.499 & -282.73 \\ 28.744 & 48.499 & -56.952 & -47.167 \\ 23.459 & -282.73 & -47.167 & -76.267 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 5701.5 & -0.60282 & 2830.9 & -9.3661 \\ -97.078 & 2987.6 & 191.27 & 417.27 \\ 2830.5 & 2.0658 & 1455.2 & 20.106 \\ -27.473 & 440.95 & 53.267 & 8853.8 \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} -7014.8 & -9557.5 & -4141.9 \\ -6.5823\,10^{15} & 4.345\,10^{15} & 1.3732\,10^{16} \\ -14705 & -20169 & -8480.9 \\ -673.17 & 654.25 & -3.2113 \\ -7.8281\,10^{14} & 1.0126\,10^{15} & 2.1723\,10^{15} \\ 1347.8 & -1297.8 & 1.851 \\ 339.87 & -244.56 & 99.205 \\ 1.3506\,10^{15} & 4.6592\,10^{14} & -2.1109\,10^{15} \\ -683.13 & 487.16 & -193.38 \\ 947.46 & 932.31 & 255.9 \\ 2.084\,10^{15} & -8.1591\,10^{14} & -3.5689\,10^{15} \\ -1901 & -1862.3 & -501.39 \\ 9.5167\,10^{14} & -1.1572\,10^{13} & -1.2986\,10^{15} \\ 1.4217\,10^{15} & -8.279\,10^{14} & -2.2571\,10^{15} \\ 5.8226\,10^{14} & -2.4339\,10^{14} & -5.6187\,10^{14} \\ -5.9967\,10^{14} & 7.5867\,10^{14} & 1.7986\,10^{15} \\ -5.2651\,10^{15} & 1.8538\,10^{15} & 1.1153\,10^{16} \end{bmatrix}$$

$Y_{22} = -658.74, \quad c_2 = 6.2927\ 10^{-5}, \quad \kappa = 0.048432$

Ce qui permet de déduire les valeurs des gains de l'observateur

$$N_0^x = \begin{bmatrix} -2.4942 & -3.02 & 1.1666 \\ -5.2251 & -2.5972 & -2.2573 \\ 1.0438 & 6.0393 & -4.3056 \end{bmatrix} \qquad N_1^x = \begin{bmatrix} -0.046514 & 0.36094 & 0.099405 \\ 0.0029162 & -0.52084 & -0.0063697 \\ 0.09664 & -0.72193 & -0.19706 \end{bmatrix}$$

$$N_{d_0}^x = \begin{bmatrix} -0.034977 & -1.5606 & 0.069954 \\ -0.076603 & -0.26274 & 0.1532 \\ 0.06992 & 3.121 & -0.13984 \end{bmatrix} \qquad N_{d_1}^x = \begin{bmatrix} -0.093249 & 0.34779 & 0.1865 \\ 0.051042 & -0.87699 & -0.10208 \\ 0.18649 & -0.69572 & -0.37298 \end{bmatrix}$$

$$M_0^x = \begin{bmatrix} 1.7223 \\ 1.2745 \\ -3.4447 \end{bmatrix} \qquad M_1^x = \begin{bmatrix} 0.0089949 \\ 0.0036711 \\ -0.018035 \end{bmatrix} \qquad M_{d_0}^x = \begin{bmatrix} 0.046099 \\ 0.029158 \\ -0.092195 \end{bmatrix} \qquad M_{d_1}^x = \begin{bmatrix} 0.016962 \\ -0.0085399 \\ -0.033908 \end{bmatrix}$$

$$Q_g^x = \begin{bmatrix} 0.25957 & 0.17978 & 0 \\ 0.043688 & -0.0031558 & 0 \\ -0.51911 & -0.35956 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^x = \begin{bmatrix} -0.061564 \\ 0.99039 \\ 2.1232 \end{bmatrix}$$

Avec des retards $\tau_0 = 3$s et $\tau_1 = 3$s injectés dans le système considéré et dans l'observateur, nous obtenons les réponses données par les figures 4.5 et 4.6 qui montrent la convergence des estimations des états et du paramètre inconnu vers leurs vraies valeurs.

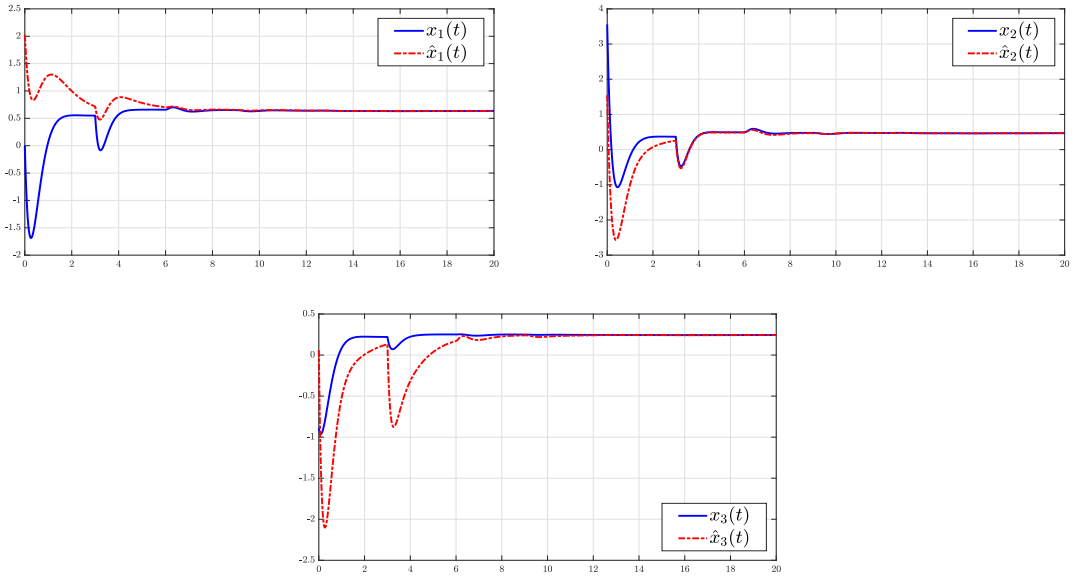


FIGURE 4.5 – Variation des états x_1, x_2 et x_3 (—) et leurs estimations respectives $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ et $\hat{x}_3$ $(\cdots)$.

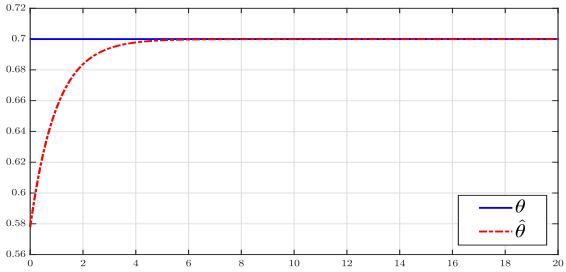


FIGURE 4.6 – Convergence du paramètre estimé $\hat{\theta}$ $(\cdots)$ vers sa vraie valeur θ (—).

4.4.2 Observateur adaptatif fonctionnel d'ordre réduit avec $J^\theta = 0$

Dans cette section, nous considérons le système (4.1) avec $\Upsilon = E$, $\text{rang}(E) = \upsilon < n$ et $\text{rang}(L) = r$. Pour ce système, nous proposons un observateur adaptatif d'ordre réduit donné par

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_z(t) = N_0^z\eta_z(t) + \sum_{i=1}^{m} N_i^z u_i\eta_z(t) + \Psi_L Bu(t) + N_{d_0}^z\eta_z(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} N_{d_i}^z u_i\eta_z(t-\tau_i) \\ + M_0^z y(t) + \sum_{i=1}^{m} M_i^z u_i y(t) + M_{d_0}^z y(t-\tau_0) + \sum_{i=1}^{m} M_{d_i}^z u_i y(t-\tau_i) \\ + Q_\ell^z\ell(\hat{z},u) + \Psi_L G_1\hat{\theta} + Q_g^z g(\hat{z},u)\hat{\theta} \qquad (4.61a)\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = Q^\theta\eta_z(t) + M_0^\theta y(t) \qquad (4.61b)$$

$$\hat{z}(t) = \eta_z(t) + J^z y(t) \qquad (4.61c)$$

où $\eta_z \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur d'état de l'observateur. $\hat{z} \in \mathbb{R}^r$ et $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$ sont les estimées de z et θ. Les matrices $N_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $M_i \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $N_{d_i} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $M_{d_i} \in \mathbb{R}^{r\times p}$, pour $i = 0,\ldots,m$, $Q_\ell^z \in \mathbb{R}^{r\times n}$,

$Q_g^z \in \mathbb{R}^{r\times s}$ et $J^z \in \mathbb{R}^{r\times p}$ sont les matrices des gains de l'observateur à déterminer afin que $\hat{z}(t)$ et $\hat{\theta}(t)$ convergent vers leurs vraies valeurs $z(t)$ et θ.

Dans cette section, nous considérons les hypothèses 2.3.1, 4.2.1 et 4.2.2, et les matrices E, C et L satisfont l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.4.2. *Supposons que*

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} L \\ E \\ C \end{bmatrix}\right)$$

Sous l'hypothèse 4.4.2, il existe une matrice non singulière $\rho_r \in \mathbb{R}^{(r+p)\times(n+p)}$ sous la forme suivante

$$\rho_r = \begin{bmatrix} \rho_{r,1} & \rho_{r,2} \\ \rho_{r,3} & \rho_{r,4} \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

vérifiant les relations ci-dessous

$$\rho_{r,1}E + \rho_{r,2}C = L \tag{4.63a}$$
$$\rho_{r,3}E + \rho_{r,4}C = 0_{p\times n} \tag{4.63b}$$

Les matrices $\rho_{r,1}$, $\rho_{r,2}$, $\rho_{r,3}$ et $\rho_{r,4}$ sont données par

$$\begin{bmatrix} \rho_{r,1} & \rho_{r,2} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^{\dagger} \tag{4.64a}$$
$$\begin{bmatrix} \rho_{r,3} & \rho_{r,4} \end{bmatrix} = Z_{\rho r}\left(I_{n+p} - \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^{\dagger}\right) \tag{4.64b}$$

où $Z_{\rho r} \in \mathbb{R}^{\tilde{p}\times(n+p)}$ est une matrice arbitraire permettant de sélectionner les $\tilde{p}$ lignes indépendantes de la matrice $\left(I_{n+p} - \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^{\dagger}\right)$, avec $\tilde{p} = n + p - \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} E^T & C^T \end{bmatrix}\right)$.

Les expressions des erreurs d'estimation sont données par

$$\begin{aligned} e_z(t) &= z(t) - \hat{z}(t) \\ &= Lx(t) - \eta_z(t) - J^z Cx(t) \\ &= Lx(t) - \eta_z(t) - \left(\rho_{r,2} + R^z\rho_{r,4}\right)Cx(t) \\ &= \left(\rho_{r,1} + R^z\rho_{r,3}\right)Ex(t) - \eta_z(t) \end{aligned} \tag{4.65a}$$
$$e_\theta(t) = \theta - \hat{\theta}(t) \tag{4.65b}$$

Remarque 4.4.2. *L'hypothèse 4.4.2 correspond à l'observabilité fonctionnelle à l'infini pour les systèmes singuliers [Dar12, Dar14]. La propriété d'observabilité fonctionnelle à l'infini signifie qu'on peut écrire l'erreur d'estimation de la fonctionnelle $z(t) = Lx(t)$ en fonction de $Ex(t)$ et de l'état de l'observateur $\eta_z(t)$, ce qui est le cas dans l'équation (4.65a).*

En définissant $\Psi_{\rho,r} = \rho_{r,1} + R^z \rho_{r,3}$, le vecteur de l'erreur d'estimation augmenté $\overline{e}_{\text{red}}(t)$ est défini comme suit

$$\overline{e}_{\text{red}}(t) = \begin{bmatrix} e_z(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ \theta(t) - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{\rho,r} E x(t) - \eta_x(t) \\ \theta(t) - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

En posant

$$\begin{aligned} Q_g^z &= \Psi_{\rho,r} G_2 \\ Q_\ell^z &= \Psi_{\rho,r} \end{aligned}$$

les dynamiques des erreurs d'estimation sont données par

$$\begin{aligned} \dot{e}_z(t) = &\sum_{i=0}^{m} N_i^z u_i(t) e_z(t) + \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_{\rho,r} A_i - N_i^z \Psi_{\rho,r} E - M_i^z C\right) u_i(t) x(t) \\ &+ \sum_{i=0}^{m} \left(\Psi_{\rho,r} A_{d_i} - N_{d_i}^z \Psi_{\rho,r} E - M_{d_i}^z C\right) u_i(t) x(t-\tau_i) + \Psi_{\rho,r} \left(\ell(z,u) - \ell(\hat{z},u)\right) \\ &+ \Psi_{\rho,r} G_2 \left(g(z,u)\theta - g(\hat{z},u)\hat{\theta}\right) \end{aligned} \tag{4.67a}$$

$$\dot{e}_\theta(t) = Q^\theta e_z(t) - \left(Q^\theta \Psi_{\rho,r} E + M_0^\theta C\right) x(t) \tag{4.67b}$$

avec $u_0(t) = 1$.

En utilisant la même démarche que dans les sections précédentes, si les équations suivantes

$$Q^\theta \Psi_{\rho,r} E + M_0^\theta C = 0 \tag{4.68a}$$

$$\Psi_{\rho,r} A_i - N_i^z \Psi_{\rho,r} E - M_i^z C = 0 \tag{4.68b}$$

$$\Psi_{\rho,r} A_{d_i} - N_{d_i}^z \Psi_{\rho,r} E - M_{d_i}^z C = 0 \tag{4.68c}$$

sont satisfaites, pour $i = 0, \ldots, m$, la dynamique de l'erreur d'estimation $\overline{e}_{\text{red}}(t)$ est régie par l'EDF suivante

$$\dot{\overline{e}}_{\text{red}}(t) = \mathbb{N}_r(u) \overline{e}_{\text{red}}(t) + \mathbb{N}_{r,d_0} \overline{e}_{\text{red}}(t-\tau_0) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{N}_{r,d_i}(u) \overline{e}_{\text{red}}(t-\tau_i) + \mathbb{G}_r \mathbb{N}_{r,g} + \mathbb{L}_r \mathbb{N}_{r,\ell} \tag{4.69}$$

avec

$$\mathbb{N}_r(u) = \begin{bmatrix} N_{r,0} + \sum_{i=1}^{m} N_{r,i} u_i(t) & \Psi_{\rho,r} G_1 \\ -N_{r,\theta 2} & 0_{q\times q} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{N}_{r,d_0} = \begin{bmatrix} N_{r,d_0} & 0_{n\times q} \\ 0_{q\times n} & 0_{q\times q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_{r,d_i}(u) = \begin{bmatrix} N_{r,d_i} u_i(t) & 0_{n\times q} \\ 0_{q\times n} & 0_{q\times q} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{G}_r = \begin{bmatrix} \Psi_{\rho,r} G_2 & 0_{n\times q} \\ 0_{q\times n} & 0_{q\times q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_{r,g} = \begin{bmatrix} g(z,u)\theta - g(\hat{z},u)\hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{N}_{r,\ell} = \begin{bmatrix} \ell(z,u) - \ell(\hat{z},u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{L}_r = \begin{bmatrix} \Psi_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (4.69) est similaire à la relation (4.55) si on remplace la dimension r par n et les équations (4.68a)-(4.68c) sont identiques aux relations (3.60a)-(3.60c) dans la section 3.5.

Avant d'étudier la stabilité de l'erreur d'estimation (4.69), il faut résoudre les équations (4.68a)-(4.68c). Cette résolution permet d'obtenir les conditions d'existence de l'observateur (4.61) et de paramétrer les matrices des gains de l'observateur via une seule matrice à déterminer.

Les équations (4.68a)-(4.68c) se reformulent comme suit, pour $i = 0, \ldots, m$,

$$0 = M_0^\theta L + K_0^\theta C \tag{4.70a}$$
$$\rho_{r,1} A_i = N_i^z \rho_{r,1} E + K_i^z C - R^z \rho_{r,3} A_i \tag{4.70b}$$
$$\rho_{r,1} A_{d_i} = N_{d_i}^z \rho_{r,1} E + K_{d_i}^z C - R^z \rho_{r,3} A_{d_i} \tag{4.70c}$$

où

$$\begin{aligned} K_0^\theta &= M_0^\theta + Q^\theta(\rho_{r,2} + R^z \rho_{r,4}) \\ K_i^x &= M_i^x - N_i^x R^x \rho_{r,4} \\ K_{d_i}^x &= M_{d_i}^x - N_{d_i}^x R^x \rho_{r,4} \end{aligned}$$

Les équations (4.70a)-(4.70c) peuvent se mettre sous la forme compacte suivante

$$\mathbb{W}_{\rho,r} = \mathbb{X}_{\text{red}} \mathbb{V}_{\rho,r} \tag{4.71}$$

où la matrice $\mathbb{X}_{\text{red}}$ regroupant les gains à déterminer de l'observateur est décrite par

$$\mathbb{X}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} N_0^z & \ldots & N_m^z & N_{d_0}^z & \ldots & N_{d_m}^z & K_0^z & \ldots & K_m^z & K_{d_0}^z & \ldots & K_{d_m}^z & R^z \\ Q^\theta & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & K_0^\theta & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

et où $\mathbb{W}_{\rho,r}$ et $\mathbb{V}_{\rho,r}$ sont des matrices données par

$$\mathbb{W}_{\rho,r} = \begin{bmatrix} \rho_{r,1} A_0 & \ldots & \rho_{r,1} A_m & \rho_{r,1} A_{d_0} & \ldots & \rho_{r,1} A_{d_m} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{V}_{\rho,r} = \begin{bmatrix} \rho_{r,1} E & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{r,1} E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \rho_{r,1} E & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \rho_{r,1} E \\ C & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & C \\ -\rho_{r,3} A_0 & \ldots & -\rho_{r,3} A_m & -\rho_{r,3} A_{d_0} & \ldots & -\rho_{r,3} A_{d_m} \end{bmatrix}$$

La résolution de l'équation linéaire (4.71) permet de déduire les gains de l'observateur à travers le paramètrage de ceux-ci via la matrice $\mathcal{Z}_{\text{red}}$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée.

$$\text{rang}\left(\mathbb{V}_{\rho,r}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{W}_{\rho,r}\\ \mathbb{V}_{\rho,r}\end{bmatrix}\right) \tag{4.73}$$

Les gains de l'observateur sont donc donnés par

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c:c} N_0^{zT} & Q^{\theta T}\\ N_1^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ N_m^{zT} & 0\\ N_{d_0}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ N_{d_m}^{zT} & 0\\ K_0^{zT} & K_0^{\theta T}\\ K_1^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ K_m^{zT} & 0\\ K_{d_0}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ K_{d_m}^{zT} & 0\\ R^{zT} & 0 \end{array}\right]}_{\mathbb{X}_{\text{red}}^T} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} N_{0,1}^{zT} & 0\\ N_{1,1}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ N_{m,1}^{zT} & 0\\ N_{d_0,1}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ N_{d_m,1}^{zT} & 0\\ K_{0,1}^{zT} & 0\\ K_{1,1}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ K_{m,1}^{zT} & 0\\ K_{d_0,1}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ K_{d_m,1}^{zT} & 0\\ R_1^{zT} & 0 \end{array}\right]}_{\left(\mathbb{W}_{\rho,r}\mathbb{V}_{\rho,r}^{\dagger}\right)^T} + \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} N_{0,2}^{zT} & Q_2^{\theta T}\\ N_{1,2}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ N_{m,2}^{zT} & 0\\ N_{d_0,2}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ N_{d_m,2}^{zT} & 0\\ K_{0,2}^{zT} & K_{0,2}^{\theta T}\\ K_{1,2}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ K_{m,2}^{zT} & 0\\ K_{d_0,2}^{zT} & 0\\ \vdots & \vdots\\ K_{d_m,2}^{zT} & 0\\ R_2^{zT} & 0 \end{array}\right]}_{\left(I_{k_{\text{red}}} - \mathbb{V}_{\rho,r}\mathbb{V}_{\rho,r}^{\dagger}\right)^T} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathcal{Z}_{\text{red},1}^T\\ \hdashline \mathcal{Z}_{\text{red},2}^T \end{array}\right]}_{\mathcal{Z}_{\text{red}}^T} \tag{4.74}$$

L'analyse de la stabilité de l'erreur d'estimation (4.69) est donnée par le théorème suivant,

Théorème 4.4.2. *Supposons que les hypothèses 2.3.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.4.2 et la condition (4.73) sont vérifiées. Le système (4.61) est un observateur adaptatif d'ordre plein pour le système (4.1), avec $\Upsilon = E$, $\text{rang}(E) = \upsilon < n$ et $\text{rang}(L) = r$, et a une erreur d'estimation quadratiquement stable s'il existe, pour $\sigma^j \in \Phi$, $j = 1, \ldots, 2^{2m}$,*

- *une matrice $P(\sigma^j) \in \mathbb{R}^{(r+q)\times(r+q)}$ ayant la forme (4.11) avec $P_{i1} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{r\times q}$ et $P_{i3} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, pour $i = 0, \ldots, m$,*
- *une matrice $M \in \mathbb{R}^{(r+p)\times(r+p)}$, donnée par (4.12) avec $M_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ et $M_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ sont des matrices non singulières. $S_1 \in \mathbb{R}^{q\times r}$ et $S_2 \in \mathbb{R}^{r\times q}$ sont des matrices de réglage.*
- *des matrices $Y_{11} \in \mathbb{R}^{r\times p}$ et $Y_{22} \in \mathbb{R}^{q\times p}$,*
- *des scalaires $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $\kappa > 0$,*

tels que les LMIs suivantes

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
\dot{o}_{(1,1)} & \dot{o}_{(1,2)} & \dot{o}_{(1,3)} & \dot{o}_{(1,4)} & 0 & o_{(1,5)} & 0 & 0 & o_{(1,6)} & 0 & o_0 & 0 & \dot{o}_1 & 0 & \dots & \dot{o}_m & 0 \\
* & \dot{o}_{(2,2)} & \dot{o}_{(2,3)} & \dot{o}_{(2,4)} & 0 & S_1 o_{(1,5)} & 0 & 0 & S_1 o_{(1,6)} & 0 & S_1 o_0 & 0 & S_1 \dot{o}_1 & 0 & \dots & S_1 \dot{o}_m & 0 \\
* & * & o_{(3,3)} & o_{(3,4)} & 0 & o_{(1,5)} & 0 & 0 & o_{(1,6)} & 0 & o_0 & 0 & \dot{o}_1 & 0 & \dots & \dot{o}_m & 0 \\
* & * & * & o_{(4,4)} & 0 & S_1 o_{(1,5)} & 0 & 0 & S_1 o_{(1,6)} & 0 & S_1 o_0 & 0 & S_1 \dot{o}_1 & 0 & \dots & S_1 \dot{o}_m & 0 \\
* & * & * & * & \frac{-1}{c_1} I_{r+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & \frac{-1}{c_1} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_1} I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2} I_{s+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2} I_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{c_2} I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_r & 0 & * & * & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q & * & * & \frac{-1}{\kappa} I_q
\end{array}\right] < 0 \tag{4.75}
$$

sont vérifiées avec

$$
\begin{aligned}
o^j_{(1,1)} = &\sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i1} + (M_{11} N^z_{0,1} + Y_{11} N^z_{0,2}) + \sum_{i=1}^{m} (M_{11} N^z_{i,1} + Y_{11} N^z_{i,2}) \sigma^j_i \\
&+ (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11}) + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11}) \sigma^j_i \\
&+ (M_{11} N^z_{d_0,1} + Y_{11} N^z_{d_0,2}) + \sum_{i=1}^{m} (M_{11} N^z_{d_i,1} + Y_{11} N^z_{d_i,2}) \sigma^j_i \\
&+ (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11}) + \sum_{i=0}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11}) \sigma^j_i \\
&+ S_2 Y_{22} Q^\theta_2 + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} S^T_2 + \left(\frac{d_1}{c_2} + \frac{b_1^2}{c_1} \right) I_r \\
o^j_{(1,2)} = &\sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i2} + (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11} S^T_1) + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} + M_{11} \rho_{r,1} G_1 \\
&+ M_1 R^z_1 \rho_{r,3} G_1 + Y_{11} R^z_2 \rho_{r,3} G_1 + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11} S^T_1) \sigma^j_i \\
&+ (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11} S^T_1) + \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11} S^T_1) \sigma^j_i \\
o^j_{(2,2)} = &\sum_{i=1}^{m} \sigma^j_{m+i} P_{i3} + G^T_1 \rho^T_{r,1} M^T_{11} S^T_1 + G^T_1 \rho^T_{r,1} R^{zT}_1 M^T_{11} S^T_1 + G^T_1 \rho^T_{r,1} R^{zT}_2 Y^T_{11} S^T_1 \\
&+ S_1 M_{11} \rho_{r,1} G_1 + S_1 M_{11} R^z_1 \rho_{r,3} G_1 + S_1 Y_{11} R^x_2 \rho_{r,3} G_1 + \frac{d_2}{c_2} I_q \\
o^j_{(1,3)} = &P_{01} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i1} - M_{11} + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} S^T_2 + (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11}) \sigma^j_i + (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11}) \sigma^j_i \\
o^j_{(1,4)} = &P_{02} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P_{i2} - S_2 M_{22} + Q^{\theta T}_2 Y^T_{22} + (N^{zT}_{0,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{0,2} Y^T_{11} S^T_1) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (N^{zT}_{i,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{i,2} Y^T_{11} S^T_1) \sigma^j_i + (N^{zT}_{d_0,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{d_0,2} Y^T_{11} S^T_1) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (N^{zT}_{d_i,1} M^T_{11} S^T_1 + N^{zT}_{d_i,2} Y^T_{11} S^T_1) \sigma^j_i \\
o^j_{(2,3)} = &P^T_{02} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^j_i P^T_{i2} - S_1 M_{11} + G^T_1 \rho^T_{r,1} M^T_{11} + G^T_1 \rho^T_{r,3} R^{zT}_1 M^T_{11} + G^T_1 \rho^T_{r,3} R^{zT}_2 Y^T_{11}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o^j_{(2,4)} &= P_{03} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^j P_{i3} - M_{22} + G_1^T \rho_{r,1}^T M_{11}^T S_1^T + G_1^T \rho_{r,3}^T R_1^{zT} M_{11}^T S_1^T + G_1^T \rho_{r,3}^T R_2^{zT} Y_{11}^T S_1^T \\
o_{(3,3)} &= -M_{11} - M_{11}^T \\
o_{(3,4)} &= -S_2 M_{22} - M_{11}^T S_1^T \\
o_{(4,4)} &= -M_{22} - M_{22}^T \\
o_{(1,5)} &= M_{11}\rho_{r,1} + M_{11} R_1^z \rho_{r,3} + Y_{11} R_2^z \rho_{r,3} \\
o_{(1,6)} &= M_{11}\rho_{r,1} G_2 + M_{11} R_1^z \rho_{r,3} G_2 + Y_{11} R_2^z \rho_{r,3} G_2 \\
o_0 &= (M_{11} N^z_{d_0,1} + Y_{11} N^z_{d_0,2}) \\
o_i^j &= (M_{11} N^z_{d_i,1} + Y_{11} N^z_{d_i,2}) \sigma_i^j \quad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

et[4]

$$d_1 = b_2^2 b_3^2 + b_2 b_3 b_g \tag{4.76a}$$

$$d_2 = b_g^2 + b_2 b_3 b_g \tag{4.76b}$$

Les gains $\mathcal{Z}_{\text{red},1}$ *et* $\mathcal{Z}_{\text{red},2}$ *sont donnés par*

$$\mathcal{Z}_{\text{red},1} = M_{11}^{-1} Y_{11} \tag{4.77a}$$

$$\mathcal{Z}_{\text{red},2} = M_{22}^{-1} Y_{22} \tag{4.77b}$$

Les matrices des gains de l'observateur N_i^z, M_i^z, $N_{d_i}^z$, $M_{d_i}^z$, *pour* $i = 0, \ldots, m$, R^z, Q^θ *et* M_0^θ *sont déduites de la relation* (4.74).

Ce théorème est donné sans démonstration car cette dernière est similaire à celle du théorème 4.3.1.

4.5 Conclusion

En se basant sur les résultats du chapitre 3, une extension à la synthèse d'observateurs adaptatifs a été développée pour les systèmes bilinéaires à retards présentant un comportement non linéaire dans leur dynamique. Nous avons considéré aussi, que le vecteur des paramètres inconnus agit linéairement et non linéairement par rapport à la dynamique du système. Ces non linéarités affectant le système sont lipschitziennes. Deux conditions s'imposent dans la synthèse des observateurs adaptatifs dans ce chapitre : la bornitude des paramètres inconnus et la bornitude de la fonction non linéaire qui les multiplie. Dans la dernière section de ce chapitre, nous avons porté notre attention à la classe des systèmes non linéaires singuliers. Les observateurs adaptatifs proposés dans ce chapitre ont été illustrés par des exemples numériques.

4. Une autre expression de d_1 et d_2 est proposée dans la remarque 4.3.2, page 104.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nos investigations se sont focalisées sur la synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes non linéaires à états retardés. Dans cette conclusion, nous revenons sur les différents points abordés dans ce mémoire pour finalement dégager les futures pistes de recherches envisagées.

Afin de situer au mieux nos contributions par rapport aux travaux existants, un état de l'art a été proposé dans le premier chapitre. Trois thèmes principaux y ont été abordés. D'abord, la classe de systèmes à retards a été présentée dans un contexte général en mettant l'accent sur les raisons et les conséquences de la prise en compte de la présence de retards dans les modèles des processus physiques. Nous y rappelons aussi, quelques définitions concernant la stabilité de cette classe de systèmes ainsi que certains théorèmes usuels. Des critères de stabilité dépendants et indépendants des retards ont été exposés brièvement. Dans un second temps, nous avons défini la notion d'observateur fonctionnel qui a fait l'objet d'une grande partie des chapitres qui ont suivi. Dans un dernier temps, nous avons abordé la question de la synthèse d'observateurs adaptatifs dans le but d'estimer des paramètres inconnus simultanément aux états du système.

Après avoir motivé la prise en compte du retard dans la modélisation des processus physiques qui présentent des non linéarités état-commande et connus sous le nom de systèmes bilinéaires, la conception d'observateurs fonctionnels pour cette classe de systèmes a fait l'objet du deuxième chapitre. Les conditions de convergence des observateurs proposés ont été établies sous la forme de LMI en se basant sur l'approche de Lyapunov-Krasovskii. Ces conditions ont permis le calcul des matrices des observateurs via un gain unique. Nous avons aussi mis l'accent aussi sur la présence des perturbations à énergie finie dans la dynamique du système considéré. Dans le but d'atténuer leur influence dans l'analyse de convergence de l'observateur, nous avons considéré que le transfert entre ces perturbations et l'erreur d'estimation doit vérifier un critère $\mathcal{H}_\infty$. En outre, comme les paramètres d'un modèle de système physique peuvent ne pas être connus avec précision et afin de surmonter ce problème, la synthèse d'observateurs robustes a été traitée en présence d'incertitudes paramétriques en plus des retards et des perturbations.

Les résultats principaux de ce mémoire sont donnés dans les troisième et quatrième chapitres, à savoir la conception d'observateurs adaptatifs. Afin d'estimer simultanément le vecteur d'état et le vecteur des paramètres inconnus affectant la dynamique du système. Les retards sont toujours présents dans les modèles considérés. Dans le troisième chapitre, nous avons supposé que le vecteur des paramètres inconnus agit linéairement par rapport à la dynamique du système. La conception d'observateurs adaptatifs fonctionnels a été traitée d'abord dans le cas général. Puis, des synthèses d'observateurs adaptatifs, fonctionnels ou non, ont été proposées dans des cas particuliers. Finalement, la présence de perturbations a été considérée dans la synthèse d'observateurs adaptatifs fonctionnels d'ordre réduit.

Dans le quatrième chapitre, des comportements non linéaires ont été ajoutés à la dynamique du système. Notamment, le vecteur des paramètres inconnus agit non linéairement par rapport

à la dynamique du système. De ce fait, des contraintes supplémentaires ont été ajoutées dans l'analyse du problème de la synthèse d'observateurs adaptatifs. En revanche, suite à l'étude comparative réalisée dans le premier chapitre avec des résultats de la littérature, nous avons montré que notre approche permet de relaxer certaines conditions posées dans la littérature, notamment la condition d'excitation persistante imposée sur les signaux multipliant le vecteur des paramètres inconnus, ainsi qu'une contrainte sur la matrice de Lyapunov. Nos différents résultats théoriques et la méthode de synthèse qui en découle ont été illustrés par des exemples numériques. A la fin de ce chapitre, la classe de systèmes non linéaires singuliers à retards a été considérée. A l'aide d'une transformation mathématique, nous avons pu nous ramener aux résultats de synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires à retards (non singuliers), avec quelques adaptations dans les LMIs obtenues.

Les contributions de cette thèse ont donné des résultats facilement implémentables (en termes de LMI), faisables et performants pour l'estimation conjointe des états et des paramètres inconnus malgré la présence de retards dans la dynamique des systèmes considérés.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux observateurs adaptatifs d'un point de vue théorique. Comme perspectives à ce travail, il serait intéressant de les appliquer à différents domaines de l'automatique. Quelques-uns de ces domaines sont succinctement décrits ci-dessous.

- Supervision : Dans la régulation des procédés industriels, il est souvent important de vérifier l'évolution de certains paramètres non mesurables, par exemple la température dans des procédés de moulage ou la concentration d'un composé dans des processus chimiques. Des observateurs adaptatifs permettent d'estimer ces paramètres non mesurés. De plus, la prise en compte des retards est importante dans les deux exemples cités.
- Diagnostic : Dans une procédure de diagnostic des pannes pouvant affecter un procédé industriel, il faut réaliser trois opérations : détecter, isoler puis estimer les défaillances. Afin de détecter l'occurrence d'un défaut, on cherche à mettre en évidence des "ruptures" dans un résidu constitué par l'erreur d'estimation de la mesure. Cette erreur d'estimation peut être obtenue via un observateur adaptatif puisque les défauts peuvent être considérés comme des paramètres inconnus. Lorsqu'il y a plusieurs sources de défaillances, il faut pouvoir les isoler, c'est-à-dire discriminer chacune d'entre elles. Pour ce faire, on construit un banc d'observateurs adaptatifs, chaque observateur étant dédié à la détection d'une défaillance. Il est donc important que les observateurs adaptatifs soient insensibles aux autres défaillances. Il s'agit là d'un problème d'observateurs à entrées inconnues : les défaillances auxquelles les observateurs sont insensibles sont les entrées inconnues.
- Commande tolérante aux défauts : Pour des raisons de sécurité, il est important qu'une régulation puisse continuer à fonctionner lorsqu'un défaut apparaît dans le procédé à commander. Pour ce faire, lorsque le défaut est détecté, isolé et estimé, la loi de commande est reconfigurée pour tenir compte de ce défaut. Une des stratégies pour la commande tolérante aux défauts est de synthétiser une loi de commande basée sur un observateur adaptatif afin que la loi de commande puisse tenir compte de l'estimation du défaut pour continuer de fonctionner de manière "acceptable". Une application de la commande tolérante aux défauts avec un observateur adaptatif a été faite dans [SSZ+17b, SSB+17] pour la commande d'une pompe à chaleur intervenant dans la consommation énergétique d'un bâtiment.

Il serait intéressant d'appliquer les perspectives évoquées ci-dessus sur des procédés industriels en s'appuyant sur une modélisation de ces derniers et en prenant en compte la présence d'éventuels retards.

Annexe A

Compléments mathématiques

Sommaire

A.1 Normes vectorielles et matricielles 133
A.2 Pseudo-inverses 133
A.2.1 Notion de pseudo-inverse 133
A.2.2 Application à la résolution des équations linéaires 134
A.3 Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequality : LMI) . 135
A.3.1 Introduction aux LMIs 135
A.3.2 Lemmes utiles pour les LMIs 136
A.3.2.1 Lemmes de majoration 136
A.3.2.2 Lemme de Schur 137
A.4 Fonction lipschitzienne 137

A.1 Normes vectorielles et matricielles

La norme vectorielle utilisée dans ce mémoire est la norme 2, aussi appelée la norme euclidienne. La norme 2 du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.1.1}$$

La norme matricielle utilisée est la norme euclidienne. Pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, la norme euclidienne est donnée par

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.1.2}$$

A.2 Pseudo-inverses

A.2.1 Notion de pseudo-inverse

Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Si $n = m$ et si $\det(A) \neq 0$, la matrice A admet une unique inverse notée A^{-1}, vérifiant $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. De cette égalité découle la relation suivante

$$AA^{-1}A = A \tag{A.2.1}$$

Pour généraliser la relation (A.2.1), la notion d'inverse généralisée ou de pseudo-inverse est introduite. Une pseudo-inverse de la matrice A est une matrice $A^\dagger$ vérifiant la relation ci-après [RM71]

$$A = AA^\dagger A \tag{A.2.2}$$

L'ensemble des pseudo-inverses de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est donné par

$$\mathcal{X} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{m\times n} : X = A^\dagger + W - A^\dagger A W A A^\dagger \right\}$$

ou

$$\mathcal{X} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{m\times n} : X = A^\dagger + U(I_n - AA^\dagger) + (I_m - A^\dagger A)V \right\}$$

où $W \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $V \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sont des matrices arbitraires. A titre d'exemple, si la matrice A est de rang p et est décrite sous la forme suivante,

$$A = \begin{bmatrix} I_p & 0_{(p,m-p)} \\ R & 0_{(n-p,m-p)} \end{bmatrix}$$

avec $R \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p}$, une des pseudo-inverses de A a la forme suivante

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} I_p & 0_{(p,n-p)} \\ 0_{(m-p,p)} & 0_{(m-p,n-p)} \end{bmatrix}$$

Quelques propriétés des pseudo-inverses :

— $\text{rang}(A^\dagger) \geqslant \text{rang}(A) = \text{rang}(AA^\dagger) = \text{rang}(A^\dagger A)$

— $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$ (sauf cas particulier)

— Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ avec $m < n$ et $\text{rang}(A) = m$ alors $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$, ainsi $A^\dagger A = I_m$ mais $AA^\dagger \neq I_n$.

— Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ avec $n < m$ et $\text{rang}(A) = n$ alors $A^\dagger = A^T (AA^T)^{-1}$, ainsi $AA^\dagger = I_n$ mais $A^\dagger A \neq I_m$.

— Pour toute matrice A, l'égalité $A^\dagger = (A^T A)^\dagger A^T = A^T (AA^T)^\dagger$ est vérifiée.

Pseudo-inverses réflexives : A^+ est une pseudo-inverse réflexive de A si elle vérifie les relations suivantes

$$A = AA^+A$$
$$A^+ = A^+AA^+$$

De plus, les pseudo-inverses réflexives vérifient la relation suivante

$$\text{rang}(A^+) = \text{rang}(A) = \text{rang}(AA^+) = \text{rang}(A^+A)$$

A.2.2 Application à la résolution des équations linéaires

La notion d'inverse généralisée vient de la nécessité de résoudre des systèmes d'équations linéaires s'écrivant sous la forme

$$XA = B \tag{A.2.3}$$

où $X \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est la matrice des inconnues et où $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des matrices connues. L'existence de solutions à l'équation (A.2.3) est liée au fait que les lignes de la matrice B sont des combinaisons linéaires ou non des lignes de la matrice A. Ainsi, l'équation (A.2.3) admet une solution si et seulement si la condition de rang suivante [RM71]

$$\text{rang}(A) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}\right) \tag{A.2.4}$$

est remplie et l'ensemble des solutions de l'équation (A.2.3) est paramétré de la façon suivante [RM71]

$$X = BA^{\dagger} + Z\left(I_n - AA^{\dagger}\right) \tag{A.2.5}$$

où $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est une matrice arbitraire.

Lorsque la matrice A est inversible, la matrice X est donnée par l'expression $X = BA^{-1}$ et est la solution unique du problème.

A.3 Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequality : LMI)

A.3.1 Introduction aux LMIs

Actuellement, beaucoup de problèmes en automatique sont formulés sous la forme de problèmes d'optimisation convexe sous contrainte LMI. D'ailleurs, tous les résultats de synthèse d'observateurs dans ce travail de recherche reposent sur la résolution de LMIs. Une LMI peut être formulée comme suit

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i < 0 \tag{A.3.1}$$

où x_i sont les variables de décision et F_i sont des matrices à valeurs réelles, symétriques et de dimensions appropriées. La LMI décrite par (A.3.1) définit un ensemble convexe sur la variable x, autrement dit, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\}$ est convexe.

Définition A.3.1. *Un ensemble E est dit convexe si*

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in E \qquad \forall x_1, x_2 \in E \qquad et \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{A.3.2}$$

Géométriquement, ceci signifie que tout segment liant deux points quelconques appartenant à un ensemble convexe est inclus dans cet ensemble.

Nombreux sont les travaux en automatique qui reposent sur les résolutions des problèmes LMI, notamment dans la stabilité des systèmes avec l'approche de Lyapunov, de Ricatti, etc.

Si on considère un système linéaire modélisé par l'équation d'état $\dot{x}(t) = Ax(t)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, une condition nécessaire et suffisante pour la convergence vers zéro de toutes les solutions de ce système linéaire est l'existence d'une matrice P symétrique et définie positive qui vérifie l'inégalité

$$A^T P + PA < 0$$

Cette inégalité représente une LMI dont l'inconnue est la matrice P.

Plusieurs algorithmes numériques ont été développés pour la résolution des LMI. La résolution des problèmes dans ce mémoire a été faite à travers des outils numériques de résolution développés dans le logiciel MatLab, plus précisément la Toolbox SDPT3. Dans ces toolboxes, des fonctions sont définies permettant de résoudre des problèmes LMI, tels que le problème de faisabilité et le problème d'optimisation. Ces problèmes de base sont définis ci-après.

— Faisabilité : Le problème (A.3.1) est dit faisable si et seulement s'il existe un vecteur x tel que la contrainte $F(x) < 0$ soit satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur x qui minimise un scalaire t afin que l'inégalité suivante

$$F(x) < tI_n \tag{A.3.3}$$

soit satisfaite.
Si la valeur minimale de t est négative, alors le problème (A.3.3) est réalisable ou faisable.

— Optimisation : Le problème d'optimisation consiste à chercher une solution optimale de (A.3.1) qui minimise un critère donné. L'un des avantages qu'offre l'optimisation convexe est qu'elle permet de garantir que tout minimum local est global.

Remarque A.3.1. *Une contrainte est dite conservative lorsqu'elle est trop contraignante ou pessimiste par rapport au problème posé.*

Inégalité Matricielle Bilinéaire (BMI) : Une BMI représente une généralisation de la notion de LMI. C'est une contrainte de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} x_j x_i F_i < 0 \tag{A.3.4}$$

Les BMI ne représentent pas des problèmes convexes et peuvent avoir plusieurs solutions locales, ce qui génère une difficulté dans leur résolution.

A.3.2 Lemmes utiles pour les LMIs

A.3.2.1 Lemmes de majoration

Lemme A.3.1 (Premier lemme de majoration). *[Pet87] Soit trois matrices réelles $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{k\times p}$ avec $C^TC \leqslant I_p$, alors, pour tout réel $\mu > 0$, on a*

$$2x^TACBy \leqslant \mu x^TAA^Tx + \frac{1}{\mu}y^TB^TBy \tag{A.3.5}$$

quels que soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

Lemme A.3.2 (Second lemme de majoration). *[WXD92, XC03] Soit cinq matrices A, B, C, D et F avec $F^TF \leqslant I$ et $\det(D) \neq 0$, alors, pour tout réel $\mu > 0$ tel que $D - \mu BB^T > 0$, on a*

$$(A+BFC)^TD^{-1}(A+BFC) \leqslant A^T(D-\mu BB^T)^{-1}A + \frac{1}{\mu}C^TC \tag{A.3.6}$$

A.3.2.2 Lemme de Schur

Les théorèmes issus des techniques de type Lyapunov conduisent généralement à des inégalités matricielles non linéaires. Leur résolution en l'état s'avère un problème complexe, d'où le besoin de transformer ces inégalités en LMI. La transformation basée sur le lemme de Schur est la plus simple et la plus utilisée. Les LMIs décrites dans les théorèmes énoncés dans ce mémoire sont toutes issues d'inégalités matricielles non linéaires qui ont été reformulées en LMI à l'aide du lemme de Schur décrit dans le lemme suivant.

Lemme A.3.3 (Lemme de Schur). *[BEFB94]*
Étant donné trois matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, les équivalences suivantes sont établies

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \left(C > 0 \quad et \quad A - B^T C^{-1} B > 0\right) \tag{A.3.7a}$$

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \left(A > 0 \quad et \quad C - B A^{-1} B^T > 0\right) \tag{A.3.7b}$$

A.4 Fonction lipschitzienne

Définition A.4.1. *Une fonction $f(x) \in \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne de rapport $k > 0$ dans $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$, si $\forall x \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\forall y \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a [Vid93]*

$$||f(y) - f(x)|| \leq k||y - x|| \tag{A.4.1}$$

f est dite localement lipschitzienne si, pour tout point x de $\mathcal{I}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que la restriction de f à $\mathcal{V}$ soit lipschitzienne.

Si $k < 1$, alors f est dite contractante.

Théorème A.4.1. *Soit f une fonction lipschitzienne dans $\mathcal{I}$, alors f est uniformément continue sur $\mathcal{I}$.*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable soit lipschitzienne dans $\mathcal{I}$ est que sa dérivée soit bornée dans $\mathcal{I}$.

Annexe B

LMI explicite du théorème 2.4.1

Nous proposons dans cette annexe de développer les différents blocs de l'inégalité (2.88) sur deux étapes. Dans un premier temps, nous développons les matrices $\mathbb{A}$, $\overline{\mathbb{A}}_d$, $\overline{\mathbb{J}}$, $\overline{\mathbb{J}}_d$, $\overline{\mathbb{H}}$ et $\mathbb{S}$ qui sont définies respectivement par (2.74a), (2.83c), (2.83a), (2.83e), (2.83b) et (2.83d). Ce développement donne l'inégalité suivante

$$
\left[\begin{array}{cc|ccc|ccc|cc}
(1,1) & (1,2) & M\mathbb{H}_0 & \dots & M\mathbb{H}_m & 0 & \dots & 0 & M\begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix} & 0 \\
* & (2,2) & 0 & \dots & 0 & M\mathbb{H}_0 & \dots & M\mathbb{H}_m & 0 & M\begin{bmatrix} H_0 \\ \Psi_L H_0 \end{bmatrix} \\
\hline
* & * & -\ell_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & -\ell_1^{-1} I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & -\ell_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & -\ell_1^{-1} I & 0 & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & -\ell_3^{-1} I & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\ell_3^{-1} I \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c:c}
M\mathbb{J}_{d_0} & \dots & M\mathbb{J}_{d_m} & M\mathbb{A}_{d_0}^T & 0 & \dots & M\mathbb{A}_{d_m}^T & 0 & M\begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\
M\mathbb{J}_{d_0} & \dots & M\mathbb{J}_{d_m} & M\mathbb{A}_{d_0}^T & 0 & \dots & M\mathbb{A}_{d_m}^T & 0 & M\begin{bmatrix} D \\ \Psi_L D \end{bmatrix} \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\frac{\ell_2}{\kappa} I & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
* & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \hdashline
* & * & -\frac{\ell_2}{\kappa} I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
* & * & * & -\kappa I & M\mathbb{H}_{d_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\frac{1}{\ell_2 \kappa} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
* & * & * & * & * & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
* & * & * & * & * & * & -\kappa I & M\mathbb{H}_{d_m} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{\ell_2 \kappa} I & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & (3,3)
\end{array}\right] < 0 \quad \text{(B.1)}
$$

où les blocs $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ et $(3,3)$ sont donnés par (2.89). Les matrices $\mathbb{A}_{d_i}$, $\mathbb{J}_{d_i}$, $\mathbb{H}_{d_i}$ et $\mathbb{H}_i$, pour $i = 0, \dots, m$, sont données respectivement par (2.74e), (2.74h), (2.74f) et (2.74b).

Dans un second temps, un développement de l'inégalité (B.1) fait apparaître la matrice Y_{22}, ce qui permet de calculer le gain Z et de déduire les différents gains de l'observateur avec la relation (2.71). Nous obtenons la LMI suivante

$$
\left[\begin{array}{cccc|c|c:c|c:c:c|c}
(1,1)_{11} & (1,1)_{12} & (1,2)_{11} & (1,2)_{12} & (1,1)_{M\mathbb{H}_0} & \dots & (1,1)_{M\mathbb{H}_m} & 0 & 0 & 0 & (1,3) \\
* & (1,1)_{22} & (1,2)_{21} & (1,2)_{22} & (2,1)_{M\mathbb{H}_0} & \dots & (2,1)_{M\mathbb{H}_m} & 0 & 0 & 0 & (2,3) \\
* & * & (2,2)_{11} & (2,2)_{12} & 0 & 0 & 0 & (1,1)_{M\mathbb{H}_0} & \dots & (1,1)_{M\mathbb{H}_m} & 0 \\
* & * & * & (2,2)_{22} & 0 & 0 & 0 & (2,1)_{M\mathbb{H}_0} & \dots & (2,1)_{M\mathbb{H}_m} & 0 \\
\hline
* & * & * & * & -\ell_1^{-1}I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & -\ell_1^{-1}I & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & -\ell_1^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & \ddots & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\ell_1^{-1}I & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\ell_3^{-1}I \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|ccc|c|cccc}
0 & (1,1)_{M\mathbb{J}_{d0}} & \dots & (1,1)_{M\mathbb{J}_{dm}} & (1,4) & (1,5) & 0 & \dots & (1,6) & (1,7) & 0 & (1,8) \\
0 & (2,1)_{M\mathbb{J}_{d0}} & \dots & (2,1)_{M\mathbb{J}_{dm}} & (2,4) & (2,5) & 0 & \dots & (2,6) & (2,7) & 0 & (2,8) \\
(1,3) & (1,1)_{M\mathbb{J}_{d0}} & \dots & (1,1)_{M\mathbb{J}_{dm}} & (1,4) & (1,5) & 0 & \dots & (1,6) & (1,7) & 0 & (1,8) \\
(2,3) & (2,1)_{M\mathbb{J}_{d0}} & \dots & (2,1)_{M\mathbb{J}_{dm}} & (2,4) & (2,5) & 0 & \dots & (2,6) & (2,7) & 0 & (2,8) \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
-\ell_3^{-1}I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & -\frac{\ell_2}{\kappa}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & -\frac{\ell_2}{\kappa}I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
* & * & * & * & -\kappa I & 0 & (1,1)_{M\mathbb{H}_{d0}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\kappa I & (2,1)_{M\mathbb{H}_{d0}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\frac{1}{\ell_2\kappa}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
* & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa I & 0 & (1,1)_{M\mathbb{H}_{dm}} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa I & (2,1)_{M\mathbb{H}_{dm}} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{\ell_2\kappa}I & 0 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & (3,3)
\end{array}\right] < 0 \tag{B.2}
$$

où

$$
(1,1)_{11} = \sum_{i=0}^{m} M_{11}(A_i + A_{d_i})a_i + \sum_{i=0}^{m}(A_i + A_{d_i})^T M_{11}^T a_i + I_n
$$
$$
+ \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_4}\right)\sum_{i=0}^{m}\left(2I_n + 4J_0^T J_0 + 2J_i^T J_i + 2J_{d_i}^T J_{d_i}\right)
$$

$$
(1,1)_{12} = \sum_{i=0}^{m}(SM_{22}N_{i,1} + SY_{22}N_{i,2} + SM_{22}N_{d_i,1} + SY_{22}N_{d_i,2})a_i + \sum_{i=0}^{m}(A_i + A_{d_i})^T M_{21}^T a_i
$$

$$
(1,1)_{22} = \sum_{i=0}^{m}(M_{22}N_{i,1} + Y_{22}N_{i,2} + M_{22}N_{d_i,1} + Y_{22}N_{d_i,2})a_i + \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_4}\right)2I_r + I_r
$$
$$
+ \sum_{i=0}^{m}(M_{22}N_{i,1} + Y_{22}N_{i,2} + M_{22}N_{d_i,1} + Y_{22}N_{d_i,2})^T a_i
$$

$$
(1,2)_{11} = P_{11} - M_{11} + \sum_{i=0}^{m}(A_i + A_{d_i})^T M_{11}^T a_i
$$

$$
(1,2)_{12} = P_{12} - SM_{22} + \sum_{i=0}^{m}(A_i + A_{d_i})^T M_{21}^T a_i
$$

$$(1,2)_{21} = P_{12}^T - M_{21} + \sum_{i=0}^{m}(SM_{22}N_{i,1} + SY_{22}N_{i,2} + SM_{22}N_{d_i,1} + SY_{22}N_{d_i,2})^T a_i$$
$$(1,2)_{22} = P_{22} - M_{22} + \sum_{i=0}^{m}(M_{22}N_{i,1} + Y_{22}N_{i,2} + M_{22}N_{d_i,1} + Y_{22}N_{d_i,2})^T a_i$$
$$(2,2)_{11} = M_{11} - M_{11}^T$$
$$(2,2)_{12} = SM_{22} - M_{21}^T$$
$$(2,2)_{22} = M_{22} - M_{22}^T$$
$$(1,3) = M_{11}H_0 + SM_{22}LH_0 - SM_{22}J_{11}CH_0 - SY_{22}J_{12}CH_0$$
$$(2,3) = M_{21}H_0 + M_{22}LH_0 - M_{22}J_{11}CH_0 - Y_{22}J_{12}CH_0$$
$$(1,4) = M_{11}A_{d_0}$$
$$(1,5) = SM_{22}N_{d_0,1} + SY_{22}N_{d_0,2}$$
$$(1,6) = M_{11}A_{d_m}a_m$$
$$(1,7) = SM_{22}N_{d_m,1}a_m + SY_{22}N_{d_m,2}a_m$$
$$(1,8) = M_{11}D + SM_{22}LD - SM_{22}J_{11}CD - SY_{22}J_{12}CD$$
$$(2,4) = M_{21}A_{d_0}$$
$$(2,5) = M_{22}N_{d_0,1} + Y_{22}N_{d_0,2}$$
$$(2,6) = M_{21}A_{d_m}a_m$$
$$(2,7) = M_{22}N_{d_m,1}a_m + Y_{22}N_{d_m,2}a_m$$
$$(2,8) = M_{21}D + M_{22}LD - M_{22}J_{11}CD - Y_{22}J_{12}CD$$
$$(3,3) = \frac{1}{\ell_4}J_D^T J_D - \gamma^2 I_\varpi$$

Les blocs $(1,1)_{M\mathbb{H}_0}$, $(2,1)_{M\mathbb{H}_0}$, $(1,1)_{M\mathbb{H}_m}$ et $(2,1)_{M\mathbb{H}_m}$ sont donnés par

$$(1,1)_{M\mathbb{H}_0} = \begin{bmatrix} 0_{2(n+r)} & (1,3) & (1,3) & (4,0) & (4,d_0) & 0_{\dots} \end{bmatrix}$$
$$(2,1)_{M\mathbb{H}_0} = \begin{bmatrix} 0_{2(n+r)} & (2,3) & (2,3) & (5,0) & (5,d_0) & 0_{\dots} \end{bmatrix}$$
$$(1,1)_{M\mathbb{H}_m} = \begin{bmatrix} M_{11}A_m b_m & (6,1) & M_{11}A_m b_m & (6,1) & (6,2) & (6,2) & (6,3) & (6,4) \\ & & & & & & (6,5) & (6,5) & (6,6) & (6,7) \end{bmatrix}$$
$$(2,1)_{M\mathbb{H}_m} = \begin{bmatrix} M_{21}A_m b_m & (7,1) & M_{21}A_m b_m & (7,1) & (7,2) & (7,2) & (7,3) & (7,4) \\ & & & & & & (7,5) & (7,5) & (7,6) & (7,7) \end{bmatrix}$$

avec

$$(4,0) = SM_{22}K_{0,1}H_C + SY_{22}K_{0,2}H_C$$
$$(5,0) = M_{22}K_{0,1}H_C + Y_{22}K_{0,2}H_C$$
$$(4,d_0) = SM_{22}K_{d_0,1}H_C + SY_{22}K_{d_0,2}H_C$$
$$(5,d_0) = M_{22}K_{d_0,1}H_C + Y_{22}K_{d_0,2}H_C$$
$$(6,1) = SM_{22}N_{m,1}b_m + SY_{22}N_{m,2}b_m$$
$$(6,2) = M_{11}H_m a_m + SM_{22}LH_m a_m - SM_{22}J_{11}CH_m a_m - SY_{22}J_{12}CH_m a_m$$

$$
\begin{aligned}
(6,3) &= SM_{22}K_{m,1}H_Ca_m + SY_{22}K_{m,2}H_Ca_m \\
(6,4) &= SM_{22}K_{d_m,1}H_Ca_m + SY_{22}K_{d_m,2}H_Ca_m \\
(6,5) &= M_{11}H_mb_m + SM_{22}LH_mb_m - SM_{22}J_{11}CH_mb_m - SY_{22}J_{12}CH_mb_m \\
(6,6) &= SM_{22}K_{m,1}H_Cb_m + SY_{22}K_{m,2}H_Cb_m \\
(6,7) &= SM_{22}K_{d_m,1}H_Cb_m + SY_{22}K_{d_m,2}H_Cb_m \\
(7,1) &= M_{22}N_{m,1}b_m + Y_{22}N_{m,2}b_m \\
(7,2) &= M_{21}H_ma_m + M_{22}LH_ma_m - M_{22}J_{11}CH_ma_m - Y_{22}J_{12}CH_ma_m \\
(7,3) &= M_{22}K_{m,1}H_Ca_m + Y_{22}K_{m,2}H_Ca_m \\
(7,4) &= M_{22}K_{d_m,1}H_Ca_m + Y_{22}K_{d_m,2}H_Ca_m \\
(7,5) &= M_{21}H_mb_m + M_{22}LH_mb_m - M_{22}J_{11}CH_mb_m - Y_{22}J_{12}CH_mb_m \\
(7,6) &= M_{22}K_{m,1}H_Cb_m + Y_{22}K_{m,2}H_Cb_m \\
(7,7) &= M_{22}K_{d_m,1}H_Cb_m + Y_{22}K_{d_m,2}H_Cb_m
\end{aligned}
$$

Les blocs $(1,1)_{M\mathbb{J}_{d0}}$, $(2,1)_{M\mathbb{J}_{d0}}$, $(1,1)_{M\mathbb{J}_{dm}}$ et $(2,1)_{M\mathbb{J}_{dm}}$ sont donnés par

$$
\begin{aligned}
(1,1)_{M\mathbb{J}_{d0}} &= \begin{bmatrix} M_{11} & SM_{22} & M_{11}J_{d_0}^T & M_{11}J_0^T & M_{11}J_{d_0}^T & M_{11}J_0^T \end{bmatrix} \\
(2,1)_{M\mathbb{J}_{d0}} &= \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(1,1)_{M\mathbb{J}_{dm}} &= \begin{bmatrix} M_{11} & SM_{22} & M_{11}J_{d_m}^T & M_{11}J_m^T & M_{11}J_{d_m}^T & M_{11}J_m^T \end{bmatrix} \\
(2,1)_{M\mathbb{J}_{dm}} &= (2,1)_{M\mathbb{J}_{d0}}
\end{aligned}
$$

et finalement les blocs $(1,1)_{M\mathbb{H}_{d0}}$, $(2,1)_{M\mathbb{H}_{d0}}$, $(1,1)_{M\mathbb{H}_{dm}}$ et $(2,1)_{M\mathbb{H}_{dm}}$ sont donnés par

$$
\begin{aligned}
(1,1)_{M\mathbb{H}_{d0}} &= \begin{bmatrix} (1,4) & (1,5) & (1,3) & (4,d_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(2,1)_{M\mathbb{H}_{d0}} &= \begin{bmatrix} (2,4) & (2,5) & (2,3) & (5,d_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(1,1)_{M\mathbb{H}_{dm}} &= \begin{bmatrix} (1,6) & (1,7) & (6,2) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix} \\
(2,1)_{M\mathbb{H}_{dm}} &= \begin{bmatrix} (2,6) & (2,7) & (7,2) & (7,4) & (7,5) & (7,6) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[AB18] R. Aloui and N. Benhadj Braiek. Synthesis of a minimum functional state observer approach for unperturbed/perturbed dynamical systems. *Int. J. Control, Automation, and Systems*, 16(4) :1736–1745, 2018.

[AD14] M. Alma and M. Darouach. Adaptive observers design for a class of linear descriptor systems. *Automatica*, 50 :578–583, 2014.

[AK13] E. Abraham and E.C. Kerrigan. Estimator design for input-constrained bilinear systems with application to wave energy conversion. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Firenze, Italy, 2013.

[AN17] P. Apkarian and D. Noll. The $\mathcal{H}_\infty$ control problem is solved. *Aerospace Lab Journal*, 13, 2017. AL13-01, 11 pages.

[APL09] T. Ahmed Ali, R. Postoyan, and F. Lamnahbi Lagarrigue. Continuous-discrete adaptive observers for state affine systems. *Automatica*, 45 :2986–2990, 2009.

[ASDG15] M. Alma, H. Souley Ali, M. Darouach, and N. Gao. An $\mathcal{H}_\infty$ adaptive observer design for linear descriptor systems. In *Proc. IEEE American Control Conference*, Chicago, USA, 2015.

[BBZ12] M. Benallouch, M. Boutayeb, and M. Zasadzinski. Observers design for one-sided Lipschitz discrete-time systems. *Syst. & Contr. Letters*, 61 :879–886, 2012.

[BCC88] G. Bornard, N. Couenne, and F. Celle. Regularly persistent observers for bilinear systems. In J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, and D. Leborgne, editors, *New Trends in Nonlinear Control Theory*, volume 122 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 130–140. Springer-Verlag, 1988.

[BCP10] D. Bresch-Pietri, J. Chauvin, and N. Petit. Adaptive backstepping controller for uncertain systems with unknown input time-delay. application to SI engines. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, pages 3680–3687, Atlanta, GA, USA, December 2010.

[BD95] M. Boutayeb and M. Darouach. Observer design for non linear descriptor systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, New Orleans, USA, 1995.

[BD01] M. Boutayeb and M. Darouach. Observers for discrete-time systems with multiple delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46 :746–750, 2001.

[BDH06] G. Besançon, L De León Morales, and O. Huerta-Guevara. Observer synthesis for a class of nonlinear control systems. *Int. J. Contr.*, 79 :581–591, 2006.

[BdK71] C. Bruni, G. di Pillo, and G. Koch. On the mathematical models of bilinear systems. *Ricerche di Automatica*, 2 :11–26, 1971.

[BEFB94] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[Bes00] G. Besançon. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Syst. & Contr. Letters*, 41 :271–280, 2000.

[BFK+00] M. Blanke, C.W. Frei, F. Kraus, R.J. Patton, and M. Staroswiecki. What is fault-tolerant control ? In *Proc. IFAC SAFEPROCESS Symp.*, Budapest, Hungary, 2000.

[BG88] G. Bastin and M.R. Gevers. Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 :650–658, 1988.

[BG97] H. Bereketoglu and K. Gopalsamy. Global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka-Volterra type system with infinite delay. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 210 :279–291, 1997.

[Bou01] M. Boutayeb. Observer design for linear time-delay systems. *Syst. & Contr. Letters*, 44 :103–109, 2001.

[BZSM16] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Robust reduced order observer for a class of uncertain nonlinear stochastic systems. In *Proc. IEEE American Control Conference*, Boston, USA, 2016.

[CC95] H.H. Choi and M.J. Chung. Memoryless stabilization of uncertain systems with time-varying delayed states and control. *Automatica*, 31 :1349–1351, 1995.

[CC97] H.H. Choi and M.J. Chung. Robust observer-based $\mathcal{H}_\infty$ controller design for linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 33 :1749–1752, 1997.

[CL07] J. Chiasson and J.J. Loiseau. *Applications of Time Delay Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[CL09] C.H. Chen and C.H. Lee. Robust stability of homogeneous large-scale bilinear systems with time delays and uncertainties. *J. of Process Control*, 19 :1082–1090, 2009.

[CM04] S.S. Chughtai and N. Munro. LMI-based gain-scheduled control. In *Proc. Control Conference*, University of Bath, UK, 2004.

[CR97] Y.M. Cho and R. Rajamani. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :534–537, 1997.

[CT98] M.J Corless and J. Tu. State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica*, 34 :757–764, 1998.

[DAA17] M. Darouach, F. Amato, and M. Alma. Functional observers design for descriptor systems via LMI : continuous and discrete-time cases. *Automatica*, 86 :216–219, 2017.

[Dai89] L. Dai. *Singular Control Systems*, volume 118 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[Dar00a] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5) :940–943, 2000.

[Dar00b] M. Darouach. On the optimal unbiased functional filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :1374–1379, 2000.

[Dar04] M. Darouach. Functional observers for systems with unknown inputs. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, Leuven, Belgium, 2004.

[Dar06] M. Darouach. Full order unknown inputs observers design for delay systems. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Ancona, Italy, 2006.

[Dar12] M. Darouach. On the functional observers for linear descriptor systems. *Syst. & Contr. Letters*, 61 :427–434, 2012.

[Dar14] M. Darouach. Observers and observer-based control for descriptor systems revisited. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59 :1367–1373, 2014.

[DB95] M. Darouach and M. Boutayeb. Design of observers for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40 :1323–1327, 1995.

[De 00a] C.E. De Souza. $\mathcal{H}_\infty$ filter design for linear time-delay systems. In *Analyse et Commande des Systèmes à Retard*, Grenoble, France, septembre 2000. Ecole d'Eté d'Automatique de Grenoble (LAG).

[De 00b] C.E. De Souza. Stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ control of linear time-delay systems. In *Analyse et Commande des Systèmes à Retard*, Grenoble, France, septembre 2000. Ecole d'Eté d'Automatique de Grenoble (LAG).

[Dem17] D.N. Dem'yanov. Analytical synthesis of reduced order observer for estimation of the bilinear dynamic system state. In *International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, St. Petersburg, Russia, 2017.

[DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Kharkonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34 :831–847, 1989.

[DI16] T.N. Dinh and H. Ito. Interval observers for continuous-time bilinear systems with discrete-time outputs. In *European Control Conference*, pages 1418–1423, Aalborg, Denmark, 2016.

[DL16] E. Devane and I. Lestas. Delay-independent asymptotic stability in monotone systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(9) :2625–2631, 2016.

[DN81] I.A. Derese and E.J. Noldus. Existence of bilinear state observers for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 :590–592, 1981.

[Dri77] R.D. Driver. *Ordinary and delay differential equations*. Springer-Verlag, New-York, 1977.

[DZX94] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S.J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :606–609, 1994.

[EDSM13] M. Ezzine, M. Darouach, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Unknown inputs functional observers designs for delay descriptor systems. *Int. J. Contr.*, 86 :1850–1858, 2013.

[EEZ14] D. Efimov, C. Edwards, and A. Zolghadri. A note on improvement of adaptive observer robustness. In *Proc. 19th IFAC Wold Congress*, pages 558–562, Cape Town, South Africa, 2014.

[EL77] M. España and I.D. Landau. Reduced order bilinear models for distillations columns. *Automatica*, 14 :345–355, 1977.

[EOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Aït Rami. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :1171–1176, 1997.

[ESHY13] M. Ekramian, F. Sheikholeslam, S. Hosseinnia, and M.J. Yazdanpanah. Adaptive state observer for Lipschitz nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 62 :319–323, 2013.

[FBM+14] M. Farza, I. Bouraoui, T. Ménard, R. Ben Abdennour, and M. M'Saad. Adaptive observer for a class of uniformly observable systems with nonlinear parametrization and sampled outputs. *Automatica*, 50 :2951–2960, 2014.

[FD87] B.A. Francis and J.C. Doyle. Linear control theory with an $\mathcal{H}_\infty$ criterion. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25 :815–844, 1987.

[FK95] B.A. Francis and P.P. Khargonekar. *Robust control theory.* Springer-Verlag, New york, 1995.

[Fra87] B.A. Francis. *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[Fra11] R. Frakh. *Commande PID des systèmes à retard.* PhD thesis, Uuiversité de Tunis-El Manar, 2011.

[Fri01] E. Fridman. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Syst. & Contr. Letters*, 43 :309–319, 2001.

[Fri14] E. Fridman. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems. *European Journal of Control*, 20 :271–283, 2014.

[FS02] E. Fridman and U. Shaked. A descriptor system approach to $\mathcal{H}_\infty$ control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :253–270, 2002.

[FS03] E. Fridman and U. Shaked. Delay-dependent stability and $\mathcal{H}_\infty$ control : constant and time-varying delays. *Int. J. Contr.*, 76(1) :48–60, 2003.

[FS06] E. Fridman and U. Shaked. Input-output approach to stability and L_2-gain analysis of systems with time-varying delays. *Syst. & Contr. Letters*, 55 :1041–1053, 2006.

[FSCM10] M. Farza, A. Sboui, E. Cherrier, and M. M'Saad. High-gain observer for a class of time-delay nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 83 :273–280, 2010.

[FT14] T.L. Fernando and H.M. Trinh. A system decomposition approach to the design of functional observers. *Int. J. Contr.*, 87(9) :1846–1860, 2014.

[FTJ10] T.L. Fernando, H.M. Trinh, and L. Jennings. Functional observability and the design of minimum order linear functional observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :1268–1273, 2010.

[GD88] K. Glover and J.C. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an $\mathcal{H}_\infty$-norm bound and relations to risk sensitivity. *Syst. & Contr. Letters*, 11 :167–172, 1988.

[Gér08] B. Gérard. *Observateurs et Commande Basée sur un Observateur pour les Systèmes Bilinéaires.* PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 2008.

[GFH81] R.D. Gupta, F.W. Fairman, and T. Hinamoto. A direct procedure for the design of single functional observers. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 28 :294–300, 1981.

[GHO92] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems, applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :875–880, 1992.

[GI81] O.M. Grasselli and A. Isidori. An existence theorem for observers of bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 :1299–1300, 1981.

[GKC03] K. Gu, V.L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of time-delay systems.* Birkhäuser Boston, 2003.

[GSZD07] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. LPV approach for $\mathcal{H}_\infty$ reduced order filters for bilinear systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Kos, Greece, 2007.

[GSZD10] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. $\mathcal{H}_\infty$ filter for bilinear systems using LPV approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(7) :1668–1674, 2010.

[GY03] P. Garimella and B. Yao. Nonlinear adaptive robust observer design for a class of nonlinear systems. In *Proc. IEEE American Control Conference*, pages 4391–4396, Denver, USA, June 2003.

[GZ03] A. Guyader and Q. Zhang. Adaptive observer for discrete time linear time varying systems. In *Proc. 13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, pages 27–29, Rotterdam, The Netherlands, August 2003.

[Hać92] A. Hać. Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 114(4) :556–562, 1992.

[Hau83] M.L.J. Hautus. Strong detectability and observers. *Lin. Alg. & Applic.*, 50 :353–368, 1983.

[HF76] S. Hara and K. Furuta. Minimal order state observers for bilinear systems. *Int. J. Contr.*, 24 :705–718, 1976.

[HM92] M. Hou and P.C. Müller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :871–875, 1992.

[HPM99] M. Hou, A.C Pugh, and P.C. Müller. Disturbance decoupled functional observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :382–386, 1999.

[HSR+06] S. Halabi, H. Souley Ali, H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, and M. Darouach. Reduced order filter for stochastic bilinear systems with multiplicative noise. In *Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, 2006.

[HSRZ09] S. Halabi, H. Souley Ali, H. Rafaralahy, and M. Zasadzinski. $\mathcal{H}_\infty$ functional filtering for stochastic bilinear systems with multiplicative noises. *Automatica*, 45 :1038–1045, 2009.

[HZB11] L. Hassan, A. Zemouche, and M. Boutayeb. $\mathcal{H}_\infty$ observers design for a class of nonlinear time-delay systems in descriptor form. *Int. J. Contr.*, 84 :1653–1663, 2011.

[Ibr09] S. Ibrir. Adaptive observers for time-delay nonlinear systems in triangular form. *Automatica*, 45 :2392–2399, 2009.

[IHB14] S. Ibrir, K. Hunte, and M. Bettayeb. State observation of a class of bilinear systems with large sensor delay. *Proceeding of the 19th IFAC World Congress*, pages 5023–5028, 2014.

[JDB+14] M. Jiménez Carrizosa, G. Damm, A. Benchaib, P. Alou, M. Netto, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. Bilinear and nonlinear control algorithms for a DC/DC converter for multi-terminal HVDC networks. In *Proc. IFAC World Congress*, pages 523–528, Cape Town, South africa, August 2014.

[JS02] B. Jiang and M. Staroswiecki. Adaptive observer design for robust fault estimation. *International Journal of Systems Science*, 33(9) :767–775, 2002.

[Kin99] M. Kinnaert. Robust fault detection based on observers for bilinear systems. *Automatica.*, 35 :1829–1842, 1999.

[KKKW15] W. Kwon, D. Kang, B. Koo, and S. Won. Robust $\mathcal{H}_2$ filter design for bilinear systems using T-S fuzzy approach. In *Proc. Asian Contr. Conf.*, Kota Kinabalu, Malaysia, 2015.

[KN86] V.B. Kolmanovskii and V.R. Nosov. *Stability of functional differential equation.* Academic press INC, London, 1986.

[KNR99] V.B. Kolmanovskii, S.I. Niculescu, and J.P. Richard. On the Lyapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems. *Int. J. Contr.*, 72 :374–384, 1999.

[KR99] V.B. Kolmanovskii and J.P. Richard. Stability of some linear systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :984–989, 1999.

[Kra63] N.N. Krasovskii. *Stability of Motion, Applications of Lyapunov second method to differential systems and equations with delay.* Stanford University Press, Stanford, USA, 1963.

[KVR80] P. Kudva, N. Viswanadham, and A. Ramakrishna. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25 :113–115, 1980.

[LD97] X. Li and C.R. De Souza. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : a linear matrix inequality approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :1144–1148, 1997.

[LM07] B. Liu and H.J. Marquez. Razumikhin-type stability theorems for discrete delay systems. *Automatica*, 43 :1219–1225, 2007.

[LN73] G. Lüders and K.S. Narendra. An adaptive observer and identifier for linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5) :496–499, 1973.

[Lon80] R. Longchamp. Stable feedback control of bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25 :302–306, 1980.

[LS02] U. Ledzewicz and H. Schätter. Optimal bang-bang controls for a two-compartment model in cancer chemotherapy. *J. of Optimization Theory & Applications*, 114 :609–637, 2002.

[LS03] U. Ledzewicz and H. Schätter. Optimal control for a bilinear model with recruiting agent in cancer chemotherapy. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Maui, Hawaii, USA, 2003.

[Lue66] D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11 :190–197, 1966.

[Lue71] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 :596–602, 1971.

[LZZ17] X. Liu, Y. Zhang, and R. Zhang. New results on delay-dependent stability criterion for discrite-time systems. In *Proc. Chinese Control and Decision Conference*, pages 627 – 631, Chongqing, China, May 2017.

[MC13] S. Mondal and W.K. Chung. Adaptive observer for a class of nonlinear systems with time varying delays. *Int. J. Adaptive Control & Signal Processing*, 27 :610–619, 2013.

[McC86] N.H. McClamroch. Singular systems of differential equations as dynamical models for constrained robot systems. In *Proc. IEEE Robotics and Automation Conference*, pages 21–28, San Francisco, USA, 1986.

[MCCL17] T. Miquel, J.P. Condomines, R. Chemali, and N. Larrieu. Design of a robust controller/observer for TCP/AQM network : First application to intrusion detection systems for drone fleet. In *Int. Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1707–1712, Vancouver, Canada, september 2017.

[MFM+08] T. Mâatoug, M. Farza, M. M'Saad, Y. Koubaa, and M. Kamoun. Adaptive observer design for a class of nonlinear systems with coupled structures. *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (IJ-STA)*, 2(1) :484–499, 2008.

[MI17] S. Mert Özer and A. Iftar. Observer-based stabilization of time-delay systems : An application to diesel engine. In *Proc. Asian Contr. Conf.*, pages 1525–1530, Gold Coast Convention Centre, Australia, december 2017.

[MK80] R.R. Mohler and W.J. Kolodziej. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Trans. Syst. Man & Cybernetics*, 10(10) :683–688, 1980.

[MLY14] X. Miao, L. Li, and X. Yan. Adaptive state estimation for a class of nonlinear stochastic systems under generalized Lipschitz condition. *International Journal of Theoretical Physics*, 53 :3935–3942, 2014.

[Moh73] R.R. Mohler. *Bilinear Control Processes*, volume 106 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York, 1973.

[Moh91] R.R. Mohler. *Nonlinear systems : Applications to Bilinear Control*, volume 2. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[MT92] R. Marino and P. Tomei. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1239–1245, 1992.

[MZ13] A. Moussa Ali and Q. Zhang. adaptive observer based fault diagnosis applied to differential-algebraic systems. In *Proc. IFAC Symposium on System Structure and Control (SSSC)*, pages 929–934, Grenoble, France, February 2013.

[Nak97] T. Nakamizo. chapter Reduced order functional estimator for linear stochastic systems, pages 257–272. Marcel Dekker, New York, 1997. Ed. T. Katamaya and D. Sugimoto.

[New81] R.W. Newcomb. The semistate description of nonlinear time-variable circuits. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 28 :62–71, 1981.

[NG04] S.I. Niculescu and K. Gu. *Advances in time-delay systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

[Nic01] S.I. Niculescu. *Delay effects on stability : A robust control approach*. Springer-Verlag, London, 2001.

[Pet87] I.R. Petersen. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 8 :351–357, 1987.

[PM12] M. Pourgholi and V.J. Majd. Robust adaptive observers design for Lipschitz class of nonlinear systems. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 6(3) :275–279, 2012.

[PRGF14] A.K. Patete Salas, E.M. Ríos Bolívar, C.S. Gómez Quintero, and K. Furuta. Self-Tuning control for an extended class of bilinear systems, case of study : nuclear fission mode. *Magazine Science et Ingénierie*, 35(1) :13–22, 2014.

[RH95] R. Rajamani and J.K. Hedrick. Adaptive observers for active automotive suspensions : theory and experiment. *IEEE Trans. Control Syst. Techn.*, 3 :86–93, 1995.

[Ric03a] J.P. Richard. Time-delay systems : An overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10) :1667–1694, 2003.

[Ric03b] J.P. Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667–1694, 2003.

[RM71] C.R. Rao and S.K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. Wiley, New York, 1971.

[RRPN14] D. Rotondo, V. Reppa, V. Puig, and F. Nejjari. Adaptive observer for switching Linear Parameter-Varying (LPV) systems. In *Proc. 19th IFAC World Congress*, pages 1471–1476, Cape Town, South Africa, August 2014.

[Rug81] W.J. Rugh. *Nonlinear System Theory*. Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[RZ11] F. Rotella and I. Zambettakis. Minimal single linear functional observers for linear systems. *Automatica*, 47(1) :164–169, 2011.

[RZ16] F. Rotella and I. Zambettakis. A note on functional observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(10) :3197–3202, 2016.

[Sai93] M. Saif. A disturbance accommodating estimator for bilinear systems. In *Proc. IEEE American Control Conference*, San Francisco, USA, 1993.

[Sas17] A. Sassi. Observateur fonctionnel robuste pour un système bilinéaire incertain à retards. Technical report, Université de Lorraine, Nancy, France, et Université de Gabès, Tunisie, 2017.

[SBA13] A. Sassi, S. Bedoui, and K. Abderrahim. Time delay system identification based on optimization approaches. In *Proc. International Conference System Theory, Control and Computing*, pages 473–478, Sinaia, Romania, October 2013.

[SC12] B. Shafai and Y. Cheng. Design of PI observer for bilinear systems with unknown input disturbances. In *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 910–915, Dubrovnik, Croatia, 2012.

[SCB14] D. Saoudi, M. Chadli, and N. Benhadj Braeik. Robust $\mathcal{H}_\infty$ fault detection for fuzzy bilinear systems via unknown input observer. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Palermo, Italy, june 2014.

[Sen01] O. Sename. New trends in design of observers for time-delay systems. *Kybernetika*, 4 :427–458, 2001.

[SIW17] C.H. Seah, I.J. Inyang, and J.F. Whidborne. Bilinear modelling and attitude control of a quadrotor. In *Proc. IEEE Conf. Control & Applications*, pages 193–198, Johannesburg, South Africa, 2017.

[SL91] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied nonlienar control*, volume 146. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[ŚLS03] A. Świerniak, U. Ledzewicz, and H. Schätter. Optimal control for a class of compartmental models in cancer chemotherapy. *Int. J. Appli. Math. Comput. Sci.*, 13 :357–368, 2003.

[Sou02] H. Souley Ali. *Observateurs Robustes d'Ordre Réduit pour les Systèmes Linéaires et Bilinéaires Incertains*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 2002.

[SSB+16] A. Sassi, H. Souley Ali, S. Bedoui, K. Abderrahim, and M. Zasadzinski. Design of a functional adaptive observer for bilinear delayed systems. In *Proc. IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Istanbul, Turkey, 2016.

[SSB+17] H. Souley Ali, A. Sassi, A. Barbata, M. Zasadzinski, and A. Di Sano. Modélisation et contrôle appliqués à la maîtrise de la demande en énergie des bâtiments. In *Proc. Congrès National de la Recherche des IUT*, Auxerre, France, 2017.

[SSSA99] P. Shi, S. Shue, Y. Shi, and R.K. Agarwal. Controller design for bilinear systems with parametric uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, 4 :505–528, 1999.

[SSZ+17a] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, K. Abderrahim, and A. Di Sano. Observateur adaptatif pour des systèmes proie-prédateur. In *Proc. Congrès National de la Recherche des IUT*, Auxerre, France, 2017.

[SSZ+17b] H. Souley Ali, A. Sassi, M. Zasadzinski, K. Abderrahim, and M. El Ganaoui. Fault tolerant control for energy power systems. In *Proc. International Conference on Materials & Energy*, Tianjin, China, 2017.

[SSZA17a] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Adaptive observer design for a class of nonlinear systems with time delays. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal*, 3(1) :373–383, 2017.

[SSZA17b] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Adaptive observer design for bilinear descriptor system with time delays. In *Proc. Int. Workshop on Advanced Control and Diagnosis.*, Bucharest, Romania, 2017.

[SSZA17c] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Full order adaptive observer design for time delay bilinear system. In *Proc. International Conference on Systems and Control*, pages 267–272, Batna, Algeria, 2017.

[SSZA18a] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Adaptive observer design for a class of descriptor nonlinear systems. *European Journal of Control*, 2018. https ://doi.org/10.1016/j.ejcon.2018.09.014.

[SSZA18b] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Commande basée observateur d'un système LPV : Application à une génératrice asynchrone à double alimentation. In *Proc. Congrès National de la Recherche des IUT*, Aix en Provence, France, 2018.

[SSZA18c] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. Observer-based control of a wind Driven Doubly Fed Induction Generator. In *Proc. International Conference on Materials & Energy*, San Sebastian, Spain, 2018.

[SSZA18d] A. Sassi, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and K. Abderrahim. *Stability, control and application of Time-delay systems*, chapter Adaptive observer design for a class of descriptor nonlinear systems. 2018. submitted.

[SZRD06] H. Souley Ali, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Robust $\mathcal{H}_\infty$ reduced order filtering for uncertain bilinear systems. *Automatica*, 42 :405–415, 2006.

[SZSA17a] A. Sassi, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and K. Abderrahim. Design of an $\mathcal{H}_\infty$ adaptive observer for bilinear delayed systems. In *Proc. Triennal IFAC World Congress*, volume 50, pages 2923–2928, Toulouse, France, 2017.

[SZSA17b] A. Sassi, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and K. Abderrahim. A robust reduced order functional $\mathcal{H}_\infty$ observer for time delay bilinear systems. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Valletta, Malta, 2017.

[Tri99] H.M. Trinh. Linear functional state observer for time-delay systems. *Int. J. Contr.*, 72 :1642–1658, 1999.

[Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.

[VKZ07] D. Vries, K.J. Keesman, and H. Zwart. A Luenberger observer for an infinite dimensional bilinear systems : A UV disinfection example. In *Proc. 3rd IFAC Symposium on System Structure and Control.*, pages 667–672, Foz do Iguassu, Brazil, 2007.

[Wil77] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.

[WL07] D. Wang and K.Y. Lum. Adaptive unknown input observer approach for aircraft actuator fault detection and isolation. *International Journal of Adaptive control and signal processing*, 21 :31–48, 2007.

[WLT99] Q.G. Wang, T.H. Lee, and K.K. Tan. *Finite spectrum assignment for time-delay systems.* Springer-Verlag, London, 1999.

[WQ02] Z. Wang and H. Qiao. Robust filtering for bilinear uncertain stochastic discrete-time systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 50 :560–567, 2002.

[WWLL08] B. Wang, X. Wu, C. Liu, and Z. Li. Design of adaptive observer for time varying delay system based on delay dependent stability and $\mathcal{H}_\infty$ traking performance. In *Proc. Int. Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, pages 473–476, Shandong, China, November 2008.

[WXD92] Y. Wang, L. Xie, and C.E. De Souza. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 19 :139–149, 1992.

[XC03] S. Xu and T. Chen. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements. *Automatica*, 39 :509–516, 2003.

[XLZY04] S. Xu, J. Lu, S. Zhou, and C. Yang. Design of observers for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with time delay. *J. of the Franklin Institute*, 341 :295–308, 2004.

[XZD18] C. Xu, B. Zhou, and G.R. Duan. Delayed output feedback of discrete-time time-delay systems with applications to spacecraft rendez-vous. *IET Control Theory & Applications*, 12(6) :828–836, 2018.

[YSR91] Y.Q. Ying, Y.X. Sun, and M. Rao. Bilinear state-disturbance composite observer and its application. *Int. J. Syst. Sci.*, 22 :2489–2498, 1991.

[Yu99] R. Yu. On delay-independent stability of linear systems : Generalised Lyapunov equation. In *Proc. European Contr. Conf.*, Karlsruhe, Germany, September 1999.

[ZBB06] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G.I. Bara. On observers design for nonlinear time-delay systems. In *Proc. IEEE American Control Conference*, Minneapolis, USA, 2006.

[ZBDS10] M. Zerrougui, L. Boutat Baddas, M. Darouach, and H. Souley Ali. $\mathcal{H}_\infty$ observers design for singular bilinear systems. *Proc. IEEE American Control Conference*, pages 6864–6869, 2010.

[ZD01] Q. Zhang and B. Deylon. A new approach to adaptive observer design for MIMO systems. *Proc. IEEE American Control Conference*, 2 :1545 – 1550, 2001.

[ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[Zha02] Q. Zhang. Adaptive observer for MIMO linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :525–529, 2002.

[Zha05] Q. Zhang. Revisiting different adaptive observers through a unified formulation. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference.*, pages 3067–3072, December 2005.

[ZJC08] K. Zhang, B. Jiang, and V. Cocquempot. Adaptive observer-based fast fault estimation. *Int. J. Control, Automation, and Systems*, 6(3) :320–326, 2008.

[ZLC17] N. Zhao, C. Lin, and B. Chen. New delay-dependent stability criteria using improved double integral inequality for singular systems. In *Proc. Chinese Control and Decision Conference*, pages 4234 – 4237, Chongqing, China, May 2017.

[ZRMD98] M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, and M. Darouach. On disturbance decoupled observer for a class of bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 120 :371–377, 1998.

[ZSD06] M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and M. Darouach. Robust reduced order unbiased filtering for uncertain systems. *Int. J. Contr.*, 79 :93–106, 2006.

[ZvH17] J. Zemànek, S. Čelikovskỳ, and Z. Huràk. Time-optimal control for bilinear nonnegative-in-control systems : Application to magnetic manipulation. In *Proc. IFAC World Congress*, Toulouse, France, July 2017.

Résumé

En automatique, un observateur joue un rôle primordial dans la commande et la supervision des processus ou encore la détection de défauts, vu sa capacité à fournir des informations sur les valeurs des états non mesurés ou non disponibles. Dans ce contexte, cette thèse porte sur l'estimation non pas uniquement de l'état, mais aussi des paramètres inconnus affectant la dynamique du système de façon simultanée. Ce problème est traîté pour des classes de systèmes non linéaires soumis à des retards constants et inconnus. Il représente un enjeu double, tant sur l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus, que dans la présence des retards qui affectent la dynamique des systèmes.

Dans un premier temps, des observateurs fonctionnels robustes ont été développés pour des systèmes faisant intervenir des non linéarités état-commande et soumis à des retards. Le problème de la robustesse a été considérée, dans un premier temps, pour prendre en compte la présence de perturbations à énergie finie en faisant appel à la théorie $\mathcal{H}_\infty$, et dans un second temps vis-à-vis d'incertitudes paramétriques affectant les paramètres du modèle du système à observer. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des observateurs ont été données à travers la résolution d'équations de Sylvester. Cette résolution a permis de simplifier le problème avec le paramétrage des gains de l'observateur via un seul gain à déterminer. Comme l'étude de la convergence de l'observateur revient à étudier la stabilité de l'erreur d'estimation, la théorie de Lyapunov-Krasovskii dédiée à la stabilité des systèmes à retards a été utilisée en se basant sur une approche de type descripteur. Cette étude a permis d'aboutir à des conditions suffisantes de convergence asymptotique, exprimées sous forme de LMI. Tout au long du mémoire, la synthèse des observateurs a été considérée pour l'ordre plein et l'ordre réduit.

Puis, les développements ont été étendus, au cas où on souhaite estimer l'état du système considéré simultanément avec certains paramètres inconnus affectant ce dernier. Deux pistes ont été étudiées à travers ce mémoire : lorsque le vecteur des paramètres inconnus agit linéairement par rapport à la dynamique du système et lorsque les paramètres inconnus agissent non linéairement par rapport à la dynamique du système. L'approche développée a permis d'étudier simultanément la convergence de l'état et des paramètres inconnus, ce qui a permis de relaxer certaines contraintes imposées lors de la synthèse des observateurs adaptatifs dans la littérature, notamment la contrainte d'excitation persistante considérée au niveau de la deuxième piste de recherche. Pour finir, les résultats obtenus ont été étendus à une classe de systèmes singuliers non linéaires, qui, outre les relations dynamiques, fait intervenir des relations algébriques.

Mots-clés: Observateurs adaptatifs, Approche $\mathcal{H}_\infty$, Systèmes à retards, Systèmes non linéaires, Approche de Lyapunov, LMIs

Abstract

In automatic control reaserch fields, an observer plays a key role in the control and supervision of processes or the detection of faults, given its ability to provide information on the values of unmeasured or unavailable states. In this context, this thesis deals with the estimation not only of the state but also of the estimation of the unknown parameters affecting the dynamics of the system simultaneously with the state vector. In particular, the problem is addressed for classes of nonlinear systems subject to constant and unknown delays. This problem represents a dual challenge, both on joint estimation of unknown state and parameters, as well as the presence of delays that affect the system dynamics.

First, functional observers were developed for systems subject to time delays and involving state-input nonlinearities. The problem of robustness was studied, initially, when some finite energy perturbations occured in the system dynamics, which required the $\mathcal{H}_\infty$ theory in order to attenuate its effects. In a second time, it is treated when parametric uncertainties affect the model parameters. Necessary and sufficient conditions for the existence of observers have been given through the resolution of Sylvester's equations. This resolution made it possible to simplify the problem by setting the observer gains via a single gain to be determined. As the study of the observer's convergence returns to studying the stability of the estimation error, Lyapunov-Krasovskii theory dedicated to the stability of the delay systems was used based on the descriptor transformations. This study lead to sufficient conditions of asymptotic convergence, expressed in terms of LMI. Throughout the dissertation, the synthesis of observers was considered in full and reduced order cases.

The developments were then extended to estimate the system states simultaneously with unknown parameters affecting its dynamics. Two approaches have been investigated through this memory : when the vector of the unknown parameters acts linearly with respect to the dynamics of the system and when the unknown parameters act nonlinearly with respect to this dynamics. The approach proposed in this work make it possible to simultaneously estimate the convergence of the state and unknown parameters, which made it possible to relax some constraints considered in the synthesis of adaptive observers in the literature. It concerns particularly the persistent excitation constraint considered in the second approach. Finally, the results obtained have been extended to the class of singular systems, which, in addition to the dynamic relations, involves algebraic relations in their description.

Keywords: Adaptive observers, $\mathcal{H}_\infty$ approach, Time-delay systems, Nonlinear systems, Lyapunov approach ,LMI