UNIVERSITÉ DE
CERGY-PONTOISE

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
THÉORIQUE ET MODÉLISATION





THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES

Spécialité Physique Théorique

EFFETS DE LA DEUXIÈME ORBITALE DANS LES SYSTÈMES UNIDIMENSIONNELS DE FERMIONS ALCALINO-TERREUX ULTRAFROIDS

PAR Valentin BOIS

Soutenue le *mardi 28 mars 2017* devant la commission d'examen composée de :

M. Patrick AZARIA	LPTMC, Paris	Président du jury
M. Edmond ORIGNAC	Laboratoire de Physique ENS, Lyon	Rapporteur
M. Guillaume ROUX	LPTMS, Orsay	Rapporteur
M. Benoît DOUÇOT	LPTHE, Paris	Examinateur
M. Pierre PUJOL	IRSAMC, Toulouse	Examinateur
M. Philippe LECHEMINANT	LPTM, Cergy-Pontoise	Directeur de thèse

Table des matières

Table des figures **7**

1 Modèle de Hubbard SU(N) à une orbitale **33**
1.1 Dérivation du modèle . . . 33
1.1.1 Le hamiltonien à un corps . . . 34
1.1.2 Les opérateurs du réseau . . . 36
1.1.3 Le hamiltonien d'interaction à deux corps . . . 37
1.1.4 Le hamiltonien total, les symétries . . . 39
1.2 Le cas incommensurable . . . 41
1.2.1 Le domaine répulsif . . . 42
1.2.2 Le domaine attractif . . . 43
1.3 Un atome par site . . . 45
1.3.1 Le domaine répulsif . . . 45
1.3.2 Le domaine attractif . . . 46
1.4 Le demi-remplissage . . . 47
1.4.1 Le domaine répulsif . . . 47
1.4.2 Le domaine attractif . . . 48
1.5 Résumé & conclusion . . . 49

2 Modèles de Hubbard SU(N) à 2 orbitales **53**
2.1 La stratégie des états électroniques, modèle *g*-*e* . . . 54
2.1.1 Le hamiltonien à un corps . . . 54
2.1.2 Le hamiltonien d'interaction à deux corps . . . 57
2.1.3 Le hamiltonien total, les symétries . . . 60
2.1.4 Diagonalisation du hamiltonien libre . . . 64
2.2 La stratégie des états harmoniques, modèle *p*-band . . . 67
2.2.1 Le hamiltonien à un corps . . . 68
2.2.2 Le hamiltonien d'interaction à deux corps . . . 69
2.2.3 Le hamiltonien total, les symétries . . . 72
2.2.4 Diagonalisation du hamiltonien libre . . . 75

2.3 La stratégie du double-puits, modèle d'échelle . . . 76
2.3.1 Le hamiltonien à un corps . . . 77
2.3.2 Le hamiltonien d'interaction à deux corps . . . 81
2.3.3 Le hamiltonien total, les symétries . . . 84
2.3.4 Diagonalisation du hamiltonien libre . . . 86
2.3.5 Le hamiltonien d'interaction dans les nouveaux degrés . . . 87

3 Les outils du couplage faible 89
3.1 Théorie libre . . . 89
3.1.1 Écriture lagrangienne et symétrie conforme . . . 94
3.1.2 Les symétries de l'action . . . 97
3.2 Vers le traitement de l'interaction, outils conformes et bosonisations . . . 100
3.2.1 Bases de théorie conforme . . . 100
3.2.2 Courants de symétrie . . . 104
3.3 Bosonisation abélienne . . . 118
3.3.1 Le cas N quelconque . . . 118
3.3.2 Le cas N = 2 et la refermionisation . . . 127
3.4 L'interaction à faible couplage traitée : le groupe de renormalisation perturbatif . 133
3.4.1 Définitions sur le groupe de renormalisation . . . 133
3.4.2 Les OPE des opérateurs d'interaction . . . 138
3.4.3 Les équations du groupe de renormalisation . . . 144
3.4.4 Discussion générale des solutions des équations de RG . . . 147

4 Étude du cas N = 2 155
4.1 Le quart de remplissage . . . 155
4.1.1 Les lignes de symétrie . . . 156
4.1.2 Le fort couplage . . . 156
4.1.3 Les degrés de liberté de charge . . . 158
4.1.4 Les degrés non-abéliens . . . 159
4.1.5 Les phases dans l'approche de bases énergie . . . 165
4.1.6 L'approche numérique et le diagramme de phase . . . 170
4.2 Le demi-remplissage . . . 175
4.2.1 Dualités et phases . . . 175
4.2.2 Modèle *p*-band . . . 187
4.2.3 Modèle *g*-*e* . . . 196
4.2.4 Modèle du double-puits . . . 204

5 Étude du cas N > 2 217
5.1 Le remplissage incommensurable . . . 217
5.1.1 Les dualités . . . 218

5.1.2 Le modèle p-band . . . 226
5.1.3 Le modèle g-e . . . 229
5.2 Le demi-remplissage . . . 234
5.2.1 Les phases du couplage faible . . . 235
5.2.2 L'approche du fort couplage . . . 247
5.2.3 L'approche numérique . . . 254

A Dictionnaires des modèles **263**

B Décomposition des termes à quatre fermions dans les opérateurs d'interaction **269**

C Informations pratiques sur SU(n) **271**

Bibliographie **273**

Table des figures

1 Les particules réelles en interaction peuvent être vues comme des quasiparticules, mais sans interaction. 19

2 Diagramme de phase d'un cuprate présentant une phase supraconductrice à haute température critique lorsque le matériau est dopé en trous. La phase "Métal étrange" échappe à la description usuelle des métaux. À dopage nul le système est isolant de Mott. 20

3 Fonctions spectrales des gaz de Fermi, liquide de Fermi et liquide de Luttinger. Si les pics de la particule et de la quasiparticules se ressemblent, le comportement du liquide de Luttinger est nettement moins simple avec ces divergences séparées pour la charge et le spin. 22

4 Susceptibilité en fonction de la température pour différentes directions cristallographiques a, b et c. La direction b correspond à celle du système quasi-unidimensionnel et l'on y voit la chute de susceptibilité due au gap. *A. Meyer, A. Gleizes, J.J. Girerd, M. Verdaguer et O. Kahn : Spectrochimie des éléments de transition, Orsay - 1982.* 23

5 Construction AKLT. En a. La chaîne originale dans la représentation de spin 1. En b. La construction AKLT où la représentation de spin 1 (noté **3**), est décomposée sur deux représentations de spin 1/2 (noté **2**). Dès lors que $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$, après avoir antisymétrisé les spins 1/2 par couples, on reprojette les couples en décalé sur la représentation triplet. En c. Avec des bords libres, il y a l'apparition d'état de bord de spin 1/2. 25

6 a. Les alcalino-terreux ainsi que toutes les espèces présentant une structure électronique à deux électrons de valence (en anglais : *alkaline-earth like*) b. Les atomes alcalino-terreux (strontium et ytterbium) et leur spin nucléaire I ; La structure électronique des alcalino-terreux avec la transition doublement interdite entre le fondamental et le premier état excité. 30

1.1 La phase de Luther-Emery dans le cas $N = 3$ (issu de [1], résultat de DMRG). Ici, dans le cas impair, la distinction entre les phases CDW et MS se fait sur la courbe $K(U, \bar{n}) = N/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ représentée en **rouge**. On constate qu'au demi-remplissage, lorsque $\bar{n} = 3/2$, les processus d'umklapp gappent la charge, et la phase devient isolante. 44

1.2 Représentations des phases du modèle de Hubbard $SU(4)$ dans la limite de fort couplage ($|U| \gg t$) : a. Dans le régime répulsif, la phase de Spin-Peierls (SP) présente une dimérisation par la création de singulets par paires de sites ; b. Dans le régime attractif, un cristal de période 2 est créé par une alternance de singulets à 0 et 4 fermions, formant une onde de densité de charge (CDW). 47

1.3 Résumé du CHAPITRE 1 avec le cas N = 2 (remplissage incommensurable et demi-remplissage/un atome par site) et N > 2 (remplissage incommensurable, un atome par site et demi-remplissage. En **bleu** et **rouge** sont indiquées pour chaque phase les charges centrales de **charge** et de **spin** correspondantes. Pour le cas à un atome par site, avec N > 2, on remarque l'existence d'une transition de phase - pour $U = U_c$ - entre une phase métallique et une phase de Mott. 51

2.1 L'état e étant un singulet, il n'induit pas d'effet de levée de dégénérescence en spin hyperfin et possède une transition doublement interdite à long temps de vie avec le fondamental. Les niveaux immédiatement supérieurs ne présentent pas cet avantage. 55

2.2 Présentation des divers processus d'interaction du modèle g-e avec la symétrie d'échange. En plus du terme de saut dans les différents secteurs orbitaux (en t), le modèle présente une interaction avec trois principaux processus : au sein d'un secteur (en U), entre les secteurs avec (en V) et sans (en V_{ex}) échange. 64

2.3 Les deux branches orbitales du hamiltonien libre sans la symétrie d'échange distinguées par l'écart en potentiel chimique $\delta\mu$ et par l'anisotropie des termes de saut $t_e - t_g$. 66

2.4 Présentation des divers processus d'interaction du modèle p-band. En plus du terme de saut (en t), le modèle présente par rapport au modèle g-e un processus supplémentaire qui brise la symétrie orbitale $U(1)_o$. 75

2.5 Fonctions de Wannier w_x du potentiel (2.101) par résolution numérique (l'énergie de recul $E_R = \hbar^2 k^2/2m$ sert d'énergie de référence). Dans le double-puits du milieu, les fonctions de Wannier (en gras) ne sont pas des gaussiennes mais possèdent un pic négatif au niveau de l'autre site du double-puits. 83

2.6 Présentation des divers processus d'interaction du modèle du double puits. Ce modèle ressemble beaucoup au modèle p-band, lequel se voit doté de processus supplémentaires de sauts interorbitaux en $t_\perp$. 85

3.1 Le **mer de Fermi** $|0_F\rangle_m$ (sa réduction dans le degré m tout au moins) définit dans chaque branche orbitale un vecteur de Fermi k_F^m qui caractérise les deux points de la surface de Fermi autour desquels nous **linéarisons** et obtenons un secteur gauche et un droit, notés respectivement "L" et "R". 90

3.2 Spectre $\Delta\varepsilon$ des excitations particule-trou possibles à une (en a.) et deux (en b.) dimensions pour une mer de Fermi avec une dispersion parabolique. À deux dimensions, en exploitant la forme de la surface de Fermi, un cercle, $\boldsymbol{q}$ a beaucoup de manières de correspondre à une énergie nulle, tandis qu'à une dimension la surface de Fermi - à deux points - ne permet que des petites excitations à $2k_F$ ou à 0, où elles se propagent à la même vitesse, de manière cohérente. 119

3.3 Une procédure élémentaire du groupe de renormalisation : en a. la théorie initiale $\mathcal{H}$ (avec le seuil Λ) qui dépend des couplages $\{g_i\}_i$. En b. les grands degrés $\Lambda' < k \leqslant \Lambda$ sont **intégrés**, laissant une nouvelles théorie $\mathcal{H}'$ (avec le seuil Λ') qui dépend encore des couplages $\{g_i\}_i$. Elle ne peut être comparée à la première $\mathcal{H}$, dans des couplages couplages $\{g_i'\}_i$ renormalisés, qu'à condition de posséder un même seuil, obtenu en c. par **dilatation**. 134

3.4 Lien entre les paramètres d'interactions et les phases : la **théorie initiale** est donnée par les **paramètres d'interaction** qui définissent un point $g(\ell = 0)$ dans l'**espace des couplages**. Toutes les valeurs des paramètres d'interaction définissent ainsi un hyperplan dans l'espace des couplages. La **procédure de renormalisation** amène ce point hors de cet hyperplan vers un nouveau point $g(\ell_{\text{lim}})$ qui définit une **théorie renormalisée**, laquelle est plus simple et donnera la **phase** qui correspond aux paramètres d'interaction. 137

3.5 Selon la condition initiale, **négative** ou **positive**, le couplage est respectivement non-pertinent, au bout d'un temps infini, ou pertinent, au bout d'un temps fini $\ell^\star$. 148

4.1 Résultat brut (publié dans [2]) du groupe de renormalisation pour le modèle p-band, $\mathrm{N} = 2$, au quart de remplissage : les quatre dualités atteintes par le groupe de renormalisation dans le diagramme de phase. Les différentes zones, **I**, **II**, **III** et **IV**, associées aux dualités $\Omega_5, \Omega_6, \Omega_8$ et Ω_7 respectivement, et sont séparées par les deux droites d'équations respectives $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$. 164

4.2 Diagramme de phase incommensurable : le gap de charge ne s'ouvre pas, et les quatre zones correspondent aux différentes instabilités supraconductrices. 170

4.3 Diagramme de phase numérique obtenu par DMRG (publié dans [2]) avec une longueur $L = 128$. Les valeurs numériques sur le diagramme correspondent au paramètre de Luttinger en ces points. 171

4.4 Résultats du DMRG (publié dans [2]) en trois points **a.**, **b.** et **c.** des zones respectives **II**, **III** et **IV** (répartis comme présenté en **d.**). L'échelle logarithmique permet de comparer les comportements en puissance des diverses fonctions de corrélations et d'en déduire la phase dominante. 172

4.5 Importance relative du paramètre d'ordre BOW selon le couplage U_1 sur la ligne harmonique : on voit aux plus faibles couplages (de $U_1 = 3t$ à $U_1 = 12t$) une montée en puissance, suivie d'une décroissance ($U_1 = 18t$), effet de la compétition avec la phase polarisée (publié dans [2]). 173

4.6 Entropies d'intrication de von Neumann, en **a.** pour des points dans les phases (pour une longueur de chaîne $L = 128$), en **b.** sur les lignes de transition (pour $L = 128$ dans le cas attractif, $L = 64$ dans le cas répulsif). Les comportements en charge centrale attendus sont bien constatés, et notamment sur les lignes de transition (**b.**), avec $c = 2$ dans le cas attractif et $c = 4$ dans le cas répulsif (publié dans [2]). 174

4.7 Diagramme de phase du modèle p-band, $\mathrm{N} = 2$ au quart de remplissage : les zones **II**, **III** et **IV**, du faible au fort couplage, mettent en avant les phases supraconductrices BCS_-, BCS_+ et BCS_d respectivement. Quant à la zone **I**, elle présente trois phases : à faible couplage, tant que le gap de charge n'est pas ouvert, la phase supraconductrice $\mathrm{BCS}_{\mathrm{bond}}$ domine, mais finit par être vaincue pour des couplages plus importants par la phase BOW quant intervient la transition de Mott qui ouvre le gap. Enfin, à très fort couplage, la phase polarisée, non-attendue, prend place. 174

4.8 Résumé des phases du demi-remplissage N $= 2$, avec leur dualité et leur allure sur le réseau. En haut, les phases doublement dégénérées, et en bas les phases non-dégénérées avec un ordre caché (sauf RS). Les 4 degrés sont tels qu'on associe à $1 \equiv g \equiv p_x$ le **bleu** et à $2 \equiv e \equiv p_y$ le **jaune**, et $\uparrow$ et $\downarrow$, $+$ et $-$ respectivement. De même, lorsque les spins s'associent en une représentation fondamentale, cela est indiquée, en **rouge** pour les singulets et en **vert** pour les triplets (du moins pour l'état à $S^z = 0$). 186
4.9 Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle p-band, N $= 2$, au demi-remplissage : les quatre dualités atteintes par le groupe de renormalisation dans le diagramme de phase. Les différentes zones **I**, **II**, **III** et **IV**, associées aux dualités $\Omega_{11}, \Omega_6, \Omega_{12}$ et Ω_7 respectivement et sont séparées par les deux droites d'équations $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$. 192
4.10 Diagramme de phase numérique obtenu par DMRG (publié dans [3]) avec une longueur $L = 64$. La concordance avec l'analyse de basse énergie est manifeste. 194
4.11 Diagramme de phase au demi-remplissage (publié dans [3]) : les zones **I**, **II**, **III** et **IV**, du faible au fort couplages, présente respectivement les phases HS, OLD, HC et RS. 196
4.12 Résultat brut des équations du groupe de renormalisation pour le modèle g-e, N $= 2$ au demi-remplissage : sept dualités, Ω_0, Ω_2, Ω_4, Ω_5, Ω_7, Ω_{10} et Ω_{11}, sont atteintes. Les résultats sont présentés en sphérique (définition à suivre), avec les angles $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi[$ (l'origine $(0, 0)$ est le point en bas, à gauche). Les plans de symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$ et $\mathrm{SU}(2)_c$ sont représentés en **bleu**. Les deux lignes horizontales, tracées pour $\theta_+ \simeq 1,471$ et $\theta_- \simeq 1,862$ ont leur correspondance en FIGURE 4.15. 200
4.13 Diagrammes de phase complets au demi-remplissage, N $= 2$, des modèles g-e (en a.) et Hund (en b.). On constate l'équivalence - *via* un dictionnaire - entre les deux modèles. 201
4.14 Diagrammes de phase au demi-remplissage du modèle g-e sur les plans de symétrie : pour $\mathrm{SU}(2)_o$ (en a.) et pour $\mathrm{SU}(2)_c$ (en b.). 202
4.15 Diagrammes de phase au demi-remplissage du modèle g-e en $(U, V) \in [-0,1; 0,1]^2$, avec $V_{\mathrm{ex}} = -0,03t < 0$ (en a.) et $V_{\mathrm{ex}} = 0,01t > 0$ (en b.). Les cercles tracés ont leur correspondance en FIGURE 4.12 (diagrammes déjà déterminés dans [4]). 203
4.16 Diagrammes de phase au demi-remplissage du modèle g-e (publiés dans [3]), avec $V_{\mathrm{ex}} = -t < 0$ (en a.) et $V_{\mathrm{ex}} = t > 0$ (en b.). Ils sont à comparer avec le résultat de la FIGURE 4.12, même si les zones du diagramme qu'ils décrivent sont quelque peu différentes. 203
4.17 Phases des modèles g-e avec les fermions de Majorana que les autodualités annulent. 204
4.18 Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle double-puits, N $= 2$, au demi-remplissage : dans le diagramme de phase, cinq dualités sont atteintes par les équations du groupe de renormalisation. Les différentes zones, **I**, **II**, **III**, **IV** et **V**, sont associées aux dualités $\Omega_1^\perp, \Omega_2^\perp, \Omega_3^\perp, \Omega_4^\perp$ et $\Omega_5^\perp$ respectivement. 208
4.19 Diagramme de phase au demi-remplissage, à N $= 2$ du modèle de double-puits. Les zones **I**, **II**, **III**, **IV** et **V** correspondent respectivement aux phases SP_π, ODW, S-Mott, S'Mott et D-Mott. . . . 216

5.1 Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle p-band, $N > 2$, au remplissage incommensurable (publié dans [5]) : les trois dualités atteintes dans le diagramme de phase. Les différentes zones, **I**, **II** et **III**, associées aux dualités Ω_0, Ω_2 et Ω_1 respectivement. Ici les calculs sont donnés pour le cas particulier $N = 4$. 227
5.2 Diagramme de phase du modèle p-band incommensurable à $N > 2$ (publié dans [5]) : les zones **I**, **II** et **III**, du faible au fort couplage, mettent en avant les phases à $2k_F$ CDW, ODW_z et ODW_x respectivement. Ici encore, les calculs sont donnés pour le cas $N = 4$. 229
5.3 Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle g-e, $N > 2$, au remplissage incommensurable (publié dans [5]), en a., pour V_{ex} négatif, et en b., pour V_{ex} positif (avec $V_{ex} = \pm t/100$) : deux dualités, Ω_0 et Ω_2, sont atteintes respectivement en zones **I** et **II**, tandis que dans la zone **IV**, c'est la limite $\widetilde{\Omega}$ qui est réalisée. 230
5.4 Diagramme de phase du modèle g-e incommensurable pour $N > 2$ sur le plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$. Là où le plan de symétrie intersecte la zone **I** (associée à CDW), c'est encore une phase de dualité triviale Ω_0 qui est atteinte, tandis que lorsqu'elle fait la séparation entre les zones **II** et **III** (voir FIGURE 5.6), une limite fractionnaire $\widetilde{\Omega}_5$, est atteinte. 232
5.5 Diagramme de phase du modèle g-e incommensurable pour $N > 2$ pour les plans $V_{ex} = \pm t/100$. Les zones **I**, **II** et **IV** sont associées aux phases CDW, ODW_z et ODW_x *vs.* ODW_y (publié dans [5]). 234
5.6 Diagramme de phase complet du modèle g-e incommensurable pour $N > 2$ (en sphérique). La ligne de symétrie orbitale $SU(2)_o$ est représentée en **rouge**. 235
5.7 Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle g-e, en a., et de Hund, en b., à $N > 2$ (ici $N = 4$) et au demi-remplissage : trois dualités, $\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4$, et une limite qui n'est pas une dualité, $\widetilde{\Omega}'$, sont atteintes. Les résultats présentés en sphérique, font apparaître la ligne de symétrie $SU(2)_0$ en **bleu**. 239
5.8 Diagramme de phase du modèle de Hund au demi-remplissage pour $N > 2$ (ici on a $N = 4$), sur le plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$. Les dualités Ω_0 et Ω_4 correspondent aux phases SP et CDW respectivement, et dans une troisième zone, une limite fractionnaire $\widetilde{\Omega}'_5$ associé à la phase HO. . 242
5.9 Construction de la chaîne AKLT-$SU(4)$. En a. la chaîne avec la construction explicite à partir des représentations à une colonne (en **bleu**) qu'on a intriquées entre sites adjacents (en **vert**) puis projeté sur la représentation à deux colonnes (en **rouge**). En b. la même chaîne finale (en **rouge**) qui est constituée de représentations à deux colonnes et au bout (en **bleu**), la représentation à une colonne. 252
5.10 Diagramme de phase complet au demi-remplissage, $N > 2$ (ici $N = 4$) du modèle de Hund. Les phases obtenues par l'approche de fort couplage, toutes les deux de SPT, à savoir HO et $HS_{SU(N)}$, ont des zones (floutées) non-fixées par le faible couplage, car elles émergent à plus fort couplage (voir FIGURE 5.12). 253
5.11 Résumé des phases du faible couplage au demi-remplissage à $N > 2$ (ici $N = 4$), avec la limite des équations du groupe de renormalisation. Les $2N = 8$ degrés sont représentés en **bleu** et **jaune** pour les états g et e respectivement, et les états nucléaires par le nombre $\alpha = 1, 2, 3$ ou 4. L'antisymétrisation des degrés nucléaires (les singulets) est indiquée par les cadres **rouge**. . . . 255

5.12 Diagramme de phase numérique pour le modèle de Hund sur le plan $SU(2)_o$ au demi-remplissage et à N $= 4$, obtenu par DMRG avec une longueur de $L = 36$ (publié dans [3]). Les trois zones colorées correspondent aux zones obtenues à faible couplage par les équations du groupe de renormalisation (OH $\equiv$ HO), tandis que - pour la zone à $U, J > 0$ - à fort couplage émerge une nouvelle phase, à savoir la phase topologique $HS_{SU(N)}$, sur une large plage du diagramme de phase. 256
5.13 Diagrammes de phase du modèle de Hund à N $= 4$ au demi-remplissage (publié dans [3]), en a., pour l'analyse de basse énergie, en b., pour la résolution numérique. Aux couplages plus importants, la phase SP présente une transition de phase vers la phase topologique $HS_{SU(N)}$ tandis que, contrairement au plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$, la phase HO est ici absente, en accord avec la FIGURE 5.10. 256
5.14 Diagrammes de phase de basse énergie du modèle de Hund à N $= 4$ au demi-remplissage (publié dans [3]), en a., pour $J_z = t > 0$, en b., pour $J_z = -t/2 < 0$. 257
5.15 Diagrammes de phase issus du DMRG pour le modèle de Hund à N $= 4$ au demi-remplissage (publié dans [3]), en a., pour $J_z = 4t > 0$, en b., pour $J_z = -4t < 0$. Les lignes en pointillés correspondent à la ligne de symétrie orbitale $SU(2)_o$, *i.e.* $J = J_z$. 258

Remerciements

Ma thèse a duré en tout quatre ans : depuis le moment où j'ai débarqué au LTPM jusqu'à celui où j'ai terminé la rédaction. Et bien, ça n'a pas été trop long, et pour cause, la compagnie n'y était pas si mauvaise, j'ai cru comprendre qu'il s'agissait là d'une compensation à l'allure générale de la ville, l'architecture des bâtiments. Somme toute, la demi-pension était plutôt correcte, les petits-déjeuners parfois offerts et les salades de fruits, excellentes, ont même été promues à l'affichage sur les murs !

Pour autant je n'ai pas re-signé... déjà parce que ça n'a aucun sens, c'est impossible, et puis c'est qu'après avoir dépassé d'une demi-année mon contrat, l'ombre du chausseur de séants plane. Lui qui quotidiennement n'a pas manqué ses terribles mises en garde : *Valentin ! Faut que j'te botte le cul !* (sic), pourrait bien finir - à force de café et de cigarettes - par mettre à exécution son rebondissant projet de m'ajouter au rang des callipyges à biais, des déséquilibrés du banc. Néanmoins - à charge pour mes successeurs de me dédire - la menace n'a jamais été envoyée en l'air, et lui et moi nous nous sommes contentés de faire de la physique (sauf à rechercher un maudit facteur deux, c'est tout aussi ludique et par surcroît ça se pratique en position assise). Et bien je gage que Philippe a été un bon directeur de thèse : jamais sur mon dos (à la manière de certains tortionnaires du résultat, qui emmerdent leurs petits vassaux pourtant zélés), mais pour autant toujours disposé à me guider et à m'éviter égarements et excentricités. Avec M. DELBOS (professeur de mathématique au Lycée) et O. JUILLET (professeur à l'Université de Caen) j'ajoute son nom à cette petite liste de ceux qui ont eu une réelle importance durant mes études.

Il est d'usage de remercier sa famille à la fin, et les parents plus à la fin encore, mais c'est infondé, et imbécile, alors : merci maman, merci papa ! Combien d'heures nous n'avons pas passées à discuter des mes calculs, hmm ? Pas faute d'avoir essayé, alors je me suis rabattu sur la vulgarisation, mais jamais vulgaire. C'est pas mal je trouve, et puis on s'aime bien, et ça circule. C'est notre devise à nous. On y accole la fratrie - des productifs - le double de mouflets depuis quatre ans... et moi qui suis déjà à moitié sourd. Au tricot la tante et la grand-mère, un chiard, ça se bâillonne !

Hors la famille très proche, je suis grandement redevable à Madame et Monsieur JUMEL, que le destin a pourvu, à Paris - d'un studio qui chaussait pile ma pointure ! Alors que ma

seule pension alimentaire me promettait à moins qu'un placard, ils ont eu - deux ans durant, et nourriture comprise - la gentillesse de m'y laisser mettre les pieds : il y a des gens qui vous dépannent, et ils en sont. Et puis ça énerve les gens, j'ai une chance insolente, mais il faut avouer que c'est bien commode.

Parlons maintenant du laboratoire. Si tu lui réclames de l'argent, ne va pas voir Philippe - idiot ! - mais Sylvie. Tu n'auras sûrement pas ton or, mais tu auras un grand sourire avec de bons conseils (surtout si toi aussi tu déconsidères la paperasse), du gâteau dans l'assiette à dauphin - ça va de soi - mais seulement pour les grands jours, et - ça c'est tous les jours ouvrés - des M&Ms, qui n'en sont pas (j'ai jamais bien compris cette histoire, c'est une valentinade inavouée). Sylvie, c'est ta maman du laboratoire, celle dont le seul nom permet l'activation des badges, elle t'ouvre ta porte quand ces derniers sont prisonniers de ton bureau, et l'on raconte même qu'on l'a vue ressusciter une machine à café d'entre les marcs : elle méritait bien un cadeau d'un goût recherché, exquis, et qui, même s'il n'était pas à la hauteur de son dévouement (ce n'était qu'un pauvre nain), ne pourra éviter le malheureux et "accidentel" coup de bêche d'un époux jaloux et jardinier. Et l'on ne peut décemment pas lui délier sa non-moins gentille comparse, Claire, qui, sûrement déçue de ne pas coûter un bras au laboratoire, adopta l'étrange parti de casser le sien (ça non-plus je n'ai pas compris).

Et puis il y a Cédric ! Le Karadoc intelligent qu'une crise d'hypolipémie a rendu chauve, l'As de la fourchette, l'amphitryon assidu, et que Zeus protégera toujours, c'est certain. Rien qu'au laboratoire, les fondues, les boulettes piquantes et le riz qui pique aussi, les tomates farcies, et les cupcakes, un ti' punch pour faire passer tout ça, le reste, et... les cakes au citron. Et ces remarques désobligeantes et malséantes que ces faux-culs d'étudiants professent ! Toujours est-il, Cédric est bon ami. Et pas le genre baveux, molasse, sympa d'emblé. Ah ça non ! Plutôt franc d'entré de jeu, sans pitié, rude, et puis les mois passent, et avec, du respect par les pattes d'oie. C'est toujours amusant d'observer la détresse des nouveaux venus aux premiers contacts avec Monsieur Informatique... *Morale : quand tu es dans la merde, ferme-la.* Et la meilleure des transitions pour le plus sympathique des salauds, le plus roquet des bichons, le plus partenaire de tous les déménageurs, un ami de la meilleure race - n'en déplaise à sa belle-famille - Fabien. Pour équilibrer nos excellences, modestement j'entends, je note immédiatement sur papier qu'il avait essayé - en vain - de me surnommer *passoire*. Soi-disant que je laisse tout filer : les mails, les dates limites, les tests (qu'une notation mal pensée ne rattrapa guère) et même les occasions de me taire. Mais tout ça n'a pas d'importance car, après quatre années, il connaît bien ma chance, et très certainement que je serai devenu *riche et futé* avant qu'il ne se soit définitivement ruiné au loto (cordialement). Pour autant je partagerai le gain... je te dois bien ça, et puis je me dois de faire taire - *dans les faiTs* ! - ces ignobles rumeurs comme quoi les normands seraient de fieffées radines ! Des œufs et quatre belins ! ingrat va... La réponse qui me trote est celle de *Momo au McDo !* Une chose est sûre, on ne l'a pas vu l'enfant de menteur qui dira que Mme Bichon était une pince, à l'image de la manière qu'elle avait de doser les cocktails : après trois ou quatre, je

ne suis même plus vraiment sûr si ça va Sahbi, si le pays de Galles a voté l'indépendance, et si tes parents, ils sont... plutôt beaux ?

Et *c'en est fait, le canon gronde !* La première fois que j'ai vu Aurélien, je me suis demandé ce que cette sale tronche de versaillais venais jusque-là, user MON bureau. Hé ! On ne peut pas dire que j'ai eu le copain dans l'œil. Mais, chemin faisant, *grand bandit*, vilaine croquette à polo vert, natif des bipoulets fleurdelisés, nous avons amplement eu l'occasion de me donner tort. Et *je m'écoute*, le poignet à l'équerre, me rétorquer : *et nanâa*. Quelques souvenirs-clés, j'essaie dans l'ordre : un premier gueuleton, une matinée assassinée par une première discussion, d'emblée la tendance n'était pas orthodoxe, Christian s'en mêle, un deuxième gueuleton, qui suivait déjà une *n*ième discussion... C'est un cochon, un rat et un cafard, que je quitte pour Irène Joliot-Curie, et l'ami suit, nous sommes voisins. Je fais tapis chez Saïd, dans son enclos à bourrin, et toi *t'as vu*, *là j'ai fait... les biceps !?* Le nombre de nos gueuletons affiche déjà autant que leur ticket de caisse, et, depuis le pot de l'amitié, nous entamons un premier pèlerinage nocturne, je ne me souviens plus s'il a été musical, les autres le seront. La Savoie avec Sahbi chez le Marquis de Bissy, une soirée fondue et des aigles noirs face au Mont blanc ! C'est aussi un hidalgo chevauchant une licorne en partance pour l'Espagne, des vacances qui s'inaugurent à la fraise avec mes bonhommes d'oncles, une fuite nocturne dans la ville Rose. *Pfffff, j'suis naaze !* C'est aussi Montségur, prise d'un ardent assaut le jour de mon vingt-cinquième anniversaire, et qu'est-ce qu'on s'emmerde trois longs jours à Carcassonne ! *Au suivant !* Et nous allons direction Paris ! pour un drôle d'atterissage rue du four dans un bar-cheval, pour aller bouder un gros Bouddha blindé serrer un pas-boudin bien bordée. Sûrement que *Madame promène les gènes de vingt-mille officiers de marine...* Toujours est-il, *je trouve madame mauvaise copine !* Et souviens-toi bien de l'arrêt qui nous descend quand tu dors, fainéant, dans ce putain d'autobus ! J'oubliais un gueuleton : *naaan... Aurélien ! Faut vraiment qu'on se calme !* Viennent les derniers mois, ça parle toujours, ça discute encore, ça commande, et puis c'est que ça commence à entasser du livre. Les amis de la mer s'en vont en Bretagne ou à Tahiti... c'est vraiment cons les amis ! Tahiti est bien trop cher et je déteste la Bretagne, double devoir de normand : nous sommes - finalement - un peu radins et ces bretons, v'hermine occidentale, avec leur langue idiote et leur chapeaux ronds tronche-cocotte, font croire au monde entier (où ils se complaisent à ramper) que le Mont est leur. *Et on s'en fout* ! de ces mensonges au beurre salé : un petit fleuve - et de vraiment rien du tout - rappelle à n'en pas douter que Monsieur Michel est de MA patrie. Pour autant, et pour m'y faire mieux bichonner, j'y acceptais un séjour d'une semaine, balayette-andouillette-manchette, et qui sera - qui veut venir ? - le prélude à des rendez-vous vacanciers et pluriannuels pour des escapades en mini-bus ! Et je dis, depuis les banquettes usées de l'irlandais du port : longue et belle vie à toi, chevronné des quintefeuilles !

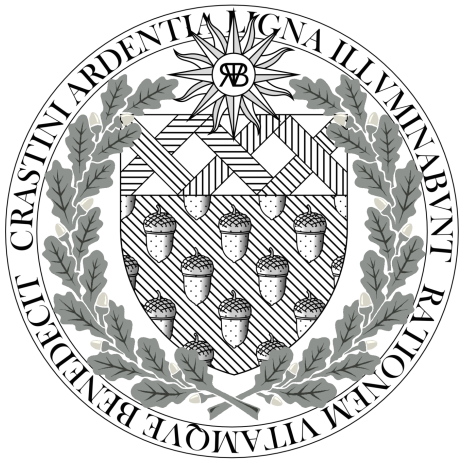
Toujours là Monsieur Bonnet ? Mais tu t'arrêtes jamais ! Sauf pour une pause café-clope évidemment, laquelle prend des airs pensifs et lointains. Ah ! Ça c'est pas d'la merde ! Ma théorie est que tu profites de ces moments en l'air pour te remémorer les plans - à trois dimensions,

s'il vous plaît - des grandes surfaces de la Défense. Toujours est-il, tu as mes meilleurs vœux pour ton retour prochain au pays de la Reine Didon. Et je n'oublie pas les petits spins qui firent office de voisins, Pierre le successeur, au fessier chaussable, et Quentin, camarade retors et âpre à la discussion, avec qui trop peu de soirées chez lui nous empêchèrent d'aligner un mur beaucoup trop long ! Et puis il y a Guy. *Guyyy !* L'œil bienveillant, frisé à peine, de surcroit jamais en retard - hé, *j'suis large !* Et quelle mauvaise langue nous parlera d'habilitation !? Parce qu'il sait beaucoup de choses, je dirais sûrement que c'est *Mister T* ! Mais lorsque tu travailles, va quêter du résultat du côté de chez David... Et si par hasard une photo bras d'honneur t'arrive par ton adresse électronique, t'iras manger avec Claudia un bout au *vietnamique* !

Et, pas moins pas plus, je n'oublie les extérieurs au laboratoire : Gerbold, l'ami depuis nos débuts à Caen, et qui s'en est allé enbataver sa vie et la supraconductivité ultime aux Pays-Bas (voilà maintenant une bonne raison de parler godon). Et n'est-ce pas que ma thèse a de *jolis dessins* ? Nous étudiions pour ça : dès lors, mes études sont accomplies... ; et Mélanie, ma bonne amie, camarade useuse des sols des palais, des châteaux et des églises. Des années qui passent ça te change la tronche, n'est-ce pas !? Nous avons évolué depuis l'octogone, et même l'alsacien accueille maintenant les Rois ! Et je dis encore : tu trouveras dès tôt ce que tu cherches ; mais aussi, mais enfin, je remercie l'anonyme contribuable, expression arrogante, négligeable et négligée de l'opinion publique, impotent politique et brailleur, et qui travaille d'arrache pied à vendre sa sueur au racket bancaire, mais encore au salaire de mon travail improductif : *sympa !*

Enfin, dois-je remercier la personne essentielle et incontournable, sans qui ce travail n'existerait pas : moi-même ? Car si l'on remercie nos semblables, le genre espace, ces quelques mot qui aspirent à vieillir, sont du genre temps, pour plus tard, pour moi, le gland des glands en chef ardent, l'air de rien !

Valentin



Introduction

Ce travail se place dans le cadre de la matière condensée. Avec l'astrophysique - qui observe et modélise le monde de l'infiniment grand - et la physique des particules - qui expérimente et théorise le monde des particules élémentaires avec leurs interactions, la matière condensée, discipline du troisième grand thème de la physique fondamentale qu'est la physique des systèmes avec beaucoup de particules, étudie les systèmes avec des fortes interactions.

Historiquement, du chemin a été parcouru depuis les atomes crochus de Leucippe et Démocrite, les quatre éléments d'Empédocle et vingt-cinq siècles d'Histoire. La description de la matière a d'abord démarré avec l'élaboration de la notion moderne d'atome qui permit à des physiciens de relier les propriétés macroscopiques d'un matériau à celles de ces constituants élémentaires. Dès le XVIIIème siècle, la *théorie cinétique des gaz*, qui décrit un système de particules ponctuelles sans interaction et qui permet une première définition théorisée de la température (comme mesure de l'agitation cinétique), en est un bel exemple.

Néanmoins le monde microscopique se réserve au futur étant donnée l'immense barrière d'échelle qui le sépare alors de l'expérimentateur : un atome d'hydrogène mesure le dixième d'un milliardième de mètre. Alors, puisque les physiciens ne pouvaient pas encore décrire le monde microscopique, ils développèrent au cours du XIXème siècle une seconde stratégie, celle de la description de propriétés globales de la matière avec la *thermodynamique*. Cette dernière présente la matière comme siège d'échanges énergétiques sous toutes les formes. Non seulement elle assoit définitivement la notion de température, mais elle permet une première description du concept de *phase* (sous-partie du système dans laquelle les propriétés globales sont homogènes) et, en conséquence, celle du phénomène - très important - de *transition de phase*.

Seulement, le détail du monde microscopique, comme cause ultime et donc incontournable des propriétés globales de la matière, devait être réintégré à la physique et leur être relié. C'est chose faite au tournant du XIXème et du XXème : en introduisant l'outil statistique, peu familier aux physiciens d'alors, Boltzmann développe l'indémodable *physique statistique*, qui permet de relier les *macro-états* (caractérisés par leurs propriétés thermodynamiques) aux *micro-états* (caractérisés par le détail microscopique) et à leur probabilité de réalisation. Et quand on sait

aujourd'hui que 12 g de carbone contiennent dix fois plus d'atomes qu'il n'y a d'étoiles dans l'Univers visible, l'outil statistique était bel et bien incontournable. Toutefois, établir un lien entre les deux mondes n'empêchait pas les physiciens de cette époque d'être tributaires d'un paradigme atomique que la première moitié du XXème siècle rendra grossier.

C'est qu'en ce tout début de siècle, l'atome n'est encore qu'une hypothèse à laquelle se substitue vite une réalité tangible grâce aux progrès techniques dont bénéficie alors la communauté scientifique. La modélisation de ce nouvel objet mènera à la découverte d'un monde nouveau et insolite : après que les ondes sont devenues des particules, les ondes des particules, après que des incrédules géniaux, inventeurs de quanta, ont gavé de puddings électroniques des chats au crépuscule de leur comble, après quelques congrès Solvay et des jeux de hasard, les années 20 ont vu émerger la *physique quantique*. Dès lors, place au *"fameux quantum d'action"* $\hbar$, aux fonctions d'onde et à l'équation de Schrödinger et ravalement total du cadre décrivant monde microscopique.

Et comme souvent en physique, l'élégance et la justesse scientifique que l'on gagne grâce à un progrès théorique se payent en savoir-faire technique. Ainsi ce que permet l'utilisation combinée des physiques statistique et quantique se trouve être assez rapidement technique, si bien que les physiciens durent adopter des démarches astucieuses pour parvenir à leurs fins. L'une des premières implémentations de la physique quantique dans le cadre de la description de la matière est effectuée par Sommerfeld qui va corriger le modèle de Drude de la conduction électrique dans les métaux. De manière contre-intuitive, la physique quantique prédit l'existence de deux types de particules identiques aux tendances contraires : d'un côté les *bosons*, au comportement grégaire, de l'autre les *fermions*, au comportement solitaire. À ce titre, ces dernières particules sont soumises au *principe d'exclusion de Pauli* qui leur interdit d'occuper le même état. Or Drude l'ignorait à son époque, et Sommerfeld en incluant la donnée fermionique des électrons réussit à obtenir des résultats qualitativement corrects en considérant les électrons de conduction du métal comme un gaz de fermions dégénérés et sans interaction. Ces conditions fondent la théorie du *gaz de Fermi* où la température du gaz est si petite devant la température de dégénérescence - de l'ordre de 80 000 K pour le cuivre par exemple - que les fermions s'agencent, selon le principe d'exclusion de Pauli, depuis l'état le plus bas en énergie jusqu'à un état dont l'énergie définit la *surface de Fermi* au voisinage de laquelle l'essentiel de la physique se déroule.

On peut s'étonner de ce que la description des électrons dans les métaux puisse se faire grâce à un modèle de particules sans interaction puisqu'en réalité les électrons interagissent les uns avec les autres *via* l'interaction coulombienne (qui est à longue portée). De plus ils interagissent également avec le réseau ionique : en un mot, le tour de force de Sommerfeld était bien audacieux. C'est Lev Landau, en étudiant des systèmes d'hélium 3 [6], qui en fournit une ex-

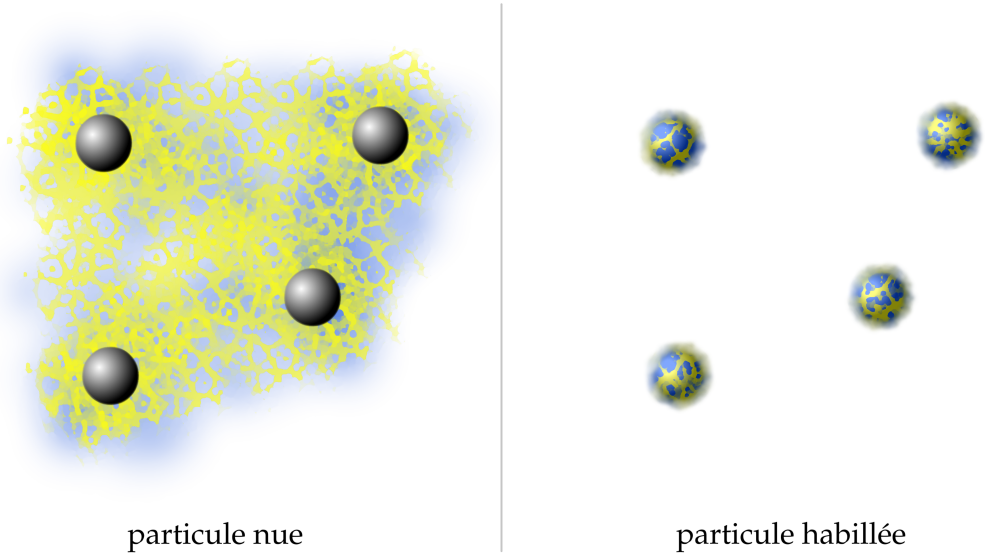


FIGURE 1 – Les particules réelles en interaction peuvent être vues comme des quasiparticules, mais sans interaction.

plication. Il montra que l'interaction pouvait parfois être supprimée ⟨1⟩ grâce à un changement de point de vue : en définissant une nouvelle particule appelée *quasiparticule* (voir FIGURE 1) et très semblable à la particule réelle, c'est-à-dire avec la même charge, le même spin, la même statistique fermionique, mais avec une nouvelle masse effective modifiée par les interactions, on se ramenait à la théorie des gaz de Fermi, mais avec les quasiparticules. Cette théorie, appelée théorie des *liquides de Fermi* [8, 9, 10], appliquée aux métaux permit d'ajouter une amélioration quantitative aux succès premiers succès qualitatif et demeure aujourd'hui encore le paradigme pour la plupart des solides cristallins fermioniques.

Néanmoins, s'il se trouve que l'interaction des électrons dans les métaux peut adiabatiquement être réduite à néant, rien n'empêche d'imaginer des matériaux avec une interaction irréductible qui échappe de ce fait au paradigme du liquide de Fermi. Cette recherche est l'objet de la matière condensée, et les laboratoires du monde entier étant rempli de physiciens en quête de gloire et de sensations fortes, la fin du XXème siècle a eu son lot de découvertes de ce que l'on appelle sans fantaisie des *non-liquides de Fermi*. Le prix Nobel 1987 récompensa J. G. Bednorz et K. A. Müller [11] pour leur découverte l'année précédente de la supraconductivité à haute température dans des systèmes de Ba-La-Cu-O. Ces matériaux, qui ont une température critique relativement élevée si on la compare à celle de la supraconductivité conventionnelle, possèdent une transition entre une phase supraconductrice et une phase métalique qui n'est

⟨1⟩. Ce qui en toute rigueur n'est pas vrai, puisqu'il demeure une interaction résiduelle entre les quasiparticules (voir le premier chapitre de [7]).

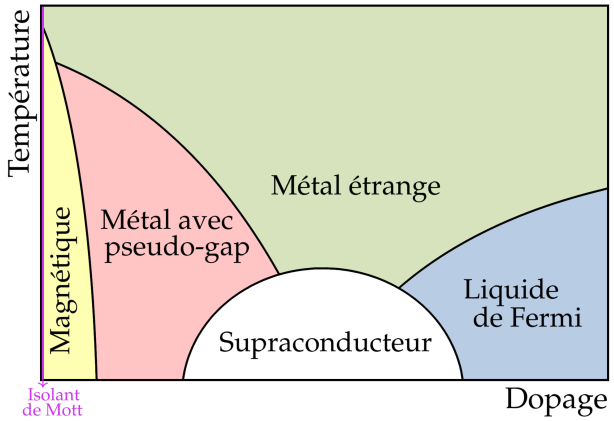


FIGURE 2 – Diagramme de phase d'un cuprate présentant une phase supraconductrice à haute température critique lorsque le matériau est dopé en trous. La phase "Métal étrange" échappe à la description usuelle des métaux. À dopage nul le système est isolant de Mott.

pas descriptible en termes de quasiparticules [12] (voir FIGURE 2) ⟨2⟩. Et si ces matériaux, les cuprates, fournissent l'exemple d'un comportement métallique *étrange* à un certain dopage en trou, il se trouve qu'à dopage nul ils deviennent bizarrement isolants. Physiquement cela est mieux compris : l'interaction entre les électrons y est si forte qu'ils s'attachent à leur site et ne portent ainsi plus le courant électrique. Ce dernier type de phase porte le nom d'*isolant de Mott* [13] et doit son existence à un remplissage précis. En réalité, le premier exemple d'une telle phase a été découverte dans des systèmes d'oxyde de Nickel (NiO) en 1937 [14].

En réalité, chercher des exemples de physique en forte interaction dans des matériaux à trois dimensions n'est pas la meilleure des stratégies : si l'on baisse la dimensionnalité des systèmes étudiés, les corrélations y seront moins diluées, ce qui traduit une importance accrue des interactions. Un résultat théorique bien établit de cet effet de dimensionnalité est le *théorème de Mermin-Wagner* [15] qui interdit toute brisure spontanée des symétries continues pour les systèmes à une et deux dimensions à température finie. Dit autrement, les tentatives de création d'ordre dans de tels systèmes sont - à température non-nulle - complètement annihilées par des fluctuations plus concentrées étant donné qu'elles ont moins d'échappatoires qu'à plus haute dimension. L'effet Hall Quantique Fractionnaire [16] (FQHE en anglais) est une illustration bidimensionnelle d'un système où joue l'effet de dimensionnalité : il s'agit de gaz d'électrons bidimensionnels à basse température soumis à des champs magnétiques. Le rapport entre le nombre d'électrons et le nombre de *quanta* de flux magnétique, appelé *facteur de remplissage* et noté ν, est une fraction rationnelle qui gouverne la physique de ces matériaux. Notamment, une quasiparticule pour le problème peut être construite selon ν, comme un mélange des quanta de

⟨2⟩. Un effet, mesurable, de ce comportement métallique inconnu est une résistivité linéaire en la température à partir de la transition avec la phase supraconductrice quand un comportement quadratique est attendu pour les métaux normaux, décrits par la théorie des liquides de Fermi.

champ magnétique et des électrons : le résultat, complètement hors du paradigme des liquides de Fermi, est une particule avec une statistique ni fermionique, ni même bosonique, mais intermédiaire, anyonique [17, 18], et une charge qui dépend de ν, menant à une conductivité de Hall qui présente des plateaux aux valeurs $\sigma_H = \nu e^2/h$, et dont la réalisation - pour exemple - au remplissage $\nu = 1/3$ a permis d'observer des excitations élémentaires de charge $e/3$ [19, 20] !

La recherche de propriétés exotiques dans des matériaux à basse dimensionnalité passe de façon incontournable par le *graphène* [21, 22, 23, 24], réseau bidimensionnel et hexagonal de carbone que l'on peut considérer comme un métal, mais dont le niveau de Fermi ne contient qu'un seul électron, et dont la relation de dispersion linéaire mène à l'émergence, en matière condensée, à un système de fermions de Dirac . De plus, les plans de graphène peuvent être recourbés sur eux-mêmes pour construire ce que l'on appelle des *nanotubes de carbone* [25, 26, 27]. C'est un exemple de physique unidimensionnelle, que l'on peut compléter par celui des *fils quantiques* [28] - semi-conducteurs dont deux dimensions sont interdites aux porteurs de charges par un matériau avec un gap de bande - ou enfin, des matériaux antiferromagnétiques quasi-unidimensionnels comme le $(TM)_2X$ [29] ou le $KCuF_3$ [30, 31], qui sont les premières réalisations historiques où l'on sonda la théorie paradigmatique de la physique des fermions à une dimension : celle des *liquides de Luttinger* [32, 33].

De manière tout à fait intuitive, à basse température, la statistique fermionique créant une pression de dégénérescence s'ajoutant à l'impossibilité pour les particules de se contourner les unes les autres, puisqu'elles sont astreintes dans un cadre à une dimension, on verra dans ses systèmes des excitations collectives de nature bosonique du type ondes sonores : ce résultat est à rebours des excitations quasiparticulaires des liquides de Fermi. L'un des résultats les plus spectaculaires de cette théorie est sans aucun doute le phénomène - celui-là contre-intuitif - de séparation *spin-charge* [33] : dans de tels systèmes, il existe plusieurs quasiparticules qui portent de manière indépendante les degrés de charge, d'une part, et de spin, de l'autre (voir FIGURE 3).

Cette physique exotique que présente l'unidimensionnel s'accompagne en supplément d'une relative simplicité en conséquence de quoi, contrairement aux cas de plus grande dimensionnalité, des méthodes performantes de résolution ont pu être développées. L'*ansatz de Bethe* [34] - qui est une hypothèse sur la forme des solutions du hamiltonien - occupe une place particulière en ce sens qu'elle permet une résolution exacte de certains modèles, dont nous reparlerons, à commencer par le *modèle de Heisenberg* antiferromagnétique, puis des modèles comme, par exemple, le *modèle de Hubbard*, sur lequel nous reviendrons aussi. Néanmoins cette méthode n'est développée que dans des contextes simples, et d'autres méthodes typiques de l'unidimensionnel et qui viendront à notre secours tout au long de la thèse, à commencer par la *théorie conforme* [35]. Il se trouve en effet que dans certaines limites, notamment lorsque le couplage

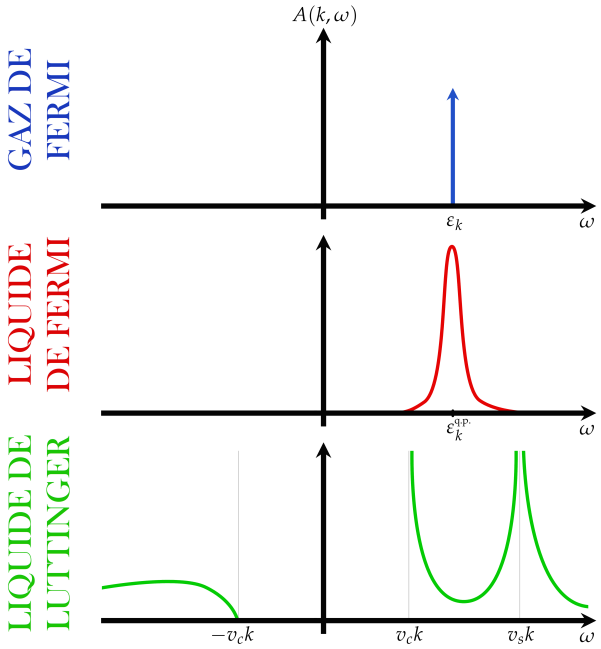


FIGURE 3 – Fonctions spectrales des gaz de Fermi, liquide de Fermi et liquide de Luttinger. Si les pics de la particule et de la quasiparticules se ressemblent, le comportement du liquide de Luttinger est nettement moins simple avec ces divergences séparées pour la charge et le spin.

s'annule, les modèles acquièrent la *symétrie conforme*, infinie ⟨3⟩, qui impose des contraintes si fortes qu'elle permet de déterminer les fonctions de corrélation. Les outils de la *théorie conforme* sont alors d'une grande aide à l'étude de l'interaction en perturbation autour de la théorie libre ; le premier panorama qu'elle permet peut être avantageusement complété par une étude de couplage fort. Citons un autre outil, bien adapté au type d'excitations propre aux liquides de Luttinger : la *bosonisation* [33, 36, 37, 38], permise par la relation de dispersion de la particule libre à une dimension. Il s'agit d'écrire une équivalence entre fermions et bosons afin de décrire les modèles à l'aide de ces derniers, grâce auxquels la description se trouve simplifiée.

Une autre méthode, numérique celle-ci, nous est également d'un grand secours quand les dernières échouent à trancher : le *DMRG* ⟨4⟩ [39, 40, 41], qui est une méthode algorithmique bien adaptée aux problèmes à une dimension, permet d'en obtenir l'état fondamental du modèle. Cette méthode numérique, pour être intéressante en termes de gains de temps de calculs, utilise une méthode de sélection de l'espace de Hilbert - qui en toute généralité croît exponentiellement avec la taille de la chaîne ⟨5⟩ - qui permet de n'en sélectionner que les états physiquement intéressants. Citons à ce propos la *décomposition de Schmidt* [42] qui pemet l'écriture

⟨3⟩. En dimension supérieure, la symétrie correspondante est d'ordre fini, et perd de sa puissance prédictrice.
⟨4⟩. Pour l'anglais *Density-Matrix Renormalization Group*.
⟨5⟩. Pour une chaîne de Heisenberg de longueur L et de spin 1/2, sa dimension est 2^L.

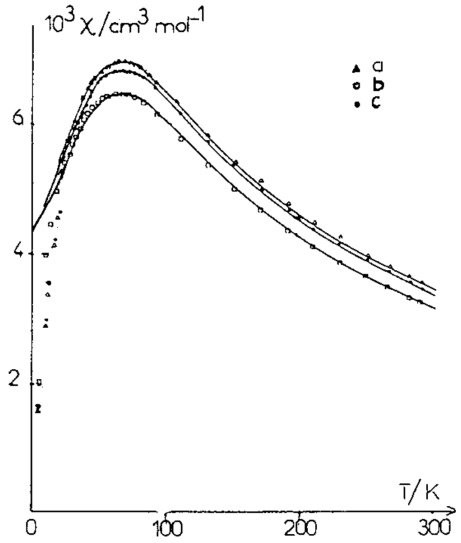


FIGURE 4 – Susceptibilité en fonction de la température pour différentes directions cristallographiques *a*, *b* et *c*. La direction *b* correspond à celle du système quasi-unidimensionnel et l'on y voit la chute de susceptibilité due au gap. *A. Meyer, A. Gleizes, J.J. Girerd, M. Verdaguer et O. Kahn : Spectrochimie des éléments de transition, Orsay - 1982.*

des états en tant qu'*états de produit de matrice* ⟨6⟩ [43, 44]. Cette méthode (le DMRG) permet - entre autres - d'étudier le *modèle de Heisenberg* antiferromagnétique qui consiste en une chaîne où chaque site i est un spin $\boldsymbol{S}_i$ dans la représentation S (de SU(2), prenant $2S+1$ valeurs) et dont l'interaction entre plus proches voisins défavorise leur alignement :

$$\mathcal{H}_{\textit{Heisenberg-AF}} = J \sum_i \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_{i+1}\,, \qquad (J > 0) \tag{1}$$

Ce modèle, pourtant simple, possède malgré tout des propriétés inattendues. Un premier résultat est donné par sa résolution exacte pour $S = 1/2$ en 1923 par H. Bethe [34], qui a utilisé à cette occasion et pour la première fois l'Ansatz qui porte son nom et dont nous avons déjà parlé ; le résultat qu'elle fournit décrit une chaîne faite d'état singulet ($s = 0$), c'est-à-dire non-magnétique, et où les fluctuations quantiques permettent aux premières excitations d'être obtenues avec une énergie aussi petite que l'on veut. Un second résultat est donné dans la limite opposée, la limite semiclassique, lorsque $S \gg 1$, où il est également décrit une physique critique. À l'aune de ces deux résultats, la communauté des physiciens resta sceptique lorsqu'en 1983, F. D. Haldane [45] prétendu que la physique de la chaîne de Heisenberg à $S = 1$ consistait en un fondamental certes constitué de singulets, mais avec un gap d'énergie pour les premières excitations ! En réalité ce résultat, plus général, distinguait les spins demi-entiers, avec un spectre critique et des corrélations en loi puissance, des spins entiers, avec un spectre

⟨6⟩. Connu sous son acronyme anglais comme MPS.

gappée et des corrélations en décroissance exponentielle ; c'est la *conjecture de Haldane*. Et si des résultats expérimentaux vinrent plus tard confirmer ce résultat, on peut noter que dès l'année 1982, soit un an seulement avant l'article d'Haldane, un article expérimental [46] sur le composé quasi-unidimensionnel nommé NENP ⟨7⟩ prédisait - en contradiction avec les résultats connus à l'époque - que la susceptibilité magnétique chutait à basse température (voir FIGURE 4) : le résultat de Haldane explique effectivement que l'état non-magnétique à basse température étant protégé par un gap d'énergie, la susceptibilité sera annihilée à température nulle. Cela dit, pointons du doigt un modèle très proche du modèle de Heisenberg de spin 1, le *modèle AKLT* ⟨8⟩ [43, 47], qui est un modèle gappé [48] et qui présente l'avantage par rapport au modèle de Heisenberg de spin 1 de posséder un fondamental exactement connu. Son hamiltonien a pour expression :

$$\mathcal{H}_{AKLT} = \sum_i \left[\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_{i+1} + \frac{1}{3} \left(\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_{i+1} \right)^2 \right] \tag{2}$$

En réalité, le Hamiltonien AKLT (2) a été trouvée - *via* une écriture en termes de projecteurs - pour correspondre à un état fondamental, si bien que l'on parle plus de *construction* AKLT que de *modèle* AKLT. Le fondamental est construit en scindant les spins 1 de la chaîne en deux spins 1/2, et la loi d'addition des moments cinétiques faisant intervenir un singulet ⟨9⟩, l'état est projetté sur le triplet, de telle manière que des états de bord de spin 1/2 - sans gap - peuvent exister pour des conditions aux limites ouvertes (voir FIGURE 5). À l'instar de cet exemple analytique, la chaîne de Heisenberg présente aussi ces bords ainsi qu'un paramètre d'ordre non-local dit *en ruban* ⟨10⟩ [49, 50] : c'est une ⟨11⟩ *phase topologique* connue sous le nom de *phase de Haldane*. E. Berg et al. [51] ont montré que ce type de phase était distinct d'un autre type de phase par la présence d'une symétrie discrète, et plus tard, Gu et Wen [52] ont montré que c'était cette même symétrie qui protégeait la phase topologique, d'où le nom de phase *Topologique Protégée par la Symétrie* ⟨12⟩ [53]. L'idée est qu'à une dimension, et contrairement à plus haute dimension, l'intrication à faible portée seule ne permet plus l'émergence d'une phase topologique, qui ne peut être maintenue que grâce à la présence d'une symétrie discrète (comme par exemple l'in-

⟨7⟩. Dont la formule, barbare, est $Ni(C_2H_8N_2)NO_2ClO_4$.
⟨8⟩. Qui porte les noms de ses développeurs : Affleck, Lieb, Kennedy et Tasaki.
⟨9⟩. Avec $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$.
⟨10⟩. Un tel paramètre d'ordre, non-local, permet - par exemple pour la chaîne de spin 1 - de rendre compte d'un ordre antiferromagnétique en $S^z = \pm 1$ dilué dans des états $S^z = 0$ et peut être défini comme :

$$\mathcal{O}_{\text{ruban}} := \lim_{|j-k| \to \infty} \langle S^z_j e^{i\pi \sum_{j \leqslant \ell \leqslant k} S^z_\ell} S^z_k \rangle \tag{3}$$

On remarquera l'élégante manière qu'a la somme dans l'exponentielle de ne pas tenir compte des états $S^z = 0$ et de changer de signe lorsqu'un spin se renverse.
⟨11⟩. Une même phase pour la chaîne de Heisenberg $S = 1$ et le modèle AKLT : on peut en effet montrer qu'elles sont reliées adiabatiquement.
⟨12⟩. En anglais, Symmetry Protected Topologique phases, ou SPT phases.

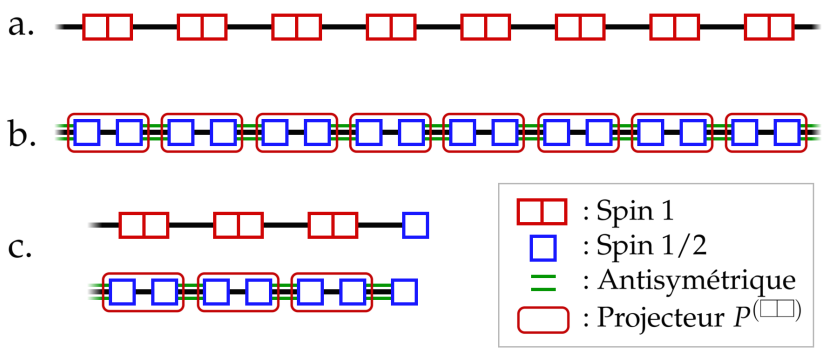


FIGURE 5 – Construction AKLT. En a. La chaîne originale dans la représentation de spin 1. En b. La construction AKLT où la représentation de spin 1 (noté **3**), est décomposée sur deux représentations de spin 1/2 (noté **2**). Dès lors que $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$, après avoir antisymétrisé les spins 1/2 par couples, on reprojette les couples en décalé sur la représentation triplet. En c. Avec des bords libres, il y a l'apparition d'état de bord de spin 1/2.

version du temps ou une réflexion), symétrique que seule une transition de phase pourra briser. Ainsi, une phase topologique se distinguera d'une phase topologiquement triviale car elles ne pourront être adiabatiquement reliées. Dans le cadre de la phase de Haldane, c'est la symétrie par renversement du temps qui préserve la phase topologique : si l'on appliquait un champ magnétique local, qui brise cette symétrie, alors l'intrication à faible portée serait vaincue et la phase topologique serait alors détruite.

À ce stade, présentons un modèle unidimensionnel que nous avons évoqué, plus général que celui des chaînes de spins, et dont la généralisation sera le fil conducteur de cette thèse : le modèle de Hubbard. Il a été introduit par J. Hubbard et demeure le modèle le plus simple de particules en interaction sur un réseau. D'abord introduit pour des électrons, dont le seul degré interne est un spin 1/2, noté $\sigma = \uparrow, \downarrow$, il s'écrit en seconde quantification à l'aide des opérateurs fermioniques de création et d'annihilation au site i de la chaîne, respectivement $c^\dagger_{\sigma,i}$ et $c_{\sigma,i}$, comme la somme de seulement deux termes :

$$\mathcal{H}_{Hubbard} = -t \sum_i \left(c^\dagger_{\sigma,i+1} c_{\sigma,i} + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_i n_i^2 \tag{4}$$

Où $n_i = \sum_\sigma n_{\sigma,i} = \sum_\sigma c^\dagger_{\sigma,i} c_{\sigma,i}$ est l'opérateur qui compte le nombre de fermions tous spins confondus sur le site i. Le premier terme, avec le facteur t, est un terme à un corps qui rend compte de l'effet tunnel, des sauts, entre deux sites adjacents. Ce terme est le terme *libre*, puisque le second, à deux corps, rend compte des interactions - locales - entre les fermions : en plus du principe d'exclusion de Pauli entre fermions, il pilote en effet l'interaction qui existe entre eux ; cette dernière peut être *répulsive*, lorsque U est positif : il coûte alors plus cher de donner à n_i une grande valeur ; mais elle peut être *attractive*, lorsque U négatif et où la situation s'inverse

alors.

Un autre paramètre crucial de ce problème est le *remplissage*, noté $\bar{n}$, qui donne le nombre moyen de fermions par site et dont la valeur est habituellement fixé à l'aide du potentiel chimique μ *via* un terme à un corps en $-\mu \sum_i n_i$. Ayant affaire avec des fermions, le remplissage possède une valeur bornée par le haut : le principe d'exclusion de Pauli interdit en effet de mettre plus de deux fermions sur un site puisque ces derniers ne possèdent que deux degrés de liberté ($\uparrow$ et $\downarrow$), et dans cette dernière configuration (*i.e.* $\bar{n}_{\text{max}} = 2$), comme dans celle sans particule (*i.e.* $\bar{n}_{\text{min}} = 0$), la physique est inexistante puisque le tout y est parfaitement gelé. Le problème est alors distingué selon deux types de remplissage (sans oublier la contrainte fermionique imposant que $\bar{n} < 2$ ⟨13⟩) : d'une part, celui où le nombre moyen d'atomes est *commensurable* au nombre de site, c'est-à-dire de la forme $\bar{n} = p/q$ ($p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^\star$) et d'autre part, tous les autres cas, où le remplissage est irrationnel, c'est-à-dire *incommensurable*. Pour le modèle de Hubbard le cas commensurable $\bar{n} = 1$ est qualifié de *demi-remplissage* puisqu'il correspond à la moitié du remplissage maximal. Pour comprendre pourquoi cette distinction commensurable/incommensurable est capitale, donnons brièvement la physique intuitive du modèle pour différents remplissages, sachant que ce modèle a été résolu grâce à l'Ansatz de Bethe [54, 55]. Premièrement le problème libre, lorsque $U = 0$, décrit une physique critique, à savoir un liquide de Luttinger avec un comportement métallique, des particules délocalisées et un hamiltonien qui se diagonalise dans la base de Fourrier ⟨14⟩ :

$$\mathcal{H}_{Hubbard}^{(U=0)} = \sum_k \varepsilon_k n_k \tag{6}$$

Où $\varepsilon_k = -2t\cos(a_0 k)$ et $n_k = \sum_\sigma n_{\sigma,k} = \sum_\sigma c_{\sigma,k}^\dagger c_{\sigma,k}$. À l'inverse, si l'on considère le cas où l'interaction est fortement répulsive, c'est-à-dire lorsque $U > 0$ et $U \gg t$, les fermions seront très repoussés les uns des autres, et l'on comprend que le remplissage va jouer un rôle prépondérant :

— Au demi-remplissage, la configuration la plus favorable énergétiquement sera de placer un atome sur chaque site. Dès lors on se retrouve dans la situation où l'on gappe la charge (par U) et nous obtenons ce dont nous avons parlé précédemment : un isolant de Mott. Or si la charge est figée, les degrés de liberté de spin - à savoir le spin 1/2 que porte chaque fermion sur son site - peuvent encore interagir : dans cette limite nous recréons finalement un modèle que nous avons aussi vu précédemment : le modèle de

⟨13⟩. Dans la suite, il sera question de système avec un remplissage maximal $\bar{n}_{\text{max}}$ plus grand que 2.
⟨14⟩. On pose simplement (N_{sites} est le nombre de sites de la chaîne et a_0 le pas du réseau) :

$$c_{\sigma,k}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{sites}}}} \sum_j e^{ika_0 j} c_{\sigma,j}^\dagger \tag{5}$$

Heisenberg antiferromagnétique pour le spin 1/2 (équation (1)) avec $J = 4t^2/U$ dont nous savons que la physique est critique. Ainsi entre le cas sans interaction et le cas répulsif, il existe une transition - à $U = 0$ - de phase type métal-isolant, mais pour les degrés de charge seulement. Cette séparation des degrés n'est qu'une conséquence du phénomène de séparation spin-charge que nous avons évoqué et qui intervient de ce modèle.

— Hors du demi-remplissage, nous constatons que nous ne pouvons plus recréer cette configuration de charge figée où les fermions sont fixés à leur site. Si l'on considère par exemple une situation "juste à côté" du demi-remplissage, on voit qu'un manque ⟨15⟩ de particules par rapport à la configuration de l'isolant de Mott pourra exister et se propager librement, c'est-à-dire ramener la criticalité et ainsi, tuer l'isolant. Néanmoins l'interaction et l'effet de séparation spin-charge va donner aux secteurs et charge et de spin excitations qui se propageront avec des vitesses différentes.

Cette situation se retrouve lorsque les interactions deviennent très attractives, mais de manière renversée : au demi-remplissage les particules s'associent par paires sur les sites et forment - à cause de leur statistique fermionique - des singulets, laissant ainsi un site sur deux vide. Autrement dit, la physique des degrés de spin est gappée puisque pour aller dans un secteur de spin différent, il faut briser une paire, c'est-à-dire fournir une énergie U. Quant à la charge, elle est libre dans la mesure où les paires d'électrons peuvent se mouvoir *via* les sites libres et pour un coup énergétique dérisoire en t^2/U : ce type de phase est dénommée *liquide de Luther-Emery* [56]. Nous retrouverons cette symétrie spin/charge reliée aux cas attractif/répulsif dans la suite ⟨16⟩. Hors le demi-remplissage, il reste toujours une fraction de particules qui ne peut pas s'apparier et dont les degrés de liberté de spin permettent à nouveau à des excitations d'exister dans ce secteur.

Notons enfin une symétrie importante du modèle (4). Si l'on considère une matrice unitaire $U \in \mathrm{U}(2)$, alors la transformation globale ⟨17⟩ $c^\dagger_{\sigma,i} \to \sum_{\sigma'} U_{\sigma\sigma'} c^\dagger_{\sigma',i}$ laisse le hamiltonien (4) invariant. Ce dernier possède donc la symétrie $\mathrm{U}(2)$ que l'on peut décomposer ⟨18⟩ en $\mathrm{U}(1)_c \times \mathrm{SU}(2)_s$: le premier terme correspond à la conservation de la charge globale tandis que le second à la conservation du spin global et donc, de manière moins générale, à celle de chacunes des composantes globales du spin. Dans cette thèse, nous aurons loisir d'étendre cette symétrie à $\mathrm{U}(1)_c \times \mathrm{SU}(\mathrm{N})_s$ par une généralisation du modèle de Hubbard : le degré de liberté de spin prendra alors N valeurs. Puis nous généraliserons également le modèle en y ajoutant un degré supplémentaire, qualifié d'*orbital*, et qui prendra deux valeurs. Nous parlons de manière

⟨15⟩. Ou bien un excès selon que l'on se trouve au-dessous ou en dessous du demi-remplissage
⟨16⟩. C'est l'objet de la *transformation de Shiba* [57, 58] qui transforme l'une en l'autre.
⟨17⟩. La transformation est globale, c'est-à-dire qu'elle transforme tous les spins de la chaîne en même temps. La matrice $U_{\sigma\sigma'}$ ne dépend pas du site i.
⟨18⟩. En effet, on peut décomposer $U_{\sigma\sigma'}$ comme $\sqrt{\det(U)} \times \widetilde{U}_{\sigma\sigma'}$ où $\widetilde{U} \in \mathrm{SU}(2)$.

générique de "modèle de Hubbard SU(N) à une ou deux orbitale(s)", selon le cas. Le modèle de Hubbard (4) est à une orbitale et le premier chapitre en sera une généralisation pour un spin à N composantes, tandis que la suite de la thèse verra le traitement du modèle avec deux orbitales.

Ces généralisations ne sont évidemment pas rendues possibles à l'aide de systèmes électroniques dont le spin 1/2 est fixé à jamais. Néanmoins, les avancées dans le domaine des atomes froids permettent déjà une telle extension. Ce domaine s'est développé grâce à l'élaboration des techniques de piégeage et de refroidissement [59] d'atomes neutres par des lasers, et ce, notamment grâce aux trois colauréats du prix Nobel 1997 : S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W. D. Phillips. Le principe des atomes froids est le suivant : si l'on refroidit suffisamment des systèmes d'atomes, il est possible de littéralement piéger ces derniers dans la lumière des lasers. Concrètement, ces *pièges optiques* [59] sont même en mesure de recréer des réseaux, qu'on qualifie alors tout simplement de *réseaux optiques* [60]. Le lien avec la matière condensée historique, c'est-à-dire électronique, est évident : là où la matière présentait des électrons et un réseau ionique, les atomes froids présentent des atomes et un réseau optique. Le problème, c'est que si les électrons dans les métaux présentent une température de dégénérescence quantique même bien au-delà de la température ambiante, les ordres de grandeur changent avec les atomes froids, et ce sont des températures de l'ordre du μK qu'il faut atteindre pour que les atomes atteignent la dégénérescence quantique et son lot d'effets recherchés. Et encore, il s'agit là de refroidir des atomes de l'espèce bosonique, non-concerné par la pression de dégénérescence quantique, qu'il faut alors vaincre quand il s'agit de fermions. C'est pourquoi ce sont d'abord avec des espèces bosoniques d'atomes que le régime de dégénérescence a été atteint : cela valut le prix Nobel 2002 à É. Cornell, C. Weiman [61] et W. Ketterle [62] qui mirent en évidence en 1995 la condensation de Bose-Einstein dans un gaz dilué de ^{87}Rb et à une température de 170 nK. Pour les fermions, la mise en évidence expérimentale suit quatre années plus tard, en 1999, par B. DeMarco et D. S. Jin [63] dans un gaz de ^{40}K à la moitié de la température de Fermi.

Remarquons que dans ces deux cas, les atomes utilisés appartenaient au même groupe des *alcalins*, c'est-à-dire à des atomes avec un seul électron de valence, et pour cause, par rapport à une espèce avec plus d'électrons de valence, l'alcalin est plus aisément maniable, plus préhensible. La structure d'un alcalin est la suivante : un noyau qui possède un *spin nucléaire*, noté I, des couches électroniques remplies sans moment cinétique, un électron de valence dans l'orbitale "s" c'est-à-dire $\ell = 0$ et avec un spin intrinsèque $s = 1/2$ ⟨19⟩, si bien que du point de vue électronique le premier état électronique est caractérisé par $^2S_{1/2}$. Il se trouve que l'interaction intra-atomique intervient entre le noyau et les électrons de valence *via* un terme qui

⟨19⟩. En physique atomique, pour un atome avec n électrons de valence, dont les moments cinétiques orbitaux sont $\ell_1, \dots, \ell_n$ et les spins intrinsèques sont $s_1, \dots, s_n$, on définit le *moment cinétique orbital* total $\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\ell}_i$, le *spin intrinsèque total* $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{s}_i$, ainsi que le *moment cinétique électronique total* $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. Dans le cadre du couplage L-S, valable lorsque $Z \lesssim 30$, les niveaux d'énergie sont caractérisés par les représentations L, S et J de ces trois moments cinétiques, et l'on les note alors $^{2S+1}L_J$ où L correspond à la lettre orbitale d'usage (S, P, D, *etc.* pour $L = 0, 1, 2$, *etc.*).

couple leur moments cinétiques : $\mathcal{H}_{\text{intra-atomique}} \propto \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}$. Ainsi pour un alcalin, il va y avoir une levée de dégénérescence selon la représentation $\langle 20 \rangle$ F du *spin hyperfin* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}$, qui selon la règle d'addition des moments cinétiques sera simplement $F = I \pm 1/2$. Ainsi la structure fine des $2(2I+1) = (2I+2) + (2I)$ états des alcalins ne permet pas d'obtenir une symétrie aussi grande que $\mathrm{SU}(2F+1)$ et concrètement, les atomes ultrafroids d'alcalin avec $F > 1/2$ ne permettent en principe d'explorer de la physique qu'avec une symétrie $\mathrm{SO}(5)$ [64, 65] ou $\mathrm{SU}(3)$ [66, 67].

Dans l'ordre du tableau périodique, il vient ensuite les alcalino-terreux qui possèdent deux électrons de valence, pour lesquels des expériences ont été réalisées dès 2009 [68, 69] pour des gaz de ^{173}Yb et de ^{87}Sr. Dans leur configuration électronique fondamentale, les alcalino-terreux sont entièrement singulet, c'est-à-dire que leur niveau d'énergie correspond à l'état $^1S_0$, autrement dit $J = 0$, si bien que pour cette configuration électronique, l'interaction intra-atomique - $\mathcal{H}_{\text{intra-atomique}} \propto \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}$ - entre les électrons et le noyau est nulle. Cela signifie que les $2I+1$ composantes n'interagissant pas avec les deux électrons de valence : elles sont laissées libres. Ainsi, on peut légitimement s'attendre à ce qu'une symétrie $\mathrm{SU(N)}$ sur les $\mathrm{N} = 2I+1$ degrés de liberté nucléaire soit alors réalisée. Il faut encore que le processus d'interaction entre les atomes laisse lui aussi les degrés nucléaires saufs. Dans ces mélanges dilués d'atomes ultrafroids les interactions inter-atomiques sont réduites - à très basse température - à des interactions de type "onde s", c'est-à-dire des interactions de contact caractérisées par un seul paramètre, la *longueur de diffusion* notée génériquement a et dont le signe distingue les interactions attractives des interactions répulsives. Cela dit, pour que la symétrie $\mathrm{SU(N)}$ soit validée, il faut que cette longueur de diffusion ne dépende pas du spin nucléaire I, or ce n'est pas le cas, néanmoins, on estime [70, 71] que dans le fondamental, la variation relative de cette longueur de diffusion dans le spin nucléaire et plus petite que $\sim 10^{-9}$ et des expériences sont venu confirmer la présence de la symétrie $\mathrm{SU(N)}$ dans des systèmes à deux dimensions pour ^{87}Sr [72] et à trois dimensions pour ^{173}Yb [73].

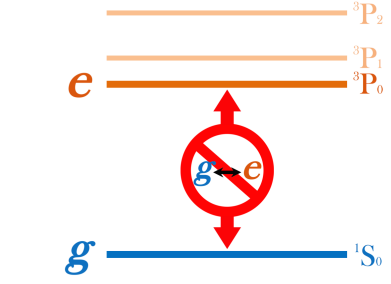
En réalité, les alcalino-terreux réalisent cette symétrie "plus loin" que dans l'état fondamental : le premier niveau excité de l'atome est lui aussi à $J = 0$, puisqu'il s'agit d'un terme $^3P_0$ (il est suivi, comme on le voit sur la FIGURE 6. a, d'état à $J = 1$ et 2 noté $^3P_1$ et $^3P_2$ respectivement) et l'on estime [71] que la variation relative de la longueur de diffusion dans les processus d'interaction inter-atomique faisant intervenir des atomes dans cet état ne dépasse pas $\sim 10^{-3}$. Ainsi la symétrie $\mathrm{SU(N)}$ y demeure raisonnablement satisfaite. Si l'on ajoute qu'entre les états électroniques $^1S_0$ et $^3P_0$, notés habituellement g et e $\langle 21 \rangle$, la transition est doublement interdite $\langle 22 \rangle$,

$\langle 20 \rangle$. En guise de résumé (qu'un lecteur attentif mérite) : le spin hyperfin F est le moment cinétique de l'atome en entier, il se décompose en I, le spin du noyau, et en J, le moment cinétique de tous les électrons de valence, qui se décompose lui-même en S, le spin intrinsèque de tous les électrons de valence, et L, le moment cinétique orbital de tous les électrons de valence.

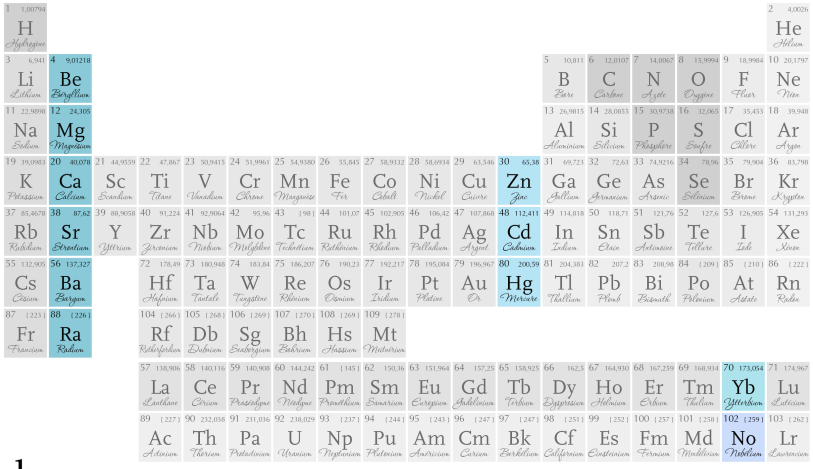
$\langle 21 \rangle$. Pour ***g****round state* et ***e****xcited*.

$\langle 22 \rangle$. En couplage L-S, la condition $\Delta S = 0$ est requise pour les transitions dipolaires électriques (E1), qui sont

Espèces de fermions alcalino-terreux	^{87}Sr	^{173}Yb	^{171}Yb
Spin nucléaire I	9/2	5/2	1/2



a.



b.

FIGURE 6 – a. Les alcalino-terreux ainsi que toutes les espèces présentant une structure électronique à deux électrons de valence (en anglais : *alkaline-earth like*) b. Les atomes alcalino-terreux (strontium et ytterbium) et leur spin nucléaire I ; La structure électronique des alcalino-terreux avec la transition doublement interdite entre le fondamental et le premier état excité.

c'est-à-dire que l'état e possède une durée de vie de l'ordre d'une centaine de secondes [74], soit une éternité dans le cadre des expériences d'atomes froids. Ces propriétés des alcalino-terreux, comme on l'a vu, ne requièrent finalement que la structure électronique que nous avons décrite pour posséder cette énorme symétrie unitaire, et il se trouve que d'autres espèces d'atomes, les *alkaline-earth like* de la FIGURE 6. b, possèdent cette structure ⟨23⟩ et présentent dans les deux premiers états cette symétrie allant jusqu'à SU(10) pour le ^{87}Sr.

Revenons maintenant à notre fil rouge, à savoir les fermions unidimensionnels par les atomes froids, et décrivons comment ce domaine permet, *via* le réglage extrême de ses paramètres, de piéger les alcalino-terreux le long de chaînes. Tout d'abord, le piégeage d'atomes grâce à des lasers est théoriquement un jeu d'enfant : en envoyant des ondes laser l'une face à l'autre le long d'un axe, on créé une onde stationnaire de plans alternant des *maxima* et des *minima* d'intensité lumineuse. En effectuant ceci le long de trois axes perpendiculaires deux à deux, on créé un réseau cubique de *minima* aux seins desquels on pourra piéger les atomes refroidis. Mais il est possible [75], en changeant les directions des axes de propagations des lasers et leur fréquence, de créer des réseaux hexagonaux, rhomboédrique, tétragonal, *etc*. La réalisation de réseaux tridimensionnels réalisée, il aussi aussi possible d'en réduire la dimensionnalité grâce à d'autres lasers qui, par exemple, figent une direction ou deux par un puits harmonique le long d'un ou

le premier ordre de la transition (lorsqu'elles sont nulles, on qualifie la transition d'*interdite*) ; et pour les transitions dipolaires magnétiques (M1) et quadrupolaires électriques (E2), qui à elles deux forment le second ordre de transition, lorsqu'une transition déjà interdite annule aussi ces ordres, elle est *doublement interdite*.

⟨23⟩. Ils possèdent tous deux électrons au delà d'une sous-couche remplie, comme décrit dans ces fondamentaux : [Zn] ≡ [Ar]$3d^{10}4s^2$, [Cd] ≡ [Ar]$4d^{10}5s^2$, [Yb] ≡ [Xe]$4f^{14}6s^2$ et [Hg] ≡ [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^2$.

deux axes : alors des réseaux bidimensionnels (cubique, en abeille comme pour le graphène, mais encore de kagomé [76]) et unidimmensionnels sont synthétisés. Dans le contexte du Yb et du Sr, des expériences ont été réalisées à trois dimensions [73, 77, 78] mais aussi à une dimension [79].

Autre performance que permettent les atomes froids : le contrôle, en principe, des interactions interatomiques grâce au phénomène de *résonnance de Feshbach* [80]. À très basse température, l'interaction entre les atomes est réduite à des interactions du type "interactions en onde *s*", c'est-à-dire des interactions de contact caractérisé par un seul paramètre, la *longueur de diffusion* notée génériquement a et dont le signe distingue des interactions attractives d'interactions répulsives. Le phénomène de résonance de Feshbach consiste en la maîtrise de cette longueur de diffusion - donc de l'interaction interatomique - *via* l'application d'un champ magnétique B, dont il existe une valeur B_0 pour laquelle elle diverge :

$$a(B) - a_0 \propto -\frac{1}{B - B_0} \tag{7}$$

Où a_0 est une longueur positive. Ainsi, c'est flagrant autour de B_0, ce phénomène permet d'obtenir une interaction tantôt attractive, tantôt positive. Malheureusement, ceci fonctionne pour les atomes alcalins [81], qui possèdent un moment, mais en aucune manière pour les atomes alcalino-terreux, qui en sont dépourvu. Aussi cette manière "historique" (qualifiée de résonnance *magnétique*) de produire une résonnance de la longueur de diffusion est supplantée pour ces atomes par d'autres techniques : tout d'abord la résonnance de Feshbach *optique* [82, 83] qui consiste en la manipulation optique de la longueur de diffusion puis, cette dernière technique souffrant de fortes pertes atomiques ainsi que d'échaufements du système, la résonnance de Feshbach *orbitale* [81, 84, 85] qui utilise les deux degrés orbitaux comme sa version magnétique utilise les états du spin électronique des alcalins. Et c'est grâce à ce contrôle des interactions que l'on observe le phénomène de *transition de phase quantique* : puisqu'en effet nous considérons que le système est à température nulle, il ne peut exister de transition de phase en température, et c'est dans les interactions que nous allons devoir déterminer nos diagrammes de phase. Nous montrerons que les modèles auxquels mène l'interaction de type onde *s* s'avèrent généraliser le modèle de Hubbard précédemment évoqué.

Dans cette thèse, nous établirons dans un premier chapitre la dérivation du modèle d'alcalino-terreux à une orbitale avec la symétrie $\mathrm{SU(N)}$ pour $\mathrm{N} > 2$ (c'est-à-dire pour $I > 1/2$), puis nous en donnerons la physique selon le remplissage. Dans un deuxième temps, après ce chapitre essentiellement descriptif, nous ajouterons à notre modèle la seconde orbitale, discutant au passage de la meilleure stratégie pour la réaliser et d'où nous retirerons trois grands types de modèles : les modèles $g - e$, p-band et les modèles d'échelle. Dans un troisième chapitre - ayant nos modèles à résoudre - nous développerons les outils du faible couplage, en commençant par

la description de la théorie sans interaction qui présente, dans une certaine limite, la symétrie conforme et qui prête ainsi le flanc à l'utilisation de la théorie conforme. Ensuite, après avoir présenté la bosonisation, nous montrerons la principale méthode - le *groupe de renormalisation perturbatif* - adaptée à la description de l'interaction autour de la théorie libre. Le quatrième chapitre verra l'utilisation de ces méthodes appliquées, pour divers remplissages, à un modèle à deux orbitales, mais dans le cas $N = 2$, singulier à plus d'un point, et plus simple, tandis que le cinquième et dernier chapitre, nous nous appliquerons au cas $N > 2$.

Chapitre 1

Modèle de Hubbard SU(N) à une orbitale

Les atomes froids permettent une étude inédite de la physique de hauts spins [86, 64]. Dans les systèmes conventionnels - comme par exemple dans beaucoup d'oxydes de métaux de transitions - plusieurs électrons sont combinés *via* la règle de Hund et forment sur site un objet composé avec un grand spin $S > 1/2$. Néanmoins les processus dominants demeurent ceux faisant intervenir les paires d'électrons, avec au mieux un spin 1, si bien que les fluctuations relatives sont d'ordre $1/S$, c'est-à-dire faibles, et la physique de ces systèmes est très semiclassique du point de vue du moment cinétique. À l'inverse, les atomes froids, alcalins comme alcalino-terreux, portent avec eux de grands spins (à savoir leur spin total, qui correspond à leur spin hyperfin $F = I \pm 1/2$ ou $F = I$) dans tous les processus d'interactions, si bien que ces "blocs de spin" amènent - par construction - de grandes fluctuations quantiques de spins ainsi que de grandes symétries cachées à ces systèmes [64, 65]. Il a été montré (par exemple [87, 88]) que des systèmes d'alcalins fermioniques, à trois dimensions et de ce fait dans le paradigme des liquides de Fermi, présentaient des modes collectifs d'excitation ainsi que des schémas d'appariement Cooper plus riches (avec un spin total $S \geqslant 2$) que des dans les matériaux traditionnels.

Nous présentons ici la dérivation du modèle de Hubbard SU(N) à une orbitale décrivant la physique d'atomes ultrafroids alcalino-terreux - ou équivalents - piégés au sein d'une chaîne optique ; nous donnerons également une simple description de la physique de ce modèle.

1.1 Dérivation du modèle

Pour la dérivation du modèle de Hubbard généralisé, nous considérons que :

— Les atomes alcalino-terreux sont dans leur état fondamental $g \equiv {}^1S_0$;

— Les atomes sont individuellement soumis à un piège optique que l'on modélise par un terme de potentiel noté $V(\mathbf{r})$, périodique dans la direction de la chaîne (qui définit conventionnellement l'axe Oz) et piégeant dans le plan qui lui est perpendiculaire ;
— L'interaction interatomique, à une température considérée comme nulle, est de type "onde s".

Ces trois points appellent des précisions et seront développés, et nous commençons par le premier : en toute généralité, nous allons écrire le Hamiltonien en seconde quantification. Il faut alors définir un opérateur champ qui créé un atome que son adjoint détruit : nos atomes n'ont, ici, aucune structure orbitale - ils sont dans l'état g qui est complètement singulet - mais ils possèdent néanmoins un spin nucléaire I, prenant $\mathrm{N} = 2I + 1$ valeurs, que l'on a l'habitude de repérer par une lettre grecque, allant de 1 à N : posons $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Les degrés de liberté d'un atome seront donc son spin nucléaire α, et sa position $\boldsymbol{r}$, si bien que l'opérateur champ du problème est $\Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r})$, qui créé un tel atome. La statistique de ces atomes, fermionique [⟨1⟩], impose à ces opérateurs des relations d'anticommutation :

$$\left\{\Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}), \Psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{r}')\right\} = 0 \tag{1.1}$$

$$\left\{\Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}), \Psi_\beta(\boldsymbol{r}')\right\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{1.2}$$

Où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker, valant 1 lorsque $\alpha = \beta$ et 0 sinon, et où $\delta^{(3)}$ est la distribution de Dirac tridimensionnelle.

1.1.1 Le hamiltonien à un corps

Ayant établi ceci, on écrit aisément le terme à un corps du problème en seconde quantification en introduisant m, la masse des atomes :

$$\mathcal{H}_0 = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\right) \Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{1.3}$$

La donnée de la chaîne est contenue dans le potentiel V qui décrit le piège optique qui, comme nous l'avons dit, est périodique le long de l'axe Oz, et piégeant dans le plan perpendiculaire xOy, si bien qu'on le décompose comme suit :

$$V(\boldsymbol{r}) = V_{\text{pér.}}(z) + V_\perp(x, y) \tag{1.4}$$

Où $V_{\text{pér.}}$ est périodique de période a_0, et $V_\perp$ est confinant dans le plan xOy. De ces deux données viennent deux conséquences : la première, si le potentiel $V_\perp$ est confinant, il possède

⟨1⟩. Les deux électrons amènent un spin entier, si bien que la statistique d'un alkalino-terreux est donnée par le spin nucléaire, qui doit être demi-entier, c'est-à-dire pour N pair.

un spectre discret d'état liés, et si l'on considère un puits harmonique bidimensionnel :

$$V_\perp(x,y) = \frac{1}{2} m\omega_\perp^2 (x^2+y^2) \tag{1.5}$$

Alors le hamiltonien (1.3) est aisément diagonalisable selon le plan xOy en introduisant les états propres $|n_x\rangle$ et $|n_y\rangle$ des puits harmoniques pour lesquels la fonction d'onde $\phi_{n_x,n_y}(x,y) = \langle x,y|n_x,n_y\rangle$ satisfait l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2) \right\} \phi_{n_x,n_y}(x,y) &= \varepsilon_{n_x,n_y}\phi_{n_x,n_y}(x,y) \\ &= \hbar\omega_\perp\big(n_x+n_y+1\big)\phi_{n_x,n_y}(x,y) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dans le cadre à deux orbitales, nous utiliserons cette structure des états harmoniques, mais pour l'heure, nous allons faire la supposition que l'écart d'énergie entre le plus bas état harmonique $s \equiv (n_x=0,n_y=0)$ et les deux premiers niveaux que l'on note $p_x \equiv (n_x=1,n_y=0)$ et $p_y \equiv (n_x=0,n_y=1)$ - à savoir $\hbar\omega_\perp$ - est une grande énergie dans le problème, et que le remplissage, contrôlé *via* le terme de potentiel chimique, est établi de telle sorte qu'il n'existe que des atomes dans l'état harmonique s.

La seconde conséquence concerne le potentiel périodique qui se prête à une diagonalisation à l'aide des fonctions de Bloch [89], notées $\varphi_{k_z}^{(n)}(z)$ (avec (n) l'indice de bande, et k_z le vecteur d'onde de la première zone de Brillouin ⟨2⟩ (PBZ)), et qui vérifient l'équations aux valeurs propres :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{\text{pér.}}(z) \right\} \varphi_{k_z}^{(n)}(z) = \varepsilon_{k_z}^{(n)}\varphi_{k_z}^{(n)}(z) \tag{1.7}$$

La structure de bande est caractérisée par la forme de la période du potentiel $V_{\text{pér.}}$ et l'on fait la supposition supplémentaire et simplificatrice que les énergies entre la bande la plus basse, (0), et la suivante, (1) - à savoir $\delta_{\text{bande}} \simeq \varepsilon_\bullet^{(1)} - \varepsilon_\bullet^{(0)}$ - sont aussi de grandes énergies du problème, et, que le remplissage est tel que toute la physique prend place dans la bande (0). Notons qu'on ne se soucit guère ici de savoir comparer les énergies δ_{bande} et $\hbar\omega_\perp$: dans la suite, nous en viendrons à considérer des états harmoniques plus importants et alors nous bloquerons la physique dans la bande (0) en imposant $\hbar\omega_\perp \ll \delta_{\text{bande}}$.

Ainsi, hors de toute considération physique sur les ordres de grandeur des énergies harmo-

⟨2⟩. La première zone Brillouin, dans notre cas, s'arrête à π/a_0, ce qui correspond à une redondance dès lors qu'une onde plane possède une longueur d'onde plus petite que le pas du réseau a_0 : ceci est du à ce qu'une translation élémentaire de a_0 du réseau correspond à la multiplication de la fonction de Bloch d'un facteur $e^{ik_z a_0}$, si bien que k_z est défini modulo $2\pi/a_0$.

niques et de bande, le problème est diagonalisé par le produit tensoriel des fonctions selon Oz et xOy :

$$\psi^{(n)}_{n_x,n_y,k_z}(\boldsymbol{r}) \quad = \quad \phi_{n_x,n_y}(x,y)\,\varphi^{(n)}_{k_z}(z) \tag{1.8}$$

1.1.2 Les opérateurs du réseau

Il convient maintenant d'introduire un opérateur de création qui rende compte du réseau, habituellement indicé par la lettre i (et parfois j, lorsqu'il peut exister un risque de confusion avec le i des nombres complexes), et qui va prendre lieu et place de la variable $\boldsymbol{r}$. Pour ce faire, nous allons introduire les fonctions de Wannier [90] associées aux fonctions d'onde $\psi^{(n)}_{n_x,n_y,k_z}$ (et plus particulièrement associées à leur partie "de Bloch,") :

$$\mathcal{W}^{(n)}_{n_x,n_y,j}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}}\phi_{n_x,n_y}(x,y)\sum_{k_z\in\mathrm{PZB}} e^{-ik_z j a_0}\varphi^{(n)}_{k_z}(z) \tag{1.9}$$

De même qu'effectuer la transformation de Fourier dans une portion limité d'espace induit une quantification du nombre d'onde, en prenant l'inverse Fourier ⟨3⟩ d'une fonction d'onde limité en le nombre d'onde à la première zone de Brillouin, nous assistons à une quantification dans l'espace qui correspond à l'indice j du site. De plus les fonctions de Bloch sont des fonctions complètement délocalisées et les fonctions de Wannier se trouvent être localisées autour du site $a_0 j$. La transformation (1.9) étant unitaire, les états de Wannier forment une base orthogonale, si bien que les fonctions de Wannier sont les éléments de la matrice de changement de base entre les opérateurs de champ $\Psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r})$ et des opérateurs de création $c^\dagger_{(n),(n_x,n_y),\alpha,j}$ sur le site j d'atomes dans l'état harmonique (n_x,n_y), dans la bande (n) et de l'état nucléaire α :

$$\Psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r}) = \sum_{j,n_x,n_y,(n)} \mathcal{W}^{(n)\star}_{n_x,n_y,j}(\boldsymbol{r})\, c^\dagger_{(n),(n_x,n_y),\alpha,j} \tag{1.10}$$

Si désormais l'on tient compte des approximations physiques alors les états effectifs seront ceux satisfaisants $(n)=(0)$, $(n_x,n_y)=s$, et tous les autres états étant non-physiques, on notera adroitement $c^\dagger_{\alpha,j} = c^\dagger_{(0),(0,0),\alpha,j}$ et les fonctions de Wannier correspondantes $\mathcal{W}_i$. L'approximation physique consistera à ne considérer que ces modes :

$$\Psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r}) \simeq \sum_i \mathcal{W}^\star_i(\boldsymbol{r})\, c^\dagger_{\alpha,i} \tag{1.11}$$

Grâce à ce changement de base, nous sommes en mesure d'écrire le terme à un corps dans

⟨3⟩. La transformation est bien prise sur k_z et pas sur z !

les opérateurs du réseau, les $c^{\dagger}_{\alpha,i}$:

$$\mathcal{H}_0 \;=\; \sum_{i,j,\alpha} t^{(i,j)} c^{\dagger}_{\alpha,i} c_{\alpha,j} \tag{1.12}$$

Où l'énergie $t^{(i,j)}$ est définie par :

$$t^{(i,j)} \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{W}_i^{\star}(\boldsymbol{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r}) \right\} \mathcal{W}_j(\boldsymbol{r}) \tag{1.13}$$

Cela dit, le terme $\varepsilon = t^{(i,i)}$ est un réel qui correspond à l'énergie à un corps de l'atome sur site. Le terme du Hamiltonien correspondant est du type $\varepsilon \sum_i n_i$ et peut être intégré sans difficulté dans le terme de potentiel chimique. Le terme dominant et physiquement intéressant de (1.13) est celui faisant intervenir deux sites adjacents ⟨4⟩, c'est-à-dire $t = -t^{\langle i,j \rangle}$ (c'est-à-dire pour i et j plus proche voisins) : en se limitant à ces termes on réalise l'approximation des *liaisons fortes* ⟨5⟩ [91]. Dans cette approximation, le hamiltonien à un corps se réduit simplement à l'expression suivante :

$$\mathcal{H}_0 = -t \sum_{i,\alpha} \left(c^{\dagger}_{\alpha,i+1} c_{\alpha,i} + c^{\dagger}_{\alpha,i} c_{\alpha,i+1} \right) \tag{1.14}$$

1.1.3 Le hamiltonien d'interaction à deux corps

La partie sans interaction étant désormais décrite dans les opérateurs du réseau, nous passons à l'interaction, en débutant comme nous l'avons déjà fait à partir d'une expression en opérateurs de champs, et en exploitant la troisième et dernière considération que nous avons faite au début de cette section : l'interaction interatomique est de type onde-s à température nulle. Un terme à deux corps décrit cette interaction qui est locale, isotrope, et qui n'est caractérisé - pour un processus X donné - que par une seule quantité : la *longueur de diffusion* a_X à laquelle on associe une quantité équivalente, le *paramètre d'interaction* $g_X = 4\pi\hbar^2 a_X / m$ [92] et qui intervient dans l'expression du potentiel d'interaction $V_X^{\text{int.}}$ pour deux particules aux positions $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ dans le processus X :

$$V_X^{\text{int.}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = g_X \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \tag{1.15}$$

Les processus d'interaction X ici ne peuvent dépendre que du seul degré de liberté interne

⟨4⟩. En effet, les fonctions de Wannier étant bien piquées sur leur sites, les intégrales qui définissent les $t^{(i,j)}$ s'annulent rapidement au fur et à mesure que $|j - i|$ augmente.
⟨5⟩. Fortement lié au site, c'est-à-dire localisé dans le voisinage de ce dernier.

des atomes, le spin nucléaire α, c'est-à-dire, en toute généralité : X est la donné des spins α et β des deux atomes en interaction et un g_X différent peut-être associé à chacun d'eux (donc également une longueur de diffusion a_X). Or dans les processus d'interaction il a été estimée, tant du point de vue théorique [70, 71] qu'expérimental [72, 73], que la dépendance des longueurs de diffusion dans le spin nucléaire I était négligeable (notamment dans l'état g qui est ici le seul considéré), si bien que la symétrie SU(N) y est presque parfaitement satisfaite. Dans l'expression (1.15), l'implémentation de la symétrie SU(N) sur le spin nucléaire dans l'interaction revient à associer à tous les processus le même paramètre d'interaction g : $V_X^{\text{int.}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = g\,\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}), \forall X$. Les effets de la statistique fermionique ont soins d'eux-mêmes *via* les relations d'anticommutation (1.1,1.2) ⟨6⟩. Le terme d'interaction à deux corps s'écrit :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = g \sum_{\alpha<\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r})\Psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{r})\Psi_\beta(\boldsymbol{r})\Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{1.18}$$

À l'aide de la décomposition (1.11), nous pouvons donner une expression de l'interaction sur les opérateurs de réseau :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \frac{U}{2}\sum_i n_i^2 \tag{1.19}$$

Où $n_i = \sum_\alpha c_{\alpha,i}^\dagger c_{\alpha,i}$ et où le paramètre d'interaction U est relié au paramètre d'interaction g et aux fonctions de Wannier $\mathcal{W}_i$ par l'expression suivante (les fonctions de Wannier sont des translations les unes des autres et dans l'intégrale suivante on enlève alors l'indice de site) :

$$U = g\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, |\mathcal{W}(\boldsymbol{r})|^4 \tag{1.20}$$

Dans l'approximation des liaisons fortes, les termes entre sites non-identiques sont complètement négligeables si bien que l'interaction demeure locale. À un niveau plus concret, qui n'est pas l'objet de la présente description, le terme libre t et le terme d'interaction U sont déterminés à partir des fonctions de Wannier qui peuvent elles-mêmes être déterminées de manière autocohérente pour un réseau donné et ainsi mener à un calcul numérique des intégrales correspondantes [93].

⟨6⟩. Les relations d'anticommutation sont simplement données par :

$$\{c_{\alpha,i}^\dagger, c_{\beta,j}^\dagger\} = 0 \tag{1.16}$$
$$\{c_{\alpha,i}^\dagger, c_{\beta,j}\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \tag{1.17}$$

1.1.4 Le hamiltonien total, les symétries

Ainsi, le hamiltonien total décrivant les alcalino-terreux peut être décomposé en trois termes - libre, d'interaction et de potentiel chimique - écrits dans les opérateurs de réseaux :

$$\mathcal{H}_{\text{Hubbard}} = -t \sum_{i,\alpha} \left(c^\dagger_{\alpha,i+1} c_{\alpha,i} + c^\dagger_{\alpha,i} c_{\alpha,i+1} \right) + \frac{U}{2} \sum_i n_i^2 - \mu \sum_i n_i \tag{1.21}$$

Ce modèle n'est autre que le modèle de Hubbard (4), mais généralisé des 2 composantes du spin des électrons aux N composantes du spin nucléaire des atomes. C'est ce modèle, selon N, selon U et selon le remplissage (piloté par le terme de potentiel chimique), dont on cherche à déterminer les propriétés. Un premier résultat important est la connaissance de ses symétries. La première, évidente, est reliée à la conservation du nombre total de particules, autrement dit la conservation de la charge totale $\sum_i n_i$, associée à la transformation globale suivante qui laisse le hamiltonien (1.21) :

$$c^\dagger_{\alpha,i} \overset{\mathrm{U}(1)_c}{\longrightarrow} e^{i\theta} c^\dagger_{\alpha,i}, \quad \forall \alpha, i, \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[\tag{1.22}$$

Cette transformation est associée de manière évidente au groupe $\mathrm{U}(1)_c$, ce qui s'exprime aussi par le fait que la charge totale commute avec le hamiltonien :

$$\left[\sum_i n_i, \mathcal{H}_{\text{Hubbard}} \right] = 0 \tag{1.23}$$

Le système possède en plus de cette symétrie sur le nombre de particule une symétrie reliée à la conservation du nombre total de particule ayant une composante du spin nucléaire donnée. En réalité cette symétrie est plus importante, et en considérant une matrice $\widetilde{U} \in \mathrm{SU(N)}$ (c'est-à-dire de taille $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$, unitaire, $\widetilde{U}^\dagger = \widetilde{U}^{-1}$, et de déterminant unité, $\det \widetilde{U} = 1$) on définit la transformation suivante :

$$c^\dagger_{\alpha,i} \overset{\mathrm{SU(N)}_s}{\longrightarrow} \sum_\beta \widetilde{U}_{\alpha\beta} c^\dagger_{\alpha,i}, \quad \forall \alpha, i, \quad \text{et} \quad \widetilde{U} \in \mathrm{SU(N)} \tag{1.24}$$

Nous allons alors introduire les $\mathrm{N}^2 - 1$ matrices des générateurs ⟨7⟩ de la représentation

⟨7⟩. En tant que groupe de Lie, les éléments $\widetilde{U}$ de $\mathrm{SU(N)}$ peuvent être indicés par un vecteur $\boldsymbol{\theta}$ dont le nombre de composantes indique l'*ordre* du groupe (sa dimension étant infinie) : pour ce groupe, $\mathrm{N}^2 - 1$. Dans une représentation $\mathcal{R}$ donné - d'une dimension quelconque, irréductible ou non - on peut décomposer n'importe quel élément du groupe proche de l'identité grâce aux générateurs de la représentation $T^a_{\mathcal{R}}$, $a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!]$ comme :

$$\mathcal{R}\left[\widetilde{U}(\delta\boldsymbol{\theta} \simeq \mathbf{0})\right] = \mathrm{Id}_{\mathcal{R}} - i \sum_{a=1}^{\mathrm{N}^2-1} T^a_{\mathcal{R}} \delta\theta^a + \mathcal{O}\left(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2\right) \tag{1.25}$$

fondamentale ⟨8⟩ SU(N) pour définir les générateurs SU(N) $\mathcal{S}^a$ sur réseau :

$$\mathcal{S}^a = \sum_{i,\alpha\beta} c^\dagger_{\alpha,i} T^a_{\alpha\beta} c_{\beta,i}, \quad a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!] \tag{1.27}$$

En définissant les N états à un atome sur un même site $|\alpha\rangle_i = c^\dagger_{\alpha,i} |0\rangle$ (l'état vide gagnerait à être mieux défini, mais on s'en contentera ici), on constate que l'effet du générateur $\mathcal{S}^a$ et stable dans $\{|\alpha\rangle_i\}_{\alpha \in [\![1,\mathrm{N}]\!]}$:

$$\mathcal{S}^a |\alpha\rangle_i = \sum_\beta T^a_{\beta\alpha} |\beta\rangle_i \tag{1.28}$$

C'est-à-dire que cet espace est un espace irréductible, de dimension N : il s'agit de la représentation fondamentale □, si bien qu'il est toujours bon d'avoir à l'esprit que "*un atome porte une représentation fondamentale de* SU(N)". Cela dit, deux atomes - de sites *a priori* différents - pourrons s'apparier pour former □□ ou $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$, *etc*.

De manière plus générale, les générateurs $\mathcal{S}^a$ (ainsi que les $\mathcal{S}^a_i$, définis sur chaque site) satisfont également à l'algèbre $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$ (1.26). Ainsi la symétrie liée à la transformation (1.24) s'exprime par les relations de commutation suivantes, qui ne sont rien d'autre que la conservation attendue :

$$\left[\mathcal{S}^a, \mathcal{H}_{\text{Hubbard}}\right] = 0, \quad a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!] \tag{1.29}$$

Les deux symétries mises ensemble, nous avons affaire avec une symétrie $\mathrm{U(N)} = \mathrm{U}(1)_c \times$

Ces générateurs forment un espace vectoriel et satisfont des relations de commutations caractérisées par l'objet antisymétrisé f^{abc}, $a, b, c \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!]$ qui ne dépend pas de la représentation, qui fixe les propriétés locales du groupe et qui caractérise l'algèbre $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$:

$$\forall \mathcal{R} \quad : \quad \left[T^a_\mathcal{R}, T^b_\mathcal{R}\right] = i \sum_{c=1}^{\mathrm{N}^2-1} f^{abc} T^c_\mathcal{R} \tag{1.26}$$

⟨8⟩. Plusieurs représentations particulières sont à connaître :
- la représentation *triviale*, notée traditionnellement •, et qui consiste a associer chaque élément du groupe à l'unité : $T^a_\bullet = 0, \forall a$;
- la représentation *fondamentale*, qui est irréductible, notée □ à l'aide de son tableau de Young, et qui consiste en la plus petite représentation (avec sa conjuguée, $\square^\star$) non-triviale. Elle est de dimension N, et est donc généré par des matrices N × N notées T^a (pas d'indice de représentation pour la fondamentale) et dont les coefficients de matrices se notent, en toute logique dans le contexte de notre thèse à l'aide d'indices grecs, $T^a_{\alpha\beta}$. Dans le cas SU(2), les 3 matrices correspondent aux matrices de Pauli (divisées par 2). Par convention, on choisit ces générateurs de telle manière que les matrices satisfassent $\mathrm{Tr}\left(T^a T^b\right) = \delta^{ab}/2$;
- la représentation adjointe, irréductible, notée ***ad***, de dimension $\mathrm{N}^2 - 1$, qui correspond au tableau de Young $(2, 1_1, \ldots, 1_{\mathrm{N}-2})$, et dont les générateurs $T^a_{\boldsymbol{ad}}$ peuvent être formés à l'aide de la suite f^{abc} : $\left(T^a_{\boldsymbol{ad}}\right)_{cb} = f^{abc}$. Dans le cas SU(2), les 3 matrices correspondent aux matrices de spin 1, et sont générées à l'aide de la suite de Levi-Civita à trois indices $f^{ijk} = \varepsilon^{ijk}$.

$\mathrm{SU(N)}_s$, et pourtant - pour souligner la partie non-triviale de la symétrie, obtenue pour d'autres modèles par réglage fin des interactions - le modèle (1.21) est appelé "*modèle de Hubbard* $\mathrm{SU(N)}$", et non pas $\mathrm{U(N)}$. Contrairement au modèle pour $\mathrm{N} = 2$, il n'existe pas de résolution exacte pour tout paramètre d'interaction U et pour tout remplissage $\bar{n}$. Néanmoins il est possible de généraliser les équations de l'Ansatz de Bethe à des systèmes de fermions avec une symétrie interne $\mathrm{SU(N)}$ qui passent pour correspondre à des variantes *non-locales* du modèle de Hubbard $\mathrm{SU(N)}$ [94]. Malgré cela, la résolution du modèle est quantitativement réalisée [95] et sa physique est comprise grâce à des techniques puissantes d'approximations telles la théorie des champs, le fort couplage et les approches numériques. L'objet des sections suivantes est d'en donner la description selon l'interaction et le remplissage.

1.2 Le cas incommensurable

Le premier cas, le cas où le nombre d'atome par site est incommensurable au nombre de degré de liberté par site (et donc au nombre de site puisqu'il y a un nombre entier de degrés de liberté par site !), est un cas où il n'existe aucun processus d'*Umklapp* [33]. Ce processus, dans un solide cristallin par exemple, correspond à de la diffusion entre deux phonons de la première zone de Brillouin dont la collision provoque la création d'un phonon hors de celle-ci : or, puisque ce phonon sera vu sur le réseau avec un vecteur d'onde ramené à la première zone de Brillouin (qui a du sens physiquement), le reste de l'impulsion étant transféré au réseau, il pourra exister des phénomènes qui rétrodiffuseront et même pire, qui seront de vecteur d'onde nul, "immobiles" ⟨9⟩. C'est en ce dernier sens que le terme Umklapp est ici compris, et comme nous le verrons dans la suite, il correspond à des processus d'interaction qui oscillent selon $\bar{n}$, et dont le caractère commensurable ou incommensurable, préservera ou tuera (respectivement) lesdits processus qui ont l'effet - lorsqu'ils sont présents - d'ouvrir un gap de charge dans le domaine répulsif ($U > 0$), et dans le secteur les degrés de spin dans le domaine attractif ($U < 0$). Et ceci est physiquement cohérent, puisque lorsque $\bar{n}$ sera commensurable, les atomes pourront - dans le domaine répulsif - se bloquer sur le réseau, et ainsi gapper la charge, ou encore - dans le domaine attractif - les atomes pourront, par exemple, former des singulets et, de la même manière gapper le spin.

Ainsi, lorsque l'incommensurabilité empêche ces processus de résonner, les degrés de liberté de charge seront critiques et un état métallique sera formé mais ses propriétés dépendront fortement du paramètre d'interaction U et notamment de son signe.

⟨9⟩. Bien évidemment les processus d'Umklapp ne se limitent pas aux phonons. Par exemple, pour nos systèmes 1D, lorsque π/a_0 est un multiple entier de $2k_F$, il se produira des processus dans le hamiltonien de basse énergie (défini aux CHAPITRES 2 et 3) qui transfèreront un nombre entier de fermions d'un point de Fermi à l'autre tout en conservant leur quasi-impulsion, menant parfois à rompre la séparation spin-charge et à ouvrir un gap en charge.

1.2.1 Le domaine répulsif

Lorsque $U > 0$, tous les degrés de liberté sont critiques et un liquide de Luttinger à N composantes est alors formé [96, 33] dont la signature est la présence d'oscillations à $2k_F$ ⟨10⟩ dans les fonctions de corrélation densité-densité, et spin-spin, qui décroissent en loi de puissance avec des exposants non-universels qui dépendent de l'interaction U [97, 98, 99]. Le phénomène d'universalité correspond dans une acception large à la propriété qu'ont des systèmes physiques, *a priori* différents, d'obéir à des lois très similaires. Dans le cadre de la physique des transitions de phase du second ordre, beaucoup de systèmes différents font intervenir les mêmes *exposants critiques* ⟨11⟩, indépendamment de leurs caractéristiques : la répartition de ces exposants critiques en des classes où ils prennent une valeur donnée (qui caractérise une transition de phase), correspond à la détermination des *classes d'universalité*. L'un des exposants critiques, noté η, correspond à l'exposant de la loi de puissance de la fonction de corrélation au point critique : $G(r) \sim |r|^{2-d-\eta}$ (d la dimension du système). Or pour notre liquide de Luttinger, l'instabilité dominante des fonctions de corrélation spin-spin, indique bien une phase métallique avec des oscillations à $2k_F$, mais avec une décroissance qui dépend de l'interaction [97, 98, 99] :

$$\langle \mathcal{S}^a(\tau, x)\mathcal{S}^b(0,0)\rangle \sim \frac{\delta^{ab}\cos(2k_F x)}{\left(x^2 + v_c^2\tau^2\right)^{K/\mathrm{N}}\left(x^2 + v_s^2\tau^2\right)^{1-1/\mathrm{N}}} \tag{1.31}$$

Où x et τ sont respectivement la position sur la chaîne et un temps statistique dont nous donnons la définition au CHAPITRE 3, mais surtout, où K, v_c et v_s sont respectivement le paramètre de Luttinger de charge et respectivement les vitesses des excitations de charge et de spin qui dépendent tous de l'interaction U, mais aussi du nombre moyen d'atome par site [96, 33].

Ce premier exemple de phase complètement critique est l'occasion d'introduire une quantité qui mesure de la criticalité du système, la *charge centrale* notée c, et dont la définition précise s'effectue dans le cadre de la théorie conforme des champs. Dans une théorie comme la nôtre avec N degrés de liberté, scindés en un degré de charge et $\mathrm{N}-1$ degrés de spin ⟨12⟩, une phase

⟨10⟩. C'est le *vecteur d'onde du niveau de Fermi*, dont on peut montrer qu'il est directement relié au nombre moyen d'atome par :

$$k_F = \frac{\pi\bar{n}}{a_0\mathrm{N}} \tag{1.30}$$

⟨11⟩. Bien souvent, dans les transitions du second ordre, les grandeurs physiques se comportent en loi de puissance dans diverses quantités (comme la température et l'aimantation dans le cas d'école) dont l'exposant définit un exposant critique.

⟨12⟩. On aime aussi opposer le degré *abélien* aux degrés *non-abéliens*, en se référant au degré de charge et aux degrés de spin respectivement. Ceci vient des propriétés des groupes de symétrie $\mathrm{U}(1)$ (abélien) et $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$ (non-abélien), qui leurs correspondent.

complètement critique (en charge et spin donc) possèdera une charge centrale $c = \mathrm{N}$. À l'inverse de la phase dont il est question ici, si tout avait été gappé, la charge centrale aurait été nulle : $c = 0$, et de manière générale, lorsque certains degrés se gappent et d'autres pas, elle prend des valeurs intermédiaires.

1.2.2 Le domaine attractif

Le domaine attractif, lorsque $U < 0$, est une bonne illustration pour un premier calcul de la charge centrale : un gap s'ouvre pour tous les $\mathrm{N} - 1$ degrés de liberté $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$, et pour autant, la charge reste critique, ce qui est cohérent avec une physique incommensurable ⟨13⟩. La charge centrale ne compte alors que la seule charge, soit une théorie métallique également, mais à $c = 1$ seulement. La phase qui lui correspond est une phase de *Luther-Emery* [96, 33, 56]. Dans le cas du modèle de Hubbard $\mathrm{SU}(2)$, cette phase correspond en une compétition entre une instabilité en onde de densité de *charge*, noté CDW ⟨14⟩ et en une instabilité supraconductrice formée par des paires de fermions en singulet, et qui domine la première. Dans le cas $\mathrm{N} > 2$ [100, 1, 101], la symétrie $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$ pour former des "paires" supraconductrice requiert - au *minimum* - N fermions pour former un singulet de cette phase gappée en spin, les fonctions de corrélation à deux particules seront sous-dominantes : on définit plutôt un paramètre d'ordre $\mathcal{M}_i^\dagger = \prod_{\alpha=1}^{\mathrm{N}} c_{\alpha,i}^\dagger$ (avec α croissant de gauche à droite, en guise de convention) avec lequel on mesurera une instabilité supraconductrice de triplets ⟨15⟩ ($\mathrm{N} = 3$), de quartets ($\mathrm{N} = 4$), *etc*. Puisque cela correspond à des agencement de N atomes - c'est-à-dire une sorte de molécule - la phase correspondante, est appelée *superfluide moléculaire* et notée MS ⟨16⟩ : contrairement aux paires du cas $\mathrm{N} = 2$, c'est ici cette phase qui sera en compétition avec la phase CDW.

Il faut alors comparer les comportements à longue distance des deux fonctions de corrélation - la charge étant critique, elle est associée à une loi de décroissance qu'on imagine non-universelle étant donnés les résultats sur le cas répulsif - pour savoir laquelle dominera l'autre. Or ces quantités peuvent être déterminées à l'aide de la technique de bosonisation [65, 100, 1], et l'on constate qu'il y a une distinction entre les cas N pairs et N impairs pour le paramètre de

⟨13⟩. À vrai dire, et comme nous le montrons par la suite, même dans le cas commensurable il n'existe pas de gap de charge dans le domaine attractif, le terme d'umklapp n'y étant pas pertinent.
⟨14⟩. Pour son acronyme anglais, *Charge Density Wave*.
⟨15⟩. Pour N impair, l'appelation *supraconductrice* est peut-être impropre, le paramètre d'ordre à N fermions ayant un caractère fermionique.
⟨16⟩. D'acronyme *Molecular Superfluid*.

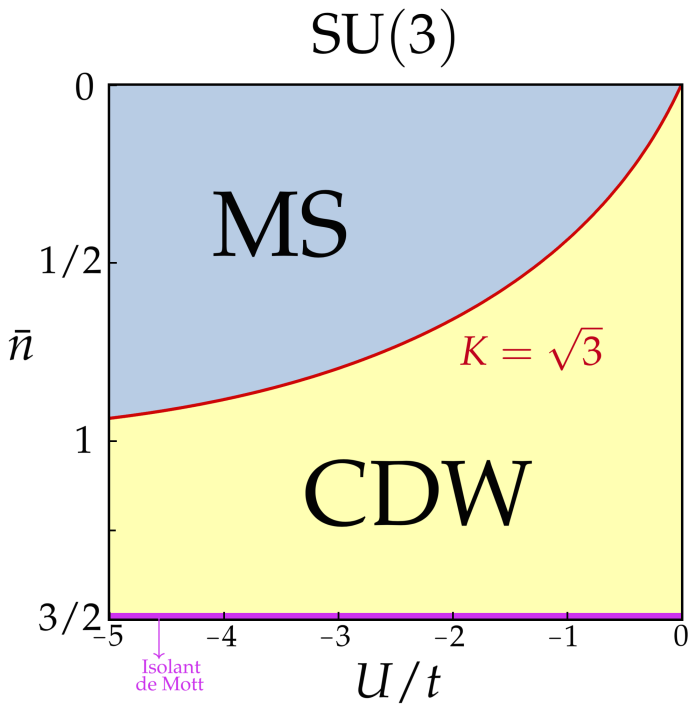


FIGURE 1.1 – La phase de Luther-Emery dans le cas N = 3 (issu de [1], résultat de DMRG). Ici, dans le cas impair, la distinction entre les phases CDW et MS se fait sur la courbe $K(U, \bar{n}) = \mathrm{N}/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ représentée en **rouge**. On constate qu'au demi-remplissage, lorsque $\bar{n} = 3/2$, les processus d'umklapp gappent la charge, et la phase devient isolante.

la phase MS :

$$\langle n(x)n(0)\rangle \quad \sim \quad \cos(2k_F x)x^{-2K/\mathrm{N}} \tag{1.32}$$

$$\langle \mathcal{M}^\dagger(x)\mathcal{M}(0)\rangle \quad \sim \quad \begin{cases} x^{-\mathrm{N}/2K} & \mathrm{N\ pair} \\ \sin(k_F x)x^{-(K+\mathrm{N}^2/K)/2\mathrm{N}} & \mathrm{N\ impair} \end{cases} \tag{1.33}$$

Ainsi la physique est contrôlée par le paramètre de Luttinger K : lorsqu'il est grand (plus que N/2 dans le cas pair et $\mathrm{N}/\sqrt{3}$ dans le cas impair), ce sont les corrélations MS qui dominent, et à l'inverse, lorsqu'il est petit (avec les mêmes quantités à comparer dans les cas pairs et impairs), ce sont les corrélations CDW qui dominent. Il est alors crucial pour la physique de connaître la dépendance de K en U et en $\bar{n}$ [1], ce qui est représenté en FIGURE 1.1 dans le cas $\mathrm{N} = 3$. Remarquons sur cette figure l'effet spectaculaire d'un remplissage très particulier, à savoir le demi-remplissage ($\bar{n} = 3/2$ lorsque $\mathrm{N} = 3$) : la phase de Luther-Emery est tuée par des processus d'Umklapp, un gap en charge s'ouvre, et la phase devient un isolant de Mott.

1.3 Un atome par site

Avant d'établir le cas du demi-remplissage, attachons-nous à une réalisation commensurable avec un nombre d'atomes moyen par site plus petit, donc expérimentalement plus simple à réaliser, à savoir le cas avec un atome par site en moyenne : $\bar{n} = 1$. Lorsque $\mathrm{N} = 2$, ce cas correspond au demi-remplissage, et les résultats évoqués en introduction bien entendu demeurent, le système étant résolu par l'Ansatz de Bethe [34, 54, 102] : dans la région répulsive ($U > 0$), les atomes se localisent sur les sites, et un gap dans les excitations de charge s'ouvre tandis que les spins nucléaires des atomes - laissés libres - sont régis par un modèle de Heisenberg antiferromagnétique ; la théorie y possède une charge centrale $c = 1$. La situation dans le domaine attractif ($U < 0$) est son symétrique dans les degrés de charge et de spin ⟨17⟩ : les atomes s'apparient en singulets et gappent les degrés de spin tandis qu'il reste à ces paires un site sur deux laissé vide pour se déplacer, autrement dit, la charge est critique ; encore une fois, la charge centrale y est de $c = 1$. Voilà une première description bien utile à la compréhension de sa généralisation à $\mathrm{N} > 2$ puisque cette dernière n'a pas d'équivalent pour l'Ansatz de Bethe pour être exactement résolue. Néanmoins les propriétés physiques de ce modèle sont connues [95] depuis des années, et ses propriétés sont finalement assez intuitives, lorsqu'est connu le cas $\mathrm{N} = 2$, même si la donne change un peu.

1.3.1 Le domaine répulsif

Dans le domaine largement répulsif, à fort U, l'interaction sépare les atomes qui naturellement se bloquent à un atome par site, un gap de charge s'ouvre, et la situation est tout à fait comparable au cas $\mathrm{N} = 2$. Ces atomes, qui portent chacun une représentation fondamentale de $\mathrm{SU(N)}$ (*i.e.* $\square$), voient leur degrés de liberté de spin libres, et sont alors tout naturellement décrit par un modèle de Heisenberg $\mathrm{SU(N)}$ antiferromagnétique (qui, avec des spins dans le représentation fondamentale porte le nom de *modèle de Sutherland* [103]) :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}} = \frac{2t^2}{U} \sum_i \sum_{a=1}^{\mathrm{N}^2-1} \mathcal{S}_i^a \mathcal{S}_{i+1}^a \tag{1.34}$$

Ce modèle est fidèle à la physique du modèle de Hubbard pour $U/t \gtrsim 12$ [99], dans le régime de fort couplage. Le spectre correspondant est critique pour les $\mathrm{N}-1$ degrés de spin avec la vitesse $v_s = \pi t^2/\mathrm{N}U$: la théorie possède alors une charge critique de $c = \mathrm{N}-1$. Sans entrer encore dans les détails, I. Affleck a de plus identifié [97, 104] que cette théorie critique est décrite par le modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten ⟨18⟩ $\mathrm{SU(N)}$ de niveau 1 (notée "$\mathrm{SU}(N)_1$

⟨17⟩. Cette symétrie charge/spin n'est rien d'autre que l'expression de la transformation de Shiba mentionnée en introduction.

⟨18⟩. Ou parfois plus "simplement", Wess-Zumino-Witten, et abrégé, selon, en WZW ou WZNW. Il s'agit d'un modèle simple de la théorie conforme des champs dont les solutions sont données par les algèbres de Kac-Moody

WZW"). Les fonctions de corrélation de cette phase de Mott possèdent une décroissance en loi de puissance avec un exposant universel [97, 104] :

$$\langle \mathcal{S}^a(\tau,x)\mathcal{S}^b(0,0)\rangle \sim \delta^{ab}\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\frac{x}{a_0}\right)\frac{\left[\ln\left(x^2+v_s^2\tau^2\right)\right]^{2/\mathrm{N}^2}}{\left(x^2+v_s^2\tau^2\right)^{1-1/\mathrm{N}}} \tag{1.35}$$

Le terme logarithmique correspond en réalité à un opérateur marginal (c'est-à-dire possédant un comportement singulier par changement d'échelle ⟨19⟩) non-pertinent qui, lorsqu'il devient marginal pertinent (si l'on ajoute - entre autres - des termes d'interaction plus loin que les plus proches voisins), peut finalement devenir dominant ⟨20⟩, un gap dans le secteur de spin SU(N) s'ouvre alors, et le système peut présenter une N-mérisation, c'est-à-dire la formation de blocs de singulets SU(N) à l'aide de N atomes (donc autant de site). Un tel agencement, gappe évidemment le secteur de spin, brise alors N fois la symétrie de translation et correspond à une charge centrale de $c = 0$ [105, 106, 107].

Lorsque U est plus petit, et contrairement au cas $\mathrm{N} = 2$, il se trouve que le système devient métallique [98]. En effet, dans le cas $\mathrm{N} = 2$, le gap de charge s'ouvre pour n'importe quelle valeur finie de U et le modèle est alors un modèle de spin pur, or on pourrait très bien imaginer que lorsque U devient moins répulsif, une compétition entre l'interaction et les termes cinétiques (en t) en vienne à rendre possible le mouvement des atomes : c'est ce qui arrive pour $\mathrm{N} > 2$ où il existe une valeur critique de l'interaction U_c qui sépare la phase isolante de Mott ($U > U_c$) décrite par (1.34), d'une phase métallique ($U < U_c$) en onde de densité de spin-SU(N) avec un paramètre d'ordre en $\mathcal{S}^a$, une charge centrale maximale : $c = \mathrm{N}$. La transition de Mott correspondante a été numériquement validée [98, 99] ⟨21⟩ et a été identifié comme appartenant à la classe d'universalité BKT ⟨22⟩ [110, 111].

1.3.2 Le domaine attractif

Finalement, l'étude du cas répulsif pour tout N montre que c'est plutôt le cas $\mathrm{N} = 2$ qui est un cas particulier, et nous aurons l'occasion de la vérifier plus d'une fois. Néanmoins, dans le domaine attractif ($U < 0$), il se trouve que la physique - comme on peut le voir dans le cas particulier $\mathrm{N} = 3$ de la FIGURE 1.1 pour $\bar{n} = 1$ - ne diffère pas du cas incommensurable et

affines (liées à des groupes de dimension infinie).

⟨19⟩. Techniquement, il s'agit d'un opérateur dont la dimension d'échelle requiert une renormalisation au second ordre des équations du groupe de renormalisation. Ici le dimension d'échelle critique est 2.

⟨20⟩. Concrètement, le signe lui correspondant dans le hamiltonien peut changer, et le destin du terme par la renormalisation s'en trouve complètement changée à son tour.

⟨21⟩. En réalité, ce résultat fut d'abord invalidé par [108, 109] qui avançaient $U_c = 0$, pour finalement être revalidé à U_c non-nul par [99].

⟨22⟩. Pour Berezinskii, Kosterlitz et Thouless.

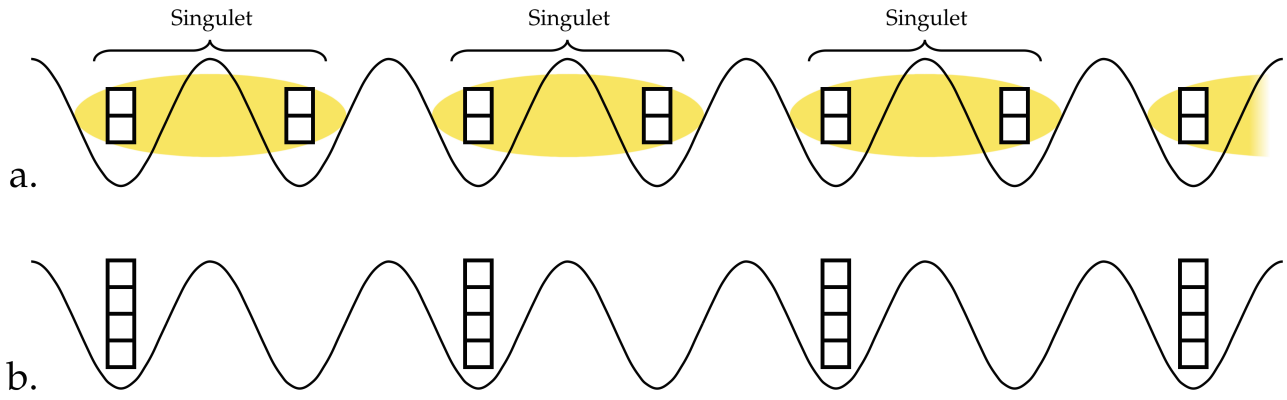


FIGURE 1.2 – Représentations des phases du modèle de Hubbard SU(4) dans la limite de fort couplage ($|U| \gg t$) : a. Dans le régime répulsif, la phase de Spin-Peierls (SP) présente une dimérisation par la création de singulets par paires de sites ; b. Dans le régime attractif, un cristal de période 2 est créé par une alternance de singulets à 0 et 4 fermions, formant une onde de densité de charge (CDW).

présente une phase de Luther-Emery avec une compétition entre les ondes de densité de charge et le superfluide moléculaire qui voit pour ce remplissage dominer CDW.

1.4 Le demi-remplissage

Au demi-remplissage, la situation diffère beaucoup du cas $N = 2$: dans ce dernier cas, une étude à faible couplage révèle que les degrés de charge et de spin se découplent - c'est le phénomène de séparation spin-charge - tandis que dans le cas $N > 2$ les processus d'Umklapp lient les deux secteurs ⟨23⟩ [112, 109, 113, 114], ce qui a pour effet que le gap se généralise à tous les degrés, en charge comme en spin, donnant lieu à une théorie de charge centrale $c = 0$ (rappelons que dans le cas $N = 2$, tantôt la charge ($U < 0$), tantôt le spin ($U > 0$), étaient critique, si bien que de part et d'autre de la théorie libre - relié par la transformation de Shiba [57, 58] - on avait $c = 1$). De même, il a été montré pour $U < 0$ [115, 116] et pour $U > 0$ [114, 112] qu'il existe entre le fort et le faible couplage une adiabaticité qui assure le maintien du gap total pour tout régime de U. Pour autant la physique dépend fortement du signe de U.

1.4.1 Le domaine répulsif

Dans le domaine répulsif, il a été montré que la phase correspondait à une phase *spin-Peierls* (abrégé en SP) et qui coïncide avec une phase dimérisée entièrement gappée en charge, comme

⟨23⟩. Pour aller dans des détails plus techniques qui seront développé dans le CHAPITRE 3, pour le modèle de Hubbard SU(2) à une orbitale, les courants d'Umklapp sont du type $L_\uparrow^\dagger L_\downarrow^\dagger$ (*idem* avec les champs droits) et possèdent une OPE nulle... par manque de termes ! En augmentant N ou en ajoutant une orbitale, on permet aux processus d'Umklapp d'avoir un effet dans la renormalisation, ce qui a pour effet de tuer la séparation spin-charge.

dans le cas $N = 2$, mais, à son encontre, également en spin avec la formation de singulet par dimérisation (voir la FIGURE 1.2). Au fort couplage - avec l'exemple à $N = 4$ - cela est mis en évidence par le fait qu'il est connu que le modèle de Heisenberg antiferromagnétique $SU(4)$ dans la représentation $\square\!\square$ (qui correspond dans cette limite au modèle effectif de (1.21) pour la demi remplissage avec $\bar{n} = 2$) est connu pour - à température nulle - posséder une phase dimérisée [117] qui brise la symétrie de translation : sur deux sites, deux représentations $\square\!\square$ sur deux sites adjacents s'antisymétrisent pour former un singulet, ce qui laisse un double choix pour apparier les sites. À l'inverse, nous savons déjà qu'une telle dimérisation - qui correspond à l'ouverture du gap en spin - n'existe pas pour le modèle de Heisenberg $SU(2)$ dans la fondamentale $\square$.

Mais le cas $N = 4$ est particulier, en ce sens qu'il est pair, et que le modèle de Heisenberg correspondant est bâti à l'aide de la représentation auto-conjuguée $\square\!\square$ de $SU(4)$: la généralisation de ce résultat pour n'importe quel N pair ($N = 2$ aussi, même si le modèle correspondant ne dimérise pas) est évidente, il s'agit d'un modèle de Heisenberg antiferromagnétique bâti à l'aide de la représentation auto-conjuguée à 1 colonne et $N/2$ lignes (de dimension [⟨24⟩] $N!/[(N/2)!]^2$). Lorsque N est impair, la situation est tout de suite moins triviale et, même si le DMRG montre que la phase présente toujours une dimérisation en singulet de $SU(N)$, la question de la modélisation de tels systèmes demeure une question ouverte. On pourrait pourtant imaginer un modèle antiferromagnétique alternant les représentations à 1 colonne et $(N-1)/2$ lignes [⟨25⟩] et celle à 1 colonne et $(N+1)/2$ lignes [⟨26⟩] qui sont conjuguées l'une de l'autre (et peuvent former naturellement un singulet sur deux sites) et correspond au bon remplissage. Néanmoins les résultats préliminaires du DMRG [95] semblent montrer une répartition uniforme de la distribution de charge... et si un tel modèle était valide, on devrait observer - et d'autant mieux que N est petit - une alternance du nombre d'atome sur chaque site (1 et 2 atomes pour $N = 3$, 2 et 3 atomes pour $N = 5$, *etc.*).

1.4.2 Le domaine attractif

Dans le domaine attractif, c'est une onde de densité de charge (CDW) de période 2 qui émerge et brise également deux fois la symétrie de translation. En effet, dans la limite du fort coulage, on peut montrer que le fondamental alterne un site vide et un site complètement rempli, c'est-à-dire, puisque sur un site identique ils s'antisymétrisent nécessairement, dans un singulet $SU(N)$. Cet arrangement (voir FIGURE 1.2) se trouve optimiser l'interaction répulsive (en $\mathcal{O}(t^2/U)$) générée par du hopping virtuel [115, 116].

⟨24⟩. Dans $SU(N)$, la représentation à une ligne et k colonnes et de dimension C_N^k.
⟨25⟩. Qui est fabriquée à l'aide de $n = (N-1)/2$ atomes.
⟨26⟩. Qui est fabriquée à l'aide de $n = (N+1)/2$ atomes.

1.5 Résumé & conclusion

En toute généralité, nous n'avons pas traité tous les cas commensurables, lorsque $\bar{n}$ est simplement rationnel (nous avons traité les cas particuliers à un atome par site et au demi-remplissage). Ces cas ont été étudiés à l'aide de bosonisation, de DMRG [113] et d'une approche variationnelle de Monte Carlo dans la limite $U \to \infty$ [118], et nous en donnons ici quelques résultats, pour un nombre d'atome moyen $\bar{n} = \frac{p}{q} \times \mathrm{N}$ ($p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$), sachant que le cas $\mathrm{N} = 2$ est un cas tout à fait pauvre puisqu'aucun remplissage commensurable (sauf le demi-remplissage) "n'accroche les atomes", autrement dit il n'existe pas de transition de Mott, et tout le secteur de charge reste sans gap. On distingue trois grands cas, selon la valeur de l'entier q, dont la valeur va donner la facilité qu'ont les processus d'Umklapp de "résonner", c'est-à-dire d'importer dans l'interaction, et l'on sait leur importance puisqu'ils mènent en général à ouvrir un gap et même à tuer la séparation spin-charge. La valeur "critique" de cet entier est $q = \mathrm{N}$, et nous en donnons ici les résultats selon les cas :

— $q > \mathrm{N}$: les processus d'Umklapp deviennent sans importance et la physique est identique à la physique incommensurable ;
— $q = \mathrm{N}$: les processus d'Umklapp sont pertinents - mais pas suffisamment pour que la séparation spin/charge soit tuée - et une transition de Mott existe dans le secteur répulsif (il existe un U_c qui distingue la phase de Mott d'un liquide de Luttinger) où un gap en charge s'ouvre (le cas à un atome par site est dans ce cas de figure, avec un remplissage $\bar{n}/\mathrm{N} = 1/\mathrm{N}$) ;
— $q < \mathrm{N}$: les processus d'Umklapp sont si pertinents que la séparation spin-charge est tuée et la phase est isolante de Mott, mais cette fois si, avec un gap en spin (due à la non-séparation) avec la formation d'ordre en lien qui dépend du remplissage [113], c'est-à-dire la formation de singulet sur plusieurs sites brisant ainsi la symétrie de translation. L'exemple du demi-remplissage est bien dans ce paradigme, mais on peut aussi citer le modèle $\mathrm{SU}(6)$ au remplissage $\bar{n}/6 = 1/3$ (deux atomes par site) où la phase est trimérisée. Notons que le modèle dans la limite répulsive de fort U est connu : pour un remplissage ⟨27⟩ m/N, le fort couplage mène assez naturellement à un modèle de Heisenberg $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$ dans la représentation à une ligne et m colonnes [97].

La FIGURE 1.3 résume les autres résultats du premier chapitre où nous observons plusieurs comportements caractéristiques. Tout d'abord la réalisation d'un isolant de Mott - où les atomes se fixent autour d'un site (dans le domaine répulsif, évidemment) - et qui correspond à un gap de charge ⟨28⟩ ne se réalise que lorsque le remplissage est commensurable : c'est bien ce que

⟨27⟩. Notons qu'avec un tel remplissage, selon que m divise N ou non, la situation correspond au cas $q < \mathrm{N}$ ou $q = \mathrm{N}$ respectivement.
⟨28⟩. Notons que la réciproque n'est pas forcément vrai, la phase CDW du remplissage $\mathrm{N}/2$ possède un gap en charge avec une charge centrale $c = 0$, et pourtant ce n'est pas un isolant de Mott.

nous évoquions lorsque nous disions qu'un remplissage qui permet à tous les atomes de "se caser" conduit à gapper la charge. À l'inverse, toujours dans le régime répulsif, lorsqu'il existe un écart à la commensurabilité, autrement dit dans le cas incommensurable, on observe une criticalité totale. Il est aussi à noter qu'à un atome par site, il existe une différence nette entre les cas à $N = 2$ et $N > 2$, avec l'existence, dans ce dernier cas, d'un régime ($0 < U < U_c$) de criticalité maximale alors que la physique est commensurable : c'est qu'en toute généralité, il faut aux atomes un certain seuil de répulsion avec de se fixer sur les sites : il existe en effet une compétition entre les termes de saut en t et l'interaction en U. À ce titre l'exemple du cas $N = 2$, avec sa transition à $U = 0$, est bien trompeur. À l'inverse, dans le domaine attractif, tandis que le spin a cette tendance à former des singulets, c'est-à-dire ouvrir un gap, la charge - pourvu que la séparation spin-charge demeure, sans quoi les degrés gappés l'emportent sur elle - à plutôt la tendance inverse, critique. Notons encore que la symétrie spin-charge (la transformation de Shiba transformant l'un en l'autre) du cas $N = 2$ est tuée pour $N > 2$, et pourtant la généralisation des phases n'est pas abbérante. Quant à la séparation spin-charge, l'un des nouveaux effets pour le modèle généralisé est la possibilité pour les processus d'Umklapp de les relier à nouveau, notamment pour le cas du demi-remplissage, ce qui donne lieu à l'ouverture de gaps inattendus au regard du modèle de Hubbard originel.

La description de la généralisation à $N > 2$ du modèle de Hubbard à une orbitale s'achève et comme annoncé, c'est à la généralisation du modèle avec deux orbitales que nous allons désormais nous affairer pour le reste de la thèse. Cette dernière menant à une physique très hétérogène - elle mène notamment à des SPT - et avec des diagrammes de phase à plusieurs dimensions, nous procéderons étape par étape en commençant, dans le CHAPITRE 2, par établir les différents modèles à deux orbitales qui seront étudiés dans les CHAPITRE 4 et CHAPITRE 5 à l'aide des outils présentés dans le CHAPITRE 3.

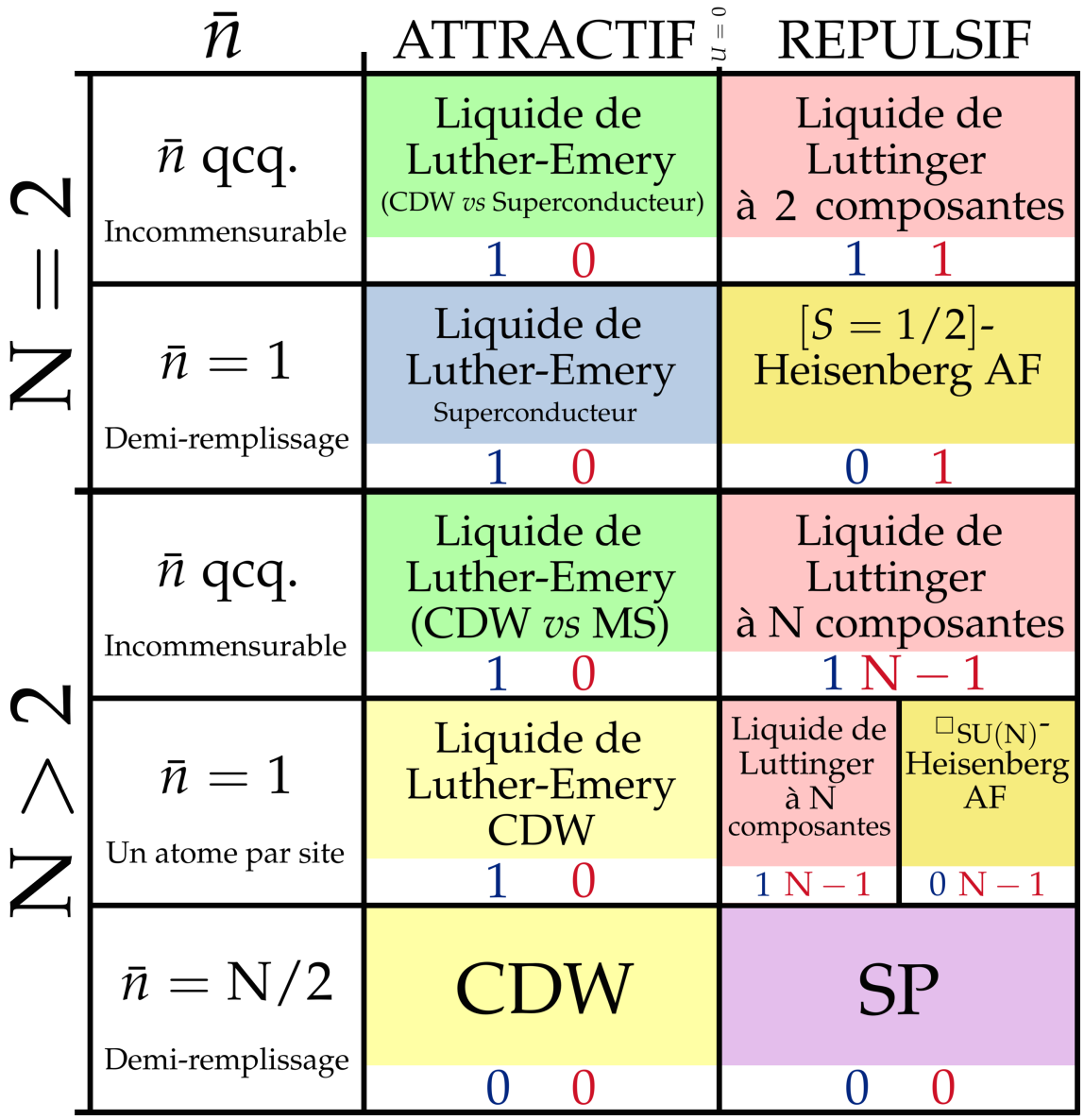


FIGURE 1.3 – Résumé du CHAPITRE 1 avec le cas N = 2 (remplissage incommensurable et demi-remplissage/un atome par site) et N > 2 (remplissage incommensurable, un atome par site et demi-remplissage. En **bleu** et **rouge** sont indiquées pour chaque phase les charges centrales de **charge** et de **spin** correspondantes. Pour le cas à un atome par site, avec N > 2, on remarque l'existence d'une transition de phase - pour $U = U_c$ - entre une phase métallique et une phase de Mott.

Chapitre 2

Modèles de Hubbard SU(N) à 2 orbitales

Le modèle de Hubbard à une orbitale ne donne pas de phase topologique [52, 119]. Pour donner un raisonnement naïf sur la nécessité de la seconde orbitale, prennons l'exemple le plus simple, considérons le cas répulsif à $N = 2$ où l'on essaie de reproduire une chaîne de spin 1 dont on sait qu'elle redonnera une phase de Haldane : tout d'abord, il va de soi que pour avoir une chaîne de Heisenberg, il faut fixer les atomes sur les sites, autrement dit, il faut un remplissage commensurable. Pour le modèle de Hubbard répulsif $N = 2$ à une orbitale, c'est immédiatement réglé puisque le seul modèle qui gappe la charge est la chaîne de Heisenberg antiferromagnétique de spin $1/2$, or la conjecture de Haldane classe comme une phase critique [120, 45]. Et quand bien même nous irions dans le domaine attractif, pour essayer de former nos triplets à l'aide de deux atomes sur un site, la statistique fermionique l'en empêcherait : $\left(c^\dagger_{\alpha,i}c^\dagger_{\beta,i} + c^\dagger_{\beta,i}c^\dagger_{\alpha,i}\right)|0\rangle_i = 0$. Et c'est là que l'idée d'un degré de liberté supplémentaire arrive : si nous pouvions - sur un même site - symétriser les représentations de deux atomes, nous pourrions bâtir un spin 1, mais il faudrait alors que ces deux atomes aient un spin $1/2$ tout en appartenant à des "secteurs" différents pour contourner les effets fermioniques des états identiques. Imaginons alors que, en plus de leur spin $\alpha, \beta = \uparrow, \downarrow$, ces atomes possèdent un degré supplémentaire - le degré orbital - prenant deux valeurs "1" ou "2", alors nous pourrions bâtir cet état de spin 1 sans que la statistique fermionique ne l'annule : $\left(c^\dagger_{\alpha 1,i}c^\dagger_{\beta 2,i} + c^\dagger_{\beta 1,i}c^\dagger_{\alpha 2,i}\right)|0\rangle_i \neq 0$. Pour de tels atomes, on s'attendra assez naturellement, pour un remplissage de deux atomes par site ⟨1⟩, que de tels triplets se forment et mènent à une phase de Haldane en spin. C'est effectivement une prédiction [121, 122, 123], mais il se trouve qu'elle va plus loin puisqu'elle prédit plusieurs types de phases de Haldane, selon que les triplets sont formés en spin, dans les degrés orbitaux, ou même en charge. La généralisation à $N > 2$ de ces modèles à deux orbitales - en plus d'être une première étape pour faire le lien entre la physique de Hubbard SU(N) à une et deux dimensions (le degré orbital étant considéré comme

⟨1⟩. Maintenant qu'il y a un degré supplémentaire, on peut mettre jusqu'à 4 atomes par site, si bien que deux atomes par site représentent le demi-remplissage.

un indice de dimension synthétique ⟨2⟩) - ouvre la possible découverte de phases topologiques exotiques, notamment grâce à la plus grande variété de représentations que l'ajout du degré orbital supplémentaire permet.

Nous présentons ici les trois principales manières de réaliser ce degré orbital et les modèles qui leur sont associées. Et nous commençons par celle qui a donné son nom à ce degré et qui utilise les deux premiers états orbitaux $1 \equiv g$ et $2 \equiv e$.

2.1 La stratégie des états électroniques, modèle *g-e*

L'utilisation de l'état atomique e est assez immédiate et comme offerte par les alcalino-terreux (voir FIGURE 2.1) : en effet cet état possède le double avantage d'être un singulet du point de vue électronique total ⟨3⟩ - c'est-à-dire $J = 0$, laissant présager la symétrie SU(N) - et de plus il possède une transition doublement interdite avec l'état g, ce qui laisse également présager que ces états ne relaxeront pas dans le fondamental avant un temps long, et c'est effectivement le cas avec des temps de plusieurs centaines de secondes [74] ; en d'autres termes une symétrie U(1) orbitale associée à la conservation des atomes des espèces g et e sera assurée. Quant à la préservation par les interactions de la symétrie SU(N), elle est satisfaite par des longueurs de diffusion des processus faisant intervenir le degrés e en dessous de 10^{-3} en variation relative [70, 71, 72, 73].

Retournons alors aux assertions du CHAPITRE 1 et remettons-les à jour afin de prendre en compte ces nouveaux états atomiques :

— Les atomes alcalino-terreux sont dans leur état fondamental $g \equiv {}^1S_0$ ou dans le premier niveau excité $e \equiv {}^3P_0$;
— Les atomes sont individuellement soumis à un piège optique que l'on modélise par un terme de potentiel noté $V(\boldsymbol{r})$, périodique dans la direction de la chaîne (qui définit conventionnellement l'axe Oz) et piégeant dans le plan qui lui est perpendiculaire ;
— L'interaction interatomique, à une température considérée comme nulle, est de type "onde s".

2.1.1 Le hamiltonien à un corps

Cette seule nouveauté, lourde de conséquences, commence par nous imposer une augmentation d'indice pour les opérateurs de champs qui vont désormais créer/détruire à la position

⟨2⟩. Une dimension synthétique est l'interprétation d'un degré non spatial, mais analogue, justement comme un nouveau degré spatial (voir [124]).
⟨3⟩. On se souvient que $e \equiv {}^3P_0$.

Alkaline-earth fermionic species	^{87}Sr	^{173}Yb	^{171}Yb
Nuclear spin I	9/2	5/2	1/2

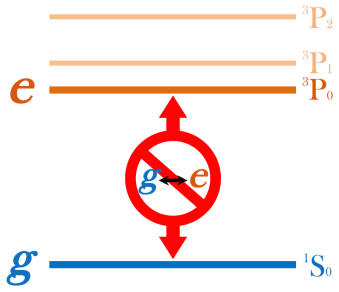


FIGURE 2.1 – L'état e étant un singulet, il n'induit pas d'effet de levée de dégénérescence en spin hyperfin et possède une transition doublement interdite à long temps de vie avec le fondamental. Les niveaux immédiatement supérieurs ne présentent pas cet avantage.

$\boldsymbol{r}$ un atome de spin $\alpha \in [\![1, N]\!]$ et dans l'état orbital $m = g$ ou e (nous désignerons l'indice orbital par une lettre latine). L'opérateur de champ $\Psi^\dagger_{m\alpha}(\boldsymbol{r})$ correspondant possède les relations d'anticommutation des fermions :

$$\left\{\Psi^\dagger_{m\alpha}(\boldsymbol{r}), \Psi^\dagger_{n\beta}(\boldsymbol{r}')\right\} = 0 \tag{2.1}$$

$$\left\{\Psi^\dagger_{m\alpha}(\boldsymbol{r}), \Psi_{n\beta}(\boldsymbol{r}')\right\} = \delta_{mn}\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{2.2}$$

Cela établi, intéressons-nous au terme de potentiel et à ce qu'induit la nouvelle orbitale. Ce dernier est un opérateur qui agit dans l'espace total à une particule : $\mathcal{E} = \{|m\rangle \otimes |\alpha\rangle \otimes |\boldsymbol{r}\rangle\}_{m\alpha,\boldsymbol{r}}$, et nous pouvons décrire le potentiel total selon son effet dans chacun de ces secteurs. Le plus simple est le secteur nucléaire : puisque nous considérons un piège tout optique (et non magnéto-optique), le degré de liberté nucléaire est laissé intact, et la partie nucléaire du potentielle est réduite à l'identité. Ensuite, nous soulignons la distinction entre la manière qu'a un atome - selon son état orbital - d'interagir avec un photon donné, caractérisé par une énergie V_m, et entre la distribution spatiale $\mathcal{D}(\boldsymbol{r})$ de ces photons ⟨4⟩, qui représente le piège optique, indépendamment des atomes. Cela dit, on écrit en toute généralité que le potentiel se décompose comme :

$$V(\boldsymbol{r}) = \mathcal{D}(\boldsymbol{r}) \sum_m V_m |m\rangle\langle m| \tag{2.3}$$

Nous pouvons dès lors diagonaliser dans chacun des secteurs g et e, et comme la dépen-

⟨4⟩. Et qui est, elle, périodique dans la direction de la chaîne, et piégeant dans le plan qui lui est perpendiculaire.

dance spatiale y est identique (la structure optique, c'est-à-dire la distribution $\mathcal{D}(\boldsymbol{r})$ leur est commune), les fonctions propres du premier chapitre (1.8) demeurent exactes. Seules les valeurs moyennes du hamiltonien changeront, dans les mêmes proportions que les V_m, et ainsi le potentiel harmonique sera caractérisée par deux pulsations $\omega_\perp^g$ et $\omega_\perp^e$ et le potentiel axial sera caractérisé par des énergies de Bloch $\varepsilon_{k_z,m}^{(n)}$ associées à une bande (n) et un nombre d'onde k_z et, désormais, par un indice orbital m. Ainsi l'énergie associée à l'état [5] $|m,\alpha,(n_x,n_y),(n),k_z\rangle$ sera :

$$\mathcal{H}_0\,|m,\alpha,(n_x,n_y),(n),k_z\rangle \;=\; \left(\hbar\omega_\perp^m(n_x+n_y)+\varepsilon_{k_z,m}^{(n)}\right)|m,\alpha,(n_x,n_y),(n),k_z\rangle \tag{2.4}$$

Pour écrire le changement de base vers les opérateurs du réseau, il faut encore introduire les fonctions de Wannier qui seront identiques à (1.9) puisque les états propres sont identiques. La décomposition des opérateurs de champs $\Psi_{m\alpha}^\dagger(\boldsymbol{r})$ sur les opérateurs $c_{(n),(n_x,n_y),m\alpha,j}^\dagger$ créant un atome dans l'état m, au site j, avec un spin nucléaire α, dans l'état harmonique (n_x,n_y) et dans la bande (n) est alors :

$$\Psi_{m\alpha}^\dagger(\boldsymbol{r}) = \sum_{j,n_x,n_y,(n)} \mathcal{W}_{n_x,n_y,j}^{(n)\star}(\boldsymbol{r})\,c_{(n),(n_x,n_y),m\alpha,j}^\dagger \tag{2.5}$$

À ce stade, les mêmes considérations physiques vont mener à des approximations très semblables de la décomposition précédente : en imposant que les énergies harmoniques soient petites devant les énergies entre la première et la seconde bande, $\hbar\omega_\perp^m \ll \delta_{\text{bande}}$, et en ajustant correctement le remplissage, on réalise un système figé dans la première bande (0). De plus, si l'on impose aux énergies typiques du système d'être petites devant les énergies harmoniques, et avec un remplissage adapté, on peut également figer la physique dans le premier niveau harmonique $s=(0,0)$. La comparaison entre les énergies $\omega_\perp^g$ et $\omega_\perp^e$ n'est en elle-même pas cruciale puisqu'aussitôt le système réalisé, les atomes dans l'état g et les atomes dans l'état e seront astreints par la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ à rester dans leurs secteurs orbitaux. Cela étant dit, nous faisons l'approximation suivante :

$$\Psi_{m\alpha}^\dagger(\boldsymbol{r}) \simeq \sum_i \mathcal{W}_i^\star(\boldsymbol{r})\,c_{m\alpha,i}^\dagger \tag{2.6}$$

C'est la même approximation que pour le modèle à une orbitale, mais avec l'indice orbital en plus, et l'on est - presque - mené au même terme de hamiltonien libre :

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i,j,m\alpha} t_m^{(i,j)}\,c_{m\alpha,i}^\dagger c_{m\alpha,j} \tag{2.7}$$

[5]. Où, comme dans le chapitre précédent, on associe à la partie harmonique les états $|n_x,n_y\rangle$ de fonctions d'onde $\phi_{n_x,n_y}(x)$ et à la partie axiale les états $|(n),k_z\rangle$ de fonctions d'onde $\phi_{k_z}^{(n)}$.

Où l'énergie $t_m^{(i,j)}$ possède désormais un dépendance orbitale et est définie par :

$$t_m^{(i,j)} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{W}_i^\star(\boldsymbol{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \langle m|V(\boldsymbol{r})|m\rangle \right\} \mathcal{W}_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.8}$$

De même qu'à une orbitale, le terme $t_m^{(i,i)}$ est à intégrer à un terme de potentiel chimique, et l'on peut, dans l'approximation des liaisons fortes, ne considérer que les termes plus proches voisins qui nous définissent désormais deux termes de saut $t_m = -t_m^{\langle i,j\rangle}$, et l'on est mené à l'expression finale du terme à un corps du modèle *g-e* :

$$\mathcal{H}_0 = -\sum_m t_m \sum_{i,\alpha} \left(c^\dagger_{m\alpha,i+1} c_{m\alpha,i} + c^\dagger_{m\alpha,i} c_{m\alpha,i+1} \right) \tag{2.9}$$

Il s'agit finalement du hamiltonien libre à une orbitale dupliqué maintenant pour deux orbitales. Étudions à présent l'interaction qui, elle, ne mènera pas à un résultat aussi trivial, et c'est une bonne nouvelle, puisque nous ne voulons pas avoir affaire à deux modèles à une orbitale qui seraient invisibles l'un à l'autre, et tout serait alors à recommencer.

2.1.2 Le hamiltonien d'interaction à deux corps

Nous avons jusqu'ici tenu compte de l'extension de la première assertion en la traduisant par l'ajout d'un indice dans les opérateurs de création, et dans la deuxième assertion en discutant la structure du potentiel optique mais, qu'en est-il de l'interaction ? Qu'en est-il de la troisième assertion ? Pour répondre à cette question, répétons ce qui a déjà été dit et qui traduit cette dernière, à savoir que l'interaction est de type "onde s", c'est-à-dire une interaction de contact caractérisée, pour *a priori* chaque processus d'interaction à deux atomes X, par une seule longueur de diffusion a_X associée à un paramètre d'interaction $g_X = 4\pi\hbar^2 a_X/m$ qui intervient dans l'expression du potentiel d'interaction $V^{\text{int.}}$ pour deux particules aux positions $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$ dans ce processus X :

$$V^{\text{int.}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = g_X \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \tag{2.10}$$

Cela ressemble à une redite du chapitre précédent, néanmoins notons que les atomes ayant plus de degrés internes, l'espace des processus à deux atomes $\{X\}_X$ est plus important. De même que pour le potentiel optique, ce terme d'interaction à deux corps possède une structure puisqu'il agit dans l'espace total, mais cette fois-ci à deux particules $\mathcal{E}^{\otimes 2}$. La structure dans le secteur spatial est déjà écrite dans l'équation précédente, c'est une interaction de contact. La structure dans le secteur nucléaire, à vrai dire comme dans le cas à une orbitale, est connue pour posséder des longueurs de diffusion qui dépendent peu du spin I, c'est la traduction de la symétrie SU(N) dans l'interaction : le terme traduisant cette absence de structure est $\mathrm{Id}_{\mathrm{N}}^{\otimes 2}$. En-

fin, la structure dans le secteur orbital est clairement non-triviale : lorsque deux atomes entrent en contact, évidemment que leur état atomique compte dans leur manière d'interagir ! Considérons alors l'interaction sous la forme générale suivante :

$$V^{\text{int.}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = g_o \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{N}}^{\otimes 2} \otimes \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{2.11}$$

Où g_o agit dans l'espace orbital à deux particules, qui est de dimension 4 : il est formé par les états de la base $\{|gg\rangle, |ee\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle\}$. Nous nous attendons alors à 4 processus propres fatalement associés à 4 longueurs longueurs de diffusion. Pour trouver ces processus, utilisons les différentes propriétés de l'interaction à commencer par sa symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ qui conserve séparément [⟨6⟩] les espèces g et e, assurant la nullité de l'élément $\langle ee|g_o|gg\rangle$ ainsi que des éléments $\langle gg|g_o|ge\rangle$, $\langle gg|g_o|eg\rangle$, $\langle ee|g_o|ge\rangle$ et $\langle ee|g_o|eg\rangle$ (et de leur cinq conjugués). Les composantes non-nulles les plus triviales sont $\langle gg|g_o|gg\rangle$ et $\langle ee|g_o|ee\rangle$. Pour les composantes restantes, le bon sens physique, impose l'égalité entre les deux composantes suivantes : $\langle ge|g_o|ge\rangle = \langle eg|g_o|eg\rangle$, en effet l'interaction qui écrite nous dit "*g et e interagissent puis se séparent*" est identique si l'on échange g et e : il s'agit du processus d'interaction *directe*, par opposition au processus d'interaction d'*échange* où "*g et e interagissent, g devient e et e devient g, puis se séparent*", ce dernier étant tout à fait compatible avec la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ et qui correspond à la non-nullité des éléments $\langle eg|g_o|ge\rangle = \langle ge|g_o|eg\rangle^\star$. Avant de préciser d'avantage la forme de g_o, écrivons la matrice correspondante :

$$g_o = \begin{pmatrix} g_{gg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{ee} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\text{direct}} & g_{\text{échange}} \\ 0 & 0 & g^\star_{\text{échange}} & g_{\text{direct}} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Il s'agit maintenant de montrer que le coefficient $g_{\text{échange}} \in \mathbb{R}$ en utilisant l'aspect fermionique des particules utilisées ainsi que la symétrie $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$ calculée et mesurée de l'interaction. Le caractère fermionique des atomes considérés impose à l'état total à deux particules d'être antisymétrique dans l'échange des deux particules, ce qui restreint le nombre d'états accessibles. L'interaction se faisant lorsque les deux particules sont en un point identique - ce qui implique que la partie spatiale de l'état à deux particules sera symétrique - ce sont les parties nucléaire et orbitale que l'on doit antisymétriser. Pour savoir quels états ne sont pas fermioniques, considérons qu'un atome $|m\alpha\rangle$ peut être vu comme un état d'une représentation composite $\left(\square_{\mathrm{SU}(2)_o}, \square_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}\right)$ où m prend l'une des deux valeurs de la représentation [⟨7⟩] $\square_{\mathrm{SU}(2)_o}$ tandis que α prend l'une des N valeurs de la représentation $\square_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}$. Ainsi, un état à deux particules n'est qu'un "produit" de

⟨6⟩. En réalité c'est faux, c'est associé à $\mathrm{U}(1)_c$ qu'elle satisfait cette propriété. Mais comme la charge est toujours conservée, c'est toujours équivalent.

⟨7⟩. Même si la symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$ n'est pas satisfaite pour le modèle, rien n'empêche d'adopter ce point de vue dont on verra qu'il est bienvenu.

deux telles représentations mixtes qui mènent aux états des représentations mixtes suivantes :

$$\left(\square_{\mathrm{SU}(2)_o}, \square_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}\right) \otimes \left(\square_{\mathrm{SU}(2)_o}, \square_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}\right) = \left(\bullet_{\mathrm{SU}(2)_o}, \square\square_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}\right) \tag{2.13}$$

$$\oplus \left(\square\square_{\mathrm{SU}(2)_o}, \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}\right) \tag{2.14}$$

$$\oplus \left(\square\square_{\mathrm{SU}(2)_o}, \square\square_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}\right)$$

$$\oplus \left(\bullet_{\mathrm{SU}(2)_o}, \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{\mathrm{SU}(\mathrm{N})}\right)$$

Or, et c'est le premier avantage de cette écriture en représentation, nous savons que les représentations en **rouge** sont symétriques (deux fois antisymétriques pour la première, deux fois symétriques pour le deuxième) : elles ne sont donc pas fermioniques et n'existent tout simplement pas (pour des atomes à une position identique). Cela dit, avançons un argument qui intègre la symétrie SU(N) de l'interaction : si l'interaction possède une telle symétrie, alors les processus qu'elle décrit sont stables à l'intérieur des représentations irréductibles de SU(N), par définition. Les représentations mixtes (2.13) et (2.14) sont alors deux secteurs distincts dans lesquels les processus d'interaction vont agir. Plaçons-nous du point de vue orbital et comptons nos longueurs de diffusion : nous savons déjà qu'au sein de (2.14), les états $|gg\rangle$ et $|ee\rangle$ sont propres et associés chacun à un paramètre d'interaction, g_{gg} et g_{ee} respectivement. Il reste alors deux paramètres d'interaction à distribuer et notre argument sur la symétrie nous impose alors d'en donner un au dernier état du triplet orbital et un autre à l'état singulet : $|ge^+\rangle = (|ge\rangle + |eg\rangle)/\sqrt{2}$ est associé à g^+_{ge} et $|ge^-\rangle = (|ge\rangle - |eg\rangle)/\sqrt{2}$ est associé à g^-_{ge}. Les deux états ainsi symétrisés et antisymétrisés sont donc des états propres de pour g_o qui dans cette base $\{|gg\rangle, |ee\rangle, |ge^+\rangle, |ge^-\rangle\}$ est diagonal [8] :

$$g_o = \mathrm{diag}\left(g_{gg}, g_{ee}, g^+_{ge}, g^-_{ge}\right) \tag{2.15}$$

Naturellement, à ces quatre paramètres d'interaction sont associés quatre longueurs de diffusion, a_{gg}, a_{ee}, a^+_{ge} et a^-_{ge} qui pilotent l'interaction. L'interaction nous est maintenant connue, nous pouvons écrire le hamiltonien à deux corps dans les opérateurs de champ $\Psi^\dagger_{m\alpha}(\boldsymbol{r})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int.}} = & \sum_{m=g,e} g_{mm} \sum_{\alpha<\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \Psi^\dagger_{m\alpha}(\boldsymbol{r})\Psi_{m\alpha}(\boldsymbol{r})\Psi^\dagger_{m\beta}(\boldsymbol{r})\Psi_{m\beta}(\boldsymbol{r}) \\ & + \frac{g^+_{ge} + g^-_{ge}}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \Psi^\dagger_{g\alpha}(\boldsymbol{r})\Psi_{g\alpha}(\boldsymbol{r})\Psi^\dagger_{e\beta}(\boldsymbol{r})\Psi_{e\beta}(\boldsymbol{r}) \\ & + \frac{g^+_{ge} - g^-_{ge}}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \Psi^\dagger_{g\alpha}(\boldsymbol{r})\Psi^\dagger_{e\beta}(\boldsymbol{r})\Psi_{g\beta}(\boldsymbol{r})\Psi_{e\alpha}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{2.16}$$

[8]. Ce qui revient à dire que $g_{\text{échange}}$ est réel puisque σ^x et semblable à σ^z selon ce changement de base, ce qui impose d'ailleurs que $g^\pm_{ge} = g_{\text{direct}} \pm g_{\text{échange}}$.

Notons comment se décompose ce hamiltonien d'interaction : tout d'abord nous reconnaissons pour le premier membre, la duplication pour g et pour e du hamiltonien d'interaction à une orbitale. Le deuxième terme n'est rien d'autre que le terme associé aux processus directs où un atome donné conserve son état orbital tandis que le troisième terme correspond aux processus d'échanges entre les atomes g et e (les paramètres d'interaction correspondent).

La dernière étape pour obtenir le hamiltonien d'interaction sur site est d'utiliser la décomposition (2.5) des opérateurs de champ sur les opérateurs du réseau :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \sum_{m,i} \frac{U_m}{2} n_{m,i}^2 + V \sum_i n_{g,i} n_{e,i} + V_{\text{ex}} \sum_{\alpha\beta,i} c_{g\alpha,i}^\dagger c_{e\beta,i}^\dagger c_{g\beta,i} c_{e\alpha,i} \tag{2.17}$$

Où les paramètres d'interaction U_m, V et $V_{\text{int.}}$ sont définis à l'aide des paramètres d'interaction g_{mm} et $g_{ge}^{\pm}$ et des intégrales des fonctions de Wannier :

$$U_m = g_{mm} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, |\mathcal{W}(\boldsymbol{r})|^4 \tag{2.18}$$

$$V = \frac{g_{ge}^+ + g_{ge}^-}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, |\mathcal{W}(\boldsymbol{r})|^4 \tag{2.19}$$

$$V_{\text{ex}} = \frac{g_{ge}^+ - g_{ge}^-}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, |\mathcal{W}(\boldsymbol{r})|^4 \tag{2.20}$$

Comme dans le cas à une orbitale, l'approximation des liaisons fortes permet de négliger les termes entre sites non-identiques, si bien que l'interaction est encore locale. Insistons encore sur le sens physique que l'on associe à chaque terme du hamiltonien et donc à chaque paramètre d'interaction : les termes en U_m correspondent à l'interaction des atomes dans un secteur orbital donné, ici m ; le terme en V correspond lui au processus d'interaction direct, sans échange, entre les atomes des deux secteurs orbitaux ; et enfin le terme V_{ex} correspond au processus d'interaction, cette fois-ci avec échange, entre atomes des deux secteurs orbitaux.

2.1.3 Le hamiltonien total, les symétries

Désormais, nous pouvons écrire le hamiltonien total qui régit la physique du modèle g-e, et pour cela nous réassemblons les termes un corps et deux corps ⟨9⟩, sans omettre le terme de

⟨9⟩. Pour les termes de densité sur site en U_m, on utilise aussi la forme $\sum_i n_{m,i}(n_{m,i}-1)$ pour le terme $\sum_i n_{m,i}^2$, ce qui revient simplement à une redéfinition du potentiel chimique.

potentiel chimique μ_m qui dépend *a priori* aussi du degré orbital :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{g\text{-}e} &= -\sum_{m\alpha,i} t_m \left(c^\dagger_{m\alpha,i+1} c_{m\alpha,i} + c^\dagger_{m\alpha,i} c_{m\alpha,i+1}\right) - \sum_{m,i} \mu_m n_{m,i} \\ &+ \sum_{m,i} \frac{U_m}{2} n^2_{m,i} + V \sum_i n_{g,i} n_{e,i} + V_{\text{ex}} \sum_{\alpha\beta,i} c^\dagger_{g\alpha,i} c^\dagger_{e\beta,i} c_{g\beta,i} c_{e\alpha,i}\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ce modèle - désigné dans la suite comme le *modèle de g-e* [70, 71] quand il est écrit sous cette forme - est une première généralisation du modèle à une orbitale et l'on en voit les conséquences *via* les deux termes en V et V_{ex}. Autrement dit ce modèle est connu pour $V = V_{\text{ex}} = 0$ puisqu'il s'agit de deux chaînes (1.21) dont la physique est connue et décrite dans le CHAPITRE 1. Cela dit, discutons tout d'abord des symétries de (2.21) en commençant par la plus évidente qui est la conservation du nombre total d'atomes $\sum_i n_i$ associée à la transformation globale suivante qui laisse invariant (2.21) de manière évidente :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \xrightarrow{\text{U}(1)_c} e^{i\theta} c^\dagger_{m\alpha,i}\,, \quad \forall m\alpha, i, \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[\tag{2.22}$$

Cette symétrie est associée au groupe $\text{U}(1)_c$ et elle s'exprime avec la commutation de l'opérateur nombre de particules avec le hamiltonien :

$$\left[\sum_i n_i, \mathcal{H}_{g\text{-}e}\right] = 0 \tag{2.23}$$

Passons maintenant à une nouvelle symétrie qui apparaît seulement dans le cadre de la seconde orbitale et que nous avons déjà largement évoqué : la symétrie $\text{U}(1)_o$ qui est associée à la conservation de la différence des deux espèces orbitales $\sum_i (n_{g,i} - n_{e,i})$ et qui s'exprime à l'aide de la troisième matrice de Pauli ⟨10⟩ :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \xrightarrow{\text{U}(1)_o} e^{i\sigma^z_{mm}\theta} c^\dagger_{m\alpha,i}\,, \quad \forall m\alpha, i, \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[\tag{2.24}$$

Avec la relation de commutation associée :

$$\left[\sum_i (n_{g,i} - n_{e,i}), \mathcal{H}_{g\text{-}e}\right] = 0 \tag{2.25}$$

En réalité, si l'on cumule la conservation totale d'atomes et cette conservation de la différences des espèces orbitales, on en vient à conserver séparément les deux espèces, aussi, selon le point de vue, on considérera de façon équivalente la symétrie $\text{U}(1)_c \times \text{U}(1)_o$ et la symétrie

⟨10⟩. On définit les matrices de Pauli habituelles $\sigma^{x,y,z}$ mais à l'aide des indices g et e. Ainsi nous aurons $\sigma^z_{gg} = -\sigma^z_{ee} = 1$ et $\sigma^z_{ge} = \sigma^z_{eg} = 0$.

$\mathrm{U}(1)_g \times \mathrm{U}(1)_e$ ⟨11⟩. Notons qu'à l'aide des deux degrés orbitaux on peut définir les générateurs $\mathrm{SU}(2)_o$ - même si cette symétrie n'est pas celle du modèle - à l'aide des matrices de Pauli. Nous utilisons ici et commençons à systématiser l'usage de la convention d'Einstein sur la sommation implicite sur les indices répétés ⟨12⟩ :

$$T_i^j = c^\dagger_{m\alpha,i} \frac{\sigma^j_{mn}}{2} c_{n\alpha,i} \qquad j = x, y, z \tag{2.26}$$

Ces générateurs sont qualifiés de *spin orbital* ou encore de *pseudospin*. La symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ dans ce pseudospin s'écrit simplement : $[\sum_i T_i^z, \mathcal{H}_{g\text{-}e}] = 0$. Grâce à ces générateurs, on récrit le modèle *g-e* qui définit alors de nouveaux paramètres d'interaction $U, U_{\text{diff.}}, J$ et J_z, et qui sous cette forme définit le *modèle de Hund* [122] (les potentiels chimiques sont aussi différents de ceux de la version *g-e*, mais connaissant leur "plasticité", on ne les distingue pas) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{Hund}} \;=\; & -\sum_{m\alpha,i} t_m \left(c^\dagger_{m\alpha,i+1} c_{m\alpha,i} + c^\dagger_{m\alpha,i} c_{m\alpha,i+1} \right) - \sum_{m,i} \mu_m n_{m,i} \\ & + \frac{U}{2} \sum_{m,i} n^2_{m,i} + \frac{U_{\text{diff.}}}{2} \sum_i \left(n^2_{g,i} - n^2_{e,i} \right) + J \sum_i \left[(T_i^x)^2 + (T_i^y)^2 \right] + J_z \sum_i (T_i^z)^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Un simple dictionnaire permet d'ailleurs de passer du modèle *g-e* au modèle de Hund :

$$U = \frac{1}{4}(U_g + U_e + 2V) \tag{2.28}$$

$$U_{\text{diff.}} = \frac{1}{2}(U_g - U_e) \tag{2.29}$$

$$J = V_{\text{ex}} \tag{2.30}$$

$$J_z = \frac{1}{2}(U_g + U_e - 2V) \tag{2.31}$$

L'écriture (2.27) rend aussi manifeste un *ajustement fin* qui élargit la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ à la symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$, lorsque $J_z = J$. Enfin, le système possède la symétrie $\mathrm{SU(N)}$ largement évoquée et reliée, au moins, à la conservation du nombre total de particules ayant une composante du spin nucléaire total. Considérant une matrice $\widetilde{U} \in \mathrm{SU(N)}$ (c'est-à-dire de taille $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$, unitaire, $\widetilde{U}^\dagger = \widetilde{U}^{-1}$, et de déterminant unité, $\det \widetilde{U} = 1$), les transformations suivantes laissent invariant (2.21) et (2.27) :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \xrightarrow{\mathrm{SU(N)}_s} \widetilde{U}_{\alpha\beta} c^\dagger_{m\beta,i}\,, \qquad \forall m\alpha, i, \quad \text{et} \quad \widetilde{U} \in \mathrm{SU(N)} \tag{2.32}$$

⟨11⟩. Associée aux conservations de $\sum_i n_{g,i}$ et $\sum_i n_{e,i}$ respectivement.
⟨12⟩. L'usage habituel que nous en avons veut que nous n'utilisions jamais cette convention pour les indices de site.

De même qu'à une orbitale, nous introduisons les $\mathrm{N}^2 - 1$ générateurs de $\mathrm{SU(N)}$ à l'aide des matrices T^a de la fondamentale, mais en distinguant désormais chaque secteur orbital (attention à la non-sommation sur m) :

$$\mathcal{S}^a_m = \sum_i c^\dagger_{m\alpha,i} T^a_{\alpha\beta} c_{m\beta,i}\,, \qquad m \in \{g,e\}, a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!] \tag{2.33}$$

La symétrie $\mathrm{SU(N)}$ - non valable dans chaque secteur orbital, mais seulement pour les deux en même temps, d'un bloc ⟨13⟩ - se traduit par les relations de commutation suivantes entre le hamiltonien (2.21) et le "spin" nucléaire total $\mathcal{S}^a = \mathcal{S}^a_g + \mathcal{S}^a_e$:

$$\left[\mathcal{S}^a, \mathcal{H}_{g\text{-}e}\right] = 0, \qquad a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!] \tag{2.34}$$

À ce stade, toutes les symétries mises ensemble donnent aux modèles de Hubbard $\mathrm{SU(N)}$ à deux orbitales (2.21, 2.27) la symétrie $\mathrm{U}(1)_c \times \mathrm{U}(1)_o \times \mathrm{SU(N)}_s$. Mais nous pouvons encore étendre cette symétrie en ajoutant la symétrie d'échange orbital $\mathbb{Z}_2^{g\text{-}e}$ qui - comme son nom l'indique - échange g et e :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \xrightarrow{\mathbb{Z}_2^{g\text{-}e}} c^\dagger_{\overline{m}\alpha,i}\,, \qquad \forall m\alpha, i \tag{2.35}$$

Où $\overline{m}$ désigne le degré opposé, c'est-à-dire $\overline{g} = e$ et $\overline{e} = g$. Cette symétrie n'étant pas satisfaite - avec des paramètres d'interaction quelconques - pour les modèles g-e (2.21, 2.27), il faut la réaliser *via* un ajustement fin des paramètres d'interaction U_m ou $U_{\text{diff.}}$, des potentiels chimiques μ_m et des termes tunnels t_m desquels toute dépendance orbitale doit disparaître, c'est-à-dire :

$$t = t_g = t_e \tag{2.36}$$
$$\mu = \mu_g = \mu_e \tag{2.37}$$
$$U = U_g = U_e \qquad (g\text{-}e) \tag{2.38}$$
$$U_{\text{diff.}} = 0 \qquad \text{(Hund)} \tag{2.39}$$

En réalité un tel ajustement n'est pas possible *via* le phénomène de résonance de Feshbach orbitale qui ne permet d'ajuster que les termes d'interaction interorbitale V et V_{ex}, c'est-à-dire qu'elle ne permet pas de régler les termes intraorbitaux U_g et U_e. Néanmoins les modèles généraux (2.21) et (2.27) requièrent une analyse beaucoup plus ardue pour leur résolution et finalement, rien n'empêche d'écrire et d'étudier de tels modèles, d'abord en g-e (les processus

⟨13⟩. À cause du terme d'échange en V_{ex}.

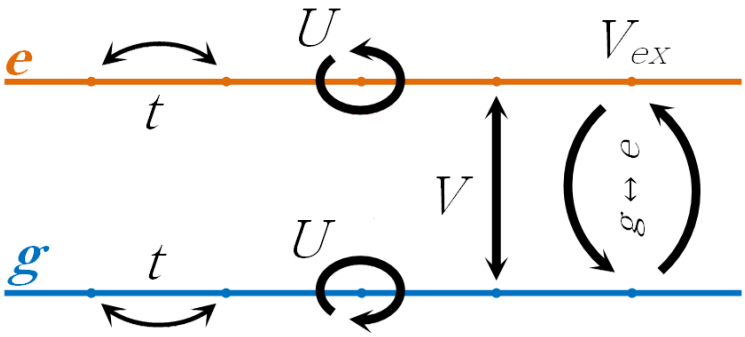


FIGURE 2.2 – Présentation des divers processus d'interaction du modèle *g-e* avec la symétrie d'échange. En plus du terme de saut dans les différents secteurs orbitaux (en t), le modèle présente une interaction avec trois principaux processus : au sein d'un secteur (en U), entre les secteurs avec (en V) et sans (en V_{ex}) échange.

d'interaction du modèle (2.21) sont représentés dans la FIGURE 2.2) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{g\text{-}e} &= -t\sum_{m\alpha,i}\left(c^{\dagger}_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^{\dagger}_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-\mu\sum_{i}n_i \\ &\quad+\frac{U}{2}\sum_{m,i}n^2_{m,i}+V\sum_{i}n_{g,i}n_{e,i}+V_{\text{ex}}\sum_{\alpha\beta,i}c^{\dagger}_{g\alpha,i}c^{\dagger}_{e\beta,i}c_{g\beta,i}c_{e\alpha,i}\end{aligned} \tag{2.40}$$

Puis en Hund (le dictionnaire entre ces modèles est donné en ANNEXE A) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{Hund}} &= -t\sum_{m\alpha,i}\left(c^{\dagger}_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^{\dagger}_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-\mu\sum_{i}n_i \\ &\quad+\frac{U}{2}\sum_{m,i}n^2_{m,i}+J\sum_{i}\left[(T^x_i)^2+(T^y_i)^2\right]+J_z\sum_{i}(T^z_i)^2\end{aligned} \tag{2.41}$$

C'est à ces deux modèles, qui possèdent la symétrie $\mathrm{U}(1)_c \times \mathrm{U}(1)_o \times \mathrm{SU}(\mathrm{N})_s \times \mathbb{Z}_2^{g\text{-}e}$, que nous allons nous attacher dans notre étude de la physique du modèle *g-e*.

2.1.4 Diagonalisation du hamiltonien libre

En vue de compléter ce panorama général sur le modèle *g-e*, nous présentons ici la diagonalisation du modèle libre sans symétrie d'échange, et notamment nous donnerons le lien entre un remplissage donné et les vecteurs de Fermi qu'ils induisent. La diagonalisation de (2.21) et (2.27) (lorsque $U_g = U_e = V = V_{\text{ex}} = 0$ et $U = U_{\text{diff.}} = J = J_z = 0$ respectivement), est identique et une simple transformation de Fourier est suffisante (en introduisant le nombre de site $\mathrm{N}_{\text{sites}}$

de la chaîne, qui est un intermédiaire de calcul) :

$$c^{\dagger}_{m\alpha,k} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}} \sum_{j} e^{ia_0 kj} c^{\dagger}_{m\alpha,j} \tag{2.42}$$

Alors le hamiltonien libre trie les états selon leur mode k qu'il compte avec $n_{m\alpha,k} = c^{\dagger}_{m\alpha,k} c_{m\alpha,k}$:

$$\mathcal{H}^{(0)}_{g\text{-}e} = \sum_{m\alpha,k} \big(\varepsilon_{m,k} - \mu_m\big) n_{m\alpha,k} \tag{2.43}$$

Où l'énergie d'un mode est donnée par :

$$\varepsilon_{m,k} = -2t_m \cos\big(a_0 k\big) \tag{2.44}$$

La première zone de Brillouin PZB $= [-\pi/a_0, \pi/a_0]$ va donc comporter, en toute généralité 2N branches qui vont se regrouper par paquet de N dans une branche identique selon le degré orbital m (puisque l'énergie (2.44) ne dépend que de ce degré orbital). Comme le montre la FIGURE 2.3, à température nulle, on va introduire des fermions de la plus basse à la plus haute énergie et lorsque l'on aura mis tous les fermions, le niveau d'énergie de Fermi ε_F va définir dans chaque secteur orbital un vecteur d'onde k^m_F. De plus, nous savons qu'à une dimension, le nombre d'états $\mathrm{d}n_{m\alpha}$ d'une branche $m\alpha$ donnée sur un intervalle $\mathrm{d}k_{m\alpha}$ lui est justement proportionnel, or la proportion est infinie dans la limite de la chaîne infinie :

$$\frac{\mathrm{d}n_{m\alpha}}{\mathrm{d}k_{m\alpha}} = \frac{a_0}{2\pi} \mathrm{N}_{\text{sites}} \xrightarrow[\text{infinie}]{\text{chaîne}} \infty \tag{2.45}$$

Aussi, pour relier les vecteurs de Fermi au remplissage, nous considérons un argument en proportion. L'intégrale des modes jusqu'à la mer de Fermi est à l'intégrale des tous les modes, ce que le nombre moyen d'atome par site est au nombre maximal d'atomes par site, soit :

$$\frac{\displaystyle\sum_{m\alpha} \int_{-k^m_F}^{+k^m_F} \mathrm{d}k_{m\alpha}}{\displaystyle\sum_{m\alpha} \int_{-\pi/a_0}^{+\pi/a_0} \mathrm{d}k_{m\alpha}} = \frac{\bar{n}}{2\mathrm{N}} \tag{2.46}$$

Tous calculs faits, nous en venons à la relation fondamentale suivante qui défini le vecteur de Fermi k_F qui est piloté par le seul remplissage (et le nombre maximal de degrés par site) :

$$k_F = \frac{k^g_F + k^e_F}{2} = \frac{\pi \bar{n}}{2a_0 \mathrm{N}} \tag{2.47}$$

Les énergies de Fermi k^m_F des deux branches orbitales sont quant à elles définies par l'énergie

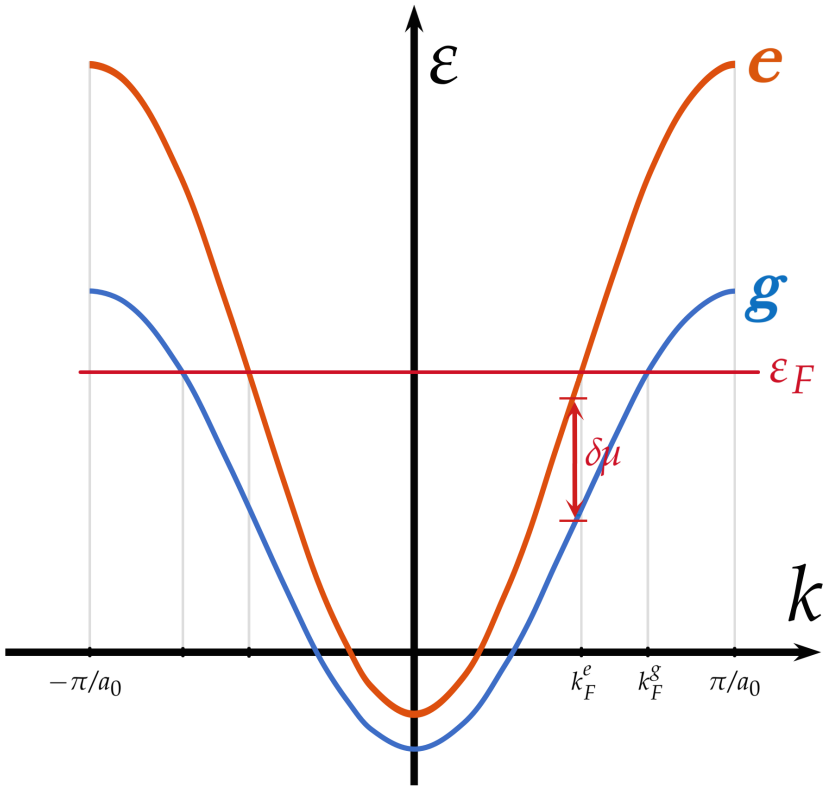


FIGURE 2.3 – Les deux branches orbitales du hamiltonien libre sans la symétrie d'échange distinguées par l'écart en potentiel chimique $\delta\mu$ et par l'anisotropie des termes de saut $t_e - t_g$.

de Fermi ε_F :

$$\varepsilon_g\left(k_F^g\right) - \mu_g = \varepsilon_F \tag{2.48}$$
$$\varepsilon_e\left(k_F^e\right) - \mu_e = \varepsilon_F \tag{2.49}$$

En utilisant l'expression de l'énergie du mode $\varepsilon_m(k)$ et un peu de trigonométrie, on trouve l'expression de la différence des vecteurs d'onde $\delta = k_F^g - k_F^e$:

$$\delta = \frac{2}{a_0}\arcsin\left[\frac{|\delta\mu|\beta - |\alpha|\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta\mu^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right] \tag{2.50}$$

Où :

$$\delta\mu = \mu_g - \mu_e \tag{2.51}$$
$$\alpha = 2(t_g - t_e)\cos\left(a_0 k_F\right) \tag{2.52}$$
$$\beta = 2(t_g + t_e)\sin\left(a_0 k_F\right) \tag{2.53}$$

L'expression de k_F étant donnée par (2.47). Notons que dans le cas de la présence de la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2^{g\text{-}e}$, $t_g = t_e$, et le terme α devient nul, puis $\mu_g = \mu_e$, et c'est maintenant $\delta\mu$ qui s'annule, si bien que $\delta = 0$: la symétrie d'échange orbitale fusionne les deux branches orbitales.

Voilà posé le modèle g-e. Son principal point faible est expérimental et concerne les atomes dans l'état e qui - en plus de nécessiter un appareillage plus important (ne serait-ce que pour les générer à partir des états g) et d'être associés à des paramètres d'interaction qui brisent plus la symétrie SU(N) que leur homologues dans l'état g - ont cette tendance à générer de relativement fortes pertes atomiques [70, 71], effets tout à fait indésirables, on s'en doute. Alors, nous proposons dans la section suivante une deuxième stratégie pour synthétiser la seconde orbitale, et après la voie "électronique" qui mène au modèle g-e, nous présentons la voie "harmonique" qui mène au modèle p-band.

2.2 La stratégie des états harmoniques, modèle p-band

Avec tous les éléments présentés pour l'établissement du modèle g-e, la présentation du modèle p-band va être plus brève. Et ce d'autant plus qu'aucune mise à jour des assertions du premier chapitre n'est nécessaire, si bien qu'elles correspondent mot pour mot à celle du CHAPITRE 1 :

— Les atomes alcalino-terreux sont dans leur état fondamental $g \equiv {}^1S_0$;
— Les atomes sont individuellement soumis à un piège optique que l'on modélise par un terme de potentiel noté $V(\mathbf{r})$, périodique dans la direction de la chaîne (qui définit conventionnellement l'axe Oz) et piégeant dans le plan qui lui est perpendiculaire ;
— L'interaction interatomique, à une température considérée comme nulle, est de type "onde s".

La différence se joue alors *via* la structure harmonique et son remplissage. En réalité, tout ce qui est dit dans la premier chapitre jusqu'à (1.10) (inclus) est maintenu. Nous recopions d'ailleurs la décomposition des opérateurs de champs $\Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r})$ qui créent l'atome à la position $\boldsymbol{r}$ avec le spin nucléaire α sur les opérateurs de réseau $c^\dagger_{(n),(n_x,n_y),\alpha,j}$ qui le créent au site j, avec un spin nucléaire α, dans l'état harmonique (n_x, n_y) et dans la bande (n) :

$$\Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}) = \sum_{j,n_x,n_y,(n)} \mathcal{W}^{(n)\star}_{n_x,n_y,j}(\boldsymbol{r})\, c^\dagger_{(n),(n_x,n_y),\alpha,j} \tag{2.54}$$

2.2.1 Le hamiltonien à un corps

Parlons maintenant de comment nous souhaitons voir réalisé le système d'atomes froids : comme précédemment, nous souhaitons ne voir occupée que la première bande de Bloch (0), et pour cela nous imposons que δ_{bande} soit une très grande énergie devant les énergies typiques du problème ainsi que celle du puits harmonique qui confine les atomes le long de l'axe : $\hbar\omega_\perp \ll \delta_{\text{bande}}$ (pour le modèle p-band, il n'y a pas de dépendance orbitale du puits harmonique). L'énergie harmonique $\hbar\omega_\perp$ étant également très grande devant les énergies du problème, nous constatons que nous pouvons utiliser les états harmoniques pour créer nos deux états orbitaux : en considérant que tous les états de la première bande et de l'état $s = (0,0)$ sont remplis, alors, les prochains niveaux à remplir seront dans la première bande - puisque l'énergie pour accéder à la deuxième est très grande par hypothèse - et dans les deux états $p_x = (1,0)$ et $p_y = (0,1)$, puisque c'est la plus petite énergie qu'il reste à franchir. Notons alors que les énergies du problème étant petites devant l'énergie harmonique, nous pouvons "oublier" les atomes s qui pourront être considérés comme profonds dans la mer de Fermi, c'est-à-dire loin de la surface de Fermi, où toute la physique se place à basse température. Nous aurons alors concrètement N atomes par site de base, que nous nous ferons un soin d'omettre à présent car elle sera vue comme une grande constante dans le hamiltonien. Expérimentalement, un surplus d'atomes est toujours une mauvaise nouvelle, et l'on peut légitimement s'attendre à ce que la réalité brise ces considérations idéalisées. Néanmoins nous faisons cette approximation et ce faisant introduisons à nouveau un indice orbital m reliés aux états harmoniques p_x ou p_y qui donnent leur nom au modèle p-band :

$$\Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}) \simeq \sum_{i,m\alpha} \mathcal{W}_{m,i}^\star(\boldsymbol{r})\, c_{m\alpha,i}^\dagger \tag{2.55}$$

En incluant cette approximation dans l'expression du hamiltonien à un corps, nous en venons à l'expression suivante du hamiltonien libre sur réseau :

$$\mathcal{H}_0 \;=\; \sum_{i,j,m\alpha} t_m^{(i,j)} c_{m\alpha,i}^\dagger c_{m\alpha,j} \tag{2.56}$$

Où les termes d'énergies $t_m^{(i,j)}$ désignent :

$$t_m^{(i,j)} \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{W}_{m,i}^\star(\boldsymbol{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r}) \right\} \mathcal{W}_{m,i}(\boldsymbol{r}) \tag{2.57}$$

Remarquons que cette intégrale ne dépend pas de l'indice orbital m, puisque les termes de sauts sont tout à fait symétriques pour les atomes p_x et p_y. Comparé au modèle g-e, pour lequel nous avions un peu brutalement fixé la symétrie d'échange, il s'agit d'un résultat qui la justifie *a posteriori* et surtout qui, pour le modèle p-band, nous assure qu'un hamiltonien symétrique

est bel et bien réaliste. Avec l'approximation des liaisons forte, nous ne gardons que le terme plus proche voisin en $t = -t_m^{\langle i,j\rangle}$:

$$\mathcal{H}_0 \;=\; -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^\dagger_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right) \tag{2.58}$$

Ajoutons de manière anticipée que si nous avions ajouté au potentiel optique $V(\mathbf{r})$ un terme qui assure la résolution séparée en x et en y du hamiltonien à un corps tout en préservant la symétrie entre x et y, le hamiltonien précédent serait tout aussi valable, seule la valeur du terme de saut t en serait changée.

2.2.2 Le hamiltonien d'interaction à deux corps

Pour l'interaction, si nous sommes tentés de calquer ce que nous avons fait pour le modèles g-e avec l'équivalence $g \equiv p_x$ et $e \equiv p_y$, il faut s'en abstenir car, ici, contrairement aux états g et e, les états p_x et p_y sont des paramètres qui sont une conséquence du potentiel optique $V(\boldsymbol{r})$ dont l'interaction ne dépend pas ⟨14⟩. Ainsi, l'interaction en onde s pour le modèle p-band, comme dans le cas à une orbitale, ne possède qu'un seul paramètre d'interaction qui dans le le langage du modèle g-e correspond à $g = g_{gg} = 4\pi\hbar^2 a_{gg}/m$ (a_{gg} est la longueur de diffusion pour deux atomes dans l'état g). Récrivant un potentiel d'interaction identique à celui du CHAPITRE 1, en explicitant - comme pour le modèle précédent - la structure nucléaire qui traduit la symétrie SU(N) de l'interaction :

$$V^{\text{int.}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = g \times \mathrm{Id}_{\mathrm{N}}^{\otimes 2} \otimes \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{2.59}$$

L'interaction en seconde quantification est alors identique à celle du premier chapitre :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = g\sum_{i,\alpha<\beta}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\Psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r})\Psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{r})\Psi_\beta(\boldsymbol{r})\Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{2.60}$$

Reste, pour obtenir l'interaction dans les opérateurs sur réseau, à introduire la décomposition (2.55) dans cette expression et, dans l'approximation des liaisons fortes qui ne garde que les termes à sites identiques, nous obtenons l'expression suivante, avec une somme implicite sur les degrés nucléaires α et β :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \sum_{i,m,m',n,n'} U_{mm'nn'}c^\dagger_{m\alpha,i}c^\dagger_{m'\beta,i}c_{n\beta,i}c_{n'\alpha,i} \tag{2.61}$$

Où les paramètres d'interaction $U_{mm'nn'}$ sont définis comme des intégrales des fonctions de

⟨14⟩. C'est d'ailleurs pour cette raison que dans la décomposition de l'opérateur de champ du modèle g-e, l'indice orbital apparaît déjà dans la décomposition (2.6), tandis que dans le modèle p-band, il apparaît au moment de la décomposition (2.55).

Wannier $\mathcal{W}_m$ (dont on ne note pas l'indice de site, puisqu'elles sont à sites identiques et sont des translations les unes des autres) :

$$U_{mm'nn'} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{W}^\star_m(\boldsymbol{r})\mathcal{W}^\star_{m'}(\boldsymbol{r})\mathcal{W}_n(\boldsymbol{r})\mathcal{W}_{n'}(\boldsymbol{r})\,, \qquad \forall m, m', n, n' \in \{p_x, p_y\} \tag{2.62}$$

À ce stade, une discussion sur la nature du puits perpendiculaire à l'axe s'impose. Jusqu'ici nous avons considérés un potentiel harmonique :

$$V_\perp(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\left(x^2+y^2\right) \tag{2.63}$$

Nous allons le généraliser un peu en vue d'obtenir un modèle p-band un peu plus général. Ce dernier potentiel possède trois propriétés très intéressantes lorsqu'on cherche à résoudre le problème libre : tout d'abord il se résout indépendamment en x et en y, ce qui simplifie considérablement la tâche, ensuite, chacun des potentiels unidimensionnels possède une symétrie par réflexion (lorsque $x \to -x$ et lorsque $y \to -y$), si bien que l'on sait que les états propres correspondront à des états propres soit pair (comme le fondamental) soit impair (comme le premier niveau excité), et enfin, il possède la symétrie $(x,y) \to (y,x)$ (symétrie d'échange), cette dernière propriété permettant de savoir que le terme $U_{mm'nn'}$ sera symétrique dans les échange de certains de ses indices. Ceci en tête, écrivons la généralisation la plus simple du potentiel satisfaisant ces trois propriétés, et pour cela utilisons des termes quartiques :

$$V_\perp(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{24}\lambda\left(\frac{m\omega_\perp}{\hbar}\right)^2\left(x^4+y^4\right) \tag{2.64}$$

Où λ est une énergie qui caractérise ce nouveau puits quartique. Discutons alors des paramètres d'interaction (2.62) au regard de ce nouveau potentiel. Tout d'abord la symétrie d'échange assure que lorsque $p_x \leftrightarrow p_y$, les paramètres d'interaction resteront inchangés : $U_{\overline{mm}'\overline{nn}'} = U_{mm'nn'}$. Ensuite, notons que - comme désiré - ce potentiel se sépare selon x et selon y, ce qui donnera lieu à des fonctions d'onde perpendiculaires qui vont se séparer $\phi^{(\lambda)}_{n_x,n_y}(x,y) = \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)$, et l'on sait, parce que le potentiel dans chaque direction est symétrique que le fondamental du puits bidimensionnel sera pair dans les deux directions, tandis que les deux premier niveau excités - qui seront bien équivalents puisque le potentiel est symétrique d'échange - seront à la fois pair et impair, selon l'axe excité. Nous aurons même :

$$\text{État } s \quad : \quad \phi^{(\lambda)}_{0,0}(-x,y) = \phi^{(\lambda)}_{0,0}(x,-y) = \phi^{(\lambda)}_{0,0}(x,y) \tag{2.65}$$

$$\text{État } p_x \quad : \quad -\phi^{(\lambda)}_{1,0}(-x,y) = \phi^{(\lambda)}_{1,0}(x,-y) = \phi^{(\lambda)}_{1,0}(x,y) \tag{2.66}$$

$$\text{État } p_y \quad : \quad \phi^{(\lambda)}_{0,1}(-x,y) = -\phi^{(\lambda)}_{0,1}(x,-y) = \phi^{(\lambda)}_{0,1}(x,y) \tag{2.67}$$

La conséquence pour (2.62) sera que tous les termes faisant apparaître soit un seul état p_x

soit un seul état p_y sera tué par l'intégrale d'une fonction d'onde impaire (et sinon, un carré de fonction impaire sauvera l'intégrale). Ceci tue énormément de termes et après avoir constaté les différentes redondances, il n'en reste en toute généralité ⟨15⟩ que deux :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{p_x p_x p_x p_x} = U_{p_y p_y p_y p_y} && (2.68)\\ U_2 &= U_{p_x p_x p_y p_y} = U_{p_y p_y p_x p_x} && (2.69)\\ &= U_{p_x p_y p_x p_y} = U_{p_y p_x p_y p_x} && (2.70)\\ &= U_{p_x p_y p_y p_x} = U_{p_y p_x p_x p_y} && (2.71) \end{aligned}$$

Ils s'expriment à l'aide des intégrales sur les fonctions de Wannier (avec $m = p_x$ ou p_y) :

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, |\mathcal{W}_m(\boldsymbol{r})|^4 && (2.72)\\ U_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, |\mathcal{W}_m(\boldsymbol{r})|^2 |\mathcal{W}_{\overline{m}}(\boldsymbol{r})|^2 && (2.73) \end{aligned}$$

Lorsque le puits redevient isotrope ($\lambda = 0$), c'est-à-dire lorsque les fonctions d'onde deviennent celles du potentiel harmonique, le rapport U_1/U_2 peut être facilement calculé (même sans connaissance de la partie parallèle à la chaîne optique) et l'on trouve une relation qui définit la *ligne harmonique* dans le plan (U_1, U_2) :

$$U_1 = 3U_2 \tag{2.74}$$

Autrement, en toute généralité lorsque $\lambda \neq 0$, le terme d'interaction du modèle p-band est piloté par deux paramètres d'interaction [125, 126, 3] ⟨16⟩ :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \frac{U_1 + U_2}{4} \sum_i n_i^2 + \sum_i \left[2U_2 \left(T_i^x\right)^2 + (U_1 - U_2)\left(T_i^z\right)^2 \right] \tag{2.75}$$

Où, comme pour le modèle g-e, les opérateurs T_i^j définissent le pseudo-spin à l'aide des matrices de Pauli :

$$T_i^j = c^\dagger_{m\alpha,i} \frac{\sigma^j_{mn}}{2} c_{n\alpha,i} \tag{2.76}$$

⟨15⟩. On peut imaginer que le terme U_2 est complexe, mais l'on sait que les parties perpendiculaires, les $\phi^{(\lambda)}_{n_x,n_y}$, sont reliées aux fonctions elliptiques de Jacobi et sont réelles.

⟨16⟩. Les auteurs [125, 126] du modèle p-band, définissent néanmoins dans une ligne harmonique **éronnée** avec $U_2 = (1/3 + \mathbf{1/9})U_1$.

2.2.3 Le hamiltonien total, les symétries

Rassemblons le terme libre et le terme d'interaction sans oublier le terme de potentiel chimique (que nous ne faisons dépendre du degré orbital, pour préserver la symétrie d'échange ⟨17⟩) pour écrire le hamiltonien du modèle p-band :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{p\text{-band}} &= -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^{\dagger}_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^{\dagger}_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-\mu\sum_i n_i \\ &+\frac{U_1+U_2}{4}\sum_i n_i^2+\sum_i\left[2U_2\left(T_i^x\right)^2+\left(U_1-U_2\right)\left(T_i^z\right)^2\right]\end{aligned} \tag{2.77}$$

Ce modèle est essentiellement différent du précédent en ce que grâce à l'ajout du terme quartique, il brise la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ qui désormais peut être satisfaite par un ajustement fin des paramètres d'interaction U_1 et U_2. Mais deux symétries bien connues demeurent satisfaites, à commencer par la symétrie $\mathrm{U}(1)_c$ associée à la conservation du nombre total d'atome par (2.77) :

$$c^{\dagger}_{m\alpha,i}\overset{\mathrm{U}(1)_c}{\longrightarrow}e^{i\theta}c^{\dagger}_{m\alpha,i}\,,\quad\forall m\alpha,i,\quad\text{et}\quad\theta\in[0,2\pi[\tag{2.78}$$

Elle s'exprime par la commutation de l'opérateur nombre de particules avec le hamiltonien :

$$\left[\sum_i n_i,\mathcal{H}_{p\text{-band}}\right]=0 \tag{2.79}$$

Ensuite, le système possède la symétrie $\mathrm{SU(N)}$ associée à la conservation du nombre total de particules ayant une composante du spin nucléaire total. Considérant une matrice $\widetilde{U}\in\mathrm{SU(N)}$, les transformations suivantes laissent invariant (2.77) :

$$c^{\dagger}_{m\alpha,i}\overset{\mathrm{SU(N)}_s}{\longrightarrow}\widetilde{U}_{\alpha\beta}c^{\dagger}_{m\beta,i}\,,\quad\forall m\alpha,i,\quad\text{et}\quad\widetilde{U}\in\mathrm{SU(N)} \tag{2.80}$$

De même que pour le modèle g-e, nous introduisons les N^2-1 générateurs de $\mathrm{SU(N)}$ à l'aide des matrices T^a de la fondamentale, en distinguant désormais chaque secteur orbital (attention encore à la non-sommation sur m) :

$$\mathcal{S}^a_m=\sum_i c^{\dagger}_{m\alpha,i}T^a_{\alpha\beta}c_{m\beta,i}\,,\quad m\in\{p_x,p_y\},a\in[\![1,\mathrm{N}^2-1]\!] \tag{2.81}$$

La symétrie $\mathrm{SU(N)}$ - qui n'est toujours pas valable dans chaque secteur orbital, mais seulement pour les deux en même temps - se traduit par les relations de commutation suivantes

⟨17⟩. Nous pouvons imaginer briser un cette symétrie par l'ajout d'un potentiel chimique "anisotrope", mais rien ne présage qu'il serait selon les degrés p_x et p_y...

entre le hamiltonien (2.77) et le "spin" nucléaire total $\mathcal{S}^a = \mathcal{S}^a_{p_x} + \mathcal{S}^a_{p_y}$:

$$\left[\mathcal{S}^a, \mathcal{H}_{p\text{-band}}\right] = 0, \quad a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!] \tag{2.82}$$

Pour le modèle p-band (2.77), la symétrie d'échange orbital $\mathbb{Z}_2^{p_x\text{-}p_y}$ qui échange p_x et p_y est toujours satisfaite, et c'est assez logique, le degré orbital "p" étant un degrés beaucoup moins discriminant que le degré orbital électronique [18] :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \xrightarrow{\mathbb{Z}_2^{p_x\text{-}p_y}} c^\dagger_{\overline{m}\alpha,i}\,, \quad \forall m\alpha, i \tag{2.83}$$

Le modèle possède donc au total la symétrie $\mathrm{U}(1)_c \times \mathrm{SU}(\mathrm{N}) \times \mathbb{Z}_2^{p_x\text{-}p_y}$. Et si contrairement au modèle g-e la symétrie d'échange est satisfaite sans ajustement fin, c'est avec un ajustement fin qu'une symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ supplémentaire sera satisfaite (contrairement au précédent modèle qui la satisfait toujours). Nous avons évoqué la ligne harmonique qui satisfait $U_1 = 3U_2 = 3U$ pour laquelle le modèle (2.77) satisfait :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\text{harmonique}}_{p\text{-band}} \;=\; & -t \sum_{i,m\alpha} \left(c^\dagger_{m\alpha,i+1} c_{m\alpha,i} + c^\dagger_{m\alpha,i} c_{m\alpha,i+1} \right) - \mu \sum_i n_i \\ & + U \sum_i n_i^2 + 2U \sum_i \left[\left(T^x_i\right)^2 + \left(T^z_i\right)^2 \right] \end{aligned} \tag{2.84}$$

La quantité conservée associée à la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$, c'est notoire, ne sera autre que [19] $\sum_i T^y_i$, associée à la relation de commutation suivante :

$$\left[\sum_i T^y_i, \mathcal{H}^{\text{harmonique}}_{p\text{-band}} \right] = 0 \tag{2.87}$$

Autre ligne où une symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ est évidente, la ligne d'équation $U_2 = 0$ sur laquelle le

[18]. Par construction du potentiel qui respecte la symétrie d'échange (rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan xOy), et même pire puisqu'il est harmonique (rotation quelconque).

[19]. Dans ce problème, les bons degrés de liberté doivent être redéfinis comme $\widetilde{p}_x$ et $\widetilde{p}_y$ par :

$$c^\dagger_{\widetilde{p}_x\alpha,i} = \frac{c^\dagger_{p_x\alpha,i} + i c^\dagger_{p_y\alpha,i}}{\sqrt{2}} \tag{2.85}$$

$$c^\dagger_{\widetilde{p}_y\alpha,i} = \frac{c^\dagger_{p_x\alpha,i} - i c^\dagger_{p_y\alpha,i}}{\sqrt{2}} \tag{2.86}$$

La symétrie en question concerne la quantité $\sum_i \left(n_{\widetilde{p}_x,i} - n_{\widetilde{p}_y,i}\right)$.

modèle (2.77) prend l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(U_2=0)}_{p\text{-band}} &= -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^\dagger_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-\mu\sum_i n_i \qquad (2.88)\\ &\quad+\frac{U_1}{4}\sum_i n_i^2+U_1\sum_i\left(T^z_i\right)^2\\ &= -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^\dagger_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-\mu\sum_{m,i} n_{m,i}+\frac{U_1}{2}\sum_{m,i} n^2_{m,i} \qquad (2.89)\end{aligned}$$

Ici, comme dans le cas du modèle *g-e*, c'est bien à la différence des degrés orbitaux $\sum_i \left(n_{p_x,i}-n_{p_y,i}\right)$ que la symétrie est reliée :

$$\left[\sum_i T^z_i, \mathcal{H}^{(U_2=0)}_{p\text{-band}}\right]=0 \qquad (2.90)$$

Enfin, dernière ligne de symétrie, la première bissectrice $U_1=U_2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(U_1=U_2)}_{p\text{-band}} &= -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^\dagger_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-\mu\sum_i n_i \qquad (2.91)\\ &\quad+\frac{U_1}{2}\sum_i n_i^2+2U_1\sum_i\left(T^x_i\right)^2\end{aligned}$$

Constatons que le modèle sur cette ligne est équivalent au précédent avec le changement $U_1\to 2U_1$ et à une redéfinition près des degrés [20]. La relation de commutation satisfaite est :

$$\left[\sum_i T^x_i, \mathcal{H}^{(U_1=U_2)}_{p\text{-band}}\right]=0 \qquad (2.94)$$

Ainsi le modèle définit trois lignes de symétrie orbitale que l'on classe en deux groupes, d'un côté les deux lignes $U_2=0$ et $U_1=U_2$ qui sont des modèles équivalents, et de l'autre côté la ligne harmonique $U_1=3U_2$. Hors de ces lignes, il existe au sein de (2.77) des processus non-présents (voir FIGURE 2.4) dans le modèle *g-e* qui brisent la symétrie orbitale et qui rendent ce modèle tout à faire intéressant en lui-même.

[20]. Dans ce problème, les bons degrés de liberté doivent aussi être redéfinis comme $\widetilde{p}'_x$ et $\widetilde{p}'_y$ par :

$$c^\dagger_{\widetilde{p}'_x\alpha,i} = \frac{c^\dagger_{p_x\alpha,i}+c^\dagger_{p_y\alpha,i}}{\sqrt{2}} \qquad (2.92)$$

$$c^\dagger_{\widetilde{p}'_y\alpha,i} = \frac{c^\dagger_{p_x\alpha,i}-c^\dagger_{p_y\alpha,i}}{\sqrt{2}} \qquad (2.93)$$

La symétrie en question concerne la quantité $\sum_i\left(n_{\widetilde{p}'_x,i}-n_{\widetilde{p}'_y,i}\right)$.

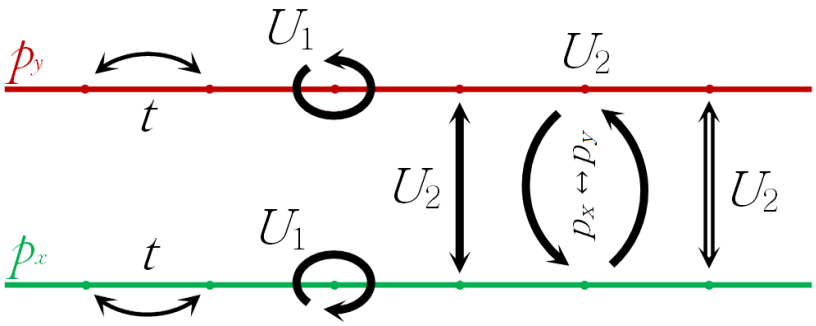


FIGURE 2.4 – Présentation des divers processus d'interaction du modèle p-band. En plus du terme de saut (en t), le modèle présente par rapport au modèle g-e un processus supplémentaire qui brise la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$.

2.2.4 Diagonalisation du hamiltonien libre

Pour le modèle p-band, qui possède la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2^{p_x\text{-}p_y}$, il n'y a aucune difficulté à relier le remplissage au vecteur d'onde de Fermi, car cette dernière symétrie assure qu'il n'y aura qu'une seule et unique branche. En d'autres termes en utilisant (2.42), le hamiltonien du modèle p-band libre (c'est-à-dire $U_1 = U_2 = 0$) satisfait :

$$\mathcal{H}^{(0)}_{p\text{-band}} = \sum_{m\alpha,k} \varepsilon_k \, n_{m\alpha,k} \tag{2.95}$$

Où l'énergie d'un mode est donné par :

$$\varepsilon_k = -2t\cos\left(a_0 k\right) \tag{2.96}$$

Une seule branche induit simplement un seul vecteur de Fermi k_F, qu'on relie au nombre moyen d'atomes par site $\bar{n}$:

$$k_F = \frac{\pi \bar{n}}{2a_0 \mathrm{N}} \tag{2.97}$$

Voilà posé le modèle p-band. Si nous devions exposer un grief à son encontre, ce serait le problème déjà évoqué des atomes s du puits confinant qu'ils convient de remplir et qui apportent des soucis d'ordre expérimental. Le modèle idéal serait alors un modèle ne possédant que des atomes dans l'état électronique g, pour éviter les pertes de l'état excité, et dans l'état harmonique s, pour éviter de jouer avec de grandes densités d'atomes. Comment alors fabriquer le degrés orbitaux ? Avec la plus simple des méthodes : produire un potentiel optique qui synthétise deux chaînes côte à côte, une échelle. Nous présentons alors la voie "géométrique" qui mène au modèle d'échelle et au modèle du double-puits.

2.3 La stratégie du double-puits, modèle d'échelle

Comme pour les modèles précédents, le modèle d'échelle va être caractérisé par une réalisation particulière, tant du point de vue de la manière de choisir les états (état atomique, harmonique, bande de Bloch) que de la mise à jour des assertions : les états e comme les états harmoniques excités y sont définitivement abandonnés. Pour le modèle d'échelle ce n'est donc plus *via* un degré issu de l'état atomique ou de la structure du puits confinant que la seconde orbitale va être construite, mais c'est bel et bien le réseau optique lui-même - de la même manière qu'il créé les sites de la chaîne infinie - qui va créer un nouvel indice de site $m = 1$ et 2. À cette fin, mettons à jour les assertions du CHAPITRE 1 :

— Les atomes alcalino-terreux sont dans leur état fondamental $g \equiv {}^1S_0$;
— Les atomes sont individuellement soumis à un piège optique que l'on modélise par un terme de potentiel noté $V(\mathbf{r})$, périodique dans la direction de la chaîne (qui définit conventionnellement l'axe Oz) et piégeant avec deux *minima* identiques dans le plan qui lui est perpendiculaire ;
— L'interaction interatomique, à une température considérée comme nulle, est de type "onde s".

Autrement dit, par rapport au premier chapitre, nous modifions seulement l'allure du potentiel optique $V(\boldsymbol{r})$ qui du simple puits devient double-puits. Nous pouvons dès lors imaginer un modèle sur site qui prendra en compte les différents effets attendus dans un tel potentiel. Assez naturellement, les atomes seront caractérisés par leur position sur la chaîne, le site i, leur spin nucléaire α et leur indice de barreau ⟨21⟩ m, qui joue ici le degré orbital. Autrement dit, c'est avec un opérateur de création $c^\dagger_{m\alpha,i}$ que l'on va construire un tel modèle. Tout d'abord, des termes du type "modèle à une orbitale" (1.21) vont être générés avec un terme de saut t et un terme d'interaction sur barreau U commun à chaque barreau. En effet les atomes se propagent et interagissent identiquement à l'intérieur de chaque barreau puisque qu'ils sont dans le même état (g pour la partie électronique) et que le potentiel qui les piège possède deux *minima* identiques. Ensuite, et contrairement aux modèles g-e et p-band, il va y avoir l'existence de terme $t_\perp$ à un corps entre les deux degrés orbitaux : en effet, si pour le modèle g-e la transition doublement interdite et pour le modèle p-band l'othogonalité des états p_x et p_y empêchait ce processus, ici le recouvrement des fonctions d'onde d'un côté et de l'autre du double-puits permet ce processus d'effet tunnel. Et comme corrolaire à ce terme, les atomes pouvant sauter d'un puits à l'autre il existera deux termes d'interaction, un direct et un d'échange, associés à V et J_H, entre des atomes des deux espèces orbitales. Tout naturellement on définit ainsi le *modèle*

⟨21⟩. Comme on dispose côte à côte deux chaînes, on fabrique un échelle où l'indice de chaîne i caractérise un *barreau* (là où l'on pose le pied), tandis que l'indice orbital $m = 1$ ou 2 caractérise un *montant* (que les barreaux joignent).

d'échelle (sans oublier le terme de potentiel chimique) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{Échelle}} &= -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^{\dagger}_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^{\dagger}_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-t_{\perp}\sum_{i,\alpha}\left(c^{\dagger}_{1\alpha,i}c_{2\alpha,i}+c^{\dagger}_{2\alpha,i}c_{1\alpha,i}\right)\\ &\quad -\mu\sum_{i}n_i+\frac{U}{2}\sum_{i,m}n^2_{m,i}+V\sum_{i}n_{1,i}n_{2,i}+J_H\sum_{i}S^a_{1,i}S^a_{2,i}\end{aligned} \tag{2.98}$$

Où l'on a préféré l'utilisation des générateurs SU(N) qui contiennent ⟨22⟩ à la fois des processus d'interaction interorbitale directs et indirects, mais qui présentent l'avantage de rendre explicite la symétrie SU(N). Ces générateurs sont définis à l'aide des matrices T^a de la représentation fondamentale (la sommation implicite porte sur les indices nucléaires) :

$$S^a_{m,i}=c^{\dagger}_{m\alpha,i}T^a_{\alpha\beta}c_{m\beta,i} \tag{2.100}$$

L'apparition du terme de saut perpendiculaire $t_\perp$ empêche que la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$ soit réalisée ce qui laisse au modèle d'échelle (2.99) la symétrie ⟨23⟩ $\mathrm{U}(1)_c\times\mathrm{SU}(\mathrm{N})\times\mathbb{Z}_2^{1\text{-}2}$. Cela dit, si cette dérivation avec des arguments physiques peu paraître convaincante, elle n'est pas très réaliste du point de vue expérimental ⟨24⟩. Pour cette raison, nous dérivons un modèle qui sera un modèle assez similaire au modèle d'échelle et que l'on nomme le *modèle du double-puits* (expérimentalement réalisé pour des bosons, voir [127, 128]).

2.3.1 Le hamiltonien à un corps

Nous commençons alors la dérivation du modèle qui ressemble à celle du modèle à une orbitale, c'est-à-dire que le système d'atomes froids est décrit par un opérateur de champ $\Psi^{\dagger}_{\alpha}(\boldsymbol{r})$ qui créé un atome à la position $\boldsymbol{r}$ dans l'état nucléaire α. Et si, comme pour le modèle p-band, le degré orbital apparaît dans la décomposition de l'opérateur de champ sur les opérateurs du réseau, ici la décomposition change à cause du nouveau potentiel $V(\boldsymbol{r})$. En effet, la prise en compte de l'actualisation de la deuxième assertion pousse à en revoir l'expression et nous choisissons - en accord avec l'exigence de symétrie des deux *minima* - un puits quartique type

⟨22⟩. À l'aide de la définition (2.100), on montre en effet que le terme qui fait intervenir le terme contient des processus d'interaction **direct** et d'**échange** :

$$S^a_{1,i}S^a_{2,i}=-\frac{1}{2}c^{\dagger}_{1\alpha,i}c^{\dagger}_{2\beta,i}c_{1\beta,i}c_{2\alpha,i}-\frac{1}{2\mathrm{N}}n_{1,i}n_{2,i} \tag{2.99}$$

⟨23⟩. À noter : lorsque $t_\perp=0$, la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$ est satisfaite : $\mathrm{U}(1)_c\times\mathrm{U}(1)_o\times\mathrm{SU}(\mathrm{N})\times\mathbb{Z}_2^{1\text{-}2}$.
⟨24⟩. Nous verrons notamment que les paramètres d'interaction y sont au nombre deux (et non pas trois), et qu'il manque un processus d'interaction qui brise $\mathrm{U}(1)_o$. Pour autant nous citons ce modèle sur lequel nous avons déterminés quelques résultats.

"chapeau mexicain" [25] :

$$V(\boldsymbol{r}) = V_{\text{quar.}}(x) + V_{\text{har.}}(y) + V_{\text{pér.}}(z) \tag{2.102}$$

Où le potentiel périodique se décompose en une partie "puits simple" (que l'on choisit selon l'axe Oy par convention) et en une partie "puits double" (selon la direction restante, selon l'axe Ox) :

$$V_{\text{quar.}}(x) = \frac{1}{24}\lambda\left(\frac{m\omega_\perp}{\hbar}\right)^2\left[x^2 - \left(a_0^\perp/2\right)^2\right]^2 \tag{2.103}$$

$$V_{\text{har.}}(y) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 y^2 \tag{2.104}$$

Où $\lambda > 0$ est une énergie qui caractérise le double-puits et $a_0^\perp > 0$ est le "pas" perpendiculaire du réseau, c'est-à-dire la distance entre les deux montants [26]. Écrit ainsi, nous constatons encore que les solutions se séparent selon les axes : nous pouvons alors recycler les états pour les axes Oy et Oz qui possèdent des potentiels identiques. Ce sont respectivement les polynômes de Hermite $\phi_{n_y}(y) = \langle y|n_y\rangle$ et les fonctions de Bloch $\varphi_{k_z}^{(n)}(z) = \langle z|(n), k_z\rangle$ d'énergies respectives $\varepsilon_{n_y} = \hbar\omega_\perp(n_y + 1/2)$ et $\varepsilon_{k_z}^{(n)}$. Et nous avons pour cette partie les équations aux valeurs propres suivantes :

$$\mathcal{H}_0\,|n_y, (n), k_z\rangle = \left[\hbar\omega_\perp\left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \varepsilon_{k_z}^{(n)}\right]|n_y, (n), k_z\rangle \tag{2.105}$$

Nous devons maintenant donner le spectre du hamiltonien quartique selon Ox, ce que nous ne ferons pas, d'une part parce que c'est très lourd et d'autre part parce que ce n'est finalement pas très utile. Disons tout d'abord que le potentiel en x est invariant lors de la réflexion $x \to -x$: ces états propres sont également propres de cette réflexion, c'est-à-dire pairs ou impairs. Une connaissance élémentaire sur les potentiels à une dimension décrit ainsi le fondamental comme un état pair, soit l'état $|\mathfrak{p}\rangle$ d'énergie ε_0, et le premier niveau excité comme un état impair $|\mathfrak{i}\rangle$ d'énergie $\varepsilon_0 + 2t_\perp$ (avec $t_\perp > 0$). Lors de résolutions de double-puits quasiment indépendants, il est connu que l'on peut reconstruire à partir de ces états les fondamentaux de chaque puits, c'est-à-dire dans notre cas, des états localisés tantôt sur le barreau 1, tantôt sur le barreau 2. Comme les deux puits sont identiques ces états sont évidemment les sommes et différences

[25]. Dans la réalité, le potentiel est périodique dans la direction Ox et satisfait :

$$V_{\text{O}x}(x) = V_{0x}\left[\sin^2(kx) + r\cos^2(2kx)\right] \tag{2.101}$$

Où V_{0x} est l'amplitude et rV_{0x} est la sous-amplitude qui créé le barrière entre les deux puits du double-puits.

[26]. Du moins, c'est la distance entre les deux *minima*, qui - pour la solution exacte - ne correspondra pas *a priori*.

(avec $m = 1$ ou 2) des états $|\mathfrak{p}\rangle$ et $|\mathfrak{i}\rangle$:

$$|m\rangle = \frac{|\mathfrak{p}\rangle + (-1)^m |\mathfrak{i}\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2.106}$$

La transformation étant orthogonale et les états $|\mathfrak{p}\rangle$ et $|\mathfrak{i}\rangle$ étants othogonaux (et normés), la base $\{|m\rangle\}_{m\in\{1,2\}}$ est également orthonormée et, dans cette base, le hamiltonien libre n'est pas diagonal :

$$\langle m|\mathcal{H}_0|n\rangle = (\varepsilon_0 + t_\perp)\,\delta_{mn} - t_\perp \delta_{m\bar{n}} \tag{2.107}$$

Où $\bar{1} = 2$ et $\bar{2} = 1$. Si bien que nous écrivons un "état propre" partiel lorsque - en notant $\xi_m(x) = \langle x|m\rangle$ les fonctions d'onde du double-puits - nous définissons les fonctions d'onde totales $\psi^{(n)}_{m,n_y,k_z}(\boldsymbol{r})$ qui diagonalisent le hamiltonien libre dans le plan [27] yOz :

$$\psi^{(n)}_{m,n_y,k_z}(\boldsymbol{r}) = \xi_m(x)\phi_{n_y}(y)\varphi^{(n)}_{k_z}(z) \tag{2.108}$$

Et même si cette décomposition ne diagonalise pas le hamiltonien libre en entier, la transformation qu'elle suppose est tout à fait autorisée, si bien qu'en introduisant les fonctions de Wannier en Fourier-transformant les fonctions de Bloch sur la première zone de Brillouin :

$$\mathcal{W}^{(n)}_{m,n_y,j}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\mathrm{sites}}}}\xi_m(x)\phi_{n_y}(y)\sum_{k_z\in\mathrm{PZB}} e^{-ik_z j a_0}\varphi^{(n)}_{k_z}(z) \tag{2.109}$$

Alors nous écrivons naturellement la décomposition de l'opérateur de champ $\Psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r})$ sur les opérateurs sur réseau $c^\dagger_{(n),n_y,m\alpha,i}$ qui créent un atomes au site i dans la bande (n), dans l'état harmonique n_y, dans le barreau m et dans l'état nucléaire α :

$$\Psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r}) \simeq \sum_{i,m,n_y,(n)} \mathcal{W}^{(n)\star}_{m,n_y,i}(\boldsymbol{r})c^\dagger_{(n),n_y,m\alpha,i} \tag{2.110}$$

La relation écrite n'est pas une égalité car déjà nous avons fait l'approximation que dans la réalisation matérielle du système, les états du double-puits plus grands que le premier état excité ne seront jamais peuplés. Ainsi nous considérons que l'énergie δ_x entre le premier et le deuxième niveau excité du double-puits est grande devant les énergies du système et que le remplissage est adapté pour remplir les deux premiers états. Autre hypothèse, pour le puits simple, nous faisons la supposition que le remplissage ne mène qu'à y remplir l'état $n_y = 0$, et pour imposer aux atomes de remplir d'abord le premier niveau excité du double-puits avant celui de puits simple, nous imposons $t_\perp \ll \omega_\perp$. Enfin, comme toujours depuis le début, nous

[27]. Le hamiltonien libre seraient diagonalisé dans la base avec $|\mathfrak{p}\rangle$ et $|\mathfrak{i}\rangle$, mais nous pouvons ainsi introduire sans frais le degré orbital m.

supposons que l'énergie δ_{bande} entre la première et la seconde bande est elle aussi une très grande énergie du système pour bloquer la physique dans la bande (0). Ces considérations faites, nous introduisons les écritures simplifiées $\mathcal{W}_{m,i}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{W}^{(0)}_{m,0,i}(\boldsymbol{r})$ et $c^\dagger_{m\alpha,i} = c^\dagger_{(0),0,m\alpha,i}$ pour écrire la décomposition qui correspond à la réalisation de notre système :

$$\Psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r}) \simeq \sum_{i,m} \mathcal{W}^\star_{m,i}(\boldsymbol{r}) c^\dagger_{m\alpha,i} \tag{2.111}$$

Cette décomposition est très semblable à celle du modèle p-band (2.55) où les fonctions de Wannier dépendent du degré orbital : nous serons assez naturellement menés à un modèle qui ne possède pas de symétrie orbitale, avec cette différence notoire qu'ici, le degré m ne diagonalise pas le hamiltonien libre. En réalité, le terme non-diagonal $t_\perp$ - son nom n'est pas donné au hasard - va introduire le terme de saut entre barreaux que nous avons déjà évoqué pour le modèle d'échelle. Nous utilisons cette décomposition dans (1.3) pour obtenir le hamiltonien libre sur le réseau :

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i,j,\alpha mn} t^{(i,j)}_{mn} c^\dagger_{m\alpha,i} c_{n\alpha,j} \tag{2.112}$$

Où les énergies $t^{(i,j)}_{mn}$ sont données par des intégrales des fonctions de Wannier :

$$t^{(i,j)}_{mn} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{W}^\star_{m,i}(\boldsymbol{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r}) \right\} \mathcal{W}_{n,j}(\boldsymbol{r}) \tag{2.113}$$

$$= t^{(i,j)}\delta_{mn} - t_\perp \delta_{ij}\delta_{m\bar{n}} \tag{2.114}$$

Où $t^{(i,j)}$ s'exprime comme :

$$t^{(i,j)} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{W}^\star_{m,i}(\boldsymbol{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + V_{\text{har.}}(y) + V_{\text{pér.}}(z) \right\} \mathcal{W}_{m,j}(\boldsymbol{r}) + \left(\varepsilon_0 + t_\perp\right)\delta_{ij} \tag{2.115}$$

Dans l'expression (2.114) des termes tunnels, outre le terme sur sites identiques $t^{(i,i)}$, l'approximation des liaisons fortes va nous permettre de ne garder que l'intégrale entre sites consécutifs $t = -t^{\langle i,j\rangle}$ (de même que le terme tunnel entre les barreaux $t_\perp$), si bien que l'on peut donner l'expression suivante pour le terme à un corps du réseau :

$$\mathcal{H}_0 = -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^\dagger_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i} + c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right) - t_\perp \sum_{i,\alpha}\left(c^\dagger_{1\alpha,i}c_{2\alpha,i} + c^\dagger_{2\alpha,i}c_{1\alpha,i}\right) \tag{2.116}$$

Bien sûr, nous obtenons comme pour le p-band le terme de saut le long de la chaîne et pour chacun de degré orbital, mais, comme nous l'avions anticipé pour le modèle d'échelle, un terme supplémentaire de saut interorbital vient s'y ajouter. Et c'est bien normal : dès lors qu'un atome peut sauter entre deux sites sur un même barreau, pourquoi ne pourrait-il pas sauter entre deux site sur un même montant ? Attachons-nous maintenant à utiliser la décomposition (2.111) du modèle du double-puits pour en déduire l'interaction sur le réseau.

2.3.2 Le hamiltonien d'interaction à deux corps

Pour la dérivation de l'interaction du modèle du double-puits, l'essentiel des arguments et des calculs du modèle p-band fonctionnent : le degré orbital est un degré émergent ⟨28⟩, les atomes sont dans l'état atomique g et la symétrie $\mathrm{SU(N)}$ de l'interaction en onde s lui assure de ne posséder aucune structure dans les secteurs orbital et nucléaire et de n'être caractérisée que par une seule longueur de diffusion a_{gg}, elle-même reliée au paramètre d'interaction $g = 4\pi\hbar^2 a_{gg}/m$ et qui intervient dans l'expression du potentiel d'interaction entre deux atomes aux positions $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$:

$$V^{\text{int.}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = g \times \mathrm{Id}_{\mathrm{N}}^{\otimes 2} \otimes \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{2.117}$$

En seconde quantification, l'interaction prend donc la même forme (2.60) que pour le modèle p-band (qui elle-même était identique au modèle à une orbitale) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = g \sum_{i,\alpha<\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \Psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r})\Psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{r})\Psi_\beta(\boldsymbol{r})\Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{2.118}$$

Par conséquence, l'introduction de la décomposition (2.111) dans cette expression de l'interaction va donner une décomposition semblable à (2.61) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \sum_{i,\alpha<\beta} \sum_{m,m',n,n'} U_{mm'nn'} c^\dagger_{m\alpha,i} c^\dagger_{m'\beta,i} c_{n\beta,i} c_{n'\alpha,i} \tag{2.119}$$

Où les paramètres d'interaction $U_{mm'nn'}$ sont définis comme des intégrales des fonctions de Wannier $\mathcal{W}_m$ (dont on ne note pas l'indice de site, puisqu'elles sont à sites identiques et sont des translations les unes des autres) :

$$U_{mm'nn'} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathcal{W}_m^\star(\boldsymbol{r})\mathcal{W}_{m'}^\star(\boldsymbol{r})\mathcal{W}_n(\boldsymbol{r})\mathcal{W}_{n'}(\boldsymbol{r})\,, \qquad \forall m,m',n,n' \in \{1,2\} \tag{2.120}$$

Pour éliminer les différents termes, notons d'abord que la symétrie d'échange entre 1 et 2

⟨28⟩. Issu de la décomposition, comme les degrés p_x et p_y, et contrairement aux degrés atomiques g et e.

nous permet d'en égaliser beaucoup. Nous définissons trois termes :

$$\begin{aligned} U &= U_{1111} = U_{2222} && (2.121)\\ V &= U_{1122} = U_{2211} && (2.122)\\ &= U_{1212} = U_{2121} && (2.123)\\ &= U_{1221} = U_{2112} && (2.124)\\ W &= U_{1112} = U_{2221} && (2.125)\\ &= U_{1121} = U_{2212} && (2.126)\\ &= U_{1211} = U_{2122} && (2.127)\\ &= U_{2111} = U_{1222} && (2.128) \end{aligned}$$

Alors que dans le modèle p-band nous utilisions la parité des fonctions pour tuer les termes du type W, ici c'est un autre argument que nous utiliserons pour établir une conclusion similaire. Nous montrons même que $U \gg V \gg W$ dans la limite des liaisons fortes. Dans cette limite, un premier - mais mauvais - réflexe simplificateur est d'approximer les $\xi_m(x)$ par des gaussiennes centrées sur le montant m de l'échelle. Malheureusement, avec une telle fonction, impossible de rendre nul le produit scalaire $\langle 1|2\rangle = \int \xi_1^\star \xi_2$. En réalité, pour assurer sa nullité, les fonctions ξ_m - qui sont réelles ⟨29⟩ - possède la majeure partie de leur pic (positif) au site m (comme la gaussienne) mais possède en plus un pic (cette fois-ci négatif) plus petit au site $\overline{m}$ (comme on le montre sur la FIGURE 2.5).

Or cette structure particulière induit sur W des effets dramatiques, et notamment, on montre numériquement qu'il devient complètement négligeable devant U et devant V ⟨30⟩ : $\int \xi_m^3 \xi_{\overline{m}} \simeq 0$, le second pic de la fonctions jouant dans cette intégrale un rôle majeur. Pour l'intégrale $U \propto \int \xi_m^4$, le second pic ne joue aucun rôle car c'est le carré du pic principal qui apporte la majeure partie de l'intégrale. De même, l'intégrale pour $V \propto \int \xi_m^2 \xi_{\overline{m}}^2$ se joue surtout au niveau du croisement des fonctions d'onde, et le second pic est également de faible importance. Ainsi, pour U et V, l'approximation gaussienne est une bonne approximation et l'on peut même grâce

⟨29⟩. Du moins qui peuvent être choisies réelles, le hamiltonien étant invariant par renversement du temps.
⟨30⟩. On montre par exemple pour une longueur de diffusion $a/a_B = 45,5$ (qui celle du gaz fermionique de ^{6}Li à deux composantes [129]), a_B étant le rayon de Bohr, pour un réseau avec un pas de l'ordre de $0,6$ μm, pour $\mu = 25E_R$, $t = 0,035E_R$, $t_\perp = 2,4E_R$, $V_{0x} = 4V_{0y} = V_{0z} = 30E_R$ et $r = 1/2$, nous obtenons les ordres de grandeurs suivants :

$$U = 0,16E_R \gg V = 0,014E_R \gg W \simeq -10^{-4}E_R \qquad (2.129)$$

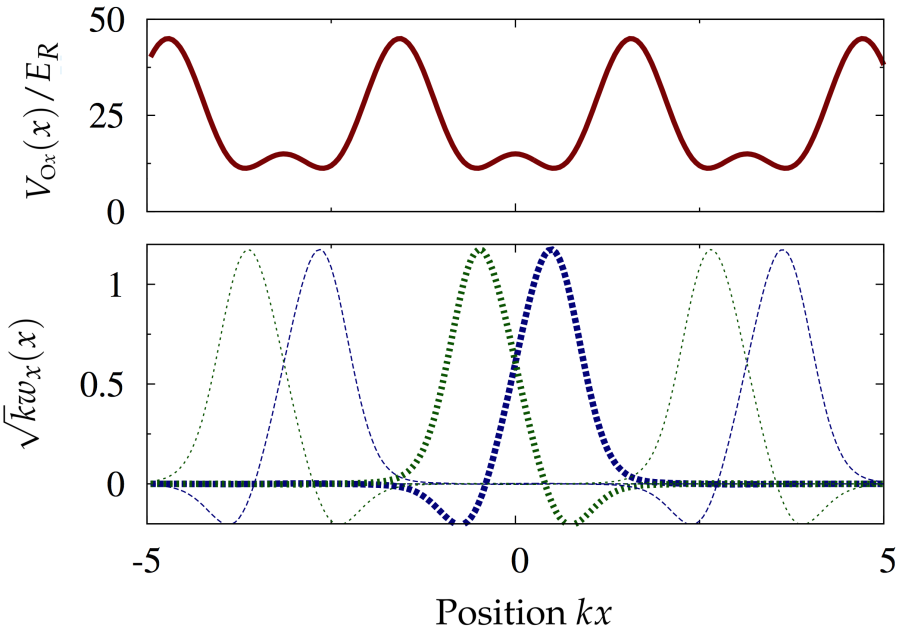


FIGURE 2.5 – Fonctions de Wannier w_x du potentiel (2.101) par résolution numérique (l'énergie de recul $E_R = \hbar^2k^2/2m$ sert d'énergie de référence). Dans le double-puits du milieu, les fonctions de Wannier (en gras) ne sont pas des gaussiennes mais possèdent un pic négatif au niveau de l'autre site du double-puits.

à elle les relier *via* le pas perpendiculaire $a_0^\perp$ et la largeur σ_ξ du carré des gaussiennes :

$$\frac{V}{U} \overset{\text{gauss.}}{=} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{a_0^\perp}{\sigma_\xi}\right)^2\right] \tag{2.130}$$

Dans la limite des fortes liaison ⟨31⟩, quand $a_0^\perp \gg \sigma_\xi$, ce rapport devient très petit, ce qui traduit bien que l'interaction - qui rappelons-le est une interaction de contact - est forcément supérieure pour des atomes sur le même site (même i, même m, qui correspond à U) que pour des atomes à des sites distincts (même i, mais m différents, qui correspond à V). La non-nullité de V semble même paradoxale pour une interaction de contact, or c'est bien à l'endroit du recouvrement des fonctions de Wannier que le terme gagne sa non-nullité : par effet tunnel les atomes de chaque montant se rencontrent entre les deux sites et y interagissent.

Cela établi, nous pouvons enfin écrire le hamiltonien d'interaction du modèle du double-

⟨31⟩. Avec l'approximation gaussienne, on montre que l'on aurait eu $W/U = (V/U)^{3/4}$, ce qui est en complète contradiction avec le numérique.

puits dans les opérateurs du réseau :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int.}} &= U\sum_{i,m,\alpha<\beta} n_{m\alpha,i}n_{m\beta,i} \\ &+ V\sum_{i,m,\alpha<\beta}\left[n_{m\alpha,i}n_{\overline{m}\beta,i} + c^{\dagger}_{m\alpha,i}c^{\dagger}_{\overline{m}\beta,i}c_{m\beta,i}c_{\overline{m}\alpha,i} + c^{\dagger}_{m\alpha,i}c^{\dagger}_{m\beta,i}c_{\overline{m}\beta,i}c_{\overline{m}\alpha,i}\right]\end{aligned} \tag{2.131}$$

Ce hamiltonien d'interaction est très semblable à celui du p-band puisqu'il possède les mêmes processus (voir la FIGURE 2.6). Notons, en passant, qu'il existe par rapport au modèle d'échelle un processus supplémentaire qui correspond au troisième terme en V.

2.3.3 Le hamiltonien total, les symétries

Nous rassemblons le terme libre et le terme d'interaction, sans oublier le terme de potentiel chimique en μ qui ne dépend pas du degrés orbital (la symétrie d'échange, c'est-à-dire l'équivalence entre les barreaux, étant maintenue) pour écrire le hamiltonien du modèle du double-puits :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{double-puits}} &= -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^{\dagger}_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i} + c^{\dagger}_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right) - t_{\perp}\sum_{i,\alpha}\left(c^{\dagger}_{1\alpha,i}c_{2\alpha,i} + c^{\dagger}_{2\alpha,i}c_{1\alpha,i}\right) \\ &- \mu\sum_{i} n_i + U\sum_{i,m,\alpha<\beta} n_{m\alpha,i}n_{m\beta,i} \\ &+ V\sum_{i,m,\alpha<\beta}\left[n_{m\alpha,i}n_{\overline{m}\beta,i} + c^{\dagger}_{m\alpha,i}c^{\dagger}_{\overline{m}\beta,i}c_{m\beta,i}c_{\overline{m}\alpha,i} + c^{\dagger}_{m\alpha,i}c^{\dagger}_{m\beta,i}c_{\overline{m}\beta,i}c_{\overline{m}\alpha,i}\right]\end{aligned} \tag{2.132}$$

Comme les modèles précédents, les processus qu'il contient conserve le nombre total de particules $\sum_i n_i$, c'est-à-dire qu'il laisse invariant son hamiltonien précédent dans la transformation suivante :

$$c^{\dagger}_{m\alpha,i} \xrightarrow{\mathrm{U}(1)_c} e^{i\theta}c^{\dagger}_{m\alpha,i}\,, \quad \forall m\alpha, i, \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[\tag{2.133}$$

La symétrie qui lui est associée s'exprime par la commutation de l'opérateur nombre total de particules avec le hamiltonien :

$$\left[\sum_i n_i, \mathcal{H}_{\text{double-puits}}\right] = 0 \tag{2.134}$$

Ensuite, le système possède la symétrie SU(N) associée à la conservation du nombre total de particules ayant une composante du spin nucléaire total. Considérant une matrice $\widetilde{U} \in \mathrm{SU(N)}$,

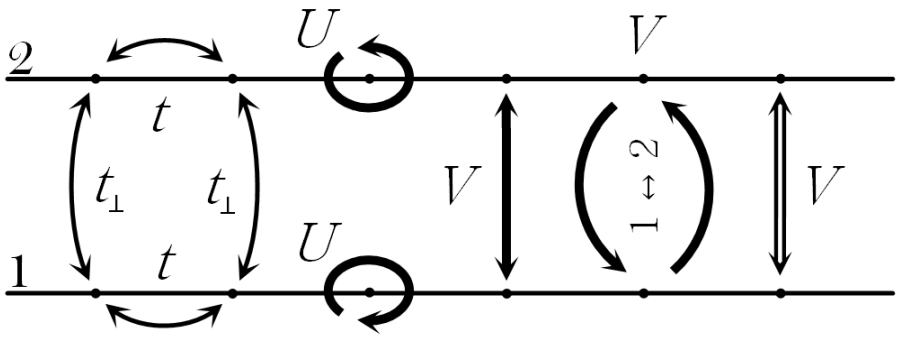


FIGURE 2.6 – Présentation des divers processus d'interaction du modèle du double puits. Ce modèle ressemble beaucoup au modèle p-band, lequel se voit doté de processus supplémentaires de sauts interorbitaux en $t_\perp$.

les transformations suivantes laissent invariant (2.132) :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \xrightarrow{\mathrm{SU(N)}_s} \widetilde{U}_{\alpha\beta} c^\dagger_{m\beta,i}\,, \quad \forall m\alpha, i, \quad \text{et} \quad \widetilde{U} \in \mathrm{SU(N)} \tag{2.135}$$

De même que pour les modèles g-e et p-band, nous introduisons les $\mathrm{N}^2 - 1$ générateurs de $\mathrm{SU(N)}$ à l'aide des matrices T^a de la fondamentale, en distinguant désormais chaque secteur orbital (attention toujours à la non-sommation sur m) :

$$\mathcal{S}^a_m = \sum_i c^\dagger_{m\alpha,i} T^a_{\alpha\beta} c_{m\beta,i}\,, \quad m \in \{1,2\}, a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!] \tag{2.136}$$

La symétrie $\mathrm{SU(N)}$ - qui n'est encore et toujours pas valable dans chaque secteur orbital, mais seulement pour les deux en même temps - se traduit par les relations de commutation suivantes entre le hamiltonien (2.77) et le "spin" nucléaire total $\mathcal{S}^a = \mathcal{S}^a_1 + \mathcal{S}^a_2$:

$$\left[\mathcal{S}^a, \mathcal{H}_{p\text{-band}}\right] = 0, \quad a \in [\![1, \mathrm{N}^2 - 1]\!] \tag{2.137}$$

Comme pour le modèle p-band (2.77), la symétrie d'échange orbital $\mathbb{Z}_2^{1\text{-}2}$ - qui échange 1 et 2 - est satisfaite pour le modèle du double puits (2.132). Elle traduit l'égal statut des deux barreaux qui constitue l'échelle optique :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \xrightarrow{\mathbb{Z}_2^{1\text{-}2}} c^\dagger_{\overline{m}\alpha,i}\,, \quad \forall m\alpha, i \tag{2.138}$$

Ainsi, en toute généralité les modèle du double-puits possède la symétrie $\mathrm{U}(1)_c \times \mathrm{SU(N)} \times \mathbb{Z}_2^{1\text{-}2}$. La réalisation de la symétrie orbitale est bien moins évidente *a priori*, et ce, à cause des termes de saut perpendiculaire en $t_\perp$ et surtout du troisième terme en V qui ne conserve pas le nombre de particules d'une espèce donnée : il faut alors imposer $t_\perp = V = 0$ et le modèle

(2.132) possède alors la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ et pour cause : il s'agit maintenant de deux chaînes indépendantes, ce qui est sans intérêt pour nous. Occupons-nous maintenant à donner une base diagonalisée du hamiltonien libre de ce modèle.

2.3.4 Diagonalisation du hamiltonien libre

La base des états sur montant $m = 1$ et 2 a été choisie pour expliciter le hamiltonien dans ces degrés. Au moment où ceci à été écrit, nous savions que la base n'était pas diagonale pour les termes à un corps et, comme conséquence, nous l'avons payé avec un hamiltonien (2.116) contenant les termes de saut interorbitaux. Ainsi la première étape à effectuer pour diagonaliser est de changer de base en retournant aux degrés pair et impair $m = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}$ qui vont déterminer un nouvel opérateur de création noté $d^\dagger_{m\alpha,i}$ et défini comme (2.106) par :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} = \frac{d^\dagger_{\mathfrak{p}\alpha,i} + (-1)^m d^\dagger_{\mathfrak{i}\alpha,i}}{\sqrt{2}} \tag{2.139}$$

Dans les nouveaux degrés, le hamiltonien libre se simplifie :

$$\mathcal{H}^{(0)}_{\text{double-puits}} = -t \sum_{i,m\alpha} \left(d^\dagger_{m\alpha,i+1} d_{m\alpha,i} + d^\dagger_{m\alpha,i} d_{m\alpha,i+1} \right) - t_\perp \sum_{i,m\alpha} \sigma^z_{mm} n_{m\alpha,i} \tag{2.140}$$

Où $n_{m\alpha,i} = d^\dagger_{m\alpha,i} d_{m\alpha,i}$ et où σ^z est la troisième matrice de Pauli qui satisfait $\sigma^z_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} = 1$ et $\sigma^z_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} = -1$. Alors, en introduisant la transformée de Fourier pour les nouveaux opérateurs de création (avec l'intermédiaire de calcul, le nombre de site $\mathrm{N}_{\text{sites}}$) :

$$d^\dagger_{m\alpha,k} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}} \sum_j e^{i a_0 k j} d^\dagger_{m\alpha,j} \tag{2.141}$$

Nous obtenons l'expression diagonalisée du hamiltonien libre :

$$\mathcal{H}^{(0)}_{\text{double-puits}} = \sum_{m\alpha,k} \varepsilon_m(k) n_{m\alpha,k} \tag{2.142}$$

Où l'énergie individuelle distingue deux branches :

$$\varepsilon_m(k) = -2t \cos\left(a_0 k\right) - t_\perp \sigma^z_{mm} \tag{2.143}$$

Ainsi dans les degrés pair/impair, le terme $t_\perp$ brise la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2^{\mathfrak{p}\text{-}\mathfrak{i}}$ et agit pour les deux branches comme un terme de potentiel chimique avec $\delta\mu = 2t_\perp$ (dans (2.50)), si bien que la différence $\delta = k_F^{\mathfrak{p}} - k_F^{\mathfrak{i}}$ des vecteurs d'onde de Fermi de chaque degrés $k_F^{\mathfrak{p}}$ et $k_F^{\mathfrak{i}}$ satisfait

selon (2.50) (avec $\alpha = 0$ et $\beta = 4t \sin\left(a_0 k_F\right)$ pour (2.52,2.53)) :

$$\delta = \frac{2}{a_0} \arcsin\left(\frac{t_\perp}{4t \sin\left(a_0 k_F\right)}\right) \tag{2.144}$$

Où le vecteur de Fermi total k_F peut être relié au remplissage $\bar{n}$, mais en faisant très attention que les degrés orbitaux $m = 1$ et 2 (et donc $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}$) sont considérés - au même titre que les sites i - comme des vrais sites, si bien que le remplissage des modèles du double-puits et d'échelle va différer des modèles g-e et p-band. Le nombre maximal d'atome par site, autrement dit le remplissage maximal ne sera plus 2N comme dans (2.46) mais N, et nous aurons alors une expression légèrement différente :

$$k_F = \frac{k_F^{\mathfrak{p}} + k_F^{\mathfrak{i}}}{2} = \frac{\pi \bar{n}}{a_0 \mathrm{N}} \tag{2.145}$$

2.3.5 Le hamiltonien d'interaction dans les nouveaux degrés

Dans les nouveaux degrés, la symétrie d'échange n'est pas satisfaite et la transformation (2.139) n'étant qu'orbitale, les symétries $\mathrm{U}(1)_c$ en charge et $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$ en spin sont maintenues. Nous pouvons nous demander si une symétrie orbitale ne serait pas plus visible. Ainsi nous appliquons la transformation (2.139) au hamiltonien total d'interaction (2.132) pour l'écrire dans les opérateurs "d" :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{double-puits}} \;=\; & -t \sum_{i,m\alpha} \left(d^\dagger_{m\alpha,i+1} d_{m\alpha,i} + d^\dagger_{m\alpha,i} d_{m\alpha,i+1} \right) - \sum_{i,m} \left(\mu + t_\perp \sigma^z_{mm}\right) n_{i,m} \\
& + \frac{U+3V}{2} \sum_{i,m,\alpha<\beta} n_{m\alpha,i} n_{m\beta,i} \\
& + \frac{U-V}{2} \sum_{i,m,\alpha<\beta} \left[n_{m\alpha,i} n_{\overline{m}\beta,i} + d^\dagger_{m\alpha,i} d^\dagger_{\overline{m}\beta,i} d_{m\beta,i} d_{\overline{m}\alpha,i} + d^\dagger_{m\alpha,i} d^\dagger_{m\beta,i} d_{\overline{m}\beta,i} d_{\overline{m}\alpha,i} \right]
\end{aligned} \tag{2.146}$$

Le modèle est assez semblable à son homologue dans les "c", avec la symétrie d'échange en moins, mais avec l'obtention, sans annuler $t_\perp$, de la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ sur la ligne d'équation $U = V$ où le modèle correspond à deux chaînes indépendantes avec des potentiels chimiques différents. Néanmoins ce point de vu n'est pas le bon et il faut retourner dans les degrés orbitaux initiaux pour écrire que le modèle non-trivial (du moins pas autant que les deux chaînes

indépendantes) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(U=V)}_{\text{double-puits}} &= -t\sum_{i,m\alpha}\left(c^{\dagger}_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i}+c^{\dagger}_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right)-t_{\perp}\sum_{i,\alpha}\left(c^{\dagger}_{1\alpha,i}c_{2\alpha,i}+c^{\dagger}_{2\alpha,i}c_{1\alpha,i}\right)\\ &\quad-\mu\sum_{i}n_i+U\sum_{i,m,\alpha<\beta}\Big[n_{m\alpha,i}n_{m\beta,i}+n_{m\alpha,i}n_{\overline{m}\beta,i}\\ &\qquad\qquad+c^{\dagger}_{m\alpha,i}c^{\dagger}_{\overline{m}\beta,i}c_{m\beta,i}c_{\overline{m}\alpha,i}+c^{\dagger}_{m\alpha,i}c^{\dagger}_{m\beta,i}c_{\overline{m}\beta,i}c_{\overline{m}\alpha,i}\Big]\end{aligned} \tag{2.147}$$

Ce modèle possède la symétrie $\mathrm{U}(1)_c \times \mathrm{U}(1)_o \times \mathrm{SU}(\mathrm{N})$, qui correspond à la conservation de la première composante des générateurs orbitaux définit par :

$$T^{j}_{i} = c^{\dagger}_{m\alpha,i}\frac{\sigma^{j}_{mn}}{2}c_{n\alpha,i} \qquad j=x,y,z \tag{2.148}$$

Elle se traduit par la relation commutation suivante :

$$\Big[\sum_{i}T^{x}_{i},\mathcal{H}^{(U=V)}_{\text{double-puits}}\Big]=0 \tag{2.149}$$

Voilà posé le modèle du double-puits. Avec les modèles *g-e* et *p*-band ils constituent trois pistes pour la réalisation expérimentale d'un modèle de Hubbard $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$ avec deux orbitales. Il s'agit alors de résoudre ces trois modèles (2.40, 2.41), (2.77) et (2.132) pour lesquels il n'existe pas de solution exacte du type ansatz de Bethe. C'est donc l'objet du prochain chapitre que de présenter la méthode utilisée dans cette thèse : celle du faible couplage, lorsque la théorie est *presque* libre, c'est-à-dire quand les temes d'interaction sont petits devant les termes tunnels. Une des propriétés fondamentales qui fondent la méthode que nous allons décrire donne toute sa particularité à l'unidimensionnel - est l'émergence, à température nulle et dans la limite continue $a_0 \to 0$, de la symétrie conforme. Dans un premier temps nous présenterons cette dérivation avant de passer à l'établissement des méthodes de résolution à proprement parler : développement en produit d'opérateur ⟨32⟩, bosonisation abélienne et non-abélienne et groupe de renormalisation perturbatif ⟨33⟩.

⟨32⟩. D'acronyme OPE, de l'anglais *Operator Product Expansion*.
⟨33⟩. D'acronyme RG, de l'anglais *Renormalization Group*.

Chapitre 3

Les outils du couplage faible

Le chapitre précédent présentait la dérivation du modèle depuis la description continue des opérateurs de champ jusqu'à celle sur site, discrète, en termes des opérateurs du réseau. Ce chapitre est la présentation du retour au continu : en effet dans nos systèmes à très basse température les excitations sont de très basse énergie, c'est-à-dire associées à des longueurs d'onde très petites devant le pas du réseau, $k \ll a_0^{-1}$, si bien que l'on peut considérer que l'approximation qui consiste à faire tendre le pas du réseau vers 0, c'est-à-dire un retour au continu, est très bonne. On définit ainsi un seuil [⟨1⟩] Λ au delà duquel la physique des modèles de Hubbard, d'un côté, et celle du modèle issu de l'étude de faible couplage, de l'autre, diffèrent.

Est-ce à dire que les résultats du CHAPITRE 2 sont inutiles ? Évidemment pas, puisqu'ils sont une base qui déjà tient compte de beaucoup d'effets de la physique de basse énergie, et notamment les états quantiques longuement discutés (atomique, harmonique, de bande, *etc.*) où la physique - décrite par 2N degrés - prend place. La première étape de ce chapitre est alors la réalisation de cette limite continue pour la théorie libre, laquelle nous donnera à établir une théorie des champs qui présentera une invariance conforme. Cela établi, nous montrerons en quoi cette donnée cruciale nous permet d'étudier la physique des modèles du Hubbard généralisés à basse énergie, et aussi nous présenterons les outils avec lesquels nous y parviendrons.

3.1 Théorie libre

Les modèles de fermions libres étant *a priori* différents selon les trois réalisations, g-e, p-band et double-puits, la linéarisation sera *a priori* différente pour chacun d'eux. Or, pour les modèles libres qui possèdent tous la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ - (2.43) dans les degrés $m = g$ et e, (2.95) dans les degrés $m = p_x$ et p_y et (2.142) dans les degrés $m = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}$ (attention ici ce n'est pas dans les degrés orbitaux 1 et 2 "sur barreau" que la symétrie orbitale est satisfaite) - c'est-à-dire que l'on

⟨1⟩. *Cutoff* en anglais. Λ constitue une limite haute pour les vecteurs d'onde : $|k| \lesssim \Lambda$.

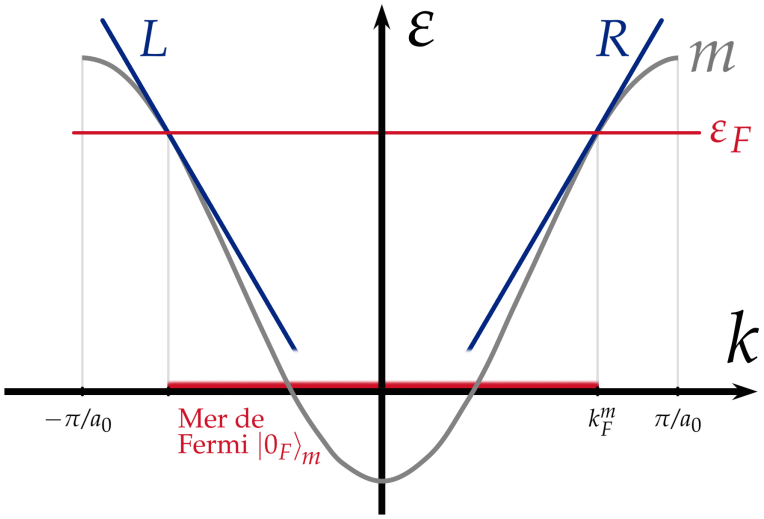


FIGURE 3.1 – Le **mer de Fermi** $|0_F\rangle_m$ (sa réduction dans le degré m tout au moins) définit dans chaque branche orbitale un vecteur de Fermi k_F^m qui caractérise les deux points de la surface de Fermi autour desquels nous **linéarisons** et obtenons un secteur gauche et un droit, notés respectivement "L" et "R".

peut les traiter séparément, selon les deux degrés cités, et les réunir à la fin, sachant que des remplissages différents des deux bandes orbitales vont induire entre les deux secteurs des anisotropies se traduisant par des vitesses de Fermi différentes. Considérons alors le hamiltonien libre pour un degré $m = g, e, p_x, p_y, \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{i}$ (pas de somme implicite sur m) :

$$\mathcal{H}_m^{(0)} = \sum_{\alpha,k} \varepsilon_m(k) n_{m\alpha,k} \tag{3.1}$$

Où $n_{m\alpha,k} = c^\dagger_{m\alpha,k} c_{m\alpha,k}$ pour les modèles g-e et p-band et $n_{m\alpha,k} = d^\dagger_{m\alpha,k} d_{m\alpha,k}$ pour le modèle de double-puits. L'énergie du mode est donnée au CHAPITRE 2 et est de la forme générale :

$$\varepsilon_m(k) = -2t_m \cos(a_0 k) - \mu_m \tag{3.2}$$

Selon le remplissage total, l'anisotropie des termes tunnels et la différence des potentiels chimiques entre les bandes ⟨2⟩, le dernier mode rempli par ce degré orbital est entièrement caractérisé par son vecteur de Fermi $k_F^m = k_F \pm \delta/2$ (voir FIGURE 3.1) tel qu'à température nulle, tous les degrés dans le secteur m satisfaisant $-k_F^m \leqslant k \leqslant +k_F^m$ forment la mer de Fermi (dans le secteur m) :

$$|0_F\rangle_m = \prod_{\alpha, |k| \leqslant k_F^m} c^\dagger_{m\alpha,k} |0\rangle_m \tag{3.3}$$

Considérant le problème libre entier - de hamiltonien $\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}_m^{(0)} + \mathcal{H}_{\overline{m}}^{(0)}$ - la mer de Fermi

⟨2⟩. Dans le cas du modèle de double-puits ce terme est induit par le terme de saut perpendiculaire.

totale $|0_F\rangle$ est simplement le produit des deux mers de chaque secteur orbital :

$$|0_F\rangle = |0_F\rangle_m \otimes |0_F\rangle_{\overline{m}} \tag{3.4}$$

Or, aux basses énergies, il est connu que les degrés les plus pertinents sont ceux qui se trouvent à proximité de la surface de Fermi ici définie par les quatre points $\pm k_F^m$ et $\pm k_F^{\overline{m}}$. Ainsi la forme globale de la relation de dispersion ε_m n'a pas d'importance à basse énergie, si bien que nous choisissons de linéariser autour des points de Fermi, ce qui créé deux branches par secteur orbital, une où les fermions ont une impulsion positive et vont par conséquent à droite, repérée par R ⟨3⟩, une autre où leur impulsion est négative, où ils vont donc à gauche, repérée par L ⟨4⟩, avec les relations de dispersion suivantes ⟨5⟩ :

$$\varepsilon_m^R(q) = \varepsilon_m\left(k_F^m\right) + \left(q - k_F^m\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_m}{\mathrm{d}k}\left(k_F^m\right) \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_m^L(q) = \varepsilon_m\left(k_F^m\right) - \left(q + k_F^m\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_m}{\mathrm{d}k}\left(k_F^m\right) \tag{3.6}$$

Où la dérivée au point de Fermi définit selon (3.2) une *vitesse de Fermi* v_{mF} pour chaque secteur orbital :

$$v_{mF} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_m}{\mathrm{d}k}\left(k_F^m\right) = 2a_0 t \sin\left(a_0 k_F^m\right) \tag{3.7}$$

Cela induit aussi une décomposition des opérateurs de créations fermioniques sur réseau "$c^\dagger$" (ou "$d^\dagger$") sur des opérateurs fermioniques droits "$R^\dagger$" et gauches "$L^\dagger$". Considérons pour le voir la transformée de Fourier de $c^\dagger_{m\alpha,k}$ que nous coupons en deux termes autour des points de Fermi :

$$\begin{aligned} c^\dagger_{m\alpha,j} &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}}\sum_{k\in 1\mathrm{ZB}} e^{-ikja_0} c^\dagger_{m\alpha,k} \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}}\sum_{|k-k_F^m|\gtrsim 0} e^{-ikja_0} c^\dagger_{m\alpha,k} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}}\sum_{|k+k_F^m|\gtrsim 0} e^{-ikja_0} c^\dagger_{m\alpha,k} \end{aligned}$$

Où les termes en **vert** correspondent aux modes droits et les termes en **rouge** correspondent aux modes gauches. Comptons alors les degrés à partir des points de Fermi avec $k = +k_F^m + q$ pour la branche droite et $k = -k_F^m + q$ pour la bande gauche :

$$c^\dagger_{m\alpha,j} \simeq e^{-ik_F^m ja_0} \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}}\sum_{|q|\gtrsim 0} e^{-iqja_0} c^\dagger_{m\alpha,+k_F^m+q} + e^{ik_F^m ja_0} \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}_{\text{sites}}}}\sum_{|q|\gtrsim 0} e^{-iqja_0} c^\dagger_{m\alpha,-k_F^m+q} \tag{3.8}$$

⟨3⟩. R pour l'anglais *right*.
⟨4⟩. L pour l'anglais *left*.
⟨5⟩. Remarquons que la relation de dispersion est paire, sa dérivée impaire.

Il est logique dans le cadre de la limite continue d'introduire le réel $x = a_0 j$ et de définir les nouveaux opérateurs de création non-plus par rapport à un nombre de sites, mais par rapport à la longueur correspondante, à savoir la longueur de la chaîne [6] $L = a_0 \mathrm{N}_{\text{sites}}$, si bien que l'on définit aisément $R^\dagger_{m\alpha}(x)$ et $L^\dagger_{m\alpha}(x)$ comme suit :

$$R^\dagger_{m\alpha}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{a_0 \mathrm{N}_{\text{sites}}}} \sum_{|q| \gtrsim 0} e^{-iqja_0} c^\dagger_{m\alpha,+k_F^m+q} \tag{3.9}$$

$$L^\dagger_{m\alpha}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{a_0 \mathrm{N}_{\text{sites}}}} \sum_{|q| \gtrsim 0} e^{-iqja_0} c^\dagger_{m\alpha,-k_F^m+q} \tag{3.10}$$

Ces opérateurs héritent naturellement des relations d'anticommutation fermioniques, avec les relations suivantes $\forall m, n, \alpha, \beta$ et $P, Q = R$ ou L :

$$\left\{ P^\dagger_{m\alpha}(x), Q^\dagger_{n\beta}(y) \right\} = 0 \tag{3.11}$$

$$\left\{ P^\dagger_{m\alpha}(x), Q_{n\beta}(y) \right\} = \delta_{PQ}\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta}\delta(x-y) \tag{3.12}$$

En introduisant les expressions de ces opérateurs dans (3.8), on obtient une relation fondamentale qui décompose les opérateurs sur réseau sur les opérateurs de la limite continue :

$$c^\dagger_{m\alpha,i} \sim \sqrt{a_0}\left[e^{-ik_F^m x} R^\dagger_{m\alpha}(x) + e^{ik_F^m x} L^\dagger_{m\alpha}(x) \right] \tag{3.13}$$

Ainsi, en toute logique, le hamiltonien libre va désormais compter les modes "droits" et les modes "gauches" auxquels il va respectivement associer l'énergie $+v_{mF}k$ et $-v_{mF}k$ (si l'on tue dans (3.5) et (3.6) la constante identique et inutile). Autrement dit le hamiltonien libre du secteur m écrit dans les modes n'est autre que :

$$\mathcal{H}_m^{(0)} = v_{mF} \sum_{\alpha,k} k \left(R^\dagger_{m\alpha,k} R_{m\alpha,k} - L^\dagger_{m\alpha,k} L_{m\alpha,k} \right) \tag{3.14}$$

Les opérateurs droits et gauches étant essentiellement définis par les relations (3.9) et (3.10). Remarquons au passage que l'écriture en somme sur k est malvenue puisqu'il s'agit à proprement parler d'une variable continue : sans même passer à la limite continue, l'effet d'un a_0 non-nul a simplement pour effet de contraindre k à la première zone de Brillouin (puisque $1\mathrm{ZB} = [-\pi/a_0; +\pi/a_0]$). C'est la taille finie de la chaîne qui astreint k à des valeurs discrètes, or nous considérons ici une chaîne infinie, si bien que k est bien une variable continue, tout de même limitée par le haut par le seuil Λ^{-1}.

[6]. L'opérateur $c^\dagger$ est au nombre de site ce que les opérateurs $R^\dagger$ et $L^\dagger$ sont à la longueur de la chaîne.

L'effet le plus remarquable de la limite continue concerne la mer de Fermi que définit (3.14) et qui, justement, n'est plus à proprement parler une mer de Fermi ! Désormais le spectre est linéaire si bien que sur chaque branche droite et gauche il faut remplir une infinité d'états avant d'arriver à la surface de Fermi. Cela définit une mer de Dirac :

$$|0_F\rangle_m = \prod_{k\geqslant 0}\left[a_0 R^\dagger_{m\alpha,-k} L^\dagger_{m\alpha,k}\right]|0\rangle_m \tag{3.15}$$

La mer de Dirac $|0_F\rangle = |0_F\rangle_m \otimes |0_F\rangle_{\overline{m}}$ ainsi définie pose évidemment un problème : elle possède une infinité d'états, et si l'on veut calculer certaines quantités, comme le nombre d'états dans le fondamental évidemment, mais encore l'énergie du fondamental, des divergences nous mènent à définir une régularisation des opérateurs. Nous introduisons alors cette régularisation, nommée *produit normal* et noté $:A:$ pour un opérateur A et défini par :

$$:A: = A - \langle 0_F|A|0_F\rangle \tag{3.16}$$

Avec une telle définition $:\mathcal{H}_0: |0_F\rangle = 0$, et dans la suite, sans toujours écrire cette régularisation, nous la sous-entendrons. Cela dit, nous pouvons écrire le hamiltonien libre comme une intégrale sur x (maintenant que nous sommes passés à la limite continue), ce qui définit une densité hamiltonienne :

$$\mathcal{H}^{(0)}_m = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}^{(0)}_m(x)\mathrm{d}x \tag{3.17}$$

Où $\mathscr{H}^{(0)}_m(x)$, la densité hamiltonienne, est parfois confondue avec le hamiltonien et notée simplement $\mathcal{H}^{(0)}_m$, n'est autre qu'un hamiltonien de Dirac (c'est fatal dès lors que la relation de dispersion est linéaire) qui satisfait ⟨7⟩ :

$$\mathscr{H}^{(0)}_m(x) = -iv_{mF}\left[R^\dagger_{m\alpha}\partial_x R_{m\alpha} - L^\dagger_{m\alpha}\partial_x L_{m\alpha}\right] \tag{3.18}$$

Nous allons maintenant, à partir de l'expression hamiltonienne, passer à l'expression lagrangienne qui demande pour cela l'introduction d'un temps (dont il n'a pour l'instant jamais été question).

⟨7⟩. Ce n'est rien d'autre qu'une écriture pour k variant sur tout $\mathbb{R}$ de (3.14), avec k en représentation x, c'est-à-dire $-i\partial_x$. Une autre manière de faire consiste à insérer la décomposition (3.13) dans l'expression du hamiltonien sur réseau : il apparaîtra alors des termes en $e^{\pm 2ik_F^m x}$ qui n'oscillent pas seulement lorsque $k_F^m = \pi/a_0$, c'est-à-dire dans le cas où tous les états de la branche m sont pleins, c'est-à-dire quand la physique est figée. Autrement les termes oscillants sont négligés.

3.1.1 Écriture lagrangienne et symétrie conforme

Nous allons tout d'abord chercher à introduire une variable supplémentaire et pour ce faire rien de plus simple, il suffit d'introduire la représentation de Heisenberg [8] des opérateurs pour y intégrer la variable temps "t", les opérateurs de création y gagnerons ainsi une seconde variable : $R^{\dagger}_{m\alpha}(x,t)$ et $L^{\dagger}_{m\alpha}(x,t)$. Cela dit, et puisque nous avons affaire avec un modèle de Dirac, introduisons un spineur de Dirac $\Psi_{m\alpha}(x,t)$ fait des deux opérateurs de champs chiraux droit et gauche :

$$\Psi_{m\alpha}(x,t) = \begin{pmatrix} R_{m\alpha}(x,t) \\ L_{m\alpha}(x,t) \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Le champ conjugué est défini par $\overline{\Psi}_{m\alpha}(x,t) = \Psi^{\dagger}_{m\alpha}(x,t)\gamma^0$ où $\gamma^0 = \sigma^y$ (la deuxième matrice de Pauli). Il permet d'écrire la densité hamiltonienne en représentation Heisenberg en introduisant $\gamma^1 = i\sigma^x$ (la première matrice de Pauli) :

$$\mathscr{H}^{(0)}_m(x,t) = -iv_{mF}\overline{\Psi}_{m\alpha}(x,t)\gamma^1\partial_x\Psi_{m\alpha}(x,t) \tag{3.20}$$

Avec le hamiltonien nous pouvons écrire la densité lagrangienne $\mathscr{L}^{(0)}_m$ du secteur orbital m qui pour un champ de Dirac satisfait :

$$\mathscr{L}^{(0)}_m(x,t) = i\overline{\Psi}_{m\alpha}(x,t)\gamma^0\partial_t\Psi_{m\alpha}(x,t) - \mathscr{H}^{(0)}_m(x,t) \tag{3.21}$$

En toute logique on définit deux variables de dimensions identiques $x^0 = v_{mF}t$ et $x^1 = x$ qui définissent deux dérivées $\partial_0 = \frac{1}{v_{mF}}\partial_t$ et $\partial_1 = \partial_x$, et nous pouvons écrire la densité lagrangienne d'une manière compacte $\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$ en sommant sur les indice $\mu = 0$ et 1 :

$$\mathscr{L}^{(0)}_m(x,t) = iv_{mF}\overline{\Psi}_{m\alpha}(x,t)\not{\partial}\Psi_{m\alpha}(x,t) \tag{3.22}$$

Récrivons cette densité dans les champs initiaux (nous n'écrivons plus la dépendance spatio-temporelle, qui est sous-entendue) :

$$\mathscr{L}^{(0)}_m = iv_{mF}\sum_\alpha \left[R^{\dagger}_{m\alpha}\left(\partial_x + \frac{1}{v_{mF}}\partial_t\right)R_{m\alpha} - L^{\dagger}_{m\alpha}\left(\partial_x - \frac{1}{v_{mF}}\partial_t\right)L_{m\alpha}\right] \tag{3.23}$$

Alors dans la variables [9] $x_R = x - v_{mF}t$ et $x_L = x + v_{mF}t$ les équations de Lagrange du

[8]. La représentation de Heisenberg $A_H(t)$ d'un opérateur A est tout simplement définie par $A_H(t) = U^{\dagger}(t)AU(t)$ où $U(t)$ est l'opérateur d'évolution du temps-origine jusqu'au temps t.

[9]. Ces variables ont un sens physique précis : si une quantité ne dépend que de x_R il se propage à droite, si elle

mouvement s'écrivent :

$$\frac{\delta \mathscr{L}_m^{(0)}}{\delta \overline{\Psi}_{m\alpha}} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathscr{L}_m^{(0)}}{\delta(\partial_\mu \overline{\Psi}_{m\alpha})} \right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \partial_L R_{m\alpha} &= 0 \\ \partial_R L_{m\alpha} &= 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Autrement dit les équations du mouvement imposent aux champs droits et gauches de se mouvoir respectivement à droite et à gauche à la vitesse v_{mF}, résultat attendu. Avoir réussi à déterminer la densité lagrangienne (donc l'action en intégrant sur l'espace-temps), est plus important que la simple obtention de ces équations du mouvement : en effet, il est connu qu'une théorie quantique des champs de dimension d étudiée statistiquement à une température $T = \beta^{-1}$ est équivalente à une théorie classique des champs, mais cette fois-ci en dimension $d+1$ où la dimension supplémentaire est cyclique de période β.

Prenons l'exemple d'une théorie des champs fermionique à une dimension et d'opérateur de champs $\{\hat{\psi}^\dagger(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$. On peut montrer en introduisant la base $\{|\psi\rangle\}_\psi$ des *états cohérents* ⟨10⟩ que la fonction de partition $Z = \operatorname{tr} e^{-\beta\mathcal{H}}$ de la théorie quantique s'y décompose comme une théorie des champs classique sur les fonctions d'onde grassmanniennes $\psi(x,\tau)$ où τ est le "temps statistique" variant de 0 à β (c'est notre dimension supplémentaire) :

$$Z = \oint_{\substack{\psi(x,0) = -\psi(x,\beta) \\ \psi^\star(x,0) = -\psi^\star(x,\beta)}} \mathcal{D}\psi^\star \mathcal{D}\psi \, e^{-S[\psi,\psi^\dagger]} \tag{3.28}$$

Où la statistique fermionique impose des conditions aux limites anti-périodiques, mais surtout, où $S[\psi,\psi^\dagger]$ est l'action associée au hamiltonien $\mathcal{H}$, mais une action particulière, dans la mesure où elle résulte d'une transformation de l'action dynamique par une *rotation de Wick* ⟨11⟩

ne dépend que de x_L elle se propage à gauche. Leur définition induit aussi que l'on a :

$$\partial_R = \frac{1}{2}\partial_x - \frac{1}{2v_{mF}}\partial_t \tag{3.24}$$

$$\partial_L = \frac{1}{2}\partial_x + \frac{1}{2v_{mF}}\partial_t \tag{3.25}$$

⟨10⟩. Les états cohérents sont définis pour tout opérateurs de création selon le type d'objet qu'ils sous-tendent. Pour un opérateur fermionique, pour respecter l'anticommutation, c'est à des fonctions grassmanniennes qu'on l'associe (qui anticommutent simplement). On définit les états $|\psi\rangle$ associés à la fonction d'onde $\psi(x)$ ainsi sur l'état vide $|0\rangle$ de la théorie des champs :

$$|\psi\rangle = \exp\left(- \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\hat{\psi}^\dagger(x)\mathrm{d}x \right)|0\rangle \tag{3.27}$$

Ce qui fait de ces états des états cohérents, c'est la propriété remarquable d'être des états propres de l'opérateur d'annihilation avec $\hat{\psi}(x)|\psi\rangle = \psi(x)|\psi\rangle$. Ajoutons à ceci que tous les états $|\psi\rangle$ (c'est-à-dire associé à toutes les fonctions d'onde ψ possibles) permettent d'écrire une relation de fermeture.

⟨11⟩. La rotation de Wick transforme le statistique en dynamique, l'équation de diffusion en équation de Schrö-

qui remplace le temps dynamique par le temps statistique : $t \xrightarrow{\mathscr{W}} -i\tau$. Autrement dit, pour notre problème de fermions, dans la transformation de Wick $\mathscr{W}$ l'action dynamique $\mathscr{S}_m^{(0)}$ définie par la densité lagrangienne (3.23) sera transformée en une action statistique $\mathcal{S}_m^{(0)}$ définie par une densité $\mathcal{L}_m^{(0)}$, et ce, de manière à rendre égal le poids dynamique $e^{-i\mathscr{S}_m^{(0)}}$ et le poids statistique $e^{-\mathcal{S}_m^{(0)}}$. Nous décidons alors d'introduire deux quantités complexes :

$$z = v_{mF}\tau + ix \tag{3.29}$$

$$\bar{z} = v_{mF}\tau - ix \tag{3.30}$$

Notons en passant que ces deux variables complexes dépendent de l'indice orbital m, ce qui pose *a priori* un problème, sauf dans le cas de la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2$, que nous supposons dans les calculs futurs toujours satisfaite pour les termes de saut ⟨12⟩. Ces variables induisent des dérivées partielles :

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{mF}}\partial_\tau - i\partial_x\right) \tag{3.31}$$

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{mF}}\partial_\tau + i\partial_x\right) \tag{3.32}$$

Alors la densité $\mathcal{L}_m^{(0)}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_m^{(0)} = R_{m\alpha}^\dagger \partial R_{m\alpha} + L_{m\alpha}^\dagger \bar{\partial} L_{m\alpha} \tag{3.33}$$

Et les équations du mouvement ⟨13⟩ deviennent $\partial R_{m\alpha}(z,\bar{z}) = 0$ et $\bar{\partial} L_{m\alpha}(z,\bar{z}) = 0$, autrement dit les champs droits sont antiholomorphes tandis que les champs gauches sont holomorphes ⟨14⟩, c'est-à-dire :

$$\text{Holomorphe} \quad : \quad L_{m\alpha}^{(\dagger)}(z,\bar{z}) = L_{m\alpha}^{(\dagger)}(z) \tag{3.34}$$

$$\text{Antiholomorphe} \quad : \quad R_{m\alpha}^{(\dagger)}(z,\bar{z}) = R_{m\alpha}^{(\dagger)}(\bar{z}) \tag{3.35}$$

Écrivons enfin l'action $\mathcal{S}^{(0)}$ totale en considérant que la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2$ est satisfaite pour le modèle libre, et en se souvenant que la variable τ est définie périodiquement de la tem-

---

dinger, les poids de Boltmann $e^{-\tau E}$ en phase d'évolution e^{-iEt}, *etc.*

⟨12⟩. Cela signifie que le modèle p-band satisfait sans ajustement cette propriété, tandis que pour les modèles g-e et double-puits, il faudra imposer certaines conditions : $t_g \simeq t_e$ et $\delta\mu \simeq 0$ pour le premier et $t_\perp \ll t$ pour le second.

⟨13⟩. Dans l'interprétation d'après la rotation de Wick, elles correspondent aux chemins qui vont maximiser le poids statistique $e^{-\mathcal{S}_m^{(0)}}$.

⟨14⟩. Rien ne hiérarchise les champs droits et gauches. Que les champs "*anti*" soient les champs droits est une convention qui se joue à la définition (3.29), puisque $z \xrightarrow{\mathscr{W}} ix_L$.

pérature infinie $\tau = 0$ à l'inverse de la température $\tau = \beta$, qui dans nos systèmes à température nulle est considéré comme infini. Ainsi on considère que la variable z est définie pour tout le plan complexe et nous avons :

$$\mathcal{S}^{(0)} = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z} \left(R^{\dagger}_{m\alpha} \partial R_{m\alpha} + L^{\dagger}_{m\alpha} \overline{\partial} L_{m\alpha} \right) \tag{3.36}$$

C'est cette quantité que les symétries du modèle - dont nous allons discuter - laisseront invariante. Le gain, c'est d'avoir introduit une action dont on sait d'une part qu'elle caractérise les propriétés statistiques de notre théorie quantique des champs, et d'autre part qu'elle est écrite de manière tout à fait élégante dans les nombres complexes, ce qui laisse présager une écriture simple des transformations de symétrie ainsi que l'utilisation d'outils puissants d'analyse complexe.

3.1.2 Les symétries de l'action

Les symétries de l'action sont très nombreuses. En écriture complexe, considérons toutes les fonctions holomorphes ⟨15⟩ $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, et notons $\omega = f(z)$ et $\overline{\omega} = f^{\star}(\overline{z}^{\star})$ ⟨16⟩ les nouvelles variables complexes issues de la transformation. On montre que cette dernière induit pour les opérateurs de création gauches et droits les transformations suivantes ⟨17⟩ :

$$L^{\dagger}_{m\alpha}(z) \xrightarrow{f} L'^{\dagger}_{m\alpha}(\omega) = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} \right)^{-1/2} L^{\dagger}_{m\alpha}(z) \tag{3.37}$$

$$L_{m\alpha}(z) \xrightarrow{f} L'_{m\alpha}(\omega) = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} \right)^{-1/2} L_{m\alpha}(z) \tag{3.38}$$

$$R^{\dagger}_{m\alpha}(\overline{z}) \xrightarrow{f} R'^{\dagger}_{m\alpha}(\overline{\omega}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}\overline{z}} \right)^{-1/2} R^{\dagger}_{m\alpha}(\overline{z}) \tag{3.39}$$

$$R_{m\alpha}(\overline{z}) \xrightarrow{f} R'_{m\alpha}(\overline{\omega}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}\overline{z}} \right)^{-1/2} R_{m\alpha}(\overline{z}) \tag{3.40}$$

Ajoutons les transformations qu'induit la transformation f pour les éléments différentiels et

⟨15⟩. Plus fortement, il s'agit des fonctions méromorphes, avec des pôles isolés, que l'on définit sur le plan complexe auquel on ajoute le point à l'infini : $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

⟨16⟩. En réalité, pour $\overline{\omega}$, on devrait définir une fonction antiholomorphe $\overline{\omega} = \overline{f}(\overline{z})$ indépendante de f. Une fois les calculs effectués, pour revenir à la physique, nous écririons une condition telle que celle rendue par les présentes définitions.

⟨17⟩. Notons au passage qu'il faut se méfier : $L^{\dagger}$ est l'adjoint de L, et pour autant la conjugaison induite ne concerne par z.

les dérivées partielles :

$$\mathrm{d}z \xrightarrow{f} \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \tag{3.41}$$

$$\mathrm{d}\overline{z} \xrightarrow{f} \mathrm{d}\overline{\omega} = \frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}\overline{z}}\mathrm{d}\overline{z} \tag{3.42}$$

$$\partial_z \xrightarrow{f} \partial_\omega = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right)^{-1}\partial_z \tag{3.43}$$

$$\overline{\partial}_{\overline{z}} \xrightarrow{f} \overline{\partial}_{\overline{\omega}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}\overline{z}}\right)^{-1}\overline{\partial}_{\overline{z}} \tag{3.44}$$

Alors on constate que les termes holomorphes (respectivement anti-holomorphes) demeurent holomorphes (respectivement anti-holomorphes) mais aussi, beaucoup plus important, que les transformations qu'induit f laisse invariant l'action (3.36) :

$$\mathcal{S}^{(0)} \xrightarrow{f} \mathcal{S}^{(0)} \tag{3.45}$$

À moins que f ne soit pas inversible, si bien que l'on aurait un espace de définition $f(\overline{\mathbb{C}})$ des variables ω et $\overline{\omega}$ différent de celui $\overline{\mathbb{C}}$ de z et $\overline{z}$ dans l'intégrale de l'action, qui ne serait donc pas tout à fait identique [18]. Or, nous voulons avoir affaire avec une symétrie complète, c'est-à-dire avec un groupe, si bien que nous ne retenons que les fonctions analytiques bijectives, connues sous le nom de *transformations projectives* et définies par :

$$\begin{aligned} f : \overline{\mathbb{C}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ \ ad-bc=1 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ces transformations forment un groupe, le groupe spécial linéaire [19], noté $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et d'ordre 6 et dont on remarque certaines transformations élémentaires selon la façon de choisir les nombres complexes (a,b,c,d) (l'identité du groupe correspond à $(1,0,0,1)$:

— *Les translations* avec $(1,-z_0,0,1), z_0 \in \mathbb{C}$: la transformation prend la forme $z \to z - z_0$ et correspond à une translation de z_0 (doublement généré si l'on se place d'un point du vu réel, en x et en τ) ;

[18]. Ce n'est pas souhaitable pour traiter une symétrie, mais c'est en revanche très pratique pour retrouver les résultats dans l'espace-temps cylindrique, c'est-à-dire à température finie, en posant : $f(z) = \frac{\beta}{2\pi}\ln z$.

[19]. Son nom vient de ce qu'il est isomorphe au groupe de matrices :

$$\left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{C}, \det M = 1 \right\} \tag{3.47}$$

Avec la multiplication matricielle. On sait inverser : f est associée à (a,b,c,d) comme f^{-1} l'est à $(d,-b,-c,a)$.

— *Les rotations* avec $(e^{i\theta/2}, 0, 0, e^{-i\theta/2}), \theta \in \mathbb{R}$: la transformation prend la forme $z \to e^{i\theta}z$ d'une rotation dans le plan complexe (ici un générateur). En réalité il s'agit de la traduction en complexe de l'invariance de Lorentz de la théorie de Dirac qui laisse invariante le produit scalaire de la relativité. Or la rotation de Wick transformant ce produit scalaire pseudo-euclidien en produit scalaire euclidien, il est normal que la transformation corresponde en complexe à une rotation ;
— *Les dilatations* avec $(e^{\theta/2}, 0, 0, e^{-\theta/2}), \theta \in \mathbb{R}$: la transformation prend la forme $z \to e^{\theta}z$ d'une dilatation dans le plan complexe (ici encore, un générateur) ;
— *Les inversions* avec $(1, 0, -\Omega^{-1}, 1), \Omega \in \overline{\mathbb{C}}$: la transformation prend la forme $z \to z/(1 - z/\Omega)$ et envoie transforme le point Ω en le point à l'infini (ici deux générateurs). Notons que ce que l'on appelle communément "l'inversion" est la transformation $(0, -1, 1, 0)$, c'est-à-dire $z \to -1/z$, est une combinaison des quatre transformations présentées (que nous avons ainsi définies puisqu'aux limites $z_0, \theta, \lambda, \Omega^{-1} \to 0$ elles correspondent à l'identité).

Étant données ces symétries, nous introduisons le tenseur énergie-impulsion qui possède *a priori* 3 composantes. En effet il s'agit d'une matrice 2×2 (parce que $z, \overline{z}$ sont équivalents à x, τ) et symétrique (c'est un tenseur énergie impulsion). Or il se trouve que les deux composantes diagonales $T_{z\overline{z}}$ et $T_{\overline{z}z}$ sont nulles ⟨20⟩, si bien qu'il ne reste que les deux composantes diagonales, l'holomorphe $T(z) = T_{zz}$, et l'antiholomorphe $\overline{T}(\overline{z}) = T_{\overline{z}\overline{z}}$, qui satisfont :

$$T(z) = -\pi \left(L^{\dagger}_{m\alpha} \partial L_{m\alpha} + \partial L^{\dagger}_{m\alpha} L_{m\alpha} \right) \tag{3.49}$$

$$\overline{T}(\overline{z}) = -\pi \left(R^{\dagger}_{m\alpha} \overline{\partial} R_{m\alpha} + \overline{\partial} R^{\dagger}_{m\alpha} R_{m\alpha} \right) \tag{3.50}$$

Cet objet est central dans la description de notre modèle : lorsqu'une théorie des champs possède l'invariance conforme, on la qualifie de *théorie conforme*, et les modes du tenseur énergie impulsion servent à générer - dans l'espace de Hilbert - toutes les transformations conformes (pas seulement celles qui sont inversibles, il y en a une infinité), nous y reviendrons. Ajoutons enfin que plus grande est la symétrie d'un modèle, plus grandes sont les contraintes qui régissent sa physique : pour notre théorie conforme, nous savons notamment [35] que la symétrie conforme impose une certaine forme aux fonctions de corrélations.

⟨20⟩. Dans les variables $x^0 = v_F\tau$ et $x^1 = x$, le tenseur métrique satisfait $g_{\mu\nu} = (-1)^{\mu}\delta_{\mu\nu}$ et le tenseur énergie-impulsion satisfait :

$$T^{\mu\nu} = i\hbar v_F \left(\frac{1}{2} \overline{\Psi}_{m\alpha} \left(\gamma^{\mu}\partial^{\nu} + \gamma^{\nu}\partial^{\mu} \right) \Psi_{m\alpha} - g^{\mu\nu} \overline{\Psi}_{m\alpha} \partial\!\!\!/ \Psi_{m\alpha} \right) \tag{3.48}$$

En prenant en compte *via* le théorème de Noether [130] les symétries de translation, qui mène à $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, puis de dilatation, qui mène à $g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0$, il ne reste déjà plus que deux composantes indépendantes $T^{00} = T^{11}$ et $T^{10} = T^{01}$. La transformation $(x^0, x^1) \to (z, \overline{z})$ diagonalise le tenseur.

3.2 Vers le traitement de l'interaction, outils conformes et bosonisations

3.2.1 Bases de théorie conforme

Avant même de considérer l'effet des transformations conformes sur les opérateurs de la théorie des champs, la simple analyse des transformations permet déjà d'en donner une base $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ qui les génère :

$$\ell_n = -z^{n+1}\partial \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.51}$$

Comme tout ensemble de générateurs ils satisfont une algèbre, nommé *algèbre de Witt*, et qui s'écrit de la manière suivante :

$$\left[\ell_n, \ell_m\right] = (n-m)\ell_{n+m} \tag{3.52}$$

Remarquons que les générateurs (3.51) sont pour beaucoup singuliers et notamment lorsque $n < -1$, valeurs pour lesquelles les générateurs correspondant ne génèrent pas une transformation inversible. Or cet argument doit également être valable dans des variables issues d'une transformation inversible du groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, comme par exemple l'inversion $z \to -1/z$ où $\ell_n = z^{1-n}\partial$, ce qui impose également aux générateurs à $n > 1$ d'être rejetés. Il ne reste ainsi que les générateurs ℓ_{-1}, ℓ_0 et ℓ_1, soit l'espace à 6 dimensions des transformations projectives : ℓ_{-1} concerne les translations, ℓ_0 les rotations/dilatations et ℓ_1 les inversions. De plus l'ensemble $\{\ell_n\}_{n\in\{-1,0,1\}}$ forme une sous-algèbre de (3.52). Pour faire le lien avec notre théorie des champs, occupons-nous d'étudier les effets des transformations conformes sur un opérateur de la théorie.

Définissons d'abord respectivement les *opérateurs primaires* et les *opérateur quasiprimaires*, qui sont les opérateurs $\mathcal{O}(z,\overline{z})$ qui dans les transformations $\omega = f(z)$ respectivement conformes et projectives se transforment comme :

$$\mathcal{O}'(\omega,\overline{\omega}) = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right)^{-h}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}\overline{z}}\right)^{-\overline{h}}\mathcal{O}(z,\overline{z}) \tag{3.53}$$

Où h et $\overline{h}$ sont les dimensions conformes qui caractérisent l'opérateur dans les opérations de rotation, à l'aide de son spin $s = h - \overline{h}$, et de dilatation, à l'aide de sa dimension d'échelle $\Delta = h + \overline{h}$ (qui donne tout simplement la dimension de l'opérateur). Ainsi un opérateur primaire est quasiprimaire, et nous avons déjà des exemples d'opérateurs primaires avec leurs dimensions conformes $(h,\overline{h})$, à commencer par l'action, dont les dimensions $(0,0)$ assurent son invariance conforme, mais aussi les opérateurs de création/annihilation gauches et droits des équations (3.37, 3.38, 3.39, 3.40) de dimensions respectives $(1/2,0), (1/2,0), (0,1/2)$ et $(0,1/2)$.

Reste maintenant à déterminer une algèbre sur les opérateurs de la théorie. Celle-ci est codée dans les champs *via* leurs fonctions de corrélations. Seulement un problème se pose dans nos systèmes, à savoir que la présence de la Mer de Dirac provoque dans lesdites fonctions des divergences entre opérateurs pris à des points identiques. Par exemple si l'on considère de manière générale deux opérateurs $A(z)$ et $B(\omega)$ (où z et ω correspondent à deux points du plan complexe satisfaisant l'ordre radial [⟨21⟩] $|z| > |\omega|$), alors nous pouvons le développer en série de Laurent en $z-\omega$ (voir [131], p. 173) dont le plus grand pôle est d'ordre noté N :

$$A(z)B(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{\{AB\}_n(\omega)}{(z-\omega)^n} \Longrightarrow \begin{cases} :A(z)B(\omega): &= \sum\limits_{n=-\infty}^{0} \frac{\{AB\}_n(\omega)}{(z-\omega)^n} \\ \overbrace{A(z)B}(\omega) &= \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\{AB\}_n(\omega)}{(z-\omega)^n} \end{cases} \tag{3.55}$$

Tous les termes divergents regroupés dans la *contraction* $\overbrace{A(z)B}(\omega)$ témoignent de cet effet et définissent l'*OPE* [⟨22⟩] entre les deux opérateurs. Pour écrire cette OPE, il est d'usage d'utiliser le symbole "$\sim$", et l'on écrira :

$$A(z)B(\omega) \sim \overbrace{A(z)B}(\omega) \tag{3.56}$$

Quand au terme régulier $:A(z)B(\omega):$ il se décompose en une simple série de Taylor en $z-\omega$ et correspond au terme de produit normal. Notons que les opérateurs $\{AB\}_n(\omega)$ peuvent être calculés à l'aide de la formule de Cauchy :

$$\{AB\}_n(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\omega \frac{A(z)B(\omega)}{(z-\omega)^{1-n}} \mathrm{d}z \tag{3.57}$$

Où $\oint_\omega \mathrm{d}z$ est l'intégrale sur z autour de ω dans le sens trigonométrique. Parmi ces opérateurs on note encore $\{AB\}_0(\omega) =: AB: (\omega)$ le terme d'ordre 0 dans le produit d'opérateur. Pour faire le lien avec (3.16), considérons le produit des opérateurs $L^\dagger_{m\alpha}(z)L_{m\alpha}(\omega)$ (pas de somme sur $m\alpha$) qui se décompose effectivement comme une partie régulière définie par le produit normal et une partie qui diverge puisqu'il s'agit de la valeur moyenne dans la mer de Fermi :

$$L^\dagger_{m\alpha}(z)L_{m\alpha}(\omega) =: L^\dagger_{m\alpha}(z)L_{m\alpha}(\omega): + \langle 0_F|L^\dagger_{m\alpha}(z)L_{m\alpha}(\omega)|0_F\rangle \tag{3.58}$$

⟨21⟩. L'ordre radial $\mathcal{R}$ consiste à réorganiser deux champs $A(z)$ et $B(\omega)$ dans "l'ordre" tout en respectant leur statistique. Pour des champs de fermions, on a :

$$\mathcal{R}[A(z)B(\omega)] = \begin{matrix} A(z)B(\omega) & \text{si} \quad |z| > |\omega| \\ -B(\omega)A(z) & \text{si} \quad |z| < |\omega| \end{matrix} \tag{3.54}$$

Pour des champs de bosons, c'est l'autre signe qui intervient.

⟨22⟩. Pour l'anglais *Operator Product Expansion*, le français *DPO*, pour Développement en Produit d'Opérateur, pouvant être trouvé. L'usage veut que l'OPE soit féminine : *une* OPE.

On écrira dans la suite que la valeur moyenne - qui correspond à la contraction - se comporte comme $(z-\omega)^{-1}$. En réalité, dans le produit des deux opérateurs $A(z)$ et $B(\omega)$ radialement ordonné, le *théorème de Wick* [23] permet d'écrire la décomposition (3.55), avec d'un côté la partie singulière qui contient toutes les contractions qu'il est possible de faire entre les champs libres qui composent lesdits opérateurs, et de l'autre la partie régulière avec uniquement les produits normaux. Or les valeurs moyennes des termes réguliers sont nuls par construction, on a $\langle 0_F| : A(z)B(\omega) : |0_F\rangle = 0$, si bien que les OPE deviennent "exactes" quand il s'agit de fonctions de corrélation (dans la mer de Dirac) :

$$\langle A(z)B(\omega)\rangle = \overbrace{A(z)B}(\omega) \tag{3.61}$$

Tout cela établi, nous définissons encore pour un champ $A(z,\overline{z})$ de dimension conforme $(h,\overline{h})$ sa *décomposition en modes* $A_{m,n}(\omega,\overline{\omega})$ (qui ressemblent à des modes de Fourier de l'opérateur) :

$$A(z,\overline{z}) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{A_{m,n}(\omega,\overline{\omega})}{(z-\omega)^{m+h}(\overline{z}-\overline{\omega})^{n+\overline{h}}} \tag{3.62}$$

Nous pouvons alors faire le lien évoqué entre l'opérateur énergie-impulsion $T(z)$ (et son homologue antiholomorphe) et les générateurs ℓ_n des transformations conformes : le tenseur énergie-impulsion $T(z)$ (respectivement $\overline{T}(\overline{z})$), de dimensions conformes $(2,0)$ (respectivement $(0,2)$), se décompose sur les $L_n(\omega) = T_{n,0}(\omega,\overline{\omega})$ (respectivement $\overline{L}_n(\overline{\omega}) = \overline{T}_{0,n}(\omega,\overline{\omega})$) qui satisfont une algèbre très semblable à l'algèbre de Witt (3.52), et qui porte le nom d'*algèbre de Virasoro* (qui est une représentation de la précédente dans la théorie des champs) :

$$\big[L_n, L_m\big] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{m+n,0} \tag{3.63}$$

Où c est la *charge centrale* de la théorie conforme : il s'agit d'une quantité qui commute avec tous les opérateurs et qui caractérise la théorie conforme. Dans le cas de notre théorie libre avec

[23]. Le théorème de Wick permet de simplifier les valeurs moyennes de produits d'opérateurs fermioniques ϕ_k par récurrence lorsque l'opérateur densité est gaussien (l'information est alors réduite à la fonction à deux points) :

$$\langle \phi_1 \cdots \phi_k\rangle = \sum_{j=2}^{k} (-1)^j \langle \phi_1\phi_j\rangle\langle \phi_2 \cdots \phi_{j-1}\phi_{j+1}\cdots\phi_k\cdots\rangle \tag{3.59}$$

Une équations similaire existe pour les opérateurs bosoniques et ne fait simplement pas apparaître le signe "$(-1)^k$". Couplé à la définition de l'ordre normal on montre, par exemple, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} : \phi_1\phi_2 :: \phi_3\phi_4 : \;=\; & : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : - \langle\phi_1\phi_3\rangle : \phi_2\phi_4 : - \langle\phi_2\phi_4\rangle : \phi_1\phi_3 : \\ & + \langle\phi_1\phi_4\rangle : \phi_2\phi_3 : + \langle\phi_2\phi_3\rangle : \phi_1\phi_4 : - \langle\phi_1\phi_3\rangle\langle\phi_2\phi_4\rangle + \langle\phi_1\phi_4\rangle\langle\phi_2\phi_3\rangle \end{aligned} \tag{3.60}$$

des fermions à 2N degrés de liberté, la charge centrale qui correspond à cette théorie conforme est 2N et dans la suite, lorsque seulement un certain secteur de degrés de liberté sera laissé critique, les théories conformes effectives posséderont une charge centrale moindre, et c'est pourquoi l'on considère que la charge centrale est une mesure de la criticalité de la théorie. Elle intervient également également dans l'OPE entre le tenseur énergie-impulsion avec lui-même :

$$T(z)T(\omega) \sim \frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial T(\omega)}{z-\omega} \tag{3.64}$$

Cette écriture en OPE sur le tenseur énergie impulsion est en réalité équivalente à l'algèbre de Virasoro, ce qui induit l'idée, juste, que les OPE constituent une écriture alternative à l'algèbre qui caractérise la théorie conforme. Enfin, un mot sur les opérateurs de création et d'annihilation gauches et droits, dont les seules OPE non-nulles sont les fonctions de corrélation déterminées par les symétries (de translation) et la dimension d'échelle des champs :

$$L^\dagger_{m\alpha}(z)L_{n\beta}(\omega) \sim \langle L^\dagger_{m\alpha}(z)L_{n\beta}(\omega)\rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}\delta_{mn}}{2\pi(z-\omega)} \tag{3.65}$$

$$R^\dagger_{m\alpha}(\overline{z})R_{n\beta}(\overline{\omega}) \sim \langle R^\dagger_{m\alpha}(\overline{z})R_{n\beta}(\overline{\omega})\rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}\delta_{mn}}{2\pi(\overline{z}-\overline{\omega})} \tag{3.66}$$

Nous avons de plus les propriétés suivantes qui découlent des *identités de Ward* [35, 131], équivalent quantique des équations de conservation dues aux symétries :

$$T(z)L^\dagger_{m\alpha}(\omega) \sim \frac{1/2}{(z-\omega)^2}L^\dagger_{m\alpha}(\omega) + \frac{1}{z-\omega}\partial L^\dagger_{m\alpha}(\omega) \tag{3.67}$$

$$\overline{T}(\overline{z})R^\dagger_{m\alpha}(\overline{\omega}) \sim \frac{1/2}{(\overline{z}-\overline{\omega})^2}R^\dagger_{m\alpha}(\overline{\omega}) + \frac{1}{\overline{z}-\overline{\omega}}\overline{\partial}R^\dagger_{m\alpha}(\overline{\omega}) \tag{3.68}$$

En réalité, les identités de Ward se généralisent à un champ primaire $A(z,\overline{z})$ de dimensions conformes $(h,\overline{h})$, et se traduisent par les égalités suivantes :

$$T(z)A(\omega,\overline{\omega}) \sim \frac{h}{(z-\omega)^2}A(\omega,\overline{\omega}) + \frac{1}{z-\omega}\partial A(\omega,\overline{\omega}) \tag{3.69}$$

$$\overline{T}(\overline{z})A(\omega,\overline{\omega}) \sim \frac{\overline{h}}{(\overline{z}-\overline{\omega})^2}A(\omega,\overline{\omega}) + \frac{1}{\overline{z}-\overline{\omega}}\overline{\partial}A(\omega,\overline{\omega}) \tag{3.70}$$

Toutes ces propriétés de base sur les OPE permettront dans la théorie conforme, nous insistons sur ce point, d'établir des algèbres entre opérateurs qui caractériserons la théorie des champs. Et notamment dans l'étude à basse énergie, nous verrons que l'algèbre - écrite en OPE - entre les courants des symétries (définies dans la sous-section suivante) structurent les équations de groupe de renormalisation (définis dans la section suivante) qui permettent, rien de

moins, d'accéder au diagramme de phase des modèles sur réseau.

3.2.2 Courants de symétrie

Les propriétés essentielles du modèle libre dans la limite continue sont désormais établies, tâchons désormais d'en déduire des conséquences pour l'interaction. La première étape est simplement d'écrire l'interaction dans les opérateurs de création/d'annihilation gauches et droits grâce à la décomposition (3.13) des opérateurs sur le réseau dans lesquels sont encore écrits les hamiltoniens d'interaction (2.27, 2.21), (2.77) et (2.132). Or, grâce aux facteurs exponentiels $e^{\pm i k_F^m x}$ dans (3.13), nous allons pouvoir décomposer l'interaction en plusieurs termes ⟨24⟩ :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \mathcal{V}_{0k_F} + \mathcal{V}_{2k_F} + \mathcal{V}_{4k_F} \tag{3.71}$$

Où le terme en **noir** est un terme sans oscillations, celui en **rouge** un terme proportionnel à $e^{\pm 2ik_F x}$ et le dernier, en **vert**, proportionnel à $e^{\pm 4ik_F x}$. Le premier terme, le non-oscillant, régulier, contient des termes non-chiraux du type $R^\dagger L L^\dagger R$ et $L^\dagger R R^\dagger L$, mais également des termes purement chiraux du type $L^\dagger L L^\dagger L$ et $R^\dagger R R^\dagger R$ qui ont pour effet de renormaliser les vitesses de Fermi et que, dès lors, nous omettons. Les deuxièmes et troisièmes termes, oscillants, renormalisent les paramètres de la théorie totale à des termes plus élevés dans la théorie de perturbation et sont négligeables, à moins qu'ils n'oscillent pas : on se souvient que la théorie est à la base une théorie sur site $x = a_0 j$, si bien qu'un remplissage $\overline{n}$ particulier, c'est-à-dire un vecteur de Fermi k_F particulier peut rendre ces termes exponentiels non-oscillants. Par exemple, lorsque $k_F = \pi/2a_0$, c'est la condition de demi-remplissage (quart de remplissage pour les modèles d'échelle et de double-puits), le terme $\mathcal{V}_{4k_F}$ résonne et participe à la physique au même ordre que les termes non-oscillants : il correspond aux termes d'umklapp, en $R^\dagger L R^\dagger L$ et $L^\dagger R L^\dagger R$, présents à des remplissages commensurables ! Notons que le terme à $2k_F$ résonne à des ordres supérieurs encore, si bien que nous le négligeons totalement. Ainsi l'interaction se décompose comme :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \mathcal{V}_{0k_F}[\delta] + \mathcal{V}^{\text{umklapp}}_{4k_F}[\delta] \tag{3.72}$$

Où nous avons ajouté une dépendance dans l'anisotropie orbitale δ qui existe lorsque le système libre présente deux branches orbitales distinctes : en effet des termes oscillants en puissance de $e^{\pm i\delta x/2}$, qui résonnent dans le cas isotrope, tuent des termes dans le cas où il se mettent à osciller (dans le cas anisotrope). Ainsi, dans la limite continue, *remplissage* et *anisotropie orbitale* vont déterminer les bonnes interactions à prendre en compte.

Voilà une première décomposition de l'interaction utilisant ces considérations "concrètes",

⟨24⟩. Écrits exclusivement dans les vecteurs d'onde k_F et δ, pas dans les vecteurs d'onde orbitaux k_F^m, pour assurer l'unicité de l'écriture de la décomposition.

mais nous pouvons aller plus loin en considérant les symétries. En effet, si l'interaction n'est évidemment pas diagonalisée dans les opérateurs chiraux gauches et droits, néanmoins la présence des symétries assure à l'interaction de se décomposer dans leurs générateurs. Ainsi, de manière générale ⟨25⟩, parce que les processus d'interaction lient 2N degrés de liberté, ils correspondent à tous les générateurs de U(2N) que l'on décompose dans les symétries du problème. Nous définissons alors dans chaque secteur orbital m, pour chaque chiralité gauche et droite (L et R), les courants des symétries $U(1)_c$ - toujours présente - sans la somme implicite sur le degré orbital m :

$$J_{mL}(z) = :L^{\dagger}_{m\alpha}(z)L_{m\alpha}(z): \tag{3.73}$$
$$J_{mR}(\bar{z}) = :R^{\dagger}_{m\alpha}(\bar{z})R_{m\alpha}(\bar{z}): \tag{3.74}$$

Puis les courants de la symétrie SU(N) - également toujours présente - à l'aide des N^2-1 matrices T^a de la représentation fondamentale de SU(N) :

$$J^a_{mL}(z) = :L^{\dagger}_{m\alpha}(z)T^a_{\alpha\beta}L_{m\beta}(z): \tag{3.75}$$
$$J^a_{mR}(\bar{z}) = :R^{\dagger}_{m\alpha}(\bar{z})T^a_{\alpha\beta}R_{m\beta}(\bar{z}): \tag{3.76}$$

Puis les courants de la symétrie $SU(2)_o$, qui n'est presque jamais présente (ainsi que son sous-groupe $U(1)_o$), et qui pour cette raison apparaîtront dans l'interaction de manière éclatée. Nous les définissons à l'aide des trois matrices de Pauli σ^i :

$$j^i_L(z) = :L^{\dagger}_{m\alpha}(z)\frac{\sigma^i_{mn}}{2}L_{n\alpha}(z): \tag{3.77}$$
$$j^i_R(\bar{z}) = :R^{\dagger}_{m\alpha}(\bar{z})\frac{\sigma^i_{mn}}{2}R_{n\alpha}(\bar{z}): \tag{3.78}$$

Pour ces courants, une écriture vectorielle "$\boldsymbol{j} = j^i\boldsymbol{u}_i$" est souvent utilisée. Et enfin, pour compléter tout ces générateurs, nous définissons les générateurs restant de SU(2N), à l'aide à la fois des matrices T^a et des matrices σ^i :

$$\mathcal{J}^{a,i}_L(z) = :L^{\dagger}_{m\alpha}(z)\frac{T^a_{\alpha\beta}\times\sigma^i_{mn}}{\sqrt{2}}L_{n\beta}(z): \tag{3.79}$$
$$\mathcal{J}^{a,i}_R(\bar{z}) = :R^{\dagger}_{m\alpha}(\bar{z})\frac{T^a_{\alpha\beta}\times\sigma^i_{mn}}{\sqrt{2}}R_{n\beta}(\bar{z}): \tag{3.80}$$

Nous définissons encore, dans le cas de la présence de la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2$, les courants

⟨25⟩. L'idée que l'on présente ici, à savoir la décomposition de l'interaction dans les courants WZW (voir la suite), a été tout d'abord introduite pour l'échelle de Hubbard SU(2) dans [132].

$\mathrm{U}(1)_c$ et $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$ totaux :

$$J_L(z) = \sum_m J_{mL}(z) \tag{3.81}$$
$$J_R(\overline{z}) = \sum_m J_{mR}(\overline{z}) \tag{3.82}$$
$$J^a_L(z) = \sum_m J^a_{mL}(z) \tag{3.83}$$
$$J^a_R(\overline{z}) = \sum_m J^a_{mR}(\overline{z}) \tag{3.84}$$

Nous donnons les OPE de ces champs - qui comme nous le savons déjà reflètent l'algèbre des champs, qui ressemble beaucoup à l'algèbre des générateurs des groupes que ces opérateurs représentent :

$$J_L(z)J_L(\omega) \sim \frac{2\mathrm{N}}{4\pi^2(z-\omega)^2} \tag{3.85}$$
$$J^a_L(z)J^b_L(\omega) \sim \frac{2\delta_{ab}}{8\pi^2(z-\omega)^2} + \frac{if^{abc}J^c_L(\omega)}{2\pi(z-\omega)} \tag{3.86}$$
$$j^i_L(z)j^j_L(\omega) \sim \frac{\mathrm{N}\delta_{ij}}{8\pi^2(z-\omega)^2} + \frac{i\varepsilon_{ijk}j^k_L(\omega)}{2\pi(z-\omega)} \tag{3.87}$$
$$\mathcal{J}^{a,i}_L(z)\mathcal{J}^{b,j}_L(\omega) \sim \frac{\delta_{ab}\delta_{ij}}{8\pi^2(z-\omega)^2} + \frac{\frac{i\delta_{ab}}{\mathrm{N}}\varepsilon_{ijk}j^k_L(\omega) + \frac{i\delta_{ij}}{2}f^{abc}J^c_L(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2}}id^{abc}\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}^{c,k}_L(\omega)}{2\pi(z-\omega)} \tag{3.88}$$

Où les d^{abc} caractérisent les relations d'anticommutation de générateurs de $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$, bien définis dans l'ANNEXE C. Les champs droits satisfont des relations analogues [(26)]. On remarque des algèbres de courants (3.86) et (3.87) qu'elles sont fermées : d'une manière générale, ce type de structure définit l'algèbre de courants des générateurs $\{J^A\}_{A\in[\![1,\dim G]\!]}$ d'une théorie conforme G_k (où G est un groupe de Lie) - lire "G *niveau* k" - et dont l'expression est la suivante :

$$J^A(z)J^B(\omega) \sim \frac{k\delta^{AB}}{8\pi^2(z-\omega)^2} + \frac{if^{ABC}J^C(\omega)}{2\pi(z-\omega)} \tag{3.89}$$

Où f^{ABC} sont les coeffcients de l'algèbre $\mathfrak{g}$ de G. La théorie conforme que cette algèbre induit et qui possède une symétrie étendue (associée au groupe G) définit les modèles de Wess-Zumino-Witten (abrégé en WZW, [131]). On lui associe le tenseur énergie-impulsion $T(z)$, qui prend la *forme de Sugawara* suivante, où g est le *nombre de Coxeter dual* associé à G :

$$T(z) = \frac{2\pi : J^A J^A : (z)}{k+g} \tag{3.90}$$

[(26)]. Avec $L, z, \omega \to R, \overline{z}, \overline{\omega}$.

Ce dernier possède des OPE du type (3.64) qui font intervenir une charge centrale qui caractérise la théorie et qui s'écrivent en fonction du niveau k, de l'ordre $\dim G$ du groupe G et du nombre de Coxeter dual g ⟨27⟩ :

$$c[G_k] = \frac{k \dim G}{k+g} \tag{3.92}$$

Ainsi les courants des algèbres (3.86) et (3.87) définissent des théories conformes $\mathrm{SU(N)}_2$ et $\mathrm{SU(2)}_\mathrm{N}$ respectivement. Notons que dans ces expressions, il apparaît dans le premier membre respectivement N et 2 puisque les courants ne sont finalement que des répliques de courants plus élémentaires : (3.77) est la somme de N courants $\mathrm{SU(2)}_1$ (la somme sur α), et (3.83) la somme de 2 courants $\mathrm{SU(N)}_1$ (la somme sur m). Cela dit, nous exprimons alors le hamiltonien libre $T(z)$ dans les courants - qui est une forme de Sugawara de deux théories $\mathrm{U(1)}_1$ et $\mathrm{SU(2N)}_1$ indépendantes, et mal écrites ⟨28⟩ :

$$T(z) = \frac{\pi : J_L^2 : (z)}{2\mathrm{N}} + \frac{\pi : J_L^a J_L^a : (z)}{2\mathrm{N}+1} + \frac{2\pi : \boldsymbol{j}_L \cdot \boldsymbol{j}_L : (z)}{\mathrm{N}(2\mathrm{N}+1)} + \frac{2\pi : \mathcal{J}_L^{a,i} \mathcal{J}_L^{a,i} : (z)}{2\mathrm{N}+1} \tag{3.93}$$

La même expression en champs droits pour $\overline{T}(\bar{z})$. Avec tous ces courants, nous générons une base ⟨29⟩ des $4\mathrm{N}^2$ générateurs de $\mathrm{U(2N)}$ qui est suffisante pour écrire les termes non-oscillants $\mathcal{V}_{0k_F}$. Les différentes symétries (orbitale, d'échange) se chargerons de regrouper les termes d'interaction concernés. Et enfin, pour l'interaction - qui est à quatre fermions - nous la définissons à l'aide de paires de courants : nous définissons ainsi les *opérateurs d'interaction* de notre problème de manière à produire des singulets dans les symétries du problème et à correspondre à

⟨27⟩. Si bien que lorsque $G \equiv \mathrm{SU(n)}$, alors $\dim G = n^2 - 1$, $g = n$, alors :

$$c[\mathrm{SU(n)}_k] = \frac{k(n^2-1)}{k+n} \tag{3.91}$$

⟨28⟩. Pour la théorie $\mathrm{U(1)}_1$ - qui possède un nombre de Coxeter $g = 0$ - le bon courant est $J_L^2/2\sqrt{\mathrm{N}}$, de telle sorte que la matrice $M = \mathrm{Id}_{2\mathrm{N}}/2\sqrt{\mathrm{N}}$ qui définit le courant $J_L^2/2\sqrt{\mathrm{N}} = L^\dagger_{m\alpha} M_{m\alpha,n\beta} L_{n\beta}$ ait la carré de sa trace qui vaut $1/2$: $\mathrm{tr}\, M = 1/2$. Quant à la théorie $\mathrm{SU(2N)}_1$, il faudrait la définir dans les générateurs de $\mathrm{SU(2N)}$, mais déjà on remarque que $g + k = 2\mathrm{N} + 1$ apparaît au dénominateur des trois derniers membres.

⟨29⟩. Si on compte tous les courants que l'on a définit précédemment, on en trouve $5\mathrm{N}^2$, mais il faut en réalité faire attention à la **redondance** qu'induisent les générateurs en $i = z$ (par exemple : $J_{1L}(z) - J_{2L}(z) = 2j_L^z(z)$), si bien qu'on en compte bien $4\mathrm{N}^2$:

$$2 + 2(\mathrm{N}^2 - 1) + (3 - \mathbf{1}) + (3 - \mathbf{1})(\mathrm{N}^2 - 1) = 4\mathrm{N}^2$$

des termes non-chiraux (selon le schéma $L^\dagger L R^\dagger R$ issu de la limite continue par (3.13)) :

$$O_1(z,\bar{z}) = :J_L^a(z)J_R^a(\bar{z}): \tag{3.94}$$
$$O_2(z,\bar{z}) = :\mathcal{J}_L^{a,x}(z)\mathcal{J}_R^{a,x}(\bar{z}): \tag{3.95}$$
$$O_3(z,\bar{z}) = :\mathcal{J}_L^{a,z}(z)\mathcal{J}_R^{a,z}(\bar{z}): \tag{3.96}$$
$$O_4(z,\bar{z}) = :\mathcal{J}_L^{a,y}(z)\mathcal{J}_R^{a,y}(\bar{z}): \tag{3.97}$$
$$O_5(z,\bar{z}) = :j_L^x(z)j_R^x(\bar{z}): \tag{3.98}$$
$$O_6(z,\bar{z}) = :j_L^z(z)j_R^z(\bar{z}): \tag{3.99}$$
$$O_7(z,\bar{z}) = :j_L^y(z)j_R^y(\bar{z}): \tag{3.100}$$
$$O_8(z,\bar{z}) = :J_L(z)J_R(\bar{z}): \tag{3.101}$$

Il se trouve que l'ensemble d'opérateurs $\{O_i\}_{i\in[\![1,8]\!]}$ forme une algèbre fermée au sens des OPE : ces dernières, qui comme nous le verrons interviennent dans l'expression des équations du groupe de renormalisation, seront données. Manque encore à définir des opérateurs pour les termes d'umklapp qui vont décomposer $\mathcal{V}_{4k_F}$. Étant donnée l'expression des termes à $4k_F$, en $R^\dagger R^\dagger LL$ et $L^\dagger L^\dagger RR$, on définit les courants, *antisymétriques* : $A^{\alpha\beta\pm}_{mnL}(z)$ et $A^{\alpha\beta\pm}_{mnR}(\bar{z})$, et *symétriques* :

$S_L^{\alpha\beta\pm}$ et $S_R^{\alpha\beta\pm}$, qui sont des représentations irréductibles de SU(N) ⟨30⟩ :

$$A_{mnL}^{\alpha\beta+}(z) = -\frac{i}{2}\left(L_{m\alpha}^\dagger(z)L_{n\beta}^\dagger(z) - L_{m\beta}^\dagger(z)L_{n\alpha}^\dagger(z)\right) \tag{3.106}$$

$$A_{mnR}^{\alpha\beta+}(\bar{z}) = -\frac{i}{2}\left(R_{m\alpha}^\dagger(\bar{z})R_{n\beta}^\dagger(\bar{z}) - R_{m\beta}^\dagger(\bar{z})R_{n\alpha}^\dagger(\bar{z})\right) \tag{3.107}$$

$$S_L^{\alpha\beta+}(z) = \frac{1}{2}\sum_m \sigma_{mm}^z L_{m\alpha}^\dagger(z)L_{\overline{m}\beta}^\dagger(z) \tag{3.108}$$

$$S_R^{\alpha\beta+}(\bar{z}) = \frac{1}{2}\sum_m \sigma_{mm}^z R_{m\alpha}^\dagger(\bar{z})R_{\overline{m}\beta}^\dagger(\bar{z}) \tag{3.109}$$

Et l'on définit les champs conjugués en passant du "+" au "−", pour $P = R, L$, par $A_{mnP}^{\alpha\beta-} = \left(A_{mnP}^{\alpha\beta+}\right)^\dagger$ et $S_P^{\alpha\beta-} = \left(S_P^{\alpha\beta+}\right)^\dagger$. Nous définissons avec quatre opérateurs d'interaction, hermitiens et singulets de SU(N), et qui correspondent aux opérateurs d'umklapp de la théorie :

$$O_9\ (z,\bar{z}) = S_L^{\alpha\beta+}(z)S_R^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + S_L^{\alpha\beta-}(z)S_R^{\alpha\beta+}(\bar{z}) \tag{3.110}$$

$$O_{10}(z,\bar{z}) = \frac{1}{4}\sum_{mn}(-1)^{m+n}\left(A_{mmL}^{\alpha\beta+}(z)A_{nnR}^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + A_{mmL}^{\alpha\beta-}(z)A_{nnR}^{\alpha\beta+}(\bar{z})\right) \tag{3.111}$$

$$O_{11}(z,\bar{z}) = A_{12L}^{\alpha\beta+}(z)A_{12R}^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + A_{12L}^{\alpha\beta-}(z)A_{12R}^{\alpha\beta+}(\bar{z}) \tag{3.112}$$

$$O_{12}(z,\bar{z}) = \frac{1}{4}\sum_{mn}\left(A_{mmL}^{\alpha\beta+}(z)A_{nnR}^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + A_{mmL}^{\alpha\beta-}(z)A_{nnR}^{\alpha\beta+}(\bar{z})\right) \tag{3.113}$$

Avec ces nouveaux opérateurs, l'ensemble $\{O_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ forme encore une algèbre fermée au sens des OPE, et permet par surcroit d'exprimer de façon unique et complète le hamiltonien

⟨30⟩. Pour donner plus de détail : puisqu'un opérateur de création (ou d'annihilation), gauche ou droit, est une représentation $(\square,\square)$ de $SU(2)\times SU(N)$, avec deux tels opérateurs - soit $L^\dagger L^\dagger$, LL, $R^\dagger R^\dagger$ et RR - on forme, en tenant compte de la statistique fermionique, les représentations $(\bullet,\square\!\square)$ et $\left(\square\!\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$, respectivement symétrique et antisymétrique pour les degrés nucléaires, ce qui justifie de l'appellation S et A pour les champs correspondant. Dans les degrés orbitaux, les champs S et A correspondent respectivement à l'état singulet $\square$ et aux trois états triplets $m_z = -, 0, +$:

$$S_L^{\alpha\beta+} = \widetilde{J}_L^{\alpha\beta+}[\square] = \frac{1}{2}(L_{1\alpha}^\dagger L_{2\beta}^\dagger + L_{1\beta}^\dagger L_{2\alpha}^\dagger) \tag{3.102}$$

$$A_{11L}^{\alpha\beta+} = \widetilde{J}_L^{\alpha\beta+}[+] = -\frac{i}{2}(L_{1\alpha}^\dagger L_{1\beta}^\dagger - L_{1\beta}^\dagger L_{1\alpha}^\dagger) \tag{3.103}$$

$$A_{12L}^{\alpha\beta+} = \widetilde{J}_L^{\alpha\beta+}[0] = -\frac{i}{2}(L_{1\alpha}^\dagger L_{2\beta}^\dagger - L_{1\beta}^\dagger L_{2\alpha}^\dagger) \tag{3.104}$$

$$A_{22L}^{\alpha\beta+} = \widetilde{J}_L^{\alpha\beta+}[-] = -\frac{i}{2}(L_{2\alpha}^\dagger L_{2\beta}^\dagger - L_{2\beta}^\dagger L_{2\alpha}^\dagger) \tag{3.105}$$

Dans la suite nous verrons que les opérateurs d'interaction bâtis avec S et A couplent les degrés nucléaires respectivement aux degrés de charge et au degrés orbitaux.

d'interaction $\mathcal{H}_{\text{int.}}$ comme (voir l'ANNEXE B pour passer des opérateurs chiraux aux perturbations) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = \sum_{i=1}^{12} g_i \, O_i \tag{3.114}$$

Où les 12 facteurs g_i sont nommés les *couplages* et décomposent - par définition - la théorie dans les opérateurs d'interaction ⟨31⟩. Dans la section suivante, nous montrerons que - l'algèbre des O_i étant stable - les équations du groupe de renormalisation conservent la forme (3.114) au hamiltonien d'interaction avec des couplages qui néanmoins évoluent. Autrement dit, nous insistons sur ce fait que la décomposition dans les O_i, qui tient compte à la fois du remplissage, de l'anisotropie orbitale et des symétries, est une bonne décomposition pour l'étude des propriétés de basse énergie des modèles de Hubbard SU(N) à deux orbitales. Ainsi, il va sans dire que le nombre d'opérateurs d'interaction pertinents, et donc le nombre de couplages, est très fortement déterminé selon le modèle - g-e, p-band ou double-puits - auquel nous aurons affaire.

Le cas du modèle g-e

Dans le cas du modèle g-e, la présence de la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$ selon la composante orbitale T^z donne aux couplages g_2 et g_4, g_5 et g_7, et, g_{10} et g_{12}, des valeurs identiques. Si bien que le nombre d'opérateurs pertinents passe de 12 à 9 :

$$\mathcal{H}_{g\text{-}e} = \sum_{i=1}^{12} g_i \, O_i = \sum_{i=1}^{9} g_i^z \, O_i^z \tag{3.115}$$

Avec les définitions suivantes, pour les termes réguliers :

$$O_1^z(z,\bar{z}) = O_1(z,\bar{z}) = :J_L^a(z)J_R^a(\bar{z}): \tag{3.116}$$

$$O_2^z(z,\bar{z}) = O_2(z,\bar{z}) + O_4(z,\bar{z}) = :\mathcal{J}_L^{a,x}(z)\mathcal{J}_R^{a,x}(\bar{z}) + \mathcal{J}_L^{a,y}(z)\mathcal{J}_R^{a,y}(\bar{z}): \tag{3.117}$$

$$O_3^z(z,\bar{z}) = O_3(z,\bar{z}) = :\mathcal{J}_L^{a,z}(z)\mathcal{J}_R^{a,z}(\bar{z}): \tag{3.118}$$

$$O_4^z(z,\bar{z}) = O_5(z,\bar{z}) + O_7(z,\bar{z}) = :j_L^x(z)j_R^x(\bar{z}) + j_L^y(z)j_R^y(\bar{z}): \tag{3.119}$$

$$O_5^z(z,\bar{z}) = O_6(z,\bar{z}) = :j_L^z(z)j_R^z(\bar{z}): \tag{3.120}$$

$$O_6^z(z,\bar{z}) = O_8(z,\bar{z}) = :J_L(z)J_R(\bar{z}): \tag{3.121}$$

⟨31⟩. Pour une décomposition des termes à quatre fermions dans les opérateurs d'interaction, voir ANNEXE B.

Et pour les termes d'umklapp :

$$O_7^z(z,\bar{z}) = O_9(z,\bar{z}) = S_L^{\alpha\beta+}(z)S_R^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + S_L^{\alpha\beta-}(z)S_R^{\alpha\beta+}(\bar{z}) \quad (3.122)$$

$$O_8^z(z,\bar{z}) = O_{10}(z,\bar{z}) + O_{12}(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\sum_m \left(A_{mmL}^{\alpha\beta+}(z)A_{mmR}^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + A_{mmL}^{\alpha\beta-}(z)A_{mmR}^{\alpha\beta+}(\bar{z})\right) \quad (3.123)$$

$$O_9^z(z,\bar{z}) = O_{11}(z,\bar{z}) = A_{12L}^{\alpha\beta+}(z)A_{12R}^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + A_{12L}^{\alpha\beta-}(z)A_{12R}^{\alpha\beta+}(\bar{z}) \quad (3.124)$$

L'ensemble des nouveaux opérateurs $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,9]\!]}$ satisfait également une algèbre fermée. Et nous donnons les expressions ⟨32⟩ des g_i^z - on parle de *conditions initiales* ⟨33⟩ - en fonction d'un terme d'umklapp $\delta_{\text{umk.}}$, pour le modèle g-e :

$$g_1^z = -\left(U + V_{\text{ex}}\right) \quad (3.125)$$

$$g_2^z = -2V \quad (3.126)$$

$$g_3^z = 2\left(V_{\text{ex}} - U\right) \quad (3.127)$$

$$g_4^z = 2\left(V_{\text{ex}} - \frac{V}{\mathrm{N}}\right) \quad (3.128)$$

$$g_5^z = 2\left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}U + \frac{1}{\mathrm{N}}V_{\text{ex}} - V\right) \quad (3.129)$$

$$g_6^z = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}U - \frac{1}{\mathrm{N}}V_{\text{ex}} + V\right) \quad (3.130)$$

$$g_7^z = \delta_{\text{umk.}}\left(V - V_{\text{ex}}\right) \quad (3.131)$$

$$g_8^z = \delta_{\text{umk.}}U \quad (3.132)$$

$$g_9^z = \delta_{\text{umk.}}\left(V + V_{\text{ex}}\right) \quad (3.133)$$

⟨32⟩. En toute rigueur, ce sont les $\{g_i/a_0\}_i$ et $\{g_i^z/a_0\}_i$ que nous donnons, si bien que dans toutes les conditions initiales données, il manque un "a_0" en facteur des paramètres d'interaction : on a $g_i^\bullet \to a_0 g_i^\bullet$.
⟨33⟩. Cette appellation provient de l'étude par le groupe de renormalisation, puisque ces valeurs sont les conditions initiales des équations de la fonction β du groupe de renormalisation.

Et, de façon équivalente, pour le modèle de Hund :

$$g_1^z = -\left(U + J + \frac{J_z}{2}\right) \tag{3.134}$$

$$g_2^z = -2\left(U - \frac{J_z}{2}\right) \tag{3.135}$$

$$g_3^z = -2\left(U - J + \frac{J_z}{2}\right) \tag{3.136}$$

$$g_4^z = -2\left(\frac{1}{\mathrm{N}}U - J - \frac{J_z}{2\mathrm{N}}\right) \tag{3.137}$$

$$g_5^z = -2\left(\frac{1}{\mathrm{N}}U - \frac{1}{\mathrm{N}}J - \frac{2\mathrm{N}-1}{2\mathrm{N}}J_z\right) \tag{3.138}$$

$$g_6^z = \frac{1}{2}\left(\frac{2\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}U - \frac{J}{\mathrm{N}} - \frac{J_z}{2\mathrm{N}}\right) \tag{3.139}$$

$$g_7^z = \delta_{\text{umk.}}\left(U - J - \frac{J_z}{2}\right) \tag{3.140}$$

$$g_8^z = \delta_{\text{umk.}}\left(U + \frac{J_z}{2}\right) \tag{3.141}$$

$$g_9^z = \delta_{\text{umk.}}\left(U + J - \frac{J_z}{2}\right) \tag{3.142}$$

Où le terme d'umklapp satisfait $\delta_{\text{umk.}} = 0$ lorsque le remplissage est différent du demi-remplissage ⟨34⟩, et vaut $\delta_{\text{umk.}} = 1$ lorsque c'est la cas ⟨35⟩. Ainsi, dans le cas à N atomes par site*, $\delta_{\text{umk.}} = 1$ toujours, et dans le cas à 2 atome par site*, $\delta_{\text{umk.}} = \delta_{2,\mathrm{N}}$ puisque seul le cas $\mathrm{N} = 2$ correspond au demi-remplissage dans ce cas. Sans les termes d'umklapp, il ne reste que l'ensemble $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,6]\!]}$ d'opérateurs d'interaction qui satisfont, encore, une algèbre fermée. Nous donnons encore trois opérateurs O_i^z, avec $i = 10, 11$ et 12, pour compléter la base des $\{O_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ ⟨36⟩ :

$$O_{10}^z(z,\bar{z}) = O_2\ (z,\bar{z}) - O_4\ (z,\bar{z}) = :\mathcal{J}_L^{a,x}(z)\mathcal{J}_R^{a,x}(\bar{z}) - \mathcal{J}_L^{a,y}(z)\mathcal{J}_R^{a,y}(\bar{z}): \tag{3.155}$$

$$O_{11}^z(z,\bar{z}) = O_5\ (z,\bar{z}) - O_7\ (z,\bar{z}) = :j_L^x(z)j_R^x(\bar{z}) - j_L^y(z)j_R^y(\bar{z}): \tag{3.156}$$

$$O_{12}^z(z,\bar{z}) = O_{12}(z,\bar{z}) - O_{10}(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\sum_m \left(A_{mmL}^{\alpha\beta+}(z)A_{\overline{m}\overline{m}R}^{\alpha\beta-}(\bar{z}) + A_{mmL}^{\alpha\beta-}(z)A_{\overline{m}\overline{m}R}^{\alpha\beta+}(\bar{z})\right) \tag{3.157}$$

Ces opérateurs rendent compte de processus qui brise la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ (pour la compo-

⟨34⟩. Dans les cas des modèles d'échelle et de double-puits, il s'agit du quart de remplissage, soit deux fois moins. À chaque "$\star$", il faut adapter pour ces modèles, et diviser les nombres avancés par deux.
⟨35⟩. Les autre cas de remplissage menant à une oscillation de ces termes.
⟨36⟩. À ce changement de base pour les opérateurs d'interaction il correspondent un changement de base pour les

sante T_z du pseudo-spin), ainsi pour les modèles g-e et Hund - puisqu'ils satisfont cette symétrie - les conditions initiales correpondantes sont toutes les trois nulles : $g^z_{10} = g^z_{11} = g^z_{12} = 0$.

Le cas du modèle p-band

Pour le modèle p-band, hors la ligne harmonique, la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ n'est pas satisfaite, si bien qu'il faut recourir en toute généralité aux 12 opérateurs d'interaction O_i. Dans ces opérateurs d'interaction, en définissant un terme d'umklapp $\delta_{\text{Umk.}}$ comme précédemment, les condi-

---

couplages :

$$
\begin{aligned}
g_1 &= g^z_1 && (3.143)\\
g_2 &= g^z_2 + g^z_{10} && (3.144)\\
g_3 &= g^z_3 && (3.145)\\
g_4 &= g^z_2 - g^z_{10} && (3.146)\\
g_5 &= g^z_4 + g^z_{11} && (3.147)\\
g_6 &= g^z_5 && (3.148)\\
g_7 &= g^z_4 - g^z_{11} && (3.149)\\
g_8 &= g^z_6 && (3.150)\\
g_9 &= g^z_7 && (3.151)\\
g_{10} &= g^z_8 - g^z_{12} && (3.152)\\
g_{11} &= g^z_9 && (3.153)\\
g_{12} &= g^z_8 + g^z_{12} && (3.154)
\end{aligned}
$$

tions initiales du modèle p-band s'écrivent :

$$g_1 = -(U_1 + U_2) \tag{3.158}$$

$$g_2 = -4U_2 \tag{3.159}$$

$$g_3 = 2(U_2 - U_1) \tag{3.160}$$

$$g_4 = 0 \tag{3.161}$$

$$g_5 = 4\frac{N-1}{N}U_2 \tag{3.162}$$

$$g_6 = 2\frac{N-1}{N}(U_1 - U_2) \tag{3.163}$$

$$g_7 = 0 \tag{3.164}$$

$$g_8 = \frac{1}{2}\frac{N-1}{N}(U_1 + U_2) \tag{3.165}$$

$$g_9 = 0 \tag{3.166}$$

$$g_{10} = \delta_{\text{umk.}}(U_1 - U_2) \tag{3.167}$$

$$g_{11} = 2\delta_{\text{umk.}}U_2 \tag{3.168}$$

$$g_{12} = \delta_{\text{umk.}}(U_1 + U_2) \tag{3.169}$$

Ces conditions initiales se simplifient sur les différentes conditions initiales et les termes "vectoriels" s'unifient deux à deux : sur la ligne $U_2 = 0$ nous avons $g_2^{U_2=0} = g_4^{U_2=0}$, $g_5^{U_2=0} = g_7^{U_2=0}$ et $g_{10}^{U_2=0} = g_{12}^{U_2=0}$, si bien que dans ce cas, la base $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ est bien adaptée ; sur la ligne harmonique - d'équation $U_1 = 3U_2$ - nous avons $g_2^{\text{har.}} = g_3^{\text{har.}}$, $g_5^{\text{har.}} = g_6^{\text{har.}}$ et $g_{10}^{\text{har.}} = g_{11}^{\text{har.}}$, puis sur la ligne $U_1 = U_2$, nous avons $g_3^{U_1=U_2} = g_4^{U_1=U_2}$, $g_6^{U_1=U_2} = g_7^{U_1=U_2}$ et $g_{11}^{U_1=U_2} = g_{12}^{U_1=U_2}$ ⟨37⟩. Selon ces symétries et selon la présence ou non des termes d'umklapp, le nombre d'opérateurs d'interaction pertinents change drastiquement, surtout quand, comme nous le verrons, la séparation spin-charge - assurée par l'absence des termes d'umklapp - vient encore "détacher" l'opérateur : $J_L J_R$: de charge.

⟨37⟩. En associant $O_{2,5,10}$ à x, $O_{3,6,11}$ à z et $O_{4,7,12}$ à y, on pourrait, de la même manière qu'on a défini la base $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,12]\!]}$, définir les bases $\{O_i^x\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ et $\{O_i^y\}_{i\in[\![1,12]\!]}$, lesquelles exprimeraient bien les conditions initiales selon les lignes de symétries.

Le cas du modèle de double-puits

Pour les modèles d'échelle et de double-puits, une information cruciale supplémentaire est la venue du terme d'anisotropie - due à $t_\perp$ - qui sépare les branches et qui induit dans la décomposition des termes du hamiltonien une oscillation qui tue certains termes : notons $\delta_{\text{ani.}} = \delta_{0,t_\perp}$ qui vaut 0 dans le cas anisotrope et 1 dans le cas isotrope ⟨38⟩. Alors, les conditions initiales du modèle d'échelle (avec une définition toujours identique pour $\delta_{\text{umk.}}$) sont données par ⟨39⟩ :

$$g_1 = -U + \frac{J_H}{2} \tag{3.170}$$

$$g_2 = -U + V - \frac{N+1}{2N} J_H - \delta_{\text{ani.}} \left(U + V + \frac{N-1}{2N} J_H \right) \tag{3.171}$$

$$g_3 = -2V + \frac{J_H}{N} \tag{3.172}$$

$$g_4 = U - V + \frac{N+1}{2N} J_H - \delta_{\text{ani.}} \left(U + V + \frac{N-1}{2N} J_H \right) \tag{3.173}$$

$$g_5 = \frac{N-1}{N} U - \frac{N-1}{N} V + \frac{N^2-1}{2N^2} J_H + \delta_{\text{ani.}} \left(\frac{N-1}{N} U - \frac{N+1}{N} V - \frac{N^2-1}{2N^2} J_H \right) \tag{3.174}$$

$$g_6 = -\left(\frac{N^2-1}{N^2} J_H + \frac{2V}{N} \right) \tag{3.175}$$

$$g_7 = -\frac{N-1}{N} U + \frac{N-1}{N} V - \frac{N^2-1}{2N^2} J_H + \delta_{\text{ani.}} \left(\frac{N-1}{N} U - \frac{N+1}{N} V - \frac{N^2-1}{2N^2} J_H \right) \tag{3.176}$$

$$g_8 = \frac{N-1}{2N} U + \frac{V}{2} \tag{3.177}$$

$$g_9 = \delta_{\text{umk.}} \left(V + \frac{N-1}{2N} J_H \right) \tag{3.178}$$

$$g_{10} = -\frac{\delta_{\text{umk.}}}{2} \left(U - V + \frac{N+1}{2N} J_H \right) + \frac{\delta_{\text{umk.}} \delta_{\text{ani.}}}{2} \left(U + V - \frac{N+1}{2N} J_H \right) \tag{3.179}$$

$$g_{11} = \delta_{\text{umk.}} U \tag{3.180}$$

$$g_{12} = \frac{\delta_{\text{umk.}}}{2} \left(U - V + \frac{N+1}{2N} J_H \right) + \frac{\delta_{\text{umk.}} \delta_{\text{ani.}}}{2} \left(U + V - \frac{N+1}{2N} J_H \right) \tag{3.181}$$

Notons que le cas anisotrope - autrement dit $\delta_{\text{ani.}} = 0$ - apparie par paires les termes en **bleu** avec : $g_2^{\text{ani.}} = -g_4^{\text{ani.}}$, $g_5^{\text{ani.}} = -g_7^{\text{ani.}}$ et $g_{10}^{\text{ani.}} = -g_{12}^{\text{ani.}}$. C'est la manifestation - étrangement écrite car l'écriture se fait dans les degrés orbitaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}$ - d'une symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$ qui demeure pour l'interaction malgré l'anisotropie. D'ailleurs, c'est ce changement de base qui donne cet

⟨38⟩. Ainsi, les termes qui lui seront proportionnels seront lus comme *ceux qui se retranchent au cas isotrope*.
⟨39⟩. Avec les opérateurs d'interaction définis par (3.94, . . . , 3.110) et (3.111, . . . , 3.113), mais - attention - dans les opérateurs de degrés orbitaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}$, obtenus par la limite continue des opérateurs sur site "d".

aspect "foisonnant" aux conditions initiales des modèles d'échelle et du double-puits. Dans le cas isotrope - $\delta_{\text{ani.}} = 0$ - nous retrouvons la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$ ⟨40⟩ de la manière suivante : $g_3^{\text{iso.}} = g_4^{\text{iso.}}$, $g_6^{\text{iso.}} = g_7^{\text{iso.}}$ et $g_{11}^{\text{iso.}} = g_{12}^{\text{iso.}}$. Donnons maintenant les conditions initiales du modèle de double-puits :

$$g_1 = -(U+V) \tag{3.182}$$

$$g_2 = -(U-V) - \delta_{\text{ani.}}(U-V) \tag{3.183}$$

$$g_3 = -4V \tag{3.184}$$

$$g_4 = (U-V) - \delta_{\text{ani.}}(U-V) \tag{3.185}$$

$$g_5 = \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}(U-V) + \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\delta_{\text{ani.}}(U-V) \tag{3.186}$$

$$g_6 = \frac{4(\mathrm{N}-1)}{\mathrm{N}}V \tag{3.187}$$

$$g_7 = -\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}(U-V) + \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\delta_{\text{ani.}}(U-V) \tag{3.188}$$

$$g_8 = \frac{\mathrm{N}-1}{2\mathrm{N}}(U+V) \tag{3.189}$$

$$g_9 = 0 \tag{3.190}$$

$$g_{10} = -\frac{\delta_{\text{umk.}}}{2}(U-V) + \frac{\delta_{\text{umk.}}\delta_{\text{ani.}}}{2}(U+3V) \tag{3.191}$$

$$g_{11} = \delta_{\text{umk.}}(U-V) \tag{3.192}$$

$$g_{12} = \frac{\delta_{\text{umk.}}}{2}(U-V) + \frac{\delta_{\text{umk.}}\delta_{\text{ani.}}}{2}(U+3V) \tag{3.193}$$

Nous avons alors la même remarque sur les effets de l'anisotropie, avec les termes en **bleu** : $g_2^{\text{ani.}} = -g_4^{\text{ani.}}$, $g_5^{\text{ani.}} = -g_7^{\text{ani.}}$ et $g_{10}^{\text{ani.}} = -g_{12}^{\text{ani.}}$, traduction de la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ lorsque $\delta_{\text{ani.}} = 0$. Et de même que pour le modèle d'échelle dans le cas isotrope - avec tout de même l'ajustement fin $V = 0$ ⟨41⟩ - les termes totaux (avec $\delta_{\text{ani.}} = 1$), termes du cas isotrope, satisfont $g_3^{\text{iso.}} = g_4^{\text{iso.}}$, $g_6^{\text{iso.}} = g_7^{\text{iso.}}$ et $g_{11}^{\text{iso.}} = g_{12}^{\text{iso.}}$. Il est remarquable que - pour l'interaction - la suppression des termes due à l'anisotropie rend plus volontiers une symétrie orbitale que dans le cas isotrope.

⟨40⟩. Valable pour l'interaction seule.
⟨41⟩. On se souvient du chapitre précédent que, par rapport au modèle d'échelle, le modèle de double-puits contient un terme proportionnel à V du type "processus p-band" et qui brise $\mathrm{U}(1)_o$.

Le cas particulier N = 2

Dans le cas N = 2, il est utile de définir les 15 courants gauches $\mathcal{J}_L^A$ et droits $\mathcal{J}_R^A$ de $SU(4) \supset SU(2)_o \times SU(2)_n$, avec $A = 1, \ldots, 15$. Pour ce faire, on introduit d'abord les matrices $\mathcal{T}^A$ de la représentation fondamentale de SU(4) à l'aide des matrices de Pauli σ^i (pour les degrés orbitaux) et τ^i (pour les degrés nucléaires), en faisant varier les deux indices p et q dans $[\![1, 3]\!]$:

$$\mathcal{T}^p = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sigma^p}{2} \otimes \mathrm{Id} \tag{3.194}$$

$$\mathcal{T}^{p+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \mathrm{Id} \otimes \frac{\tau^p}{2} \tag{3.195}$$

$$\mathcal{T}^{p+3+3q} = \frac{\sigma^p \otimes \tau^q}{2\sqrt{2}} \tag{3.196}$$

Les composantes $\mathcal{T}^A_{mn,\alpha\beta}$ de ces matrices définissent alors les courants SU(4) gauches et droits, avec :

$$\mathcal{J}_L^A(z) = :L^\dagger_{m\alpha}(z)\mathcal{T}^A_{mn,\alpha\beta}L_{n\beta}(z): \tag{3.197}$$

$$\mathcal{J}_R^A(\bar{z}) = :R^\dagger_{m\alpha}(\bar{z})\mathcal{T}^A_{mn,\alpha\beta}R_{n\beta}(\bar{z}): \tag{3.198}$$

À noter, au passage, que les définitions (3.194,...,3.196) induisent des relations semblables entre générateurs, ici pour les champs gauches :

$$\mathcal{J}_L^p(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} j_L^p(z) \tag{3.199}$$

$$\mathcal{J}_L^{p+3}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} J_L^p(z) \tag{3.200}$$

$$\mathcal{J}_L^{p+3+3q}(z) = \mathcal{J}_L^{q,p}(z) \tag{3.201}$$

Pareil en champs droits ⟨42⟩. Ces champs interviendront lors de la bosonisation (puis de la refermionisation) de la théorie à N = 2. Donnons enfin l'expression du hamiltonien libre dans ces courants, qui prend une forme de Sugawara très compacte avec la symétrie $U(1)_1 \times SU(4)_1$:

$$T(z) = \frac{\pi :J_L^2: (z)}{4} + \frac{2\pi :\mathcal{J}_L^A \mathcal{J}_L^A: (z)}{5} \tag{3.203}$$

⟨42⟩. Dans sa thèse [4] H. Nonne donne un indiçage différent à ces courants SU(4). Nous présentons ici le dictionnaire pour passer de l'**un** (indiçage de la thèse) à l'**autre** (celui d'H. Nonne) :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	1	2	3	7	10	13	8	11	14	9	12	15

(3.202)

En réalité, une généralisation peut être écrite pour le cas N quelconque en introduisant les générateurs gauches $\{\mathcal{J}_L^A\}_{A\in[\![1,4N^2-1]\!]}$ ⟨43⟩, avec :

$$T(z) = \frac{\pi : J_L^2 : (z)}{2N} + \frac{2\pi : \mathcal{J}_L^A \mathcal{J}_L^A : (z)}{2N+1} \tag{3.204}$$

Idem pour les champs droits.

3.3 Bosonisation abélienne

3.3.1 Le cas N quelconque

Dans cette section, nous rendons compte de la possibilité offerte par les systèmes de fermions à une dimension d'être descriptibles en termes de systèmes de bosons également à une dimension. Autrement dit, comment établir une équivalence entre, d'un côté, une théorie des champs de bosons réels gauches $\Phi_L(x,t)$ et droits $\Phi_R(x,t)$ ⟨44⟩ définie sur $\mathbb{R}$, et - pour commencer - sans autre degré de liberté :

$$\mathcal{H}_{\text{bos.}}^{(0)} = v_F \int_{\mathbb{R}} \Big[\big(\partial_x \Phi_R\big)^2 + \big(\partial_x \Phi_L\big)^2 \Big] \mathrm{d}x \tag{3.205}$$

Et, de l'autre, une théorie des champs de fermions avec un degrés de liberté également, où les fermions gauches $L^\dagger(x,t)$ et droits $R^\dagger(x,t)$ définissent une théorie de Dirac (du type de celle de la densité (3.18)) :

$$\mathcal{H}_{\text{fer.}}^{(0)} = -iv_F \int_{\mathbb{R}} \Big[R^\dagger \partial_x R - L^\dagger \partial_x L \Big] \mathrm{d}x \tag{3.206}$$

Le moyen d'établir une telle équivalence est d'abord suggéré *via* les excitations particule-trou, dont le caractère bosonique est évident. Seulement, pouvoir considérer des telles excitations comme des "vrais" bosons - c'est-à-dire des quasi-particules - rend nécessaire que ces dernières aient un certain maintien, une certaine cohérence. Or dans les systèmes fermioniques traditionnels à trois dimensions, les excitations type particule-trou n'ont pas cette cohérence requise, et d'ailleurs, la quasi-particule est connue comme étant un fermion (c'est le paradigme des liquides de Fermi). À deux dimensions aussi, les excitations particule-trou de basse énergie peuvent avoir un large choix de vecteur d'onde dû - si l'on prend l'exemple d'une relation de dispersion quadratique - à la forme de la surface de Fermi en cercle : les excitations particule-trou y sont dispersives. Néanmoins, à une dimension, la surface de Fermi étant de dimension nulle - il s'agit de deux points - les premières excitations sont très contraintes et se propagent

⟨43⟩. Pourvu que les matrices T^A qui les définissent satisfassent la relation $\mathrm{tr}\, T^A T^B = \delta^{AB}/2$.
⟨44⟩. C'est-à-dire satisfaisant $\partial_R \Phi_L = 0$ et $\partial_L \Phi_R = 0$.

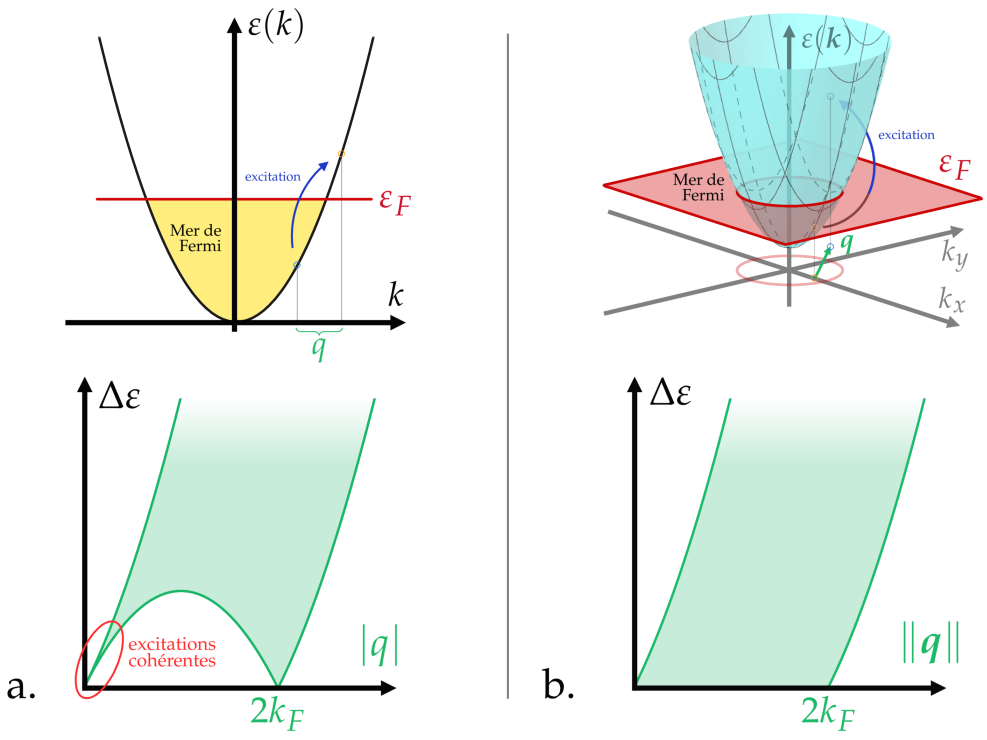


FIGURE 3.2 – Spectre $\Delta\varepsilon$ des excitations particule-trou possibles à une (en a.) et deux (en b.) dimensions pour une mer de Fermi avec une dispersion parabolique. À deux dimensions, en exploitant la forme de la surface de Fermi, un cercle, $\boldsymbol{q}$ a beaucoup de manières de correspondre à une énergie nulle, tandis qu'à une dimension la surface de Fermi - à deux points - ne permet que des petites excitations à $2k_F$ ou à 0, où elles se propagent à la même vitesse, de manière cohérente.

par conséquent de manière cohérente (voir FIGURE 3.2) : la quasi-particule bosonique a une existence. Aussi l'écriture de (3.206) vers (3.205) - appelée *bosonisation* - ne prend son sens qu'à une dimension. Seulement, décrire - par une équation - le lien qui existe entre fermions et bosons n'est pas évident en soit tant la nature des champs Φ_L, Φ_R et $L^\dagger, R^\dagger$ diffère, en particulier en termes de statistique, mais encore, si l'on considère le point de vue de la théorie conforme : étant donnée l'expression de l'action qu'induit (3.205), les champs bosoniques Φ_R et Φ_L doivent être des champs primaires de dimension conforme $(0,0)$ pour assurer l'invariance conforme de la théorie totale, ce qui rend compte d'un objet vraiment différent. Comparons par exemple les fonctions de corrélation (dans le langage conforme, et où L_{IR} est un seuil infrarouge) :

$$\langle \Phi_L(z)\Phi_L(\omega)\rangle = -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{z-\omega}{L_{\text{IR}}}\right) \tag{3.207}$$

$$\langle \Phi_R(\overline{z})\Phi_R(\overline{\omega})\rangle = -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\overline{z}-\overline{\omega}}{L_{\text{IR}}}\right) \tag{3.208}$$

Ainsi, avant d'écrire ce lien qui existe, établissons déjà quelques propriétés de ces bosons,

et pour commencer, écrivons la toute première analogie qu'ils permettent d'établir avec les fermions : la théorie de ces derniers - à savoir (3.206) - possède la conservation de la charge, pour les champs gauches comme pour les droits, soit une symétrie $\mathrm{U}(1)_L \times \mathrm{U}(1)_R$ menant naturellement à une définition des courants suivant : $J_L(z) =: L^\dagger(z)L(z) :$ et $J_R(\overline{z}) =: R^\dagger(\overline{z})R(\overline{z}) :$. Courants dans lesquels on décompose la théorie libre, avec : $T^{\text{fer.}}(z) = \pi : J_L^2 : (z)$ et $\overline{T}^{\text{fer.}}(\overline{z}) = \pi : J_R^2 : (\overline{z})$. Et bien dans la théorie des bosons, la symétrie $\mathrm{U}(1)_L \times \mathrm{U}(1)_R$ qui consiste en la transformation suivante, pour $\alpha_{L,R} \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_L \overset{\mathrm{U}(1)_L}{\longrightarrow} \Phi_L + \alpha_L \tag{3.209}$$

$$\Phi_R \overset{\mathrm{U}(1)_R}{\longrightarrow} \Phi_R + \alpha_R \tag{3.210}$$

Permet d'écrire les deux courants J_L et J_R :

$$J_L(z) = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\partial\Phi_L(z) \tag{3.211}$$

$$J_R(\overline{z}) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}}\overline{\partial}\Phi_R(\overline{z}) \tag{3.212}$$

Ils permettent d'écrire la théorie libre dans les mêmes termes que celle des fermions : $T^{\text{bos.}}(z) = \pi : J_L^2 :(z)$ et $\overline{T}^{\text{bos.}}(\overline{z}) = \pi : J_R^2 :(\overline{z})$. De plus, si l'on observe les équations de transformation (3.209, 3.210), on en vient à imaginer qu'une relation du type $L^\dagger \simeq e^{i\beta\Phi_L}$ semble redonner une transformation du type $\mathrm{U}(1)_L$ pour le fermion :

$$L^\dagger \simeq e^{i\beta\Phi_L} \overset{\mathrm{U}(1)_L}{\longrightarrow} e^{i\beta\Phi_L + i\beta\alpha_L} \simeq e^{i\beta\alpha_L} L^\dagger \tag{3.213}$$

Et même pour une transformation avec $\alpha_L \in i\mathbb{R}$, on semble rendre compte de transformation de dilatation, ce qui n'était pas *a priori* évident en partant d'opérateurs sans dimension que sont les opérateurs de bosons. En réalité, ces opérateurs sont connus sous le nom d'*opérateur de vertex*, et une de leurs propriétés fondamentales est la relation suivante, puisqu'elle fixe leur fonction de corrélation et donc leur dimension d'échelle :

$$: e^{i\beta\Phi_L(z)} :: e^{i\beta'\Phi_L(\omega)} : = \left(\frac{z-\omega}{L_{\text{IR}}}\right)^{\frac{\beta\beta'}{4\pi}} : e^{i\beta\Phi_L(z) + i\beta'\Phi_L(\omega)} : \tag{3.214}$$

$$: e^{i\beta\Phi_R(\overline{z})} :: e^{i\beta'\Phi_R(\overline{\omega})} : = \left(\frac{\overline{z}-\overline{\omega}}{L_{\text{IR}}}\right)^{\frac{\beta\beta'}{4\pi}} : e^{i\beta\Phi_R(\overline{z}) + i\beta'\Phi_R(\overline{\omega})} : \tag{3.215}$$

Lorsque $\beta + \beta' = 0$ (condition connue sous le nom de *condition de neutralité*), l'OPE s'écrit :

$$: e^{i\beta\Phi_L(z)} :: e^{-i\beta\Phi_L(\omega)} : \sim \left(\frac{L_{\text{IR}}}{z-\omega}\right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} + i\beta\left(\frac{L_{\text{IR}}}{z-\omega}\right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}}(z-\omega)\partial\Phi_L(\omega) + \cdots \tag{3.216}$$

$$: e^{i\beta\Phi_R(\overline{z})} :: e^{-i\beta\Phi_R(\overline{\omega})} : \sim \left(\frac{L_{\text{IR}}}{\overline{z}-\overline{\omega}}\right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} + i\beta\left(\frac{L_{\text{IR}}}{\overline{z}-\overline{\omega}}\right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}}(\overline{z}-\overline{\omega})\overline{\partial}\Phi_R(\overline{\omega}) + \cdots \tag{3.217}$$

Ainsi lorsque $\beta = \sqrt{4\pi}$, les OPE entre opérateurs de vertex ressemblent énormément à celles (3.65) et (3.66) entre fermions : les opérateurs de vertex possèdent les dimension conformes $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$, et l'équivalence est ainsi presque écrite. Reste tout de même le problème de l'implémentation de l'anticommutation fermionique, qui se fait de façon *ad hoc*, par des *facteurs de Klein*, repérés par la lettre κ que nous définissons dans la généralisation à tous les degrés $m\alpha$ des résultats jusqu'ici établis. Le hamiltonien libre n'étant alors qu'une somme sur tous les degrés de ce que nous venons de considérer [45], nous définissons la bosonisation des fermions de Dirac par :

$$L_{m\alpha} = \frac{\kappa_{m\alpha}}{\sqrt{2\pi a_0}} e^{-i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{m\alpha L}} \tag{3.218}$$

$$R_{m\alpha} = \frac{\kappa_{m\alpha}}{\sqrt{2\pi a_0}} e^{i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{m\alpha R}} \tag{3.219}$$

Notons immédiatement une symétrie qui provient directement de ces relations, qui n'est pas physique, que l'on nomme *invariance de jauge*, et qui est indépendante sur chaque degré et dans chaque secteur chiral [46] :

$$\forall m\alpha : \begin{cases} \Phi_{m\alpha L} \longrightarrow \Phi_{m\alpha L} + \sqrt{\pi} \\ \Phi_{m\alpha R} \longrightarrow \Phi_{m\alpha R} + \sqrt{\pi} \end{cases} \tag{3.220}$$

Les champs bosoniques $\Phi_{m\alpha L}, \Phi_{m\alpha R}$ possèdent (en formalisme de Schrödinger) les relations de commutations suivantes :

$$\left[\Phi_{m\alpha R}(x), \Phi_{n\beta R}(y)\right] = \frac{i}{4}\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta}\,\text{sgn}(x-y) \tag{3.221}$$

$$\left[\Phi_{m\alpha L}(x), \Phi_{n\beta L}(y)\right] = -\frac{i}{4}\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta}\,\text{sgn}(x-y) \tag{3.222}$$

$$\left[\Phi_{m\alpha R}(x), \Phi_{n\beta L}(y)\right] = \frac{i}{4}\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.223}$$

[45]. Et comme les 2N termes du hamiltonien commutent entre eux, les résultats déjà évoqués seront valables séparément dans les 2N secteurs, qui ne communiquent pas.
[46]. Elle servira dans la suite à "égaliser" des configurations d'apparences distinctes, mais physiquement équivalentes.

Où "sng" est la fonction signe (celle qui satisfait $\mathrm{sgn}(0) = 0$). Et les facteurs de Klein - qui sont réels : $\kappa_{m\alpha}^{\dagger} = \kappa_{m\alpha}$ - assurent les relations d'anticommutation des fermions de Dirac en satisfaisant :

$$\left\{\kappa_{m\alpha}, \kappa_{n\beta}\right\} = 2\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.224}$$

Cela établi, discutons du choix qui a été le notre dans l'association faite dans (3.218) et (3.219) : à chaque degré $m\alpha$ (et pour chaque chiralité), nous avons associé un fermion à un boson, ce qui est finalement tout à fait brutal étant donné la symétrie de notre modèle. Ici, nous avons défini une bosonisation du type symétrie $[\mathrm{U}(1)]^{\times 2\mathrm{N}}$ (un boson par degré), qui n'existe *a priori* pas pour notre système. Et si les fermions se transforment comme une représentation fondamentale de $\mathrm{SU}(2\mathrm{N})$, ça n'est pas les cas des bosons ainsi définis et pour lesquels les transformations de $\mathrm{SU}(2\mathrm{N})$ sont bien compliquées à écrire. Ce type de bosonisation, plutôt qu'un qui respecterait les symétries du problème (notamment la symétrie $\mathrm{SU}(\mathrm{N})$), se nomme *bosonisation abélienne* [33, 38], par opposition à la *bosonisation non-abélienne* [133, 134, 135] qui les respecte. Si cette dernière bosonisation a des avantages, notamment celui de faire apparaître explicitement les symétries du modèle, la bosonisation abélienne n'en est pas dépourvue : elle permet notamment de définir simplement une transformation sur les bosons qui permet de décomposer le modèle dans les degrés abéliens (c'est-à-dire $\mathrm{U}(1)_c$) et dans les degrés non-abéliens (c'est-à-dire les autres) ⟨47⟩, comme nous allons le montrer ici en extrayant le hamiltonien relié au degrés de charge. Nous donnons ici cette transformation, mais définissons avant les *bosons totaux* et les *bosons duaux*, génériquement notés Φ et Θ (respectivement), pour tout les $m\alpha$:

$$\Phi_{m\alpha} = \Phi_{m\alpha L} + \Phi_{m\alpha R} \tag{3.225}$$
$$\Theta_{m\alpha} = \Phi_{m\alpha L} - \Phi_{m\alpha R} \tag{3.226}$$

Plutôt que les champs gauches et droits, ces bosons sont ceux qui apparaîtront dans les diverses expressions des quantités physiques. Avec leur aide, nous définissons dans chaque secteur orbital m les champs de charge Φ_{mc} et de spin Φ_{ms} (avec $s \in [\![1, \mathrm{N}-1]\!]$, ce qui définit deux vecteurs avec $\mathrm{N}-1$ composantes : $\mathbf{\Phi}_m \equiv \{\Phi_{ms}\}_s$) :

$$\Phi_{mc} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\sum_{\alpha}\Phi_{m\alpha} \tag{3.227}$$
$$\Phi_{ms} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\left(\Phi_{m1} + \cdots + \Phi_{ms} - s\Phi_{ms+1}\right) \tag{3.228}$$

Puis nous définissons les champs en rapport avec la structure orbitale, en commençant par

⟨47⟩. Attention au risque de confusion : dans ce paragraphe on qualifie d'*abélien* et de *non-abélien* deux choses bien distinctes, le *type de bosonisation* d'un côté, les *degrés* de l'autre.

les champs dépourvus de structure orbitale :

$$\Phi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{1c} + \Phi_{2c}) \tag{3.229}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2) \tag{3.230}$$

Et ceux qui en possède une :

$$\Phi_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{1c} - \Phi_{2c}) \tag{3.231}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\Phi}_1 - \boldsymbol{\Phi}_2) \tag{3.232}$$

Les mêmes définitions avec les champs duaux Θ mènent aux termes Θ_c, Θ_o, $\boldsymbol{\Theta}_+$ et $\boldsymbol{\Theta}_-$ (mais cela fonctionne encore pour les champs Φ_L et Φ_R). Notons que la transformation totale (3.229, 3.230, 3.231, 3.232) sur les 2N bosons est orthogonale. Cette décomposition permet de donner une expression simplifiée des courants de charge, définis à l'aide des courants de charge par degrés :

$$J_{m\alpha L} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x \Phi_{m\alpha L} \tag{3.233}$$

$$J_{m\alpha R} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x \Phi_{m\alpha R} \tag{3.234}$$

Les courants totaux de charge, gauches et droits, sont simplement la somme de ces termes :

$$J_L = \sum_{m\alpha} J_{m\alpha L} = \sqrt{\frac{2N}{\pi}}\partial_x \Phi_{cL} \tag{3.235}$$

$$J_R = \sum_{m\alpha} J_{m\alpha R} = \sqrt{\frac{2N}{\pi}}\partial_x \Phi_{cR} \tag{3.236}$$

Revenons maintenant à notre modèle, pour lequel nous essayons d'extraire la partie en charge, dont nous montrons le traitement dans le cas de la séparation spin-charge. Ainsi considérons la partie abélienne de la forme de Sugawara (3.204) du hamiltonien libre (pour commencer). À l'aide de la transformation définie entre les deux bases de bosons, il nous est donné

d'écrire le hamiltonien libre en charge dans les seuls champs bosoniques de charge ⟨48⟩ :

$$\mathcal{H}_c^{(0)} = \frac{v_F}{2}\Big[\,(\partial_x\Phi_c)^2 + (\partial_x\Theta_c)^2\,\Big] \tag{3.237}$$

Cette expression intervient notamment lorsque - pour l'interaction - la séparation spin-charge se réalise : alors si le terme d'interaction en charge est $g_c : J_L J_R :$ et si la physique est incommensurable, on peut intégrer le terme d'interaction en charge au hamiltonien libre précédent pour écrire ⟨49⟩ un modèle connu comme le *modèle de Tomonaga-Luttinger* [136, 137] :

$$\mathcal{H}_c = \frac{v_c}{2}\Big[\frac{1}{K_c}\,(\partial_x\Phi_c)^2 + K_c\,(\partial_x\Theta_c)^2\,\Big] \tag{3.238}$$

Où les paramètres v_c et K_c, nommés respectivement *vitesse de Luttinger* et *paramètre de Luttinger* [138] sont ainsi définis :

$$v_c = v_F\sqrt{1+4\mathrm{N}g_c/\pi v_F} \tag{3.239}$$

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{1+4\mathrm{N}g_c/\pi v_F}} \tag{3.240}$$

Ainsi le modèle (3.238) peut être simplement relié au cas libre ($K_c = 1$) en introduisant les champs bosoniques suivant :

$$\widetilde{\Phi}_c = \Phi_c/\sqrt{K_c} \tag{3.241}$$

$$\widetilde{\Theta}_c = \sqrt{K_c}\,\Theta_c \tag{3.242}$$

De telle sorte que le hamiltonien (3.238) appartient - comme le modèle libre - à la classe d'universalité des liquides de Luttinger [38, 33], c'est-à-dire qu'il possède des propriétés métalliques, mais néanmoins des fonctions de corrélations faisant intervenir l'interaction K_c, c'est-à-dire non-universelles.

Si maintenant le système présente de la commensurabilité - mais toujours la séparation spin-charge, sans quoi il serait vain de traiter la charge à part des autres degrés - le terme d'umklapp $\mathcal{V}_c$ avec la plus petite dimension d'échelle possible et qu'autorisent les symétries, notamment

⟨48⟩. Ici dans le cas de la présence d'une symétrie d'échange, c'est-à-dire avec l'existence d'une unique vitesse de Fermi.

⟨49⟩. Pour retrouver le résultat donné, notamment les paramètres de Luttinger, il faut considérer tous les termes de l'interaction susceptibles de fournir des termes du type $\partial_x\Phi_c$ et $\partial_x\Theta_x$. Il s'en trouve dans les termes chiraux, et dans les termes non-abéliens. Le résultat final amène seulement le terme $\frac{2\mathrm{N}g_c}{\pi}(\partial_x\Phi_c)^2$.

celle de translation ⟨50⟩, est de la forme suivante :

$$\mathcal{V}_c = -g_u \cos\left(\frac{2\pi}{k_F a_0}\sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{N}}}\Phi_c\right) \tag{3.246}$$

Où g_u est un paramètre d'interaction ⟨51⟩. Nous sommes menés à un hamiltonien de charge rectifié $\mathcal{H}_c^u$, qui tient compte des processus d'umklapp, et que nous écrivons dans les champs normalisés (3.241) et (3.242), et qui est équivalent à un modèle quantique de sine-Gordon :

$$\mathcal{H}_c^u = \frac{v_c}{2}\left[\left(\partial_x\widetilde{\Phi}_c\right)^2 + \left(\partial_x\widetilde{\Theta}_c\right)^2\right] - g_u \cos\left(\frac{2\pi}{k_F a_0}\sqrt{\frac{\pi K_c}{2\mathrm{N}}}\widetilde{\Phi}_c\right) \tag{3.247}$$

La pertinence physique du terme d'umklapp n'est pas gouvernée par g_u, mais par les interaction, c'est-à-dire g_c, donc K_c : ce modèle - exactement soluble [38] - rend compte d'un terme d'interaction pertinent si la dimension de ce dernier, à savoir celle de $\mathcal{V}_c$, est inférieure à 2 ⟨52⟩, le spectre en charge ouvre alors un gap Δ_c. Sinon, lorsque la dimension de $\mathcal{V}_c$ est supérieure à 2, alors l'interaction est non-pertinente, et la physique est semblable à celle des bosons libres, c'est-à-dire critique. La dimension d'échelle de l'opérateur d'interaction est donnée par :

$$\Delta\left[\mathcal{V}_u\right](K_c) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{k_F a_0}\sqrt{\frac{\pi K_c}{2\mathrm{N}}}\right)^2 \tag{3.248}$$

⟨50⟩. Dans le cas de la symétrie d'échange, lors d'une translation élémentaire du pas du réseau $\mathcal{T}_0 : x \to x + a_0$, pour correspondre aux translations sur les fermions :

$$\begin{cases} L_{m\alpha} \\ R_{m\alpha} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{T}_0} \begin{cases} e^{-ik_F a_0} L_{m\alpha} \\ e^{ik_F a_0} R_{m\alpha} \end{cases} \tag{3.243}$$

Les champs bosoniques totaux et duaux des degrés doivent se transformer comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_{m\alpha} \\ \Theta_{m\alpha} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{T}_0} \begin{cases} \Phi_{m\alpha} + k_F a_0/\sqrt{\pi} \\ \Theta_{m\alpha} \end{cases} \tag{3.244}$$

Et la transformation induite sur le champ total de charge est alors :

$$\Phi_c \xrightarrow{\mathcal{T}_0} \Phi_c + k_F a_0\sqrt{\frac{2\mathrm{N}}{\pi}} \tag{3.245}$$

⟨51⟩. Le terme d'umklapp est déterminé par symétrie, et pour cette raison, g_u est assez indéterminé. Pourtant, lorsque la charge présente un gap, le signe de g_u devient déterminant car il fixe les configurations en charge (voir les équations (3.251) et (3.252)). Une étude à l'aide de développement en perturbation d'ordre plus grand dans le régime de faible couplage laisse supposer que $g_u < 0$.

⟨52⟩. Cette valeur n'a rien d'arbitraire et correspond à la dimension d'un opérateur qui laisse la physique invariante dans une dilatation. Cette invariance se faisant au niveau de l'action, qui intègre 2 fois (en espace et en temps), c'est bien la bonne dimension critique.

Physiquement, lorsque les interactions sont très répulsives (c'est-à-dire g_c positif et très grand, et donc K_c très petit), les atomes vont à terme finir par se fixer sur site, et nous serons menés à l'ouverture du gap en charge Δ_c, tandis qu'au contraire, entre le régime très attractif et un certain domaine répulsif ⟨53⟩, le gap ne sera pas ouvert et la physique appartiendra à la classe d'universalité des liquides de Luttinger. Concrètement, il existe donc une transition de phase associée à une valeur critique $K_c^\star$ ⟨54⟩ pour le modèle (3.247) et qui sépare ces deux comportements :

$$K_c^\star = \frac{4\mathrm{N}}{\pi^2}\left(a_0 k_F\right)^2 \tag{3.249}$$

Selon le modèle, cette valeur fixe un hyperplan dans le diagramme de phase ⟨55⟩. Et, selon la valeur du paramètre de Luttinger, plusieurs comportements se manifestent :

— $K_c > K_c^\star$: les degrés de charge sont critiques ;
— $K_c < K_c^\star$: il y a présence d'un gap en charge Δ_c. Dans ce cas-là, le champ Φ_c va être gelé autour d'une valeur moyenne $\langle\Phi_c\rangle$ qui va correspondre aux *minima* de $\mathcal{V}_c$, et par là, dépendre du signe de g_u. Si $g_u > 0$, les configurations moyennes seront les suivantes :

$$\langle\Phi_c\rangle_{[g_u>0]} = k_F a_0 \sqrt{\frac{2\mathrm{N}}{\pi}}\, p, \qquad p \in \mathbb{Z} \tag{3.251}$$

Mais si $g_u < 0$, les configurations moyennes seront décalées :

$$\langle\Phi_c\rangle_{[g_u<0]} = k_F a_0 \sqrt{\frac{2\mathrm{N}}{\pi}} \left(p + \frac{1}{2}\right), \qquad p \in \mathbb{Z} \tag{3.252}$$

Lorsque c'est au modèle (3.247) que le système est soumis, ce sont souvent ces dernières configurations qu'il réalise, celles à $g_u < 0$. Une étude numérique par le DMRG permet, en principe, de confirmer ou d'infirmer cette conclusion.

Voilà comment, entre autres résultats, l'utilisation de la bosonisation permet - lorsque la séparation spin-charge est satisfaite et dans le cas de la symétrie d'échange - de résoudre le hamiltonien de charge à n'importe quel N. Il reste tout de même à résoudre le hamiltonien

⟨53⟩. Le cas à une orbitale du premier chapitre nous avais appris que dans des régimes d'umklapp peu forts - quand la séparation spin-charge reste valide - il fallait que l'interaction répulsive ait une certaine valeur critique avant d'ouvrir le gap.
⟨54⟩. Elle satisfait simplement l'équation $\Delta[\mathcal{V}_u](K_c^\star) = 2$.
⟨55⟩. Le couplage en charge $g_c^\star$ (qui dépend des paramètres d'interaction) relié au paramètre critique par :

$$g_c^\star = \frac{\pi v_F}{4\mathrm{N}}\left[\frac{1}{\left(K_c^\star\right)^2} - 1\right] \tag{3.250}$$

pour les degrés restants [56], c'est l'objet de la section suivante sur le groupe de renormalisation, mais avant, nous donnons une description particulière de la bosonisation lorsque N = 2, car tout s'y simplifie et parce que, ce cas étant très particulier, il est possible - à l'aide des résultats de la bosonisation - de redéfinir une théorie de fermions, mais cette fois-ci réels : une théorie de fermions de Majorana.

3.3.2 Le cas N = 2 et la refermionisation

La bosonisation dans le cas N = 2 réduit les deux vecteurs $\mathbf{\Phi}_+$ et $\mathbf{\Phi}_-$ à une composante chacun, que l'on note respectivement $\mathbf{\Phi}_+ \equiv \{\Phi_o\}$ et $\mathbf{\Phi}_- = \{\Phi_{so}\}$. La transformation (3.229, 3.230, 3.231, 3.232) entre les quatre bosons dans les degrés $\{\Phi_{m\alpha}\}_{m\alpha}$ et les quatre bosons Φ_c, Φ_s, Φ_o et Φ_{so} devient même très simple [57] :

$$\Phi_c = \frac{1}{2}\Big(\Phi_{1\uparrow} + \Phi_{1\downarrow} + \Phi_{2\uparrow} + \Phi_{2\downarrow}\Big) \tag{3.253}$$

$$\Phi_s = \frac{1}{2}\Big(\Phi_{1\uparrow} - \Phi_{1\downarrow} + \Phi_{2\uparrow} - \Phi_{2\downarrow}\Big) \tag{3.254}$$

$$\Phi_o = \frac{1}{2}\Big(\Phi_{1\uparrow} + \Phi_{1\downarrow} - \Phi_{2\uparrow} - \Phi_{2\downarrow}\Big) \tag{3.255}$$

$$\Phi_{so} = \frac{1}{2}\Big(\Phi_{1\uparrow} - \Phi_{1\downarrow} - \Phi_{2\uparrow} + \Phi_{2\downarrow}\Big) \tag{3.256}$$

Idem pour les champs Θ, Φ_L et Φ_R. Nous donnons également une expression des courants gauches et droits SU(4) (3.197, 3.198) dans les bosons en posant :

$$\kappa_{1\uparrow}\kappa_{1\downarrow}\kappa_{2\uparrow}\kappa_{2\uparrow} = 1 \tag{3.257}$$

$$\kappa_{1\uparrow}\kappa_{1\downarrow} = \kappa_{2\downarrow}\kappa_{2\uparrow} = i\sigma^x \tag{3.258}$$

$$\kappa_{1\uparrow}\kappa_{2\uparrow} = \kappa_{1\downarrow}\kappa_{2\downarrow} = i\sigma^y \tag{3.259}$$

$$\kappa_{1\downarrow}\kappa_{2\uparrow} = \kappa_{2\downarrow}\kappa_{1\uparrow} = i\sigma^z \tag{3.260}$$

La première équation requiert un certain choix [58] qui permet d'écrire les biproduits des facteurs de Klein en termes des matrices de Pauli. Puis en introduisant les notations suivantes,

[56]. Pour les degrés non-abéliens avec la séparation spin-charge, les degrés non-abéliens et abélien sinon.
[57]. Lorsque N = 2, il est d'usage de noter les états nucléaires du spin 1/2 par ↑ et ↓. Pour les états orbitaux, on écrira 1 et 2, comme pour le modèle d'échelle, en pensant bien à faire la correspondance s'il s'agissait d'un autre modèle.
[58]. Les facteurs sont astreints à respecter $\left(\kappa_{1\uparrow}\kappa_{1\downarrow}\kappa_{2\uparrow}\kappa_{2\uparrow}\right)^2 = 1$.

avec $a = c, s, o, so$ et $P = L, R$:

$$
\begin{aligned}
C_{aP}^{\beta} &= \cos\left(\beta\Phi_{aP}\right) && (3.261)\\
S_{aP}^{\beta} &= \sin\left(\beta\Phi_{aP}\right) && (3.262)\\
C_{a}^{\beta} &= \cos\left(\beta\Phi_{a}\right) && (3.263)\\
S_{a}^{\beta} &= \sin\left(\beta\Phi_{a}\right) && (3.264)\\
\widetilde{C}_{a}^{\beta} &= \cos\left(\beta\Theta_{a}\right) && (3.265)\\
\widetilde{S}_{a}^{\beta} &= \sin\left(\beta\Theta_{a}\right) && (3.266)
\end{aligned}
$$

Ces expressions servirons à écrire les fermions de Majorana que nous allons introduire ainsi que les courants SU(4) que nous donnons ici :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_L^1 &= \frac{-\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{oL}C_{soL} \quad \mathcal{J}_L^2 = \frac{\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{oL}C_{soL} \quad \mathcal{J}_L^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x\Phi_{oL}\\
\mathcal{J}_L^4 &= \frac{-\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sL}S_{soL} \quad \mathcal{J}_L^5 = \frac{-\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sL}S_{soL} \quad \mathcal{J}_L^6 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x\Phi_{sL}\\
\mathcal{J}_L^7 &= \frac{\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sL}C_{oL} \quad \mathcal{J}_L^8 = \frac{-\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sL}C_{oL} \quad \mathcal{J}_L^9 = \frac{-\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{oL}S_{soL} \qquad (3.267)\\
\mathcal{J}_L^{10} &= \frac{\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sL}S_{oL} \quad \mathcal{J}_L^{11} = \frac{-\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sL}S_{oL} \quad \mathcal{J}_L^{12} = \frac{-\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{oL}S_{soL}\\
\mathcal{J}_L^{13} &= \frac{-\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sL}C_{soL} \quad \mathcal{J}_L^{14} = \frac{\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sL}C_{soL} \quad \mathcal{J}_L^{15} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x\Phi_{soL}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_R^1 &= \frac{\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{oR}C_{soR} \quad \mathcal{J}_R^2 = \frac{\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{oR}C_{soR} \quad \mathcal{J}_R^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x\Phi_{oR}\\
\mathcal{J}_R^4 &= \frac{\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sR}S_{soR} \quad \mathcal{J}_R^5 = \frac{-\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sR}S_{soR} \quad \mathcal{J}_R^6 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x\Phi_{sR}\\
\mathcal{J}_R^7 &= \frac{-\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sR}C_{oR} \quad \mathcal{J}_R^8 = \frac{-\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sR}C_{oR} \quad \mathcal{J}_R^9 = \frac{\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{oR}S_{soR} \qquad (3.268)\\
\mathcal{J}_R^{10} &= \frac{\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sR}S_{oR} \quad \mathcal{J}_R^{11} = \frac{\sigma^z}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sR}S_{oR} \quad \mathcal{J}_R^{12} = \frac{-\sigma^y}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{oR}S_{soR}\\
\mathcal{J}_R^{13} &= \frac{\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} S_{sR}C_{soR} \quad \mathcal{J}_R^{14} = \frac{\sigma^x}{\pi\sqrt{2}a_0} C_{sR}C_{soR} \quad \mathcal{J}_R^{15} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x\Phi_{soR}
\end{aligned}
$$

Où le passage des champs gauches aux droits fait intervenir un signe, selon la parité dans le champ ⟨59⟩. Passons maintenant à la refermionisation, qui est réalisable pour N quelconque, mais prend une expression simple dans le cas $N = 2$: un fermion de Majorana ξ est un fermion réel - il satisfait $\xi^\dagger = \xi$ - et pour cette raison est considéré comme "valant un demi-fermion de Dirac". C'est-à-dire qu'un fermion de Dirac $c^\dagger$ peut être décomposé en deux fermions de Majorana $\xi_{\text{re.}}$ et $\xi_{\text{im.}}$ en posant : $c^\dagger = \xi_{\text{re.}} + i\xi_{\text{im.}}$. Ainsi, dans une théorie à 2N degrés de liberté "de Dirac" (fois deux si l'on tient compte de la chiralité), on va s'attendre à pouvoir y définir 4N fermions de Majorana. Dans le cas $N = 2$, nous aurons ainsi 8 fermions de Majorana gauches $\{\xi_L^a\}_{a\in[\![1,8]\!]}$ et autant de droits $\{\xi_R^a\}_{a\in[\![1,8]\!]}$.

Si l'on considère tous les degrés sous le point de vue de la symétrie $U(2N) = U(1)_c \times SU(2N)$, alors deux fermions de Majorana vont correspondre aux degrés de charge, de telle sorte que la symétrie qui peut leur être associée soit ⟨60⟩ $SO(2) \equiv U(1)_c$. Ainsi, il y a deux fermions pour les degrés abéliens (la charge) : il en reste alors $4N - 2$ pour les degrés non-abéliens, lesquels vont être choisis comme une représentation de $SO(4N-2)$ qui ne correspond *a priori* jamais avec $SU(2N)$, sauf ⟨61⟩ lorsque $N = 2$ avec $SU(4) \equiv SO(6)$ ⟨62⟩ [139], puisqu'ils sont tous les deux d'ordre 15. Dès lors, pourvu que nous ayons défini des opérateurs qui traitent les degrés abéliens et non-abéliens distinctement - il s'agit tout simplement des bosons gauches et droits que définissent les relations du type (3.253, 3.254, 3.255, 3.256) - nous refermionisons

⟨59⟩. Et pour les termes en dérivée partielle, dans la transformation chirale, notons que ∂_x est impair.

⟨60⟩. Ce sont traditionnellement les fermions n°7 et 8 qui assurent cette symétrie orthogonale en se présentant dans le hamiltonien sous la forme suivante :

$$\frac{g}{2}\left(\xi_L^7\xi_R^7 + \xi_L^8\xi_R^8\right)^2 \tag{3.269}$$

Où g est un couplage. On remarque que c'est un produit scalaire, que laisse invariant les transformations de $SO(2)$, par définition.

⟨61⟩. Pour le vérifier, il suffit d'égaliser les ordres des groupes, menant à l'équation du second ordre $(2N-1)(4N-3) = 4N^2 - 1$, qui possède deux solutions, une non-physique $N = 1/2$ et celle qui nous intéresse : $N = 2$. Lorsque $N \neq 2$, l'équivalence n'est plus valide et l'on a alors recours à la bosonisation non-abélienne.

⟨62⟩. Si les algèbres de ces groupes sont effectivement identiques : $\mathfrak{su}(4) = \mathfrak{so}(6)$, la relation écrite entre groupes n'est alors que localement vraie car il est bien connu que leur topologie diffèrent d'un $\mathbb{Z}_2$.

de la manière suivante [122] :

$$\xi^2_L + i\xi^1_L = \frac{\eta_1}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(-i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{sL}\right) \tag{3.270}$$

$$\xi^6_L + i\xi^3_L = \frac{\eta_3}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(-i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{soL}\right) \tag{3.271}$$

$$\xi^4_L - i\xi^5_L = \frac{\eta_2}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(-i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{oL}\right) \tag{3.272}$$

$$\xi^8_L + i\xi^7_L = \frac{\eta_4}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(-i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{cL}\right) \tag{3.273}$$

$$\xi^2_R + i\xi^1_R = \frac{\eta_1}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{sR}\right) \tag{3.274}$$

$$\xi^6_R + i\xi^3_R = \frac{\eta_3}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{soR}\right) \tag{3.275}$$

$$\xi^4_R - i\xi^5_R = \frac{\eta_2}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{oR}\right) \tag{3.276}$$

$$\xi^8_R + i\xi^7_R = \frac{\eta_4}{\sqrt{\pi a_0}} \exp\left(i\sqrt{4\pi}\,\Phi_{cR}\right) \tag{3.277}$$

Ces définitions suggèrent que - comme nous l'avions dit - les fermions ξ^7 et ξ^8 caractérisent les degrés de charge ⟨63⟩, mais encore que les fermions ξ^1 et ξ^2 d'un côté et ξ^4 et ξ^5 de l'autre, caractérisent respectivement les degrés purement nucléaires et purement orbitaux ; quant aux fermions ξ^3 et ξ^6, ils mélangent à la fois les degrés nucléaire et orbitaux : la drôle de numérotation - 3 et 6 - vient de ce que la symétrie SU(N = 2) sera rendue par les fermions ξ^1, ξ^2 et ξ^3 qui apparaîtrons tous les trois ensemble ⟨64⟩, tandis que les trois fermions ξ^4, ξ^5, lorsqu'ils vont ensemble ⟨65⟩, assurent la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$, étendue - par l'ajout du fermion ξ^6 - à la symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$: l'écriture depuis les bosons vers les fermions de Majorana permet de bien scinder les opérateurs gérant les degrés nucléaires de ceux gérant les degrés orbitaux. Tous ces nouveaux fermions satisfont les relations d'anticommutation suivantes, avec $a, b \in [\![1, 8]\!]$ et $P, Q \in \{L, R\}$:

$$\left\{\xi^a_P, \xi^b_Q\right\} = 2\delta_{PQ}\delta^{ab} \tag{3.278}$$

⟨63⟩. Dans le hamiltonien ils apparaissent ensemble dans le terme $\mathcal{K}_c = \sum_{a=7}^{8} \xi^a_L \xi^a_R$ (3.324).
⟨64⟩. Le hamiltonien dépendra du terme $\mathcal{K}_s = \sum_{a=1}^{3} \xi^a_L \xi^a_R$ (3.325).
⟨65⟩. Dans le cas de la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$, le hamiltonien dépendra de $\sum_{a=4}^{5} \xi^a_L \xi^a_R$ (3.326). Et dans son extension à la symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$, le hamiltonien dépendra de $\sum_{a=4}^{6} \xi^a_L \xi^a_R$.

Et où les matrices $\eta_{1,2,3,4}$ sont les facteurs de Klein de ces nouveaux fermions qui vérifient :

$$\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 = 1 \tag{3.279}$$
$$\eta_1\eta_3 = \eta_2\eta_4 = i\sigma^x \tag{3.280}$$
$$\eta_3\eta_2 = \eta_1\eta_4 = i\sigma^y \tag{3.281}$$
$$\eta_2\eta_1 = \eta_3\eta_4 = i\sigma^z \tag{3.282}$$

Avec des relations d'anticommutation non-canoniques, pour $i, j \in [\![1, 4]\!]$:

$$\{\eta_i, \eta_j\} = 2\delta_{ij} \tag{3.283}$$

Ainsi, si l'introduction des fermions de Majorana suggèrent de "couper" les fermions de Dirac en deux, la relation qui existe entre les fermions de Dirac issus de la limite continue et les fermions de Majorana (3.270, ..., 3.277) - à cause de la transformation (3.253, ..., 3.256) sur les bosons - est tout à fait non-triviale, non-linéaire. Donnons alors les expressions des générateurs de SU(4) dans les Majorana dont les expressions, simples, confirment le lien profond qui relie SU(4) et SO(6) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_L^1 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^5\xi_L^6 & \mathcal{J}_L^2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^6\xi_L^4 & \mathcal{J}_L^3 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^4\xi_L^5 \\
\mathcal{J}_L^4 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^2\xi_L^3 & \mathcal{J}_L^5 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^3\xi_L^1 & \mathcal{J}_L^6 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^1\xi_L^2 \\
\mathcal{J}_L^7 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^1\xi_L^4 & \mathcal{J}_L^8 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^2\xi_L^4 & \mathcal{J}_L^9 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^3\xi_L^4 \\
\mathcal{J}_L^{10} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^1\xi_L^5 & \mathcal{J}_L^{11} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^2\xi_L^5 & \mathcal{J}_L^{12} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^3\xi_L^5 \\
\mathcal{J}_L^{13} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^1\xi_L^6 & \mathcal{J}_L^{14} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^2\xi_L^6 & \mathcal{J}_L^{15} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_L^3\xi_L^6
\end{aligned} \tag{3.284}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_R^1 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^5\xi_R^6 \quad \mathcal{J}_R^2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^6\xi_R^4 \quad \mathcal{J}_R^3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^4\xi_R^5 \\
\mathcal{J}_R^4 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^2\xi_R^3 \quad \mathcal{J}_R^5 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^3\xi_R^1 \quad \mathcal{J}_R^6 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^1\xi_R^2 \\
\mathcal{J}_R^7 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^1\xi_R^4 \quad \mathcal{J}_R^8 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^2\xi_R^4 \quad \mathcal{J}_R^9 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^3\xi_R^4 \\
\mathcal{J}_R^{10} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^1\xi_R^5 \quad \mathcal{J}_R^{11} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^2\xi_R^5 \quad \mathcal{J}_R^{12} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^3\xi_R^5 \\
\mathcal{J}_R^{13} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^1\xi_R^6 \quad \mathcal{J}_R^{14} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^2\xi_R^6 \quad \mathcal{J}_R^{15} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_R^3\xi_R^6
\end{aligned}
\tag{3.285}
$$

Et, pour compléter le tableau et donner tous les $15+1$ générateurs, il manque encore les termes en charge, dont les expressions, légèrement différentes des degrés non-abéliens ⟨66⟩, sont données par :

$$J_{cL} = -2i\xi_L^7\xi_L^8 \tag{3.286}$$
$$J_{cR} = -2i\xi_R^7\xi_R^8 \tag{3.287}$$

Donnons enfin quelques propriétés du modèle des fermions de Majorana : du point de vue de la théorie conforme, les fermions de Majorana sont des champs primaires de dimension conforme $(1/2,0)$ pour les $\{\xi_L^a\}_a$ et $(0,1/2)$ pour les $\{\xi_R^a\}_a$. Nous donnons également leurs OPE qui permettent d'en déduire celles sur les courants :

$$\xi_L^a(z)\xi_L^b(\omega) \sim \frac{\delta^{ab}}{2\pi(z-\omega)} \tag{3.288}$$
$$\xi_R^a(\bar{z})\xi_R^b(\bar{\omega}) \sim \frac{\delta^{ab}}{2\pi(\bar{z}-\bar{\omega})} \tag{3.289}$$

Il se trouve que dans le langage des fermions de Majorana, les OPE entre courants, puis - dans le cas du traitement de l'interaction - entre les opérateurs d'interaction, sont nettement plus simples étant donnée la structure très simple qu'ils présentent. Le hamiltonien libre est une théorie conforme ou chacun des 8 fermions de Majorana porte une charge centrale $c = 1/2$ ⟨67⟩, et dont l'expression dans le cas de la symétrie d'échange est :

$$\mathcal{H}^{(0)} = -\frac{iv_F}{2}\sum_{a=1}^{8}\left(\xi_R^a\partial_x\xi_R^a - \xi_L^a\partial_x\xi_L^a\right) \tag{3.290}$$

⟨66⟩. Toujours dues à la "mauvaise" définition des courants de charge.
⟨67⟩. On retrouve une charge centrale totale $8\times 1/2 = 4$; et l'idée qu'un demi-fermion de Dirac est un fermion de Majorana.

3.4 L'interaction à faible couplage traitée : le groupe de renormalisation perturbatif

Jusqu'ici, sauf dans le cas spécifique des degrés de liberté de charge lors de la séparation spin-charge, nous n'avons pas traité les interactions, mais seulement la théorie libre dont nous avons mis en avant les grandes propriétés de symétries. Telle qu'elle est écrite dans les fermions de Dirac *via* les différentes conditions initiales, l'interaction est bien trop compliquée pour être résolue : il faut donc utiliser des simplifications qui vont permettre de parvenir à l'élaboration du diagramme de phase.

3.4.1 Définitions sur le groupe de renormalisation

La méthode ici employée est celle du groupe de renormalisation [140], dont l'idée générale est la suivante : un système physique est entièrement déterminé par son hamiltonien qui le caractérise dans tous les régimes possibles, des basses aux hautes énergies. Or, selon les cas - et dans notre cas, aux basses énergies - tout le détail des configurations non-effectives que le hamiltonien décrit est superflu - pour nous, il s'agit des grandes excitations en vecteur d'onde k, non-atteintes à température nulle. En une phrase, le groupe de renormalisation est une méthode pour éliminer les détails non-effectifs tout en rendant le hamiltonien plus simple. D'ailleurs cette simplification induit une perte d'information depuis le hamiltonien originel jusqu'à celui renormalisé, et l'appellation de "groupe" de renormalisation est sur ce point trompeuse car elle laisse penser le contraire. En réalité il faudrait plutôt parler de semi-groupe, avec des transformations non-inversibles, de telle sorte qu'un modèle renormalisé peut être atteint par une grande diversité de hamiltoniens : concrètement, le groupe de renormalisation permet d'atteindre les modèles simplifiés qui caractérisent les classes d'universalité. De plus, ces modèles plus simples sont potentiellement solubles, et si tel est le cas, le groupe de renormalisation va nous permettre d'élaborer les diagrammes de phase de nos systèmes de fermions, et nous montrons comment.

Bien des stratégies existent pour établir la procédure de renormalisation : ici, de considérer la théorie des champs sur toutes ses échelles d'énergies selon k, et de commencer par l'intégrer sur ses plus grandes énergies, $\Lambda' = e^{-\theta}\Lambda < k \leqslant \Lambda$ (avec $\theta \geqslant 0$). Cette intégration définit une nouvelle théorie des champs avec un nouveau seuil Λ'. L'idée étant de récrire une théorie renormalisée, il faut bien récrire la même, mais avec des paramètres (les couplages) renormalisés : alors il faut pouvoir comparer les théories, et notamment, elles doivent posséder le même seuil Λ, si bien que la théorie obtenue par intégration, pour correspondre, doit être dilatée - dans l'espace réciproque - du facteur e^{θ}. Elle sera interprétée de manière à rendre compte des

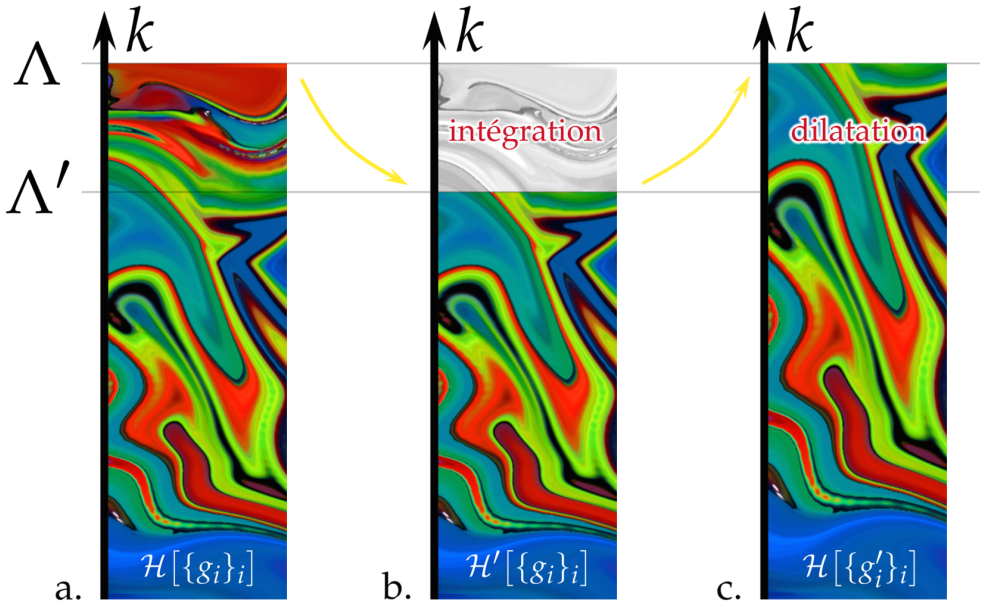


FIGURE 3.3 – Une procédure élémentaire du groupe de renormalisation : en a. la théorie initiale $\mathcal{H}$ (avec le seuil Λ) qui dépend des couplages $\{g_i\}_i$. En b. les grands degrés $\Lambda' < k \leqslant \Lambda$ sont **intégrés**, laissant une nouvelles théorie $\mathcal{H}'$ (avec le seuil Λ') qui dépend encore des couplages $\{g_i\}_i$. Elle ne peut être comparée à la première $\mathcal{H}$, dans des couplages couplages $\{g'_i\}_i$ renormalisés, qu'à condition de posséder un même seuil, obtenu en c. par **dilatation**.

mêmes propriétés statistiques que la théorie originale : c'est par ce moyen qu'on écrira la même théorie, mais avec des paramètres renormalisés (voir la FIGURE 3.3). Dans les faits, on égalisera les fonctions de partition des théories des champs avant et après la procédure. Notons qu'avec cette procédure (intégration puis dilatation), la théorie libre entretient un lien particulier car elle restera inchangée, et ce, parce qu'elle possède la symétrie conforme (et donc la symétrie de dilatation) : c'est un *point fixe* du groupe de renormalisation, et c'est d'ailleurs en perturbation (dans les couplages et donc dans les paramètres d'interaction) autour de ce point, c'est-à-dire autour de la théorie libre, qu'on effectue la procédure de renormalisation. On considèrera donc comme référence le hamiltonien suivant, de seuil Λ :

$$\mathcal{H}\big[\{g_i\}_i\big] = \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{\text{int.}}\big[\{g_i\}_i\big] \qquad (\Lambda) \tag{3.291}$$

Avec une interaction très faible devant les termes cinétiques, autrement dit puisque l'interaction prendra la forme suivante ⟨68⟩ :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}\big[\{g_i\}_i\big] = g_i O_i \tag{3.292}$$

Nous aurons les conditions $g_i \ll t, t_\perp$, $\forall i$. À ce stade, considérons l'objet qui rend compte

⟨68⟩. Avec la convention de sommation d'Einstein sur i.

des propriétés statistiques du modèle, la fonction de partition $Z = \mathrm{tr}\, e^{-\mathcal{H}[\{g_i\}_i]}$ qui, décomposée en perturbation dans les couplages et les opérateurs d'interaction $\{O_i\}_i$, prend l'expression suivante (avec $Z^{(0)}$ la fonction de partition libre), que l'on écrit à l'ordre 2 car c'est à cet ordre que la renormalisation se fait pour nos systèmes (nous y reviendrons) :

$$Z = Z^{(0)}\left\{1 - g_i \int_{|z|\leqslant\Lambda^{-1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \langle O_i(z,\bar{z})\rangle + g_i g_j \int_{|z|,|\omega|\leqslant\Lambda^{-1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\overline{\omega}\, \langle O_i(z,\bar{z}) O_j(\omega,\overline{\omega})\rangle + \mathcal{O}(g^3)\right\} \quad (3.293)$$

Les valeurs moyennes sont celles de la théorie libre. C'est à cette expression que nous ferons référence pour interpréter la théorie issue de la procédure de renormalisation. À cette étape, cette dernière consiste en l'intégration sur les grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire les petites distances pour $\Lambda^{-1} \leqslant |z| < e^{\theta}\Lambda^{-1}$. Cette étape laisse en principe inchangées les propriétés de la théorie de basse énergie puisque les premières excitations - de grandes longueurs d'onde - y sont laissées sauves. La fonction de partition devient Z' et satisfait :

$$Z' = Z^{(0)}\left\{1 - g_i \int_{|z|\leqslant e^{\theta}\Lambda^{-1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \langle O_i(z,\bar{z})\rangle + g_i g_j \int_{|z|,|\omega|\leqslant e^{\theta}\Lambda^{-1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\overline{\omega}\, \langle O_i(z,\bar{z}) O_j(\omega,\overline{\omega})\rangle + \mathcal{O}(g^3)\right\} \quad (3.294)$$

Le travail est alors fait, mais la comparaison est impossible alors nous effectuons une dilatation $(z,\bar{z}) \to (e^{\theta}z, e^{\theta}\bar{z})$:

$$\begin{aligned} Z'' \;=\; Z^{(0)}\Bigg\{ & 1 - e^{2\theta} g_i \int_{|e^{\theta}z|\leqslant e^{\theta}\Lambda^{-1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \left\langle O_i\left(e^{\theta}z, e^{\theta}\bar{z}\right)\right\rangle \qquad (3.295)\\ & + e^{4\theta} g_i g_j \int_{|e^{\theta}z|,|e^{\theta}\omega|\leqslant e^{\theta}\Lambda^{-1}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\overline{\omega}\, \left\langle O_i\left(e^{\theta}z, e^{\theta}\bar{z}\right) O_j\left(e^{\theta}\omega, e^{\theta}\overline{\omega}\right)\right\rangle + \mathcal{O}(g^3)\Bigg\} \end{aligned}$$

Or, en utilisant le fait que les opérateurs d'interaction $\{O_i\}_i$ sont des opérateurs quasiprimaires de dimension d'échelle $\{\Delta_i\}_i$, les expressions des moyennes peuvent déjà être simplifiés :

$$\left\langle O_i\left(e^{\theta}z, e^{\theta}\bar{z}\right)\right\rangle = e^{-\Delta_i\theta}\, \langle O_i(z,\bar{z})\rangle \quad (3.296)$$

$$\left\langle O_i\left(e^{\theta}z, e^{\theta}\bar{z}\right) O_j\left(e^{\theta}\omega, e^{\theta}\overline{\omega}\right)\right\rangle = e^{-(\Delta_i+\Delta_j)\theta}\, \langle O_i(z,\bar{z}) O_j(\omega,\overline{\omega})\rangle \quad (3.297)$$

De plus, pour le second terme, nous savons que pour la théorie libre, la fonction de correla-

tion est donnée par l'OPE effective ⟨69⟩ suivante :

$$O_i(z,\overline{z})O_j(\omega,\overline{\omega}) \quad \sim \quad \frac{C_k^{ij}}{|z-\omega|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}}\, O_k(\omega,\overline{\omega}) \tag{3.298}$$

Où les C_k^{ij} sont des nombres purs qui réflètent l'algèbre - en OPE - des opérateurs d'interaction. Avec toutes ces données, on montre qu'en procédant de manière infinitésimale à chaque étape de la procédure - c'est-à-dire $\theta \to \delta\theta$ - on est mené à réinterpréter (3.295) comme la fonction de partition du hamiltonien (3.291), mais dans de nouveaux couplages $\{g_i'\}_i$ qui satisfont, en considérant tout d'abord l'expression au premier ordre dans les g_i ⟨70⟩ :

$$g_k' \simeq g_k + \delta\theta\big(2-\Delta_k\big)g_k \tag{3.299}$$

Autrement dit, nous constatons que les dimensions d'échelle Δ_k - selon leur valeur par rapport à la dimension d'échelle critique 2 - vont jouer un rôle crucial sur l'importance ou non du couplage correspondant g_k. En considérant maintenant une itération continue de cette procédure, et en introduisant le *temps de renormalisation* ℓ associé à la variation $\delta\theta$ qui compte continument ces itérations, les procédures de renormalisation deviennent des équations différentielles ⟨71⟩ :

$$\frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}\ell} \simeq (2-\Delta_k)g_k \tag{3.300}$$

Il existe ainsi trois comportements pour les opérateurs d'interaction, selon leur dimension d'échelle, et ainsi nous définissons trois appellations pour les champs $\{O_k\}_k$:

— $\Delta_k > 2$: alors $\lim_{\ell\to\infty} g_k = 0$ et l'opérateur O_k est *non-pertinent* ⟨72⟩, puisque son couplage décroît exponentiellement dans la procédure de renormalisation ;
— $\Delta_k < 2$: alors $\lim_{\ell\to\infty} g_k = \pm\infty$ et l'opérateur O_k est *pertinent*, puisque son couplage croît exponentiellement lors de la procédure de renormalisation. Cela semble être - soit dit en passant - un problème puisque nous avions considéré les couplages perturbativement par rapport à la théorie libre ⟨73⟩ : en réalité, les équations du groupe de renormalisation, encore plus au premier ordre, sont très tolérantes lors d'une dilatation de tous les couplages ;
— $\Delta_k = 2$: alors on ne connaît pas la limite puisque l'expression (3.300) est approchée,

⟨69⟩. En toute généralité, les OPE des opérateurs d'interaction sont plus complexes, mais ce sont bien ces termes qui dans les intégrales demeurent car $\forall i, \Delta_i = 2$.
⟨70⟩. Où il n'y a évidemment pas de sommation implicite sur k.
⟨71⟩. Les équations de la fonction β.
⟨72⟩. Le mot en anglais - *irrelevant* - est parfois utilisé tel quel. Dans l'autre cas, mot *relevant* est également utilisé.
⟨73⟩. Il existera ainsi une échelle à partir de laquelle les corrélations auront une portée finie, ce qui traduira l'ouverture d'un gap.

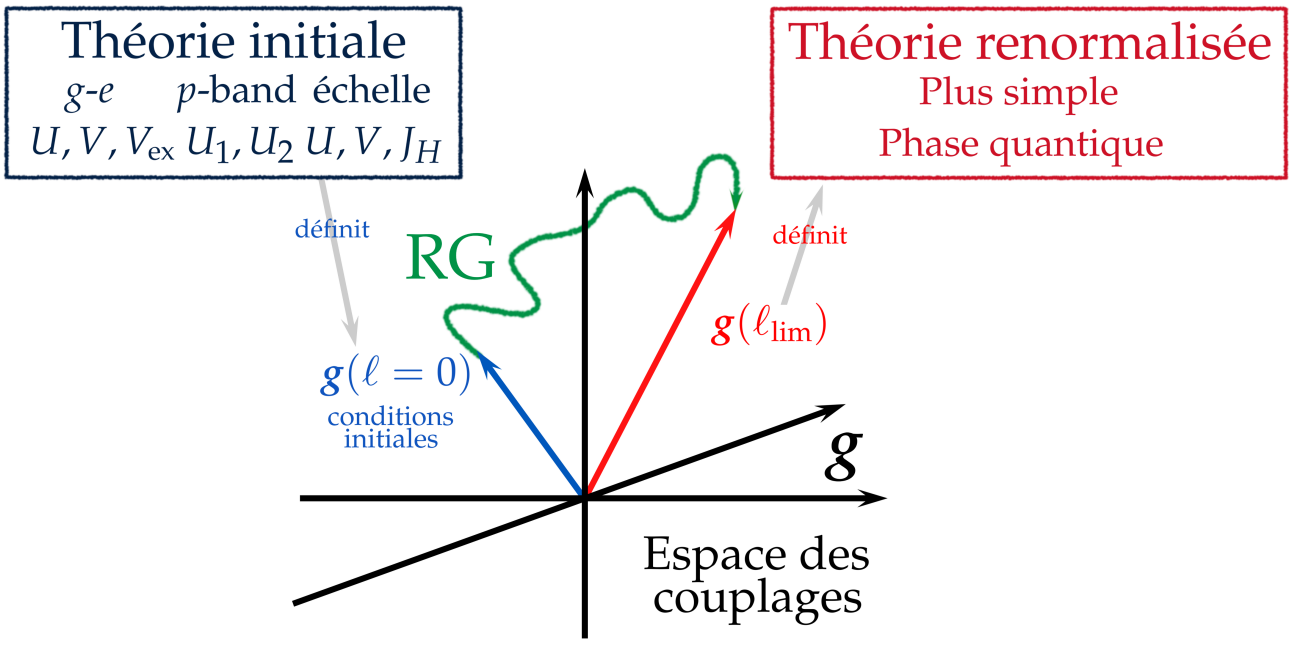


FIGURE 3.4 – Lien entre les paramètres d'interactions et les phases : la **théorie initiale** est donnée par les **paramètres d'interaction** qui définissent un point $g(\ell = 0)$ dans l'**espace des couplages**. Toutes les valeurs des paramètres d'interaction définissent ainsi un hyperplan dans l'espace des couplages. La **procédure de renormalisation** amène ce point hors de cet hyperplan vers un nouveau point $g(\ell_{\text{lim}})$ qui définit une **théorie renormalisée**, laquelle est plus simple et donnera la **phase** qui correspond aux paramètres d'interaction.

c'est-à-dire que - pour les équations du groupe de renormalisation en général - non seulement il existe des corrections au premier ordre en g_k (qui dominent le début du destin du couplage, du moins lorsque $\Delta_k \neq 0$), mais il existe encore des corrections aux ordres supérieurs. L'opérateur O_k est alors qualifié de *marginal* : selon que les termes d'ordre supérieur rendent ou non le couplage dominant, on le qualifie respectivement de marginal-pertinent et marginal-non-pertinent ⟨74⟩.

Il se trouve que tous les opérateurs O_k que nous avons définis sont marginaux, c'est-à-dire que l'on a $\forall k : \Delta_k = 2$. Il faut ainsi - et nous avons été prévoyant - récrire l'équation (3.300) jusqu'au deuxième ordre, et nous sommes alors mené à ⟨75⟩ l'équation à *une boucle de groupe de renormalisation* :

$$\frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}\ell} = -\pi C_k^{ij} g_i g_j \tag{3.301}$$

Ces nouvelles équations sont beaucoup plus complexes qu'au premier ordre puisqu'elles sont quadratiques et qu'elles mélangent tous les couplages entre eux (*via* la double somme

⟨74⟩. Il existe aussi des termes exactement marginaux.
⟨75⟩. En passant nous avons redéfinis les couplages par $g_i \to (\Lambda^{-1})^{\Delta_i} g_i$.

implicite en i et j). De plus elles sont déterminées par l'algèbre des opérateurs d'interaction $\{O_i\}_i$ dont il faut dès lors déterminer les OPE, ce qui est un travail assez conséquent puisque pour 12 opérateurs d'interaction, si l'on considère la symétrie $C_k^{ij} = C_k^{ji}$, c'est 78 OPE ⟨76⟩ qu'il faut calculer, bien qu'en réalité les symétries du modèle diminuent un peu ce nombre : comme déjà les OPE entre les courants de symétrie reflètent l'algèbre des groupes dont ils sont les générateurs, les OPE entre opérateurs concernant des symétries disjointes vont être nulles.

Mais au delà de la résolution de ces équations, nous avons trouvé un moyen de produire nos diagrammes de phase quantiques car la décomposition dans les opérateurs d'interaction $\{O_i\}$, parce qu'ils satisfont une algèbre fermée, sont la bonne décomposition des interactions du point de vue de la renormalisation. Ainsi, avant la renormalisation, un modèle, par ses conditions initiales qui dépendent des paramètres d'interaction (U, V, V_{ex}, ou U_1, U_2 ou encore U, V, J_H, *etc.*), caractérise un point dans l'espace à 12 dimensions ⟨77⟩ qui est donné par les conditions initiales $\{g_i(\ell = 0)\}_i$ que nous connaissons, et que la groupe de renormalisation va déplacer vers une limite $\{g_i(\ell_{\text{lim}})\}_i$ qui va définir dans (3.291) un nouveau modèle qui, résolu, donnera la physique de basse énergie de notre modèle, et donc la phase quantique (voir FIGURE 3.4). Ainsi, traçant la phase en fonction des paramètres d'interaction, nous établirons les diagrammes de phase.

3.4.2 Les OPE des opérateurs d'interaction

Comme nous avons vu que nos modèles possédaient des interactions marginales menant aux équations de renormalisation (3.301), pilotées par les coefficients C_k^{ij} de l'algèbre (3.298) des opérateurs d'interaction, nous donnons ces coefficients, dans la TABLE 3.1 dans un premier temps pour les opérateurs (3.94, ..., 3.101), c'est-à-dire $\{O_i\}_{i\in[\![1,8]\!]}$. Puis nous le complétons avec les opérateurs d'interaction $\{O_i\}_{i\in[\![9,12]\!]}$ de l'umklapp (3.110, ..., 3.113) dans la TABLE 3.2 .

Autres OPE, en réalité contenues dans les précédentes, celles des opérateurs bien écrits lors de la présence de la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$, en commençant - TABLE 3.3 - par les OPE entre opérateurs d'interaction (3.116, ..., 3.121) réguliers. De même que précédemment, nous donnons - TABLE 3.4 - nous complétons avec celles que donnent les opérateurs (3.122, ..., 3.124) d'umklapp.

Nous faisons quatre remarques sur ces tables d'OPE : tout d'abord nous voyons que dans l'algèbre des opérateurs réguliers, les OPE faisant intervenir la charge (soit O_8, soit O_6^z) sont tous nuls : c'est la traduction en OPE de la séparation spin-charge ; dans le même ordre d'idée, nous constatons que les OPE des opérateurs d'umklapp, à la différence des précédents, font intervenir la charge : c'est la traduction en OPE que la commensurabilité, qui induit les termes d'umk-

⟨76⟩. À savoir $78 = 12 + 11 \times 12/2$, avec de l'ordre d'une page de calcul par OPE.
⟨77⟩. Parfois réduit à 9 ou même moins selon les symétries et le remplissage.

lapp, induit par suite des processus qui peuvent réunir la charge aux degrés non-abéliens ; puis, nous constatons qu'un bon nombre de coefficients dans les OPE s'annulent lorsque $N = 2$: soit en $N^2 - 4$, soit en $N^2 - N - 2$, ou plus simplement en $N - 2$. Cela signifie que, comme dans le cas à une orbitale du CHAPITRE 1, le cas $N = 2$ est un cas à part des autres ⟨78⟩ ; enfin - plus anecdotique - les termes en "." signifient que les coefficients C_k^{ij} sont symétriques sur i et j.

⟨78⟩. C'est d'ailleurs pour cela que nous traitons ce cas à part, dans le CHAPITRE 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\frac{N\delta_{k1}}{4\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k2}}{4\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k3}}{4\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k4}}{4\pi^2}$	0	0	0	0
2	.	$-\frac{N\delta_{k1}}{16\pi^2}$	$-\frac{(N^2-1)\delta_{k7}}{4\pi^2N^2} - \frac{(N^2-4)\delta_{k4}}{8\pi^2N}$	$-\frac{(N^2-1)\delta_{k6}}{4\pi^2N^2} - \frac{(N^2-4)\delta_{k3}}{8\pi^2N}$	0	$-\frac{\delta_{k4}}{4\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k3}}{4\pi^2}$	0
3	.	.	$-\frac{N\delta_{k1}}{16\pi^2}$	$-\frac{(N^2-1)\delta_{k5}}{4\pi^2N^2} - \frac{(N^2-4)\delta_{k2}}{8\pi^2N}$	$-\frac{\delta_{k4}}{4\pi^2}$	0	$-\frac{\delta_{k2}}{4\pi^2}$	0
4	.	.	.	$-\frac{N\delta_{k1}}{16\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k3}}{4\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k2}}{4\pi^2}$	0	0
5	.	.	.	.	0	$-\frac{\delta_{k7}}{4\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k6}}{4\pi^2}$	0
6	.	.	.	.	.	0	$-\frac{\delta_{k5}}{4\pi^2}$	0
7	.	.	.	.	.	.	0	0
8	.	.	.	.	.	.	.	0

TABLE 3.1 – Coefficients C_k^{ij} des OPE (3.298) des opérateurs d'interaction en fonction de i et j (en ligne et colonne, le tout étant symétrique dans leur échange) pour les opérateurs réguliers $\{O_i\}_{i\in[\![1,8]\!]}$.

	9	10	11	12
1	$-\frac{(N^2+N-2)\delta_{k9}}{4\pi^2 N}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k10}}{4\pi^2 N}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k11}}{4\pi^2 N}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k12}}{4\pi^2 N}$
2	$-\frac{(N+1)\delta_{k10}}{8\pi^2}$	$-\frac{(N-1)\delta_{k9}}{8\pi^2}-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k11}}{8\pi^2 N}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k12}}{8\pi^2 N}$	0
3	$-\frac{(N+1)\delta_{k11}}{8\pi^2}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k10}}{8\pi^2 N}$	$-\frac{(N-1)\delta_{k9}}{8\pi^2}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k12}}{8\pi^2 N}$
4	$-\frac{(N+1)\delta_{k12}}{8\pi^2}$	0	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k10}}{8\pi^2 N}$	$-\frac{(N-1)\delta_{k9}}{8\pi^2}-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k11}}{8\pi^2 N}$
5	0	0	$-\frac{\delta_{k12}}{4\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k11}}{4\pi^2}$
6	0	$-\frac{\delta_{k12}}{4\pi^2}$	0	$-\frac{\delta_{k10}}{4\pi^2}$
7	0	$-\frac{\delta_{k11}}{4\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k10}}{4\pi^2}$	0
8	$-\frac{\delta_{k9}}{\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k10}}{\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k11}}{\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k12}}{\pi^2}$
9	$-\frac{(N+2)\delta_{k1}}{4\pi^2}-\frac{(N+1)\delta_{k8}}{4\pi^2 N}$	$-\frac{N\delta_{k2}}{2\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k3}}{2\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k4}}{2\pi^2}$
10	.	$-\frac{(N-2)\delta_{k1}}{4\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k8}}{4\pi^2 N}$	$-\frac{(N-2)\delta_{k4}}{2\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k7}}{\pi^2 N}$	$-\frac{(N-2)\delta_{k3}}{2\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k6}}{\pi^2 N}$
11	.	.	$-\frac{(N-2)\delta_{k1}}{4\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k8}}{4\pi^2 N}$	$-\frac{(N-2)\delta_{k2}}{2\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k5}}{\pi^2 N}$
12	.	.	.	$-\frac{(N-2)\delta_{k1}}{4\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k8}}{4\pi^2 N}$

TABLE 3.2 – Coefficients C_k^{ij} des OPE (3.298) des opérateurs d'interaction en fonction de i et j entre les opérateurs d'umklapp $\{O_i\}_{i\in[\![9,12]\!]}$ et tous les autres $\{O_j\}_{j\in[\![1,12]\!]}$.

	1	2	3	4	5	6
1	$-\frac{N\delta_{k1}}{4\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k2}}{4\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k3}}{4\pi^2}$	0	0	0
2	.	$-\frac{N\delta_{k1}}{8\pi^2} - \frac{(N^2-4)\delta_{k3}}{4\pi^2 N} - \frac{(N^2-1)\delta_{k5}}{2\pi^2 N^2}$	$-\frac{(N^2-4)\delta_{k2}}{8\pi^2 N} - \frac{(N^2-1)\delta_{k4}}{4\pi^2 N^2}$	$-\frac{\delta_{k3}}{2\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k2}}{4\pi^2}$	0
3	.	.	$-\frac{N\delta_{k1}}{16\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k2}}{4\pi^2}$	0	0
4	.	.	.	$-\frac{\delta_{k5}}{2\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k4}}{4\pi^2}$	0
5	.	.	.	.	0	0
6	.	.	.	.	.	0

TABLE 3.3 – Coefficients C_k^{ij} des OPE (3.298) des opérateurs d'interaction en fonction de i et j (en ligne et colonne, le tout étant symétrique dans leur échange) pour les opérateurs réguliers $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,6]\!]}$ adaptés à la symétrie $U(1)_o$.

	7	8	9
1	$-\frac{(N^2+N-2)\delta_{k7}}{4N\pi^2}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k8}}{4N\pi^2}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k9}}{4N\pi^2}$
2	$-\frac{(N+1)\delta_{k8}}{8\pi^2}$	$-\frac{(N-1)\delta_{k7}}{4\pi^2}-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k9}}{4N\pi^2}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k8}}{8N\pi^2}$
3	$-\frac{(N+1)\delta_{k9}}{8\pi^2}$	$-\frac{(N^2-N-2)\delta_{k8}}{8N\pi^2}$	$-\frac{(N-1)\delta_{k7}}{8\pi^2}$
4	0	$-\frac{\delta_{k9}}{2\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k8}}{4\pi^2}$
5	0	$-\frac{\delta_{k8}}{4\pi^2}$	0
6	$-\frac{\delta_{k7}}{\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k8}}{\pi^2}$	$-\frac{\delta_{k9}}{\pi^2}$
7	$-\frac{(N+2)\delta_{k1}}{4\pi^2}-\frac{(N+1)\delta_{k6}}{4N\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k2}}{2\pi^2}$	$-\frac{N\delta_{k3}}{2\pi^2}$
8	.	$-\frac{(N-2)\delta_{k1}}{2\pi^2}-\frac{(N-2)\delta_{k3}}{\pi^2}-\frac{2(N-1)\delta_{k5}}{N\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k6}}{2N\pi^2}$	$-\frac{(N-2)\delta_{k2}}{2\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k4}}{N\pi^2}$
9	.	.	$-\frac{(N-2)\delta_{k1}}{4\pi^2}-\frac{(N-1)\delta_{k6}}{4N\pi^2}$

TABLE 3.4 – Coefficients C_k^{ij} des OPE (3.298) des opérateurs d'interaction en fonction de i et j entre les opérateurs d'umklapp $\{O_i^z\}_{i\in[\![7,9]\!]}$ et tous les autres $\{O_j^z\}_{j\in[\![1,9]\!]}$.

3.4.3 Les équations du groupe de renormalisation

Maintenant écrites les OPE, nous allons déterminer les équations de RG *via* l'expression (3.301) des équations au second ordre du groupe de renormalisation. Le tout n'est qu'une recopie du tableau, même s'il faut faire attention, dans la somme sur les indices i et j que les termes diagonaux apparaîtront une seule fois, tandis que les non-diagonaux, deux fois ⟨79⟩. Pour les $\{O_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$:

$$\dot{g}_1 = \frac{N}{16\pi}\left(4g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2\right)+\frac{N+2}{4\pi}g_9^2+\frac{N-2}{4\pi}\left(g_{10}^2+g_{11}^2+g_{12}^2\right) \tag{3.302}$$

$$\dot{g}_2 = \frac{N}{2\pi}g_1g_2+\frac{N^2-4}{4\pi N}g_3g_4+\frac{1}{2\pi}\left(g_3g_7+g_4g_6\right)+\frac{N}{\pi}g_9g_{10}+\frac{N-2}{\pi}g_{11}g_{12} \tag{3.303}$$

$$\dot{g}_3 = \frac{N}{2\pi}g_1g_3+\frac{N^2-4}{4\pi N}g_2g_4+\frac{1}{2\pi}\left(g_2g_7+g_4g_5\right)+\frac{N}{\pi}g_9g_{11}+\frac{N-2}{\pi}g_{10}g_{12} \tag{3.304}$$

$$\dot{g}_4 = \frac{N}{2\pi}g_1g_4+\frac{N^2-4}{4\pi N}g_2g_3+\frac{1}{2\pi}\left(g_2g_6+g_3g_5\right)+\frac{N}{\pi}g_9g_{12}+\frac{N-2}{\pi}g_{10}g_{11} \tag{3.305}$$

$$\dot{g}_5 = \frac{N^2-1}{2\pi N^2}g_3g_4+\frac{1}{2\pi}g_6g_7+\frac{2(N-1)}{\pi N}g_{11}g_{12} \tag{3.306}$$

$$\dot{g}_6 = \frac{N^2-1}{2\pi N^2}g_2g_4+\frac{1}{2\pi}g_5g_7+\frac{2(N-1)}{\pi N}g_{10}g_{12} \tag{3.307}$$

$$\dot{g}_7 = \frac{N^2-1}{2\pi N^2}g_2g_3+\frac{1}{2\pi}g_5g_6+\frac{2(N-1)}{\pi N}g_{10}g_{11} \tag{3.308}$$

$$\dot{g}_8 = \frac{N+1}{4\pi N}g_9^2+\frac{N-1}{4\pi N}\left(g_{10}^2+g_{11}^2+g_{12}^2\right) \tag{3.309}$$

$$\dot{g}_9 = \frac{N^2+N-2}{2\pi N}g_1g_9+\frac{N-1}{4\pi}\left(g_2g_{10}+g_3g_{11}+g_4g_{12}\right)+\frac{2}{\pi}g_8g_9 \tag{3.310}$$

$$\dot{g}_{10} = \frac{N^2-N-2}{4\pi N}\left(2g_1g_{10}+g_3g_{10}+g_4g_{11}\right)+\frac{N+1}{4\pi}g_2g_9+\frac{1}{2\pi}\left(g_6g_{12}+g_7g_{11}+4g_8g_{10}\right) \tag{3.311}$$

$$\dot{g}_{11} = \frac{N^2-N-2}{4\pi N}\left(2g_1g_{11}+g_2g_{10}+g_4g_{12}\right)+\frac{N+1}{4\pi}g_3g_9+\frac{1}{2\pi}\left(g_5g_{12}+g_7g_{10}+4g_8g_{11}\right) \tag{3.312}$$

$$\dot{g}_{12} = \frac{N^2-N-2}{4\pi N}\left(2g_1g_{12}+g_2g_{11}+g_3g_{12}\right)+\frac{N+1}{4\pi}g_4g_9+\frac{1}{2\pi}\left(g_5g_{11}+g_6g_{10}+4g_8g_{12}\right) \tag{3.313}$$

Où les termes en **rouge** sont les termes d'umklapp, présents ou non selon le remplissage, et qui amorcent ou non les degrés de charge. D'ailleurs, lorsque $\delta_{\text{umk.}} = 0$, nous obtenons $\dot{g}_8 = \dot{g}_6^z = 0$, si bien que la charge est non-renormalisée, et c'est pourquoi - dans le cas de la séparation spin-charge - il nous faut la traiter par une approche alternative, que nous savons être la bosonisation. Les termes en **bleu** sont tous les termes nuls lorsque $N = 2$. Nous donnons également les équations de RG pour les $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,9]\!]}$, adaptés à la symétrie $U(1)_o$, pour lesquels

⟨79⟩. Autrement dit, il ne faut pas oublier les "." dans les tables.

nous faisons les mêmes constatations :

$$\dot{g}_1^z = \frac{N}{16\pi}\left(4(g_1^z)^2 + 2(g_2^z)^2 + (g_3^z)^2\right) + \frac{N+2}{4\pi}(g_7^z)^2 + \frac{N-2}{4\pi}\left(2(g_8^z)^2 + (g_9^z)^2\right) \tag{3.314}$$

$$\dot{g}_2^z = \frac{N}{2\pi}g_1^z g_2^z + \frac{N^2-4}{4N\pi}g_2^z g_3^z + \frac{1}{2\pi}\left(g_3^z g_4^z + g_2^z g_5^z\right) + \frac{N}{\pi}g_7^z g_8^z + \frac{N-2}{\pi}g_8^z g_9^z \tag{3.315}$$

$$\dot{g}_3^z = \frac{N}{2\pi}g_1^z g_3^z + \frac{N^2-4}{4N\pi}(g_2^z)^2 + \frac{1}{\pi}g_2^z g_4^z + \frac{N-2}{\pi}(g_8^z)^2 + \frac{N}{\pi}g_7^z g_9^z \tag{3.316}$$

$$\dot{g}_4^z = \frac{N^2-1}{2N^2\pi}g_2^z g_3^z + \frac{1}{2\pi}g_4^z g_5^z + \frac{2(N-1)}{N\pi}g_8^z g_9^z \tag{3.317}$$

$$\dot{g}_5^z = \frac{N^2-1}{2N^2\pi}(g_2^z)^2 + \frac{1}{2\pi}(g_4^z)^2 + \frac{2(N-1)}{N\pi}(g_8^z)^2 \tag{3.318}$$

$$\dot{g}_6^z = \frac{N+1}{4N\pi}(g_7^z)^2 + \frac{N-1}{4N\pi}\left(2(g_8^z)^2 + (g_9^z)^2\right) \tag{3.319}$$

$$\dot{g}_7^z = \frac{N^2+N-2}{2N\pi}g_1^z g_7^z + \frac{2}{\pi}g_6^z g_7^z + \frac{N-1}{4\pi}\left(2g_2^z g_8^z + g_3^z g_9^z\right) \tag{3.320}$$

$$\dot{g}_8^z = \frac{N^2-N-2}{4N\pi}\left(2g_1^z g_8^z + g_3^z g_8^z + g_2^z g_9^z\right) + \frac{N+1}{4\pi}g_2^z g_7^z + \frac{1}{2\pi}\left(g_5^z g_8^z + g_4^z g_9^z + 4g_6^z g_8^z\right) \tag{3.321}$$

$$\dot{g}_9 = \frac{N^2-N-2}{2N\pi}\left(g_2^z g_8^z + g_1^z g_9^z\right) + \frac{N+1}{4\pi}g_3^z g_7^z + \frac{1}{\pi}\left(g_4^z g_8^z + 2g_6^z g_9^z\right) \tag{3.322}$$

Avant de discuter des propriétés de ces équations, qui induiront des résultats très forts sur les phases qu'elles permettront d'atteindre, écrivons encore les opérateurs d'interaction dans le cas particulier $N = 2$.

Le cas N = 2

Comme nous l'avions vu à la fin de la section précédente, le cas $N = 2$ permet l'introduction des fermions de Majorana $\{\xi^a_{L,R}\}_{a\in[\![1,8]\!]}$, avec lesquels nous définissons les *bilinéaires de Majorana* $\mathcal{K}^a$, $\forall a \in [\![1,8]\!]$:

$$\mathcal{K}_a = \xi^a_L \xi^a_R \tag{3.323}$$

Avec, on définit les bilinéaires $\mathcal{K}_c$ de charge, $\mathcal{K}_s$ de spin, $\mathcal{K}_o$ orbital et $\widetilde{\mathcal{K}}_o$ non-orbital [80] :

$$\mathcal{K}_c = \sum_{a=7}^{8} \mathcal{K}_a \tag{3.324}$$

$$\mathcal{K}_s = \sum_{a=1}^{3} \mathcal{K}_a \tag{3.325}$$

$$\mathcal{K}_o = \sum_{a=4}^{5} \mathcal{K}_a \tag{3.326}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}_o = \mathcal{K}_5 - \mathcal{K}_4 \tag{3.327}$$

L'écriture des opérateurs d'interaction dans ces bilinéaires de Majorana permet une mise en évidence rapide des symétries [81]. On les exprime d'ailleurs dans ces courants dont l'un des avantages est la simplicité du calcul des OPE [82], pour les opérateurs réguliers $\{O_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$:

$$O_1 = \mathcal{K}_s^2/2 \tag{3.328}$$
$$O_2 = \mathcal{K}_4\mathcal{K}_s/2 \tag{3.329}$$
$$O_3 = \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s/2 \tag{3.330}$$
$$O_4 = \mathcal{K}_5\mathcal{K}_s/2 \tag{3.331}$$
$$O_5 = \mathcal{K}_5\mathcal{K}_6 \tag{3.332}$$
$$O_6 = \mathcal{K}_4\mathcal{K}_5 \tag{3.333}$$
$$O_7 = \mathcal{K}_4\mathcal{K}_6 \tag{3.334}$$
$$O_8 = 2\mathcal{K}_c^2 \tag{3.335}$$
$$O_9 = \mathcal{K}_c\mathcal{K}_s \tag{3.336}$$
$$O_{10} = \mathcal{K}_c\mathcal{K}_4 \tag{3.337}$$
$$O_{11} = \mathcal{K}_c\mathcal{K}_6 \tag{3.338}$$
$$O_{12} = \mathcal{K}_c\mathcal{K}_5 \tag{3.339}$$

[80]. La raison du nom est qu'il intervient naturellement dans les expressions des opérateurs d'interaction $\{O_i^z\}_{i\in[\![10,12]\!]}$ qui sont précisément ceux qui brisent $\mathrm{U}(1)_o$ (équations (3.349), (3.350), et (3.351)).

[81]. Par exemple, les transformations qui laissent invariant $\mathcal{K}_s = \xi_L^1\xi_R^1 + \xi_L^2\xi_R^2 + \xi_L^3\xi_R^3$ sont les transformations de $\mathrm{SO}(3)$, l'expression dans les Majorana n'étant rien d'autre qu'un produit scalaire réel à trois dimensions. Or ce groupe est localement identique au groupe $\mathrm{SU}(2)_n$ de la symétrie nucléaire. De même, les transformations qui laissent invariant le courant $\mathcal{K}_c$ appartiennent à $\mathrm{SO}(2)$ identique au groupe $\mathrm{U}(1)_c$ de la conservation de la charge, *etc*. On comptera ainsi les symétries du modèle, soit à cause de la renormalisation, soit à cause d'un ajustement fin.

[82]. Si jamais nous voulions les calculer toutes à nouveau, on se rendrait compte qu'il n'y a essentiellement rien à faire parce que, comparée au calcul dans les expressions "chirales" des courants, la structure algébrique est réduite à peu de choses : débarrassé de cette dernière, nous irions plus directement au résultat (qui serait identique).

Et nous donnons aussi les expressions des opérateurs d'interaction $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ dans lesquels se manifeste explicitement la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ par l'apparition du courant $\mathcal{K}_o$ pour les 9 premiers opérateurs :

$$
\begin{aligned}
O_1^z &= \mathcal{K}_s^2/2 && (3.340)\\
O_2^z &= \mathcal{K}_o\mathcal{K}_s/2 && (3.341)\\
O_3^z &= \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s/2 && (3.342)\\
O_4^z &= \mathcal{K}_6\mathcal{K}_o && (3.343)\\
O_5^z &= \mathcal{K}_o^2/2 && (3.344)\\
O_6^z &= 2\mathcal{K}_c^2 && (3.345)\\
O_7^z &= \mathcal{K}_s\mathcal{K}_c && (3.346)\\
O_8^z &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_o && (3.347)\\
O_9^z &= \mathcal{K}_6\mathcal{K}_c && (3.348)\\
O_{10}^z &= -\mathcal{K}_s\widetilde{\mathcal{K}}_o/2 && (3.349)\\
O_{11}^z &= \mathcal{K}_6\widetilde{\mathcal{K}}_o && (3.350)\\
O_{12}^z &= \mathcal{K}_c\widetilde{\mathcal{K}}_o && (3.351)
\end{aligned}
$$

Ici, nous ne récrivons pas les équations du groupe de renormalisation - lesquelles sont simplement obtenues en posant $\mathrm{N} = 2$ dans les expressions générales. De plus, nous montrerons dans la sous-section suivante que les équations du groupe de renormalisation présentent certaines limites particulières qui requièrent que nous redéfinissions les couplages, selon que N soit égal ou différent de 2.

3.4.4 Discussion générale des solutions des équations de RG

La résolution analytique des 12 équations du groupe de renormalisation est impossible, si bien que pour les résoudre nous utilisons le numérique : concrètement nous utilisons le Runge-Kutta d'ordre 5 ⟨83⟩ [141]. Cependant, quelques résultats élémentaires donnent de bonnes intuitions sur la façon dont les équations du groupe de renormalisation modifient les couplages. Par

⟨83⟩. Nous utilisons cette méthode pour son efficacité (précision, stabilité) reconnue, et parce qu'elle permet d'utiliser un pas adaptatif, nécessaire notamment lorsque les équations atteignent des divergences (telles que celle de l'équation (3.352)).

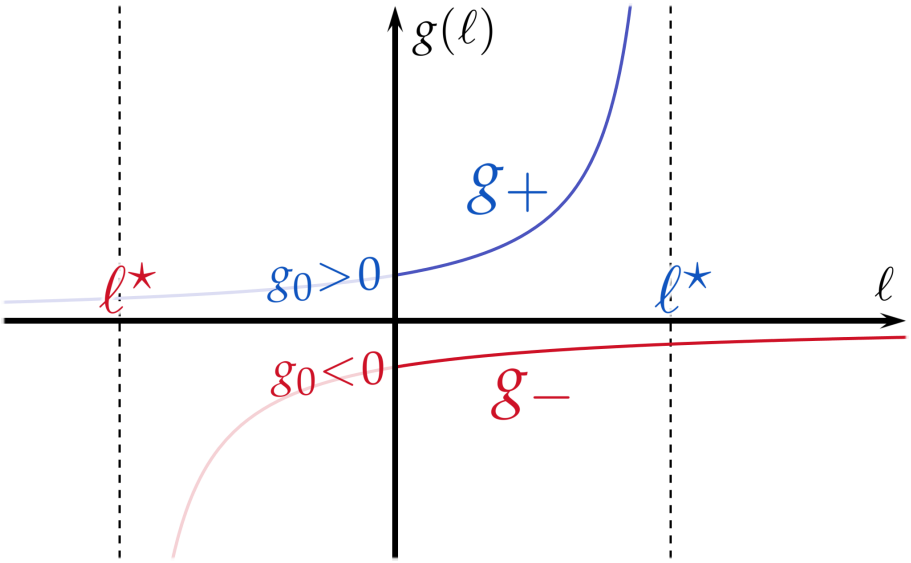


FIGURE 3.5 – Selon la condition initiale, **négative** ou **positive**, le couplage est respectivement non-pertinent, au bout d'un temps infini, ou pertinent, au bout d'un temps fini $\ell^\star$.

exemple, l'équation pour un couplage de condition initiale g_0, avec $\alpha > 0$ ⟨84⟩ avec sa solution :

$$\dot{g} = \alpha g^2 \Longrightarrow g(\ell) = \frac{g_0}{1 - \alpha g_0 \ell} \tag{3.352}$$

Il existe ainsi une valeur critique $\ell^\star = 1/\alpha g_0$ dont le signe - celui de g_0 - va déterminer le destin du couplage lors de la renormalisation (voir FIGURE 3.5) :

— $\ell^\star < 0$: la valeur critique n'est jamais croisée lors de la renormalisation et le couplage $g(\ell)$ est réduit à 0 par valeur négative, $\lim_{\ell\to\infty} g(\ell) = 0^-$, l'opérateur d'interaction correspondant est *marginal-non-pertinent* ;
— $\ell^\star > 0$: la valeur critique présente dans le "futur" (en termes de temps de renormalisation) du couplage qui le fait diverger, $\lim_{\ell\to\ell^\star} g(\ell) = +\infty$. Le temps $\ell^\star$ est indépassable, et l'opérateur correspondant est *marginal-pertinent*

Ce modèle à un couplage est simple, simpliste même, mais donne un première idée du type de comportement auquel on peut s'attendre pour cette renormalisation lorsqu'il existe plusieurs couplages : pas de "point" pour les classes d'universalité - puisque soit le couplage est réduit à 0, soit il diverge - mais des *rayons symétriques* où les couplages divergent mais en

⟨84⟩. Dans nos équations de RG, tous les coefficients $\{C_k^{ij}\}_{ijk}$ sont positifs (le signe initial des couplages $\{g_i\}_i$ étant laissé aux soins des conditions initiales). Y introduire des signes n'est pas une erreur, c'est même facilement réalisable, mais non souhaitable, et notamment pour le numérique, qui subit des ralentissements terribles : ainsi, même si les coefficients négatifs sont physiquement équivalents, les équations de RG avec des coefficients positifs se prêtent plus volontiers à l'intégration numérique.

ayant les uns avec les autres des rapports donnés [142]. Autrement dit, nous allons chercher pour les équations de RG des solutions ⟨85⟩ suivantes, avec $\ell^\star > 0$:

$$\forall i : g_i^{\text{asy.}}(\ell) = \frac{G_i}{\ell^\star - \ell} \tag{3.353}$$

Autrement dit, ces solutions particulières sont une généralisation de celle pour un couplage ou chaque couplage g_i est pondéré par G_i. Cette dernière quantité en réalité caractérise les modèles issus de la renormalisation, et en règle générale, correspond à un modèle bien plus symétrique que celui de départ (qui, on le rappelle, est donné par les conditions initiales). La théorie initiale peut-être vue comme un mélange de ces solutions asymptotiques particulières et le groupe de renormalisation comme l'outil qui va permettre de résoudre la compétition entre tout ce mélange de rayons symétriques.

Pour fixer les idées, considérons un exemple important, et qui est bien mis en évidence dans la redéfinition suivantes des couplages des $\{g_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ aux $\{f_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ ⟨86⟩ :

$$f_{1,9,10,11,12} = \frac{\mathrm{N}}{\pi}\, g_{1,9,10,11,12} \tag{3.358}$$

$$f_{2,3,4} = \frac{\mathrm{N}}{2\pi}\, g_{2,3,4} \tag{3.359}$$

$$f_{5,6,7} = \frac{\mathrm{N}^2}{2\pi}\, g_{5,6,7} \tag{3.360}$$

$$f_8 = \frac{2\mathrm{N}^2}{\pi} g_8 \tag{3.361}$$

⟨85⟩. Solutions dont nous constaterons qu'elles correspondent souvent aux solutions atteintes asymptotiquement par les couplages.

⟨86⟩. Et l'on effectue une redéfinition identique des couplages $\{g_i^z\}_{i\in[\![1,9]\!]}$ avec les $\{f_i^z\}_{i\in[\![1,9]\!]}$ par :

$$f^z_{1,7,8,9,12} = \frac{\mathrm{N}}{\pi}\, g^z_{1,7,8,9,12} \tag{3.354}$$

$$f^z_{2,3,10} = \frac{\mathrm{N}}{2\pi}\, g^z_{2,3,10} \tag{3.355}$$

$$f^z_{4,5,11} = \frac{\mathrm{N}^2}{2\pi}\, g^z_{4,5,11} \tag{3.356}$$

$$f^z_6 = \frac{2\mathrm{N}^2}{\pi} g^z_6 \tag{3.357}$$

Les équations du groupe de renormalisation deviennent alors ⟨87⟩ :

$$\dot{f}_1 = \frac{1}{4}\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2\right)+\frac{N+2}{4N}f_9^2+\frac{N-2}{4N}\left(f_{10}^2+f_{11}^2+f_{12}^2\right) \tag{3.362}$$

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{2}f_1f_2+\frac{N^2-4}{2N^2}f_3f_4+\frac{1}{N^2}\left(f_3f_7+f_4f_6\right)+\frac{1}{2}f_9f_{10}+\frac{N-2}{2N}f_{11}f_{12} \tag{3.363}$$

$$\dot{f}_3 = \frac{1}{2}f_1f_3+\frac{N^2-4}{2N^2}f_2f_4+\frac{1}{N^2}\left(f_2f_7+f_4f_5\right)+\frac{1}{2}f_9f_{11}+\frac{N-2}{2N}f_{10}f_{12} \tag{3.364}$$

$$\dot{f}_4 = \frac{1}{2}f_1f_4+\frac{N^2-4}{2N^2}f_2f_3+\frac{1}{N^2}\left(f_2f_6+f_3f_5\right)+\frac{1}{2}f_9f_{12}+\frac{N-2}{2N}f_{10}f_{11} \tag{3.365}$$

$$\dot{f}_5 = \frac{N^2-1}{N^2}f_3f_4+\frac{1}{N^2}f_6f_7+\frac{N-1}{N}f_{11}f_{12} \tag{3.366}$$

$$\dot{f}_6 = \frac{N^2-1}{N^2}f_2f_4+\frac{1}{N^2}f_5f_7+\frac{N-1}{N}f_{10}f_{12} \tag{3.367}$$

$$\dot{f}_7 = \frac{N^2-1}{N^2}f_2f_3+\frac{1}{N^2}f_5f_6+\frac{N-1}{N}f_{10}f_{11} \tag{3.368}$$

$$\dot{f}_8 = \frac{N+1}{2N}f_9^2+\frac{N-1}{2N}\left(f_{10}^2+f_{11}^2+f_{12}^2\right) \tag{3.369}$$

$$\dot{f}_9 = \frac{N^2+N-2}{2N^2}f_1f_9+\frac{N-1}{2N}\left(f_2f_{10}+f_3f_{11}+f_4f_{12}\right)+\frac{1}{N^2}f_8f_9 \tag{3.370}$$

$$\dot{f}_{10} = \frac{N^2-N-2}{2N^2}\left(f_1f_{10}+f_3f_{10}+f_4f_{11}\right)+\frac{N+1}{2N}f_2f_9+\frac{1}{N^2}\left(f_6f_{12}+f_7f_{11}+f_8f_{10}\right) \tag{3.371}$$

$$\dot{f}_{11} = \frac{N^2-N-2}{2N^2}\left(f_1f_{11}+f_2f_{10}+f_4f_{12}\right)+\frac{N+1}{2N}f_3f_9+\frac{1}{N^2}\left(f_5f_{12}+f_7f_{10}+f_8f_{11}\right) \tag{3.372}$$

$$\dot{f}_{12} = \frac{N^2-N-2}{2N^2}\left(f_1f_{12}+f_2f_{11}+f_3f_{12}\right)+\frac{N+1}{2N}f_4f_9+\frac{1}{N^2}\left(f_5f_{11}+f_6f_{10}+f_8f_{12}\right) \tag{3.373}$$

Alors, si nous posons $f_i = f$, $\forall i \in [\![1,12]\!]$, alors nous obtenons deux équations identiques, la première étant donnée par $f_{i=1,\dots,8}$ (c'est-à-dire les termes réguliers), la seconde par $f_{i=9,\dots,12}$ (c'est-à-dire les termes d'umklapp) :

$$\dot{f} = \left[1+\delta_{\text{umk.}}\frac{N-1}{N}\right]f^2 \tag{3.374}$$

$$\delta_{\text{umk.}}\dot{f} = \delta_{\text{umk.}}\left[1+\frac{N-1}{N}\right]f^2 \tag{3.375}$$

Ainsi, pour les opérateurs réguliers ou pour tous les opérateurs, selon que les termes d'umklapp n'importent pas ou importent (respectivement), nous avons établi dans ces nouveaux cou-

⟨87⟩. Évidemment, les conditions initiales vont être changées en conséquence. Cependant, pour la lisibilité, et puisque leur étude constitue une part importante de la résolution du problème, nous reportons leur établissement aux chapitres suivants.

plages ⟨88⟩ une solution exacte des équations de RG, qui ressemble maintenant à un problème avec un seul couplage avec $\alpha = 1$ et $\alpha = 1 + (N-1)/N$ respectivement ⟨89⟩. Selon le signe de la condition initiale "effective", nous serons ainsi amené à une interaction marginale-non-pertinente ou, plus intéressant ⟨90⟩, marginale-pertinente avec :

$$f_i(\ell \simeq \ell^\star) \simeq f > 0, \qquad \forall i \in \begin{matrix} [\![1,9]\!] & \text{(non-umklapp)} \\ [\![1,12]\!] & \text{(umklapp)} \end{matrix} \tag{3.376}$$

Dans cette limite, les opérateurs d'interaction s'agencent de manière à former un modèle connu comme le *modèle de Gross-Neveu* [143], dont l'expression s'écrit, soit dans les générateurs $\{\mathcal{J}^A_{L,R}\}_{A\in[\![1,4N^2-1]\!]}$ de la théorie $SU(2N)_1$, soit directement dans les fermions chiraux ⟨91⟩ :

$$\mathcal{H}^{\text{GN}}_{\text{int.}} = \begin{cases} f\mathcal{J}^A_L\mathcal{J}^A_R & \text{(non-umklapp)} \\ \dfrac{\pi f}{2N}\left(L^\dagger_{m\alpha}R_{m\alpha} - \text{h.c.}\right)^2 & \text{(umklapp)} \end{cases} \tag{3.378}$$

Le premier modèle de Gross-Neveu, qui possède explicitement la symétrie $SU(2N)$ est complété par le terme (3.247) purement en charge, tandis que le second modèle de Gross-Neveu, qui possède la symétrie $SO(4N)$ ⟨92⟩, traite tous ensemble les 2N degrés de liberté. Dans les deux cas - comme nous l'avions annoncé - la symétrie du modèle est étendue après la renormalisation. Ceci est un exemple d'*acroissement dynamique de la symétrie*, abrégé en DSE ⟨93⟩, qui intervient généralement pour nous fournir un modèle plus simple et, pour notre exemple avec le modèle de Gross-Neveu, connu car intégrable [144, 145] : en quelques mots, il décrit que les degrés impliqués sont gappés et il donne les paramètres d'ordre. Cette approche a été initialement développée pour $N = 2$ par H.-H. Lin, L. Balents et M. Fisher [142] avec l'émergence d'une symétrie $SO(8)$ avant d'être finalement établie pour d'autre systèmes unidimensionnels [112, 146, 147, 148].

⟨88⟩. Il est trivial d'exprimer les g_i correspondent par les relations qui les lient aux f_i.
⟨89⟩. α est bien entendu au sens de l'équation (3.352).
⟨90⟩. Et nous constaterons que c'est ce qu'il arrive souvent. Intuitivement on l'imagine ainsi : avant d'arriver au régime asymptotique, les couplages entrent en compétition, et il suffit qu'un couplage commence à diverger pour emporter les autres.
⟨91⟩. Dans le cas $N = 2$, l'expression est plus simple et lisible encore :

$$\mathcal{H}^{\text{GN}}_{\text{int.}} = \begin{cases} \frac{f}{2}\left(\sum_{a=1}^{6}\mathcal{K}_a\right)^2 & \text{(non-umklapp)} \\ \frac{f}{2}\left(\sum_{a=1}^{8}\mathcal{K}_a\right)^2 & \text{(umklapp)} \end{cases} \tag{3.377}$$

Les symétries des modèles sont respectivement $SO(6)$ - localement identique à $SU(4)$ - et $SO(8)$.
⟨92⟩. Elle peut-être vue comme nous l'avons vu pour $N = 2$, c'est-à-dire d'une décomposition des 2N fermions de Dirac dans 4N fermions de Majorana.
⟨93⟩. Pour l'anglais *Dynamical Symmetry Enlargement*.

Pour beaucoup d'autres modèles que les équations de RG atteignent, le modèle de Gross-Neveu leur fait office de modèle de référence en ce sens qu'il peut leur être reliés par une transformation simple, qui n'est rien d'autre qu'une symétrie - simple également - des équations du groupe de renormalisation nommée *dualité*. Ces symétries émergentes et exactes à basse énergie, se rencontrent dans beaucoup de systèmes unidimensionnels et en particulier dans les modèles dont les interactions consistent en des perturbations autour d'une théorie conforme [146] comme c'est ici le cas. Elles permettent de déterminer les différents ordres en compétitions dans les modèles, c'est-à-dire qu'elle permettent de déterminer les phases associées aux modèles.

Concrètement, les dualités consistent en le changement des signes de certains couplages, avec la contrainte de laisser les équations du groupe de renormalisation inchangées. Par exemple, les quatre transformations suivantes des couplages satisfont cette propriété ⟨94⟩ :

$$\begin{matrix} g_{1,2,5,8,9,10} \\ g_{3,4,6,7,11,12} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_1} \begin{matrix} g_{1,2,5,8,9,10} \\ -g_{3,4,6,7,11,12} \end{matrix} \tag{3.379}$$

$$\begin{matrix} g_{1,3,6,8,9,11} \\ g_{2,4,5,7,10,12} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_2} \begin{matrix} g_{1,3,6,8,9,11} \\ -g_{2,4,5,7,10,12} \end{matrix} \tag{3.380}$$

$$\begin{matrix} g_{1,4,7,8,9,12} \\ g_{2,3,5,6,10,11} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_3} \begin{matrix} g_{1,4,7,8,9,12} \\ -g_{2,3,5,6,10,11} \end{matrix} \tag{3.381}$$

$$\begin{matrix} g_{1,2,3,4,5,6,7,8} \\ g_{9,10,11,12} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_4} \begin{matrix} g_{1,2,3,4,5,6,7,8} \\ -g_{9,10,11,12} \end{matrix} \tag{3.382}$$

Bien entendu, n'importe quelle produit de dualités sera à nouveau une dualité. De plus d'autres dualités n'apparaissent que dans le cas $N = 2$, lorsque les termes **bleus** des équations du groupe de renormalisation sont tués, notamment :

$$\begin{matrix} g_{1,5,6,7,8,9} \\ g_{2,3,4,10,11,12} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_5} \begin{matrix} g_{1,5,6,7,8,9} \\ -g_{2,3,4,10,11,12} \end{matrix} \tag{3.383}$$

Ces transformations peuvent s'écrire au niveau des opérateurs eux-mêmes, et ce faisant, nous permettent de relier les propriétés du modèle aux propriétés du modèle de Gross-Neveu (qui correspond lui à la dualité triviale, $\Omega_0 = \mathrm{Id}$) : nous obtiendrons par ce biais la physique de notre modèle, c'est-à-dire son éventuelle criticalité, son paramètre d'ordre ainsi que ses fonctions de corrélations. En résumé, tant que nous restons dans le paradigme des dualités au modèle de Gross-Neveu, tout reste simple : les équations du groupe de renormalisation nous ont donné la dualité - c'est-à-dire quels couplages sont affectés par le signe moins - et cela correspond à un modèle et une phase obtenus par l'application de ladite dualité sur le modèle de

⟨94⟩. Pour les couplages $\{f_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$, les transformations sont identiques.

Gross-Neveu et la phase qu'il décrit (et notamment nous obtiendrons des degrés gappés). En revanche, dès que l'on sort du paradigme des dualités - les cas "non-DSE" - tout est bien plus compliqué, et une analyse particulière à chaque modèle est alors nécessaire pour conclure.

Nous ne donnons pas ici un classement des dualités et des phases qui leur correspondent puisque c'est l'objet des CHAPITRE 4, pour le cas $N = 2$ où les dualités - plus nombreuses - s'écrivent dans les fermions de Majorana, et CHAPITRE 5 pour le cas $N > 2$. Dans ces chapitres, nous appliquerons tous les résultats que nous avons établis dans ce chapitre à l'étude des modèles définis du CHAPITRE 2.

Chapitre 4

Étude du cas N = 2

Dans ce chapitre, c'est au cas $N = 2$ que nous nous appliquons à utiliser les résultats de l'approche de basse énergie que nous avons établis jusqu'ici. Ces résultats que nous présentons ont été l'objet de deux publications [3, 2] et consistent, pour ce chapitre, en le traitement des cas $N = 2$ au quart de remplissage et demi-remplissage pour les modèles p-band, g-e et double-puits ⟨1⟩.

4.1 Le quart de remplissage

Dans cette section, nous exposons les résultats du cas $N = 2$ au quart de remplissage pour le modèle p-band [2] : nous savons déjà (pour ce remplissage) que les termes d'umklapp n'ont aucune prise sur la charge, si bien que la séparation spin-charge est dans ce cas réalisée. Il faut alors traiter la charge et les degrés non-abéliens séparément, et nous sommes rendus avec $1 + 7$ opérateurs d'interaction $\{O_i\}_{i\in[\![1,8]\!]}$: la charge y est traitée à l'aide de la bosonisation abélienne tandis que les degrés non-abéliens le seront à l'aide du groupe de renormalisation. Avant de traiter tous les points du diagramme de phase, nous donnons la physique de deux lignes de symétries - $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$ - qui possèdent une physique très semblable, et donnent en réalité à elles seules la structure du diagramme de phase de notre problème car, nous le verrons, elles constituent les lignes de transition entre les différentes phases.

⟨1⟩. Ainsi, tant qu'il n'est ni question du modèle d'échelle ni du modèle de double-puits, l'appellation quart et demi remplissage correspond respectivement à 1 et 2 atomes par site - qui peut contenir 4 degrés - et avec respectivement $k_F a_0 = \pi/4$ et $k_F a_0 = \pi/2$. Pour le modèle de double-puits, pour parvenir aux mêmes vecteurs d'onde $k_F a_0 = \pi/2$ (demi-remplissage) et $k_F a_0 = \pi/4$ (quart de remplissage), il faut respectivement $1/2$ et 1 atome par site, puisqu'ici un site peut contenir au plus 2 degrés.

4.1.1 Les lignes de symétrie

Sur la ligne $U_2 = 0$, l'écriture (2.89) rend compte de deux chaînes indépendantes - une selon $m = p_x$ et une autre selon $m = p_y$ - de remplissages identiques ⟨2⟩, à savoir du quart de remplissage ⟨3⟩. Sur chaque chaîne, la physique est donc semblable à la physique au quart de remplissage du modèle N = 2 (comparable à la physique incommensurable, voir FIGURE 1.3) :

— $U_1 > 0$ (domaine répulsif) : la charge et les degrés de spin sont critiques (c'est un liquide de Luttinger à deux composantes), la charge centrale de chaque chaîne est alors $c = 2$;
— $U_1 < 0$ (domaine attractif) : la charge est critique, mais les degrés de spin ont ouvert un gap (c'est un liquide de Luther-Emery), la charge centrale de chaque chaîne est alors $c = 1$.

En résumé pour le modèle entier, puisqu'il y a deux chaînes, il suffit d'additionner les charges centrales : dans le secteur répulsif, c'est une charge centrale $c = 2 + 2 = 4$ tandis que dans le domaine attractif, c'est une charge centrale $c = 1 + 1 = 2$. En réalité, ce résultat demeure sur la ligne $U_1 = U_2$ puisque, comme nous l'avions déjà remarqué, le modèle sur cette nouvelle ligne n'est pas un autre que celui de la ligne $U_2 = 0$, mais avec $U_1 \to 2U_2$ et $T^z \to T^x$, si bien que, comme il n'existe pas de transition de phase (ailleurs que sur la théorie libre à $U_1 = U_2 = 0$), les résultats sont identiques à ceci près qu'ils sont valables dans les degrés $\widetilde{p}'_x$ et $\widetilde{p}'_y$ (propres de σ^x, voir (2.92) et (2.93)) au lieu de p_x et p_y. Quant à la ligne harmonique, elle ne peut pas être réduite à deux chaînes indépendantes, et nous montrerons qu'elle ne correspond pas à une transition de phase mais qu'au contraire, elle appartient à une phase. Aussi, il est intéressant de connaître les comportements limites sur la ligne harmonique, et en particulier lorsque les paramètres d'interaction deviennent très grands devant les termes tunnels, c'est-à-dire dans la *limite de fort couplage*.

4.1.2 Le fort couplage

Le fort couplage s'applique en toute généralité à tous les modèles que nous considérons, pour tout N, et son idée est la suivante : dans la limite où les termes cinétiques, notés génériquement t ⟨4⟩, sont très petits devant les paramètres d'interaction, notés génériquement U ⟨5⟩ : c'est-à-dire lorsque $t \ll |U|$, la résolution de l'interaction $\mathcal{H}^{(t=0)}$ sur site (avec les termes en potentiel chimique, qui comptent) - qui est simplement celle d'un hamiltonien sur un espace

⟨2⟩. Les symétries $\mathbb{Z}_2^{p_x \leftrightarrow p_y} \times \mathrm{U}(1)_0^z$ l'assurent.
⟨3⟩. Il y a un atome pour 4 degrés en tout, il y a donc 1/2 degré pour chaque deux degrés des deux chaînes, soit quart de remplissage.
⟨4⟩. Ils peuvent correspondre à t ou $t_\perp$.
⟨5⟩. Selon les modèles ils peuvent être U, V, V_{ex} pour le modèle *g-e*, U, V, J_z pour le modèle de Hund, U_1, U_2 pour le modèle *p*-band, U, V, J_H pour le modèle d'échelle ou U, V pour le modèle de double-puits.

des états $\mathscr{F}$ de fermions à 2N degrés ⟨6⟩ - est pertinente car les interactions sont locales (elles se font sur site). Autrement dit, ce sont les niveaux d'énergie sur site (pilotés par les paramètres d'interaction), qui vont déterminer quels niveaux vont être avant tout favorisés, à savoir les niveaux dont les énergies vont correspondre au fondamental E_0 de $\mathcal{H}^{(t=0)}$. L'espace fondamental correspondant est noté $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$. Il va servir de base au calcul de l'interaction effective sur la chaîne. À l'occasion de la détermination de l'espace $\mathscr{F}_0$, il faudra adapter le potentiel chimique $\mu(U)$ pour que les états qu'il contient correspondent au bon remplissage $\bar{n}$ alors réalisé.

Cela établi, on considère alors deux sites pour lesquels le fondamental à $t = 0$ est donné par l'espace $\mathscr{F}_0^{\otimes 2} \subset \mathscr{F}^{\otimes 2}$: à partir de cet espace, et du projecteur dans cet espace $\mathcal{P}_0 = \sum_{\psi \in \mathscr{F}_0^{\otimes 2}} |\psi\rangle\langle\psi|$ (de complémentaire $\mathcal{Q}_0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}^{\otimes 2}} - \mathcal{P}_0$), on définit alors le hamiltonien effectif en perturbation en t/U (le terme en énergie qui lui correspondra sera d'ordre t^2/U) :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}} = \mathcal{P}_0 \left(E_0 + \mathcal{H}^{(0)} \mathcal{Q}_0 \left(E_0 - \mathcal{H}^{(t=0)} \right)^{-1} \mathcal{Q}_0 \mathcal{H}^{(0)} \right) \mathcal{P}_0 \tag{4.1}$$

Où $\mathcal{H}^{(0)}$ est le terme cinétique (d'ordre t) qui, agissant sur les états de $\mathscr{F}_0^{\otimes 2}$, va créer d'autres états de l'espace fondamental $\mathscr{F}_0^{\otimes 2}$, mais également des états excités de $\mathscr{F}^{\otimes 2} \backslash \mathscr{F}_0^{\otimes 2}$, seuls états sélectionnés par le projecteur $\mathcal{Q}_0$ et pondérés par l'inverse de la différence d'énergie (négative, comme d'habitude pour les perturbations au second ordre).

Cela fait, on met le résultat de côté, et l'on essaie deviner, selon l'espace fondamental $\mathscr{F}_0$ et selon les symétries du problème, quelle pourrait-être la forme de l'interaction (à l'ordre t^2/U). Prenons un exemple simple : imaginons - dans le cas $\mathrm{N} = 2$ et au remplissage $\bar{n} = 2$ - que nous soyons menés, pour une région donnée du diagramme de phase, à minimiser l'énergie des trois états du triplet nucléaire, c'est-à-dire :

$$\mathscr{F}_0 = \left\{ \left| \left(\bullet_{\mathrm{SU}(2)_o}, \square\!\square_{\mathrm{SU}(2)_n} \right)_{m_s} \right\rangle, m_s = -1, 0, +1 \right\} \tag{4.2}$$

Étant donnée la symétrie $\mathrm{SU}(2)_n$ du modèle, on va chercher une expression de $\mathcal{H}_{\text{eff.}}$ sous la forme d'un produit scalaire des générateurs $\boldsymbol{S}_i = \sum_m \boldsymbol{S}_{m,i}$ de spin 1 de $\mathrm{SU}(2)_n$ (ici définie pour toute la chaîne) :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}} \stackrel{?}{=} J(U) \sum_i \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_{i+1} \tag{4.3}$$

Si l'hypothèse sur la forme du hamiltonien effectif est juste, on trouve alors à l'aide de (4.1) l'expression de $J(U)$ en fonction des paramètres d'interaction, et l'on peut alors résoudre la physique à fort couplage. Dans notre exemple, si dans la zone du diagramme de phase en

⟨6⟩. Cet espace qui contient tous les états entre l'état vide $|0\rangle$ et l'état plein $\prod_{m\alpha} c^\dagger_{m\alpha} |0\rangle$, est un espace de dimension $\dim \mathscr{F} = 2^{2\mathrm{N}}$.

question J est positif, nous avons affaire à une chaîne de Heisenberg antiferromagnétique de spin 1 dont la physique à température nulle est donnée par la phase de Haldane.

En général, la dimension dim $\mathscr{F}_0$ n'est pas trop grande et permet de trouver facilement, selon les régions, la forme du hamiltonien effectif comme pour (4.3). Le cas présent - quart de remplissage du modèle p-band à N $= 2$ - est un exemple particulier où la dimension de l'espace fondamental est grande, et pour cause, pour toute la phase contenant la ligne harmonique ⟨7⟩ : on a dim $\mathscr{F}_0 = 8$, si bien que nous n'avons pas - pour l'heure - encore déterminé de modèle effectif à fort couplage ⟨8⟩. Nous nous appuierons ainsi sur les résultats de DMRG couplés à l'étude de basse énergie, laquelle nous commençons par les degrés de liberté de charge (la séparation spin-charge nous y invite).

4.1.3 Les degrés de liberté de charge

La résolution de la physique des degrés de liberté de charge est déjà discutée dans la section sur la bosonisation pourvu que l'on y précise les différentes quantités : l'expression (3.247) est valide, avec la condition de quart de remplissage $k_F a_0 = \pi/4$, une vitesse v_c et un paramètre K_c de Luttinger satisfaisant, en utilisant l'expression $g_c = g_8$ du modèle p-band (3.165) pour N $= 2$:

$$v_c = v_F \left[1 + \frac{2a_0(U_1 + U_2)}{\pi v_F}\right]^{1/2} \tag{4.4}$$

$$K_c = \left[1 + \frac{2a_0(U_1 + U_2)}{\pi v_F}\right]^{-1/2} \tag{4.5}$$

Si bien que le hamiltonien de charge, qui tient compte des termes d'umklapp, est :

$$\mathcal{H}_c^u = \frac{v_c}{2}\left[\left(\partial_x \widetilde{\Phi}_c\right)^2 + \left(\partial_x \widetilde{\Theta}_c\right)^2\right] - g_u \cos\left(\sqrt{16\pi K_c}\,\widetilde{\Phi}_c\right) \tag{4.6}$$

Et comme nous l'avions décrit, le comportement de la charge change selon la valeur du paramètre de Luttinger par rapport à $K_c^\star$ (équation (3.249)) :

$$K_c^\star = \frac{1}{2} \tag{4.7}$$

De plus, la bosonisation fournie l'expression d'une ligne de transition de Mott pour des

⟨7⟩. L'approche de basse énergie et le numérique montrerons que pour les autres phases, l'approche de fort couplage ne peut conclure.

⟨8⟩. Un essai avec la représentation adjointe $\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}$ de SU(3), qui est de dimension 8, pour faire apparaître un modèle "SU(3) anisotrope", s'est avéré infructueux.

valeurs critique $U_1^\star$ et $U_2^\star$ des paramètres d'interaction (on utilise l'expression (3.7) de vitesse de Fermi ⟨9⟩) :

$$U_1^\star + U_2^\star \simeq \frac{3\pi}{\sqrt{2}} t \tag{4.8}$$

Cependant, nous devons être méfiant avec cette ligne car elle n'appartient pas au régime de faible couplage, en effet, l'équation précédente est satisfaite lorsque les paramètres d'interaction et les termes tunnels sont du même ordre. Or ce résultat est issu de la bosonisation, qui est valide autour de théorie libre, tant que les interactions ne défigurent pas trop la relation de dispersion si particulière aux systèmes unidimensionnels. Aussi cette dernière équation donne une indication heuristique : c'est dans le régime répulsif que l'on peut escompter trouver un terme d'umklapp pertinent. En réalité, c'est le DMRG qui tranchera le régime atteint, c'est-à-dire l'existence ou l'absence du gap de charge.

Dans le régime critique, lorsque $K_c > 1/2$, les degrés de liberté sont critiques, si bien que les fonctions de corrélations - pour la partie charge - seront des fonctions algébriques en la distance, avec des puissances non-universelles dépendant de l'interaction, à savoir K_c. Quant au régime gappé, lorsque $K_c < 1/2$, il mène à considérer, selon le signe de g_u, que le champ bosonique de charge Φ_c est gelé autour de la valeur moyenne suivante, avec $p \in \mathbb{Z}$:

$$\langle \Phi_c \rangle_{[g_u>0]} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} p \tag{4.9}$$

$$\langle \Phi_c \rangle_{[g_u<0]} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left(p + \frac{1}{2} \right) \tag{4.10}$$

Avec une physique attendue en accord avec la seconde solution en $g_u < 0$, et que l'étude *via* le DMRG viendra, là encore, confirmer ou infirmer.

4.1.4 Les degrés non-abéliens

Nous étudions maintenant les degrés non-abéliens, dont l'étude se fait, on le sait, grâce à la procédure de renormalisation. Comme annoncé, sans compter la charge, déjà traitée, on compte

⟨9⟩. D'ailleurs ici, en présence de la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2^{p_x \leftrightarrow p_y}$, les deux vitesses orbitales sont identiques $v_{p_x F} = v_{p_y F} = v_F$, ainsi que les deux vecteurs d'onde de Fermi $k_F^{p_x} = k_F^{p_y} = k_F = \pi/4$.

7 opérateurs d'interaction, écrit dans les bilinéaires de Majorana :

$$
\begin{aligned}
O_1 &= \mathcal{K}_s^2/2 && (4.11)\\
O_2 &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_s/2 && (4.12)\\
O_3 &= \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s/2 && (4.13)\\
O_4 &= \mathcal{K}_5\mathcal{K}_s/2 && (4.14)\\
O_5 &= \mathcal{K}_5\mathcal{K}_6 && (4.15)\\
O_6 &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_5 && (4.16)\\
O_7 &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_6 && (4.17)
\end{aligned}
$$

Et avec les conditions initiales suivantes :

$$
\begin{aligned}
g_1 &= -\left(U_1+U_2\right) && (4.18)\\
g_2 &= -4U_2 && (4.19)\\
g_3 &= 2\left(U_2-U_1\right) && (4.20)\\
g_4 &= 0 && (4.21)\\
g_5 &= 2U_2 && (4.22)\\
g_6 &= U_1-U_2 && (4.23)\\
g_7 &= 0 && (4.24)
\end{aligned}
$$

Pour faire apparaître correctement les dualités, nous passons dans la base $\{f_i\}_{i\in[\![1,7]\!]}$ ⟨10⟩. Les conditions initiales en sont changées :

$$
\begin{aligned}
\dot{f}_1 &= \frac{1}{4}\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2\right) && (4.25)\\
\dot{f}_2 &= \frac{1}{2}f_1f_2+\frac{1}{4}\left(f_3f_7+f_4f_6\right) && (4.26)\\
\dot{f}_3 &= \frac{1}{2}f_1f_3+\frac{1}{4}\left(f_2f_7+f_4f_5\right) && (4.27)\\
\dot{f}_4 &= \frac{1}{2}f_1f_4+\frac{1}{4}\left(f_2f_6+f_3f_5\right) && (4.28)\\
\dot{f}_5 &= \frac{3}{4}f_3f_4+\frac{1}{4}f_6f_7 && (4.29)\\
\dot{f}_6 &= \frac{3}{4}f_2f_4+\frac{1}{4}f_5f_7 && (4.30)\\
\dot{f}_7 &= \frac{3}{4}f_2f_3+\frac{1}{4}f_5f_6 && (4.31)
\end{aligned}
$$

⟨10⟩. Dans le papier [2], nous utilisons les couplages $\lambda_{1,\dots,7}=\frac{\pi}{2}f_{1,\dots,7}$ - avec, ici, omission du a_0 - et qui ne changent strictement rien à l'issue de la conclusion.

Ainsi que les conditions initiales :

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -2(U_1+U_2)/\pi && (4.32)\\
f_2 &= -4U_2/\pi && (4.33)\\
f_3 &= -2(U_1-U_2)/\pi && (4.34)\\
f_4 &= 0 && (4.35)\\
f_5 &= 4U_2/\pi && (4.36)\\
f_6 &= 2(U_1-U_2)\pi && (4.37)\\
f_7 &= 0 && (4.38)
\end{aligned}
$$

Dualités

L'extraction de la physique de ces équations passe par la donnée des dualités auxquelles sont menées les conditions initiales par les équations du groupe de renormalisation. Dans le cas présent, il se trouve que toutes les limites atteintes réalisent le DSE, et que seules les quatre dualités suivantes sont atteintes ⟨11⟩ :

$$
\Omega_5 \quad : \quad \begin{matrix} f_{1,5,6,7} \\ f_{2,3,4} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_5} \begin{matrix} f_{1,5,6,7} \\ -f_{2,3,4} \end{matrix} \qquad (4.40)
$$

$$
\Omega_6 = \Omega_1\Omega_5 \quad : \quad \begin{matrix} f_{1,3,4,5} \\ f_{2,6,7} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_6} \begin{matrix} f_{1,3,4,5} \\ -f_{2,6,7} \end{matrix} \qquad (4.41)
$$

$$
\Omega_7 = \Omega_2\Omega_5 \quad : \quad \begin{matrix} f_{1,2,4,6} \\ f_{3,5,7} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_7} \begin{matrix} f_{1,2,4,6} \\ -f_{3,5,7} \end{matrix} \qquad (4.42)
$$

$$
\Omega_8 = \Omega_3\Omega_5 \quad : \quad \begin{matrix} f_{1,2,3,7} \\ f_{4,5,6} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_8} \begin{matrix} f_{1,2,3,7} \\ -f_{4,5,6} \end{matrix} \qquad (4.43)
$$

Afin de déterminer quelles transformations physiques induisent ces dualités, on leur fait correspondre les transformations sur les fermions de Majorana gauches ⟨12⟩, qui leur sont équi-

⟨11⟩. Dans l'article [2], les dualités ne sont pas numérotées ainsi (puisqu'elles seules apparaissent dans ce modèle avec ce remplissage). Voilà le dictionnaire entre les dualités de la **thèse** et dans l'**article** :

$$
\begin{matrix} \Omega_5 & \Omega_6 & \Omega_7 & \Omega_8 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_4 & \Omega_3 \end{matrix} \qquad (4.39)
$$

⟨12⟩. C'est une convention que d'appliquer ces transformations au fermions de Majorana gauches. Le faire sur les droits aurait été tout aussi juste.

valentes :

$$\Omega_5 \;:\; \xi_L^{1,2,3} \to -\xi_L^{1,2,3} \tag{4.44}$$
$$\Omega_6 \;:\; \xi_L^{4} \to -\xi_L^{4} \tag{4.45}$$
$$\Omega_7 \;:\; \xi_L^{6} \to -\xi_L^{6} \tag{4.46}$$
$$\Omega_8 \;:\; \xi_L^{5} \to -\xi_L^{5} \tag{4.47}$$

Et comme nous savons que les phases correspondantes seront déterminées à l'aide du modèle de Gross-Neveu correspondant, redonnons l'expression de l'interaction du modèle de Gross-Neveu SO(6) pour la cas N = 2 (voir (3.377), à "non-umklapp"), avec $f > 0$:

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\text{GN}} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a=1}^{6}\mathcal{K}_a\right)^2 \tag{4.48}$$

On devine aisément grâce à ces dualités les expressions des hamiltoniens correspondants :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_5} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a=1}^{3}\mathcal{K}_a - \sum_{a=4}^{6}\mathcal{K}_a\right)^2 \tag{4.49}$$
$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_6} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a\neq 4}\mathcal{K}_a - \mathcal{K}_4\right)^2 \tag{4.50}$$
$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_7} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a\neq 6}\mathcal{K}_a - \mathcal{K}_6\right)^2 \tag{4.51}$$
$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_8} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a\neq 5}\mathcal{K}_a - \mathcal{K}_5\right)^2 \tag{4.52}$$

Ces expressions manifestent la symétrie SO(6) présente pour tous ces modèles, résultat de l'accroissement dynamique de la symétrie. Et, à l'instar du modèle de Gross-Neveu SO(6), qui décrit une physique massive pour tous les degrés non-abéliens, ici, les quatre théories sont massives, et l'on est mené à écrire ces derniers hamiltoniens dans les champs non-abéliens (3.253, 3.254, 3.255, 3.256) et leur dual afin d'obtenir les configurations moyennes. Nous les

exprimons dans les fonctions trigonométriques de ces champs (3.263, 3.264, 3.265, 3.266) :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_5}_{\text{int.}} = -C_s^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} + \left(C_s^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) C_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.53}$$

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_6}_{\text{int.}} = -C_s^{\sqrt{4\pi}}C_{so}^{\sqrt{4\pi}} - C_s^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} - C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.54}$$

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_7}_{\text{int.}} = -C_s^{\sqrt{4\pi}}C_o^{\sqrt{4\pi}} - C_s^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} - C_o^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.55}$$

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_8}_{\text{int.}} = -C_s^{\sqrt{4\pi}}C_{so}^{\sqrt{4\pi}} + \left(C_s^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.56}$$

Les configurations moyennes qui vont, avec les résultats sur la charge, caractériser les phases associées aux dualités, sont celles qui minimisent ces différentes expressions, ainsi la limite semiclassique bloque les bosons non-abéliens dans les configurations suivantes :

$$\Omega_5 : \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Phi_o\rangle = \sqrt{\pi}/2, \quad \langle\Theta_{so}\rangle = 0 \tag{4.57}$$

$$\Omega_6 : \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Theta_o\rangle = 0, \quad \langle\Phi_{so}\rangle = 0 \tag{4.58}$$

$$\Omega_7 : \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Phi_o\rangle = 0, \quad \langle\Theta_{so}\rangle = 0 \tag{4.59}$$

$$\Omega_8 : \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Theta_o\rangle = \sqrt{\pi}/2, \quad \langle\Phi_{so}\rangle = 0 \tag{4.60}$$

Il se trouve, lors de la minimisation, qu'on aurait pu choisir d'autres expressions pour les moyennes, en effet les fonctions trigonométriques intervenant dans les hamiltoniens d'interaction étant $\sqrt{\pi}$- périodique dans les champs bosoniques, on aurait pu ajouter, à notre gré, et indépendamment pour chaque degré, des multiples entiers de $\sqrt{\pi}$. On peut se demander dans quelle mesure faire cela possède un sens physique. Souvenons-nous d'abord que les champs peuvent être reliés *via* l'invariance de jauge (3.220) ⟨13⟩ : si cela est possible, alors les deux configurations sont physiquement équivalentes. Les transformations de jauge s'écrivent de la manière suivante, où $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$:

$$\Phi_c \xrightarrow{\text{jauge}} \Phi_c + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tag{4.61}$$

$$\Phi_s \xrightarrow{\text{jauge}} \Phi_s + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(k_1 - k_2 + k_3 - k_4) \tag{4.62}$$

$$\Phi_o \xrightarrow{\text{jauge}} \Phi_o + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \tag{4.63}$$

$$\Phi_{so} \xrightarrow{\text{jauge}} \Phi_{so} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(k_1 - k_2 - k_3 + k_4) \tag{4.64}$$

⟨13⟩. Attention que l'invariance de jauge ajoute également $\sqrt{\pi}$ aux champs, mais ceux-ci sont chiraux, la transformation sur les champ totaux et duaux sera différente, surtout que l'on peut choisir indépendamment quels champs chiraux, degré compris, seront soumis à la transformation de jauge.

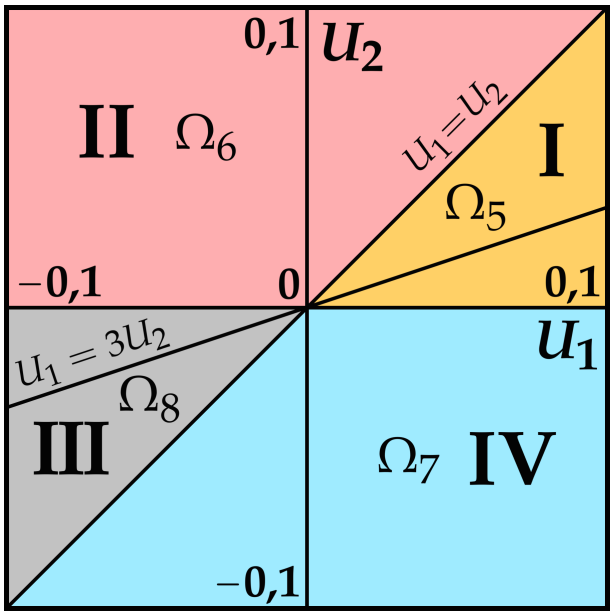


FIGURE 4.1 – Résultat brut (publié dans [2]) du groupe de renormalisation pour le modèle p-band, $N = 2$, au quart de remplissage : les quatre dualités atteintes par le groupe de renormalisation dans le diagramme de phase. Les différentes zones, **I**, **II**, **III** et **IV**, associées aux dualités $\Omega_5, \Omega_6, \Omega_8$ et Ω_7 respectivement, et sont séparées par les deux droites d'équations respectives $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$.

Et les mêmes relations pour les champs duaux, mais avec d'autres entiers $k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 \in \mathbb{Z}$. Considérons alors la première configuration (4.57) pour laquelle l'effet de la transformation de jauge sur le champ Φ_{so} n'a pas d'intérêt puisque c'est son dual qui se moyenne ⟨14⟩. Alors en considérant les transformations de jauge $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$, on fournit les transformations de jauge qui ajoutent $\sqrt{\pi}$ respectivement à Φ_s et Φ_o (tout en laissant invariant le champ Φ_c de charge). De même du côté dual - l'effet de la transformation de jauge ayant aucune importance sur les champs Θ_s et Θ_o ⟨15⟩, on ajoute $\sqrt{\pi}$ pour le champs dual Θ_{so} en choisissant $(k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) = (1, -1, 0, 0)$ (tout en laissant la charge inchangée). Autrement dit, pour cette configuration, mais cela peut-être tout aussi aisément montré pour les trois autres (4.58, 4.59, 4.60), toutes les configurations que la minimisation du hamiltonien permet sont physiquement équivalentes. Physiquement, cela signifie simplement que la phase correspondante est non-dégénérée ! Il n'y a qu'une phase. Dans la suite, à $N = 2$, nous verrons des exemples où deux configurations ne pourront être reliés par des transformations de jauge. En revanche, elles le seront par une translation élémentaire (3.244) du réseau : physiquement, nous auront alors un fondamental doublement dégénéré qui brise l'invariance par translation.

⟨14⟩. Le champ Φ_{so} est donc tout à fait fluctuant.
⟨15⟩. Ils fluctuent puisque leus dual se moyennent.

4.1.5 Les phases dans l'approche de bases énergie

À l'aide de ces résultats sur la charge et sur les degrés non-abéliens, de ceux que fournit le groupe de renormalisation (voir FIGURE 4.1), mais encore de ceux du DMRG, nous allons reconstruire le diagramme de phase.

Tout d'abord, le groupe de renormalisation décrit quatre zones qui, n'étant pas déterminées, sont trivialement notées **I**, **II**, **III** et **IV** et disposées comme sur la FIGURE 4.1. Les lignes de transition nous sont connues puisqu'il s'agit des lignes de symétrie $\mathrm{U}(1)_o$, d'équation $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$, et dont la physique est également connue et décrite précédemment. Les quatre zones possèdent des limites qui les associent comme suit aux dualités :

$$\mathbf{I} \quad : \quad \Omega_5 \tag{4.65}$$
$$\mathbf{II} \quad : \quad \Omega_6 \tag{4.66}$$
$$\mathbf{III} \quad : \quad \Omega_8 \tag{4.67}$$
$$\mathbf{IV} \quad : \quad \Omega_7 \tag{4.68}$$

Posséder les dualités, et donc les modèles associés aux degrés non-abéliens, n'est cependant pas suffisant pour conclure : il faut aussi intégrer les résultats sur la charge, dont le comportement peut être tantôt critique, tantôt gapé. Ainsi, à l'intérieur d'une zone - **I**, **II**, **III** ou **IV** - il peut exister plusieurs phases. Or nous savons que l'équation (4.8) est une mauvaise équation, qui cependant donne l'indication que c'est dans le régime répulsif que le gap de charge s'ouvrira. Comme nous le verrons (voir FIGURE 4.3) partout dans le diagramme de phase, l'approche de bases énergie décrit partout une absence de gap, excepté dans la zone **I** où les choses se compliquent. Nous procédons zone par zone.

La zone I

La zone **I**, comprise entre $U_1 > 0$ et $U_1 > U_2$, est associée, pour sa partie non-abélienne, au modèle $\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_5}$ (4.49) et à la configuration (4.57) de la dualité Ω_5 :

$$\Omega_5 \quad : \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Phi_o \rangle = \sqrt{\pi}/2, \quad \langle \Theta_{so} \rangle = 0 \tag{4.69}$$

Distinguons maintenant selon la charge, et commençons par le cas critique avec $K_c > 1/2$. Dans ce cas nous savons que la charge est critique, caractérisée par le paramètre de Luttinger K_c : puisque les degrés non-abélien sont gappés, on attend un comportement dominant algébrique pour les fonctions de corrélation du paramètres d'ordre, dont la puissance sera fonction de K_c. Reste à déterminer quel paramètre aura la plus faible décroissance et dominera ainsi les autres. Pour y parvenir, souvenons-nous des résultats du CHAPITRE 1, en particulier ceux sur le cas à un atome par site, où il existait une compétition entre une phase supraconductrice et

une densité (MS et CDW). La différence ici, est une structure bien différente (par exemple la symétrie nucléaire ne porte plus sur tous les degrés) qui permet l'écriture d'une large gamme d'opérateurs supraconducteurs et de densité. Pour choisir les bons, il faut que ces derniers condensent ⟨16⟩ dans la configuration (4.69). De plus, contrairement au modèle à une orbitale du CHAPITRE 1, ici la symétrie n'est que SU(2), si bien que seuls deux fermions sont suffisant pour écrire un singulet, nous proposons alors le paramètre suivant, que nous écrivons sur le réseau, puis dans les fermions de Dirac, et enfin dans les bosons ⟨17⟩ :

$$\mathcal{O}_{\text{BCSbond}} = c_{p_x\uparrow,i+1}c_{p_y\downarrow,i} - c_{p_x\downarrow,i+1}c_{p_y\uparrow,i} - (p_x \leftrightarrow p_y) \tag{4.70}$$

$$\overset{\text{Dir.}}{\simeq} i\sqrt{2}\,a_0\Big(R_{p_x\uparrow}L_{p_y\downarrow} + R_{p_y\downarrow}L_{p_x\uparrow} - R_{p_x\downarrow}L_{p_y\uparrow} - R_{p_y\uparrow}L_{p_x\downarrow}\Big) \tag{4.71}$$

$$\overset{\text{bos.}}{\simeq} -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sigma^z e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c}\left(S_s^{\sqrt{\pi}}C_o^{\sqrt{\pi}}\widetilde{S}_{so}^{\sqrt{\pi}} + iC_s^{\sqrt{\pi}}S_o^{\sqrt{\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{\pi}}\right) \tag{4.72}$$

Où σ^z est la matrice de Pauli issue du produit des facteurs de Klein (3.260). Le nom - BCS-bond - vient de ce qu'il s'agit d'un opérateur supraconducteur ⟨18⟩ qui décrit un lien entre deux sites. Cela dit, voilà un opérateur dont l'expression bosonisée (4.72) condense dans la configuration semiclassique (4.69), si bien qu'on obtient $\mathcal{O}_{\text{BCSbond}} \sim e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c}$, expression de laquelle on déduit le comportement de la fonction de corrélation à temps égaux ⟨19⟩ :

$$\langle \mathcal{O}^\dagger_{\text{BCSbond}}(x)\mathcal{O}_{\text{BCSbond}}(0)\rangle \sim x^{-1/2K_c} \;>\; x^{-1} \quad (K_c = 1/2) \tag{4.75}$$

Passant aux densités, on remarque que les densités à deux fermions (encore appelées "à $2k_F$") - telles celles de la fonction de corrélation (1.32) - ont des valeurs moyennes nulles et des corrélation à courte distance. Passant au niveau supérieur, les densités à $4k_F$ ⟨20⟩, dont il existe une mul-

⟨16⟩. En toute rigueur il ne condense pas, puisque la charge est critique. Dans la suite on utilisera le raccourci de dire "condenser" lorsque ce sera seulement vrai pour le secteur non-abélien.

⟨17⟩. Dans le cas N = 2, plutôt qu'écrire $\alpha = 1,2$, on repasse à l'écriture traditionnelle issue du modèle de Hubbard : $\alpha = \uparrow,\downarrow$.

⟨18⟩. La théorie *BCS* - pour ses inventeurs : *Bardeen*, *Cooper* - utilise ce paramètre d'ordre pour décrire supraconductivité conventionelle.

⟨19⟩. La façon dont intervient la puissance en K_c se comprend ainsi : dans la théorie libre, c'est-à-dire celle écrite en $\widetilde{\Phi}_c$ et $\widetilde{\Theta}_c$, les opérateurs de vertex $\exp\big(i\beta\widetilde{\Phi}_c\big)$ et $\exp\big(i\beta\widetilde{\Theta}_c\big)$ ont les dimensions d'échelle "pures" - sans l'interaction - à savoir $\Delta = \beta^2/4\pi$. Ainsi, *via* les relations (3.241) et (3.242), les dimensions des champs $\exp\big(i\beta\Phi_c\big)$ et $\exp\big(i\beta\Theta_c\big)$ sont respectivement :

$$\Delta\big[e^{i\beta\Phi_c}\big] = \frac{K_c\beta^2}{4\pi} \tag{4.73}$$

$$\Delta\big[e^{i\beta\Theta_c}\big] = \frac{\beta^2}{4\pi K_c} \tag{4.74}$$

⟨20⟩. Discutées pour l'échelle de Hubbard dans [149].

titude d'exemplaires qui condense dans (4.69), elles sont quant à elles moins dominantes que la supraconductrice. Pour le montrer, prenons un exemple avec $\rho^{(1)}_{4k_F} \sim \sum_{m\alpha} L^\dagger_{m\alpha} R_{m\alpha} L^\dagger_{m\bar{\sigma}} R_{m\bar{\sigma}}$, dont l'expression bosonisée se comporte comme suit :

$$\rho^{(1)}_{4k_F} \sim e^{i\sqrt{4\pi}\Phi_c} C_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.76}$$

Si bien que la fonction de corrélation correspondante est :

$$\left\langle \rho^{(1)\dagger}_{4k_F}(x) \rho^{(1)}_{4k_F}(0) \right\rangle \sim x^{-2K_c} \quad < \quad x^{-1} \quad (K_c = 1/2) \tag{4.77}$$

Et il en est ainsi de toute les fonctions de corrélation en densité à $4k_F$ qui, si elle condensent, se comportent comme $e^{i\sqrt{4\pi}\Phi_c}$. En conclusion, dans tous les régimes critiques $K_c > 1/2$, c'est le paramètre supraconducteur qui possède la décroissante la moins lente : il domine et donne aux zones concernées la phase *Bond centered BCS*, avec une charge centrale $c = 1$.

Dans la phase de Mott, lorsque $K_c < 1/2$, la charge possède un gap comme les degrés non-abéliens, ainsi le champ Φ_c se moyenne (selon (4.9) ou (4.10)) et son dual Θ_c est tout à fait fluctuant, tuant de suite le paramètre d'ordre supraconducteur $\mathcal{O}_{\text{BCSbond}}$. Quant aux termes à $4k_F$ - tel (4.76) - ils possèdent une valeur moyenne non-nulle, alors, à la manière de [150] on étudie les termes renormalisés à $4k_F$ issus des densités suivantes :

$$\mathcal{O}_{\text{BOW}_{\pi,q}} = (-1)^i \sum_\alpha \left(c^\dagger_{p_x\alpha,i+1} c_{p_x\alpha,i} + \cos(q) c^\dagger_{p_y\alpha,i+1} c_{p_x\alpha,i} + \text{h.c.} \right) \tag{4.78}$$

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}_{\pi,q}} = (-1)^i \sum_\alpha \left(c^\dagger_{p_x\alpha,i} c_{p_x\alpha,i} + \cos(q) c^\dagger_{p_y\alpha,i} c_{p_x\alpha,i} \right) \tag{4.79}$$

Où $q = 0$ ou π. L'appellation CDW est connue, quant à BOW, elle signifie *Onde en liens* ⟨21⟩, due à ce qu'elle apparie des atomes sur des sites voisins. Dans les références [150, 151, 152] on fournit les résultats qui permettent d'écrire les paramètres d'ordre précédent à $4k_F$:

$$\mathcal{O}_{\text{BOW}_{\pi,\pi}} \sim C_c^{\sqrt{4\pi}} S_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.80}$$

$$\mathcal{O}_{\text{BOW}_{\pi,0}} \sim S_c^{\sqrt{4\pi}} C_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.81}$$

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}_{\pi,\pi}} \sim S_c^{\sqrt{4\pi}} S_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.82}$$

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}_{\pi,0}} \sim C_c^{\sqrt{4\pi}} C_o^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.83}$$

Or la configuration (4.69) sur le champ orbital - à savoir $\langle \Phi_o \rangle = \sqrt{\pi}/2$ - induit que $\mathcal{O}_{\text{BOW}_{\pi,\pi}} = \mathcal{O}_{\text{CDW}_{\pi,\pi}} = 0$. C'est alors le signe de g_u qui déterminera la moyenne de la charge ((4.9) ou (4.10)),

⟨21⟩. De l'anglais *Bond-Order Waves*.

et finalement le bon paramètre d'ordre :

$$g_u < 0 \quad : \quad \langle \mathcal{O}_{\mathrm{BOW}_{\pi,0}} \rangle \neq 0 \tag{4.84}$$
$$g_u > 0 \quad : \quad \langle \mathcal{O}_{\mathrm{CDW}_{\pi,0}} \rangle \neq 0 \tag{4.85}$$

Et comme nous nous attendons à $g_u < 0$, un ordre en lien uniforme en $4k_F$ - qui brise la symétrie de translation en un fondamental doublement dégénéré ⟨22⟩ - est attendu avec une charge centrale $c = 0$.

La zone II

La zone **II** est comprise entre $U_2 > U_1$ et $U_2 > 0$, est associée, pour sa partie non-abélienne, au modèle $\mathcal{H}^{\Omega_6}_{\mathrm{int.}}$ (4.52) et à la configuration (4.58) de la dualité Ω_6 :

$$\Omega_6 \quad : \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Theta_o \rangle = 0, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0 \tag{4.86}$$

Ici, le DMRG montrera qu'il n'y a plus lieu de distinguer une zone avec un gap de charge, et nous parvenons à un cas très semblable à la phase supraconductrice, où la théorie de charge induit des comportements algébriques pour les corrélations. Reste à déterminer quel paramètre d'ordre sera dominant. L'argument que nous avions donné pour les fonctions de corrélation des densités à $4k_F$ qui condensaient, et notamment leur comportement en loi de puissance, sous-dominant par rapport au paramètre supraconducteur, est ici identique, alors si l'on trouve un paramètre supraconducteur qui condense dans la configuration (4.86), alors nous aurons déterminé la phase. Nous proposons le paramètre suivant :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{BCS}_-} = c_{p_x\uparrow,i} c_{p_x\downarrow,i} - c_{p_y\uparrow,i} c_{p_y\downarrow,i} \tag{4.87}$$
$$\overset{\text{Dir.}}{\simeq} a_0 \left(L_{p_x\uparrow} R_{p_x\downarrow} + R_{p_x\uparrow} L_{p_x\downarrow} - L_{p_y\uparrow} R_{p_y\downarrow} - R_{p_y\uparrow} L_{p_y\downarrow} \right) \tag{4.88}$$
$$\overset{\text{bos.}}{\simeq} \frac{2i\sigma^x}{\pi} e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c} \left(C_s^{\sqrt{\pi}} \widetilde{C}_o^{\sqrt{\pi}} C_{so}^{\sqrt{\pi}} + i S_s^{\sqrt{\pi}} \widetilde{S}_o^{\sqrt{\pi}} S_{so}^{\sqrt{\pi}} \right) \tag{4.89}$$

Où σ^x est la matrice de Pauli des facteurs de Klein (3.258). L'indice "-" dans le nom BCS_- se rapporte au signe moins qui intervient dans l'expression (4.87) sur le réseau : le paramètre d'ordre est impair dans l'échange $p_x \leftrightarrow p_y$. Cet opérateur condense bien dans la configuration (4.86), ainsi, de même que précédemment ⟨23⟩, $\mathcal{O}_{\mathrm{BCS}_-} \sim e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c}$, de telle manière que la fonction de corrélation correspondante se comporte comme :

$$\langle \mathcal{O}^\dagger_{\mathrm{BCS}_-}(x) \mathcal{O}_{\mathrm{BCS}_-}(0) \rangle \sim x^{-1/2K_c} \tag{4.90}$$

⟨22⟩. Selon où est formé le premier lien.
⟨23⟩. Et cela confirme la remarque sur les densités à $4k_F$

La phase attendue dans la zone **II** est alors la phase BCS_- avec une charge centrale $c = 1$.

La zone III

La zone **III** est comprise entre $U_2 > U_1$ et $U_2 < 0$, elle est associée, pour sa partie non-abélienne, au modèle $\mathcal{H}^{\Omega_8}_{\text{int.}}$ (4.52) et à la configuration (4.60) de la dualité Ω_8 :

$$\Omega_8 \quad : \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Theta_o \rangle = \sqrt{\pi}/2, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0 \tag{4.91}$$

Ici encore, le DMRG montrera qu'il ne sert à rien de distinguer une zone avec un gap de charge ⟨24⟩, les corrélations des densités à $4k_F$ seront sous-dominantes, alors il ne reste plus qu'à trouver un paramètre supraconducteur qui condense dans la configuration (4.91). Nous proposons le paramètre suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\text{BCS}_+} &= c_{p_x\uparrow,i} c_{p_x\downarrow,i} + c_{p_y\uparrow,i} c_{p_y\downarrow,i} && (4.92)\\
&\overset{\text{Dir.}}{\simeq} a_0 \left(L_{p_x\uparrow} R_{p_x\downarrow} + R_{p_x\uparrow} L_{p_x\downarrow} + L_{p_y\uparrow} R_{p_y\downarrow} + R_{p_y\uparrow} L_{p_y\downarrow} \right) && (4.93)\\
&\overset{\text{bos.}}{\simeq} \frac{2\sigma^x}{\pi} e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c} \left(C_s^{\sqrt{\pi}} \widetilde{S}_o^{\sqrt{\pi}} C_{so}^{\sqrt{\pi}} - i S_s^{\sqrt{\pi}} \widetilde{C}_o^{\sqrt{\pi}} S_{so}^{\sqrt{\pi}} \right) && (4.94)
\end{aligned}$$

L'indice "+" dans le nom BCS_+ se rapporte au signe plus qui intervient dans l'expression (4.92) sur le réseau : le paramètre d'ordre est pair dans l'échange $p_x \leftrightarrow p_y$. Il condense bien dans la configuration (4.91), ainsi, de même que précédemment, $\mathcal{O}_{\text{BCS}_+} \sim e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c}$, de telle manière que la fonction de corrélation correspondante se comporte comme :

$$\langle \mathcal{O}^\dagger_{\text{BCS}_+}(x) \mathcal{O}_{\text{BCS}_+}(0) \rangle \sim x^{-1/2K_c} \tag{4.95}$$

La phase attendue dans la zone **III** est alors la phase BCS_+ avec une charge centrale $c = 1$.

La zone IV

La zone **IV** est comprise entre $U_1 > U_2$ et $U_2 < 0$, elle est associée, pour sa partie non-abélienne, au modèle $\mathcal{H}^{\Omega_7}_{\text{int.}}$ (4.51) et à la configuration (4.59) de la dualité Ω_7 :

$$\Omega_7 \quad : \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Phi_o \rangle = 0, \quad \langle \Theta_{so} \rangle = 0 \tag{4.96}$$

Encore ici, il n'y pas lieu de s'inquiéter d'un gap en charge, les corrélations à $4k_F$ peuvent

⟨24⟩. D'autant plus que nous sommes dans la zone à l'opposée de la transition de Mott (4.8) issue de la bosonisation, à savoir dans le domaine attractif.

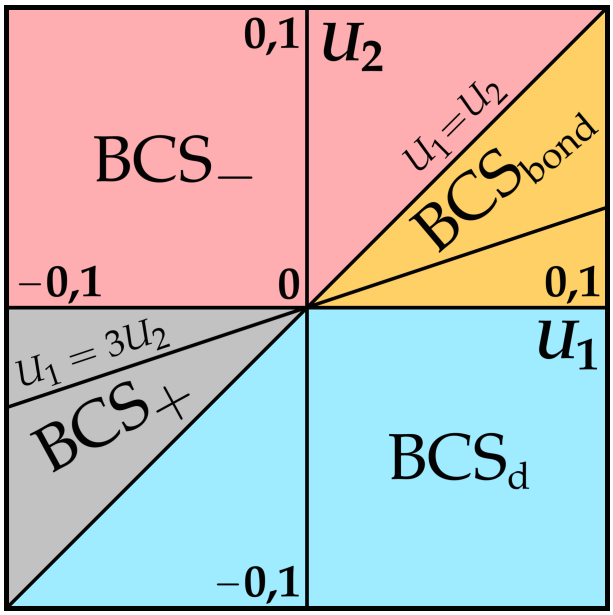


FIGURE 4.2 – Diagramme de phase incommensurable : le gap de charge ne s'ouvre pas, et les quatre zones correspondent aux différentes instabilités supraconductrices.

être oubliées, et l'on propose dans cette zone le paramètre d'ordre supraconducteur suivant :

$$\mathcal{O}_{\text{BCSd}} = c_{p_x\uparrow,i}c_{p_y\downarrow,i} - c_{p_x\downarrow,i}c_{p_y\uparrow,i} \tag{4.97}$$

$$\overset{\text{Dir.}}{\simeq} a_0\left(L_{p_x\uparrow}R_{p_y\downarrow} + R_{p_x\uparrow}L_{p_y\downarrow} - L_{p_x\downarrow}R_{p_y\uparrow} - R_{p_x\downarrow}L_{p_y\uparrow}\right) \tag{4.98}$$

$$\overset{\text{bos.}}{\simeq} \frac{2\sigma^z}{\pi}e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c}\left(S_s^{\sqrt{\pi}}S_o^{\sqrt{\pi}}\widetilde{S}_{so}^{\sqrt{\pi}} - iC_s^{\sqrt{\pi}}C_o^{\sqrt{\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{\pi}}\right) \tag{4.99}$$

Le nom, BCS$_d$ provient de ce que ce le paramètre d'ordre rend compte d'une instabilité supraconductrice en onde-d. Elle condense bien dans la configuration (4.96) et possède la fonction de corrélation suivante :

$$\langle \mathcal{O}^\dagger_{\text{BCSd}}(x)\mathcal{O}_{\text{BCSd}}(0)\rangle \sim x^{-1/2K_c} \tag{4.100}$$

La phase attendue dans la zone **IV** est alors la phase BCS$_d$ avec une charge centrale $c = 1$.

4.1.6 L'approche numérique et le diagramme de phase

Les phases étant maintenant décrites, nous allons maintenant croiser l'approche de basse énergie avec l'approche de DMRG ⟨25⟩. Cette dernière a été réalisée pour un atome par site, pour des valeur réalistes - intermédiaires ou fortes - des paramètres d'interaction (U_1, U_2) (le terme tunnel, fixé à $t = 1$, sert d'unité pour l'énergie). Sont utilisées, des chaînes avec des

⟨25⟩. Ces résultats numériques sont le travail de S. Capponi.

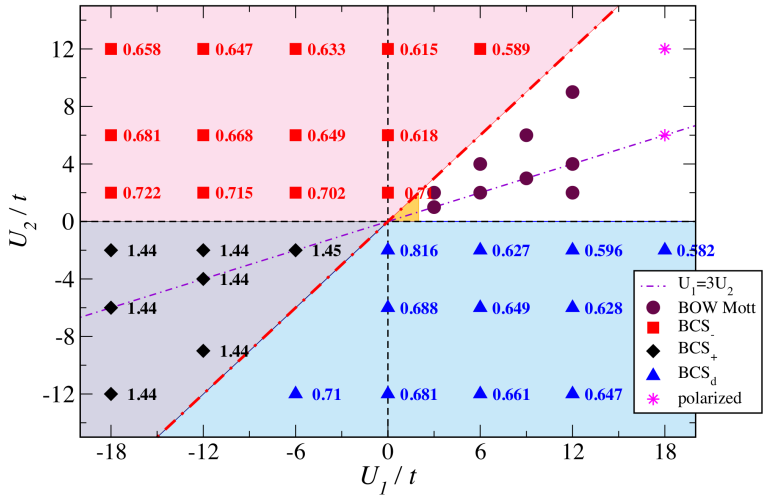


FIGURE 4.3 – Diagramme de phase numérique obtenu par DMRG (publié dans [2]) avec une longueur $L = 128$. Les valeurs numériques sur le diagramme correspondent au paramètre de Luttinger en ces points.

conditions aux limites ouvertes, de longueurs ⟨26⟩ $L = 64$ et $L = 128$; et jusqu'à 4000 états de l'espace de Hilbert sont gardés pour les calculs ⟨27⟩.

Le diagramme de phase associé aux valeurs du paramètre de Luttinger, est présenté FIGURE 4.3. Hors de la zone **I**, on constate qu'il est identique à la prédiction de l'approche basse énergie ; d'ailleurs, dans le cas incommensurable - où le gap en charge ne s'ouvre jamais - on montre que DMRG et approche de basse énergie s'accordent parfaitement sur toutes les zones du diagramme (voir FIGURE 4.2).

Au quart de remplissage, le DMRG rend compte ⟨28⟩, dans les zones **II**, **III** et **IV**, d'un comportement supraconducteur (voir FIGURE 4.4) confirmé par les valeurs des paramètres de Luttinger dans ces zones (voir FIGURE 4.3). Pour la zone **I**, tout est plus compliqué et notamment à cause de la difficulté de déterminer la phase, d'une part - à faible couplage - à cause de l'influence de la grande charge centrale $c = 4$ de la théorie libre, et d'autre part - à de plus grands

⟨26⟩. C'est-à-dire le nombre de sites.
⟨27⟩. Le DMRG - comme exposé dans l'INTRODUCTION - utilise *via* la décomposition de Schmidt pour écrire la théorie en états de produit de matrice. Cette décomposition permet de trier les états et leur importance physique en leur associant un poids qui caractérise cette dernière (1 étant l'importance maximale, 0 la minimale). Ainsi, en ne gardant que les états les plus représentatifs, on utilise une théorie tronquée en états : avec 4000 états et dans ce cas, l'état le moins important gardé a un poids $\lesssim 10^{-10}$.
⟨28⟩. À cause des conditions au limite ouvertes, les fonctions de corrélation $C[\mathcal{O}]$ d'un opérateur $\mathcal{O}$ sont comptées à partir de premier quart de la chaîne :

$$C[\mathcal{O}](x) = \langle \mathcal{O}^\dagger(L/4+x)\mathcal{O}(L/4)\rangle \tag{4.101}$$

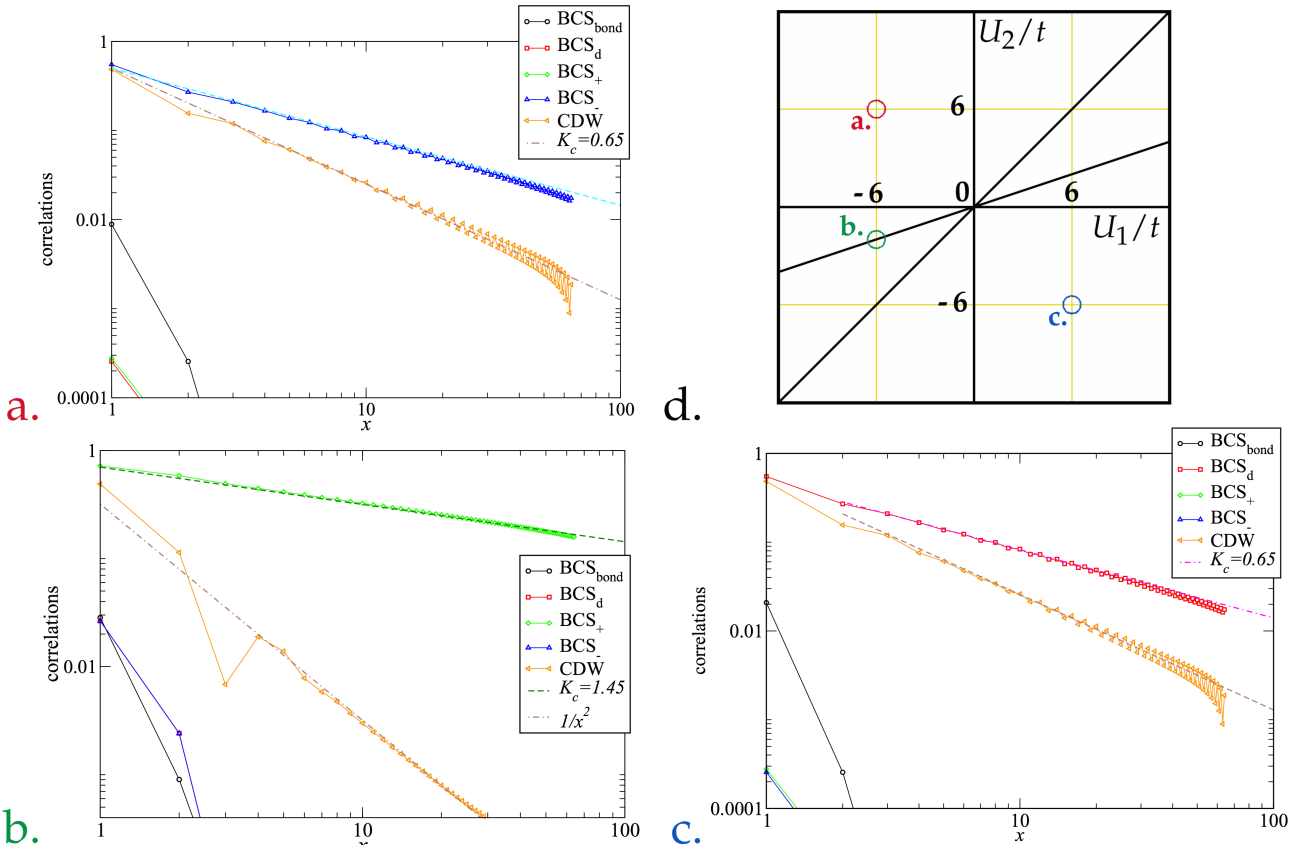


FIGURE 4.4 – Résultats du DMRG (publié dans [2]) en trois points **a.**, **b.** et **c.** des zones respectives **II**, **III** et **IV** (répartis comme présenté en **d.**). L'échelle logarithmique permet de comparer les comportements en puissance des diverses fonctions de corrélations et d'en déduire la phase dominante.

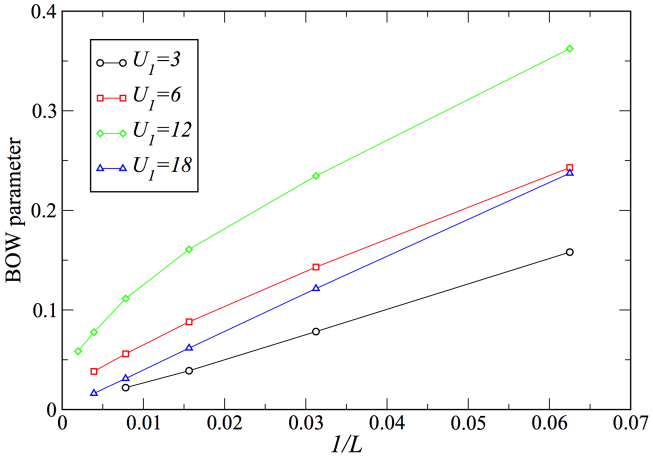


FIGURE 4.5 – Importance relative du paramètre d'ordre BOW selon le couplage U_1 sur la ligne harmonique : on voit aux plus faibles couplages (de $U_1 = 3t$ à $U_1 = 12t$) une montée en puissance, suivie d'une décroissance ($U_1 = 18t$), effet de la compétition avec la phase polarisée (publié dans [2]).

couplages - à cause de l'ouverture exponentielle du gap (dans les paramètres d'interaction), qui rend difficile de distinguer la paramètre d'ordre vainqueur de la compétition des phases. Néanmoins, l'étude du DMRG sur la ligne harmonique donne l'interprétation suivante : pour de faibles valeurs des paramètres d'ordre (la petite zone en **jaune** dans le diagramme de la FIGURE 4.3), est attendue la phase supraconductrice BCS_{bond}. Pour des régimes plus grands, comme montré dans la FIGURE 4.5, la paramètre d'ordre de la phase BOW uniforme croît avec U_1/t, atteint un maximum au voisinage de $U_1 = 12t$, puis enfin décroît. Et c'est là un résultat surprenant que ne permet pas de comprendre l'analyse de faible couplage. Le DMRG palie cette carence du faible couplage et met en évidence une phase ferromagnétiquement polarisée (dégénérée) qui peut être comprise comme deux chaînes fermioniques sans spin et découplées l'une de l'autre et dont les énergies sont indépendantes des paramètres d'ordre ⟨29⟩.

Enfin, les lignes de transitions de phase sont toutes les quatre confirmées par une mesure de l'*entropie d'intrication de von Neumann* qui possède la propriété remarquable d'être proportionnelle à la charge centrale [153] :

$$S_{\text{v. N.}}(x) = \frac{c}{6} \ln \left[d(x|L) \right] + \text{Cte} \tag{4.102}$$

Où $d(x|L) = \frac{L}{\pi} \sin(\pi x/L)$ est la distance conforme. La FIGURE 4.6, tant du côté répulsif que du côté attractif, est en accord avec l'analyse proposée, avec des charges centrales respectives $c = 4$ et $c = 2$. Le diagramme de phase complet du cas incommensurable est donné en guise de conclusion dans la FIGURE 4.7.

⟨29⟩. L'étude inachevée du fort couplage - avec son espace fondamental de dimension 8 - confirme ce dernier résultat en attribuant à ces huit états une énergie nulle (à $t = 0$).

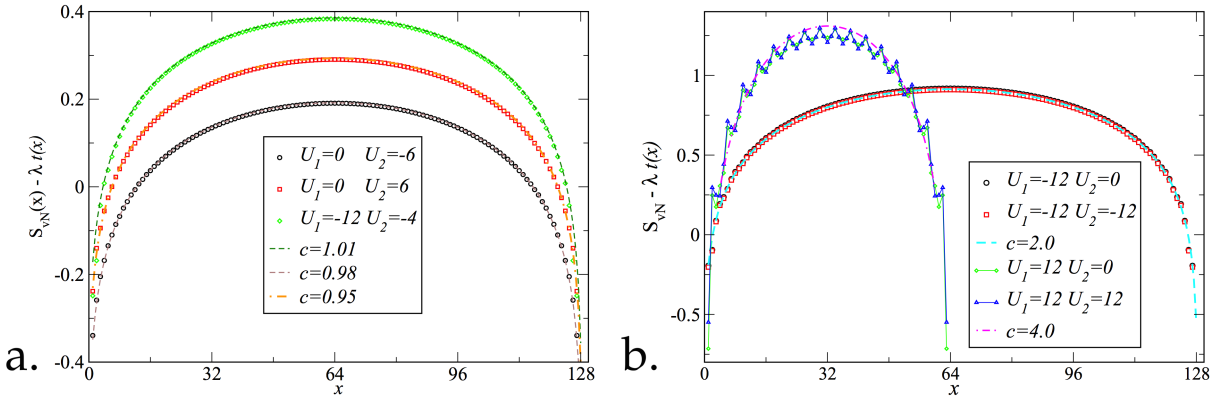


FIGURE 4.6 – Entropies d'intrication de von Neumann, en **a.** pour des points dans les phases (pour une longueur de chaîne $L = 128$), en **b.** sur les lignes de transition (pour $L = 128$ dans le cas attractif, $L = 64$ dans le cas répulsif). Les comportements en charge centrale attendus sont bien constatés, et notamment sur les lignes de transition (**b.**), avec $c = 2$ dans le cas attractif et $c = 4$ dans le cas répulsif (publié dans [2]).

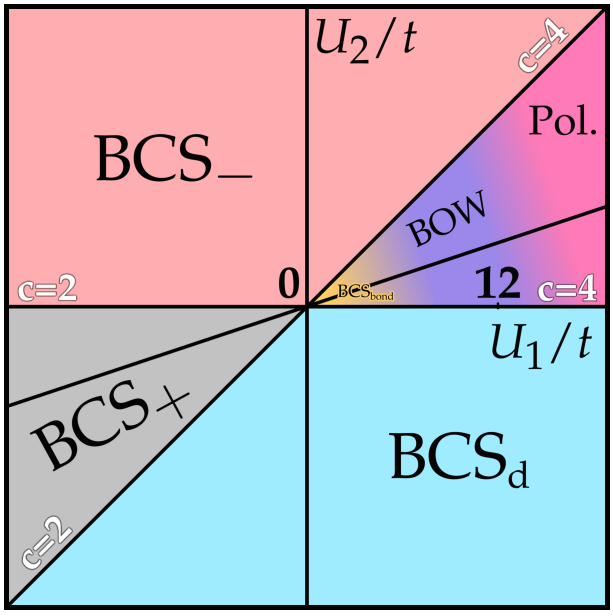


FIGURE 4.7 – Diagramme de phase du modèle p-band, N $= 2$ au quart de remplissage : les zones **II**, **III** et **IV**, du faible au fort couplage, mettent en avant les phases supraconductrices BCS$_-$, BCS$_+$ et BCS$_d$ respectivement. Quant à la zone **I**, elle présente trois phases : à faible couplage, tant que le gap de charge n'est pas ouvert, la phase supraconductrice BCS$_{bond}$ domine, mais finit par être vaincue pour des couplages plus importants par la phase BOW quant intervient la transition de Mott qui ouvre le gap. Enfin, à très fort couplage, la phase polarisée, non-attendue, prend place.

4.2 Le demi-remplissage

Dans cette nouvelle section, nous exposons les résultats du cas N = 2 au demi-remplissage - c'est-à-dire $k_F = \pi/2$ ⟨30⟩ - pour trois modèles : tout d'abord les modèles *p*-band et *g*-*e*, qui sont les objets d'une publication [3] ⟨31⟩, puis - travail original - nous exposerons le modèle du double-puits, lequel est différent des deux précédents en ce sens qu'il s'écrit naturellement dans les "mauvais degrés" $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}$, et requiert en conséquence un dictionnaire pour interpréter correctement les paramètres d'ordre.

Au demi-remplissage, les termes d'umklapp jouent un rôle prépondérant dans tout le diagramme de phase, si bien qu'on est obligé de tenir compte de tous les opérateurs d'interaction et ce, dans tout le diagramme de phase ⟨32⟩. Si utiliser plus d'opérateurs peut sembler plus compliqué, il n'en est rien : ici la charge se liant aux degrés non-abéliens, nous n'aurons pas à la traiter séparement, et de plus, à l'inverse du quart de remplissage où l'ouverture du gap compliquait tout, la présence - sur tout le diagramme - de phases entièrement gappées et reliées à des solutions des équations du groupe de renormalisation à une boucle réalisant le DSE, c'est-à-dire présentant des dualités, rend l'étude plus aisée.

4.2.1 Dualités et phases

Pour les deux premiers modèles, nous allons donc associer les phases aux différentes dualités, que nous associerons concrètement aux diagrammes de phase des différents modèles *p*-band et *g*-*e* dans les prochaines sous-sections. Ce premier travail a déjà été réalisée par H. Nonne dans sa thèse [4] ; elle y décrit huit dualités associées à huit phases qui appartiennent à deux grandes classes : quatre phases dégénérées et quatre autres phases non-dégénérées dont la différence essentielle est respectivement l'absence ou la présence de la condensation d'un champ dual "Θ" qui, par les relations de jauge (4.61, 4.62, 4.63, 4.64) ne permet pas ou permet de relier les toutes les configurations qui minimisent le hamiltonien dans la limite semiclassique : les premières possèdent une double dégénéréscence qui correspond à la brisure de la symétrie de translation que les secondes, non dégénérées, ne brisent pas.

Phase de Spin-Peierls

La première phase, nommée *Spin-Peierls* (SP), est celle associée à la dualité triviale $\Omega_0 = \mathrm{Id}$, dont on sait qu'elle correspond au modèle de Gross-Neveu (équation (3.377) avec umklapp)

⟨30⟩. Dans le cas du modèle de double-puits, le demi-remplissage correspond au cas à un atome par site.
⟨31⟩. Le seul modèle *g*-*e*, dans ces conditions, c'est-à-dire pour N = 2 et au demi-remplissage, ont été également étudié dans [154].
⟨32⟩. La présence ou l'absence de la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ va réduire ou non le nombre de ces opérateurs.

avec la symétrie SO(8) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_0} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a=1}^{8}\mathcal{K}_a\right)^2 \tag{4.103}$$

Notons la différence avec les hamiltoniens semblables écrits dans la section précédente pour le quart de remplissage : la charge intervient au même rang que les degrés non-abéliens, à travers $\mathcal{K}_7$ et $\mathcal{K}_8$. Appliquant la même méthode, nous en donnons l'expression bosonisée :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_0} = -C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} + C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) - C_o^{\sqrt{4\pi}}C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.104}$$

Parmi toutes les configurations possibles, nous en donnons deux qui ne peuvent être reliées par les transformations de jauge et sont ainsi physiquement inéquivalentes :

$$\langle\Phi_c\rangle = 0, \quad \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Phi_o\rangle = 0, \quad \langle\Phi_{so}\rangle = 0, \tag{4.105}$$

$$\langle\Phi_c\rangle = \sqrt{\pi}, \ \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Phi_o\rangle = 0, \quad \langle\Phi_{so}\rangle = 0 \tag{4.106}$$

Et l'on remarque, selon la transformation de translation (3.244) sur le champ de charge : $\Phi_c \xrightarrow{\mathcal{T}_0} \Phi_c + \sqrt{\pi}$, que ces deux configurations sont une translation élémentaire l'une de l'autre. Et le paramètre d'ordre rend compte de cette dégénérescence en liant les sites voisins :

$$\mathcal{O}_{\text{SP}} = \sum_{m\alpha}(-1)^i c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1} + \text{h.c.} \tag{4.107}$$

$$\overset{\text{bos.}}{=} \frac{-8}{\pi}\left(C_c^{\sqrt{\pi}}C_s^{\sqrt{\pi}}C_o^{\sqrt{\pi}}C_{so}^{\sqrt{\pi}} + S_c^{\sqrt{\pi}}S_s^{\sqrt{\pi}}S_o^{\sqrt{\pi}}S_{so}^{\sqrt{\pi}}\right) \tag{4.108}$$

Si bien que la limite semiclassique condense ce paramètre d'ordre.

Phase CDW

Deuxième phase, nommée *Onde de densité de charge* (CDW), est celle associée à la dualité Ω_4, qui dans le langage des fermions correspond à la transformation suivante :

$$\Omega_4 \ : \ \xi_L^{7,8} \to -\xi_L^{7,8} \tag{4.109}$$

Le modèle correspondant, massif et de symétrie SO(8), possède alors l'expression suivante :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_4} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a=1}^{6}\mathcal{K}_a - \sum_{a=7}^{8}\mathcal{K}_a\right)^2 \tag{4.110}$$

L'expression bosonisée est :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_4}_{\text{int.}} = C_c^{\sqrt{4\pi}}\Big(C_s^{\sqrt{4\pi}} + C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\Big) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\Big(C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\Big) - C_o^{\sqrt{4\pi}}C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.111}$$

Ici encore il ne reste que deux configurations physiquement inéquivalentes et reliées par une translation élémentaire :

$$\langle\Phi_c\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Phi_o\rangle = 0, \quad \langle\Phi_{so}\rangle = 0, \tag{4.112}$$

$$\langle\Phi_c\rangle = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}, \ \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Phi_o\rangle = 0, \quad \langle\Phi_{so}\rangle = 0 \tag{4.113}$$

Le paramètre d'ordre correspondant s'exprime comme :

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}} = \sum_{m\alpha}(-1)^i c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i} \tag{4.114}$$

$$\overset{\text{bos.}}{=} -\frac{4}{\pi}\Big(S_c^{\sqrt{\pi}}C_s^{\sqrt{\pi}}C_o^{\sqrt{\pi}}C_{so}^{\sqrt{\pi}} - C_c^{\sqrt{\pi}}S_s^{\sqrt{\pi}}S_o^{\sqrt{\pi}}S_{so}^{\sqrt{\pi}}\Big) \tag{4.115}$$

Il condense dans les deux configurations.

Phase ODW

Troisième phase, nommée *Onde de densité orbitale* (ODW), est celle associée à la dualité Ω_2, qui dans le langage des fermions correspond à la transformation suivante :

$$\Omega_4 \ : \ \xi_L^{4,5} \to -\xi_L^{4,5} \tag{4.116}$$

Le modèle correspondant, massif et de symétrie SO(8), possède alors l'expression qui suit :

$$\mathcal{H}^{\Omega_2}_{\text{int.}} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a\neq 4,5}^{6}\mathcal{K}_a - \sum_{a=4}^{5}\mathcal{K}_a\right)^2 \tag{4.117}$$

L'expression bosonisée est :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_2}_{\text{int.}} = -C_c^{\sqrt{4\pi}}\Big(C_s^{\sqrt{4\pi}} - C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\Big) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\Big(-C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\Big) + C_o^{\sqrt{4\pi}}C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.118}$$

Ici toujours, nous sommes rendus avec deux configurations physiquement inéquivalentes

et toujours reliés par une translation élémentaire :

$$\langle \Phi_c \rangle = 0, \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Phi_o \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0, \tag{4.119}$$

$$\langle \Phi_c \rangle = \sqrt{\pi}, \ \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Phi_o \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0 \tag{4.120}$$

Le paramètre d'ordre correspondant s'exprime ainsi :

$$\mathcal{O}_{\text{ODW}} = \sum_{mn,\alpha} (-1)^i c^\dagger_{m\alpha,i} \frac{\sigma^z_{mn}}{2} c_{n\alpha,i} = (-1)^i T^z_i \tag{4.121}$$

$$\overset{\text{bos.}}{\simeq} -\frac{2}{\pi}\left(S_c^{\sqrt{\pi}} S_s^{\sqrt{\pi}} C_o^{\sqrt{\pi}} C_{so}^{\sqrt{\pi}} - C_c^{\sqrt{\pi}} C_s^{\sqrt{\pi}} S_o^{\sqrt{\pi}} S_{so}^{\sqrt{\pi}} \right) \tag{4.122}$$

Les deux configurations condensent ce paramètre d'ordre.

Phase Spin-Peierls-π

Quatrième phase, nommée *Spin-Peierls décalée* ⟨33⟩ (SP_π), est celle associée à la dualité $\Omega_9 = \Omega_2\Omega_4$, qui dans le langage des fermions correspond à la transformation suivante :

$$\Omega_9 \ : \ \xi_L^{4,5,7,8} \to -\xi_L^{4,5,7,8} \tag{4.123}$$

Le modèle correspondant, massif et de symétrie $\text{SO}(8)$, possède alors l'expression suivante :

$$\mathcal{H}^{\Omega_9}_{\text{int.}} = \frac{f}{2}\left(\sum_{a=1,2,3,6} \mathcal{K}_a - \sum_{a=4,5,7,8} \mathcal{K}_a \right)^2 \tag{4.124}$$

Et son expression bosonisée est :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_9}_{\text{int.}} = C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} - C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \right) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(- C_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \right) + C_o^{\sqrt{4\pi}} C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.125}$$

Et comme pour les trois modèles précédents, deux configurations physiquement inéquivalentes et reliés par une translation élémentaire demeure :

$$\langle \Phi_c \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Phi_o \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0, \tag{4.126}$$

$$\langle \Phi_c \rangle = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}, \ \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Phi_o \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0 \tag{4.127}$$

⟨33⟩. Il n'y a pas de nom fixé, mais le π indiquant un décalage par rapport à la phase SP standard, voir FIGURE 4.8, ce nom est intelligible.

Le paramètre d'ordre qui est relié à ces configurations s'exprime comme :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{SP}_\pi} = \sum_{mn,\alpha} (-1)^i c^\dagger_{m\alpha,i} \frac{\sigma^z_{mn}}{2} c_{n\alpha,i+1} + \text{h.c.} \tag{4.128}$$

$$\overset{\text{bos.}}{\simeq} -\frac{2}{\pi}\Big(C_c^{\sqrt{\pi}} S_s^{\sqrt{\pi}} C_o^{\sqrt{\pi}} S_{so}^{\sqrt{\pi}} + S_c^{\sqrt{\pi}} C_s^{\sqrt{\pi}} S_o^{\sqrt{\pi}} C_{so}^{\sqrt{\pi}}\Big) \tag{4.129}$$

Et l'expression condense encore. Les quatre phases dégénérées étant maintenant présentées, nous passons aux quatre phases non-dégénérées qui sont d'un grand intérêt pour nous puisque trois d'entre elles sont des phases de Haldane.

Phase de Haldane en charge

La cinquième phase, nommée phase de *Haldane en Charge* (HC), est associée à la dualité $\Omega_{10} = \Omega_2\Omega_4\Omega_5$. Dans le langage des fermions de Majorana, elle correspond à la transformation suivante :

$$\Omega_{10} \quad : \quad \xi_L^{6,7,8} \to -\xi_L^{6,7,8} \tag{4.130}$$

Nous bosonisons et voyons apparaître des champs duaux, ici Θ_{so} :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}^{\Omega_{10}}_{\text{int.}} = C_c^{\sqrt{4\pi}}\Big(C_s^{\sqrt{4\pi}} + C_o^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\Big) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\Big(C_o^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\Big) - C_o^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.131}$$

La configuration qui minimise ce hamiltonien est unique (physiquement) et satisfait :

$$\langle\Phi_c\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \langle\Phi_s\rangle = 0, \qquad \langle\Phi_o\rangle = 0, \qquad \langle\Theta_{so}\rangle = 0 \tag{4.132}$$

Ce type de configuration ne permet pas d'écrire - comme précédemment - de paramètre d'ordre qui y condense. Nous avons alors recours aux paramètres d'ordre en ruban, lesquels utilisent dans leur définition les quantités suivantes ⟨34⟩ :

$$n_{c,i} = \frac{1}{2}\Big(n_{1\uparrow,i} + n_{1\downarrow,i} + n_{2\uparrow,i} + n_{2\downarrow,i}\Big) = \frac{1}{2}n_i \tag{4.133}$$

$$n_{s,i} = \frac{1}{2}\Big(n_{1\uparrow,i} - n_{1\downarrow,i} + n_{2\uparrow,i} - n_{2\downarrow,i}\Big) = S^z_i \tag{4.134}$$

$$n_{o,i} = \frac{1}{2}\Big(n_{1\uparrow,i} + n_{1\downarrow,i} - n_{2\uparrow,i} - n_{2\downarrow,i}\Big) = T^z_i \tag{4.135}$$

$$n_{so,i} = \frac{1}{2}\Big(n_{1\uparrow,i} - n_{1\downarrow,i} - n_{2\uparrow,i} + n_{2\downarrow,i}\Big) \tag{4.136}$$

⟨34⟩. Selon le modèle on adapte l'expression du degré orbital. Ici la notation standard qui correspond aux modèles d'échelle et de double-puits.

Grâce à ces derniers, nous définissons deux types de *paramètres d'ordre en ruban*, les pairs et les impairs, avec $a = c, s, o, so$ et $\delta n_{a,i} = n_{a,i} - \langle n_{a,i} \rangle$:

$$\mathcal{O}^{\text{pair}}_{a,i} \simeq \cos\left(\pi \sum_{k<i} \delta n_{a,k}\right) \tag{4.137}$$

$$\mathcal{O}^{\text{impair}}_{a,i} \simeq \delta n_{a,i} \cos\left(\pi \sum_{k<i} \delta n_{a,k}\right) \tag{4.138}$$

Les seconds opérateurs, $\mathcal{O}^{\text{impair}}_{a,i}$, mesurent, pour $a = c, s$ et o un ordre caché antiferromagnétique respectivement selon la charge, le spin et le pseudo-spin [35]. Les phases qui correspondent sont les trois types de phase de Haldane que permet de réaliser le modèle à deux orbitales. On notera respectivement HC, HS et HO les phases de Haldane en charge, en spin [36] et en orbital, si bien que les opérateurs correspondants sont notés : $\mathcal{O}^{\text{impair}}_{c,i} = \mathcal{O}^{\text{HC}}_i$, $\mathcal{O}^{\text{impair}}_{s,i} = \mathcal{O}^{\text{HS}}_i$ et $\mathcal{O}^{\text{impair}}_{o,i} = \mathcal{O}^{\text{HO}}_i$.

La non-localité de ces opérateurs rend leur bosonisation compliquée, néanmoins, nous donnons un argument de symétrie [155, 51] pour en déduire la dépendance : dans la transformation $\delta n_{a,i} \to -\delta n_{a,i}$, les opérateurs $\mathcal{O}^{\text{pair}}_{a,i}$ et $\mathcal{O}^{\text{impair}}_{a,i}$ sont respectivement pair et impair. Dans les bosons, cette transformation étant donnée par $\Phi_a \to -\Phi_a$, cela induit la forme suivante [37] :

$$\mathcal{O}^{\text{pair}}_{a,i} \sim C_a^{\sqrt{\pi}} \tag{4.140}$$

$$\mathcal{O}^{\text{impair}}_{a,i} \sim S_a^{\sqrt{\pi}} \tag{4.141}$$

Revenant à la phase de Haldane en charge, nous avons dès lors trouvé un paramètre d'ordre - non-local - qui condense dans la configuration (4.132) [38], et donc les fonctions de corrélations

[35]. Nous donnons ici un exemple du calcul du paramètre d'ordre caché antiferomagntique en spin, ce dernier pouvant prendre (à deux atomes par site) les valeurs $\uparrow$, 0 et $\downarrow$, respectivement attachés aux valeurs $\delta n_s = 1, 0$ et -1. Ici on donne une configuration avec un défaut, le calcul du paramètre d'ordre se faisant site par site à l'aide de (4.138) :

$$\begin{array}{rcccccccccc} \text{Configuration} & : & \dots & \uparrow & \downarrow & 0 & \downarrow & 0 & \uparrow & \dots \\ \mathcal{O}^{\text{impair}}_{s,i} & : & \dots & \textbf{+1} & \textbf{+1} & 0 & \textbf{-1} & 0 & \textbf{-1} & \dots \end{array} \tag{4.139}$$

[36]. Qui est la phase traditionnelle, notée RT - pour l'anglais *Rung Triplet* - dans la thèse de H. Nonne [4] et dans les articles qui lui sont reliés.

[37]. La dimension $\sqrt{\pi}$ correspond à celle des précédents paramètres d'ordre.

[38]. Remarquons qu'il est possible de trouver d'autres dualités qui permettent de condenser (4.141), dont l'expression est simple. Et notamment ici, lorsque $a = c$ (c'est-à-dire dans une phase HC), nous trouverons une autre dualité, $\Omega_{12} = \Omega_3\Omega_4\Omega_5$ associée à la transformation suivante :

$$\Omega_{12} \quad : \quad \xi_L^{5,7,8} \to -\xi_L^{5,7,8} \tag{4.142}$$

sont non-nulles :

$$\langle O^{\text{HC}}(x)O^{\text{HC}}(0)\rangle \sim \left\langle \sin\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_c(x)\right)\sin\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_c(0)\right)\right\rangle \neq 0 \tag{4.144}$$

On montre [4] que lorsque les conditions aux limites sont ouvertes ⟨39⟩, l'expression du hamiltonien effectif de basse énergie peut s'écrire comme une théorie sur les fermions de Majorana atteints par la dualité (pour la phase HC, c'est (4.130)) qui y sont massifs, de masse m_c :

$$\mathcal{H}_{\text{HC}} = -\frac{iv_c}{2}\sum_{a=6}^{8}\int_0^\infty \left(\xi_R^a\partial_x\xi_R^a - \xi_L^a\partial_x\xi_L^a\right)\mathrm{d}x - im_c\sum_{a=6}^{8}\int_0^\infty \xi_R^a\xi_L^a\,\mathrm{d}x \tag{4.145}$$

Où la masse - calculée sur la ligne de symétrie $\mathrm{SU}(2)_c$ ⟨40⟩ par simplicité - satisfait :

$$m_c = if_3\sum_{a=1}^{3}\langle\xi_R^a\xi_L^a\rangle + if_5\sum_{a=4}^{5}\langle\xi_R^a\xi_L^a\rangle \tag{4.146}$$

$$\overset{\text{bos.}}{=} -\frac{f_3}{2\pi a_0}\left\langle 2C_s^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right\rangle - \frac{f_5}{\pi a_0}\left\langle C_o^{\sqrt{4\pi}}\right\rangle \tag{4.147}$$

Ainsi, et pourvu que les paramètres d'interaction induisent une masse positive ⟨41⟩, on montre encore [156] que les trois fermions possèdent un état de bord de spin 1/2 de type évanescent sur une longueur v_c/m_c.

Phase de Haldane en spin

La sixième phase, nommée phase de *Haldane en Spin* (HS), est associée à la dualité $\Omega_{11} = \Omega_4\Omega_5$, qui dans le langage des fermions de Majorana correspond à la transformation suivante :

$$\Omega_{11} \quad : \quad \xi_L^{1,2,3} \to -\xi_L^{1,2,3} \tag{4.148}$$

Elle est associée à la configuration semiclassique suivante (qui est non-dégénérée) :

$$\langle\Phi_c\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \langle\Phi_s\rangle = 0, \qquad \langle\Theta_o\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \langle\Phi_{so}\rangle = 0 \tag{4.143}$$

Physiquement, nous aurons affaire à un ordre caché "antiferromagnétique" avec - comme l'indique la FIGURE 4.8 - une alternance de site plein et de site vide, dilué par un état à deux particules, qui lui, peut changer.

⟨39⟩. Ouvert à gauche, avec $x \in [0,\infty[$.

⟨40⟩. Elle est caractérisée dans les fermions de Majorana par l'union de $\mathcal{K}_c$ et $\mathcal{K}_6$ en un seul bilinéaire de Majorana $\mathcal{K}_c + \mathcal{K}_6$ et correspond aux égalités : en couplage général $f_3 = f_9$, $f_5 = f_{12}$, $f_7 = f_{10}$ et $f_8 = f_{11}$ ou en couplage orbital $f_3^z = f_7^z$, $f_4^z = f_8^z$ et $f_6^z = f_9^z$. Sur cette ligne, les couplages f_3 et f_5 équivalent f_3^z et f_4^z.

⟨41⟩. Dans le cas contraire, il n'y a tout simplement pas de mode de bord.

La bosonisation du hamiltonien induit l'expression suivante pour l'interaction :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_{11}} = C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} - C_o^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} - C_o^{\sqrt{4\pi}}\right) + C_o^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.149}$$

La configuration qui minimise ce hamiltonien, encore une fois, est unique et satisfait :

$$\langle\Phi_c\rangle = 0, \quad \langle\Phi_s\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle\Phi_o\rangle = 0, \quad \langle\Theta_{so}\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.150}$$

Étant établis les résultats sur les paramètres d'ordre en ruban, on constate que c'est bien $\mathcal{O}^{\text{HS}}$ qui condense, avec les corrélations non-nulles :

$$\langle O^{\text{HS}}(x)O^{\text{HS}}(0)\rangle \sim \left\langle \sin\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_s(x)\right)\sin\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_s(0)\right)\right\rangle \neq 0 \tag{4.151}$$

Cette phase mène également à une théorie de Majorana, mais cette fois-ci, associée à la dualité Ω_{11}, pour les fermions de Majorana ξ_L^1, ξ_L^2 et ξ_L^3 :

$$\mathcal{H}_{\text{HS}} = -\frac{iv_s}{2}\sum_{a=1}^{3}\int_0^\infty \left(\xi_R^a\partial_x\xi_R^a - \xi_L^a\partial_x\xi_L^a\right)\mathrm{d}x - im_s\sum_{a=1}^{3}\int_0^\infty \xi_R^a\xi_L^a\,\mathrm{d}x \tag{4.152}$$

Où la masse - déterminée pour la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$, bien écrite dans le couplages orbitaux - prend l'expression suivante :

$$\begin{aligned} m_s &= if_2^z\sum_{a=4}^{5}\langle\xi_R^a\xi_L^a\rangle + if_3^z\langle\xi_R^6\xi_L^6\rangle + if_7^z\sum_{a=7}^{8}\langle\xi_R^a\xi_L^a\rangle && (4.153)\\ &\overset{\text{bos.}}{=} -\frac{f_2^z}{\pi a_0}\left\langle C_o^{\sqrt{4\pi}}\right\rangle - \frac{f_3^z}{2\pi a_0}\left\langle C_{so}^{\sqrt{4\pi}} - \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right\rangle - \frac{f_7^z}{\pi a_0}\left\langle C_c^{\sqrt{4\pi}}\right\rangle && (4.154)\end{aligned}$$

Ici encore, la prédiction des états de bord (sur une distance v_F/m_s) demeure.

Phase de Haldane orbitale

La sixième phase, nommée phase de *Haldane Orbitale* (HO), est associée à la dualité Ω_5, qui dans le langage des fermions de Majorana correspond à la transformation suivante :

$$\Omega_5 \quad : \quad \xi_L^{4,5,6} \to -\xi_L^{4,5,6} \tag{4.155}$$

La bosonisation du hamiltonien induit l'expression suivante pour l'interaction :

$$\frac{\pi^2}{f}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_5} = -C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} - C_o^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} - C_o^{\sqrt{4\pi}}\right) + C_o^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.156}$$

La configuration qui minimise ce hamiltonien est toujours unique et satisfait :

$$\langle \Phi_c \rangle = 0, \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Phi_o \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Theta_{so} \rangle = 0 \tag{4.157}$$

Et l'on constate que c'est bien $\mathcal{O}^{\text{HO}}$ qui condense, avec les corrélations non-nulles :

$$\langle O^{\text{HO}}(x) O^{\text{HO}}(0) \rangle \sim \left\langle \sin\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_o(x)\right) \sin\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_o(0)\right) \right\rangle \neq 0 \tag{4.158}$$

La théorie de Majorana de basse énergie associée à la dualité Ω_5, c'est-à-dire pour les fermions de Majorana ξ_L^4, ξ_L^5 et ξ_L^6 :

$$\mathcal{H}_{\text{HO}} = -\frac{iv_o}{2} \sum_{a=4}^{6} \int_0^\infty \left(\xi_R^a \partial_x \xi_R^a - \xi_L^a \partial_x \xi_L^a \right) \mathrm{d}x - i m_o \sum_{a=4}^{6} \int_0^\infty \xi_R^a \xi_L^a \, \mathrm{d}x \tag{4.159}$$

Où la masse - déterminée pour la symétrie orbitale complète $\mathrm{SU}(2)_o$ [42], bien écrite dans le couplages orbitaux - satisfait :

$$m_o = i f_2^z \sum_{a=1}^{3} \langle \xi_R^a \xi_L^a \rangle + i f_8^z \sum_{a=7}^{8} \langle \xi_R^a \xi_L^a \rangle \tag{4.160}$$

$$\overset{\text{bos.}}{=} -\frac{f_2^z}{2\pi a_0} \left\langle 2C_s^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \right\rangle - \frac{f_8^z}{\pi a_0} \left\langle C_c^{\sqrt{4\pi}} \right\rangle \tag{4.161}$$

La prédiction des états de bord (sur une distance v_o/m_o) est encore valide.

Phase de singulet

La huitième phase, la moins intéressante des phases non-dégénérées puisque ne présentant pas de structure, est associée à la dualité $\Omega_7 = \Omega_2\Omega_5$, qui dans le langage des fermions de Majorana correspond à la transformation suivante :

$$\Omega_7 \quad : \quad \xi_L^6 \to -\xi_L^6 \tag{4.162}$$

Avec l'expression suivante du hamiltonien bosonisée :

$$\frac{\pi^2}{f} \mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_7} = -C_c^{\sqrt{4\pi}} \left(C_s^{\sqrt{4\pi}} + C_o^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \right) - C_s^{\sqrt{4\pi}} \left(\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} + C_o^{\sqrt{4\pi}} \right) - C_o^{\sqrt{4\pi}} \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.163}$$

[42]. Elle est assurée, en couplage général, quand $f_2 = f_3 = f_4$, $f_5 = f_6 = f_7$ et $f_{10} = f_{11} = f_{12}$ et en couplage orbital, quand $f_2^z = f_3^z$, $f_4^z = f_5^z$ et $f_8^z = f_9^z$.

La configuration semiclassique, unique, qui le minimise, est :

$$\langle \Phi_c \rangle = 0, \qquad \langle \Phi_s \rangle = 0, \qquad \langle \Phi_o \rangle = 0, \qquad \langle \Theta_{so} \rangle = 0 \tag{4.164}$$

Elle ne condense aucun paramètre d'ordre en ruban impair ! L'analyse de fort couplage l'identifie avec l'état suivant [43] :

$$|\mathrm{RS}\rangle = \prod_i \left[\frac{c^\dagger_{1\uparrow,i} c^\dagger_{2\downarrow,i} - c^\dagger_{1\downarrow,i} c^\dagger_{2\uparrow,i}}{\sqrt{2}} \right] |0\rangle \tag{4.167}$$

Nous donnons en FIGURE 4.8 un résumé de toutes les phases, avec leur dualité et leur représentation sur le réseau. Et nous ajoutons aussi une décomposition de toutes les dualités sur les dualités élémentaires (3.379, 3.380, 3.381, 3.382, 3.383) [44], avec les phases associées lors du

[43]. Comme pour la phase HC, il existe d'autres dualités qui mènent à la phase RS. Nous recontrerons en particulier la phase $\Omega_6 = \Omega_1 \Omega_5 : \xi^6_L \to -\xi^6_L$, associée à la configuration semiclassique :

$$\langle \Phi_c \rangle = 0, \qquad \langle \Phi_s \rangle = 0, \qquad \langle \Theta_o \rangle = 0, \qquad \langle \Phi_{so} \rangle = 0 \tag{4.165}$$

La nouvelle phase est à la phase RS, ce que l'axe (orbital) Oy est à Oz (axe privilégié par la symétrie orbitale), et l'on la nomme OLD (pour l'anglais *Orbital Large-D*). Comme sa phase sœur, elle n'a aucune structure (on fait son écriture dans les degrés p-band car c'est dans ce modèle qu'elle apparaît) :

$$|\mathrm{OLD}_y\rangle = \prod_i \left[\frac{c^\dagger_{p_x\uparrow,i} c^\dagger_{p_x\downarrow,i} - c^\dagger_{p_y\uparrow,i} c^\dagger_{p_y\downarrow,i}}{\sqrt{2}} \right] |0\rangle \tag{4.166}$$

Et l'on se convainc également que la dualité Ω_8 est associée à une phase - nommée OLD_y - du même type, mais selon l'axe Oy. Néanmoins cette dernière dualité n'est pas atteinte dans les modèles que nous étudions.

[44]. Sachant que les trois premières sont reliées par $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = \Omega_0$.

demi-remplissage [45] :

$$\begin{aligned}
\text{SP} &: \Omega_0 = \text{Id} && (4.168)\\
\text{ODW}_x &: \Omega_1 = \Omega_1 && (4.169)\\
\text{ODW} &: \Omega_2 = \Omega_2 && (4.170)\\
\text{ODW}_y &: \Omega_3 = \Omega_3 && (4.171)\\
\text{CDW} &: \Omega_4 = \Omega_4 && (4.172)\\
\text{HO} &: \Omega_5 = \Omega_5 && (4.173)\\
\text{OLD} &: \Omega_6 = \Omega_1\Omega_5 && (4.174)\\
\text{RS} &: \Omega_7 = \Omega_2\Omega_5 && (4.175)\\
\text{OLD}_y &: \Omega_8 = \Omega_3\Omega_5 && (4.176)\\
\text{SP}_\pi &: \Omega_9 = \Omega_2\Omega_4 && (4.177)\\
\text{HC} &: \Omega_{10} = \Omega_2\Omega_4\Omega_5 && (4.178)\\
\text{HS} &: \Omega_{11} = \Omega_4\Omega_5 && (4.179)\\
\text{HC} &: \Omega_{12} = \Omega_3\Omega_4\Omega_5 && (4.180)
\end{aligned}$$

Où les phases $\text{ODW}_{x,y}$ sont des ondes de densité orbitale, qui, contrairement à ODW qui alterne les états à $T^z = \pm 1$ (voir FIGURE 4.8), alternent ceux à $T^{x,y} = \pm 1$. Maintenant que sont présentés tous les résultats préliminaires - à savoir la description des phases - nous allons associer à chacun des modèles (celui du double-puits étant à part, nous décrirons ses phases dans la section qui lui est dédiée) le diagramme de phase correspondant, puis nous croiserons avec les résultats du DMRG.

[45]. En effet, le comportement de la charge est crucial, d'ailleurs, on constate entre cette section (demi-remplissage) et la précédente (quart de remplissage) que des phases associées à des dualités identiques sont différentes : par exemple les RS et BCS_d sont toutes les deux associées à la dualité Ω_7, *etc*.

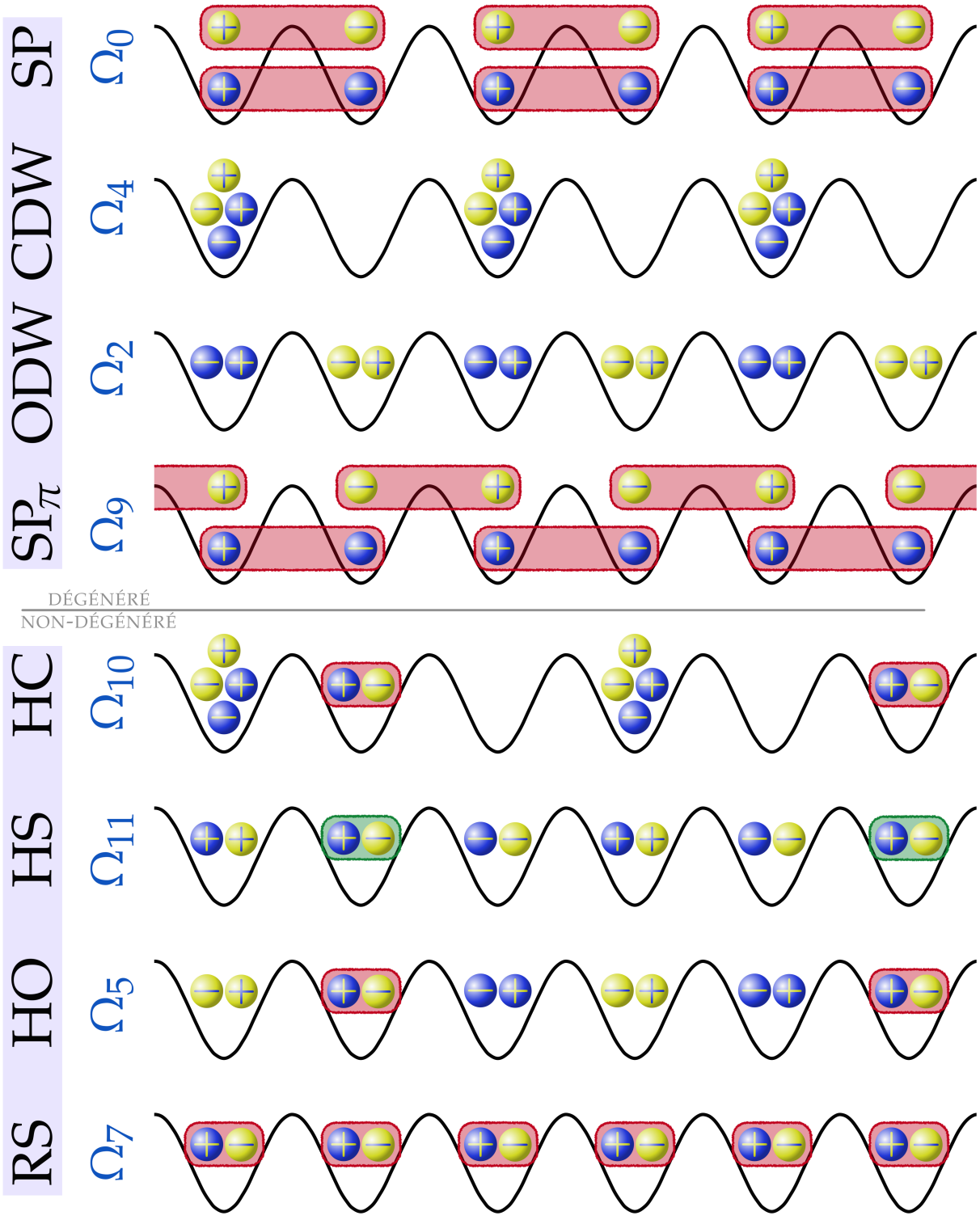


FIGURE 4.8 – Résumé des phases du demi-remplissage N = 2, avec leur dualité et leur allure sur le réseau. En haut, les phases doublement dégénérées, et en bas les phases non-dégénérées avec un ordre caché (sauf RS). Les 4 degrés sont tels qu'on associe à $1 \equiv g \equiv p_x$ le **bleu** et à $2 \equiv e \equiv p_y$ le **jaune**, et $\uparrow$ et $\downarrow$, $+$ et $-$ respectivement. De même, lorsque les spins s'associent en une représentation fondamentale, cela est indiquée, en **rouge** pour les singulets et en **vert** pour les triplets (du moins pour l'état à $S^z = 0$).

4.2.2 Modèle *p*-band

Le modèle étant spécifié, nous pouvons écrire dans les bons opérateurs les équations de renormalisation associées aux conditions initiales à $\mathrm{N} = 2$. Écrites dans les couplages $\{f_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$, les équations du groupe de renormalisation sont :

$$\dot{f}_1 = \frac{1}{4}\Big(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2\Big) + \frac{1}{2}f_9^2 \tag{4.181}$$

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{2}f_1f_2 + \frac{1}{4}\Big(f_3f_7 + f_4f_6\Big) + \frac{1}{2}f_9f_{10} \tag{4.182}$$

$$\dot{f}_3 = \frac{1}{2}f_1f_3 + \frac{1}{4}\Big(f_2f_7 + f_4f_5\Big) + \frac{1}{2}f_9f_{11} \tag{4.183}$$

$$\dot{f}_4 = \frac{1}{2}f_1f_4 + \frac{1}{4}\Big(f_2f_6 + f_3f_5\Big) + \frac{1}{2}f_9f_{12} \tag{4.184}$$

$$\dot{f}_5 = \frac{3}{4}f_3f_4 + \frac{1}{4}f_6f_7 + \frac{1}{2}f_{11}f_{12} \tag{4.185}$$

$$\dot{f}_6 = \frac{3}{4}f_2f_4 + \frac{1}{4}f_5f_7 + \frac{1}{2}f_{10}f_{12} \tag{4.186}$$

$$\dot{f}_7 = \frac{3}{4}f_2f_3 + \frac{1}{4}f_5f_6 + \frac{1}{2}f_{10}f_{11} \tag{4.187}$$

$$\dot{f}_8 = \frac{3}{4}f_9^2 + \frac{1}{4}\Big(f_{10}^2 + f_{11}^2 + f_{12}^2\Big) \tag{4.188}$$

$$\dot{f}_9 = \frac{1}{2}f_1f_9 + \frac{1}{4}\Big(f_2f_{10} + f_3f_{11} + f_4f_{12}\Big) + \frac{1}{4}f_8f_9 \tag{4.189}$$

$$\dot{f}_{10} = \frac{3}{4}f_2f_9 + \frac{1}{4}\Big(f_6f_{12} + f_7f_{11} + f_8f_{10}\Big) \tag{4.190}$$

$$\dot{f}_{11} = \frac{3}{4}f_3f_9 + \frac{1}{4}\Big(f_5f_{12} + f_7f_{10} + f_8f_{11}\Big) \tag{4.191}$$

$$\dot{f}_{12} = \frac{3}{4}f_4f_9 + \frac{1}{4}\Big(f_5f_{11} + f_6f_{10} + f_8f_{12}\Big) \tag{4.192}$$

Avec les conditions initiales suivantes [46] :

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -(U_1+U_2) && (4.193)\\
f_2 &= -2U_2 && (4.194)\\
f_3 &= U_2-U_1 && (4.195)\\
f_4 &= 0 && (4.196)\\
f_5 &= 2U_2 && (4.197)\\
f_6 &= U_1-U_2 && (4.198)\\
f_7 &= 0 && (4.199)\\
f_8 &= U_1+U_2 && (4.200)\\
f_9 &= 0 && (4.201)\\
f_{10} &= U_1-U_2 && (4.202)\\
f_{11} &= 2U_2 && (4.203)\\
f_{12} &= U_1+U_2 && (4.204)
\end{aligned}
$$

De plus, dans ces couplages, les expressions des opérateurs sont différentes, passant des couplages g_i aux couplages f_i, nous passons des opérateurs d'interaction O_i aux opérateurs d'interaction $O_i^{(\mathrm{DSE})}$ [47], qui satisfont :

$$
\begin{aligned}
O_1^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_s^2/2 && (4.205)\\
O_2^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_s && (4.206)\\
O_3^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s && (4.207)\\
O_4^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_5\mathcal{K}_s && (4.208)\\
O_5^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_5\mathcal{K}_6 && (4.209)\\
O_6^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_5 && (4.210)\\
O_7^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_6 && (4.211)\\
O_8^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_c^2/2 && (4.212)\\
O_9^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_s && (4.213)\\
O_{10}^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_4 && (4.214)\\
O_{11}^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_6 && (4.215)\\
O_{12}^{(\mathrm{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_5 && (4.216)
\end{aligned}
$$

Nous constatons alors qu'étant données les redondances dans les conditions initiales (en

[46]. À un facteur $\pi/2$ près, sans conséquence.
[47]. L'appellation étant donnée pour la raison que ces opérateurs d'interaction sont associés aux couplages (les f_i) qui réalisent les dualités de façon propre.

couleur), si bien que le modèle p-band N $= 2$ au demi-remplissage lie les bilinéaires de Majorana $\mathcal{K}_5$ et $\mathcal{K}_c$ en un seul (dans les mêmes couleurs dans les opérateurs) : $\mathcal{K}_h = \mathcal{K}_5 + \mathcal{K}_c$ ⟨48⟩. Cette unification est liée à une symétrie $\mathrm{SU}(2)_h$ ⟨49⟩ émergente ⟨50⟩ sur tout le diagramme de phase et mène ⟨51⟩ à une définition de 8 nouveaux opérateurs $\{O_i^h\}_{i\in[\![1,8]\!]}$ associés à 8 nouveaux couplages $\{f_i^h\}_{i\in[\![1,8]\!]}$, avec :

$$O_1^h = O_1^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_s^2/2 \tag{4.217}$$
$$O_2^h = O_2^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_4\mathcal{K}_s \tag{4.218}$$
$$O_3^h = O_3^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s \tag{4.219}$$
$$O_4^h = O_7^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_4\mathcal{K}_6 \tag{4.220}$$
$$O_5^h = O_8^{(\mathrm{DSE})} + O_{12}^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_h^2/2 \tag{4.221}$$
$$O_6^h = O_4^{(\mathrm{DSE})} + O_9^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_s\mathcal{K}_h \tag{4.222}$$
$$O_7^h = O_6^{(\mathrm{DSE})} + O_{10}^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_4\mathcal{K}_h \tag{4.223}$$
$$O_8^h = O_5^{(\mathrm{DSE})} + O_{11}^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_6\mathcal{K}_h \tag{4.224}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$f_1^h = f_1 = -(U_1 + U_2) \tag{4.225}$$
$$f_2^h = f_2 = -2U_2 \tag{4.226}$$
$$f_3^h = f_3 = U_2 - U_1 \tag{4.227}$$
$$f_4^h = f_7 = 0 \tag{4.228}$$
$$f_5^h = f_8 = f_{12} = U_1 + U_2 \tag{4.229}$$
$$f_6^h = f_4 = f_9 = 0 \tag{4.230}$$
$$f_7^h = f_6 = f_{10} = U_1 - U_2 \tag{4.231}$$
$$f_8^h = f_5 = f_{11} = 2U_2 \tag{4.232}$$

⟨48⟩. La lettre h - pour l'anglais *hidden* - provient de ce que la symétrie qui est liée à la pertinence de ce bilinéaire n'est pas visible *a priori*.
⟨49⟩. Cette symétrie contenant la symétrie de charge $\mathrm{U}(1)_c$ puisqu'elle porte sur $\mathcal{K}_c$.
⟨50⟩. Émergente par rapport à d'autres remplissages et aux cas à N $\neq 2$.
⟨51⟩. Comme il est donné dans l'article [3], où les f_i^h sont simplement nommés g_i.

Et les équations du groupe de renormalisation deviennent :

$$\dot{f}_1^h = \frac{1}{4}\left(\left(f_1^h\right)^2 + \left(f_2^h\right)^2 + \left(f_3^h\right)^2\right) + \frac{3}{4}\left(f_6^h\right)^2 \tag{4.233}$$

$$\dot{f}_2^h = \frac{1}{2}f_1^h f_2^h + \frac{1}{4}f_3^h f_4^h + \frac{3}{4}f_6^h f_7^h \tag{4.234}$$

$$\dot{f}_3^h = \frac{1}{2}f_1^h f_3^h + \frac{1}{4}f_2^h f_4^h + \frac{3}{4}f_6^h f_8^h \tag{4.235}$$

$$\dot{f}_4^h = \frac{3}{4}f_2^h f_3^h + \frac{3}{4}f_7^h f_8^h \tag{4.236}$$

$$\dot{f}_5^h = \frac{3}{4}\left(f_6^h\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\left(f_5^h\right)^2 + \left(f_7^h\right)^2 + \left(f_8^h\right)^2\right) \tag{4.237}$$

$$\dot{f}_6^h = \frac{1}{2}f_1^h f_6^h + \frac{1}{4}f_2^h f_7^h + \frac{1}{4}f_3^h f_8^h + \frac{1}{2}f_5^h f_6^h \tag{4.238}$$

$$\dot{f}_7^h = \frac{3}{4}f_2^h f_6^h + \frac{1}{4}f_4^h f_8^h + \frac{1}{2}f_5^h f_7^h \tag{4.239}$$

$$\dot{f}_8^h = \frac{3}{4}f_3^h f_6^h + \frac{1}{4}f_4^h f_7^h + \frac{1}{2}f_5^h f_8^h \tag{4.240}$$

Les lignes de symétries

Nous continuons notre étude par les lignes de symétries, qui se trouvent être identiques à celles de la SOUS-SECTION 4.1.1 (les modèles étant identiques), avec cependant un remplissage différent, le demi-remplissage. Si bien que l'analyse est la suivante (voir FIGURE 1.3) :

— $U_2 = 0$: le modèle est réduit à deux chaînes indépendantes, chacune au demi-remplissage. Comme elles correspondent chacune aux chaînes du CHAPITRE 1, nous en déduisons alors que pour $U_1 > 0$, un gap de charge s'ouvre, si bien que l'on est rendu avec deux chaînes de Heisenberg de spin 1/2 ($c = 1 + 1 = 2$), tandis que pour $U_1 < 0$, c'est le spin qui ouvre un gap, et les chaînes sont superconductrices ($c = 1 + 1 = 2$) ;
— $U_1 = U_2$: *idem*, avec $U_1 \to 2U_2$ et $T^z \to T^x$, et dans les deux régimes $U_1 \neq 0$ on est mené à une théorie de charge centrale $c = 2$.

Le diagramme de phase

Ensuite, nous donnons la résolution numérique des équations du groupe de renormalisation dans la FIGURE 4.9. Comme pour le cas au demi-remplissage (voir FIGURE 4.1), ce sont toujours les deux lignes d'équation $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$ qui façonnent l'allure du diagramme de phase. Cependant, à l'encontre du cas au quart de remplissage, les équations de RG étant différentes à cause des termes supplémentaires d'umklapp, des dualités différentes sont atteintes (pour

deux zones sur quatre) :

$$\mathbf{I} \quad : \quad \Omega_{11} \tag{4.241}$$
$$\mathbf{II} \quad : \quad \Omega_{6} \tag{4.242}$$
$$\mathbf{III} \quad : \quad \Omega_{12} \tag{4.243}$$
$$\mathbf{IV} \quad : \quad \Omega_{7} \tag{4.244}$$

Ainsi, non seulement les dualités changent, mais pour une même dualité, à cause de la non-séparation spin-charge, l'interprétation faite change également. Et l'on est mené à des phases bien différentes, connues des associations (4.168, . . . , 4.180) : le diagramme complet est donné FIGURE 4.11. Ainsi, aux zones **I**, **II**, **III** et **IV** correspondent respectivement les phases HS, OLD, HC et RS.

Nous utilisons parallèlement l'analyse de fort couplage qui est ici bien plus simple que dans le cas de quart de remplissage : au demi-remplissage, elle minimise exactement les états (au plus 3 !) correspondants aux phases que fournissent les équations du groupe de renormalisation. Pour les états sur site, nous donnons les états dégénérés avec leur énergie :

$$\text{HC} \quad : \quad \left\{ |0\rangle \, , c^\dagger_{p_x\uparrow} c^\dagger_{p_x\downarrow} c^\dagger_{p_y\uparrow} c^\dagger_{p_y\downarrow} |0\rangle \, , \frac{c^\dagger_{p_x\uparrow} c^\dagger_{p_x\downarrow} + c^\dagger_{p_y\uparrow} c^\dagger_{p_y\downarrow}}{\sqrt{2}} |0\rangle \right\} , E_0[\text{HC}] = 0 \tag{4.245}$$
$$\text{HS} \quad : \quad \left\{ c^\dagger_{p_x\uparrow} c^\dagger_{p_y\uparrow} |0\rangle \, , \frac{c^\dagger_{p_x\uparrow} c^\dagger_{p_y\downarrow} + c^\dagger_{p_x\downarrow} c^\dagger_{p_y\uparrow}}{\sqrt{2}} |0\rangle \, , c^\dagger_{p_x\downarrow} c^\dagger_{p_y\downarrow} |0\rangle \right\} , E_0[\text{HS}] = -(U_1 + U_2) \tag{4.246}$$
$$\text{OLD} \quad : \quad \left\{ \frac{c^\dagger_{p_x\uparrow} c^\dagger_{p_x\downarrow} - c^\dagger_{p_y\uparrow} c^\dagger_{p_y\downarrow}}{\sqrt{2}} |0\rangle \right\} , \qquad E_0[\text{OLD}] = -2U_2 \tag{4.247}$$
$$\text{RS} \quad : \quad \left\{ \frac{c^\dagger_{p_x\uparrow} c^\dagger_{p_y\downarrow} - c^\dagger_{p_x\downarrow} c^\dagger_{p_y\uparrow}}{\sqrt{2}} |0\rangle \right\} , \qquad E_0[\text{RS}] = -U_1 + U_2 \tag{4.248}$$

Et l'on met de côté les 8 états à 1 et 3 particules, tous dégénérés ⟨52⟩ d'énergie $E_0[1\&3] = -(U_1 + U_2)/2$, et qui n'est jamais minimisé dans les diverses phases du diagramme. Les deux dernières phases sont triviales, tandis que les deux premières (qui contiennent la ligne harmonique) peuvent donner l'idée de la transformation de Shiba [57, 58] généralisée (seulement pour N = 2) qui échange la charge et le spin et que l'on définit par (avec $m = p_x, p_y$ ou g, e et $1, 2$ pour les autres modèles) :

$$c_{m\uparrow,i} \xrightarrow{\text{Shiba}} c_{m\uparrow,i} \tag{4.249}$$
$$c_{m\downarrow,i} \xrightarrow{\text{Shiba}} (-1)^i c^\dagger_{m\uparrow,i} \tag{4.250}$$

⟨52⟩. À cause de la symétrie particule-trou due au demi-remplissage.

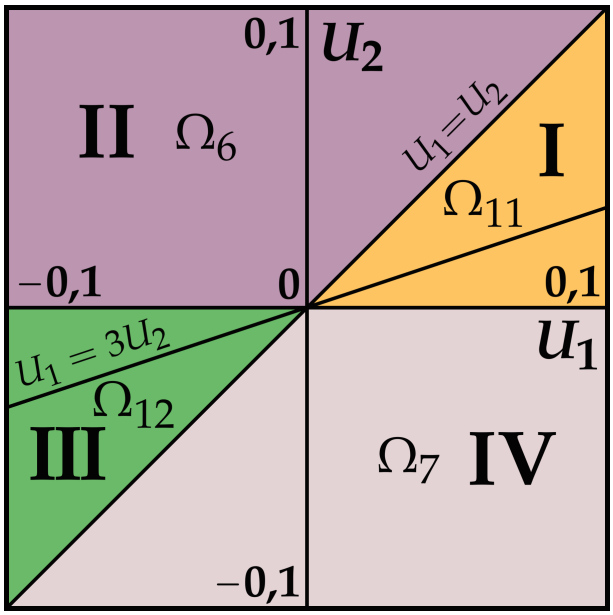


FIGURE 4.9 – Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle p-band, N = 2, au demi-remplissage : les quatre dualités atteintes par le groupe de renormalisation dans le diagramme de phase. Les différentes zones **I**, **II**, **III** et **IV**, associées aux dualités $\Omega_{11}, \Omega_6, \Omega_{12}$ et Ω_7 respectivement et sont séparées par les deux droites d'équations $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$.

Cette transformation échange bien le spin (de générateurs $\boldsymbol{S}_{m,i}$) et la charge, dont les générateurs $\boldsymbol{K}_{m,i}$ sont définis par :

$$K^{+}_{m,i} = (-1)^i c^{\dagger}_{m\uparrow,i} c^{\dagger}_{m\downarrow,i} \tag{4.251}$$

$$K^{-}_{m,i} = (-1)^i c_{m\downarrow,i} c_{m\uparrow,i} \tag{4.252}$$

$$K^{z}_{m,i} = \frac{1}{2}\left(n_{m,i} - 1\right) \tag{4.253}$$

Ainsi : $\boldsymbol{S}_{m,i} \overset{\text{Shiba}}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{K}_{m,i}$, de plus, et c'est une spécificité du modèle p-band, l'écriture du hamiltonien (2.77) peut s'écrire - au demi-remplissage ⟨53⟩ - d'une façon symétrique dans les généra-

⟨53⟩. À ce remplissage, on montre que pour assurer l'invariance particule-trou (en assurant par exemple aux états à 0 et 4 particules d'avoir la même énergie), que le potentiel chimique doit satisfaire :

$$\mu[\bar{n} = 2] = U_1 + U_2 \tag{4.254}$$

teurs de spin et de charge :

$$\mathcal{H}^{[\bar{n}=2]}_{p\text{-band}}[U_1,U_2] = -t\sum_i \left(c^\dagger_{m\alpha,i+1}c_{m\alpha,i} + c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1}\right) + U_1\sum_i \left(n_{m\uparrow}-\tfrac{1}{2}\right)\left(n_{m\downarrow}-\tfrac{1}{2}\right) \quad (4.255)$$
$$- 2U_2\sum_i \boldsymbol{S}_{p_x,i}\cdot\boldsymbol{S}_{p_y,i} + 2U_2\sum_i \boldsymbol{K}_{p_x,i}\cdot\boldsymbol{K}_{p_y,i}$$

En réalité, la transformation de Shiba laisse invariant ce dernier modèle à un retournement d'angle π du diagramme près :

$$\mathcal{H}^{[\bar{n}=2]}_{p\text{-band}}[U_1,U_2] \xrightarrow{\text{Shiba}} \mathcal{H}^{[\bar{n}=2]}_{p\text{-band}}[-U_1,-U_2] \quad (4.256)$$

Autrement dit, dans le diagramme de phase, si l'on inverse les deux axes dans le diagramme de phase, le spin et la charge s'échangent, et une conséquence immédiate est l'émergence d'une symétrie SU(2) supplémentaire : en effet, puisque la symétrie nucléaire $\mathrm{SU}(2)_n$ est valable pour tout le diagramme de phase, et que l'invariance (4.256) rend charge ⟨54⟩ et spin équivalent - le diagramme retourné étant toujours le diagramme en entier - alors la charge est conservée également :

$$\left[\sum_i \boldsymbol{S}_i, \mathcal{H}^{[\bar{n}=2]}_{p\text{-band}}[-U_1,-U_2]\right] \xRightarrow{\text{Shiba}} \left[\sum_i \boldsymbol{K}_i, \mathcal{H}^{[\bar{n}=2]}_{p\text{-band}}[U_1,U_2]\right] \quad (4.257)$$

Et voilà que nous trouvons, sur le réseau, la symétrie $\mathrm{SU}(2)_h$ - valable uniquement au demi-remplissage ⟨55⟩ - que nous avons constaté dans les conditions initiales des couplages et qui nous a mené à la définition des "$f^h_i O^h_i$" et du bilinéaire de Majorana $\mathcal{K}_h$. Notons en passant que cette symétrie est liée à la conservation de $\sum_i \boldsymbol{K}_i$ qui, pour la troisième composante $\sum_i K^z_i$, n'est autre que la charge totale ⟨56⟩, reliée à la symétrie $\mathrm{U}(1)_c$. Quant au diagramme de phase, nous constatons bien que les états (4.245) de HC et (4.246) de HS se correspondent bien : les deux états de charge et spin non-nuls ⟨57⟩, et, les états neutres ⟨58⟩ ; et de même pour les états (4.248) de RS et (4.247) de OLD ⟨59⟩

Les lignes de transition

Passons maintenant à l'étude des transitions, et notamment à l'aide des dualités et des fermions de Majorana. Sur les lignes de transition entre les phases (voir FIGURE 4.9), les limites qu'atteignent les couplages sont telles que les couplages essaient de réconcilier les deux limites

⟨54⟩. Au sens de $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_{p_x,i} + \boldsymbol{K}_{p_y,i}$.
⟨55⟩. Car elle y est conditionnée par la valeur qu'y prend le potentiel chimique.
⟨56⟩. À une constante près.
⟨57⟩. C'est-à-dire à $K^z = -1$ et $K^z = +1$ particules pour le premier, et de spin $S^z = -1$ et $S^z = +1$ pour le second.
⟨58⟩. À $K^z = 0$ et $S^z = 0$, bien qu'il satisfassent $\boldsymbol{K}^2 = 2$ et $\boldsymbol{S}^2 = 2$.
⟨59⟩. À $K^z = 0$ et $S^z = 0$, mais cette fois-ci satisfaisant $\boldsymbol{K}^2 = 0$ et $\boldsymbol{S}^2 = 0$.

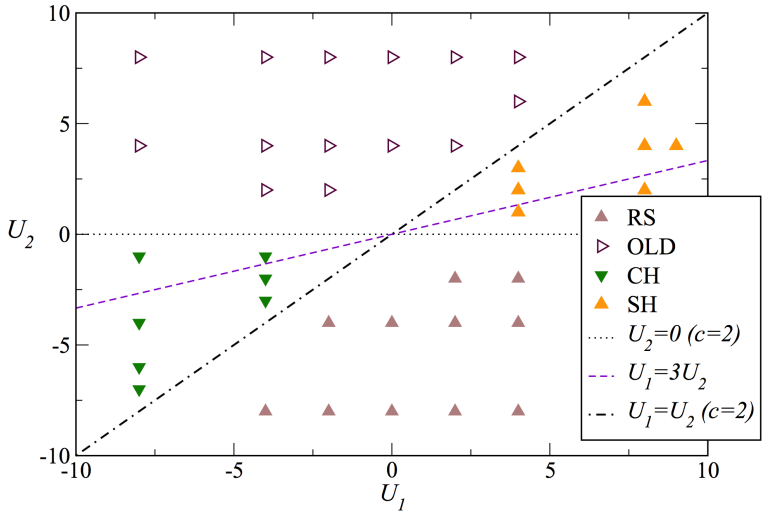


FIGURE 4.10 – Diagramme de phase numérique obtenu par DMRG (publié dans [3]) avec une longueur $L = 64$. La concordance avec l'analyse de basse énergie est manifeste.

des phases dont ils sont les transitions : si de part (noté $+$) et d'autre (noté $-$) de la ligne, un couplage a la même limite - $g_i^{\pm} = g$ - sur la ligne de transition (noté 0), le couplage aura la même limite, a savoir $g_i^0 = g$. En revanche, si ça n'est pas le cas - $g_i^{\pm} = \pm g$ - alors le couplage s'annulera sur la ligne : $g_i^0 = 0$. On parle d'*autodualité* : cette dernière est caractérisée par le produit des dualités "$\Omega_+\Omega_-$" des deux phases que la transition sépare : les moins de cette dualité indiquent les signes différents d'une limite à l'autre, c'est-à-dire qu'ils indiquent les couplages que l'autodualité annule. Ainsi, sur la ligne d'autodualité, certains couplages devant nécessairement s'annuler (autrement dit $\Omega_+\Omega_-$ aura forcément un ou plusieurs signes moins ⟨60⟩), il ne sera plus possible de relier le modèle de la transition à celui de Gross-Neveu, il faudra dès lors s'y prendre autrement. Au mieux nous saurons, grâce à l'autodualité, que certains couplages sont nuls, quant aux autres, une étude spécifique sera nécessaire. Une autre caractéristique importante d'une autodualité est son lien, ou son absence de lien, avec une symétrie du problème : soit elle correspond à une ligne particulière du diagramme de phase, c'est-à-dire que les couplages qu'elle annule sont nuls dès la théorie initiale, à $\ell = 0$; soit ce n'est pas le cas et l'autodualité est émergente, auquel cas il y a peu de chance de déterminer - dans le diagramme de phase - l'équation de l'autodualité.

Pour le modèle p-band, les lignes d'autodualité correspondent aux lignes de symétrie $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$, lesquelles sont respectivement décrites par les mêmes autodualités tant du côté répulsif qu'attractif. Nous donnons les résultats pour chacune de ces deux lignes :

— $U_1 = U_2$: elle correspond à l'autodualité $\Omega_6\Omega_{11} = \Omega_7\Omega_{12} = \Omega_1\Omega_4$ (les deux premières

⟨60⟩. Sans quoi, il s'agirait de même dualités et donc des mêmes phases.

expressions correspondant respectivement aux transitions HS/OLD et HC/RS), c'est-à-dire, quand on détermine de quels couplages la dualité correspondante fait renverse le signe, à l'annulation des couplages suivants : $g_3 = g_4 = g_6 = g_7 = g_9 = g_{10} = 0$. Or - sur la ligne $U_1 = U_2$ - ces couplages sont tous nuls ⟨61⟩, c'est-à-dire que dès avant la procédure de renormalisation, le ligne correspond à l'autodualité, et part et d'autre de l'interaction. Le modèle écrit dans les bilinéaires de Majorana prend alors une expression simplifiée (à $\ell = 0$) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}[\Omega_1\Omega_4] = -U_2\Big(\mathcal{K}_s + \mathcal{K}_4\Big)^2 + U_2\Big(\mathcal{K}_h + \mathcal{K}_6\Big)^2 \tag{4.258}$$

C'est-à-dire que l'interaction prend la forme de deux modèles de Gross-Neveu SO(4) découplés : et nous constatons, selon le signe de U_2, que c'est tantôt le premier membre ($U_2 < 0$), tantôt le second membre ($U_2 > 0$), qui est massif, tandis que l'autre est critique. Autrement dit, de part et d'autre du point critique, la ligne de transition $U_1 = U_2$ appartient à la classe d'universalité $\text{SO}(4)_1$ avec une charge centrale $c = 2$, en accord avec l'analyse du modèle sur réseau sur cette ligne ;

— $U_2 = 0$: elle correspond à l'autodualité $\Omega_7\Omega_{11} = \Omega_6\Omega_{12} = \Omega_2\Omega_4$ (les deux premières expressions correspondent maintenant aux transitions HS/RS et HC/OLD), c'est-à-dire à l'annulation des couplages suivants : $g_2 = g_4 = g_5 = g_7 = g_9 = g_{11} = 0$. Ici encore - sur la ligne $U_2 = 0$ - ces couplages sont nuls ⟨62⟩ dès la condition initiale. Et l'expression (toujours à $\ell = 0$) de l'interaction est alors :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}[\Omega_2\Omega_4] = -\frac{U_1}{2}\Big(\mathcal{K}_s + \mathcal{K}_6\Big)^2 - \frac{U_1}{2}\Big(\mathcal{K}_h + \mathcal{K}_4\Big)^2 \tag{4.259}$$

Et de même que sur la ligne précédente, nous avons affaire avec deux modèles de Gross-Neveu SO(4) découplés, le premier massif et le second critique ($U_1 < 0$), ou le contraire ($U_1 > 0$). Le modèle appartient lui aussi à la classe d'universalité $\text{SO}(4)_1$ de charge centrale $c = 2$. La conclusion est identique à celle issue de l'analyse sur réseau pour cette ligne.

D'ailleurs, on ne s'étonne pas de ce que les analyses sur les deux lignes concordent, nous avions en effet déjà remarqué que l'une et l'autre étaient gérées par des modèles identiques à un changement de couplage et d'axe orbital près (pour mémoire : $U_1 \to 2U_2$ et $T^z \to T^x$). Quant à l'analyse numérique du DMRG, donnée en FIGURE 4.10, elle montre un parfait accord sur tout le diagramme de phase avec l'analyse fournie par le faible couplage. Enfin, en guise de résumé, nous donnons le diagramme de phase final dans la FIGURE 4.11.

⟨61⟩. Ils correspondent dans les couplages $\{f_i^h\}_{i\in[\![1,8]\!]}$ à $f_3^h = f_4^h = f_6^h = f_7^h = 0$.
⟨62⟩. Ils correspondent dans les couplages $\{f_i^h\}_{i\in[\![1,8]\!]}$ à $f_2^h = f_4^h = f_6^h = f_8^h = 0$.

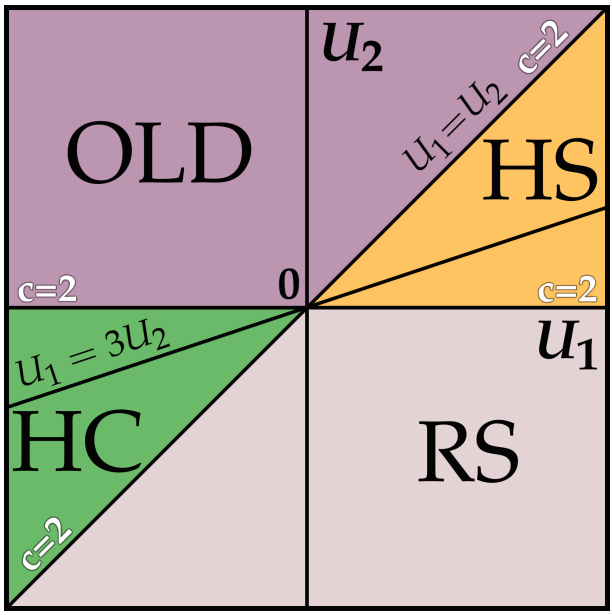


FIGURE 4.11 – Diagramme de phase au demi-remplissage (publié dans [3]) : les zones **I**, **II**, **III** et **IV**, du faible au fort couplages, présente respectivement les phases HS, OLD, HC et RS.

4.2.3 Modèle *g-e*

Passant au modèle *g-e*, ce sont dans les opérateurs adaptés à la symétrie $\{O_i^z\}_{i\in[\![1,9]\!]}$ que l'on donne les conditions initiales, pour N = 2, et au demi-remplissage ⟨63⟩ :

$$f_1^z = -(U+V_{ex}) \quad (4.260)$$
$$f_2^z = -V \quad (4.261)$$
$$f_3^z = V_{ex}-U \quad (4.262)$$
$$f_4^z = 2V_{ex}-V \quad (4.263)$$
$$f_5^z = U+V_{ex}-2V \quad (4.264)$$
$$f_6^z = U-V_{ex}+2V \quad (4.265)$$
$$f_7^z = V-V_{ex} \quad (4.266)$$
$$f_8^z = U \quad (4.267)$$
$$f_9^z = V+V_{ex} \quad (4.268)$$

⟨63⟩. Ici encore, un facteur $\pi/2$ est omis.

De même pour les couplages du modèle de Hund :

$$
\begin{aligned}
f_1^z &= -U - J - J_z/2 && (4.269)\\
f_2^z &= -U + J_z/2 && (4.270)\\
f_3^z &= -U + J - J_z/2 && (4.271)\\
f_4^z &= -U + 2J + J_z/2 && (4.272)\\
f_5^z &= -U + J + 3J_z/2 && (4.273)\\
f_6^z &= 3U - J - J_z/2 && (4.274)\\
f_7^z &= U - J - J_z/2 && (4.275)\\
f_8^z &= U + J_z/2 && (4.276)\\
f_9^z &= U + J - J_z/2 && (4.277)
\end{aligned}
$$

Et les équations du groupe de renormalisation, communes aux deux modèles, *g-e* et Hund, sont données par :

$$
\begin{aligned}
\dot{f}_1^z &= \frac{1}{4}\Big(\big(f_1^z\big)^2 + 2\big(f_2^z\big)^2 + \big(f_3^z\big)^2 \Big) + \frac{1}{2}\big(f_7^z\big)^2 && (4.278)\\
\dot{f}_2^z &= \frac{1}{2}f_1^z f_2^z + \frac{1}{4}f_3^z f_4^z + \frac{1}{4}f_2^z f_5^z + \frac{1}{2}f_7^z f_8^z && (4.279)\\
\dot{f}_3^z &= \frac{1}{2}f_1^z f_3^z + \frac{1}{2}f_2^z f_4^z + \frac{1}{2}f_7^z f_9^z && (4.280)\\
\dot{f}_4^z &= \frac{3}{4}f_2^z f_3^z + \frac{1}{4}f_4^z f_5^z + \frac{1}{2}f_8^z f_9^z && (4.281)\\
\dot{f}_5^z &= \frac{3}{4}\big(f_2^z\big)^2 + \frac{1}{4}\big(f_4^z\big)^2 + \frac{1}{2}\big(f_8^z\big)^2 && (4.282)\\
\dot{f}_6^z &= \frac{3}{4}\big(f_7^z\big)^2 + \frac{1}{2}\big(f_8^z\big)^2 + \frac{1}{4}\big(f_9^z\big)^2 && (4.283)\\
\dot{f}_7^z &= \frac{1}{2}f_1^z f_7^z + \frac{1}{4}f_6^z f_7^z + \frac{1}{2}f_2^z f_8^z + \frac{1}{4}f_3^z f_9^z && (4.284)\\
\dot{f}_8^z &= \frac{3}{4}f_2^z f_7^z + \frac{1}{4}f_5^z f_8^z + \frac{1}{4}f_6^z f_8^z + \frac{1}{4}f_4^z f_9^z && (4.285)\\
\dot{f}_9^z &= \frac{3}{4}f_3^z f_7^z + \frac{1}{2}f_4^z f_8^z + \frac{1}{4}f_6^z f_9^z && (4.286)
\end{aligned}
$$

Enfin, nous donnons les opérateurs qui leurs correspondent, qui ne sont rien d'autre que les

opérateurs (3.340, . . . , 3.348) normalisés :

$$O_1^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_s^2/2 \tag{4.287}$$
$$O_2^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_o\mathcal{K}_s \tag{4.288}$$
$$O_3^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s \tag{4.289}$$
$$O_4^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_6\mathcal{K}_o \tag{4.290}$$
$$O_5^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_o^2/2 \tag{4.291}$$
$$O_6^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_c^2/2 \tag{4.292}$$
$$O_7^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_s\mathcal{K}_c \tag{4.293}$$
$$O_8^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_c\mathcal{K}_o \tag{4.294}$$
$$O_9^{z(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_6\mathcal{K}_c \tag{4.295}$$

Les lignes de symétries

Comme précédemment, nous passons à l'étude des lignes où le modèle présente des symétries supplémentaires. Les modèles *g*-*e* et de Hund possédant d'emblée la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$. Des équations du groupe de renormalisation, nous notons que l'on peut unifier les opérateurs d'interaction de manière à élargir la symétrie orbitale de $\mathrm{U}(1)_o$ à $\mathrm{SU}(2)_o$: c'est fait lorsque $f_2^z = f_3^z$, $f_4^z = f_5^z$ et $f_8^z = f_9^z$, ce qui est réalisé par un ajustement fin :

$$\mathrm{SU}(2)_o \quad : \quad \begin{array}{ll} U = V + V_{\mathrm{ex}} & \text{(modèle } g\text{-}e\text{)} \\ J = J_z & \text{(modèle de Hund)} \end{array} \tag{4.296}$$

Cette symétrie est visible sur l'expression du modèle (2.41) où les générateurs de pseudospin T_i^j des deux derniers membres s'assemblent en $\boldsymbol{T}_i^2$. Au niveau des Majorana, cela mène à l'unification des bilinéaires $\mathcal{K}_o$ et $\mathcal{K}_6$ en un grand bilinéaire de pseudo-spin : $\mathcal{K}_{ps} = \sum_{a=4}^{6} \mathcal{K}_a$. Seulement, et dès le réseau, contrairement aux lignes de symétrie du modèle *p*-band ⟨64⟩ il se trouve que ce modèle n'est pas relié simplement au modèle à une orbitale. Néanmoins, on peut - comme précédemment - donner une nouvelle transformation de Shiba ⟨65⟩ permettant de relier les différentes phases du diagramme :

$$c_{g\alpha,i} \xrightarrow{\text{Shiba}'} c_{g\alpha,i} \tag{4.297}$$
$$c_{e\alpha,i} \xrightarrow{\text{Shiba}'} (-1)^i c_{e\alpha,i}^\dagger \tag{4.298}$$

Notons que cette transformation de Shiba - d'ailleurs valables pour tout N - est au pseudospin ce que la première était au spin. D'ailleurs, elle échange les composantes du pseudospin $\boldsymbol{T}_i$

⟨64⟩. Exceptée la ligne harmonique.
⟨65⟩. On la distinguera de l'autre dans les équations en la primant.

avec la charge $\mathcal{K}_i$, mais attention, différemment définie que précédemment [66] :

$$\mathcal{K}_i^+ = (-1)^i c^\dagger_{g\alpha,i} c^\dagger_{e\alpha,i} \tag{4.299}$$

$$\mathcal{K}_i^- = (-1)^i c_{e\alpha,i} c_{g\alpha,i} \tag{4.300}$$

$$\mathcal{K}_i^z = \frac{1}{2}(n_i - \mathrm{N}) \tag{4.301}$$

En toute généralité, cette transformation n'est pas une symétrie du problème, néanmoins, on mesure son importance lorsque l'on écrit le hamiltonien du modèle *g-e* sous la forme suivante (valable pour tout N) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{g\text{-}e} = & -t\sum_i \left(c^\dagger_{m\alpha,i} c_{m\alpha,i+1} + \text{h.c.}\right) - \mu \sum_i n_i + \frac{U}{2}\sum_{i,m} n^2_{m,i} \\ & + \left(V - \frac{1}{\mathrm{N}} V_{\text{ex}}\right) \sum_i n_{g,i} n_{e,i} - V_{\text{ex}} \sum_i \mathcal{S}^a_{g,i} \mathcal{S}^a_{e,i}\end{aligned} \tag{4.302}$$

Alors, l'effet de la transformation sur cette dernière expression est de retourner le signe de "$V - \frac{1}{\mathrm{N}} V_{\text{ex}}$" et de remplacer $\mathcal{S}^a_{e,i}$ par sa représentation conjuguée. Il est pourtant évident que cette dernière opération laisse peu de chance au modèle *g-e* [67] d'être laissé identique, sauf si le spin est auto-conjugué, ce qui devient vrai lorsque $\mathrm{N} = 2$. Or dans ce cas, pour que la transformation préserve le hamiltonien, il faut lui ajouter une transformation supplémentaire, qui n'est rien d'autre qu'une rotation d'angle π dans l'espace orbital :

$$c_{e\uparrow} \rightarrow -c_{e\downarrow} \tag{4.303}$$

$$c_{e\downarrow} \rightarrow c_{e\uparrow} \tag{4.304}$$

Cette transformation change évidemment les générateurs du pseudospin les uns dans les autres. Cependant elle préserve le hamiltonien, en changeant tout de même ses paramètres d'interaction comme [68] :

$$U \rightarrow U \tag{4.305}$$

$$V \rightarrow -V + V_{\text{ex}} \tag{4.306}$$

$$V_{\text{ex}} \rightarrow V_{\text{ex}} \tag{4.307}$$

De manière générale sur le diagramme de phase, on ne tire pas de nouvelle symétrie comme

[66]. On distinguera bien les opérateurs $\mathcal{K}$ et $\boldsymbol{K}$, associés respectivement à *Shiba'* et *Shiba*.
[67]. Cela dit, modèles *g-e* et Hund étant tout à fait équivalents, ce qui est dit sur l'un est valable sur l'autre.
[68]. Cette transformation est loin d'être orthogonale ! Elle laisse invariant (avec valeur propre 1) le plan d'équation $V - 2V_{\text{ex}} = 0$ tandis qu'elle transforme avec la valeur propre -1 la droite $(U = 0, V, V_{\text{ex}} = 0)$.

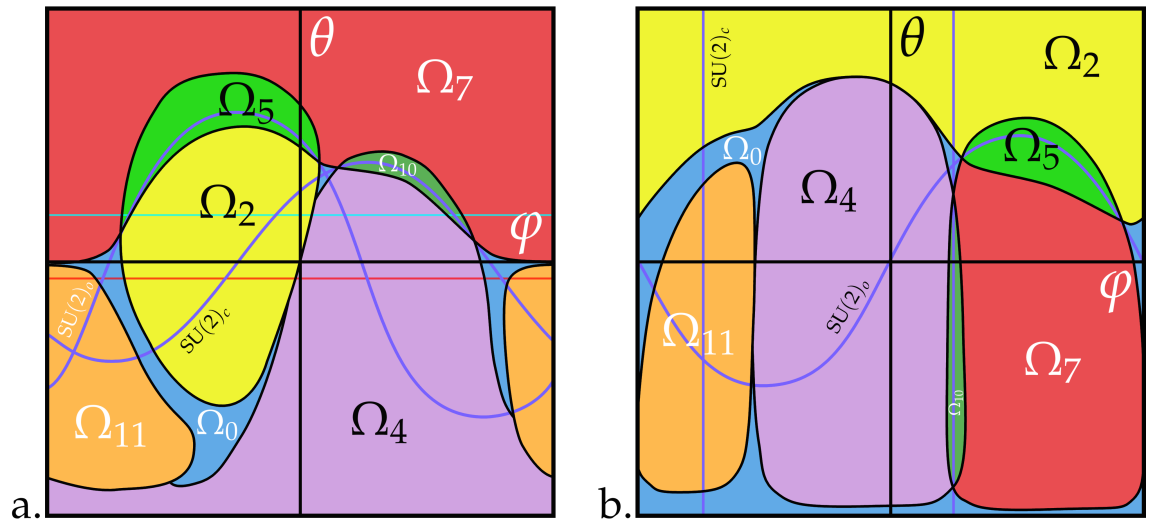


FIGURE 4.12 – Résultat brut des équations du groupe de renormalisation pour le modèle *g-e*, N = 2 au demi-remplissage : sept dualités, Ω_0, Ω_2, Ω_4, Ω_5, Ω_7, Ω_{10} et Ω_{11}, sont atteintes. Les résultats sont présentés en sphérique (définition à suivre), avec les angles $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi[$ (l'origine $(0, 0)$ est le point en bas, à gauche). Les plans de symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$ et $\mathrm{SU}(2)_c$ sont représentés en **bleu**. Les deux lignes horizontales, tracées pour $\theta_+ \simeq 1,471$ et $\theta_- \simeq 1,862$ ont leur correspondance en FIGURE 4.15.

nous l'avons fait pour le modèle *p*-band puisque $\sum_i T_i^z$ s'échange avec $\sum_i \mathcal{K}_i^z$, dont on sait déjà qu'ils sont respectivement associés aux symétries $\mathrm{U}(1)_o$ et $\mathrm{U}(1)_c$ (l'information n'est pas originale, mais au moins cohérente). Néanmoins, il doit y avoir dans le diagramme de phase une répercussion de la transformation de Shiba à cause de la symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$. Pour la trouver, il suffit d'appliquer la transformation de *Shiba'* (4.305, 4.306, 4.307) à l'équation du plan de symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$ (4.296) ⟨69⟩ :

$$\mathrm{SU}(2)_o \ : \ U = V + V_{\mathrm{ex}} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{SU}(2)_c \ : \ U = -V + 2V_{\mathrm{ex}} \tag{4.309}$$

Écrivons alors les couplages initiaux - à gauche et à droite avec les équations de plan de

⟨69⟩. Dans les couplages Hund, ces plans correspondent à :

$$\mathrm{SU}(2)_o \ : \ J = J_z \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{SU}(2)_c \ : \ U = J \tag{4.308}$$

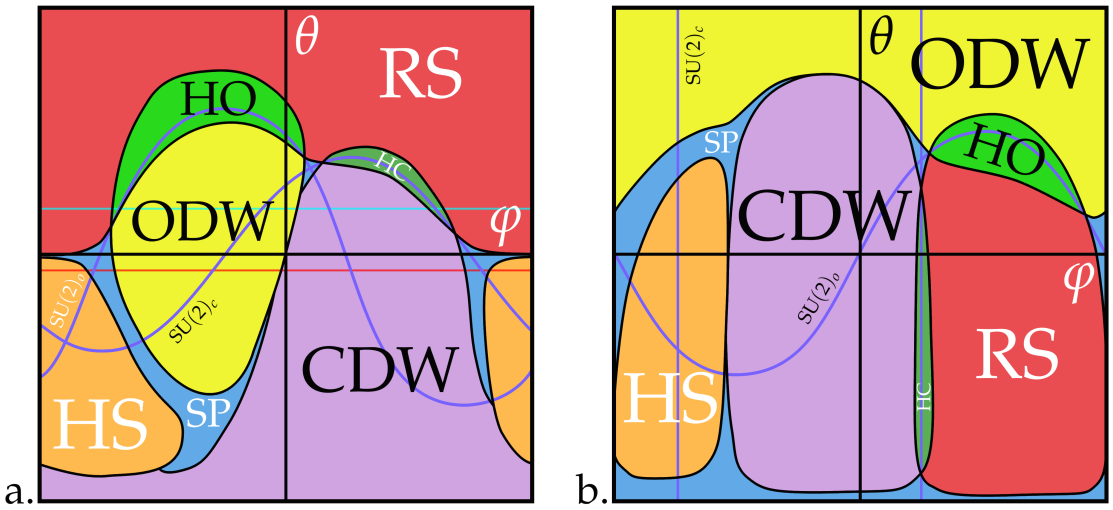


FIGURE 4.13 – Diagrammes de phase complets au demi-remplissage, N = 2, des modèles *g-e* (en a.) et Hund (en b.). On constate l'équivalence - *via* un dictionnaire - entre les deux modèles.

symétrie $SU(2)_o$ et $SU(2)_c$:

$$-(V+2V_{ex}) \overset{o}{=} f_1^z \overset{c}{=} V-3V_{ex} \tag{4.310}$$
$$-V = f_2^z = -V \tag{4.311}$$
$$-V = f_3^z = V-V_{ex} \tag{4.312}$$
$$-V+2V_{ex} = f_4^z = -V+2V_{ex} \tag{4.313}$$
$$-V+2V_{ex} = f_5^z = -3V+3V_{ex} \tag{4.314}$$
$$3V = f_6^z = V+V_{ex} \tag{4.315}$$
$$V-V_{ex} = f_7^z = V-V_{ex} \tag{4.316}$$
$$V+V_{ex} = f_8^z = -V+2V_{ex} \tag{4.317}$$
$$V+V_{ex} = f_9^z = V+V_{ex} \tag{4.318}$$

Et quand la première symétrie $SU(2)_o$ unifiait $\mathcal{K}_o$ et $\mathcal{K}_6$ en $\mathcal{K}_{ps}$, la seconde symétrie $SU(2)_c$ unifie $\mathcal{K}_c$ et $\mathcal{K}_6$ en $\mathcal{K}'_h = \sum_{a=6}^{8} \mathcal{K}_a$ ⟨70⟩. Notons enfin sur les symétries que les deux plans n'étant pas parallèles, il possèdent en commun une droite : $(\mathscr{D}) = (U = 3V, V, V_{ex} = 2V)$, droite sur laquelle - en introduisant $\mathcal{K}_{oc} = \sum_{a=4}^{8} \mathcal{K}_a$ - la théorie initiale est la suivante :

$$\mathcal{H}_{g\text{-}e}^{(\mathscr{D})} = \frac{5V}{2}\mathcal{K}_s^2 - V\mathcal{K}_s\mathcal{K}_{oc} + \frac{3V}{2}\mathcal{K}_{oc}^2 \tag{4.319}$$

⟨70⟩. Pour la transformation de *Shiba*, on a $\mathcal{K}_h$ (le bilinéaire *c* avec le 5), pour la transformation de *Shiba'*, on a $\mathcal{K}'_h$ (le bilinéaire *c* avec le 6).

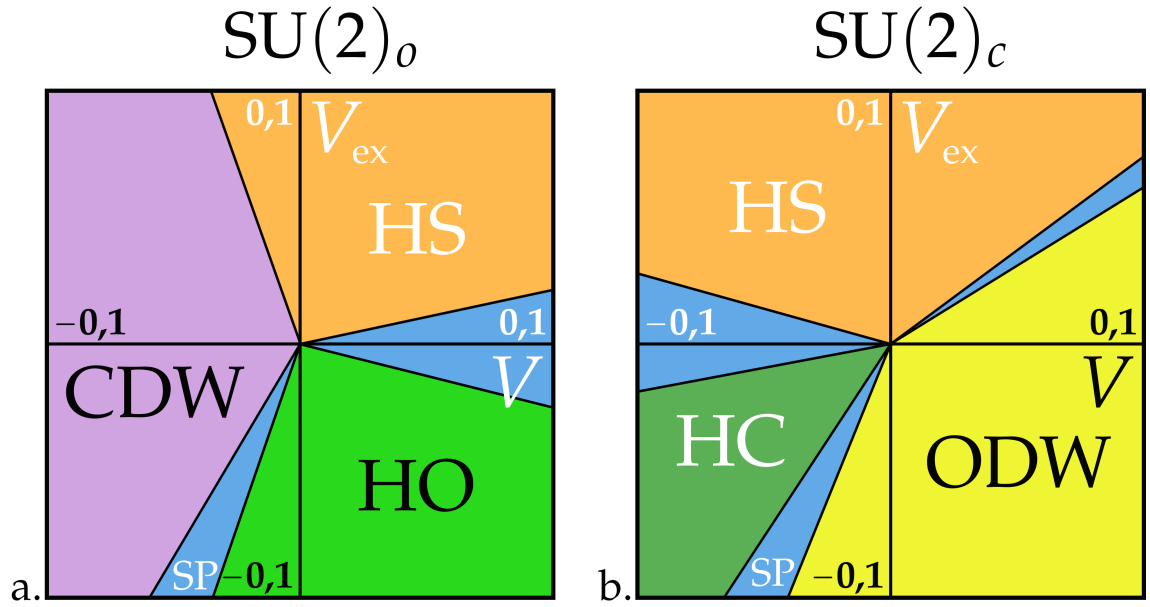


FIGURE 4.14 – Diagrammes de phase au demi-remplissage du modèle *g-e* sur les plans de symétrie : pour $SU(2)_o$ (en a.) et pour $SU(2)_c$ (en b.).

Soit l'émergence sur cette droite de la symétrie $SO(3)_n \times SO(5)_{oc}$.

Les diagrammes de phases

Les diagrammes de phase totaux sont donnés avec les dualités en FIGURE 4.12 pour, en a., les modèles *g-e* et, en b., Hund qui, étant donné qu'il y a trois paramètres d'interaction, sont tracés en sphérique : pour $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$, on trace pour les points de la sphère (à rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ fixé) - c'est-à-dire $\big(R\cos(\varphi)\sin(\theta), R\sin(\varphi)\sin(\theta), R\cos(\theta)\big)$ - que l'on interprète respectivement comme les paramètres d'interaction (U, V, V_{ex}) et (U, J, J_z).

Les phases, associées aux dualités *via* les associations (4.168, ..., 4.180), sont présentées, pour les modèles *g-e* et Hund et avec les lignes de symétrie $SU(2)_o$ et $SU(2)_c$, en FIGURE 4.13. Deux figures sont d'ailleurs données pour ces deux plans - pour le modèle *g-e* seulement - en FIGURE 4.14. De même, toujours pour le modèle *g-e*, nous donnons deux figures sur des plans à V_{ex} constant, tantôt négatif, tantôt positif, en FIGURE 4.15, et pour lesquelles ont fait le parallèle et l'accord avec l'analyse numérique de la FIGURE 4.16 issue de l'article [3].

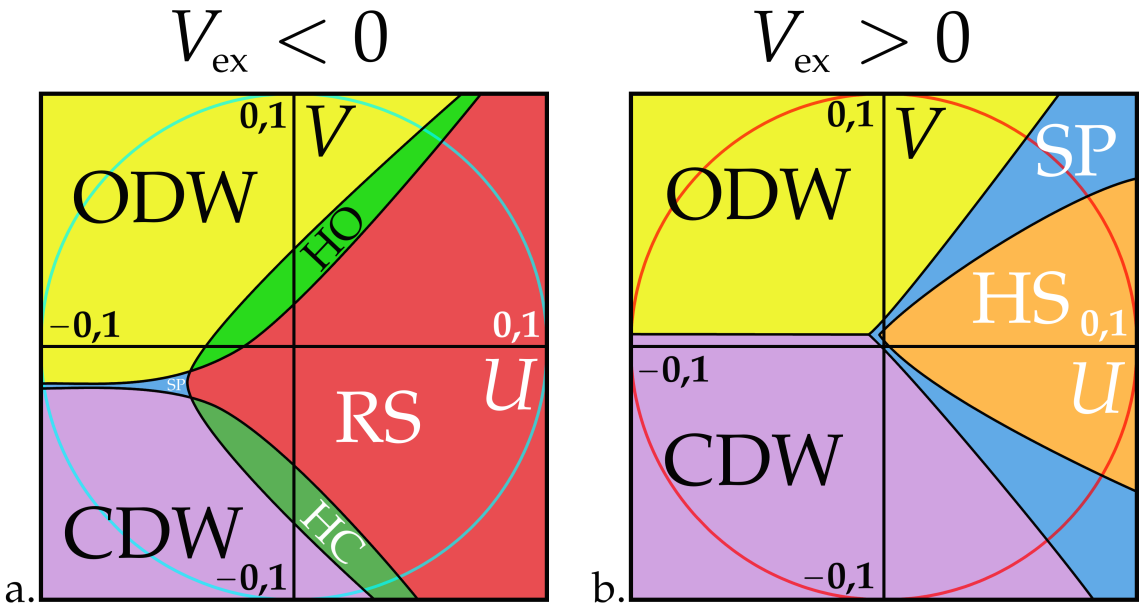


FIGURE 4.15 – Diagrammes de phase au demi-remplissage du modèle *g-e* en $(U, V) \in [-0,1;0,1]^2$, avec $V_{ex} = -0,03t < 0$ (en a.) et $V_{ex} = 0,01t > 0$ (en b.). Les cercles tracés ont leur correspondance en FIGURE 4.12 (diagrammes déjà déterminés dans [4]).

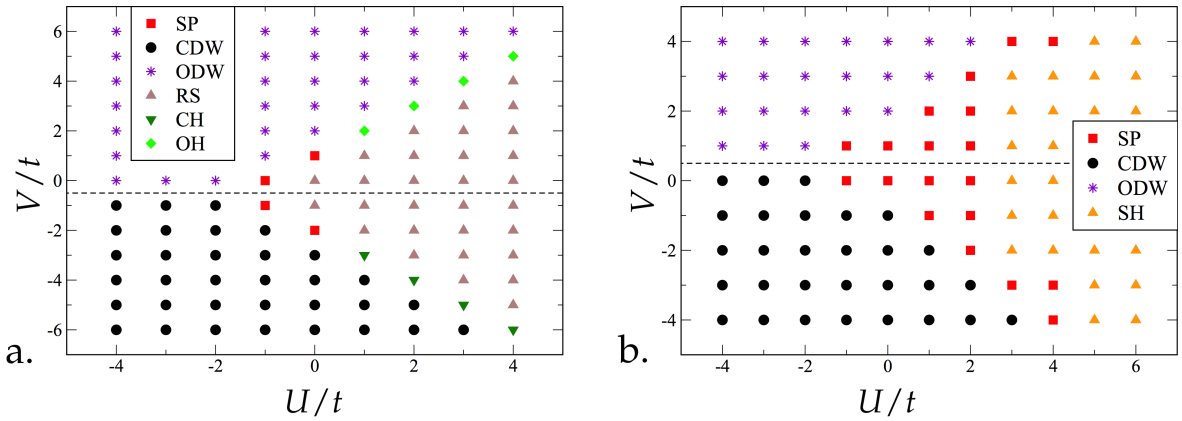


FIGURE 4.16 – Diagrammes de phase au demi-remplissage du modèle *g-e* (publiés dans [3]), avec $V_{ex} = -t < 0$ (en a.) et $V_{ex} = t > 0$ (en b.). Ils sont à comparer avec le résultat de la FIGURE 4.12, même si les zones du diagramme qu'ils décrivent sont quelque peu différentes.

Les lignes de transition

Il ne s'agit pas ici de discuter en détail des dix autodualités que présentent les modèles *g-e* et Hund (voir FIGURE 4.13) qui sont par ailleurs présentées en [4] et qui s'effectuent d'une manière tout à fait identique à celle réalisée pour le modèle *p*-band. Néanmoins, issus de cette référence, nous donnons en FIGURE 4.17 des résultats qui résument ces dix transitions, avec les

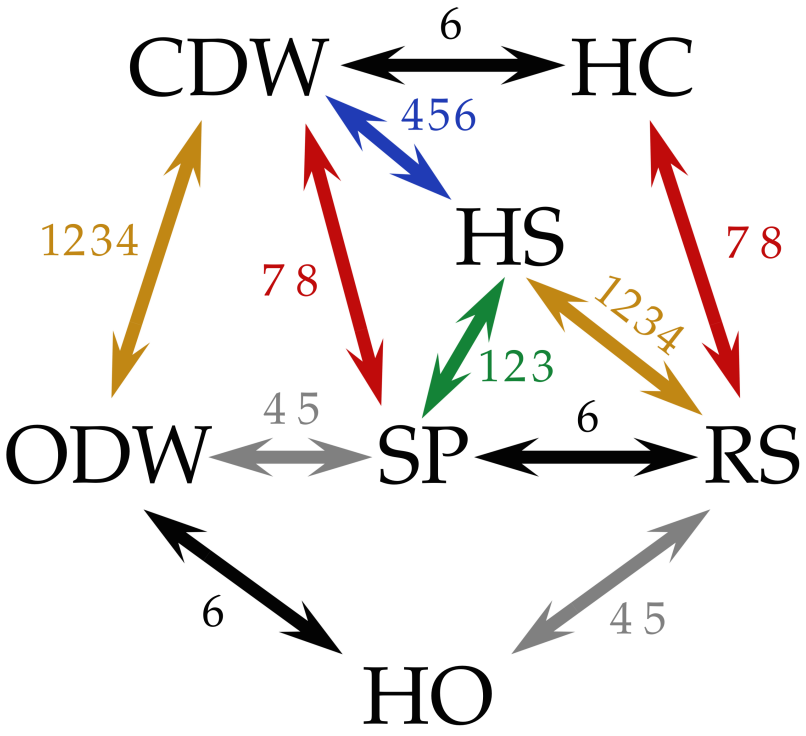


FIGURE 4.17 – Phases des modèles *g-e* avec les fermions de Majorana que les autodualités annulent.

degrés annulés par l'auto-dualité.

4.2.4 Modèle du double-puits

Nous étudions ici le modèle de double-puits à N = 2 et au demi-remplissage ⟨71⟩, lequel n'est pas décrit par les associations (4.168, . . . , 4.180) pour la simple raison qu'entre les dualités - déterminée pour les degrés $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}$ - et l'interprétation des phases - réalisée pour les degrés de montant 1 et 2 - il existe maintenant un dictionnaire (2.139) ⟨72⟩. Ainsi nous donnons les conditions initiales des couplages $\{f_i\}_{i\in[\![1,12]\!]}$ sachant que $\delta_{\text{umk.}} = 1$ (pour le demi-remplissage)

⟨71⟩. C'est-à-dire, contrairement aux deux modèles précédents, avec un nombre moyen d'atome par site satisfaisant $\bar{n} = 1$ (contre $\bar{n} = 2$ pour les modèles précédents). Cela induit en revanche le même vecteur d'onde de Fermi $k_F = \pi/2a_0$.

⟨72⟩. L'approche de basse énergie dans les fermions de Majorana que nous appliquons au modèle de double-puits avec un terme $t_\perp \neq 0$ a déjà été développée pour des modèles d'échelles généralisés à cinq paramètres d'interaction dans [157, 158]. Les différentes phases que nous présentons y ont été déterminées, et si le modèle de double-puits est bien un cas particulier de ces modèles généralisés, la comparaison directe n'est cependant pas possible car l'étude dans [157] ne fournit par le diagramme de phase. L'objet de cette partie est de reproduire cette dérivation pour le modèle de double-puits et d'en donner le diagramme de phase.

et $\delta_{\text{ani.}} = 0$ (pour l'anisotropie) [73] :

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -(U+V) && (4.320)\\
f_2 &= -(U-V)/2 && (4.321)\\
f_3 &= -2V && (4.322)\\
f_4 &= (U-V)/2 && (4.323)\\
f_5 &= (U-V)/2 && (4.324)\\
f_6 &= 2V && (4.325)\\
f_7 &= -(U-V)/2 && (4.326)\\
f_8 &= (U+V) && (4.327)\\
f_9 &= 0 && (4.328)\\
f_{10} &= -(U-V)/2 && (4.329)\\
f_{11} &= (U-V) && (4.330)\\
f_{12} &= (U-V)/2 && (4.331)
\end{aligned}
$$

Avec les opérateurs d'interaction associés aux bonnes dualités (on rappelle, au passage, qu'ils sont définis dans les degrés pair et impair) :

$$
\begin{aligned}
O_1^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_s^2/2 && (4.332)\\
O_2^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_s && (4.333)\\
O_3^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s && (4.334)\\
O_4^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_5\mathcal{K}_s && (4.335)\\
O_5^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_5\mathcal{K}_6 && (4.336)\\
O_6^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_5 && (4.337)\\
O_7^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_4\mathcal{K}_6 && (4.338)\\
O_8^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_c^2/2 && (4.339)\\
O_9^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_s && (4.340)\\
O_{10}^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_4 && (4.341)\\
O_{11}^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_6 && (4.342)\\
O_{12}^{(\text{DSE})} &= \mathcal{K}_c\mathcal{K}_5 && (4.343)
\end{aligned}
$$

Et les équations du groupe de renormalisation sont identiques à celles du modèles p-band (4.181, ..., 4.192). Cela dit, nous constatons de l'écriture des conditions intiales qu'il existe une unification des bilinéaires, en **rouge** avec $f_4 = -f_2$, en **vert** avec $f_5 = -f_7$ et en **bleu** avec

[73]. Avec l'ommission du terme $\pi/2$.

$f_{12} = -f_{10}$. Comme nous l'avions évoqué, il ne s'agit de rien d'autre que de la manifestation de la symétrie $\mathrm{U}(1)_o$ pour l'interaction écrite dans les degrés pair et impair. Elle mène à une définitions de nouveaux couplages $\{\lambda_i\}_{i\in[\![1,9]\!]}$ associés à de nouveaux opérateurs $\{O_i^\lambda\}_{i\in[\![1,9]\!]}$, et définis par :

$$\lambda_1 = f_1 \tag{4.344}$$
$$\lambda_2 = f_4 = -f_2 \tag{4.345}$$
$$\lambda_3 = f_3 \tag{4.346}$$
$$\lambda_4 = f_5 = -f_7 \tag{4.347}$$
$$\lambda_5 = -f_6 \tag{4.348}$$
$$\lambda_6 = f_8 \tag{4.349}$$
$$\lambda_7 = f_9 \tag{4.350}$$
$$\lambda_8 = f_{12} = -f_{10} \tag{4.351}$$
$$\lambda_9 = f_{11} \tag{4.352}$$

Et pour les opérateurs d'interaction qui leur correspondent :

$$O_1^\lambda = O_1^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_s^2/2 \tag{4.353}$$
$$O_2^\lambda = O_4^{(\mathrm{DSE})} - O_2^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_s\widetilde{\mathcal{K}}_o \tag{4.354}$$
$$O_3^\lambda = O_3^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_6\mathcal{K}_s \tag{4.355}$$
$$O_4^\lambda = O_5^{(\mathrm{DSE})} - O_7^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_6\widetilde{\mathcal{K}}_o \tag{4.356}$$
$$O_5^\lambda = -O_6^{(\mathrm{DSE})} = \widetilde{\mathcal{K}}_o^2/2 \tag{4.357}$$
$$O_6^\lambda = O_8^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_c^2/2 \tag{4.358}$$
$$O_7^\lambda = O_9^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_c\mathcal{K}_s \tag{4.359}$$
$$O_8^\lambda = O_{12}^{(\mathrm{DSE})} - O_{10}^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_c\widetilde{\mathcal{K}}_o \tag{4.360}$$
$$O_9^\lambda = O_{11}^{(\mathrm{DSE})} = \mathcal{K}_c\mathcal{K}_6 \tag{4.361}$$

Ainsi, les conditions initiales dans ces nouveaux couplages satisfont :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -(U+V) && (4.362)\\
\lambda_2 &= (U-V)/2 && (4.363)\\
\lambda_3 &= -2V && (4.364)\\
\lambda_4 &= (U-V)/2 && (4.365)\\
\lambda_5 &= -2V && (4.366)\\
\lambda_6 &= (U+V) && (4.367)\\
\lambda_7 &= 0 && (4.368)\\
\lambda_8 &= (U-V)/2 && (4.369)\\
\lambda_9 &= (U-V) && (4.370)
\end{aligned}$$

Enfin nous donnons les équations du groupe de renormalisation dans ces couplages :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{4}\lambda_1^2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\frac{1}{4}\lambda_3^2+\frac{1}{2}\lambda_7^2 && (4.371)\\
\dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2+\frac{1}{4}\lambda_3\lambda_4+\frac{1}{4}\lambda_2\lambda_5+\frac{1}{2}\lambda_7\lambda_8 && (4.372)\\
\dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_3+\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_4+\frac{1}{2}\lambda_7\lambda_9 && (4.373)\\
\dot{\lambda}_4 &= \frac{3}{4}\lambda_2\lambda_3+\frac{1}{4}\lambda_4\lambda_5+\frac{1}{2}\lambda_8\lambda_9 && (4.374)\\
\dot{\lambda}_5 &= \frac{3}{4}\lambda_2^2+\frac{1}{4}\lambda_4^2+\frac{1}{2}\lambda_8^2 && (4.375)\\
\dot{\lambda}_6 &= \frac{3}{4}\lambda_7^2+\frac{1}{2}\lambda_8^2+\frac{1}{4}\lambda_9^2 && (4.376)\\
\dot{\lambda}_7 &= \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_7+\frac{1}{2}\lambda_2\lambda_8+\frac{1}{4}\lambda_3\lambda_9+\frac{1}{4}\lambda_6\lambda_7 && (4.377)\\
\dot{\lambda}_8 &= \frac{3}{4}\lambda_2\lambda_7+\frac{1}{4}\lambda_5\lambda_8+\frac{1}{4}\lambda_4\lambda_9+\frac{1}{4}\lambda_6\lambda_8 && (4.378)\\
\dot{\lambda}_9 &= \frac{3}{4}\lambda_3\lambda_7+\frac{1}{2}\lambda_4\lambda_8+\frac{1}{4}\lambda_6\lambda_9 && (4.379)
\end{aligned}$$

Étant donnée cette manière si particulière qu'à la symétrie orbitale de s'exprimer - en unifiant les bilinéaires $\mathcal{K}_4$ et $\mathcal{K}_5$ (avec un signe sur le premier) en $\widetilde{\mathcal{K}}_o$ - les dualités que nous obtenons avec ces équations doivent être interprétées à un signe sur le bilinéaire $\mathcal{K}_4$ près ⟨74⟩ ! Cela dit, pour tenir compte de cette subtilité, nous notons $\Omega_i^{\perp}$ les dualités des modèles avec un terme

⟨74⟩. Par exemple, si les couplages tendent tous vers la même limite - c'est-à-dire $f_1 = \cdots = f_9$ - il ne s'agira pas de la dualité triviale, mais de celle qui retourne ξ_L^4.

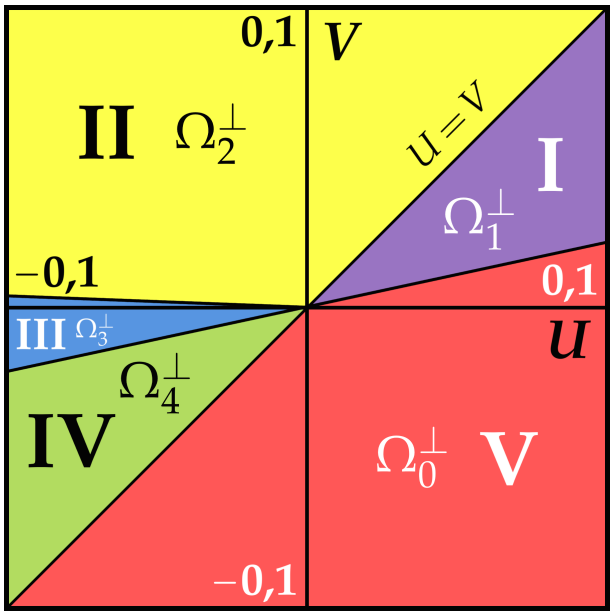


FIGURE 4.18 – Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle double-puits, N = 2, au demi-remplissage : dans le diagramme de phase, cinq dualités sont atteintes par les équations du groupe de renormalisation. Les différentes zones, **I**, **II**, **III**, **IV** et **V**, sont associées aux dualités $\Omega_1^\perp$, $\Omega_2^\perp$, $\Omega_3^\perp$, $\Omega_4^\perp$ et $\Omega_5^\perp$ respectivement.

perpendiculaire ⟨75⟩, c'est-à-dire lorsque $\delta_{\text{ani.}} = 0$. Le modèle de double-puits, *via* les équations du groupe de renormalisation (4.371, ..., 4.379), mène à cinq dualités, dont la dualité triviale (nous insistons : triviale en couplages seulement) :

$$\lambda_{1,\dots,9} \xrightarrow{\Omega_0^\perp} \lambda_{1,\dots,9} \tag{4.380}$$

$$\begin{matrix}\lambda_{1,4,5,6,8,9} \\ \lambda_{2,3,7}\end{matrix} \xrightarrow{\Omega_1^\perp} \begin{matrix}\lambda_{1,4,5,6,8,9} \\ -\lambda_{2,3,7}\end{matrix} \tag{4.381}$$

$$\begin{matrix}\lambda_{1,4,5,6,7} \\ \lambda_{2,3,8,9}\end{matrix} \xrightarrow{\Omega_2^\perp} \begin{matrix}\lambda_{1,4,5,6,7} \\ -\lambda_{2,3,8,9}\end{matrix} \tag{4.382}$$

$$\begin{matrix}\lambda_{1,3,5,6,7,9} \\ \lambda_{2,4,8}\end{matrix} \xrightarrow{\Omega_3^\perp} \begin{matrix}\lambda_{1,3,5,6,7,9} \\ -\lambda_{2,4,8}\end{matrix} \tag{4.383}$$

$$\begin{matrix}\lambda_{1,3,5,6,8} \\ \lambda_{2,4,7,9}\end{matrix} \xrightarrow{\Omega_4^\perp} \begin{matrix}\lambda_{1,3,5,6,8} \\ -\lambda_{2,4,7,9}\end{matrix} \tag{4.384}$$

⟨75⟩. Traité dans cette thèse à ce seul endroit.

Dans les fermions de Majorana, cela devient (en prenant soin de ξ_L^4) :

$$\Omega_0^\perp \ : \ \xi_L^4 \ \to -\xi_L^4 \tag{4.385}$$
$$\Omega_1^\perp \ : \ \xi_L^{1,2,3,4} \to -\xi_L^{1,2,3,4} \tag{4.386}$$
$$\Omega_2^\perp \ : \ \xi_L^{5,6} \ \to -\xi_L^{5,6} \tag{4.387}$$
$$\Omega_3^\perp \ : \ \xi_L^{5} \ \to -\xi_L^{5} \tag{4.388}$$
$$\Omega_4^\perp \ : \ \xi_L^{5,7,8} \ \to -\xi_L^{5,7,8} \tag{4.389}$$

Les dualités, représentées dans le diagramme de phase sont données en FIGURE 4.18. Elles se répartissent en cinq zones, **I**, **II**, **III**, **IV** et **V**, que nous étudions une à une.

La ligne de symétrie

La seule ligne de symétrie connue du modèle est la ligne d'équation $U = V$ associée à la symétrie orbitale $\mathrm{U}(1)_o$ (voir (2.149)). Sur cette ligne, le modèle sur réseau (2.146) se présente comme deux montant d'une échelle (une pour $\mathfrak{p}$ et une pour $\mathfrak{i}$) indépendantes, mais dont l'énergie individuelle $-\mu \pm t_\perp$ est différente à cause du terme de saut. Ainsi pour un terme $t_\perp$ général, le remplissage sur chaque chaîne est incommensurable, et la physique, pilotée pour chaque échelle par U, est un liquide de Luttinger dans le domaine répulsif (charge centrale des deux chaînes : $c = 2 + 2 = 4$) et un tandis qu'un gap en spin induit un liquide de Luther-Emery dans le domaine attractif (charge centrale des deux chaînes : $c = 1 + 1 = 2$). On peut croiser cette analyse sur réseau avec celle que donnent les équations du groupe de renormalisation. L'effet de cet ajustement fin sur les couplages mène à la nullité de cinq d'entre eux :

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0 \qquad (U = V) \tag{4.390}$$

Et les autres couplages satisfont :

$$\lambda_1 \ = \ -2U \tag{4.391}$$
$$\lambda_3 \ = \ -2U \tag{4.392}$$
$$\lambda_5 \ = \ -2U \tag{4.393}$$
$$\lambda_6 \ = \ \ 2U \tag{4.394}$$

Ces dernières expressions et une étude succinte des équations du groupe de renormalisation mènent - en posant $\lambda = \lambda_1 = \lambda_3$ - à l'expression suivante des équations du groupe de renormalisation :

$$\dot{\lambda} \ = \ \lambda^2/2 \tag{4.395}$$
$$\dot{\lambda}_{2,4,5,6,7,8,9} \ = \ 0 \tag{4.396}$$

Si bien que leur résolution est triviale et donne immédiatement l'expression du hamiltonien renormalisée au temps de renormalisation ℓ (sans oublier les termes **non-renormalisés**, de condition iniale non-nulle) :

$$\mathcal{H}^{\text{int.},(U=V)}_{\text{double-puits}}(\ell) = -\frac{U}{1+U\ell}\left(\mathcal{K}_s + \mathcal{K}_6\right)^2 - U\widetilde{K}_o^2 + U\mathcal{K}_c^2 \tag{4.397}$$

Ainsi l'interaction présente la symétrie $\mathrm{SO}(4)_c \times \mathrm{SO}(2)_o \times \mathrm{SO}(2)_c$ sur cette ligne. Ainsi on distingue deux limites de renormalisation, selon le signe de U :

— $U > 0$: alors le premier membre diverge dans la limite $\ell \to \infty$ sans passer par des divergences et ne restent que les termes non-renormalisés :

$$\lim_{\ell\to\infty} \mathcal{H}^{\text{int.},(U=V)}_{\text{double-puits}}(\ell) = -U\widetilde{K}_o^2 + U\mathcal{K}_c^2 \tag{4.398}$$

Or cette expression peut être récrite à l'aide de courants de charge des degrés orbitaux J_{mL} et J_{mR} (3.73, 3.74), à savoir :

$$\lim_{\ell\to\infty} \mathcal{H}^{\text{int.},(U=V)}_{\text{double-puits}}(\ell) = U\left(J_{\mathfrak{p}L}J_{\mathfrak{p}R} + J_{\mathfrak{i}L}J_{\mathfrak{i}R}\right) \tag{4.399}$$

Il ne s'agit de rien d'autre que l'expression à la limite continue du hamiltonien sur réseau, et nous avons alors une conclusion identique ;

— $U < 0$: alors le premier membre diverge dans la limite $\ell \to \ell^-_{\text{lim.}} = (1/|U|)^-$, et devient prédominant par rapport aux termes non-renormalisés (avec $\lambda \gg |U| > 0$) :

$$\lim_{\ell\to\infty} \mathcal{H}^{\text{int.},(U=V)}_{\text{double-puits}}(\ell) = \frac{\lambda}{2}\left(\mathcal{K}_s + \mathcal{K}_6\right)^2 \tag{4.400}$$

C'est un modèle de Gross-Neveu $\mathrm{SO}(4)$ massif appartenant à la classe d'universalité $\mathrm{SO}(4)_1$ et dont la charge centrale est $c = 2$, c'est-à-dire bien ce que nous avons déterminé sur le réseau.

Cela établi, nous étudions maintenant les phases zone par zone, et ce, en procédant de manière identique, c'est-à-dire en utilisant la bosonisation.

La zone I

La zone **I** est associée à la dualité $\Omega_1^{\perp}$ (4.386) et induit le hamiltonien suivant, exprimé d'abord dans les fermions de Majorana puis dans les bosons (avec $\lambda > 0$) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_1^{\perp}} = \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{a=5,6,7,8} \xi_R^a \xi_L^a - \sum_{a=1,2,3,4} \xi_R^a \xi_L^a\right)^2 \tag{4.401}$$

$$\frac{\pi^2}{\lambda}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_1^{\perp}} = C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} - \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) + C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(\widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} - \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) + \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.402}$$

Cette expression induit un unique fondamental qui condense la configuration bosonique suivante à la limite semiclassique :

$$\langle \Phi_c \rangle = 0, \quad \langle \Phi_s \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Theta_o \rangle = 0, \quad \langle \Theta_{so} \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.403}$$

Il faut maintenant trouver un paramètre d'ordre qui condense dans cette configuration, seulement, ces dernières expressions sont valides pour des champs écrits dans les opérateurs "d" des degrés pair et impair. Il faut ainsi proposer un opérateur écrit dans les "c", dont l'expression bosonisée de sa transformation dans les "d" se sera non-nulle dans (4.403). Cet opérateur est donné par ⟨76⟩ :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\text{SP}_\pi] = \sum_{m\alpha}(-1)^i(-1)^{m+1}\left(c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i+1} + \text{h.c.}\right) \tag{4.404}$$

Cet opérateur est écrit dans les "d" *via* la transformation (2.139) en ⟨77⟩ :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\text{SP}_\pi] = \mathcal{O}^{(d)}[\text{SP}^x_\pi] = \sum_{m\alpha}(-1)^i\left(d^\dagger_{m\alpha,i}d_{\overline{m}\alpha,i+1} + \text{h.c.}\right) \tag{4.405}$$

L'expression bosonisée de cette dernière expression ⟨78⟩ est :

$$\mathcal{O}^{(d)}[\text{SP}^x_\pi] = \frac{2\sigma^y}{\pi a_0}\sum_\ell \left\{\widetilde{S}_o^{\sqrt{\pi}}S_{c,\ell}^{\sqrt{\pi}}(\delta)C_s^{\sqrt{\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{\pi}} + \widetilde{C}_o^{\sqrt{\pi}}C_{c,\ell}^{\sqrt{\pi}}(\delta)S_s^{\sqrt{\pi}}\widetilde{S}_{so}^{\sqrt{\pi}}\right\} \tag{4.408}$$

⟨76⟩. Le nom de ce paramètre d'ordre vient de ce qu'il s'agit d'une phase Spin Peierls (SP), mais alternée.
⟨77⟩. Le nom SP^x_π vient de ce que cette phase est à σ^x ce que SP_π est à σ^z.
⟨78⟩. Où l'on a posé :

$$C_{c,\ell}^{\sqrt{\pi}}(\delta) = \cos\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_c + (-1)^\ell \delta a_0/2\right) \tag{4.406}$$

$$S_{c,\ell}^{\sqrt{\pi}}(\delta) = \sin\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_c + (-1)^\ell \delta a_0/2\right) \tag{4.407}$$

Avec σ^y, la matrice de Pauli des produits (3.259) des facteurs de Klein. Ce paramètre condense bien en (4.403) et la phase correspondante, dans les bons degrés, c'est-à-dire les degrés de barreaux $m = 1$ et 2, est SP_π.

La zone II

La zone **II** est associée à la dualité $\Omega_2^\perp$ (4.387) et induit le hamiltonien suivant (avec $\lambda > 0$) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_2^\perp} = \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{a=1,2,3,4,7,8}\xi_R^a\xi_L^a - \sum_{a=5,6}\xi_R^a\xi_L^a\right)^2 \tag{4.409}$$

$$\frac{\pi^2}{\lambda}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_2^\perp} = -C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} - \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) + C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(\widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} - \widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) + \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.410}$$

Cette expression induit un unique fondamental qui condense la configuration bosonique suivante à la limite semiclassique :

$$\langle\Phi_c\rangle = 0, \quad \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Theta_o\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle\Theta_{so}\rangle = 0 \tag{4.411}$$

L'opérateur non-nul dans cette configuration est donné par [79] :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\mathrm{ODW}] = \sum_{m\alpha}(-1)^i(-1)^{m+1}c^\dagger_{m\alpha,i}c_{m\alpha,i} \tag{4.412}$$

En effet cette expression est transformée dans les degrés pair et impair [80] :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\mathrm{ODW}] = \mathcal{O}^{(d)}[\mathrm{ODW}_x] = \sum_{m\alpha}(-1)^i d^\dagger_{m\alpha,i}d_{\overline{m}\alpha,i} \tag{4.413}$$

Et son expression bosonisée est :

$$\mathcal{O}^{(d)}[\mathrm{ODW}_x] = \frac{4\sigma^y}{\pi a_0}\left\{\widetilde{C}_o^{\sqrt{\pi}}S_c^{\sqrt{\pi}}S_s^{\sqrt{\pi}}\widetilde{S}_{so}^{\sqrt{\pi}} - \widetilde{S}_o^{\sqrt{\pi}}C_c^{\sqrt{\pi}}C_s^{\sqrt{\pi}}\widetilde{C}_{so}^{\sqrt{\pi}}\right\} \tag{4.414}$$

Or, ce paramètre condense dans la configuration (4.411) : la phase correspondante, dans les degrés originaux, est alors ODW.

[79]. Le nom vient de ce qu'il s'agit d'une onde de densité de charge avec un signe entre les deux barreaux.
[80]. Le nom ODW_x vient de ce que cette phase est à σ^x ce que ODW est à σ^z.

La zone III

La zone **III** est associée à la dualité $\Omega_3^{\perp}$ (4.388) et induit l'expression suivante pour le hamiltonien (avec $\lambda > 0$) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_3^{\perp}} = \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{a=1,2,3,4,6,7,8} \xi_R^a \xi_L^a - \sum_{a=5} \xi_R^a \xi_L^a\right)^2 \tag{4.415}$$

$$\frac{\pi^2}{\lambda}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_3^{\perp}} = C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} - \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) + C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(\widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} - C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) + \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.416}$$

La configuration bosonique qui minimise l'expression du hamiltonien précédent à la limite semiclassique est donnée par :

$$\langle \Phi_c \rangle = 0, \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Theta_o \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0 \tag{4.417}$$

Cette configuration est semblable à celles des phases dégénérées des modèles précédents au demi-remplissage (HS, HC, HO et RS) : elle moyenne le même nombre de champs duaux, et contrairement aux deux phases précédentes pour lesquelles nous avons réussi à trouver un paramètre d'ordre local, c'est ici un paramètre d'ordre non-local qui condense. Seulement, si pour les modèles *p*-band et *g*-*e* nous avions réussi par un argument naïf à en trouver une expression sur le réseau (celle des paramètres d'ordre en ruban), en donner ici l'expression relève du tour de force. Aussi il est généralement admis [142] pour caractériser ce type de phase de mettre en avant la phase qu'induirait un dopage du système. Autrement dit, nous allons considérer que nous nous écartons légèrement du demi-remplissage - si bien que le gap en charge est maintenant tué - et nous allons chercher un paramètre d'ordre qui condense la configurations bosonique (dans le cas présent (4.417)) pour la partie non-abélienne. Et de la même manière que le cas incommensurable - que nous avons étudié pour le *p*-band (voir FIGURE 4.2) - c'est un paramètre d'ordre supraconducteur qui est le bon candidat pour être non-nul dans la configuration :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\text{S-Mott}] = \sum_m c_{m\uparrow,i} c_{m\downarrow,i} \tag{4.418}$$

Il se trouve que cet opérateur - parce qu'il est un singulet orbital - n'est pas changé dans la transformation des "*c*" aux "*d*" :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\text{S-Mott}] = \mathcal{O}^{(d)}[\text{S-Mott}] = \sum_m d_{m\uparrow,i} d_{m\downarrow,i} \tag{4.419}$$

En tant que paramètre d'ordre supraconducteur, son expression bosonisée fait fatalement intervenir le champ de charge dual, qui dans le cas incommensurable présente une décroissance

en loi de puissance :

$$\mathcal{O}^{(d)}[\text{S-Mott}] = \frac{2\sigma^x}{\pi a_0} e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c} \left\{ \widetilde{S}_o^{\sqrt{\pi}} C_s^{\sqrt{\pi}} C_{so}^{\sqrt{\pi}} - i\widetilde{C}_o^{\sqrt{\pi}} S_s^{\sqrt{\pi}} S_{so}^{\sqrt{\pi}} \right\} \tag{4.420}$$

Où σ^x est issue du produit des facteurs de Klein (3.258). Pour sa partie non-abélienne, ce paramètre condense bien dans les configuration (4.417). Ainsi, on dira que cette phase est une phase S-Mott.

La zone IV

La zone **IV** est associée à la dualité $\Omega_4^{\perp}$ (4.389) et induit l'expression suivante pour le hamiltonien (avec $\lambda > 0$) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_4^{\perp}} = \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{a=1,2,3,4,6} \xi_R^a \xi_L^a - \sum_{a=5,7,8} \xi_R^a \xi_L^a \right)^2 \tag{4.421}$$

$$\frac{\pi^2}{\lambda} \mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_4^{\perp}} = -C_c^{\sqrt{4\pi}} \left(C_s^{\sqrt{4\pi}} - \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \right) + C_s^{\sqrt{4\pi}} \left(\widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} - C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \right) + \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.422}$$

La configuration bosonique qui minimise l'expression du hamiltonien précédent à la limite semiclassique est maintenant donnée par :

$$\langle \Phi_c \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_s \rangle = 0, \quad \langle \Theta_o \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \langle \Phi_{so} \rangle = 0 \tag{4.423}$$

De même que la phase S-Mott, le paramètre d'ordre au demi-remplissage ne peut pas être simplement écrit, et c'est au-delà du demi-remplissage que nous allons considérer les choses. Pour ce faire, nous utilisons une remarque sur les translations. Lorsqu'on tient compte de l'anisotropie δ qu'induit la différence des vecteurs d'onde de Fermi, on montre que n translations élémentaires du réseau $\mathcal{T}_0^n$ ont l'action suivante sur les bosons totaux et duaux :

$$\Phi_c \xrightarrow{\mathcal{T}_0^n} \Phi_c + n\sqrt{\pi} \tag{4.424}$$

$$\Phi_o \longrightarrow \Phi_o + n\delta a_0/\sqrt{\pi} \tag{4.425}$$

$$\Phi_{s,so} \longrightarrow \Phi_{s,so} \tag{4.426}$$

$$\Theta_{c,s,o,so} \longrightarrow \Theta_{c,s,o,so} \tag{4.427}$$

Seulement, comme nous considérons que l'énergie δ est une énergie petite devant les énergies du réseau : $\delta a_0 \ll 1$, nous pouvons considérer que seul le boson total de charge est concerné par la transformation : il est translaté de $n\sqrt{\pi}$. Ce détail réglé, il se trouve que quand nous comparons la présente configuration (4.423) et celle de la phase S-Mott (4.417), nous constatons

que l'une est la translation de l'autre, mais d'un demi-pas du réseau (c'est-à-dire à $n = 1/2$). Nous en concluons que le paramètre d'ordre correspond à celui (4.418) de la phase S-Mott, mais décalé de $a_0/2$, soit :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\text{S'-Mott}] = \sum_m c_{m\uparrow,i+1/2} c_{m\downarrow,i+1/2} \tag{4.428}$$

Ce paramètre d'ordre caractérise une phase très semblable à la précédente et, en rapport, elle se nomme S'-Mott, en accord avec [157] où elle fut introduite.

La zone V

La zone **V** est associée à la dualité $\Omega_0^\perp$ (4.385) et induit l'expression suivante pour le hamiltonien (avec $\lambda > 0$) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_0^\perp} = \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{a=1,2,3,5,6,7,8} \xi_R^a \xi_L^a - \sum_{a=4} \xi_R^a \xi_L^a\right)^2 \tag{4.429}$$

$$\frac{\pi^2}{\lambda}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\Omega_0^\perp} = -C_c^{\sqrt{4\pi}}\left(C_s^{\sqrt{4\pi}} + \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) - C_s^{\sqrt{4\pi}}\left(\widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} + C_{so}^{\sqrt{4\pi}}\right) - \widetilde{C}_o^{\sqrt{4\pi}} C_{so}^{\sqrt{4\pi}} \tag{4.430}$$

La configuration semiclassique qui minimise cette dernière expression est :

$$\langle\Phi_c\rangle = 0, \quad \langle\Phi_s\rangle = 0, \quad \langle\Theta_o\rangle = 0, \quad \langle\Phi_{so}\rangle = 0 \tag{4.431}$$

Ici encore, le bon paramètre d'ordre est non-local, et nous caractérisons la phase en introduisant un paramètre d'ordre supraconducteur qui va condenser seulement la partie non-abélienne :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\text{D-Mott}] = c_{1\uparrow,i} c_{2\downarrow,i} + c_{2\uparrow,i} c_{1\downarrow,i} \tag{4.432}$$

Dans les opérateurs "d", son expression devient la suivante :

$$\mathcal{O}^{(c)}[\text{D-Mott}] = \mathcal{O}^{(d)}[\text{S}_\pi\text{-Mott}] = \sum_m (-1)^m d_{m\uparrow,i} d_{m\downarrow,i} \tag{4.433}$$

L'expression bosonisée de ce paramètre d'ordre est le suivant :

$$\mathcal{O}^{(d)}[\text{S}_\pi\text{-Mott}] = \frac{2i\sigma^x}{\pi a_0} e^{-i\sqrt{\pi}\Theta_c}\left\{\widetilde{C}_o^{\sqrt{\pi}} C_s^{\sqrt{\pi}} C_{so}^{\sqrt{\pi}} + i\widetilde{S}_o^{\sqrt{\pi}} S_s^{\sqrt{\pi}} S_{so}^{\sqrt{\pi}}\right\} \tag{4.434}$$

La partie non-abélienne de la configuration (4.431) est non-nulle dans cet opérateur, et nous dirons, dans les premiers degrés de liberté, que la phase correspondante est une phase D-Mott.

Pour ce modèle, les transitions de phase qui n'appartiennent pas à cette ligne sont particulièrement subtiles à étudier : en effet l'autodualité, si elle précise les couplages qui s'annuleront,

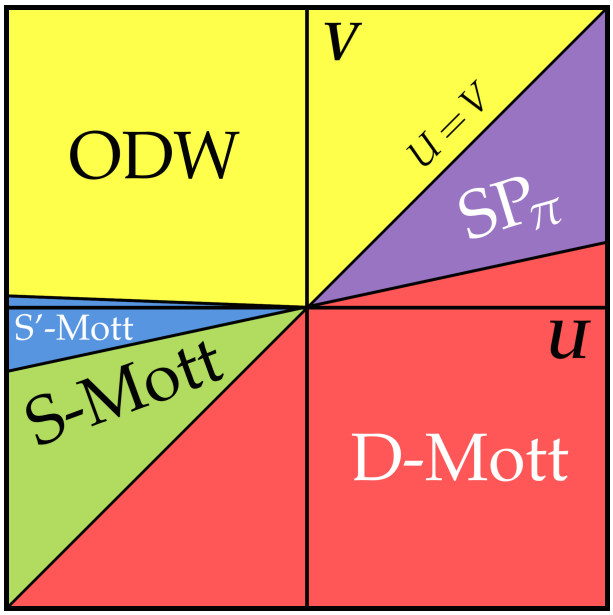


FIGURE 4.19 – Diagramme de phase au demi-remplissage, à N = 2 du modèle de double-puits. Les zones **I**, **II**, **III**, **IV** et **V** correspondent respectivement aux phases SP_π, ODW, S-Mott, S'Mott et D-Mott.

ne donne pas d'information sur le signe que les couplages vont prendre lors de la renormalisation. Aussi, il est difficile de conclure. Nous donnons le diagramme de phase du modèle en FIGURE 4.19. Ajoutons enfin que, pour l'heure, aucune approche numérique n'a été produite pour ce modèle en particulier.

En résumé du CHAPITRE 4, nous avons déterminé, pour divers modèles et divers remplissages, quelles généralisations induisaient la seconde orbitale. De plus nous avons déterminé que cette dernière permettait bel et bien de rendre possible une physique de Haldane, contrairement au modèle de Hubbard à une orbitale. Forts de ces résultats, nous étudions dans le CHAPITRE 5, quelles nouveautés induira sur le modèle de Hubbard à deux orbitales une symétrie unitaire nucléaire plus grande, à $N > 2$, sur le diagramme de phase des différents modèles en général, et sur les phases de Haldane en particulier.

Chapitre 5

Étude du cas N > 2

Pour ce dernier chapitre, nous terminons avec l'étude du cas N > 2. Avec ces derniers modèles, pour parvenir à une conclusion, il faudra compléter les outils de basse énergie que donne le CHAPITRE 3, notamment en discutant de quelques outils de la bosonisation non-abélienne et des théories conformes des champs $SU(N)_k$. De plus, le si confortable paradigme des dualités - qui sont pourtant ici moins nombreuses ⟨1⟩ - échoue désormais à décrire certaines phases, et la tâche n'en est pas simplifiée. Les résultats présentés ont été l'objet de deux publications [3, 5] qui traitent respectivement des modèles *g*-*e* et Hund au demi-remplissage, et des modèles *g*-*e* et *p*-band à un remplissage incommensurable. Nous traiterons d'abord le cas incommensurable, et pour terminer, le demi-remplissage.

5.1 Le remplissage incommensurable

Dans cette première section, nous exposons les résultats du cas N > 2, incommensurable pour les modèles *g*-*e* et *p*-band [5]. Pour ces modèles, que le remplissage soit à un atome par site ou incommensurable, le modèle n'est pas "assez" commensurable pour faire résonner les processus d'umklapp : il y a dès lors séparation spin-charge et son lot de conséquences - qui dépendent du modèle - sur le nombre d'opérateurs d'interaction à prendre en compte, *etc*. Mais avant de discuter du secteur non-abélien, particulier à chaque modèle, nous discutons d'abord de la charge et des dualités, pour ce qu'elles ont de commun aux modèles.

⟨1⟩. À cause de l'absence de Ω_5 (3.383). Ceci mène à des diagrammes avec moins de phases. Mais nous verrons plus loin une réminiscence de cette dualité.

5.1.1 Les dualités

Dans le cas incommensurable, la discussion sur la physique de la charge est triviale [2] : elle est critique car elle appartient à la classe d'universalité des liquides de Luttinger (avec $c = 1$), dont l'expression du hamiltonien de charge dans les bosons est donné par le modèle de Tomonaga-Luttinger (3.238) :

$$\mathcal{H}_c = \frac{v_c}{2}\left[\frac{1}{K_c}\left(\partial_x \Phi_c\right)^2 + K_c\left(\partial_x \Theta_c\right)^2\right] \tag{5.1}$$

$$= \frac{v_c}{2}\left[\left(\partial_x \widetilde{\Phi}_c\right)^2 + \left(\partial_x \widetilde{\Theta}_c\right)^2\right] \tag{5.2}$$

Avec les expressions (3.239) et (3.240) pour les vitesse et paramètre de Luttinger [3]. Notons que dans une approche à un remplissage commensurable de un atome par site [4], un terme d'umklapp supplémentaire (3.246) ouvrirait un gap selon la valeur du paramètre de Luttinger par rapport à la valeur critique $K_c^\star = 1/\mathrm{N}$. Cela dit, nous continuons la description des phases que vont donner les dualités. Dans ces problèmes incommensurables, elles sont au nombre de trois - les dualités (3.379) et (3.380) plus la dualité triviale - à être atteintes :

$$g_{1,2,3,4,5,6,7,8} \xrightarrow{\Omega_0} g_{1,2,3,4,5,6,7,8} \tag{5.3}$$

$$\begin{matrix} g_{1,2,5,8} \\ g_{3,4,6,7} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_1} \begin{matrix} g_{1,2,5,8} \\ -g_{3,4,6,7} \end{matrix} \tag{5.4}$$

$$\begin{matrix} g_{1,3,6,8} \\ g_{2,4,5,7} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_2} \begin{matrix} g_{1,3,6,8} \\ -g_{2,4,5,7} \end{matrix} \tag{5.5}$$

Zone I

Pour interpréter physiquement ces dualités, nous procédons comme précédemment, en établissant les propriétés du modèle associé à la dualité triviale Ω_0, à partir duquel nous déduirons la physique des autres modèles, associés à Ω_1 et Ω_2. Or, nous savons déjà qu'il s'agit du modèle de Gross-Neveu SU(2N) (voir équation (3.378), à l'expression "non-umklapp"), dont l'expression est la suivante, exprimée dans les courants chiraux $\mathrm{SU}(2\mathrm{N})_1$ (avec $f > 0$) :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\text{GN}} = f\,\mathcal{J}_L^A\,\mathcal{J}_R^A \tag{5.6}$$

C'est une théorie de champs qui est intégrable et massive : elle gappe les degrés non-abéliens

[2]. Quoique, comme nous le verrons dans une petite discussion sur le modèle *g-e* anisotrope, l'expression du hamiltonien libre peut-être plus difficile à établir.
[3]. Et comme les droites de transition de Mott, ils seront à spécifier pour chaque modèle.
[4]. Dont la physique serait pour beaucoup de parties du diagramme de phase, très semblables.

et leur donne une charge centrale égale à $c_{\text{n.a.}} = 0$. Ce hamiltonien minimise la densité à $2k_F$ ⟨5⟩ :

$$n_{2k_F}(x = a_0 j) = e^{-2ik_F a_0 j} c^\dagger_{m\alpha,j} c_{m\alpha,j} \tag{5.8}$$

$$\overset{\text{Dir.}}{=} L^\dagger_{m\alpha} R_{m\alpha}(x) \tag{5.9}$$

Ces dernières sont décrites par le paramètre d'ordre $\mathcal{O}^{|2k_F|}_{\text{CDW}}$, dont l'expression sur réseau, et dans les fermions de Dirac ⟨6⟩ :

$$\mathcal{O}^{|2k_F|}_{\text{CDW}} \overset{j=x/a_0}{=} 2\sin(2k_F a_0 j) n_j \tag{5.10}$$

$$\overset{\text{Dir.}}{=} -i\left(L^\dagger_{m\alpha} R_{m\alpha} - R^\dagger_{m\alpha} L_{m\alpha}\right) \tag{5.11}$$

$$= -i\left(n_{2k_F} - n^\dagger_{2k_F}\right) \tag{5.12}$$

On montre que le hamiltonien (5.6) s'écrit à l'aide de cet opérateur sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}^{\text{GN}}_{\text{int.}} = -\frac{\pi f}{2\text{N}}\left(\mathcal{O}^{|2k_F|}_{\text{CDW}}\right)^2 \tag{5.13}$$

Ainsi l'interaction est bien minimisée quand le paramètre d'ordre est maximisé. À ce stade, nous voulons décrire les corrélations de ce paramètre d'ordre qui, à cause de la séparation spin-charge, sont décrites à part dans ces deux secteurs. Il serait bien trop compliqué d'utiliser la descriptions entière (3.229, 3.230, 3.231, 3.232) que donne la bosonisation abélienne, aussi, il faut introduire quelques résultats de bosonisation non-abélienne [133, 134, 135, 104], dans une base de théorie de conforme de champs $\text{U}(1)_c \times \text{SU}(2\text{N})_1$, comme il est ici naturel, et notamment la décomposition bosonique des bilinéaires de fermions :

$$L^\dagger_{m\alpha} R_{n\beta} \sim \exp\left(i\sqrt{\frac{2\pi}{\text{N}}}\,\Phi_c\right) g_{n\beta,m\alpha} \tag{5.14}$$

Où Φ_c - de dimension $\Delta[\Phi_c] = 1/2\text{N}$ - est le champ bosonique de charge compacifié, c'est-à-dire avec une invariance de jauge s'exprimant de la manière suivante :

$$\Phi_c \longrightarrow \Phi_c + \sqrt{2\pi\text{N}} \tag{5.15}$$

Et où g - de dimension $\Delta[g] = 1 - 1/2\text{N}$ - est le champ primaire $\text{SU}(2\text{N})_1$ qui se transforme dans la représentation fondamentale $\square$ de $\text{SU}(2\text{N})$ [131]. Grâce à cette décomposition, on arrive

⟨5⟩. À savoir telle que la décomposition de l'opérateur densité $n(x)$ à la limite continue soit :

$$n(x) = n_0(x) + e^{2ik_F x} n_{2k_F}(x) + e^{-2ik_F x} n_{-2k_F}(x) \tag{5.7}$$

⟨6⟩. Où l'on annule les termes oscillants.

à exprimer le hamiltonien dans les seuls degrés de liberté non-abéliens :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\text{GN}} \simeq -\frac{f}{2}|\text{tr}(g)|^2 \tag{5.16}$$

Où la trace est prise sur les 2N indices du champ primaire : $\text{tr}(g) = g_{m\alpha,m\alpha}$. Ainsi, puisque $f > 0$, à la limite semiclassique c'est $\text{tr}(g)$ qui a une moyenne non-nulle : $\langle \text{tr}(g) \rangle \neq 0$. De même, les densités à $2k_F$ s'expriment désormais à l'aide du seul opérateur de charge (nous introduisons $\widetilde{\Phi}_c = \sqrt{K_c}\Phi_c$, puisque c'est ce champ qui possède les dimensions d'échelle universelles) :

$$n_{2k_F} \simeq \exp\left(-i\sqrt{\frac{2\pi K_c}{\text{N}}}\,\widetilde{\Phi}_c\right) \tag{5.17}$$

Dès lors - en tenant compte de la séparation spin-charge - nous pouvons exprimer les corrélations comme suit :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{O}_{\text{CDW}}^{|2k_F|}(x)\mathcal{O}_{\text{CDW}}^{|2k_F|}(0)\right\rangle &= -\left\langle n_{2k_F}^\dagger(x)n_{2k_F}(0) + n_{2k_F}(x)n_{2k_F}^\dagger(0)\right\rangle &(5.18)\\
&= -|\langle \text{tr}(g)\rangle|^2\left[e^{2ik_Fx}\left\langle e^{i\sqrt{2\pi K_c/\text{N}}\,\widetilde{\Phi}_c(x)}e^{-i\sqrt{2\pi K_c/\text{N}}\,\widetilde{\Phi}_c(0)}\right\rangle + \text{h.c.}\right] &(5.19)
\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière fonction de corrélation, nous utilisons les résultats sur les opérateurs de vertex, et en particulier :

$$\beta \in \mathbb{R} : \left\langle e^{i\beta\Phi_c(z,\bar{z})}e^{-i\beta\Phi_c(\omega,\bar{\omega})}\right\rangle \sim \left(\frac{a_0}{|z-\omega|}\right)^{\beta^2/2\pi} \tag{5.20}$$

Finalement, les corrélations CDW s'écrivent ainsi [7] :

$$\left\langle \mathcal{O}_{\text{CDW}}^{|2k_F|}(x)\mathcal{O}_{\text{CDW}}^{|2k_F|}(0)\right\rangle \simeq A\cos(2k_Fx)x^{-K_c/\text{N}} \tag{5.22}$$

À l'aune des résultats du CHAPITRE 1, nous nous demandons s'il n'existe pas une compétition de cette phase avec un instabilité supraconductrice. Néanmoins, si dans le cas à une orbitale N atomes suffisaient pour former de "N-plets de Cooper", il faut ici utiliser 2N atomes, c'est-à-dire : $\mathcal{M}_i^\dagger = \prod_{\alpha=1}^{\text{N}} c_{m\alpha,i}^\dagger c_{\overline{m}\alpha,i}^\dagger$ (avec $m = g$ ou p_x selon le modèle). Avec un tel paramètre

[7]. Si l'on considère simplement les corrélations densité-densité (c'est-à-dire pas seulement les termes à $2k_F$), qui sont reliées aux corrélations CDW-CDW, il intervient un terme (de puissance universelle) supplémentaire qui correspond à la partie uniforme de la densité :

$$\langle n(x)n(0)\rangle \simeq -A\cos(2k_Fx)x^{-K_c/\text{N}} - \frac{\text{N}}{\pi^2x^2} \tag{5.21}$$

Avec A et une amplitude (non-nulle) et non-universelle. En réalité, ce terme supplémentaire n'a aucune importance dans la discussion que nous donnerons sur la compétition des phases, aussi nous l'oublions.

d'ordre, on rend compte d'une phase avec la symétrie SU(2N) restaurée, et de fonctions de corrélation qui se comportent comme :

$$\langle \mathcal{M}^\dagger(x)\mathcal{M}(0)\rangle \sim x^{-\mathrm{N}/K_c} \tag{5.23}$$

La compétition entre les phases CDW et MS est gagnée par cette dernière lorsque $K_c > \mathrm{N}$, à savoir une valeur plutôt grande du paramètre de Luttinger qui, avec seulement des interactions à faible portée, n'est pas garantie. Néanmoins, comme il est montré en [1, 101], pour un régime de faible densité et des interactions attractives, de telles valeurs du paramètre de Luttinger peuvent être atteintes pour des interactions sur site, qui signalent l'émergence de la phase MS. Sauf dans cette situation particulière, c'est bien la phase CDW à $2k_F$ avec une charge centrale $c = 1$ qui est attendue dans la zone **I**.

Zone II

Continuons l'analyse avec la zone **II** qui est caractérisée par la dualité Ω_2 (5.5) ⟨8⟩. Cette dualité peut être récrite en termes d'action sur les courants gauches de symétrie, à savoir :

$$\mathcal{J}_L^{a,(x,y)} \xrightarrow{\Omega_2} -\mathcal{J}_L^{a,(x,y)} \tag{5.24}$$
$$\mathcal{J}_L^{a,z} \xrightarrow{\Omega_2} \mathcal{J}_L^{a,z} \tag{5.25}$$
$$j_L^{(x,y)} \xrightarrow{\Omega_2} -j_L^{(x,y)} \tag{5.26}$$
$$j_L^{z} \xrightarrow{\Omega_2} j_L^{z} \tag{5.27}$$
$$J_L^{a} \xrightarrow{\Omega_2} J_L^{a} \tag{5.28}$$

Et rien pour les courants droits. Notons que cette transformation n'est rien d'autre qu'une rotation d'angle π autour de l'axe Oz dans l'espace orbital qui est rendue au niveau des fermions de Dirac par la transformation suivante :

$$L_{m\alpha} \xrightarrow{\Omega_2} \sigma^z_{mn} L_{n\alpha} \tag{5.29}$$

Cette transformation n'affecte que les degrés orbitaux, c'est-à-dire que les degrés non-abéliens, si bien que par lien avec le modèle de Gross-Neveu (5.6), nous savons que nous avons affaire avec une théorie massive à $c_{\text{n.a.}} = 0$. Et pour en déterminer le paramètre d'ordre, il suffit simple-

⟨8⟩. Ici, la manière d'indicer les zones, et le lien avec les dualités, est identique à celui de l'article [5].

ment d'appliquer la dualité Ω_2 au paramètre d'ordre de la théorie de Gross Neveu [9] :

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}}^{|2k_F|} = i\big(R^\dagger_{m\alpha}L_{m\alpha} - L^\dagger_{m\alpha}R_{m\alpha}\big) \quad \xrightarrow{\Omega_2} \quad \mathcal{O}_{\text{ODW}_z}^{|2k_F|} = i\big(R^\dagger_{m\alpha}\sigma^z_{mn}L_{n\alpha} - L^\dagger_{m\alpha}\sigma^z_{mn}R_{n\alpha}\big) \tag{5.30}$$

Il est de plus assez facile de de trouver une expression de ce paramètre d'ordre sur le réseau. En effet, on se convainc rapidement que les termes réguliers de l'expression suivante sont les bons :

$$\mathcal{O}_{\text{ODW}_z}^{|2k_F|} \overset{j=x/a_0}{=} 2\sin\big(2k_F a_0 j\big)\big(n_{g,j} - n_{e,j}\big) \tag{5.31}$$

Les résultats pour cette phase sont très similaires à la précédente, jusqu'à l'expression de la fonction de corrélation :

$$\Big\langle \mathcal{O}_{\text{ODW}_z}^{|2k_F|}(x)\mathcal{O}_{\text{ODW}_z}^{|2k_F|}(0)\Big\rangle \simeq A\cos(2k_F x)x^{-K_c/\text{N}} \tag{5.32}$$

Et la phase moléculaire MS, caractérisée par (5.23), entre encore ici en compétition avec la phase ODW$_z$, bien que, pour des raisons tout à fait similaires à la zone précédente, c'est bien cette dernière phase à laquelle nous nous attendons.

Zone III

Passons à l'analyse de la zone **III** qui est caractérisée par la dualité Ω_1 (5.4). Comme la précédente, nous récrivons cette dualité en termes d'une transformation sur les seuls courants gauches, et il vient :

$$\mathcal{J}_L^{a,(y,z)} \quad \xrightarrow{\Omega_1} \quad -\mathcal{J}_L^{a,(y,z)} \tag{5.33}$$

$$\mathcal{J}_L^{a,x} \quad \xrightarrow{\Omega_1} \quad \mathcal{J}_L^{a,x} \tag{5.34}$$

$$j_L^{(y,z)} \quad \xrightarrow{\Omega_1} \quad -j_L^{(y,z)} \tag{5.35}$$

$$j_L^{x} \quad \xrightarrow{\Omega_1} \quad j_L^{x} \tag{5.36}$$

$$J_L^{a} \quad \xrightarrow{\Omega_1} \quad J_L^{a} \tag{5.37}$$

C'est maintenant une rotation de π autour de l'axe Ox dans l'espace orbital, rendue au niveau des fermions de Dirac par la transformation suivante :

$$L_{m\alpha} \xrightarrow{\Omega_1} \sigma^x_{mn}L_{n,\alpha} \tag{5.38}$$

Ici encore, seuls les degrés de liberté non-abéliens sont concernés par la dualité, si bien que

[9]. Si bien que quand $\mathcal{O}_{\text{CDW}}^{|2k_F|}$ correspond aux termes à $2k_F$ de la limite continue de la densité totale n, le paramètre $\mathcal{O}_{\text{ODW}_z}^{|2k_F|}$ définit ci-après correspond à la limite continue de la densité orbitale $n_g - n_e$.

par héritage du modèle de Gross-Neveu précédent, c'est par une théorie $c = 1$ - c'est-à-dire critique en charge et gappé en degrés non-abéliens - que cette zone est décrite. Le paramètre d'ordre qui lui correspond, induit du paramètre d'ordre CDW par la transformation de dualité (5.38), est également une onde de densité orbitale, mais cette fois si selon l'axe orbital Ox ⟨10⟩ :

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}}^{|2k_F|} = i\big(R^\dagger_{m\alpha}L_{m\alpha} - L^\dagger_{m\alpha}R_{m\alpha}\big) \quad \xrightarrow{\Omega_1} \quad \mathcal{O}_{\text{ODW}_x}^{|2k_F|} = i\big(R^\dagger_{m\alpha}\sigma^x_{mn}L_{n\alpha} - L^\dagger_{m\alpha}\sigma^x_{mn}R_{n\alpha}\big) \tag{5.39}$$

Par suite logique, le paramètre d'ordre sur le réseau a l'expression suivante :

$$\mathcal{O}_{\text{ODW}_x}^{|2k_F|} \overset{j=x/a_0}{=} 2\sin(2k_F a_0 j) c^\dagger_{m\alpha,j}\,\sigma^x_{mn}c_{m\alpha,j} \tag{5.40}$$

Ainsi qu'une fonction de corrélation à la dépendance identique :

$$\left\langle \mathcal{O}_{\text{ODW}_x}^{|2k_F|}(x)\mathcal{O}_{\text{ODW}_x}^{|2k_F|}(0)\right\rangle \simeq A\cos(2k_F x)x^{-K_c/\text{N}} \tag{5.41}$$

Au final, la phase attendue dans la zone **III**, avec une éventuelle compétition de la phase moléculaire MS, est une phase ODW$_x$.

La zone IV

Nous allons maintenant discuter d'une zone du diagramme, qui ne concerne que le modèle *g-e* ⟨11⟩, et qui n'appartient pas au paradigme des dualités. Cette limite - que nous notons $\widetilde{\Omega}$ - se caractérise par l'annulation de certains couplages lors de la renormalisation, tandis que d'autres atteignent un régime du type "dualité". Concrètement, nous avons ⟨12⟩ :

$$f_1 \overset{\widetilde{\Omega}}{=} f > 0 \tag{5.45}$$

$$f_3 \overset{\widetilde{\Omega}}{=} -f \tag{5.46}$$

$$f_{2,4,5,6,7} \overset{\widetilde{\Omega}}{=} 0 \tag{5.47}$$

Ainsi, il n'y a pas d'élargissement dynamique de la symétrie qui amène, comme les autres

⟨10⟩. Cette fois-ci, le nouveau paramètre d'ordre correspond aux termes à $2k_F$ de la limite continue de $c^\dagger_{m\alpha}\sigma^x_{mn}c_{n\alpha}$.
⟨11⟩. Nous verrons néanmoins qu'elle concerne la ligne harmonique du modèle p-band.
⟨12⟩. Comme cette limite ne concerne que le modèle *g-e*, il faudrait l'écrire dans les $\{f_i^z\}_{i\in[\![1,9]\!]}$:

$$f_1^z \overset{\widetilde{\Omega}}{=} f > 0 \tag{5.42}$$

$$f_3^z \overset{\widetilde{\Omega}}{=} -f \tag{5.43}$$

$$f_{2,4,5} \overset{\widetilde{\Omega}}{=} 0 \tag{5.44}$$

zones, le modèle à une description en terme d'un modèle avec la symétrie SU(2N). Et puisqu'il n'y a aucune chance de relier une telle limite au modèle de Gross-Neveu SU(2N), nous étudions le modèle qui lui correspond tel quel. Concrètement, nous sommes menés à l'expression suivante :

$$\mathcal{H}^{\omega}_{\text{int.}} = \frac{\pi f}{\mathrm{N}}\left(J^a_L J^a_R - 2J^{a,z}_L J^{a,z}_R\right) \tag{5.48}$$

Grâce aux expressions "orbitales" (3.75) et (3.76) des courants SU(N), nous pouvons exprimer l'expression précédente sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}^{\omega}_{\text{int.}} = \frac{2\pi f}{\mathrm{N}}\left(J^a_{eL} J^a_{gR} + J^a_{gL} J^a_{eR}\right) \tag{5.49}$$

Cette dernière expression décrit deux chaînes indépendantes dont la physique et donnée par le *modèle de Thirring* [159, 160] - encore appelé *modèle de Gross-Neveu chiral* - et ce, à condition d'effectuer la transformation Ω suivante sur les fermions de Dirac gauche :

$$L_{m\alpha} \quad \xrightarrow{\Omega} \quad \sigma^x_{mn} L_{n\alpha} \tag{5.50}$$

Tant est si bien que le modèle devient :

$$\Omega[\mathcal{H}^{\omega}_{\text{int.}}] = \frac{2\pi f}{\mathrm{N}} J^a_{mL} J^a_{mR} \tag{5.51}$$

Cette théorie [161] est intégrable et possède un gap dans le secteur de spin, tandis que les degrés de charge (ici un par degrés orbital, g et e) sont critiques, ainsi la phase est de charge centrale $c = 2$. Assez naturellement, on a tendance à vouloir calculer les densités à $2k_F$ pour chacun des degrés g et e, ce que nous faisons, en introduisant des paramètres d'ordre qui dans la transformation Ω donneront respectivement la somme et la différence de ces densités orbitales :

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\text{ODW}_x} &= iR^\dagger_{m\alpha}\sigma^x_{mn}L_{n\alpha} + \text{h.c.} && (5.52)\\
&\xrightarrow{\Omega} iR^\dagger_{m\alpha}L_{m\alpha} + \text{h.c.} && (5.53)\\
\mathcal{O}_{\text{ODW}_y} &= iR^\dagger_{m\alpha}\sigma^y_{mn}L_{n\alpha} + \text{h.c.} && (5.54)\\
&\xrightarrow{\Omega} R^\dagger_{m\alpha}\sigma^z_{mn}L_{n\alpha} + \text{h.c.} && (5.55)
\end{aligned}$$

Pour bosoniser cette expression, nous ne pouvons plus convenablement utiliser l'expression (5.14), qui était adaptée à la chaîne avec la symétrie SU(2N) émergente : nous utilisons ici une

base $\mathrm{U}(1)_g \times \mathrm{SU}(\mathrm{N})_1 \times \mathrm{U}(1)_e \times \mathrm{SU}(\mathrm{N})_1$ de théorie conforme des champs [13] :

$$L^{\dagger}_{m\alpha} R_{m\beta} \sim \exp\left(i\sqrt{\frac{4\pi}{\mathrm{N}}}\,\Phi_m \right) g^{(m)}_{\beta\alpha} \tag{5.56}$$

Où $g^{(m)}$ est un champ primaire $\mathrm{SU}(\mathrm{N})_1$ du secteur orbital m - de dimension $\Delta[g^{(m)}] = 1 - 1/\mathrm{N}$ - qui agit maintenant dans le seul secteur de spin. Il va sans dire qu'étant donnée l'expression (5.51) du modèle, nous avons $\langle \mathrm{tr}\, g^{(g,e)} \rangle \neq 0$ [14], expression qui intervient dans les expressions bosonisées des paramètres d'ordre [15] :

$$\Omega[\mathcal{O}_{\mathrm{ODW}_x}] \sim \left(e^{i\sqrt{4\pi/\mathrm{N}}\,\Phi_g} + e^{i\sqrt{4\pi/\mathrm{N}}\,\Phi_e} \right) \langle \mathrm{tr}\, g \rangle + \mathrm{h.c.} \tag{5.57}$$

$$\Omega[\mathcal{O}_{\mathrm{ODW}_y}] \sim \left(e^{i\sqrt{4\pi/\mathrm{N}}\,\Phi_g} - e^{i\sqrt{4\pi/\mathrm{N}}\,\Phi_e} \right) \langle \mathrm{tr}\, g \rangle + \mathrm{h.c.} \tag{5.58}$$

Les champs Φ_g et Φ_e sont reliés aux habituels champs Φ_c et Φ_o (que nous voulons introduire) *via* une somme et une différence respectivement : malheureusement ceux-ci sont interprétés étant donnée la transformation Ω, ce qui laisse présager que ce ne seront pas ces champs dans les "vrais" degrés. Aussi, nous les appelons différemment :

$$\Phi_+ = \frac{\Phi_g + \Phi_e}{\sqrt{2}} \tag{5.59}$$

$$\Phi_- = \frac{\Phi_g - \Phi_e}{\sqrt{2}} \tag{5.60}$$

À ces champs sont associés les paramètres de Luttinger $K_\pm$, grâce auxquels nous écrivons l'expression suivante des paramètres d'ordre (en omettant les termes à "$-2k_F$") :

$$\Omega\left[\mathcal{O}^{2k_F}_{\mathrm{ODW}_x}\right] \sim e^{-i\sqrt{2\pi K_+/\mathrm{N}}\,\Phi_+} \cos\left(\sqrt{2\pi K_-/\mathrm{N}}\,\Phi_- \right) \tag{5.61}$$

$$\Omega\left[\mathcal{O}^{2k_F}_{\mathrm{ODW}_y}\right] \sim e^{-i\sqrt{2\pi K_+/\mathrm{N}}\,\Phi_+} \sin\left(\sqrt{2\pi K_-/\mathrm{N}}\,\Phi_- \right) \tag{5.62}$$

Il nous faut maintenant relier ces résultats aux vrais champs Φ_c et Φ_o, que l'on relie par Ω à Φ_+ et à Φ_- respectivement. Ainsi Φ_+ devient Φ_c, et, est associé au paramètre de Luttinger $K_+ = K_c$, tandis que Φ_-, qui devient $-\Theta_o$, est associé au paramètre de Luttinger $K_- = 1/K_o$. Or, étant donnée la limite $\widetilde{\Omega}$, qui en particulier annule g_6, nous avons $K_- = 1/K_o \simeq 1$. Aussi,

[13]. Avec ces définitions, il faut garder à l'esprit qu'elles sont valables étant donnée la transformation Ω. Il faudra revenir aux "vrais" degrés.

[14]. il va de même pour le conjugué, qui concerne les terme "h.c." dans les paramètres d'ordre.

[15]. Avec la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2^{g\leftrightarrow e}$ du modèle (5.51), on est assuré que $\langle \mathrm{tr}\, g^{(g)} \rangle = \langle \mathrm{tr}\, g^{(e)} \rangle = \langle \mathrm{tr}\, g \rangle$, que l'on met en facteur à la limite semiclassique.

les fonctions de corrélation attendues dans les zone **IV** sont les suivantes :

$$\langle \mathcal{O}_{\mathrm{ODW}_x}(x)\mathcal{O}_{\mathrm{ODW}_x}(0)\rangle \sim \cos(2k_F x)x^{-K_c/\mathrm{N}-1/\mathrm{N}K_o} \tag{5.63}$$
$$\langle \mathcal{O}_{\mathrm{ODW}_y}(x)\mathcal{O}_{\mathrm{ODW}_y}(0)\rangle \sim \cos(2k_F x)x^{-K_c/\mathrm{N}-1/\mathrm{N}K_o} \tag{5.64}$$

Il y a donc compétition ou cohabitation ⟨16⟩ entre les deux phases ODW_x et ODW_y au sein d'une phase de charge centrale $c = 2$ dans la zone **IV**.

5.1.2 Le modèle *p*-band

Maintenant que le modèle est nommé, nous pouvons écrire les équations du groupe de renormalisation qui lui sont spécifiques : dans le cas du modèle p-band au remplissage incommensurable avec $\mathrm{N} = 2$, il s'agit de $7+1$ couplages $\{f_i\}_{i\in[\![1,8]\!]}$ (les opérateurs d'interaction d'umklapp ont des conditions initiales nulles et demeurent nuls) qui satisfont les équations (3.362, . . . , 3.373) :

$$\dot{f}_1 = \frac{1}{4}\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2\right) \tag{5.65}$$
$$\dot{f}_2 = \frac{1}{2}f_1f_2+\frac{\mathrm{N}^2-4}{2\mathrm{N}^2}f_3f_4+\frac{1}{\mathrm{N}^2}\left(f_3f_7+f_4f_6\right) \tag{5.66}$$
$$\dot{f}_3 = \frac{1}{2}f_1f_3+\frac{\mathrm{N}^2-4}{2\mathrm{N}^2}f_2f_4+\frac{1}{\mathrm{N}^2}\left(f_2f_7+f_4f_5\right) \tag{5.67}$$
$$\dot{f}_4 = \frac{1}{2}f_1f_4+\frac{\mathrm{N}^2-4}{2\mathrm{N}^2}f_2f_3+\frac{1}{\mathrm{N}^2}\left(f_2f_6+f_3f_5\right) \tag{5.68}$$
$$\dot{f}_5 = \frac{\mathrm{N}^2-1}{\mathrm{N}^2}f_3f_4+\frac{1}{\mathrm{N}^2}f_6f_7 \tag{5.69}$$
$$\dot{f}_6 = \frac{\mathrm{N}^2-1}{\mathrm{N}^2}f_2f_4+\frac{1}{\mathrm{N}^2}f_5f_7 \tag{5.70}$$
$$\dot{f}_7 = \frac{\mathrm{N}^2-1}{\mathrm{N}^2}f_2f_3+\frac{1}{\mathrm{N}^2}f_5f_6 \tag{5.71}$$
$$\dot{g}_8 = 0 \tag{5.72}$$

Où l'on a laissé le huitième couplage, à savoir g_8, qui associé à la charge, puisque par la séparation spin-charge, il n'est pas renormalisé. Ajoutons les conditions initiales correspon-

⟨16⟩. Le numérique pourra éventuellement trancher.

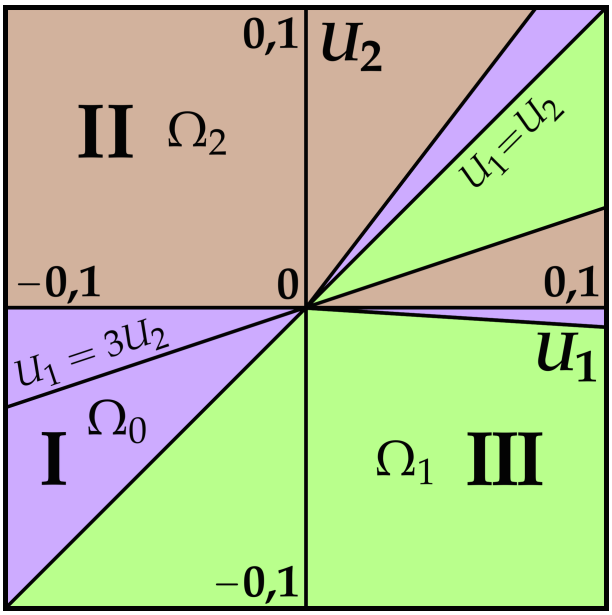


FIGURE 5.1 – Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle p-band, $N > 2$, au remplissage incommensurable (publié dans [5]) : les trois dualités atteintes dans le diagramme de phase. Les différentes zones, **I**, **II** et **III**, associées aux dualités Ω_0, Ω_2 et Ω_1 respectivement. Ici les calculs sont donnés pour le cas particulier $N = 4$.

dantes ⟨17⟩ :

$$f_1 = -\frac{N}{2}(U_1 + U_2) \tag{5.73}$$

$$f_2 = -NU_2 \tag{5.74}$$

$$f_3 = \frac{N}{2}(U_2 - U_1) \tag{5.75}$$

$$f_4 = 0 \tag{5.76}$$

$$f_5 = N(N-1)U_2 \tag{5.77}$$

$$f_6 = \frac{N(N-1)}{2}(U_1 - U_2) \tag{5.78}$$

$$f_7 = 0 \tag{5.79}$$

$$g_8 = \frac{N-1}{2N}(U_1 + U_2) \tag{5.80}$$

De la résolution numérique de ces équations, nous donnons les différentes zones du dia-

⟨17⟩. À un facteur $\pi/2$ près

gramme de phase du modèle p-band incommensurable en FIGURE 5.1. Elle nous permet de proposer une étude des différentes lignes de transition de phase qui, contrairement au cas $N = 2$, ne sont pas seulement les lignes d'équation $U_2 = 0$ et $U_1 = U_2$, mais également, pour sa partie répulsive, la ligne harmonique ainsi que deux lignes supplémentaires d'équations inconnues qui ne correspondent à aucune symétrie du modèle sur réseau ⟨18⟩.

Les lignes de transition

Néanmoins, si ces équations de certaines lignes de transition sont inconnues (en conséquence leur résolution *via* les équations du groupe de renormalisation est tout à fait irréalisable), elles distinguent à chaque fois deux zones, deux dualités, que distingue aussi les lignes de transition d'équations connues : la ligne qui sépare les zones **II** et **III** dans le quadrant $U_1, U_2 > 0$ peut être relié à la transition $U_2 = 0$, tandis que celle qui sépare les zones **I** et **III** dans le cadrant $U_1 > 0$ et $U_2 < 0$ peut etre reliée à la droite d'équation $U_1 = U_2$. Ainsi pour leur étude, nous utilisons les résultats du CHAPITRE 1, puisque nous avons affaire à chaque fois avec deux chaînes découplées :

— $U_2 = 0$ (transition **I-II**) : le modèle est réduit à deux chaînes indépendantes, chacune au remplissage incommensurable : ainsi dans le régime attractif $U_1 < 0$ ce sont deux liquides de Luther-Emery avec $c = 1 + 1 = 2$ et dans le régime répulsif, deux liquides de Luttinger avec $c = N + N = 2N$;

— $U_1 = U_2$ (transition **I-III**) : c'est identique au cas précédent : dans le régime attractif $U_1 < 0$ ce sont deux liquides de Luther-Emery avec $c = 1 + 1 = 2$ et dans le régime répulsif, deux liquides de Luttinger avec $c = N + N = 2N$.

Enfin l'étude avec la ligne harmonique dans le domaine répulsif : comme nous l'avons déjà évoqué, lorsque l'on se fixe sur la ligne harmonique, la limite atteinte par les équations du groupe de renormalisation est celle de la zone **IV**, c'est-à-dire $\widetilde{\Omega}$, dont on a montré qu'elle correspondait à une théorie de charge centrale $c = 2$.

Le diagramme de phase

Cela dit nous pouvons, en FIGURE 5.2, donner le diagramme de phase complet du modèle p-band au remplissage incommensurable pour $N > 2$. À noter que contrairement au cas $N = 2$, désormais l'aspect global du diagramme est bien changé, notamment parce que les lignes $U_1 = U_2$ et $U_2 = 0$ ne sont plus les seules lignes de transition : clairement, il n'y a pas ici de transformation de Shiba qui donnait aux diagrammes à $N = 2$ leur aspect si symétrique.

⟨18⟩. On remarque numériquement que ces lignes dépendent de la valeur que prend l'entier N.

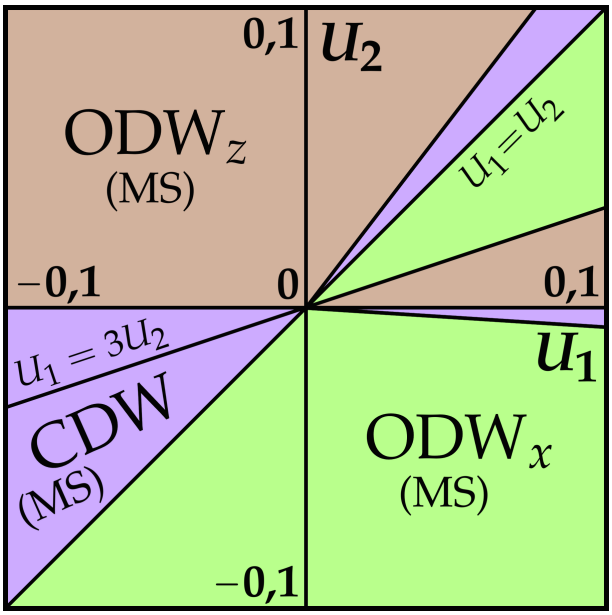


FIGURE 5.2 – Diagramme de phase du modèle p-band incommensurable à $N > 2$ (publié dans [5]) : les zones **I**, **II** et **III**, du faible au fort couplage, mettent en avant les phases à $2k_F$ CDW, ODW_z et ODW_x respectivement. Ici encore, les calculs sont donnés pour le cas $N = 4$.

5.1.3 Le modèle *g-e*

Terminons l'étude des modèles incommensurables en passant au modèle *g-e*. Ici la symétrie orbitale $U(1)_o$ permet de réduire les couplages à $5+1$ que sont les $\{f_i^z\}_{i\in[\![1,6]\!]}$ (de même que dans le cas précédent l'incommensurabilité tue les opérateurs d'interaction d'umklapp) qui satisfont les équations du groupe de renormalisation suivantes :

$$\dot{f}_1^z = \frac{1}{4}\left((f_1^z)^2 + 2(f_2^z)^2 + (f_3^z)^2\right) \tag{5.81}$$

$$\dot{f}_2^z = \frac{1}{2}f_1^z f_2^z + \frac{N^2-4}{2N^2}f_2^z f_3^z + \frac{1}{N^2}\left(f_3^z f_4^z + f_2^z f_5^z\right) \tag{5.82}$$

$$\dot{f}_3^z = \frac{1}{2}f_1^z f_3^z + \frac{N^2-4}{2N^2}(f_2^z)^2 + \frac{2}{N^2}f_2^z f_4^z \tag{5.83}$$

$$\dot{f}_4^z = \frac{N^2-1}{N^2}f_2^z f_3^z + \frac{1}{N^2}f_4^z f_5^z \tag{5.84}$$

$$\dot{f}_5^z = \frac{N^2-1}{N^2}(f_2^z)^2 + \frac{1}{N^2}(f_4^z)^2 \tag{5.85}$$

$$\dot{g}_6^z = 0 \tag{5.86}$$

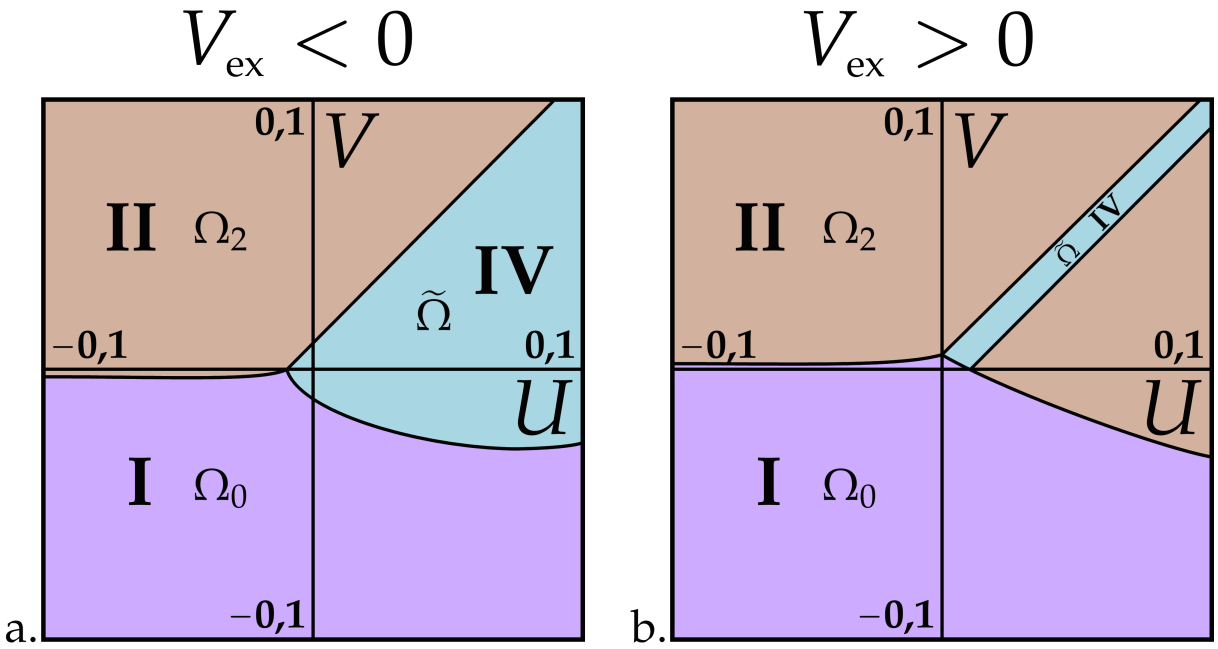


FIGURE 5.3 – Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle *g*-*e*, N > 2, au remplissage incommensurable (publié dans [5]), en a., pour V_{ex} négatif, et en b., pour V_{ex} positif (avec $V_{ex} = \pm t/100$) : deux dualités, Ω_0 et Ω_2, sont atteintes respectivement en zones **I** et **II**, tandis que dans la zone **IV**, c'est la limite $\widetilde{\Omega}$ qui est réalisée.

Donnons également les conditions initiales qui leurs sont associées :

$$f_1^z = -\frac{N}{2}(U + V_{ex}) \tag{5.87}$$

$$f_2^z = -\frac{N}{2}V \tag{5.88}$$

$$f_3^z = \frac{N}{2}(V_{ex} - U) \tag{5.89}$$

$$f_4^z = \frac{N}{2}(NV_{ex} - V) \tag{5.90}$$

$$f_5^z = \frac{N}{2}\Big((N-1)U + V_{ex} - NV\Big) \tag{5.91}$$

$$g_6^z = \frac{1}{2N}\Big((N-1)U - V_{ex} + NV\Big) \tag{5.92}$$

De même que pour le modèle *p*-band, nous avons laissé tel quel le couplage sur la charge, c'est-à-dire g_6^z, puisque la séparation spin-charge le laisse seul. Grâce à ces équations, nous obtenons les différentes zones du diagramme, comme montrées en FIGURE 5.3.

Les lignes de transitions

Sur les lignes de transition entre zones **I** et **II**, la même analyse que pour le modèle p-band peut être réalisée, si bien que nous insistons ici sur la transition qui existe entre les zones **II** et **IV** dont l'étude est rendue possible car l'une de leur ligne de transition correspond avec le plan de symétrie orbitale $\mathrm{SU}(2)_o$ (voir FIGURE 5.6). Le plan d'équation, donné par (4.296), reste pour $\mathrm{N} > 2$ le plan de symétrie orbitale qui permet l'ajustement fin suivant $f_2^z = f_3^z$ et $f_4^z = f_5^z$ et réduit à trois les équations du groupe de renormalisation :

$$\dot{f}_1^z = \frac{1}{4}\Big((f_1^z)^2 + 3(f_2^z)^2\Big) \tag{5.93}$$

$$\dot{f}_2^z = \frac{1}{2}f_1^z f_2^z + \frac{\mathrm{N}^2-4}{2\mathrm{N}^2}(f_2^z)^2 + \frac{2}{\mathrm{N}^2}f_2^z f_4^z \tag{5.94}$$

$$\dot{f}_4^z = \frac{\mathrm{N}^2-1}{\mathrm{N}^2}(f_2^z)^2 + \frac{1}{\mathrm{N}^2}(f_4^z)^2 \tag{5.95}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$f_1^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}\big(V + 2V_{\mathrm{ex}}\big) \tag{5.96}$$

$$f_2^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}V \tag{5.97}$$

$$f_4^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\big(\mathrm{N}V_{\mathrm{ex}} - V\big) \tag{5.98}$$

La résolution numérique de ces équations mène à un résultat tout à fait nouveau (voir FIGURE 5.4 : lorsque $V < 0$ (sur le plan), c'est la dualité triviale qui est atteinte (associée à CDW) ; mais lorsque $V > 0$, les résultats numériques donnent - dans les couplages qui pourtant donnent normalement les bonnes dualités - des rapports entre les couplages qui ne sont ni 1, ni -1, ni même 0, mais des rapport d'apparence assez arbitraire. On peut se poser la question de la validité d'un tel résultat, et notamment si les équations du groupe de renormalisation admettent une telle limite. Pourtant, en testant pour les équations (5.93, 5.94, 5.95) des solutions asymptotiques du type :

$$f_1 = f \tag{5.99}$$

$$f_2 = \alpha f \tag{5.100}$$

$$f_3 = \beta f \tag{5.101}$$

Avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on montre que ces nouveaux coefficients doivent satisfaire les deux égalités suivantes :

$$\frac{1}{4}\Big(1 + 3\alpha^2\Big) = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{N}^2-4}{2\mathrm{N}^2}\alpha + \frac{2\beta}{\mathrm{N}^2} = \frac{\mathrm{N}^2-1}{\mathrm{N}^2}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta}{\mathrm{N}^2} \tag{5.102}$$

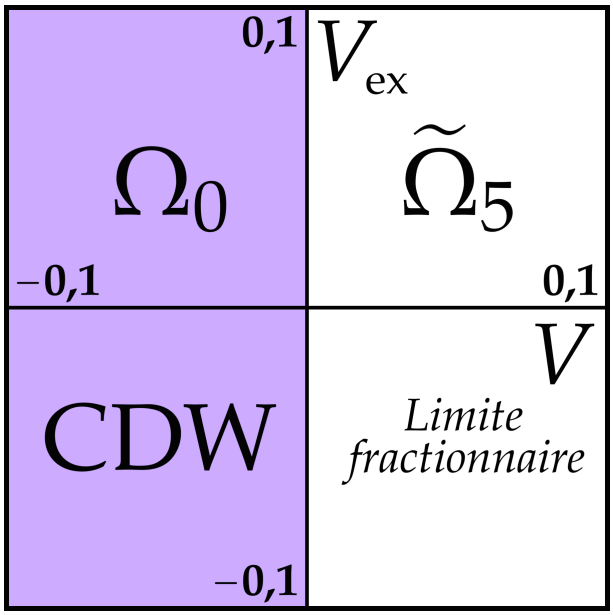


FIGURE 5.4 – Diagramme de phase du modèle *g-e* incommensurable pour $N > 2$ sur le plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$. Là où le plan de symétrie intersecte la zone **I** (associée à CDW), c'est encore une phase de dualité triviale Ω_0 qui est atteinte, tandis que lorsqu'elle fait la séparation entre les zones **II** et **III** (voir FIGURE 5.6), une limite fractionnaire $\widetilde{\Omega}_5$, est atteinte.

Équations dont les solutions, en plus de donner la solution $\alpha = \beta = 1$ qui correspond à la dualité triviale Ω_0, admettent une solution ⟨19⟩ qui elle est beaucoup moins évidente :

$$\alpha = -\frac{1}{3} - \frac{2^{5/3}\left(N^2-4\right)}{3^{4/3}\Delta} + \frac{2^{4/3}\Delta}{3^{5/3}N^2} \tag{5.103}$$

$$\begin{aligned}\beta = \quad & \frac{5}{9} - \frac{2N^2}{9} + \frac{2^{1/3}N^2}{3^{5/3}\Delta^2}\left(N^2-4\right)^2 + \frac{2^{2/3}}{3^{4/3}\Delta}\left(N^4-6N^2+8\right) \\ & - \frac{2^{1/3}\Delta}{3^{5/3}N^2}\left(N^2-2\right) + \frac{\Delta^2}{9\times 6^{1/3}N^2}\end{aligned} \tag{5.104}$$

Où la quantité Δ prend l'expression suivante :

$$\Delta = \left[\sqrt{3\left(2N^{12}-24N^{10}+123N^8-128N^6\right)} - 9N^4\right]^{1/3} \tag{5.105}$$

À propos de ces solutions, qui correspondent aux rapports que fournit le numérique et qui sont valables pour $N \geq 2$, nous remarquons que le cas $N = 2$, où $-\alpha = \beta = 1$, correspond à une dualité, à savoir Ω_5, qui on le rappelle, n'est une symétrie des équations du groupe de

⟨19⟩. En réalité, il existe deux solutions supplémentaires, mais complexes, et en conséquence, hors de propos.

renormalisation que lorsque $\mathrm{N} = 2$: finalement, elle demeure valide, mais sous une forme tout à fait inattendue, qui n'est plus une dualité. Pour cette raison nous nommons $\widetilde{\Omega}_5$ cette limite. L'étude de la phase correspondante requiert encore du nouveau matériel technique pour résoudre le modèle à la limite $\widetilde{\Omega}_5$:

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\widetilde{\Omega}_5} = \frac{\pi f}{\mathrm{N}}\left(J_L^a J_R^a + \alpha J_L^{a,i} J_R^{a,i} + \beta\, \boldsymbol{j}_L \cdot \boldsymbol{j}_R\right) \tag{5.106}$$

Pour trouver la physique de cette phase symétrique $\mathrm{SU}(2)_o$, considérons la limite $\mathrm{N} \gg 1$, laquelle satisfait :

$$\alpha \overset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} -1/3 \tag{5.107}$$

$$\beta \overset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} +1/3 \tag{5.108}$$

Ainsi, si l'on considère N grand, c'est d'abord le premier membre du modèle (5.106) - c'est-à-dire les courants $\mathrm{SU}(\mathrm{N})_2$ - qui va atteindre avant les autres le régime de fort couplage où il décrit un modèle massif. La gap qui s'ouvre dans ce secteur (celui des degrés de liberté nucléaires), et après y avoir intégrés lesdits degrés, la physique est décrite par le modèle suivant [3, 114] :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}}^{o} = \gamma \mathrm{tr}\, \Phi^{(1)} + \frac{\pi f}{\mathrm{N}} \beta\, \boldsymbol{j}_L \cdot \boldsymbol{j}_R \tag{5.109}$$

Où $\Phi^{(1)}$ est le champ primaire de spin 1 de la théorie conforme des champs $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{N}}$, de dimension $\Delta[\Phi^{(1)}] = 4/(\mathrm{N}+1)$, et $\gamma > 0$. Finalement, le hamiltonien effectif (5.109) n'est rien d'autre que la théorie de basse énergie de spins $\mathrm{N}/2$ de la chaîne de Heisenberg $\mathrm{SU}(2)$, dont la résolution est bien connue [162], ce n'est rien d'autre que la conjecture de Haldane, qui dépend de la parité de N [162, 163] :

— N pair : le modèle possède un gap spectral ;
— N impair : le modèle est critique - sur les degrés orbitaux, il a même $c = 1$ - est décrit par une théorie conforme des champs $\mathrm{SU}(2)_1$.

Nous verrons émerger lors de l'étude du demi-remplissage sa phase jumelle qui, elle, intégrera les degrés de liberté de charge (*via* les opérateurs d'interaction d'umklapp). Nous établirons par ailleurs que cette limite du demi-remplissage correspond à une phase HO ⟨20⟩, si bien qu'on peut imaginer la présente phase du cas incommensurable (qui correspond à $\widetilde{\Omega}_5$) comme en étant un dopage. Enfin, cette limite fractionnaire correspond à la transition entre les zones **II** et **IV**, dont on a vu que cette dernière possédait une charge centrale qui dépendent de la parité de N ($c = 1$ à cause de la charge pour N pair, et, $c = 2$ à cause de la charge et de la criticalité sur les degrés orbitaux).

⟨20⟩. Dans la représentation $\mathrm{N}/2$ de $\mathrm{SU}(2)$.

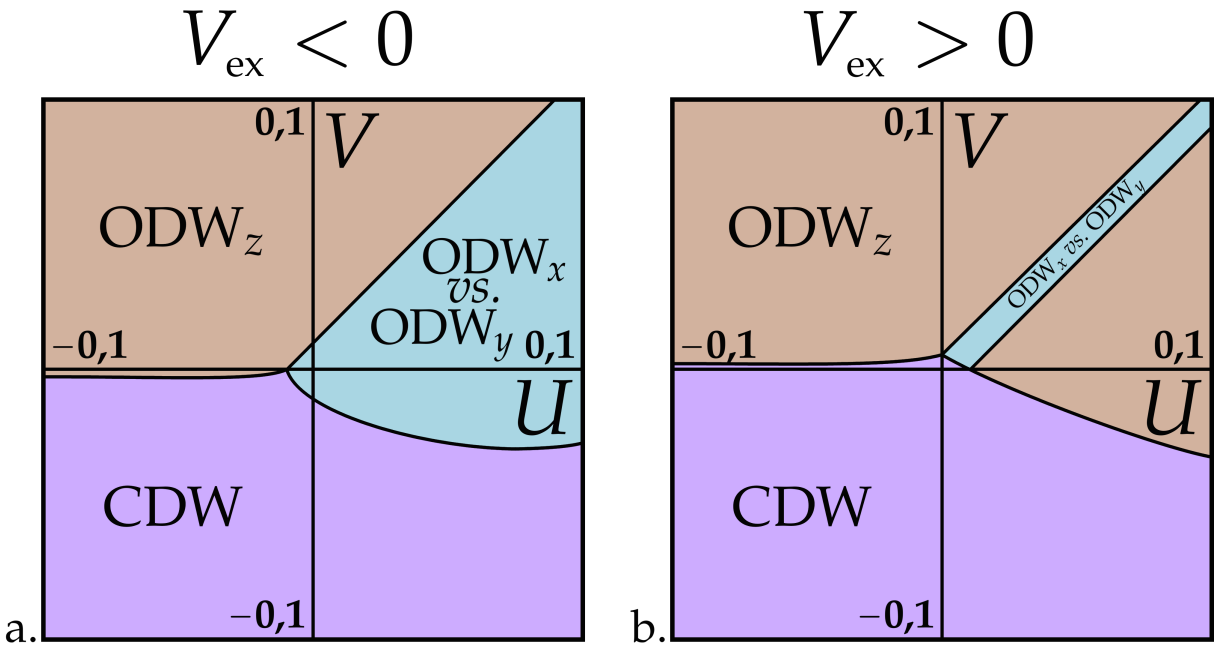


FIGURE 5.5 – Diagramme de phase du modèle *g-e* incommensurable pour N $>$ 2 pour les plans $V_{ex} = \pm t/100$. Les zones **I**, **II** et **IV** sont associées aux phases CDW, ODW$_z$ et ODW$_x$ *vs.* ODW$_y$ (publié dans [5]).

Le diagramme de phase

Toutes ces choses établies, nous pouvons donner le diagramme de phase, sur deux plans en FIGURE 5.5, mais aussi en sphérique FIGURE 5.6 pour avoir le diagramme de phase en entier : on y constate que la phase fractionnaire OF appartient à la ligne de symétrie orbitale SU$(2)_o$ pour $0 < \varphi < \pi$, c'est-à-dire $V > 0$. Notons enfin qu'à ce remplissage et pour N $>$ 2, il n'y a pas de trace d'un plan de symétrie SU$(2)_c$ que relierait à la symétrie orbitale SU$(2)_o$ une éventuelle transformation de Shiba.

5.2 Le demi-remplissage

Dans cette seconde section, c'est le cas du demi-remplissage pour N $>$ 2 qui est traité, mais cette fois-ci pour le seul modèle *g-e* (et Hund). Ce traitement est d'ailleurs l'objet principal de l'article [3]. Avec un tel remplissage, les termes d'umklapp devenus non-nuls sont alors renormalisés et lient désormais les degrés de charge et non-abéliens. Comme dans le cas à N $= 2$, nous présentons dès-lors que l'effet de la renormalisation, commune à tous les degrés, qui mènera à un élargissement dynamique de la symétrie, pour tous les degrés, c'est-à-dire des modèles avec la symétrie SO(4N). Et c'est bien ce qu'il se produit dans la plupart des zones

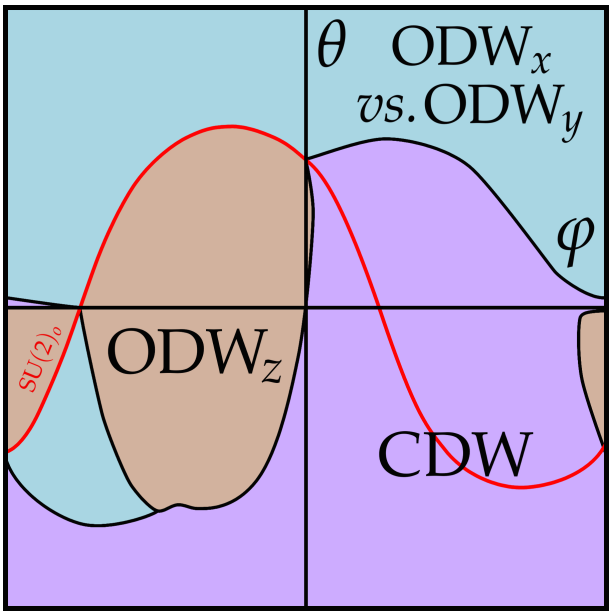


FIGURE 5.6 – Diagramme de phase complet du modèle *g-e* incommensurable pour N $>$ 2 (en sphérique). La ligne de symétrie orbitale SU$(2)_o$ est représentée en **rouge**.

du diagramme de phase, décrites par des dualités. Il en existe cependant une qui n'est pas décrite par une dualité. Sa résolution - qui nécessite l'introduction d'une artillerie technique d'un niveau supérieur ! - sera suivie d'une analyse de fort couplage où l'on montre l'émergence - espérée - de deux nouvelles phases topologiques.

5.2.1 Les phases du couplage faible

L'un des effets de la commensurabilité du demi-remplissage est que nous n'avons plus à traiter la charge à part puisque, par les opérateurs d'interaction d'umklapp, elle est réintégrée

aux autres degrés *via* les équations du groupe de renormalisation :

$$\dot{f}_1^z = \frac{1}{4}\Big((f_1^z)^2 + 2(f_2^z)^2 + (f_3^z)^2\Big) + \frac{N+2}{4N}(f_7^z)^2 + \frac{N-2}{4N}\Big(2(f_8^z)^2 + (f_9^z)^2\Big) \tag{5.110}$$

$$\dot{f}_2^z = \frac{1}{2}f_1^z f_2^z + \frac{N^2-4}{2N^2}f_2^z f_3^z + \frac{1}{N^2}\Big(f_3^z f_4^z + f_2^z f_5^z\Big) + \frac{1}{2}f_7^z f_8^z + \frac{N-2}{2N}f_8^z f_9^z \tag{5.111}$$

$$\dot{f}_3^z = \frac{1}{2}f_1^z f_3^z + \frac{N^2-4}{2N^2}(f_2^z)^2 + \frac{2}{N^2}f_2^z f_4^z + \frac{1}{2}f_7^z f_9^z + \frac{N-2}{2N}(f_8^z)^2 \tag{5.112}$$

$$\dot{f}_4^z = \frac{N^2-1}{N^2}f_2^z f_3^z + \frac{1}{N^2}f_4^z f_5^z + \frac{N-1}{N}f_8^z f_9^z \tag{5.113}$$

$$\dot{f}_5^z = \frac{N^2-1}{N^2}(f_2^z)^2 + \frac{1}{N^2}(f_4^z)^2 + \frac{N-1}{N}(f_8^z)^2 \tag{5.114}$$

$$\dot{f}_6^z = \frac{N+1}{2N}(f_7^z)^2 + \frac{N-1}{2N}\Big(2(f_8^z)^2 + (f_9^z)^2\Big) \tag{5.115}$$

$$\dot{f}_7^z = \frac{N^2+N-2}{2N^2}f_1^z f_7^z + \frac{N-1}{2N}\Big(2f_2^z f_8^z + f_3^z f_9^z\Big) + \frac{1}{N^2}f_6^z f_7^z \tag{5.116}$$

$$\dot{f}_8^z = \frac{N^2-N-2}{2N^2}\Big(f_1^z f_8^z + f_3^z f_8^z + f_2^z f_9^z\Big) + \frac{N+1}{2N}f_2^z f_7^z + \frac{1}{N^2}\Big(f_5^z f_8^z + f_4^z f_9^z + f_6^z f_8^z\Big) \tag{5.117}$$

$$\dot{f}_9^z = \frac{N^2-N-2}{2N^2}\Big(f_1^z f_9^z + 2f_2^z f_8^z\Big) + \frac{N+1}{2N}f_3^z f_7^z + \frac{1}{N^2}\Big(2f_4^z f_8^z + f_6^z f_9^z\Big) \tag{5.118}$$

Avec les conditions initiales suivantes ⟨21⟩, qui pour les cinq premières sont identiques à (5.88, . . . , 5.91), mais qui pour le couplage relié à la charge (5.92) est cette fois-ci normalisée, et

⟨21⟩. Au facteur $\pi/2$ près.

auxquelles on ajoute celles des opérateurs d'interaction d'umklapp, pour le modèle *g*-*e* :

$$f_1^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U + V_{\mathrm{ex}}\right) \tag{5.119}$$

$$f_2^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}V \tag{5.120}$$

$$f_3^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(V_{\mathrm{ex}} - U\right) \tag{5.121}$$

$$f_4^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(\mathrm{N}V_{\mathrm{ex}} - V\right) \tag{5.122}$$

$$f_5^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\Big((\mathrm{N}-1)U + V_{\mathrm{ex}} - \mathrm{N}V\Big) \tag{5.123}$$

$$f_6^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\Big((\mathrm{N}-1)U - V_{\mathrm{ex}} + \mathrm{N}V\Big) \tag{5.124}$$

$$f_7^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(V - V_{\mathrm{ex}}\right) \tag{5.125}$$

$$f_8^z = \frac{\mathrm{N}}{2}U \tag{5.126}$$

$$f_9^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(V + V_{\mathrm{ex}}\right) \tag{5.127}$$

Puis pour le modèle de Hund (lequel sera utilisé pour l'analyse, notamment pour la phase

non-DSE) :

$$f_1^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U+J+\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.128}$$

$$f_2^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U-\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.129}$$

$$f_3^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U-J+\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.130}$$

$$f_4^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U-\mathrm{N}J-\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.131}$$

$$f_5^z = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U-J-(2\mathrm{N}-1)\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.132}$$

$$f_6^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left((2\mathrm{N}-1)U-J-\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.133}$$

$$f_7^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(U-J-\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.134}$$

$$f_8^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(U+\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.135}$$

$$f_9^z = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(U+J-\frac{J_z}{2}\right) \tag{5.136}$$

Grâce à ces conditions initiales et aux équations du groupe de renormalisation, nous obtenons, en FIGURE 5.7, les différentes limites atteintes dans le diagramme de phase (voir FIGURE 5.11), dont trois dualités, la triviale ainsi que (3.380) et (3.382), ici écrites dans les couplages $\{g_i^z\}_{i\in[\![1;12]\!]}$:

$$g^z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} \xrightarrow{\Omega_0} g^z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} \tag{5.137}$$

$$\begin{matrix} g^z_{1,3,5,6,7,9} \\ g^z_{2,4,8} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_2} \begin{matrix} g^z_{1,3,5,6,7,9} \\ -g^z_{2,4,8} \end{matrix} \tag{5.138}$$

$$\begin{matrix} g^z_{1,2,3,4,5,6} \\ g^z_{7,8,9} \end{matrix} \xrightarrow{\Omega_4} \begin{matrix} g^z_{1,2,3,4,5,6} \\ -g^z_{7,8,9} \end{matrix} \tag{5.139}$$

Zone I

Pour interpréter physiquement ces dualités, nous débutons par l'étude de la dualité triviale Ω_0 qui correspond à la zone **I**, et, une fois les résultats établis, nous établirons les propriétés des autres zones associées aux autres dualités, c'est-à-dire Ω_2 et Ω_4. S'agissant de la dualité triviale, nous savons depuis (3.378) qu'il s'agit du modèle de Gross-Neveu SO(4N), dont nous

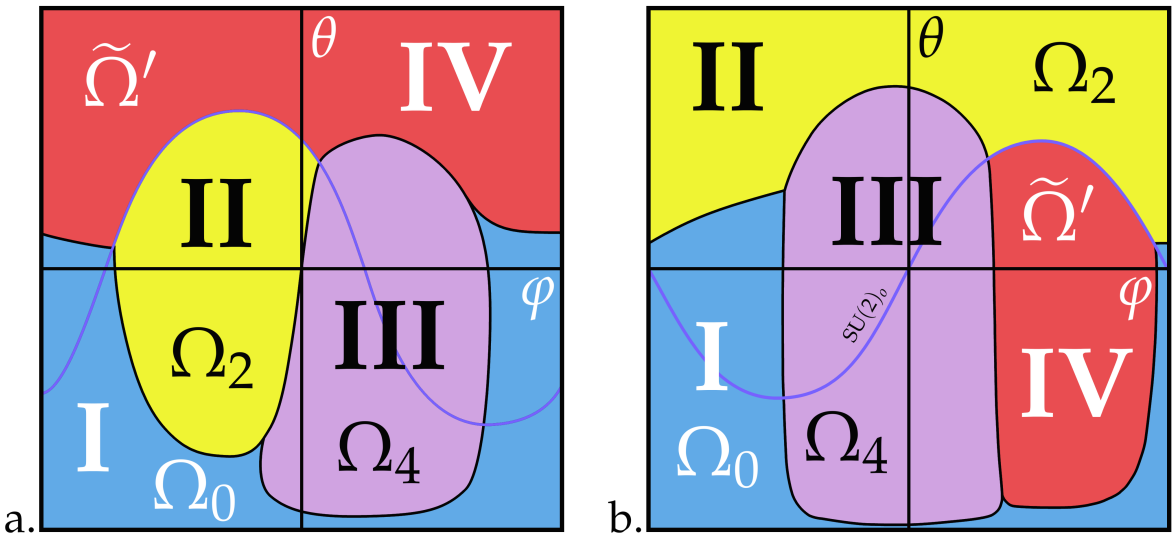


FIGURE 5.7 – Résultat brut du groupe de renormalisation pour le modèle *g*-*e*, en a., et de Hund, en b., à $N > 2$ (ici $N = 4$) et au demi-remplissage : trois dualités, $\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4$, et une limite qui n'est pas une dualité, $\widetilde{\Omega}'$, sont atteintes. Les résultats présentés en sphérique, font apparaître la ligne de symétrie $SU(2)_0$ en **bleu**.

redonnons l'expression dans les fermions chiraux :

$$\mathcal{H}^{\text{GN}}_{\text{int.}} = \frac{\pi f}{2N}\left(L^{\dagger}_{m\alpha}R_{m\alpha} - \text{h.c.}\right)^2 \tag{5.140}$$

Si bien qu'en introduisant le paramètre d'ordre de la phase SP, comme suit :

$$\mathcal{O}_{\text{SP}} \overset{j=x/a_0}{=} (-1)^j \sum_{m\alpha} c^{\dagger}_{m\alpha,j+1}c_{m\alpha,j} \tag{5.141}$$

$$\overset{\text{Dir.}}{=} i\left(L^{\dagger}_{m\alpha}R_{m\alpha} - \text{h.c.}\right) \tag{5.142}$$

On écrit le hamiltonien (5.140) de la plus simple des manières :

$$\mathcal{H}^{\text{GN}}_{\text{int.}} = -\frac{\pi f}{2N}\mathcal{O}^2_{\text{SP}} \tag{5.143}$$

Et nous sommes ainsi menés, pour ce modèle intégrable de charge centrale $c = 0$ et de symétrie $SO(4N)$, à mettre en évidence une phase SP avec $\langle \mathcal{O}_{\text{SP}} \rangle \neq 0$ pour la zone **I**, et ce d'une manière bien plus simple que dans le cas du remplissage incommensurable où l'introduction de la bosonisation non-abélienne avait été nécessaire. La paramètre d'ordre en lien (5.141) correspond à une phase dimérisée qui brise l'invariance par translation.

Zone II

Pour étudier la dualité Ω_2 associée à la zone **II**, comme nous l'avons fait précédemment, nous rendons compte de l'effet de la dualité sur les fermions chiraux, et ainsi nous pourrons en déduire quelle transformation le paramètre d'ordre va subir, puis nous l'interpréterons sur le réseau. Pour la dualité (5.138), l'effet de la dualité, que nous choisissons encore de n'exprimer que sur les fermions gauches est :

$$L_{m\alpha} \quad \xrightarrow{\Omega_2} \quad (-1)^m L_{m\alpha} \tag{5.144}$$

Le paramètre d'ordre devient alors :

$$\mathcal{O}_{\text{SP}} \quad \xrightarrow{\Omega_2} \quad \mathcal{O}_{\text{ODW}} = \sum_m (-1)^m L^\dagger_{m\alpha} R_{m\alpha} + \text{h.c.} \tag{5.145}$$

C'est-à-dire une onde de densité orbitale, qui peut être retrouvée à l'aide de la limite continue de l'expression suivante, donnée sur le réseau :

$$\mathcal{O}_{\text{ODW}} = (-1)^j \sum_m (-1)^m c^\dagger_{m\alpha,j} c_{m\alpha,j} \tag{5.146}$$

Ici, dans la zone **II**, c'est une phase ODW qui est réalisée.

Zone III

Sur la zone **III**, c'est la dualité (5.139), c'est-à-dire Ω_4, que l'on exprime comme une transformation sur les seuls fermions chiraux gauches :

$$L_{m\alpha} \quad \xrightarrow{\Omega_4} \quad iL_{m\alpha} \tag{5.147}$$

Le paramètre d'ordre est alors transformé depuis la phase triviale :

$$\mathcal{O}_{\text{SP}} \quad \xrightarrow{\Omega_4} \quad \mathcal{O}_{\text{CDW}} = L^\dagger_{m\alpha} R_{m\alpha} + \text{h.c.} \tag{5.148}$$

C'est un paramètre d'ordre en onde de densité de charge, dont l'expression sur le réseau - très simple - est la suivante :

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}} = (-1)^j n_j \tag{5.149}$$

Dans cette dernière zone à dualité, c'est une phase CDW qui est réalisée.

Zone IV

Dans la zone **IV**, ce n'est pas une dualité que présentent les équations du groupe de renormalisation, mais la limite suivante :

$$f^z_{1,6,7} \overset{\widetilde{\Omega}}{=} f > 0 \tag{5.150}$$

$$f^z_{3,9} \overset{\widetilde{\Omega}}{=} -f \tag{5.151}$$

$$f^z_{2,4,5,8} \overset{\widetilde{\Omega}}{=} 0 \tag{5.152}$$

Notons qu'elle ressemble beaucoup - notamment pour les couplages non-associés à des opérateurs d'interaction d'umklapp - à la limite $\widetilde{\Omega}$ (5.42, 5.43, 5.44) : pour cette raison nous la nommons $\widetilde{\Omega}'$. Cette phase - délicate [3] - est laissée au soin du fort couplage où elle est plus simple, bien que nous donnions le résultat du faible couplage à la fin de l'étude du plan de symétrie orbitale $\mathrm{SU}(2)_o$, traité ci-après.

Plan de transition

Compte tenu de la résolution des équations du groupe de renormalisation (voir FIGURE 5.7), la seule ligne de transition en rapport avec une symétrie du modèle sur le réseau est la ligne de symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$ (voir équation (4.296)) : il s'agit de la transition entre les zones **II** et **IV**. Dans ce plan d'équation, les conditions initiales se simplifient et l'on introduit les six couplages orbitaux ⟨22⟩ $\{f^o_i\}_{i\in[\![1,6]\!]}$, ici pour le modèle de Hund :

$$f^z_1 = f^o_1 = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U + \frac{3J}{2}\right) \tag{5.153}$$

$$f^z_2 = f^z_3 = f^o_2 = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U - \frac{J}{2}\right) \tag{5.154}$$

$$f^z_4 = f^z_5 = f^o_3 = -\frac{\mathrm{N}}{2}\left(U - \left(\mathrm{N} + \frac{1}{2}\right)J\right) \tag{5.155}$$

$$f^z_6 = f^o_4 = \frac{\mathrm{N}}{2}\left((2\mathrm{N}-1)U - \frac{3J}{2}\right) \tag{5.156}$$

$$f^z_7 = f^o_5 = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(U - \frac{3J}{2}\right) \tag{5.157}$$

$$f^z_8 = f^z_9 = f^o_6 = \frac{\mathrm{N}}{2}\left(U + \frac{J}{2}\right) \tag{5.158}$$

⟨22⟩. C'est-à-dire reliés à la symétrie orbitale $\mathrm{SU}(2)_o$.

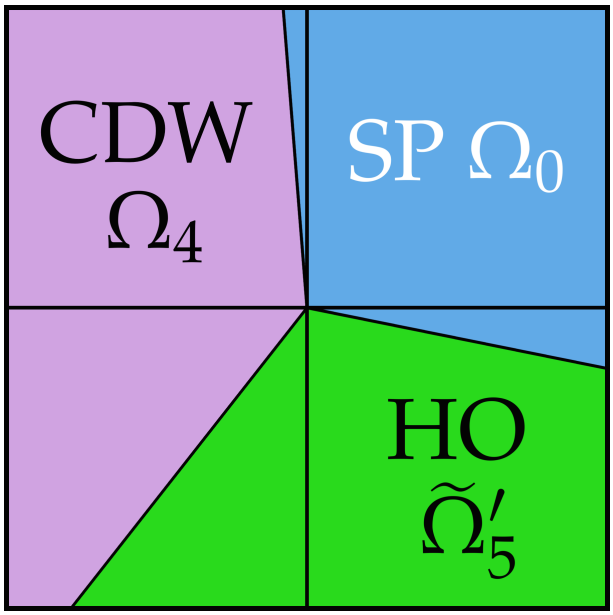


FIGURE 5.8 – Diagramme de phase du modèle de Hund au demi-remplissage pour $N > 2$ (ici on a $N = 4$), sur le plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$. Les dualités Ω_0 et Ω_4 correspondent aux phases SP et CDW respectivement, et dans une troisième zone, une limite fractionnaire $\widetilde{\Omega}'_5$ associé à la phase HO.

Avec les équations du groupe de renormalisation suivantes :

$$\dot{f}_1^o = \frac{1}{4}\Big((f_1^o)^2 + 3(f_2^o)^2\Big) + \frac{N+2}{4N}(f_5^o)^2 + \frac{3(N-2)}{4N}(f_6^o)^2 \tag{5.159}$$

$$\dot{f}_2^o = \frac{1}{2}f_1^o f_2^o + \frac{N^2-4}{2N^2}(f_2^o)^2 + \frac{2}{N^2}f_2^o f_3^o + \frac{1}{2}f_5^o f_6^o + \frac{N-2}{2N}(f_6^o)^2 \tag{5.160}$$

$$\dot{f}_3^o = \frac{N^2-1}{N^2}(f_2^o)^2 + \frac{1}{N^2}(f_3^o)^2 + \frac{N-1}{N}(f_6^o)^2 \tag{5.161}$$

$$\dot{f}_4^o = \frac{N+1}{2N}(f_5^o)^2 + \frac{3(N-1)}{2N}(f_6^o)^2 \tag{5.162}$$

$$\dot{f}_5^o = \frac{N^2+N-2}{2N^2}f_1^o f_5^o + \frac{3(N-1)}{2N}f_2^o f_6^o + \frac{1}{N^2}f_4^o f_5^o \tag{5.163}$$

$$\dot{f}_6^o = \frac{N^2-N-2}{2N^2}\Big(f_1^o f_6^o + 2f_2^o f_6^o\Big) + \frac{N+1}{2N}f_2^o f_5^o + \frac{1}{N^2}\Big(2f_3^o f_6^o + f_4^o f_6^o\Big) \tag{5.164}$$

Ces équations, comme on le montre en FIGURE 5.8, atteignent deux dualités connues, Ω_0 et Ω_4 respectivement associées aux phases SP et CDW décrites précédemment. Une nouveauté est la limite atteinte dans la troisième zone (voir FIGURE 5.8) qui n'est pas une dualité et que l'on note $\widetilde{\Omega}'_5$. Le résultat que donne les équations du groupe de renormalisation propose une limite

du type suivant ($\alpha, \beta, f \in \mathbb{R}$) :

$$f^o_{1,4,5} = f \tag{5.165}$$
$$f^o_{2,6} = \alpha f \tag{5.166}$$
$$f^o_3 = \beta f \tag{5.167}$$

On montre alors que pour être solutions des équations du groupe de renormalisation (5.159, ..., 5.164) il faut que les coefficients α et β satisfassent les deux équations suivantes :

$$\frac{N+1}{2N} + \frac{3(N-1)}{2N}\alpha^2 = 1 + \frac{N^2-N-2}{N^2}\alpha + \frac{2\beta}{N^2} = \frac{2N^2-N-1}{N^2}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta}{N^2} \tag{5.168}$$

Ces équations redonnent la dualité triviale Ω_0 avec $\alpha = \beta = 1$ mais aussi la limite suivante [23] qui correspond à ce que l'on observe par la résolution des équations de Runge Kutta d'ordre 5 :

$$\alpha = -\frac{1}{3} - \frac{2^{1/3}A}{\Delta} + \frac{\Delta}{2^{1/3}C^2} \tag{5.169}$$
$$\beta = \frac{N(N-1)}{4} + \left(1 + \frac{N(N+1)}{2}\right)\alpha + \frac{3N(N-1)}{4}\alpha^2 \tag{5.170}$$

Où le terme Δ a pour expression :

$$\Delta = C\Big\{ -B + \Big[4A^3 + B^2\Big]^{1/2}\Big\}^{1/3} \tag{5.171}$$

Et où les termes A et B satisfont :

$$A = 216N^4 - 540N^3 - 108N^2 + 972N - 540 \tag{5.172}$$
$$B = 11664N^4 - 46656N^3 + 69984N^2 - 46656N + 11664 \tag{5.173}$$
$$C = 27\left(1 - 2N + N^2\right) \tag{5.174}$$

Ce résultat est comparable à la solution (5.103, 5.104) par bien des aspects (que nous allons discuter), et en diffère notamment par l'ajout des couplages des opérateurs d'umklapp dans les équations du groupe de renormalisation, c'est notamment ce qui distingue les équations (5.102) et (5.168). Cela dit, pour les points communs, les deux solutions possèdent la même limite :

$$\alpha \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} -1/3 \tag{5.175}$$
$$\beta \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} +1/3 \tag{5.176}$$

[23]. Ainsi que deux autres limites, mais complexes.

De même, lorsque $N = 2$, la solution devient dualité avec $-\alpha = \beta = 1$ et qui n'est autre que Ω_5 ⟨24⟩, ce qui justifie - n'étant pas identique à $\widetilde{\Omega}_5$ - l'appelation $\widetilde{\Omega}_5'$ pour cette limite. Ainsi le modèle sur le plan de symétrie orbitale est le suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int.}}^{\text{SU(2)}_o} &= \frac{\pi f}{N} J_L^a J_R^a + \frac{2\pi\alpha f}{N} \mathcal{J}_L^{a,i} \mathcal{J}_R^{a,i} + \frac{2\pi\beta f}{N^2} j_L \cdot j_R + \frac{\pi f}{2N^2} J_L J_R \\ &+ \frac{\pi f}{N}\left(S_L^{\alpha\beta+} S_R^{\alpha\beta-} + S_L^{\alpha\beta-} S_R^{\alpha\beta+}\right) + \frac{\pi\alpha f}{2N}\left(A_{mnL}^{\alpha\beta+} A_{mnR}^{\alpha\beta-} + A_{mnL}^{\alpha\beta-} A_{mnR}^{\alpha\beta+}\right)\end{aligned} \tag{5.177}$$

Ainsi les coefficients qui ont pour facteur α ou β correspondent - par rapport à la situation de référence qui est $|\alpha| = |\beta| = 1$ - à des échelles d'énergie plus petites que celles de charge ou de spin. Pour ces derniers degrés, nucléaires, on considère alors seule la théorie du premier membre de (5.177) : il s'agit d'une théorie conforme des champs $\text{SU}(N)_2$ perturbée par une interaction courant-courant (interaction marginale-relevante), qui est connue pour être massive [164] avec un gap Δ_s qui va structurer la physique orbitale car c'est en effet dans le secteur de basse énergie que décrit la théorie des degrés nucléaires qu'elle va prendre place à basse énergie.

Pour faire cette analyse, nous introduisons à nouveau un résultat de la bosonisation non-abélienne dans la base $\text{U}(1)_c \times \text{SU}(2)_N \times \text{SU}(N)_2$, qui nous permettra la décomposition du hamiltonien (5.177) :

$$L_{m\alpha}^\dagger R_{n\beta} \simeq \exp\left(i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\Phi_c\right) g_{nm} G_{\beta\alpha} \tag{5.178}$$

$$R_{m\alpha}^\dagger L_{n\beta} \simeq \exp\left(-i\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\Phi_c\right) g_{mn}^\dagger G_{\alpha\beta}^\dagger \tag{5.179}$$

Où g et G sont respectivement les champs primaires dans la représentation fondamentale de $\text{SU}(2)$ et $\text{SU}(N)$, dont les dimensions d'échelle sont les suivantes :

$$\Delta[g] = \frac{3}{N+2} \tag{5.180}$$

$$\Delta[G] = \frac{N^2-1}{N(N+2)} \tag{5.181}$$

À l'aide de ces champs primaires de la représentation fondamentale, on peut construire des champs primaires de représentations plus importantes, à savoir la représentation de spin $j = 1$ de $\text{SU}(2)$ avec $\Phi_{j=1}^{\text{SU(2)}_N}$ et la représentation adjointe de $\text{SU}(N)$ avec $\Phi_{\text{adj}}^{\text{SU(N)}_2}$, qui satisfont les

⟨24⟩. Dans le cas $N = 2$ au demi-remplissage, nous avions montré quelle correspondait à la phase HO.

relations suivantes :

$$\mathrm{tr}\left(\Phi_{j=1}^{\mathrm{SU(2)_N}}\right) = \mathrm{tr}(g)\mathrm{tr}(g^\dagger) - \frac{1}{2}g_{mn}g^\dagger_{mn} \tag{5.182}$$

$$\mathrm{tr}\left(\Phi_{\mathrm{adj}}^{\mathrm{SU(N)_2}}\right) = \mathrm{tr}(G)\mathrm{tr}(G^\dagger) - \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}G^\dagger_{\alpha\beta} \tag{5.183}$$

Or nous pouvons exprimer le second terme du hamiltonien (5.177) à l'aide de ces champs et du champ Φ_c de charge dans (5.178, 5.179) :

$$\mathcal{J}_L^{a,i}\mathcal{J}_R^{a,i} \sim -\mathrm{tr}\left(\Phi_{j=1}^{\mathrm{SU(2)_N}}\right)\mathrm{tr}\left(\Phi_{\mathrm{adj}}^{\mathrm{SU(N)_2}}\right) \tag{5.184}$$

De même pour le cinquième terme de (5.177), le terme d'umklapp construit à l'aide des courants symétriques [25] "S", ce sont naturellement les représentations antisymétriques de SU(2) (c'est-à-dire rien, un singulet) et symétrique de SU(N) (c'est-à-dire $\square\square$, de dimension $\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)/2$) notée $\Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{SU(N)_2}}$, qui interviennent :

$$S_L^{\alpha\beta+}S_R^{\alpha\beta-} \sim \exp\left(i\sqrt{\frac{8\pi}{\mathrm{N}}}\Phi_c\right)\mathrm{tr}\left(\Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{SU(N)_2}}\right) \tag{5.185}$$

De même pour le sixième terme de (5.177), le terme d'umklapp construit à l'aide des courants antisymétriques [26] "A", ce sont cette fois-ci les représentations symétrique de SU(2) (c'est-à-dire un triplet) avec le champ primaire de spin $j = 1$, et antisymétrique (c'est-à-dire $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$, de dimension $\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)/2$) notée $\Phi_{\mathrm{a}}^{\mathrm{SU(N)_2}}$, qui interviennent :

$$A_{mnL}^{\alpha\beta+}A_{mnR}^{\alpha\beta-} \sim \exp\left(i\sqrt{\frac{8\pi}{\mathrm{N}}}\Phi_c\right)\mathrm{tr}\left(\Phi_{j=1}^{\mathrm{SU(2)_N}}\right)\mathrm{tr}\left(\Phi_{\mathrm{a}}^{\mathrm{SU(N)_2}}\right) \tag{5.186}$$

Enfin pour l'opérateur d'interaction charge pure, nous utilisons les résultats de la bosonisation abélienne [27] des équations (3.235, 3.236) sur les courants de charge gauche et droit :

$$J_L J_R = \frac{2\mathrm{N}}{\pi}\partial_x\Phi_{cL}\partial_x\Phi_{cR} \tag{5.187}$$

[25]. Symétriques sur les degrés nucléaire, c'est comme ça que nous l'avions défini.
[26]. Antisymétriques sur les degrés nucléaire.
[27]. Pour la raison que le champ de charge défini dans la bosonisation abélienne et non-abélienne est en réalité le même.

Au final ⟨28⟩ nous pouvons écrire un hamiltonien où le secteur orbital est distingué des autres :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}}^{\text{SU(2)}_o} = \lambda_1 \text{tr}\left(\Phi_{j=1}^{\text{SU(2)}_\text{N}}\right) + \frac{2\pi\beta f}{\text{N}^2} j_L \cdot j_R + \frac{f}{\text{N}} \partial_x \Phi_{cL} \partial_x \Phi_{cR} \tag{5.188}$$

$$+ \lambda_2 \cos\left(\sqrt{\frac{8\pi}{\text{N}}}\Phi_c\right) + \lambda_3 \,\text{tr}\left(\Phi_{j=1}^{\text{SU(2)}_\text{N}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{8\pi}{\text{N}}}\Phi_c\right) \tag{5.189}$$

Où les coefficients phénoménologiques $\lambda_{1,2,3}$ sont les champs primaires du secteur nucléaire qui ont été moyennés :

$$\lambda_1 \simeq -\frac{4\pi\alpha f}{\text{N}} \left\langle \text{tr}\left(\Phi_{\text{adj}}^{\text{SU(N)}_2}\right)\right\rangle \tag{5.190}$$

$$\lambda_2 \simeq \frac{\pi f}{\text{N}} \left\langle \text{tr}\left(\Phi_{\text{s}}^{\text{SU(N)}_2}\right) + \text{h.c.}\right\rangle \tag{5.191}$$

$$\lambda_3 \simeq \frac{\pi\alpha f}{2\text{N}} \left\langle \text{tr}\left(\Phi_{\text{a}}^{\text{SU(N)}_2}\right) + \text{h.c.}\right\rangle \tag{5.192}$$

Et nous supposons dans la suite que les valeurs moyennes des opérateurs de $\text{SU}(2)_\text{N}$ sont positives. L'idée est de simplifier encore le hamiltonien effectif (5.189) et pour ce faire, puisque nous considérons des interactions en perturbation, nous pouvons négliger le terme en λ_3 qui est moins pertinent que ceux en λ_1 et λ_2 (dont il est le produit). Mais aussi, nous pouvons simplifier l'expression des termes en charge en introduisant le champ normalisé $\widetilde{\Phi}_c$ associé au paramètre de Luttinger suivant :

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{1 + f/\pi \text{N} v_F}} < 1 \tag{5.193}$$

Puisque le résultat numérique est tel que $f > 0$. Ainsi le modèle effectif peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}}^{\text{SU(2)}_o} = \lambda_1 \text{tr}\left(\Phi_{j=1}^{\text{SU(2)}_\text{N}}\right) + \frac{2\pi\beta f}{\text{N}^2} j_L \cdot j_R + \lambda_2 \cos\left(\sqrt{\frac{8\pi K_c}{\text{N}}}\widetilde{\Phi}_c\right) \tag{5.194}$$

Nous pouvons dès lors régler le cas des degrés de liberté de charge : au demi-remplissage, pour $K_c < \text{N}$ (voir équation (3.249)), inégalité qui est ici satisfaite, un gap en charge Δ_c s'ouvre ⟨29⟩ et la charge est gelée à une valeur moyenne qui minimise le terme cosinus (avec $\lambda_2 > 0$) du mo-

⟨28⟩. En omettant le premier terme purement nucléaire, considéré constant selon nos précédentes considérations.
⟨29⟩. Et au demi-remplissage, nous avons affaire avec un Isolant de Mott, ce qui est bien attendu.

dèle effectif (5.194) pour $p = 0$ et 1 :

$$\langle \Phi_c \rangle = \sqrt{\frac{N\pi}{8K_c}} + p\sqrt{\frac{N\pi}{8K_c}} \tag{5.195}$$

Le modèle effectif peut encore être simplifié pour obtenir une forme finale qui ne dépend plus que des degrés de liberté orbitaux :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}}^{\text{SU(2)}_o} = \lambda_1 \text{tr}\left(\Phi_{j=1}^{\text{SU(2)}_N}\right) + \frac{2\pi\beta f}{N^2} \boldsymbol{j}_L \cdot \boldsymbol{j}_R \tag{5.196}$$

Or cette dernière expression n'est rien d'autre que la théorie de basse énergie de la chaîne de Heisenberg-SU(2) de spin N/2 [162]. Cette dernière satisfait la conjecture de Haldane si bien que, pour N impair les degrés orbitaux sont critiques avec $c = 1$, et, pour N pair la phase correspond à une généralisation de la phase Haldane Orbital (HO) du cas $N = 2$ (qui correspond bien à une chaîne de spin $N/2 = 1$) : c'est également une phase topologique protégée par la symétrie (SPT), avec des états de bord de spin N/4 et un ordre caché que mesure un paramètre d'ordre en ruban. Notons enfin que - hors du plan de symétrie, lorsque $\text{SU}(2)_o$ est réduite à $\text{U}(1)_o$, l'étude de la zone **IV** s'effectue en utilisant une expression anisotrope de (5.196) qui, pour N pair, établit une phase RS que l'on décrit plus aisément au fort couplage.

5.2.2 L'approche du fort couplage

Pour confirmer les résultats du faible couplage et pour en pallier les carences, nous donnons ici l'étude de fort couplage ⟨30⟩ (c'est-à-dire lorsque les couplages, en Hund : U, J et J_z, sont très grands devant le terme tunnel t), comme donnée en [3]. Cette étude - qui pour être menée, peut être comparée aux résultats du même modèle g-e au demi-remplissage à $N = 2$ (voir FIGURE 4.13) - mène notamment à la mise en évidence d'une généralisation de la phase HO ainsi que d'une phase topoloqique SU(N), généralisation de la phase HS du cas $N = 2$. Notons enfin que cette analyse est réalisée pour les modèles possédant la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2^{g\leftrightarrow e}$.

Le cas $J = J_z = 0$

Considérons tout d'abord le cas où $J = J_z = 0$: il s'agit de deux points du plan de symétrie orbitale SU(N), l'un pour $U > 0$ et l'autre pour $U < 0$ (voir ces points en FIGURE 5.13), qu'il faut étudier séparemment. Concrètement pour cette première approche, il s'agit de vérifier que les prédictions du faible couplage pour les phases dans ces zones, c'est-à-dire si ces zones correspondent respectivement à des phases SP et CDW. Sur le plan $\text{SU}(2)_o$ d'équation (4.296), le

⟨30⟩. Cette étude est le travail de H. Nonne et K. Totsuka

modèle de Hund ⟨31⟩ devient [3] au demi-remplissage un modèle de Hubbard U(2N) :

$$\mathcal{H}_{\text{Hund}} = -t \sum_{m\alpha,i} \left(c^{\dagger}_{m\alpha,i+1} c_{m\alpha,i} + c^{\dagger}_{m\alpha,i} c_{m\alpha,i+1} \right) + \frac{U}{2} \sum_i n_i^2 \tag{5.197}$$

Considérons les deux cas :

— $U > 0$: les interactions répulsives répartissent les atomes par paquets les plus petits en nombre, c'est-à-dire N atomes par site, correspondant à la représentation de SU(2N) complètement antisymétrique (avec un colonne de N lignes). Le demi-remplissage - qui induit un gap de charge - fixe alors ces représentations sur site, et nous sommes naturellement rendus à un modèle de Heisenberg antiferromagnétique ⟨32⟩ SU(2N) dans ladite représentation. Or il est connu [165, 97, 166] que ce modèle présente, pour tout N, une phase SP, c'est-à-dire dimérisée avec un fondamental doublement dégénéré formé de dimères qui lient deux sites voisins ;

— $U < 0$: cette fois-ci les interactions attractives attirent les atomes en les plus gros paquets possibles, et l'on voit les sites être complètement vides, ou complètement occupés (avec 2N atomes), autrement dit, les représentations singulets. On montre que le modèle effectif au second ordre de la théorie de perturbation est :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}} = \frac{t^2}{(2\mathrm{N}^2 - \mathrm{N})U} \sum_i \left(n_{i+1} n_i - \mathrm{N} n_i \right) \tag{5.198}$$

Or le premier terme induit une répulsion effective entre site plus proches, de telle sorte que les sites vides et pleins vont se disposer en alternance, autrement dit, nous aurons affaire avec une onde de densité de charge (CDW).

Le cas $J < 0$

Nous étudions désormais le cas $J < 0$, dans le régime répulsif ($U > 0$) dans lequel les atomes vont s'agencer par paquets de N sur les sites : ici, c'est la quantité $|J - J_z|$, qui mesure l'écartement à la ligne de symétrie orbitale $\mathrm{SU}(2)_o$. On montre d'ailleurs - en considérant d'abord $|J - J_z|$ petit - que c'est cette quantité qui brise la symétrie $\mathrm{SU}(2)_o$ de la théorie en perturbation au second ordre :

$$\mathcal{H}_{\text{eff.}} = \frac{4t^2}{\mathrm{N}U - \mathrm{N}J(\mathrm{N} + 1/2)} \sum_i \boldsymbol{T}_{i+1} \cdot \boldsymbol{T}_i - (J - J_z) \sum_i \left(T_i^z \right)^2 \tag{5.199}$$

Où $\boldsymbol{T}_i$ est le pseudo-spin qui agit dans la représentation de spin $T = \mathrm{N}/2$ à N : $\boxed{1} \cdots \boxed{\mathbb{N}}$ ⟨33⟩,

⟨31⟩. Ainsi que le modèle *g-e*.
⟨32⟩. Ici, $U > 0$.
⟨33⟩. Pour la générer, on applique l'opérateur d'échelle T_i^- au vecteur de plus haut poids de la représentation, à

qui est celle du fondamental, obtenu dans ce régime à $t = 0$. Ainsi, le modèle (5.199) n'est rien d'autre qu'un modèle de Heisenberg anisotrope, dont la physique est connue [120, 45, 167, 168] et rend compte - à fort $J < 0$ - d'une physique qui dépend de la parité de N ⟨34⟩ (c'est la conjecture de Haldane) :

— N pair : c'est une chaîne antiferromagnétique de spin entier N/2, ainsi le fondamental décrit - en accord avec l'approche de faible couplage - une phase de Haldane orbitale (notée HO, comme à $N = 2$) avec un ordre caché qui est l'analogue de à celui à $N = 2$. Notons - comparer FIGURE 4.13 b. et FIGURE 5.10 - que cette phase hérite directement de son homologue à $N = 2$;
— N impair : cette fois-ci le spin N/2 et demi-entier, la région est alors critique, et occupée par un liquide de Tomonaga-Luttinger pour le secteur orbital.

Occupons nous maintenant de décrire ce qu'il arrive lorsque l'on s'écarte plus de la ligne de symétrie orbitale $SU(2)_o$, c'est-à-dire, lorsque $|J - J_z|$ devient plus grand : en considérant d'abord que $J - J_z$ négatif ⟨35⟩, cet écart finira par faire atteindre au terme d'anisotropie une valeur telle qu'il tuera la phase HO pour laisser place à une phase à $T^z = 0$ et singulet de SU(N) en spin ⟨36⟩, phase qui généralise la phase RS du cas $N = 2$ (voir la FIGURE 4.8 et l'équation (4.167)), et que l'on nomme identiquement. Au contraire, lorsque $J - J_z > 0$ ⟨37⟩, le terme d'anisotropie favorisera les états avec un grand pseudospin ⟨38⟩ à $T^z = N/2$ et $T^z = -N/2$, que le terme d'interaction antiferromagnétique dans l'interaction effective (5.199) fera s'alterner : nous aurons alors une onde de densité orbitale (c'est-à-dire ODW).

Le cas $J > 0$

Étudions maintenant le cas $J > 0$ où l'on considère la limite où c'est ce paramètre d'interaction qui domine les autres $J \gg U, J_z$. Dans cette limite, le modèle sur site est donné par $J(\boldsymbol{T}^2 - (T^z)^2)$, dont nous cherchons le fondamental, pour un régime d'interaction répulsif (c'est-à-dire $U > 0$), de telle sorte que les atomes s'agencent par paquets de N atomes. Considérons qu'il en soit ainsi, et donnons alors quelques considérations sur les représentation du groupe SU(2N) ⟨39⟩, et de manière générale, les représentations à n atomes sur site : comme pour les fermions, sur un site donné, il n'existe pas d'autre degrés de liberté que les 2N, la seule représentation que l'on peut former - sachant qu'une la représentation fondamentale équivaut à un

savoir $\prod_{\alpha=1}^{N} c^\dagger_{g\alpha} |0\rangle$.
⟨34⟩. Jusqu'ici, l'analyse était valable pour une parité quelconque de N.
⟨35⟩. Il s'agit, dans la FIGURE 5.7 de la zone en dessous de la ligne de symétrie orbitale $SU(2)_o$ en **bleu**, c'est-à-dire la zone en **rouge**.
⟨36⟩. Il s'agit de la composante $T_z = 0$ de la représentation $(\bullet_{SU(N)}, \boxed{1} \cdots \boxed{\mathbb{N}}_{SU(2)})$.
⟨37⟩. Il s'agit cette fois, dans la FIGURE 5.7, de la zone au dessus de la ligne de symétrie orbitale $SU(2)_o$ en **bleu**, c'est-à-dire la zone en **jaune**.
⟨38⟩. Il s'agit cette fois des composantes $T_z = \pm N/2$ de la représentation $(\bullet_{SU(N)}, \boxed{1} \cdots \boxed{\mathbb{N}}_{SU(2)})$.
⟨39⟩. Finalement, comme il n'existe pas d'autre degré que les 2N degrés, cette étude est importante.

fermion : $\square_{SU(2N)} \equiv c^{\dagger}_{m\alpha}$ - ne peut être une autre que celle à une colonne de n boîtes :

$$n \text{ fermions} \equiv \overset{n}{\times}\left\{\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\\\square\end{array}\right\}_{SU(2N)} \overset{\text{déf.}}{=} (n)_{SU(2N)} \tag{5.200}$$

Selon la parité de n, nous pouvons décomposer ces représentations de $SU(2N)$ sur $SU(N)_n \times SU(2)_o$ [3]. En notant $[p,q]$, avec $p \geqslant q$ la représentation de $SU(N)$ à deux colonnes ⟨40⟩ à respectivement p et q boîtes, et $[T]$ la représentation de $SU(2)$ de pseudo-spin T, nous avons :

$$(n \in 2\mathbb{N})_{SU(2N)} = \bigotimes_{k=0}^{n/2}\Big([n/2+k, n/2-k], [2k]\Big) \tag{5.201}$$

$$(n \in 2\mathbb{N}+1)_{SU(2N)} = \bigotimes_{k=0}^{(n-1)/2}\Big([n/2+k+1/2, n/2-k-1/2], [2k+1]\Big) \tag{5.202}$$

Soit explicitement pour les premiers n :

$$n=1 \;:\; \square_{SU(2N)} = \big(\square_{SU(N)}, \square_{SU(2)}\big) \tag{5.203}$$

$$n=2 \;:\; \begin{array}{c}\square\\\square\end{array}_{SU(2N)} = \big(\square\square_{SU(N)}, \bullet_{SU(2)}\big) \oplus \Big(\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}_{SU(N)}, \square\square_{SU(2)}\Big) \tag{5.204}$$

$$n=3 \;:\; \begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_{SU(2N)} = \Big(\begin{array}{cc}\square&\square\\\square&\end{array}_{SU(N)}, \square_{SU(2)}\Big) \oplus \Big(\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_{SU(N)}, \square\square\square_{SU(2)}\Big) \tag{5.205}$$

$$n=4 \;:\; \begin{array}{c}\square\\\square\\\square\\\square\end{array}_{SU(2N)} = \Big(\begin{array}{cc}\square&\square\\\square&\square\end{array}_{SU(N)}, \bullet_{SU(2)}\Big) \oplus \Big(\begin{array}{cc}\square&\square\\\square&\end{array}_{SU(N)}, \square\square_{SU(2)}\Big) \oplus \Big(\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\\\square\end{array}_{SU(N)}, \square\square\square\square_{SU(2)}\Big) \tag{5.206}$$

$$n=5 \;:\; \begin{array}{c}\square\\\square\\\square\\\square\\\square\end{array}_{SU(2N)} = \Big(\begin{array}{cc}\square&\square\\\square&\square\\\square&\end{array}_{SU(N)}, \square_{SU(2)}\Big) \oplus \Big(\begin{array}{cc}\square&\square\\\square&\square\\\square&\end{array}_{SU(N)}, \square\square\square_{SU(2)}\Big) \oplus \Big(\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\\\square\\\square\end{array}_{SU(N)}, \square\square\square\square\square_{SU(2)}\Big) \tag{5.207}$$

Autrement dit, nous observons que les représentations irréductibles de $SU(2) \times SU(N)$ sont toutes de la forme suivante :

$$\Big(\overset{p}{\left\{\begin{array}{cc}\square&\square\\\square&\square\\\square&\square\\\square&\square\\\square&\end{array}\right\}}_{SU(N)}\overset{q}{},\ \overbrace{\square\square\square}^{p-q}{}_{SU(2)}\Big), \qquad p+q=n \tag{5.208}$$

Sachant cela, reste à trouver laquelle minimise le hamiltonien dans les limite $J \gg |U|, |J_z|$,

⟨40⟩. On peut se demander légitimement pourquoi l'on s'arrête à deux boîtes : la raison est que les N degrés nucléaires ne peuvent se symétriser que grâce aux 2 degrés orbitaux g et e (ou aux degrés de site i, mais ici nous n'en considérons qu'un seul). De même que si l'on considère tous les 2N degrés, nous ne pouvons avoir que des colonnes, et pour les 2 degrés orbitaux, nous pouvons avoir des représentations de pseudospin N/2 (à N boîtes), comme nous en avons déjà rencontrées pour la phase HO.

que l'on rappelle :

$$\mathcal{H}_{\text{int.}} = J\left(\boldsymbol{T}^2 - (T^z)^2\right) \tag{5.209}$$

Tout en gardant à l'esprit que dans notre cas, répulsif, les atomes se regroupent par paquets de $n = \mathrm{N}$ que nous considérons ici pair (puisque I est demi-entier pour les alcalino-terreux fermioniques). Alors pour minimiser ce hamiltonien, toujours positif, il semble évident qu'il faut choisir la représentation ayant le plus petit pseudo-spin, à savoir $T = 0$ ⟨41⟩, dans le langage des représentations irréductibles (5.208), il faut que $p = q = \mathrm{N}/2$, autrement dit, nous sommes rendus avec la représentation suivante ⟨42⟩ :

$$\left(\mathrm{N}/2\left\{\underbrace{\square\!\square}_{\mathrm{SU(N)}}, \bullet_{\mathrm{SU(2)}}\right.\right) \quad (\mathrm{N\ pair}) \tag{5.210}$$

Cela dit, il est tout naturel que la théorie de perturbation consiste en un modèle de Heisenberg SU(N) antiferromagnétique et dans la représentation autoconjuguée (5.210), de $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$ que l'on note $\{\mathcal{S}^a\}_{a\in[\![1,\mathrm{N}^2-1]\!]}$:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SU(N)}} = \frac{t^2}{U + J + J_z/2} \sum_i \mathcal{S}^a_{i+1} \mathrm{S}^a_i \tag{5.211}$$

Et cette dernière expression arrive comme une bonne nouvelle dans notre quête de nouvelle phase topologique : à $\mathrm{N} = 2$ elle correspond à la représentation de spin 1 (la phase HS lui correspond), et contrairement à la phase HO - qui donne des phases dans le cadre de la conjecture de Haldane (reliée au groupe SU(2)) - étant donnée la représentation (5.210) à $\mathrm{N} > 2$, nous avons potentiellement une phase tout à fait nouvelle. Seulement, les propriétés de ce modèle ne sont pas connues pour un N général ⟨43⟩, et c'est ce que nous donnons alors.

Tout d'abord, comme pour la construction AKLT de la chaîne de spin 1, il s'agit de déterminer un hamiltonien - comme (2) - en partant d'un état fondamental donné construit à l'aide des états VBS ⟨44⟩ [43, 171], où - comme pour la chaîne de spin 1 que l'on reconstruisait en les dédoublant en deux spins 1/2 - nous dédoublons sur chaque site la représentation (5.210) en deux représentations à une colonne ⟨45⟩ :

$$\mathrm{N}/2\left\{\square \otimes \square \supset \square\!\square\right. \tag{5.212}$$

⟨41⟩. Pour les vecteurs de plus haut poids - qui dans une représentation de pseudospin T donné minimisent cette énergie - à savoir $|T, \pm T\rangle$, l'énergie associée à (5.209) est tout simplement $J(T(T+1) - T^2) = JT$.
⟨42⟩. Dans le cas N impair, il s'agit de la représentation $[(\mathrm{N}+1)/2, (\mathrm{N}-1)/2]$, qui dans le secteur orbital appartient à la représentation fondamentale du pseudo-spin, à savoir $T = 1/2$.
⟨43⟩. Sauf pour de grands N, voir [169, 170].
⟨44⟩. Pour l'anglais *Valence Bond Solid*.
⟨45⟩. On montre plus tard que ce choix permet d'obtenir un hamiltonien parent (*i.e* ayant l'état VBS comme fondamental) qui est relié adiabatiquement à (5.211).

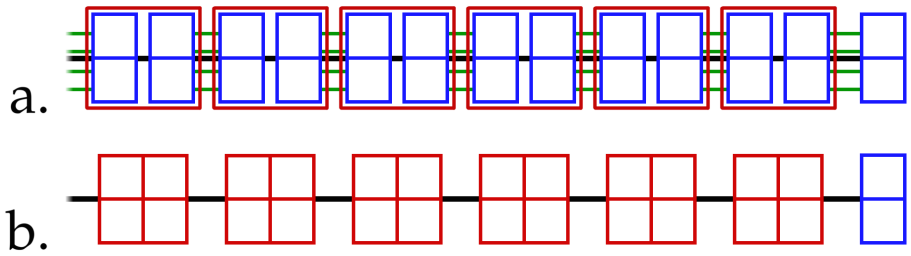


FIGURE 5.9 – Construction de la chaîne AKLT-SU(4). En a. la chaîne avec la construction explicite à partir des représentations à une colonne (en **bleu**) qu'on a intriquées entre sites adjacents (en **vert**) puis projeté sur la représentation à deux colonnes (en **rouge**). En b. la même chaîne finale (en **rouge**) qui est constituée de représentations à deux colonnes et au bout (en **bleu**), la représentation à une colonne.

À l'aide de deux telles représentations on créé entre deux sites adjacents des paires intriquées au maximum (voir FIGURE 5.9 pour N = 4 ou FIGURE 5 pour N = 2 où antisymétriser suffit). Enfin, conformément à (5.212), qui n'est pas une égalité ⟨46⟩, il faut projeter le tout sur les états de la représentation (5.210) : en guise de résultat nous obtenons une chaîne constituée de représentations à deux colonnes, sauf au bout - pour des conditions aux limites ouvertes - où il demeure par construction une représentation à une colonne (voir FIGURE 5.9). Le hamiltonien parent ⟨47⟩ correspondant est alors [123], ici pour N = 4 ⟨48⟩ :

$$\mathcal{H}_{\text{VBS}}^{(\text{N}=4)} = J_s \sum_i \left[\mathcal{S}_{i+1}^a S_i^a + \frac{13}{108} \left(\mathcal{S}_{i+1}^a S_i^a \right)^2 + \frac{1}{216} \left(\mathcal{S}_{i+1}^a S_i^a \right)^3 \right] \tag{5.214}$$

Où les quinze $\mathcal{S}_i^a$ appartiennent à la représentation $\mathbf{20'}$ (à deux colonnes) de SU(4) et sont normalisées par $\text{tr}\left(\mathcal{S}^a \mathcal{S}^b\right) = 16\delta^{ab}$, et où J_s est l'interaction entre les représentations à deux colonnes. Notons que cette construction possède la symétrie SU(4) et qu'elle est sans caractéristique sauf au bord et nous allons voir que, de cet état fondamental, c'en est l'endroit le plus caractéristique du point de vue de la topologie. Ajoutons que les calculs avec les MPS permettent de donner une expression exacte des fonctions de corrélations "spin-spin" :

$$\langle \mathcal{S}_i^a \mathcal{S}_{i+n}^a \rangle = -\frac{8}{5}\delta_{n,0} + \frac{12}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^n \tag{5.215}$$

⟨46⟩. Par exemple, dans le cas connu à N = 2, on sait bien que $\square \otimes \square = \bullet \oplus \square\!\square$, ou dans le cas N = 4 on aura ($\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{15} \oplus \mathbf{20'}$) :



(5.213)

⟨47⟩. Il en existe une infinité qui sont paramétrés, mais il s'agit de celui avec le plus petit ordre en "$\mathcal{S}_{i+1}^a \mathcal{S}_i^a$".
⟨48⟩. Pour les calculs à N plus grand, en utilisant les MPS (*Matrix Product State*) [172], la dimension $d(\text{N})$ de la représentation à deux colonne, qui vaut déjà $d(4) = 20$, vaut $d(6) = 175$ et $d(8) = 1764$, ce qui complique les calculs...

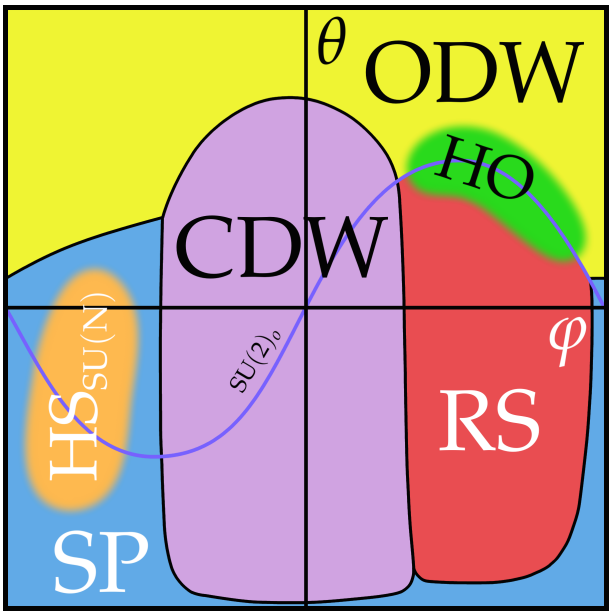


FIGURE 5.10 – Diagramme de phase complet au demi-remplissage, N $>$ 2 (ici N $=$ 4) du modèle de Hund. Les phases obtenues par l'approche de fort couplage, toutes les deux de SPT, à savoir HO et $\mathrm{HS}_{\mathrm{SU(N)}}$, ont des zones (floutées) non-fixées par le faible couplage, car elles émergent à plus fort couplage (voir FIGURE 5.12).

Autrement-dit avec une longueur de corrélation $1/\ln 5 \simeq 0,6213$. Cela dit, posons-nous deux questions : la première est de savoir s'il existe entre les modèles (5.211) et (5.214) un lien plus profond que simplement une apparente ressemblance, et la seconde, est de déterminer si à l'instar de la phase de spin 1 du cas N $=$ 2, la phase à N $>$ 2 possède aussi des propriétés topologiques non-triviales.

Pour répondre à la première question, notons que le spectre d'intrication du hamiltonien $\mathcal{H}(\lambda) = (1-\lambda)\mathcal{H}_{\mathrm{SU(N)}} + \lambda\mathcal{H}_{\mathrm{VBS}}^{(\mathrm{N}=4)}$, a été calculé [173] en utilisant la méthode iTEBD ⟨49⟩ : il a été démontré qu'il existait une continuité entre les fondamentaux de $\mathcal{H}(0)$ (c'est-à-dire (5.211)) et de $\mathcal{H}(1)$ (c'est-à-dire (5.214)) sur tout le chemin $\lambda \in [0,1]$. Concrètement à $\lambda = 0$, le spectre d'intrication présente des niveaux excités avec des représentations plus grandes qu'à une colonne ⟨50⟩ (**6** $=$ $\square$ pour SU(4)), mais toujours à (2 mod 4) boîtes ⟨51⟩. Pour comprendre plus

⟨49⟩. Pour l'anglais *infinite-Time Evolving Block Decimation*.
⟨50⟩. Qui pour autant correspond à la représentation la plus basse énergie.
⟨51⟩. Il s'agit des représentations suivantes :

$$\mathbf{64} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2}\end{array}, \qquad \mathbf{50} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline\end{array}, \qquad \textit{etc.} \tag{5.216}$$

Dans l'idée de la construction AKLT pour SU(N), c'est comme si la représentation de l'état de bord $\square$ se liait à celles $\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline\end{array}$ des états voisins, qui sont toujours à 4 boîtes.

en profondeur ce lien *a priori* étrange, il faut utiliser des résultats de l'approche du *groupe de cohomologie* [174, 175, 176] grâce à laquelle on classifie [177] les différentes phases topologiques en N classes, protégées par la symétrie $\mathrm{PSU(N)} = \mathrm{SU(N)}/\mathbb{Z}_\mathrm{N}$ ⟨52⟩, et qui sont caractérisées par le nombre de boîtes n_y (modulo N) du diagramme de Young de l'état de bord du fondamental : une telle classe est appelée *classe-n_y*. Ainsi, pour le cas $\mathrm{N} = 4$, comme l'état de bord est à 2 boîtes ⟨53⟩, la phase topologique correspondante appartient à la classe-2. De même pour $\mathrm{N} = 2$, les états de bord de spin 1/2 appartiennent à la classe-1.

La réponse à la première question va finalement plus loin que prévu puisqu'elle donne à classifier les différentes phases dont on se demande - et c'est la seconde question - si elles ont des propriétés topologiques non-triviales, et en particulier, pour N quelconque (et pair), puisque c'est la représentation en colonne à N/2 boîtes qui sera l'état de bord, pour la classe-N/2. Il se trouve que la description qu'en permet la classification qui décrit N classes les présente comme des phases topologiques non-triviales, protégées par la symétrie $\mathbb{Z}_\mathrm{N} \times \mathbb{Z}_\mathrm{N} < \mathrm{PSU(N)}$, et possédant même un ordre caché avec des paramères d'ordre non-locaux (donnés dans [3] pour le cas $\mathrm{N} = 4$).

En résumé, et comme on le montre en FIGURE 5.10, nous sommes rendus - à fort couplage ⟨54⟩ - dans cette zone du diagramme à une phase topologique pour N pair ⟨55⟩, que l'on appelle $\mathrm{HS}_{\mathrm{SU(N)}}$ pour l'anglais *Half-filled Spin of* $\mathrm{SU(N)}$ ⟨56⟩, qui est une phase tout à fait héritière de la phase HS du cas $\mathrm{N} = 2$ (voir FIGURE 4.13).

5.2.3 L'approche numérique

Maintenant que l'analyse des phases à été produite, nous allons croiser les résultats des approches de basse et de haute énergies avec l'approche numérique de DMRG ⟨57⟩. Comme pour l'analyse théorique, cette dernière a été réalisée pour un modèle isotrope ⟨58⟩ et avec $\mathrm{N} = 4$, c'est-à-dire 4 atomes par site ⟨59⟩. Les deux degrés orbitaux g et e ont été considérés comme équivalent à deux états d'un pseudospin 1/2. Des conditions aux limites ouvertes avec une

⟨52⟩. Il s'agit du groupe projectif spécial unitaire.
⟨53⟩. C'est la représentation à une colonne $\mathbf{6} = \begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}$. Et l'on note que pour le modèle $\mathcal{H}(0)$, les représentations supplémentaires (5.216) ont également $(2 \mod 4)$ boîtes.
⟨54⟩. Il existe donc une transition de phase depuis le faible couplage (voir FIGURE 5.11) jusqu'au fort couplage, dont on fait la conjecture - pour la raison qu'elle redonne au delà et en deça les bonnes phases [123] - qu'elle est décrite par une théorie conforme des champs $\mathrm{SU(N)}_2$, dont la charge centrale, que nous avions donnée en (3.91), vaut $c = 5$ pour le cas $\mathrm{N} = 4$.
⟨55⟩. Le cas impair est nettement moins trivial, mais la classification en N classe fonctionne de manière identique.
⟨56⟩. De telle sorte que $\mathrm{HS}_{\mathrm{SU(2)}}$ a le mérite de correspondre à HS (*Haldane Spin*).
⟨57⟩. Ces résultats sont aussi le travail de S. Capponi.
⟨58⟩. Avec la symétrie $\mathbb{Z}_2^{g\leftrightarrow e}$, c'est-à-dire, si l'on considère (2.21), $t = t_g = t_e$, $U = U_g = U_e$ et $\mu = \mu_g = \mu_e$.
⟨59⟩. Pour les N plus grands, contrairement aux équations de RG où il suffit de changer la valeur, le DMRG requiert plus de travail.

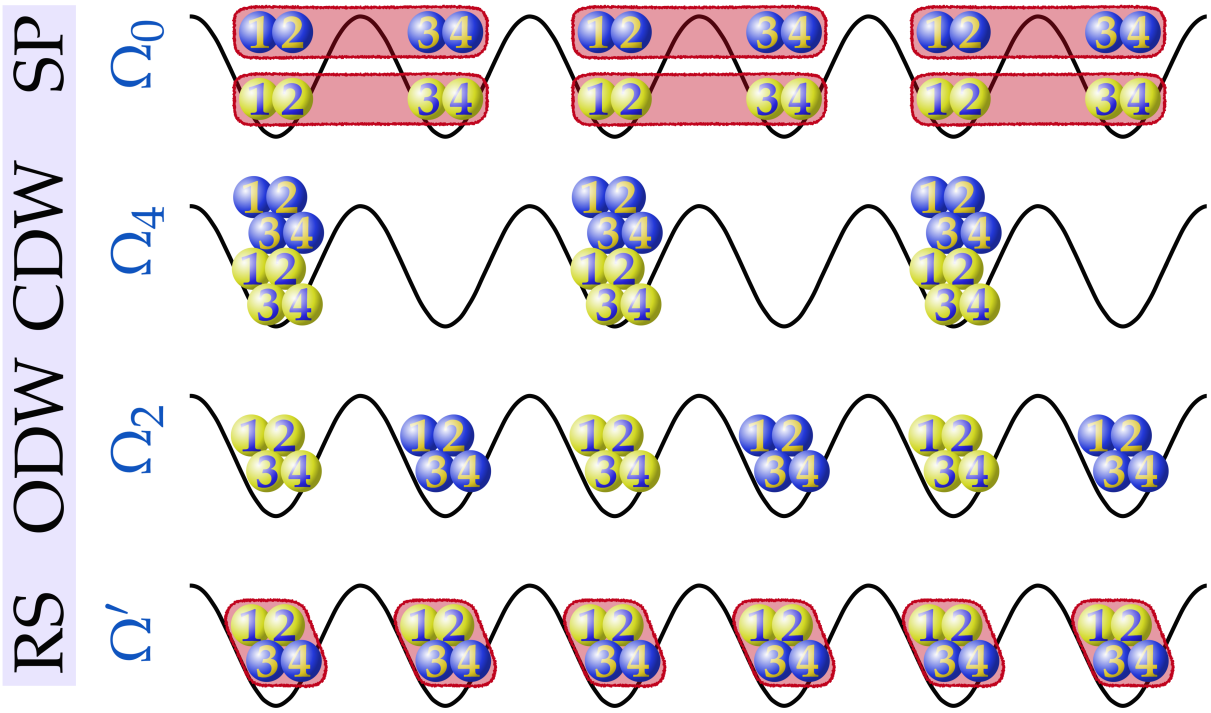


FIGURE 5.11 – Résumé des phases du faible couplage au demi-remplissage à N $>$ 2 (ici N $=$ 4), avec la limite des équations du groupe de renormalisation. Les 2N $=$ 8 degrés sont représentés en **bleu** et **jaune** pour les états g et e respectivement, et les états nucléaires par le nombre $\alpha = 1, 2, 3$ ou 4. L'antisymétrisation des degrés nucléaires (les singulets) est indiquée par les cadres **rouge**.

longueur de chaîne ⟨60⟩ constante de $L = 36$; et entre 2000 et 4000 états ont étés gardés selon les besoins (avec - pour la décomposition de Schmidt - un poids correspondant inférieur à 10^{-6}).

Nous commençons avec le plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$ en imposant $J = J_z$, et notamment avec le modèle de Hund, dont nous montrons le diagramme de phase numérique en FIGURE 5.12 : on la compare au résultat de basse énergie, en FIGURE 5.8, ou sur la ligne **bleu** en FIGURE 5.10, dont on constate - sauf pour le fort couplage - l'adéquation pour les phases SP, CDW et HO (de spin 2 pour N $=$ 4). La nouveauté du fort couplage, à savoir la phase $HS_{SU(N)}$ qui apparaît dans le phase SP du faible couplage pour une large plage du diagramme laisse apercevoir un potentiel d'observation prometteur.

Au delà du plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$, nous vérifions l'accord de la prédiction analytique avec le numérique sur trois plans à J_z constant. Tout d'abord pour $J_z = 0$ en FIGURE 5.13, où il est prédit un accord partout avec le faible couplage, sauf à l'intérieur de la phase SP où émerge la phase topologique $HS_{SU(N)}$. Quant aux plans $J_z \neq 0$, nous en donnons deux en FIGURE 5.14 pour l'analyse de basse énergie et en FIGURE 5.15 pour l'analyse numérique. Nous consta-

⟨60⟩. Ici encore on compte en unité de a_0.

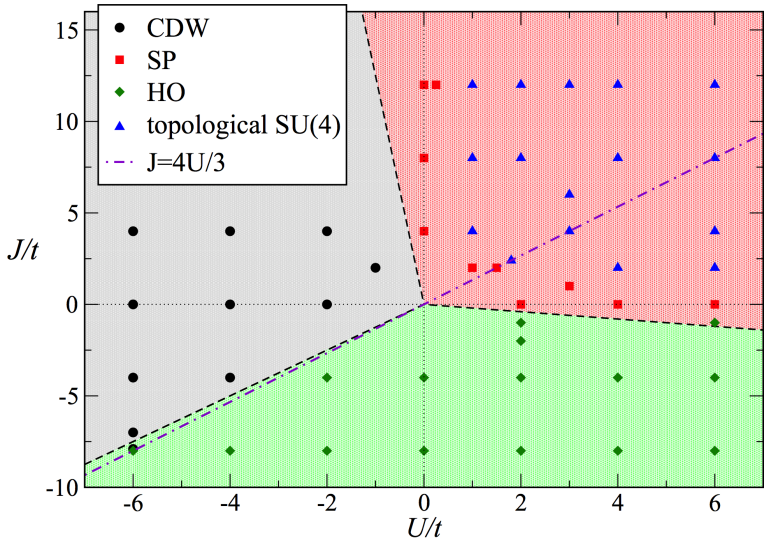


FIGURE 5.12 – Diagramme de phase numérique pour le modèle de Hund sur le plan $SU(2)_o$ au demi-remplissage et à N = 4, obtenu par DMRG avec une longueur de $L = 36$ (publié dans [3]). Les trois zones colorées correspondent aux zones obtenues à faible couplage par les équations du groupe de renormalisation (OH ≡ HO), tandis que - pour la zone à $U, J > 0$ - à fort couplage émerge une nouvelle phase, à savoir la phase topologique $HS_{SU(N)}$, sur une large plage du diagramme de phase.

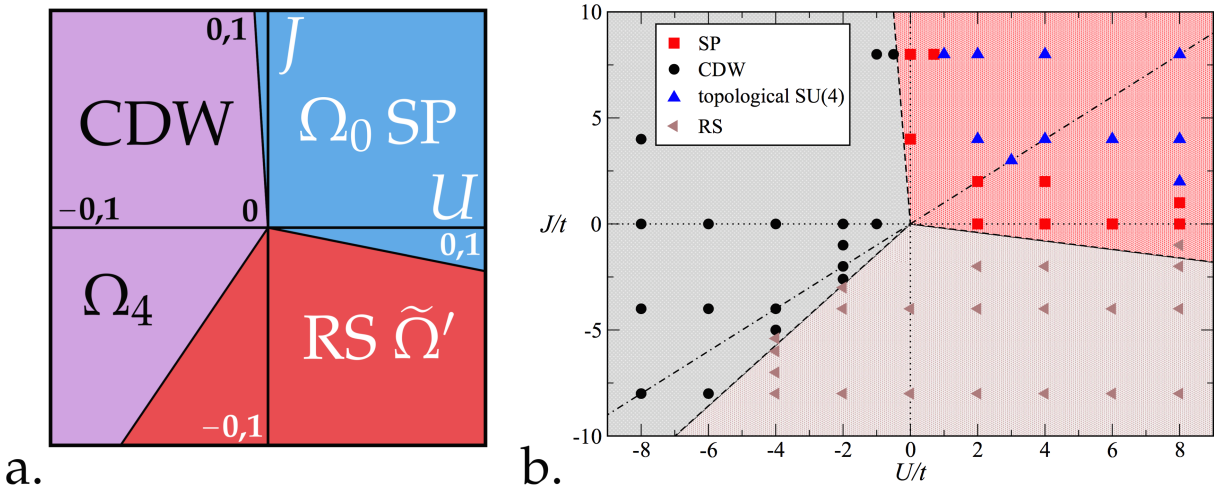


FIGURE 5.13 – Diagrammes de phase du modèle de Hund à N = 4 au demi-remplissage (publié dans [3]), en a., pour l'analyse de basse énergie, en b., pour la résolution numérique. Aux couplages plus importants, la phase SP présente une transition de phase vers la phase topologique $HS_{SU(N)}$ tandis que, contrairement au plan de symétrie orbitale $SU(2)_o$, la phase HO est ici absente, en accord avec la FIGURE 5.10.

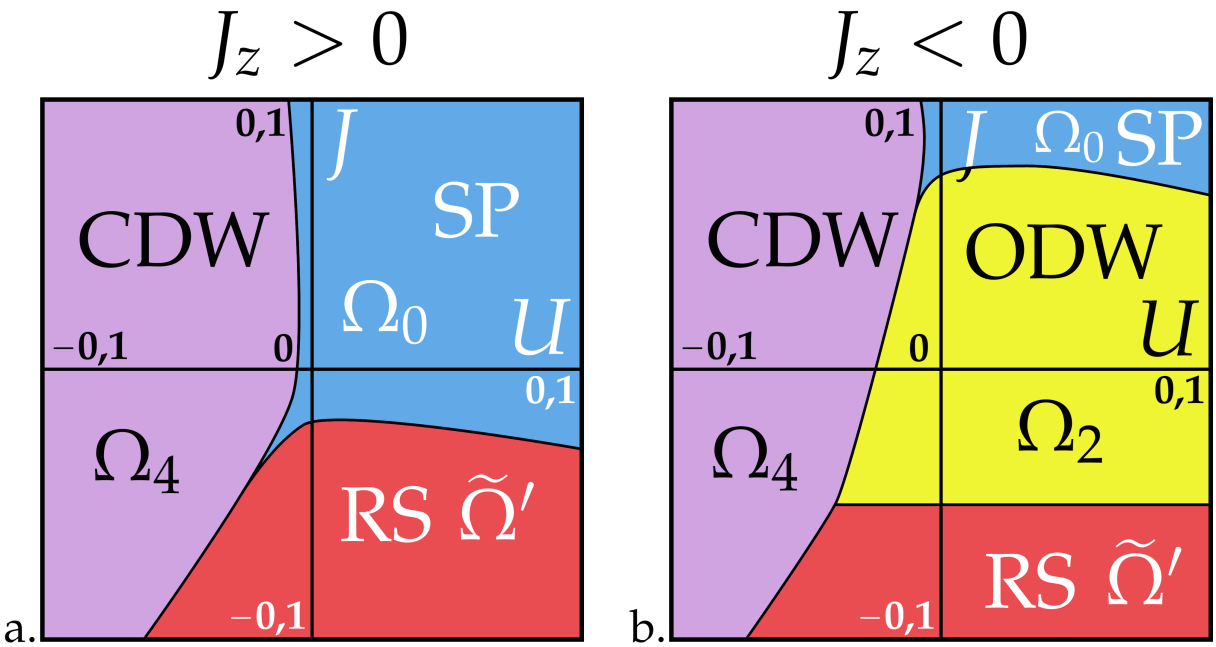


FIGURE 5.14 – Diagrammes de phase de basse énergie du modèle de Hund à N = 4 au demi-remplissage (publié dans [3]), en a., pour $J_z = t > 0$, en b., pour $J_z = -t/2 < 0$.

tons encore un très bon accord, sauf dans le régime de fort couplage où peut encore apparaître la phase topologique $\mathrm{HS}_{\mathrm{SU(N)}}$.

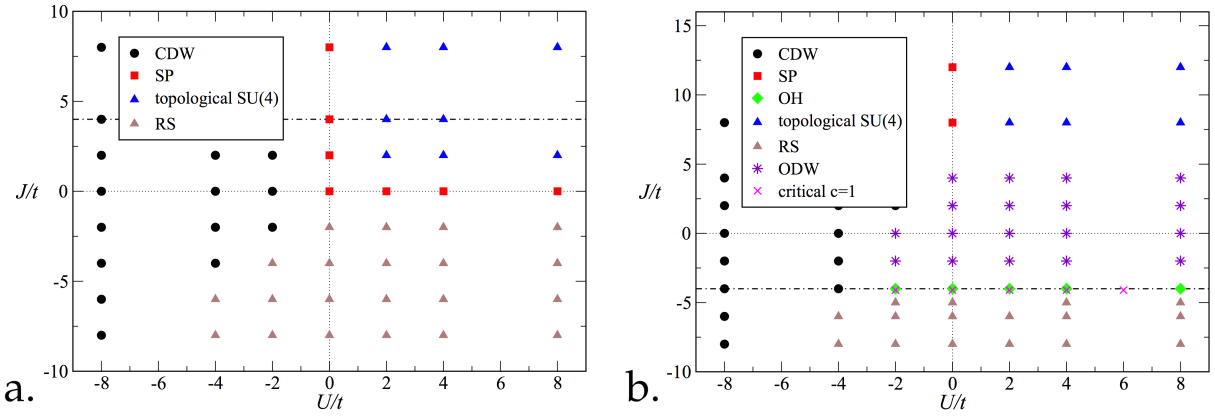


FIGURE 5.15 – Diagrammes de phase issus du DMRG pour le modèle de Hund à N $= 4$ au demi-remplissage (publié dans [3]), en a., pour $J_z = 4t > 0$, en b., pour $J_z = -4t < 0$. Les lignes en pointillés correspondent à la ligne de symétrie orbitale $\mathrm{SU}(2)_o$, *i.e.* $J = J_z$.

Conclusion

Grâce à l'étude du modèle à deux composantes nous sommes bel et bien parvenus à exhiber de nouvelles phases topologiques dans nos modèles d'atomes ultrafroids alcalino-terreux fermioniques à grandes symétries. Pour ce faire nous avons procédé en plusieurs temps : tout d'abord, dans le CHAPITRE 1 nous avons exposé les résultats à propos de la généralisation à tout N du modèle de Hubbard-SU(N) à une composante et en particulier, nous avons constaté qu'aucune phase topologique dans aucun régime d'interaction n'était générée.

C'est pour contourner cette impossibilité que nous avons, en CHAPITRE 2, introduit la seconde orbitale, dont nous avons décrit quelques réalisations physiques et les modèles correspondants : tout d'abord celle la plus naturelle avec les équivalents alcalino-terreux, la stratégie électronique avec les modèles g-e, qui présente le désavantage, avec les états e, d'être expérimentalement dure à conserver et de briser la symétrie d'échange $\mathbb{Z}_2^{g\leftrightarrow e}$ (notamment $t_g > t_e$, avec cette tendance des états e d'être sensiblement moins mobiles que les états g), ce qui nous a mené à la stratégie harmonique avec le modèle p-band, qui utilise les niveaux les deux deuxièmes niveaux du puits harmonique qui confine les atomes dans le plan perpendiculaire à l'axe du réseau. Malheureusement pour la réalisation physique, l'existence des premiers niveaux du puits harmonique produit des complications expérimentales. Finalement, pour s'affranchir de ces difficultés, nous avons proposé la stratégie géométrique, avec les modèles d'échelle et de double-puits, où il s'agit tout simplement d'accoler deux chaînes à une orbitale, sans considération pour les niveaux électroniques et harmoniques.

Dans un troisième temps, dans le CHAPITRE 3, nous avons développé les outils pour la technique principale de cette thèse : le faible couplage, tout d'abord en montrant que la théorie libre admettait à la limite continue la symétrie conforme, à laquelle nous avons relié des notions de théorie conforme des champs, d'algèbre d'opérateurs *via* les OPE, *etc.*, tout ces outils que nous avons utilisés pour renormaliser nos modèles à basse énergie grâce au groupe de renormalisation perturbatif, et quand cela n'était pas possible, nous avons aussi introduit la bosonisation, abélienne et non-abélienne.

Enfin, dans un dernier temps, dans les CHAPITRE 4 et CHAPITRE 5, nous avons mis en application ces outils, premièrement pour $\mathrm{N} = 2$, ou nous avons déterminé les diagrammes de

phase, où, selon le remplissage, nous avons trouvé tous types de phases : des phases supraconductrices (cas incommensurable), des phases de Mott (dans tous les cas avec de la commensurabilité) dont des phases topologiques - avec un ordre caché et des états de bord - du type phase de Haldane, mais de structure plus riche - en spin, en pseudo-spin, en charge - grâce à l'introduction de la seconde orbitale. Enfin, deuxièmement, la même analyse a été produite pour $N > 2$ (au remplissage incommensurable et demi-remplissage), et si nous n'avons pas trouvé de phases supraconductrices de paires, l'étude du demi-remplissage nous a permis de mettre en avant une phase de Haldane de spin $N/2$, la phase HO généralisée (au demi-remplissage), mais aussi, plus intéressant encore, et sur une assez grande région du diagramme de phase, une nouvelle phase topologique (avec ordre caché et des états de bord) faisant directement intervenir une représentation irréductible de $SU(N)$ (avec N pair) : la phase $HS_{SU(N)}$, qui est la généralisation à tout N de la phase de Haldane de spin 1 du cas $N = 2$ (HS).

Cette étude laisse finalement apparaître la grande variété de phases, exotiques ou moins exotiques, que permettent les systèmes d'alcalino-terreux fermioniques à une dimension. Et la recherche expérimentale n'est pas en reste pour parvenir à les découvrir : voilà déjà plus d'une demi-décennie que - comme le décrivait déjà H. Nonne dans sa thèse [4] - l'on sait réaliser des systèmes d'alcalino-terreux fermioniques de haute symétrie [70, 178]. Cette quête s'est poursuivie durant l'année 2014 avec la réalisation de chaînes à une orbitale où l'on a constaté expérimentalement la présence de la symétrie $SU(N)$. Même s'il existe de récentes percées, notamment sur la réalisation et le contrôle de la seconde orbitale [179], à l'heure actuelle, la réalisation de systèmes tels que ceux décrits dans ce travail, n'est pas une réalité : le travail à réaliser pour atteindre les températures requises à basse énergie reste conséquent.

Quant à la poursuite de l'étude des systèmes d'alcalino-terreux fermioniques à une dimension, plusieurs pistes se présentent : tout d'abord l'étude à $N > 2$ du modèle de double-puits - expérimentalement sain - laisse entrevoir l'observation de phases très exotiques et notamment au demi-remplissage. Ensuite l'étude des effets de la parité de N, considérée paire dans ce travail, qui peut se réaliser expérimentalement en vidant une composante du spin nucléaire [180]. La détermination d'effet pair/impair dans ces modèles de haute symétrie, comme par exemple la compréhension de l'équivalent du modèle - et notamment la représentation - de la phase $HS_{SU(N)}$ pour N impair est un travail intéressant et délicat qu'il faut réaliser. Enfin pour aller un cran plus loin que ce travail : pour tenter de comprendre la limite entre l'unidimensionnel et le bidimensionnel, et parce qu'enrichir le modèle d'une orbitale nous a été salutaire en élargissant les structures possibles des phases, étudier des systèmes avec plus de deux orbitales, en commençant par trois, dans des modèles du type échelle.

Publications

— V. Bois, S. Capponi, P. Lecheminant, M. Moliner, et K. Totsuka,
Phase diagrams of one-dimensional half-filled two-orbital SU(N) *cold fermion systems*,
Physical Review B **91**, 075121 (2015), 36 pages ;

— V. Bois, S. Capponi, P. Lecheminant, et M. Moliner,
Competing superconducting instabilities in the one-dimensional p-band degenerate cold fermionic system,
Physical Review B **92**, 075140 (2015), 11 pages ;

— V. Bois, P. Fromholz, et P. Lecheminant,
One-dimensional two-orbital SU(N) *ultracold quantum gases at incomensurate filling : A low-energy approach*,
Physical Review B **93**, 134415 (2016), 11 pages.

Annexe A

Dictionnaires des modèles

Nous commençons par définir les 5 modèles étudiés, à savoir, dans l'ordre (nous noterons respectivement les modèles I, II, III, IV et V), le modèle g-e, le modèle de Hund, le modèle p-band, le modèle d'échelle, et le modèle d'échelle avec un terme perpendiculaire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\text{int.}}_{g\text{-}e} &= \frac{U}{2}\sum_{i,\ell} n_{\ell,i}(n_{\ell,i}-1) + V\sum_i n_{g,i}n_{e,i} + V_{\text{ex}}\sum_{i,m,n} c^\dagger_{gm,i}c^\dagger_{en,i}c_{gn,i}c_{em,i} \\
\mathcal{H}^{\text{int.}}_{\text{Hund}} &= \frac{U}{2}\sum_i n_i^2 + J\sum_i\left[(T_i^x)^2+(T_i^y)^2\right] + J_z\sum_i (T_i^z)^2 \\
\mathcal{H}^{\text{int.}}_{p\text{-band}} &= \frac{U_1+U_2}{4}\sum_i n_i^2 + \sum_i\left(2U_2(T_i^x)^2 + (U_1-U_2)(T_i^z)^2\right) \\
\mathcal{H}^{\text{int.}}_{\text{échelle}} &= \frac{U}{2}\sum_{i,\ell} n_{\ell,i}^2 + V\sum_i n_{1,i}n_{2,i} + J_H\sum_i S^A_{1,i}S^A_{2,i} \\
\mathcal{H}^{\text{int.}}_{\text{échelle}\perp} &= \frac{\widetilde{U}}{2}\sum_{p,i} n_{p,i}^2 + \widetilde{V}\sum_i n_{1,i}n_{2,i} + \widetilde{J}_H\sum_i S^A_{1,i}S^A_{2,i} + \widetilde{W}\sum_{p,i} d^\dagger_{p\alpha,i}d^\dagger_{p\beta,i}d_{\bar{p}\beta,i}d_{\bar{p}\alpha,i}
\end{aligned}$$

Pour définir un vrai dictionnaire entre deux modèles il faut deux conditions : d'abord que les deux modèles soient équivalents (qu'ils décrivent les mêmes processus physiques) et ensuite qu'ils aient le même nombre de paramètres d'interaction. Cela dit, trois modèles satisfont à ces deux conditions, les modèles I, II et IV : en effet le modèle III possède un paramètre en moins et décrit un processus supplémentaire et le modèle V possède un couplage et un processus supplémentaire (qui est celui du modèle III). Ainsi, là où l'on pouvait espérer 20 vrais dictionnaires (il y a 5 modèles, donc $C_5^2 = 10$ couples de modèles, soit $2 \times 10 = 20$ dictionnaires, puisqu'il faut écrire les relations dans les deux sens), nous nous retrouverons avec des faux dictionnaires (lorsques les modèles ne décrivent pas les même processus) ou bien des demi-dictionnaires (lorsqu'il n'y a pas le même nombre de paramètre d'interaction).

Les modèles I & II

Pour ces deux modèles, le dictionnaire ne pose aucun problème et nous avons, de I vers II :

$$U = \frac{U_{g\text{-}e} + V}{2} \tag{A.1}$$

$$J = V_{\text{ex}} \tag{A.2}$$

$$J_z = U_{g\text{-}e} - V \tag{A.3}$$

De II vers I :

$$U_{g\text{-}e} = U + \frac{J_z}{2} \tag{A.4}$$

$$V = U - \frac{J_z}{2} \tag{A.5}$$

$$V_{\text{ex}} = J \tag{A.6}$$

Les modèles I & III

Pour ces deux modèles, le dictionnaire ne peut être écrit que de I vers III, et pour les processus qui se correspondent (ceux qui ne brisent pas $\mathrm{U}(1)_o$) :

$$U_1 = U_{g\text{-}e} \tag{A.7}$$

$$U_2 = V \tag{A.8}$$

$$U_2 = V_{\text{ex}} \tag{A.9}$$

Les modèles I & IV

Pour ces deux modèles, le dictionnaire ne pose aucun problème et nous avons, de I vers IV :

$$U_{g\text{-}e} = U \tag{A.10}$$

$$V = V - \frac{V_{\text{ex}}}{\mathrm{N}} \tag{A.11}$$

$$J_H = -2V_{\text{ex}} \tag{A.12}$$

De IV vers I :

$$U_{g\text{-}e} = U \tag{A.13}$$

$$V = V - \frac{J_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.14}$$

$$V_{\mathrm{ex}} = -\frac{J_H}{2} \tag{A.15}$$

Les modèles I & V

Pour ces deux modèles, le dictionnaire pose un problème d'analogie (plus des problèmes de processus et du nombre de paramètres) : ce sont dans des degrés que sont écrits les hamiltoniens. Il y a donc deux stratégies, soit récrire les modèles en considérant que $c^\dagger \equiv d^\dagger$, soit en récrivant le modèle V dans les degrés initiaux et faire l'équivalence. Dans la première stratégie nous avons, de I vers V :

$$\widetilde{U} = U \tag{A.16}$$

$$\widetilde{V} = V - \frac{V_{\mathrm{ex}}}{\mathrm{N}} \tag{A.17}$$

$$\widetilde{J}_H = -2V_{\mathrm{ex}} \tag{A.18}$$

De V vers I :

$$U = \widetilde{U} \tag{A.19}$$

$$V = \widetilde{V} - \frac{\widetilde{J}_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.20}$$

$$V_{\mathrm{ex}} = -\frac{\widetilde{J}_H}{2} \tag{A.21}$$

Les modèles II & III

Pour ces deux modèles, le dictionnaire ne peut être écrit que de II vers III, et pour les processus qui se correspondent (ceux qui ne brisent pas $\mathrm{U}(1)_o$) :

$$U_1 = U + \frac{J_z}{2} \tag{A.22}$$

$$U_2 = U - \frac{J_z}{2} \tag{A.23}$$

$$U_2 = J_z \tag{A.24}$$

Les modèles II & IV

Pour ces deux modèles, il y a équivalence totale, ansi, de IV de vers II :

$$U_{\text{Hund}} = \frac{U+V}{2} - \frac{J_H}{4\mathrm{N}} \tag{A.25}$$

$$J = -\frac{J_H}{2} \tag{A.26}$$

$$J_z = U - V + \frac{J_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.27}$$

Et de II vers IV :

$$U = U_{\text{Hund}} + \frac{J_z}{2} \tag{A.28}$$

$$V = U_{\text{Hund}} - \frac{J_z}{2} - \frac{J}{\mathrm{N}} \tag{A.29}$$

$$J_H = -2J \tag{A.30}$$

$$\tag{A.31}$$

Les modèles II & V

Pour ces deux modèles, il n'y a pas équivalence (le terme $\widetilde{W}$ brise la symétrie orbitale), et procédant d'une analogie entre modèles exprimés dans des degrés différents, nous écrivons le

dictionnaire que des degrés V de vers II :

$$U = \frac{\widetilde{U}+\widetilde{V}}{2} - \frac{\widetilde{J}_H}{4\mathrm{N}} \tag{A.32}$$

$$V = -\frac{\widetilde{J}_H}{2} \tag{A.33}$$

$$J_z = \widetilde{U} - \widetilde{V} + \frac{\widetilde{J}_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.34}$$

Et de II vers V :

$$\widetilde{U} = U + \frac{J_z}{2} \tag{A.35}$$

$$\widetilde{J} = U - \frac{J_z}{2} - \frac{V}{\mathrm{N}} \tag{A.36}$$

$$\widetilde{J}_H = -2J \tag{A.37}$$

$$\tag{A.38}$$

Les modèles III & IV

Il n'y a pas équivalence entre les modèles III et IV qui n'ont pas le même nombre de paramètres et qui n'impliquent pas les mêmes processus. Nous écrivons alors un dictionnaire de IV vers III :

$$U_1 = U \tag{A.39}$$

$$U_2 = V - \frac{J_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.40}$$

$$U_2 = U - V + \frac{J_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.41}$$

Les modèles III & V

Il n'y a pas équivalence entre les modèles III et IV qui n'ont pas le même nombre de paramètres et qui n'impliquent pas les mêmes processus. Nous écrivons alors un dictionnaire de IV

vers III :

$$U_1 = \widetilde{U} \tag{A.42}$$

$$U_2 = V - \frac{\widetilde{J}_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.43}$$

$$U_2 = U - V + \frac{\widetilde{J}_H}{2\mathrm{N}} \tag{A.44}$$

Les modèles IV & V

Les deux modèles sont inéquivalents à cause du processus et du paramètre d'interaction suplémentaires, nous donnons alors une moitiée de dictionnaire de IV vers V (et qui n'est pas issu d'une analogie des modèles mais d'un lien entre les degrés des deux modèles) :

$$\widetilde{U} = \frac{U}{2} + \frac{V}{2} - \frac{\mathrm{N}+1}{4\mathrm{N}} J_H \tag{A.45}$$

$$\widetilde{V} = \frac{\mathrm{N}-1}{2\mathrm{N}} U + \frac{\mathrm{N}+1}{2\mathrm{N}} V + \frac{\mathrm{N}^2-1}{4\mathrm{N}^2} J_H \tag{A.46}$$

$$\widetilde{J}_H = -U + V + \frac{\mathrm{N}-1}{2\mathrm{N}} J_H \tag{A.47}$$

$$\widetilde{W} = \frac{U}{4} - \frac{V}{4} + \frac{\mathrm{N}+1}{8\mathrm{N}} J_H \tag{A.48}$$

Annexe B

Décomposition des termes à quatre fermions dans les opérateurs d'interaction

Nous donnons ici la décomposition de termes typiques issus de la décomposition des termes à quatre fermions qui apparaîssent dans lors du passage à la limite continue, à commencer par les termes réguliers, dans les opérateurs d'interaction (3.94, ..., 3.101) :

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{m\beta} R^\dagger_{m\beta} R_{m\alpha} = O_1 + 2O_3 + \frac{2}{\mathrm{N}} O_6 + \frac{1}{2\mathrm{N}} O_8 \tag{B.1}$$

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{m\beta} R^\dagger_{\overline{m}\beta} R_{\overline{m}\alpha} = O_1 - 2O_3 - \frac{2}{\mathrm{N}} O_6 + \frac{1}{2\mathrm{N}} O_8 \tag{B.2}$$

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{m\alpha} R^\dagger_{m\beta} R_{m\beta} = 2O_6 + \frac{1}{2} O_8 \tag{B.3}$$

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{m\alpha} R^\dagger_{\overline{m}\beta} R_{\overline{m}\beta} = -2O_6 + \frac{1}{2} O_8 \tag{B.4}$$

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{\overline{m}\beta} R^\dagger_{\overline{m}\beta} R_{m\alpha} = 2\big(O_2 + O_4\big) + \frac{2}{\mathrm{N}} \big(O_5 + O_7\big) \tag{B.5}$$

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{\overline{m}\alpha} R^\dagger_{\overline{m}\beta} R_{m\beta} = 2\big(O_5 + O_7\big) \tag{B.6}$$

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{\overline{m}\beta} R^\dagger_{m\beta} R_{\overline{m}\alpha} = 2\big(O_2 - O_4\big) + \frac{2}{\mathrm{N}} \big(O_5 - O_7\big) \tag{B.7}$$

$$\sum_m L^\dagger_{m\alpha} L_{\overline{m}\alpha} R^\dagger_{m\beta} R_{\overline{m}\beta} = 2\big(O_5 - O_7\big) \tag{B.8}$$

Notons que cette écriture permet fait appaître certaines structures : entre (B.1, B.2) et (B.3, B.4) où l'on passe d'une structure en spin à une en charge ; entre (B.1,B.3) et (B.2, B.4), où l'intervention des deux degrés orbitaux fait intervenir un signe ; entre (B.5, B.7) et (B.6, B.8) où la

non conservation orbitale associée à la composante T^z fait également intervenir un signe. Puis nous donnons les termes d'Umklapp, dans les opérateurs d'interaction (3.110, ... , 3.113) :

$$\sum_m \left(L^\dagger_{m\alpha} L^\dagger_{\overline{m}\beta} R_{m\beta} R_{\overline{m}\alpha} + L_{\overline{m}\alpha} L_{m\beta} R^\dagger_{\overline{m}\beta} R^\dagger_{m\alpha} \right) = -2O_9 + 2O_{11} \tag{B.9}$$

$$\sum_m \left(L^\dagger_{m\alpha} L^\dagger_{\overline{m}\beta} R_{\overline{m}\beta} R_{m\alpha} + L_{\overline{m}\alpha} L_{m\beta} R^\dagger_{m\beta} R^\dagger_{\overline{m}\alpha} \right) = 2O_9 + 2O_{11} \tag{B.10}$$

$$\sum_m \left(L^\dagger_{m\alpha} L^\dagger_{m\beta} R_{m\beta} R_{m\alpha} + L_{m\alpha} L_{m\beta} R^\dagger_{m\beta} R^\dagger_{m\alpha} \right) = 2\big(O_{10} + O_{12}\big) \tag{B.11}$$

$$\sum_m \left(L^\dagger_{m\alpha} L^\dagger_{m\beta} R_{\overline{m}\beta} R_{\overline{m}\alpha} + L_{m\alpha} L_{m\beta} R^\dagger_{\overline{m}\beta} R^\dagger_{\overline{m}\alpha} \right) = 2\big(O_{12} - O_{10}\big) \tag{B.12}$$

Ces décompositions sont très utiles pour trouver les conditions initiales "$g_i(\ell = 0)$" des équations de RG, qui ne sont rien d'autre que la théorie initiale.

Annexe C

Informations pratiques sur SU(n)

Le groupe $\mathrm{SU}(n)$ est un groupe de Lie d'ordre n^2-1 à la topologie triviale (connexe et simplement connexe). L'algèbre $\mathfrak{su}(n)$ est construite - dans une représentation $\mathcal{R}$ - à l'aide des générateurs $\left\{T^a_{\mathcal{R}}\right\}_{a\in[\![1,n^2-1]\!]}$ de trace nulle : $\mathrm{tr}\, T^A_{\mathcal{R}} = 0$, et qui satisfont les relations de commutation suivantes :

$$\left[T^a_{\mathcal{R}}\,,T^b_{\mathcal{R}}\right] \;=\; if^{abc}T^c_{\mathcal{R}} \tag{C.1}$$

Où la suite complètement antisymétrique sur ces trois indices f^{abc} caractérise localement le groupe et satisfait la relation suivante :

$$f^{cda}f^{cdb} = g\delta^{ab} \tag{C.2}$$

Avec g qui définit le *nombre de Coxeter*, et qui vaut $g = n$ dans ce cas. Les générateurs satisfont également des relations d'anticommutation :

$$\left\{T^a_{\mathcal{R}}\,,T^b_{\mathcal{R}}\right\} \;=\; \frac{\delta^{ab}}{n} + d^{abc}T^c_{\mathcal{R}} \tag{C.3}$$

Et où la suite complètement symétrique d^{abc} satisfait la relation :

$$d^{cda}d^{cdb} = \frac{n^2-4}{n}\delta^{ab} \tag{C.4}$$

Si bien que le produit $T^a_{\mathcal{R}}T^b_{\mathcal{R}}$ se décompose comme :

$$T^a_{\mathcal{R}}T^b_{\mathcal{R}} = \frac{\delta^{ab}}{2n} + \frac{d^{abc}+if^{abc}}{2}T^c \tag{C.5}$$

Et de telle manière que l'on a, en introduisant $\dim\mathcal{R}$ la dimension de l'espace de la repré-

sentation $\mathcal{R}$:

$$\operatorname{tr} T^a_{\mathcal{R}} T^b_{\mathcal{R}} = \frac{\dim \mathcal{R}}{2n} \delta^{ab} \tag{C.6}$$

Les représentations irréductibles de $\mathrm{SU}(n)$ se fabriquent à l'aide de la fondamentale - de dimension n, de générateurs T^a - et notée par son tableau de Young $\square$ qui satisfont l'identité suivante :

$$T^a_{\alpha\beta} T^a_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{n} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \right) \tag{C.7}$$

Bibliographie

[1] S. Capponi et G. Roux et P. Lecheminant et P. Azaria et É. Boulat et S. R. White. Molecular superfluid phase in systems of one-dimensional multicomponent fermionic cold atoms. *Physical Review A*, ***77***, *013624*, 2008.

[2] V. Bois et S. Capponi et P. Lechminant et M. Moliner. Competing superconducting instabilities in the one-dimensional p-band degenerate cold fermionic system. *Physical Review B*, ***92***, *075140*, 2015.

[3] V. Bois et S. Capponi et P. Lechminant et M. Moliner et K. Totsuka. Phase diagrams of a one-dimensional half-filled two-orbital SU(N) cold fermion systems. *Physical Review B*, ***91***, *075121*, 2015.

[4] *Thèse sur les Phases isolantes de Mott des atomes froids fermioniques unidimensionnels à plusieurs composantes*. H. Nonne, 2011.

[5] V. Bois et P. Fromholz et P. Lechminant. One-dimensional two-orbital SU(n) ultracold quantum gases at incommensurate filling : A low-energy approach. *Physical Review B*, ***92***, *075140*, 2015.

[6] L. Landau. Theory of Fermi liquids. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, ***30***, *1058*, 1966.

[7] *Le problème à N corps : propriétés générales des gaz de fermions, Dunod*. P. Nozières, 1963.

[8] *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Mechanics, Dover Publication*. A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski, 1975.

[9] *Theory of Interacting Fermi Systems, New York : Benjamin, W. A*. P. Nozières, 1964.

[10] *The Theory of Quantum Liquids, New York : Benjamin, W. A*. D. Pines et P. Nozières, 1966.

[11] J. G. Bednorz et K. A. Müller. Possible high Tc superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, ***64***, *189*, 1986.

[12] *The Theory of Superconductivity in High-T_c Cuprates, Princeton Series in Physics*. P. W. Anderson, 1997.

[13] N. Mott et R. Pierls. Discussion of the paper by de Boer and Vervwey. *Proceedings of the Physical Society*, ***49***, *72*, 1937.

[14] J. H. De Boer et E. J. W. Verwey. Semi-conductors with partially and with completely filled 3D-lattice bands. *Proceedings of the Physical Society*, ***49***, *59*, 1937.

[15] N. D. Mermin et H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Physical Review Letters*, ***17***, *1133*, 1966.

[16] D. C. Tsui et H. L. Stormer et A.C. Gossard. Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit. *Physical Review Letters*, ***48***, *1559*, 1982.

[17] F. Wilczek. Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles. *Physical Review Letters*, ***49***, *957*, 1982.

[18] D. Arovas et J. R. Schrieffer et F. Wilczek et A. Zee. Statistical mechanics of anyons. *Nuclear Physics B*, ***251***, *117*, 1985.

[19] V. J. Goldman et B. Su. Resonant tunneling in the quantum Hall regime : measurement of fractional charge. *Nature*, ***267***, *1010*, 1995.

[20] L. Saminadayar et D. C. Glattli et Y. Jin et B. Etienne. Observation of the $e/3$ Fractionally Charges Laughlin Quasiparticule. *Physical Review Letters*, ***79***, *2526*, 1997.

[21] K. S. Novoselov et A. K. Geim et S. V. Morozo et D. Jiang et Y. Zhang et S. V. Dubonos et I. V. Grigorieva et A. A. Firsov. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. *Science*, ***306***, *5696*, 2004.

[22] P. R. Wallace. The band theory of graphite. *Physical Review*, ***71***, *622*, 1947.

[23] C. Berger et Z. M. Song et X. B. Li et X. S. Wu et N. Brown et C. Naud et D. Mayou et T. B. Li et J. Hass et A. N. Marchenkov et E. H. Conrad et P. N. First et W. A. de Heer. Electronic confinement and coherence in patterned epitaxial graphene. *Science*, ***312***, *1191*, 2006.

[24] A. H. Castro Neto et F. Guinea et N. M. R. Peres et K. S. Novoselov et A. K. Geim. Electronic confinement and coherence in patterned epitaxial graphene. *Review of Modern Physics*, ***81***, *109*, 2009.

[25] LV. Radushkevish et VM. Lukyanovich. About the structure of carbon formed at thermal deposition of carbon monoxide on contact with iron. *Soviet Journal of Physical Chemistry*, ***26***, *88*, 1952.

[26] S. Iijima. Helical microtubes of graphitic carbon. *Nature*, ***354***, *56*, 1991.

[27] R. Egger et A. O. Gogolin. Effective Low-Energy Theory for Correlated Carbon Nanotubes. *Physical Review Letters*, ***79***, *5082*, 1997.

[28] *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, *Cambridge University Press*. S. Datta, 1995.

[29] C. Bourbonnais et D. Jerome. The normal phase of quasi-one-dimensional organic superconductors. *arXiv :cond-mat/9903101v1, publié dans Synthetic metals (éditions Elsevier, 1999)*.

[30] B. Lake et D. A. Tennant et S. E. Nagler. A Novel Longitudinal Mode in the Coupled Quantum Chain Compound KCuF3. *Physical Review Letters*, ***85***, *823*, 1999.

[31] B. Lake et D. A. Tennant et J.-S. Caux et T. Barthel et U. Schollwöck et S. E. Nagler et C. D. Frost. Multispinon Continua at Zero and Finite Temperature in a Near-Ideal Heisenberg Chain. *Physical Review Letters*, ***111***, *137205*, 2013.

[32] F. D. M. Haldane. Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to general 1D interacting spinless Fermi gas. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, ***14***, *2585*, 1981.

[33] *Quantum Physics in One Dimension, Clarendon Press (Oxford)*. T. Giamarchi, 2004.

[34] H. Bethe. On The Theory of Metals, I. Eigenvalues and Eigenfunctions of a Linear Chain of Atoms. *Zeitschrift für Physik*, ***71***, *205*, 1931.

[35] A. Belavin et A. Polyakov et A. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, ***241***, *333*, 1984.

[36] S. Coleman. Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model. *Physical Review D*, ***11***, *2088*, 1975.

[37] S. Mandelstam. Comments and Addenda on Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation. *Physical Review D*, ***11***, *3026*, 1975.

[38] *Bosonization and Strongly Correlated Systems, Cambridge University Press*. A. Gogolin et A. Nersesyan et A. Tsvelik, 1998.

[39] S. White. Density-matrix formulation for quantum renormalization groups. *Physical Review Letters*, ***69***, *2863*, 1992.

[40] S. White. Density-matrix algorithms for quantum renormalization groups. *Physical Review B*, ***48***, *10345*, 1993.

[41] U. Schollwöck. The density-matrix renormalization group. *Reviews of Modern Physics*, ***77***, *259*, 2005.

[42] *Elements of Quantum Computation and Quantum Communication, CRC Press*. A. Pathak, 2013.

[43] I. Affleck et T. Kennedy et E. H. Lieb et H. Tasaki. Rigorous Results on Valence-Bond Ground States in Antiferromagnets. *Physical Review Letters*, ***59***, *799*, 1987.

[44] R. Orus. A Pratical Introduction to Tensor Networks : Matrix Product States and Projected Entangled Pair States. *Annals of Physics*, ***349***, *177*, 2014.

[45] F. D. M. Haldane. Nonlinear field theory of large-spin Heisenberg antiferromagnets : semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Néel state. *Physical Review Letters*, ***50***, *1153*, 1983.

[46] A. Meyer et A. Gleizes et J. J. Girerd et M. Versaguer et O. Kahn. Crystal structures, magnetic properties, and orbital interaction in catena-μ-nitrito (1,2-diaminoethane) nickel(II) perschlorato triiodide. *Inorganic Chemistry*, ***21***, *1729*, 1982.

[47] I. Affleck et T. Kennedy et E. H. Lieb et H. Tasaki. Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets. *Communications in Mathematical Physics*, ***115***, *477*, 1988.

[48] A. Garcia-Saez et V. Murg et T-C. Wei. Spectral gaps of AKLT Hamiltonians using Tensor Network methods. *Physical Review B*, ***88***, *245118*, 2013.

[49] M. den Nijs et K. Rommelse. Preroughening transitions in crystal surfaces and valence-bond phases in quantum spin chains. *Physical Review B*, ***40***, *4709*, 1989.

[50] T. Senthil. Symmetry Protected Topological phases of Quantum Matter. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, ***6***, *299*, 2015.

[51] E. Berg et E. G. Dalla Torre et T. Giamarchi et E. Altman. Rise and fall of hidden string order of lattice bosons. *Physical Review B*, ***77***, *24119*, 2008.

[52] Z.-C. Gu et X.-G. Wen. Tensor-entaglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order. *Physical Review B*, ***80***, *155131*, 2009.

[53] F. Pollmann et E. Berg et A. M. Turner et M. Oshikawa. Symmetry protection of topological phases in one-dimensional quantum spin systems. *Physical Review B*, ***85***, *075125*, 2012.

[54] E. H. Lieb et F. Y. Wu. Absence of Mott Transition in an Exact Solution of the Short Range, One Band Model in One Dimension. *Physical Review Letters*, ***20***, *1445*, 1968.

[55] *The One-Dimensionnal Hubbard moddel, Cambridge University Press*. F. H. L. Essler et H. Frahm et F. Göhmann et A. Klümper et V. E. Korepin, 1995.

[56] A. Luther et V. Emery. Backward scattering in the one-dimensional electron gas. *Physical Review Letters*, ***33***, *589*, 1974.

[57] H. Shiba. Thermodynamic Properties of The One-Dimensional Half-Filled-Band Hubbard Model. II. *Progress of Theoretical Physics*, ***48***, *2171*, 1972.

[58] V. J. Emery. Theory of the quasi-one-dimensional electron gas with strong "on-site" interactions. *Physical Review B*, ***14***, *2989*, 1976.

[59] *Laser Cooling and Trapping, Springer*. H. J. Metcalf et P. van der Straten, 1999.

[60] I. Bloch. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Physics*, ***1***, *23*, 2005.

[61] M. H. Anderson et J. R. Ensher et M. R. Matthews et C. E. Wieman et E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, ***269***, *198*, 1995.

[62] K. B. Davis et M. O. Mewes et M. R. Andrews et N. J. Van Druten et D. S. Durfree et D. M. Kurn et W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a gas of Sodium Atoms. *Physical Review Letters*, ***75***, *3969*, 1995.

[63] B. DeMarco et D. S. Jin. Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas. *Science*, ***285***, *1703*, 1999.

[64] C. Wu et J.-P. Hu et S.-C. Zhang. Exact SO(5) Symmetry in spin 3/2 fermionic system. *Physical Review Letters*, ***91***, *186402*, 2003.

[65] P. Lecheminant et É. Boulat et P. Azaria. Confinement and Superfluidity in One-Dimensional Degenerate Fermionic Cold Atoms. *Physical Review Letters*, ***95***, *240402*, 2005.

[66] C. Honerkamp et W. Hofstetter. Ultracold Fermions and the SU(N) Hubbard model. *Physical Review Letters*, ***91***, *186402*, 2003.

[67] P. Azaria et S. Capponi et P. Lecheminant. Three-component Fermi gaz in a one-dimensional optical lattice. *Physical Review A*, ***80***, *041604(R)*, 2009.

[68] T. Fukuhara et Y. Takasu et M. Kumakura et Y. Takahashi. Degenerate Fermi gases of ytterbium. *Physical Review Letters*, ***98***, *030401*, 2007.

[69] B. J. DeSalvo et M. Yan et P. G. Mickelson et Y. N. Martinez de Escobar et T. C. Killian. Degenerate Fermi gas of ^{87}Sr. *Physical Review Letters*, ***105***, *030402*, 2010.

[70] A. V. Gorshkov et M. Hermele et V. Gurarie et C. Xu et P. S. Julienne et J. Ye et P. Zoller et E. Demler et M. D. Lukin et A. M. Rey. Two-orbital SU(n) magnetism with ultracold alkaline-earth atoms. *Nature Physics*, ***6***, *289*, 2010.

[71] A. V. Gorshkov et M. Hermele et V. Gurarie et C. Xu et P. S. Julienne et J. Ye et P. Zoller et E. Demler et M. D. Lukin et A. M. Rey. Supplementary Information. *Nature Physics*, ***6***, *289*, 2010.

[72] X. Zhang et M. Bishof et S. L. Bromley et C. V. Kraus et M. S. Safronova et P. Zoller et A. M. Rey et J. Ye. Spectroscopic observation of SU(n)-symmetric interactions in Sr orbital magnetism. *Science*, ***345***, *1467*, 2014.

[73] F. Scazza et C. Hofrichter et M. Hofer et P. C. De Groot et I. Bloch et S. Folling. Observation of two-orbital spin-exchange interactions with ultracold SU(n) symmetric fermions. *Nature Physics*, ***10***, *779*, 2014.

[74] M. M. Boyd et T. Zelevinsky et A. D. Lulow et S. Blatt et T. Zanon-Willette et S. M. Foreman et J. Ye. Nuclear spin effects in optical lattice clocks. *Physical Review A*, ***76***, *022510*, 2007.

[75] K. Petsas et A. Coates et G. Grynberg. Crystallography of optical lattices. *Physical Review A*, ***50***, *5173*, 1994.

[76] L. Santos et M. A. Baranov et J. I. Cirac et H. U. Everts et H. Fehrmann et M. Lewenstein. Atomic quantum gases in kagomé lattices. *Physical Review Letters*, ***93***, *4*, 2004.

[77] G. Cappellini et M. Mancini et G. Pagano et P. Lombardi et L. Livi et M. Siciliani de Cumis et P. Cancio et M. Pizzocaro et D. Calonico et F. Levi et C. Sias et J. Catani et M. Inguscio et L. Fallani. Direct Observation of Coherent Interorbital Spin-Exchange Dynamics. *Physical Review Letters*, ***113***, *120402*, 2014.

[78] C. Hofrichter et L. Riegger et F. Scazza et M. Höfer et D. R. Fernandes et I. Bloch et S. Fölling. Direct Probing of the Mott Crossover in the SU(n) Fermi Hubbard Model. *Physical Review X*, ***6***, *021030*, 2016.

[79] G. Pagano et M. Mancini et G. Cappellini et P. Lombardi et F. Schäfer et H. Hu et X.-J. Liu et J. Catani et C. Sias et M. Inguscio et L. Fallani. A one-dimensional liquid of fermions with tunable spin. *Nature Physics*, ***10***, *198*, 2014.

[80] H. Feshbach. Unified theory of nuclear reactions. *Annals of Physics*, ***5***, *375*, 1958.

[81] C. Chin et R. Grimm et P. Julienne et E. Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Review of Modern Physics*, ***82***, *1225*, 2010.

[82] K. Enomoto et K. Kasa et M. Kitagawa et Y. Takashi. Optical Feshbac Resonance Using the Intercombination Transition. *Physical Review Letters*, ***101***, *203201*, 2008.

[83] P. O. Fedichev et Y. Kagan et G. V. Shlyapnikov et J. T. M. Walraven. Influence of Nearly Resonant Light on the Scattering Length in Low-Temperature Atomic Gases. *Physical Review Letters*, ***77***, *2913*, 2004.

[84] M. Höfer et L. Riegger et F. Scazza et C. Hofrichter et D. R. Fernandes et M. M. Parish et J. Levinsen et I. Bloch et S. Fölling. Observation of an orbital interaction-induced Feshbach resonance in ^{173}Yb. *Physical Review Letters*, ***115***, *265302*, 2015.

[85] G. Pagano et M. Mancini et G. Cappellini et L. Livi et C. Sias et J. Catani et M. Inguscio et L. Fallani. Strongly interacting gas of two-electron fermions at an orbital Feshbach resonance. *Physical Review Letters*, ***115***, *265301*, 2015.

[86] C. Wu. Hidden symmetry and quantum phases in spin-3/2 cold atomic systems. *Modern Physics Letters*, ***20***, *1707*, 2006.

[87] T. L. Ho et S.-K. Yip. Pairing of Fermions with Arbitrary Spin. *Physical Review Letters*, ***82***, *247*, 1999.

[88] S.-K. Yip et T. L. Ho. Zero sound modes of dilute fermi gases with arbitrary spin. *Physical Review A*, ***59***, *4653*, 1998.

[89] *Introduction to Solide State Physics, Eight Edition, Wiley*. C. Kittel, 2004.

[90] *Solid State Physics, Saunders College*. N. W. Ashcroft et N. D. Mermin, 1976.

[91] J. C. Slater et G. F. Koster. Simplified LCAO method for the Periodic Problem. *Physical Review*, ***94***, *1498*, 1954.

[92] I. Bloch et J. Dalibard et W. Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, ***80***, *885*, 2008.

[93] D. Jaksch et P. Zoller. The cold atom Hubbard toolbox. *Annals of Physics*, ***315***, *52*, 2005.

[94] P. Schlottmann. Exact results for highly correlated electron systems un one dimension. *International Journal of Modern Physics B*, ***11***, *355*, 1997.

[95] S. Capponi et P. Lecheminant et K. Totsuka. Phase of one-dimensional SU(N) cold atomic fermi gases - from molecular luttinger liquids to topological phases. *Annals of Physics, Elsevier*, ***367***, *50*, 2016.

[96] *Bosonization and Strongly Correlated Systems, Cambridge University Press*. A. Gogolin et A. Nersesyan et A. Tsevelik, 1998.

[97] I. Affleck. Critical behaviour of SU(n) quantum chains and topological non-linear σ-models. *Nuclear Physics B*, ***305***, *582*, 1988.

[98] R. Assaraf et P. Azaria et M. Caffarel et P. Lecheminant. Metal-insulator transition in the one-dimensional SU(N) Hubbard model. *Physical Review B*, ***60***, *2299*, 1999.

[99] S. R. Manmana et K. R. A. Hazzard et G. Chen et A. E. Feiguin et A. M. Rey. SU(N) magnetism in chains of ultracold alkaline-earth-metal atoms : Mott transitions and quantum correlations. *Physical Review A*, ***84***, *043601*, 2011.

[100] P. Lecheminant et P. Azaria et É. Boulat. Competing orders ine one-dimensional half-interger fermionic cold atoms : A conformal field theory approach. *Nuclear Physics*, ***789***, *443*, 2008.

[101] G. Roux et S. Capponi et P. Lecheminant et P. Azaria. Spin 3/2 fermions with attractive interactions in a one-dimensional optical lattice : phase diagrams, entanglement entropy, and the effect of the trap. *European Physical Journal A*, ***68***, *293*, 2009.

[102] *The One-Dimensional Hubbard Models, Cambridge University Press*. F. H. L. Essler et H. Frahm et F. Gohmann et A. Klümper et V. E. Korepin, 2005.

[103] B. Sutherland. Model for multicomponent quantum system. *Physical Review B*, ***12***, *3795*, 1975.

[104] I. Affleck. Exact critical exponents for quantum chains, non-linear σ-models at $\theta = \pi$ and the quantim hall effect. *Nuclear Physics B*, ***265***, *409*, 1986.

[105] F. D. M. Haldane. Spontaneous dimerization in the s $= 1/2$ heisenberg antiferromagnetic chain with competing interactions. *Physical Review B*, ***25***, *4925*, 1982.

[106] P. Lecheminant et K. Totsuka. Competing orders and hidden duality symmetries in two-leg spin ladder systems. *Physical Review B*, ***74***, *224426*, 2006.

[107] P. Corboz et A. M. Läuchli et K. Totsuka et H. Tsunetsugu. Spontaneous trimerization in bilinear-biquadratic $s = 1$ zig-zag chain. *Physical Review B*, ***76***, *220404*, 2007.

[108] E. Szirmai et J. Solyom. Mott transition in the one-dimensional su(n) hubbard model. *Physical Review B*, ***71***, *205108*, 2005.

[109] K. Buchta et Ö. Legeza et E. Szirmai et J. Solyom. Mott transition and dimerization in the one-dimensional SU(N) hubbar model. *Physical Review B*, ***75***, *155108*, 2007.

[110] V. Berezinskii. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group. i. classical systems. *Soviet Physics, JETP* ***32***, *493*, 1971.

[111] J. M. Kosterlitz et D. J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, ***6***, *1181*, 1973.

[112] R. Assaraf et P. Azaria et É. Boulat et M. Caffarel et P. Lecheminant. Dynamical Symmetry Enlargement versus Spin-Charge Decoupling in the One-Dimensional SU(4) Hubbard Model. *Physical Review B*, ***93***, *016407*, 2004.

[113] E. Szirmai et Ö. Legeza et J. Solyom. Spatially nonuniform phases in the one-dimensional SU(n) Hubbard model for commensurate filling. *Physical Review B*, **77**, *045106*, 2008.

[114] H. Nonne et P. Lecheminant et S. Capponi et G. Roux et É. Boulat. Competing orders in one-dimensional half-filled multicomponent fermionic cold atoms : The Haldane-charge conjecture. *Physical Review B*, ***84***, *125123*, 2011.

[115] J. Zhao et K. Ueda et X Wang. Low energy excitations of the one-dimensional half-filled SU(4) Hubbar model with an attractive on-site interaction : Density-matrix renormalization-group calculations and perturbation theory. *Physical Review B*, ***74***, *233102*, 2006.

[116] J. Zhao et K. Ueda et X Wang. Insulating charge density wave for a half-filled SU(N) Hubbar model with an attractive on-site interaction in one dimension. *Journal of the Physical Society of Japan*, ***76***, *114711*, 2007.

[117] I. Affleck et D. P. Arovas et J. B. Marston et D. A. Rabson. SU(2 n) quantum antiferromagnets with exact C-breaking states. *Nuclear Physics*, ***366***, *467*, 1991.

[118] J. Dufour et P. Nataf et F. Mila. Variational Monte Carlo investigation of SU(n) Heisenberg chains. *Physical Review B*, ***91***, *174427*, 2015.

[119] X. Chen et Z.-C. Gu et X.-G Wen. Local unitary transformation, long-range quantum entanglement, wave function renormalization, and topological order. *Physical Review B*, ***82***, *155138*, 2010.

[120] F. D. M. Haldane. Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet : Identification with the O(3) nonlinear sigma model. *Physics Letters A*, ***93***, *464*, 1983.

[121] I. Affleck et F. D. M. Haldane. Critical theory of quantum spin chains. *Physical Review B*, ***36***, *10*, 1987.

[122] H. Nonne et E. Boulat et S. Capponi et P. Lecheminant. Competing orders in the generalized Hund chain model at half filling. *Physical Review B*, ***82***, *155134*, 2010.

[123] H. Nonne et M. Moliner et S. Capponi et P. Lecheminant et K. Totsuka. Symmetry-protected topological phases of alkaline-earth cold fermionic atoms in one dimension. *Europhysics letters*, ***102***, *37008*, 2013.

[124] O. Boada et A. Celi et J. I. Latorre et M. Lewenstein. Quantum Simulation of an Extra Dimension. *Physical Review Letters*, ***108***, *133001*, 2012.

[125] K. Kobayashi et M. Okumura et Y. Ota et S. Yamada et M. Machida. Nontrivial Haldane Phase of an Atomic Two-Component Fermi Gas Trapped in a 1D Optical Lattice. *Physical Review L*, ***109***, *235302*, 2012.

[126] K. Kobayashi et Y. Ota et M. Okumura et S. Yamada et M. Machida. Quantum phases in degenerate-p-orbital attractive one-dimensional fermionic optica lattices. *Physical Review A*, ***89***, *023625*, 2014.

[127] M. Anderlini et J. Sebby-Strabley et J. Kruse et J. V. Porto et W. D. Phillips. Controlled atom dynamics in a double-well optical lattice. *Journal of Physics B*, ***39***, *S199*, 2006.

[128] P. Barmettler et A. M. Rey et E. Demler et M. D. Lukin et I. Bloch et V. Gritsev. Controlled atom dynamics in a double-well optical lattice. *Physical Review A*, ***78***, *012330*, 2008.

[129] R. I. Abraham et W. I. McAlexander et J. M. Gerton et R. G. Hulet et R. Côté et A. Dalagno. Triplet s-wave resonance in ^{6}Li collisions and scattering lengths of ^{6}Li and ^{7}Li. *Physical Review A*, ***55***, *R3299*, 1997.

[130] E. Noether. Invariant Variation P*roblems*. *Transport Theory and Statistical Physics*, ***1***, *186*, 1971.

[131] *Conformal Field Theory, Springer*. Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, David Sénéchal, 1997.

[132] L. Balents et M. Fisher. Weak-coupling phase diagram of the two-chain Hubbard model. *Physical Review B*, ***53***, *12133*, 1996.

[133] E. Witten. Non-Abelian Bosonisation in Two Dimension. *Communication in Mathematical Physics*, ***92***, *455*, 1984.

[134] A. M. Polyakov et P. B. Wiegmann. Goldstone fields in two dimensions with multivalued actions. *Physics Letters B*, ***141***, *223*, 1984.

[135] V. G. Knizhnik et A. B. Zamolodchikov. Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions. *Nuclear Physics B*, ***247***, *83*, 1984.

[136] S. Tomonaga. Remarks on Bloch's Method of Sound Wavex applied to Many Fermions Problems. *Progress of Theoretical Physics*, ***5***, *544*, 1950.

[137] J. M. Luttinger. An Exactly Soluble Model of a Many-Fermion System. *Journal of Mathematical Physics*, ***4***, *1154*, 1963.

[138] F. D. M. Haldane. Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids ; I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas. *Journal of Physics C*, ***14***, *2585*, 1981.

[139] H. J. Schulz. SO(N) symmetries in the two – chain model of correlated fermions. *cond-mat/9808167*, 1998.

[140] *Scaling and Renormalization in Statistical Physics, Cambridge University Press*. J. Cardy, 1996.

[141] *Numerical Recipes, Cambridge University Press*. W. H. Press et S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling et B. P. Flannery, 2007.

[142] H.-H. Lin et L. Balents et M. Fisher. Exact SO(8) symmetry in the weakly-interacting two-leg ladder. *Physical Review B*, ***58***, *1794*, 1998.

[143] D. J. Gross et A. Neveu. Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories. *Physical Review D*, ***10***, *3235*, 1974.

[144] A. B. Zamolodchikov et A. B. Zamolodchikov. Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. *Annals of Physics*, ***120***, *253*, 1979.

[145] M. Karowski et H. J. Thun. Complete S-matrix of the O(2N) Gross-Neveu model. *Nuclear Physics B*, ***190***, *61*, 1981.

[146] É. Boulat et P. Azaria et P. Lecheminant. Duality approach to one-dimensional degenerate electronic systems. *Nuclear Physics B*, ***822***, *367*, 2009.

[147] R. M. Konik et H. Saleur et A. W. W. Ludwig. Interplay of the scaling limit and the renormalization groupe : Implications for the symmetry restoration. *Physical Review B*, ***66***, *075105*, 2002.

[148] W. Chen et M.-S. Chang et H.-H. Lin et D. Chang et C.-Y. Mou. Potential flow of renormalization group in quasi-one-dimensional systems. *Physical Review B*, ***70***, *205412*, 2004.

[149] H. J. Schulz. Phases of two coupled Luttinger liquids. *Physical Review B*, ***53***, *R2959*, 1996.

[150] E. Orignac et R. Citro. Charge Density Waves and Bond Order Waves in a quarter filled extended Hubbard ladder. *European Physical Journal B*, ***33***, *419*, 2003.

[151] F. D. M. Haldane. Effective Harmonic-Fluid Approach to Low-Energy Properties of One-Dimensional Quantum Fluids. *Physical Review Letters*, ***47***, *1840*, 1981.

[152] H. J. Schulz. Wigner crystal in one dimension. *Physical Review Letters*, ***71***, *1864*, 1993.

[153] P. Calabrese et J. Cardy. Entanglement Entropy and Quantum Field Theory. *Journal of Statistical Mechanics, P06002*, 2004.

[154] H. Nonne et E. Boulat et S. Capponi et P. Lecheminant. Phase Diagram Of the One-Dimensional Alkaline-Earth Cold Fermionic Atoms. *Modern Physics Letters B*, ***25***, *955*, 2011.

[155] M. Nakamura. Identification of topologically different valence bond states in spin ladders. *Physica B : Condensed Matter*, ***329-333***, *1000*, 2003.

[156] P. Lecheminant et E. Orignac. Magnetisation and dimerization profiles of the cut two-leg spin ladder. *Physical Review B*, ***65***, *174406*, 2002.

[157] M. Tsuchiizu et A. Furusaki. Generalized two-leg Hubbard ladder at half filling : Phase diagram and quantum criticalities. *Physical Review B*, ***66***, *245106*, 2002.

[158] J. O. Fjaerstad et J. B. Martson et U. Schollwöck. Orbital currents and charge density waves in a generalized Hubbard ladder. *Annals of Physics*, ***321***, *894*, 2006.

[159] W. Thirring. A Soluble Relativistic Field Theory ? *Annals of Physics*, ***3***, *91*, 1958.

[160] K. Johnson. Solution of the Equations for the Green's Functions of a two Dimensionnal Relativistic Field Theory. *Il Nuovo Cimento*, ***20***, *773*, 1961.

[161] N. Andrei et J. H. Lowenstein. Derivation of the chiral Gross-Neveu spectrum for arbitrary SU(N). *Physics Letters B*, ***90***, *106*, 1980.

[162] I. Affleck et F. D. M. Haldane. Critical theory of quantum spin chains. *Physics Review B*, ***36***, *5291*, 1987.

[163] R. M. Konik et T. Palmai et G. Takacs et A. M. Tsvelik. Studying the perturbed Wess-Zumino-Witten $\mathrm{SU}(2)_k$ theory using the truncated conformal spectrum approach. *Nuclear Physics B*, ***899***, *547*, 2015.

[164] C. Ahn et D. Bernard et A. LeClair. Fractional supersymmetries in perturbed coset CFTs and integrable soliton theory. *Nuclear Physics B*, ***346***, *409*, 1990.

[165] I. Affleck et J. B. Marston. Large-n limit of the Heisenberg-Hubbard model : Implications for high t_c superconductors. *Physical Review B*, ***37***, *3774*, 1988.

[166] A. V. Onufriev et J. B. Marston. Enlarged symmetry and coherence in arrays of quantum dots. *Physical Review B*, ***59***, *12573*, 1999.

[167] H. J. Schulz. Phase diagrams and correlation exponents for quantum spin chains of arbitrary spin quantum number. *Physical Review B*, ***34***, *6372*, 1986.

[168] W. Chen et K. Hida et B. C. Sanctuary. Ground-state phase diagram of $s = 1$ XXZ chains with uniaxial single-ion-type anisotropy. *Physical Review B*, ***67***, *104401*, 2003.

[169] N. Read et S. Sachdev. Some features of the phase diagram of the square lattice SU(n) antiferromagnet. *Nuclear Physics B*, ***316***, *609*, 1989.

[170] N. Read et S. Sachdev. Spin-Peierls, valence-bond solid, and Néel ground states of low-dimensional quatum antiferromagnets. *Physical Review B*, ***42***, *4568*, 1990.

[171] I. Affleck et T. Kennedy et E. H. Lieb et H. Tasaki. Rigorous Results on Valence-Bond Ground States in Antiferromagnets. *Communication in Mathematical Physics*, ***115***, *477*, 1988.

[172] D. Perez-Garcia et F. Verstraete et M. M. Wolf et J. I. Cirac. Matrix Product State Representation. *Quantum Information and Computation*, ***7***, *401*, 2007.

[173] K. Tanimoto et K. Totsuka. Symmetry-protected topological order SU(n) Heisenberg magnets - quantum entanglement and non-local order parameters. *arXiv :1508.07601v1*, 2015.

[174] X. Chen et Z.-C. Gu et X.-G. Wen. Classification of gapped symmetric phases in one-dimensional spin systems. *Physical Review B*, ***83***, *035107*, 2011.

[175] Lukasz Fidkowski et Alexei Kitaev. Topological phases of fermions in one dimension. *Physical Review B*, ***83***, *075103*, 2011.

[176] N. Schuch et D. Perez-Garcia et I. Cirac. Classifying quantum phases using matrix product states and projected entangled pair states. *Physical Review B*, ***84***, *165139*, 2011.

[177] K. Duivenvoorden et Thomas Quella. Topological phases of spin chains. *Physical Review B*, ***87***, *125145*, 2013.

[178] S. Taie et Y. Takasu et S. Sugawa et R. Yamazaki et T. Tsujimoto et R. Murakami et Y. Takahashi. Realization of a $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(6)$ System of Fermions in a Cold Atomic Gas. *Physical Review Letters*, ***105***, *190401*, 2010.

[179] B. Song et C. He et S. Zhang et E. Hajiyev et W. Huang et X.-J. Liu et G.-B. Jo. Spin-orbit-coupled two-electron Fermi gases of ytterbium atoms. *Physical Review A*, ***94***, *061604*, 2016.

[180] T. B. Ottenstein et T. Lompe et M. Kohnen et A. N. Wenz et S. Jochim. Collisional Stability of a Three-Component Degenerate Fermi Gas. *Physical Review Letters*, ***101***, *203202*, 2008.

Résumé

La réalisation expérimentale de la condensation de Bose-Einstein (BEC) a ouvert un nouveau champ d'investigation très fertile dans l'étude des atomes froids. En particulier, la possibilité de synthétiser des gaz de fermions piégés dans des réseaux optiques représente un développement de la plus haute importance pour la physique de la matière condensée. Ceci ouvre notamment sur la perspective d'étudier des phases quantiques exotiques stabilisées dans des systèmes d'électrons fortement corrélés. Récemment, les gaz atomiques d'alcalino-terreux ou d'ytterbium ont suscité un vif intérêt et ont été refroidis jusqu'à la dégénérescence quantique. La structure atomique particulière de ces systèmes leur confère de très hauts degrés de symétrie, grâce au découplage entre le spin nucléaire et le moment angulaire électronique. Une physique exotique conduisant à de multiple applications peut résulter de ces systèmes de hautes symétries qui ne peuvent être sondées que par les solides bases de la matière condensée. Dans cette thèse, on se propose d'étudier les propriétés physiques de basse énergie d'un gaz de fermions de type alcalino-terreux, piégé dans un réseau optique à une dimension. Dans ce cas à une dimension, il est possible d'analyser les effets des interactions de manière non-perturbative par des approches de théorie des champs comme la bosonisation ou la théorie des champs conformes, et numériquement par le groupe de renormalisation de la matrice densité (DMRG). L'ensemble de ces outils sera notamment utilisé pour déterminer le diagramme de phase des gaz de fermions d'alcalino-terreux ou d'ytterbium à une dimension.

Abstract

Experimental realization of Bose-Einstein condensate (BEC) opened a new and rich field of investigation for the study of the cold atoms. In particular, the possibility of creating trapped fermionic gases in optical lattices represent one of the most important development for the condensed matter physics. This open the outlook of studying exotic and stabilized quantum phases in strongly correlated systems of electrons. Recently, alkline-earth or ytterbuim atomic gases have given rise to great interest and have been cooled down up to quantum degeneracy. The specific atomic structure of these systems confer them very high degrees of symmetry, thanks to the decoupling between the nuclear spin and the electronic angular momentum. An exotic physics which is only probe thanks to the strong fundament of the condensed matter. In this thesis, we propose to study the physical properties at low energy of a alkaline-earth-like fermionic gas, trapped in a one dimensional optical lattice. In this one dimensional case, we are able to analyse effects of interactions in a non-pertubative way with conformal field theory or bosonization, and numerically with Density Matrix Renormalization Group (DMRG) approach. All of these tools will be used to provide the phase diagram of these alkaline-earth-like fermionic gases in one dimension.