



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Analyse de stabilité et synchronisation des systèmes singulièrement perturbés

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19/09/2017

Doctorat de l'Université de Lorraine

Spécialité Automatique, Traitement du signal et des images, Génie informatique

par

Jihene BEN REJEB

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	G-I. BARA	Maître de Conférences HDR, ICube, Université de Strasbourg
	L. ZACCARIAN	Directeur de Recherche CNRS, LAAS
<i>Examineurs :</i>	A. GIRARD	Directeur de Recherche CNRS, L2S UMR 8506 CNRS
	R. JUNGERS	Chercheur qualifié FNRS - Professeur Université Catholique de Louvain
<i>Directeur de thèse :</i>	J. DAAFOUZ	Professeur, CRAN UMR 7039 CNRS Université de Lorraine
<i>Co-directeur de thèse :</i>	I-C. MORĂRESCU	Maître de Conférences HDR, CRAN UMR 7039 CNRS Université de Lorraine

A mes parents, ma soeur et mon chéri

Remerciements

Nombreux sont ceux à qui je dois des remerciements pour m'avoir aidé, soutenu ou accompagné durant ces trois années de thèse. C'est pour leur montrer ma gratitude et ma reconnaissance que je leur dédie cette page. Premièrement, je remercie M. Irinel Constantin Morărescu, mon co-directeur de thèse pour son enthousiasme, ses conseils, sa patience, sa confiance et son assistance constante durant ces trois années. Je remercie M. Jamal Daafouz, mon directeur de thèse pour les discussions scientifiques fructueuses et tous les conseils dont il m'a fait bénéficier. Je leur suis reconnaissante pour la formation que j'ai pu acquérir durant cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. Luca Zaccarian et Mme. Gabriela Iuliana Bara d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. L'attention et l'intérêt qu'ils ont portés à mon travail m'honorent. Je remercie M. Antoine Girard président du jury, M. Rapahel Jungers pour leur participation au jury. Je leur suis reconnaissante pour la lecture attentive de mon manuscrit, pour leurs remarques et leurs compliments.

Merci à Lucian Buşoniu pour m'avoir accueilli à l'Université Technique de Cluj-Napoca pendant l'été 2016. Ce fut un séjour riche autant sur les plans humain, culturel que scientifique.

Je souhaite remercier chaleureusement les membres du laboratoire CRAN pour leur aide, en particulier Mme Carole Courier et Mme Christine Pierson qui se sont toujours occupées des problèmes administratifs me concernant.

Je remercie également mes collègues pour les bons moments passés : Florian, Harry, Pierre, Hervé, Ying, Mathieu, William, Waseem, Thomasso pour le climat de bonne humeur qu'ils contribuent à créer et à maintenir.

Mon amitié va à mes amies Farah, Wafa et Manel pour tous ces moments passés ensemble à parler d'avenir, leur soutien moral ...

Enfin, mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents, ma soeur, mon chéri ainsi qu'à toute ma famille et ma belle-famille, pour leur soutien moral et leurs encouragements. Merci à la petite loulou qui a égayé mes deux dernières années de thèse.

Je remercie tous ceux, d'une manière ou d'une autre, m'ont aidé durant ces trois années de thèse.

Table des matières

Table des matières	iv
Notations	vii
Introduction	1
1 Notions introductives	9
1.1 Stabilité et stabilisation des systèmes linéaires	9
1.1.1 Eléments de théorie de Lyapunov	9
1.1.2 Commande linéaire quadratique LQ	11
1.1.3 Systèmes singulièrement perturbés	13
1.1.4 Commande LQ pour des systèmes singulièrement perturbés	16
1.1.4.1 Méthode par décomposition de l'équation de Riccati	17
1.1.4.2 Méthode par découplage des dynamiques	18
1.2 Systèmes hybrides	20
1.3 Systèmes multi-agents	23
2 Analyse de stabilité des systèmes hybrides singulièrement perturbés	29
2.1 Introduction	29
2.2 Positionnement du problème	30
2.2.1 Mise sous la forme classique des systèmes singulièrement perturbés	32
2.2.2 Séparation des échelles de temps	34
2.2.3 Analyse de stabilité des systèmes singulièrement perturbés	36
2.3 Analyse de stabilité	39
2.3.1 Cas 1 : $\gamma_{11} > 1$	43
2.3.2 Cas 2 : $\gamma_{11} = 1$	45
2.3.3 Cas 3 : $\gamma_{11} < 1$	47
2.3.4 Analyse de stabilité du modèle réduit	48
2.3.5 Extension au cas des dimensions variantes dans le temps	50
2.4 Exemples illustratifs	53
2.4.1 Application à des systèmes décrits par des dynamiques scalaires	53
2.4.2 Exemples numériques	56
2.4.3 Discussion	64
2.4.3.1 Sources de conservatisme	64
2.4.3.2 Temps de séjour de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$	65
2.5 Conclusion	68

3	Un $\mathcal{O}(\varepsilon)$-sous-graphe stabilisant pour des systèmes hybrides linéaires singulièrement perturbés	71
3.1	Introduction	71
3.2	Représentation graphique des systèmes à commutation impulsif	72
3.3	Analyse du $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe stabilisant	74
3.4	Classes particulières de systèmes	80
3.4.1	Systèmes à commutation singulièrement perturbés	80
3.4.2	Systèmes à commutation	81
3.4.3	Systèmes hybrides	81
3.5	Exemple illustratif	82
3.6	Conclusion	85
4	Synchronisation avec un coût garanti dans un Système Multi-agents Singulièrement Perturbé (SMSP)	87
4.1	Introduction	87
4.2	Positionnement du problème	88
4.3	Reformulation du problème dans le cadre de la stabilisation simultanée .	90
4.3.1	Changement de variables et découplage des dynamiques collectives	91
4.3.2	Loi de commande stabilisante et coût garanti relatif	94
4.4	Conception de la loi de commande décentralisée	96
4.4.1	Conditions d'existence d'une loi de commande commune	96
4.4.2	Conception de la loi de commande stabilisante par découplage des dynamiques singulièrement perturbées	97
4.5	Coût garanti global requis à la synchronisation au sein du SMSP	100
4.5.1	Coût garanti global pour la stabilisation simultanée	101
4.5.2	Loi de commande décentralisée avec un coût garanti	102
4.5.3	Approche de l'implémentation numérique de la solution de Riccati	106
4.6	Exemples illustratifs	109
4.6.1	Synchronisation sans contrainte d'effort de commande	110
4.6.2	Synchronisation avec contrainte d'effort de commande	115
4.7	Conclusion	119
5	Conclusion générale et perspectives	121
A	Outils	123
	Bibliographie	127

Notations

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels,
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs,
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimensions n construit sur le corps des réels,
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels,
$\mathbf{1}_n$	Vecteur colonne dont tous les éléments sont égaux à 1,
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité de dimension n ,
$\mathbf{0}_{n,m}$	Matrice nulle d'ordre $n \times m$,
$A^\top$	Transposée de la matrice A ,
A^{-1}	Inverse de la matrice A ,
$\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$	Matrice diagonale par blocs avec $A_1, \dots, A_n$ sur la diagonale principale,
$A > \mathbf{0}$	Matrice carrée symétrique définie positive,
$A < \mathbf{0}$	Matrice carrée symétrique définie négative,
$A \geq \mathbf{0}$	Matrice carrée symétrique semi-définie positive,
$A \leq \mathbf{0}$	Matrice carrée symétrique semi-définie négative,
$A < B$	Matrice $A - B$ carrée symétrique définie négative,
$\text{rang}(A)$	Rang de la matrice A ,
$\ x\ $	Norme Euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,
$\ A\ $	Norme matricielle de A induite par la norme Euclidienne,
λ_i	Valeur propre d'une matrice,
$vp(A)$	Spectre d'une matrice A , i.e. $vp(A) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i\}$,
$\rho(A)$	Rayon spectral d'une matrice A , i.e. $\max_{i=1, \dots, n} \lambda_i $,
$J^{i \xrightarrow{j} i'}$	Matrice de transition d'un mode i à un mode i' accompagnée d'un saut j .
$x(t^-)$	$\lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} x(t - \delta)$.

Introduction générale

Cette thèse est dédiée à la prise en compte des échelles de temps multiples à travers la notion de perturbations singulières dans les systèmes dynamiques hybrides et les systèmes multi-agents. Elle aborde la question de l'analyse de stabilité des systèmes linéaires hybrides singulièrement perturbés en présence des commutations, des sauts sur l'état et d'un changement de la nature des variables à chaque événement. Elle traite également le problème de synchronisation à coût garanti des systèmes multi-agents décrits par des dynamiques singulièrement perturbés. L'objectif est d'assurer la synchronisation, ou d'une manière générale le consensus, avec un seuil de performance prédéfini à travers la synthèse de lois de commande décentralisées.

Contexte de la thèse

Classe de systèmes hybrides singulièrement perturbés

D'une manière générale, le caractère mixte des systèmes hybrides fait appel explicitement et simultanément à des processus continus qui interagissent avec (ou sont supervisés par) des processus discrets. Cette classe de systèmes englobe de nombreuses classes

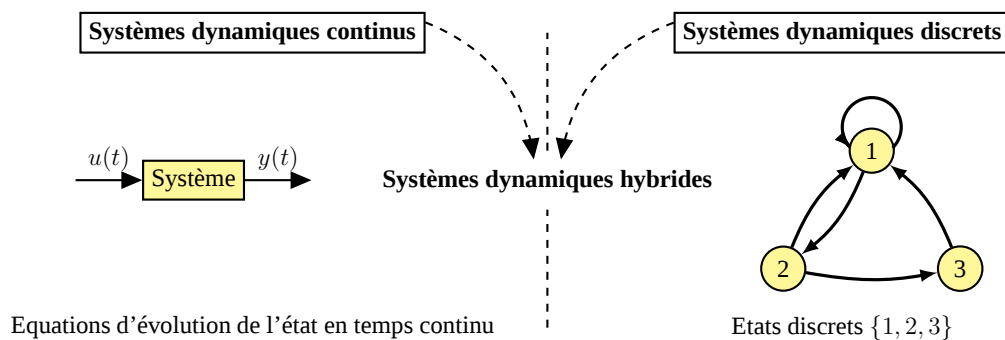


FIGURE 1: Couplage continu-discret au sein d'un système hybride

de systèmes dynamiques hybrides. C'est le cas des systèmes à commutation à temps continu composés d'une famille de sous-systèmes à dynamique continue et d'une logique qui indique à chaque instant le sous-système actif. C'est aussi le cas des systèmes impulsifs qui constituent une classe particulière de systèmes hybrides caractérisée par la combinaison d'un processus continu décrit par des équations différentielles et de sauts sur l'état (impulsions). Ces phénomènes discrets peuvent être associés à des conditions temporelles périodiques ou événementielles en relation avec les sous-systèmes continus [1].

Par ailleurs, la théorie des perturbations singulières permet la prise en compte de la présence de différentes échelles de temps et donne lieu à des approches basées sur le découplage des dynamiques, c'est-à-dire, la séparation des variables lentes et des variables rapides [3, 27, 46, 60]. Or, l'association des perturbations singulières et des dynamiques hybrides donne lieu à des difficultés importantes liées à la complexité de certaines propriétés à analyser telles que la stabilité globale du système par exemple. En effet, la stabilité de tous les sous-systèmes ne garantit pas forcément la stabilité du système global et en particulier quand le signal de commutation est arbitraire [33]. Des résultats de stabilité et de stabilisation des systèmes à commutation en présence des perturbations singulières ont été proposés dans [34, 35]. Dans le cas des systèmes singulièrement perturbés impulsifs, des techniques d'analyse de stabilité ont été considérées dans [1, 56]. Néanmoins, il existe peu de résultats dans le cas d'une présence conjointe des commutations et des impulsions comme c'est le cas dans plusieurs domaines d'application allant de la biologie [23, 29] à l'ingénierie [33, 55]. Ce type de problèmes se traduit par un modèle hybride singulièrement perturbé.

Ainsi, l'étude de cette classe générale de systèmes est motivée autant sur le plan théorique que pratique. Plus particulièrement, le travail de recherche lié à cette thèse est motivé par des problèmes rencontrés dans le pilotage de procédés sidérurgiques dans le cadre de contrats industriels avec ArcelorMittal. Le procédé où l'on rencontre à la fois l'aspect échelles de temps multiples et l'aspect hybride (commutations) est le contrôle du déport de bande dans le laminage à chaud [33].

Un des objectifs majeurs dans l'analyse du procédé de laminage consiste à maintenir la bande métallique parallèle à l'axe du laminoir lors de son passage d'un rouleau à un autre. Le modèle mathématique du système à piloter présente des échelles de temps différentes. En effet, la dynamique lente est relative au déplacement latérale de la bande et la dynamique rapide est relative à l'angle que fait la bande avec l'axe du laminoir. L'aspect hybride intervient durant la dernière phase de laminage où la queue de la bande

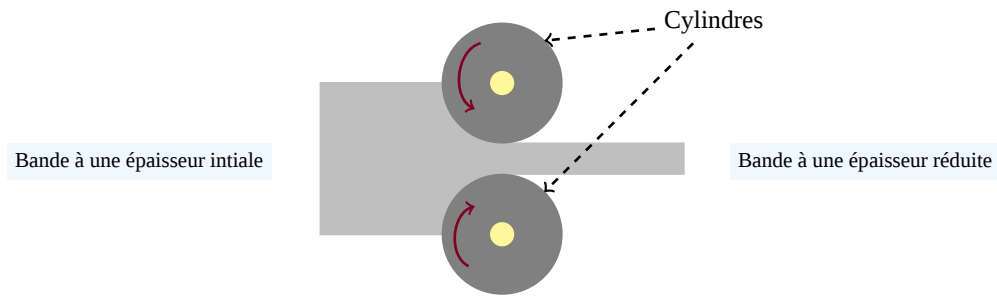


FIGURE 2: Principe du laminage : le métal subit une réduction d'épaisseur par écrasement entre les deux cylindres.

à laminer passe d'une cage à une autre. Cela se traduit par des commutations dans le modèle mathématique. Durant cette phase, un autre phénomène important intervient : la nature des dynamiques change. En effet, durant cette phase, l'absence de traction fait que la queue de bande est livrée à elle-même. De ce fait, les composantes lentes et rapides et les dimensions du vecteur d'état peuvent changer, ce qui accentue la complexité du modèle et son analyse.

Synchronisation de systèmes singulièrement perturbés

Un système multi-agents est un système composé d'une multitude d'entités ou d'agents conçus pour résoudre un problème global à travers leur coopération et le partage de leurs ressources. Le but de chaque agent est d'effectuer localement la tâche qui lui est assignée et se coordonner avec ses semblables pour qu'ils puissent s'accorder sur une valeur finale : un lieu de rendez-vous, une répartition de la charge de travail,...

Cette coordination, fondée sur une information locale qui ramène tous les agents à un accord par rapport à l'objectif, est appelée *consensus* ou encore *synchronisation*.

Le problème du consensus se pose dans différentes disciplines comme la biologie [48, 51], la sociologie [6, 20, 41], l'économie [2], l'ingénierie [8], les réseaux sociaux [6, 62]. Pour répondre aux besoins de ces communautés, le problème a été largement traité pour des systèmes multi-agents déployant des dynamiques linéaires [24, 40, 52] et non linéaires telles que les oscillateurs couplés [17, 42, 57] et les robots non holonomes [8, 59]. D'autre part, la topologie des interactions entre les agents du réseau est un critère déterminant dans l'analyse du consensus. Ces interactions sont modélisées par des graphes dont la topologie peut être fixe ou variable [6, 20, 41, 61].

Une des approches mises en avant dans l'étude des systèmes multi-agents est l'approche

de commande décentralisée [14, 24, 47, 52]. L'idée est que chaque agent utilise uniquement des échanges avec ses voisins pour évoluer. Elle s'oppose à une approche centralisée où les entités communiquent directement avec toutes les autres ou à travers une entité principale. Elle présente notamment des avantages majeurs tels que la robustesse, la rapidité d'exécution et la réduction des coûts de communication [36]. La synchronisation des systèmes multi-agents décrits par des dynamiques évoluant selon une unique échelle temps a donné lieu à de nombreuses contributions [28, 38, 42, 49, 58]. La notion de perturbations singulières a été utilisée dans le cadre multi-agents pour l'étude des réseaux électriques de grande dimension [4, 11, 53]. Néanmoins, les auteurs considèrent des dynamiques individuelles évoluant selon une seule échelle de temps.

Par ailleurs, on trouve également des contributions qui prennent en compte la minimisation d'un critère de performance. Le problème du consensus optimal pour des systèmes multi-agents linéaires en temps discret a été étudié dans [12, 30]. Le contrôle optimal linéaire quadratique pour les systèmes multi-véhicules ayant une dynamique de type "intégrateur" a été traité dans [9] en temps continu et discret. Cependant, la problématique que nous abordons dans cette thèse et qui concerne la synchronisation décentralisée à coût garanti au sein des systèmes multi-agents ayant des dynamiques singulièrement perturbés reste un problème ouvert et non trivial.

Organisation de la thèse

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante.

Le chapitre 1 introduit les concepts mathématiques requis à la bonne compréhension de la thèse.

Le chapitre 2 est dédié à l'analyse de stabilité des systèmes hybrides singulièrement perturbés en mettant l'accent sur le fait que la nature et la dimension du vecteur d'état peuvent changer lors des commutations. La modélisation mathématique de cette classe de systèmes et le problème de stabilité sont présentés et des conditions suffisantes de stabilité en termes de temps de séjour minimum séparant deux événements consécutifs sont développées. Tout au long du chapitre, nous établissons le lien entre cette classe générale de systèmes à plusieurs échelles de temps et les différentes sous-classes de systèmes singulièrement perturbés qui en découlent.

Ces résultats sont étendus dans le chapitre 3 pour développer une approche permettant la synthèse de séquences stabilisantes avec un temps de séjour minimum suffisamment petit.

Le chapitre 4 a pour but d'étudier la synchronisation au sein d'un système multi-agents singulièrement perturbé avec coût garanti. Nous développons les conditions d'existence d'une loi de commande qui garantit la synchronisation des dynamiques des agents. Puis, nous montrons qu'en modélisant les propriétés topologiques du graphe d'interactions comme étant des paramètres incertains, on peut garantir à la fois l'aspect décentralisé de la loi de commande et satisfaire un niveau de performance global requis.

Dans le chapitre 5, nous présentons les conclusions générales et nous mettons en évidence les contributions principales tout en proposant quelques pistes pour la recherche future.

Contributions et Publications

Motivés par la prise en compte des échelles de temps multiples dans les systèmes dynamiques hybrides et les systèmes multi-agents, nous proposons dans cette thèse plusieurs contributions.

- En ce qui concerne la stabilité des systèmes hybrides singulièrement perturbés, les contributions sont :
 - une modélisation générale qui correspond à une classe de systèmes hybrides singulièrement perturbés dont la nature des variables d'état peut changer aux instants de commutations,
 - des conditions suffisantes d'analyse de stabilité de cette classe de systèmes en termes de temps de séjour minimum,
 - et une méthode de synthèse de séquences stabilisantes.
- En ce qui concerne la synchronisation des systèmes singulièrement perturbés, les contributions sont :
 - des conditions d'existence d'une loi de commande décentralisée en vue de la synchronisation au sein d'un système multi-agents singulièrement perturbé,
 - et une approche permettant la synthèse de lois de commande décentralisées avec coût garanti global.

Ces contributions ont donné lieu aux publications suivantes.

Revues internationales

- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu , A. Girard and J. Daafouz, "Stablity analysis of a general class of singularly perturbed linear hybrid systems", *soumis pour publication à Automatica*.
- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu and J. Daafouz, "Control design with guaranteed cost for synchronization in networks of linear singularly perturbed systems", *soumis pour publication à Automatica*.

Conférences internationales

- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu and J. Daafouz, "Decentralized guaranteed cost control for synchronization in networks of linear singularly perturbed systems", *European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC), June 2017, Budapest, Hungary*.
- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu , A. Girard and J. Daafouz, "Design of $O(\varepsilon)$ dwell-time graph for stability of singularly perturbed hybrid linear systems", *American Control Conference (ACC), May 2017, Seattle USA*.
- J. Ben Rejeb , L. Buşoniu , I-C. Morărescu and J. Daafouz, "Near-optimal control of nonlinear switched systems with non-Cooperative switching rules", *American Control Conference (ACC), May 2017, Seattle USA*.
- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu , A. Girard and J. Daafouz, "Stablity analysis of singularly perturbed switched and impulsive linear systems", *Conference on Decision and Control (CDC), Dec 2016, Las Vegas USA*.
- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu and J. Daafouz, "Synchronization in networks of linear singularly perturbed systems", *American Control Conference, (ACC), Jul 2016 Boston USA*.
- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu and J. Daafouz, "Event triggering strategies for consensus in clustered networks", *European Control Conference, (ECC), Jul 2015 Linz, Austria*.

Revues et conférences nationales

- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu et J. Daafouz, "Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents", *Journal Européen des Systèmes Automatisés JESA JDMACS 2016 Volume 49*, 93-113.
- J. Ben Rejeb , I-C. Morărescu et J. Daafouz, "Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents", *6^{ème} Journées Doctorales - Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2015 Bourges, France Jun 2015*.

Chapitre 1

Notions introductives

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, dans ce chapitre introductif, nous présentons quelques notions et concepts d'automatique qui sont utilisés par la suite.

Dans un premier temps, nous rappelons quelques notions générales pour la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires en temps continu, particulièrement la théorie de Lyapunov et les techniques de commande linéaire quadratique LQ. Ensuite, nous introduisons les systèmes singulièrement perturbés et nous mettons l'accent sur l'analyse de commande LQ par découplage des dynamiques lentes et rapides. Une section de ce chapitre est dédiée aux prérequis sur les systèmes hybrides. Finalement, la dernière section fournit une vue d'ensemble sur la théorie du consensus. Nous donnons des définitions et résultats fondamentaux dans le cas où le réseau est statique et la dynamique de chaque agent est continue.

1.1 Stabilité et stabilisation des systèmes linéaires

1.1.1 Éléments de théorie de Lyapunov

La stabilité est une question majeure pour l'étude des systèmes en automatique. Avant de traiter la stabilité des systèmes linéaires hybrides, celle des systèmes linéaires en temps continu est rappelée.

Considérons le système linéaire autonome invariant dans le temps suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{1.1}$$

Définition 1.1. Un point d'équilibre x_e du système (1.1) est dit

- *stable* si $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t > 0$$

- *asymptotiquement stable*, si x_e est stable et s'il existe $\delta > 0$, tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

- *globalement asymptotiquement stable* si x_e est stable et pour toute condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

- *exponentiellement stable* s'il existe trois réels positifs c, K et α tels que

$$\forall \|x_0 - x_e\| \leq c, \quad \|x(t) - x_e\| \leq K \|x(0) - x_e\| e^{-\alpha t}$$

- *instable* s'il n'est pas stable.

Le point d'équilibre est souvent ramené à l'origine par translation, ce qui simplifie l'analyse de stabilité.

D'autre part, la notion de stabilité est étroitement liée à la théorie de stabilité de Lyapunov qui est fondée sur l'examen de l'énergie totale du système : si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement alors ce système tend à se ramener vers un état d'équilibre.

Nous énonçons les principaux théorèmes, devenus classiques dans la littérature, pour l'analyse de stabilité des systèmes linéaires en temps continu.

Définition 1.2. Une fonction $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *définie positive* (respectivement *semi-définie positive*) si :

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$ (respectivement $V(x) \geq 0$) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1. Soit le système (1.1) ayant un point d'équilibre $x_e = 0$ et soit une fonction $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- si $V(x)$ est définie positive et $\dot{V}(x) \leq 0$ alors 0 est un point d'équilibre stable.
- si $V(x)$ est définie positive et $\dot{V}(x) < 0$ alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

La fonction $V(x)$ est appelée fonction de Lyapunov.

Une classe de fonctions souvent utilisée pour l'analyse des systèmes dynamiques est celle des fonctions quadratiques données par $V(x) = x^\top P x$ où P est une matrice symétrique définie positive.

Théorème 1.2. *Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système (1.1) est asymptotiquement stable si et seulement si, pour toute matrice $Q = Q^\top > 0$, il existe une matrice $P = P^\top > 0$ vérifiant l'équation de Lyapunov suivante*

$$A^\top P + P A + Q = 0.$$

1.1.2 Commande linéaire quadratique LQ

En automatique, la commande linéaire quadratique, dite commande LQ et initié par Kalman [25], est une méthode qui permet de calculer la matrice de gains d'une commande par retour d'état satisfaisant un critère quadratique donné. Ceci revient à chercher une configuration optimale d'un système parmi toutes les configurations possibles par rapport à ce critère, qui est généralement une somme pondérée de l'énergie de l'état de la commande.

La commande linéaire quadratique à horizon infini pour un système linéaire temps-invariant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x_0 = x(0). \quad (1.2)$$

consiste à déterminer la commande $u(t)$ qui maintienne l'état proche de son état d'équilibre 0 avec une dépense modérée en énergie de commande.

Supposons que la paire (A, B) est stabilisable et soit le critère à minimiser :

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)) dt \quad (1.3)$$

avec $R = R^\top > 0$ et $Q = Q^\top > 0$.

Remarque 1.1. *Le critère LQ peut être perçu comme un compromis entre la performance décrite par le terme en x et l'énergie de la commande décrite par le terme en*

u. Si, dans $\mathcal{J}$, l'énergie de x est privilégiée, celle ci va être minimisée au détriment de l'énergie de la commande. Dans le cas où l'énergie de la commande est privilégiée dans $\mathcal{J}$, nous mettons l'accent sur l'économie d'énergie de commande et la dynamique en boucle fermée sera lente. De ce fait, le choix des matrices de pondérations R et Q joue un rôle important dans la conception de la commande.

Le problème de minimisation de $\mathcal{J}$ sans contraintes consiste à trouver la commande $u^*(t) \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathcal{J}(u^*(t)) \leq \mathcal{J}(u(t))$ pour tout $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Cela revient à chercher la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x(t)^\top P x(t)$ qui satisfait

$$\min_{u(t) \in \mathbb{R}^m} (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) + \dot{V}(t)) = 0$$

C'est-à-dire :

$$\min_{u(t) \in \mathbb{R}^m} (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) + \dot{x}(t)^\top P x(t) + x(t)^\top P \dot{x}(t)) = 0$$

Soit encore

$$\min_{u(t) \in \mathbb{R}^m} (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) + (Ax(t) + Bu(t))^\top P x(t) + x(t)^\top P (Ax(t) + Bu(t))) = 0$$

En utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante :

$$H(x, u, t) = x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) + (Ax(t) + Bu(t))^\top P x(t) + x(t)^\top P (Ax(t) + Bu(t)) \quad (1.4)$$

la commande optimale $u^*(t)$ est donnée par la condition de stationnarité

$$\nabla_{u(t)} H(x, u, t) = 0$$

qui implique

$$2Ru^*(t) + 2B^\top P x = 0$$

d'où

$$u^*(t) = -R^{-1} B^\top P x(t) \quad (1.5)$$

En substituant l'équation de la commande (1.5) dans (1.4), nous avons l'équation de Riccati suivante :

$$A^\top P + P A - 2P B R^{-1} B^\top P + Q = 0$$

Il en découle le système en boucle fermée de la forme :

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^{\top}P)x(t).$$

Remarque 1.2. Si la paire (A, B) est stabilisable, alors le critère $\mathcal{J}$ a une valeur finie. Si de plus, la paire (A, C) est observable, la solution stabilisante P de l'équation de Riccati est unique.

Dans la suite de ce manuscrit, nous utilisons le théorème suivant.

Théorème 1.3. Le problème LQ défini par (1.3) pour le système (1.2) admet une solution

$$u(t) = -R^{-1}B^{\top}Px(t) \quad (1.6)$$

où $K = -R^{-1}B^{\top}P$ est le gain de la commande et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati :

$$A^{\top}P + PA - 2PBR^{-1}P + Q = 0 \quad (1.7)$$

Par conséquent, le système dynamique en boucle fermée est asymptotiquement stable avec un coût optimal :

$$\mathcal{J}^* = x_0^{\top}Px_0.$$

Certains travaux visent à assurer un coût garanti en termes de performance plutôt que de résoudre un problème d'optimisation classique notamment en présence d'incertitudes [31, 44]. Cette approche fournit des bornes qui encadrent la trajectoire optimale souhaitée, c'est à dire que la valeur du critère en boucle fermée reste au-dessous d'une borne $\bar{\mathcal{J}}$. En ce sens, l'équation de Riccati (1.7) décrivant le problème de minimisation de $\mathcal{J}$ devient :

$$PA + A^{\top}P - 2PBR^{-1}P + Q \leq 0$$

dont la solution $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive assure un coût garanti

$$\mathcal{J}^* \leq x_0^{\top}Px_0 \triangleq \bar{\mathcal{J}}.$$

1.1.3 Systèmes singulièrement perturbés

La notion de perturbations singulières signifie la présence de différentes échelles de temps selon lesquelles évoluent les dynamiques du système. L'analyse de ces systèmes

est devenue un sujet de recherche en constante évolution. Les premiers travaux remontent aux années 50 précisément aux travaux de Tikhonov, puis les travaux de Kokotovic et Khalil [26, 27]. La théorie des perturbations singulières fournit un ensemble d'outils d'analyse fondés sur la séparation d'échelles de temps et l'approximation des solutions du système par le découplage des dynamiques lentes et rapides [3, 46, 60].

Considérons le système singulièrement perturbé linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \quad (1.8)$$

$$\varepsilon \dot{z}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}z(t). \quad (1.9)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ représentent les états lents et rapides du système, ε est un réel strictement positif et $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ sont des matrices de dimensions appropriées.

Opérant dans deux échelles différentes t et $\tau = \varepsilon t$, les dynamiques rapides émergent pendant la phase transitoire tandis que le régime permanent est régi par les dynamiques lentes. En effet, poser $\varepsilon = 0$ dans (1.9) et si A_{22}^{-1} existe, la racine de l'équation (1.9) est :

$$z_s(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}x_s(t). \quad (1.10)$$

La substitution de la solution ci-dessus dans (1.8) donne le modèle réduit (modèle lent) suivant :

$$\dot{x}_s(t) = A_0x_s(t). \quad (1.11)$$

avec la condition initiale $x_s(0) = x(0)$ et $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

Quant à la couche limite qui décrit la dynamique rapide de $z(t)$, elle est donnée par :

$$\varepsilon \dot{z}_f(t) = A_{22}z_f(t). \quad (1.12)$$

dont la condition initiale est $z_f(0) = z(0) + A_{22}^{-1}A_{21}x_s(0)$.

Le théorème suivant donne les conditions d'approximation de la solution du système singulièrement perturbé (1.8)-(1.9) issues de l'analyse des dynamiques lentes et rapides séparément.

Théorème 1.4. [27] *Si les valeurs propres de la matrice A_{22} sont à partie réelle strictement négative alors il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ et pour tout $t \in [0, T]$,*

la solution x et z du système original (1.8)-(1.9) est approximée par

$$x(t) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (1.13)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}x_s(t) + z_f(t) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.14)$$

où $x_s(t)$ et $z_f(t)$ sont les solutions du modèle réduit (1.11) et du modèle rapide (1.12) respectivement. De plus, si les valeurs propres de la matrice A_0 sont à partie réelle strictement négative, alors l'approximation (1.13)-(1.14) est valide pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Il en suit le résultat de stabilité asymptotique suivant.

Théorème 1.5. [27] Si A_{22}^{-1} existe et si les matrices A_0 et A_{22} sont Hurwitz, alors il existe ε^* tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, le système (1.8)-(1.9) est asymptotiquement stable.

Nous présentons dans ce qui suit, la méthodologie de conception d'une loi de commande par retour d'état pour un système singulièrement perturbé en temps continu.

Soit le système singulièrement perturbé sous une loi de commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + B_1u(t) \quad (1.15)$$

$$\varepsilon \dot{z}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}z(t) + B_2u(t). \quad (1.16)$$

A l'issu du découplage des dynamiques lentes et rapides, le système réduit est :

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_0x_s(t) + B_0u_s(t), & x_s(0) &= x(0) \\ z_s(t) &= -A_{22}^{-1}(A_{21}x_s(t) + B_2u_s(t)), \end{aligned}$$

avec

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2. \quad (1.17)$$

et la couche limite est décrite par :

$$\varepsilon \dot{z}_f(t) = A_{22}z_f(t) + B_2u_f(t), \quad z_f(0) = z(0) - z_s(0).$$

où $z_f(t) = z(t) - z_s(t)$ et $u_f(t) = u(t) - u_s(t)$ désignent les composantes rapides des variables z et u .

Proposition 1.1. [27] Si la paire (A_0, B_0) et la paire (A_{22}, B_2) sont stabilisables, il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que le système original (1.15)-(1.16) est stabilisable pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

D'après la proposition 1.1, la commandabilité du système original est déduite à partir des paires (A_0, B_0) et (A_{22}, B_2) relatifs aux sous-systèmes découplés. Soient K_0 et K_2 deux gains relatifs respectivement aux composantes lentes et rapides de la loi de commande par retour d'état $u(t)$ tels que :

$$\begin{cases} u_s(t) = K_0 x_s(t), \\ u_f(t) = K_2 z_f(t). \end{cases}$$

Les deux lois de commande découplées sont conçues séparément pour chacune des deux échelles de temps. Il en découle une loi de commande composée de la forme :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_s(t) + u_f(t) \\ &= K_0 x_s(t) + K_2 z_f(t). \end{aligned} \quad (1.18)$$

En remplaçant z_f par $z - z_s$, la loi de commande (1.18) relatif au système original (1.15)-(1.16) s'exprime en x et z comme suit :

$$\begin{aligned} u(t) &= K_0 x(t) + K_2 (z(t) + A_{22}^{-1} (A_{21} x(t) + B_2 K_0 x(t))) \\ &= ((\mathbf{I}_m + K_2 A_{22}^{-1} B_2) K_0 + K_2 A_{22}^{-1} A_{21}) x(t) + K_2 z(t). \end{aligned}$$

1.1.4 Commande LQ pour des systèmes singulièrement perturbés

L'approche de la commande optimale des systèmes singulièrement perturbés peut se faire de deux manières différentes : la première résulte d'une décomposition de l'équation de Riccati relative au système original. La seconde se base sur le découplage des échelles de temps développée dans la sous-section 1.1.3 et conduit à une complète séparation des problèmes d'optimalité.

Considérons le système singulièrement perturbé

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11} x(t) + A_{12} z(t) + B_1 u(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= A_{21} x(t) + A_{22} z(t) + B_2 u(t) \\ y(t) &= C_1 x(t) + C_2 z(t). \end{aligned} \quad (1.19)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ sont les états lents et rapides du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée du système.

L'étude concerne la détermination de la commande à horizon infini permettant de minimiser le critère suivant :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y(t)^\top Q y(t) + u(t)^\top R u(t)) dt \quad (1.20)$$

avec $Q = Q^\top > 0$ et $R = R^\top > 0$.

1.1.4.1 Méthode par décomposition de l'équation de Riccati

La solution du problème d'optimisation décrit par (1.20) est donnée par (1.6) où $B^\top = [B_1^\top \ \varepsilon^{-1} B_2^\top]$ et l'équation de Riccati (1.7) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1} A_{21} & \varepsilon^{-1} A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^\top & \varepsilon^{-1} A_{21}^\top \\ A_{12}^\top & \varepsilon^{-1} A_{22}^\top \end{pmatrix} P - P \begin{pmatrix} B_1 R^{-1} B_1^\top & \varepsilon^{-1} B_1 R^{-1} B_2^\top \\ \varepsilon^{-1} B_2 R^{-1} B_1^\top & \varepsilon^{-2} B_2 R^{-1} B_2^\top \end{pmatrix} P \\ + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Pour éviter une divergence de la solution de l'équation ci-dessous lorsque ε tend vers 0, [54] propose une solution P ayant la forme suivante :

$$P = P(\varepsilon) = \begin{pmatrix} P_{11}(\varepsilon) & \varepsilon P_{12}(\varepsilon) \\ \varepsilon P_{12}^\top(\varepsilon) & \varepsilon P_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

dans laquelle $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ sont des matrices de dimensions appropriées dépendant du paramètre ε tel que :

$$\forall i, j = 1, 2 \quad P_{ij}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ij}^k \varepsilon^k. \quad (1.22)$$

L'équation (1.21) est équivalente à un système de trois équations matricielles où, pour simplifier les expressions, le paramètre ε est omis.

$$\begin{aligned} P_{11} A_{11} + A_{11}^\top P_{11} + P_{12} A_{21} + A_{21}^\top P_{12}^\top - P_{11} B_1 R^{-1} B_1^\top P_{11} - P_{11} B_1 R^{-1} B_2^\top P_{12}^\top \\ - P_{12} B_2 R^{-1} B_1^\top P_{11} - P_{12} B_2 R^{-1} B_2^\top P_{12}^\top + C_1^\top Q C_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} P_{11} A_{12} + P_{12} A_{22} + A_{21}^\top P_{22} - P_{11} B_1 R^{-1} B_2^\top P_{22} - P_{12} B_2 R^{-1} B_2^\top P_{22} + C_1^\top Q C_2 \\ + \varepsilon A_{11}^\top P_{12} - \varepsilon P_{11} B_1 R^{-1} B_1^\top P_{12} - \varepsilon P_{12} B_2 R^{-1} B_1^\top P_{12} = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} P_{22} A_{22} + A_{22}^\top P_{22} - P_{22} B_2 R^{-1} B_2^\top P_{22} + C_2^\top Q C_2 + \varepsilon A_{12}^\top P_{12} + \varepsilon P_{12}^\top A_{12} \\ - \varepsilon P_{12}^\top B_1 R^{-1} B_2^\top P_{22} - \varepsilon P_{22} B_2 R^{-1} B_1^\top P_{12} - \varepsilon^2 P_{12}^\top B_1 R^{-1} B_1^\top P_{12} = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Par identification des termes en ε , on déduit les coefficients des expressions asymptotiques (1.22) donnant $P(\varepsilon)$. Dans la plupart des cas, la connaissance de P_{ij} à l'ordre 0 suffit ce qui nous ramène à la résolution d'équations de Riccati relative à $\varepsilon = 0$ dans (1.23)-(1.25), données par :

$$\begin{aligned} P_{22}A_{22} + A_{22}^\top P_{22} - P_{22}B_2R^{-1}B_2^\top P_{22} + C_2^\top QC_2 &= 0 \\ P_{11}\hat{A} + \hat{A}^\top P_{11} - P_{11}\hat{B}R^{-1}\hat{B}^\top P_{11} + \hat{Q} &= 0 \\ P_{12} &= P_{11}E_1 - E_2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A_{11} + E_1A_{21} + B_1R^{-1}B_2^\top E_2^\top + E_1B_2R^{-1}B_2^\top E_2^\top \\ \hat{B} &= B_1 + E_1B_2 \\ \hat{Q} &= -E_2A_{21} - A_{21}^\top E_2^\top - E_2B_2R^{-1}B_2^\top E_2^\top + C_1^\top QC_1 \\ E_1 &= (B_1R^{-1}B_2^\top P_{22} - A_{12})(A_{22} - B_2R^{-1}B_2^\top P_{22})^{-1} \\ E_2 &= (A_{21}^\top P_{22} + C_1^\top QC_2)(A_{22} - B_2R^{-1}B_2^\top P_{22})^{-1}. \end{aligned}$$

Les dynamiques du système commandé sont régies par l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}_{11}x(t) + \mathcal{A}_{12}z(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= \mathcal{A}_{21}x(t) + \mathcal{A}_{22}z(t) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= A_{11} - B_1R^{-1}B_1^\top P_{11} - B_1R^{-1}B_2^\top P_{12}^\top \\ \mathcal{A}_{12} &= A_{12} - B_1R^{-1}B_2^\top P_{22} - \varepsilon B_1R^{-1}B_1^\top P_{12} \\ \mathcal{A}_{21} &= A_{21} - (B_1R^{-1}B_2^\top)^\top P_{11} - B_2R^{-1}B_2^\top P_{12}^\top \\ \mathcal{A}_{22} &= A_{22} - B_2R^{-1}B_2^\top P_{22} - \varepsilon (B_1R^{-1}B_2^\top)^\top P_{12}. \end{aligned}$$

1.1.4.2 Méthode par découplage des dynamiques

Le point de vue de cette approche repose sur l'utilisation de l'approximation temporelle énoncée par le Théorème 1.4.

Le découplage des dynamiques singulièrement perturbées (1.19) donnent deux sous-systèmes lent et rapide décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = A_0 x_s(t) + B_0 u_s(t) \\ y_s(t) = C_0 x_s(t) + D_0 u_s(t). \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_f(t) = A_{22} z_f(t) + B_2 u_f(t) \\ y_f(t) = C_2 z_f(t). \end{cases} \quad (1.27)$$

où A_0 et B_0 sont données par (1.17), $C_0 = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}$ et $D_0 = -C_2 A_{22}^{-1} B_2$.

Proposition 1.2. [54] *Soit le système singulièrement perturbé (1.19) tel que les paires (A_0, B_0) et (A_{22}, B_2) sont stabilisables. Alors, il existe ε^* tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ et sous la loi de commande (1.18) ;*

$$\begin{aligned} x(t) &= x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ z(t) &= z_s(t) + z_f(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ u(t) &= u_s(t) + u_f(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ y(t) &= y_s(t) + y_f(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

La commande pouvant être séparée en une partie lente et une partie rapide, le problème d'optimisation du critère (1.20) se décompose alors en deux sous problèmes :

Minimisation de $J_s = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y_s(t)^\top Q y_s(t) + u_s(t)^\top R u_s(t)) dt$ pour le système (1.26).

Minimisation de $J_f = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y_f(t)^\top Q y_f(t) + u_f(t)^\top R u_f(t)) dt$ pour le système (1.27).

Si la paire (A_0, B_0) est stabilisable, la solution optimale relative au système réduit (1.26) est donnée par

$$u_s(t) = -R_0^{-1} (D_0^\top Q C_0 + B_0^\top P_0) x_s(t)$$

où $R_0 = R + D_0^\top Q D_0$ et P_0 est solution de l'équation de Riccati suivante

$$\begin{aligned} (A_0 - B_0 R_0^{-1} D_0^\top Q C_0)^\top P_0 + P_0 (A_0 - B_0 R_0^{-1} D_0^\top Q C_0) - P_0 B_0 R_0^{-1} B_0^\top P_0 \\ - C_0^\top S^\top (\mathbf{I}_p - S D_0 R_0^{-1} D_0^\top S^\top) S C_0 = 0, \quad \text{où } Q = S^\top S. \end{aligned}$$

Si la paire (A_{22}, B_2) est stabilisable, la solution optimale relative au système rapide

(1.27) est donnée par

$$u_f(t) = -R^{-1}B_2^\top P_2 z_f(t)$$

où P_2 est solution de l'équation de Riccati suivante

$$P_2 A_{22} - A_{22}^\top P_2 - P_2 B_2 R^{-1} B_2^\top P_2 + C_2^\top Q C_2 = 0.$$

La commande composite obtenue est

$$\begin{aligned} u(t) = & - \left((\mathbf{I}_m - R^{-1} B_2^\top P_2 A_{22}^{-1} B_2) R_0^{-1} (D_0^\top Q C_0 + B_0^\top P_0) + R^{-1} B_2^\top P_2 A_{22}^{-1} A_{21} \right) x(t) \\ & - R^{-1} B_2^\top P_2 z(t). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Remarque 1.3. D'après [10], la valeur optimale du critère (1.20) par la commande (1.28) est approchée à un $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ près.

1.2 Systèmes hybrides

Considérons l'inclusion différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} x(t) \in C & \dot{x}(t) \in F(x(t)), & F(x(t)) = \{A^1 x(t), A^2 x(t), \dots, A^p x(t)\} \\ x(t_k) \in D & x(t_k) \in G(x(t_k^-)), & G(x(t)) = \{J^1 x(t), J^2 x(t), \dots, J^m x(t)\} \end{cases} \quad (1.29)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $(t_k)_{k \geq 0}$ est une séquence d'événements discrets. La notation $x(t_k^-)$ dénote la limite à gauche de x en t_k i.e. $\lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} x(t_k - \delta)$. Les ensembles $\{A^1, A^2, \dots, A^p\}$ et $\{J^1, J^2, \dots, J^m\}$ sont deux familles de matrices carrées. Les ensembles C et D , appelés respectivement "*flow set*" et "*jump set*", conditionnent l'évolution des états continus et discrets.

Le système ainsi décrit est un système hybride composé de dynamiques continues qui commutent entre plusieurs modes de fonctionnement où chaque mode est régi par une équation différentielle $\dot{x}(t) = A^i x(t)$, $i \in \{1, \dots, p\}$ faisant intervenir des dynamiques continues propres au mode de fonctionnement activé. Quand $x(t) \in D$, les dynamiques discrètes sont induites par une matrice J^i , $j \in \{1, \dots, m\}$ décrivant le changement discret instantané de l'état.

Les dynamiques hybrides décrites par (1.29) englobent diverses classes de systèmes :

- Systèmes linéaires à commutation pour $G(\cdot) = \emptyset$:

$$x(t) \in C \quad \dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad F(x(t)) = \{A^1 x(t), A^2 x(t), \dots, A^p x(t)\}.$$

- Systèmes linéaires impulsifs pour $F = \emptyset$:

$$x(t_k) \in D \quad x(t_k) \in G(x(t_k^-)), \quad G(x(t)) = \{J^1 x(t), J^2 x(t), \dots, J^m x(t)\}.$$

- Systèmes linéaires en temps continu $F = \emptyset$ et $G(\cdot) = \emptyset$:

$$x(t) \in C \quad \dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad F(x(t)) = \{Ax(t)\}.$$

Dans la sous-section 1.1.1, nous avons énoncé plusieurs critères de stabilité basés sur la théorie de Lyapunov pour des systèmes en temps continu. Toutefois, ces conditions de stabilité s'avèrent insuffisantes pour l'analyse des systèmes hybrides qui requiert l'étude des changements brusques des dynamiques aux instants d'événements et de leur influence sur les dynamiques continues. Des résultats largement connus dans la littérature [19] traitent les systèmes hybrides. Dans le cas linéaire, nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.6. [22] *Considérons le système hybride (1.29) avec $(t_k)_{k \geq 0}$ une séquence d'événements. Le point d'équilibre $x_e = 0$ est globalement exponentiellement stable si et seulement si il existe une fonction définie positive $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par $V(x) = x^\top P_i x$, $i \in \{1, \dots, p\}$ où $P_i = P_i^\top > 0$ et $V(0) = 0$ telle que*

$$V(x(t_{k+1})) < V(x(t_k)), \quad \forall x(t_k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.30)$$

L'intérêt de l'approche du Théorème 1.6 est d'analyser l'évolution de la fonction de Lyapunov aux instants discrets. Autrement dit, la décroissance de V n'est pas requise durant la phase continue mais elle est nécessaire aux instants t_k , $k \in \mathbb{N}$. En effet, si V satisfait la condition (1.30), il existe une enveloppe décroissante qui borne la trajectoire de V comme le montre la Figure 1.1.

Le résultat du Théorème 1.6 s'applique difficilement dans le cas des commutations ou d'impulsions arbitraires. Contrôler le temps d'activation d'un mode de fonctionnement ou d'une impulsion présente une alternative pour garantir la condition (1.30).

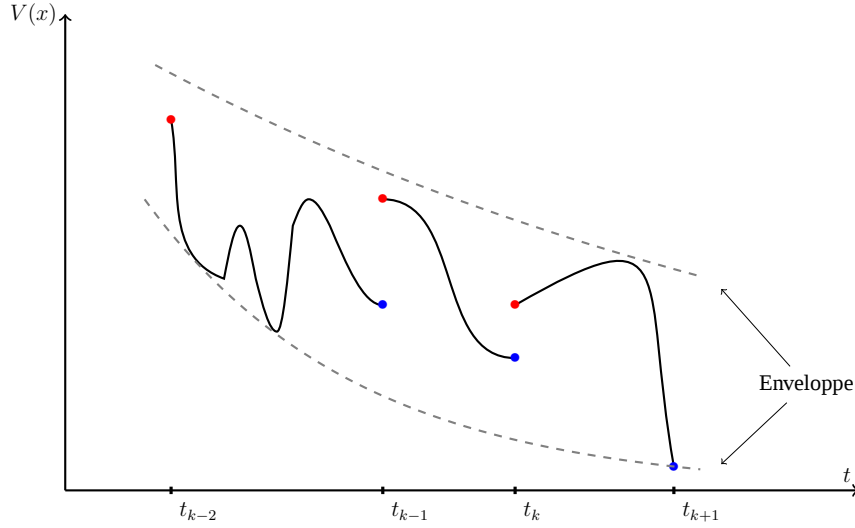


FIGURE 1.1: Trajectoire d'une fonction de Lyapunov $V(x)$ relative au système hybride (1.29).

Définition 1.3. Un réel positif τ est appelé "temps de séjour" d'une séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$, si l'intervalle de temps entre deux instants discrets $t_{k+1} - t_k$ est supérieur à τ .

Dans la suite, nous nous intéressons aux systèmes à commutation qui représentent une classe particulière des systèmes dynamiques hybrides ($G(\cdot) = \emptyset$ dans (1.29)).

Un système à commutation est composé d'une famille de sous-systèmes à dynamique continue et une loi logique qui indique le sous-système actif.

Formellement, un système à commutation est défini par :

$$\dot{x}(t) = A^i x(t) \quad (1.31)$$

où $i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ est le signal de commutation qui prend des valeurs dans un ensemble d'indice $\mathcal{I}$. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et A^i pour tout $i \in \mathcal{I}$ sont des matrices d'état décrivant les $N \in \mathbb{N}^*$ modes de fonctionnement du système.

Un article de référence [32] énumère quelques problèmes liés à la stabilité des systèmes à commutation.

- **Problème A :** Trouver des conditions de stabilité telles que le système est asymptotiquement stable quelle que soit la loi de commutation.
- **Problème B :** Identifier les classes de lois de commutation pour lesquelles le système à commutation est asymptotiquement stable.

- **Problème C** : Concevoir un signal de commutation qui rend le système asymptotiquement stable.

En se référant au Théorème 1.6, le système à commutation (1.31) est asymptotiquement stable s'il existe une famille de fonctions définies positives, chacune est associée à un sous-système $V(x) = x^\top P_i x, \forall i \in \mathcal{I}$ et qui est strictement décroissante aux instants de commutation. Toutefois, si pour tout $i, j \in \mathcal{I}, P_i = P_j$, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 1.1. *Considérons le système à commutation (1.31). S'il existe une matrice P telle que $P = P^\top > 0$, solution des LMIs*

$$(A^i)^\top P + P A^i < 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

alors la fonction quadratique $V(x) = x^\top P x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.31) et le point d'équilibre $x_e = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Des conditions pour vérifier si une fonction de Lyapunov commune existe ont été énumérés dans [7]. On y trouve également des critères LMI pour vérifier qu'une fonction de Lyapunov quadratique commune n'existe pas pour une classe de systèmes. Jusqu'à présent, trouver une fonction de Lyapunov commune reste un problème ouvert dans le cas général.

1.3 Systèmes multi-agents

Cette section présente une vue d'ensemble de la théorie de consensus et des graphes associés aux systèmes multi-agents.

Définition 1.4. *Un graphe d'interactions $\mathcal{G}$ est donné par la paire $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ désigne l'ensemble des sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ représente l'ensemble des arêtes joignant les sommets à leurs voisins.*

Définition 1.5. *Un graphe $\mathcal{G}$ est non-orienté si pour tout sommets $i, j \in \mathcal{V}$;*

$$(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}.$$

Sinon, le graphe est orienté.

Définition 1.6. *Un chemin de longueur p dans un graphe $\mathcal{G}$ est l'union des liaisons $\bigcup_{k=1}^p (i_k, j_k)$ tel que $i_{k+1} = j_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$.*

Dans un graphe dirigé, on dit que le sommet i est parent de j si $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Définition 1.7. Un **graphe connexe** est tel que n'importe quelle paire de sommets est connectée. Un sommet $i \in \mathcal{V}$ est **connecté** à $i' \in \mathcal{V}$ dans un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ s'il existe au moins un chemin dans $\mathcal{G}$ qui relie i à i' .

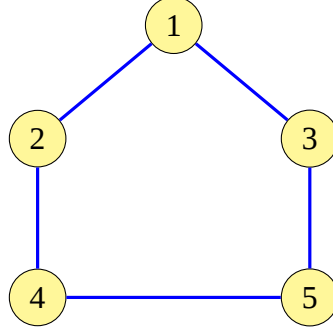


FIGURE 1.2: Exemple d'un graphe $\mathcal{G}$ non-orienté connexe.

On dit qu'un graphe $\mathcal{G}$ n'admet aucune boucle, si pour $i \in \mathcal{V}$, $(i, i) \notin \mathcal{E}$.

Définition 1.8. Pour un graphe donné $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, le sous-graphe **induit** par un sous-ensemble de sommets $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ est le graphe $(\mathcal{U}, \mathcal{E} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}))$.

Pour un graphe donné $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, un sous-graphe **couvrant** $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{F})$ est donné par tous les sommets de $\mathcal{G}$ et un sous-ensemble des arêtes $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.

Définition 1.9. La **distance** $d(i, j)$ entre deux sommets i et j dans un graphe est le nombre d'arêtes du plus court chemin entre ces deux sommets. Le **diamètre** d'un graphe $\Delta(\mathcal{G}) = \max_{i,j} d(i, j)$ est la plus grande distance possible qui existe entre deux de ses sommets i et j . Le diamètre $\Delta(\mathcal{G})$ d'un graphe connexe est fini.

Définition 1.10. Matrice d'adjacence

Les pondérations des liaisons entre les agents au sein d'un graphe $\mathcal{G}$ sont décrites par la matrice d'adjacence $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{cases} g_{ij} > 0 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{E} \\ g_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.11. Matrice Laplacienne

La matrice Laplacienne associée au graphe $\mathcal{G}$ est notée par $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{cases} l_{ii} = \sum_{j=1}^n g_{ij}, \forall i = 1, \dots, n \\ l_{ij} = -g_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si $\mathcal{G}$ est non-orienté, L est symétrique et la somme de chacune de ses n lignes est nulle.

Consensus dans les systèmes multi-agents

Considérons un système de n agents interconnectés décrit par un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ non-orienté fixe dans le temps. La dynamique de chaque entité constituant le système multi-agents est régie par :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{V}} g_{ij}(x_i(t) - x_j(t)). \quad (1.32)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}$ est l'état de l'agent i et g_{ij} est la pondération relative à la matrice d'adjacence associée à la liaison $i, j \in \mathcal{E}$. Ainsi, la dynamique globale du système est décrite par :

$$\dot{x}(t) = -Lx(t) \quad (1.33)$$

avec L est la matrice Laplacienne donnée par la définition 1.11. Ce protocole, largement utilisé pour modéliser le processus du consensus dans le cas linéaire, décrit n systèmes qui interagissent les uns avec les autres pour finalement converger vers un même accord final :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x^*$$

où x^* est la valeur du consensus.

Définition 1.12. [37] La valeur du consensus x^* appartient au sous-espace vectoriel $\text{span}\{\mathbf{1}_n\}$ tel que

$$x^* \in \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = x_j, \forall i, j \in \mathcal{V}\}. \quad (1.34)$$

Théorème 1.7. [37] Soit $\mathcal{G}$ un graphe non-orienté connexe. Alors le protocole (1.33) converge vers la valeur du consensus

$$x^* = \frac{\mathbf{1}_n^\top x(0)}{n} \mathbf{1}_n.$$

Théorie spectrale

La théorie spectrale des graphes s'intéresse aux spectres des matrices décrivant les graphes, qui sont simplement l'ensemble de leurs valeurs propres. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'aux matrices symétriques, donc aux graphes non orientés.

Remarque 1.4. [18] Soit un graphe $\mathcal{G}$ non-orienté connexe et soit les valeurs propres λ_i relatives à sa matrice Laplacienne L classées par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

Alors, les affirmations suivantes sont vraies :

- $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre simple de L associée au vecteur propre $\mathbf{1}_n$.
- La seconde plus petite valeur propre λ_2 est positive ; L est semi définie positive.
- $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre de multiplicité r de la matrice $L \otimes \mathbf{I}_r$ et elle admet r vecteurs propres distincts définis par $\mathbf{1}_n \otimes e_i$, $i = 1, \dots, r$ où $e_i \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur colonne dont le $i^{\text{ème}}$ élément est égal à 1 et les éléments restants sont nuls.
- Il existe une matrice orthonormale $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$; qui vérifie $TT^\top = T^\top T = \mathbf{I}_n$, telle que

$$TLT^\top = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

De plus, la seconde valeur propre conditionne la vitesse de convergence dans un graphe non-orienté, connue comme étant la connectivité algébrique d'un graphe.

Théorème 1.8. [37] Soit $\mathcal{G}$ un graphe non-orienté connexe. Le protocole de consensus (1.33) converge vers l'accord (1.34) avec un taux de convergence donné par λ_2 .

Proposition 1.3. [15] Soit un graphe $\mathcal{G}$ non-orienté connexe. Supposons que les pondérations non nulles de la matrice Laplacienne qui lui est associée satisfont

$$g_m \leq g_{ij} \leq g_M, \quad \text{avec} \quad 0 < g_m < g_M.$$

Alors, les valeurs propres de L sont bornées telles que :

$$\lambda^* \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda^\circ \tag{1.35}$$

avec

$$\lambda^* \triangleq \frac{g_m^2}{2(n-1)n^2} \quad \text{et} \quad \lambda^\circ \triangleq n \cdot g_M.$$

Remarque 1.5. [39] Soit un graphe $\mathcal{G}$ non-orienté ayant n sommets. Si les pondérations $g_{i,j} \in \{0, 1\}$, alors les valeurs propres de L vérifient l'inégalité (1.35) avec

$$\lambda^* \triangleq \frac{4}{n\Delta(\mathcal{G})} \quad \text{et} \quad \lambda^\circ \triangleq n.$$

De plus, si le graphe $\mathcal{G}$ est connexe alors le diamètre $\Delta(\mathcal{G})$ ne peut excéder la valeur de $n - 1$ et il en résulte dans ce cas :

$$\frac{4}{n(n-1)} \triangleq \lambda^* \quad \text{et} \quad \lambda^\circ \triangleq n. \quad (1.36)$$

Chapitre 2

Analyse de stabilité des systèmes hybrides singulièrement perturbés

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons une classe de systèmes hybrides singulièrement perturbés plus générale que les classes existantes puisque la nature et les dimensions des variables d'états sont susceptibles de changer lors des commutations. Cette classe est motivée par une problématique industrielle : le contrôle de déport de bande dans un laminoir à chaud [33]. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur le changement de nature des variables d'états et nous supposons que la dimension du vecteur d'état restent inchangée au fil des commutations. Nous récrivons le système sous une forme classique dans laquelle les variables d'états de même nature de variation sont regroupées à travers un changement de variables et le vecteur d'état est ainsi réorganisé à chaque commutation. Ensuite, nous abordons le problème de stabilité et nous mettons en oeuvre les outils d'analyse classiques pour les systèmes linéaires singulièrement perturbés. Ces outils, fondés sur la séparation des échelles de temps, sont combinés aux résultats existants concernant les systèmes hybrides pour établir des conditions suffisantes de stabilité au sens de Lyapunov. En d'autres termes, nous évaluons "*un temps de séjour minimum*" séparant deux événements consécutifs de manière à ce que la fonction de Lyapunov ait une dérivée négative entre les événements et que les sauts de cette fonction aux instants d'événements soient compensés par sa décroissance entre ces instants. Par la suite, nous développons la méthode à adopter pour traiter le cas des dimensions du vecteur d'état variantes dans le temps et nous montrons que l'analyse se ramène au cas

des dimensions invariantes par l'ajout de variables artificielles complémentaires. Des exemples illustratifs accompagnent cette étude pour valider et tester les performances des résultats obtenus tout au long du chapitre.

2.2 Positionnement du problème

Le modèle que nous proposons, fait intervenir la séparation des échelles de temps entre les dynamiques lentes et rapides à travers un petit paramètre positive ε caractérisant la vitesse d'évolution des dynamiques rapides par rapport aux dynamiques lentes. Nous introduisons également les matrices diagonales $\mathbf{D}^i$ pour tout $i \in \mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un ensemble fini d'indices, afin de modéliser les changements de nature des variables relatives à chaque commutation. Précisément, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbf{D}^i$ sont égaux soit à ε soit à 1 et sélectionnent ainsi les variables lentes et rapides du vecteur d'état après chaque commutation.

Par conséquent, notre étude se ramène au système à commutation suivant :

$$\mathbf{D}^{\sigma_k} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^{\sigma_k} \mathbf{x}(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

ayant une dynamique impulsive décrite par :

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{J}^{\nu_k} \mathbf{x}(t_k^-), \quad \forall k \geq 1 \quad (2.2)$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma_k}}$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, est le vecteur d'état et $0 = t_0 < t_1 < \dots$ décrit une séquence strictement croissante d'instantanés discrets. La variable discrète $\sigma_k \in \mathcal{I}$ est vue comme une variable de contrôle ayant une évolution imposée de manière exogène. De même, $\nu_k \in \mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un ensemble fini d'indices, conditionne l'impulsion donnée aux dynamiques et la nouvelle valeur qui leur est attribuée par la matrice $\mathbf{J}^{\nu_k} \in \mathbb{R}^{n_{\sigma_k} \times n_{\sigma_{k-1}}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $\mathbf{A}^{\sigma_k}$ décrit les dynamiques continues relatives au mode de fonctionnement σ_k activé durant l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$.

Pour un mode de fonctionnement donné $\sigma_k = i$:

- le $h^{\text{ème}}$ élément du vecteur $\mathbf{x}$ représente une variable rapide si le $h^{\text{ème}}$ élément diagonal de $\mathbf{D}^i$ est égal à ε ,
- le $h^{\text{ème}}$ élément du vecteur $\mathbf{x}$ représente une variable lente si le $h^{\text{ème}}$ élément diagonal de $\mathbf{D}^i$ est égal à 1.

La principale contribution dans la modélisation introduite par (2.1)-(2.2) consiste à formaliser le problème d'une manière générale de façon à ce que l'on obtienne un modèle à commutation impulsif singulièrement perturbé qui inclut différentes classes de systèmes et dont l'analyse de stabilité que nous établissons dans ce chapitre s'y adapte aisément. Ces classes de systèmes peuvent être décrites comme suit :

(i) **Classe des systèmes linéaires hybrides singulièrement perturbés classiques**

Supposons que $\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^j, \forall i, j \in \mathcal{I}$ et que x et z sont, respectivement, les composantes lentes et rapides du vecteur d'état $\mathbf{x}$. Alors, les dynamiques (2.1)-(2.2) s'écrivent :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\sigma_k} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} x(t_k) \\ z(t_k) \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{\nu_k} \begin{pmatrix} x(t_k^-) \\ z(t_k^-) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.3)$$

(ii) **Classe des systèmes linéaires singulièrement perturbés à commutation**

C'est le cas si uniquement des commutations sont susceptibles de se produire à l'instant $t_k, k \in \mathbb{N}$. Ceci revient à considérer toutes les matrices de saut $\mathbf{J}^{\nu_k}$ égales à la matrice identité dans (2.3).

(iii) **Classe des systèmes linéaires singulièrement perturbés impulsifs**

C'est le cas si uniquement des impulsions sont susceptibles de se produire à l'instant $t_k, k \in \mathbb{N}$. Ceci revient à considérer une seule dynamique continue ($\sigma_k = \sigma_{k+1}, k \in \mathbb{N}$) dans (2.3).

(iv) **Classe des systèmes linéaires singulièrement perturbés en temps continu**

Si les deux conditions citées dans les éléments (ii) et (iii) sont vérifiées, les dynamiques (2.3) se ramènent à des dynamiques purement continues singulièrement perturbées.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas des systèmes avec une dimension du vecteur d'état invariante dans le temps (*i.e.* $n_i = n, \forall i \in \mathcal{I}$) et un nombre de variables rapides et lentes inchangé tout au long du process. Autrement dit, le nombre des composants des matrices $\mathbf{D}^i$ égales à ε est constant, noté $n_z \leq n$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. Ainsi le vecteur $\mathbf{x}$ admet n_z variables rapides et $n_x = n - n_z$ variables lentes. Nous étendrons par la suite les résultats obtenus au cas des dimensions n, n_z et n_x variantes au cours du temps et nous montrerons dans la sous-section 2.3.5 que ceci peut être

ramené au cas classique des dimensions fixes, par une augmentation de la dimension du vecteur d'état et l'introduction de variables artificielles.

2.2.1 Mise sous la forme classique des systèmes singulièrement perturbés

Une étape primordiale dans notre analyse est de réécrire le système (2.1)-(2.2) sous la forme classique des systèmes singulièrement perturbés dont la nature des variables d'état reste inchangée. Précisément, les variables d'état lentes et rapides conservent la nature de leurs variations temporelles indépendamment des commutations.

Pour ce faire, nous introduisons les matrices de permutation S_i , $\forall i \in \mathcal{I}$ telles que :

$$S_i \mathbf{D}^i S_i^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x, n_z} \\ \mathbf{0}_{n_z, n_x} & \varepsilon \mathbf{I}_{n_z} \end{pmatrix}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.4)$$

et le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = S_{\sigma_k} \mathbf{x}(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$. En d'autres termes, les matrices S_i assurent le réarrangement des composantes du vecteur $\mathbf{x}$ dans chaque mode de fonctionnement, tel que les premières n_x composantes sont lentes et les n_z composantes restantes ont une variation rapide.

En utilisant le changement de variable (2.5), nous réécrivons les matrices du système (2.1)-(2.2) comme suit :

$$A^i = S_i \mathbf{A}^i S_i^\top, \quad J^{i \xrightarrow{j} i'} = S_{i'} \mathbf{J}^j S_i^\top, \quad \forall i, i' \in \mathcal{I}, \quad j \in \mathcal{J}. \quad (2.6)$$

et en considérant le réarrangement des variables énoncé par l'équation (2.4), les dynamiques continues à commutation initialement définies par (2.1) se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A^{\sigma_k} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

D'une manière analogue, les dynamiques discrètes (2.2) deviennent :

$$\begin{pmatrix} x(t_k) \\ z(t_k) \end{pmatrix} = J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \begin{pmatrix} x(t_k^-) \\ z(t_k^-) \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 1 \quad (2.8)$$

Remarque 2.1. *A un instant donné t_k :*

- Si $\sigma_k = \sigma_{k-1}$ et $J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \neq \mathbf{I}_n$, alors un saut se produit à l'instant t_k .
- Si $\mathbf{I}_n \in \{J^{i \xrightarrow{j} i'} \mid i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}\}$, $J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} = \mathbf{I}_n$ et $\sigma_k \neq \sigma_{k-1}$, alors une commutation se produit à l'instant t_k .
- Si $\sigma_k \neq \sigma_{k-1}$ et $J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \neq \mathbf{I}_n$, alors une commutation et un saut se produisent simultanément à l'instant t_k .

Ainsi, une commutation et un saut peuvent théoriquement se produire au même instant. Néanmoins, il existe un laps de temps entre les deux événements sur le plan pratique qui peut dans certains cas être infiniment petit.

Etant donné l'aspect hybride des dynamiques, l'analyse de stabilité du système (2.7)-(2.8) ne peut se restreindre à l'analyse du système découplé donné par le système réduit et la couche limite. Ceci a été illustré dans l'étude des systèmes à commutation singulièrement perturbés [33] où les auteurs montrent numériquement que la stabilité des systèmes découplés, relatifs aux dynamiques lentes et ceux relatifs aux dynamiques rapides séparément, n'assure forcément pas la stabilité du système à commutation original singulièrement perturbé. En effet, une loi de commutation arbitraire est susceptible de déstabiliser les dynamiques particulièrement quand la fréquence des commutations est élevée et que les dynamiques continues ne disposent pas suffisamment de temps pour compenser le changement subit aux instants de commutation. Par conséquent, un intervalle de temps suffisamment large séparant deux événements consécutifs assurera la décroissance de la fonction de Lyapunov associée au système et ainsi sa stabilité. Pour mettre en exergue ce phénomène, nous revenons dans la sous-section 2.4.3 sur l'exemple traité dans [33]. Dans ce qui suit, nous présentons une nouvelle méthodologie basée sur les techniques des perturbations singulières afin de formuler des conditions de stabilité en termes de temps de séjour minimum en tenant compte de la présence des échelles de temps différentes et des dynamiques mixtes (continues, commutatives et impulsives).

2.2.2 Séparation des échelles de temps

Dans la littérature, l'analyse des systèmes singulièrement perturbé linéaires ou non linéaires [27] passe par le découplage des dynamiques. Le principe de séparation des échelles de temps permet de définir deux sous-systèmes, correspondant aux dynamiques lentes et rapides du système. La stabilité asymptotique de chacun d'eux en temps continu implique la stabilité asymptotique du système original pour de petites valeurs du paramètre de perturbation ε .

Ainsi, considérons les matrices suivantes, pour $i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$:

$$A^i = \begin{pmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{pmatrix}, \quad J^{i \xrightarrow{j} i'} = \begin{pmatrix} J_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} & J_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} \\ J_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} & J_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} \end{pmatrix},$$

où $A_{11}^i, J_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, et $A_{22}^i, A_{12}^i, A_{21}^i, J_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}, J_{12}^{i \xrightarrow{j} i'}, J_{21}^{i \xrightarrow{j} i'}$ sont de dimensions appropriées.

Conformément à l'analyse standard des systèmes linéaires singulièrement perturbés [27], nous énonçons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.1. A_{22}^i est inversible pour tout $i \in \mathcal{I}$.

Par la suite, nous définissons le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P_{\sigma_k} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

tel que, pour tout $i \in \mathcal{I}$

$$P_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x, n_z} \\ (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i & \mathbf{I}_{n_z} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la matrice P_i est inversible par définition et que pour tout $i \in \mathcal{I}$;

$$P_i^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x, n_z} \\ -(A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i & \mathbf{I}_{n_z} \end{pmatrix}.$$

En utilisant (2.9), les dynamiques continues (2.7) deviennent :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^{\sigma_k} & B_1^{\sigma_k} \\ \varepsilon B_2^{\sigma_k} & A_{22}^{\sigma_k} + \varepsilon B_3^{\sigma_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

où pour tout $i \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} A_0^i &= A_{11}^i - A_{12}^i (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i, \\ B_1^i &= A_{12}^i, \\ B_2^i &= (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i A_0^i, \\ B_3^i &= (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i A_{12}^i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Similairement, les dynamiques discrètes (2.8) se réécrivent en fonction des variables x et y comme suit :

$$\begin{pmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{pmatrix} = R^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \begin{pmatrix} x(t_k^-) \\ y(t_k^-) \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 1 \quad (2.12)$$

où pour tout $i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$,

$$R^{i \xrightarrow{j} i'} = P_{i'} J^{i \xrightarrow{j} i'} P_i^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} & R_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} \\ R_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} & R_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

avec

$$\begin{aligned} R_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} &= J_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} - J_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i, \\ R_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} &= J_{12}^{i \xrightarrow{j} i'}, \\ R_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} &= (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i (J_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} - J_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i) + J_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} - J_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i, \\ R_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} &= (A_{22}^i)^{-1} A_{21}^i J_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} + J_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}. \end{aligned}$$

Rappelons que le modèle réduit relatif aux dynamiques hybrides singulièrement perturbé (2.10) et (2.12) est obtenu pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Formellement, le système réduit obtenu est régi par une seule échelle de temps ayant une dynamique hybride :

$$\dot{x}(t) = A_0^{\sigma_k} x(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.14)$$

$$x(t_k) = R_{11}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} x(t_k^-), \quad \forall k \geq 1. \quad (2.15)$$

Nous évoquons dans la sous-section 2.3.4, les conditions de stabilité du système réduit et nous montrons que l'analyse de stabilité du système (2.7) et (2.8), qui est entre autres équivalente à celle des dynamiques (2.10)-(2.12) est fortement liée à celle du modèle réduit (2.14)-(2.15).

2.2.3 Analyse de stabilité des systèmes singulièrement perturbés

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à l'analyse de stabilité des systèmes linéaires singulièrement perturbés en temps continu en supposant qu'aucune commutation ni impulsion n'intervienne. Cette étude présente des outils d'analyse préliminaires fondés sur la théorie de Lyapunov permettant de conclure quant à la stabilité d'un point d'équilibre du système. Ces résultats seront utilisés dans la suite du chapitre pour l'analyse du système hybride singulièrement perturbé (2.7)-(2.8) durant les phases continues.

Soit le système singulièrement perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}z(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ et $\varepsilon > 0$ le paramètre de perturbation singulière.

Considérons le changement de variable (2.9) pour un seul mode de fonctionnement :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x, n_z} \\ A_{22}^{-1}A_{21} & \mathbf{I}_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Le système s'exprime en fonction des variables x et y comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_1y(t) \\ \varepsilon \dot{y}(t) = A_{22}y(t) + \varepsilon(B_2x(t) + B_3y(t)) \end{cases} \quad (2.17)$$

avec

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},$$

$$B_1 = A_{12},$$

$$B_2 = A_{22}^{-1}A_{21}A_0,$$

$$B_3 = A_{22}^{-1}A_{21}A_{12}.$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les dynamiques découplées sont asymptotiquement stables. Ceci se traduit par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2. Les matrices A_0 et A_{22} sont Hurwitz.

Alors, il existe deux matrices symétriques définies positives $Q_s \geq \mathbf{I}_{n_x}$, $Q_f \geq \mathbf{I}_{n_z}$ et deux

réels $\lambda_s > 0$, $\lambda_f > 0$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} A_0^\top Q_s + Q_s A_0 &\leq -2\lambda_s Q_s \\ A_{22}^\top Q_f + Q_f A_{22} &\leq -2\lambda_f Q_f \end{aligned}$$

Soient les constantes $b_1 = \|Q_s^{\frac{1}{2}} B_1 Q_f^{-\frac{1}{2}}\|$, $b_2 = \|Q_f^{\frac{1}{2}} B_2 Q_s^{-\frac{1}{2}}\|$ et $b_3 = \|Q_f^{\frac{1}{2}} Q_f B_3 Q_f^{-\frac{1}{2}}\|$.

Proposition 2.1. *Supposons que l'hypothèse 2.2 est satisfaite, alors la fonction donnée par :*

$$V(x, y) = x^\top Q_s x + y^\top Q_f y$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (2.17) pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ avec

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_f}{\frac{(b_1+b_2)^2}{4\lambda_s} + b_3}. \quad (2.18)$$

Preuve. *La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov V relative aux dynamiques (2.17) s'écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^\top Q_s \dot{x} + 2y^\top Q_f \dot{y} \\ &= 2x^\top Q_s A_0 x + \frac{2}{\varepsilon} y^\top Q_f A_{22} y + 2x^\top Q_s B_1 y + 2y^\top Q_f B_2 x + 2y^\top Q_f B_3 y \\ &\leq -2\lambda_s x^\top Q_s x - \frac{2\lambda_f}{\varepsilon} y^\top Q_f y + 2(b_1 + b_2) \sqrt{x^\top Q_s x} \sqrt{y^\top Q_f y} + 2b_3 y^\top Q_f y \end{aligned}$$

Ainsi, il en résulte

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{2\lambda_f}{\varepsilon} - 2b_3 - \frac{(b_1 + b_2)^2}{2\lambda_s}\right) y^\top Q_f y.$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\dot{V} \leq 0$. De plus, V étant définie positive, elle est une fonction de Lyapunov pour le système (2.17). ■

Par ailleurs, il est nécessaire d'évaluer les dynamiques découplées en termes d'évolution de leurs fonctions de Lyapunov respectives. Pour ce faire, nous introduisons deux fonctions de Lyapunov relatives aux dynamiques lentes $W_s(t) = \sqrt{x(t)^\top Q_s x(t)}$ et rapides $W_f(t) = \sqrt{y(t)^\top Q_f y(t)}$.

Proposition 2.2. *Supposons que l'hypothèse 2.2 est satisfaite, soit ε_1 donné par (2.18), alors pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ et $t \geq 0$*

$$W_f(t) \leq W_f(0) e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} t} + \varepsilon \beta_1 \sqrt{V(0)}$$

avec $\beta_1 = \frac{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}{\lambda_f}$.

Preuve. La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov découplée relative aux dynamiques rapides vérifie :

$$\begin{aligned}\dot{W}_f &= \frac{2y^\top Q_f \dot{y}}{2\sqrt{y^\top Q_f y}} \\ &\leq \frac{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} y^\top Q_f y + y^\top Q_f (B_2 x + B_3 y)}{\sqrt{y^\top Q_f y}} \\ &\leq -\frac{\lambda_f}{\varepsilon} W_f + b_2 W_s + b_3 W_f \\ &\leq -\frac{\lambda_f}{\varepsilon} W_f + \sqrt{b_2^2 + b_3^2} \sqrt{W_s^2 + W_f^2} \\ &\leq -\frac{\lambda_f}{\varepsilon} W_f + \sqrt{b_2^2 + b_3^2} \sqrt{V}.\end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.1, nous avons pour tout $t \geq 0$,

$$\dot{W}_f(t) \leq -\frac{\lambda_f}{\varepsilon} W_f(t) + \sqrt{b_2^2 + b_3^2} \sqrt{V(0)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}W_f(t) &\leq W_f(0)e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon}t} + \sqrt{b_2^2 + b_3^2} \sqrt{V(0)} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon}(t-s)} ds \\ &\leq W_f(0)e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon}t} + \varepsilon \frac{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}{\lambda_f} \sqrt{V(0)} (1 - e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon}t}) \\ &\leq W_f(0)e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon}t} + \varepsilon \frac{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}{\lambda_f} \sqrt{V(0)}.\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3. Supposons que l'hypothèse 2.2 est satisfaite, soit ε_1 donné par (2.18) et soit $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1] \cap (0, \frac{\lambda_f}{\lambda_s})$, alors pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ et $t \geq 0$

$$W_s(t) \leq W_s(0)e^{-\lambda_s t} + \varepsilon \beta_2 W_f(0) + \varepsilon \beta_3 \sqrt{V(0)}$$

avec $\beta_2 = \frac{b_1}{\lambda_f - \varepsilon_2 \lambda_s}$ et $\beta_3 = \frac{b_1 \beta_1}{\lambda_s}$.

Preuve. La preuve de cette proposition est similaire à celle de la Proposition 2.2. En

effet, la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov découplée relative aux dynamiques lentes s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{W}_s &= \frac{2x^\top Q_s \dot{x}}{2\sqrt{x^\top Q_s x}} \leq \frac{-\lambda_s x^\top Q_s x + x^\top Q_s B_1 y}{\sqrt{x^\top Q_s x}} \\ &\leq -\lambda_s W_s + b_1 W_f.\end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.2, nous avons :

$$\dot{W}_s(t) \leq -\lambda_s W_s(t) + b_1 W_f(0) e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} t} + \varepsilon b_1 \beta_1 \sqrt{V(0)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}W_s(t) &\leq e^{-\lambda_s t} W_s(0) + b_1 W_f(0) \int_0^t e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} s} e^{-\lambda_s(t-s)} ds + \varepsilon b_1 \beta_1 \sqrt{V(0)} \int_0^t e^{-\lambda_s(t-s)} ds \\ &\leq e^{-\lambda_s t} W_s(0) + \frac{b_1}{\frac{\lambda_f}{\varepsilon} - \lambda_s} W_f(0) \left(e^{-\lambda_s t} - e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} t} \right) + \frac{\varepsilon b_1 \beta_1}{\lambda_s} \sqrt{V(0)} (1 - e^{-\lambda_s t}).\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon \leq \varepsilon_2 < \frac{\lambda_f}{\lambda_s}$, il en découle

$$W_s(t) \leq e^{-\lambda_s t} W_s(0) + \frac{b_1 \varepsilon}{\lambda_f - \varepsilon_2 \lambda_s} W_f(0) + \frac{\varepsilon b_1 \beta_1}{\lambda_s} \sqrt{V(0)}.$$

■

2.3 Analyse de stabilité

Nous traitons dans cette section, la stabilité du système hybride singulièrement perturbé (2.10)-(2.12) en exploitant les résultats de la sous-section 2.2.3. Nous établissons les résultats principaux de ce chapitre pour ensuite en déduire les conditions de stabilité des dynamiques (2.1)-(2.2) ou (2.7)-(2.8).

Dans la suite, nous considérons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.3. Les matrices A_0^i et A_{22}^i sont Hurwitz pour tout $i \in \mathcal{I}$.

Analoguement aux résultats de la sous-section précédente, il existe des matrices symétriques définies positives $Q_s^i \geq \mathbf{I}_{n_x}$, $Q_f^i \geq \mathbf{I}_{n_z}$, $i \in \mathcal{I}$, et des réels positifs λ_s^i , λ_f^i tels que

pour tout $i \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned} A_0^{i\top} Q_s^i + Q_s^i A_0^i &\leq -2\lambda_s^i Q_s^i \\ A_{22}^{i\top} Q_f^i + Q_f^i A_{22}^i &\leq -2\lambda_f^i Q_f^i. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour chaque mode de commutation $i \in \mathcal{I}$, nous définissons :

$$\begin{aligned} b_1^i &= \|(Q_s^i)^{\frac{1}{2}} B_1 (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \\ b_2^i &= \|(Q_f^i)^{\frac{1}{2}} B_2 (Q_s^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \\ b_3^i &= \|(Q_f^i)^{\frac{1}{2}} Q_f B_3 (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}}\|. \end{aligned}$$

De plus, nous introduisons $b_j = \max_{i \in \mathcal{I}} b_j^i$, $j = 1, \dots, 3$, $\lambda_s = \min_{i \in \mathcal{I}} \lambda_s^i$ et $\lambda_f = \min_{i \in \mathcal{I}} \lambda_f^i$. Afin d'assurer la décroissance de la fonction de Lyapunov relative au système (2.10) durant les phases continues, nous utilisons les résultats préliminaires de la sous-section 2.2.3, relatives à l'analyse des systèmes singulièrement perturbés classiques en temps continu. Précisément, nous appliquons le résultat de la Proposition 2.1 pour chaque mode de fonctionnement $i \in \mathcal{I}$.

Sous l'hypothèse 2.3 et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, il existe une fonction de Lyapunov dépendante du mode :

$$V(x, y) = x^\top Q_s^i x + y^\top Q_f^i y$$

où ε_1 est donné par (2.18) et tel que les dynamiques continues (2.10) sont stables.

Ensuite, nous nous intéressons aux variations de la fonction de Lyapunov aux instants discrets. Pour ce faire, nous définissons les fonctions de Lyapunov découplées relatives aux dynamiques lentes et rapides et dépendantes du mode suivantes :

$$\begin{cases} W_s(t) = \sqrt{x(t)^\top Q_s^i x(t)} \\ W_f(t) = \sqrt{y(t)^\top Q_f^i y(t)} \end{cases}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Lemme 2.1. Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ et soit $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ pour une séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$ donnée. Supposons que l'hypothèse 2.3 est vérifiée. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} W_s(t_{k+1}^-) &\leq W_s(t_k)(e^{-\lambda_s \tau_k} + \varepsilon \beta_3) + W_f(t_k) \varepsilon (\beta_2 + \beta_3) \\ W_f(t_{k+1}^-) &\leq W_s(t_k) \varepsilon \beta_1 + W_f(t_k) \left(e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau_k} + \varepsilon \beta_1 \right) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1] \cap (0, \frac{\lambda_f}{\lambda_s})$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont introduites dans les Propositions 2.2 et 2.3.

Preuve. La démonstration découle des Propositions 2.2 et 2.3 en utilisant :

$$\sqrt{V} \leq W_s + W_f.$$

■

Afin de compléter la caractérisation de la variation des fonctions W_s and W_f aux instants discrets, nous définissons les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \max_{i,i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \left\| (Q_s^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{11}^{i \rightarrow i'} (Q_s^i)^{-\frac{1}{2}} \right\|, \\ \gamma_{12} &= \max_{i,i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \left\| (Q_s^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{12}^{i \rightarrow i'} (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}} \right\|, \\ \gamma_{21} &= \max_{i,i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \left\| (Q_f^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{21}^{i \rightarrow i'} (Q_s^i)^{-\frac{1}{2}} \right\|, \\ \gamma_{22} &= \max_{i,i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \left\| (Q_f^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{22}^{i \rightarrow i'} (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}} \right\|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Lemme 2.2. Pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$ et pour tout $k \geq 1$,

$$W_s(t_k) \leq \gamma_{11} W_s(t_k^-) + \gamma_{12} W_f(t_k^-)$$

$$W_f(t_k) \leq \gamma_{21} W_s(t_k^-) + \gamma_{22} W_f(t_k^-).$$

Preuve. Nous démontrons la première inégalité :

$$\begin{aligned} W_s(t_k) &= \sqrt{x(t_k)^\top Q_s^{\sigma_k} x(t_k)} \\ &= \left\| (Q_s^{\sigma_k})^{\frac{1}{2}} x(t_k) \right\| \\ &\leq \left\| (Q_s^{\sigma_k})^{\frac{1}{2}} \left(R_{11}^{\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k} x(t_k^-) + R_{12}^{\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k} y(t_k^-) \right) \right\| \\ &\leq \left\| (Q_s^{\sigma_k})^{\frac{1}{2}} R_{11}^{\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k} x(t_k^-) \right\| + \left\| (Q_s^{\sigma_k})^{\frac{1}{2}} R_{12}^{\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k} y(t_k^-) \right\| \\ &\leq \left\| (Q_s^{\sigma_k})^{\frac{1}{2}} R_{11}^{\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k} (Q_s^{\sigma_{k-1}})^{-\frac{1}{2}} \right\| W_s(t_k^-) + \left\| (Q_s^{\sigma_k})^{\frac{1}{2}} R_{12}^{\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k} (Q_f^{\sigma_{k-1}})^{-\frac{1}{2}} \right\| W_f(t_k^-) \\ &\leq \gamma_{11} W_s(t_k^-) + \gamma_{12} W_f(t_k^-). \end{aligned}$$

La preuve de la seconde inégalité suit les mêmes lignes. ■

Afin de faciliter les notations dans ce qui suit, nous définissons les matrices suivantes :

$$M_\tau = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_s \tau} + \varepsilon \beta_3 & \varepsilon(\beta_2 + \beta_3) \\ \varepsilon \beta_1 & e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau} + \varepsilon \beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Soulignons que la matrice M_τ , paramétrée en $\tau > 0$, est définie positive.

En utilisant les notations introduites précédemment, nous établissons le lemme qui suit caractérisant l'évolution des fonctions de Lyapunov aux instants discrets.

Lemme 2.3. Soient $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, et $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ pour une séquence d'événements donnée $(t_k)_{k \geq 0}$. Supposons que l'hypothèse 2.3 est vérifiée, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} W_s(t_{k+1}) \\ W_f(t_{k+1}) \end{pmatrix} \leq \Gamma M_{\tau_k} \begin{pmatrix} W_s(t_k) \\ W_f(t_k) \end{pmatrix}.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 2.2 et la définition de la matrice Γ , nous écrivons l'inégalité comparant les fonctions de Lyapunov aux instants discrets t_{k+1} et celles aux instants t_{k+1}^- :

$$\begin{pmatrix} W_s(t_{k+1}) \\ W_f(t_{k+1}) \end{pmatrix} \leq \Gamma \begin{pmatrix} W_s(t_{k+1}^-) \\ W_f(t_{k+1}^-) \end{pmatrix}.$$

De la même manière et en utilisant la matrice M_{τ_k} énoncée par l'équation (2.22), nous réécrivons l'inégalité du Lemme 2.1 comme suit :

$$\begin{pmatrix} W_s(t_{k+1}^-) \\ W_f(t_{k+1}^-) \end{pmatrix} \leq M_{\tau_k} \begin{pmatrix} W_s(t_k) \\ W_f(t_k) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la preuve du Lemme 2.3 découle de la combinaison des deux inégalités précédentes. ■

Ainsi, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.4. Soient $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ et $\tau^* \geq 0$ tels que la matrice positive ΓM_{τ^*} est Schur. Si l'hypothèse 2.3 est vérifiée, alors pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$ satisfaisant la condition du temps de séjour minimum $\tau_k \geq \tau^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le système (2.10)-(2.12) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. En se référant au Lemme 2.3, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions de Lyapunov découplées satisfont :

$$\begin{pmatrix} W_s(t_k) \\ W_f(t_k) \end{pmatrix} \leq \Gamma M_{\tau_{k-1}} \dots \Gamma M_{\tau_0} \begin{pmatrix} W_s(t_0) \\ W_f(t_0) \end{pmatrix}.$$

Or les coefficients de la matrice M_τ sont décroissants en τ , alors il existe un $\tau^* > 0$ tel que :

$$\begin{pmatrix} W_s(t_k) \\ W_f(t_k) \end{pmatrix} \leq (\Gamma M_{\tau^*})^k \begin{pmatrix} W_s(t_0) \\ W_f(t_0) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si la matrice définie-positive ΓM_{τ^*} est Schur, alors les séquences $(W_s(t_k))_{k \geq 0}$ et $(W_f(t_k))_{k \geq 0}$ convergent vers 0 et la stabilité asymptotique globale du système (2.10)-(2.12) est assurée. ■

Le Lemme 2.4 met l'accent sur le fait que la stabilité des dynamiques (2.10)-(2.12) peut être analysée en évaluant les propriétés du rayon spectral de la matrice ΓM_{τ^*} . Il est important de souligner que les valeurs de τ^* pour lesquelles ΓM_{τ^*} est Schur donnent des majorants du temps de séjour minimum séparant deux événements consécutifs.

En effet, cette matrice conditionne les sauts des dynamiques à tout instant t_k et la majoration de son rayon spectral caractérise des bornes sur les amplitudes des sauts et des impulsions. Cette contrainte se traduit par une contrainte temporelle assurant une durée de temps suffisamment grande pour stabiliser les dynamiques hybrides singulièrement perturbés.

Cependant, la matrice ΓM_{τ^*} s'écrit sous la forme suivante :

$$\Gamma M_{\tau^*} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}e^{-\lambda_s \tau^*} + \varepsilon \delta_1 & \gamma_{12}e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau^*} + \varepsilon \delta_2 \\ \gamma_{21}e^{-\lambda_s \tau^*} + \varepsilon \delta_3 & \gamma_{22}e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau^*} + \varepsilon \delta_4 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \gamma_{11}\beta_3 + \gamma_{12}\beta_1, & \delta_2 &= \gamma_{11}(\beta_2 + \beta_3) + \gamma_{12}\beta_1, \\ \delta_3 &= \gamma_{21}\beta_3 + \gamma_{22}\beta_1, & \delta_4 &= \gamma_{21}(\beta_2 + \beta_3) + \gamma_{22}\beta_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ainsi, l'étude spectrale de la matrice ΓM_{τ^*} fait intervenir un large panel de paramètres. Néanmoins nous allons montrer qu'il y a principalement trois cas à considérer selon la valeur du paramètre γ_{11} .

Dans la suite, nous détaillons le calcul de la valeur du temps de séjour requis τ^* et nous établissons les conditions suffisantes pour le garantir.

2.3.1 Cas 1 : $\gamma_{11} > 1$

Théorème 2.1. *Supposons que l'hypothèse 2.3 est satisfaite et soit $\gamma_{11} > 1$. Alors, il existe une constante $\varepsilon_1^* > 0$ et une fonction $\eta_1 : (0, \varepsilon_1^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ où $\eta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, tels que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$, et pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$ le système*

(2.10)-(2.12) est globalement asymptotiquement stable pour un temps minimum de séjour satisfaisant $\tau_k \geq \tau^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec

$$\tau^* > \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} + \eta_1(\varepsilon).$$

Preuve. La preuve fait usage des propriétés de la matrice positive ΓM_{τ^*} donnée par (2.23). Cette matrice est Schur si seulement si il existe $p \in \mathbb{R}_+^2$, tel que $(\Gamma M_{\tau^*})^\top p < p$ (voir [50]). On est ainsi amené à chercher le paramètre p sous la forme $(1, a\varepsilon)^\top$ avec $a > \delta_2$ solution du problème. L'ingégalité $(\Gamma M_{\tau^*})^\top p < p$ peut être réécrite comme

$$\begin{cases} \gamma_{11}e^{-\lambda_s\tau^*} + \varepsilon\delta_1 + a\varepsilon\gamma_{21}e^{-\lambda_s\tau^*} + a\varepsilon^2\delta_3 < 1 \\ \gamma_{12}e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon}\tau^*} + \varepsilon\delta_2 + a\varepsilon\gamma_{22}e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon}\tau^*} + a\varepsilon^2\delta_4 < a\varepsilon. \end{cases} \quad (2.25)$$

La première inégalité du système (2.25) est équivalente à

$$\tau^* > \frac{-1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{1 - \varepsilon\delta_1 - a\varepsilon^2\delta_3}{\gamma_{11} + a\varepsilon\gamma_{21}} \right) = \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} + \eta_1(\varepsilon)$$

où

$$\eta_1(\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_s} \left(\ln \left(1 + \frac{a\varepsilon\gamma_{21}}{\gamma_{11}} \right) - \ln(1 - \varepsilon\delta_1 - a\varepsilon^2\delta_3) \right). \quad (2.26)$$

D'abord, il est clair que $\eta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. De plus, la fonction $\eta_1(\varepsilon)$ n'est définie que si $1 - \varepsilon\delta_1 - a\varepsilon^2\delta_3 > 0$, qui revient à majorer le paramètre des perturbations singulières par $\varepsilon < \varepsilon_3$ avec

$$\varepsilon_3 = \frac{-\delta_1 + \sqrt{\delta_1^2 + 4a\delta_3}}{2a\delta_3}. \quad (2.27)$$

D'autre part, la seconde inégalité (2.25) implique

$$\tau^* > \frac{-\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{a\varepsilon - \varepsilon\delta_2 - a\varepsilon^2\delta_4}{\gamma_{12} + a\varepsilon\gamma_{22}} \right) \iff \tau^* > \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \left(\ln \left(\frac{\gamma_{12} + a\varepsilon\gamma_{22}}{a - \delta_2 - a\varepsilon\delta_4} \right) - \ln(\varepsilon) \right).$$

et puisque $\tau^* > \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} + \eta_1(\varepsilon) \geq \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s}$, alors l'inégalité ci-dessus est vérifiée si

$$\frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} > \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \left(\ln \left(\frac{\gamma_{12} + a\varepsilon\gamma_{22}}{a - \delta_2 - a\varepsilon\delta_4} \right) - \ln(\varepsilon) \right). \quad (2.28)$$

Nous remarquons que le terme du coté droit de l'inégalité tend vers 0 quand ε tend vers 0, d'où l'on peut déduire qu'il existe $\varepsilon_4 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$, l'ingégalité (2.28) est vérifiée et le résultat du théorème est obtenu en fixant $\varepsilon_1^* = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$. ■

Le Théorème 2.1 montre que la condition du temps de séjour minimum assurant la stabilité du système hybride singulièrement perturbé (2.10)-(2.12) peut s'écrire comme étant la somme d'une constante $\frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s}$ et d'une fonction $\eta_1(\varepsilon)$, qui converge vers 0 quand ε tend vers 0. Intrinséquement, la constante dépend de λ_s et γ_{11} , et peut être déterminée uniquement à partir du modèle réduit (2.14)-(2.15).

2.3.2 Cas 2 : $\gamma_{11} = 1$

Pour $\gamma_{11} = 1$, deux cas se présentent en fonction de $\gamma_{12} \neq 0$ ou $\gamma_{12} = 0$.

Théorème 2.2. *Supposons que l'hypothèse 2.3 est satisfaite et soit $\gamma_{11} = 1$ et $\gamma_{12} \neq 0$. Alors, il existe une constante $\varepsilon_2^* > 0$ et une fonction $\eta_2 : (0, \varepsilon_2^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $\eta_2(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, tels que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2^*)$, et pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$, le système (2.10)-(2.12) est globalement asymptotiquement stable pour un temps minimum de séjour satisfaisant $\tau_k \geq \tau^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, avec*

$$\tau^* > \frac{-\varepsilon}{\lambda_f} \ln(\varepsilon) + \eta_2(\varepsilon).$$

Preuve. *Similairement à la preuve du Théorème 2.1, il suffit de démontrer que les inégalités du (2.25) sont satisfaites. Puisque $\gamma_{11} = 1$, la première inégalité est vérifiée si et seulement si $\tau^* > \eta_1(\varepsilon)$. En outre, la seconde inégalité est satisfaite si et seulement si*

$$\tau^* > \frac{-\varepsilon}{\lambda_f} \ln(\varepsilon) + \eta_2(\varepsilon),$$

où

$$\eta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12} + a\varepsilon\gamma_{22}}{a - \delta_2 - a\varepsilon\delta_4} \right). \quad (2.29)$$

Il est clair que $\eta_2(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. De plus, la fonction $\eta_2(\varepsilon)$ n'est définie que si

$$a - \delta_2 - a\varepsilon\delta_4 > 0$$

alors le paramètre des perturbations singulières est majoré par $\varepsilon < \varepsilon_5$ avec

$$\varepsilon_5 = \frac{a - \delta_2}{a\delta_4}. \quad (2.30)$$

Et comme $\eta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, il existe $\varepsilon_6 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_6)$,

$$\eta_1(\varepsilon) < \frac{-1}{\lambda_f} \varepsilon \ln(\varepsilon).$$

Le théorème est ainsi prouvé en fixant $\varepsilon_2^* = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$. ■

Dans le second cas $\gamma_{12} = 0$, les dynamiques rapides y n'influent pas les dynamiques lentes x aux instants de sauts. En d'autres termes, la composante $J_{12}^{i \rightarrow i'}$ de la matrice $J^{i \rightarrow i'}$ est nulle pour tout $i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$.

Théorème 2.3. *Supposons que l'hypothèse 2.3 est satisfaite et soit $\gamma_{11} = 1$ et $\gamma_{12} = 0$. Il existe une constante $\varepsilon_3^* > 0$ et une fonction $\eta_3 : (0, \varepsilon_3^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ où $\eta_3(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, tels que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3^*)$, et pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$, le système (2.10)-(2.12) est globalement asymptotiquement stable pour un temps minimum de séjour satisfaisant $\tau_k \geq \tau^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, avec*

$$\tau^* > \eta_3(\varepsilon).$$

Preuve. D'une manière analogue à la preuve du Théorème 2.1, il suffit de démontrer les inégalités du (2.25). Or, pour $\gamma_{11} = 1$, la première inégalité est vérifiée seulement si $\tau^* > \eta_1(\varepsilon)$. De plus, ayant $\gamma_{12} = 0$, la seconde inégalité est satisfaite si et seulement si

$$\tau^* > \frac{-\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{a - \delta_2 - a\varepsilon\delta_4}{a\gamma_{22}} \right).$$

En associant $\eta_1(\varepsilon)$ définie par l'équation (2.26) et le minorant obtenu par l'inégalité précédente, nous définissons

$$\eta_3(\varepsilon) = \max \left(\eta_1(\varepsilon), \frac{-\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{a - \delta_2 - a\varepsilon\delta_4}{a\gamma_{22}} \right) \right). \quad (2.31)$$

Cette fonction vérifie $\eta_3(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et elle est définie pour tout $\varepsilon < \min(\varepsilon_3, \varepsilon_5)$.

Enfin, la preuve du théorème s'achève en fixant $\varepsilon_3^* = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_5)$. ■

Les théorèmes précédents montrent que, pour $\gamma_{11} = 1$, le temps de séjour minimum assurant la stabilité du système (2.10)-(2.12) pour $\gamma_{12} \neq 0$ et $\gamma_{12} = 0$ décroît en $-\varepsilon \ln(\varepsilon)$ et en ε respectivement. Il est important de souligner que dans ce cas, pour tout signal de commutation n'ayant aucune contrainte temporelle le modèle réduit (2.14)-(2.15) est globalement asymptotiquement stable et qu'il ne requiert aucune condition de temps de séjour minimum. Ce résultat est détaillé dans la sous-section 2.3.4.

De plus, remarquons que $-\varepsilon \ln(\varepsilon)$ converge vers 0 plus lentement que ε . Par conséquent, un temps de séjour minimum plus important est requis dans le cas $\gamma_{12} \neq 0$ pour garantir la stabilité du système. En d'autres termes, un intervalle de temps plus large est requis pour stabiliser les variables rapides y afin qu'elles ne déstabilisent pas les dynamiques lentes durant les phases impulsives.

2.3.3 Cas 3 : $\gamma_{11} < 1$

Pour $\gamma_{11} < 1$, nous distinguons deux cas qui font intervenir les paramètres γ_{12} , γ_{21} et γ_{22} .

Théorème 2.4. *Supposons que l'hypothèse 2.3 est satisfaite et soit $\gamma_{11} < 1$. Alors, il existe une constante $\varepsilon_4^* > 0$ et une fonction $\eta_4 : (0, \varepsilon_4^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ où $\eta_4(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, tels que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4^*)$ et pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$, le système (2.10)-(2.12) est globalement asymptotiquement stable pour un temps de séjour minimum satisfaisant $\tau_k \geq \tau^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, avec*

$$\tau^* > \eta_4(\varepsilon).$$

Preuve. Rappelons que notre objectif est de rendre la matrice ΓM_{τ^*} Schur, ce qui revient à prouver l'existence d'un vecteur $p \in \mathbb{R}_+^2$, tel que $(\Gamma M_{\tau^*})^\top p < p$ (voir [50]). Soit p sous la forme $(1, a)^\top$ où $a > 0$. Alors, $(\Gamma M_{\tau^*})^\top p < p$ peut se réécrire sous la forme comme suit

$$\begin{cases} \gamma_{11}e^{-\lambda_s \tau^*} + \varepsilon \delta_1 + a\gamma_{21}e^{-\lambda_s \tau^*} + a\varepsilon \delta_3 < 1 \\ \gamma_{12}e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau^*} + \varepsilon \delta_2 + a\gamma_{22}e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau^*} + a\varepsilon \delta_4 < a \end{cases}$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} \tau^* > \frac{1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{\gamma_{11} + a\gamma_{21}}{1 - a\varepsilon \delta_3 - \varepsilon \delta_1} \right) \\ \tau^* > \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12} + a\gamma_{22}}{a - \varepsilon \delta_2 - a\varepsilon \delta_4} \right). \end{cases} \quad (2.32)$$

Etant donné que $\gamma_{11} < 1$, il est possible de choisir $a > 0$ tel que $\gamma_{11} + a\gamma_{21} < 1$.

Par conséquent, la première inégalité est satisfaite pour tout $\tau^* \geq 0$ et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_6)$ avec

$$\varepsilon_6 = \frac{1 - \gamma_{11} - a\gamma_{21}}{a\delta_3 + \delta_1}. \quad (2.33)$$

Quant à la seconde inégalité, il revient de considérer $\tau^* > \eta_4(\varepsilon)$ avec

$$\eta_4(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12} + a\gamma_{22}}{a - \varepsilon \delta_2 - a\varepsilon \delta_4} \right). \quad (2.34)$$

Analoguement aux preuves précédentes, il est clair que $\eta_4(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et qu'elle est définie pour tout $\varepsilon < \varepsilon_7$ où

$$\varepsilon_7 = \frac{a}{a\delta_3 + \delta_1}. \quad (2.35)$$

Pour conclure, le résultat du théorème est vérifié en choisissant $\varepsilon_4^* = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_7)$. ■

Théorème 2.5. *Supposons que l'hypothèse 2.3 est satisfaite et soit $\gamma_{11} < 1$, $\gamma_{22} < 1$ et $\frac{\gamma_{12}\gamma_{21}}{(1-\gamma_{11})(1-\gamma_{22})} < 1$. Alors, il existe $\varepsilon_5^* > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_5^*)$ et pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$, le système (2.10)-(2.12) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. *Similairement à la preuve du Théorème 2.4, il suffit de démontrer que les inégalités (2.32) sont vérifiées. dans le cas où $\gamma_{11} < 1$, $\gamma_{22} < 1$ et $\frac{\gamma_{12}\gamma_{21}}{(1-\gamma_{11})(1-\gamma_{22})} < 1$, le paramètre $a > 0$ peut être choisi de manière à ce qu'il vérifie :*

$$\frac{\gamma_{12}}{1 - \gamma_{22}} < a < \frac{1 - \gamma_{11}}{\gamma_{21}}.$$

Il en résulte que la première inégalité est vérifiée pour tout $\tau^ \geq 0$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_6)$.*

Concernant la seconde inégalité, il suffit de prendre $\tau^ \geq 0$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_8)$ avec*

$$\varepsilon_8 = \frac{a - \gamma_{12} - a\gamma_{22}}{\delta_2 + a\delta_4}. \quad (2.36)$$

La preuve s'achève en prenant $\varepsilon_5^ = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_8)$. ■*

Les théorèmes précédents montrent que, pour $\gamma_{11} < 1$, le temps de séjour minimum assurant la stabilité du système hybride singulièrement perturbé (2.10)-(2.12) est égal à 0 ou tend vers 0 quand ε tend vers 0.

2.3.4 Analyse de stabilité du modèle réduit

Nous avons vu à travers les résultats précédents qu'un temps de séjour minimum requis pour assurer la stabilité du système (2.10)-(2.12) est la somme de deux termes. D'une part, un terme indépendant du paramètre ε , sa valeur est 0 pour $\gamma_{11} \leq 1$ et elle est de $\frac{\ln \gamma_{11}}{\lambda_s}$ pour $\gamma_{11} > 1$. D'autre part, le second terme dépend du paramètre ε et il tend vers 0 quand ε tend vers 0. Nous avons mentionné précédemment que l'interprétation du premier terme est fortement liée au système réduit (2.14)-(2.15). Dans ce qui suit, nous étudions les conditions nécessaires qui garantissent la stabilité du modèle réduit (2.14)-(2.15) et nous interprétons la relation entre les bornes supérieures du temps de séjour minimum qui stabilise le système réduit à celles qui stabilise le modèle original (2.10)-(2.12).

Proposition 2.4. *Supposons que l'hypothèse 2.3 est vérifiée et soit $\gamma_{11} > 1$. Alors, pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$, le système réduit (2.14)-(2.15) est globalement*

asymptotiquement stable pour un temps minimum de séjour satisfaisant $\tau_k \geq \tau^*$, $k \in \mathbb{N}$ avec $\tau^* > \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s}$.

Preuve. Considérons la fonction W_s donnée par

$$W_s(t) = \sqrt{x(t)^\top Q_s^{\sigma_k} x(t)} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}.$$

En utilisant l'hypothèse 2.3, il en découle :

$$W_s(t_{k+1}^-) \leq W_s(t_k) e^{-\lambda_s \tau_k}.$$

De plus, la définition de γ_{11} dans (2.21) implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$W_s(t_{k+1}) \leq W_s(t_{k+1}^-) \gamma_{11}.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$W_s(t_{k+1}) \leq W_s(t_k) \gamma_{11} e^{-\lambda_s \tau_k}. \quad (2.37)$$

D'autre part, puisque $k \in \mathbb{N}$, $\tau_k \geq \tau^*$ avec $\tau^* > \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s}$, il en résulte que $W_s(t_k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ et le système réduit (2.14)-(2.15) est globalement asymptotiquement stable. ■

Proposition 2.5. Supposons que l'hypothèse 2.3 est vérifiée et soit $\gamma_{11} \leq 1$. Alors, pour toute séquence d'événements non bornée $(t_k)_{k \geq 0}$, le système réduit (2.14)-(2.15) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. En utilisant l'équation (2.37) et le fait que $\gamma_{11} \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$W_s(t_{k+1}) \leq W_s(t_k) e^{-\lambda_s \tau_k}.$$

Par la suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$W_s(t_k) \leq W_s(0) e^{-\lambda_s t_k}.$$

Puisque la séquence $(t_k)_{k \geq 0}$ est non bornée, t_k tend vers $+\infty$ et $W_s(t_k)$ tend vers 0. Donc, la stabilité asymptotique globale du modèle réduit (2.14)-(2.15) est garantie. ■

Les propositions précédentes montrent que la condition du temps de séjour minimum établie pour le système hybride singulièrement perturbé (2.10)-(2.12) dans les Théorèmes 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5 coïncide quand ε tend vers 0 avec la condition du temps

de séjour minimum du système réduit (2.14)-(2.15). Le Tableau 2.1 résume les résultats principaux.

γ_{11}	$\gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$	Condition pour (2.10)-(2.12)	Condition pour (2.14)-(2.15)
$\gamma_{11} > 1$	—	$\tau^* > \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} + \mathcal{O}(\varepsilon)$	$\tau^* > \frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s}$
$\gamma_{11} = 1$	—	$\tau^* > -\frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon)$	$\tau^* \geq 0$
	$\gamma_{12} = 0$	$\tau^* > \mathcal{O}(\varepsilon)$	
$\gamma_{11} < 1$	—	$\tau^* \geq 0$	
	$\gamma_{22} < 1, \frac{\gamma_{12}\gamma_{21}}{(1-\gamma_{11})(1-\gamma_{22})} < 1$		

TABLEAU 2.1: Tableau résumant les résultats des conditions de temps de séjour minimum requis à la stabilisation des dynamiques (2.10)-(2.12) et du modèle réduit (2.14)-(2.15).

Remarque 2.2. Le paramètre des perturbations singulières ε étant suffisamment petit, il est judicieux de noter qu’une source potentielle de conservatisme dans la condition du temps de séjour estimé pour le système hybride singulièrement perturbé (2.10)-(2.12) provient de la condition du temps de séjour établie pour stabiliser le modèle réduit. En effet, les bornes sur le temps de séjour minimum obtenues dans les Théorèmes 2.1-2.5 font usage des majorations sur les paramètres $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ qui à leur tour font intervenir les matrices de Lyapunov Q_s^i et $Q_f^i, i \in \mathcal{I}$. Pour un choix aléatoire de ces paramètres, ces majorations risquent d’être conservatives.

2.3.5 Extension au cas des dimensions variantes dans le temps

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés à l’analyse de stabilité du système hybride singulièrement perturbé dans le cas des dimensions fixes des variables lentes et rapides. Nous montrons ici que ces résultats se généralisent au cas où les dimensions des variables d’état du système (2.1)-(2.2) varient dans le temps.

Nous rappelons que pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$, le vecteur d’état $\mathbf{x}(t)$ du système (2.1) est de dimension n_i pour un mode commutation donné $\sigma_k = i$. Nous rappelons aussi que les matrices $\mathbf{D}^i, i \in \mathcal{I}$ introduites dans la Section 2.2 fixent la nature de la variation des états du système (2.1). Pour tout $i \in \mathcal{I}$, nous considérons que $n_{zi} \in \mathbb{N}$ est le nombre d’éléments de $\mathbf{D}^i$ égal à ε et $n_{xi} = n_i - n_{zi}$. En d’autres termes, pour $\sigma_k = i$, n_i, n_{zi} and n_{xi} sont les dimensions du vecteur d’état, les variables rapides et les variables lentes respectivement.

Avec les notations introduites précédemment, nous définissons le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\sigma_k} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^{\sigma_k} \mathbf{x}(t), \\ \bar{\mathbf{D}}^{\sigma_k} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = -\lambda \bar{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.38)$$

où $n_z = \max_{i \in \mathcal{I}} n_{zi}$, $n_x = \max_{i \in \mathcal{I}} n_{xi}$ et $n = n_x + n_z$, la matrice $\bar{\mathbf{D}}^i \in \mathbb{R}^{(n-n_i) \times (n-n_i)}$ est définie similairement à la matrice $\mathbf{D}^i$ comme étant une matrice diagonale dont les éléments sont égaux soit à ε ou à 1 afin de sélectionner les variables lentes et rapides des composantes artificielles du vecteur d'état $\bar{\mathbf{x}}$.

Précisément, pour tout $i \in \mathcal{I}$, nous considérons que $\bar{\mathbf{D}}^i$ admet $n_z - n_{zi}$ éléments diagonaux égaux à ε . Par conséquent, le vecteur augmenté $\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}$ admet un nombre invariant de composantes lentes et rapides qui sont n_x et n_z respectivement. Alors, le modèle (2.38) se ramène à la forme du modèle (2.1) et la dimension de son vecteur d'état ainsi que le nombre de ses variables lentes et rapides sont constants. En outre, le paramètre λ est un réel positif, choisi plus grand que λ_s et λ_f afin d'assurer une vitesse de convergence plus grande des dynamiques continues de la variable auxiliaire $\bar{\mathbf{x}}(t)$ par rapport à celles de la variable $\mathbf{x}(t)$.

Similairement, nous définissons les dynamiques discrètes pour le vecteur augmenté :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_k) &= \mathbf{J}^{\nu_k} \mathbf{x}(t_k^-) \\ \bar{\mathbf{x}}(t_k) &= 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

La variable auxiliaire est mise à 0 aux instants de saut de telle sorte que les dynamiques discrètes de la variable auxiliaire $\bar{\mathbf{x}}(t)$ convergent plus rapidement que la variable $\mathbf{x}(t)$.

Pour illustrer cette approche, nous considérons un exemple des systèmes singulièrement perturbés qui commutent entre deux modes de fonctionnement pour lesquels les dimensions et la nature des variables change lors d'une commutation d'un mode à un autre :

- Mode de fonctionnement I :

Les dynamiques sont décrites par $n_1 = 2$ variables d'état ; $n_{x_1} = 1$ et $n_{z_1} = 1$:

$$\mathbf{D}^1 \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}^1 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

- Mode de fonctionnement II :

Les dynamiques sont décrites par $n_2 = 4$ variables d'état ; $n_{x_2} = 2$ et $n_{z_2} = 2$:

$$\mathbf{D}^2 \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}^2 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Ayant $n = n_x + n_z = 4$, l'augmentation du vecteur d'état consiste à rajouter des variables artificielles telles que le vecteur augmenté obtenu soit dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$$

Etant donné que le vecteur d'état relatif au second mode de fonctionnement est complet, (la matrice $\bar{\mathbf{D}}^2$ est non-définie), nous considérons :

$$\bar{\mathbf{D}}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, la dynamique continue relative à chacune des configurations peut se mettre sous la forme du modèle (2.38) :

$$\text{diag}(\mathbf{D}^i, \bar{\mathbf{D}}^i) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \end{pmatrix} = \text{diag}(\mathbf{A}^i, -\lambda \mathbf{I}_{n-n_i}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \bar{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.42)$$

De même, les dynamiques discrètes s'écrivent sous la forme (2.39) comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_k) \\ \bar{\mathbf{x}}(t_k) \end{pmatrix} = \text{diag}(\mathbf{J}^{\nu_k}, 0_{n-n_i}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_k^-) \\ \bar{\mathbf{x}}(t_k^-) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Cette modélisation invoque le fait que le système augmenté (2.38)-(2.39) est globalement asymptotiquement stable si seulement si le système original (2.1)-(2.2) l'est aussi. Ainsi, l'analyse de stabilité de (2.38)-(2.39) est conforme à celle présentée dans les sections précédentes. Ce résultat est validé par un exemple numérique traité dans la sous-section 2.4.2.

2.4 Exemples illustratifs

Cette section vise à illustrer les résultats théoriques obtenus à travers l'analyse de stabilité de la classe des systèmes hybrides introduite dans ce chapitre. Nous considérons un système à commutation impulsif singulièrement perturbé de petite dimension, précisément les variables lentes et rapides sont données par des scalaires et dont les modes de commutation possibles sont dans l'ensemble $\mathcal{I} = \{1, 2\}$. Nous admettons que la nature des variables peut changer aux instants discrets tandis que la dimension du vecteur d'état reste inchangée. L'objectif est, donc de tester l'efficacité de la condition du temps de séjour minimum des Théorèmes 2.1-2.5 qui garantit la stabilité des dynamiques. Par la suite, nous revenons sur un exemple qui illustre la méthodologie à adopter dans le cas des dimensions variantes dans le temps.

Dans un premier temps, nous évoquons l'approche des changements de variables énoncé dans les sous-sections 2.2.1 et 2.2.2 dans le but de réécrire les dynamiques sous la forme classique des systèmes singulièrement perturbés. Par la suite, nous analysons les conditions en γ_{11} pour sélectionner le théorème à appliquer et qui fournit la valeur adéquate du temps de séjour minimum. Dans la seconde sous-section, nous illustrons les trajectoires du système considéré et nous évaluons sa stabilité au sens de Lyapunov pour un intervalle de temps satisfaisant la contrainte temporelle.

2.4.1 Application à des systèmes décrits par des dynamiques scalaires

Soient les dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = a_1 u(t) + b_1 v(t) \\ \varepsilon \dot{v}(t) = c_1 u(t) + d_1 v(t) \end{cases} \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), k \in \mathbb{N} \quad (2.44)$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}(t) = a_2 u(t) + b_2 v(t) \\ \dot{v}(t) = c_2 u(t) + d_2 v(t) \end{cases} \quad t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}), k \in \mathbb{N} \quad (2.45)$$

où la nature des états u et v permute à chaque commutation. Nous introduisons la variable $\mathbf{x} = (u, v)^\top$ et les matrices

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permettant la réécriture des dynamiques (2.44)-(2.45) sous la forme du système (2.1).

D'abord, en utilisant les matrices de permutation $S_1 = \mathbf{I}_2$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, nous définissons le changement de variable (2.5) comme étant

$$\begin{cases} (x, z)^\top = S_1 \mathbf{x}, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), k \in \mathbb{N}, \\ (x, z)^\top = S_2 \mathbf{x}, & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}), k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il est important de noter que, par définition, le système décrit en $\mathbf{x}$ est un système à commutation et qu'il n'est soumis à aucune impulsion. Ceci est équivalent à $\mathcal{J} = \{1\}$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{I}_2$ dans l'équation (2.2). Néanmoins, l'aspect impulsif intervient dans les dynamiques (2.44)-(2.45) exprimées en $(x, z)^\top$. Car, en prenant $\mathcal{J} = \{1\}$ et en utilisant (2.6), nous avons $J^{1 \rightarrow 2} = J^{2 \rightarrow 1} = S_2$.

Par conséquent, le système (2.44)-(2.45) peut se mettre sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A^{\sigma_k} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$$

avec une dynamique impulsive donnée par :

$$\begin{pmatrix} x(t_k) \\ z(t_k) \end{pmatrix} = J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \begin{pmatrix} x(t_k^-) \\ z(t_k^-) \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 1$$

où le signal de commutation $\sigma_k \in \mathcal{I} = \{1, 2\}$, le signal d'impulsion $\nu_k \in \mathcal{J} = \{1\}$, $A^1 = S_1 \mathbf{A}^1 S_1^\top = \mathbf{A}^1$ et $A^2 = S_2 \mathbf{A}^2 S_2^\top = \begin{pmatrix} d_2 & c_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Par la suite, nous adoptons le changement de variable (2.9) exprimé par :

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) + \frac{c_1}{d_1} x(t), & t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}, \\ y(t) &= z(t) + \frac{b_2}{a_2} x(t), & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}), k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Cependant, l'hypothèse 2.3 requiert les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} A_0^1 = a_1 - \frac{b_1 c_1}{d_1} < 0, & A_{22}^1 = d_1 < 0, \\ A_0^2 = d_2 - \frac{b_2 c_2}{a_2} < 0, & A_{22}^2 = a_2 < 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Ainsi, les matrices de Lyapunov Q_s^i , Q_f^i , $i \in \mathcal{I}$ peuvent être choisies comme des scalaires positifs et nous avons :

$$\lambda_s = \min \left(\frac{b_1 c_1}{d_1} - a_1, \frac{b_2 c_2}{a_2} - d_2 \right), \quad \lambda_f = \min(-d_1, -a_2). \quad (2.48)$$

Comme précédemment décrit, les valeurs des composantes $R_{11}^{1 \rightarrow 2}$ et $R_{11}^{2 \rightarrow 1}$ jouent un rôle primordial dans le calcul de la constante de temps séparant deux événements consécutifs, qui est fortement lié à la valeur de γ_{11} . En effet :

$$R_{11}^{1 \rightarrow 2} = -\frac{c_1}{d_1}, \quad R_{11}^{2 \rightarrow 1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

et la définition (2.21) implique

$$\gamma_{11} = \max \left(\left| \frac{q c_1}{d_1} \right|, \left| \frac{b_2}{q a_2} \right| \right) \quad (2.49)$$

où $q = \sqrt{\frac{Q_s^2}{Q_s^1}}$. De ce fait, il convient de minimiser la valeur de γ_{11} , ceci est concevable pour $q = \sqrt{\frac{|d_1 b_2|}{|c_1 a_2|}}$ donnant :

$$\gamma_{11} = \sqrt{\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|}}.$$

Alors, la condition $\gamma_{11} < 1$ est vérifiée si seulement si $\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|} < 1$. En appliquant le Théorème 2.4, un temps de séjour de l'ordre de $O(\varepsilon)$ suffit pour stabiliser les dynamiques.

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, les trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45) sont stables et convergent vers le point d'équilibre zéro pour toute loi de commutation. Dans ce cas, aucune condition temporelle sur l'intervalle de temps entre deux événements n'est requise. Ce résultat est illustré par la Figure 2.1 ayant les deux variétés lentes relatives au système (2.44)-(2.45) comme suit :

$$c_1 u(t) + d_1 v(t) = 0 \quad \text{et} \quad a_2 u(t) + b_2 v(t) = 0.$$

Par ailleurs, l'inégalité $\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|} < 1$ indique que la pente de la variété lente associée au

premier mode de commutation (2.44) est plus petite que celle attribuée à la variété lente du second mode de commutation (2.45).

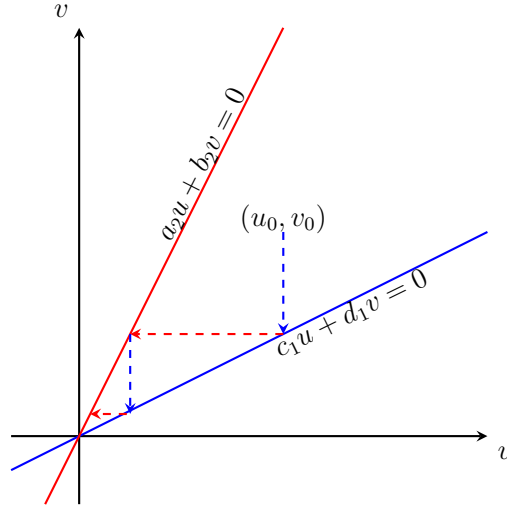


FIGURE 2.1: La variété lente associée à (2.44) et celle associée à (2.45) sont représentées respectivement en bleu et en rouge pour $\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|} < 1$. Les trajectoires du système à commutation sont représentées en lignes discontinues pour une condition initiale (u_0, v_0) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Inversement, la condition $\gamma_{11} > 1$ est vérifiée si et seulement si $\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|} > 1$, ceci est équivalent à considérer que la pente de la variété lente associée au second mode de commutation (2.45) est plus petite que celle attribuée à la variété lente du premier mode de commutation (2.44). Dans ce cas, le temps de séjour minimum est donné par le Théorème 2.1, qui est de l'ordre de $\frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Par conséquent, en absence de cette condition, les variétés lentes des dynamiques (2.44)-(2.45) données par la Figure 2.2 sont instables et divergent dans le cas des commutations arbitraires (sous aucune contrainte temporelle ou avec un temps de séjour minimum de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$).

2.4.2 Exemples numériques

Dans ce paragraphe, nous évaluons numériquement les résultats de ce chapitre. D'après les théorèmes énoncés dans la Section 2.3, la borne sur le temps de séjour minimum stabilisant les dynamiques hybrides singulièrement perturbées dépend de la valeur du paramètre γ_{11} . Les exemples numériques traitent deux choix différents de γ_{11} et correspondent à un résultat distinct parmi les Théorèmes 2.1-2.5. Ensuite, nous illustrons les résultats obtenus pour un exemple numérique relatif à la sous-section 2.3.5 traitant le cas où les commutations engendrent également des changements des dimensions du vecteur d'état.

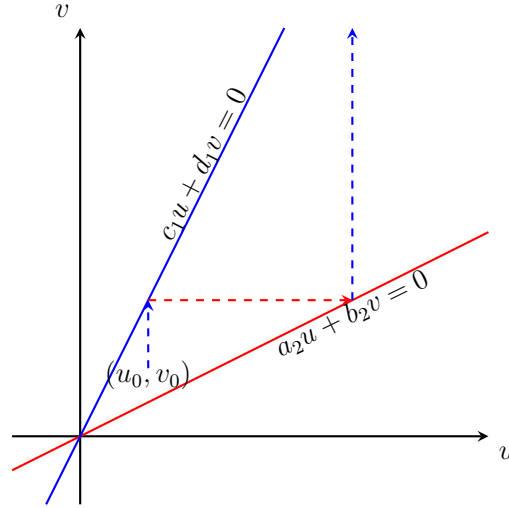


FIGURE 2.2: La variété lente associée à (2.44) et celle associée à (2.45) sont représentées respectivement en bleu et en rouge pour $\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|} > 1$. Les trajectoires du système à commutation sont représentées en lignes discontinues pour une condition initiale (u_0, v_0) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 1 : $\gamma_{11} < 1$

Soient les dynamiques (2.44)-(2.45) données par les matrices suivantes :

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -2.5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

L'application numérique des inégalités (2.47)

$$\begin{cases} a_1 - \frac{b_1 c_1}{d_1} = -1.25 < 0 & d_1 = -2 < 0, \\ d_2 - \frac{b_2 c_2}{a_2} = -1.4 < 0 & a_2 = -2.5 < 0. \end{cases}$$

satisfaient les conditions de l'hypothèse 2.3.

En se référant à l'équation (2.48), nous fixons les paramètres $\lambda_s = 1.25$ et $\lambda_f = 2$. Nous obtenons $q = \sqrt{\frac{Q_s^2}{Q_s^1}} = \sqrt{\frac{|d_1 b_2|}{|c_1 a_2|}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\gamma_{11} = \sqrt{\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Par conséquent, nous nous plaçons dans le cas $\gamma_{11} < 1$ et il convient d'appliquer le Théorème 2.4 pour déduire la borne sur le temps de séjour minimum requis qui est de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Nous choisissons une valeur de $\varepsilon = 10^{-3}$ et les coordonnées du vecteur des états initiaux $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$. La valeur de la borne sur le temps de séjour minimum donnée par le Théorème 2.4 est de $6.1679 \cdot 10^{-4} = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

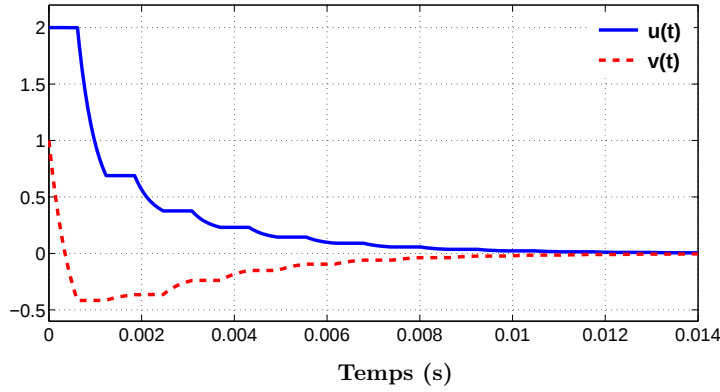


FIGURE 2.3: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45)
avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 6.1679 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$

Les trajectoires des variables u et v du système (2.44)-(2.45) représentées dans la Figure 2.3 montrent qu'un intervalle de temps de l'ordre de ε séparant deux commutations consécutives, qui tend vers zéro quand ε tend vers zéro, ne déstabilise pas le système.

Nous évaluons par la suite, l'évolution des dynamiques au fil des commutations dans le plan de variétés lentes données par :

$$\begin{cases} -u(t) - 2v(t) = 0 \\ -2.5u(t) - 2v(t) = 0. \end{cases}$$

La trajectoire du système dans le plan (u, v) pour un signal de commutation périodique de période $6.1679 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$ est illustrée par la Figure 2.4.

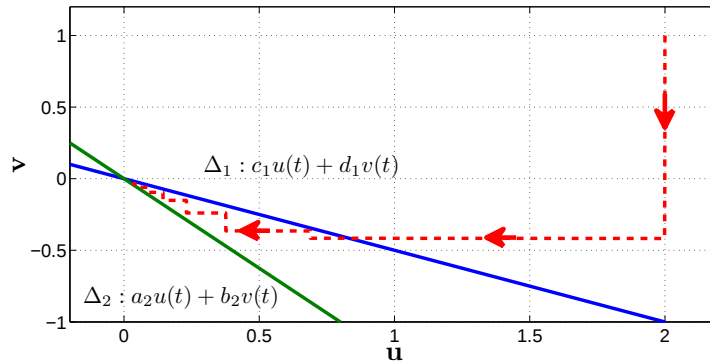


FIGURE 2.4: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45) dans le plan (u, v)
avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 6.1679 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$

La trajectoire des dynamiques (2.44)-(2.45) commute périodiquement entre les deux

droites représentant les deux variétés lentes avant de converger vers l'origine. Nous remarquons également que, la période de commutation choisie ne permet aux trajectoires ni rester ni de glisser sur une variété donnée et ceci est dû aux commutations rapides. En effet, le temps entre deux commutations est de l'ordre de 10^{-4} sec . Néanmoins, la stabilité est assurée pour toute loi de commutation arbitraire.

Nous illustrons dans les figures qui suivent, le fait qu'en prenant des périodes temporelles plus larges, la stabilité du système est maintenue et les trajectoires du système ont tendance à rester plus longtemps sur une variété, pour ensuite commuter vers la variété suivante et glisser jusqu'à atteindre le point d'équilibre.

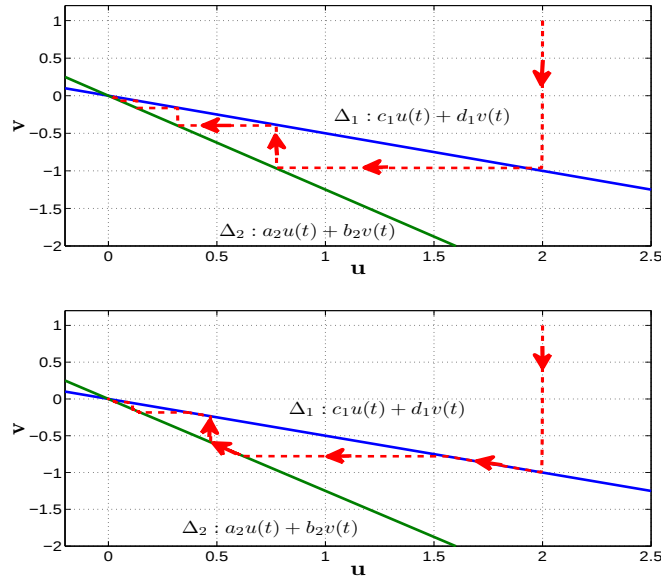


FIGURE 2.5: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45) dans le plan (u, v) avec :
En haut : $t_{k+1} - t_k = \tau = 2 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$, En bas : $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.2 \text{ sec}$

Exemple 2 : $\gamma_{11} > 1$

Considérons un autre choix des matrices d'états A_1, A_2 dans le système d'équations (2.44)-(2.45) :

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2.5 & -4 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Les inégalités (2.47) vérifient l'hypothèse 2.3 :

$$\begin{cases} a_1 - \frac{b_1 c_1}{d_1} = -1.75 < 0, & d_1 = -2 < 0, \\ d_2 - \frac{b_2 c_2}{a_2} = -1.1 < 0, & a_2 = -2.5 < 0. \end{cases}$$

La définition (2.48) donne $\lambda_s = 1.1$ et $\lambda_f = 2$ et ainsi $q = \sqrt{\frac{Q_s^2}{Q_f^2}} = \sqrt{\frac{|d_1 b_2|}{|c_1 a_2|}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$.

De plus, on a $\gamma_{11} = \sqrt{\frac{|c_1 b_2|}{|d_1 a_2|}} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$ d'après l'équation (2.49). Nous nous retrouvons ainsi dans le cas où $\gamma_{11} > 1$ et le Théorème 2.1 accorde un temps de séjour minimum de la forme $\frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} + \mathcal{O}(\varepsilon)$. L'application numérique fournit une valeur de $\frac{\ln(\gamma_{11})}{\lambda_s} = 0.40 \text{ sec}$. A cette constante se rajoute le terme en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ qui prend la valeur de $6 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$.

Soit la condition initiale $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, nous illustrons l'évolution des dynamiques au fil des commutations dans le plan des variétés lentes données par :

$$\begin{cases} -3u(t) - 2v(t) = 0 \\ -2.5u(t) - 4v(t) = 0. \end{cases}$$

Afin de mettre l'accent sur l'indispensabilité d'un temps de séjour suffisamment large pour assurer la stabilité des dynamiques, nous simulons le système en prenant un intervalle de temps plus petit séparant les commutations de la valeur de $\tau = 0.16 \text{ sec}$.

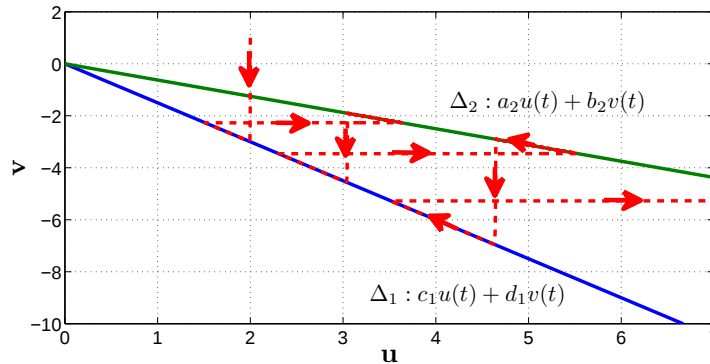


FIGURE 2.6: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45) dans le plan (u, v) avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.16 \text{ sec}$

La Figure 2.6 illustre les trajectoires du système au fil du temps. La période de commutation choisie n'est pas négligeable et permet aux dynamiques de rester durant un

certain intervalle de temps sur une variété avant de passer au second mode de fonctionnement. Mais, il s'avère que cet intervalle temporel est insuffisant pour stabiliser les dynamiques au fil des événements et la divergence des trajectoires est évidente.

Par ailleurs, un temps de séjour minimum $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.406 \text{ sec}$ est nécessaire pour la stabilisation comme le montre les Figures 2.7 et 2.8.

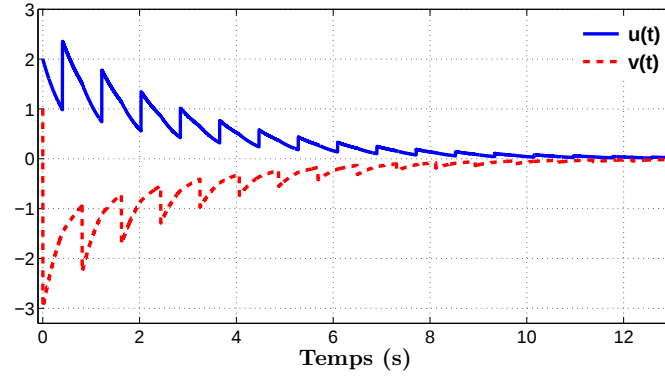


FIGURE 2.7: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45) avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.406 \text{ sec}$

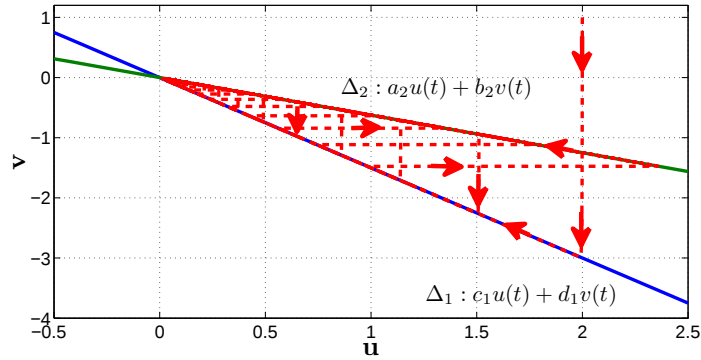


FIGURE 2.8: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45) dans le plan (u, v) avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.406 \text{ sec}$

Afin de clarifier le comportement des dynamiques dans le plan (u, v) , nous simulons dans la Figure 2.9 l'évolution des dynamiques pour deux commutations consécutives.

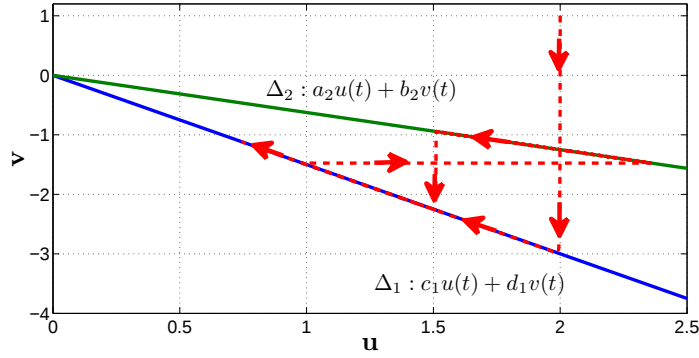


FIGURE 2.9: Agrandissement de la Figure 2.8 en considérant deux commutations

Exemple 3 : Cas des dimensions variantes dans le temps

Considérons le système (2.1)-(2.2) qui commute entre deux modes de fonctionnement $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ décrits par les équations (2.40)-(2.41) avec :

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -5.5 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les dynamiques discrètes du système sont régies par le signal d'impulsion ν_k dans l'ensemble $\mathcal{J} = \{1, 2\}$ tels que :

$$\mathbf{J}^1 = \begin{pmatrix} 0.4 & -2 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^2 = \mathbf{I}_4.$$

Une première étape consiste à réécrire les dynamiques sous la forme (2.42)-(2.43) qui aboutit à un système augmenté d'ordre 4. Par la suite, nous procédons au changement de variables (2.5) relatif à chaque mode de fonctionnement par la définition des matrices de passage :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et nous introduisons les matrices (2.6) qui permettent la réécriture des dynamiques sous la forme (2.7)-(2.8).

Ce changement de variable ramène l'étude du système (2.1)-(2.2) dont les dimensions

des variables varient à chaque instant de commutation, à celle du système présenté dans la Section 2.3.

Ayant la forme singulièrement perturbée classique du système, nous procédons à la séparation des échelles de temps et le calcul du temps de séjour minimum.

D'abord, nous vérifions les conditions de l'hypothèse 2.3 avec

$$\begin{aligned} A_0^1 &= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & A_0^2 &= \begin{pmatrix} -4.33 & 6.83 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \\ A_{22}^1 &= \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, & A_{22}^2 &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En fixant le paramètre des perturbations singulières $\varepsilon = 10^{-3}$ et les paramètres $\lambda_s = 1$, $\lambda_f = 0.5$ et $\lambda = 2$, nous nous retrouvons dans le cas où $\gamma_{11} = 1$ et $\gamma_{12} = 0$.

En se référant au résultat du Théorème 2.3, la borne inférieure qui doit être satisfaite par l'intervalle de temps séparant deux événements consécutifs est de $\tau = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$.

Prenant une condition initiale $(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) = (2, -3, 4, -2)$, la figure qui suit illustre l'évolution des dynamiques du système décrit précédemment.

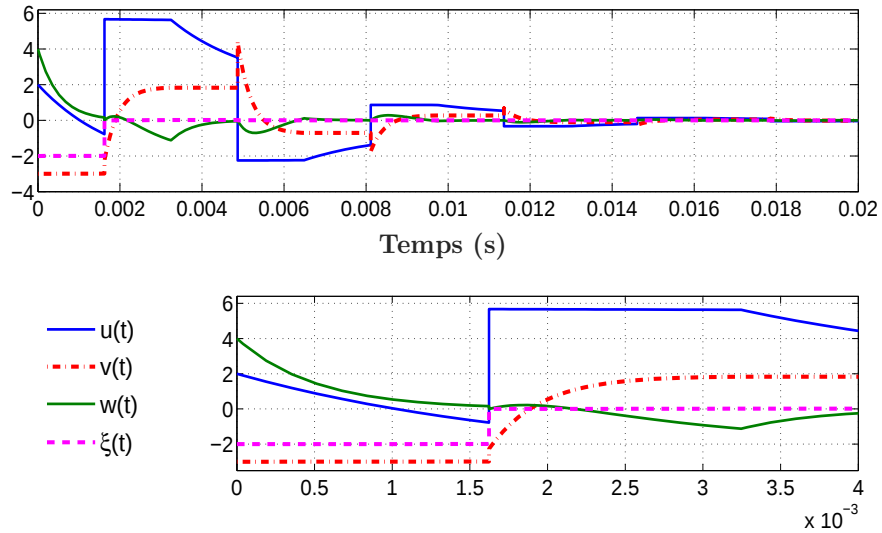


FIGURE 2.10: Trajectoires des dynamiques (2.40)-(2.41)
avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$.

A l'instant $t_k = \tau$, les dynamiques subissent simultanément une commutation du mode de fonctionnement (2.40) vers le mode (2.41) accompagnée d'une impulsion régie par la matrice de saut $\mathbf{J}^1$. Ainsi, les variables u et v changent de nature et les dynamiques des variables w et ξ , qui constituaient des variables artificielles durant le premier mode, sont

régies par la matrices A^2 durant le second mode. A l'instant $t_k = 2\tau$, une commutation se produit faisant intervenir à nouveau le mode 1 décrit par la matrice $\text{diag}(A^1, -\lambda I_2)$ relative à la dynamique continue (2.42). Le comportement ainsi illustré montre la convergence des dynamiques au fil des événements pour un temps de séjour $\tau = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$.

2.4.3 Discussion

L'étude de stabilité établie dans ce chapitre invoque un choix rigoureux des différents paramètres réduisant ainsi le conservatisme qui peut affecter la précision de la borne obtenue sur le temps de séjour minimum. Dans un premier temps, nous revenons sur le conservatisme et nous montrons numériquement qu'un temps de séjour légèrement inférieure à la borne obtenue par l'un des Théorèmes 2.1-2.5 pourrait être valide pour la stabilisation. En second lieu, nous nous intéressons aux deux termes composant le temps de séjour minimum résultant et nous évaluons leur nécessité dans l'analyse de la classe des systèmes hybrides singulièrement perturbés étudiée.

2.4.3.1 Sources de conservatisme

Nous soulignons que les majorations et le choix des paramètres λ_s , λ_f , Q_s^i , Q_f^i dans (2.21) fait partie des sources de conservatisme. Nous avons montré à travers les exemples 1 et 2 que ces paramètres peuvent être calculés à partir des équations (2.47) et (2.48). Pourtant, d'après la simulation des dynamiques de l'exemple 2 ayant les mêmes valeurs de ε et x_0 et sous une loi de commutation périodique de période $t_{k+1} - t_k = 0.37 \text{ sec}$, plus petite que celle énoncée par le Théorème 2.1, les trajectoires des dynamiques sont convergentes.

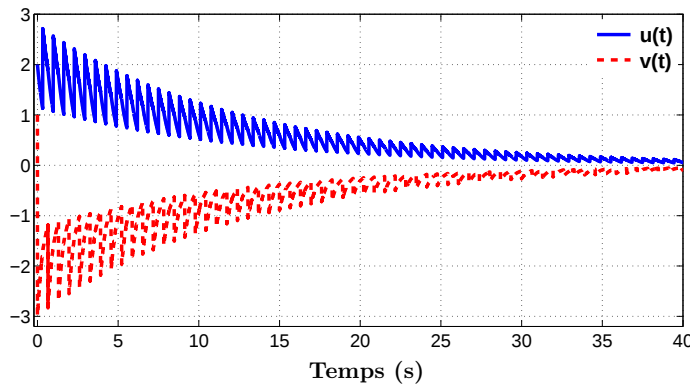


FIGURE 2.11: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45)
avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.37 \text{ sec}$

Or, en atténuant la période des commutations à $t_{k+1} - t_k = 0.3 \text{ sec}$, la stabilité des dynamiques n'est plus garantie comme le montre la Figure 2.12.

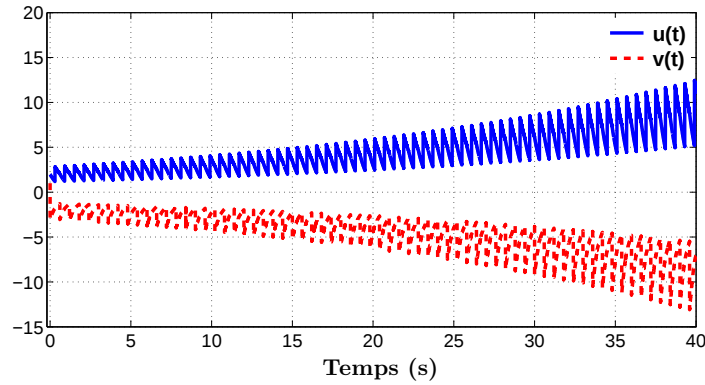


FIGURE 2.12: Trajectoires des dynamiques (2.44)-(2.45) avec $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.3 \text{ sec}$

Cette analyse numérique montre que la borne sur le temps de séjour minimum donnée par les Théorèmes 2.1-2.5, garantit la stabilité asymptotique globale des dynamiques hybrides singlièrement perturbées étudiées mais que, dans certains cas, la stabilité peut être assurée pour un temps de séjour légèrement inférieur à cette borne. Cette situation est plus prévisible lorsque les paramètres en question sont choisis aléatoirement.

2.4.3.2 Temps de séjour de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$

Revenons sur l'expression du temps de séjour minimum qui est :

$$\tau^* > \max\{\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon), \mathcal{O}(\varepsilon)\}.$$

Nous avons vu précédemment que le terme en $\mathcal{O}(1)$ est nécessaire pour stabiliser les dynamiques du modèle réduit. Cette valeur, non négligeable par rapport à ε est essentielle pour la stabilisation du système (2.14)-(2.15) et ainsi pour la stabilisation de tout système linéaire impulsif à commutation dont les dynamiques évoluent selon une seule échelle temporelle. D'autres part, les dynamiques rapides à leurs tour, nécessitent un temps de séjour de l'ordre du paramètre des perturbations singulières.

Dans l'exemple qui suit, nous évoquons la nécessité de ce terme infiniment petit dans l'analyse de stabilité de la classe de systèmes étudiée.

Nous reprenons le système singulièrement perturbé à commutation traité dans [33] :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A^{\sigma_k} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.52)$$

où le signal de commutation est $\sigma_k \in \mathcal{I} = \{1, 2\}$ et les matrices d'état sont données par :

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour assurer la conformité à l'exemple du [33], nous admettons que la nature des variables est inchangée telle que la matrice $J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k^k} \sigma_k} = I_2$ et nous nous appuyons sur les résultats de la Section 2.3 pour en déduire les conditions suffisantes de stabilité asymptotique globale du système (2.52). En premier lieu, nous nous assurons que l'hypothèse 2.3 est valide.

En effet, les matrices $A_0^1 = A_0^2 = -1$ et $A_{22}^1 = A_{22}^2 = -1$. D'autre part, nous supposons que les dynamiques lentes et rapides admettent une fonction de Lyapunov commune donnée par :

$$\begin{cases} W_s(t) = \sqrt{x(t)^\top x(t)} \\ W_f(t) = \sqrt{y(t)^\top y(t)} \end{cases}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ceci revient à considérer les paramètres $Q_s^1 = Q_s^2 = 1$ et $Q_f^1 = Q_f^2 = 1$ dans (2.20) et nous procédons au changement de variable (2.9) avec les matrices de passage suivantes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la définition (2.13), la dynamique discrète est régie par les matrices de saut :

$$R^{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous nous retrouvons dans le cas de $\gamma_{11} = 1$ et $\gamma_{12} = 0$ et l'application du Théorème 2.3 fournit une condition sur le temps de séjour de l'ordre de ε .

Ce résultat est prévisible selon l'analyse de stabilité établie dans la Section 2.3. Cependant, la détermination de la valeur de τ vient renforcer les résultats existants dans la littérature en donnant une valeur plus raffinée du temps requis entre deux commutations. En effet, les auteurs de [33] ont évoqué le fait que la stabilité des sous-systèmes

n'est pas une condition suffisante pour garantir la stabilité du système commutatif complet et ont également établi une condition de temps de séjour minimal de la valeur de $\tau = 0.7001 \text{ sec}$ pour $\varepsilon = 0.076$.

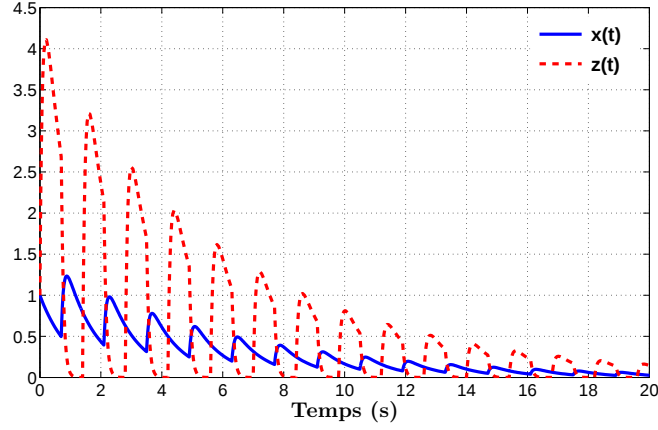


FIGURE 2.13: Trajectoires des dynamiques (2.52) avec des commutations périodiques de période $t_{k+1} - t_k = \tau = 0.7001 \text{ sec}$.

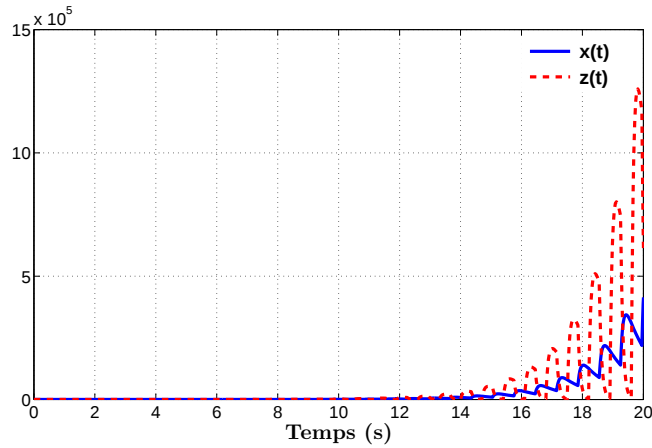


FIGURE 2.14: Trajectoires des dynamiques (2.52) avec des commutations périodiques de période $t_{k+1} - t_k = 0.35 \text{ sec}$ inférieure à τ .

Or, les résultats que nous présentons dans ce travail appréhendent une relation entre la borne sur le temps de séjour et la différence des échelles de temps. Ceci est illustré par les valeurs numériques obtenues par le Théorème 2.3 pour différentes valeurs de ε :

ε	0.076	$7.6 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$7.6 \cdot 10^{-4}$
$\tau \text{ (sec)}$	0.588	0.106	$1.43 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$

Remarquons que pour $\varepsilon = 0.076$, le Théorème 2.3 donne une valeur de temps de séjour de 0.588 sec . En outre, il est clair que plus ε est petit plus la valeur du temps de séjour

minimum est petite. Ceci est en accord avec l'approximation de la borne établie dans le Théorème 2.3 et qui assure la convergence des dynamiques à commutation (2.52). De plus, ceci révèle que tant que les différentes dynamiques du système admettent une fonction de Lyapunov commune et tant que les dynamiques découplées sont stables, la convergence globale au fil des commutations "requiert" un temps de séjour minimum infiniment petit voire négligeable quand ε tend vers 0.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de stabilité des systèmes hybrides singulièrement perturbés a été traité. Dans un premier temps, nous avons présenté une approche innovante de modélisation des systèmes dont la nature de ses variables est susceptible de changer au cours du temps. L'idée déployée a été de mettre en œuvre les différents outils de la théorie des perturbations singulières pour réécrire le système sous une forme classique. Nous avons mis l'accent sur la contribution majeure de cette modélisation qui présente une classe générale de systèmes englobant plusieurs sous-classes de systèmes singulièrement perturbés.

En second lieu, nous avons exploité le modèle obtenu pour l'analyser et montrer comment obtenir des conditions suffisantes en termes de temps de séjour minimum pour assurer sa stabilité. Nous avons développé les résultats principaux pour garantir la stabilité à travers la valeur de la borne que doit satisfaire l'intervalle de temps séparant deux événements consécutifs. Nous avons tenu, tout au long de cette étude, à rappeler le lien entre la classe des systèmes hybrides singulièrement perturbés étudiée et les différentes sous-classes qui en découlent et nous avons présenté les approximations à établir pour particulariser les résultats aux systèmes considérés.

Le schéma qui suit récapitule les différentes étapes de l'analyse proposée.

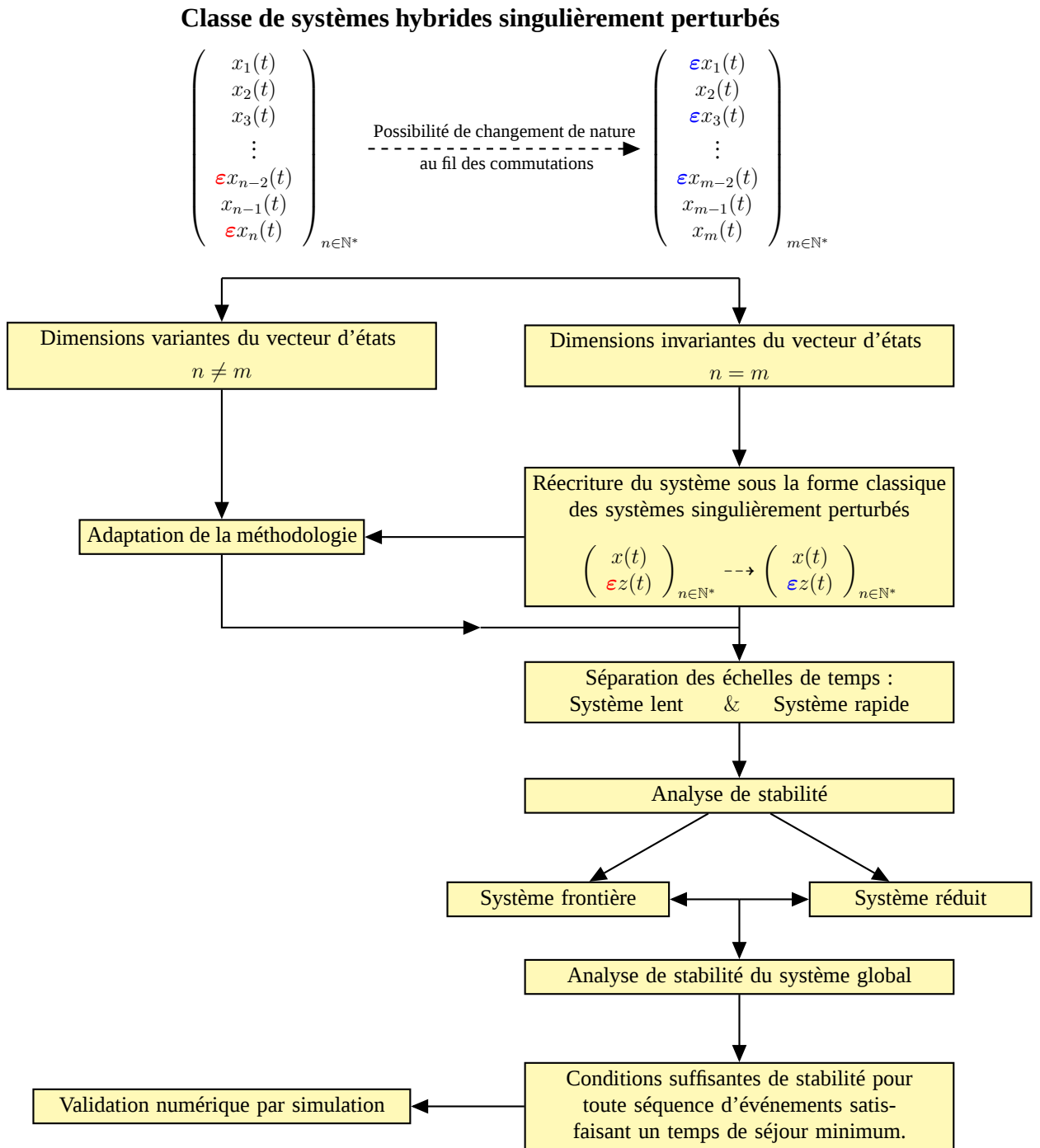


FIGURE 2.15: Graphe décrivant la méthodologie adoptée pour l'analyse de la classe de systèmes hybrides singulièrement perturbés considérée.

Chapitre 3

Un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe stabilisant pour des systèmes hybrides linéaires singulièrement perturbés

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la recherche de séquences d'événements stabilisantes pour le système hybride singulièrement perturbé suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A^{\sigma_k} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} x(t_k) \\ z(t_k) \end{pmatrix} = J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \begin{pmatrix} x(t_k^-) \\ z(t_k^-) \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 1 \quad (3.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ désignent respectivement les variables lentes et rapides et $0 = t_0 < t_1 < \dots$ décrit une séquence strictement croissante d'instants discrets. Les variables discrètes $\sigma_k \in \mathcal{I}$ et $\nu_k \in \mathcal{J}$ représentent respectivement les lois de commutation et d'impulsion avec $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ les ensembles d'indices correspondants. La matrice $J^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_z}$ conditionne l'impulsion donnée aux dynamiques et la nouvelle valeur qui leur est attribuée suite à une commutation, une impulsion ou les deux simultanément. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^{σ_k} décrit les dynamiques continues relatives au mode de fonctionnement σ_k activé durant l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$.

Dans le Chapitre 2, les résultats montrent que la stabilité du système singulièrement

perturbé (3.1)-(3.2) requiert un temps de séjour minimum satisfaisant :

$$\tau^* > \max\{\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon), \mathcal{O}(\varepsilon)\}.$$

Nous avons également mis l'accent sur l'importance du terme $\mathcal{O}(1)$ relatif à la stabilisation du modèle réduit associé à (3.1)-(3.2). La question à laquelle nous tâchons de répondre est la suivante : quelles restrictions supplémentaires doit-on imposer sur la succession des événements afin de garantir la stabilité du système en présence d'un temps de séjour négligeable, de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$?

Le problème ainsi formulé consiste à étendre les résultats du Chapitre 2 par la construction de séquences d'événements stabilisantes. La synthèse de telle séquence consiste à développer une loi de commutations $(\sigma_k, k \in \mathbb{N})$ d'un mode à un autre et une loi d'impulsion $(\nu_k, k \in \mathbb{N})$ qui garantissent la stabilité asymptotique globale de la classe de systèmes hybrides singulièrement perturbés considérée. En d'autres termes, nous revenons sur les résultats de la Section 2.3 et nous construisons une suite d'événements admissibles qui relâche la contrainte du temps de séjour minimum.

En un premier temps, nous attribuons une représentation graphique aux séquences d'événements au sein d'un système à commutation impulsif. Ensuite, nous établissons l'analyse de stabilité de cette classe de système fondée sur les résultats du chapitre précédent pour en déduire une séquence d'événements admissibles qui stabilise les dynamiques singulièrement perturbées (3.1)-(3.2). Par la suite, nous développons la méthodologie à adopter pour traiter différentes classes particulières de systèmes et nous validons l'approche proposée par un exemple illustratif.

3.2 Représentation graphique des systèmes à commutation impulsif

Nous appelons "transition" tout événement discret qui se produit à l'instant t_k .

Pour exemple, une commutation d'un mode $i \in \mathcal{I}$ à un mode $i' \in \mathcal{I}$ accompagnée d'un saut $j \in \mathcal{J}$ est appelée transition. Pour alléger les notations et pour assurer la clarté de l'analyse, nous nous proposons de représenter ces transitions par un graphe ayant $|\mathcal{I}|$ sommets relatifs aux différents modes de fonctionnement. Les liaisons qui relient un sommet à un autre peuvent être associées à deux types d'événements. Le premier décrit une commutation d'un mode i à un mode i' accompagnée d'une impulsion relative à

l'une des matrices de saut J^ν , $\nu \in \mathcal{J}$. Ce type d'événements est représenté par des arcs dirigés dont le nombre ne peut excéder $|\mathcal{J}|$ arcs dans le graphe. D'autre part, le second type d'événements est relatif aux commutations, telles que la matrice de saut $J^1 = \mathbf{I}$ et l'arc associé décrit le passage du sommet i au sommet i' . De plus, le graphe peut contenir des arcs en boucles, au plus $|\mathcal{J}| - 1$ boucles relatives aux impulsions décrites par J^ν , $\nu \in \mathcal{J} \setminus \{1\}$ et pour lesquelles le mode de fonctionnement reste inchangé.

Exemple 3.1. Nous proposons un exemple qui permet de mieux illustrer la construction du graphe décrit précédemment. Soit les ensembles des indices $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{J} = \{1, 2\}$. Les arcs représentant les événements purement commutatifs ($J^1 = \mathbf{I}$) sont illustrés par la Figure 3.1 en bleu. Quant aux événements combinés, où une commutation et une impulsion se produisent simultanément ($J^2 \neq \mathbf{I}$), ils sont illustrés par des arcs rouges. Enfin, les arcs ayant les mêmes extrémités désignent les événements impulsifs.

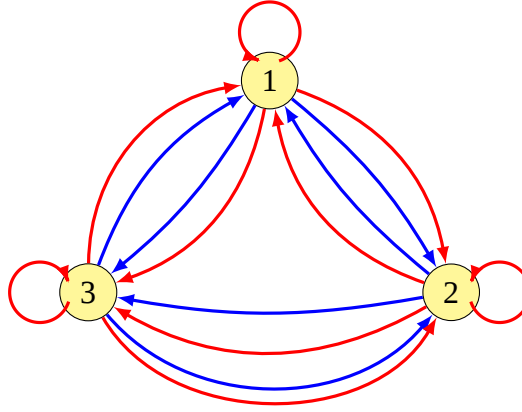


FIGURE 3.1: Schéma illustratif de toutes les transitions possibles associées au système hybride (3.1)-(3.2) ayant trois modes de commutation et deux types d'impulsions possibles. Les arcs en bleu décrivent les événements associés à $J^1 = \mathbf{I}$ et ceux en rouge sont associés à $J^2 \neq \mathbf{I}$.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la recherche du sous-graphe des transitions possibles qui conservent la stabilité du système (3.1)-(3.2). Précisément, nous recherchons les séquences qui, en présence d'un temps de séjour de l'ordre de $O(\varepsilon)$, stabilisent le système hybride singulièrement perturbé. Le sous-graphe qui en découle est nommé $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe.

Un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe possible du graphe de l'exemple 3.1 peut être représenté par la figure suivante.

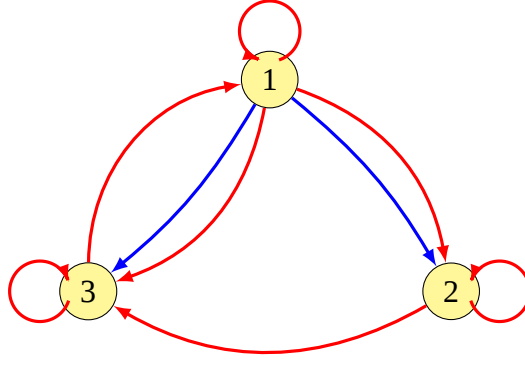


FIGURE 3.2: Schéma illustratif d'un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe associé au système hybride (3.1)-(3.2) ayant trois modes de commutation et deux types d'impulsions possibles. Les arcs en bleu décrivent les événements associés à $J^1 = \mathbf{I}$ et ceux en rouge sont associés à $J^2 \neq \mathbf{I}$.

Remarque 3.1. Dans la Figure 3.2, le sous-graphe induit est couvrant et fortement connexe. Il s'agit d'un sous-graphe qui contient tous les sommets du graphe initial mais généralement, le $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe induit est un sous-graphe couvrant mais pas nécessairement fortement connexe. En effet, étant donné un mode initial $i \in \mathcal{I}$ et sous la contrainte temporelle séparant deux événements consécutifs $\mathcal{O}(\varepsilon)$, l'analyse révélera que certaines transitions $i' \neq i$, $i' \in \mathcal{I}$ sont déstabilisantes et ainsi suspendues du graphe.

3.3 Analyse du $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe stabilisant

Nous suivons la méthodologie d'analyse proposée dans la Section 2.3 et nous réécrivons les dynamiques (3.1)-(3.2) en utilisant le changement de variable (2.9) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^{\sigma_k} & B_1^{\sigma_k} \\ \varepsilon B_2^{\sigma_k} & A_{22}^{\sigma_k} + \varepsilon B_3^{\sigma_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{pmatrix} = R^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} \begin{pmatrix} x(t_k^-) \\ y(t_k^-) \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 1 \quad (3.4)$$

où pour tout $i, i' \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$, les matrices $A_0^i, B_1^i, B_2^i, B_3^i$ sont données par (2.11) et la matrice $R^{i \xrightarrow{j} i'}$ est définie par (2.13).

Nous admettons que les matrices A_0^i et A_{22}^i soient telle que l'hypothèse 2.3 est vérifiée pour tout $i \in \mathcal{I}$.

Afin d'accéder aux transitions stabilisantes possibles indépendamment, nous revenons sur la définition des $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ énoncée dans (2.21) pour attribuer à chaque événement une composante qui lui est propre. Pour ce faire, pour chaque $i \in \mathcal{I}$ nous redéfinissons

$$\begin{aligned} b_1^i &= \|(Q_s^i)^{\frac{1}{2}} B_1 (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \\ b_2^i &= \|(Q_f^i)^{\frac{1}{2}} B_2 (Q_s^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \\ b_3^i &= \|(Q_f^i)^{\frac{1}{2}} Q_f B_3 (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}}\|. \end{aligned}$$

En outre, soit ε_1^i donné par

$$\varepsilon_1^i = \frac{\lambda_f}{\frac{(b_1^i + b_2^i)^2}{4\lambda_s} + b_3^i} \quad (3.5)$$

alors la Proposition 2.1 implique que le $i^{\text{ème}}$ sous-système (3.3) est stable pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^i]$. De plus, soit $\varepsilon_2 \in (0, \min(\varepsilon_1^i)] \cap (0, \frac{\lambda_f}{\lambda_s})$ nous introduisons

$$\beta_1^i = \frac{\sqrt{(b_2^i)^2 + (b_3^i)^2}}{\lambda_f}, \quad \beta_2^i = \frac{b_1^i}{\lambda_f - \varepsilon_2 \lambda_s}, \quad \beta_3^i = \frac{b_1^i \beta_1^i}{\lambda_s}.$$

Nous associons aux dynamiques (3.3)-(3.4) les fonctions de Lyapunov découplées (2.20) et nous adaptons le résultat du Lemme 2.1 aux définitions précédentes :

Lemme 3.1. *Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ et soit $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ pour une séquence donnée d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$. Supposons que l'hypothèse 2.3 est vérifiée. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} W_s(t_{k+1}^-) &\leq W_s(t_k)(e^{-\lambda_s \tau_k} + \varepsilon \beta_3^{\sigma_k}) + W_f(t_k) \varepsilon (\beta_2^{\sigma_k} + \beta_3^{\sigma_k}) \\ W_f(t_{k+1}^-) &\leq W_s(t_k) \varepsilon \beta_1^{\sigma_k} + W_f(t_k) (e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau_k} + \varepsilon \beta_1^{\sigma_k}). \end{aligned}$$

L'unique différence du Lemme 3.1 par rapport au Lemme 2.1 est que les nouvelles définitions des β sont dépendantes du mode et contribuent ainsi à la réduction du degré de conservatisme évoqué dans la Section 2.4.3.

Ceci nous amène à redéfinir les paramètres suivants, pour tout $i, i' \in \mathcal{I}$ et $j \in \mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^{i \rightarrow i'} &= \|(Q_s^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{11}^{i \rightarrow i'} (Q_s^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \\ \gamma_{12}^{i \rightarrow i'} &= \|(Q_s^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{12}^{i \rightarrow i'} (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \\ \gamma_{21}^{i \rightarrow i'} &= \|(Q_f^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{21}^{i \rightarrow i'} (Q_s^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \\ \gamma_{22}^{i \rightarrow i'} &= \|(Q_f^{i'})^{\frac{1}{2}} R_{22}^{i \rightarrow i'} (Q_f^i)^{-\frac{1}{2}}\|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pareillement au lemme précédent, nous réécrivons le Lemme 2.2 de la manière suivante :

Lemme 3.2. *Pour toute séquence d'événements $(t_k)_{k \geq 0}$ et pour tout $k \geq 1$,*

$$\begin{aligned} W_s(t_k) &\leq \gamma_{11}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} W_s(t_k^-) + \gamma_{12}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} W_f(t_k^-) \\ W_f(t_k) &\leq \gamma_{21}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} W_s(t_k^-) + \gamma_{22}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} W_f(t_k^-). \end{aligned}$$

La preuve du Lemme 3.2 est identique à celle du Lemme 2.2, seules les variables $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ sont remplacées respectivement par $\gamma_{11}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k}, \gamma_{12}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k}, \gamma_{21}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k}, \gamma_{22}^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k}$. Les matrices définies par (2.22) deviennent des matrices paramétrées en $\tau > 0, i \in \mathcal{I}$ et $j \in \mathcal{J}$ comme suit :

$$M_\tau^i = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_s \tau} + \varepsilon \beta_3^i & \varepsilon(\beta_2^i + \beta_3^i) \\ \varepsilon \beta_1^i & e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau} + \varepsilon \beta_1^i \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} & \gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} \\ \gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} & \gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous ajustons le Lemme 2.3 caractérisant l'évolution des fonctions de Lyapunov aux instants discrets.

Lemme 3.3. *Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ et $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ pour une séquence d'événements donnée $(t_k)_{k \geq 0}$. Supposons que l'hypothèse 2.3 est vérifiée, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{pmatrix} W_s(t_k) \\ W_f(t_k) \end{pmatrix} \leq \Gamma^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} M_{\tau_k}^{\sigma_{k-1}} \begin{pmatrix} W_s(t_{k-1}) \\ W_f(t_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

La matrice $\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i$ caractérise le comportement des dynamiques (3.1)-(3.2) quand un événement $i \xrightarrow{j} i'$ a lieu à l'instant t_k satisfaisant la durée temporelle de τ secondes requise dans le mode i avant de permuter vers le mode i' . A partir de l'expression de cette matrice, nous étudions dans la suite les événements $i \xrightarrow{j} i'$ qui rendent la matrice $\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i$ Schur pour tout $\tau = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

En se référant à l'analyse de stabilité établie dans la Section 2.3, la contrainte temporelle sur le temps de séjour est dans le voisinage de ε dans deux cas de figures traités dans les sous-sections 2.3.2 et 2.3.3. Alors, la recherche de la séquence stabilisante se limite aux événements appartenant à l'ensemble défini par :

$$\bar{\mathcal{E}} = \left\{ i \xrightarrow{j} i' \mid (\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} < 1) \vee \left((\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} = 1) \wedge (\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} = 0) \right) \right\}$$

Proposition 3.1. *Sous l'hypothèse 2.3, il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, la stabilisation des dynamiques (3.3)-(3.4) requiert un temps de séjour minimum $\tau = \eta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ qui rend la matrice $\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i$ Schur $\forall i \xrightarrow{j} i' \in \bar{\mathcal{E}}$.*

Preuve. Remarquons que

$$\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\lambda_s \tau} + \varepsilon \delta_1^{i \xrightarrow{j} i'} & \gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau} + \varepsilon \delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} \\ \gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\lambda_s \tau} + \varepsilon \delta_3^{i \xrightarrow{j} i'} & \gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau} + \varepsilon \delta_4^{i \xrightarrow{j} i'} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_1^{i \xrightarrow{j} i'} &= \gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} \beta_3^i + \gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} \beta_1^i, \\ \delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} &= \gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} (\beta_2^i + \beta_3^i) + \gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} \beta_1^i, \\ \delta_3^{i \xrightarrow{j} i'} &= \gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} \beta_3^i + \gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} \beta_1^i, \\ \delta_4^{i \xrightarrow{j} i'} &= \gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} (\beta_2^i + \beta_3^i) + \gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} \beta_1^i. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La matrice positive $\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i$ n'est Schur que si seulement si il existe $p \in \mathbb{R}_+^2$, tel que

$$(\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i)^\top p < p.$$

Supposons que p est sous la forme du vecteur $(1, a)^\top$ avec $a > 0$, l'inégalité $(\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i)^\top p < p$ s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\lambda_s \tau} + \varepsilon \delta_1^{i \xrightarrow{j} i'} + a \gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\lambda_s \tau} + a \varepsilon \delta_3^{i \xrightarrow{j} i'} < 1 \\ \gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau} + \varepsilon \delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} + a \gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'} e^{-\frac{\lambda_f}{\varepsilon} \tau} + a \varepsilon \delta_4^{i \xrightarrow{j} i'} < a \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \tau > \frac{1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} + a \gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'}}{1 - \varepsilon \delta_1^{i \xrightarrow{j} i'} - a \varepsilon \delta_3^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) \\ \tau > \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} + a \gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}}{a - \varepsilon \delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - a \varepsilon \delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) \end{cases}. \tag{3.8}$$

Nous nous apercevons que les termes du coté droit des inégalités (3.8) sont définis seulement pour les valeurs de ε tel que

$$1 - \varepsilon \delta_1^{i \xrightarrow{j} i'} - a \varepsilon \delta_3^{i \xrightarrow{j} i'} > 0 \quad \text{et} \quad a - \varepsilon \delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - a \varepsilon \delta_4^{i \xrightarrow{j} i'} > 0.$$

En définissant

$$\delta_1 = \max_{i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \delta_1^{i \xrightarrow{j} i'}, \quad \delta_2 = \max_{i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \delta_2^{i \xrightarrow{j} i'}, \quad \delta_3 = \max_{i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \delta_3^{i \xrightarrow{j} i'}, \quad \delta_4 = \max_{i, i' \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}$$

les inégalités (3.8) sont vérifiées si ε satisfait

$$1 - \varepsilon\delta_1 - a\varepsilon\delta_3 > 0 \quad \text{et} \quad a - \varepsilon\delta_2 - a\varepsilon\delta_4 > 0 \quad (3.9)$$

Ainsi, les conditions (3.9) définissent la valeur de ε_3 telle que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ la matrice $\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_\tau^i$ est Schur pour $\tau = \eta(\varepsilon)$

$$\eta(\varepsilon) = \max_{i \xrightarrow{j} i' \in \bar{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'}}{1 - \varepsilon\delta_1^{i \xrightarrow{j} i'} - a\varepsilon\delta_3^{i \xrightarrow{j} i'}} \right), \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}}{a - \varepsilon\delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - a\varepsilon\delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) \right\}. \quad (3.10)$$

Une dernière étape est de montrer que $\eta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Deux situations se présentent :

- Si $\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} < 1$, il existe $a > 0$ tel que $\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} < 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'}}{1 - a\varepsilon\delta_3^{i \xrightarrow{j} i'} - \varepsilon\delta_1^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}}{a - \varepsilon\delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - a\varepsilon\delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) &= \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

En conséquence, $\eta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

- Si $\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} = 1$, nous pouvons choisir $a = \underline{a}\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$ avec $\underline{a} > 0$ afin d'avoir

$$\frac{1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'}}{1 - \varepsilon\delta_1^{i \xrightarrow{j} i'} - a\varepsilon\delta_3^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Or si $\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} \neq 0$, on a

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}}{a - \varepsilon\delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - a\varepsilon\delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon \ln(\varepsilon)).$$

Sinon si $\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} = 0$ et puisque

$$\ln \left(\frac{\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}}{a - \varepsilon\delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - a\varepsilon\delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) = \ln \left(\frac{\underline{a}\gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}}{\underline{a} - \delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - \underline{a}\delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}} \right),$$

il en découle

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_f} \ln \left(\frac{\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{22}^{i \xrightarrow{j} i'}}{a - \varepsilon\delta_2^{i \xrightarrow{j} i'} - a\varepsilon\delta_4^{i \xrightarrow{j} i'}} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

■

Théorème 3.1. *Sous l'hypothèse 2.3, il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, le graphe $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$ est un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe pour le système (3.1)-(3.2).*

Preuve. *La synthèse de la loi de commutation stabilisante revient à l'analyse du système discret suivant :*

$$\begin{pmatrix} W_s(t_k) \\ W_f(t_k) \end{pmatrix} \leq \Gamma^{\sigma_{k-1} \xrightarrow{\nu_k} \sigma_k} M_{\tau_k}^{\sigma_{k-1}} \begin{pmatrix} W_s(t_{k-1}) \\ W_f(t_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

où les composantes de matrices $\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_{\tau}^i$ sont positives pour tout $i, i' \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$.

Ainsi, selon [50], il suffit de prouver l'existence d'un vecteur commun $p \in \mathbb{R}_+^2$ satisfaisant

$$(\Gamma^{i \xrightarrow{j} i'} M_{\tau}^i)^{\top} p < p, \quad \forall i \xrightarrow{j} i' \in (\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}}). \quad (3.11)$$

Soit ε_3 vérifiant (3.9), un vecteur $p = (1, a)^{\top} = (1, \underline{a}\varepsilon)^{\top}$ satisfait (3.11) avec $\underline{a} > 0$.

Le temps de séjour minimum résultant est $\tau = \eta(\varepsilon)$ avec $\eta(\varepsilon)$ est une fonction définie par (3.10). Similairement à la preuve de la Proposition 3.1, nous choisissons $\underline{a} > 0$ suffisamment petit et tant que $\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} < 1$, nous avons :

$$\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} + a\gamma_{21}^{i \xrightarrow{j} i'} < 1, \quad \forall i \xrightarrow{j} i' \in (\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$$

Alors, $\eta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

En revanche, si $\gamma_{11}^{i \xrightarrow{j} i'} = 1$ et $\gamma_{12}^{i \xrightarrow{j} i'} = 0$, comme dans la preuve de la Proposition 3.1, nous avons $\eta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. ■

Il est évident que sous l'hypothèse 2.3, 0 est un point d'équilibre stable du système à commutation impulsif (3.1)-(3.2) si une contrainte temporelle de la forme $t_{k+1} - t_k = \mathcal{O}(1)$ est imposée. Or, le Théorème 3.1 assure que pour un temps de séjour minimum de $t_{k+1} - t_k = \mathcal{O}(\varepsilon)$, la stabilité est assurée si l'ensemble des événements admissibles est défini par un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe dont les sommets et les arcs sont inclus dans $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$.

Remarque 3.2. *Les transitions du type $i \xrightarrow{1} i$ représentent le fait qu'aucun événement n'a lieu et qu'à cet instant discret les dynamiques gardent leur évolution continue jusqu'au prochain événement. Ainsi, ces transitions sont incluses par défaut dans le $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe.*

3.4 Classes particulières de systèmes

Dans cette partie, nous allons raffiner les résultats obtenus dans la Section 3.3 pour traiter trois cas particuliers. D'abord, nous traitons le cas des systèmes à commutation singulièrement perturbés. Par la suite, nous négligeons la différence des échelles de temps pour analyser les systèmes à commutation classiques. Enfin, nous généralisons l'analyse par l'étude des systèmes à commutation impulsif dont les dynamiques continues évoluent selon une seule échelle temporelle.

3.4.1 Systèmes à commutation singulièrement perturbés

Considérons le système à commutation singulièrement perturbé décrit par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A^{\sigma_k} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.12)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}, z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$, sont les variables lentes et rapides, $0 = t_0 < t_1 < \dots$ sont les instants de commutations et $\sigma_k \in \mathcal{I}$ est le signal de commutation.

Ceci revient à considérer l'ensemble des indices relatives aux impulsions comme étant $\mathcal{J} = \{1\}$ et $J^1 = \mathbf{I}$ dans (3.1)-(3.2). Par conséquent, la matrice $R^{i \rightarrow i'}$ définie par (2.13) s'écrit comme

$$R^{i \rightarrow i'} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x, n_z} \\ R_{21}^{i \rightarrow i'} & \mathbf{I}_{n_z} \end{pmatrix}$$

entraînant

$$\gamma_{11}^{i \rightarrow i'} = \|(Q_s^{i'})^{\frac{1}{2}}(Q_s^i)^{-\frac{1}{2}}\|, \quad \gamma_{12}^{i \rightarrow i'} = 0, \quad \forall i, i' \in \mathcal{I}.$$

Corollaire 3.1. *Le $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$ fortement connexe associé au système (3.12) est décrit par les sommets représentant les modes de commutation pour lesquelles les dynamiques du modèle réduit correspondant admettent une fonction de Lyapunov commune.*

Preuve. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{I}$ le sous-ensemble maximal des sommets représentant les modes de commutation pour lesquelles les systèmes réduits ont une fonction de Lyapunov commune. De manière équivalente, $Q_s^i = Q_s^{i'}, \forall i, i' \in \mathcal{U}$ correspond à $\gamma_{11}^{i \rightarrow i'} = 1, \forall i, i' \in \mathcal{U}$. Utilisant le fait que $\gamma_{12}^{i \rightarrow i'} = 0, \forall i, i' \in \mathcal{I}$, la Proposition 3.1 implique que $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{E}}$ et ainsi $\mathcal{U}$ est un sous-ensemble de sommets qui sont fortement connexes $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$.

Inversement, soit $\mathcal{U}$ un ensemble de sommets fortement connexes $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$. A partir de la

Proposition 3.1, on a $\gamma_{11}^{i \rightarrow i'} \leq 1$, $\forall i \rightarrow i' \in \bar{\mathcal{E}}$. Supposons que les systèmes réduits relatifs aux modes commutations dans l'ensemble $\mathcal{U}$ n'admettent pas de fonction de Lyapunov commune. Il en découle l'existence d'au moins une paire de sommets $(i, i') \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ telle que $\|Q_s^{i'}(Q_s^i)^{-1}\| < 1$ et $\|Q_s^i(Q_s^{i'})^{-1}\| > 1$, ce qui est équivalent au fait qu'il existe forcément un chemin de i' à i dans $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$. Ceci est en contradiction avec le fait que les sommets de $\mathcal{U}$ sont fortement connexes.

En conclusion, les systèmes réduits correspondants aux modes de commutation appartenant à l'ensemble $\mathcal{U}$ ont une fonction de Lyapunov commune. ■

3.4.2 Systèmes à commutation

Quand les dynamiques du système (3.12) évoluent selon une seule échelle de temps, elles peuvent être décrites par :

$$\dot{x}(t) = A^{\sigma_k} x(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots$ sont les instants de commutation et $\sigma_k \in \mathcal{I}$ est le signal de commutation.

Dans ce cas, la contrainte temporelle est écartée et le problème se ramène à la recherche d'un $\mathcal{O}(0)$ -sous-graphe au lieu de $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe. En effet, $R^{i \rightarrow i'} = \mathbf{I}_{n_x}$ et le Corollaire 3.1 se réécrit comme suit.

Corollaire 3.2. *Le $\mathcal{O}(0)$ -sous-graphe $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$ fortement connexe associé au système (3.13) est décrit par les sommets représentant les modes de commutation pour lesquelles les dynamiques admettent une fonction de Lyapunov commune.*

Preuve. *La preuve s'établit de manière analogue à celle du Corollaire 3.1 en remplaçant Q_s^i , $i \in \mathcal{I}$ par Q^i , $i \in \mathcal{I}$ puisqu'il s'agit de dynamiques évoluant selon une seule échelle de temps.* ■

3.4.3 Systèmes hybrides

Considérons les dynamiques hybrides suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^{\sigma_k} x(t) \\ x(t_k) = J^{\nu_k} x(t_k^-) \end{cases}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots$ sont les instants d'événements (commutation, impulsion ou les deux simultanément), $\sigma_k \in \mathcal{I}$, $\nu_k \in \mathcal{J}$ sont les signaux relatifs aux commutations et aux impulsions respectivement avec $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont des ensembles finis d'indices.

Dans ce cas, $R^{i \xrightarrow{j} i'} = J^j$ et la Proposition 3.1 se réécrit de la manière suivante :

Corollaire 3.3. *Sous l'hypothèse 2.3, le $\mathcal{O}(0)$ -sous-graphe associé au système (3.14) contient toutes les transitions $i \xrightarrow{j} i'$ satisfaisant*

$$\|(Q^{i'})^{\frac{1}{2}} J^j (Q^i)^{-\frac{1}{2}}\| \leq 1$$

avec Q^i est la matrice de Lyapunov correspondante au mode de commutation $i \in \mathcal{I}$.

3.5 Exemple illustratif

Soient les dynamiques du système hybride singulièrement perturbé suivant :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} &= A^i \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, & \forall t \in [t_k, t_{k+1}), i \in \mathcal{I} \\ \begin{pmatrix} x(t_k) \\ z(t_k) \end{pmatrix} &= J^j \begin{pmatrix} x(t_k^-) \\ z(t_k^-) \end{pmatrix}, & \forall k \geq 1, j \in \mathcal{J} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considérons l'ensemble des indices relatifs aux commutations $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$ décrites par les matrices suivantes :

$$A^1 = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ -0.5 & -1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -2.5 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

et les deux matrices de saut suivantes :

$$J^1 = \mathbf{I}_2, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}; \quad \text{avec } \mathcal{J} = \{1, 2\}$$

En appliquant l'approche de l'analyse proposée dans la Section 3.3, nous établissons le tableau suivant qui récapitule les données du système ayant $\lambda_s = 2.25$ et $\lambda_f = 0.5$.

	A_0	A_{22}	Q_s	Q_f	β_1	β_2	β_3	ε_1
Mode 1	-2.25	-1	1	1	2.3	1.01	0.512	0.9201
Mode 2	-2.5	-1	1	1.1	16.09	0.95	3.4	0.053
Mode 3	-3	-0.5	1	1	14.42	4.01	12.81	0.05
Mode 4	-3.5	-2	1.2	1.05	6.87	2.14	3.23	0.158

En fixant le paramètre des perturbations singulières $\varepsilon = 10^{-3}$ et en appliquant le résultat de la Proposition 3.1, nous relevons les transitions admissibles du graphe $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{E}})$:

$$\bar{\mathcal{E}} = \{1 \xrightarrow{2} 1, 1 \xrightarrow{1} 2, 1 \xrightarrow{2} 2, 1 \xrightarrow{1} 3, 1 \xrightarrow{2} 3, 1 \xrightarrow{2} 4, 2 \xrightarrow{1} 1, 2 \xrightarrow{1} 3, 3 \xrightarrow{1} 1, 3 \xrightarrow{1} 2, 4 \xrightarrow{1} 1, 4 \xrightarrow{2} 1, 4 \xrightarrow{1} 2, 4 \xrightarrow{2} 2, 4 \xrightarrow{1} 3, 4 \xrightarrow{2} 3, 4 \xrightarrow{2} 4\}.$$

La représentation du $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -sous-graphe obtenu est donné par la Figure 3.3.

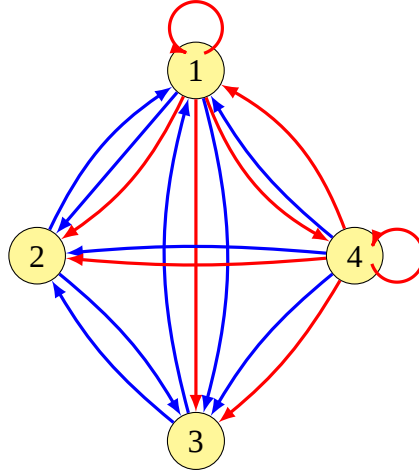


FIGURE 3.3: Schéma illustratif de toutes les transitions associées au système à commutation (3.15) ayant 4 modes de commutation et 2 types d'impulsions possibles. Les arcs en bleu décrivent les événements associés à $J^1 = \mathbf{I}$ et ceux en rouge sont associés à $J^2 \neq \mathbf{I}$.

En présence d'un temps de séjour $\tau = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$, donné par l'équation (3.10), nous utilisons des transitions de l'ensemble $\bar{\mathcal{E}}$ pour simuler les dynamiques (3.15) ayant pour condition initiale $(x_0, z_0) = (-0.5, 1.5)$.

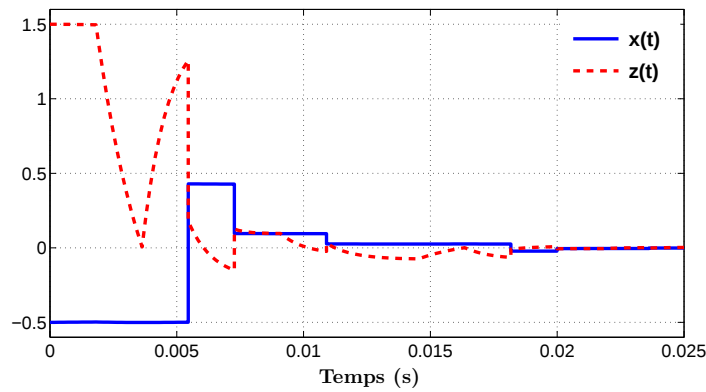


FIGURE 3.4: La séquence d'événement est donnée par la répétition des transitions suivantes : $2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2} 2$

Les trajectoires des dynamiques sont illustrées par la Figure 3.4 et la stabilité du point d'équilibre 0 est assurée pour toute séquence de transitions de l'ensemble $\bar{\mathcal{E}}$. De plus, l'ajout d'événements qui n'appartiennent pas à l'ensemble des transitions possibles $\bar{\mathcal{E}}$ affecte la convergence des trajectoires et déstabilise le système comme le montre la Figure 3.5.

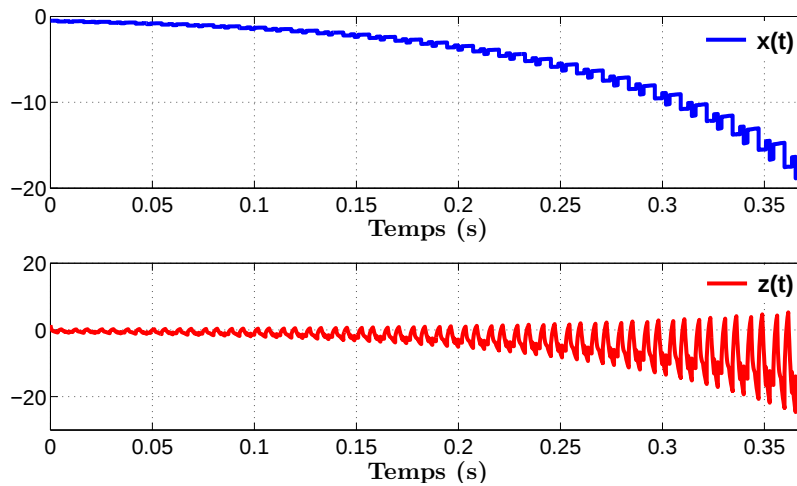


FIGURE 3.5: La séquence d'événement est donnée par la répétition des transitions suivantes : $4 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{2} 1$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu les résultats du Chapitre 2 pour traiter un exemple d'application qui consiste à rechercher des séquences stabilisantes pour une classe générale de systèmes hybrides singulièrement perturbés. Nous avons associé aux différentes combinaisons d'événements au sein du système hybride une représentation graphique que nous avons caractérisé à travers les outils liés à la théorie des graphes introduits dans le Chapitre 1. Ensuite, nous avons établi l'analyse de stabilité par la caractérisation d'une séquence de transitions possibles en présence d'un temps de séjour de l'ordre de ε . Egalement, nous avons montré que l'approche proposée s'adapte à des classes particulières de systèmes hybrides et nous avons détaillé la méthodologie à adopter pour chaque cas. Enfin, nous avons présenté un exemple illustratif qui valide les résultats théoriques.

Chapitre 4

Synchronisation avec un coût garanti dans un Système Multi-agents Singulièrement Perturbé (SMSP)

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la synchronisation dans un système multi-agents singulièrement perturbé avec un coût garanti sur l'effort de contrôle requis. Pour ce faire, il est nécessaire de mettre en oeuvre les outils d'analyse des systèmes multi-agents combinés aux résultats existants quant à la théorie des perturbations singulières afin de concevoir une loi de commande décentralisée qui synchronise les dynamiques des agents avec un seuil prédéfini sur le coût énergétique de commande.

En premier lieu, nous étudions le problème de synchronisation sans contrainte d'optimisation. Nous montrons que ce problème peut être reformulé comme un problème de stabilisation simultanée de plusieurs systèmes linéaires ayant une structure particulière et nous concevons une loi de commande stabilisante de ces systèmes. La complexité réside dans le fait de rechercher une commande commune à tous les systèmes étant donné que les dynamiques des agents sont initialement homogènes. Pour y répondre, nous détaillons les conditions d'existence de cette commande et nous établissons le lien entre le coût garanti global requis à la synchronisation et celui requis à la stabilisation simultanée. Par la suite, nous montrons que la décentralisation de la commande et les contraintes du coût garanti global font appel au formalisme des systèmes singulièrement

perturbés incertains. Nous présentons les résultats principaux de ce chapitre en proposant une approche de conception de la commande et nous détaillons son implémentation numérique. Enfin, des exemples illustratifs seront proposés afin de valider et tester les performances des résultats obtenus.

4.2 Positionnement du problème

Considérons un système multi-agents dont les dynamiques des agents sont identiques et singulièrement perturbés. Chaque agent, labélisé par un indice i dans $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$, est décrit par un vecteur d'état $(x_i(t), z_i(t)) \in \mathbb{R}^{n_x + n_z}$. Les dynamiques du $i^{\text{ème}}$ système sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{11}x_i(t) + A_{12}z_i(t) + B_1u_i(t) \\ \varepsilon \dot{z}_i(t) = A_{21}x_i(t) + A_{22}z_i(t) + B_2u_i(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $\varepsilon > 0$, $u_i \in \mathbb{R}^m$ est la commande relative à l'agent i et les matrices d'état du système sont de dimensions appropriées :

$$\begin{aligned} A_{11} &\in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, & A_{12} &\in \mathbb{R}^{n_x \times n_z}, & B_1 &\in \mathbb{R}^{n_x \times m}, \\ A_{21} &\in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}, & A_{22} &\in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}, & B_2 &\in \mathbb{R}^{n_z \times m}, \end{aligned}$$

avec $\text{rang}(B_1) = \text{rang}(B_2) = m$.

Conformément à l'analyse standard des systèmes linéaires singulièrement perturbés introduite dans [27], nous énonçons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.1. *La matrice A_{22} est inversible.*

En premier lieu, nous utilisons les outils liés à la théorie des graphes présentés dans la Section 1.3 pour associer au système multi-agents, un graphe d'interactions $\mathcal{G}$ donné par la paire $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ désigne l'ensemble des arêtes joignant les agents à leurs voisins et modélisant les différentes interactions au sein du réseau. Nous admettons que le graphe $\mathcal{G}$ est non-orienté sans aucune boucle (*i.e.* $(i, i) \notin \mathcal{E}$). De plus, nous associons au graphe $\mathcal{G}$ une matrice pondérée d'adjacence $G = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et la matrice Laplacienne $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ correspondante, voir respectivement les Définitions 1.10 et 1.11. Nous rappelons également que la matrice L est symétrique par définition pour un graphe non-orienté donné et que la somme de chacune de ses n lignes est nulle.

Nous supposons qu'il existe toujours un chemin qui relie toute paire de sommets distincts du graphe. Cette condition est classique dans l'analyse du consensus et de la synchronisation au sein des systèmes multi-agents puisqu'elle assure l'atteinte d'un accord global pour toute condition initiale. D'où l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.2. *Le graphe non-orienté $\mathcal{G}$ est connexe et toutes les pondérations non nulles de la matrice Laplacienne qui lui est associée vérifient $g_m \leq g_{i,j} \leq g_M$ avec $g_M > g_m > 0$.*

Etant donnée l'hypothèse ci-dessus, nous rappelons que selon la Proposition 1.3, les valeurs propres relatives à la matrice Laplacienne L satisfont :

$$\frac{g_m^2}{2(n-1)n^2} \triangleq \lambda^* \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < \lambda^\circ \triangleq n \cdot g_M. \quad (4.2)$$

D'autre part, nous avons également vu que ces bornes s'adaptent avec les propriétés du graphe et de la matrice Laplacienne associée. En effet, la Remarque 1.5 souligne que dans le cas où les pondérations $g_{i,j} \in \{0, 1\}$, les valeurs propres de L sont bornées par

$$\frac{4}{n(n-1)} \triangleq \lambda^* \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < \lambda^\circ \triangleq n. \quad (4.3)$$

Une fois traitées les questions de modélisation du système et de ses propriétés, nous nous intéressons à l'étude de la synchronisation avec un coût garanti du système singulièrement perturbé (4.1) qui passe par plusieurs étapes. D'abord, nous nous penchons sur les questions d'existence d'une loi de commande décentralisée qui synchronise les dynamiques au sein du réseau.

Définition 4.1. *Les n systèmes singulièrement perturbés (4.1) atteignent une synchronisation asymptotique décentralisée s'il existe une commande par retour d'état de la forme :*

$$u_i(t) = K_1 \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) + K_2 \sum_{j=1}^n g_{ij}(z_i(t) - z_j(t))$$

$$K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_x}, K_2 \in \mathbb{R}^{m \times n_z} \quad (4.4)$$

qui satisfait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t) - z_j(t)\| = 0.$$

Il est important de remarquer que la définition ci-dessus évoque l'aspect décentralisé

de la loi de commande proposée. Cet aspect est fondamental dans l'analyse que nous proposons. En effet, l'équation (4.4) est conditionnée par les interactions existantes de l'agent i au sein du graphe. Sa loi de commande est calculée uniquement à travers ses échanges avec ses voisins, décrits par les pondérations $g_{ij} \neq 0$ si $(i, j) \in \mathcal{E}$. De plus, cette définition requiert des gains communs K_1 et K_2 relatives aux dynamiques lentes et rapides respectivement. Certes, les dynamiques singulièrement perturbées des agents sont identiques mais explicitement ces gains sont communs à tous les agents dans $\mathcal{V}$ et doivent garantir leur synchronisation pour tout graphe satisfaisant l'hypothèse 4.2 et toute condition initiale.

Soient $x(t) = (x_1(t)^\top, \dots, x_n(t)^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n \cdot n_x}$ et $z(t) = (z_1(t)^\top, \dots, z_n(t)^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n \cdot n_z}$ les vecteurs regroupant les états lents $x_i(t)$ et rapides $z_i(t)$ des n agents constituant le réseau. Nous introduisons également le vecteur $u(t) = (u_1(t)^\top, \dots, u_n(t)^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ qui collecte les commandes individuelles $u_i(t)$ relatives à chaque agent $i \in \mathcal{V}$.

Le problème de commande optimale que nous nous proposons de résoudre, revient à déterminer la loi de commande $u(t)$ qui maintienne le vecteur d'état $(x(t), z(t))^\top$ proche de la dynamique synchronisée avec une dépense modérée d'énergie de commande.

Ceci se traduit mathématiquement par la minimisation de la fonction coût suivante :

$$J = \int_0^\infty x(t)^\top (L \otimes I_{n_x}) x(t) + z(t)^\top (L \otimes I_{n_z}) z(t) + u(t)^\top (I_n \otimes R) u(t) dt \quad (4.5)$$

où $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique définie positive qui pénalise l'énergie de la commande requise à la synchronisation.

Notre objectif est de concevoir les lois de commande décentralisée (4.4) qui assurent la synchronisation des dynamiques des agents (4.1) avec un coût garanti global. Autrement dit, l'énergie de commande globale requise à la synchronisation J donnée par (4.5) ne peut excéder un seuil fixé par $\bar{J}$, qui sera caractérisé dans la Section 4.5.

4.3 Reformulation du problème dans le cadre de la stabilisation simultanée

Dans un premier temps, nous reformulons le problème de synchronisation en un problème de stabilisation simultanée de systèmes linéaires. Par la suite, nous établissons le

lien entre le problème de la synchronisation et celui de la stabilisation simultanée en termes de loi de commande requise et coût garanti associé.

4.3.1 Changement de variables et découplage des dynamiques collectives

D'abord, nous récrivons les dynamiques collectives en boucle fermée en introduisant l'expression de la loi de commande locale (4.4) dans l'équation des dynamiques individuelles (4.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}_{11}x(t) + \bar{A}_{12}z(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) = \bar{A}_{21}x(t) + \bar{A}_{22}z(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= I_n \otimes A_{11} - (I_n \otimes B_1 K_1)(L \otimes I_{n_x}), \\ \bar{A}_{12} &= I_n \otimes A_{12} - (I_n \otimes B_1 K_2)(L \otimes I_{n_z}), \\ \bar{A}_{21} &= I_n \otimes A_{21} - (I_n \otimes B_2 K_1)(L \otimes I_{n_x}), \\ \bar{A}_{22} &= I_n \otimes A_{22} - (I_n \otimes B_2 K_2)(L \otimes I_{n_z}). \end{aligned}$$

Il est important de signaler que la matrice $\bar{A}_{22}$ peut être singulière. Afin d'utiliser l'approche classique pour l'analyse des perturbations singulières, on va devoir choisir le gain de la commande K_2 pour assurer son inversibilité.

D'autre part, notons que la synchronisation des systèmes (4.1) revient à satisfaire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (L \otimes I_{n_x})x(t) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (L \otimes I_{n_z})z(t) = 0.$$

Or, en se référant aux propriétés algébriques relatives à la théorie des graphes présentées dans la Chapitre 1, il existe une matrice orthonormale $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qui vérifie $TT^\top = T^\top T = I_n$ et telle que

$$TLT^\top = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Par conséquent, la condition de synchronisation peut s'écrire également comme :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (D \otimes I_{n_x})(T \otimes I_{n_x})x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (D \otimes I_{n_z})(T \otimes I_{n_z})z(t) = 0 \quad (4.7)$$

Cette réflexion nous mène à introduire un changement de variable de la forme :

$$\tilde{x}(t) = (T \otimes I_{n_x})x(t) \text{ et } \tilde{z}(t) = (T \otimes I_{n_z})z(t) \quad (4.8)$$

qui permet de remplacer la matrice Laplacienne L par la matrice D qui, étant diagonale, rend plus facile la manipulation des propriétés spectrales du graphe.

En effet, la condition (4.7) peut être vue comme :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (D \otimes I_{n_x})\tilde{x}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (D \otimes I_{n_z})\tilde{z}(t) = 0.$$

Or, ayant $D = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, elle est aussi équivalente à :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_i(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_i(t) = 0, \quad i = 2, \dots, n$$

Par conséquent, le problème de synchronisation des dynamiques (4.1) sous la loi de commande par retour d'état décentralisée (4.4) devient un problème de stabilisation simultanée de $n - 1$ systèmes.

D'autre part, un second intérêt issu du changement de variables (4.8) est le découplage des dynamiques collectives (4.6). Effectivement, ces dynamiques peuvent se réécrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_{11}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_{12}\tilde{z}(t) \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{A}_{21}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_{22}\tilde{z}(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= I_n \otimes A_{11} - (I_n \otimes B_1 K_1)(D \otimes I_{n_x}), \\ \tilde{A}_{12} &= I_n \otimes A_{12} - (I_n \otimes B_1 K_2)(D \otimes I_{n_z}), \\ \tilde{A}_{21} &= I_n \otimes A_{21} - (I_n \otimes B_2 K_1)(D \otimes I_{n_x}), \\ \tilde{A}_{22} &= I_n \otimes A_{22} - (I_n \otimes B_2 K_2)(D \otimes I_{n_z}). \end{aligned}$$

Pour évaluer la dynamique individuelle en boucle fermée dans (4.9), nous utilisons le fait que la matrice D soit diagonale et les propriétés du produit de Kronecker pour découpler le système en n sous-systèmes singulièrement perturbés.

Pour toutes matrices M et N de dimensions appropriées, nous avons :

$$\begin{aligned} I_n \otimes M - (I_n \otimes N)(D \otimes I_m) &= I_n \otimes M - D \otimes N \\ &= \text{diag}(M, \dots, M) - \text{diag}(\lambda_1 N, \dots, \lambda_n N) \\ &= \text{diag}(M - \lambda_1 N, \dots, M - \lambda_n N). \end{aligned}$$

Il en découle la diagonalisation des matrices du système qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{11} &= \text{diag}(A_{11} - \lambda_1 B_1 K_1, \dots, A_{11} - \lambda_n B_1 K_1), \\ \tilde{A}_{12} &= \text{diag}(A_{12} - \lambda_1 B_1 K_2, \dots, A_{12} - \lambda_n B_1 K_2), \\ \tilde{A}_{21} &= \text{diag}(A_{21} - \lambda_1 B_2 K_1, \dots, A_{21} - \lambda_n B_2 K_1), \\ \tilde{A}_{22} &= \text{diag}(A_{22} - \lambda_1 B_2 K_2, \dots, A_{22} - \lambda_n B_2 K_2).\end{aligned}$$

Nous en déduisons la dynamique individuelle relative au système (4.9) :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i(t) = (A_{11} - \lambda_i B_1 K_1) \tilde{x}_i(t) + (A_{12} - \lambda_i B_1 K_2) \tilde{z}_i(t) \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}_i(t) = (A_{21} - \lambda_i B_2 K_1) \tilde{x}_i(t) + (A_{22} - \lambda_i B_2 K_2) \tilde{z}_i(t), \quad i \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Le changement de variable évoqué dans (4.8) a permis non seulement de découpler les dynamiques des agents mais également de remplacer les pondérations relatives à la matrice Laplacienne dans l'équation de la commande (4.4) par les n valeurs propres du système. En outre, nous soulignons que $\lambda_1 = 0$ mène à l'annulation du terme relatif à la loi de commande pour $i = 1$ dans (4.10). Par conséquent, le système en question est un système autonome.

Remarque 4.1. *La dynamique relative à $i = 1$ dans (4.10) caractérise la variété de synchronisation des n systèmes décrits par (4.1). Si le système*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = A_{11} \tilde{x}_1(t) + A_{12} \tilde{z}_1(t) \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}_1(t) = A_{21} \tilde{x}_1(t) + A_{22} \tilde{z}_1(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

admet un point d'équilibre stable $(\tilde{x}^, \tilde{z}^*)$, alors les systèmes (4.1) convergent asymptotiquement vers un accord global ayant une valeur finie : un consensus.*

Si le système (4.11) est instable alors les dynamiques (4.1) se synchronisent selon une trajectoire divergente.

Il est également judicieux de revenir sur le problème d'inversibilité des matrices posé pour le système (4.6). Nous remarquons que pour $i = 1$, le problème est résolu sous l'hypothèse 4.1. Tandis que pour les $n - 1$ systèmes restants (4.10), le gain de la loi de commande K_2 doit être choisi de manière à ce que la matrice $A_{22} - \lambda_i B_2 K_2$ soit inversible pour tout $i = 2, \dots, n$.

4.3.2 Loi de commande stabilisante et coût garanti relatif

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la réécriture de la loi de commande relative au système (4.6) et le coût garanti qui lui est associé suite au changement de variables (4.8).

Le vecteur $u(t)$ regroupant les lois de commande individuelles se met par définition, sous la forme :

$$u(t) = -(I_n \otimes K_1)(L \otimes I_{n_x})x(t) - (I_n \otimes K_2)(L \otimes I_{n_x})z(t). \quad (4.12)$$

Cette expression montre que le problème d'optimisation lié au coût garanti fait appel à la matrice Laplacienne décrivant le graphe d'interactions. Ainsi, la loi de commande dépend des liaisons établies au sein du système multi-agents et par conséquent de la topologie du graphe qui le décrit. Il est aussi important de spécifier que l'effort de la commande requis à la synchronisation diffère d'un agent à un autre. Ce qui nous intéresse est plutôt de satisfaire une performance globale sur cette énergie $\mathcal{J} \leq \bar{\mathcal{J}}$ sans pour autant se soucier de sa répartition au sein du réseau. En effet, la quantité d'effort réclamée par chaque agent dépend de ses conditions initiales, ses interactions et ses échanges avec ses semblables pour atteindre leur objectif final.

Etant donné que le problème consiste à présent en un problème de stabilisation simultanée, il revient de reformuler l'expression (4.12) à l'aide du changement de variable (4.8) pour ensuite la découpler et aboutir à une loi de commande stabilisante des $n - 1$ systèmes équivalents (4.10).

D'après la définition de la matrice T , le changement de variables (4.8) est équivalent à :

$$x(t) = (T^\top \otimes I_{n_x})\tilde{x}(t) \quad \text{et} \quad z(t) = (T^\top \otimes I_{n_z})\tilde{z}(t).$$

Par une simple manipulation du produit de Kronecker, la commande globale (4.12) peut être exprimée en fonction des variables $\tilde{x}$ et $\tilde{z}$ comme suit :

$$\begin{aligned} u(t) &= -(LT^\top \otimes K_1)\tilde{x}(t) - (LT^\top \otimes K_2)\tilde{z}(t) \\ &= -(T^\top D \otimes K_1)\tilde{x}(t) - (T^\top D \otimes K_2)\tilde{z}(t) \\ &= -(T^\top \otimes I_m)[(D \otimes K_1)\tilde{x}(t) + (D \otimes K_2)\tilde{z}(t)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ensuite, en définissant le vecteur de la commande $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t)^\top, \dots, \tilde{u}_n(t)^\top)^\top$ avec

$$\tilde{u}_i(t) = -\lambda_i K_1 \tilde{x}_i(t) - \lambda_i K_2 \tilde{z}_i(t), \quad \forall i \in \mathcal{V}. \quad (4.14)$$

nous déduisons

$$\tilde{u}(t) = (T \otimes I_m)u(t). \quad (4.15)$$

Par conséquent, l'analyse va porter sur la conception de la loi de commande stabilisante définie ci-dessus et le calcul des gains communs K_1 et K_2 relatifs aux dynamiques lentes et rapides respectivement. Par ailleurs, la relation (4.15) entre $\tilde{u}(t)$ et $u(t)$ pour une matrice T donnée, assure le passage de la loi de commande synchronisante à celle stabilisante et vice-versa.

De plus, les propriétés de la matrice T permettent d'établir le lien entre la quantité d'effort de commande relative à $u(t)$ et celle relative à la stabilisation individuelle $\tilde{u}_i(t)$:

$$\begin{aligned} u(t)^\top (I_n \otimes R) u(t) &= \tilde{u}(t)^\top (TT^\top \otimes R) \tilde{u}(t) \\ &= \tilde{u}(t)^\top (I_n \otimes R) \tilde{u}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t) \end{aligned}$$

Cette expression souligne que l'effort globale attribué à la commande $u(t)$ n'est autre que la somme des efforts individuels liés à la stabilisation des sous-systèmes (4.10), pénalisés par la matrice R . En effet, la fonction du coût global J énoncée dans l'équation (4.5) s'écrit en utilisant le changement de variables (4.8) sous la forme :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \tilde{x}(t)^\top (D \otimes I_{n_x}) \tilde{x}(t) + \tilde{z}(t)^\top (D \otimes I_{n_x}) \tilde{z}(t) + \tilde{u}(t)^\top (I_n \otimes R) \tilde{u}(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \lambda_i \tilde{x}_i(t)^\top \tilde{x}_i(t) + \lambda_i \tilde{z}_i(t)^\top \tilde{z}_i(t) + \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{J}}_i \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{J}}_i = \int_0^\infty \lambda_i \tilde{x}_i(t)^\top \tilde{x}_i(t) + \lambda_i \tilde{z}_i(t)^\top \tilde{z}_i(t) + \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t) dt. \quad (4.17)$$

Ainsi, assurer un coût global sur la fonction J revient à garantir un seuil sur l'effort individuel $\tilde{\mathcal{J}}_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$.

4.4 Conception de la loi de commande décentralisée

Dans cette section, nous traitons le problème de synchronisation au sein du système multi-agents singulièrement perturbé décrit dans la Section 4.2 en négligeant la contrainte du coût garanti global. Nous revenons en premier lieu, sur le problème de stabilisation simultanée et nous démontrons la faisabilité du problème par l'existence des gains communs K_1 et K_2 qui rendent la loi de commande stabilisante pour les $n - 1$ systèmes (4.10). Ensuite, nous exploitons la théorie des perturbations singulières et les résultats de la littérature pour découpler les dynamiques lentes et rapides et calculer explicitement les expressions des gains relatifs.

4.4.1 Conditions d'existence d'une loi de commande commune

Véritablement, la stabilisation simultanée constitue généralement un problème indécidable qui a reçu une attention considérable [5, 21]. Néanmoins, le problème de stabilisation simultanée que nous nous posons est particulier et peut être formulé comme suit.

Problème (a) :

Pour toutes matrices $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$ données et $0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$, trouvons le gain $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ qui rend les matrices $A - \lambda_i BK$ Hurwitz, pour tout $i = 2, \dots, n$.

Il est évident que le problème admet au moins une solution dans le cas où les variables d'état $x_i(t)$ et $z_i(t)$ sont de nature scalaire. Dans ce cas, il s'agit de rendre négatifs les scalaires $A - \lambda_2 BK$ et $A - \lambda_n BK$. Tandis que pour des variables d'état vectorielles, le problème consiste à rendre les $n - 1$ matrices $A - \lambda_i BK$ Hurwitz simultanément.

Proposition 4.1. *Si la paire (A, B) est stabilisable alors il existe un gain K solution du Problème (a).*

Preuve. *Si la paire (A, B) est stabilisable alors $(A, \lambda^* B)$ est stabilisable également. Par conséquent, il existe des matrices $P = P^\top > 0$ et $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ satisfaisant :*

$$(A - \lambda^* BK)^\top P + P(A - \lambda^* BK) < 0. \quad (4.18)$$

De plus, puisque $P > 0$ alors P est inversible. Notons dans la suite, $S = P^{-1}$ et $W = KS$, l'inégalité (4.18) est équivalente à une inégalité matricielle linéaire (LMI) de la forme :

$$SA^\top + AS - \lambda^*(W^\top B^\top + BW) < 0,$$

qui peut se réécrire aussi comme :

$$S \frac{A^\top}{\lambda^*} + \frac{A}{\lambda^*} S - (W^\top B^\top + BW) < 0.$$

En se référant aux résultats de [7, Section 2.6.2], l'inégalité précédente est équivalente à l'existence d'un réel positif $\sigma > 0$ telle que

$$S \frac{A^\top}{\lambda^*} + \frac{A}{\lambda^*} S - \sigma BB^\top < 0. \quad (4.19)$$

Le fait que la paire (A, B) est stabilisable implique l'existence de $\sigma > 0$ et $S = S^\top > 0$ satisfaisant (4.19). Par ailleurs, une loi de commande par retour d'état stabilisante de la paire $(A, \lambda^* B)$ est donnée par un gain $K = \frac{\sigma}{2} B^\top S^{-1}$. D'autre part, l'inégalité (4.19) implique que

$$SA^\top + AS < \lambda^* \sigma BB^\top \leq \lambda_i \sigma BB^\top, \quad i = 2, \dots, n,$$

Alors,

$$S \frac{A^\top}{\lambda_i} + \frac{A}{\lambda_i} S - \sigma BB^\top < 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

Pour conclure, $K = \frac{\sigma}{2} B^\top S^{-1}$ est un gain stabilisant relatif à la loi de commande par retour d'état pour toutes les paires $(A, \lambda_i B)$ avec $i = 2, \dots, n$. ■

La Proposition 4.1 donne les conditions d'existence du gain commun stabilisant solution du Problème (a). Par la suite, nous nous proposons d'appliquer ce résultat pour les $n - 1$ systèmes singulièrement perturbés décrits par les dynamiques (4.10).

4.4.2 Conception de la loi de commande stabilisante par découplage des dynamiques singulièrement perturbées

Dans cette partie de l'étude, nous développons l'approche du calcul des gains de la commande et nous mettons en oeuvre les résultats existants dans la littérature [27] pour découpler les dynamiques de chacun des $n - 1$ systèmes singulièrement perturbés. La séparation des échelles de temps définit deux sous-systèmes relatifs aux dynamiques lentes et rapides et permet d'approximer la solution du système original. Ainsi, la conception des lois de commande pour chacun des deux sous-systèmes permet d'approcher la loi de commande relative au système original.

La séparation des échelles de temps des dynamiques (4.10) génère une dynamique lente ayant la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{i,s}(t) = (A_0 - \lambda_i B_0 K_0) \tilde{x}_{i,s}(t), & \tilde{x}_{i,s}(0) = \tilde{x}_i(0) \\ \dot{\tilde{z}}_{i,s}(t) = -A_{22}^{-1} (A_{21} - \lambda_i B_2 K_0) \tilde{x}_{i,s}(t) & i \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (4.20)$$

et une dynamique rapide donnée par :

$$\varepsilon \dot{\tilde{z}}_{i,f}(t) = (A_{22} - \lambda_i B_2 K_2) \tilde{z}_{i,f}(t), \quad \tilde{z}_{i,f}(0) = \tilde{z}_i(0) - \tilde{z}_{i,s}(0) \quad (4.21)$$

avec

$$A_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2.$$

L'existence de tels gains requiert une condition standard donnée par l'hypothèse 4.3.

Hypothèse 4.3. Les paires (A_0, B_0) et (A_{22}, B_2) sont stabilisables.

En se référant à la Proposition 4.1, nous établissons le résultat suivant.

Théorème 4.1. Sous l'hypothèse 4.3, il existe K_2 et K_0 tels que pour tout $i = 2, \dots, n$ les matrices $A_{22} - \lambda_i B_2 K_2$ et $A_0 - \lambda_i B_0 K_0$ sont Hurwitz. De plus, il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, la loi de commande par retour d'état (4.4) ayant pour gain K_2 et

$$K_1 = (I_m - K_2 A_{22}^{-1} B_2) K_0 + K_2 A_{22}^{-1} A_{21}. \quad (4.22)$$

garantit, d'une manière décentralisée, la synchronisation asymptotique des dynamiques singulièrement perturbés (4.1).

Preuve. Le choix des gains K_0 et K_2 fixé par le Théorème 4.1 rend, respectivement, les matrices $A_0 - \lambda_i B_0 K_0$ et $A_{22} - \lambda_i B_2 K_2$ Hurwitz afin de garantir la stabilisation des systèmes découplés lents (4.20) et rapides (4.21) pour tout $i = 2, \dots, n$.

Selon la théorie des perturbations singulières classique des systèmes linéaires [27], il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, la solution du système est approximée par :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(t) &= \tilde{x}_{i,s}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \tilde{z}_i(t) &= -A_{22}^{-1} (A_{21} - \lambda_i B_2 K_0) \tilde{x}_{i,s}(t) + \tilde{z}_{i,f}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ainsi, en se référant à [27], nous en déduisons le gain K_1 donné par (4.22) qui, associé avec le gain K_2 , garantit la stabilisation des systèmes originaux (4.10) pour $i = 2, \dots, n$.

D'autre part, rappelons que la synchronisation est équivalente à

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (L \otimes I_{n_x})x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (L \otimes I_{n_z})z(t) = 0$$

Or, cette condition est satisfaite sous une loi de commande par retour d'état ayant pour gains K_1 et K_2 introduits précédemment. Ceci découle du fait que

$$(L \otimes I_{n_x})x(t) = (D \otimes I_{n_x})\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \tilde{x}_n \end{bmatrix}$$

et

$$(L \otimes I_{n_z})z(t) = (D \otimes I_{n_z})\tilde{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \tilde{z}_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \tilde{z}_n \end{bmatrix}.$$

■

Le Théorème 4.1 montre que la synchronisation des systèmes (4.1) repose sur la synchronisation des dynamiques lentes et rapides séparément. De plus, la synchronisation est assurée de manière décentralisée au sein du système multi-agents. En effet, selon la Proposition 4.1 et sous l'hypothèse 4.3, le calcul des gains K_1 et K_2 communs aux systèmes (4.10) requiert uniquement la valeur de λ^* .

Remarque 4.2. Notons que la résolution numérique de l'inégalité matricielle (4.19) pour A, B et λ^* données et en utilisant un même solver LMI sous Matlab donne un résultat similaire pour S et σ qui engendre des gains K_0, K_2 et K_1 similaires pour les n systèmes. Ceci justifie le choix des gains communs initialement imposé.

Corollaire 4.1. Soit K_0 tel que pour tout $i = 2, \dots, n$, les matrices $A_0 - \lambda_i B_0 K_0$ sont Hurwitz. Si, de plus, la matrice A_{22} est Hurwitz, les lois de commande individuelles (4.4) avec $K_1 = K_0$ et $K_2 = \mathbf{0}_{m \times n_z}$, garantissent la synchronisation asymptotique des systèmes singulièrement perturbés (4.1).

Preuve. Dans le cas où la matrice A_{22} est Hurwitz, les dynamiques rapides (4.21) sont asymptotiquement stables. Il convient de considérer $K_2 = \mathbf{0}_{m \times n_z}$ et de chercher un gain K_0 qui stabilise uniquement les dynamiques lentes (4.20).

D'autre part, la valeur nulle du gain K_2 dans (4.22) implique $K_1 = K_0$, solution à la stabilisation des dynamiques (4.10). ■

Le corollaire précédent traite le cas lorsque la matrice A_{22} est Hurwitz par définition, ceci revient à ce que les dynamiques rapides sont initialement stables. Par conséquent, la conception de la commande se restreint au calcul du gain K_0 stabilisant les dynamiques lentes, plus précisément les dynamiques du modèle réduit (4.20).

4.5 Coût garanti global requis à la synchronisation au sein du SMSP

Dans cette section, nous revenons sur les résultats établis précédemment pour y rajouter la contrainte du critère sur l'effort globale de commande. Nous étendons l'approche de synchronisation décentralisée au sein du système multi-agents singulièrement perturbés (SMSP) traitée dans la Section 4.4 en assurant un seuil de performance donné en terme d'énergie de commande. Une première étape dans cette analyse est d'établir le lien entre le coût garanti global requis à la synchronisation des n agents avec ceux relatives à la stabilisation simultannée des $n - 1$ systèmes équivalents. Ensuite, nous détaillons la méthodologie de la conception de la loi de commande stabilisante et nous montrons que le problème d'optimisation classique est transformé en un problème de coût garanti. Précisément, nous modélisons les paramètres du système liés à la structure du graphe d'interactions, comme étant des incertitudes afin d'assurer un contrôle décentralisé. Cette approche permet de contourner l'utilisation d'informations globales au sein du système multi-agents qui rend le contrôle purement centralisé. Le problème se ramène alors à la recherche d'une loi de commande décentralisée stabilisante avec un coût garanti en présence des perturbations singulières et des incertitudes. Pour déterminer un majorant du coût garanti, nous avons choisi une classe de fonctions de Lyapunov quadratiques permettant d'une part de prouver la stabilité asymptotique et d'autre part de majorer le coût garanti par la valeur initiale de cette fonction de Lyapunov. Enfin, nous détaillons la méthodologie à adopter pour détourner les problèmes liés à l'implémentation numérique de la solution.

4.5.1 Coût garanti global pour la stabilisation simultanée

Soit le système singulièrement perturbé (4.10) mis sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_i(t) \\ \dot{\tilde{z}}_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_i(t) \\ \tilde{z}_i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix} \tilde{u}_i(t), \quad i \in \mathcal{V} \quad (4.24)$$

où $\varepsilon > 0$ est le paramètre des perturbations singulières, $\tilde{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\tilde{z}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ sont les composantes des vecteurs d'états définis par (4.8) et $\tilde{u}_i \in \mathbb{R}^m$ est la loi de commande donnée par (4.14).

Rapellons que le problème de synchronisation des dynamiques (4.1) est transformé en un problème de stabilisation simultanée des systèmes (4.10) ou d'une manière équivalente celle des systèmes (4.24). De plus, comme a été démontré par l'équation (4.16), la fonction du coût global associée à la synchronisation est la somme des n coûts garantis individuels requis à la stabilisation des systèmes (4.10). Or, étant donné que $\lambda_1 = 0$, il en résulte que le système qui lui est associé est autonome et $\tilde{\mathcal{J}}_1 = 0$. Ainsi, nous réécrivons la fonction du coût $\tilde{\mathcal{J}}_i$ pour les $n - 1$ systèmes restants comme suit :

$$\tilde{\mathcal{J}}_i = \int_0^\infty (\lambda_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t)) dt, \quad i = 2, \dots, n \quad (4.25)$$

avec $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = (\tilde{x}_i(t)^\top, \tilde{z}_i(t)^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n_x+n_z}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique définie positive et les valeurs propres de la matrice Laplacienne associée au SMSP satisfont $\lambda^* \leq \lambda_i \leq \lambda^\circ$ pour tout $i = 2, \dots, n$.

Tout d'abord, nous utilisons les différentes notions introduites dans le Chapitre 1 pour définir le coût garanti individuel lié à la stabilisation de chacun des systèmes (4.24) que nous nous proposons de caractériser.

Définition 4.2. Un réel β_i est un coût garanti pour le $i^{\text{ème}}$ système (4.24) sous la loi de commande $\tilde{u}_i(t)$, si la valeur de la fonction coût garanti (4.25) satisfait l'inégalité

$$\tilde{\mathcal{J}}_i \leq \beta_i.$$

Ensuite, nous établissons mathématiquement à travers la proposition qui suit, le lien entre le coût garanti global $\mathcal{J}$ et les coûts garantis individuels $\tilde{\mathcal{J}}_i$ pour $i = 2, \dots, n$.

Proposition 4.2. S'il existe un coût garanti $\beta_i > 0$ tel que la fonction du coût (4.25) en boucle fermé satisfait $\tilde{\mathcal{J}}_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$, alors un coût garanti global $\bar{\mathcal{J}} \triangleq (n - 1) \max_{i=2, \dots, n} (\beta_i)$ est requis à la synchronisation des dynamiques (4.1).

Preuve. Notons par $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ le vecteur regroupant les commandes individuelles définies par (4.14)

$$\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t)^\top, \dots, \tilde{u}_n(t)^\top)^\top$$

ayant pour gains K_1 et K_2 donnés par le Théorème 4.1.

La commande individuelle $\tilde{u}_i(t)$ garantit la stabilisation du $i^{\text{ème}}$ système dont les dynamiques sont données par (4.24). Supposons qu'il existe $\beta_i > 0$ tel que la fonction coût individuel (4.25) satisfait :

$$\tilde{\mathcal{J}}_i \leq \beta_i, \quad \forall i = 2, \dots, n. \quad (4.26)$$

En sommant les coûts garantis individuels des systèmes comme l'indique l'inégalité (4.16) allant de $i = 2$ jusqu'à $i = n$ et en utilisant la majoration introduite par (4.26), nous obtenons le coût garanti global suivant :

$$J = \sum_{i=2}^n \tilde{\mathcal{J}}_i \leq (n-1) \max_{i=2, \dots, n} (\beta_i) = \bar{J}.$$

■

Il est important de souligner que les lois de commande (4.14) dont les performances sont conditionnées par la Proposition 4.2, requièrent les valeurs propres relatives à la matrice Laplacienne décrivant le graphe. Or, cette dépendance contredit l'approche décentralisée que nous nous proposons de développer pour la conception de la commande relative à la synchronisation et qui minimise la fonction coût J dans (4.5). De plus, dans certains cas, seule l'information concernant la connectivité au sein du réseau est accessible. Pour y remédier, nous supposons que le graphe non-orienté en question est connexe et nous revenons sur la modélisation du système singulièrement perturbé en introduisant des incertitudes paramétriques qui correspondent aux valeurs propres de L , valeurs qui requièrent la connaissance des propriétés topologiques du graphe.

4.5.2 Loi de commande décentralisée avec un coût garanti

Dans le but d'écarter la dépendance de la loi de commande (4.14) aux valeurs propres de L , nous modélisons ces paramètres comme étant des incertitudes bornées affectant le système et nous attribuons un modèle incertain aux dynamiques singulièrement perturbés des $n - 1$ systèmes. Par conséquent, notre étude sera fondée principalement sur l'approche d'analyse des système incertains [16, 43].

Afin de simplifier les notations, nous introduisons les matrices suivantes :

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

En premier lieu, nous récrivons le système (4.24) comme suit :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = A_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + B_\varepsilon \tilde{u}_i(t), \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (4.27)$$

avec une loi de commande par retour d'état de la forme $\tilde{u}_i(t) = F_i \hat{u}_i(t)$ où

$$\hat{u}_i(t) = -\mathcal{K} \tilde{\mathbf{x}}_i(t), \quad (4.28)$$

tel que $\mathcal{K} = [K_1, K_2] \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$ et $F_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ définie par

$$F_i = \lambda_i I_{n_x}. \quad (4.29)$$

En utilisant les propriétés de la matrice Laplacienne L , nous concluons que pour un graphe non-orienté donné, composé de n sommets, nous avons :

$$(\lambda^*)^2 I_{n_x} \leq F_i^\top F_i \leq (\lambda^\circ)^2 I_{n_x}, \quad i = 2, \dots, n \quad (4.30)$$

Par conséquent, une manière générale d'analyser le système (4.27), sans pour autant avoir accès à toutes les matrices F_i , est d'étudier le système incertain de la forme :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = A_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + B_\varepsilon F_i \hat{u}_i(t) \quad (4.31)$$

avec F_i est une matrice d'incertitudes satisfaisant l'inégalité (4.30). Cette condition garantit le fait que la matrice d'incertitudes F_i soit bornée en norme ce qui permet d'obtenir un système singulièrement perturbé incertain dont on sait analyser la stabilité [16, 43].

Théorème 4.2. *Considérons le système incertain singulièrement perturbé (4.31).*

Sous les hypothèses 4.2 et 4.3, il existe $\varepsilon^ > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, l'équation de Riccati suivante :*

$$P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^\top P_\varepsilon - 2(\lambda^*)^2 P_\varepsilon B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^\top P_\varepsilon + \lambda^\circ I_{n_x} = 0 \quad (4.32)$$

admet une solution matricielle symétrique définie positive P_ε .

En outre, la loi de commande

$$\tilde{u}_i(t) = -\lambda^* R^{-1} B_\varepsilon^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t), \quad \forall i \in 2, \dots, n \quad (4.33)$$

garantit la stabilisation des $i^{\text{ème}}$ dynamiques (4.27) avec un coût garanti

$$\beta_i = \tilde{\mathbf{x}}_i(0)^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(0).$$

Preuve. Nous divisons la preuve du théorème précédent en deux parties.

Une première étape consiste à rechercher et définir une fonction de Lyapunov commune qui garantit la stabilité des systèmes (4.27). Dans la seconde partie, nous y rajoutons la contrainte d'optimisation d'énergie de la commande obtenue et nous détaillons la méthodologie à adopter pour d'une part, atteindre un coût garanti global mais aussi décentraliser la loi de commande finale.

I. D'abord, nous recherchons une fonction de Lyapunov quadratique commune pour les systèmes singulièrement perturbés (4.27) de la forme

$$V(t, \tilde{\mathbf{x}}_i) = \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t)$$

qui vérifie le critère de minimisation :

$$\min_{\tilde{u}_i} \left(\lambda_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t) + \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{x}}_i) \right) = 0. \quad (4.34)$$

Sous l'hypothèse 4.3 et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, la paire $(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$ est stabilisable. Alors, il existe une matrice symétrique définie positive P_ε tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, nous avons :

$$A_\varepsilon^\top P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon - 2(\lambda^*)^2 P_\varepsilon B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^\top P_\varepsilon + \lambda^\circ I_{n_x} = 0. \quad (4.35)$$

D'autre part, sous l'hypothèse 4.2, l'inégalité (4.2) est vérifiée pour tout $i = 2, \dots, n$. Il en découle :

$$(\lambda^*)^2 B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^\top \leq B_\varepsilon F_i R^{-1} F_i^\top B_\varepsilon^\top$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ et pour tout $i = 2, \dots, n$, la solution de l'équation (4.35) vérifie l'inégalité de Riccati suivante :

$$P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^\top P_\varepsilon - 2P_\varepsilon B_\varepsilon F_i R^{-1} F_i^\top B_\varepsilon^\top P_\varepsilon + \lambda_i I_{n_x} \leq 0 \quad (4.36)$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ et tout au long de l'évolution des dynamiques (4.27), la

fonction de Lyapunov énoncée précédemment satisfait :

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{x}}_i) \leq -\lambda_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top \tilde{\mathbf{x}}_i(t) - \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t), \quad \forall i = 2, \dots, n.$$

Trouvons maintenant une loi de commande stabilisante qui résoud (4.34).

Pour ce faire, nous définissons le Hamiltonien relatif au $i^{\text{ème}}$ système (4.27) :

$$H_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{u}_i, t) = \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t) + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t)^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top P_\varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t)$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} H_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{u}_i, t) &= \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t) + [A_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + B_\varepsilon F_i \tilde{u}_i(t)]^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top P_\varepsilon [A_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + B_\varepsilon F_i \tilde{u}_i(t)]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

La condition nécessaire d'optimalité

$$\nabla_{\tilde{u}_i} H_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{u}_i, t) = 0$$

implique que

$$2F_i^\top B_\varepsilon^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + 2R \tilde{u}_i(t) = 0$$

Ainsi, une loi de commande optimale associée au $i^{\text{ème}}$ système (4.27) est donnée par :

$$\tilde{u}_i(t) = -R^{-1} F_i^\top B_\varepsilon^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) = -\lambda_i R^{-1} B_\varepsilon^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t) \quad (4.38)$$

II. Sous la contrainte du critère (4.25), la loi de commande (4.38) est optimale mais loin d'être décentralisée. Ainsi, il est indispensable de relâcher la contrainte d'optimalité imposée en assurant un coût garanti qui fait appel à une commande décentralisée au sein du système multi-agents. Dans ce cas, la loi de commande devient :

$$\tilde{u}_i^*(t) = -\lambda^* R^{-1} B_\varepsilon^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(t).$$

Cette loi de commande satisfait l'équation de Riccati (4.35) et par conséquent (4.36). Nous déduisons alors un coût garanti individuel requis à la stabilisation du $i^{\text{ème}}$ système

donné par :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}_i &= \int_0^\infty (\lambda_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t)^\top \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \tilde{u}_i(t)^\top R \tilde{u}_i(t)) dt \\ &\leq V(0, \tilde{\mathbf{x}}_i(0)) = \tilde{\mathbf{x}}_i(0)^\top P_\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_i(0), \quad \forall i = 2, \dots, n\end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathbf{x}}_i(0) = [\tilde{x}_i(0)^\top, \tilde{z}_i(0)^\top]^\top$. ■

Remarque 4.3. Il est important de mentionner que les fonctions du coût individuel $\tilde{\mathcal{J}}_i$ dans (4.25) dépendent des valeurs propres λ_i . En revanche, les coût garantis individuels β_i et le coût garanti global $\bar{J}$ qui en découle ne dépendent que de λ^* . Alors, les lois de commande (4.33) sont décentralisées et les coûts garantis qui leurs sont associés sont indépendants des valeurs propres de la matrice Laplacienne et ne dépendent que du nombre d'agent n constituant le système multi-agents.

Remarque 4.4. Soulignons que le coût obtenu β_i dans le Théorème 4.2 dépend des conditions initiales $\tilde{x}_i(0)$ et $\tilde{z}_i(0)$. Cette dépendance peut être écartée en supposant que les conditions initiales sont des variables aléatoires ayant une moyenne nulle avec $E[\tilde{\mathbf{x}}_i(0) \tilde{\mathbf{x}}_i(0)^\top] = I_{n_x}$ (voir par exemple [43]).

Une étape essentielle dans cette analyse consiste à rechercher une matrice P_ε qui, sous les conditions énoncées par le Théorème 4.2, détermine une solution au problème de la conception de la loi de commande satisfaisant la contrainte du coût garanti. En effet, l'équation de Riccati (4.32) est initialement résolue pour P_ε pour, par la suite, en déduire les gains de la commande en substituant la solution de l'équation de Riccati dans (4.33).

4.5.3 Approche de l'implémentation numérique de la solution de Riccati

La détermination de la matrice P_ε solution issue de la résolution de l'équation de Riccati dévoile des problèmes numériques dûs à la différence d'amplitudes des coefficients dans (4.32) sous l'effet du paramètre ε . Pour y remédier, nous nous inspirons des travaux de [45] et nous développons une approche qui décompose l'équation de Riccati complète (4.32) en des équations de Riccati relatives aux dynamiques lentes et rapides découplées indépendantes de ε . Nous montrons par la suite qu'en résolvant les équations découplées obtenues, une solution stabilisante au problème du coût garanti relatif au système incertain (4.31) peut être déduite.

Nous présentons le lemme suivant utile pour le découplage de l'équation de Riccati complète (4.32).

Lemme 4.1. *L'équation algébrique de Riccati (4.32) est équivalente à l'équation de Riccati suivante :*

$$PA + A^\top P - 2(\lambda^*)^2 PBR^{-1}B^\top P + \lambda^\circ I_{n_x} = 0 \quad (4.39)$$

où

$$P = \Gamma_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon, \quad A = \Gamma_\varepsilon A_\varepsilon, \quad B = \Gamma_\varepsilon B_\varepsilon, \quad \Gamma_\varepsilon = \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x, n_z} \\ 0_{n_z, n_x} & \varepsilon I_{n_z} \end{pmatrix},$$

$$\text{et } P_\varepsilon = \begin{pmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^\top \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} P_{11} = P_{11}^\top \\ P_{22} = P_{22}^\top \end{cases} \text{ pour tout } \varepsilon \in (0, \varepsilon^*].$$

En outre, le gain de la loi de commande par retour d'état (4.33) s'écrit

$$\mathcal{K} = [K_1, K_2] = R^{-1}B^\top P. \quad (4.40)$$

La preuve du Lemme 4.1 est analogue à celle du Lemme 3 dans [44].

Remarquons que la matrice $P_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^\top P = P^\top \Gamma_\varepsilon$ est symétrique tandis que la matrice P ne l'est pas. L'équation de Riccati (4.39) peut être partitionnée comme suit

$$\begin{aligned} & P_{11}A_{11} + A_{11}^\top P_{11} + P_{21}^\top A_{21} + A_{21}^\top P_{21} - P_{11}\tilde{S}_{11}P_{11} - P_{21}^\top \tilde{S}_{12}^\top P_{11} - P_{11}\tilde{S}_{12}P_{21} \\ & - P_{21}^\top \tilde{S}_{22}P_{21} + \lambda^\circ I_{n_x} = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon P_{21}A_{11} + P_{22}A_{21} + A_{12}^\top P_{11} + A_{22}^\top P_{21} - \varepsilon P_{21}\tilde{S}_{11}P_{11} - \varepsilon P_{21}\tilde{S}_{12}P_{21} - P_{22}\tilde{S}_{12}P_{11} \\ & - P_{22}\tilde{S}_{22}P_{21} = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon P_{21}A_{12} + \varepsilon A_{12}^\top P_{21}^\top + P_{22}A_{22} + A_{22}^\top P_{22} - \varepsilon^2 P_{21}\tilde{S}_{11}P_{21}^\top - \varepsilon P_{22}^\top \tilde{S}_{12}^\top P_{21}^\top - \varepsilon P_{21}\tilde{S}_{12}P_{22} \\ & - P_{22}\tilde{S}_{22}P_{22} + \lambda^\circ I_{n_z} = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

avec

$$\tilde{S} = 2(\lambda^*)^2 BR^{-1}B^\top = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12}^\top & \tilde{S}_{22} \end{pmatrix}.$$

Similairement à la preuve du Théorème 2 dans [45], nous appliquons le théorème de la fonction implicite [13] pour démontrer l'existence d'une solution P bornée au voisinage de $\varepsilon = 0$.

D'abord, commençons par mettre $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les équations (4.41)-(4.43) :

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{11}^\top A_{11} + A_{11}^\top \bar{P}_{11} + \bar{P}_{21}^\top A_{21} + A_{21}^\top \bar{P}_{21} - \bar{P}_{11} \tilde{S}_{11} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^\top \tilde{S}_{12}^\top \bar{P}_{11} - \bar{P}_{11} \tilde{S}_{12} \bar{P}_{21} \\ & - \bar{P}_{21}^\top \tilde{S}_{22} \bar{P}_{21} + \lambda^\circ I_{n_x} = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\bar{P}_{22}^\top A_{21} + A_{12}^\top \bar{P}_{11} + A_{22}^\top \bar{P}_{21} - \bar{P}_{22}^\top \tilde{S}_{12} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{22} \tilde{S}_{22} \bar{P}_{21} = 0 \quad (4.45)$$

$$\bar{P}_{22}^\top A_{22} + A_{22}^\top \bar{P}_{22} - \bar{P}_{22} \tilde{S}_{22} \bar{P}_{22} + \lambda^\circ I_{n_z} = 0 \quad (4.46)$$

où $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ sont les solutions limites quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Par la suite, définissons l'ensemble des cardinaux des graphes possibles satisfaisant l'équation (4.46) :

$\mathcal{L}_f = \{n > 1, \text{ tel que l'équation de Riccati (4.46) admet une solution définie positive}\}.$

Puisque la matrice $A_{22} - \tilde{S}_{22} \bar{P}_{22}$ est inversible, les équations (4.44)-(4.46) deviennent :

$$\bar{P}_{11} \bar{A}_0 + \bar{A}_0^\top \bar{P}_{11} - \bar{P}_{11} \tilde{S}_0 \bar{P}_{11} + \tilde{Q}_0 = 0 \quad (4.47)$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^\top + N_1^\top \bar{P}_{11} \quad (4.48)$$

$$\bar{P}_{22} A_{22} + A_{22}^\top \bar{P}_{22} - \bar{P}_{22} \tilde{S}_{22} \bar{P}_{22} + \lambda^\circ I_{n_z} = 0 \quad (4.49)$$

avec

$$\begin{aligned} N_1 &= -D_1 D_2^{-1}, \\ N_2 &= A_{21}^\top \bar{P}_{22} D_2^{-1}, \\ \tilde{Q}_0 &= \lambda^\circ I_{n_x} - N_2 A_{21} - A_{21}^\top N_2^\top - N_2 \tilde{S}_{22} N_2^\top, \\ \bar{A}_0 &= A_{11} + N_1 A_{21} + \tilde{S}_{12} N_2^\top + N_1 \tilde{S}_{22} N_2^\top, \\ \tilde{S}_0 &= \tilde{S}_{11} + N_1 \tilde{S}_{12}^\top + \tilde{S}_{12} N_1^\top + N_1 \tilde{S}_{22} N_1^\top, \\ D_1 &= A_{12} - \tilde{S}_{12} \bar{P}_{22}, \\ D_2 &= A_{22} - \tilde{S}_{22} \bar{P}_{22}. \end{aligned}$$

D'autre part, définissons l'ensemble des cardinaux des graphes possibles satisfaisant l'équation (4.47) :

$\mathcal{L}_s = \{n > 1, \text{ tel que l'équation de Riccati (4.47) admet une solution définie positive}\}.$

Enfin, nous établissons le résultat qui suit.

Théorème 4.3. *Pour tout $n \in \mathcal{L}_s \cap \mathcal{L}_f$, il existe $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon^*$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, l'équation algébrique de Riccati généralisée (4.39) admet une solution définie positive*

de la forme

$$P = \begin{pmatrix} \bar{P}_{11} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \varepsilon \bar{P}_{12}^\top + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \bar{P}_{21} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \bar{P}_{22} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

De plus, une loi de commande satisfaisant un coût garanti est donnée par (4.33) avec $P_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^\top P$, une matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati (4.32).

Le Théorème 4.3 conditionne la résolution de l'équation de Riccati telle que, si l'équation (4.39) admet une solution définie positive P alors la solution P_ε de (4.32) fournit le plus petit coût garanti relatif au critère (4.25).

En outre, la loi de commande (4.33) qui en découle stabilise simultanément les $n - 1$ systèmes (4.27) avec un coût garanti de la valeur de β_i . Par conséquent, les n systèmes singulièrement perturbés (4.1) atteignent une synchronisation asymptotique sous la loi de commande par retour d'état (4.4) ayant pour gain (4.40) avec une énergie de commande globale qui ne peut excéder la valeur $\bar{J} = (n - 1) \max_{i=2,\dots,n} (\beta_i)$.

4.6 Exemples illustratifs

Cette section vise à illustrer les résultats théoriques des Sections 4.4 et 4.5.

D'abord, nous nous intéressons à la synchronisation des agents décrits par des dynamiques singulièrement perturbés sans contrainte d'effort de commande. Nous évoquons l'approximation de la solution du système par (4.23) issue du découplage des dynamiques (4.10) et nous montrons que la loi de commande obtenue par la stabilisation simultanée, synchronise les dynamiques des agents constituant le système interconnecté. Egalement, nous mettons l'accent sur le rôle que joue le système labélisé par $i = 1$, évoquée dans la Remarque 4.1, dans le conditionnement de la trajectoire de synchronisation. Dans une seconde partie, nous évaluons l'approche de la conception de la loi de commande en y rajoutant la contrainte du coût garanti et nous comparons numériquement les performances du système, en termes de temps de convergence et d'effort requis à la synchronisation, pour différentes pénalisations de l'effort de la commande (différentes valeurs de R). Nous verrons que les constatations recueillies sont conformes aux résultats classiques dans le cadre de la théorie d'optimisation linéaire quadratique.

Tout au long de cette étude numérique, nous considérons un système multi-agents composé de n agents dont les dynamiques sont données par (4.1) avec

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 2.5 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ainsi, nous attribuons à chaque agent un vecteur d'état composé de 4 états relatifs aux dynamiques lentes $(x_{i,1}, x_{i,2})^\top$ et celle rapides $(z_{i,1}, z_{i,2})^\top$ pour tout $i \in \mathcal{V}$. Nous fixons le paramètre des perturbations singulière $\varepsilon = 10^{-2}$ et nous évaluons l'évolution des dynamiques des agents au sein du réseau sous une loi de commande conçue selon l'analyse que nous proposons dans les Sections 4.4 et 4.5.

4.6.1 Synchronisation sans contrainte d'effort de commande

Soit $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$ et soient les conditions initiales suivantes, pour chacun des trois agents $(2.5, 2, -0.5, -1.5)$, $(1.5, 1, 4, -2)$ et $(0.5, -1, 3, 1)$ respectivement.

La communication au sein du système est décrite par un graphe non-orienté connexe $\mathcal{G}$ dont la matrice Laplacienne est :

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

ayant pour valeurs propres $\lambda_{i \in \mathcal{V}} = \{0, 4, 6\}$.

Tout d'abord, remarquons que la matrice A_{22} est Hurwitz par définition, nous nous plaçons dans le cas du Corollaire 4.1 sous l'hypothèse 4.3 et nous recherchons le gain K_0 qui stabilise les dynamiques lentes (4.20) avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte le gain $K_0 = [-0.0051, -0.0171]$ tel que

$$vp(A_0 - \lambda_2 B_0 K_0) = \{-0.84, -0.081\} \quad \text{et} \quad vp(A_0 - \lambda_3 B_0 K_0) = \{-0.75, -0.13\}$$

Puis, nous simulons le comportement des dynamiques individuelles des deux systèmes (4.10) et leurs approximations (4.23) issues du découplage (4.20)-(4.21).

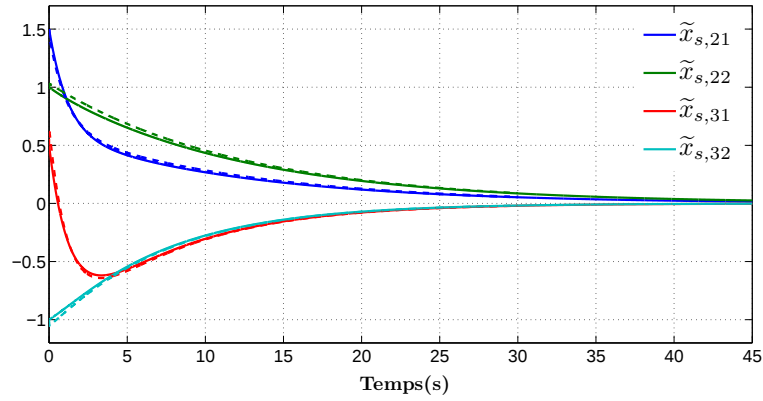


FIGURE 4.1: Trajectoires des dynamiques originales $\tilde{x}_i$ (traits discontinus) et approximations $\tilde{x}_{i,s}$ (traits continus).

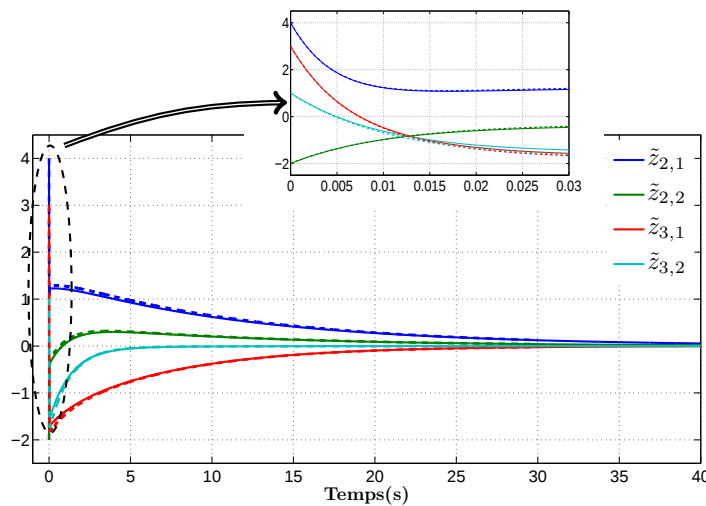


FIGURE 4.2: Trajectoires des dynamiques originales $\tilde{z}_i$ (traits discontinus) et approximations $\tilde{z}_{i,s} + \tilde{z}_{i,f}$ (traits continus).

Les Figures 4.1 et 4.2 montrent que les trajectoires des systèmes (4.10) et (4.23) sont non seulement asymptotiquement stables pour la loi de commande conçue mais également coïncident pour ainsi valider le modèle approximatif établi par la séparation des échelles de temps des dynamiques singulièrement perturbées.

Par la suite, nous nous intéressons au comportement des dynamiques (4.1) sous la loi de commande individuelle (4.4) avec les gains $K_1 = K_0$ et $K_2 = \mathbf{0}_{1 \times 2}$ issus de la résolution du problème de la stabilisation simultanée.

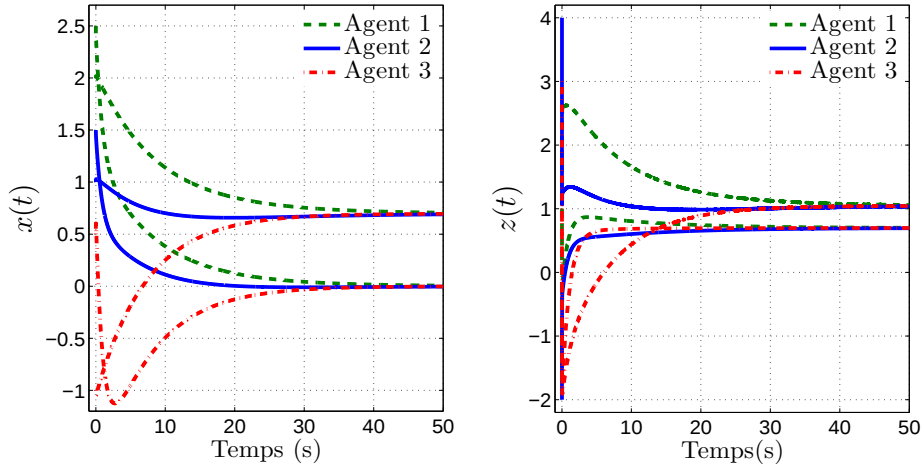


FIGURE 4.3: Trajectoires des dynamiques (4.1). A gauche : Les trajectoires des dynamiques lentes $x(t)$. A droite : Les trajectoires des dynamiques rapides $z(t)$.

La figure précédente valide la loi de commande conçue par la synchronisation des dynamiques singulièrement perturbées originales (4.1). Plus précisément, les dynamiques atteignent un consensus en x et en z ; chacune des variables lentes et rapides convergent avec ses semblables vers un accord final qui leurs est propre :

$$(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)^\top = \begin{cases} x_{i,j} \rightarrow x_j^* \\ z_{i,j} \rightarrow z_j^* \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}.$$

Afin d'illustrer la synchronisation finale en x et en z , nous représentons les trajectoires des dynamiques des agents (4.1) dans le plan x et z .

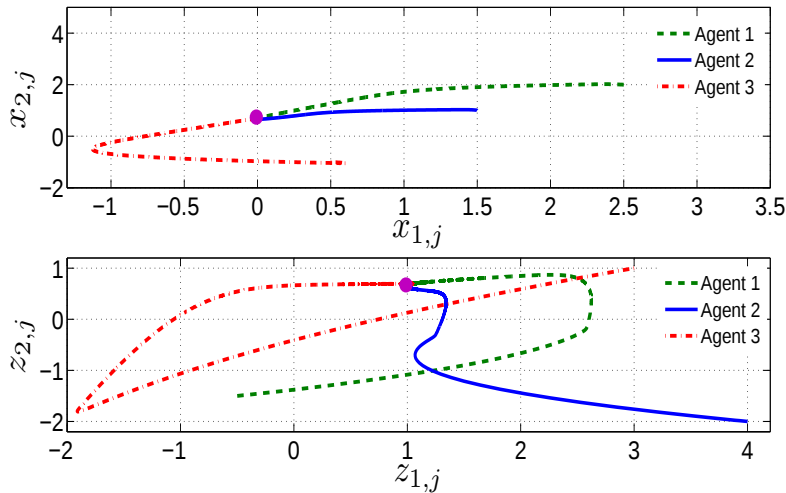


FIGURE 4.4: Consensus des trajectoires des dynamiques (4.1) dans le plan x et z .

Pour mettre l'accent sur l'évolution relativement rapides des variables $z(t)$ par rapport à celle des variables lentes $x(t)$, nous illustrons les variétés qui leur sont attribuées par la Figure 4.5.

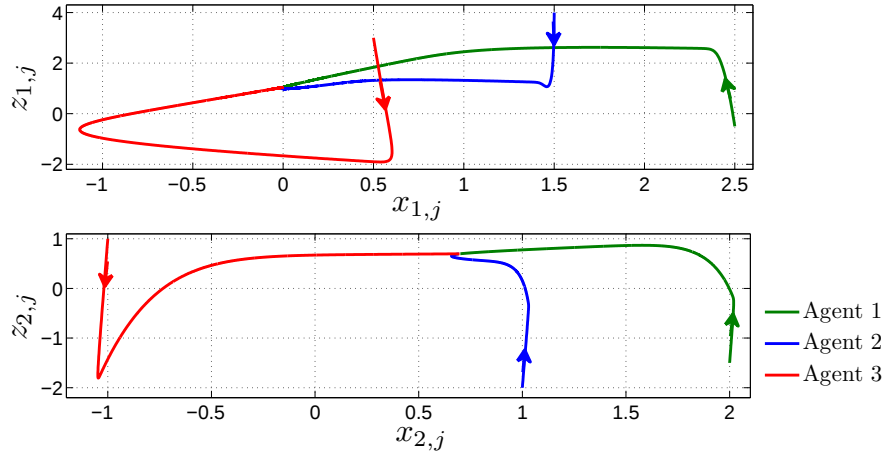


FIGURE 4.5: Variétés lentes et rapides relatives aux dynamiques (4.1).

Les trajectoires évoluent initialement, à partir des conditions initiales fixées, avec une dynamique relativement rapide pour ensuite converger vers les variétés lentes associées.

Le paramètre des perturbations singulières joue un rôle majeur dans les variations des dynamiques rapides. En simulant le système pour différentes valeurs de ε , les figures qui suivent montrent la convergence des dynamiques rapides découplées (4.21) vers la valeur nulle avec une vitesse de convergence 100 fois plus rapide pour $\varepsilon = 0.001$ que pour $\varepsilon = 0.01$.

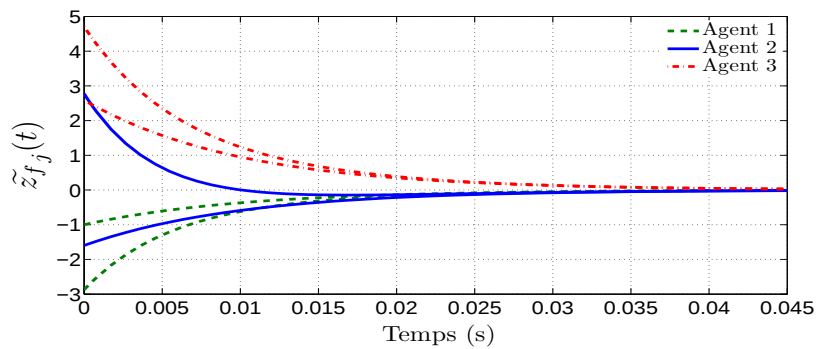


FIGURE 4.6: Trajectoires des dynamiques rapides $\tilde{z}_{f,j}$, $j = 1, 2$ pour $\varepsilon = 0.01$.

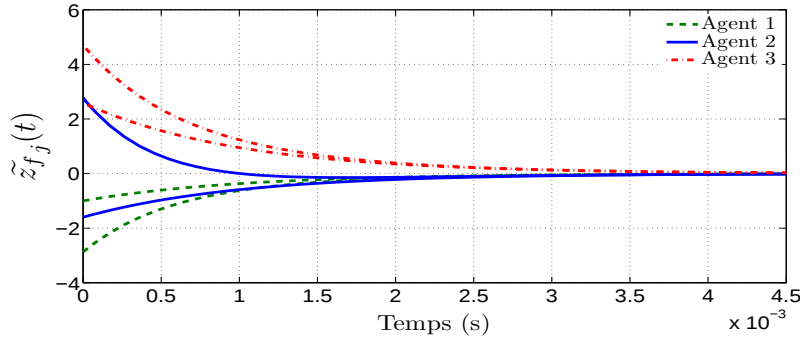


FIGURE 4.7: Trajectoires des dynamiques rapides $\tilde{z}_{f,j}$, $j = 1, 2$ pour $\varepsilon = 0.001$.

Dans la suite, nous nous intéressons à la variété du système (4.11) qui conditionne la nature de la synchronisation.

Considérons un exemple où le système $i = 1$ n'admet pas de point d'équilibre et évaluons les dynamiques sous une loi de commande conçue pour le système (4.1) avec les matrices définies par (4.50) où nous changeons uniquement la matrice A_{11} :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1.5 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les trajectoires dans le plan x et z sont illustrées par la Figure 4.8.

Conformément à ce qui a été conclu dans la Remarque 4.1, les trajectoires se synchronisent selon une trajectoire divergente dans le cas où le système $i = 1$ n'admet pas de point d'équilibre.

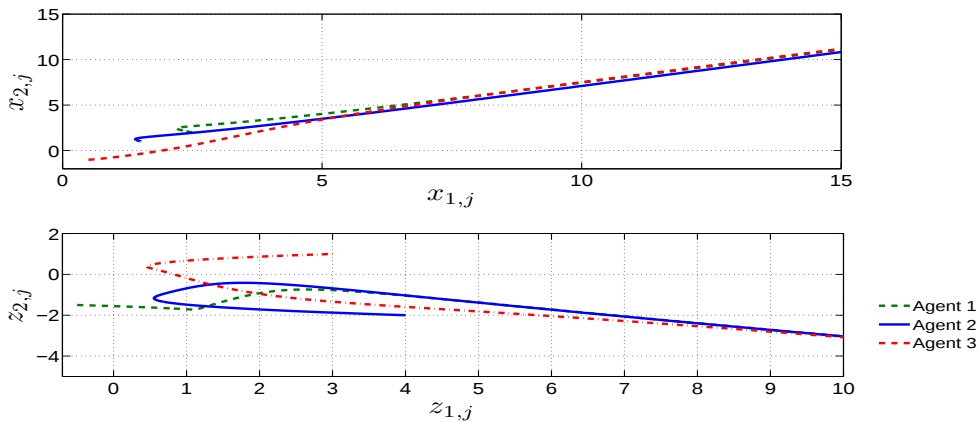


FIGURE 4.8: Synchronisation des trajectoires des dynamiques (4.1) dans le plan x et z .

4.6.2 Synchronisation avec contrainte d'effort de commande

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au coût garanti atteint par la synchronisation au sein d'un système multi-agents composé de 4 agents décrits par les dynamiques (4.1) et les matrices (4.50).

Soit pour chacun des quatre agents dans $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$, les conditions initiales suivantes $(2.5, 2, -0.5, -1.5)$, $(1.5, 1, 4, -2)$, $(0.5, -2.5, 3, 1)$ et $(-3, 3.5, 2, -1)$.

Le graphe des échanges au sein du réseau est décrit par la matrice Laplacienne suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'abord, nous récrivons les dynamiques sous la forme (4.27) vérifiant l'hypothèse 4.3 et nous définissons les incertitudes par $F_{i=2,3,4} \in \{2 \times I_4, 4 \times I_4\}$. Il est important de souligner que les pondérations de la matrice Laplacienne vérifie les conditions de la Remarque 1.5 et par conséquent les valeurs propres λ_i vérifient l'inégalité (4.3) pour tout $i \in \{2, 3, 4\}$ avec $\lambda^* = 0.334$ et $\lambda^\circ = 4$.

Une première étape est de fixer la matrice $R = 1$ pour la fonction coût (4.25). Appliquons le Théorème 4.2 pour déduire une commande décentralisée ayant pour majorant du coût global $\bar{\mathcal{J}}$ que nous définissons au fur et à mesure de la résolution du problème et des équations de Riccati correspondantes.

Remarque 4.5. *Il est à noter que la valeur de ε considérée dans cet exemple permet la résolution numérique classique sous MATLAB de l'équation de Riccati (4.32) sans pour autant avoir recours à la résolution des équations découplées (4.47)-(4.49).*

Nous résolvons l'équation de Riccati (4.32) pour obtenir :

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2.1945 & 2.5668 & 0.0152 & -0.0181 \\ 2.5668 & 43.8466 & 0.0515 & -0.6679 \\ 0.0152 & 0.0515 & 0.0094 & 0.0010 \\ -0.0181 & -0.6679 & 0.0010 & 0.0283 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en utilisant le Lemme 4.1, nous obtenons

$$P = \begin{pmatrix} 2.1945 & 2.5668 & 0.0152 & -0.0181 \\ 2.5668 & 43.8466 & 0.0515 & -0.6679 \\ 1.5168 & 5.1491 & 0.945 & 0.0983 \\ -1.8145 & -66.7874 & 0.0983 & 2.83 \end{pmatrix}.$$

La matrice des gains de la loi de commande (4.33) qui en découle est donnée par :

$$\mathcal{K} = [K_1 \ K_2] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_1 = [6.6581, -12.6581], \\ K_2 = [1.1250, 2.2242]. \end{cases}$$

Nous illustrons dans les Figures (4.9) et (4.10) les trajectoires des dynamiques lentes et rapides respectivement sous la loi de commande stabilisante ainsi obtenue.

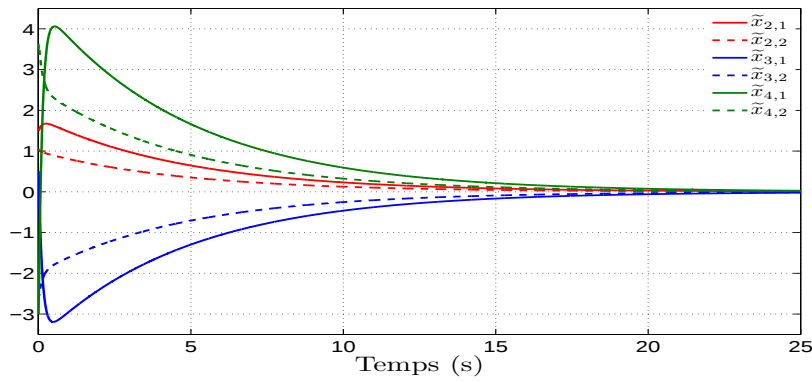


FIGURE 4.9: Trajectories des dynamiques lentes $\tilde{x}_i$.

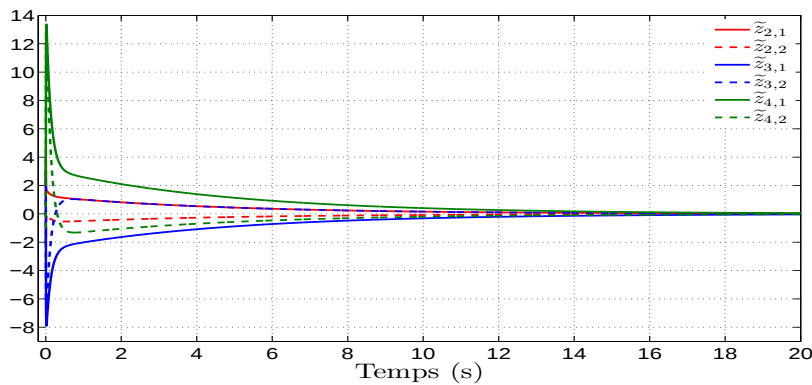


FIGURE 4.10: Trajectories des dynamiques rapides $\tilde{z}_i$.

La stabilisation simultanée est assurée sous la loi de commande décentralisée ainsi conçue. Maintenant, appliquons la loi de commande (4.4) ayant pour gain $\mathcal{K}$ au système (4.1).

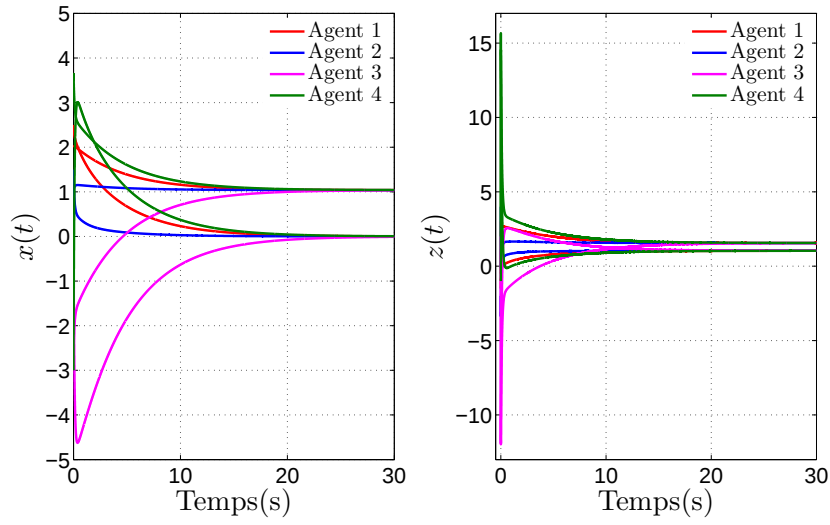


FIGURE 4.11: Synchronisation des dynamiques (4.1) sous la contrainte du coût garanti. A gauche : Les trajectoires des dynamiques lentes $x(t)$. A droite : Les trajectoires des dynamiques rapides $z(t)$.

La Figure 4.11 montre que les trajectoires des états du système en boucle fermée atteignent un consensus final avec un coût global garanti majoré par $\bar{J} = 1524.4$ selon la Proposition 4.2.

Afin de mettre l'accent sur l'influence du choix de la matrice R qui pénalise l'effort de la commande requise à la synchronisation, nous représentons dans la Figure 4.12, l'évolution temporelle de la loi de commande u_i pour $R = 1$ et $R = 10$.

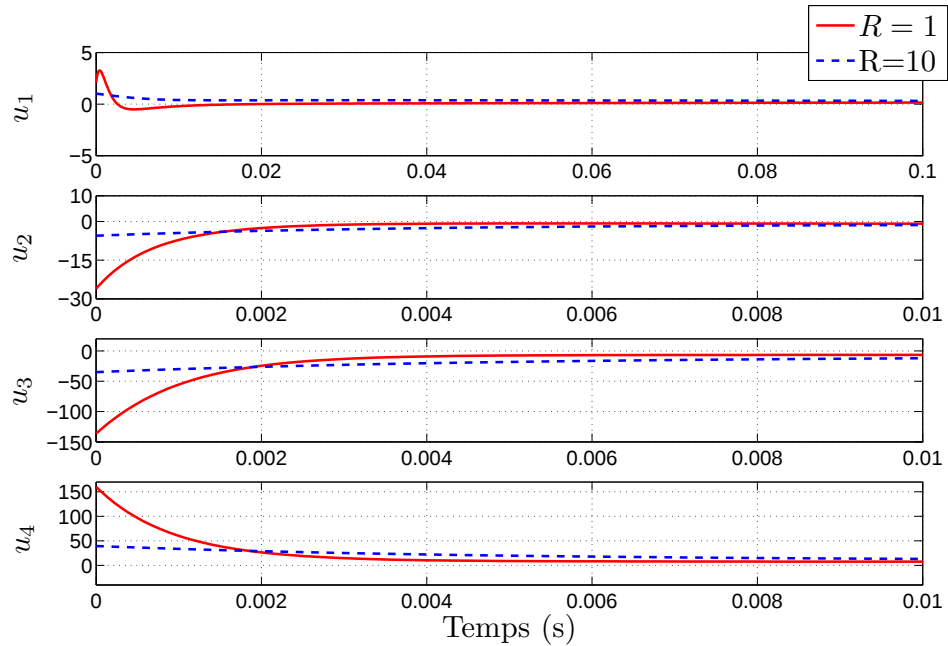


FIGURE 4.12: Evolution de la loi de commande $u_{i \in \mathcal{V}}$ pour $R = 1$ en trait continu rouge et pour $R = 10$ en trait discontinu bleu.

Ce résultat numérique est largement investigué dans la littérature, précisément dans l'analyse des problèmes d'optimisation quadratique. Quand la valeur de la matrice R augmente, les gains de la commande diminuent engendrant une amplitude plus faible de la commande.

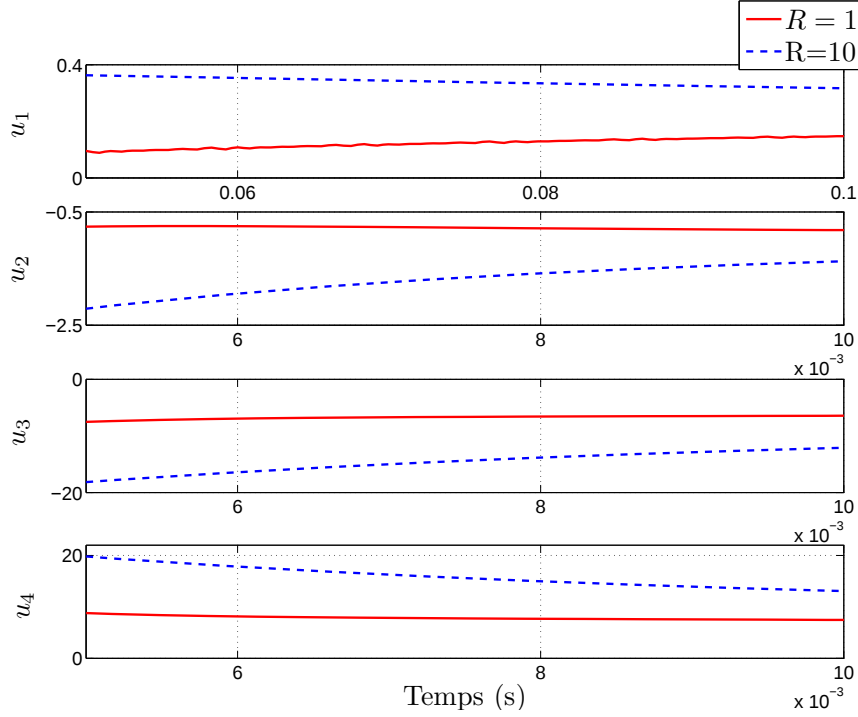


FIGURE 4.13: Agrandissement de la Figure 4.12.

En effet, la résolution de l'équation de Riccati (4.39) pour $R = 10$ donne

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2.8376 & 1.1781 & 0.0268 & 0.0555 \\ 1.1781 & 50.5896 & 0.0285 & -0.8932 \\ 0.0268 & 0.0285 & 0.0102 & 0.0034 \\ 0.0555 & -0.8932 & 0.0034 & 0.0414 \end{pmatrix}$$

et un gain

$$\mathcal{K} = [K_1 \ K_2] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_1 = [1.5087, -3.3526], \\ K_2 = [0.1441, 0.3706]. \end{cases}$$

Par conséquent, les systèmes (4.1) requièrent un temps plus long pour se synchroniser avec un coût garanti qui est au plus égal à $\bar{J} = 1881.1$.

Pour approfondir cette constatation, nous évaluons les performances de notre approche pour différentes valeurs de la matrice R pénalisant l'effort de la commande dans le critère (4.5). Pour chacune des valeurs de R considérée, nous prélevons les valeurs des

coûts garantis individuels et les temps de convergence relatifs à chaque composante synchronisée du vecteur d'état. Soient

$$t_{x_j} = \inf_t \{t > 0 | x_{i,j}(t) - x_j^* < \epsilon, \forall i \in \mathcal{V}, j = 1, 2\}$$

$$t_{z_j} = \inf_t \{t > 0 | z_{i,j}(t) - z_j^* < \epsilon, \forall i \in \mathcal{V}, j = 1, 2\}.$$

Nous fixons $\epsilon = \mathcal{O}(10^{-3})$ et nous récapitulons les résultats obtenus par le tableau suivant.

	β_2	β_3	β_4	t_{x_1}	t_{x_2}	t_{z_1}	t_{z_2}
$R = 1$	60.1	270.88	508.136	28.94	25.9	23.29	25.2
$R = 10$	64.57	318.27	627.25	24.76	21.32	19.43	21.03
$R = 100$	100	575.2	1183.5	21.92	20.05	13.62	19.25

Comme prévu, quand la pénalisation de l'effort de la commande s'accroît, les dynamiques requièrent plus d'énergie qui induit un temps de convergence ou de synchronisation plus grand.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous traitons le problème de synchronisation avec un coût garanti au sein d'un système multi-agents singulièrement perturbé décrit par un graphe non-orienté connexe.

Dans un premier temps, nous avons écarté la contrainte de performance pour s'intéresser à la synchronisation et rechercher les conditions nécessaires d'existence de la loi de commande décentralisée. D'abord, nous avons réécrit le problème de synchronisation des n agents constituant le réseau sous la forme d'un problème de stabilisation simultanée de $n - 1$ systèmes équivalents singulièrement perturbés. Nous avons détaillé les conditions d'existence d'une loi de commande commune à la stabilisation qui aboutissent à une condition de commandabilité d'un seul système linéaire. Par la suite, nous avons présenté la méthodologie de la conception de la loi de commande stabilisante fondée sur le principe de découplage des dynamiques et la séparation des échelles de temps [27].

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons reconsidéré cette problématique en y rajoutant la contrainte de performance. Cette contrainte consiste à assurer un seuil donné sur l'effort global de la commande conçue, concrétisé par un critère quadratique

relatif à la synchronisation. Dans ce cadre, l'analyse établie tient compte parallèlement de l'aspect décentralisé de la commande et du critère d'optimisation à satisfaire. Pour ce faire, le lien entre le critère de performance global requis à la synchronisation et ceux individuels relatifs à la stabilisation des $n - 1$ systèmes a été établi. L'idée est de formuler le problème comme étant un problème de stabilisation avec un coût garanti pour un système singulièrement perturbé incertain où les incertitudes paramétriques modélisent les propriétés topologiques du graphe. Enfin, nous avons développé l'approche de la conception de la loi de commande en question et nous avons détaillé son implémentation numérique que nous avons validé à travers des exemples illustratifs.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

Les travaux de cette thèse sont consacrés à la prise en compte des échelles de temps multiples dans les systèmes dynamiques hybrides et les systèmes multi-agents à travers la notion de perturbations singulières.

Dans une première partie, nous avons étudié une classe de systèmes hybrides singulièrement perturbés dont la nature des variables d'états peut changer à chaque événement. Nous avons développé un modèle mathématique hybride qui fait appel simultanément à des processus continus singulièrement perturbés combinés avec des dynamiques discrètes modélisant les changements de nature des variables d'état. Cette modélisation aboutit à une classe générale de systèmes qui englobe plusieurs classes existantes telles que les systèmes à commutations, les systèmes implusifs, les systèmes singulièrement perturbés en temps continu . . .

L'analyse de stabilité de cette classe de systèmes requiert la mise en oeuvre d'outils d'analyse classiques des systèmes linéaires singulièrement perturbés et des résultats existants concernant les systèmes hybrides. Nous avons proposé des conditions suffisantes de stabilité en termes de temps de séjour minimum. Cette contrainte temporelle est la somme de deux termes : un terme en $\mathcal{O}(1)$ nécessaire pour garantir la stabilité du modèle réduit et un terme en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ essentiel pour la stabilité des dynamiques rapides. Par la suite, nous avons présenté l'extension de ces résultats en relâchant la condition du temps de séjour minimum à une valeur de l'ordre de ε et nous avons présenté une méthode de recherche de séquences stabilisantes.

Dans la deuxième partie, nous avons considéré le problème de synchronisation avec coût garanti au sein des systèmes multi-agents décrits par des dynamiques singulièrement perturbés. A notre connaissance, il n'existe pas de travaux antérieurs traitant cette

problématique. Nous avons exploité les propriétés algébriques du graphe lié au système multi-agents, étant fixe et non-orienté, pour transformer le problème de synchronisation en un problème de stabilisation simultanée. Le problème de stabilisation simultanée d'un ensemble de systèmes linéaires a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature et il est considéré comme indécidable. Cependant, dans notre cas, les systèmes linéaires à stabiliser simultanément présentent une particularité qui permet de contourner cette difficulté. En effet, la solution proposée implique la satisfaction d'une condition de stabilisabilité d'un seul système. Nous avons ensuite développé une approche de synthèse de lois de commande décentralisées avec coût garanti. Pour garantir l'aspect décentralisé, nous avons modélisé les propriétés topologiques du graphe comme des incertitudes paramétriques bornées en norme et nous avons utilisé le formalisme des systèmes singulièrement perturbés incertains pour décrire les dynamiques des agents. Enfin, nous avons caractérisé la valeur du coût garanti.

Les problèmes que nous avons traités dans cette thèse donnent lieu à de nombreuses perspectives.

Un premier point à développer est l'application des résultats de stabilité des systèmes hybrides singulièrement perturbés au système industriel du laminage à chaud dont nous nous sommes inspirés. L'idée serait d'exploiter le modèle mathématique développé dans [33] et de garantir un temps de séjour minimal séparant deux modes de fonctionnement consécutifs. En d'autres termes, le passage de la bande métallique dans le laminoir est contraint par une condition temporelle qui régit les commutations et les changements de nature des variables.

Un second point intéressant et accessible consiste à étudier la synchronisation avec coût garanti pour un système multi-agents décrit par un graphe orienté ayant une topologie commutative. Résoudre cette problématique revient à imposer que le graphe soit connexe pour toute commutation de la topologie. Enfin, la synchronisation des systèmes multi-agents singulièrement perturbés avec retour de sortie décentralisé est un problème difficile et ouvert sur lequel il n'existe aucun résultat à l'heure actuel.

Annexe A

Outils

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, nous rappelons quelques notions et concepts mathématiques.

Définition A.1. Matrice définie positive

Une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite définie positive (semi-définie positive) si pour tout vecteur colonne $x \neq 0$, $x^\top A x$ est strictement positif (positif).

Définition A.2. Matrice de Hurwitz

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite matrice de Hurwitz si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Définition A.3. Matrice de Schur

Une matrice carrée A est dite matrice de Schur si le module de toutes les valeurs propres de A est inférieur à l'unité.

Des résultats existants dans la littérature présentent des propriétés diverses des matrices de Schur. Dans ce cadre, nous citons la proposition suivante.

Proposition A.1. [50] Soit une matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- La matrice A est Schur.
- Il existe $p \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $A p < p$.
- Il existe une matrice diagonale $P > 0$ telle que $A^\top P A < P$.

Remarque A.1. [50] Si A est Schur alors $A^\top$ l'est aussi ; il existe $p \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $A^\top p < p$.

Définition A.4. Norme d'un vecteur

La norme Euclidienne d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce mémoire, la norme matricielle utilisée est la norme 2 notée par $\|\cdot\|$ et rappelée ci-dessous.

Définition A.5. Norme matricielle

La norme 2 d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie par $\|A\| = \sqrt{\rho(A^\top A)}$.

Définition A.6. Produit de Kronecker

Soient deux matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ avec $a_{ij} = [A]_{ij}$ et $b_{ij} = [B]_{ij}$.

Leur produit de Kronecker est la matrice $A \otimes B$ de taille $mp \times nq$ définie par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}.$$

Définition A.7. La notation $\mathcal{O}(\cdot)$

Soit deux fonctions f et g définies sur $S \subseteq \mathbb{R}$, on dit que f est dominée par g en un point x_0 , noté $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, si et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset S$ de x_0 et un réel $\kappa > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq \kappa |g(x)| \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Définition A.8. Théorème des fonctions implicites

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k , avec $k \geq 1$. Notons

$$D_x f(x, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}} \quad D_y f(x, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tel que $f(a, b) = 0$ et la différentielle partielle $D_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage $\mathcal{W}$ de b dans $\mathbb{R}^p$

et une application $\phi : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ de classe C^k tels que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ et

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{W}, \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x).$$

En outre, pour tout point $(a, b) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ tel que $f(a, b) = 0$,

$$D_\phi(a) = -D_y^{-1}f(a, \phi(a)) \circ D_x f(a, \phi(a))$$

où $D_\phi(x)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial \phi_p}{\partial x_m}(x, y) \end{pmatrix}$$

Pour plus de détails sur les fonctions implicites et leurs propriétés, le lecteur pourra consulter [13].

Bibliographie

- [1] M. Abdelrahim, R. Postoyan, and J. Daafouz. Event-triggered control of nonlinear singularly perturbed systems based only on the slow dynamics. *Automatica*, 52 :15–22, 2015.
- [2] J.-M. Andreoli. Coordination as negotiated transactions. *Object Orientation with Parallelism and Persistence*, pages 151–173, 1995.
- [3] M. Balachandra and P. R. Sethna. A generalization of the method of averaging for systems with two time scales. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 58(3) :261–283, 1975.
- [4] E. Bıyık and M. Arcak. Area aggregation and time-scale modeling for sparse nonlinear networks. *Systems & Control Letters*, 57(2) :142–149, 2007.
- [5] V. Blondel. *Simultaneous stabilization of linear systems*, volume 191 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, 1994.
- [6] V. D. Blondel, J. M. Hendrickx, and J.N. Tsitsiklis. On Krause’s multi-agent consensus model with state-dependent connectivity. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 54(11) :2586–2597, 2009.
- [7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- [8] F. Bullo, J. Cortés, and S. Martinez. *Distributed Control of Robotic Networks. A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms*. Princeton University Press, 2009.
- [9] Y. Cao and W. Ren. Optimal linear-consensus algorithms : An LQR perspective. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 40(3) :819–830, June 2010.

- [10] J. H. Chow and P. V. Kokotovic. A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes. In *1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes*, pages 219–224, Dec 1976.
- [11] J.H. Chow and P. Kokotović. Time scale modeling of sparse dynamic networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(8) :714–722, 1985.
- [12] J. Cortés and F. Bullo. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems. *SIAM J. Control Optim.*, 44(5) :1543–1574, October 2005.
- [13] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Read Books Ltd, 2013.
- [14] M. Fiacchini and I.-C. Morărescu. Convex conditions on decentralized control for graph topology preservation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(6) :1640–1645, DOI.10.1109/TAC.2013.2292719 2014.
- [15] S. Friedland and R. Nabben. On cheeger-type inequalities for weighted graphs. *Journal of Graph Theory*, 41(1) :1–17, 2002.
- [16] G. Garcia, J. Daafouz, and J. Bernussou. H_2 guaranteed cost control for singularly perturbed uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(9) :1323–1329, Sep 1998.
- [17] D. Gfeller and P. De Los Rios. Spectral coarse graining and synchronization in oscillator networks. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :174104, 2008.
- [18] C. Godsil and G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag, New-York, 2001.
- [19] R. Goebel, R.G. Sanfelice, and A.R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems*. Princeton University Press, 2012.
- [20] R. Hegselmann and U. Krause. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 5(3), 2002.
- [21] D. Henrion, S. Tarbouriech, and M. Sebek. Rank-one lmi approach to simultaneous stabilization of linear systems. *Systems & Control Letters*, 38(2) :79–89, 1999.

- [22] L. Hetel, J. Daafouz, S. Tarbouriech, and C. Prieur. Stabilization of linear impulsive systems through a nearly-periodic reset. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 7 :4–15, 2013.
- [23] A.L. Hodgkin and A.F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117 :500–544, 1952.
- [24] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48(6) :988–1001, 2003.
- [25] RE. Kalman. *Contributions to the theory of optimal control*, volume 5. Citeseer, 1960.
- [26] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. Prentice Hall, 2001.
- [27] P. Kokotović, H.K. Khalil, and J. O'Reilly. *Singular perturbation methods in control : analysis and design*. SIAM Series in Classics and Applied Mathematics, 1999.
- [28] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, New York, 1984.
- [29] L.Chen and K. Aihara. A model of periodic oscillation for genetic regulatory systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 49(10) :1429–1436, 2002.
- [30] H. Li, W. Yan, and Y. Shi. Optimal consensus of multi-agent systems with general unstable discrete-time linear dynamics. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 2840–2845, July 2016.
- [31] Y. Li and X. Wang. Guaranteed cost control for singularly perturbed uncertain systems. In *Sixth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, volume 1, pages 1020–1025, Oct 2006.
- [32] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, 19(5) :59–70, Oct 1999.
- [33] I. Mallocci. *Two time scale switched systems : Application to steering control in hot strip mills*. PhD thesis, Univ. Lorraine - CRAN UMR 7039, 2009.

- [34] I. Mallocci, J. Daafouz, and C. Iung. Stabilization of continuous-time singularly perturbed switched systems. In *Proc. of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009.
- [35] M. Alwan, X. Liu, and B. Ingalls. Exponential stability of singularly perturbed switched systems with time delay. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2(3) :913–921, 2008.
- [36] S. Martin. *Coordination and robustness in dynamical multi-agents systems*. Thèse, Université de Grenoble, November 2012.
- [37] M. Mesbahi and M. Egerstedt. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, 2010.
- [38] W. Michiels, I.-C. Morărescu, and S.-I. Niculescu. Consensus problems with distributed delays, with application to traffic flow models. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(1) :77–101, 2009.
- [39] B. Mohar. Eigenvalues, diameter, and mean distance in graphs. *Graphs and Combinatorics*, 7(1) :53–64, 1991.
- [40] L. Moreau. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50(2) :169–182, 2005.
- [41] I.-C. Morărescu and A. Girard. Opinion dynamics with decaying confidence : Application to community detection in graphs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 56(8) :1862 – 1873, 2011.
- [42] I.-C. Morărescu, W. Michiels, and M. Jungers. Synchronization of coupled nonlinear oscillators with shifted gamma-distributed delays. In *Proceedings of American Control Conference*, 2013.
- [43] H. Mukaidani and K. Mizukami. The guaranteed cost control problem of uncertain singularly perturbed systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(2) :716 – 735, 2000.
- [44] H. Mukaidani, H. Xu, and K. Mizukami. Recursive approach of h control problems for singularly perturbed systems under perfect- and imperfect-state measurements. *International Journal of Systems Science*, 30(5) :467–477, 1999.

- [45] H. Mukaidani, H. Xu, and T. Okita. Robust stabilization of non-standard singularly perturbed systems with uncertainties. In *IFAC World Congress, G*, volume 151, page 156, 1999.
- [46] D. Nesic and A.R. Teel. Input-to-state stability for nonlinear time-varying systems via averaging. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 14 :257–280, 2001.
- [47] R. Olfati-Saber and R.M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49 :1520–1533, 2004.
- [48] G.A. Pavlopoulos, M. Secrier, C.N. Moschopoulos, T.G. Soldatos, S. Kossida, J. Aerts, R. Schneider, and P. G. Bagos. Using graph theory to analyze biological networks. *BioData Mining*, 4(10) :1–27, 2011.
- [49] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10) :2109–2112, 1998.
- [50] A. Rantzer. Distributed control of positive systems. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 6608–6611, Dec 2011.
- [51] O. Ratmann, C. Wiuf, and J. W. Pinney. From evidence to inference : Probing the evolution of protein interaction networks. *HFSP Journal*, 3(5) :290–306, 2009.
- [52] W. Ren and R. W. Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50(5) :655–661, 2005.
- [53] D. Romeres, f. Dörfler, and F. Bullo. Novel results on slow coherency in consensus and power networks. In *Proc. of the 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012.
- [54] F. Rotella. *Méthodes algébriques et analytiques pour la simplification et la commande de systèmes bilinéaires à deux dynamiques*. PhD thesis, Université des sciences et techniques de Lille Flandres Artois, 1987.
- [55] R.G. Sanfelice and A. R. Teel. On singular perturbations due to fast actuators in hybrid control systems. *Automatica*, 47 :692–701, 2011.

- [56] P.S Simeonov and D.D Bainov. Stability of the solutions of singularly perturbed systems with impulse effect. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 136(2) :575 – 588, 1988.
- [57] E. Steur, I. Tyukin, and H. Nijmeijer. Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D*, (238) :2119–2128, 2009.
- [58] S. H. Strogatz. *Sync : The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion Press, 2003.
- [59] H. Tanner, A. Jadbabaie, and G. Pappas. Flocking in teams of nonholonomic agents. In Vijay Kumar, Naomi Leonard, and A. Morse, editors, *Cooperative Control*, volume 309 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 458–460. Springer, 2005.
- [60] A.R. Teel, L. Moreau, and D. Nesic. A unified framework for input-to-state stability in systems with two time scales. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9) :1526–1544, 2003.
- [61] B. Touri and A. Nedic. On approximations and ergodicity classes in random chains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(11) :2718–2730, 2012.
- [62] Y. Wang, L. Gan, and P. M. Djurić. Opinion dynamics in multi-agent systems with binary decision exchanges. In *2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4588–4592, March 2016.

Résumé

Les travaux de cette thèse portent sur l'analyse de stabilité et la synthèse de commande pour les systèmes singulièrement perturbés. Dans une première partie, nous présentons et analysons une classe générale de systèmes linéaires hybrides singulièrement perturbés dans lesquels la nature lente et rapide des variables d'état dépend du mode de fonctionnement. L'analyse de stabilité est fondée sur des résultats classiques de la théorie de Lyapunov pour les systèmes singulièrement perturbés.

Une deuxième partie de ce travail présente la conception d'une loi de commande décentralisée qui garantit la synchronisation des systèmes multi-agents singulièrement perturbés avec un coût global garanti. Afin de contourner l'utilisation d'informations centralisées liées à la structure du réseau d'interconnexion, le problème est résolu en reformulant le problème de synchronisation comme un problème de stabilisation d'un système linéaire incertain singulièrement perturbé.

Mots clés : Systèmes singulièrement perturbés ; Systèmes dynamiques hybrides ; Temps de séjour minimum ; Commande décentralisée ; Système multi-agents ; coût garanti.

Summary

This PhD thesis is dedicated to the study of stability and control design for singularly perturbed systems. In the first part, we introduce and analyze a general class of singularly perturbed linear hybrid systems, in which the slow or fast nature of the variables is mode-dependent. Our stability analysis is based on classical results of Lyapunov's theory for singularly perturbed systems.

A second part of this work presents the design of a decentralized control strategy that allows singularly perturbed multi-agent systems to achieve synchronization with global performance guarantees. To avoid the use of centralized information related to the interconnection network structure, the problem is solved by rewriting the synchronization problem in terms of stabilization of a singularly perturbed uncertain linear system.

Keywords : Singularly perturbed systems ; Hybrid dynamical systems ; Dwell-time ; Decentralized control ; Multi-agent systems ; Guaranteed cost.

