ANNÉE 2017

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1

sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et leurs interactions

Ecole doctorale MathSTIC

présentée par

Axel Rogue

préparée à l'unité de recherche UMR 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématiques de Rennes
U.F.R. de Mathématiques

Dimensions et régularité directionnelles du courant de Green

Thèse soutenue à Rennes le 16/10/2017

devant le jury composé de :

Juliette BAVARD
Chargée de recherche CNRS, Rennes 1 / *examinatrice*

Eric BEDFORD
Professeur, Stony Brook University / *rapporteur*

Henry DE THELIN
Professeur, Univ. Paris 13 / *examinateur*

Romain DUJARDIN
Professeur, Univ. Pierre et Marie Curie / *examinateur*

Christophe DUPONT
Professeur, Univ. Rennes 1 / *directeur de thèse*

Barbara SCHAPIRA
Maîtresse de conférence, Univ. Rennes 1 /*examinatrice*

Johan TAFLIN
Maître de conférence, Univ. de Bourgogne / *rapporteur*

Violence is the last refuge of the incompetent.

- Isaac Asimov, Foundation

Remerciements

La première personne que je veux remercier est Christophe, qui m'a encadré pendant ces trois ans. Pour m'avoir fait profiter de ses connaissances toutes les fois où j'allais passer quelques heures dans son bureau. Mais aussi pour sa légendaire gentillesse, sa patience et sa grande disponibilité alors même que son agenda était particulièrement compliqué. Je le remercie aussi de m'avoir pris entre quatre yeux le 31 Août 2016. Si ce manuscrit existe aujourd'hui, c'est grâce à lui.

Mes remerciements vont également à Eric Bedford et Johan Taflin pour avoir accepté de rapporter ce manuscrit et pour être présents à cette soutenance. Leur travail minutieux a incontestablement contribué à améliorer ce texte (en repérant notamment une inclusion trop optimiste). Je tiens aussi à remercier Juliette Bavard, Henry de Thélin, Romain Dujardin et Barbara Schapira qui ont bien voulu faire partie de ce jury. Merci à Sébastien Gouëzel de m'avoir expliqué ses résultats sur les grandes déviations et à Johan Taflin de m'avoir indiqués les applications de Desboves. Je suis aussi reconnaissant à Romain Dujardin pour son investissement dans l'ANR Lambda et particulièrement d'avoir organisé une rencontre des doctorants en 2016 qui fut un moment très instructif.

Cette thèse fut agréable à préparer parce qu'elle le fut à l'IRMAR. Je remercie tous les membres des équipes Théorie Ergodique et Géométrie Analytique pour leur accueil et pour tout ce qu'ils organisent tout au long de l'année. Il faut mentionner aussi que si le laboratoire tourne aussi bien, c'est en bonne partie grâce à l'équipe administrative ultra-efficace qui se charge de tout. Merci donc à Chantal Halet, Hélène Rousseaux, Nelly Loton, Xhensila Lachambre, Emmanuelle Guiot, Marie-Aude Verger et Carole Wosiak pour leur travail. Merci aussi à l'équipe de la bibliothèque d'en faire un lieu d'étude agréable.

Même si j'étais rattaché à l'IRMAR pendant trois ans, cette soutenance marque également la fin de sept années de présence à l'ENS Rennes et à Rennes 1. Certains des cours que j'ai suivis pendant que j'y étais élève m'ont profondément marqué et je voudrais en remercier leurs auteurs. Michel Pierre pour son cours de topologie impeccable, élégant et complet (ce qui est rassurant pour un cours de topologie). Felix Ulmer pour sa passion communicative de la Théorie des Groupes et ses expressions étranges lors des TDs ("Ca, c'est Iznogoud"). Dominique Cerveau pour sa façon si claire d'expliquer la topologie algébrique avec du polystyrène et des élastiques et pour m'avoir envoyé vers Christophe lorsque je cherchais une thèse. Thibaut Deheuvels pour ses TDs d'intégration qui rendait ce langage abscons clair comme de l'eau de roche. Jérémy Leborgne pour nous avoir expliqué l'algèbre pendant la prépa agreg. Je me rappelle aussi du cours de M2 de Serge Cantat et François Maucourant qui approchait la perfection et du cours doctoral de Jürgen Angst et Ismaël Bailleul sur la relativité générale qui fut une vraie découverte.

Merci à Benoît Cadre de m'avoir proposé d'assurer le TD de Théorie des Groupes à l'ENS Rennes. C'est la matière qui me faisait le plus envie et ce fut un bonheur de l'enseigner devant un public aussi agréable.

Je voudrais également remonter un peu dans le temps pour remercier ceux qui m'ont marqué dans mes études plus anciennes : M. Fossard, qui a presque réussi à mettre toute la classe dans le couloir. Mme Cazaux pour m'avoir fait découvrir les premiers raisonnements évolués lors des cours de Spé Maths en Terminale (je garde un souvenir ému de la première fois où j'ai décidé de mon propre chef d'énoncer et démontrer un lemme intermédiaire pour résoudre un exercice d'arithmétique). M. Chateaux pour ses centaines de pages de cours impeccables en Spé. Mme Picard qui, si elle n'a pas réussi à faire de moi un pro de la physique, a su tirer le meilleur de ce que je pouvais donner.

Il y a aussi tous les doctorants et ex-doctorants de Rennes. Ceux avec qui j'ai partagé le bureau : Thom-Thom, dont j'attends avec impatience la thèse au format post-it. Merci aussi à Thiago, que j'ai côtoyé quelques mois et qui était la gentillesse incarnée. N'oublions pas Victor Cauchois, qui fut mon co-bureau pendant plus de deux ans mais dont je ne connais toujours pas la tête.

Sans aucun ordre, je voudrais aussi remercier Tristan V et Salomé pour m'avoir initié à l'après-marché du Samedi matin et Tristan V pour m'avoir fait jouer à la Vectrex, Gabriel pour les discussions rugby, Camille H pour nous avoir fait nous sentir plus intelligents, Pierre-Yves et Charles pour les discussions parfois houleuses au Resto U, Damien (grand participant des dites discussions houleuses) qui m'a régulièrement débauché le vendredi soir pour un peu de sport, Florian B pour ton humour de qualité, Jean-Phi pour avoir installé une tireuse à ta soutenance, Hélène H pour mon premier dîner en société à Rennes, Blandine pour ta joie de vivre, ta cuisine hors-pair et ton petit acceng du Sud, Basile et Coralie pour m'avoir proprement déposé au semi du Tout Rennes Court et pour m'avoir fait découvrir Qwertee. Hélène H pour apporter une certaine touche de classe à l'IRMAR, Alexandre L pour la dégustation de Whisky, Federico et Christian pour toutes les invitations chez eux, Türkü pour être à la fois notre Granny et notre Barbie Girl à tous. Merci aux inséparables Yvan et Vincent, les géomètres de l'extrême (mais promis juré, je crois que j'ai un peu compris de quoi vous parlez), à Thi pour m'avoir montré qu'on peut être saoul en buvant un galopin, à Simon et Joackim pour m'avoir proposé des séances d'entraînement impossibles, à Tristan H pour m'avoir fait mon café avec amour toute cette année. En parlant de café, merci à Emily d'avoir fait plein de pauses dans sa prépa agreg pour venir boire des expressos au lieu de bosser les coniques.

Il y a parmi les doctorants un groupe qui se réunit une fois par semaine dans le plus grand secret pour dévorer des gâteaux. Je tiens à remercier tous ses membres de m'avoir régulièrement approvisionné en sucres et en lipides, notamment Julie, Benoît, Richard, Cyril, Camille F et Florian L. Il y a également un groupe de joueurs, dont l'intersection avec l'ensemble précédent est assez importante. Toutefois, je me dois de remercier Yon d'avoir voté Fail alors qu'il était Merlin. Merci aussi à ceux que je connaissais moins, mais avec qui j'ai eu le plaisir de discuter de temps en temps autour d'un café ou au détour d'un couloir : Youenn, Adrien C, Kévin, Grégory, Andrès, Ninon, Arnaud P, Zoïs et Pierre.

Merci à Rouff pour tous nos gueuletons, chez moi puis à ta coloc, et aussi pour la recette très particulière des pommes de terre de Leiden. Merci à Valou d'être toujours à fond pour chambrer depuis 7 ans... ALLEZ ENLEVE!! J'allais faire une liste de tout ce pour quoi je voudrais la remercier, mais elle serait bien trop longue, alors tout simplement merci à María d'être María.

Merci à Arnaud et Ophélie d'avoir été mes collègues de café avec une grande régularité. Merci à Arnaud d'avoir été l'âme de l'IRMAR et du Pampers (c'était bizarre cette année de voir le labo tourner sans toi) et d'avoir lancé les Rencontres Doctorales Lebesgue. Merci à Ophélie de m'avoir fait passer des super vacances à Lisbonne et pour ta passion inquiétante pour les lapins.

Merci à Fish pour les trois ans côte à côte (ou plutôt dos à dos) dans le bureau 634 à passer par tous les états de la recherche, pour notre tentative (inachevée...) d'avoir tous les crânes jaunes et pour les 74 088 propositions de soirée dansantes (Oh la la...).

Enfin, il y a un couple dont je suis devenu de plus en plus proche au fur et à mesure que le temps passait. Au début de cette thèse, je me suis aussi fixé pour objectif de finir un triathlon M avant la soutenance. Merci à Adrien de s'être lancé en même temps dans ce défi fou qui nous a emmené jusqu'au bout de nous-mêmes le 21 Mai 2017. Merci à Marine de m'avoir tiré pendant 19 kilomètres au Tout Rennes Court alors que j'étais au bord de la rupture. Merci à vous deux d'être de ces gens qui font devenir meilleur juste parce qu'on les connait et merci de m'avoir invité au plus beau mariage que j'ai vu.

Merci aussi à certains amis plus anciens ou non-rennais d'avoir partagé de bons moments avec moi : je pense bien sûr à Néstor, mon co-organisateur préféré, qui s'est exilé dans le Sud de la France cette année et dont les parties de Frisbee, les commentaires sur la paella du RU et le délicieux accent des îles Canaries m'ont manqués. Il y a aussi Hugo qui a brillamment remis le Club Jeu de l'ENS sur pied (et tous ceux qui ont participé à ces longues soirées ludiques) et m'a fait découvrir le monde très particulier de Courchevel, Stéphane pour l'apprentissage du Snowboard le plus rapide qu'on ait jamais vu et pour m'avoir laissé mourir en mangeant du piment, Clément qui s'est exilé à Angers pour que j'arrête de le plumer à Magic, Alexandre G qui est une des rares personnes de ma connaissance capable de discuter de plus de sports différents que moi, Martin pour tous nos dogfight et bien sûr Simon pour avoir fait l'effort de me connaître quand on était jeunes et pour toutes ces années d'amitié depuis.

Merci à Roger pour les 18ème et 19ème, et merci à Urios d'avoir emmené les Oyomen (et moi et Simon par la même occasion) jusqu'à Ernest-Wallon un jour de play-off.

Ce dernier paragraphe est là pour ceux qui sont à mes cotés depuis toujours. J'ai une pensée pour Mamie Eliane, qui nous a quitté en ce jour de fête des mères 2017 et dont les carottes m'ont marqué à vie. Merci à Joël et Catherine d'être toujours aussi joueurs. Merci à Papy Jean d'être mon exemple scientifique de par sa passion pour l'électricité et à Mamie Régine d'être mon esprit littéraire, même si je n'y ai pas toujours mis de la bonne volonté. Merci à Coline de toujours former avec moi une fratrie indestructible, peu importe que l'on ne se soit pas vu depuis trois heures ou trois mois. Enfin, merci à mes parents de m'avoir toujours encouragé et soutenu dans mes choix d'études et surtout de m'avoir élevé dans une forte culture scientifique où la curiosité fut toujours satisfaite et l'esprit de déduction encouragé. Les mathématiques ont eu un attrait incroyable pour moi depuis mon plus jeune âge et ils ont soufflé sur les braises de cette passion.

5

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Il faut toujours viser la lune, car même en cas d'échec, on atterrit dans les étoiles.

Oscar Wilde

1.1 Présentation du contexte

1.1.1 Applications extrémales

Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe du plan projectif complexe de degré $d \geq 2$. On note T son courant de Green. C'est un courant positif fermé invariant de bidegré $(1, 1)$. Le produit $\mu := T \wedge T$ est la mesure d'équilibre de f, c'est l'unique mesure invariante maximisant l'entropie. Rappelons que μ est ergodique et mélangeante. Les exposants de Lyapunov de μ, notés $\lambda_1 \geq \lambda_2$, sont les quantités qui gouvernent les contractions et dilatations localement asymptotiquement sur tout le support de μ. Briend et Duval ont démontré que ces exposants sont strictement positif.

Théorème 1.1.1 (Briend-Duval [BrDu99]).

$$\frac{1}{2} \log d \leq \lambda_2 \leq \lambda_1. \tag{1.1.1}$$

Ils montrent de plus, dans [BrDu99], à l'aide du mélange et de la positivité des exposants de Lyapunov, que μ équidistribue les points périodiques répulsifs. Le calcul des exposants de Lyapunov n'est pas évident. On consultera les articles de Bedford-Jonsson [BJ00] et de Jonsson [Jon98], [Jon99] pour des formules concernant la somme des exposants de Lyapunov dans le cas des applications polynomiales de $\mathbb{P}^2$. A l'instar de la formule de Przytycki en dimension 1 (voir [Prz85]), ces formules font intervenir l'ensemble critique de l'application polynomiale. Il est naturel de s'intéresser à l'optimalité de la borne (1.1.1). La caractérisation des **applications extrémales**, c'est à dire telles que $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \log d$, est résumée dans le Théorème suivant.

Théorème 1.1.2 (Berteloot-Loeb [BL01], Berteloot-Dupont [BeDu05] et Dinh-Dupont [DD04]).

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}\log d$.
2. $d_\mu = 4$.
3. $\mu << \mathrm{Leb}_{\mathbb{P}^2}$.
4. *T est une $(1,1)$-forme lisse strictement positive sur un ouvert de $\mathbb{P}^2$.*
5. *f est un exemple de Lattès. (Voir Définition 1.1.3).*

Le cas de la dimension 1 résulte des travaux de Ledrappier [Led84a], Mañé [Mn88], Zdunik [Zdu90] et Mayer [May02].

La dimension de μ qui apparait ici est un élément clé de notre étude. Pour $x \in \mathbb{P}^2$, on définit $\underline{d_\mu}(x)$ la dimension inférieure et $\overline{d_\mu}(x)$ la dimension supérieure de la mesure μ en x comme

$$\underline{d_\mu}(x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\log(\mu(B_x(r)))}{\log r} \quad \overline{d_\mu}(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\log(\mu(B_x(r)))}{\log r}.$$

On note $d_\mu(x)$ la limite lorsqu'elle existe. Dans le cas de la mesure μ, son ergodicité implique que $\underline{d_\mu}(x)$ et $\overline{d_\mu}(x)$ (et $d_\mu(x)$ si elle est bien définie) sont constantes μ-presque partout. On enlèvera donc la dépendance en x. On sait a priori seulement que $\underline{d_\mu} \leq \overline{d_\mu}$. Il est donc remarquable que dans le Théorème 1.1.2, on ait $\underline{d_\mu} = \overline{d_\mu}$ et que d_μ soit bien définie.

Définition 1.1.3. *Un endomorphisme holomorphe $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ est appelé* ***exemple de Lattès*** *si il existe un tore complexe $\mathbb{C}^2/\Lambda$, une dilatation affine D sur ce tore et un revêtement galoisien fini $\sigma : \mathbb{C}^2/\Lambda \to \mathbb{P}^2$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2/\Lambda \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{C}^2/\Lambda \arrow[d, "\sigma"'] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Il existe de telles applications pour tout degré $d \geq 2$, voir par exemple [Dup03]. En revanche, déterminer si une application donnée est un exemple de Lattès se révèle compliqué. Le Théorème 1.1.2 nous fournit une caractérisation par les exposants de Lyapunov et la dimension de μ.

1.1.2 Applications semi-extrémales

Le cas qui sera le fil conducteur de ce texte est celui des **applications semi-extrémales**, c'est à dire vérifiant $\lambda_2 = \frac{1}{2}\log d$ et $\lambda_1 > \lambda_2$.

Question 1.1.4. *Peut-on décrire géométriquement les applications semi-extrémales (avec un diagramme commutatif comme pour les exemples de Lattès) ?*

Peut-on décrire le courant de Green et la mesure d'équilibre des applications semi-extrémales ?

Notre intuition pour comprendre ces applications est guidée par les deux exemples qui suivent. le premier exemple est classique. Nous montrons que le deuxième exemple est semi-extrémal à la section 3.5. Nous remercions Taflin de nous avoir indiqué ces applications.

Exemple 1 : Suspension d'un Lattès de dimension 1 Soit $d \geq 2$ et $R : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ un exemple de Lattès de degré d en dimension 1. R s'écrit alors $[z : w] \mapsto [P(z, w) : Q(z, w)]$ en coordonnées homogènes, où P et Q sont des polynômes homogènes de degré d. D'après la caractérisation des exemples de Lattès en dimension 1, l'exposant de Lyapunov de la mesure d'équilibre de R est $\lambda_R = \frac{1}{2} \log d$.

On définit la **suspension** de R comme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{P}^2 \\ [z : w : t] & \mapsto & \left[P(z, w) : Q(z, w) : t^d\right] \end{array}$$

Alors f fixe $x_0 := [0 : 0 : 1]$ et préserve le pinceau de droites passant par x_0. Mieux, l'action de f sur ces droites est celle du Lattès R, qui se lit sur la droite invariante à l'infini L_∞. Les exposants de Lyapunov de $\lambda_1 \geq \lambda_2$ de μ sont égaux à $\lambda_1 = \log d$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2} \log d$.

Proposition 1.1.5.

1. *Le bassin d'attraction de x_0, noté $B(x_0)$, est un ouvert borné de la carte affine $[z : w : 1]$. Il est cerclé, simplement connexe et son bord est sphérique (strictement pseudoconvexe) en dehors d'un nombre fini de cercles. (Voir [BL98], [Din01], [Dup03])*
2. *En dehors des singularités, T s'écrit localement, près de $\partial B(x_0)$, comme $2i\partial\overline{\partial} \log^+ \|(z, w)\|$.*
3. $\operatorname{Supp} \mu = \partial B(x_0)$.
4. $\operatorname{Supp} T = B(x_0)^c$. *En particulier,* $\operatorname{Supp} T$ *est bien plus gros que* $\operatorname{Supp} \mu$.
5. *$\mu << \sigma_T$, où $\sigma_T = T \wedge \omega$ est la mesure trace de T (ω est la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2$).*

Les endomorphismes de $\mathbb{P}^2$ qui vérifient la dernière propriété sont en fait toujours semi-extrémaux. Ce résultat a été établi par Dujardin :

Théorème 1.1.6 (Dujardin [Duj12])**.** *Si $\mu << \sigma_T$, alors $\lambda_2 = \frac{1}{2} \log d$.*

Exemple 2 : Applications élémentaires de Desboves

Définition 1.1.7. *Une application élémentaire de Desboves est une application de la forme*

$$f_\lambda := [z : w : t] \mapsto \left[-z(z^3 + 2w^3) : w(2z^3 + w^3) : t(w^3 - z^3 + \lambda(z^3 + w^3 + t^3))\right]$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Bonifant et Dabija ont étudié ces applications dans [BoDa02], où elles possèdent 3 paramètres. Ici nous travaillons avec la famille restreinte à un paramètre, que nous appelons "élémentaire" (le cas $\lambda = 0$ ne définit pas un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$, car f_0 a un point d'indétermination). Elles ont été utilisées récemment par Bianchi-Taflin [BiTa16] dans la Théorie des bifurcations. Ils montrent que tous les paramètres de cette famille sont des paramètres de bifurcation. Dujardin [Duj16] a généralisé ce résultat en exhibant des ouverts de bifurcations dans la famille de tous les endomorphismes de $\mathbb{P}^2$. Ainsi, contrairement au cas des fractions rationnelles, la stabilité n'est pas forcément une propriété dense dans les espaces de paramètres des endomorphismes de $\mathbb{P}^2$.

Les applications élémentaires de Desboves possèdent de nombreux points communs avec les suspensions de Lattès, notamment les trois premières affirmations de la proposition suivante. La Proposition 1.1.10 ci-dessous mettra en évidence des différences importantes.

Proposition 1.1.8 (Bonifant-Dabija [BoDa02])**.** *Si $\lambda \neq 0$, alors*

1. $x_0 = [0:0:1]$ *est un point fixe de* f_λ.
2. f_λ *préserve le pinceau de droite passant par* x_0.
3. f_λ *préserve la droite à l'infini* $L_\infty := \{[z:w:0]\}$.
4. f_λ *préserve la cubique* $\mathcal{C} := \left\{[z:w:t]\,,\quad z^3 + w^3 + t^3 = 0\right\}$.

Tout ces points nous permettent de retrouver une situation de type Lattès de dimension 1 pour $f\,|_{L_\infty}$. Chaque droite passant par x_0 coupe L_∞ en exactement 1 point. De plus, $f\,|_{\mathcal{C}}$ est une application holomorphe sur une courbe elliptique, donc est affine. $\mathcal{C}$ étant une cubique projective lisse, elle coupe toute droite passant par x_0 exactement 3 fois avec multiplicité. Cela nous fournit un revêtement ramifié $\sigma_3 : \mathcal{C} \to L_\infty$ de degré 3, et on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "f|_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\sigma_3"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\sigma_3"'] \\ L_\infty \arrow[r, "f|_{L_\infty}"] & L_\infty \end{tikzcd}$$

L'application $f\,|_{L_\infty}$ est de degré 4 et sa mesure d'équilibre μ_∞ possède donc un exposant de Lyapunov minimal égal à $\frac{1}{2}\log 4$. Cependant, contrairement à ce qu'il se passait dans le cas suspension de Lattès, il n'est pas facile de relier l'exposant de Lyapunov de μ_∞ à ceux de μ. Nous ne sommes pas non plus dans le cas polynomial [BJ00], [Jon98], ni dans celui des applications fibrées polynomiales [Jon99] (où les deux exposants sont supérieurs à $\log d$). Nous montrons le Théorème suivant dans la section 3.5 en utilisant l'équirépartition des points périodiques répulsifs de f vers μ et de $f\,|_{L_\infty}$ vers μ_∞.

Théorème 1.1.9. *Pour tout $\lambda \neq 0$, l'application de Desboves f_λ est semi-extrémale : les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2$ de sa mesure d'équilibre μ vérifient $\lambda_2 = \frac{1}{2}\log 4$ et $\lambda_1 > \lambda_2$.*

Enfin, les structures du courant T et de la mesure μ sont très différentes de ce que l'on observait dans l'Exemple 1. Toujours d'après [BoDa02],

Proposition 1.1.10 (Bonifant-Dabija)**.**
- *Le bassin d'attraction de x_0, noté $B(x_0)$, est connexe et dense dans $\mathbb{P}^2$.*
- $\operatorname{Supp}\mu = \operatorname{Supp} T = B(x_0)^c$.

En particulier, on ne sait pas si μ est absolument continue par rapport à la mesure trace σ_T.

Observation : Dans les deux exemples que nous avons présentés, l'application possède un "facteur Lattès" qui induit la minimalité de λ_2.

Question 1.1.11. *Est-ce que toute application semi-extrémale possède un facteur Lattès ?*

Dans [Duj12], Dujardin pose la même question pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^2$ vérifiant $\mu << \sigma_T$.

1.1.3 Mesures dilatantes et dimensions locales

Le courant de Green T et la mesure d'équilibre μ de f sont des objets universels pour la théorie ergodique des endomorphismes de $\mathbb{P}^2$, au sens suivant :

Théorème 1.1.12 (de Thélin [dT05], Dinh [Din07]). *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique.*

Si $h_\nu > \log d$, alors $\operatorname{Supp}\nu \subset \operatorname{Supp}\mu$.

Si $h_\nu > 0$, alors $\operatorname{Supp}\nu \subset \operatorname{Supp} T$.

Ce Théorème montre que, suivant leur entropie, les mesures ergodiques peuvent servir à minorer la dimension de Hausdorff du support de T et du support de μ. Les mesures dites de grande entropie (c'est à dire telle que $h_\nu > \log d$) vérifient en outre une borne sur leurs exposants de Lyapunov :

Théorème 1.1.13 (de Thélin [dT08]). *Soit ν une mesure ergodique telle que $h_\nu > \log d$. Si $\log|\det D_x f| \in L^1(\nu)$, alors les exposants de Lyapunov de ν vérifient*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \frac{1}{2}(h_\nu - \log d) > 0.$$

Ce résultat a été étendu par Dupont [Dup10] en supprimant l'hypothèse $\log|\det D_x f| \in L^1(\nu)$. On trouve aussi dans cet article des exemples de mesures de grande entropie, obtenues par codage de l'arbre des préimages de points (mesures de Gibbs). Les dimensions $\underline{d_\nu}(x)$ et $\overline{d_\nu}(x)$ se définissent comme à la Section 1.1.1. Lorsque ν est ergodique, on peut vérifier que $\underline{d_\nu}(x)$ et $\overline{d_\nu}(x)$ sont des fonctions constantes ν-presque partout. On note $\underline{d_\nu}$ et $\overline{d_\nu}$ les valeurs de ces constantes. On sait par Young [You82] que si $a \leq \underline{d_\nu} \leq \overline{d_\nu} \leq b$, alors

$$a \leq \dim_H(\nu) \leq b,$$

où $\dim_H(\nu) = \inf\{\dim_H(A), \nu(A) = 1\}$.

Il est connu que si les exposants de ν sont strictement positifs, alors

$$\frac{h_\nu}{\lambda_1} \leq \underline{d_\nu} \leq \overline{d_\nu} \leq \frac{h_\nu}{\lambda_2}.$$

où h_ν est l'entropie de ν. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, on sait donc que $d_\nu = \frac{h_\nu}{\lambda}$.

L'article [Dup11] donne la minoration suivante pour la dimension locale des mesure dilatantes.

Théorème 1.1.14 (Dupont [Dup11]). *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique. On suppose que ses exposants $\lambda_1 \geq \lambda_2$ sont strictement positifs. Soit h_ν l'entropie de ν. Alors pour ν-presque tout x,*

$$\underline{d_\nu}(x) \geq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2}.$$

Ce Théorème, appliqué à μ, donne la minoration de la Conjecture de Binder et DeMarco :

Conjecture 1.1.15 (Binder-DeMarco [BiDe03]). *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit μ la mesure d'équilibre de f, soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov. Alors*

$$\dim_H(\mu) = \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2}.$$

On dispose de la majoration suivante pour la dimension de μ.

Théorème 1.1.16 (Binder-DeMarco [BiDe03], Dinh-Dupont [DD04]). *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit μ la mesure d'équilibre de f, soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov. Alors*

$$\dim_H(\mu) \leq 4 - \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\log d}{\lambda_1}.$$

En particulier, on obtient comme corollaire des Théorèmes 1.1.14 et 1.1.16 que si f est un endomorphisme semi-extrémal,

$$\dim_H(\mu) = 2 + \frac{\log d}{\lambda_1}. \tag{1.1.2}$$

Dimension de la mesure trace Le travail récent [dTV15] de de Thélin et Vigny étudie la dimension de la mesure trace $\sigma_T = T \wedge \omega$ (où ω est la $(1,1)$-forme de Fubini-Study normalisée), relativement aux mesures ergodiques ν d'exposants de Lyapunov strictement positifs. Pour tout $x \in \mathbb{P}^2$, soit :

$$\overline{d_T}(x) := \limsup_{r \to 0} \frac{\log \sigma_T(B_x(r))}{\log r}.$$

Puisque T est un $(1,1)$-courant positif fermé, on sait que la fonction $r \mapsto \frac{\sigma_T(B_x(r))}{r^2}$ est croissante (se référer au livre de Demailly [Dem12], Chapitre III, §5). En particulier,

$$\sigma_T(B_x(r)) \leq c \cdot r^2,$$

où $c = \sigma_T(B_x(1))$. Il s'ensuit l'information moins précise (car on passe au logarithme)

$$2 \leq \underline{d_T}(x) \leq \overline{d_T}(x).$$

L'invariance $f^*T = dT$ implique que $\overline{d_T}(x)$ est f-invariante et donc que $\overline{d_T}(x) = \overline{d_T}(\nu)$ ν-presque partout pour toute mesure ergodique ν (voir la Proposition 4.2.3).

Il est important de noter que cette quantité n'est pas forcément finie. Par exemple, si $x \in \mathrm{Supp}(\nu) \backslash \mathrm{Supp}(T)$, alors sur un voisinage ouvert de x, σ_T est la mesure nulle et donc $\overline{d_T}(x) = +\infty$. Par le Théorème 1.1.12, l'ensemble $\mathrm{Supp}(\nu) \setminus \mathrm{Supp}(T)$ est non-vide seulement si $h_\nu = 0$.

De Thélin et Vigny ont obtenu une minoration de $\overline{d_T}(\nu)$:

Théorème 1.1.17 (de Thélin-Vigny [dTV15])**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ et soit ν une mesure ergodique. Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les exposants de ν. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, alors*

$$\overline{d_T}(\nu) \geq \underline{d_\nu} + 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\log d}{\lambda_1}.$$

Ils montrent tout d'abord le résultat plus faible

$$\overline{d_T}(\nu) \geq \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_1} + 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

et obtiennent ensuite le Théorème 1.1.17 par un découpage fin des boules dynamiques en boules euclidiennes. Signalons que dans [dTV15] le Théorème 1.1.17 est énoncé plus généralement pour des applications méromorphes de variétés Kähleriennes X et pour des mesures ν dont le support est inclus dans celui d'un $(1,1)$-courant positif fermé de X.

1.2 Dimensions directionnelles

Dans notre travail, nous introduisons des dimensions directionnelles pour le courant T.

Définition 1.2.1. *Soit $x \in \mathbb{P}^2$ et soit Z une submersion holomorphe définie au voisinage de x. On définit les dimensions supérieures et inférieures de T en x selon la direction Z par*

$$\overline{d_{T,Z}}(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log \left[T \wedge (\frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})(B_x(r)) \right]}{\log r},$$

$$\underline{d_{T,Z}}(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log\left[T\wedge(\frac{i}{2}dZ\wedge d\overline{Z})(B_x(r))\right]}{\log r}.$$

Remarquons que $T\wedge(\frac{i}{2}dZ\wedge d\overline{Z})$ est une mesure positive sur un voisinage de x, car T est un $(1,1)$-courant positif sur $\mathbb{P}^2$. De plus, cette mesure est la moyenne (pour la mesure de Lebesgue) des tranches du courant T transversalement à la direction Z. Plus précisément, si (Z,W) désigne les coordonnées d'un bidisque holomorphe $\mathbb{D}^2$ au voisinage de x, on a (Voir Proposition 3.4.6) :

$$T\wedge(\frac{i}{2}dZ\wedge d\overline{Z}) = \int_{\mathbb{D}} \sigma_z^* T \,\mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(z), \tag{1.2.1}$$

où $\sigma_z : \mathbb{D}\to\mathbb{D}^2$ est le disque holomorphe vertical $u\mapsto(z,u)$.

Les dimensions directionnelles de T relativement à un système de coordonnées (Z,W) sont reliées à la dimension de la mesure trace σ_T de la manière suivante :

Proposition 1.2.2. *Soit $x\in\mathbb{P}^2$. Alors pour tout système de coordonnées holomorphes (Z,W) au voisinage de x, on a :*

$$\underline{d_T}(x) = \min\left\{\underline{d_{T,Z}}(x), \underline{d_{T,W}}(x)\right\}, \quad \overline{d_T}(x) = \min\left\{\overline{d_{T,Z}}(x), \overline{d_{T,W}}(x)\right\}.$$

Démonstration. Notons $\sigma_{T,Z} = T\wedge(\frac{i}{2}dZ\wedge d\overline{Z})$ et $\sigma_{T,W} = T\wedge(\frac{i}{2}dW\wedge d\overline{W})$. Alors il existe $c>0$ tel que $\frac{1}{c}(\sigma_{T,Z}+\sigma_{T,W}) \le \sigma_T \le c(\sigma_{T,Z}+\sigma_{T,W})$ (Voir [Dem12] Chap. III, §3). On en déduit

$$\frac{1}{c}\max\left[\sigma_{T,Z}(B_x(r)), \sigma_{T,W}(B_x(r))\right] \le \sigma_T(B_x(r)) \le 2c\max\left[\sigma_{T,Z}(B_x(r)), \sigma_{T,W}(B_x(r))\right]$$

On conclut grâce au Lemme 2.4.3 en remarquant que la dimension locale du maximum de 2 mesures est le minimum des 2 dimensions (on divise par $\log r$ qui est négatif). □

1.2.1 Minorations des dimensions directionnelles du courant de Green et application aux endomorphismes semi-extrémaux

Nous obtenons la précision suivante du Théorème 2 de de Thélin-Vigny [dTV15] (nous montrerons tout d'abord une version plus faible, qui est l'analogue du Théorème 1 de [dTV15]) :

Théorème 1.2.3. *Soit $f:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d\ge 2$, soit ν une mesure ergodique dont les exposants $\lambda_1>\lambda_2$ sont strictement positifs et non-résonnants. Alors il existe $\epsilon\mapsto O(\epsilon)$ une fonction qui tend vers 0 avec ϵ, telle que, pour tout $\epsilon>0$, pour ν-presque tout $x\in\mathbb{P}^2$, il existe un système de coordonnées holomorphes $(Z,W)=(Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ vérifiant :*

$$\overline{d_{T,Z}}(x) \ge \underline{d_\nu} - \frac{\log d}{\lambda_1} + 2 + O(\epsilon) \tag{1.2.2}$$

$$\overline{d_{T,W}}(x) \ge \underline{d_\nu} - \frac{\log d}{\lambda_1} + 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + O(\epsilon) \tag{1.2.3}$$

De plus, $x\mapsto\overline{d_{T,Z}}(x)$ et $x\mapsto\overline{d_{T,W}}(x)$ sont constantes ν-presque partout.

On retrouve pour la coordonnée W la minoration de de Thélin-Vigny. La minoration que nous obtenons pour la coordonnée Z est meilleure avec $\lambda_1>\lambda_2$. Ces minorations indiquent un coefficient de régularité pour les mesures directionnelles. Le Théorème 1.1.14 entraîne le corollaire suivant.

Théorème 1.2.4. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$, soit ν une mesure ergodique dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs et non-résonnants. Alors il existe $\epsilon \mapsto O(\epsilon)$ une fonction qui tend vers 0 avec ϵ, telle que, pour tout $\epsilon > 0$, pour ν-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$, il existe un système de coordonnées holomorphes $(Z, W) = (Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ vérifiant :*

$$\overline{d_{T,Z}}(x) \geq 2 + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2} + O(\epsilon)$$

$$\overline{d_{T,W}}(x) \geq 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2} + O(\epsilon).$$

De plus, $x \mapsto \overline{d_{T,Z}}(x)$ et $x \mapsto \overline{d_{T,W}}(x)$ sont constantes ν-presque partout.

Remarque 1.2.5. *Le système de coordonnées $(Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ provient de l'application d'un Théorème de formes normales aux branches inverses ν-génériques de f (Voir Théorème 4.1.2 et les articles de Jonsson-Varolin [JV02] et Berteloot-Dupont-Molino [BDM08]). Ce système de coordonnées dépend en fait de $\hat{x}$ dans l'extension naturelle du système $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Dans l'énoncé, $(Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ est alors n'importe quel système de coordonnées du type $(Z_{\hat{x}}^\epsilon, W_{\hat{x}}^\epsilon)$ où $\pi_0(\hat{x}) = x$.*

Donnons une idée de la preuve du Théorème 1.2.3. On montre en utilisant l'invariance de T et l'invariance des coordonnées $(Z_{\hat{x}}^\epsilon, W_{\hat{x}}^\epsilon)$ que les fonctions

$$\hat{x} \mapsto \overline{d_{T,Z_{\hat{x}}^\epsilon}} \text{ et } \hat{x} \mapsto \overline{d_{T,W_{\hat{x}}^\epsilon}}$$

sont constantes $\hat{\nu}$-presque partout.

Dans les coordonnées $(Z_{\hat{x}}^\epsilon, W_{\hat{x}}^\epsilon)$, lorsque les exposants ne résonnent pas, f^n agit comme une application linéaire qui multiplie la première coordonnée par $e^{n\lambda_1 \pm n\epsilon}$ et la deuxième par $e^{n\lambda_2 \pm n\epsilon}$. Elles sont donc plus précises que les coordonnées d'Oseledec-Pesin, qui permettent par exemple de construire les variétés stables et instables locales des systèmes non-uniformément hyperboliques. On pourra les appeler des **coordonnées d'Oseledec-Poincaré**, en référence au Théorème de Poincaré de linéarisation des germes d'applications holomorphes contractantes et non-résonnantes de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Pour obtenir les deux inégalités du Théorème 1.2.3, l'idée générale consiste à reprendre les arguments de de Thélin et Vigny [dTV15], en substituant à leur minoration

$$(f^n)^*\omega \geq e^{2n\lambda_2} e^{-n\epsilon}\omega$$

obtenue par découpage, les minorations

$$(f^n)^*\omega \geq e^{2n\lambda_1} e^{-n\epsilon} dZ \wedge d\overline{Z} \text{ et } (f^n)^*\omega \geq e^{2n\lambda_2} e^{-n\epsilon} dW \wedge d\overline{W}$$

obtenues par le Théorème des formes normales.

Mesure de grande entropie et courants positifs fermés A l'instar de [dTV15], nous obtenons à la section 5.4 un énoncé analogue au Théorème 1.2.3 pour les $(1,1)$-courants positifs fermés S sur $\mathbb{P}^2$, à ceci près que les dimensions directionnelles ne sont plus constantes ν-presque partout.

On sait que les mesures de grande entropie ($h_\nu > \log d$) ne peuvent pas être contenues dans des sous-ensembles analytiques, cela résulte de l'argument de Gromov (voir par exemple Briend-Duval [BrDu01]). Dans [dTV15], de Thélin-Vigny posent la question de l'existence de mesures de grande entropie contenues dans un $(1,1)$-courant positif fermé de dimension de Hausdorff 2 (où le sens donné à cette dimension est à préciser). Le Théorème 1.2.4 répond à cette question de manière locale et directionnelle pour le courant T. Nous obtenons l'analogue suivant pour tout courant positif fermé S de $\mathbb{P}^2$. (Voir Théorème 5.4.1 et Remarque 5.4.2)

Théorème 1.2.6. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, soit S un $(1,1)$-courant positif fermé S sur $\mathbb{P}^2$. On suppose que S supporte une mesure ergodique de grande entropie ν dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont non-résonnants. Alors, en un point de $\operatorname{Supp}\nu \subset \operatorname{Supp} S$, le courant S possède une dimension locale directionnelle > 2.*

Plus précisément, pour tout ϵ' proche de 0, il existe $x \in \operatorname{Supp}\nu$ et Z une submersion holomorphe sur un voisinage de x tels que :

$$\overline{d_{S,Z}}(x) \geq 2 + (1-\epsilon')\frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2}.$$

Endomorphismes semi-extrémaux Le Théorème 1.2.3 permet d'obtenir les valeurs des dimensions directionnelles pour les endomorphismes semi-extrémaux vérifiant $\mu << \sigma_T$. Notons tout d'abord que cette relation implique

$$\overline{d_T}(\mu) \leq \overline{d_\mu} \tag{1.2.4}$$

comme nous le vérifions dans la Proposition 2.4.4. Analysons les deux membres de cette inégalité. D'une part, la Proposition 1.2.2 donne $\overline{d_T}(\mu) = \min\left\{\overline{d_{T,Z}}(x), \overline{d_{T,W}}(x)\right\}$ pour μ-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$ et pour tout système de coordonnées holomorphes (Z,W) au voisinage de x. D'autre part, si on suppose $\underline{d_\mu} = \overline{d_\mu}$, alors $\underline{d_\mu} = \overline{d_\mu} = \dim_H(\mu)$, qui vaut $2 + \frac{\log d}{\lambda_1}$ d'après (1.1.2). On déduit donc de (1.2.4) que si $\mu << \sigma_T$, alors

$$\min\left\{\overline{d_{T,Z}}(x), \overline{d_{T,W}}(x)\right\} \leq 2 + \frac{\log d}{\lambda_1} \tag{1.2.5}$$

pour μ-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$ et pour tout système de coordonnées holomorphes (Z,W) au voisinage de x. Le Théorème suivant montre qu'il y a égalité dans (1.2.5) à une fonction $O(\epsilon)$ près.

Théorème 1.2.7. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$, supposons que $\mu << \sigma_T$ et que les exposants $\lambda_1 > \lambda_2 = \frac{1}{2}\log d$ ne résonnent pas. Supposons que $\overline{d_\mu} = \underline{d_\mu}$. Alors il existe $\epsilon \mapsto O(\epsilon)$ une fonction qui tend vers 0 avec ϵ, telle que, pour tout $\epsilon > 0$, pour μ-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$, il existe un système de coordonnées holomorphe $(Z,W) = (Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ vérifiant :*

$$4 + O(\epsilon) \leq \overline{d_{T,Z}}(x), \quad 2 + \frac{\log d}{\lambda_1} + O(\epsilon) \leq \overline{d_{T,W}}(x) \leq 2 + \frac{\log d}{\lambda_1}.$$

De plus, $x \mapsto \overline{d_{T,Z}}(x)$ et $x \mapsto \overline{d_{T,W}}(x)$ sont constantes μ-presque partout. En particulier, la dimension de T dans la coordonnée W est égale à la dimension de μ (à la fonction $O(\epsilon)$ près), voir (1.1.2).

Précisons comment le Théorème 1.2.3 implique le Théorème 1.2.7.

Soit $(Z,W) = (Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ les systèmes de coordonnées holomorphes donnés par le Théorème 1.2.3. Nous allons d'abord minorer la dimension directionnelle $\overline{d_{T,Z}}$. La connaissance de cette minoration nous permettra d'établir la formule à $O(\epsilon)$ près pour $\overline{d_{T,W}}$.

Si $\mu << \sigma_T$, alors λ_2 est minimal par le Théorème 1.1.6 (Dujardin). Alors par le Théorème 1.1.14 (Dupont), on sait que $2 + \frac{\log d}{\lambda_1} \leq \underline{d_\mu}$. On en déduit $\overline{d_{T,Z}} \geq 4 + O(\epsilon)$ par (1.2.2).

On vient de voir que $\overline{d_{T,Z}} \geq 4 + O(\epsilon)$, donc on a forcément $\overline{d_{T,W}} \leq 2 + \frac{\log d}{\lambda_1}$ par (1.2.5) et $\lambda_1 > \lambda_2$. Pour terminer, (1.2.3) donne $\overline{d_{T,W}} \geq 2 + \frac{\log d}{\lambda_1} + O(\epsilon)$. □

1.2.2 Majorations des dimensions directionnelles du courant de Green et dimension de mesures

Nous obtenons le résultat suivant en utilisant que μ est la masse de Monge-Ampère $T \wedge T$.

Théorème 1.2.8. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$, soit ν une mesure ergodique dont le support est contenu dans celui de μ et dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs (par exemple pour ν mesure de grande entropie) et non-résonnants. Alors il existe $\epsilon \mapsto O(\epsilon)$ une fonction qui tend vers 0 avec ϵ, telle que, pour tout $\epsilon > 0$, pour ν-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$, il existe un système de coordonnées holomorphe $(Z, W) = (Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ vérifiant :*

$$\underline{d_{T,Z}}(x) \leq \frac{\log d}{\lambda_1} + 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + O(\epsilon), \quad \underline{d_{T,W}}(x) \leq \frac{\log d}{\lambda_2} + 2 + O(\epsilon).$$

De plus, $x \mapsto \underline{d_{T,Z}}(x)$ et $x \mapsto \underline{d_{T,W}}(x)$ sont constantes ν-presque partout.

On obtient le Théorème 1.2.8 en utilisant la théorie du pluripotentiel, le Théorème des formes normales, l'invariance $f^*T = dT$ et des propriétés standard de récurrence pour ν. En particulier, nous faisons appel à un résultat de la thèse de Briend pour établir la Proposition intermédiaire suivante :

Proposition 1.2.9. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de degré $d \geq 2$. Soit $x \in \operatorname{Supp} \mu$ et soit Z une submersion définie dans un voisinage V de x. Alors $T \wedge (\frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})$ n'est pas la mesure nulle sur V.*

En effet, si $T \wedge (\frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})$ était nulle, alors on vérifie d'après (1.2.1) que les potentiels locaux de T seraient harmoniques sur tous les disques verticaux, ce qui rendrait la masse de Monge-Ampère $T \wedge T$ nulle sur un voisinage de x et contredirait le fait que $x \in \operatorname{Supp} \mu = \operatorname{Supp} T \wedge T$.

Les arguments développés dans la démonstration permettent d'obtenir une nouvelle majoration de la dimension inférieure des mesures dilatantes contenues dans μ.

Théorème 1.2.10. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de degré $d \geq 2$, soit ν une mesure ergodique dont le support est contenu dans celui de μ et dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs (par exemple pour ν mesure de grande entropie) et non-résonnants. Alors*

$$\underline{d_\nu} \leq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2} + 2 \min\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right).$$

La majoration $\underline{d_\nu} \leq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2} + 2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ est toujours vraie, même si les exposants sont résonnants. Notons que cette majoration ne fait pas intervenir l'entropie de ν. Cela s'explique par la nature des arguments évoqués ci-dessus : $\operatorname{Supp} \nu \subset \operatorname{Supp} \mu$ et $f^*T = dT$. Plus précisément, on voit dans les calculs que l'entropie de ν, vue comme le nombre de boules dynamiques, est compensée par la ν-mesure de ces boules dynamiques. Le degré $d \geq 2$ apparait grâce à l'invariance de T. Notons que cette majoration, combinée à la minoration du Théorème 1.1.14, nous rapproche de la Conjecture 1.1.15, au moins en ce qui concerne la dimension inférieure de μ.

Question 1.2.11.
Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de degré $d \geq 2$ et μ la mesure d'équilibre de f. A t-on $\underline{d_\mu} = \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2}$?

1.2.3 Combinaison des estimations : dimension limite

Les systèmes de coordonnées $(Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ des Théorèmes 1.2.3 et 1.2.8 sont ceux donnés par le Théorème des formes normales. En particulier, ce sont les mêmes et on obtient l'énoncé suivant.

Corollaire 1.2.12. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de degré $d \geq 2$, soit ν une mesure ergodique dont le support est contenu dans celui de μ et dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs (par exemple pour ν mesure de grande entropie) et non-résonnants. Soit $\epsilon' > 0$. Alors pour ν-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$, il existe des suites $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}, (\tilde{r_j})_{j\in\mathbb{N}}, (R_j)_{j\in\mathbb{N}}, (\tilde{R_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 et un système de coordonnées holomorphes $(Z, W) = (Z_x^\epsilon, W_x^\epsilon)$ tels que :*

$$r_j^{\frac{\log d}{\lambda_2}+2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\epsilon'} \leq (T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})(B_x(r_j)), \quad (T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})(B_x(\tilde{r_j})) \leq \tilde{r_j}^{\frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2}+2-\epsilon'},$$

$$R_j^{\frac{\log d}{\lambda_2}+2\ +\epsilon'} \leq (T \wedge \frac{i}{2} dW \wedge d\overline{W})(B_x(R_j)), \quad (T \wedge \frac{i}{2} dW \wedge d\overline{W})(B_x(\tilde{R_j})) \leq \tilde{R_j}^{\frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2}+2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\epsilon'}.$$

Observation : Lorsque ν est la mesure d'équilibre μ, la valeur $\frac{\log d}{\lambda_2} + 2$ apparait comme une valeur frontière qui sépare les coordonnées Z et W. Rappelons que les puissances dans les minorations des mesures indiquent un coefficient de singularité, alors que dans les majorations elles indiquent un coefficient de régularité.

1.2.4 Dérivée de Radon-Nikodym des applications semi-extrémales

Lorsque les exposants $\lambda_1 \geq \lambda_2$ sont minimaux égaux à $\frac{1}{2}\log d$, alors $h_\mu = \log d^2$ est égale à la somme des exposants de Lyapunov. Autrement dit, la formule de Pesin est vérifiée, et cette propriété entraîne l'absolue continuité de μ par rapport à la mesure de Lebesgue (Voir Dupont [Dup06] [Dup10]). On consultera les articles de Ledrappier [Led81] [Led84a] pour des résultats analogues pour les applications de $[0, 1]$ et de $\mathbb{P}^1$, et de Ledrappier [Led84b] et Ledrappier-Young [LY85a] pour les difféomorphismes de variétés compactes. Ici, la relation $f^*T = dT$ associée à l'hypothèse d'un exposant minimal peut être vue comme un analogue faible de la formule de Pesin et on peut espérer récupérer de la régularité sur T.

Rappelons le fait suivant (voir Mattila [Mat95]). Soit ρ une mesure positive sur $\mathbb{D}$. Si pour Lebesgue presque-tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\rho(\mathbb{D}_z(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}_z(r))} < +\infty,$$

alors $\rho << \mathrm{Leb}$ sur $\mathbb{D}$. Les deux résultats ci-dessous concernent le cas semi-extrémal $\lambda_1 > \lambda_2 = \frac{1}{2}\log d$. Ils donnent l'existence de disques holomorphes $\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^2$ pour lesquels la tranche σ^*T possède une dérivée de Radon-Nikodym inférieure bornée en $\sigma(0)$. Cela ne donne pas $\sigma^*T << \mathrm{Leb}$ sur $\mathbb{D}$ car on ne sait pas si la dérivée de σ^*T est bornée ailleurs qu'en $\sigma(0)$. Nos théorèmes indiquent cependant une forme de régularité nouvelle pour les applications semi-extrémales considérées.

Théorème 1.2.13. *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$ de degré $d \geq 2$. Soit T le courant de Green et μ la mesure d'équilibre de f. On suppose que $\mu << T \wedge \omega$ et $\lambda_2 < \lambda_1 < 2\lambda_2$. Alors il existe un borélien A vérifiant $\mu(A) > 0$ et :*

Pour tout $x \in A$, il existe un disque holomorphe $\xi_x : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^2$ tangent en 0 à la direction d'Oseledec stable $v_s(x)$ tel que

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\xi_x^* T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))} < +\infty.$$

La preuve fait intervenir un résultat de Dujardin (voir [Duj12]) sur les directions de Fatou et un résultat de Berteloot-Dupont [BeDu05] (d'où vient la condition $\frac{1}{2}\log d < \lambda_1 < 2\lambda_2$). La combinaison de ces deux résultats fournit une estimation du type

$$\|D_x f^n(v_s(x))\| \sim d^{n/2}$$

à des constantes près indépendantes de n (il n'y a pas d'erreur $e^{\pm n\epsilon}$). Le Théorème des formes normales permet alors de construire le disque holomorphe ξ_x où la dérivée de Radon-Nikodym est bornée au centre.

Nous avons obtenu un résultat similaire en relaxant la condition $\mu << T \wedge \omega$ en λ_2 minimal, mais en demandant la régularité Hölder de la direction stable.

Théorème 1.2.14. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^2$ de degré $d \geq 2$. Soit T le courant de Green et μ la mesure d'équilibre de f. On suppose que μ a un exposant de Lyapunov λ_2 minimal égal à $\frac{1}{2}\log d$ et un autre $\frac{1}{2}\log d < \lambda_1 < 2\lambda_2$. On suppose aussi que $\operatorname{Supp}\mu \cap \mathcal{C}_f = \emptyset$ et que la direction d'Oseledec stable $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ est localement Hölder sur un borélien A de μ-mesure totale. Alors pour μ-presque tout $x \in A$, il existe un disque holomorphe $\xi_x : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^2$ tangent en 0 à la direction $v_s(x)$ tel que*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\xi_x^\star T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))} < +\infty.$$

Nous suivons le même schéma de preuve que pour le Théorème 1.2.13. L'argument de Dujardin est ici remplacé par un Théorème Central Limite, d'où l'hypothèse de régularité Hölder demandée pour la direction stable $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$. Cela permet, toujours à l'aide de [BeDu05], d'obtenir $\|D_xf^n(v_s(x))\| \sim d^{n/2}$.

Chapitre 2

Théorie ergodique et dimension

Le hasard, ce sont des lois
que nous ne connaissons pas

Émile Borel

Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe. Nous donnons les premières propriétés de f ; voir Sibony [Sib99] et Dinh-Sibony [DS10]. Il existe $F = (F_0, F_1, F_2) : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ une application polynomiale homogène de degré $d \geq 1$ telle que $f^{-1}\{0\} = \{0\}$ et $f = [F_0 : F_1 : F_2]$. Alors f est un revêtement ramifié de degré d^2 de $\mathbb{P}^2$. On définit son ensemble critique

$$\mathcal{C}_f = \left\{x \in \mathbb{P}^2, \quad D_x f \text{ n'est pas inversible}\right\}.$$

C'est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^2$ de degré $3(d-1)$ avec multiplicité. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{C}_f)$$

est alors f-invariant. Soit $P_n = \left\{p \in \mathbb{P}^2, f^n(p) = p\right\}$ l'ensemble des points n-périodiques. D'après le Théorème de Bezout, le cardinal de P_n, compté avec multiplicité, est égal à $1 + d^n + d^{2n}$.

L'entropie topologique de f est égale à $\log d^2$, voir Gromov [Gro03] et Misiurewicz-Przytycki [MP77]. Rappelons sa définition. Soit d la distance sur $\mathbb{P}^2$ induite par la métrique de Fubini-Study. Une famille F de points de $\mathbb{P}^2$ est (n, ϵ)-séparée si pour tout $(x, y) \in F \times F$, $d_n(x, y) \geq \epsilon$ où $d_n(x, y) = \max_{0\leq i\leq n} d(f^i(x), f^i(y))$. L'entropie topologique de f est alors

$$h_{top}(f) := \sup_{\epsilon>0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \max \left\{\text{Card}(F), \quad F \subset \mathbb{P}^2 \ (n, \epsilon) - \text{séparé}\right\}$$

D'après le principe variationnel, $h_{top}(f) = \sup\{h_\nu, \ \nu \ \textit{ergodique}\}$. Nous rappelons plus bas qu'il existe une unique mesure μ ergodique telle que $h_\mu = \log d^2$.

Nous allons maintenant faire des rappels de théorie ergodique pour ces applications. La plupart des résultats ci-dessous sont valables pour des applications lisses de variétés compactes. On consultera le Chapitre 1.5 du livre de Walters [Wal82] pour plus de détails sur la théorie ergodique, l'article de Ledrappier [Led84c] pour des résultats sur les exposants de Lyapunov, ainsi que les articles de Young [You82], Ledrappier-Young [LY85b], Ledrappier [Led84c], [Led87] et le livre de Pesin [Pes97] pour plus d'informations sur la Théorie de la dimension.

2.1 Ergodicité

2.1.1 Mesures invariantes et ergodiques

Si ν est une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}^2$, on dit que ν est f-invariante si pour tout B borélien, on a $\nu(f^{-1}(B)) = \nu(B)$. Une mesure ν est f-invariante si et seulement si $\int \varphi \circ f \, \mathrm{d}\nu = \int \varphi \, \mathrm{d}\nu$ pour tout $\varphi \in L^1(\nu)$. D'après le Théorème de Krylov-Bogolyubov, il existe au moins une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}^2$ qui est f-invariante.

Définition 2.1.1. *Une mesure f-invariante ν est dite ergodique si :*

$$\forall B \textit{ borélien}, f^{-1}(B) = B \Rightarrow \nu(B) = 0 \textit{ ou } \nu(B) = 1$$

Dans notre situation, la mesure uniforme sur l'orbite d'un point de P_n fournit des exemples de mesures ergodiques. Nous aurons besoin de la Proposition suivante caractérisant les mesures ergodiques.

Proposition 2.1.2.

$$\begin{aligned} \nu \textit{ est ergodique } &\Leftrightarrow [\varphi \circ f = \varphi \ \nu - p.p. \Rightarrow \varphi \textit{ constante } \nu - p.p.] \textit{ pour tout } \varphi \textit{ mesurable.} \\ &\Leftrightarrow [\varphi \circ f \geq \varphi \ \nu - p.p. \Rightarrow \varphi \textit{ constante } \nu - p.p.] \textit{ pour tout } \varphi \textit{ mesurable.} \end{aligned}$$

2.1.2 Théorèmes ergodiques

Théorème 2.1.3 (Théorème de récurrence de Poincaré)**.** *Si ν est une mesure f-invariante, alors pour tout borélien B, presque tous les points de B retournent dans B en temps fini. C'est à dire*

$$\nu(\{x \in B \mid f^n(x) \notin B, \ \forall n \in \mathbb{N}\}) = 0.$$

Théorème 2.1.4 (Théorème ergodique de Birkhoff)**.** *Soit ν une mesure ergodique. Alors pour toute fonction $\varphi \in L^1(\nu)$, on a pour ν-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i x) = \int \varphi \, d\nu.$$

Ce Théorème se généralise de la manière suivante :

Théorème 2.1.5 (Théorème ergodique de Kingman)**.** *Soit ν une mesure ergodique.*
Soit $F_n : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une suite de fonctions f-sous-additive, c'est à dire telle que :

$$\forall n, k \geq 1, \quad F_{n+k}(x) \leq F_n(x) + F_k(f^n x) \textit{ pour } \nu \textit{ presque-tout } x \in \mathbb{P}^2.$$

Si $F_1^+ := max(F_1, 0) \in L^1(\nu)$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F_n(x)}{n} = \lambda \textit{ pour } \nu \textit{ presque-tout } x \in \mathbb{P}^2, \textit{ où } \lambda = \inf_n \left\{ \frac{1}{n} \int F_n \, d\nu \right\}.$$

Remarque 2.1.6. *Soit $F : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soient $F^+ := \max(0, F)$ et $F^- := \max(0, -F)$ de sorte que $F = F^+ - F^-$. Si F^+ est ν-intégrable, alors*
- *ou bien $F \in L^1(\nu)$ et $\int F \, d\nu = \int F^+ - \int F^- \in \mathbb{R}$,*
- *ou bien $F \notin L^1(\nu)$ et $\int F \, d\nu = \int F^+ - \int F^- = -\infty$.*

2.1.3 Exposants de Lyapunov

Nous rappelons la définition des exposants de Lyapunov des mesures ergodiques.

Théorème 2.1.7. *Soient $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe, ν une mesure ergodique. Soient $F_n(x) = \log \|D_x f^n\|$, $G_n(x) = \log |\det D_x f^n|$. Alors*

1. *Pour tout $n \geq 1$, les fonctions F_n^+ et G_n^+ sont bornées, en particulier on peut leur appliquer la Remarque 2.1.6.*
2. *Soit $\lambda_1 := \inf_n \left\{\frac{1}{n}\int F_n \, d\nu\right\}$; Alors $\lambda_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et pour ν-presque tout x, on a*
$$\lambda_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\| .$$
3. *Soit $\Lambda = \inf_n \left\{\frac{1}{n}\int G_n \, d\nu\right\}$. Alors $\Lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\Lambda \leq 2\lambda_1$ et pour ν-presque tout x, on a*
$$\Lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |\det D_x f^n| .$$
4. *Si $\log |\det D_x f| \in L^1(\nu)$, alors $\Lambda = \int \log |\det D_x f| \, d\nu \in \mathbb{R}$.*
Si $\log |\det D_x f| \notin L^1(\nu)$, alors $\Lambda = -\infty$.

Définition 2.1.8. *Si $\lambda_1 = -\infty$, alors on pose $\lambda_2 = -\infty$.*
Si $\lambda_1 \neq -\infty$, alors on pose $\lambda_2 = \Lambda - \lambda_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Dans tous les cas, on a $\lambda_2 \leq \lambda_1$.

Démonstration. 1. Immédiat.

2. C'est l'application du Théorème de Kingman 2.1.5 à la suite F_n.
3. Appliqué à G_n, le Théorème de Kingman prouve que $\Lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. L'inégalité $\Lambda \leq 2\lambda_1$ provient de $|\det A| \leq \|A\|^2$ pour tout $A \in M_2(\mathbb{C})$. En effet, cette inégalité est vraie si $\det A = 0$, et si $\det A \neq 0$, alors $|\det A| = \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \cdot \|A\| \leq \|A\|^2$.
4. Remarquons que $G_1 = \log |\det D_x f|$.
Si $G_1 \notin L^1(\nu)$, alors $\int G_1 \, \mathrm{d}\nu = -\infty$ par la Remarque 2.1.6. Donc
$$\Lambda = \inf_n \left\{\frac{1}{n}\int G_n \, \mathrm{d}\nu\right\} \leq \int G_1 \, \mathrm{d}\nu = -\infty.$$
Si $G_1 \in L^1(\nu)$, alors $G_1 \circ f^n \in L^1(\nu)$ pour tout $n \geq 0$ car ν est invariante. Puisque $G_n = G_1 + G_1 \circ f + \ldots G_1 \circ f^{n-1}$, on a aussi $G_n \in L^1(\nu)$. De plus,
$$\forall n \geq 1, \quad \int G_n \, \mathrm{d}\nu = \sum_{i=0}^{n-1} \int G_1 \circ f^i \, \mathrm{d}\nu = n \int G_1 \, \mathrm{d}\nu.$$
Donc $\Lambda = \inf_n \left\{\frac{1}{n}\int G_n \, \mathrm{d}\nu\right\} = \int G_1 \, \mathrm{d}\nu$, ce qui termine la preuve

□

Lemme 2.1.9. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe, ν une mesure ergodique. Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les exposants de Lyapunov de ν. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 > -\infty$, alors :*
$$x \mapsto \log |\det D_x f| \in L^1(\nu),$$
ce qui implique

1. $\nu(\mathcal{C}_f) = 0$,

2. $\nu(\cup_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}\mathcal{C}_f) = 0$. *Donc pour ν-presque tout x, pour tout $n \geq 0$, $D_x f^n \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.*

3. $\log^+ \left\|(D_x f)^{-1}\right\| \in L^1(\nu)$.

4.

$$\lambda_2 = \inf_n \left\{ \frac{1}{n} \int \log \left\|(D_x f^n)^{-1}\right\|^{-1} \, d\nu \right\}$$

et pour ν-presque tout x, on a

$$\lambda_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left\|(D_x f^n)^{-1}\right\|^{-1} .$$

Démonstration. Si λ_1 et λ_2 sont différents de $-\infty$, alors $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 > -\infty$ et on utilise la 4ème assertion du Théorème 2.1.7 pour obtenir l'intégrabilité de $x \mapsto \log|\det D_x f|$. Si on avait $\nu(\mathcal{C}_f) \neq 0$, $\log|\det D_x f|$ ne serait pas intégrable, d'où le point 1. Par f-invariance de μ, on a $\nu(f^{-j}(\mathcal{C}_f)) = \nu(\mathcal{C}_f) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, d'où $\nu(\cup_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}\mathcal{C}_f) = 0$ (point 2).

Les point 3 et 4 viennent de $|\det P| = \|P\| \cdot \left\|P^{-1}\right\|^{-1}$. C'est immédiat pour le point 4. Pour le point 3, il suffit d'observer que cette inégalité entraîne $\log^+ \|P\| \leq \log^+ \left\|P^{-1}\right\| + |\log|\det P||$. $\square$

Rappelons que $\mathcal{C}_f$ désigne l'ensemble des points critiques de f et que $\mathcal{C} = \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{C}_f)$ est f-invariant. Donc $X := \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}$ l'est aussi. On pose

$$\hat{X} = \left\{\hat{x} \in X^{\mathbb{Z}}, \ \ \forall i \in \mathbb{Z}, \ \ x_i = f(x_{i-1})\right\}, \qquad \pi_0 : \begin{array}{ccc} \hat{X} & \to & X \\ (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) & \mapsto & x_0 \end{array} .$$

Le théorème d'extension de Kolmogorov nous assure l'existence d'une unique mesure $\hat{\nu}$ sur $\hat{X}$ telle que sa projection sur la coordonnée 0 soit ν et qui soit invariante par le décalage sur $\hat{X}$. On a donc que

$$\hat{\nu}(\pi_0^{-1}(A)) = \nu(A)$$

pour tout borélien A de $\mathbb{P}^2$. En particulier,

$$\nu(\pi_0(\hat{A})) = \hat{\nu}(\pi_0^{-1}\pi_0(\hat{A})) \geq \hat{\nu}(\hat{A})$$

pour tout borélien $\hat{A}$ de $\hat{X}$.

Ainsi, une fois que l'on s'est fixé $\hat{x}$, le passé de x_0 est totalement déterminé. On notera $f_{\hat{x}}^{-n}$ la branche inverse de f^n en x_0 le long de l'histoire $\hat{x}$. A n fixé, puisque l'on évite l'ensemble critique, elle est définie sur un voisinage de x_0, à valeurs dans un voisinage de x_{-n}.

Théorème 2.1.10. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe. Soit ν une mesure ergodique d'exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 > -\infty$. Soit $\hat{X} = \left\{\hat{x} \in X^{\mathbb{Z}}, \ \ \forall i \in \mathbb{Z}, \ \ x_i = f(x_{i-1})\right\}$. Alors*

1. $\hat{\nu}(\hat{X}) = 1$.

2. Pour $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x}$, $\frac{1}{n} \log \left\|D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n}\right\| \to_{n\to+\infty} -\lambda_2$.

3. Pour $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x}$, $\frac{1}{n} \log \left|\det D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n}\right| \to_{n\to+\infty} -(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Démonstration. Le point 1 vient du Lemme 2.1.9(1). Montrons le point 2. Soit $\hat{F}_n : \hat{X} \to \mathbb{R}$ définie par $\hat{F}_n(\hat{x}) = \log \left\|D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n}\right\|$. Alors $\hat{F}_1^+ \in L^1(\hat{\nu})$ d'après le Lemme 2.1.9(3). Posons

$$\tilde{\lambda_2} = \inf_n \left\{ \frac{1}{n} \int \hat{F}_n(\hat{x}) \, \mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{x}) \right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} .$$

Alors, d'après le Théorème de Kingman (que l'on peut aussi appliquer au décalage à droite sur $(\hat{X}, \hat{\nu})$), on a pour $\hat{\nu}$-presque-tout $\hat{x} \in \hat{X}$,

$$\forall \hat{x} \ \hat{\nu} - p.p., \quad \frac{1}{n} \log \left\| D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n} \right\| \to_{n \to +\infty} \tilde{\lambda_2}.$$

Vérifions que $\tilde{\lambda_2} = -\lambda_2$. Pour $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda_2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left\| D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n} \right\| &= \inf_n \left\{ \frac{1}{n} \int \log \left\| D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n} \right\| \hat{\nu}(d\hat{x}) \right\} \\
&= \inf_n \left\{ \frac{-1}{n} \int \log \left\| D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n} \right\|^{-1} \hat{\nu}(d\hat{x}) \right\} \\
&= \inf_n \left\{ \frac{-1}{n} \int \log \left\| (D_{x_{-n+1}} f)^{-1} \circ \cdots \circ (D_{x_0} f)^{-1} \right\|^{-1} \hat{\nu}(d\hat{x}) \right\} \\
&= \inf_n \left\{ \frac{-1}{n} \int \log \left\| (D_{x_0} f)^{-1} \circ \cdots \circ (D_{x_{n-1}} f)^{-1} \right\|^{-1} \hat{\nu}(d\hat{x}) \right\} \\
&\quad \text{(par invariance de } \hat{\nu} \text{ par le décalage sur } \hat{X}) \\
&= \inf_n \left\{ \frac{-1}{n} \int \log \left\| D_{x_n} f_{\hat{f}^n(\hat{x})}^{-n} \right\|^{-1} \hat{\nu}(d\hat{x}) \right\} \\
&= \inf_n \left\{ \frac{-1}{n} \int \log \left\| (D_x f^n)^{-1} \right\|^{-1} \nu(dx) \right\} \\
&= -\lambda_2 \text{ d'après le lemme 2.1.9(4).}
\end{aligned}$$

Le point 3 se montre de manière similaire. □

2.2 Théorème d'Oseledec

Le Théorème d'Oseledec donne l'existence de directions dans les espaces tangents sur lesquels la différentielle de f agit asymptotiquement en multipliant par les exposants de Lyapunov. Nous aurons besoin de la direction stable $v_s(x)\mathbb{C} \subset T_x\mathbb{P}^2$ dans la Section 7. Nous mentionnons également l'existence de la direction instable $v_u(\hat{x})\mathbb{C}$. Ces deux directions apparaissent en filigrane dans le Théorème 4.1.2 des formes normales.

Théorème 2.2.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe, soit ν une mesure ergodique. Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq -\infty$ les exposants de ν.*

– *Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors pour ν-presque-tout $x \in \mathbb{P}^2$, $\forall v \in T_x\mathbb{P}^2$,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| D_x f^n(v) \| = \lambda.$$

– *Sinon $\lambda_1 > \lambda_2$ et pour ν-presque-tout $x \in \mathbb{P}^2$ il existe un vecteur unitaire $v_s(x) \in T_x\mathbb{P}^2$ tel que :*

$$\forall v \in T_x\mathbb{P}^2 \setminus v_s(x)\mathbb{C}, \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| D_x f^n(v) \| = \lambda_1.$$

$$\forall v \in v_s(x)\mathbb{C}^*, \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| D_x f^n(v) \| = \lambda_2.$$

De plus, la direction stable $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ est mesurable et invariante par la différentielle :

$$D_x f(v_s(x) \cdot \mathbb{C}) = v_s(f(x))\mathbb{C}.$$

Si f était un difféomorphisme, il suffirait d'appliquer le théorème précédent à f^{-1} pour définir une direction instable $v_u(x)\mathbb{C}$. Puisque f n'est pas inversible, nous devons passer par l'extension naturelle pour définir une direction instable $v_u(\hat{x})\mathbb{C}$.

Théorème 2.2.2 (Extension naturelle du théorème d'Oseledec)**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe, ν une mesure ergodique. Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les exposants de ν. On suppose que $\lambda_1 \geq \lambda_2 > -\infty$. Soit $X = \mathbb{P}^2 \setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{C}_f)$ et $\hat{X} = \left\{\hat{x} \in X^{\mathbb{Z}},\quad \forall i \in \mathbb{Z},\quad x_i = f(x_{i-1})\right\}$.*

- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors pour $\hat{\nu}$-presque-tout $\hat{x} \in \hat{X}$, $\forall v \in T_{x_0}\mathbb{P}^2$,*

$$\frac{1}{n} \log \left\| D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n}(v) \right\| \to_{n\to+\infty} -\lambda.$$

- *Sinon, $\lambda_1 > \lambda_2$ et pour $\hat{\nu}$-presque-tout $\hat{x} \in \hat{X}$, il existe un vecteur unitaire $v_u(\hat{x}) \in T_{x_0}\mathbb{P}^2$ tel que*

$$\forall v \in T_{x_0}\mathbb{P}^2 \setminus v_u(\hat{x})\mathbb{C}, \quad \frac{1}{n} \log \left\| D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n}(v) \right\| \to_{n\to+\infty} -\lambda_2,$$

$$\forall v \in v_u(\hat{x})\mathbb{C}^*, \quad \frac{1}{n} \log \left\| D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-n}(v) \right\| \to_{n\to+\infty} -\lambda_1.$$

De plus, $\hat{x} \mapsto v_u(\hat{x})\mathbb{C}$ est mesurable et

$$D_{x_0} f_{\hat{x}}^{-1}(v_u(\hat{x}) \cdot \mathbb{C}) = v_u(\hat{f}^{-1}(\hat{x}))\mathbb{C}.$$

2.3 Cocycles et relations intégrales

Définition 2.3.1. *Un cocycle est une application $C : X \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

- *Pour tout $x \in X$, $C(x, 0) = 1$.*
- *Pour tout $k, m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $C(x, k + m) = C(f^m(x), k) \cdot C(x, m)$.*

Proposition 2.3.2. *Soit C un cocycle à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $x \in X$*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \log(C(f^j(x), 1)) = \log C(x, m).$$

Démonstration. Par récurrence sur m.

Dans le cas $m = 1$, les deux quantités sont égales à $\log C(x, 1)$.

Si pour m fixé, on a $\sum_{j=0}^{m-1} \log(C(f^j(x), 1)) = \log C(x, m)$, calculons $\log C(x, m + 1)$:

$$\begin{aligned}
\log C(x, m+1) &= \log\left[C(f^m(x), 1) C(x, m)\right] \text{ (définition d'un cocycle)} \\
&= \log C(f^m(x), 1) + \sum_{j=0}^{m-1} \log(C(f^j(x), 1)) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \log(C(f^j(x), 1)).
\end{aligned}$$

D'où la proposition par récurrence. □

Soit ν une mesure ergodique. On suppose que ses exposants de Lyapunov vérifient $\lambda_1 > \lambda_2 > -\infty$. Soit A un borélien tel que $\nu(A) = 1$ et tel que la direction stable stable $v_s(x)\mathbb{C}$ du Théorème

2.2.1 existe pour tout $x \in A$. D'après le Lemme 2.1.9, on peut supposer que A ne rencontre pas $\cup_{j \geq 0} f^{-j} \mathcal{C}_f$. On choisit $v_s(x)$ de norme 1 et on pose

$$\psi : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log \|D_x f(v_s(x))\| \end{array}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de $v_s(x)$ parmi les vecteurs de norme 1 dans la direction stable.

Lemme 2.3.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$, on a*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \psi(f^i(x)) = \log \|D_x f^n(v_s(x))\|.$$

Démonstration. Montrons que $C : (x, j) \mapsto \left\|D_x f^j(v_s(x))\right\|$ est un cocycle. Soient $j, k \in \mathbb{N}$, alors : $\left\|D_x f^{j+k}(v_s(x))\right\| = \left\|D_{f^k(x)} f^j(D_x f^k(v_s(x)))\right\|$. On multiplie et divise par $\left\|D_x f^k(v_s(x))\right\|$ et on obtient :

$$\left\|D_x f^{j+k}(v_s(x))\right\| = \left\|D_{f^k(x)} f^j \left(\frac{D_x f^k(v_s(x))}{\|D_x f^k(v_s(x))\|}\right)\right\| \times \left\|D_x f^k(v_s(x))\right\|$$

Comme la direction $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ est invariante par $D_x f$, on sait que $\frac{D_x f^k(v_s(x))}{\|D_x f^k(v_s(x))\|}$ est un vecteur de norme 1 dans $v_s(f^k(x))\mathbb{C}$ et on a que

$$\left\|D_x f^{j+k}(v_s(x))\right\| = \left\|D_{f^k(x)} f^j(v_s(f^k(x)))\right\| \times \left\|D_x f^k(v_s(x))\right\|.$$

C est donc bien un cocycle et on conclut par la Proposition 2.3.2. □

Lemme 2.3.4. *On a $\lambda_2 = \int \psi(x) d\nu(x)$.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.3.3, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \psi(f^i(x)) = \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(v_s(x))\|.$$

Par le Théorème de Birkhoff 2.1.4, le membre de gauche tend ν-presque partout vers $\int \psi(x) d\nu(x)$ qui est égal à $\int \log \|D_x f(v_s(x))\| d\nu(x)$. En effet, $\psi \in L^1(\nu)$ d'après le Lemme 2.1.9. D'après le Théorème d'Oseledec 2.2.2, le membre de droite tend vers λ_2 pour ν-presque tout x car $v_s(x)\mathbb{C}$ est la direction stable. □

2.4 Dimension de mesures

Définition 2.4.1. *Soit ν une mesure positive sur $\mathbb{P}^2$ et soit $x \in \mathbb{P}^2$. On définit $\underline{d_\nu}(x)$ la dimension inférieure et $\overline{d_\nu}(x)$ la dimension supérieure de la mesure ν en x comme*

$$\underline{d_\nu}(x) := \liminf_{r \to 0} \frac{\log \nu(B_x(r))}{\log r}$$

$$\overline{d_\nu}(x) := \limsup_{r \to 0} \frac{\log \nu(B_x(r))}{\log r}$$

L'ergodicité permet d'éliminer la dépendance en x de cette quantité :

Proposition 2.4.2. *Si ν est ergodique, alors $x \mapsto \underline{d_\nu}(x)$ et $x \mapsto \overline{d_\nu}(x)$ sont constantes sur un ensemble Λ_ν de ν-mesure pleine.*

Démonstration. Par l'inégalité des accroissements finis, il existe $M > 0$ tel que $f(B_x(r)) \subset B_{f(x)}(Mr)$ pour tout $x \in \mathbb{P}^2$ et tout $r > 0$ petit. Donc $B_x(r) \subset f^{-1}(B_{f(x)}(Mr))$ et donc $\nu(B_x(r)) \leq \nu(f^{-1}(B_{f(x)}(Mr)))$. Par l'invariance de ν, on obtient

$$\nu(B_x(r)) \leq \nu(B_{f(x)}(Mr)).$$

Donc

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu(B_x(r))}{\log r} \geq \liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu(B_{f(x)}(Mr))}{\log r},$$

ce qui donne $\underline{d_\nu}(x) \geq \underline{d_\nu}(f(x))$. Comme ν est ergodique et $x \mapsto \underline{d_\nu}(x)$ est mesurable, $\underline{d_\nu}$ est constante ν-presque partout d'après la Proposition 2.1.2. On montre de la même façon que $\overline{d_\nu}$ est constante ν-presque partout. □

Dans la suite on notera simplement $\underline{d_\nu}$ la valeur de $x \mapsto \underline{d_\nu}(x)$ sur Λ_ν. De même pour $\overline{d_\nu}$.

Lemme 2.4.3. *Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur $\mathbb{P}^2$. Soit $x \in \mathbb{P}^2$. Si il existe r_0 et c_0 tel que pour tout $r \leq r_0$, on a ait*

$$\nu_1(B_x(r)) \leq c_0 \nu_2(B_x(r)).$$

Alors,

$$\underline{d_{\nu_1}}(x) \geq \underline{d_{\nu_2}}(x) \quad ET \quad \overline{d_{\nu_1}}(x) \geq \overline{d_{\nu_2}}(x)$$

Démonstration. Soit $r < \min(r_0, 1)$. Alors

$$\frac{\log \nu_1(B_x(r))}{\log r} \geq \frac{\log c_0 \nu_2(B_x(r))}{\log r} = \frac{\log c_0}{\log r} + \frac{\log \nu_2(B_x(r))}{\log r}. \tag{2.4.1}$$

On obtient le lemme en prenant lim sup ou lim inf de (2.4.1). □

Proposition 2.4.4. *Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur $\mathbb{P}^2$ telles que $\nu_1 << \nu_2$. Alors, pour ν_1-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$, on a :*

$$\underline{d_{\nu_1}}(x) \geq \underline{d_{\nu_2}}(x) \quad ET \quad \overline{d_{\nu_1}}(x) \geq \overline{d_{\nu_2}}(x)$$

Démonstration. Soit $\varphi \in L^1(\nu_2)$ telle que $\nu_1(A) = \int_A \varphi \nu_2$ pour tout borélien A. Par le Théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{P}^2} 1_{\{\varphi \leq M\}} \varphi \, \mathrm{d}\nu_2 \to_{M\to+\infty} \int_{\mathbb{P}^2} \varphi \, \mathrm{d}\nu_2 = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fixe M_n tel que $\int_{\mathbb{P}^2} 1_{\{\varphi \leq M_n\}} \varphi d\nu_2 \geq 1 - \frac{1}{n}$. Par le théorème de densité de Lebesgue, pour ν_1 presque tout x dans $\{\varphi \leq M_n\}$, on a

$$\frac{\nu_1(B_x(r) \cap \{\varphi \leq M_n\})}{\nu_1(B_x(r))} \to_{r\to 0} 1$$

Alors, pour tout r assez petit, on a

$$\frac{1}{2}\nu_1(B_x(r)) \leq \nu_1(B_x(r) \cap \{\varphi \leq M_n\}) = \int_{B_x(r)\cap\{\varphi \leq M_n\}} \varphi \nu_2 \leq M_n \int_{B_x(r)} \nu_2.$$

Et donc :

$$\nu_1(B_x(r)) \leq 2M_n\nu_2(B_x(r)).$$

On obtient par le lemme 2.4.3 que pour ν_1-presque tout $x \in \{\varphi \leq M_n\}$, on a

$$\underline{d_{\nu_1}}(x) \geq \underline{d_{\nu_2}}(x) \text{ et } \overline{d_{\nu_1}}(x) \geq \overline{d_{\nu_2}}(x).$$

Donc on l'a pour tout x appartenant à un borélien $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} \{\varphi \leq M_n\}$ qui vérifie $\nu_1(A) = 1$. $\square$

2.5 Distance de Bowen et taille des boules dynamiques.

Définition 2.5.1. *Si $n \in \mathbb{N}$, on définit d_n la distance dynamique de Bowen comme*

$$\forall x, y \in \mathbb{P}^2, \quad d_n(x, y) = \max_{0\leq k\leq n} d(f^k(x), f^k(y))$$

Pour $x \in \mathbb{P}^2$, $r \geq 0$, la n-boule dynamique centrée en x et de rayon r est

$$B_n(x, r) = \left\{y \in \mathbb{P}^2 \mid d_n(x, y) < r\right\}$$

On utilisera les définitions suivantes d'ensemble séparé.

Définition 2.5.2. *Si $A \subset \mathbb{P}^2$ et $\{x_1, \dots, x_N\}$ est un ensemble de points de A. On dit que les points $(x_i)_{i\leq N}$ sont (n, r)-séparés si pour tout $i \neq j$, $d_n(x_i, x_j) \geq r$.*

On dit que cet ensemble de points est (n, r)-séparé maximal relativement à A si de plus, pour tout $y \in A$ qui n'est pas un des x_i, alors $(x_1, \dots, x_N, y)$ n'est pas (n, r) séparé.

La formule de Brin-Katok (voir [BK83]) donne une estimation asymptotique de la ν-mesure des boules dynamiques. Le taux de décroissance exponentielle est égal à l'entropie de ν.

Proposition 2.5.3 (Formule de Brin-Katok)**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe. Soit ν une mesure ergodique. Alors il existe un ensemble $F \subset \mathbb{P}^2$ de ν-mesure pleine et un réel $h_\nu \geq 0$, appelé entropie de ν, tels que pour tout $x \in F$,*

$$\lim_{r\to 0}\left(\liminf_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} \log \nu(B_n(x, r))\right) = \lim_{r\to 0}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} \log \nu(B_n(x, r))\right) = h_\nu.$$

Si l'on fixe $x \in F$ et $\epsilon > 0$, il existe donc un $r_0(\epsilon, x)$ tel que $r \leq r_0$ implique

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} \log(\nu(B_n(x, 5r))) \geq h_\nu - \epsilon/2 \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} \log(\nu(B_n(x, r/8))) \leq h_\nu + \epsilon/2$$

En notant $A^\epsilon_\eta = \{x \in F, \quad r_0(\epsilon, x) \geq \eta\}$, on a $F = \cup_{\eta>0} A^\epsilon_\eta$. Remarquons que l'union est croissante quand η décroit vers 0. Il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que $\nu(A^\epsilon_{\eta_0}) \geq 1 - \delta/10$. Pour tout $x \in A^\epsilon_{\eta_0}$, il existe un $\tilde{n_0}(\epsilon, x)$ tel que $n > \tilde{n_0}(\epsilon, x)$ implique

$$\nu(B_n(x, 5r)) \leq \nu(B_n(x, 5\eta_0)) \leq e^{-nh_\nu+\epsilon n} \qquad \forall r \leq \eta_0,$$

$$\nu(B_n(x, \eta_0/8)) \geq e^{-nh_\nu-\epsilon n}.$$

Nous utiliserons ces uniformisations dans la section 4.5.

Chapitre 3

Théorie ergodique sur $\mathbb{P}^2$ et applications de Desboves

> You wake up one morning and say
> "World, I know you ! From now on
> there are no more surprises !".
>
> Claudia Cardinale as Jill,
> Once Upon a Time in the West

3.1 Le courant de Green T

Nous expliquons ici la construction du courant de Green. Se reporter à Fornaess-Sibony [FS94] et Hubbard-Papadopol [HP94] pour plus de détails. On consultera aussi Sibony [Sib99] et Dinh-Sibony [DS10].

Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe, $F = (F_0, F_1, F_2) : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ une application polynomiale homogène de degré $d \geq 1$ telle que $f = [F_0 : F_1 : F_2]$. Puisque $f^{-1}\{0\} = \{0\}$, il existe $M \geq 1$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^3, \frac{1}{M} \|z\|^d \leq \|F(z)\| \leq M \|z\|^d . \tag{3.1.1}$$

Notons

$$G_n(z) := \frac{1}{d^n} \log \|F^n(z)\| .$$

Alors G_n est psh sur $\mathbb{C}^3$, continue sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. D'après (3.1.1), on a pour tout $z \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$,

$$\forall n \geq 1, \quad |G_{n+1}(z) - G_n(z)| \leq \frac{\log M}{d^{n+1}}.$$

Il s'ensuit que (G_n) converge uniformément vers une fonction G psh continue sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Cette fonction vérifie

- $G \circ F = dG$,
- $G(\lambda z) = \log |\lambda| + G(z)$.

Le courant de Green de f est le courant positif fermé T de bidegré $(1, 1)$ sur $\mathbb{P}^2$ défini de la manière suivante. Soit U un ouvert de $\mathbb{P}^2$ sur lequel la projection $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2$ admet une section holomorphe s. Alors la restriction de T à U est égale à $2i\partial\overline{\partial}(G \circ s)$. Cette définition ne dépend pas du relevé F et de la section s. On dira que G est un potentiel global de T.

On peut aussi définir T comme la limite des tirés en arrière de la forme de Fubini-Study ω sur $\mathbb{P}^2$. Cette forme est le $(1,1)$-courant positif fermé provenant du potentiel global $\Omega := \log\|z\|$ sur $\mathbb{C}^3$. Alors la suite

$$T_n := \frac{1}{d^n}(f^n)^*\omega_{FS}.$$

converge faiblement vers T. Le courant de Green vérifie

$$f^*T = dT.$$

Cette relation entraîne

$$f_*T = dT$$

en utilisant l'égalité $f_*f^* = d^2 Id$ valable sur les formes test de tout bidegré sur $\mathbb{P}^2$, cf [DS10].

Remarquons également que si α est une submersion holomorphe $B_x(1) \to \mathbb{D}(1)$, et si z est la coordonnée sur $\mathbb{D}(1)$, alors $\frac{i}{2}d\alpha \wedge d\overline{\alpha} = \alpha^*(\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z})$ est une forme positive (Voir partie III.1 de [Dem12]). Donc $T \wedge (\frac{i}{2}d\alpha \wedge d\overline{\alpha})$ est une mesure positive sur $B_x(1)$.

3.2 La mesure d'équilibre μ

Le courant de Green permet de construire la mesure d'équilibre

$$\mu := T \wedge T$$

C'est une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}^2$. Le produit est défini au sens de Bedford-Taylor [BeTa82].

Sans rien supposer sur les exposants de Lyapunov de μ (contrairement au Lemme 2.1.9), on a la Proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *1.* $\log|\det D_x f|$ *est μ-intégrable, en particulier* $\mu(\mathcal{C}_f) = 0$.

2. $\log^+\|D_x f\|$ *et* $\log^+\left\|(D_x f)^{-1}\right\|$ *sont μ-intégrables.*

Démonstration. **1** : $x \mapsto \det D_x f$ est holomorphe donc $\log|\det D_x f|$ est localement pluri-sous-harmonique.

Pour en déduire son intégrabilité par rapport à μ, il faut utiliser l'inégalité de Chern-Lévine-Nirenberg (Voir [Kli91], Proposition 3.4.2 et Corollaire 3.4.8). Cette inégalité donne dans notre contexte :

Pour tout ouvert W relativement compact dans un ouvert U d'une carte où $T = 2i\partial\overline{\partial}G$, on a

$$\int_W |\log|\det D_x f||\, 2i\partial\overline{\partial}G \wedge 2i\partial\overline{\partial}G \leq C_{W,U}\,\|G\|_U^2 \int_U |\log|\det D_x f||\, d\,\mathrm{Leb}$$

La pluri-sous-harmonicité de $\log|\det D_x f|$ implique l'intégrabilité locale pour la mesure de Lebesgue, et donc que $\int_U |\log|\det D_x f||$ est borné. Ainsi, puisque G est bornée, $\log|\det D_x f|$ est bien μ-intégrable.

2 : La fonction $\log^+\|D_x f\|$ est bornée donc μ-intégrable. L'inégalité

$$\log^+\left\|(D_x f)^{-1}\right\| \leq \log^+\|D_x f\| + |\log|\det D_x f||\,,$$

voir la preuve du Lemme 2.1.9, montre que $\log^+\left\|(D_x f)^{-1}\right\|$ est aussi μ-intégrable. □

La mesure d'équilibre vérifie

$$d^2\mu = f^*\mu.$$

En utilisant $f_* f^* = d^2 Id$, on en déduit qu'elle est également f-invariante :

$$\mu = f_*\mu.$$

On sait aussi que μ est mélangeante, donc ergodique.

3.3 Entropie et localisation

Pour tout $W \subset \mathbb{P}^2$, on définit l'entropie topologique de f relativement à W par

$$h_{top}(f, W) := \sup_{\epsilon > 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \max \left\{ \mathrm{Card}(F), \quad F \subset W \ (n, \epsilon) - \text{séparé} \right\}.$$

Si $W = \mathbb{P}^2$, cette définition donne l'entropie topologique de f sur $\mathbb{P}^2$, elle est égale à $2 \log d$ ([Gro03], [MP77]). L'entropie de la mesure d'équilibre est maximale, égale à $2 \log d$, cela provient de $f^*\mu = d^2\mu$. Briend-Duval ont montré que μ est la seule mesure invariante d'entropie maximale, voir [BrDu01]. On dispose des résultats suivants, établis par De Thélin [dT05] (point 2) et Dinh [Din07] (point 1), concernant l'entropie relative.

Théorème 3.3.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$, T son courant de Green et μ sa mesure d'équilibre. Soit $W \subset \mathbb{P}^2$.*

1. *Si $\overline{W} \cap \mathrm{Supp}\, T = \emptyset$, alors $h_{top}(f, W) = 0$.*
2. *Si $\overline{W} \cap \mathrm{Supp}\, \mu = \emptyset$, alors $h_{top}(f, W) \leq \log d$.*

Ce théorème permet de localiser les mesures ergodiques selon leur entropie. En effet, le principe variationnel relatif (voir Bowen [Bow73]) affirme que si ν est une mesure ergodique et si $\nu(A) > 0$, alors $h_\nu \leq h_{top}(f, A)$. On obtient alors :

Corollaire 3.3.2. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ holomorphe de degré $d \geq 2$ et ν une mesure ergodique.*

1. *Si $h_\nu > \log d$, alors $\mathrm{Supp}\, \nu \subset \mathrm{Supp}\, \mu$.*
2. *Si $h_\nu > 0$, alors $\mathrm{Supp}\, \nu \subset \mathrm{Supp}\, T$.*

On dira qu'une mesure ergodique est de grande entropie si $h_\nu > \log d$. Pour de telles mesures, on dispose d'une borne sur leurs exposants de Lyapunov obtenue par De Thélin [dT08].

Théorème 3.3.3 (de Thélin)**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ et ν une mesure ergodique de grande entropie. Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov et soit h_ν l'entropie de ν. Si $\log |\det D_x f| \in L^1(\nu)$, alors*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \frac{1}{2}(h_\nu - \log d).$$

Ce résultat a été étendu dans [Dup10] en supprimant l'hypothèse $\log |\det D_x f| \in L^1(\nu)$.

3.4 Résultats élémentaires sur les courants positifs

Les énoncés de cette section nous serviront dans les Sections 5.2, 5.3 et 5.4 pour minorer les directions dimensionnelles supérieures des courants positifs fermés, sauf la Proposition 3.4.6 que nous utiliserons dans la Section 6.2 sur la masse de Monge-Ampère.

On consultera le Chapitre III du livre de Demailly [Dem12] ou l'appendice de [DS10] pour les notions de positivité pour les formes et les courants sur les variétés complexes. Nous rappelons ici les notions que nous manipulerons souvent.

Une $(1,1)$-forme $u = u_{1,1} idz \wedge d\overline{z} + u_{1,2} idz \wedge d\overline{w} + u_{2,1} idw \wedge d\overline{z} + u_{2,2} idw \wedge d\overline{w}$ sur $\mathbb{C}^2$ est dite positive sur $\mathbb{C}^2$ si $(u_{i,j})_{(i,j)}$ est hermitienne positive sur $\mathbb{C}^2$.

Une $(1,1)$-forme sur $\mathbb{P}^2$ est dite positive si, en tout point $x \in \mathbb{P}^2$, elle induit une $(1,1)$-forme positive sur $T_x\mathbb{P}^2$.

Un courant S sur $\mathbb{P}^2$ est dit positif si $< S, \varphi > \geq 0$ pour toute forme test φ positive sur $\mathbb{P}^2$. Enfin, lorsque S_1 et S_2 sont deux courants positifs, on notera $S_1 \geq S_2$ si le courant $S_1 - S_2$ est positif.

Lemme 3.4.1. *Si $(A_i)_{i=1}^r$ est une famille d'ouverts deux à deux disjoints de $\mathbb{P}^2$, alors pour tout S courant positif de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^2$:*

$$S \geq \sum_{i=1}^{r} 1_{A_i} S.$$

Démonstration. Soit φ une $(1,1)$-forme test positive sur $\mathbb{P}^2$. Alors

$$< \sum_{i=1}^{r} 1_{A_i} S, \varphi > = \sum_{i=1}^{r} \int_{\mathbb{P}^2} 1_{A_i} S \wedge \varphi = \int_{\cup_{i=1}^r A_i} S \wedge \varphi.$$

S et φ étant positifs, $S \wedge \varphi$ est une mesure positive et donc

$$< \sum_{i=1}^{r} 1_{A_i} S, \varphi > \leq \int_{\mathbb{P}^2} S \wedge \varphi = < S, \varphi > .$$

□

On trouvera dans [Dem12] la démonstration du fait suivant :

Lemme 3.4.2. *Si S et S' sont deux courants positifs de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^2$ et $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ est un endomorphisme holomorphe, alors $S \geq S'$ implique $f_*S \geq f_*S'$*

On déduit des deux Lemmes précédents le résultat suivant.

Corollaire 3.4.3. *Soit $(x_i)_{i=1}^N$ une famille de points de $\mathbb{P}^2$. Soient $n \geq 0$ et $\eta_1 > 0$ tels que les boules dynamiques $B_n(x_i, \eta_1)$ soient deux à deux disjointes. Alors :*

$$(f^n)_* S \geq (f^n)_* \left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_n(x_i,\eta_1)} \right).$$

Lemme 3.4.4. *Soit $(A_i)_{i=1}^r$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints de $\mathbb{P}^2$. Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe. Alors pour tout S courant positif de bidegré $(1,1)$:*

$$(f^n)_* (\sum_{i=1}^{r} 1_{A_i} S) = \sum_{i=1}^{r} (f^n)_* (1_{A_i} S)$$

Démonstration. Soit φ une $(1,1)$-forme test sur $\mathbb{P}^2$.

$$\begin{aligned} < (f^n)_* \sum_{i=1}^r 1_{A_i} S, \varphi > &=< (\sum_{i=1}^r 1_{A_i} S), (f^n)^* \varphi > \text{ par dualité} \\ &= \sum_{i=1}^r < 1_{A_i} S, (f^n)^* \varphi > \text{ par linéarité} \\ &= \sum_{i=1}^r < (f^n)_* (1_{A_i} S), \varphi > \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.5. *Soit S un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^2$ de masse 1. Soit ω la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2$ et soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré d. Alors,*

$$\int_{\mathbb{P}^2} (f^n)_* S \wedge \omega = \int_{\mathbb{P}^2} S \wedge (f^n)^* \omega = d^n.$$

Démonstration. La première égalité est la définition de dualité. Montrons la deuxième. En utilisant $f^*\omega = d \cdot \omega + 2i\partial\overline{\partial} u$ où u est lisse sur $\mathbb{P}^2$, on obtient

$$(f^n)^*\omega = d^n \omega + 2i\partial\overline{\partial} v_n,$$

où $v_n := (d^{n-1} \cdot u + \cdots + d \cdot u \circ f^{n-2} + u \circ f^{n-1})$. Il s'ensuit

$$\int_{\mathbb{P}^2} S \wedge (f^n)^*\omega = \int_{\mathbb{P}^2} S \wedge \left(d^n\omega + 2i\partial\overline{\partial} v_n\right),$$

On a supposé S de masse 1, donc $\int_{\mathbb{P}^2} S \wedge d^n\omega = d^n$. Enfin, comme S est un courant fermé, on a $\int_{\mathbb{P}^2} S \wedge 2i\partial\overline{\partial} v_n = 0$. □

Le calcul local suivant va nous permettre de mieux comprendre les mesures $T \wedge (\frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})$ que nous étudions dans ce texte.

Proposition 3.4.6. *Soit G une fonction psh continue sur $\mathbb{D}^2$, soit $T = 2i\partial\overline{\partial} G$. Soit (Z, W) les coordonnées sur $\mathbb{D}^2$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{D}^2)$. Alors*

$$T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z}(\phi) = \int_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{w\in\mathbb{D}} G_z(w) \cdot \Delta\phi_z(w) \; d\,\mathrm{Leb}(w) \right) \; d\,\mathrm{Leb}(z) = \int_{z\in\mathbb{D}} (\sigma_z^* T)(\phi) d\,\mathrm{Leb}(z)$$

où $\sigma_z : u \mapsto (z, u)$, $G_z = G \circ \sigma_z$ et $\phi_z = \phi \circ \sigma_z$.

Démonstration.

$$T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z}(\phi) = 2i\partial\overline{\partial} G(\phi \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z}) = \int_{\mathbb{D}^2} G . 2i\partial\overline{\partial}(\phi \times \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})$$

On utilise que

$$2i\partial\overline{\partial}(\phi \times \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z}) = 4(\frac{\partial^2 \phi}{\partial w \partial \overline{w}}) \frac{i}{2} dW \wedge d\overline{W} \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z} = 4(\frac{\partial^2 \phi}{\partial w \partial \overline{w}}) \; \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(z, w)$$

pour écrire

$$\begin{aligned}
T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z}(\phi) &= \int_{\mathrm{Supp}\,\phi} G(z,w) \times 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial w \partial \overline{w}}(z,w) \,\mathrm{d\,Leb}(z,w) \\
&= \int_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{w\in\mathbb{D}} G(z,w) \times 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial w \partial \overline{w}}(z,w) \,\mathrm{d\,Leb}(w) \right) \,\mathrm{d\,Leb}(z) \text{ par Fubini} \\
&= \int_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{w\in\mathbb{D}} G_z(w) \times \Delta\phi_z(w) \,\mathrm{d\,Leb}(w) \right) \,\mathrm{d\,Leb}(z)
\end{aligned}$$

Pour finir, la quantité entre parenthèses est égale à

$$(\Delta G_z)(\phi_z) = (\sigma_z^* T)(\phi_z).$$

□

Cela signifie qu'étudier $T \wedge \frac{i}{2}(dZ \wedge d\overline{Z})$ correspond à étudier le comportement de T selon des tranches Z =cste. On abusera parfois dans la suite de la terminologie "selon la direction Z", il faut garder à l'esprit qu'on regarde en fait ce qu'il se passe transversalement à Z.

3.5 Applications de Desboves

Le but de cette section est de montrer que le plus petit exposant des applications élémentaires de Desboves décrites dans la section 1.1.2 est minimal. Rappelons qu'il s'agit des applications

$$f_\lambda : [z : w : t] \mapsto \left[-z(z^3 + 2w^3) : w(2z^3 + w^3) : t(w^3 - z^3 + \lambda(z^3 + w^3 + t^3)) \right], \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Nous montrons en fait un résultat plus général :

Théorème 3.5.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ une application holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit μ sa mesure d'équilibre et soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les exposants de Lyapunov de μ.*

On suppose que $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ préserve la droite à l'infini $L_\infty = \{[z : w : 0]\}$, fixe $x_0 = [0 : 0 : 1]$ et préserve le pinceau de droites passant par x_0. Soit λ_∞ l'exposant de Lyapunov de la mesure d'équilibre μ_∞ de la restriction de f à L_∞. Alors

$$\lambda_2 \leq \lambda_\infty.$$

Comme Dabija et Bonifant ont montré (voir [BoDa02]) que les applications élémentaires de Desboves vérifient les hypothèses du Théorème 3.5.1, on en déduit immédiatement :

Théorème 3.5.2. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ une application élémentaire de Desboves. Elle est de degré $d = 4$. Soit μ sa mesure d'équilibre et soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov.*

Alors $\lambda_2 \leq \lambda_\infty = \frac{1}{2} \log d$: L'application f est semi-extrémale.

Avant de démontrer le Théorème 3.5.1, nous introduisons quelques notations et résultats.

Notation 3.5.3. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe préservant $L_\infty = \{[z : w : 0]\}$. Soit f_∞ la restriction de f à L_∞. On note*

- *P_n l'ensemble des points fixes de f^n.*
- *$R_n \subset P_n$ l'ensemble des points fixes répulsifs de f^n.*
- *P_n^∞ l'ensemble des points fixes de f_∞^n.*
- *$R_n^\infty \subset P_n^\infty$ l'ensemble des points fixes répulsifs de f_∞^n.*

Lemme 3.5.4. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que*
- *pour tout $n \geq N_0$,*
- *pour tout $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ holomorphe de degré d,*
- *pour toute droite $L \subset \mathbb{P}^2$ telle que $f^n(L) \subset L$, on a :*

1. $\mathrm{Card}(P_n) \leq d^{2n}(1+\epsilon)$,
2. $\mathrm{Card}(P_n \cap L) \leq d^n(1+\epsilon)$,

où les cardinaux sont comptés avec multiplicité.

Démonstration. On sait que pour tout endomorphisme holomorphe $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ de degré d, le cardinal de P_n compté avec multiplicité est égal à $1 + d^n + \cdots + d^{nk}$. Cela provient du Théorème de Bezout, voir par exemple [DS10], Proposition 1.3. □

Le Lemme 4.5 de [BDM08] permet de quantifier les "bons" points périodiques répulsifs c'est à dire ceux dont les multiplicateurs sont proches des exposants de Lyapunov. On consultera l'article [BLS93] pour une propriété similaire pour les applications de Hénon. Le cardinal des ensembles est compté dorénavant sans multiplicité.

Théorème 3.5.5 (Berteloot-Dupont-Molino)**.** *Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$,*

$$\mathrm{Card}\left(\left\{P \in R_n, \quad \left|\frac{1}{n}\log\left\|(D_P f^n)^{-1}\right\|^{-1} - \lambda_2\right| \leq \epsilon/2\right\}\right) \geq d^{2n}(1-\epsilon) \tag{3.5.1}$$

$$\mathrm{Card}\left(\left\{Q \in R_n^\infty, \quad \left|\frac{1}{n}\log|(f_\infty^n)'(Q)| - \lambda_\infty\right| \leq \epsilon/2\right\}\right) \geq d^{n}(1-\epsilon) \tag{3.5.2}$$

Démonstration. (3.5.2) provient directement du Lemme 4.5 de [BDM08], appliqué en dimension 1 à f_∞. Pour montrer (3.5.1), ce même lemme donne l'existence d'un rang N_1 à partir duquel on a

$$\mathrm{Card}\left(\left\{P \in R_n, \quad \left|\frac{1}{n}\log|\det(D_P f^n)| - (\lambda_1+\lambda_2)\right| \leq \epsilon/4\right\}\right) \geq d^{2n}(1-\epsilon/2)$$

$$\mathrm{Card}\left(\left\{P \in R_n, \quad \left|\frac{1}{n}\log\|(D_P f^n)\| - \lambda_1\right| \leq \epsilon/4\right\}\right) \geq d^{2n}(1-\epsilon/2)$$

On remarque que $|\det(D_P f^n)| = \|(D_P f^n)\| . \left\|(D_P f^n)^{-1}\right\|^{-1}$ pour conclure. □

En vue de montrer le Théorème 3.5.1, on pose deux ensembles, qui sont les points périodiques répulsifs dont les multiplicateurs sont loin des exposants de Lyapunov. On note $B_{x_0}(\eta)$ la boule centrée en $x_0 = [0:0:1]$ et de rayon η.

$$B_n = \left\{P \in R_n \setminus B_{x_0}(\eta), \frac{1}{n}\log\left\|(D_P f^n)^{-1}\right\|^{-1} > \lambda_\infty + \epsilon\right\} \cup [B_{x_0}(\eta) \cap R_n]$$

$$B_n^\infty = \left\{Q \in R_n^\infty, \frac{1}{n}\log|(f_\infty^n)'(Q)| > \lambda_\infty + \epsilon/2\right\}.$$

Le Lemme 3.5.4 et le Théorème 3.5.5 entraînent

Lemme 3.5.6. *Pour $n > N_0, N_1$, on a*

$$\mathrm{Card}(B_n^\infty) \leq 2\epsilon d^n.$$

Enfin, le lemme clé consiste en la minoration du cardinal de B_n.

Lemme 3.5.7. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. On suppose que f préserve la droite à l'infini $L_\infty = \{[z : w : 0]\}$, fixe $x_0 = [0 : 0 : 1]$ et préserve le pinceau de droites passant par x_0. Alors pour tout $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$,*

$$\mathrm{Card}(B_n) \leq 3\epsilon d^{2n} + 2\mu(B_{x_0}(\eta))d^{2n}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$. Par l'équidistribution des points périodiques répulsifs vers μ (Briend-Duval [BrDu99]), si n est assez grand, on a

$$\mathrm{Card}(B_{x_0}(\eta) \cap R_n) \leq 2\mu(B_{x_0}(\eta))d^{2n}. \tag{3.5.3}$$

Par hypothèses, f fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_\infty"'] & \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0\} \arrow[d, "\pi_\infty"'] \\ L_\infty \arrow[r, "f_\infty"] & L_\infty \end{tikzcd}$$

où π_∞ est la projection sur L_∞ de centre x_0. Il existe $C_\eta > 0$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{P}^2 \setminus B_{x_0}(\eta), \forall n \geq 1, \quad \left| f_\infty^{n'}(\pi_\infty(P)) \right| \geq C_\eta \left\| (D_P f^n)^{-1} \right\|^{-1}.$$

Soit $P \in B_n \setminus B_{x_0}(\eta)$. Par définition, on sait que

$$\frac{1}{n} \log \left\| (D_P f^n)^{-1} \right\|^{-1} > \lambda_\infty + \epsilon.$$

Donc $\pi_\infty(P) \in B_n^\infty$ si n est assez grand pour que $\left| \frac{1}{n} \log C_\eta \right| < \epsilon/2$. On a alors

$$\mathrm{Card}(B_n \setminus B_{x_0}(\eta)) \leq \mathrm{Card}(B_n^\infty) \times \max_{P \in B_n^\infty} \mathrm{Card}(R_n \cap L_P)$$

où L_P est la droite passant par x_0 et P. On injecte les majorations du Lemme 3.5.4 et du Lemme 3.5.6 :

$$\mathrm{Card}(B_n \setminus B_{x_0}(\eta)) \leq 2\epsilon d^n \times (1+\epsilon)d^n \leq 3\epsilon d^{2n}. \tag{3.5.4}$$

La combinaison de (3.5.3) et (3.5.4) conclut la démonstration. □

Démonstration du Théorème 3.5.1. Soit f vérifiant les hypothèses du théorème. On fixe ϵ et η assez petit pour que $\mu(B_{x_0}(\eta)) < \epsilon$ (cela est possible car la mesure d'équilibre μ ne charge pas les points). Soit $n \geq \max(N_0, N_1, N_2)$. On s'intéresse à $R_n \setminus B_n$. On a que

$$\mathrm{Card}(R_n) \geq (1-\epsilon)d^{2n}$$

comme conséquence du Théorème 3.5.5. Cela implique par le Lemme 3.5.7 :

$$\mathrm{Card}\left\{ P \in R_n \setminus B_{x_0}(\eta) \mid \quad \frac{1}{n} \log \left\| (D_P f^n)^{-1} \right\|^{-1} \leq \lambda_\infty + \epsilon \right\} \geq d^{2n}(1 - 6\epsilon). \tag{3.5.5}$$

On sait par le Lemme 3.5.4 que $\mathrm{Card}(R_n) \leq d^{2n}(1+\epsilon)$. Donc (3.5.1) et (3.5.5) impliquent qu'il existe un point dans l'intersection

$$\left\{ P \in R_n, \frac{1}{n} \log \left\| (D_P f^n)^{-1} \right\|^{-1} \leq \lambda_\infty + \epsilon \right\} \bigcap \left\{ P \in R_n, \frac{1}{n} \log \left\| (D_P f^n)^{-1} \right\|^{-1} \geq \lambda_2 - \epsilon/2 \right\}.$$

Donc $\lambda_2 - \epsilon/2 \leq \lambda_\infty + \epsilon$. On conclut en faisant tendre ϵ vers 0. □

Chapitre 4

Formes normales

Search your feelings, you know it to be true.

James Earl Jones as Darth Vader,
The Empire Strikes Back

4.1 Branches inverses

Dans la suite, on utilisera $\hat{x}_n$ pour dénoter $\hat{f}^n(\hat{x})$ ($n \in \mathbb{Z}$). Une fonction $g : \hat{X} \to]0,1]$ est dite ϵ-lente si pour tout $\hat{x} \in \hat{X}$, $g(\hat{f}^{\pm 1}(\hat{x})) \geq e^{-\epsilon} g(\hat{x})$. Elle est dite ϵ-rapide si $\frac{1}{g}$ est ϵ-lente.

Proposition 4.1.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe, ν une mesure ergodique dont les exposants $\lambda_1 \geq \lambda_2$ sont strictement positifs. Alors il existe des fonctions mesurables $r : \hat{X} \to]0,1]$ et $C : \hat{X} \to [1,+\infty[$ (respectivement ϵ-lentes et ϵ-rapides) telles que pour $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x}$ et pour tout $n \geq 0$:*

- *La branche inverse $f_{\hat{x}}^{-n}$ est définie sur $B_{x_0}(r(\hat{x}))$.*
- *$Lip(f_{\hat{x}}^{-n}) \leq C(\hat{x}) e^{-n(\lambda_2 - \epsilon)}$ sur $B_{x_0}(r(\hat{x}))$.*

La preuve de cette Proposition est menée dans l'article de Briend-Duval [BrDu99], Section 2.2, pour la mesure μ. Elle est valable pour les mesures dont les exposants sont strictement positifs. Cette propriété assure que $\log |\det D_x f| \in L^1(\nu)$, de sorte que les préhistoires de x s'approchent exponentiellement lentement de l'ensemble critique $\mathcal{C}$ de f.

Le Théorème 4.1.2 ci-dessous est beaucoup plus précis, il donne des formes normales pour les branches inverses des itérées de f. On consultera les articles de Jonsson-Varolin [JV02] et Berteloot-Dupont-Molino [BDM08]. L'énoncé suivant est adapté de la Proposition 4.3 de [BDM08].

Théorème 4.1.2 (Formes Normales)**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique d'exposants $\lambda_1 \geq \lambda_2$ strictement positifs. Soit $\epsilon > 0$.*

Il existe un borélien $\hat{f}$-invariant $\mathcal{FN} \subset \hat{X}$ tel que $\hat{\nu}(\mathcal{FN}) = 1$ et vérifiant les propriétés suivantes. Il existe des fonctions ϵ-lentes $\eta_\epsilon, \rho_\epsilon : \mathcal{FN} \to]0,1]$, des fonctions ϵ-rapides $\beta_\epsilon, L_\epsilon, M_\epsilon : \mathcal{FN} \to [1,+\infty[$ et pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$, il existe des applications holomorphes injectives

$$\xi_{\hat{x}}^{\epsilon} : B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x})) \to \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}))$$

telles que le diagramme suivant commute pour tout $n \geq n_1(\hat{x})$:

$$\begin{tikzcd} B_{x_{-n}}(\eta_\epsilon(\hat{x}_{-n})) \arrow[d, "\xi^\epsilon_{\hat{x}_{-n}}"] & B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x})) \arrow[l, "f^{-n}_{\hat{x}}"'] \arrow[d, "\xi^\epsilon_{\hat{x}}"'] \\ \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}_{-n})) & \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x})) \arrow[l, "R_{n,\hat{x}}"] \end{tikzcd}$$

On a de plus

1. $\forall (p,q) \in B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x}))$, $\frac{1}{2}d(p,q) \leq |\xi^\epsilon_{\hat{x}}(p) - \xi^\epsilon_{\hat{x}}(q)| \leq \beta_\epsilon(\hat{x})d(p,q)$.
2. $\mathrm{Lip}(f^{-n}_{\hat{x}}) \leq L_\epsilon(\hat{x})e^{-n\lambda_2+n\epsilon}$ *sur* $B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x}))$,
3. $R_{n,\hat{x}}$ *est linéaire et* $e^{-n\epsilon}e^{-n\lambda}\|(z,w)\| \leq \|R_{n,\hat{x}}(z,w)\| \leq e^{n\epsilon}e^{-n\lambda}\|(z,w)\|$ *si* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
   $R_{n,\hat{x}}(z,w) = (\alpha_{n,\hat{x}}z, \beta_{n,\hat{x}}w) + (\gamma_{n,\hat{x}}w^k, 0)$ *si* $\lambda_1 = k\lambda_2$ *où* $k \geq 2$,
   $R_{n,\hat{x}}(z,w) = (\alpha_{n,\hat{x}}z, \beta_{n,\hat{x}}w)$ *si* $\lambda_1 \notin \{k\lambda_2, k \geq 1\}$.
   (a) $e^{-n\epsilon}e^{-n\lambda_1} \leq |\alpha_{n,\hat{x}}| \leq e^{n\epsilon}e^{-n\lambda_1}$ *et* $|\gamma_{n,\hat{x}}| \leq M_\epsilon(\hat{x})e^{n\epsilon}e^{-n\lambda_1}$,
   (b) $e^{-n\epsilon}e^{-n\lambda_2} \leq |\beta_{n,\hat{x}}| \leq e^{n\epsilon}e^{-n\lambda_2}$.

Le Théorème 4.1.2 nous indique qu'on peut quasi-linéariser le retour vers le passé en presque tout point de l'extension naturelle. Nous aurons aussi besoin d'une version permettant de revenir quasi-linéairement du futur.

Théorème 4.1.3 (Formes Normales)**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique d'exposants $\lambda_1 \geq \lambda_2$ strictement positifs. Soit $\epsilon > 0$.*

Il existe un borélien $\hat{f}$-invariant $\mathcal{FN} \subset \hat{X}$ tel que $\hat{\nu}(\mathcal{FN}) = 1$ et vérifiant les propriétés suivantes. Il existe des fonctions ϵ-lentes $\eta_\epsilon, \rho_\epsilon : \mathcal{FN} \to]0,1]$, des fonctions ϵ-rapides $\beta_\epsilon, L_\epsilon, M_\epsilon : \mathcal{FN} \to [1, +\infty[$ et pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$, il existe des applications holomorphes injectives

$$(\xi^\epsilon_{\hat{x}})_{n\geq 0} : B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x})) \to \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}))$$

telles que le diagramme suivant commute pour tout $n \geq n_2(\hat{x})$:

$$\begin{tikzcd} B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x})) \arrow[d, "\xi^\epsilon_{\hat{x}}"] & B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x}_n)) \arrow[l, "f^{-n}_{\hat{x}_n}"'] \arrow[d, "\xi^\epsilon_{\hat{x}_n}"'] \\ \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x})) & \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}_n)) \arrow[l, "R_{n,\hat{x}_n}"] \end{tikzcd}$$

On a de plus

1.
$$\forall (p,q) \in B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x})),\ \frac{1}{2}d(p,q) \leq \left|\xi^\epsilon_{\hat{x}_n}(p) - \xi^\epsilon_{\hat{x}_n}(q)\right| \leq \beta_\epsilon(\hat{x})e^{n\epsilon}d(p,q). \tag{4.1.1}$$
2. $\mathrm{Lip}(f^{-n}_{\hat{x}_n}) \leq L_\epsilon(\hat{x})e^{-n\lambda_2+2n\epsilon}$ *sur* $B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x}_n))$,
3. $R_{n,\hat{x}_n}$ *est linéaire et* $e^{-n\epsilon}e^{-n\lambda}\|(z,w)\| \leq \|R_{n,\hat{x}_n}(z,w)\| \leq e^{n\epsilon}e^{-n\lambda}\|(z,w)\|$ *si* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
   $R_{n,\hat{x}_n}(z,w) = (\alpha_{n,\hat{x}_n}z, \beta_{n,\hat{x}_n}w) + (\gamma_{n,\hat{x}_n}w^k, 0)$ *si* $\lambda_1 = k\lambda_2$ *où* $k \geq 2$,
   $R_{n,\hat{x}_n}(z,w) = (\alpha_{n,\hat{x}_n}z, \beta_{n,\hat{x}_n}w)$ *si* $\lambda_1 \notin \{k\lambda_2, k \geq 1\}$.
   (a) $e^{-n\epsilon}e^{-n\lambda_1} \leq |\alpha_{n,\hat{x}_n}| \leq e^{n\epsilon}e^{-n\lambda_1}$ *et* $|\gamma_{n,\hat{x}_n}| \leq M_\epsilon(\hat{x})e^{2n\epsilon}e^{-n\lambda_1}$,
   (b) $e^{-n\epsilon}e^{-n\lambda_2} \leq |\beta_{n,\hat{x}_n}| \leq e^{n\epsilon}e^{-n\lambda_2}$.

Remarque 4.1.4. *Les entiers $n_1(\hat{x})$ et $n_2(\hat{x})$ assurent respectivement que $f_{\hat{x}}^{-n}$ envoie $B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x}))$ dans $B_{x_{-n}}(\eta_\epsilon(\hat{x}))$ et que $f_{\hat{x}_n}^{-n}$ envoie $B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x}_n))$ dans $B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x}))$. En fait, les diagrammes commutatifs sont respectivement vrais pour tout $n \in \{1, \ldots, n_1(\hat{x})\}$ et tout $n \in \{1, \ldots, n_2(\hat{x})\}$ au niveau des germes d'applications.*

4.2 Dimensions directionnelles du courant de Green

Définition 4.2.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe, soit ν une mesure ergodique et $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov. On suppose qu'ils sont strictement positifs. Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$, on note $\xi_{\hat{x}}^\epsilon = (Z_{\hat{x}}^\epsilon, W_{\hat{x}}^\epsilon)$ les coordonnées de $\xi_{\hat{x}}^\epsilon : B_x(\eta_\epsilon(\hat{x})) \to \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}))$ données par le Théorème 4.1.2.*

Puisque T est un courant positif, $T \wedge \frac{i}{2} dZ_{\hat{x}}^\epsilon \wedge \overline{dZ_{\hat{x}}^\epsilon}$ et $T \wedge \frac{i}{2} dW_{\hat{x}}^\epsilon \wedge \overline{dW_{\hat{x}}^\epsilon}$ sont des mesures positives sur $B_x(\eta_\epsilon(\hat{x}))$ (Voir fin de la section 3.1). On définit les dimensions supérieures et inférieures de T en $\hat{x}$ selon la direction $Z_{\hat{x}}^\epsilon$ par :

$$\overline{d_{T,Z}^\epsilon}(\hat{x}) = \limsup_{r \to 0,\ r \leq \eta_\epsilon(\hat{x})} \frac{\log \left[T \wedge (\frac{i}{2} dZ_{\hat{x}}^\epsilon \wedge d\overline{Z_{\hat{x}}^\epsilon})(B_{x_0}(r)) \right]}{\log r}$$

$$\underline{d_{T,Z}^\epsilon}(\hat{x}) = \liminf_{r \to 0,\ r \leq \eta_\epsilon(\hat{x})} \frac{\log \left[T \wedge (\frac{i}{2} dZ_{\hat{x}}^\epsilon \wedge d\overline{Z_{\hat{x}}^\epsilon})(B_{x_0}(r)) \right]}{\log r}$$

On définit de la même manière $\overline{d_{T,W}^\epsilon}(\hat{x})$ et $\underline{d_{T,W}^\epsilon}(\hat{x})$ les dimensions de T selon la direction $W_{\hat{x}}^\epsilon$.

Remarque 4.2.2. *Lorsque $\lambda_1 > \lambda_2$ et lorsque $\lambda_1 \notin \{k\lambda_2, k \geq 2\}$ (cas non résonnant), on disposera des propriétés suivantes :*

$$Z_{\hat{x}_{-n}}^\epsilon \circ f_{\hat{x}}^{-n} = \alpha_{n,\hat{x}} \times Z_{\hat{x}}^\epsilon, \quad W_{\hat{x}_{-n}}^\epsilon \circ f_{\hat{x}}^{-n} = \beta_{n,\hat{x}} \times W_{\hat{x}}^\epsilon. \tag{4.2.1}$$

La deuxième est toujours vraie, même dans le cas résonnant. Ces égalités seront cruciales dans nos arguments, voir par exemple le Lemme 4.2.4 et la Proposition 6.1.3. Dans le cas résonnant $\lambda_1 = k\lambda_2$ où $k \geq 2$, la première égalité devient

$$Z_{\hat{x}_{-n}}^\epsilon \circ f_{\hat{x}}^{-n} = \alpha_{n,\hat{x}} \times Z_{\hat{x}}^\epsilon + \gamma_{n,\hat{x}} (W_{\hat{x}}^\epsilon)^k = \alpha_{n,\hat{x}} \left(Z_{\hat{x}}^\epsilon + \frac{\gamma_{n,\hat{x}}}{\alpha_{n,\hat{x}}} (W_{\hat{x}}^\epsilon)^k \right).$$

où $\left| \frac{\gamma_{n,\hat{x}}}{\alpha_{n,\hat{x}}} \right| \leq M_\epsilon(\hat{x}) e^{2n\epsilon}$. On a donc $Z_{\hat{x}_{-n}}^\epsilon \circ f_{\hat{x}}^{-n} = \alpha_{n,\hat{x}} \tilde{Z}_{n,\hat{x}}^\epsilon$, où la submersion $\tilde{Z}_{n,\hat{x}}^\epsilon$ dépend de n.

Ainsi, dans le cas résonant, le Théorème des formes normales ne fournit pas a priori de systèmes de coordonnées $(Z_{\hat{x}}^\epsilon, W_{\hat{x}}^\epsilon)_{\hat{x} \in \mathcal{FN}}$ invariants par le décalage et multipliés par les exposants de Lyapunov. C'est pour cette raison que ferons l'hypothèse de non-résonance dans nos énoncés.

Proposition 4.2.3. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe. Soit ν une mesure ergodique. On suppose que ses exposants de Lyapunov $\lambda_1 > \lambda_2$ de ν sont strictement positifs. Soit $\epsilon > 0$ et soit $(Z_{\hat{x}}^\epsilon, W_{\hat{x}}^\epsilon)_{\hat{x} \in \mathcal{FN}}$ des coordonnées d'Oseledec-Pesin données par le Théorème des formes normales. Alors il existe un ensemble invariant $\hat{\Lambda}_T \subset \mathcal{FN}$ de $\hat{\nu}$-mesure 1 tel que*

1. *$\hat{x} \mapsto \overline{d_{T,Z}^\epsilon}(\hat{x})$ et $\hat{x} \mapsto \underline{d_{T,Z}^\epsilon}(\hat{x})$ sont des fonctions $\hat{f}$-invariantes sur $\hat{\Lambda}_T$ si λ_1 et λ_2 ne résonnent pas.*
2. *$\hat{x} \mapsto \overline{d_{T,W}^\epsilon}(\hat{x})$ et $\hat{x} \mapsto \underline{d_{T,W}^\epsilon}(\hat{x})$ sont des fonctions $\hat{f}$-invariantes sur $\hat{\Lambda}_T$.*

En particulier, elles sont $\hat{\nu}$-presque partout constantes. On notera

$$\overline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\nu),\ \underline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\nu),\ \overline{d^{\epsilon}_{T,W}}(\nu),\ \underline{d^{\epsilon}_{T,W}}(\nu)$$

les valeurs de ces constantes.

Les ingrédients principaux de la démonstration sont $f^*T = dT$ et les relations (4.2.1). Nous aurons également besoin du lemme suivant (voir Briend-Duval [BrDu99]).

Lemme 4.2.4. *Soit $z \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}_f$. On définit les quantités*

- $a(z) := \left\|(D_z f)^{-1}\right\|^{-1}$.
- $\gamma(z) := \min(\frac{1}{2}a(z)\,\|f\|^{-1}_{\mathcal{C}^2,\mathbb{P}^2}\,;1)$.
- $M_f := \|f\|_{\mathcal{C}^1,\mathbb{P}^2}$.

Alors f est injective sur $B_z(\gamma(z))$ et pour tout $r \in [0,\gamma(z)]$,

$$B_{f(z)}\left(\frac{1}{2}a(z)r\right) \subset f(B_z(r)) \subset B_{f(z)}(M_f r).$$

Démonstration. Remarquons que l'inclusion $f(B_z(r)) \subset B_{f(z)}(M_f r)$ provient directement de l'inégalité des accroissements finis.

Pour montrer l'autre inclusion, nous allons tout d'abord calculer $\mathrm{Lip}(Id - (D_z f)^{-1} \circ f))$ sur $B_z(\gamma(z))$. Pour cela, remarquons que pour tout $w \in B_z(\gamma(z))$, la différentielle de $Id-(D_z f)^{-1}\circ f$ en w est $Id - (D_z f)^{-1} \circ D_w f$. On peut majorer sa norme comme suit :

$$\begin{aligned}\left\|Id - (D_z f)^{-1} \circ D_w f\right\| &\le \left\|(D_z f)^{-1}\right\| \|D_z f - D_w f\| \\ &\le \left\|(D_z f)^{-1}\right\| \|f\|_{\mathcal{C}^2,\mathbb{P}^2}\, d(z,w)\end{aligned}$$

Par choix de w dans $B_z(\gamma(z))$, on a $d(z,w) \le \gamma(z) \le \frac{1}{2}a(z)\,\|f\|^{-1}_{\mathcal{C}^2,\mathbb{P}^2}$.

Donc $\left\|Id - (D_z f)^{-1} \circ D_w f\right\| \le 1/2$ et

$$\mathrm{Lip}(Id - (D_z f)^{-1} \circ f) \le 1/2 \text{ sur } B_z(\gamma(z))$$

Cela implique que pour tout $w \in B_z(\gamma(z))$,

$$\left\|(z - (D_z f)^{-1} \circ f(z)) - (w - (D_z f)^{-1} \circ f(w))\right\| \le \frac{1}{2}\|z-w\|$$

En utilisant que $\|a - b\| \ge \|a\| - \|b\|$ où $a = z - w$ et $b = (D_z f)^{-1} \circ f(z) - (D_z f)^{-1} \circ f(w)$, on obtient

$$\left\|(D_z f)^{-1}(f(z) - f(w))\right\| \ge \frac{1}{2}\|z-w\|$$

ce qui implique $\|(f(z) - f(w))\| \ge \frac{1}{2}a(z)\,\|z-w\|$. Cela montre l'injectivité de f sur $B_z(\gamma(z))$, et

$$B_{f(z)}\left(\frac{1}{2}a(z)r\right) \subset f(B_z(r))$$

pour tout $r \le \gamma(z)$. □

Démonstration de 4.2.3. Nous présentons ici la preuve de l'invariance de $\overline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\hat{x})$, les trois autres applications se traitant par des arguments similaires.

Soit $\hat{x} \in \mathcal{FN}$. Rappelons que cela implique $\hat{x} \in \hat{X}$ et donc $x_i \notin \mathcal{C}_f$ pour tout i. D'après le Lemme 4.2.4, pour $r \leq \gamma(x_0)$, f est injective sur $B_{x_0}(r)$ et $B_{f(x_0)}\left(\frac{1}{2}a(x_0)r\right) \subset f(B_{x_0}(r))$, d'où l'on déduit

$$T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)\left[B_{f(x_0)}\left(\frac{1}{2}a(x_0)r\right)\right] \leq T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)[f(B_{x_0}(r))] \tag{4.2.2}$$

Par définition, le terme de droite est $\int_{f(B_{x_0}(r))} T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)$. On utilise l'injectivité de f sur $B_{x_0}(r)$ pour effectuer un changement de variables :

$$\begin{aligned} T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)[f(B_{x_0}(r))] &= \int_{B_{x_0}(r)} f^*\left(T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)\right) \\ &= \int_{B_{x_0}(r)} f^*T \wedge f^*\left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right) \end{aligned}$$

On utilise alors que

1. $f^*T = dT$
2. $f^*\left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right) = c(\hat{x}) \frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{x}} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{x}}}$, où $c(\hat{x})^{-1} = \alpha_{1,\hat{f}(\hat{x})}$ est la constante obtenue en lisant le diagramme commutatif des formes normales du Théorème 4.1.3 sur la première coordonnée (Voir également (4.2.1), on utilise ici qu'on est dans le cas non-résonant). Cette identité est vraie au voisinage de x_0 d'après la Remarque 4.1.4.

On obtient alors, quitte à diminuer r :

$$T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)[f(B_{x_0}(r))] = d.c(\hat{x}) \int_{B_{x_0}(r)} T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{x}} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{x}}}\right)$$

Revenons à (4.2.2),

$$T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)\left[B_{f(x_0)}\left(\frac{1}{2}a(x_0)r\right)\right] \leq d.c(\hat{x})\ T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{x}} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{x}}}\right)[B_{x_0}(r)]$$

Si r est assez petit, alors $\log(\frac{1}{2}a(x_0)r) < 0$ et

$$\frac{\log T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)\left[B_{f(x_0)}\left(\frac{a(x_0)r}{2}\right)\right]}{\log\left(\frac{a(x_0)r}{2}\right)} \geq \frac{\log d.c(\hat{x})}{\log\left(\frac{a(x_0)r}{2}\right)} + \frac{\log T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{x}} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{x}}}\right)[B_{x_0}(r)]}{\log\left(\frac{a(x_0)r}{2}\right)}$$

En remarquant que $\lim_{r\to 0} \frac{\log d.c(\hat{x})}{\log(a(x_0)r/2)} = 0$, et en développant le logarithme, on obtient

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\log T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{f}(\hat{x})}}\right)\left[B_{f(x_0)}\left(\frac{a(x_0)r}{2}\right)\right]}{\log\left(\frac{a(x_0)r}{2}\right)} \geq \limsup_{r\to 0} \frac{\log T \wedge \left(\frac{i}{2} dZ^{\epsilon}_{\hat{x}} \wedge \overline{dZ^{\epsilon}_{\hat{x}}}\right)[B_{x_0}(r)]}{\log r + \log(a(x_0)/2)}$$

On reconnaît à gauche $\overline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\hat{f}(\hat{x}))$. Le terme de droite est égal à $\overline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\hat{f}(\hat{x}))$ car $\log r$ tend vers $-\infty$ et $\log(a(x_0)/2)$ est constant. On a donc prouvé que $\overline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\hat{f}(\hat{x})) \geq \overline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\hat{x})$. Alors, par ergodicité de $\hat{\nu}$, $\overline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\hat{x})$ est constante sur un ensemble $\hat{\Lambda}_T$ de $\hat{\nu}$-mesure 1 (Voir Proposition 2.1.2), que l'on peut supposer invariant quitte à le remplacer par $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}^n(\hat{\Lambda}_T)$. $\square$

4.3 Boules dynamiques et branches inverses

On rappelle que la (n,r)-boule dynamique centrée en x et de rayon r est

$$B_n(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{P}^2 \mid \max_{i=0,\dots,n} d(f^i(x), f^i(y)) < r \right\}.$$

Lemme 4.3.1. *Soient $L > 0$ et $\eta > 0$. Alors il existe $n_3(L) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$ vérifiant $\eta_\epsilon(\hat{x}) \geq \eta$ et $L_\epsilon(\hat{x}) \leq L$, on ait pour tout $n \geq n_3(L)$, pour tout $r \leq \eta$,*

$$f_{\hat{x}_n}^{-n}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) \subset B_n(x_0, r)$$

Démonstration. Remarquons que pour tout $k \leq n$, f^k est injective sur $f_{\hat{x}_n}^{-n}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon}))$ et que $f^k f_{\hat{x}_n}^{-n} = f_{\hat{x}_n}^{-n+k}$. En posant $p = n - k$, il suffit de montrer que

$$\forall p \in [\![0, n]\!] \quad f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) \subset B_{x_{n-p}}(r). \tag{4.3.1}$$

On choisit m (entier) assez grand pour que $Le^{-m\lambda_2 + m\epsilon} \leq 1$. On pose $n_3(L) \geq m$ un entier assez grand pour que $e^{-n_3\epsilon} \leq \frac{1}{M^m}$, avec $M := max(\|Df\|_{\infty,\mathbb{P}^2}, 1)$. Ainsi,

$$\forall n \geq n_3,\ \forall p \in [\![0, n]\!]\,, \quad f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) \subset f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(\frac{r}{M^m}e^{-n\epsilon})). \tag{4.3.2}$$

Pour montrer (4.3.1), on va traiter séparément les cas $p \leq m$ et $p > m$. On sait que pour tout p, $\mathrm{Lip}\, f_{\hat{x}_n}^{-p} \leq L(\hat{x}_n)e^{-p\lambda_2 + p\epsilon} \leq Le^{n\epsilon}e^{-p\lambda_2+p\epsilon}$ sur $B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x}_n))$ qui contient $B_{x_n}(\eta e^{-n\epsilon})$. Donc pour tout $n \geq n_3(L) \geq m$, pour tout $p \in [\![m, n]\!]$, pour tout $r \leq \eta$:

$$f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-n\epsilon})) \subset B_{x_{n-p}}(re^{-n\epsilon}.Le^{n\epsilon}e^{-p\lambda_2+p\epsilon}) = B_{x_{n-p}}(r.L.e^{-p\lambda_2+p\epsilon}) \subset B_{x_{n-p}}(r).$$

Cela entraîne pour tout $n \geq n_3(L) \geq m$, pour tout $p \in [\![m, n]\!]$, pour tout $r \leq \eta$:

$$f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(\frac{r}{M^m}e^{-n\epsilon})) \subset B_{x_{n-p}}(\frac{r}{M^m}) \tag{4.3.3}$$

Et donc, en utilisant (4.3.2) et $M^m \geq 1$:

$$\forall p \in [\![m, n]\!]\,, \quad f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) \subset B_{x_{n-p}}(r) \tag{4.3.4}$$

On a donc établi (4.3.1) pour $p \in [\![m, n]\!]$. Montrons cette inclusion pour $p \in [\![0, m]\!]$. Pour tout $p \in [\![0, m]\!]$, on pose $p = m - p'$ où $p' \in [\![0, m]\!]$. Alors d'après (4.3.2) on a :

$$\begin{aligned} f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) &\subset f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(\frac{r}{M^m}e^{-n\epsilon})) \\ &= f_{\hat{x}_n}^{-m+p'}(B_{x_n}(\frac{r}{M^m}e^{-n\epsilon})) = f^{p'}(f_{\hat{x}_n}^{-m}(B_{x_n}(\frac{r}{M^m}e^{-n\epsilon})). \end{aligned}$$

On déduit de (4.3.3) avec $p = m$:

$$f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) \subset f^{p'}(B_{x_{n-m}}(\frac{r}{M^m}))$$

Finalement,

$$f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) \subset B_{x_{n-m+p'}}(\frac{r}{M^m}M^p)$$

par inégalité des accroissements finis. Il s'ensuit

$$\forall p \in [\![0, m]\!]\,, \quad f_{\hat{x}_n}^{-p}(B_{x_n}(re^{-2n\epsilon})) \subset B_{x_{n-p}}(r) \tag{4.3.5}$$

En combinant (4.3.4) et (4.3.5), on obtient bien (4.3.1). $\square$

Lemme 4.3.2. *Soient $\tau > 0$ et $\eta > 0$. Alors il existe $n_4(\tau) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$ vérifiant $\eta_\epsilon(\hat{x}) \geq \eta$ et $\beta_\epsilon(\hat{x}) \leq \tau$, on ait pour tout $n \geq n_4(\tau)$, pour tout $r \leq \eta$,*

$$B_{x_0}(r.e^{-n\lambda_1-4n\epsilon}) \subset f^{-n}_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(\frac{r}{4}e^{-2n\epsilon}))$$

Démonstration. Ce résultat est obtenu en toute généralité, par exemple dans Dinh-Dupont [DD04] (Proposition 3.1) par des arguments de calcul différentiel. Nous donnons ici une preuve rapide dans le cas où les exposants ne résonnent pas grâce au Théorème des formes normales.

Comme $r \leq \eta_\epsilon(\hat{x})$, on peut utiliser le Théorème 4.1.3 et mettre $f^{-n}_{\hat{x}_n}$ sous forme normale :
Sur $B_{x_n}(\frac{r}{4}e^{-2n\epsilon})$, $f^{-n}_{\hat{x}_n} = (\xi^\epsilon_{\hat{x}})^{-1} \circ R_{n,\hat{x}} \circ \xi^\epsilon_{\hat{x}_n}$.

Par l'estimation (4.1.1), on sait que

$$\mathbb{D}^2(\frac{1}{2}\frac{r}{4}e^{-2n\epsilon}) \subset \xi^\epsilon_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(\frac{r}{4}e^{-2n\epsilon})) \tag{4.3.6}$$

$R_{n,\hat{x}}$ est linéaire diagonale et les modules de ses coefficients sont minorés par $e^{-\lambda_1 n - n\epsilon}$, donc

$$\mathbb{D}^2\left(\frac{r}{8}e^{-2n\epsilon}e^{-\lambda_1 n-\epsilon n}\right) \subset R_{n,\hat{x}}\left(\mathbb{D}^2\left(\frac{1}{2}\frac{r}{4}e^{-2n\epsilon}\right)\right) \tag{4.3.7}$$

En utilisant que $\tau^{-1} \leq \beta_\epsilon(\hat{x})^{-1}$ ainsi que (4.1.1), on obtient que

$$B_x(\frac{r}{8\tau}e^{-\lambda_1 n-3\epsilon n}) \subset B_x\left((\beta_\epsilon(\hat{x}))^{-1}\frac{r}{8}e^{-\lambda_1 n-3\epsilon n}\right) \subset (\xi^\epsilon_x)^{-1}\left(\mathbb{D}^2\left(\frac{r}{8}e^{-\lambda_1 n-3\epsilon n}\right)\right) \tag{4.3.8}$$

Finalement, en regroupant les inclusions (4.3.6), (4.3.7), (4.3.8) et en prenant $n \geq n_4(\tau)$, où $n_4(\tau)$ est un entier tel que $\frac{1}{8\tau} \geq e^{-n\epsilon}$, on a

$$\forall n \geq n_4(\tau), \quad B_x(r.e^{-\lambda_1 n-4\epsilon n}) \subset f^{-n}_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(\frac{r}{4}e^{-2n\epsilon}))$$

□

Lemme 4.3.3. *Soient $\tau > 0$ et $\eta > 0$. Alors il existe $n_5(\tau) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$ vérifiant $\eta_\epsilon(\hat{x}) \geq \eta$ et $\beta_\epsilon(\hat{x}) \leq \tau$ on ait pour tout $n \geq n_5$, pour tout $r \leq \eta$,*

$$B_{x_0}(r.e^{-n\lambda_2+3n\epsilon}) \supset f^{-n}_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(r/4))$$

$$B_{x_{-n}}(r.e^{-n\lambda_2+3n\epsilon}) \supset f^{-n}_{\hat{x}}(B_{x_0}(r/4))$$

Démonstration. Comme dans Lemme précédent, nous donnons ici une preuve rapide dans le cas où les exposants ne résonnent pas grâce au Théorème des formes normales. Voir Dinh-Dupont [DD04] pour le résultat en toute généralité.

Comme on a pris $r \leq \eta$, on peut utiliser le Théorème (4.1.3) et mettre f^{-n} sous forme normale : Sur $B_{x_n}(r/4)$, $f^{-n}_{\hat{x}_n} = (\xi^\epsilon_{\hat{x}})^{-1} \circ R_{n,\hat{x}} \circ \xi^\epsilon_{\hat{x}_n}$.

Par l'estimation (4.1.1), on sait que

$$\mathbb{D}^2\left(\beta_\epsilon(\hat{x})e^{n\epsilon}\frac{r}{4}\right) \supset \xi^\epsilon_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(\frac{r}{4})) \tag{4.3.9}$$

$R_{n,\hat{x}}$ est linéaire diagonale et ses coefficients sont majorés par $e^{-\lambda_2 n+n\epsilon}$, donc

$$\mathbb{D}^2\left(\beta_\epsilon(\hat{x})\frac{r}{4}e^{-\lambda_2 n+2\epsilon n}\right) \supset R_{n,\hat{x}}\left(\mathbb{D}^2\left(\beta_\epsilon(\hat{x})e^{n\epsilon}\frac{r}{4}\right)\right) \tag{4.3.10}$$

En utilisant à nouveau (4.1.1), on obtient que

$$B_x\left(\beta_\epsilon(\hat{x})\frac{r}{2}e^{-\lambda_2 n+2\epsilon n}\right) \supset (\xi^\epsilon_{\hat{x}})^{-1}(\mathbb{D}^2\left(\beta_\epsilon(\hat{x})\frac{r}{4}e^{-\lambda_2 n+2\epsilon n}\right)) \tag{4.3.11}$$

Par hypothèse, $\beta_\epsilon(\hat{x}) \leq \tau$. Ainsi, en regroupant les inclusions (4.3.9), (4.3.10), (4.3.11) et en prenant $n \geq n_5(\tau)$, où $n_5(\tau)$ est un entier tel que $\frac{\tau}{2} \leq e^{n\epsilon}$, on a

$$\forall n \geq n_5(\tau), \quad B_{x_0}(r.e^{-n\lambda_2+3n\epsilon}) \supset f^{-n}_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(r/4))$$

Pour obtenir la deuxième inclusion, il faut utiliser la lenteur de $\beta_\epsilon(\hat{x})$ dans (4.3.11) au lieu de (4.3.9). □

4.4 Encadrement du tiré en arrière de la forme de Fubini-Study ω

Proposition 4.4.1. *Soit ν une mesure ergodique dilatante d'exposants $\lambda_1 > \lambda_2$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $(Z^\epsilon_{\hat{x}}, W^\epsilon_{\hat{x}})_{\hat{x}}$ un système de coordonnées d'Oseledec-Poincaré donné par le Théorème des formes normales. Soit $\tau > 0$. Il existe $n_6(\tau) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_6(\tau)$ et tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$ vérifiant $\eta_\epsilon(\hat{x}) \geq \eta_0$ et $\beta_\epsilon(\hat{x}) \leq \tau$, on a sur $f^{-n}_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(re^{-n\epsilon}))$ avec $r \leq \eta_0$:*

1. $2e^{n\epsilon}\left(e^{2n\lambda_1}\left(\frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}}}\right) + e^{2n\lambda_2}\left(\frac{i}{2}dW^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{W^\epsilon_{\hat{x}}}\right)\right) \geq (f^n)^*\omega$.
2. $(f^n)^*\omega \geq e^{-4n\epsilon+2n\lambda_1}\left(\frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}}}\right)$ *si les exposants ne résonnent pas.*
3. $(f^n)^*\omega \geq e^{-4n\epsilon+2n\lambda_2}\left(\frac{i}{2}dW^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{W^\epsilon_{\hat{x}}}\right)$.

Démonstration. D'après le Théorème 4.1.3, $(f^n)^*\omega = (\xi^\epsilon_{\hat{x}})^*((R_{n,\hat{x}})^{-1})^*((\xi_{\hat{x}_n})^{-1})^*\omega$. Le résultat provient des Lemmes 4.4.3, 4.4.4 et 4.4.5 détaillés ci-dessous. □

Lemme 4.4.2. *Soit $\hat{x} \in \mathcal{FN}$ tel que $\beta_\epsilon(\hat{x}) \leq \tau$. Alors*

$$\forall n \geq 0,\ \forall (z,w) \in \mathbb{D}^2\left(\frac{\rho_\epsilon(\hat{x}_n)}{2}\right),\ \forall u \in \mathbb{C}^2, \quad 2\,|u| \geq \left|D_{(z,w)}(\xi^\epsilon_{\hat{x}_n})^{-1}(u)\right| \geq \frac{e^{-n\epsilon}}{\tau}\,|u|$$

Démonstration. Comme $\mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}_n)/2) \subset \xi^\epsilon_{\hat{x}_n}\left[B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x}_n))\right]$, on sait par le Théorème 4.1.3 et en utilisant que β_ϵ est ϵ-rapide que pour tout $p = (z,w)$ et $p' = (z',w')$ dans $\mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}_n)/2)$,

$$e^{-n\epsilon}.\tau^{-1}d(p,p') \leq \left|(\xi^\epsilon_{\hat{x}_n})^{-1}(p) - (\xi^\epsilon_{\hat{x}_n})^{-1}(p')\right| \leq 2d(p,p')$$

Cela nous donne l'encadrement de $D_p(\xi^\epsilon_{\hat{x}_n})^{-1}$ dans toutes les directions. □

Lemme 4.4.3. *Il existe $n_6(\tau) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_6(\tau)$ et tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$ vérifiant $\eta_\epsilon(\hat{x}) \geq \eta_0$ et $\beta_\epsilon(\hat{x}) \leq \tau$, on a sur $f^{-n}_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(re^{-n\epsilon}))$, avec $r \leq \eta_0$ en notant $\omega_0 = \frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z} + \frac{i}{2}dw \wedge d\overline{w}$.*

$$2\omega_0 \geq ((\xi_{\hat{x}_n})^{-1})^*\omega \geq e^{-2n\epsilon}\omega_0$$

Démonstration. L'idée est "diagonaliser" la forme $((\xi_{\hat{x}_n})^{-1})^*\omega$.

$((\xi_{\hat{x}_n})^{-1})^*\omega$ est une forme positive, donc s'écrit dans un ouvert de coordonnées locales comme $a(z,w)dz \wedge d\overline{z} + b(z,w)dw \wedge d\overline{z} + \overline{b}(z,w)dz \wedge d\overline{w} + d(z,w)dw \wedge d\overline{w}$ telle que $\begin{pmatrix} a(z,w) & b(z,w) \\ \overline{b}(z,w) & d(z,w) \end{pmatrix}$ soit hermitienne définie positive pour tout (z,w) où est définie $(\xi_{\hat{x}_n})^{-1}$.

Donc, il existe pour tout (z,w) une matrice unitaire $U_1(z,w)$ telle que :

$$U_1(z,w)\begin{pmatrix} a(z,w) & b(z,w) \\ \overline{b}(z,w) & d(z,w) \end{pmatrix} U_1^{-1}(z,w) = \begin{pmatrix} \alpha(z,w) & 0 \\ 0 & \beta(z,w) \end{pmatrix}$$

avec $0 < \alpha(z,w) \leq \beta(z,w) < +\infty$. Puisque ω_0 est invariante par le groupe unitaire, on a

$$\beta(z,w)\omega_0 \geq ((\xi_{\hat{x}_n})^{-1})^*\omega \geq \alpha(z,w)\omega_0.$$

Mais $\alpha(z,w) \geq e^{-n\epsilon}\tau^{-1}$ et $\beta(z,w) \leq 2$ par le Lemme 4.4.2, donc en prenant pour n_6 un entier tel que $\tau^{-1} > e^{-n_6\epsilon}$, on obtient le résultat.

□

Lemme 4.4.4. *Pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$, pour tout $n \geq n_2(\hat{x})$,*

1. $e^{2n\epsilon}\frac{i}{2}\left(e^{2n\lambda_1}dz \wedge d\overline{z} + e^{2n\lambda_2}dw \wedge d\overline{w}\right) \geq ((R_{n,\hat{x}})^{-1})^*\omega_0$.
2. $((R_{n,\hat{x}})^{-1})^*\omega_0 \geq e^{2(n\lambda_1 - n\epsilon)}\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z}$ *si les exposants ne résonnent pas.*
3. $((R_{n,\hat{x}})^{-1})^*\omega_0 \geq e^{2(n\lambda_2 - n\epsilon)}\frac{i}{2}dw \wedge d\overline{w}$.

Démonstration. On utilise le fait que $R_{n,\hat{x}}$ est une application linéaire diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_{n,\hat{x}} & 0 \\ 0 & \beta_{n,\hat{x}} \end{pmatrix}$ où $e^{-n\epsilon-n\lambda_1} \leq |\alpha_{n,\hat{x}}| \leq e^{n\epsilon-n\lambda_1}$ et $e^{-n\epsilon-n\lambda_2} \leq |\beta_{n,\hat{x}}| \leq e^{n\epsilon-n\lambda_2}$ (voir Théorème 4.1.3) et le fait que $\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z}$ et $\frac{i}{2}dw \wedge d\overline{w}$ sont des $(1,1)$-formes positives. □

Lemme 4.4.5. *Pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$,*

$$(\xi_{\hat{x}}^\epsilon)^*(\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z}) = (\frac{i}{2}dZ_{\hat{x}}^\epsilon \wedge d\overline{Z_{\hat{x}}^\epsilon}) \qquad (\xi_{\hat{x}}^\epsilon)^*(\frac{i}{2}dw \wedge d\overline{w}) = (\frac{i}{2}dW_{\hat{x}}^\epsilon \wedge d\overline{W_{\hat{x}}^\epsilon})$$

Démonstration. On reconnait la Définition 4.2.1 de $Z_{\hat{x}}^\epsilon$ et $W_{\hat{x}}^\epsilon$ □

4.5 Uniformisations

Fixons $\epsilon > 0$. Soit ν une mesure ergodique. L'objectif de cette section est de construire un ensemble $\hat{\Lambda}_\epsilon \subset \hat{X}$ de mesure arbitrairement proche de 1 sur lequel on aura de bonnes uniformisations (Mesure de boules dynamiques, dimension du courant T, contrôles des fonctions lentes, etc...). On aura

$$\hat{\nu}(\hat{\Lambda}_\epsilon) \geq 1 - \delta/2.$$

Mesure des boules dynamiques.

D'après la Section 2.5, il existe $\eta_0 > 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que

$$\Lambda^{(1)} = \left\{ \hat{x} \in \hat{X},\ \forall r \leq \eta_0,\ \forall n \geq n_0, \quad \begin{array}{c} \nu(B_n(x_0, \eta_0/8)) \geq e^{-nh_\nu - \epsilon n} \\ \nu(B_n(x_0, 5r)) \leq e^{-nh_\nu + \epsilon n} \end{array} \right\} \tag{4.5.1}$$

vérifie $\hat{\nu}(\Lambda^{(1)}) \geq 1 - \delta/10$. On utilisera la majoration pour démontrer le Théorème 5.2.1 (voir le Lemme 5.1.1) et la minoration pour prouver les Théorèmes 5.3.1 et 6.3.1 (via le Lemme 5.1.2). Dans le prochain contrôle, on s'autorise à diminuer η_0 et à augmenter n_0.

Contrôle de n_1, n_2 et des fonctions lentes ρ_ϵ, L_ϵ, η_ϵ et β_ϵ.

Ces fonctions apparaissent dans le Théorème des formes normales. On fixe $\rho_0 > 0$, $L_0 > 0$ et $\tau_0 > 0$ tels que

$$\Lambda^{(2)} := \{\hat{x} \in \mathcal{FN},\ n_1(\hat{x}), n_2(\hat{x}) \leq n_0,\ \rho_\epsilon(\hat{x}) \geq \rho_0,\ L_\epsilon(\hat{x}) \leq L_0,\ \eta_\epsilon(\hat{x}) \geq \eta_0,\ \beta_\epsilon(\hat{x}) \leq \tau_0\} \tag{4.5.2}$$

vérifie $\hat{\nu}(\Lambda^{(2)}) \geq 1 - \delta/10$.

Uniformisation de la dimension du courant

L'ensemble $\hat{\Lambda}_T$ provient de la Proposition 4.2.3. Comme dans la section sur les boules dynamiques, on peut trouver un $r_1 > 0$ tel que

$$\Lambda^{(3)} = \left\{ \hat{x} \in \hat{\Lambda}_T,\quad \forall r \leq r_1, \quad \begin{array}{c} (T \wedge (\frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}}})(B_{x_0}(r))) \geq r^{\overline{d^\epsilon_{T,Z}}+\epsilon} \\ (T \wedge (\frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}}})(B_{x_0}(r))) \leq r^{\underline{d^\epsilon_{T,Z}}-\epsilon} \\ (T \wedge (\frac{i}{2} dW^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{W^\epsilon_{\hat{x}}})(B_{x_0}(r))) \leq r^{\underline{d^\epsilon_{T,W}}-\epsilon} \end{array} \right\}$$

vérifie $\hat{\nu}(\Lambda^{(3)}) \geq 1 - \delta/10$.

Uniformisation de la dimension de la mesure

L'ensemble Λ_ν provient de la Proposition 2.4.2. On peut fixer un $r_2 > 0$ tel que

$$\Lambda^{(4)} = \pi_0^{-1}\{x \in \Lambda_\nu,\ \forall r \leq r_2,\ \nu(B_x(r)) \leq r^{\underline{d_\nu}-\epsilon}\} \cap \mathcal{FN}$$

vérifie $\hat{\nu}(\Lambda^{(4)}) \geq 1 - \delta/10$.

Définition de $\hat{\Lambda}_\epsilon$ et η_1

On pose

$$\hat{\Lambda}_\epsilon = \Lambda^{(1)} \cap \Lambda^{(2)} \cap \Lambda^{(3)} \cap \Lambda^{(4)},$$

qui est de $\hat{\nu}$-mesure supérieure à $1 - \frac{5\delta}{10}$. On définit également

$$\eta_1 := \min(\eta_0, r_1, r_2)$$

le rayon pour lequel toutes les uniformisations sont valables. On fixe n_7 assez grand pour que

$$e^{-n_7\epsilon} \leq \frac{1-\delta}{2} \text{ et } 2\eta_1 e^{n_7(-\lambda_1 - \epsilon)} < \eta_1.$$

On applique les Lemmes 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.3 ainsi que la Proposition 4.4.1 avec $\tau = \tau_0$, $L = L_0$ et $\eta = \eta_0$. On note $n_3 := n_3(L_0)$, $n_4 := n_4(\tau_0)$, $n_5 := n_5(\tau_0)$, $n_6 := n_6(\tau_0)$ et

$$N_0 = \max(n_0, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7).$$

Les notations $n_1(\hat{x})$ et $n_2(\hat{x})$ sont conservées comme rang d'application des formes normales.

Chapitre 5

Minoration des dimensions supérieures $d^{\epsilon}_{T,Z}$ et $d^{\epsilon}_{T,W}$

> There is someone in my head,
> but it's not me.
>
> Pink Floyd, Brain Damage

5.1 Sur les ensembles de points séparés

5.1.1 Séparation élémentaire

Le lemme suivant nous servira pour la preuve du Théorème 5.2.1 avec $A = \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$ et $c = 1$. La formulation pour A et c quelconques nous sera utile pour la preuve du Théorème 5.3.1.

Lemme 5.1.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique d'entropie h_ν. Soit $A \subset \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$ tel que $\nu(A) > 0$, $c \in]0,1]$. Soit $n \geq N_0$ et soit $\{x_1, \dots x_{N_n}\}$ un ensemble de points $(n, c\eta_1)$-séparé maximal de A. Alors :*

1. *Pour tout $i \neq j$, les boules dynamiques vérifient $B_n(x_i, c.\eta_1/2) \cap B_n(x_j, c.\eta_1/2) = \emptyset$.*
2. *$A \subset \cup_{i=1}^{N_n} B_n(x_i, c.\eta_1)$.*
3. *$\nu(B_n(x_i, c\eta_1)) \leq e^{-nh_\nu + n\epsilon}$.*
4. *$e^{-nh_\nu - n\epsilon} \leq \nu(B_n(x_i, c\eta_1))$ si $c \geq 1/8$.*
5. *On a l'estimation $N_n \geq \nu(A) e^{nh_\nu - n\epsilon}$.*

Démonstration. Le point 1 vient de la séparation, le point 2 de la maximalité, les points 3 et 4 de la section 2.5 (formule de Brin-Katok) (car $n \geq N_0$, $c\eta_1 \leq \eta_1$ et $x_i \in \pi_0(\Lambda^{(1)})$).

Les points 2 et 3 impliquent alors $\nu(A) \leq \sum_{i=1}^{N_n} \nu(B_n(x_i, c.\eta_1)) \leq N_n e^{-nh_\nu + n\epsilon}$ ce qui donne le point 5. □

5.1.2 Séparation concentrée

On construit dans cette section un bon ensemble de points pour le Théorème 5.3.1. On reprend pour cela les arguments de de Thélin et Vigny dans [dTV15], section 6.

On sait que pour tout x_i dans le lemme précédent (avec $c = 1/4$), $\nu(B_n(x_i, \eta_1/4)) \leq e^{-nh_\nu + n\epsilon}$. Cependant, un point crucial des preuves des Théorèmes 5.3.1 et 6.3.1 est de pouvoir utiliser toute la machinerie des uniformisations mise en place en section 4.5, c'est à dire qu'une partie importante (du point de vue de ν) des boules dynamiques soit dans $\pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$. On veut donc montrer qu'il possible de sélectionner un grand nombre de x_i tels que

$$\nu(B_n(x_i, \eta_1/4) \cap \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)) \geq e^{-nh_\nu - 2n\epsilon}.$$

Lemme 5.1.2. *Soit $A \subset \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$ tel que $\nu(A) \geq 1 - \delta$. Alors pour tout $n \geq N_0$, il existe un ensemble de $N_{n,2}$ points $(n, \eta_1/4)$-séparés $(x_1, \ldots, x_{N_{n,2}})$ de A tels que*

1. *Pour tout $i \neq j$, les boules dynamiques vérifient $B_n(x_i, \eta_1/8) \cap B_n(x_j, \eta_1/8) = \emptyset$.*
2. *Pour tout i, $\nu(B_n(x_i, \eta_1/4) \cap A) \geq e^{-nh_\nu - 2\epsilon n}$.*
3. *On a l'estimation $N_{n,2} \geq \nu(A) e^{nh_\nu - 2n\epsilon}$.*
4. *$e^{-nh_\nu - n\epsilon} \leq \nu(B_n(x_i, c\eta_1))$ si $c \geq 1/8$.*

Démonstration. On se place à $n \geq N_0$ et $r < \eta_1$.

Le Lemme 5.1.1 pour $c = 1/4$ nous assure l'existence d'un $N_{n,1} \in \mathbb{N}$ et d'un ensemble maximal de points $(n, \eta_1/4)$-séparés $(x_1, \ldots, x_{N_{n,1}})$ de A vérifiant :

– Pour tout $i \neq j$, $B_n(x_i, \eta_1/8) \cap B_n(x_j, \eta_1/8) = \emptyset$.
– $A \subset \cup_{i=1}^{N_{n,1}} B_n(x_i, \eta_1/4)$.
– $e^{-nh_\nu - n\epsilon} \leq \nu(B_n(x_i, \eta_1/8))$.
– $N_{n,1} \geq \nu(A) e^{nh_\nu - n\epsilon}$

On s'intéresse à l'ensemble $\{i \mid \nu(B_n(x_i, \eta_1/4) \cap A) \geq e^{-nh_\nu - 2\epsilon n}\}$. On note $N_{n,2}$ le cardinal de cet ensemble et on suppose, quitte à renuméroter les x_i, que cet ensemble est précisément $[\![1, N_{n,2}]\!]$ (avec la convention que cet intervalle est vide si $N_{n,2} = 0$). Nous allons minorer $N_{n,2}$.

On sait que $A \subset \cup_{i=1}^{N_{n,1}} B_n(x_i, \eta_1/4)$, donc $A \subset \cup_{i=1}^{N_{n,1}} [B_n(x_i, \eta_1/4) \cap A]$ et

$$\nu(A) \leq \sum_{i=1}^{N_{n,2}} \nu(B_n(x_i, \eta_1/4) \cap A) + \sum_{i=N_{n,2}+1}^{N_{n,1}} \nu(B_n(x_i, \eta_1/4) \cap A)$$

Si $i \notin [\![1, N_{n,2}]\!]$, on a $\nu(B_n(x_i, \eta_1/4) \cap A) \leq e^{-nh_\nu - 2\epsilon n}$ par définition de $N_{n,2}$. Sinon, on sait que $x_i \in \pi_0(\Lambda^{(1)})$ et donc $\nu(B_n(x_i, \eta_1/4)) \leq e^{-nh_\nu + \epsilon n}$. D'où

$$\nu(A) \leq N_{n,2}.e^{-nh_\nu + \epsilon n} + (N_{n,1} - N_{n,2}) e^{-nh_\nu - 2\epsilon n} \tag{5.1.1}$$

On a besoin d'une majoration de $N_{n,1}$ pour conclure. Par séparation des x_i, on a $B_n(x_i, \eta_1/8) \cap B_n(x_j, \eta_1/8) = \emptyset$ si $i \neq j$. Donc

$$1 \geq \nu(\bigsqcup_{i=1}^{N_{n,1}} B_n(x_i, \eta_1/8)) = \sum_{i=1}^{N_{n,1}} \nu(B_n(x_i, \eta_1/8))$$

En utilisant que $\nu(B_n(x_i, \eta_1/8)) \geq e^{-nh_\nu - \epsilon n}$, on obtient

$$e^{nh_\nu + \epsilon n} \geq N_{n,1} \geq N_{n,1} - N_{n,2}$$

En injectant cela dans (5.1.1), on obtient

$$\nu(A) \leq N_{n,2}.e^{-nh_\nu + \epsilon n} + e^{-\epsilon n}.$$

Comme $n \geq n_7$, on a $e^{-\epsilon n} \leq (1-\delta)/2 \leq \nu(A)/2 \leq 1/2$, d'où

$$N_{n,2} \geq \frac{\nu(A)}{2} e^{nh_\nu - \epsilon n} \geq \nu(A) e^{nh_\nu - 2\epsilon n}.$$

□

A présent, nous montrons que l'on peut placer dans $B_n(x, \eta_1/2)$ un grand nombre de boules riemanniennes dont les centres sont dans $B_n(x, \eta_1/4) \cap \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$:

Lemme 5.1.3. *Soit $A \subset \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$. Soit $x \in A$ et soit $n \geq N_0$ tel que*

$$\nu(B_n(x, \eta_1/4) \cap A) \geq e^{-nh_\nu - 2n\epsilon}.$$

Soit $\{y_1, \ldots, y_{M_n}\}$ un ensemble de points maximal $2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}$-séparé dans $B_n(x, \eta_1/4) \cap A$. Alors,

1. *pour tout $i \neq j$, $B(y_i, \eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) \cap B(y_j, \eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) = \emptyset$.*
2. *$B_n(x, \eta_1/4) \cap A \subset \cup_{i=1}^{M_n} B(y_i, 2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})$.*
3. *$B(y_i, \eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) \subset B_n(x, \eta_1/2)$.*
4. *On a l'estimation $M_n \geq e^{-nh_\nu - 2n\epsilon} \left(\frac{1}{2\eta_1} e^{n\lambda_1 + 4n\epsilon}\right)^{\underline{d_\nu} - \epsilon}$.*

Démonstration. Le premier point vient de la séparation de l'ensemble, le deuxième de la maximalité. Les Lemmes 4.3.1 et 4.3.2 nous disent alors que $B(y_i, \eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) \subset B_n(y_i, \eta_1/4)$. Comme on a choisi les y_i dans $B_n(x, \eta_1/4)$, on a de plus $B_n(y_i, \eta_1/4) \subset B_n(x, \eta_1/2)$, ce qui donne le troisième point. Puisque $\cup_{i=1}^{M_n} B(y_i, 2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})$ recouvre $B_n(x, \eta_1/4) \cap A$, on a :

$$\nu(B_n(x, \eta_1/4) \cap A) \leq \sum_{i=1}^{M_n} \nu(B(y_i, 2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}))$$

Par hypothèse, le terme de gauche est supérieur à $e^{-nh_\nu - 2n\epsilon}$. Pour le terme de droite, comme $n \geq N_0$, on a $2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - n\epsilon} < \eta_1 \leq r_2$ et (par $y_i \in A \subset \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon) \subset \pi_0(\Lambda^{(4)})$)

$$\nu(B(y_i, 2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})) \leq (2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})^{\underline{d_\nu} - \epsilon}.$$

Cela montre que $e^{-nh_\nu - 2n\epsilon} \leq M_n (2\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})^{\underline{d_\nu} - \epsilon}$ et on a la minoration de M_n. □

5.2 Minoration des dimensions supérieures $d_{T,Z}^\epsilon$ et $d_{T,W}^\epsilon$

Nous obtenons le résultat suivant en utilisant les arguments du Théorème 1 de de Thélin-Vigny [dTV15]. Nous remplaçons leur technique de découpage par le Théorème des formes normales. Cela permet de montrer que le courant T possède une dimension directionnelle strictement plus grande que 2 relativement à toute mesure de grande entropie. Nous améliorerons la minoration à la Section 5.3 (en remplaçant λ_1 par λ_2). Enfin, nous étendrons cette propriété à tout courant positif fermé sur $\mathbb{P}^2$ dans la Section 5.4 avec des définitions adaptées. Cela répondra à une question de de Thélin-Vigny de manière locale et directionnelle pour les courants S.

Théorème 5.2.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique. Soient $\lambda_1 > \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov et soit h_ν son entropie. On suppose que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ sont strictement positifs et ne résonnent pas. Soit $\epsilon > 0$ et soient*

$(Z^\epsilon_{\hat{x}}, W^\epsilon_{\hat{x}})$ des systèmes de coordonnées d'Oseledec-Poincaré données par le Théorème 4.1.3. Soient $\overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\nu) = \overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\hat{x})$ $\hat{\nu}$-p.p. et $\overline{d^\epsilon_{T,W}}(\nu) = \overline{d^\epsilon_{T,W}}(\hat{x})$ $\hat{\nu}$-p.p. (Voir Proposition 4.2.3). Alors

$$\overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\nu) \geq 2 + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_1} + O(\epsilon)$$

$$\overline{d^\epsilon_{T,W}}(\nu) \geq 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_1} + O(\epsilon)$$

où $O(\epsilon)$ tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0, et ne dépend que de d, h_ν, λ_1 et λ_2.

Démonstration. Notons $\overline{d^\epsilon_{T,Z}} = \overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\nu)$. Pour la première inégalité, nous allons montrer que

$$(\lambda_1 + 4\epsilon)(\overline{d^\epsilon_{T,Z}} - 2 + \epsilon) + 13\epsilon \geq h_\nu - \log d \tag{5.2.1}$$

On a alors $O(\epsilon) = -\epsilon[(4(h_\nu - \log d)/\lambda_1 + 13)\frac{1}{\lambda_1 + 4\epsilon} + 1]$ en divisant par $\lambda_1 + 4\epsilon$.

On se place à $n \geq N_0$. Le Lemme 5.1.1 appliqué à $A = \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$ et $c = 1$ nous fournit un ensemble maximal de points (n, η_1)-séparés $(x_1, \ldots, x_{N_n})$ de $\pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$ avec

$$N_n \geq \nu(A) e^{nh_\nu - n\epsilon} \geq \hat{\nu}(\hat{\Lambda}_\epsilon) e^{nh_\nu - n\epsilon} \tag{5.2.2}$$

Pour tout i, il existe $\hat{x}_i \in \hat{\Lambda}_\epsilon$ tel que $\pi_0(\hat{x}_i) = x_i$.

On sait que le courant de Green vérifie $(f^n)_* T = d^n T$ et $\int_{\mathbb{P}^2} T \wedge \omega = 1$. Donc

$$\begin{aligned} d^n &= \int_{\mathbb{P}^2} ((f^n)_* T) \wedge \omega \\ &\geq \sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathbb{P}^2} (f^n)_* (1_{B_n(x_i, \eta_1/2)} T) \wedge \omega \text{ par les Lemmes 3.4.3 et 3.4.4} \\ &\geq \sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathbb{P}^2} (1_{B_n(x_i, \eta_1/2)} T) \wedge (f^n)^* \omega \text{ par dualité.} \end{aligned}$$

En utilisant les Lemmes 4.3.1 et 4.3.2 avec $\hat{x}_i \in \hat{\Lambda}_\epsilon$, on a que $B_{x_i}(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) \subset B_n(x_i, \eta_1/2)$. Parce que $(1_{B_n(x_i, \eta_1/2)} T) \wedge (f^n)^* \omega$ est une mesure positive, on a

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathbb{P}^2} (1_{B_{x_i}(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})} T) \wedge (f^n)^* \omega.$$

Par le Lemme 4.3.2, $B_{x_i}(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) \subset f^{-n}_{\hat{x}_{i,n}}(B_{x_{i,n}}(\frac{\eta_1}{8} e^{-2n\epsilon}))$ et on peut appliquer la Proposition 4.4.1 pour minorer $(f^n)^* \omega$ par $e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}_i} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}_i}}$ sur $B_{x_i}(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})$:

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_n} e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \int_{\mathbb{P}^2} (1_{B_{x_i}(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})} T) \wedge (\frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}_i} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}_i}}).$$

On réécrit cette inégalité sous la forme

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_n} e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \left(T \wedge \frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}_i} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}_i}} \right) (B_{x_i}(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})).$$

Comme on a pris les $\hat{x}_i$ dans $\hat{\Lambda}_\epsilon \subset \Lambda^{(3)}$ et que $n \geq N_0$, on obtient

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_n} e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \left(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}\right)^{\overline{d^\epsilon_{T,Z}} + \epsilon}.$$

Enfin, on utilise l'estimation (5.2.2) de N_n faite au début de la preuve :

$$d^n \geq \hat{\nu}(\hat{\Lambda}_\epsilon) e^{nh_\nu - n\epsilon} \cdot e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \left(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}\right)^{\overline{d^\epsilon_{T,Z}} + \epsilon},$$

ce qui donne :

$$d^n \geq \hat{\nu}(\hat{\Lambda}_\epsilon) \left(\frac{\eta_1}{2}\right)^{\overline{d^\epsilon_{T,Z}} + \epsilon} e^{nh_\nu - 13n\epsilon - n(\lambda_1 + 4\epsilon)(\overline{d^\epsilon_{T,Z}} - 2 + \epsilon)} \tag{5.2.3}$$

En passant au logarithme et divisant par n, on obtient (5.2.1) quand $n \to \infty$. Le deuxième point, relatif à la coordonnée W, s'obtient d'une manière similaire en utilisant le troisième point de la Proposition 4.4.1 pour la minoration de $(f^n)^*\omega$. □

5.3 Minoration fine des dimensions supérieures $\overline{d^\epsilon_{T,Z}}$ et $\overline{d^\epsilon_{T,W}}$

Nous nous inspirons dans cette partie de la démonstration du Théorème 2 de l'article de Thélin-Vigny [dTV15], qui utilise la séparation concentrée (Section 5.1.2).

Théorème 5.3.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique. Soient $\lambda_1 > \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov et soit h_ν son entropie. On suppose que $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs et ne résonnent pas. Soit $\epsilon > 0$ et soient $(Z^\epsilon_{\hat{x}}, W^\epsilon_{\hat{x}})$ des coordonnées d'Oseledec-Poincaré données par le Théorème 4.1.3. Soient $\overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\nu) = \overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\hat{x})$ $\hat{\nu}$-p.p. et $\overline{d^\epsilon_{T,W}}(\nu) = \overline{d^\epsilon_{T,W}}(\hat{x})$ $\hat{\nu}$-p.p. (Voir Proposition 4.2.3). Alors*

$$\overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\nu) \geq 2 + \underline{d_\nu} - \frac{\log d}{\lambda_1} + O(\epsilon),$$

$$\overline{d^\epsilon_{T,W}}(\nu) \geq 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \underline{d_\nu} - \frac{\log d}{\lambda_1} + O(\epsilon).$$

Combiné à la minoration $\underline{d_\nu} \geq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2}$ de Dupont dans [Dup11], on obtient le

Corollaire 5.3.2. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$\overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\nu) \geq 2 + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2} + O(\epsilon),$$

$$\overline{d^\epsilon_{T,W}}(\nu) \geq 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_2} + O(\epsilon).$$

Démonstration du Théorème 5.3.1. Nous allons montrer que avec $\overline{d^\epsilon_{T,Z}} := \overline{d^\epsilon_{T,Z}}(\nu)$

$$(\lambda_1 + 4\epsilon)(\overline{d^\epsilon_{T,Z}} - \underline{d_\nu} + 2\epsilon) + 8\epsilon \geq 2\lambda_1 - \log d. \tag{5.3.1}$$

On obtient bien un $O(\epsilon)$ en divisant par $\lambda_1 + 4\epsilon$.

On se place à $n \geq N_0$. On considère un ensemble de points $(n, \eta_1/4)$-séparé (x_i) de $\pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$ pour $i = 1 \dots N_{n,2}$ tel que fourni par le Lemme 5.1.2 avec $A = \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$. Puis pour chaque x_i, on nomme $y_1^i, \ldots, y_{M_n}^i$ une famille de points $2\eta_1 e^{-n\lambda_1-4n\epsilon}$-séparés donnée par le Lemme 5.1.3 avec $A = \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon)$. Pour tout i, j, on note $\hat{y}_j^i$ un élément de $\hat{\Lambda}_\epsilon$ tel que $\pi_0(\hat{y}_j^i) = y_j^i$ et $\hat{x}_i$ un élément de $\hat{\Lambda}_\epsilon$ tel que $\pi_0(\hat{x}_i) = x_i$.

Le courant de Green vérifie $(f^n)_*T = d^nT$ et $\int_{\mathbb{P}^2} T \wedge \omega = 1$, donc

$$\begin{aligned} d^n &= \int_{\mathbb{P}^2} (f^n)_*T \wedge \omega \\ &\geq \sum_{i=1}^{N_{n,2}} \sum_{j=1}^{M_n} \int_{\mathbb{P}^2} (f^n)_*(1_{B(y_j^i, \eta_1 e^{-n\lambda_1-4n\epsilon})}T) \wedge \omega \text{ par les Lemmes 3.4.3 et 3.4.4} \\ &\geq \sum_{i=1}^{N_{n,2}} \sum_{j=1}^{M_n} \int_{\mathbb{P}^2} (1_{B(y_j^i, \eta_1 e^{-n\lambda_1-4n\epsilon})}T) \wedge (f^n)^*\omega \text{ par dualité} \end{aligned}$$

On peut appliquer la Proposition 4.4.1 pour minorer $(f^n)^*\omega$:

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_{n,2}} \sum_{j=1}^{M_n} e^{2n\lambda_1-4n\epsilon} \left(T \wedge \frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{y}_j^i} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{y}_j^i}} \right) \left(B_{y_j^i}(\eta_1 e^{-n\lambda_1-4n\epsilon}) \right). \tag{5.3.2}$$

Comme on a pris les $\hat{y}_j^i$ dans $\hat{\Lambda}_\epsilon \subset \Lambda^{(3)}$ et que $n \geq N_0$, on obtient

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_{n,2}} \sum_{j=1}^{M_n} e^{2n\lambda_1-4n\epsilon} (\eta_1 e^{-n\lambda_1-4n\epsilon})^{\overline{d^\epsilon_{T,Z}}+\epsilon}$$

Enfin, on utilise la minoration de M_n (lemme 5.1.3) et $N_{n,2} \geq \nu(A) e^{nh_\nu-2n\epsilon}$ (lemme 5.1.2)

$$d^n \geq \nu(A) e^{nh_\nu-2n\epsilon} \cdot e^{-nh_\nu-2n\epsilon} \left(\frac{1}{2\eta_1} e^{n\lambda_1+4n\epsilon} \right)^{d_\nu-\epsilon} \cdot e^{2n\lambda_1-4n\epsilon} (\eta_1 e^{-n\lambda_1-4n\epsilon})^{\overline{d^\epsilon_{T,Z}}+\epsilon}$$

Observons que l'entropie h_ν disparait, et on obtient

$$d^n \geq C e^{-8n\epsilon} \left(e^{n\lambda_1+4n\epsilon} \right)^{d_\nu - \overline{d^\epsilon_{T,Z}} - 2\epsilon} e^{2n\lambda_1} \tag{5.3.3}$$

où

$$C := \nu(A) \left(\frac{1}{2\eta_1} \right)^{d_\nu-\epsilon} \eta_1^{\overline{d^\epsilon_{T,Z}}+\epsilon}.$$

En passant au logarithme puis en divisant par n, on obtient l'inégalité (5.3.1) sur $\overline{d^\epsilon_{T,Z}}$ quand $n \to +\infty$. Celle concernant $\overline{d^\epsilon_{T,W}}$ s'obtient de manière similaire en utilisant le troisième point de la Proposition 4.4.1 pour minorer $(f^n)^*\omega$. □

5.4 Pour un courant S positif fermé non-invariant

Soit S un $(1,1)$ courant positif fermé sur $\mathbb{P}^2$, de masse 1. Si S ne vérifie par $f^*S = dS$, on ne sait pas si les dimensions directionnelles sont $\hat{\nu}$-presque partout constantes (Voir la preuve de la Proposition 4.2.3). Dans ce cas, à l'instar de ce que font de Thélin et Vigny dans [dTV15], on adopte une définition adaptée et on obtient le Théorème suivant.

Théorème 5.4.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure de grande entropie et S un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ et de masse 1. Soit $\epsilon > 0$ et soient $(Z^\epsilon_{\hat{x}}, W^\epsilon_{\hat{x}})$ des coordonnées d'Oseledec-Poincaré données par le Théorème 4.1.3. Soit $\hat{\Lambda} \subset \mathcal{FN}$ tel que $\hat{\nu}(\hat{\Lambda}) > 0$. On pose :*

$$\overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{\Lambda}) = \sup_{\hat{x} \in \hat{\Lambda}} \overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{x}), \qquad \overline{d^\epsilon_{S,W}}(\hat{\Lambda}) = \sup_{\hat{x} \in \hat{\Lambda}} \overline{d^\epsilon_{S,W}}(\hat{x}).$$

On suppose que $\mathrm{Supp}(\nu) \subset \mathrm{Supp}\, S$ *et qu'il n'y a pas de résonance entre les exposants de Lyapunov $\lambda_1 > \lambda_2$ de ν (ils sont strictement positifs car ν est de grande entropie). Alors*

$$\overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{\Lambda}) \geq 2 + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_1} + O(\epsilon),$$

$$\overline{d^\epsilon_{S,W}}(\hat{\Lambda}) \geq 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d}{\lambda_1} + O(\epsilon).$$

Remarque 5.4.2. *Ce théorème est l'analogue du Théorème 5.2.1 pour les courants S. On peut aussi obtenir l'analogue du Théorème 5.3.1.*

Démonstration. On pose $\delta := \hat{\nu}(\hat{\Lambda})$ et on adapte l'uniformisation de la section 4.5 au courant S (en utilisant la définition ponctuelle 4.2.1). Cela définit $\hat{\Lambda}^S_\epsilon$, $r_1(S)$ et $N_0(S)$. Comme $\hat{\nu}(\hat{\Lambda}^S_\epsilon) \geq 1 - \delta/2$, on a $\hat{\nu}(\hat{\Lambda} \cap \hat{\Lambda}^S_\epsilon) \geq \delta/2 > 0$.

La preuve est ensuite proche de celle du Théorème 5.2.1. On se place à $n \geq N_0(S)$. Le Lemme 5.1.1 appliqué à $A := \pi_0(\hat{\Lambda} \cap \hat{\Lambda}^S_\epsilon)$ et $c := 1$ nous fournit un ensemble maximal de points (n, η_1)-séparés $(x_1, \ldots, x_{N_n})$ de A. Pour tout i, il existe $\hat{x}_i \in \hat{\Lambda} \cap \hat{\Lambda}^S_\epsilon$ tel que $\pi_0(\hat{x}_i) = x_i$.

Par la Proposition 3.4.5, puis par les Lemmes 3.4.3 et 3.4.4 et dualité,

$$d^n = \int_{\mathbb{P}^2} ((f^n)_* S) \wedge \omega \geq \sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathbb{P}^2} (1_{B_n(x_i, \eta_1/2)} S) \wedge (f^n)^* \omega.$$

Comme pour le Théorème 5.2.1, on utilise les lemmes sur les inclusions et la minoration de $(f^n)^*\omega$ pour obtenir :

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_n} e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \left(S \wedge \frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}_i} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}_i}} \right) (B_{x_i}(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})).$$

Comme on a pris les $\hat{x}_i$ dans $\hat{\Lambda}^S_\epsilon$, on a en particulier que pour $n \geq N_0(S)$ et $r \leq r_1(S)$,

$$S \wedge (\frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}_i} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}_i}})(B_{x_i}(r)) \geq r^{\overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{x}_i) + \epsilon}.$$

Il vient alors :

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_n} e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \left(\frac{\eta_1}{2} e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon} \right)^{\overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{x}_i) + \epsilon}.$$

On utilise alors la définition de $\overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{\Lambda})$ (borne supérieure sur $\hat{\Lambda}$). Avec l'estimation (5.2.2) de N_n, on a :

$$d^n \geq \nu(A) \left(\frac{\eta_1}{2} \right)^{\overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{\Lambda}) + \epsilon} e^{nh_\nu - 13n\epsilon - n(\lambda_1 + 4\epsilon)(\overline{d^\epsilon_{S,Z}}(\hat{\Lambda}) - 2 + \epsilon)}. \tag{5.4.1}$$

En passant au logarithme et divisant par n, on obtient le résultat quand $n \to \infty$. Le deuxième point relatif à la coordonnée W s'obtient d'une manière similaire. □

Chapitre 6

Majoration des dimensions inférieures $d^{\epsilon}_{T,Z}$ et $d^{\epsilon}_{T,W}$

I was looking at myself
I was blind, I could not see.

U2, I Will Follow

Nous allons montrer dans cette section le résultat suivant :

Théorème 6.0.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique telle que* $\mathrm{Supp}(\nu) \subset \mathrm{Supp}(\mu)$ *dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs (Par exemple une mesure de grande entropie). On suppose que les exposants ne résonnent pas. Soit $\epsilon > 0$ et soient $(Z^{\epsilon}_{\hat{x}}, W^{\epsilon}_{\hat{x}})$ des coordonnées d'Oseledec-Poincaré données par le Théorème 4.1.3. Soient $\underline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\nu) = \underline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\hat{x})$ $\hat{\nu}$-p.p. et $\underline{d^{\epsilon}_{T,W}}(\nu) = \underline{d^{\epsilon}_{T,W}}(\hat{x})$ $\hat{\nu}$-p.p. (Voir Proposition 4.2.3). Alors*

$$\underline{d^{\epsilon}_{T,Z}}(\nu) \leq \frac{\log d}{\lambda_2} + 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + O(\epsilon),$$

$$\underline{d^{\epsilon}_{T,W}}(\nu) \leq \frac{\log d}{\lambda_2} + 2 + O(\epsilon),$$

où $O(\epsilon)$ est une fonction qui tend vers 0 quand ϵ tend vers 0 et qui ne dépend que de d, λ_1 et λ_2.

Les arguments n'utiliseront plus les ensembles séparés maximaux. Nous allons obtenir ces estimations sur les dimensions directement en $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x}$, en utilisant les jacobiens de $T \wedge dZ^{\epsilon}_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^{\epsilon}_{\hat{x}}}$ et $T \wedge dW^{\epsilon}_{\hat{x}} \wedge d\overline{W^{\epsilon}_{\hat{x}}}$ relativement à l'application f.

6.1 Dimension du courant de Green sur la mesure d'équilibre

Commençons par énoncer une Proposition, prouvée un peu plus bas grâce à la théorie du pluripotentiel.

Proposition 6.1.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit $x \in \mathrm{Supp}\,\mu$ et soit Z une submersion holomorphe définie dans un voisinage V de x. Alors $T \wedge (\frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})$ n'est pas la mesure nulle sur V.*

On en déduit immédiatement :

Proposition 6.1.2.
Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique dont le support est contenu dans μ et dont les exposants de Lyapunov vérifient $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (par exemple ν mesure de grande entropie). Soit $(Z^\epsilon_{\hat{x}}, W^\epsilon_{\hat{x}})_{\hat{x} \in \mathcal{FN}}$ un système de coordonnées d'Oseledec-Poincaré pour la mesure ν. Alors pour tout $r \in]0, \eta_\epsilon(\hat{x})[$,

$$\left[T \wedge \frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}}}\right](B_x(r)) > 0 \qquad \left[T \wedge \frac{i}{2} dW^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{W^\epsilon_{\hat{x}}}\right](B_x(r)) > 0.$$

En particulier, pour tout $\delta > 0$, il existe $m_0 \geq 1$ et $q_0 \geq 1$ tels que

$$\hat{\Omega}_{\epsilon, m_0, q_0} := \left\{ \hat{x} \in \mathcal{FN} \text{ et } \begin{array}{c} \left[T \wedge \frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}}}\right](B_x(\frac{1}{4m_0})) \geq \frac{1}{q_0} \\ \left[T \wedge \frac{i}{2} dW^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{W^\epsilon_{\hat{x}}}\right](B_x(\frac{1}{4m_0})) \geq \frac{1}{q_0} \end{array} \right\}$$

vérifie $\hat{\nu}(\hat{\Omega}_{\epsilon, m_0, q_0}) \geq 1 - \delta$.

Démonstration. La première partie résulte de la Proposition 6.1.1. Pour la deuxième, on fixe d'abord $m_0 \geq 1$ pour que $\hat{\nu}\left\{\eta_\epsilon \geq \frac{1}{4m_0}\right\} \geq 1 - \delta/2$. Puis on prend q_0 assez grand pour que $\hat{\nu}(\hat{\Omega}_{\epsilon, m_0, q_0}) \geq 1 - \delta$. □

On définit pour tout n

$$\hat{\Omega}^n_\epsilon = \hat{\Omega}_{\epsilon, m_0, q_0} \cap \hat{f}^{-n}(\hat{\Omega}_{\epsilon, m_0, q_0}).$$

La mesure $\hat{\nu}$ étant invariante, on a :

$$\hat{\nu}(\hat{\Omega}^n_\epsilon) \geq 1 - 2\delta. \tag{6.1.1}$$

Proposition 6.1.3. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs, et telle que* $\mathrm{Supp}(\nu) \subset \mathrm{Supp}(\mu)$ *(Par exemple une mesure de grande entropie). Pour tout $\hat{x}$ dans $\hat{\Omega}^n_\epsilon$, si $n \geq N_0$, alors*

$$\left[T \wedge \frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{x}}}\right]\left(B_x\left(\frac{1}{m_0} e^{-n\lambda_2 + 3n\epsilon}\right)\right) \geq \frac{1}{d^n} e^{-2n\lambda_1 - 2n\epsilon} \frac{1}{q_0} \quad \text{si } \lambda_1 \notin \{k\lambda_2, k \geq 2\},$$

$$\left[T \wedge \frac{i}{2} dW^\epsilon_{\hat{x}} \wedge d\overline{W^\epsilon_{\hat{x}}}\right]\left(B_x\left(\frac{1}{m_0} e^{-n\lambda_2 + 3n\epsilon}\right)\right) \geq \frac{1}{d^n} e^{-2n\lambda_2 - 2n\epsilon} \frac{1}{q_0} \quad \text{pour tout } \lambda_1 \geq \lambda_2.$$

Nous utiliserons cette Proposition pour démontrer le Théorème 6.0.1 et aussi obtenir le Théorème 6.3.1, qui majore la dimension $\underline{d_\nu}$.

Démonstration de la Proposition 6.1.3. Nous démontrons l'inégalité portant sur $Z^\epsilon_{\hat{x}}$, celle concernant $W^\epsilon_{\hat{x}}$ se prouve de manière similaire.

Soit $\hat{x} \in \hat{\Omega}^n_\epsilon$. Le courant de Green vérifie $\frac{1}{d^n}(f^n)^* T = T$. On définit l'ouvert

$$A_n = f^{-n}_{\hat{x}_n}(B_{x_n}(\frac{1}{4m_0})).$$

La branche inverse est bien définie car $\hat{x}_n \in \hat{\Omega}_{\epsilon, m_0, q_0}$. En utilisant $f^{-n}_{\hat{x}_n} \circ f^n = Id_{A_n}$ et $T = \frac{1}{d^n}(f^n)^* T$, on obtient sur A_n :

$$
\begin{aligned}
T\wedge dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge \frac{i}{2}d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}} &= \frac{1}{d^n}(f^n)^*T\wedge (f^n)^*(f^{-n}_{\hat x_n})^*(\frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}})\\
&= \frac{1}{d^n}(f^n)^*\left[T\wedge \frac{i}{2}(dZ^\epsilon_{\hat x}\circ (f^{-n}_{\hat x_n}))\wedge d(\overline{Z^\epsilon_{\hat x}\circ (f^{-n}_{\hat x_n})})\right]
\end{aligned}
$$

On utilise le diagramme commutatif du Théorème 4.1.3 lu sur la première coordonnée pour écrire que $Z^\epsilon_{\hat x}\circ (f^{-n}_{\hat x_n})=\alpha_{n,\hat x_n}Z_{\hat x_n}$. Comme $|\alpha_{n,\hat x_n}|^2\geq e^{-2n\lambda_1-2n\epsilon}$, on obtient sur A_n :

$$
T\wedge \frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}}\geq \frac{1}{d^n}e^{-2n\lambda_1-2n\epsilon}(f^n)^*\left[T\wedge \frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x_n}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x_n}}\right] \tag{6.1.2}
$$

Nous allons majorer le terme de gauche et minorer le terme de droite (appliqués à A_n). Par le Lemme 4.3.3, $A_n\subset B_x\left(\frac{1}{m_0}e^{-n\lambda_2+3n\epsilon}\right)$ et on a

$$
T\wedge \frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}}\left(B_x\left(\frac{1}{m_0}e^{-n\lambda_2+3n\epsilon}\right)\right)\geq T\wedge \frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}}(A_n) \tag{6.1.3}
$$

Pour le terme de droite, puisque f^n est injective sur A_n, et comme $f^n(A_n)=B_{x_n}\left(\frac{1}{4m_0}\right)$, on a

$$
(f^n|_{A_n})^*\left[T\wedge \frac{i}{2}(dZ^\epsilon_{\hat x_n}\wedge \overline{dZ^\epsilon_{\hat x_n}})\right](A_n)=\left[T\wedge \frac{i}{2}(dZ^\epsilon_{\hat x_n}\wedge (\overline{dZ^\epsilon_{\hat x_n}})\right](B_{x_n}(\frac{1}{4m_0}))\geq \frac{1}{q_0}, \tag{6.1.4}
$$

l'inégalité provenant du fait que $\hat x_n\in\hat\Omega_{\epsilon,m_0,q_0}$. En combinant (6.1.2), (6.1.3) et (6.1.4) on obtient

$$
\left[T\wedge \frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}}\right]\left(B_x\left(\frac{1}{m_0}e^{-n\lambda_2+3n\epsilon}\right)\right)\geq \frac{1}{d^n}e^{-2n\lambda_1-2n\epsilon}\frac{1}{q_0}.
$$

La démonstration de l'inégalité concernant $W^\epsilon_{\hat x}$ est la même à ceci près que le diagramme commutatif du Théorème 4.1.3 est lu sur la deuxième coordonnée et donne $W^\epsilon_{\hat x}\circ(f^{-n}_{\hat x_n})=\beta_{n,\hat x}W_{\hat x_n}$ où $|\beta_{n,\hat x}|^2\geq e^{-2n\lambda_2-2n\epsilon}$. □

On peut à présent donner la preuve du Théorème 6.0.1.

Preuve du Théorème 6.0.1.

On note

$$
\hat\Omega_\epsilon=\limsup_{n\in\mathbb{N}}\hat\Omega_{\epsilon,m_0,q_0}\cap\hat f^{-n}(\hat\Omega_{\epsilon,m_0,q_0})=\limsup_{n\in\mathbb{N}}\hat\Omega^n_\epsilon.
$$

D'après (6.1.1), $\hat\nu(\hat\Omega_\epsilon)\geq 1-2\delta$.

Soit $\hat x\in\hat\Omega_\epsilon$. Alors il existe une suite strictement croissante d'indices l_k telle que

$$
\hat x\in\hat\Omega_{\epsilon,m_0,q_0}\cap\hat f^{-l_k}(\hat\Omega_{\epsilon,m_0,q_0})
$$

pour tout $k\geq 0$. Alors la Proposition 6.1.3 nous dit que pour tout k assez grand,

$$
\left[T\wedge \frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}}\right]\left(B_x\left(\frac{1}{m_0}e^{-l_k\lambda_2+3l_k\epsilon}\right)\right)\geq \frac{1}{d^{l_k}}e^{-2l_k\lambda_1-2l_k\epsilon}\frac{1}{q_0}.
$$

On définit la suite de rayons $r_k:=e^{-l_k(\lambda_2-4\epsilon)}$. Alors, en prenant k assez grand pour que $e^{l_k\epsilon}\geq 1/m_0$ et $\frac{1}{q_0}\geq e^{-l_k\epsilon}$, on a :

$$
\left[T\wedge \frac{i}{2}dZ^\epsilon_{\hat x}\wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat x}}\right](B_x(r_k))\geq e^{(-1)(l_k(2\lambda_1+3\epsilon+\log d))}.
$$

On utilise que $e^{-1} = r_k^{(l_k(\lambda_2-4\epsilon))^{-1}}$ pour obtenir

$$\left[T \wedge \frac{i}{2} dZ_{\hat{x}}^\epsilon \wedge d\overline{Z_{\hat{x}}^\epsilon}\right](B_x(r_k)) \geq r_k^{(l_k(\lambda_2-4\epsilon))^{-1}.l_k(2\lambda_1+3\epsilon+\log d)}.$$

Comme la suite de rayons r_k tend vers 0 et comme $\hat{\nu}(\hat{\Omega}_\epsilon) > 0$ l'exposant du terme de droite

$$\frac{2\lambda_1 + 3\epsilon + \log d}{\lambda_2 - 4\epsilon} = \frac{\log d}{\lambda_2} + 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + O(\epsilon),$$

où $O(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\lambda_2 - 4\epsilon}\left(4\frac{\log d}{\lambda_2} + 8\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 3\right)$, est bien un majorant de $\underline{d_{T,Z}^\epsilon}$. De la même façon, on obtient

$$\underline{d_{T,W}^\epsilon} \leq \frac{2\lambda_2 + 3\epsilon + \log d}{\lambda_2 - 4\epsilon} = \frac{\log d}{\lambda_2} + 2 + O(\epsilon).$$

□

6.2 Masse de Monge-Ampère

Nous démontrons la Proposition 6.1.1. Soit $x \in \operatorname{Supp}\mu$ et soit $Z : V \to \mathbb{C}$ une submersion holomorphe sur un voisinage de x. On veut montrer que la mesure positive $T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z}$ n'est pas nulle sur V. Quitte à se placer dans de bonnes coordonnées holomorphes, on peut supposer que $x = (0,0)$ et $V = \mathbb{D}(2) \times \mathbb{D}(2)$ et que $Z(z,w) = z$ sur V. Soit $T = 2i\partial\overline{\partial}G$ sur V, où G est psh continue.

Lemme 6.2.1. *Supposons que $(T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z})(\mathbb{D}(2) \times \mathbb{D}(2)) = 0$. Alors $\forall z \in \mathbb{D}$, $G \circ \sigma_z$ est harmonique sur $\mathbb{D}$, où $\sigma_z(u) = (z,u)$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{D})$ une fonction test. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{D}^2)$ telle que $\psi \circ \sigma_{z_0} = \varphi$ sur $\mathbb{D}$. D'après la Proposition 3.4.6, on a

$$\left(T \wedge \frac{i}{2} dZ \wedge d\overline{Z}\right)(\psi) = \int_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{w\in\mathbb{D}} (G \circ \sigma_z)(w) \times \Delta(\psi \circ \sigma_z)(w) \, \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(w)\right) \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(z),$$

et cette quantité est nulle par hypothèse. Comme la fonction mesurable

$$z \mapsto \int_{w\in\mathbb{D}} (G \circ \sigma_z)(w) \times \Delta(\psi \circ \sigma_z)(w) \, \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(w)$$

est positive, il existe $A \subset \mathbb{D}$ tel que $\mathrm{Leb}(A) = \mathrm{Leb}(\mathbb{D})$ et

$$\forall z \in A, \quad \int_{w\in\mathbb{D}} (G \circ \sigma_z)(w) \times \Delta(\psi \circ \sigma_z)(w) \, \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(w) = 0. \tag{6.2.1}$$

Étendons ce résultat à tout $z \in \mathbb{D}$. Comme A est dense dans $\mathbb{D}$, il existe une suite (z_n) de points de A qui converge vers z. D'après (6.2.1), on a

$$\forall n \geq 1, \quad \int_{w\in\mathbb{D}} (G \circ \sigma_{z_n})(w) \times \Delta(\psi \circ \sigma_{z_n})(w) \, \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(w) = 0. \tag{6.2.2}$$

Notons que G est continue sur $\overline{\mathbb{D}^2}$ et que ψ est de classe C^2 sur $\overline{\mathbb{D}^2}$. Donc G et $2i\partial\overline{\partial}\psi$ sont uniformément continues sur $\overline{\mathbb{D}^2}$. Il s'ensuit que $G \circ \sigma_{z_n}$ converge uniformément vers $G \circ \sigma_z$ sur $\mathbb{D}$

et que $\Delta(\psi \circ \sigma_{z_n})$ converge uniformément vers $\Delta(\psi \circ \sigma_z)$ sur $\mathbb{D}$. On déduit de (6.2.2), en faisant tendre n vers l'infini, que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad \int_{w\in\mathbb{D}} (G \circ \sigma_z)(w) \times \Delta(\psi \circ \sigma_z)(w) \, \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(w) = 0.$$

Appliqué au point z_0, on obtient avec $\psi \circ \sigma_{z_0} = \varphi$:

$$\int_{w\in\mathbb{D}} (G \circ \sigma_{z_0})(w) \Delta\varphi(w) \, \mathrm{d}\,\mathrm{Leb}(w) = 0.$$

Ceci est vrai pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{D})$, donc on a montré que $G \circ \sigma_{z_0}$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. □

On utilise alors le Théorème suivant de la thèse de Briend ([Bri97], Lemme IV.1.1, page 33) obtenu par balayage, voir également la section A.10 de [Sib99]. On consultera l'article de Dujardin-Guedj [DG12] pour des résultats concernant l'équation $T \wedge T = 0$.

Proposition 6.2.2 (Briend). *Soit G une fonction psh continue sur $\mathbb{D}(2) \times \mathbb{D}(2)$. On note E l'ensemble des points $p \in \mathbb{D}(\frac{1}{4}) \times \mathbb{D}(\frac{1}{4})$ par lesquels passe un disque holomorphe $\sigma_p : \mathbb{D} \to \mathbb{D}(2) \times \mathbb{D}(2)$ tel que*

1. *Le bord de σ_p soit hors de $\mathbb{D}(\frac{1}{2}) \times \mathbb{D}(\frac{1}{2})$,*
2. *$G \circ \sigma_p$ soit harmonique sur $\mathbb{D}$.*

Alors

$$(2i\partial\overline{\partial}G \wedge 2i\partial\overline{\partial}G)(E) = 0.$$

Dans notre situation, E recouvre entièrement $\mathbb{D}(\frac{1}{4}) \times \mathbb{D}(\frac{1}{4})$: il suffit de prendre pour σ_p les disques holomorphes verticaux $\sigma_z : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, $u \mapsto (z, u)$. En effet, le bord de σ_z est dans $\{z\} \times \partial\mathbb{D}$ et $G \circ \sigma_z$ est harmonique sur $\mathbb{D}$ d'après le Lemme 6.2.1. La Théorème 6.2.2 donne alors :

$$(2i\partial\overline{\partial}G \wedge 2i\partial\overline{\partial}G)(\mathbb{D}(\frac{1}{4}) \times \mathbb{D}(\frac{1}{4})) = 0, \tag{6.2.3}$$

ce qui contredit $x = 0 \in \operatorname{Supp} \mu = \operatorname{Supp}(2i\partial\overline{\partial}G \wedge 2i\partial\overline{\partial}G)$.

6.3 Majoration de la dimension inférieure des mesures dilatantes

Nous combinons ici les techniques de la preuve du Théorème 5.3.1 avec les informations de la Proposition 6.1.3 pour obtenir la majoration suivante :

Théorème 6.3.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit ν une mesure ergodique dont les exposants $\lambda_1 > \lambda_2$ sont strictement positifs, et telle que* $\operatorname{Supp}(\nu) \subset \operatorname{Supp}(\mu)$ *(Par exemple une mesure de grande entropie). Alors*

$$\underline{d_\nu} \leq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2} + 2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right).$$

De plus, si les exposants ne résonnent pas, alors :

$$\underline{d_\nu} \leq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2} + 2\min\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)$$

Démonstration. L'ensemble $\hat{\Omega}^n_\epsilon$ a été défini dans la section 6.1. Il vérifie notamment $\hat{\nu}(\hat{\Omega}^n_\epsilon) \geq 1 - 2\delta$ (Voir l'équation (6.1.1)). On a donc $\hat{\nu}(\hat{\Lambda}_\epsilon \cap \hat{\Omega}^n_\epsilon) > 1 - 3\delta$ pour tout $n \geq 0$. On se place à $n \geq N_0$.

On pose K_n l'entier de l'intervalle

$$\left[\frac{-\log(\eta_1 m_0) + n(\lambda_1 + 4\epsilon)}{\lambda_2 - 3\epsilon}; \frac{-\log(\eta_1 m_0) + n(\lambda_1 + 4\epsilon)}{\lambda_2 - 3\epsilon} + 1\right[.$$

Ce K_n est choisi ainsi pour avoir

$$\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon} \geq \frac{1}{m_0} e^{-K_n\lambda_2 + 3K_n\epsilon} \tag{6.3.1}$$

et donc $B_x(\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) \supset B_x\left(\frac{1}{m_0} e^{-K_n\lambda_2 + 3K_n\epsilon}\right)$ en tout point x. On considère un ensemble de points (x_i) de $A = \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon \cap \hat{\Omega}^{K_n}_\epsilon)$ pour $i = 1 \dots N_{n,2}$ tel que fourni par le Lemme 5.1.2. On a en particulier :

$$N_{n,2} \geq \nu(\pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon \cap \hat{\Omega}^{K_n}_\epsilon)) e^{nh_\nu - 2n\epsilon} \geq (1 - 3\delta) e^{nh_\nu - 2n\epsilon}. \tag{6.3.2}$$

Puis, pour chaque x_i, on nomme $y^i_1, \dots, y^i_{M_n}$ une famille de points donnée par le Lemme 5.1.3 avec $A = \pi_0(\hat{\Lambda}_\epsilon \cap \hat{\Omega}^{K_n}_\epsilon)$. Le cardinal de cet ensemble de points vérifie :

$$M_n \geq e^{-nh_\nu - 2n\epsilon} \left(\frac{1}{2\eta_1} e^{n\lambda_1 + 4n\epsilon}\right)^{\frac{d_\nu - \epsilon}{}}. \tag{6.3.3}$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, M_n\}$, on fixe $\hat{y}^i_j \in \hat{\Lambda}_\epsilon \cap \hat{\Omega}^{K_n}_\epsilon$ tel que $y^i_j = \pi_0(\hat{y}^i_j)$. Le début du calcul est identique à celui de la preuve du Théorème 5.3.1, jusqu'à obtenir l'inégalité (5.3.2) :

$$d^n \geq \sum_{i=1}^{N_{n,2}} \sum_{j=1}^{M_n} e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \left[T \wedge (\frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{y}^i_j} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{y}^i_j}})\right] (B_{y^i_j}(\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})) \tag{6.3.4}$$

On souhaite appliquer la Proposition 6.1.3. D'après (6.3.1),

$$B_{y^i_j}(\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon}) \supset B_{y^i_j}\left(\frac{1}{m_0} e^{-K_n\lambda_2 + 3K_n\epsilon}\right)$$

On applique la mesure positive $T \wedge (\frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{y}^i_j} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{y}^i_j}})$ à cette inclusion. Puisque $\hat{y}^i_j \in \hat{\Omega}^{K_n}_\epsilon$, on déduit de la Proposition 6.1.3 pour $K_n \geq N_0$,

$$\left[T \wedge (\frac{i}{2} dZ^\epsilon_{\hat{y}_{i,j}} \wedge d\overline{Z^\epsilon_{\hat{y}_{i,j}}})\right] (B_{y^i_j}(\eta_1 e^{-n\lambda_1 - 4n\epsilon})) \geq \frac{1}{d^{K_n}} e^{-2K_n\lambda_1 - 2K_n\epsilon} \frac{1}{q_0}$$

On déduit de (6.3.4) que pour $K_n \geq n_5$,

$$d^n \geq N_{n,2} \cdot M_n \cdot e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} \frac{1}{d^{K_n}} e^{-2K_n\lambda_1 - 2K_n\epsilon} \frac{1}{q_0}. \tag{6.3.5}$$

On utilise à présent les estimations de $N_{n,2}$ et M_n données par (6.3.2) et (6.3.3) :

$$d^{n+K_n} \geq (1 - 3\delta) e^{nh_\nu - 2n\epsilon} \cdot e^{-nh_\nu - 2n\epsilon} \left(\frac{1}{2\eta_1} e^{n\lambda_1 + 4n\epsilon}\right)^{\frac{d_\nu - \epsilon}{}} \cdot e^{2n\lambda_1 - 4n\epsilon} e^{-2K_n\lambda_1 - 2K_n\epsilon} \frac{1}{q_0}$$

$$d^{n+K_n} \geq \frac{1}{q_0}\frac{(1-3\delta)}{(2\eta_1)^{\underline{d_\nu}-\epsilon}} e^{-8n\epsilon}\left(e^{n\lambda_1+4n\epsilon}\right)^{\underline{d_\nu}-\epsilon} e^{2n\lambda_1} e^{-2K_n\lambda_1-2K_n\epsilon}.$$

En passant au logarithme, puis en divisant par n :

$$\log d + \frac{K_n}{n}\log d \geq C_1(\epsilon)/n - 8\epsilon + (\lambda_1+4\epsilon)(\underline{d_\nu}-\epsilon) + 2\lambda_1 - 2\frac{K_n}{n}(\lambda_1+\epsilon)$$

où $C_1(\epsilon) = \frac{(1-3\delta)}{q_0(2\eta_1)^{\underline{d_\nu}-\epsilon}}$ ne dépend pas de n.

Comme $K_n \leq \frac{-\log(\eta_1 m_0)+n(\lambda_1+4\epsilon)}{\lambda_2-3\epsilon} + 1$,

$$\log d + \frac{\lambda_1+4\epsilon}{\lambda_2-3\epsilon}\log d \geq C_2(\epsilon)/n - 8\epsilon + (\lambda_1+4\epsilon)(\underline{d_\nu}-\epsilon) + 2\lambda_1 - 2\frac{\lambda_1+4\epsilon}{\lambda_2-3\epsilon}(\lambda_1+\epsilon)$$

où $C_2(\epsilon) = C_1(\epsilon) + \left(\frac{\log(\eta_1 m_0)}{\lambda_2-3\epsilon} - 1\right)(2(\lambda_1+\epsilon)+\log d)$. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ puis ϵ vers 0, on obtient à la limite :

$$\log d + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\log d \geq \lambda_1\underline{d_\nu} + 2\lambda_1 - 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_1.$$

Il ne reste qu'à diviser par λ_1 pour obtenir

$$\underline{d_\nu} \leq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2} + 2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right).$$

Pour obtenir l'autre majoration de $\underline{d_\nu}$, on utilise l'analogue de (6.3.4) avec la coordonnée W^ϵ. En effet, en appliquant la Proposition 6.1.3 relativement à W^ϵ, on obtient à la place de (6.3.5) :

$$d^n \geq N_{n,2}\cdot M_n \cdot e^{2n\lambda_2-4n\epsilon}\frac{1}{d^{K_n}} e^{-2K_n\lambda_2-2K_n\epsilon}\frac{1}{q_0}.$$

En passant au logarithme, puis en divisant par n, on obtient en faisant $n\to\infty$ puis $\epsilon\to 0$:

$$\log d + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\log d \geq \lambda_1\underline{d_\nu} + 2\lambda_2 - 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_2.$$

En divisant par λ_1, on a

$$\underline{d_\nu} \leq \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2} + 2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right).$$

□

Chapitre 7

Dérivée de Radon-Nikodym pour les endomorphismes semi-extrémaux

They can see that he's just a fool.
And he never gives an answer. [...]
He never listens to them.
He knows that they're the fools.

The Beatles, The Fool on the Hill

Rappelons le Théorème des formes normales (Théorème 4.1.3). Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit μ sa mesure d'équilibre et soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ses exposants de Lyapunov. Soit $\mathcal{C} = \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{C}_f)$ et $X := \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}$. On note $\hat{X} = \{\hat{x} \in X^{\mathbb{Z}}\,,\, \forall i \in \mathbb{Z}\,,\, x_i = f(x_{i-1})\}$ et $\pi_0 : \hat{X} \to X, (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \mapsto x_0$. On rappelle que $\hat{x}_n = \hat{f}^n(\hat{x})$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\mathcal{FN} \subset \hat{X}$ $\hat{f}$-invariant de $\hat{\mu}$-mesure totale, il existe des fonctions ϵ-lentes $\eta_\epsilon, \rho_\epsilon : \mathcal{FN} \to]0, 1]$, des fonctions ϵ-rapides $\beta_\epsilon, L_\epsilon, M_\epsilon : \mathcal{FN} \to [1, +\infty[$ et pour tout $\hat{x} \in \mathcal{FN}$, il existe des applications holomorphes injectives $(\xi^\epsilon_{\hat{x}})_{\hat{x}\in\mathcal{FN}} : B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x})) \to \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}))$ telles que le diagramme suivant commute pour tout $n \geq n_2(\hat{x})$

$$\begin{tikzcd}
B_{x_0}(\eta_\epsilon(\hat{x})) \arrow[d, "\xi^\epsilon_{\hat{x}}"] & B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x}_n)) \arrow[l, "f^{-n}_{\hat{x}_n}"'] \arrow[d, "\xi^\epsilon_{\hat{x}_n}"'] \\
\mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x})) & \mathbb{D}^2(\rho_\epsilon(\hat{x}_n)) \arrow[l, "R_{n,\hat{x}_n}"]
\end{tikzcd}$$

où $R_{n,\hat{x}}$ est linéaire selon sa deuxième coordonnée, de pente $\beta_{n,\hat{x}}$, vérifiant

$$e^{-n\epsilon}e^{-n\lambda_2} \leq |\beta_{n,\hat{x}}| \leq e^{n\epsilon}e^{-n\lambda_2}.$$

On dispose également d'un contrôle sur la famille $(\xi^\epsilon_{\hat{x}})_{\hat{x}\in\mathcal{FN}}$:

$$\frac{1}{2}d(p, q) \leq \left|\xi^\epsilon_{\hat{x}_n}(p) - \xi^\epsilon_{\hat{x}_n}(q)\right| \leq \beta_\epsilon(\hat{x}_n)d(p, q), \quad \forall p, q \in B_{x_n}(\eta_\epsilon(\hat{x}_n)). \tag{7.0.1}$$

7.1 Conditions techniques d'existence d'une dérivée inférieure

Nous rassemblons dans le théorème suivant des conditions suffisantes donnant l'existence d'un disque holomorphe selon lequel la tranche du courant T ait une dérivée inférieure finie par rapport à la mesure de Lebesgue.

Théorème 7.1.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les exposants de la mesure d'équilibre μ. On suppose que $\lambda_1 > \lambda_2$. Soit $\epsilon > 0$, soit $\hat{x} \in \mathcal{FN}$ et soit $x = \pi_0(\hat{x})$. Soit $v_s(x) \in T_x\mathbb{P}^2$ un vecteur unitaire qui dirige la direction stable (correspondant à l'exposant λ_2, voir le Théorème d'Oseledec 2.2.1). On suppose qu'il existe $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels avec $n_0 = 0$ et $n_1 \geq n_2(\hat{x})$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$:*

1. $\eta_\epsilon(\hat{x}_{n_j}) \geq 4\eta_0$,
2. $\beta_\epsilon(\hat{x}_{n_j}) \leq e^{M_2}$,
3. $e^{-M_1}d^{n_j/2} \leq \|D_x f^{n_j}(v_s(x))\| \leq e^{M_1}d^{n_j/2}$,

où η_0, M_1, M_2 sont des constantes. Alors il existe un disque holomorphe $\xi_x : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^2$ tangent en 0 à la direction $v_s(x)$ et tel que

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\xi_x^\star T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))} < +\infty.$$

Démonstration. Comme $\eta(\hat{x}_{n_j}) \geq 4\eta_0$, on sait que l'image de $B_{x_{n_j}}(\eta_\epsilon(\hat{x}_{n_j}))$ par $\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}}$ contient $\mathbb{D}^2(2\eta_0)$. De même, l'image de $B_x(\eta_\epsilon(\hat{x}))$ par $\xi^\epsilon_{\hat{x}}$ contient $\mathbb{D}^2(2\eta_0)$. Soit

$$V : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}(\eta_0) & \to & \mathbb{D}(\eta_0) \times \mathbb{D}(\eta_0) \\ w & \mapsto & (0, w) \end{array}.$$

On pose

$$\tilde{\xi}_0 := (\xi^\epsilon_{\hat{x}})^{-1} \circ V \quad \text{ et } \quad \tilde{\xi}_{n_j} := (\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}})^{-1} \circ V \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Soit $b_{n_j} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la multiplication par $\beta^{-1}_{n_j,\hat{x}_{n_j}}$. En tirant en arrière la relation $(f^{n_j})^\star T = d^{n_j} T$ par $\tilde{\xi}_0$, on obtient

$$(f^{n_j} \circ \tilde{\xi}_0)^\star T = d^{n_j}\, \tilde{\xi}_0^\star T \text{ sur } b_{n_j}^{-1}(\mathbb{D}(\eta_0)). \tag{7.1.1}$$

Observons que l'on a

$$f^{n_j} \circ \tilde{\xi}_0 = f^{n_j} \circ (\xi^\epsilon_{\hat{x}})^{-1} \circ V = (\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}})^{-1} \circ R^{-1}_{n_j,\hat{x}_{n_j}} \circ V,$$

où la première égalité est par définition et la deuxième égalité provient du diagramme commutatif des formes normales. On a aussi la relation

$$R^{-1}_{n_j,\hat{x}_{n_j}} \circ V = V \circ b_{n_j},$$

provenant du fait que $R^{-1}_{n_j,\hat{x}_{n_j}}$ est linéaire sur la deuxième coordonnée. Il en résulte :

$$f^{n_j} \circ \tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_{n_j} \circ b_{n_j} \text{ sur } b_{n_j}^{-1}(\mathbb{D}(\eta_0)).$$

On déduit alors de (7.1.1) la relation

$$(\tilde{\xi}_{n_j})^\star T = d^{n_j}\, (b_{n_j})_\star \tilde{\xi}_0^\star T \text{ sur } \mathbb{D}(\eta_0).$$

En évaluant ces mesures sur le disque $\mathbb{D}(\eta_0)$, on obtient

$$(\tilde{\xi}_{n_j})^\star T(\mathbb{D}(\eta_0)) = d^{n_j}\, \tilde{\xi}_0^\star T(\mathbb{D}(\eta_0 \cdot |\beta_{n_j,\hat{x}_{n_j}}|)). \tag{7.1.2}$$

Le terme de gauche dans (7.1.2) est borné d'après le

Lemme 7.1.2. *Il existe une constante $M_3 > 0$ telle que pour tout j,*

$$(\tilde{\xi}_{n_j})^\star T(\mathbb{D}(\eta_0)) \leq M_3.$$

Démonstration. Soit $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille finie d'ouverts qui recouvre $\mathbb{P}^2$, sur lesquels T admet un potentiel G_α p.s.h. borné et tel que pour tout $j \geq 0$, il existe $\alpha \in A$ tel que $B_{x_{n_j}}(4\eta_0) \subset O_\alpha$. Pour cela, on peut considérer une famille $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ de petites boules de $\mathbb{P}^2$, qui recouvrent $\mathbb{P}^2$, et telles que T admet un potentiel borné sur leur $4\eta_0$-voisinage tubulaire (quitte à diminuer η_0 si nécessaire) et prend pour (O_α) ce voisinage tubulaire. On note $\|G\|_\infty = \max_{\alpha\in A} \|G_\alpha\|_\infty$. Soit $j \geq 0$ et soit $\alpha \in A$ tel que $x_{n_j} \in O_\alpha$. Fixons $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{D}(2\eta_0))$ entre $1_{\mathbb{D}(\eta_0)}$ et $1_{\mathbb{D}(2\eta_0)}$. En particulier, $\Delta\psi$ est borné. Comme $\tilde{\xi}_{n_j} = (\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}})^{-1} \circ V$, on a d'après (7.0.1) :

$$\tilde{\xi}_{n_j}(\mathbb{D}(2\eta_0)) \subset (\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}})^{-1}(\mathbb{D}^2(2\eta_0)) \subset B_{x_{n_j}}(4\eta_0).$$

On a donc

$$(\tilde{\xi}_{n_j})^\star T(\mathbb{D}(\eta_0)) \leq \int_{\mathbb{D}(2\eta_0)} \Delta(G_\alpha \circ \tilde{\xi}_{n_j})\psi = \int_{\mathbb{D}(2\eta_0)} G_\alpha \circ \tilde{\xi}_{n_j} \times \Delta\psi \leq \|G\|_\infty \max_{\mathbb{D}(2\eta_0)} \Delta\psi,$$

ce qui conclut la preuve en prenant $M_3 = \|G\|_\infty \max_{\mathbb{D}(2\eta_0)} \Delta\psi$. □

Nous allons maintenant minorer le terme de droite dans (7.1.2). C'est ici que nous utilisons l'hypothèse 3 du Théorème 7.1.1.

Lemme 7.1.3. *Pour tout $j \geq 0$, on a $|\beta_{n_j,\hat{x}}| \in [d^{-n_j/2}e^{-M}, d^{-n_j/2}e^{M}]$, où $M := M_1 + M_2 + \ln 2$.*

Démonstration. D'après le Théorème des formes normales, on a $f^{n_j} = (\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}})^{-1} \circ R^{-1}_{n_j,\hat{x}} \circ \xi^\epsilon_{\hat{x}}$. Notons aussi que la différentielle de $\xi^\epsilon_{\hat{x}}$ (resp. $\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}}$) en x (resp. $f^{n_j}(x)$) envoie la droite de l'espace tangent $T_x\mathbb{P}^2$ dirigée par $v_s(x)$ (resp. $v_s(f^{n_j}(x))$) sur l'axe vertical. Alors, en prenant les normes et en utilisant le fait que pour tout $j \geq 0$ et pour tout $v \in T_{f^{n_j}(x)}\mathbb{P}^2$,

$$\frac{1}{2}\|v\| \leq \left\| D_{f^{n_j}(x)}\xi^\epsilon_{\hat{x}_{n_j}}(v) \right\| \leq e^{M_2}\|v\|,$$

on obtient

$$\|D_x f^{n_j}(v_s(x))\| (2e^{M_2})^{-1} \leq \left|\beta_{n_j,\hat{x}}\right|^{-1} \leq \|D_x f^{n_j}(v_s(x))\| (2e^{M_2}).$$

On utilise à présent l'hypothèse $e^{-M_1}d^{n_j/2} \leq \|D_x f^{n_j}(v_s(x))\| \leq e^{M_1}d^{n_j/2}$ pour obtenir

$$d^{-n_j/2}e^{-M_1}(2e^{M_2})^{-1} \leq \left|\beta_{n_j,\hat{x}}\right| \leq d^{-n_j/2}e^{M_1}(2e^{M_2}),$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du Théorème 7.1.1. En effet, par le Lemme 7.1.3, on peut minorer le terme de droite de (7.1.2) de la manière suivante :

$$d^{n_j}\, \tilde{\xi}_0^\star T(\mathbb{D}(\eta_0 \cdot |\beta_{n_j,\hat{x}}|)) \geq \frac{\tilde{\xi}_0^\star T(\mathbb{D}(\eta_0\, d^{-n_j/2}\, e^{-M}))}{d^{-n_j}} = \frac{\tilde{\xi}_0^\star T(\mathbb{D}(\eta_0\, d^{-n_j/2}\, e^{-M}))}{\pi(\eta_0\, d^{-n_j/2}\, e^{-M})^2} \cdot \pi(\eta_0\, e^{-M})^2. \tag{7.1.3}$$

Autrement dit,

$$d^{n_j}\,\tilde{\xi}_0^\star T(\mathbb{D}(\eta_0\cdot|\beta_{n_j,\hat{x}}|))\geq c_0\frac{\tilde{\xi}_0^\star T(\mathbb{D}(r_j))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r_j))},$$

où $r_j=\eta_0\,d^{-n_j/2}\,e^{-M}$ et $c_0=\pi(\eta_0 e^{-M})^2$. Puisque le terme de gauche de (7.1.2) est borné d'après le Lemme 7.1.2, on obtient bien

$$\liminf_{r\to 0}\frac{\tilde{\xi}_0^\star T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))}<+\infty,$$

où l'on rappelle que $\tilde{\xi}_0=(\xi_{\hat{x}}^\epsilon)^{-1}\circ V$. On définit finalement $\xi_x:\mathbb{D}\to\mathbb{P}^2$ par $\xi_x(z):=\tilde{\xi}_0(z/\eta_0)$. □

7.2 Deux théorèmes d'existence

Dans cette section, nous prouvons l'existence de points vérifiant les hypothèses du Théorème 7.1.1, dans deux contextes semi-extrémaux. Nos théorèmes indiquent une régularité du type absolue continuité pour le courant T sur le support de μ.

Théorème 7.2.1. *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$ de degré $d\geq 2$. Soit T le courant de Green et μ la mesure d'équilibre de f. Soient $\lambda_1\geq\lambda_2$ les exposants de Lyapunov de μ. On suppose que $\mu<<\sigma_T$ et $\lambda_2<\lambda_1<2\lambda_2$. Alors il existe un borélien A vérifiant $\mu(A)>0$ et pour tout $x\in A$, il existe un disque holomorphe $\xi_x:\mathbb{D}\to\mathbb{P}^2$ tangent en 0 à la direction $v_s(x)$ tel que*

$$\liminf_{r\to 0}\frac{\xi_x^\star T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))}<+\infty.$$

La condition $\lambda_2<\lambda_1$ permet de définir $v_s(x)$ à l'aide du Théorème d'Oseledec. La condition $\lambda_1<2\lambda_2$ est importante pour pouvoir utiliser le Théorème 7.2.3 ci-dessous. Il s'agit d'une hypothèse technique qui est certainement superflue.

Il est possible de relaxer la condition $\mu<<T\wedge\omega$ en ne demandant que la minimalité de λ_2. Cependant, on demande alors que la direction stable $v_s(x)\mathbb{C}$ ait une régularité Hölder :

Théorème 7.2.2. *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$ de degré $d\geq 2$. Soit T le courant de Green et μ la mesure d'équilibre de f. Soient $\lambda_1\geq\lambda_2$ les exposants de Lyapunov de μ. On suppose que $\lambda_2=\frac{1}{2}\log d$ et $\lambda_2<\lambda_1<2\lambda_2$. On suppose aussi que* $\mathrm{Supp}\,\mu\cap\mathcal{C}_f=\emptyset$ *et que $x\mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ est une application localement Hölder sur un borélien A de μ-mesure totale. Alors pour μ-presque tout $x\in A$, il existe un disque holomorphe $\xi_x:\mathbb{D}\to\mathbb{P}^2$ tangent en 0 à la direction $v_s(x)$ tel que*

$$\liminf_{r\to 0}\frac{\xi_x^\star T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))}<+\infty.$$

Nous allons montrer que les hypothèses de chaque théorème entraînent les trois conditions du Théorème 7.1.1. Les conditions 1 et 2 sont faciles à obtenir par récurrence standard. La condition 3 est très forte : il s'agit de vérifier que l'on a un contrôle du type

$$d^{n_j}e^{-2M_1}\leq\|D_xf^{n_j}(v_s(x))\|^2\leq d^{n_j}e^{2M_1},$$

sans erreur exponentielle $e^{\pm n\epsilon}$. La majoration proviendra d'arguments de Dujardin pour le Théorème 7.2.1 et d'arguments stochastiques (Théorème Central Limite) pour le Théorème 7.2.2. La minoration est valable pour tout endomorphisme de $\mathbb{P}^2$, voir le Théorème 7.2.3 ci-dessous. La démonstration du Théorème 7.2.3 reprend la stratégie de Briend-Duval [BrDu99] en injectant dans les arguments la connaissance $\lambda_2\geq\frac{1}{2}\log d$.

Théorème 7.2.3 (Berteloot-Dupont, [BeDu05], Proposition 1)**.** *Pour tout $n \geq 1$, pour tout $\rho, \tau > 0$, on pose :*

$$B_n(\rho) = \left\{x \in \mathbb{P}^2 \mid f^n \circ (x + D_x f^n)^{-1} : B(\rho) \to \mathbb{P}^2 \text{ est injective } \right\}$$

$$R_n(\tau) = \left\{x \in \mathbb{P}^2 \mid \left\|(D_x f^n)^{-1}\right\|^{-1} \geq \frac{d^{n/2}}{\tau}\right\}$$

Si $\lambda_1 < 2\lambda_2$, alors pour tout $\beta > 0$,

$$\exists \rho > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \mu(B_n(\rho)) \geq 1 - \beta,$$

$$\exists \rho > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall \tau > 0, \quad \mu(B_n(\rho) \cap R_n(\tau)) \geq 1 - \beta - (\rho\tau)^{-2}.$$

Ce Théorème entraîne en particulier :

Proposition 7.2.4. *Pour tout $a > 0$, il existe un $\tau > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(R_n(\tau)) > 1 - a.$$

7.3 Preuve dans le cas $\mu << \sigma_T$

7.3.1 Courants décomposables

Nous reprenons dans cette section la première partie de l'article de Dujardin [Duj12] qui établit l'existence de directions de Fatou σ_T-presque partout. Soit ω la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2$ et S un courant positif de bidegré $(1,1)$. On note $\sigma_S = S \wedge \omega$ la mesure trace de S. C'est une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}^2$. On utilisera dans la suite la notation $S(\varphi) = \int_{\mathbb{P}^2} S \wedge \varphi$ lorsque φ est une $(1,1)$-forme test sur $\mathbb{P}^2$. Localement, S peut s'écrire

$$S = \sum_{j,k=1,2} S_{j,k} i dz_j \wedge d\overline{z_k}. \tag{7.3.1}$$

où les $S_{j,j}$ sont des mesures positives et $S_{1,2} = \overline{S_{2,1}}$ sont des mesures complexes. Soit (e_1, e_2) une base de $\mathbb{C}^2$. Rappelons qu'un $(1,1)$-vecteur positif de $\mathbb{C}^2$ est un élément de $\Lambda^{1,1}\mathbb{C}^2$ de la forme $i \sum_{j,k=1,2} t_{j,k} e_j \wedge \overline{e_k}$ où $(t_{j,k})_{(j,k)}$ est une matrice hermitienne positive. Un vecteur positif de $\mathbb{C}^2$ est décomposable si il s'écrit $iu \wedge \overline{u}$ où $u \in \mathbb{C}^2$. Dans l'écriture locale (7.3.1), puisque S est un courant positif, les mesures $|S_{1,2}|$ et $|S_{2,1}|$ sont dominées par la mesure trace $\sigma_S = S_{1,1} + S_{2,2}$. D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe Λ_S un champ mesurable de $(1,1)$-covecteurs positifs de trace 1 tel que

$$S = \Lambda_S \sigma_S.$$

Par dualité, il existe t_S un champ mesurable de $(1,1)$-vecteurs positifs de trace 1 tel que

$$\forall \eta \ (1,1) - \text{forme test}, \qquad S(\eta) = \int_{\mathbb{P}^2} < t_S, \eta > \sigma_S. \tag{7.3.2}$$

D'après le Théorème de densité de Lebesgue (voir [Mat95]), il existe $A \subset \operatorname{Supp} S$ tel que $S \wedge \omega(A) = 1$ et pour tout $x \in A$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\sigma_S(B_x(r))} \int_{B_x(r)} t_S(y) \sigma_S(y) = t_S(x).$$

On dit que S est décomposable en $x \in A$ si le $(1,1)$-vecteur positif $t_S(x)$ est décomposable. Par exemple, si $S = [L]$ où L est une courbe lisse, alors $t_S(x) = iu_x \wedge \overline{u_x}$ où u_x dirige la droite tangente à L en x. Les courants laminaires sont également des exemples de courants décomposables.

Dans [Duj12], Dujardin montre la propriété remarquable suivante : si f n'est pas un exemple de Lattès, alors le courant de Green T est σ_T-presque partout décomposable et porte donc une information directionnelle.

Théorème 7.3.1 (Dujardin [Duj12], Théorème 3.3)**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$, soit T le courant de Green de f. Si f n'est pas un exemple de Lattès, alors il existe $A' \subset A$ tel que*

1. *$(\sigma_T)(A') = 1$.*
2. *Pour tout $x \in A'$, il existe $v_x \in T_x\mathbb{P}^2$ tel que $t_T(x) = iv_x \wedge \overline{v_x}$ et $\|v_x\| = 1$.*

Dujardin établit l'existence de directions de Fatou grâce à la Proposition ci-dessous. Nous reproduisons les arguments pour la commodité du lecteur.

Proposition 7.3.2 (Dujardin [Duj12], Section 3.2)**.** *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. On suppose que f n'est pas un exemple de Lattès (ainsi $t_T(x) = iv_x \wedge \overline{v_x}$ σ_T-presque partout avec $\|v_x\| = 1$). Alors,*

$$\forall n \geq 1, \quad \int_{\mathbb{P}^2} \|D_x f^n(v_x)\|^2 \, d\sigma_T(x) \leq d^n.$$

Il s'ensuit, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall n \geq 1, \ \forall a > 0, \quad (\sigma_T)\left\{x \in \mathbb{P}^2, \ \|D_x f^n(v_x)\|^2 > ad^n\right\} \leq \frac{1}{a}.$$

Démonstration. Pour σ_T-presque tout x, on a

$$\|D_x f^n(v_x)\|^2 \leq \mathrm{Trace}(D_x f^n)_*(iv_x \wedge \overline{v_x}).$$

On utilise que $t_T(x) = iv_x \wedge \overline{v_x}$ et la définition de la trace pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|D_x f^n(v_x)\|^2 &\leq < (D_x f^n)_*(t_T(x)), \omega(f^n(x)) > \\ &\leq < t_T(x), (D_x f^n)^* \omega(f^n(x)) > \end{aligned}$$

car $D_x f^n$ est inversible σ_T-presque partout. On intègre cette inégalité sur $\mathbb{P}^2$:

$$\int_{\mathbb{P}^2} \|D_x f^n(v_x)\|^2 \, \sigma_T(x) \leq \int_{\mathbb{P}^2} < t_T(x), (D_x f^n)^* \omega(f^n(x)) > \sigma_T(x).$$

Par (7.3.2), on a alors

$$\int_{\mathbb{P}^2} \|D_x f^n(v_x)\|^2 \, \sigma_T(x) \leq \int_{\mathbb{P}^2} T \wedge (f^n)^* \omega = d^n,$$

où la dernière égalité vient de la Proposition 3.4.5. ☐

7.3.2 Preuve du Théorème 7.2.1

Lemme 7.3.3. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. On suppose que f n'est pas un exemple de Lattès (ainsi $t_T(x) = iv_x \wedge \overline{v_x}$ σ_T-presque partout avec $\|v_x\| = 1$). On suppose de plus que $\mu << \sigma_T$. Alors, il existe $q \geq 1$ et $\gamma > 0$ tels que*

$$\forall n \geq 1, \quad \mu \left\{ x \in \mathbb{P}^2,\ \|D_x f^n(v_x)\|^2 \leq \frac{4}{\gamma} d^n \right\} \geq \frac{\gamma}{4q}.$$

Démonstration. On écrit $\mu = \varphi \sigma_T$ où $\varphi \in L^1(\sigma_T)$, $\varphi \geq 0$. On pose $\gamma := \sigma_T \{\varphi > 0\}$.

Observons que l'on a

$$1 = \mu(\mathbb{P}^2) = \mu \{\varphi > 0\} = \int_{\{\varphi > 0\}} \varphi \sigma_T.$$

Cela montre que $\gamma > 0$. Pour σ_T-presque tout $x \in \mathbb{P}^2$, on a $1_{\left\{\frac{1}{q} \leq \varphi\right\}}(x) \to_{q\to\infty} 1_{\{0<\varphi\}}(x)$, donc

$$\sigma_T \left\{ \frac{1}{q} \leq \varphi \right\} \to_{q\to+\infty} \sigma_T \{0 < \varphi\} = \gamma$$

par convergence dominée. On fixe $q \geq 1$ tel que

$$\sigma_T \left\{ \frac{1}{q} \leq \varphi \right\} \geq \gamma/2. \tag{7.3.3}$$

On note pour tout $n \geq 1$,

$$A_n := \left\{ x \in \mathbb{P}^2,\ \|D_x f^n(v_x)\|^2 \leq \frac{4}{\gamma} d^n \right\}.$$

On veut montrer que $\mu(A_n) \geq \frac{\gamma}{4q}$. La Proposition 7.3.2 donne avec $a = 4/\gamma$

$$\forall n \geq 1, \quad \sigma_T(A_n) \geq 1 - \gamma/4. \tag{7.3.4}$$

Les minorations (7.3.3) et (7.3.4) donnent $\sigma_T(A_n \cap \left\{\frac{1}{q} \leq \varphi\right\}) \geq \frac{\gamma}{4}$. Pour terminer, observons que

$$\mu(A_n) \geq \mu(A_n \cap \{1/q \leq \varphi\}) = \int_{A_n \cap \{1/q \leq \varphi\}} \varphi \sigma_T.$$

Il s'ensuit :

$$\mu(A_n) \geq \frac{1}{q} (\sigma_T)(A_n \cap \{1/q \leq \varphi\}) \geq \frac{1}{q} \frac{\gamma}{4},$$

qui est la majoration souhaitée. □

Nous allons maintenant construire un ensemble de points A de μ-mesure strictement positive vérifiant les hypothèses du Théorème 7.1.1, ce qui conclura la preuve du Théorème 7.2.1. On pose

$$B_n := \left\{ x \in \mathbb{P}^2,\ \frac{1}{\tau_0^2} d^n \leq \|D_x f^n(v_x)\|^2 \leq \frac{4}{\gamma} d^n \right\}.$$

En utilisant la Proposition 7.2.4 (avec $a = \frac{\gamma}{8q}$) combinée à $\|D_x f^n(v_x)\| \geq \left\|(D_x f^n)^{-1}\right\|^{-1}$, et le Lemme 7.3.3, on a que $\mu(B_n) \geq \frac{\gamma}{8q}$. On pose $\hat{B_n} = \pi_0^{-1}(B_n)$. On a $\hat{\mu}(\hat{B_n}) \geq \frac{\gamma}{8q}$.

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $M_2 \geq 0$ et $\eta_0 > 0$, on pose $\hat{A}_2 := \left\{\beta_\epsilon(\hat{x}) \leq e^{M_2}\right\}$ et $\hat{A}_3 := \{\eta_\epsilon(\hat{x}) \geq 4\eta_0\}$. Par invariance de $\hat{\mu}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\hat{\mu}(\hat{A}_2) = \hat{\mu}(\hat{f}^{-n}(\hat{A}_2))$ et $\hat{\mu}(\hat{A}_3) = \hat{\mu}(\hat{f}^{-n}(\hat{A}_3))$. On peut donc choisir M_2 assez grand et η_0 assez petit pour que $\hat{A}_2 \cap \hat{A}_3 \cap \hat{f}^{-n}(\hat{A}_2) \cap \hat{f}^{-n}(\hat{A}_3)$ soit de $\hat{\mu}$-mesure plus grande que $1 - \frac{\gamma}{16q}$. Alors, en posant

$$\hat{A}_\epsilon^n := \hat{B}_n \cap \hat{A}_2 \cap \hat{A}_3 \cap \hat{f}^{-n}(\hat{A}_2) \cap \hat{f}^{-n}(\hat{A}_3), \qquad \hat{A}_\epsilon := \limsup_{n\in\mathbb{N}} \hat{A}_\epsilon^n,$$

on a $\hat{\mu}(\hat{A}_\epsilon^n) \geq \frac{\gamma}{16q}$ pour tout $n \geq 0$ et donc $\hat{\mu}(\hat{A}_\epsilon) \geq \frac{\gamma}{16q}$. Ainsi pour tout $\hat{x} \in \hat{A}_\epsilon$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $n_0 = 0$, $n_1 \geq n_2(\hat{x})$ et $\hat{x} \in \hat{A}_\epsilon^{n_j}$ pour tout $j \geq 0$. On a donc

1. $\eta_\epsilon(\hat{x}_{n_j}) \geq 4\eta_0$,
2. $\beta_\epsilon(\hat{x}_{n_j}) \leq e^{M_2}$,
3. $e^{-M_1} d^{n_j/2} \leq \|D_x f^{n_j}(v_x)\| \leq e^{M_1} d^{n_j/2}$,

où $x = x_0 = \pi_0(\hat{x})$ et en prenant M_1 tel que $e^{-2M_1} \leq \frac{1}{\tau_0^2} \leq \frac{4}{\gamma} \leq e^{2M_1}$. Le point 3 et le Théorème d'Oseledec 2.2.2 montrent que $v_s(x) = v_x$ (On a supposé $\lambda_1 > \frac{1}{2}\log d$). Ainsi, les points de $\hat{A}_\epsilon$ vérifient les hypothèses du Théorème 7.1.1. Pour conclure, on pose $A = \pi_0(\hat{A}_\epsilon)$, qui vérifie $\mu(A) \geq \hat{\mu}(\hat{A}_\epsilon) \geq \frac{\gamma}{16q}$. Pour tout $x \in A$, soit $\hat{x} \in \hat{A}_\epsilon$ tel que $\pi_0(\hat{x}) = x$. Soit ξ_x donné par le Théorème 7.1.1. Alors $\xi_x : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^2$ est tangent en 0 à la direction $v_s(x)$ et vérifie

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\xi_x^\star T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))} < +\infty.$$

7.4 Preuve dans le cas λ_2 minimal et v_s Hölder.

7.4.1 Théorème central limite

On dira que $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}$ est localement Hölder s'il existe $r > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ et $c > 0$ tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \quad (d(x,y) < r) \Rightarrow (|\phi(x) - \phi(y)| \leq c d(x,y)^\alpha).$$

On adopte la même définition pour les applications $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$.

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant.

Théorème 7.4.1. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit μ sa mesure d'équilibre. Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les exposants de μ. On suppose que $\lambda_2 = \frac{1}{2}\log d$ et que $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ est localement Hölder. Alors, pour tout $a > 0$, il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall n \geq 1, \quad \mu\left\{x \in \mathbb{P}^2, d^{n/2}e^{-2M} \leq \|D_x f^n(v_s(x))\| \leq d^{n/2}e^{2M}\right\} \geq 1 - a.$$

Remarquons que le caractère localement Hölder de $x \mapsto [v_s(x)]$ est vérifié pour les applications partiellement hyperboliques sur leur ensemble de Julia J, voir la Section 7.5. Dans le même esprit, mentionnons l'article de Gouëzel-Stoyanov [GS16], qui donne pour les systèmes de Bernoulli un contrôle du type grandes déviations pour les cocycles matriciels, à partir des grandes déviations pour les fonctions.

Théorème 7.4.2. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit μ sa mesure d'équilibre et $J = \operatorname{Supp}\mu$. Soit $\phi : J \to \mathbb{R}$ localement Hölder. Alors la limite suivante existe :*

$$\sigma = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} \|S_n(\phi)\|_2 = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=0}^{n} \phi \circ f^i \right\|_2 .$$

De plus on a l'alternative suivante :

– *Soit $\sigma = 0$ et alors il existe $v \in L^2(\mu)$ telle que $\phi - \mathbb{E}_\mu(\phi) = v \circ f - v$.*
– *Soit $\sigma > 0$ et alors $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^i$ converge en loi vers $\mathcal{N}(\mathbb{E}_\mu(\phi), 1)$.*

Ce théorème est une conséquence du Théorème C de [Dup10], au détail près qu'ici ϕ est localement Hölder et non pas Hölder. Cela n'est pas gênant. En effet, le caractère Hölder n'est utilisé que dans le Lemme 5.3 page 351 de [Dup10]. Or, (en reprenant les notations) quitte à prendre n assez grand dans la preuve du Lemme 5.3, on arrivera à avoir $d(w(\overline{\alpha}), w(\overline{\beta}))$ aussi petite qu'on veut et donc inférieure à r. On consultera également [CLB05], [DS06] et [DNS10] pour des résultats concernant le Théorème central limite.

On suppose dans la suite que les exposants de μ sont distincts : $\lambda_2 < \lambda_1$. On rappelle que pour μ-presque tout x, $v_s(x) \in T_x\mathbb{P}^2$ désigne un vecteur unitaire de l'espace stable correspondant à λ_2, voir le Théorème d'Oseledec 2.2.1. On note $\mathbb{P}(T\mathbb{P}^2)$ le projectivisé du fibré tangent de $\mathbb{P}^2$. On dispose donc d'une application

$$\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{P}(T\mathbb{P}^2) \\ x & \mapsto & [v_s(x)] \end{array}$$

définie μ-presque partout. On suppose pour simplifier que $\mathbb{P}(T\mathbb{P}^2)$ est trivial, c'est à dire égal à $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ (en toute rigueur, il faudrait considérer une collection finie de cartes sur lesquelles on a la trivialité).

Propriété 7.4.3.
On suppose que $x \mapsto [v_s(x)]$ est localement Hölder sur un borélien de μ-mesure totale.

1. *Alors $x \mapsto [v_s(x)]$ se prolonge en une application localement Hölder sur tout J.*
2. *Si de plus* $\mathrm{Supp}\,\mu \cap \mathcal{C}_f = \emptyset$, *alors* $\psi : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log \|D_x f(v_s(x))\| \end{array}$ *est localement Hölder.*

Démonstration. Le premier point est le fait qu'une fonction localement Hölder se prolonge de manière unique sur l'adhérence de son domaine de définition de manière localement Hölder. Ici, l'adhérence est le support de μ tout entier, soit J. On a

$$|\|D_x f(v_s(x))\| - \|D_y f(v_s(y))\|| \le \|D_x f(v_s(x)) - D_y f(v_s(y))\|.$$

On note M une borne de $\|D_x f\|$ sur J. Soit $(x, y) \in J \times J$ tel que $d(x, y) < r$. On peut supposer que $\|v_s(x) - v_s(y)\| \le c d(x, y)^\alpha$.

$$\begin{aligned} \|D_x f(v_s(x)) - D_y f(v_s(y))\| &\le \|D_x f(v_s(x)) - D_x f(v_s(y))\| + \|D_x f(v_s(y)) - D_y f(v_s(y))\| \\ &\le \|D_x f\|_J \,.\, \|v_s(x) - v_s(y)\| + \|D_x f - D_y f\| \, \|v_s(y)\| \\ &\le M c d(x, y)^\alpha + d(x, y) \cdot \|f\|_{C^2, J} \\ &\le d(x, y)^\alpha (\|f\|_{C^2, J} + Mc). \end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \|D_x f(v_s(x))\|$ est localement Hölder. Cette fonction est minorée par une constante $\rho > 0$ sur J, car $\mathrm{Supp}\,\mu \cap \mathcal{C}_f = \emptyset$. Comme la fonction log est $\frac{1}{\rho}$-lipschitzienne sur $[\rho, +\infty[$, on obtient que ψ est localement Hölder sur J. □

Observons pour commencer que $\mathbb{E}_\mu(\psi) = \lambda_2$ d'après le Lemme 2.3.4. Nous appliquons le Théorème 7.4.2 à la fonction ψ, ce qui fournit l'alternative suivante :

– Soit $\sigma_\psi = 0$ et il existe $v \in L^2(\mu)$ telle que $\psi = \lambda_2 + v \circ f - v$.
– Soit $\sigma_\psi > 0$ tel que $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\log \|D_x f^n(v_s(x))\| - n\lambda_2)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous démontrerons la Proposition suivante dans la Section 7.4.2.

Proposition 7.4.4. *Soit* $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ *un endomorphisme holomorphe de degré* $d \geq 2$. *On suppose que* $\lambda_2 = \frac{1}{2}\log d$ *et que la direction* $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ *est localement Hölder, alors la variance asymptotique* σ *de la fonction* $\psi = \log \|D_x f(v_s(x))\|$ *vérifie* $\sigma = 0$. *En particulier, il existe* $v \in L^2(\mu)$ *telle que pour* μ*-presque tout* x *:*

$$\log \|D_x f(v_s(x))\| = \lambda_2 + v \circ f - v \tag{7.4.1}$$

D'après le Lemme 2.3.3, on obtient en sommant (7.4.1) :

$$\forall x\ \mu - p.p., \quad \forall n \geq 1, \quad \log \|D_x f^n(v_s(x))\| = n\lambda_2 + v \circ f^n - v.$$

On en déduit le Théorème 7.4.1 , en regardant les sous-niveaux $\{|v| \leq M\}$, dont la mesure tend vers 1.

7.4.2 Preuve de la proposition 7.4.4

Lemme 7.4.5. *On reprend les notations du Théorème 7.2.3.*

Soit ρ *dans* $]0, 1]$. *Il existe un borélien* H *de* μ *mesure pleine vérifiant la propriété suivante : Pour tout* $x \in H$*, il existe* $n(x) \geq 1$ *tel que*

$$\forall n \geq n(x), \quad x \notin B_n(\rho) \text{ ou } \|(D_x f^n)(v_s(x))\| \geq \frac{d^{n/2}}{n}.$$

Démonstration. D'après le Théorème 7.2.3, $\mu(B_n(\rho) \cap R_n(n)^c) \leq (\rho n)^{-2}$. En sommant selon n, on a $\sum_{n\geq 1} \mu(B_n(\rho) \cap R_n(n)^c) \leq \rho^{-2} \sum_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Par le lemme de Borel-Cantelli, il existe donc H tel que $\mu(H) = 1$ et

$$\forall x \in H,\ \exists n(x) \geq 1,\ \forall n \geq n(x), \quad x \in B_n(\rho)^c \cup R_n(n).$$

Soit $x \in H$. Si $x \in B_n(\rho)^c$, le lemme est vérifié. Sinon, $x \in R_n(n)$. Donc, $\left\|(D_x f^n)^{-1}\right\|^{-1} \geq \frac{d^{n/2}}{n}$.

Comme $v_s(x)$ est un vecteur unitaire, on a que $\|D_x f^n(v_s(x))\| \geq \left\|(D_x f^n)^{-1}\right\|^{-1} \geq \frac{d^{n/2}}{n}$. $\square$

Preuve de la Proposition 7.4.4. On pose $\psi_0 := \psi - \frac{\log d}{2}$. D'après l'alternative fournie par le Théorème 7.4.2, si $\sigma(\psi_0) = 0$, il existe $v \in L^2(\mu)$ telle que pour μ-presque tout x, $\psi_0(x) = v \circ f - v$, qui est le résultat recherché.

Supposons que $\sigma > 0$. Alors par le Théorème 7.4.2, $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n(\psi_0)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$. C'est à dire $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\log \|D_x f^n(v_s(x))\| - n\frac{\log d}{2}\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$. En posant

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad G_n = \left\{ x \in J \mid \frac{S_n(\psi_0)(x)}{\sqrt{n}} \leq -\sigma \right\},$$

on a que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(G_n) = \beta_0.$$

Soit $N \geq 1$ tel que $\mu(G_n) \geq \frac{\beta_0}{2}$ pour tout $n \geq N$. Soit $\rho > 0$, donné par le Théorème 7.2.3 avec $\beta = \frac{\beta_0}{4}$, tel que pour tout $n \geq 1$, on ait $\mu(B_n(\rho)) \geq 1 - \frac{\beta_0}{4}$. On définit les ensembles

$$F_n := B_n(\rho) \cap G_n, \quad F := \limsup F_n.$$

Pour tout $n \geq N$, on a que $\mu(F_n) \geq \frac{\beta_0}{4}$. On a aussi $\mu(F) \geq \frac{\beta_0}{4}$. Soit H donné par le Lemme 7.4.5. Comme H est de mesure pleine et que F est de mesure non-nulle, il existe $x \in F \cap H$. Il y a donc une suite d'entier strictement croissante (n_i) telle que $x \in F_{n_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $F_{n_i} \subset G_{n_i}$, on a :

$$S_{n_i}(\psi_0)(x) = \log \|D_x f^{n_i}(v_s(x))\| - n_i \frac{\log d}{2} \leq -\sigma\sqrt{n_i}.$$

On en tire :

$$d^{n_i/2} e^{-\sigma\sqrt{n_i}} \geq \|D_x f^{n_i}(v_s(x))\| \tag{7.4.2}$$

D'un autre coté, comme x est dans H et dans $F_{n_i} \subset B_{n_i}(\rho)$, le Lemme 7.4.5 assure que pour $n_i > n(x)$:

$$\|D_x f^{n_i}(v_s(x))\| \geq \frac{d^{n_i/2}}{n_i} \tag{7.4.3}$$

En combinant (7.4.2) et (7.4.3), on obtient $e^{-\sigma\sqrt{n_i}} \geq \frac{1}{n_i}$ pour tout i assez grand. Ceci est absurde, donc $\sigma = 0$. □

7.4.3 Preuve du théorème 7.2.2

On va construire un ensemble de points de μ-mesure pleine vérifiant les hypothèses du Théorème 7.1.1, ce qui conclura la preuve du Théorème 7.2.2.

Soit $\epsilon > 0$. Soit

$$B_n = \left\{ x \in \mathbb{P}^2, d^{n/2} e^{-2M} \leq \|D_x f^n(v_s(x))\| \leq d^{n/2} e^{2M} \right\}.$$

Par le Théorème 7.4.1, il existe un $M > 0$ tel que $\mu(B_n) \geq 1 - \epsilon$. On pose $\hat{B_n} = \pi_0^{-1}(B_n)$. Soient $\hat{A}_2 := \left\{ \beta_\epsilon(\hat{x}) \leq e^{M_2} \right\}$ et $\hat{A}_3 := \{\eta_\epsilon(\hat{x}) \geq 4\eta_0\}$. Choisissons M_2 assez grand et η_0 assez petit pour que

$$\hat{A}_\epsilon^n := \hat{B_n} \cap \hat{A}_2 \cap \hat{A}_3 \cap \hat{f}^{-n}(\hat{A}_2) \cap \hat{f}^{-n}(\hat{A}_3)$$

soit de $\hat{\mu}$-mesure plus grande que $1 - 2\epsilon$. Alors,

$$\hat{A}_\epsilon := \limsup_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_\epsilon^n$$

est aussi de $\hat{\mu}$-mesure plus grande que $1-2\epsilon$. Donc pour tout $\hat{x} \in \hat{A}_\epsilon$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $n_0 = 0$, $n_1 \geq n_2(\hat{x})$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$,

1. $\eta_\epsilon(\hat{x}_{n_j}) \geq 4\eta_0$,
2. $\beta_\epsilon(\hat{x}_{n_j}) \leq e^{M_2}$,
3. $e^{-2M} d^{n/2} \leq \|D_x f^{n_j}(v_s(x))\| \leq e^{2M} d^{n/2}$.

Ainsi, les points de $\hat{A}_\epsilon$ vérifient les hypothèses du Théorème 7.1.1, et donc les conclusions du Théorème 7.2.2. Finalement, pour tout $x \in \pi_0(\hat{A}_\epsilon)$, on choisit un passé $\hat{x} \in \hat{A}_\epsilon$. Soit ξ_x donné par le Théorème 7.1.1. Alors $\xi_x : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^2$ est tangent en 0 à la direction $v_s(x)$ et

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\xi_x^\star T(\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Leb}(\mathbb{D}(r))} < +\infty.$$

On définit le borélien $A := \cup_{N\geq 1} \pi_0(\hat{A}_{1/N})$, qui est de μ-mesure pleine, pour conclure la preuve.

7.5 Continuité Hölder en dynamique partiellement hyperbolique

L'objectif de cette section de montrer que les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2$ ayant une dynamique partiellement hyperbolique sont des exemples vérifiant les hypothèses du Théorème 7.2.2. On consultera Fornæss-Sibony [FS98] pour des résultats sur les endomorphismes hyperboliques de $\mathbb{P}^2$ et Jonsson [Jon99] pour des exemples d'applications polynomiales hyperboliques sur leur ensemble de Julia. Le théorème 7.5.2 est du à Brin, il est emprunté à la Section 5.3 du livre de Barreira-Pesin [BP07]. Voir aussi les Chapitres 2 et 3 du livre de Pesin [Pes04].

Définition 7.5.1. *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$. Nous dirons que la dynamique de f est partiellement hyperbolique sur l'ensemble de Julia lorsque : Il existe λ et μ réels tels que $0 < \lambda < \mu$, il existe $c > 1$ et pour tout $x \in J$, il existe $v_s(x)$ et $v(x)$ vecteurs unitaires et invariants de $T_x\mathbb{P}^2$ tels que, pour tout $n \geq 1$:*

$$\|D_x f^n(v_s(x))\| \leq c\lambda^n \|v_s(x)\|$$

$$\|D_x f^n(v(x))\| \geq c^{-1}\mu^n \|v(x)\|$$

On supposera pour simplifier que J est inclus dans une carte affine $\mathbb{C}^2$ de $\mathbb{P}^2$. Ainsi, $d(x,y) = \|x-y\|$. La définition 7.5.1 implique que les applications $x \mapsto v(x)\mathbb{C}$ et $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ sont continues sur le compact J. En particulier, l'angle entre v et v_s est minoré sur J par une constante strictement positive. Voir [KH95], Chapitre 6, Section 4. On peut donc supposer, quitte à augmenter c, que

$$v \in (v_s(x)\mathbb{C})^{\perp} \;\Rightarrow\; \|D_x f^n(v)\| \geq c^{-1}\mu^n \|v\|$$

Théorème 7.5.2 (Brin, voir [Pes04], Proposition 3.9)**.** *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$ ayant une dynamique partiellement hyperbolique sur son ensemble de Julia. Alors l'application $x \mapsto v_s(x)\mathbb{C}$ de J dans $T\mathbb{P}^2$ est localement Hölder. Plus précisément : On pose $b = max(1, \|Df\|_{\infty,\mathbb{P}^2})$ et on fixe $a > b^2$. Alors il existe $D_a > 1$ tel que pour tout $(x,y) \in J \times J$,*

$$d(x,y) < D_a^{-1} \;\Rightarrow\; d(v_s(x)\mathbb{C}, v_s(y)\mathbb{C}) \leq 3c^2\frac{\mu}{\lambda}(D_a d(x,y))^{\frac{\log \mu/\lambda}{\log a/\lambda}}$$

La démonstration va consister en l'association du lemme 7.5.3 d'algèbre linéaire avec le lemme 7.5.4 qui est une version itérée du théorème des accroissements finis. La distance entre deux sous-espaces vectoriels est définie comme

$$d(E_A, E_B) = \max\left(\max_{v\in E_A,\|v\|=1} d(v, E_B), \max_{w\in E_B,\|w\|=1} d(E_A, w)\right).$$

Lemme 7.5.3. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $M_2(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe des réels $0 < \lambda < \mu < a$ tels que*

- *il existe $\Delta \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A_n - B_n\| \leq \Delta a^n$.*
- *Il existe E_A et E_B des sous-espaces de $\mathbb{C}^2$ et une constante $c > 1$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$v \in E_A \;\Rightarrow\; \|A_n v\| \leq c\lambda^n \|v\|$$

$$v \in E_A^{\perp} \;\Rightarrow\; \|A_n v\| \geq c^{-1}\mu^n \|v\|$$

$$v \in E_B \;\Rightarrow\; \|B_n v\| \leq c\lambda^n \|v\|$$

$$v \in E_B^{\perp} \;\Rightarrow\; \|B_n v\| \geq c^{-1}\mu^n \|v\|$$

Alors,

$$d(E_A, E_B) \leq 3c^2 \frac{\mu}{\lambda} \Delta^{\frac{\log \mu - \log \lambda}{\log a - \log \lambda}}.$$

Démonstration. Soit $n_0(\Delta)$ l'unique entier positif vérifiant $\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{n_0+1} < \Delta \leq \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{n_0}$. Pour tout w dans E_B, majorons $d(w, E_A)$:

$$\begin{aligned} \forall w \in E_B, \quad \|A_{n_0} w\| &\leq \|B_{n_0} w\| + \|(A_{n_0} - B_{n_0}) w\| \\ &\leq c\lambda^{n_0} \|w\| + \Delta a^{n_0} \|w\| \text{ par hypothèses .} \end{aligned}$$

On en déduit $\|A_{n_0} w\| \leq c\lambda^{n_0} \|w\| + \lambda^{n_0} \|w\|$ par choix de n_0, d'où

$$\|A_{n_0} w\| \leq 2c\lambda^{n_0} \|w\| . \tag{7.5.1}$$

On décompose $w \in E_B$ en $w_1 + w_2$ avec $w_1 \in E_A$ et $w_2 \in E_A^{\perp}$. Alors :

$$\|A_{n_0} w\| \geq \|A_{n_0} w_2\| - \|A_{n_0} w_1\| .$$

$$\|A_{n_0} w\| \geq c^{-1} \mu^{n_0} \|w_2\| - c\lambda^{n_0} \|w_1\| .$$

Ainsi par (7.5.1) :

$$2c\lambda^{n_0} \|w\| \geq c^{-1} \mu^{n_0} \|w_2\| - c\lambda^{n_0} \|w_1\| .$$

On en déduit

$$3c\lambda^{n_0} \|w\| \geq c^{-1} \mu^{n_0} \|w_2\| = c^{-1} \mu^{n_0} d(w, E_A),$$

et donc $d(w, E_A) \leq 3c^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \|w\|$. Symétriquement, si $w \in E_A$, alors $d(w, E_B) \leq 3c^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n_0} \|w\|$, d'où

$$d(E_A, E_B) \leq 3c^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n_0} .$$

Vérifions que cela mène bien à l'inégalité souhaitée : Comme $\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{n_0+1} < \Delta$, en prenant le logarithme et multipliant par $\log\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$,

$$(n_0 + 1). \log\left(\frac{\lambda}{a}\right). \log\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) < \log \Delta. \log\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

$$(n_0 + 1). \log\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) < \log \Delta \frac{\log \mu/\lambda}{\log a/\lambda},$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n_0+1} < \Delta^{\frac{\log \mu/\lambda}{\log a/\lambda}}.$$

D'où

$$d(E_A, E_B) \leq 3c^2 \frac{\mu}{\lambda} \Delta^{\frac{\log \mu/\lambda}{\log a/\lambda}}.$$

□

Lemme 7.5.4. *Soit $b = max(1, \|Df\|_{\infty,\mathbb{P}^2})$. Pour tout $a > b^2 \geq 1$, il existe $D_a > 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\forall x, y \in J, \quad \|D_x f^n - D_y f^n\| \leq D_a a^n \|x - y\| .$$

Démonstration. Soit $D' = \left\|D^2 f\right\|_{\infty,\mathbb{P}^2}$, de sorte que pour tout x et y dans J, $\|D_x f - D_y f\| \leq D' \|x-y\|$. Par ailleurs, le théorème des accroissements finis nous assure par récurrence que

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| \leq b^n \|x-y\| . \tag{7.5.2}$$

Choisissons un $D_a \geq D'$ tel que

$$\frac{b}{a} + \frac{D'}{D_a}\frac{b^2}{a} \leq 1.$$

Le lemme s'obtient par récurrence sur n : Pour $n = 1$, comme $a > 1$, on a $a.D_a > D_a \geq D'$ donc $\|D_x f - D_y f\| \leq D_a a \|x-y\|$ pour tout x et y. Supposons que le lemme est vrai au rang n.

$$\begin{aligned} D_x f^{n+1} - D_y f^{n+1} &= D_{f^n(x)} f \circ D_x f^n - D_{f^n(y)} f \circ D_y f^n \\ &= D_{f^n(x)} f \circ (D_x f^n - D_y f^n) + (D_{f^n(x)} f - D_{f^n(y)} f) \circ D_y f^n \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left\|D_x f^{n+1} - D_y f^{n+1}\right\| &\leq b \cdot D_a \cdot a^n \|x-y\| + D' \|f^n(x) - f^n(y)\| \times b^n \\ &\leq b \cdot D_a a^n \|x-y\| + D' b^{2n} \|x-y\| \text{ d'après (7.5.2)} \\ &\leq D_a a^{n+1} \|x-y\| \left(\frac{b}{a} + \frac{D'}{D_a}\frac{b^{2n}}{a^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Le terme entre parenthèses vérifie :

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{D'}{D_a}\frac{b^{2n}}{a^{n+1}}\right) \leq \left(\frac{b}{a} + \frac{D'}{D_a}\left(\frac{b^2}{a}\right)^n\right) \leq \left(\frac{b}{a} + \frac{D'}{D_a}\frac{b^2}{a}\right) \leq 1$$

par le choix de D_a. On obtient alors que $\left\|D_x f^{n+1} - D_y f^{n+1}\right\| \leq D_a a^{n+1} \|x-y\|$, soit le lemme au rang $n+1$ et on conclut par récurrence. □

Démonstration du théorème 7.5.2. Soit f vérifiant les hypothèses du Théorème 7.5.2 avec les mêmes notations que dans la définition 7.5.1. Soient $b = max(1, \|Df\|_{\infty,\mathbb{P}^2})$ et $a > b^2$. Soit D_a la constante alors fournie par le Lemme 7.5.4.

Soient x et y dans J tels que $\|x-y\| < 1/D_a$. Pour tout n positif, on pose $A_n = D_x f^n$ et $B_n = D_y f^n$. On sait alors par le lemme 7.5.4 que

$$\forall n, \quad \|A_n - B_n\| \leq D_a a^n \|x-y\| .$$

On pose

$$\Delta := D_a \|x-y\| .$$

Comme $\Delta < 1$, on peut appliquer le lemme 7.5.3 avec $E_A = Vect(v_s(x))$, $E_B = Vect(v_s(y))$. On obtient alors :

$$d(v_s(x)\mathbb{C}, v_s(y)\mathbb{C}) \leq 3c^2 \frac{\mu}{\lambda} (D_a \|x-y\|)^{\frac{\log \mu/\lambda}{\log a/\lambda}} .$$

Cela démontre le Théorème 7.5.2. □

> This is the end, beautiful friend
> This is the end, my only friend, the end
> Of our elaborate plans, the end
> Of everything that stands, the end
> No safety or surprise, the end
>
> The Doors, The End

Bibliographie

[BrDu99] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{C}\mathrm{P}^k$. *Acta Math.*, 182(2) :143–157, 1999.

[BrDu01] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 2001(93) :145–159, 2001.

[BoDa02] Araceli M. Bonifant and Marius Dabija. Self-maps of $\mathbb{P}^2$ with invariant elliptic curves. In *Complex manifolds and hyperbolic geometry (Guanajuato, 2001)*, volume 311 of *Contemp. Math.*, pages 1–25. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[BiDe03] Ilia Binder and Laura DeMarco. Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of $\mathbb{C}^n$. *Int. Math. Res. Not.*, 2003(11) :613–625, 2003.

[BeDu05] François Berteloot and Christophe Dupont. Une caractérisation des endomorphismes de Lattès par leur mesure de Green. *Comment. Math. Helv.*, 80(2) :433–454, 2005.

[BDM08] François Berteloot, Christophe Dupont, and Laura Molino. Normalization of bundle holomorphic contractions and applications to dynamics. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(6) :2137–2168, 2008.

[BJ00] Eric Bedford and Mattias Jonsson. Dynamics of regular polynomial endomorphisms of $\mathbf{C}^k$. *Amer. J. Math.*, 122(1) :153–212, 2000.

[BK83] Michael Brin and Anatol Katok. On local entropy. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, volume 1007 of *Lecture Notes in Math.*, pages 30–38. Springer, Berlin, 1983.

[BL98] François Berteloot and Jean-Jacques Loeb. Spherical hypersurfaces and Lattès rational maps. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 77(7) :655–666, 1998.

[BL01] François Berteloot and Jean-Jacques Loeb. Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de $\mathbb{P}^k$. *Bull. Soc. Math. France*, 129(2) :175–188, 2001.

[BLS93] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Invent. Math.*, 114(2) :277–288, 1993.

[Bow73] Rufus Bowen. Topological entropy for noncompact sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 184 :125–136, 1973.

[BP07] Luis Barreira and Yakov Pesin. *Nonuniform hyperbolicity*, volume 115 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. Dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents.

[Bri97] Jean-Yves Briend. *Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de CPk.* PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1997.

[BeTa82] Eric Bedford and Bert Alan Taylor. A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149(1-2) :1–40, 1982.

[BiTa16] Fabrizio Bianchi and Johan Taflin. Bifurcations in the elementary Desboves family. *A paraître aux Proceedings of the AMS*, 2016.

[CLB05] Serge Cantat and Stéphane Le Borgne. Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(56) :3479–3510, 2005.

[DD04] Tien-Cuong Dinh and Christophe Dupont. Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes. *J. Geom. Anal.*, 14(4) :613–627, 2004.

[Dem12] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry.* En ligne, 2012. disponible à https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf.

[DG12] Romain Dujardin and Vincent Guedj. Geometric properties of maximal psh functions. In *Complex Monge-Ampère equations and geodesics in the space of Kähler metrics*, volume 2038 of *Lecture Notes in Math.*, pages 33–52. Springer, Heidelberg, 2012.

[Din01] Tien-Cuong Dinh. Sur les applications de Lattès de $\mathbb{P}^k$. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(6) :577–592, 2001.

[Din07] Tien-Cuong Dinh. Attracting current and equilibrium measure for attractors on $\mathbb{P}^k$. *J. Geom. Anal.*, 17(2) :227–244, 2007.

[DNS10] Tien-Cuong Dinh, Viêt-Anh Nguyên, and Nessim Sibony. Exponential estimates for plurisubharmonic functions and stochastic dynamics. *J. Differential Geom.*, 84(3) :465–488, 2010.

[DS06] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59(5) :754–768, 2006.

[DS10] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. *Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings*, volume 1998 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–294. Springer, Berlin, 2010.

[dT05] Henry de Thélin. Un phénomène de concentration de genre. *Math. Ann.*, 332(3) :483–498, 2005.

[dT08] Henry de Thélin. Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes. *Invent. Math.*, 172(1) :89–116, 2008.

[dTV15] Henry de Thélin and Gabriel Vigny. On the measures of large entropy on a positive closed current. *Math. Z.*, 280(3-4) :919–944, 2015.

[Duj12] Romain Dujardin. Fatou directions along the Julia set for endomorphisms of $\mathbb{CP}^k$. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 98(6) :591–615, 2012.

[Duj16] Romain Dujardin. Non density of stability for holomorphic mappings on $\mathbb{P}^k$. *ArXiv e-prints*, October 2016.

[Dup03] Christophe Dupont. Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de $\mathbb{C}^n$. *Manuscripta Math.*, 111(3) :357–378, 2003.

[Dup06] Christophe Dupont. Formule de Pesin et applications méromorphes. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 37(3) :393–418, 2006.

[Dup10] Christophe Dupont. Bernoulli coding map and almost sure invariance principle for endomorphisms of $\mathbb{P}^k$. *Probability Theory and Related Fields*, 146(3-4) :337–359, 2010.

[Dup11] Christophe Dupont. On the dimension of invariant measures of endomorphisms of $\mathbb{CP}$(k). *Math. Ann.*, 349(3) :509–528, 2011.

[FS94] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimensions. In *Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, volume 439 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. Notes partially written by Estela A. Gavosto.

[FS98] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Hyperbolic maps on $\mathbf{P}^2$. *Math. Ann.*, 311(2) :305–333, 1998.

[Gro03] Mikhail Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.

[GS16] Sébastien Gouëzel and Luchezar Stoyanov. Quantitative pesin theory for anosov diffeomorphisms and flows. *A paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2016.

[HP94] John H. Hubbard and Peter Papadopol. Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(1) :321–365, 1994.

[Jon98] Mattias Jonsson. Sums of Lyapunov exponents for some polynomial maps of $\mathbf{C}^2$. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(3) :613–630, 1998.

[Jon99] Mattias Jonsson. Dynamics of polynomial skew products on $\mathbf{C}^2$. *Math. Ann.*, 314(3) :403–447, 1999.

[JV02] Mattias Jonsson and Dror Varolin. Stable manifolds of holomorphic diffeomorphisms. *Invent. Math.*, 149 :409–430, August 2002.

[KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[Kli91] Maciej Klimek. *Pluripotential theory*, volume 6 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications.

[Led81] François Ledrappier. Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(1) :77–93, 1981.

[Led84a] François Ledrappier. Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(1) :37–40, 1984.

[Led84b] François Ledrappier. Propriétés ergodiques des mesures de Sinaï. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1984(59) :163–188, 1984.

[Led84c] François Ledrappier. Quelques propriétés des exposants caractéristiques. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XII—1982*, volume 1097 of *Lecture Notes in Math.*, pages 305–396. Springer, Berlin, 1984.

[Led87] François Ledrappier. Dimension of invariant measures. In *Proceedings of the conference on ergodic theory and related topics, II (Georgenthal, 1986)*, volume 94 of *Teubner-Texte Math.*, pages 116–124. Teubner, Leipzig, 1987.

[LY85a] François Ledrappier and Lai-Sang Young. The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Ann. of Math. (2)*, 122(3) :509–539, 1985.

[LY85b] François Ledrappier and Lai-Sang Young. The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension. *Ann. of Math. (2)*, 122(3) :540–574, 1985.

[Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[May02] Volker Mayer. Comparing measures and invariant line fields. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(2) :555–570, 2002.

[Mn88] Ricardo Mañé. The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps. In *Dynamical systems, Valparaiso 1986*, volume 1331 of *Lecture Notes in Math.*, pages 86–117. Springer, Berlin, 1988.

[MP77] Michał Misiurewicz and Feliks Przytycki. Topological entropy and degree of smooth mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 25(6) :573–574, 1977.

[Pes97] Yakov B. Pesin. *Dimension theory in dynamical systems.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1997. Contemporary views and applications.

[Pes04] Yakov B. Pesin. *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2004.

[Prz85] Feliks Przytycki. Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map. *Invent. Math.*, 80(1) :161–179, 1985.

[Sib99] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$. In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix–x, xi–xii, 97–185. Soc. Math. France, Paris, 1999.

[Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[You82] Lai-Sang Young. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2(1) :109–124, 1982.

[Zdu90] Anna Zdunik. Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps. *Invent. Math.*, 99(3) :627–649, 1990.

Mr Lunard présente ses respects au professeur Rogue et lui demande de bien vouloir cesser de mettre son énorme nez dans les affaires d'autrui.

Mr Cornedrue approuve Mr Lunard et voudrait ajouter que le professeur Rogue est un horrible crétin.

Mr Patmol voudrait faire part de son ébahissement à la pensée qu'un tel imbécile ait pu devenir professeur.

Mr Queuedver souhaite le bonjour au professeur Rogue et lui conseille de se laver les cheveux, s'il veut cesser de ressembler à un tas d'ordures.

- J.K. Rowling, Harry Potter et le Prisonnier d'Azkaban