



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Optimisation basée sur l'étude des trajectoires dans un environnement aléatoire : application au pilotage de systèmes de production

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 septembre 2016

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Mention Automatique, Traitement du signal et des images, Génie informatique)

par

Laura María RAMÍREZ RESTREPO

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Lionel AMODEO	Professeur à l'Université de technologie de Troyes
	Alexandre DOLGUI	Professeur à l'École des Mines de Nantes
<i>Examineurs :</i>	Abdelhakim ARTIBA	Professeur à l'Université de Valenciennes
	Ioana DENIAUD	MCF à l'Université de Strasbourg
	André THOMAS	Professeur à l'Université de Lorraine
<i>Directrice de thèse :</i>	Sophie HENEQUIN	MCF-HDR à l'Université de Lorraine
<i>Co-directrice de thèse :</i>	Aicha AGUEZZOUL	MCF à l'Université de Lorraine

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de l'équipe Management de la Production et de la Maintenance du Laboratoire de Génie Industriel, de Production et de Maintenance (LGIPM). Je souhaite d'abord exprimer ma gratitude à son directeur, M. Nidhal REZG pour m'avoir accueillie et pour m'avoir permis de réaliser ces travaux de recherches dans le laboratoire LGIPM. Je le remercie également pour l'opportunité qu'il m'a donnée, en tant que Directeur de l'UFR-MIM de l'Université de Lorraine, d'enseigner au sein de son établissement pendant ma dernière année de doctorat.

Je tiens spécialement à remercier Mme. Sophie HENNEQUIN, ma Directrice de thèse et mon enseignante depuis le master, pour m'avoir permis de faire cette thèse sous sa direction et pour m'avoir donné l'opportunité de participer à ses projets. Je suis très reconnaissante pour toutes les connaissances qu'elle m'a transmises, sa disponibilité, ses conseils, ses encouragements et sa gentillesse.

Mes remerciements s'adressent également à ma Co-directrice de thèse Mme. Aicha AGUEZZOUL. Je la remercie pour son aide tout au long de ma thèse, pour ses conseils et pour le temps qu'elle a consacré à nos réunions et à toutes les corrections.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. Lionel AMODEO, Professeur à l'Université de Technologie de Troyes, M. Alexandre DOLGUI, Professeur à l'Ecole des Mines de Nantes, mes deux rapporteurs de thèse, de M. André THOMAS, Professeur à l'Université de Lorraine, qui a accepté de présider le jury, ainsi que M. Abdelhakim ARTIBA, Professeur à l'Université de Valenciennes et Mme. Ioana DENIAUD, Maître de Conférences à l'Université de Strasbourg qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury et de juger mon travail.

J'adresse mes remerciements à tous les membres du laboratoire LGIPM. Je pense particulièrement à Mme. Nathalie SAUER, M. Daniel ROY, M. Sofiene DELLAGI et M. Jérémie SCHUTZ. Je leur suis reconnaissante pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté, pour les enseignements que j'ai assurés à l'UFR-MIM. Toute ma gratitude à Mme Christel WIEMERT, pour sa disponibilité et sa sympathie, à Kader BA pour son amitié et à tous les doctorants, spécialement à ceux avec lesquels j'ai partagé le plus : Noura, Afef, Nadia, Zouhour, Wajih, Hichem et Sadok.

Je voudrais remercier toute ma famille, principalement mes parents Olga et Augusto qui ont toujours été ma motivation et mon soutien le plus grand. Mes frères José Augusto, Juan Luis et Alejandro, ainsi que mes belles-sœurs, mes nièces et mes neveux. Vous êtes tous une source d'inspiration. Je remercie Victoria et Guy qui m'ont accompagnée et encouragée pendant ces années.

Finalement, j'aimerais remercier mes amis et en particulier une personne qui a été à côté de moi tout au long de la thèse. Je le remercie pour tout ce qu'il a fait pour moi.

Table des matières

Remerciements.....	2
Table des matières.....	3
Liste des figures	6
Liste des tableaux.....	8
Notations.....	9
Introduction générale	17
Chapitre 1 : Stratégie de production de l'entreprise : des objectifs économiques aux objectifs durables.....	19
Introduction.....	19
Partie I – Pilotage de la production	19
Les décisions dans l'entreprise.....	19
I.1.1. Les niveaux de décision	19
I.1.2. Les objectifs à atteindre en production	20
I.1.3. Le pilotage de la production	22
I.1.4. Conclusions	34
Partie II – Problématique actuelle	35
II.1. Contexte.....	35
II.2. Problématique	35
II.3. Les enjeux du développement durable	37
II.4. La responsabilité sociale/sociétale des entreprises et organisations	40
II.5. Conclusions	42
Partie III. Plan de recherche	43
Choix du modèle et de la méthode de résolution	44
Methodologie de travail.....	45
Conclusion	46
Chapitre 2 : Pilotage d'un système de production incluant des actions de maintenance	48
2.1. Introduction	48
2.2. Système de production étudié.....	49
2.3. Etude analytique des trajectoires	51
2.4. Optimisation basée sur la méthode IPA et la simulation.....	57
2.4.1. Estimation des gradients par rapport au point de séparation.....	58
2.4.2. Estimation des gradients par rapport à la période de la maintenance préventive	61
2.4.3. Algorithmes de simulation	62
2.5. Applications numériques	65

2.5.1. Expérimentations pour une demande aléatoire et pour des pannes dépendantes des opérations.....	70
2.6. Conclusion.....	71
Chapitre 3 : Intégration du contexte actuel lié au développement durable dans le pilotage d'un système de production.....	73
3.1. Introduction	73
3.2. Etude d'un système de production avec prise en compte du coût environnemental de production	74
3.2.1. Système étudié	75
3.2.2. Etude analytique des trajectoires	77
3.2.3. Estimation du gradient de la fonction de coût	88
3.2.4. Résultats numériques	93
3.3. Etude d'un système de production avec prise en compte des trois piliers du développement.....	95
3.3.1. Système de production étudié.....	95
3.3.2. Etude analytique des trajectoires pour un système de production intégrant le concept de développement durable	99
3.3.3. Estimation du gradient de la fonction de coût	108
3.3.4. Résultats numériques	111
3.4. Conclusion.....	113
Chapitre 4 : Système de production « durable » soumis à des aléas	115
4.1. Introduction	115
4.2. Étude des stocks d'un système à deux étages.....	116
4.2.1. Système étudié	116
4.2.2. Etude des trajectoires du premier étage	121
4.2.3. Étude des trajectoires du deuxième étage	122
4.2.4. Estimation du gradient de coût	123
4.2.5 États du système.....	126
4.2.6. Algorithme IPA.....	126
4.2.7 Application numérique	129
4.3. Dimensionnement du réapprovisionnement avec prise en compte des coûts économiques, environnementaux et sociaux	130
4.3.1. Système étudié	131
4.3.2. Étude analytique de la fonction de coût.....	135
4.3.3. Étude des trajectoires	138
4.3.4 États du système.....	140
4.3.5. Application numérique.....	141
4.3.6. Application pour la réduction des émissions des gaz à effet de serre	146

4.3.7. Application numérique avec comme objectif la minimisation des émissions de gaz à effet de serre.....	149
4.4. Conclusions	153
Conclusion générale	156
Perspectives.....	159
Références.....	160
Annexe 1 : Politiques de pilotage des flux	168
Annexe 2 : Techniques d'optimisation issues de l'Analyse des Perturbations.....	175
Annexe 3 : Performances liées à la durabilité.....	178
Annexe 4 : Etude de la maintenance préventive sous hypothèse de dépendance entre le niveau de stock et la période de la maintenance préventive.....	181
Annexe 5 : Extension aux lignes de transfert avec prise en compte du transport.....	192
Annexe 6 : Démonstrations pour l'étude des trajectoires du chapitre 3	198
Annexe 7 : Démonstrations pour l'étude des trajectoires du chapitre 4	209

Liste des figures

Figure 1.1. Système de production. Source : Adaptée de [TAM08]	21
Figure 1.2. Types de maintenance. Source extraite et adaptée de la norme NF EN 13306 X 60-319 [NF EN 13306x 60-319]	27
Figure 1.3. Schéma du développement durable.	37
Figure 1.4. Evolution des publications sur la chaîne logistique durable et verte.	39
Figure 1.5. Evolution des publications sur la production durable et verte.	40
Figure 2.1. Système de production considéré	49
Figure 2.2. Exemple de trajectoire du niveau du stock.	53
Figure 2.3. Coût total moyen estimé par rapport à h vs. point de séparation.	66
Figure 2.4. Coût total moyen estimé par rapport à Tp vs. période de maintenance préventive.	67
Figure 2.5. Configuration optimale du Coût total moyen vs. niveau de stock (point de séparation).	68
Figure 2.6. Configuration optimale du coût total moyen vs. période de la maintenance préventive.	68
Figure 2.7. Disponibilité vs. période de maintenance préventive.	69
Figure 3.1. Exemple d'une trajectoire du niveau de stock et des émissions pour le cas 1.	79
Figure 3.2. Trajectoire nominale et perturbée des émissions pour $t \in t1', t1$ du cas 1.	80
Figure 3.3. Exemple d'une trajectoire aléatoire du niveau de stock et des émissions pour le cas 2.	85
Figure 3.4. Trajectoire nominale et perturbée du niveau d'émissions entre $t1$ et $t1'$ du cas 2.	86
Figure 3.5. Coût total moyen vs. point de séparation économique et environnemental pour $Tp = 200 UT$	94
Figure 3.6. Coût total moyen vs. point de séparation économique et environnemental pour $Tp = 30 UT$	95
Figure 3.7. Coûts associés aux temps et aux niveaux d'exposition	98
Figure 3.8. Exemple de trajectoire aléatoire avec les trois critères du développement durable pour le cas 1.	100
Figure 3.9. Trajectoire nominale et perturbée pour $t \in t1', t1$ du cas 1.	101
Figure 3.10. Trajectoire nominale et perturbée pour $t \in t1', t1$ du cas 1.	102
Figure 3.11. Exemple d'une trajectoire aléatoire - trois critères du développement durable pour le cas 2.	104
Figure 3.12. Trajectoire nominale et perturbée des émissions environnementales entre $t1$ et $t1'$ du cas 2.	105
Figure 3.13. Trajectoire nominale et perturbée des émissions environnementales entre $t1$ et $t1'$ du cas 2.	106
Figure 3.14. Coût total moyen vs. points de séparation économique, environnemental et social pour $Tp = 200 UT$	112
Figure 4.1. Système à deux étages piloté par la politique Échelon Base Stock.	117
Figure 4.2. Exemple de trajectoire de $y(t)$ et de $df1(t)$	121
Figure 4.3. Zoom du coût total moyen par rapport aux Échelon Base Stocks.	130
Figure 4.4. Système à deux étages avec une usine et un sous-traitant de produits finis.	132
Figure 4.5. Coût d'achat vs. coût total moyen.	144
Figure 4.6. Coût environnemental vs. coût moyen.	145
Figure 4.7. Coût social/sociétal vs. coût moyen.	146
Figure 4.8. Schéma du système avec les variables GES.	148
Figure 4.9. Quantité émise de gaz ζ pour l'usine et pour le sous-traitant vs. gaz à effet de serre émis.	151
Figure 4.10. Quantités émises de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis et par le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis vs. gaz à effet de serre émis.	153

Figure A.1.1. Pilotage par la politique Kanban	169
Figure A.1.2. Pilotage par la politique CONWIP	170
Figure A.1.3. Pilotage par la politique Kanban Généralisé.....	171
Figure A.1.4. Pilotage par la politique Kanban Etendu	171
Figure A.1.5. Pilotage de la politique Base Stock	172
Figure A.2.1. Trajectoire de la position du stock pour le calcul de l'espérance conditionnelle en utilisant l'Analyse des Perturbations Lissées. Source : [FU94a].	175
Figure A.4.1. L'action de maintenance préventive commence à Tp et il n'y a pas des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.....	182
Figure A.4.2. L'action de maintenance préventive commence à Tp et il y a des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.....	184
Figure A.4.3. Coût total moyen en fonction du niveau de stock	188
Figure A.4.4. Coût total moyen Vs. niveau de stock pour la valeur de Tp qui minimise le coût total moyen.....	188
Figure A.4.5. Période de la maintenance préventive vs. coût total moyen	189
Figure A.4.6. Zoom de la période de la maintenance préventive vs. coût total moyen pour $h = 7$ unités.....	189
Figure A.4.7. $Tp1$ en fonction de h	190
Figure A.4.8. $Tp2$ en fonction de h	190
Figure A.5.1. Système d'une ligne de transfert avec une politique de type Base Stock.	192
Figure A.5.2. Système d'une ligne de transfert avec une politique de type kanban.....	193
Figure A.7.1. Zoom de l'intervalle $0, t2$	209
Figure A.7.2. Zoom de l'intervalle $t2, t3$	210
Figure A.7.3. Zoom de l'intervalle $t3, t4$	212
Figure A.7.4. Zoom de l'intervalle $t4, t5$	212
Figure A.7.5. Zoom de l'intervalle $t6, t7$	213

Liste des tableaux

Tableau 1.1. Synthèse des politiques de pilotage	24
Tableau 1.2. Emissions de CO2 pour quelques pays.	36
Tableau 2.1. Paramètres de la simulation	65
Tableau 2.2. Résultats de la simulation pour $Tp = 200$	66
Tableau 2.3. Résultats de la simulation pour la fonction de coût dépendante de Tp et $h=30$	67
Tableau 2.4. Résultats des simulations pour des valeurs différentes de τ_1 et τ_2	69
Tableau 2.5. Résultats pour des expérimentations avec des paramètres différents	70
Tableau 3.1. Paramètres de la simulation	93
Tableau 3.2. Résultats de la simulation pour $Tp = 200$ UT.....	94
Tableau 3.3. Paramètres de la simulation « trois points de séparation »	111
Tableau 3.4. Résultats de la simulation pour $Tp = 200$	111
Tableau 4.1. Paramètres de la simulation dimensionnement de stocks	129
Tableau 4.2. Paramètres de la simulation approvisionnement	142
Tableau 4.3. Résultats de la simulation	143
Tableau 4.4. Résultats de l'analyse de sensibilité pour les coûts d'achat.	143
Tableau 4.5. Résultats de l'analyse de sensibilité du coût environnemental par pièce transportée. .	144
Tableau 4.6. Résultats de l'analyse de sensibilité pour le coût social/sociétal	145
Tableau 4.7. Données pour les simulations des gaz à effet de serre émis	150
Tableau 4.8. Valeurs de référence pour l'émission des gaz à effet de serre	150
Tableau 4.9. Résultats de l'analyse de sensibilité pour la quantité totale de gaz ζ émis par l'usine et par le sous-traitant.	150
Tableau 4.10. Résultats de l'analyse de sensibilité pour les quantités émises de gaz ζ par les modes de transport.....	152
Tableau A.2.1. Méthodes d'optimisation basées sur des trajectoires	177
Tableau A.4.1. Paramètres de la simulation	187
Tableau A.4.2. Données numériques cas a.	190
Tableau A.4.3. Données numériques cas b.	190

Notations

➤ Système de production à un étage

$M :$	Machine d'un système de production
$B :$	Stock de sécurité d'un système de production
$C :$	Client
$\alpha(t) :$	État de la machine
$d(t) :$	Demande client à l'instant t
$\tau_1 :$	Délai de transfert entre la machine et le stock
$\tau_2 :$	Délai de transport entre le stock et le client
$Xtd_1(t) :$	Flux de matières transportées entre M et B à l'instant t
$Xtd_2(t) :$	Flux de matières transportées entre B et C à l'instant t
$X^h(t, \vec{h}) :$	Niveau de stock à l'instant t pour la trajectoire nominale
$X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) :$	Niveau de stock à l'instant t pour la trajectoire perturbée
$Y^h(t) :$	Position du stock dans tout le système à l'instant t pour la trajectoire nominale
$Y^{h+\Delta}(t) :$	Position du stock à l'instant t pour la trajectoire perturbée
$u(t) :$	Vitesse de production de la machine à l'instant t
$u^\Delta(t) :$	Vitesse de production de la machine à l'instant t pour le système perturbé
$U :$	Vitesse de production maximale de la machine
$h :$	Point de séparation avec des critères économiques
$h_{en} :$	Point de séparation environnemental
$h_{soc} :$	Point de séparation social/sociétal
$T_p :$	Période de la maintenance préventive (maintenance préventive de type bloc périodique)
$T_p^* :$	Période de la maintenance préventive optimale

$TBF :$	Temps de bon fonctionnement
$TTR :$	Temps de réparation
$DMP :$	Durée de l'action de la maintenance préventive
$P_{np} :$	Probabilité de ne pas avoir de pénurie à la fin de l'action de maintenance préventive
$P_p :$	Probabilité d'avoir des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive
$r(t) :$	Temps restant avant le prochain changement d'état du système
$\Delta :$	Valeur de la perturbation par rapport à h
$\Delta h_{en} :$	Valeur de la perturbation par rapport au point de séparation environnemental
$\Delta h_{soc} :$	Valeur de la perturbation par rapport au point de séparation social/sociétal
$\Delta_p :$	Valeur de la perturbation par rapport à T_p
$\theta :$	Quantité d'émissions de polluants par unité produite
$\sigma :$	Quantité d'émissions de particules fines nocives pour la santé par unité produite (particules radioactives ou produits chimiques)
$e(t) :$	Trajectoire nominale de la quantité émise de polluants à l'instant t
$e^A(t) :$	Trajectoire perturbée de la quantité émise de polluants à l'instant t
$s(t) :$	Trajectoire nominale de la quantité d'émissions de particules fines nocives pour la santé à l'instant t
$\Delta_{ss} :$	Valeur de la perturbation de la quantité d'émissions de particules fines nocives pour la santé
$\Delta e :$	Valeur de la perturbation de la quantité émise de polluants à l'instant t
$L_{min} :$	Limite d'émissions de polluants définie par l'entreprise
$L :$	Limite d'émissions de polluants définie par les autorités régulatrices ($L < L_{min}$)
$L_{soc} :$	Limite d'émissions nocives définie par l'entreprise avant d'atteindre la limite L_{socmax} définie par les autorités régulatrices
$L_{socmax} :$	Limite d'émissions nocives définie par les autorités régulatrices. A partir de ce niveau, un coût par unité émise est payé ($L_{soc} < L_{socmax}$)
$C_m(t) :$	Coût total de maintenance à l'instant t

Notations

$N_c(t)$:	Nombre total de pannes à l'instant t
$N_p(t)$:	Nombre total de maintenances préventives à l'instant t
C_p :	Coût d'une action de maintenance préventive
C_c :	Coût d'une action de maintenance corrective
ct_i :	Coût de transport par unité transportée ($i=1, 2, \dots$)
$g(X^h(t, \vec{h}))$:	Coût de stockage à l'instant t
$G_k(h)$:	Coût total de stockage
$C(t)$:	Coût total à l'instant t
$C_{\text{pénalité}}^{\text{en}}$:	Coût de pénalité environnementale défini par les autorités de régulation par unité émise qui dépasse la limite L
$C_{\text{pénalité}}^s$:	Coût de pénalité sociale/ sociétale défini par les autorités de régulation par unité émise qui dépasse la limite L_{socmax}
$C_{\text{soc}}(iT_p)$:	Coût social/sociétal payé sur une période i de maintenance préventive
$C_{\text{env}}(iT_p)$:	Coût environnemental payé sur une période i de maintenance préventive
T_{expo} :	Temps d'exposition en continu. Ce temps d'exposition est compté entre deux maintenances, soit maintenance préventive, soit maintenance corrective. Pour chaque temps d'exposition, il y a un coût à payer (C_{expo}) associé au niveau $s(t)$. Le niveau $s(t)$ correspond à l'augmentation de $s(t)$ entre deux maintenances.
C_{expo} :	Coût payé par temps d'exposition associé au niveau $s(t)$
$L_T^h(t, h)$:	Coût total moyen estimé par rapport au point de séparation économique sur un horizon de temps fini pour la trajectoire nominale
$L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta)$:	Coût total moyen estimé par rapport au point de séparation économique sur un horizon de temps fini pour la trajectoire perturbée
$L_T^{T_p}(T_p)$:	Coût total moyen estimé par rapport à la période de maintenance préventive sur un horizon de temps fini pour la trajectoire nominale
$L_T^{T_p}(T_p + \Delta_p)$:	Coût total moyen estimé par rapport à la période de maintenance préventive sur un horizon de temps fini pour la trajectoire perturbée
$J_T(h)$:	Valeur espérée du coût total moyen sur un horizon de temps fini pour la trajectoire nominale

$J_T(h + \Delta):$	Valeur espérée du coût total moyen sur un horizon de temps fini pour la trajectoire perturbée
$L_T^{\Delta h_{en}}(t, \vec{h}):$	Coût total moyen estimé par rapport au point de séparation environnemental sur un horizon de temps fini pour la trajectoire nominale
$L_T^{h_{en} + \Delta h_{en}}(t, \vec{h}):$	Coût total moyen estimé par rapport au point de séparation environnemental sur un horizon de temps fini pour la trajectoire perturbée
$L_T^{\Delta h_{soc}}(t, \vec{h}):$	Coût total moyen estimé par rapport au point de séparation social/sociétal sur un horizon de temps fini pour la trajectoire nominale
$L_T^{h_{soc} + \Delta h_{soc}}(t, \vec{h}):$	Coût total moyen estimé par rapport au point de séparation social/sociétal sur un horizon de temps fini pour la trajectoire perturbée

➤ **Système à deux étages**

Variables de l'étage 1 : Approvisionnement en composants/matières premières

$F_i:$	Machine de produits semi-finis/composants
$\sigma_f(t):$	Etat de la disponibilité de l'usine de produits semi-finis
$U_{fmax}:$	Capacité maximale de production de la machine de produits semi-finis ($U_{fmax} \geq u(t)$)
$B_f:$	Stock de matières premières/ produits semi-finis
$M:$	Machine de produits finis
$\tau_{f_i-B_f}:$	Délai de livraison de l'usine au stock de matières premières/ produits semi-finis
$\tau_{B_f-U}:$	Délai de transfert entre le stock B_f et la machine M
$SB_f:$	Niveau d'échelon base stock du premier étage
$u_f(t):$	Vitesse de production de l'usine de produits semi-finis à l'instant t
$d(t):$	Taux de la demande (supposé constant et égal à D)
$xt_f(t):$	Flux de pièces transportées à l'instant t entre l'usine de produits semi-finis et le stock B_f
$xt_b(t):$	Flux de pièces transportées à l'instant t entre B_f et M
$x_f(t):$	Niveau du stock de matières premières/produits semi-finis à l'instant t
$y(t):$	Flux de pièces (en transport et dans le stock) du premier étage

$d_{f_1}(t)$:	Autorisation de réapprovisionnement pour l'usine de produits semi-finis, exprimée comme la différence entre le base stock SB_f et l'échelon stock ($y(t) - D$)
$d_{f_2}(t)$:	Autorisation de réapprovisionnement pour le sous-traitant de produits semi-finis
$y(t)$:	Quantité de pièces (en transport et dans l'entrepôt) du premier étage
F_2 :	Sous-traitant de produits semi-finis
a :	Proportion de pièces provenant de l'usine de produits semi-finis
$(1 - a)$:	Proportion de pièces provenant du sous-traitant de produits semi-finis
$\theta_{f_1}(t)$:	Etat de disponibilité/indisponibilité de l'usine de produits semi-finis
$\theta_{f_2}(t)$:	Etat de disponibilité/indisponibilité du sous-traitant de produits semi-finis
$xt_{f_1}(t)$:	Flux de pièces transportées à l'instant t entre l'usine et le stock de produits semi-finis
$xt_{f_2}(t)$:	Flux de pièces transportées à l'instant t entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis
$u_{f_1}(t)$:	Vitesse de production de l'usine de produits semi-finis à l'instant t
$u_{f_2}(t)$:	Vitesse de production du sous-traitant de produits semi-finis à l'instant t
U_{f_1max} :	Vitesse de production maximale de l'usine de produits semi-finis
U_{f_2max} :	Vitesse de production maximale du sous-traitant de produits semi-finis

Variables de l'étage 2 : Distribution des produits finis

B_c :	Stock de produits finis
$u(t)$:	Vitesse de production de la machine
U_u :	Vitesse de production maximale de la machine
τ_{U-B_c} :	Délai de transfert entre la machine M et le stock de produits finis
τ_{B_c-c} :	Délai de livraison au client
SB_c :	Niveau d'échelon base stock du deuxième étage
$x_c(t)$:	Niveau de stock du stock de produits finis à l'instant t
$y_c(t)$:	Somme des pièces (en transport et dans l'entrepôt) du deuxième étage
$d_u(t)$:	Autorisation de production de la machine, exprimée comme la différence entre le

	base stock SB_c et l'échelon stock $(y_c(t) - D)$
$xt_u(t)$:	Flux de pièces transportées à l'instant t entre la machine et le stock de produits finis
$xt_c(t)$:	Flux de pièces transportées à l'instant t entre le stock de produits finis et le client

Variables économiques

$Ct(t)$:	Coût total de transport à t
Ct_f :	Coût de transport de l'usine F_i au stock de matières premières/produits semi-finis B_f
Ct_b :	Coût de transfert de B_f vers la machine
Ct_u :	Coût de transfert de la machine M vers le stock de produits finis B_c
Ct_c :	Coût de livraison au client
$g(x_f(t))$:	Coût de gestion des stocks (stockage/pénuries) de matières premières/produits semi-finis
$c_{B_f}^+$:	Coût de stockage de matières premières/produits semi-finis
$c_{B_f}^-$:	Coût de pénuries de matières premières/produits semi-finis
$g(x_c(t))$:	Coût de gestion des stocks (stockage/pénuries) de produits finis
$c_{B_c}^+$:	Coût de stockage de produits finis
$c_{B_c}^-$:	Coût de pénuries de produits finis
C_{en} :	Coût fixe environnemental
C_s :	Coût fixe social
$C_{ec}(t)$:	Coût total économique : somme des coûts de transport, de stockage et d'achat à t
$C(t)$:	Coût total (somme de C_{en} , C_s et $C_{ec}(t)$)
Cd :	Coût fixe d'émission de CO_2 de l'usine (€)
E_m :	Emission totale de CO_2 de l'usine ($g CO_2$)
C_{CO_2} :	Coût fixe de compensation d'émission de CO_2 (€/t CO_2)
C_{ef} :	Coût fixe environnemental lié à l'usine
C_{a1} :	Coût d'achat par produit acheté à l'usine
C_{a2} :	Coût d'achat par produit acheté au sous-traitant

Ce_{f1} :	Coût environnemental par pièce transportée entre l'usine et le stock de produits semi-finis
Ce_{f2} :	Coût environnemental par pièce transportée entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis
C_{s1} :	Coût social/sociétal par unité achetée à l'usine
C_{s2} :	Coût social/sociétal par unité achetée au sous-traitant
Ct_1 :	Coût de transport par camion pour l'usine
Ct_2 :	Coût de transport par camion pour le sous-traitant
$L_T(t, \vec{S})$:	Coût total moyen nominal sur un horizon fini pour une politique Echelon Base Stock (problème de dimensionnement des stocks)
$L_T(t, \vec{S}) :$	Coût total moyen perturbé sur un horizon fini pour une politique Echelon Base Stock (problème de dimensionnement des stocks)
$L_T(t, a)$:	Coût total moyen nominal sur un horizon fini (problème de réapprovisionnement)
$L_T^\Delta(t, a + \Delta a)$:	Coût total moyen perturbé sur un horizon fini (problème de réapprovisionnement)
$L_{CO2}(a)$:	Quantité nominale d'émissions totales de gaz ζ (problème de réapprovisionnement)
$L_{CO2}^\Delta(a + \Delta a)$	Quantité perturbée d'émissions totales de gaz ζ (problème de réapprovisionnement)

Variables IPA

SB_f^Δ :	Niveau d'échelon base stock perturbé du premier étage
$d_{f1}^\Delta(t)$:	Quantité de pièces de réapprovisionnement pour l'usine autorisée pour la trajectoire perturbée
$x_f^\Delta(t)$:	Niveau de stock du stock B_f à l'instant t perturbé.
$y_f^\Delta(t)$:	Trajectoire perturbée de $y_f(t)$ pour le premier étage ($\tau_{f_i-B_f} - B_f - \tau_{B_f-U}$)
SB_c^Δ :	Niveau d'échelon base stock perturbé du deuxième étage
$d_m^\Delta(t)$:	Autorisation de production de l'usine (Quantité) pour la trajectoire perturbée
$x_c^\Delta(t)$:	Niveau de stock B_c à l'instant t perturbée
$y_c^\Delta(t)$:	Trajectoire perturbée de $y_c(t)$ pour le deuxième étage ($\tau_{M-B_c} - B_c - \tau_{B_c-c}$)

Notations

Δ_1 :	Valeur de la perturbation de SB_f
Δ_2 :	Valeur de la perturbation de SB_c
Δa :	Perturbation de la proportion à acheter à l'usine de produits semi-finis

Introduction générale

Les entreprises dans leur quête pour être compétitives doivent adapter leur stratégie afin de subsister dans un monde fortement concurrentiel et en constante évolution. Les différentes conséquences des activités humaines sur l'environnement et sur la société requièrent qu'elles prennent part aux efforts pour réduire et réparer les dommages dont elles sont responsables. Ces conséquences ont une incidence sur la conservation de l'équilibre de la Planète et sur la qualité de vie et le bien-être des personnes. En outre, la manière dont les entreprises assument leur responsabilité vis-à-vis de l'environnement et de la société contribue à leur pérennité, notamment l'image et la réputation de l'entreprise se reflètent dans la consommation et la fidélisation des clients. Ainsi, la durabilité d'une entreprise n'est pas basée que sur des aspects purement économiques, mais aussi sur la construction de ses relations avec l'environnement et ses parties prenantes.

Dans ce contexte, bien que les objectifs économiques propres à chaque entreprise restent inchangés, la complexité pour en définir de nouveaux et les atteindre augmente car de nouvelles contraintes doivent être considérées, ce qui implique une redéfinition de leur stratégie. De plus, les entreprises sont soumises à différentes incertitudes qui perturbent leur fonctionnement normal, lesquelles peuvent concerner les moyens de production, les formes d'approvisionnement, les conditions sociopolitiques de l'environnement dans lequel elles travaillent, etc., ce qui, à son tour, a une incidence sur la satisfaction du client et sur les coûts de leurs opérations. De cette manière, la réduction de ces coûts continue à être un facteur clé pour leur réussite.

Toutes les activités de l'entreprise consomment des ressources de divers types : matérielles, techniques, humaines, informationnelles et financières. Et la manière dont ces ressources sont obtenues établit des échanges avec l'environnement. Ces échanges sont faits à travers des flux (physiques, financiers et informationnels), lesquels nécessitent des mécanismes de coordination tant des flux entre l'entreprise et ses parties prenantes que des flux à l'intérieur de l'entreprise afin de garantir son bon fonctionnement.

Dans les travaux de cette thèse, nous nous intéressons au pilotage des flux dans la production, essentiellement les flux physiques et informationnels, tout en tenant compte d'aspects liés au développement durable. Les concepts issus du développement durable sont intégrés dans notre problématique sous forme de coûts supplémentaires, lesquels nous permettent d'une part, de représenter les impacts générés par la production sur l'environnement et sur la société et d'autre part, de les internaliser dans les coûts d'opération. C'est pourquoi, la méthodologie que nous proposons est dirigée vers la minimisation des coûts globaux.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre présente une revue de la littérature concernant les éléments qui composent la stratégie de production des entreprises. Ce premier chapitre est scindé en trois parties. Dans la première partie, nous nous intéressons à des aspects communs aux différentes stratégies de production de l'entreprise. Ensuite, nous présentons une stratégie de production qui intègre la fiabilité à la gestion de la production, plus précisément les pannes des machines et par conséquent la gestion de la maintenance. Dans la seconde partie, nous introduisons la problématique du développement durable et comment il est intégré dans la stratégie des entreprises. Ce chapitre s'achève par la présentation de nos objectifs de recherche et la manière de les atteindre.

Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude d'un système de production composé d'une machine qui est sujette à des défaillances aléatoires. Nous considérons explicitement dans la modélisation de ce système des délais de transfert et de transport. Nous proposons une stratégie qui intègre à la gestion de la production, une politique de maintenance préventive. La minimisation des coûts est faite à travers l'analyse des perturbations infinitésimales (IPA), une technique basée sur l'étude des trajectoires. De cette manière, nous déterminons la période de la maintenance préventive ainsi que le niveau de stock qui minimisent les coûts globaux.

Dans le troisième chapitre, nous continuons l'étude du système de production du deuxième chapitre, pour lequel nous intégrons à son pilotage, des critères de durabilité, notamment les émissions de gaz à effet de serre de la machine et de particules fines, lesquelles constituent un risque pour la santé des personnes qui sont exposées à celles-ci. La notion de temps d'exposition est également intégrée dans notre modèle. Ces éléments sont considérés sous forme de coûts. La méthode IPA est également utilisée pour la minimisation des coûts globaux, composés des coûts purement économiques, de coûts environnementaux et sociaux.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous considérons un système de production de deux étages, pour lequel nous intégrons des aspects du développement durable au réapprovisionnement des matières premières/produits semi-finis. De plus, les aléas sont intégrés sous forme d'indisponibilités des sources de réapprovisionnement et des pannes des machines. Les sources de réapprovisionnement peuvent être propres à l'entreprise en question ou externes comme un sous-traitant. Pour l'optimisation des coûts globaux, nous conservons la méthode IPA.

Ce mémoire se terminera par la conclusion de ces travaux, laquelle aboutit sur les perspectives et les possibles pistes pour la continuation de nos travaux.

Chapitre 1 : Stratégie de production de l'entreprise : des objectifs économiques aux objectifs durables

Introduction

Chacune des fonctions de l'entreprise contribue à sa stratégie globale afin de garantir sa pérennité dans le temps. Cette stratégie, initialement orientée sur des objectifs économiques, a évolué afin d'intégrer les différentes parties prenantes comme la satisfaction des clients et l'environnement local et global de l'entreprise. En effet, de nouvelles contraintes qui étaient négligées auparavant, prennent aujourd'hui de l'importance parce qu'elles garantissent en plus de la pérennité de l'entreprise, celle de son environnement. De nombreux travaux ont mis en évidence que le changement climatique est fortement influencé par les activités humaines et l'émission des gaz à effet de serre qu'elles génèrent ([JAB13]). De plus, il est possible qu'une augmentation drastique de la température de la Terre au-delà d'un seuil de réchauffement entraîne des conséquences néfastes pour la vie sur la Planète [RAM08]. Bien que nous ne connaissions pas encore toutes les conséquences futures sur l'environnement et sur l'Homme, il est nécessaire d'agir sur les effets connus afin de les limiter et ainsi éviter des dommages irréversibles.

Ce chapitre est décomposé en trois grandes parties. Dans la première partie, nous présentons les différents éléments qui contribuent à la stratégie de l'entreprise à travers la fonction de la production. Nous nous intéressons d'abord aux aspects qui ont toujours influencé cette stratégie. Pour ce faire, nous présenterons les différents niveaux de décision, les objectifs de la production qui contribuent à la stratégie globale de l'entreprise, ainsi que les méthodes pour atteindre ces objectifs dans un environnement aléatoire. Dans une deuxième partie, nous présentons ensuite comment la stratégie de l'entreprise a évolué pour intégrer des aspects autres que purement économiques. Ceci est motivé par la pression des différentes parties prenantes, mais également par une volonté propre des entreprises [POR06]. Puis, dans la troisième partie, nous détaillons la conduite de nos travaux de recherche.

Partie I – Pilotage de la production

Les décisions dans l'entreprise

Dans la vie quotidienne, nous sommes confrontés continûment à faire des choix parmi un éventail de possibilités. D'une manière similaire, les entreprises expérimentent des situations dans lesquelles il est nécessaire de prendre des décisions qui impactent l'organisation au cours du temps. Toutes les décisions prises au sein d'une entreprise doivent converger afin d'atteindre des objectifs globaux pour l'organisation. Nous exposons ci-après, comment ces décisions sont classées.

1.1.1. Les niveaux de décision

Les décisions dans une entreprise peuvent être classées en trois niveaux :

- Stratégique
- Tactique
- Opérationnel

Ces trois niveaux répondent au degré de répercussion de la décision pour l'entreprise et l'horizon de temps de la décision. Ces trois niveaux vont être présentés ci-après comme suit :

Niveau stratégique : A ce niveau, sont prises toutes les décisions qui visent à diriger l'organisation d'une entreprise. Elles répondent à des objectifs clairs qui sont établis afin d'atteindre la " Vision " de l'organisation. Elles définissent la relation de l'entreprise avec son environnement. Ces décisions concernent le long terme. L'horizon de planification de ces décisions est généralement supérieur à deux ans. Cependant il peut varier selon le type de production. Ces décisions concernent la localisation de l'entreprise, la capacité de production, l'implantation sur un nouveau marché, le lancement de nouveaux produits, etc. [XIE89].

Niveau tactique : Ces décisions sont orientées vers les actions qu'il faut prendre pour atteindre les objectifs stratégiques. Elles traduisent les objectifs exprimés dans la " Vision " de l'entreprise en des actions concrètes. Ces décisions concernent le moyen terme, lequel peut être entre 6 et 36 mois. A ce niveau appartiennent les décisions telles que la planification de la production, la définition des règles d'approvisionnement, le dimensionnement des ressources, le pilotage de la production, la localisation des stocks, etc. [VAL99].

Niveau opérationnel : Il tient compte des décisions au plus bas niveau. L'horizon de planification de ces décisions peut être compris entre une heure à 6 mois [VAL99]. Ces décisions sont liées aux activités quotidiennes de l'entreprise, par exemple l'affectation des tâches aux opérateurs, l'ordonnancement de tâches dans un atelier, la réduction de la consommation d'énergie, entre autres.

Jusqu'à présent, il n'existe pas une délimitation claire dans le temps entre ces niveaux de décisions [BOU13]. Cependant, le niveau de responsabilité ainsi que le niveau de difficulté sont clairement associés au niveau de décision (stratégique, tactique ou opérationnel). Ainsi, les décisions stratégiques impliquent un plus grand degré de responsabilité et de difficulté que les décisions au niveau tactique et à la fois les décisions tactiques sont plus difficiles et exigent une plus grande responsabilité que les décisions au niveau opérationnel. Les problématiques abordées dans les travaux de notre thèse appartiennent principalement au niveau de décision tactique.

Chaque niveau de décision a des objectifs associés, lesquels sont définis par rapport à la stratégie de l'entreprise. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à ceux-ci.

1.1.2. Les objectifs à atteindre en production

Nous avons défini les différents niveaux de décision existant au sein d'une entreprise. La stratégie de l'entreprise se décline alors au travers d'objectifs sur les différents niveaux décisionnels et par conséquent sur les différentes fonctions de l'entreprise. Ainsi, les objectifs définis pour une fonction contribuent aux objectifs globaux.

Dans notre travail, nous nous focalisons sur les objectifs de la production. Ils répondent à une stratégie de production laquelle est définie par Swamidass et Newell [SWA87] comme : " les

différentes compétences de la fonction de production utilisées pour la poursuite d'un avantage compétitif ". De cette manière, il est nécessaire de définir des mesures de performance qui permettent de déterminer à quel niveau les objectifs dans la production sont atteints. Nous présentons donc différents objectifs qui font l'objet de la définition de différentes mesures de performances dans la production. D'après Koren *et al.* [KOR98], dans un système de production, les mesures de performances sont liées à des objectifs de coûts, de fiabilité, de flexibilité, de temps/délais, de qualité et de productivité.

Pour ces objectifs, Hon [HON05] propose une liste non exhaustive contenant des mesures de performance ou des indicateurs associés à chacun d'eux, parmi lesquelles nous pouvons citer :

- Coûts : Coûts d'entreposage, coût d'une rupture de stock, coûts totaux de la qualité, coût unitaire de main d'œuvre, coût de production par pièce, coût unitaire des matières.
- Fiabilité : Taux de panne, productivité.
- Flexibilité : Réutilisation des composants, flexibilité de la machine, nombre de pièces différentes, flexibilité des processus, souplesse d'acheminement, flexibilité totale du système.
- Temps/délais : Temps moyen de traitement par lot, délai de production moyen, temps de changement, durée du cycle de production, temps d'arrêt des machines, temps de préparation.
- Qualité : Qualité moyenne après contrôle, temps moyen pour qu'une défaillance se présente, indice de capacité des processus, taux de retours des clients, taux de rebut, taux de réclamations sous garantie.
- Productivité : Productivité du travail, efficacité de la machine, taux de rendement global, rendement des actifs, rotation des stocks, rendement opérationnel, maintenance productive totale, valeur ajoutée par personne.

Ces objectifs sont atteints à travers la politique de gestion des différents flux du système (Figure 1.1.) Dans la section à venir, nous présentons différentes politiques de production qui déterminent la gestion des différents flux du système, plus spécifiquement des flux physiques et d'information.

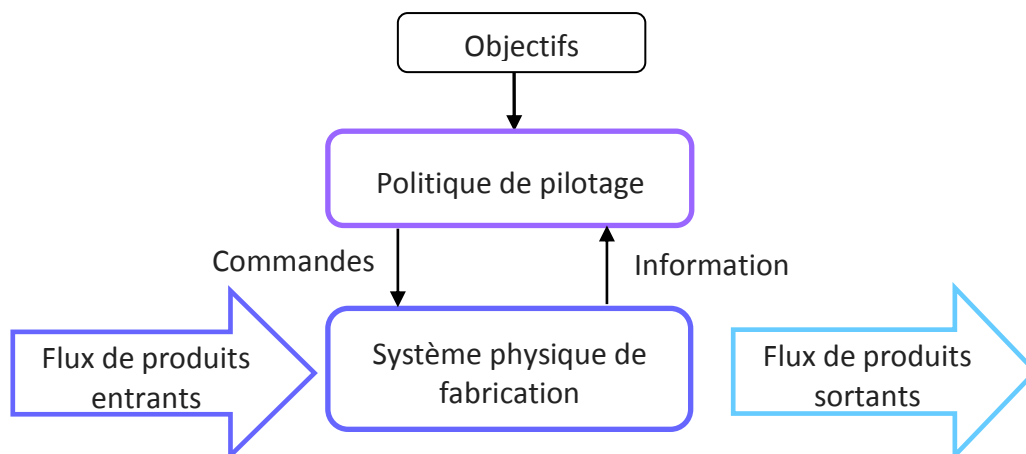


Figure 1.1. Système de production. Source : Adaptée de [TAM08]

1.1.3. Le pilotage de la production

En production, il existe plusieurs types de décisions tels que le séquençement des tâches, l'affectation des tâches et des hommes aux différents postes de travail, etc. Les décisions dans un système de production appartiennent principalement aux niveaux opérationnels et tactique. Dans cette section, nous nous intéressons particulièrement aux décisions concernant la gestion des flux dans le système. Ainsi, nous définissons différents concepts avant d'évoquer différentes politiques de pilotage des flux.

Dans la littérature, nous trouvons différentes définitions de ce qu'est un système de production ([MOU05]; [TAM08]; [TUR10]). De ces définitions, nous retenons qu'un **système de production** est un ensemble de ressources organisées (produits à différents stades de fabrication et des stocks, des hommes, des équipements, des informations, des moyens de transfert ou de transport, etc.) de manière à transformer des matières premières ou des composants en produits finis.

Il existe plusieurs types de systèmes de production. Selon une classification par la configuration du système, Hon [HON05] en a identifié cinq types : le premier correspond à **une seule machine** ou poste de travail qui est le format le plus simple d'un système de production.

Ensuite, nous pouvons trouver les **cellules de fabrication** ou **îlots de fabrication**, qui sont des ensembles de machines regroupées par type de produits fabriqués. Un autre type correspond aux **lignes de transfert** ou **lignes de fabrication**. Dallery et Gershwin [DAL92] les décrivent comme des systèmes composés de postes de travail ou de machines, de zones de stockage ou de stocks tampons et de matières qui passent par chaque poste de travail et par chaque zone de stockage une seule fois dans un ordre établi.

Dans ces systèmes, il y a généralement un seul type de produit. Ceux-ci arrivent à la première machine et ils quittent le système par la dernière machine de la ligne de fabrication. La seule source de hasard est le temps passé dans chaque machine. Ceci peut être dû au temps de fabrication aléatoire, aux pannes et réparations ou les trois. Le quatrième type identifié correspond aux **usines** ou **fabriques**. Celles-ci sont considérées comme un système complet qui tient compte de l'ensemble du cycle, depuis la conception du produit, jusqu'à l'expédition. Le dernier type de système de production identifié par Hon est le **réseau de production**, qui est un réseau lié par des chaînes de production dans lesquelles chaque nœud possède son propre cœur de compétences [HON05].

Un système de production ne se limite pas aux activités de fabrication. En effet, d'autres activités, telles que le réapprovisionnement, le transport, le stockage et la distribution interagissent.

Différents flux sont associés à l'exécution de ces activités. Par **flux** nous comprenons le mouvement dans un système, caractérisé par un débit et mesuré dans un point donné [FON99]. Ces flux sont de trois natures : flux physiques, flux d'information et flux financiers. Cette classification par flux est très utilisée dans la littérature [BAB05].

- Les **flux physiques** concernent les flux de matières (matières premières, produits finis, en-cours..) qui vont dans le sens de l'amont vers l'aval. Dans le cas d'un système en boucle fermée avec récupération d'emballages, des produits en fin de vie ou d'autres éléments nécessaires à la distribution au client, le sens de ce flux est aussi de l'aval vers l'amont.

- Les **flux financiers** sont les flux associés aux flux physiques et représentent les transferts monétaires entre les différents acteurs du système.
- Les **flux d'information** comportent des données associées aux flux physiques et financiers qui répondent aux questions : quoi ? quand ? combien ? et comment ? (Exemples : quantité de pièces à réapprovisionner, moyen de paiement, quantité de pièces dans les stocks...). En général, ces flux s'écoulent de l'amont vers l'aval ou de l'aval vers l'amont ([BOU13]).

Une autre classification des flux est proposée par Fontanili [FON99], selon la localisation des flux dans le système. Les flux externes sont ceux associés à l'approvisionnement et à la distribution et les flux **internes** font l'objet de la gestion de production.

Le pilotage est alors défini par Dallery et Véricourt [DAL99] comme « ...*l'ensemble des règles de gestion de production (règles qui répondent principalement aux questions "quand, où et que produire ?")* ». Le **pilotage des systèmes de production** vise donc à coordonner les différents types de flux entre les ressources (matériels et humains) du système, en respectant les contraintes de coût, de qualité et de délais. Nous délimitons notre étude au pilotage des flux physiques et d'information et présentons dans ce qui suit les politiques de pilotage de ces flux dans les systèmes de production.

Politiques de pilotage des flux

Les politiques de pilotage de la production ont pour objectif de coordonner les flux physiques et les flux d'information tout en garantissant un niveau de service et en minimisant les coûts.

Dans la littérature, nous trouvons différentes politiques de pilotage des flux dans la production. De nombreuses classifications ont été faites : politiques de pilotage **réactives** et politiques de pilotage **proactives** [ARD08], politiques de pilotage à **flux tirés** et politiques de pilotage à **flux poussés** [BOO05] ou encore politiques de pilotage suivant le type d'information de la demande [BAB05].

Nous constatons que différentes appellations donnent lieu à un même type de classification. C'est le cas pour les politiques réactives ou à flux tirés et les politiques proactives ou à flux poussés. Ces politiques suivent le même principe, elles sont donc équivalentes indépendamment de l'appellation qu'elles reçoivent. Les premières répondent à des demandes réelles et les deuxièmes à des prévisions de la demande.

Les politiques de pilotage à flux tirés ou réactives déclenchent un ordre de production ou un ordre de réapprovisionnement en réponse à l'arrivée d'une demande réelle (du client ou des étapes de fabrication en aval). Dans ces politiques, la production est tirée par les étapes en aval du processus de fabrication. Alors que dans les politiques de pilotage à flux poussé, le déclenchement de ces ordres est fait en réponse à des estimations ou des prévisions de la demande. La production est donc poussée de l'amont vers l'aval, sans tenir compte de la capacité de traiter les ordres par l'étape en aval.

La deuxième classification est basée sur l'information de la demande [BAB05]. Ainsi, si l'information des demandes est fiable par rapport aux quantités et dates de besoin, elles sont

appelées **commandes fermes**. Si l'information de la demande est incertaine, l'information de la demande est donnée par des **prévisions**. Le dernier niveau de cette classification correspond au cas où il n'y a aucune ou peu d'information sur la demande.

Un autre type de politique de pilotage est ajouté à cette classification : politiques de pilotage **hybrides**. Elles sont hybrides puisqu'elles combinent les avantages des politiques à flux poussés et à flux tirés pour créer de nouvelles politiques de contrôle de flux dans la production.

D'autres stratégies de pilotage des flux peuvent être le résultat de la combinaison des politiques de pilotage à flux poussés ou à flux tirés. Ainsi, par exemple, une politique de pilotage à flux poussés peut s'utiliser en amont de la chaîne de production lorsque les délais de fabrication sont importants et une politique de pilotage à flux tirés peut être utilisée en aval. Ces politiques sont basées sur un **point de basculement** entre la production à la commande et la production par anticipation [DAL99]. Ce type de combinaison de politiques ne fait pas l'objet de notre travail.

Les différentes politiques qui intègrent les trois types de politiques de pilotage selon la classification que nous avons adoptée : politiques de pilotage à flux tirés, politiques de pilotage à flux poussés et politiques de pilotage hybrides sont détaillées dans l'Annexe 1. Le Tableau 1.1. propose une synthèse de ces politiques selon la classification que nous avons proposée avec leurs avantages et leurs inconvénients. Les politiques exposées peuvent être utilisées dans un système de production simple ou à plusieurs étages.

Tableau 1.1. Synthèse des politiques de pilotage

Politique de pilotage	Type de flux	Paramètres	Avantages	Limites
MRP0, MRP1, MRP2 ([DOL10], [THO14])	Flux poussés	-	- Permet un meilleur service au client. - Adéquation des charges et capacités ce qui contribue à réduire les stocks et les en-cours. - Possibilité de coupler ces politiques à une politique de pilotage à flux tirés.	- La demande est basée sur les prévisions statistiques, ce qui peut représenter une source de variabilité.
DRP ([THO14])	Flux poussés	-	- Approcher les prévisions des demandes réelles. - Peut être utilisée pour maintenir le niveau de stock de plusieurs sites de production à un niveau suffisant.	- Avec l'apparition du Juste à Temps cette méthode a perdu un peu sa pertinence.
Kanban ([DAL99], [LAM99],	Flux tirés	Nombre de kanbans pour chaque étage.	- Limiter les pièces dans chaque étage. - Plus le nombre de	-En absence d'un kanban, la production complète

[DUB02], [BAB05], [BOO05])			cartes est élevé, plus les stocks sont importants et plus le système est fiable et inversement [DUB02].	peut s'arrêter [DUB02]
CONWIP (CONstant Work In Process) ([DAL99], [BOO05], [MOU05], [THO14])	Flux tirés pour un seul étage ou hybrides (flux poussés et tirés) pour un système de plus d'un étage	Nombre de cartes dans le système.	- Les en-cours dans le système sont stables et constants. - Un seul ensemble de cartes permet de limiter le nombre de pièces dans le système.	- Pour un système de plus d'un étage, le nombre de pièces dans chaque étage n'est pas limité, seul le nombre de pièces dans le système l'est.
Base Stock (Stock Nominal) ([GLA95b], [DAL99], [BOO05], [MOU05], [ARD08])	Flux tirés	Niveaux de stock nominal de chaque étage.	- Tous les étages partagent la même information sur la demande. - Les stocks physiques sont limités par les niveaux de stock nominal de chaque étage.	- Le nombre de pièces dans le système n'est pas limité.
Kanban Généralisé ([BOO05], [BAB05], [ARD08])	Flux tirés	Nombre de kanbans et le niveau de stock nominal de chaque étage.	- Les kanbans permettent de contrôler le transfert de l'information sur la demande ainsi que le transfert des pièces entre chaque étage.	- Blocage du système lorsqu'un kanban n'est pas disponible à l'arrivée d'une demande. - Deux paramètres par étage dans le système.
Kanban Etendu ([DAL99], [BOO05], [BAB05])	Flux tirés	Nombre de kanbans et le niveau de stock nominal pour chaque étage.	- Tous les étages partagent la même information sur la demande. - Le nombre de pièces dans un étage est limité par le nombre de kanbans.	- Deux paramètres par étage dans le système.

Hedging Point (Point de séparation) ([KIM83], [AKE86], [BIE88], [GLA95a], [PER95], [BOU98], [KEN00], [MAR04], [AHM11], [KHO16])	Hybrides (Flux poussés et flux tirés)	Le point de séparation pour chaque étage.	- Il y a un équilibre entre l'anticipation de la demande et la production à la commande. - Elle permet de piloter la production en tenant compte des aléas.	- Pour des systèmes de plus d'un étage, il n'existe pas de coordination de la production entre les étages.
---	---	---	---	---

Les pénuries pendant des périodes d'indisponibilité ou d'arrêt de la production dans des systèmes industriels peuvent entraîner des coûts importants. Les interruptions de la production peuvent être provoquées entre autres raisons, par des défaillances imprévues, par des maintenances planifiées, etc. Il est donc essentiel pour l'entreprise d'en tenir compte et d'élaborer des stratégies de pilotage intégrant ces aspects.

Couplage de la production et de la maintenance

La gestion de la maintenance et la gestion de la production ont été longtemps considérées comme des problèmes isolés. Cependant, il existe une relation très étroite entre la disponibilité de l'équipement, la productivité des systèmes ainsi que la qualité des produits, puisque la maintenance régulière des ressources améliore la qualité des produits, mais elle réduit le temps opérationnel des systèmes [COL12]. Cette problématique connue comme maintenance intégrée consiste à coordonner les actions de maintenance et les activités de production.

Dans cette section, notre intérêt porte sur l'intégration de la maintenance préventive et de la production. En effet, la maintenance peut être classifiée en deux grandes familles : maintenance corrective et préventive. La maintenance corrective consiste à réparer ou remettre en état de fonctionnement la machine lorsque celle-ci tombe en panne [ALL08]. La maintenance préventive est définie comme la " *maintenance exécutée à des intervalles prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinée à réduire la probabilité des défaillances ou la dégradation du fonctionnement d'un bien* " [MON12]. Ces deux types de maintenance sont divisés à leur tour en d'autres types de maintenance (voir la Figure 1.2.). Pour plus d'informations, nous renvoyons le lecteur à [MON12].

Dans la littérature qui aborde le problème du couplage de la production et de la maintenance, les stratégies de maintenance les plus utilisées sont la maintenance préventive de type **bloc** et la maintenance préventive de type **âge** [BAR60]. Dans une maintenance préventive de type bloc, une action de maintenance est faite toutes les T unités de temps, indépendamment de l'âge et de l'utilisation du système. Et lorsqu'une panne se produit, une maintenance corrective est faite. Dans une maintenance préventive de type âge, une maintenance corrective est réalisée si la machine tombe en panne ou une maintenance préventive est réalisée après T unités d'utilisation sans défaillances. Généralement, les maintenances correctives ramènent la machine à un état de fonctionnement après une défaillance. Les actions de maintenance peuvent être **parfaites** ("as good as new") si le système revient à un état aussi bon que du neuf, **minimales** ("as bad as old") si les

actions de maintenance remettent le système dans l'état dans lequel il était juste avant de tomber en panne [PHA03] ou **imparfaites** si après l'action de maintenance le système revient à un état compris entre "as good as new" et "as bad as old" [DO15].

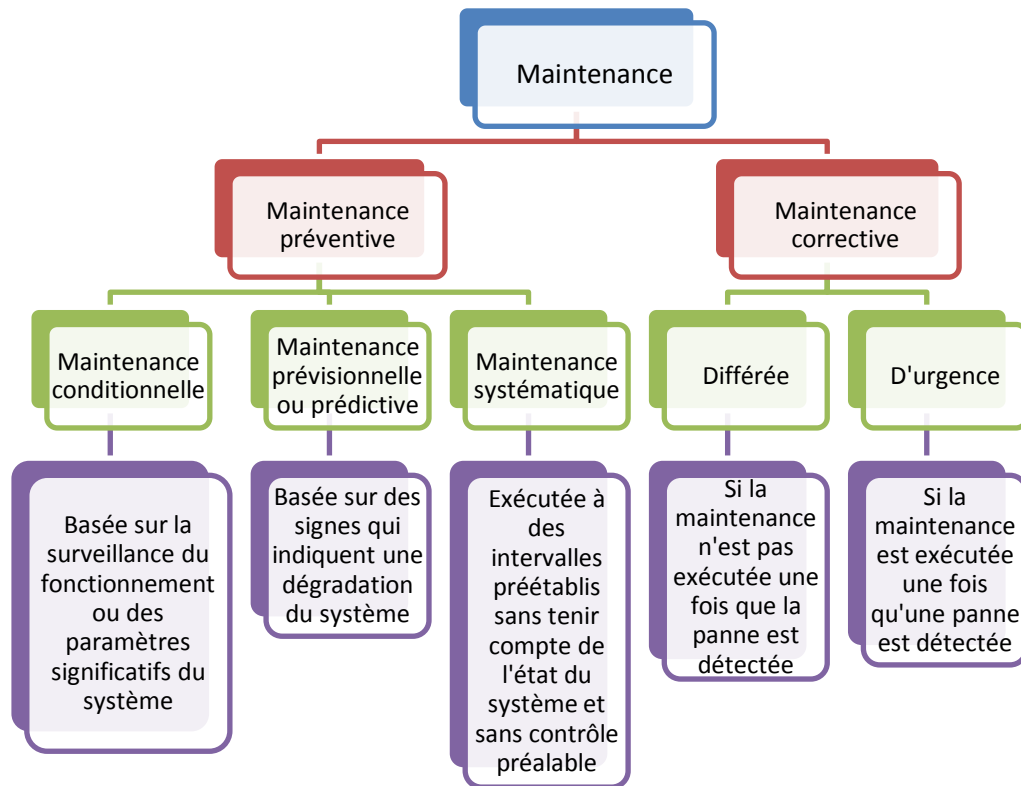


Figure 1.2. Types de maintenance. Source extraite et adaptée de la norme NF EN 13306 X 60-319 [NF EN 13306x 60-319]

Dans la réalité, les maintenances imparfaites sont les plus fréquentes [SAL01]. Les pannes peuvent être **dépendantes du temps** ou **dépendantes des opérations**. Les pannes dépendantes du temps peuvent se produire à n'importe quel moment même si le système ne travaille pas [TAN98]. Les pannes dépendantes des opérations surviennent seulement lorsque le système est en fonctionnement ou dû à son utilisation [DAL92].

Différentes problématiques ont été traitées dans la littérature lors du couplage de la production et de la maintenance. Ainsi, l'ordonnancement a été étudié afin de réduire les perturbations dans l'exécution des travaux dues aux actions de maintenance ([ALL08], [KAI10], [ROU13], [KRO13], [BEN14], [CUI14], [LU15], [LIU15b]). De manière similaire, la qualité des pièces produites a été considérée comme un critère pour effectuer des actions de maintenance préventive ([WAN03], [LIN05], [COL06], [COL12]).

Une autre problématique qui a été étudiée lors du couplage de la production et de la maintenance est la construction de stocks de sécurité (stocks tampons) pour satisfaire la demande pendant les périodes de maintenance et d'indisponibilité de la production. Dans ces problèmes, une

politique de maintenance préventive de type âge ou de type bloc est couplée à une politique de pilotage de flux, notamment la politique point de séparation. Ces approches consistent à trouver un compromis entre les coûts de non-satisfaction des demandes, les coûts de stockage et les coûts des actions de maintenance. Pour ce type de problèmes, ces différents coûts doivent être minimisés dans une seule fonction afin de trouver un minimum global. En effet, la somme des minimums de chacun des coûts considérés indépendamment est généralement supérieure au minimum global [HAD11]. Ceci a été constaté dans Rezg *et al.* [REZ04] en comparant les coûts de la gestion du stock et de la gestion de la maintenance préventive lorsque ceux-ci sont considérés indépendamment et lorsqu'ils sont couplés. Les auteurs ont considéré une politique de type point de séparation et une maintenance préventive de type âge pour une ligne de production avec des machines identiques (i.e. même taux de production) et un seul stock à la fin de la ligne. L'approche couplée a démontrée être meilleure en termes de coût par rapport aux résultats obtenus en considérant la production et la maintenance indépendamment. Cette même stratégie a été étudiée dans [SAL01] pour un système de production d'un seul stock. Les actions de maintenance préventive sont imparfaites. L'objectif est de déterminer la taille du stock qui permet de satisfaire les demandes pendant le temps que durent les actions de maintenance préventive, afin de minimiser la somme des coûts de stockage et pénuries par unité de temps. Gharbi *et al.* [GHA07] considèrent la stratégie de maintenance de type âge couplée à la politique de production de type point de séparation pour un système de production composé d'une machine et d'un stock. Les fonctions de coût sont établies analytiquement à partir d'une étude des surfaces pour différents scénarios. Une procédure numérique a été utilisée pour trouver les valeurs du niveau de stock et de la période de maintenance préventive qui minimisent le coût.

De même, la politique point de séparation a été couplée à la politique de maintenance préventive de type bloc pour générer une stratégie intégrée de production et de maintenance. Dans Chelbi et Ait-Kadi [CHE04], cette stratégie est utilisée pour déterminer les valeurs optimales de la période de maintenance préventive et de la taille du stock dans une ligne d'assemblage. Dans leur modèle, les actions de maintenance sont considérées comme étant parfaites. Une procédure numérique a été proposée pour minimiser le coût total par unité de temps. Les résultats de ce problème montrent que plus la période de maintenance préventive augmente, plus la taille du stock optimal est proche du stock consommé pendant le temps des maintenances correctives. Berthaut *et al.* [BER10] proposent une stratégie qui couple la maintenance préventive de type bloc et une politique de type point de séparation avec deux points de séparation pour un système de production composé d'une machine et d'un stock. Le premier des points de séparation sert à déterminer si le niveau de stock est à un niveau suffisant pour effectuer la maintenance préventive et l'autre pour piloter la production. Pour obtenir une solution approchée des valeurs des points de séparation et de la période de maintenance préventive, les auteurs utilisent la méthodologie des surfaces de réponse. Les résultats montrent qu'en termes de coût, l'approche proposée est meilleure comparée à une politique avec un seul point de séparation couplée à une politique de maintenance de type bloc. Une stratégie similaire de maintenance et de production a été proposée par Assid *et al.* [ASS15b], laquelle est implémentée pour la production de deux types différents de produits. Les auteurs intègrent ainsi dans la stratégie proposée le problème de configuration de la machine. Dans Berthaut *et al.* [BER11a], une politique de type point de séparation est couplée à une maintenance de type bloc modifiée. La maintenance préventive est faite seulement si le temps écoulé depuis la dernière maintenance dépasse un seuil de temps spécifié. La méthodologie des surfaces de réponse a également été utilisée pour déterminer les paramètres qui minimisent le coût dans cette stratégie. La politique proposée a été comparée avec la politique de type point de séparation couplée aux stratégies de type âge et de type bloc dans lesquelles les actions de maintenance préventive sont faites à chaque période. La stratégie proposée a démontré être meilleure en termes de coût que ces deux autres stratégies.

Nous remarquons que dans toutes les approches qui couplent le pilotage de la production et de la maintenance préventive mentionnées auparavant, les auteurs ont recours à des approches numériques, dû à la difficulté pour trouver les valeurs optimales du niveau de stock optimal et des périodes de maintenance préventive (de type âge ou de type bloc) de manière analytique. Notre intérêt porte sur les approches qui cherchent un compromis entre les différents coûts. En effet, il a été montré que les approches couplées sont plus efficaces en matière de coût que les approches dissociées [REZ04]. Nous présentons dans ce qui suit, des méthodes d'optimisation pour un environnement aléatoire. En effet, comme il a été énoncé dans [CUI14], les incertitudes liées aux défaillances du système rendent le problème d'optimisation comme un problème d'optimisation stochastique.

Lorsque nous traitons un système dans l'idée d'apporter des améliorations aux processus qui le composent, nous nous intéressons à différentes mesures de performance ou des éléments qui contribuent à atteindre les objectifs fixés aux différents niveaux de décision. Ces mesures de performance dépendent souvent de différents paramètres. Si nous nous intéressons à connaître leur impact sur le système lorsque ces paramètres sont variés, nous faisons référence à l'évaluation des performances. Mais, si nous nous intéressons à connaître la meilleure valeur d'un objectif ou d'une mesure de performance, nous nous référons à l'optimisation.

Dans les systèmes de production, nous sommes la plupart du temps confrontés à différents aléas comme des pannes des machines, des retards dans le transport, des indisponibilités des ressources, etc. Ces situations rendent difficile la résolution analytique du problème d'optimisation, ce qui fait que souvent des techniques de simulation sont utilisées pour leur résolution. Cependant, l'utilisation de la simulation comme seul outil pour l'optimisation, peut être coûteux en termes computationnels. De plus, si les résultats issus de la simulation sont destinés à être utilisés dans des environnements réels, il est nécessaire de trouver des mécanismes fiables pour les valider.

Dans ce sens, une approche de résolution combinant la simulation et des méthodes analytiques comme l'**optimisation basée sur des trajectoires d'échantillon** peut être intéressante. En effet, cette approche permet d'intégrer des résultats théoriques dans les algorithmes de simulation, ce qui valide d'une certaine manière les résultats obtenus via la simulation. Une **trajectoire d'échantillon** est la séquence d'une simulation ou d'une expérimentation. Celle-ci contient toute l'information de la simulation, telle que les événements, l'état du système et le temps auquel chaque événement se produit. Cette trajectoire est décrite en fonction d'un ou plusieurs paramètres d'intérêt. Ainsi, par exemple, dans un système de production soumis à des pannes, la séquence des événements sera donnée par des pannes, des réparations et des périodes de production. Une défaillance fera changer l'état du système d'actif à inactif et inversement pour une réparation. Les temps de chacun de ces événements sont généralement donnés par des variables aléatoires qui représentent chacun des processus.

Les méthodes d'optimisation basées sur des trajectoires permettent généralement d'obtenir une information sur le **gradient** de la mesure de performance lorsqu'il est difficile de l'estimer analytiquement. Si la trajectoire d'échantillon est suffisamment longue, les estimateurs du gradient deviennent précis et ils peuvent être utilisés dans n'importe quelle procédure d'optimisation basée sur le gradient pour des systèmes déterministes [CAO07].

Les paramètres par rapport auxquels nous déterminons le gradient peuvent être des paramètres issus des **lois de probabilité** ou des paramètres **structurels**, c'est-à-dire, des paramètres

qui font partie de la mesure de la performance [RUB92]. Par exemple, dans un système de files d'attente, le paramètre pourrait être le taux de service d'un serveur lorsque les temps de service sont représentés par une loi exponentielle ou le nombre moyen d'arrivées de clients dans un intervalle de temps lorsque les arrivées sont représentées par une loi de Poisson. Dans ce cas, nous faisons référence à des paramètres de lois de probabilité. Dans un système de gestion de stock à date et quantité variables, les paramètres structurels peuvent être le point de commande ou le stock maximal après une livraison [FU94a]. D'après notre revue littéraire, les méthodes d'optimisation basées sur des trajectoires d'échantillon dans un environnement aléatoire entrent au moins dans une des deux catégories suivantes : méthodes d'optimisation basées sur des paramètres structurels ou méthodes d'optimisation basées sur des paramètres de lois de probabilité. Nous présentons différents types de méthodes pour chacune de ces catégories. Parmi ces méthodes, nous trouvons la famille de méthodes basées sur l'**Analyse des Perturbations (PA)** ou "*Perturbation Analysis*". Les extensions qui composent cette famille peuvent faire partie de deux types de méthodes. Dans ce qui suit, nous présentons d'abord l'**Analyse des Perturbations** et leurs extensions utilisées pour l'optimisation avec des paramètres structurels. Ensuite nous présentons la méthode "**Push-Out Score Function**" (**POSF**) [RUB92], laquelle considère exclusivement des paramètres structurels.

Analyse des Perturbations :

Les méthodes appartenant à cette famille utilisent deux simulations pour déterminer un gradient : une avec un paramètre d'intérêt θ et une autre avec $\theta \pm \Delta\theta$. La trajectoire d'échantillon de la simulation faite avec θ est connue comme la **trajectoire nominale** et la mesure de performance est donnée par $L(\xi, \theta)$. La trajectoire d'échantillon de la simulation faite avec $\theta \pm \Delta\theta$ est connue comme la **trajectoire perturbée**. Celle-ci est déterminée à partir de la trajectoire nominale en perturbant de $\pm \Delta\theta$ le paramètre θ et la mesure de performance de cette trajectoire est notée par $L(\xi, \theta + \Delta\theta)$. Ensuite, si la fonction est continue sur θ , le gradient peut être estimé à partir des deux trajectoires d'échantillon :

$$\frac{\partial L(\xi, \theta)}{\partial \theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{L(\xi, \theta + \Delta\theta) - L(\xi, \theta)}{\Delta\theta} \quad (1.1)$$

Lorsque la perturbation appliquée est positive, nous devons prendre la dérivée à droite. Par contre si la perturbation appliquée est négative, nous prenons la dérivée à gauche [FU94a]. Dans l'équation (1.1), ξ représente les effets stochastiques, par exemple la génération de nombres aléatoires pendant le processus d'estimation.

D'après Ho [HO91 pp. 54-56], ces méthodes sont utilisées pour faire trois types de prédictions en observant une seule trajectoire. Ces trois prédictions sont :

- La prédiction déterministe : Elle consiste à prédire à partir de la trajectoire nominale ce qui se passe si une petite perturbation est appliquée sur celle-ci pour réaliser exactement la même expérience.
- La sensibilité de la mesure de performance lorsque le paramètre est changé : Dans celle-ci, l'intérêt est de réaliser une autre expérience avec une autre trajectoire nominale mais similaire en termes stochastiques (mêmes lois de probabilité).
- L'optimisation : l'estimation d'un **gradient**.

L'estimation du gradient utilisé pour l'optimisation est faite à partir des trajectoires nominale et perturbée comme il est montré dans l'équation (1.1). Lorsque ce gradient devient égal à zéro, il permet de trouver la valeur optimale de la fonction que l'on veut optimiser.

Nous nous intéressons maintenant aux méthodes de cette famille qui sont utilisées pour l'optimisation avec des paramètres structurels.

Méthodes d'optimisation pour des paramètres structurels

Les paramètres structurels font partie de la mesure de performance comme nous l'avons défini précédemment. Dans le cadre de l'optimisation des systèmes de production, les paramètres structurels pourraient être par exemple les paramètres des politiques de pilotage des flux tels que le nombre de kanbans à allouer à chaque étage d'une ligne de transfert, le point de séparation, lequel correspond à un niveau de stock, etc.

Les extensions de la famille de l'analyse des perturbations correspondant à des méthodes d'optimisation pour des paramètres structurels sont : l'**Analyse des Perturbations Infinitésimales (IPA)** ou "*Infinitesimal Perturbation Analysis IPA* ", l'**Analyse des Perturbations Lissées (SPA)** ou "*Smoothed Perturbation Analysis* ", l'**Analyse des Perturbations Finies (FPA)** ou "*Finite Perturbation Analysis* ", l'**Analyse des Perturbations Infinitésimales Structurelles (SIPA)** ou "*Structural Infinitesimal Perturbation Analysis* ". Toutes ces méthodes reposent sur l'idée des trajectoires nominale et perturbée.

L'**Analyse des Perturbations Infinitésimales (IPA)**, développée initialement pour des files d'attente [HO83], a été ensuite appliquée à des processus de Markov [CAO07 pp. 126-131]. Aujourd'hui, elle est utilisée pour l'optimisation à partir de paramètres structurels et pas uniquement à partir des paramètres des lois de probabilité. IPA a été utilisée dans [FU94a] pour déterminer les dérivées par rapport au point de commande du stock moyen, des demandes retardées et du coût par période pour un système de gestion de stock à date et quantité variables. Dans Yu et Cassandras ([YU02] et [YU04]), une application différente de cette méthode a été étudiée. Les gradients des mesures de performance par rapport aux paramètres de contrôle d'un système de production, qui dans ce cas correspond à un point de séparation ont été trouvés à l'aide de cette méthode. L'intérêt de leur étude porte sur l'optimisation du débit et du taux de débordement (c'est à-dire, lorsque le stock tampon devient plein). La dynamique du système a été représentée par un Modèle de Flux Stochastique (SFM *Stochastic Fluid Model*) ce qui a permis aux auteurs de trouver les paramètres optimaux sans faire appel à un modèle détaillé à événements discrets. Ce modèle particulièrement utilisé dans des systèmes de communication ([CAS02], [MEL07], [MAR10]), représente la transmission d'un paquet dans un réseau, tels que les bits en informatique par un **flux continu**¹. En effet, l'application de la méthode IPA à des Modèles de Flux Stochastique a démontrée produire des meilleurs estimateurs pour le contrôle et l'optimisation que pour l'évaluation des performances, puisqu'il est possible de déterminer avec précision les paramètres optimaux.

L'**Analyse des Perturbations Infinitésimales** suppose deux conditions pour son application :

¹D'après Mourani [MOU05], dans la production il existe deux types de modèles : **continu** et **discret**. Ces deux termes font référence aux flux de matières dans le système [SUR94]. Ainsi, lorsque les entités dans le système sont considérées comme étant discrètes, le flux est dit **discret**, c'est-à-dire, les pièces se déplacent individuellement à travers le système [FON99]. Par contre, si le volume de pièces discrètes est très important, les flux de pièces peuvent être approchés par un flux **continu**.

- Les paramètres par rapport auxquels les mesures de performances sont estimées sont continus.
- Lorsqu'une perturbation infiniment petite est appliquée sur un paramètre, l'ordre d'occurrence des événements n'est pas modifié, aussi connue comme " l'hypothèse de similarité déterministe" [LI89].

La plupart du temps, il peut être démontré que si la mesure de performance est continue, l'estimation de cette mesure de performance est non biaisée [FU94b]. Ceci en termes mathématiques revient à dire que dans l'équation (1.2), les opérateurs " E " et " $\frac{\partial}{\partial \theta}$ " ou " E " et " $\lim_{T \rightarrow \infty}$ " sont commutatifs [CAO07].

$$E \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [L(T, \xi, \theta)] \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \{ E [L(T, \xi, \theta)] \} \quad (1.2).$$

En d'autres termes, l'impartialité de cet estimateur correspond à dire qu'entre la trajectoire nominale et perturbée de la mesure de performance ne se produit pas d'écart significatif. Et par conséquent cette fonction est continûment différentiable sur l'ensemble des paramètres θ .

Un estimateur déterminé à partir des trajectoires est consistant s'il satisfait l'équation (1.3) suivante.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [L(T, \xi, \theta)] \right\} = \frac{\partial J(T, \xi, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} [L(T, \xi, \theta)] \right\} \quad (1.3).$$

Dans cette équation $\frac{\partial J(T, \xi, \theta)}{\partial \theta}$ représente la dérivée de la mesure de performance dans l'état stationnaire (i.e. lorsque les mesures de performance ne changent pas avec le temps). Cela revient à dire que lorsque l'estimation de la dérivée de la mesure de performance est faite sur un horizon de temps suffisamment long, elle peut être approximée à la valeur espérée de la mesure de performance.

Ces deux propriétés des estimateurs : impartialité (équation 1.2) et convergence (équation 1.3) peuvent être appliquées à des estimateurs de gradients déterminés à partir d'autres méthodes basées sur des trajectoires et non seulement à des gradients déterminés par la méthode IPA [HU90].

Les autres méthodes basées sur l'Analyse des Perturbations ont émergé comme une réponse à la non-satisfaction des conditions pour l'application de la méthode IPA (i.e. continuité sur les paramètres et séquence d'événements qui ne change pas). En effet, les discontinuités par rapport aux paramètres d'intérêt apparaissent lorsque la séquence des événements change [HO88]. Ainsi, plusieurs méthodes ont été proposées pour pallier les problèmes rencontrés lorsque les conditions d'application de la méthode IPA ne sont pas satisfaites (voir Annexe 2). Elles sont : l'**Analyse des Perturbations Lissées**, l'**Analyse des Perturbations Finies** et l'**Analyse des Perturbations Etendues**. L'**Analyse Infinitésimal des Perturbations Structurelles** est une extension de la méthode IPA mais pour des paramètres uniquement structurels.

Méthodes d'optimisation pour des paramètres d'une loi de probabilité

Dans ces méthodes, l'intérêt porte sur les paramètres qui décrivent les différents processus dans les systèmes. De cette façon, les mesures de performance sont optimisées à l'aide de paramètres des lois de probabilité. Ainsi, par exemple, pour représenter les défaillances d'une machine par une loi de Weibull, l'optimisation de la disponibilité ou des coûts de maintenance ou d'autres mesures de performance liées à la maintenance est faite par rapport aux paramètres de forme et d'échelle de cette loi.

Les méthodes d'optimisation basées sur des paramètres structurels mentionnées précédemment sont également applicables à l'optimisation de mesures de performance définies par rapport à des paramètres de lois de probabilité y compris la méthode de l'analyse des perturbations infinitésimales structurelles (voir Annexe 2) dans certains cas spéciaux [DAI95].

Parmi les méthodes qui peuvent être appliquées pour l'optimisation basée sur des paramètres des lois de probabilité nous trouvons la méthode du **Rapport de vraisemblance (LR)** ("*Likelihood Ratio Method* ") également connue comme la **Fonction de Score**. Cette méthode est également fondée sur l'Analyse des Perturbations et donc sur les trajectoires nominale et perturbée. Elle utilise un rapport de vraisemblance entre la loi de probabilité de la trajectoire perturbée et de la trajectoire nominale $\frac{\Phi(\theta + \Delta\theta)}{\Phi(\theta)}$ qui permet d'estimer la dérivée d'une mesure de performance. Ce rapport

indique que la même valeur de la mesure de performance de la trajectoire nominale peut être obtenue mais avec une probabilité différente qui est ajustée par le rapport de vraisemblance [CAO07 pp. 133-135]. Cette méthode, comparée à la méthode IPA pour l'optimisation avec des paramètres de lois de probabilité produit un estimateur qui est non biaisé la plupart du temps, cependant la variance peut être plus grande [HO91]. De même, l'estimateur LR peut s'implémenter de manière similaire à l'estimateur IPA et il fonctionne souvent dans des systèmes dans lesquels la méthode IPA ne peut pas être appliquée.

La méthode " Push-Out Score Function " (POSF) : Cette méthode suppose que le vecteur de paramètres d'intérêt peut être décomposé en deux : une partie probabiliste et une partie déterministe (qui dépend de l'état stable du système). Pour la partie probabiliste, la méthode du rapport de vraisemblance peut être appliquée (car elle comprend des paramètres d'une loi de probabilité), mais pour la partie déterministe, la fonction de performance peut ne pas être continûment différentiable par rapport aux paramètres [RUB92]. Dans ce cas, la technique "*push-out* " est utilisée, laquelle consiste à éliminer le vecteur de paramètres déterministes de la fonction de performance et à le mettre en fonction d'un vecteur de nouvelles variables données en fonction d'une loi de probabilité. Ainsi, la mesure de performance devient indépendante du paramètre déterministe.

Nous venons de présenter différentes méthodes d'optimisation pour un environnement aléatoire basées sur des trajectoires. Ces méthodes permettent d'obtenir de l'information sur le gradient de la mesure de performance étudiée lorsqu'il est difficile de l'estimer théoriquement. Le Tableau A.2.1 donné en Annexe 2 montre une synthèse des différentes méthodes citées précédemment selon les différentes caractéristiques des paramètres et des mesures de performance.

Parmi les différentes méthodes que nous venons de présenter, nous avons fait le choix de la méthode IPA dans la suite de nos travaux. Cette méthode, en plus d'être la plus efficace des méthodes basées sur les trajectoires [DAI95], permet d'optimiser des fonctions de performance à

partir des deux types de paramètres : structurels et des lois de probabilité. Dans nos travaux, nous nous confrontons à l'optimisation basée sur ces deux types de paramètres. De plus, il est possible d'obtenir de l'information sur la mesure de performance à partir d'une seule simulation, notamment la dérivée de la mesure de performance à partir de laquelle nous pouvons déterminer le paramètre qui optimise la fonction d'intérêt. Finalement, elle permet de justifier des résultats obtenus par la simulation lorsque l'impartialité de l'estimateur du gradient de la mesure de performance est démontrée. De cette manière, les résultats obtenus par la simulation peuvent être considérés comme les résultats réels de la mesure de performance.

1.1.4. Conclusions

Dans cette partie, nous avons présenté différents éléments qui contribuent à la stratégie d'une entreprise à travers la fonction de production. Dans un premier temps, nous avons défini les niveaux de décision dans les organisations. Ensuite, nous avons défini les différents objectifs dans la production permettant d'atteindre les objectifs globaux dans une entreprise, puis, nous avons présenté les différentes politiques de pilotage de flux, lesquelles ont été limitées au pilotage des flux physiques et informationnels.

Pour ces politiques, nous avons repris une classification classique proposée dans la littérature qui permet de définir trois catégories différentes : politiques de pilotage à flux tirés, politiques de pilotage à flux poussés et politiques de pilotage hybrides. Dans les politiques de pilotage à flux tirés, des stocks tampons sont construits afin de pallier aux aléas et ainsi pouvoir satisfaire la demande des étages en aval ou des clients pendant des périodes d'indisponibilité de la production.

Pour sa part, les politiques de pilotage à flux poussés sont basées sur des prévisions de la demande. L'application de ces politiques dépend du type de production, par exemple, pour la production de bateaux ou d'avions, ces politiques s'avèrent plus difficiles à implémenter en raison des coûts de ces produits. Pour des produits pour lesquels les matières premières ne sont pas nombreuses, mais la variété de produits finis est très grande, il est possible de trouver un point du processus de production à partir duquel la production en amont est faite en flux poussés et en aval en flux tirés. C'est le principe que suivent les politiques de pilotage hybrides, telles que la politique point de séparation, laquelle se base sur la construction d'un stock de sécurité afin de satisfaire la demande des clients pour des systèmes soumis à des aléas, plus particulièrement à des pannes des machines.

Enfin, nous avons présenté des stratégies de production qui visent différents objectifs de la production, notamment des stratégies qui couplent la gestion de la production et la gestion de la maintenance, lesquelles sont efficaces pour la réduction des coûts globaux, tels que les coûts de maintenance corrective et préventive et des coûts de stockage et de non satisfaction de la demande des clients.

Pour terminer, nous nous sommes intéressées aux méthodes d'optimisation basées sur des trajectoires d'échantillon. Selon notre revue de la littérature, ces méthodes sont classifiées selon si l'optimisation porte sur des paramètres structurels ou si elle porte sur des paramètres de lois de probabilité. L'applicabilité des différentes méthodes utilisées pour l'optimisation des paramètres structurels dépend très fortement de la continuité de ces paramètres. En effet, si les paramètres sont discrets, cela peut engendrer des changements dans l'ordre des événements de la trajectoire

perturbée. De plus, deux propriétés peuvent être démontrées pour les estimateurs des gradients des mesures de performance pour différentes méthodes d'optimisation basées sur des trajectoires : l'impartialité et la convergence.

Jusqu'à ce point, nous n'avons traité qu'avec des performances ou des objectifs qui ciblent la sphère économique de l'entreprise. Cependant, le contexte actuel impose aux entreprises de tenir compte en plus de ses objectifs individuels et économiques, des objectifs qui visent la sphère sociale ainsi que la biosphère [PAS11]. Cela permet de considérer les différentes interactions de l'entreprise avec son environnement et l'impact de ses activités.

Partie II – Problématique actuelle

II.1. Contexte

Avant la définition du développement durable, la stratégie de l'entreprise était dirigée principalement sur des objectifs économiques, transposés en production à des performances basées sur des critères de coût, de fiabilité, de flexibilité, de temps, de qualité et de productivité. Mais cette notion de performance a évolué au fil du temps. En effet, aujourd'hui, la stratégie de l'entreprise intègre non seulement des objectifs économiques, mais aussi des objectifs sociaux/sociétaux et environnementaux qui engendrent le changement de la définition de la performance. Cette dernière comprend la globalité de l'entreprise [CHI15]. Le changement de cette définition a été influencé par des directives politiques au niveau des Nations et par les entreprises elles-mêmes vis-à-vis des impacts de leurs activités sur l'environnement. Nous allons voir comment cette problématique a été abordée au niveau global et comment elle a été intégrée au sein des entreprises.

II.2. Problématique

Des événements tels que l'extinction d'espèces animales, le changement climatique, le déboisement, la fonte des glaciers, la réduction de la couche d'ozone, etc. ont fait prendre conscience de la nécessité de proposer de nouveaux paradigmes afin de réduire l'impact des activités humaines sur le système Terre et de proposer de nouveaux modèles de production et de consommation.

Le terme " Sustainable Development " (traduit en français en Développement Durable) a été utilisé pour première fois en 1980 dans un rapport publié par " L'Union Internationale pour la Conservation de la Nature " intitulé " La stratégie mondiale pour la conservation ". Mais ce n'est qu'en 1987 que ce terme est défini de manière formelle dans le rapport publié par la Commission Mondiale sur l'Environnement et le Développement des Nations Unies, appelé "Notre avenir à tous" (*Our Common Future*) qui est plus connu sous le nom de Rapport Brundtland. Ainsi, le développement durable est défini comme " ... *Sustainable development is development that meets the needs of the present without compromising the ability of future generations to meet their own needs*" [BRU87]. Cette définition donne un cadre dans le long terme d'un nouvel ordre social qui répond à une meilleure répartition des ressources dans la société, en tenant compte de leurs limitations. Celles-ci peuvent être liées aux ressources naturelles, aux technologies d'exploitation de

ces ressources, ainsi qu'à la capacité de l'environnement d'absorber les impacts des activités économiques.

Parmi les différents impacts engendrés par les activités de l'homme sur la planète, le changement climatique a suscité une grande attention et de par sa gravité a été un motif pour réunir des membres de toutes les nations afin de proposer des solutions vis-à-vis des conséquences qu'une augmentation démesurée du climat dans les années à venir pourrait provoquer. Bien que le changement climatique ne soit pas seulement issu des activités anthropiques mais également des phénomènes géophysiques et astronomiques, il est reconnu que des facteurs tels que les émissions des gaz à effet de serre (GES) contribuent au changement climatique [HUA11]. C'est pourquoi, le Protocole de Kyoto a été défini avec pour objectif de réduire les émissions de GES. Cependant, plusieurs pays ont augmenté leurs émissions de GES. C'est le cas par exemple de la Chine, des Etats-Unis, du Japon, du Canada, etc. Le Tableau 1.2 montre les émissions de quelques pays. De ce tableau, nous observons qu'au niveau mondial, les émissions ont augmenté. Les émissions dans quelques villes de pays comme la Chine (Hong Kong, Pékin), les États-Unis (Los Angeles, New-York), etc., génèrent de plus, du smog nocif pour l'humanité.

Récemment, lors de la 21ème Conférence sur le climat COP21 qui s'est tenue à Paris en décembre 2015, un accord qui vise à limiter le réchauffement climatique à 2 °C maximum jusqu'à 2100 a été défini. Cet accord est applicable à 195 " pays-parties " à la convention cadre des Nations Unies². En effet, le rapport de l'IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) de 2013 montre que de 1880 à 2012, la température moyenne de la planète a augmenté de 0.85°C. Une augmentation de 2°C serait le maximum admissible pour la fin du siècle XXI, pour ne pas avoir des conséquences irréversibles. Au-delà, l'état d'homéostasie de la planète peut se perdre [IPCC13]. D'après la Banque Mondiale³, avec les émissions de gaz à effet de serre émises dans le passé et selon la tendance actuelle, la température atmosphérique augmentera pour la fin du XXI siècle de 1.5 °C par rapport à l'ère préindustrielle (fin du XVII siècle).

Tableau 1.2. Emissions de CO2 pour quelques pays.⁴

Pays	1990 (Ktons CO ₂)	2008 (Ktons CO ₂)	2012 (Ktons CO ₂)
Total mondial	22667117.86	31962251.25	34576135.23
Chine	2473453.99	7738525.06	9868392.65
Etats-Unis	4989245.28	5743708.48	5169736.33
Japon	1162524.94	1252163.76	1368228.92
Inde	659306.62	1561635.31	1983435.25
Canada	448105.22	565228.56	547592.94
Allemagne	1021397.63	857245.56	825727.90
France	392766.77	396884.76	362492.95

Bien que les émissions de carbone aient été l'objet d'indicateurs pour mesurer l'impact du changement climatique, ces indicateurs ne couvrent pas tous les piliers du développement durable.

² www.cop21.gouv.fr

³ www.banquemondiale.org

⁴ Données issues de la base des données EDGAR (Emission Database for Global Atmospheric Research) : <http://edgar.jrc.ec.europa.eu/>

Au niveau mondial, d'autres indicateurs ont été considérés et développés (voir Annexe 3). Ils répondent à des enjeux différents du développement durable. Nous présentons ci-après ces différents enjeux.

II.3. Les enjeux du développement durable

Comme nous l'avons défini précédemment, le développement durable est supporté par trois piliers : économique, environnemental et social/sociétal. Ainsi, l'enjeu majeur du développement durable est de trouver un juste équilibre entre ces trois piliers (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.3.**). La stratégie pour atteindre l'objectif du développement durable consiste également à déployer des objectifs sur chacun des piliers qui le composent.

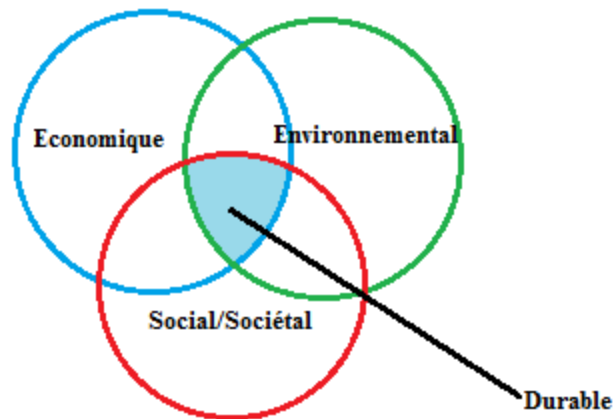


Figure 1.3. Schéma du développement durable.

Le changement climatique n'est pas le seul enjeu du pilier environnemental. Ce pilier tient compte également de l'extinction des différentes espèces animales et végétales et de la pollution des différents milieux de la biosphère (l'eau, les sols, l'air) provoquée par l'utilisation de produits chimiques, la production des déchets, l'utilisation de produits radioactifs, etc. Par exemple, des accidents nucléaires tels que celui de Tchernobyl en 1986 ou celui de Fukushima en 2011 suite au tsunami au Japon, ont généré des conséquences immédiates et à long terme dans l'environnement telles que des mutations d'espèces animales ou végétales, la contamination des poissons et l'émigration de la population à d'autres villes non contaminées. Les zones irradiées seront en effet inhabitables pendant plusieurs dizaines d'années. Toutes les conséquences des activités de l'homme ne sont pas connues car quelques-unes se ressentent à long terme. Elles peuvent engager tant l'équilibre de l'écosystème que la santé humaine. Ces actions sur l'environnement génèrent donc des impacts au niveau environnemental mais également social. En effet, la dimension sociale considère des aspects tels que l'exclusion sociale, l'accès à l'éducation, l'accès au travail, l'équité des salaires pour hommes et femmes, des relations commerciales qui privilégient les marchés locaux et les intérêts locaux, la protection des enfants contre l'exploitation du travail.

Au niveau économique, l'enjeu consiste à concilier les différents coûts générés par les externalités environnementales et sociales. Il comprend des aspects tels que l'équité sociale, des achats équitables, etc. Un pays pour lequel la consommation dépasse ce qu'il est capable de satisfaire ne répond pas à un modèle économique viable ni durable. Les États possèdent les moyens

de contrôler l'utilisation des ressources à travers les réglementations. C'est pour cette raison que le développement durable est avant tout une initiative politique [BOU10]. De plus, les effets des actions non respectueuses de l'environnement dans certains pays peuvent toucher tous les autres à cause de la mondialisation. Par exemple, si des produits sont conçus avec des matières qui deviennent dangereuses à une des étapes du cycle de vie du produit et que ce produit a été exporté d'un pays à un autre, le pays importateur en subira aussi les conséquences. Ce qui veut dire qu'en matière de développement durable les frontières n'existent pas puisque nous sommes tous responsables.

Pour lutter contre les effets indésirables des activités humaines sur l'environnement et la société, il est nécessaire d'agir sur les causes qui les provoquent (connues sous le terme d'attracteurs). Parmi celles qui sont identifiées, nous retrouvons l'augmentation de la démographie, la croissance économique, la surconsommation de matières premières et l'agriculture intensive. En effet, déjà à la fin du XVIII^e siècle, l'économiste Malthus a défendu l'idée qu'une croissance démographique pourrait entraîner une paupérisation de la population qui l'obligerait à s'adapter à l'évolution des ressources agricoles. Cela a été affirmé à partir de sa constatation que la croissance démographique est exponentielle ou géométrique et celle des ressources est arithmétique [PAS11]. À cet effet, les différents Sommets de la Terre célébrés entre de nombreux dirigeants des Nations Unies ont donné des directives qui définissent un cadre d'exploitation et de consommation des différentes ressources. Ces directives sont adoptées au sein des différents États, lesquels doivent veiller à ce qu'elles soient appliquées par les différentes organisations.

L'adoption du développement durable au sein de l'entreprise est faite initialement à travers ses différentes activités par l'obtention de divers objectifs tels que la réduction de la consommation d'énergie, des gaz à effet de serre, l'amélioration des conditions de travail, etc. Ensuite, il est intégré dans tous les processus et la culture de l'entreprise, ce qui permet d'avoir un avantage compétitif dans le long terme.⁵Lorsque les enjeux du développement durable sont transposés à l'entreprise, ils touchent toutes ses fonctions. Chardine-Baumann et Botta-Genoulaz (2014) [CHA14] en ont identifié 15 (cinq par pilier) qui couvrent les différents processus de l'entreprise. Ils sont :

- Économiques : La fiabilité, la réactivité, la flexibilité, la performance financière, la qualité.
- Environnementaux : Le management environnemental, les ressources, les pollutions, la dangerosité des matières, l'environnement naturel.
- Sociaux/sociétaux : Les relations de travail, les droits fondamentaux au travail, l'engagement sociétal, les consommateurs et les pratiques commerciales.

Ces enjeux sont utilisés pour définir un indicateur durable composite, lequel permet d'évaluer la "performance durable" de l'entreprise. Nous remarquons qu'un équilibre dans le nombre d'enjeux est conservé entre les trois piliers. Cet équilibre répond à la définition de durabilité donnée par Carter et Rogers [CAR08]. Celle-ci est définie comme : *" un sage bilan entre le développement économique, la gestion environnementale et l'équité sociale en tenant compte de la même pondération pour la stabilité économique, la compatibilité écologique et l'équité sociale "*. Ahi [AHI15] a répertorié un ensemble de 2555 indicateurs ou mesures de performance associées à des aspects durables dans la gestion de la chaîne logistique. Sur l'ensemble des mesures identifiées, il a cependant mis en avant qu'aucune de ces mesures ne tient compte de l'impact des actions au cours du temps sur les différents piliers.

⁵www.fgm.usj.edu.lb/doc/a102012.docx

Nous avons fait une recherche sur la base de données ScienceDirect des différents termes qui font référence au concept de la durabilité dans la production et dans les chaînes logistiques. Cette recherche s'est basée sur des articles en tenant compte des mots recherchés dans les mots clés, les titres ou les résumés. La première recherche s'est portée sur les termes "Sustainable + Supply Chain" et "Green + Supply Chain". La chaîne logistique verte tient compte des relations de la chaîne logistique avec l'environnement alors que la chaîne logistique durable tient compte des aspects économiques, environnementaux et sociaux ([AHI13]).

La **Erreur ! Source du renvoi introuvable.4**, montre l'évolution des publications sur la chaîne logistique durable et sur la chaîne logistique verte entre 1999 et 2015. Un intérêt croissant pour les deux sujets est évident dans la période de temps recensée. Avant cette période, seulement 7 articles ont été repérés pour la recherche "Sustainable + Supply Chain" et 3 pour la recherche "Green + Supply Chain". Parmi ces travaux, des nombreuses problématiques sont abordées, telles que la durabilité des opérations liées à la chaîne logistique [LAB05], l'influence des contraintes environnementales sur les décisions d'externalisation [BRO08], des outils d'évaluation des performances durables (environnementale, sociale et économique) ([SIN09], [HAS12], [TUR14], [JAK15]) et la conception et la planification de la chaîne logistique inverse [MOT15].

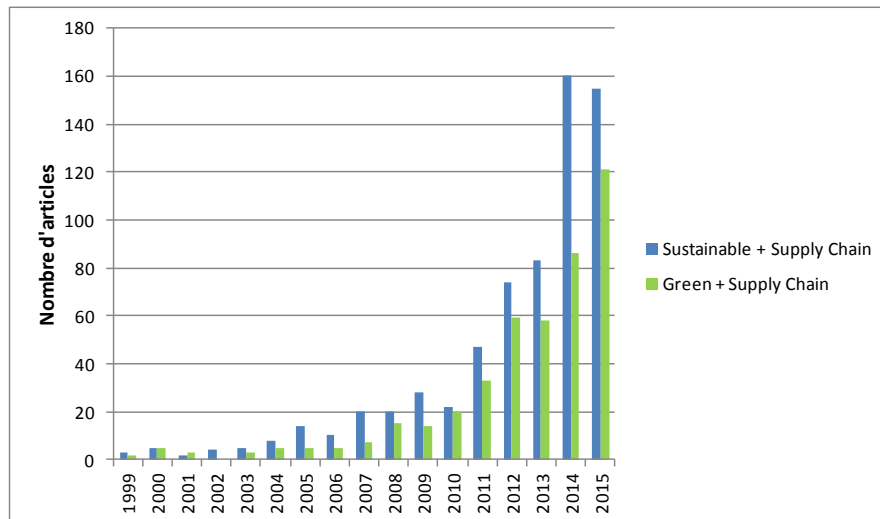


Figure 1.4. Evolution des publications sur la chaîne logistique durable et verte.

Ensuite, nous avons fait une recherche des termes "Sustainable + Production" et "Green + Production". Les résultats de l'évolution dans la littérature sont donnés dans la Figure 1.5. Ils comprennent la période de 1997 à 2015. Pour les années précédentes à la période recensée, un total de 854 articles a été trouvé pour la recherche "Green + Production" et 294 pour la recherche "Sustainable + Production". De la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.5**, nous voyons que la recherche dans les deux sujets est exponentielle depuis 1997. Ces articles portent sur différents axes : des indicateurs environnementaux pour la production dans l'industrie alimentaire [GER03], les mécanismes de régulation environnementale appliqués dans la production [BRO09], la planification de la production dans des cellules de production en tenant compte des émissions de carbone ainsi que de la réduction du temps de fabrication d'un ensemble de produits [LIU15a], la gestion de la chaîne logistique verte [CHI15], etc.

Des Figures 1.4 et 1.5, nous constatons que la recherche de la chaîne logistique durable/verte et de la production durable/verte est un sujet qui suscite de plus en plus l'intérêt dans les différentes sciences. Ceci peut être en partie dû aux avantages d'intégrer des aspects durables dans la gestion de l'entreprise. Carter et Rogers [CAR08] en exposent plusieurs, selon lesquels les entreprises qui suivent une stratégie de gestion durable seront plus efficaces que celles qui intègrent un seul ou deux piliers du développement durable dans leur gestion.

De plus, les auteurs suggèrent que les entreprises qui intègrent les ressources sociales, environnementales et leurs connaissances sont plus difficiles à imiter, ce qui conduit à la durabilité économique. En outre, d'après [WIN13], pour avoir une approche globale de la performance de l'entreprise, les trois piliers doivent être pris en considération ainsi que l'interaction entre eux.

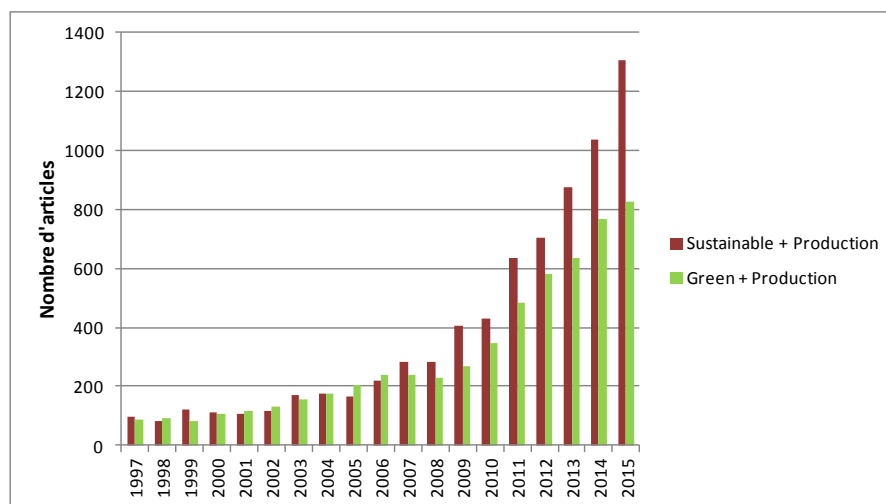


Figure 1.5. Evolution des publications sur la production durable et verte.

Dans cette section, nous avons présenté la problématique mondiale actuelle liée au développement durable et les objectifs à atteindre pour limiter les impacts négatifs des activités humaines sur les sphères sociale, environnementale et économique. Pour les atteindre, ces objectifs doivent être intégrés dans la gestion des différents types d'organisations. Nous nous intéressons par la suite aux initiatives adoptées au sein des entreprises afin d'anticiper des possibles réglementations par rapport aux enjeux du développement durable. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la responsabilité sociale/sociétale des entreprises et organisations. Ce terme sera défini ci-après. Ce concept, même s'il n'est pas encore inscrit dans la loi, engage les entreprises [BOU10].

II.4. La responsabilité sociale/sociétale des entreprises et organisations

Lorsque le terme développement durable est appliqué au sein des entreprises un nouveau terme apparaît : la responsabilité sociale/sociétale des entreprises (RSE). Pour celle-ci, nous trouvons différents concepts dans la littérature, dans lesquels la définition du développement durable est transposée au sein des entreprises : Bouyoud [BOU10] définit la RSE comme "... l'ensemble des obligations normatives ou morales qui détermine la stratégie de l'entreprise dans son environnement au regard de ses parties prenantes tout en assurant sa pérennité voire sa

croissance économique afin de concilier dans le présent les performances économiques, sociales et environnementales sans nuire aux performances futures."

Ainsi, de ce concept, nous discernons que l'implémentation de la RSE dans la stratégie de l'entreprise va au-delà des réglementations en vigueur, en intégrant des critères qui sont propres à chaque entreprise selon leur degré de conscience vis-à-vis de la durabilité. De plus, l'aspect moral de ces obligations n'est pas étonnant, vu les origines étiques de la RSE [PAS11]. En outre, de cette définition, nous faisons ressortir que l'entreprise n'est pas seulement un acteur économique, mais aussi un acteur social et environnemental. Dans ce sens, la continuité de l'entreprise est garantie par l'interaction des trois piliers du développement durable. Les aspects sociaux concernent directement les relations de l'entreprise avec les parties prenantes les plus proches, tels que les salariés, dirigeants, etc., alors que les aspects sociétaux tiennent compte des relations de l'entreprise avec toutes ses parties prenantes.

Dans Chardine-Baumann [CHA11] est donnée une définition de ce que " devrait être la RSE " selon la Commission Européenne (2001) : " *les entreprises intègrent les préoccupations sociales, environnementales, et économiques dans leurs opérations quotidiennes, et dans leurs interactions avec leurs parties prenantes sur une base volontaire* ". De cette définition, l'auteur met en exergue six points :

- La RSE tient compte des aspects environnementaux et sociaux, même si le terme en anglais "*Corporate Social Responsibility*" peut faire comprendre qu'il ne fait référence qu'aux aspects sociaux.
- Les préoccupations environnementales et sociales de l'entreprise devraient être intégrées dans sa stratégie et ses opérations.
- Ce concept est volontaire.
- L'interaction de l'entreprise et de ses parties prenantes (internes et externes) est prise en compte.
- Elle ne se limite pas à être en conformité avec la législation, mais aller au-delà dans l'investissement dans l'environnement, le capital humain et les relations avec les parties prenantes.
- L'implication de chaque entreprise dans la RSE est différente, selon son cœur de compétences, ses ressources, les intérêts des parties prenantes ainsi que de son contexte culturel et géographique.

A la définition donnée par Chardine-Baumann [CHA11] deux autres points sont ajoutés par Boukherroub [BOU13] dans lesquels les objectifs de la RSE sont déterminés par des "*performances durables* " ainsi :

- Chacun des piliers du développement durable (environnemental, social et économique) doit atteindre au minimum une performance, il devrait avoir un équilibre entre ces trois piliers.

De ces définitions, nous retenons que la RSE détermine la stratégie de l'entreprise, même si la prise en compte des aspects environnementaux et sociaux n'est pas faite que par des normes qui imposent leur adoption, mais aussi sur une base volontaire.

Cette stratégie est définie selon les intérêts des parties prenantes et le contexte spatial et social. La dimension temporelle est considérée dans la RSE du fait que l'on anticipe la détermination des lois par les autorités compétentes. De plus, dans un contexte durable, les

décisions prises par l'entreprise aujourd'hui auront un impact dans l'avenir sur les trois piliers. Il est donc nécessaire d'agir sur les trois piliers, en tenant compte de la dimension temporelle, pour que la stratégie soit réellement durable.

La RSE étant une approche volontaire, elle nécessite des repères lui permettant d'intégrer les objectifs du développement durable dans ses différentes fonctions. Des structures de rapport pour la publication des performances en matière durable des grandes entreprises ont été créés, telles que le GRI (*Global Reporting Initiative*) [GRI13]. L'Annexe 3 présente quelques normes et structures qui ont été émises pour guider les organisations lorsqu'elles s'inscrivent dans une démarche durable.

Ces normes ne sont bien évidemment pas obligatoires, elles sont de libre adoption. Cependant, en France, des structures telles que les bilans des émissions de gaz à effet de serre (BEGES) deviennent obligatoires pour les entreprises de plus de 500 salariés. Dans celui-ci, une estimation des gaz à effet de serre doit être présentée ainsi que les actions envisagées pour réduire ces émissions. La non réalisation de ce bilan peut entraîner des sanctions économiques⁶. Dans l'Union Européenne le système d'échange de quotas d'émissions (*European Union Emission Trading Scheme – EU-ETS*) est un mécanisme mis en place pour limiter les émissions de CO₂ selon l'application Protocole de Kyoto et dans une approche systémique. Il couvre actuellement les industries qui contribuent le plus à la pollution de l'environnement, telles que les industries chimiques ou sidérurgiques. Ce mécanisme permet aux entreprises d'acheter ou de vendre des droits d'émission lesquels sont alloués par des quotas [ARI14].

Face à cette problématique, les entreprises doivent développer des stratégies leur permettant de mesurer et de contrôler leurs émissions, ce qui aidera d'une part à réduire les coûts liés à leur fonctionnement et d'une autre part à limiter les impacts de leurs activités sur l'environnement. Nous inscrivons nos travaux dans ce cadre et nous proposons d'intégrer dans le pilotage de la production les trois piliers du développement durable. Ceci est fait en considérant de coûts économiques, environnementaux et sociaux, avec comme objectif la minimisation de ceux-ci.

II.5. Conclusions

Dans cette section nous avons décrit la problématique actuelle à laquelle les entreprises sont confrontées. Bien que la dégradation de l'environnement demande des actions urgentes pour limiter les impacts des différentes activités économiques, l'obligation des actions concrètes aux différents acteurs de la sphère sociale est une responsabilité des gouvernements. En effet, ils ont le pouvoir de réguler l'exploitation, l'utilisation et la consommation des différentes ressources d'une nation.

Nous avons présenté les différents enjeux du développement durable pour lesquels l'enjeu majeur est d'atteindre un équilibre entre les piliers social, environnemental et économique. De plus, nous avons constaté qu'une attention particulière a été mise au niveau mondial sur le changement climatique. De par l'urgence des actions pour éviter des conséquences néfastes, le changement climatique a été l'objet de différentes conférences organisées au niveau mondial. Dans celles-ci, des objectifs globaux de réduction des émissions des gaz à effet de serre ont été établis, puisqu'il est reconnu que ces émissions contribuent fortement au changement climatique.

⁶www.bilans-ges.ademe.fr/fr/accueil/contenu/index/page/art75/siGras/0

Les objectifs du développement durable sont introduits au sein des organisations à travers la responsabilité sociale/sociétale des entreprises. Cette stratégie est d'adoption volontaire de la part des entreprises et elle dépend du degré d'engagement de chaque entreprise vis-à-vis du développement durable. D'autres stratégies qui visent des objectifs ponctuels du développement durable telle que la réduction des émissions de gaz à effet de serre a été développées, notamment le système d'échange de quotas d'émissions de CO₂ dans l'Union Européenne. Bien que la plupart de ces stratégies ne soient pas d'application obligatoire, il existe une tendance vers l'imposition de celles-ci dans l'avenir, c'est le cas des bilans des émissions de gaz à effet de serre, lesquels sont exigés aux entreprises de plus de 500 salariés en France. Ceci fait que les entreprises doivent réadapter leurs stratégies afin d'intégrer dans leurs opérations des objectifs différents à des objectifs purement économiques qui peuvent varier d'une entreprise à une autre [POR06].

Partie III. Plan de recherche

Dans les parties précédentes de ce chapitre, nous avons présenté le cadre de notre travail. Nous avons commencé par les objectifs traditionnellement considérés par les entreprises, lesquels correspondent à des objectifs purement économiques et ensuite nous avons présenté les objectifs dans un contexte plus actuel, lesquels tiennent compte des trois piliers du développement durable. Nous nous sommes focalisés sur les systèmes de production avec leurs différentes caractéristiques de configuration, pilotage, objectifs dans la production, etc. Nous avons mis l'accent sur les aléas dans ces systèmes, lesquels ont un impact sur leurs performances. Dans ce qui suit, nous présentons en détail les objectifs de notre travail et la stratégie que nous utilisons pour les atteindre.

Dans notre revue de la littérature, nous avons recensé des travaux qui s'intéressent à l'optimisation de différents objectifs dans les systèmes de production en tenant compte des aléas. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressées à la gestion des défaillances aléatoires des machines à travers l'intégration de stratégies de maintenance préventive et des politiques de pilotage de la production. Les stratégies qui intègrent la production et la maintenance considèrent traditionnellement des objectifs de production orientés vers des performances économiques, notamment la réduction des coûts et des temps d'opération, l'amélioration de la qualité des produits, etc. (cf. section I.1.2.). Cependant, dans un contexte où les entreprises commencent à subir des pressions des gouvernements pour " *internaliser les externalités* " générées par leurs activités, nous voulons élargir le cadre d'étude traditionnellement considéré en tenant compte de ces nouvelles contraintes. Pour ce faire, nous partons de l'étude d'un système de production simple (i.e. une machine, un produit, un stock et un client), pour lequel nous ne considérons que des objectifs purement économiques et ensuite nous élargissons l'étude de ce système en intégrant des notions du développement durable dans son pilotage. Nous voulons développer une approche qui puisse s'adapter à différents aspects du développement durable liés à des activités propres de la production, tels que les vibrations et le bruit des machines, lesquels ont un impact sur la santé des personnes concernées dans la production ou l'émission d'agents polluants tels que des gaz à effet de serre ou de déchets dans la production, lesquels répondent à des critères propres au pilier environnemental du développement durable. Nous ferons ceci par une approche basée sur des coûts. Ceci est motivé par le fait que les réglementations actuelles imposent des amendes et des taxes en cas de non-respect des limites, notamment pour les émissions. De plus, les effets négatifs causés sur la santé des salariés peuvent se traduire en pertes économiques dû par exemple aux indemnités que les entreprises doivent payer. Ainsi, notre intérêt porte sur la minimisation des coûts globaux, lesquels tiennent compte des critères économiques, environnementaux et sociaux/sociétaux.

Nous définissons dans ce qui suit les outils que nous utiliserons tout au long de ces travaux de thèse.

Choix du modèle et de la méthode de résolution

Nous avons décrit l'objectif global de notre travail. Nous présentons maintenant les choix que nous avons faits par rapport au modèle, à la méthode de résolution et au pilotage des systèmes.

Pour la représentation du fonctionnement des systèmes étudiés, nous avons fait le choix d'un Modèle à Flux Continus (CFM). Ce modèle a été considéré pour décrire le comportement des pièces dans des systèmes de production continue ou dans des systèmes de production discrète avec une quantité de pièces importante transitant dans le système. Dans ce dernier type de système de production, le flux des pièces est approché par un flux continu, ce qui réduit la complexité liée à une grande quantité d'événements et permet de se concentrer sur les événements importants dans le système [XIE13].

Contrairement aux modèles discrets, dans lesquels l'évolution des variables d'état est donnée dans un espace discret, les modèles à flux continus sont caractérisés par des équations différentielles qui décrivent l'évolution des variables d'état dans le temps sous l'influence des variables de contrôle, lesquelles sont continues dans ce type d'approche [BRA96]. Ceci permet d'utiliser des techniques d'optimisation pour des paramètres continus, lesquelles peuvent être plus efficaces que les techniques d'optimisation pour des paramètres discrets [SUR94]. D'après Brandimarte et Von Turkovich [BRA96], l'avantage le plus important de ce modèle est la possibilité d'exploiter des connaissances concernant la dynamique des systèmes, tels que le contrôle optimal dans des systèmes stochastiques en obtenant des informations qui ne pourraient pas être obtenues autrement.

Ce modèle a par exemple été implémenté dans un système de production de deux étages par Tan et Gershwin [TAN09] pour développer une méthodologie d'évaluation de performances qui peut être appliquée à d'autres systèmes tels que les systèmes de télécommunication ou informatiques. Il a également été utilisé pour déterminer l'impact des délais dans les systèmes de production. Van Ryzinet al. ([VAN87], [VAN91]) ont examiné les effets des délais dans un système de production composé de deux machines, séparées par un stock de sécurité, dans lequel le délai est considéré seulement entre la première machine et le stock. Mourani *et al.* [MOU06] et Xie *et al.* [XIE13] ont considéré une ligne de transfert dans laquelle la matière qui sort des machines doit attendre avant d'arriver au stock en aval. Turki *et al.* [TUR12] considèrent un système de production soumis à des pannes aléatoires dans lequel un délai entre le stock et le client correspondant au délai de livraison est intégré. Le Modèle à Flux Continus nous permettra donc de considérer les pannes des machines ainsi que les délais de transfert et de transport entre les différents éléments qui composent les systèmes.

Comme il a été explicité dans la section précédente, nous nous confrontons à un problème de minimisation des coûts. Nous avons présenté différentes méthodes d'optimisation lesquelles peuvent être utilisées dans un environnement aléatoire. Nous avons vu que pour ces problèmes, il est difficile d'établir analytiquement une solution optimale, donc pour la résolution, des méthodes analytiques ont été couplées à la simulation afin de trouver une solution. Dans notre travail, nous nous intéressons à déterminer des paramètres des politiques de pilotage (niveaux de stock), lesquels correspondent à des paramètres structurels et le paramètre de la politique de maintenance (qui représente un temps pour effectuer les actions de maintenance préventive), lequel dépend d'une loi

de probabilité. En effet, celui-ci est déterminé par le taux de défaillance qui dépend de la loi de probabilité qui détermine le processus de défaillances. Du point de vue de la continuité des paramètres, pour un modèle à flux continu, dans lequel les flux des matières sont approchés par un flux continu, le nombre de pièces qui est considéré comme un débit, peut être donné par une valeur continue. De manière similaire, comme le paramètre de la politique de maintenance est la période de maintenance préventive, ce paramètre correspond à un temps et il est donc continu. En utilisant un modèle à flux continu et compte tenu des paramètres que nous voulons déterminer, il est raisonnable de considérer la méthode IPA pour l'optimisation. Cette méthode utilisée dans un modèle à flux continu nous permet de déterminer un gradient qui sera utilisé pour l'optimisation. Ce gradient sera implémenté dans une simulation à événements discrets, laquelle nous permettra de calculer une valeur des coûts globaux optimaux.

Pour le pilotage, comme nous tenons compte des pannes aléatoires des machines, pour le système de production à un seul étage, une politique hybride peut nous aider à trouver un compromis entre les coûts des demandes perdues et les coûts de stockage (et donc des demandes satisfaites). De plus, pour l'implémentation de la méthode IPA, dans laquelle un seul paramètre peut être estimé à la fois, cette politique d'un seul paramètre semble adaptée. Pour le système de production de deux étages, une politique à flux tirés est choisie afin de limiter le nombre de pièces dans les stocks de chaque étage et de permettre le partage d'information entre ceux-ci. Ceci peut être fait par une politique Base Stock. Cette politique dépend d'un seul paramètre par étage, ce qui rend possible l'optimisation avec la méthode IPA dans laquelle un seul paramètre peut être optimisé à la fois.

Dans la section à venir, nous présentons comment les outils que nous avons choisi seront utilisées pour atteindre l'objectif de notre travail.

Méthodologie de travail

Pour parvenir à l'objectif que nous nous sommes fixé dans notre travail, la démarche retenue est la suivante : nous modéliserons chacune des stratégies de production selon la politique de pilotage choisie. Ensuite, nous ferons une étude analytique des trajectoires (basée sur la méthode IPA) des variables d'état des systèmes, lesquelles dépendent des paramètres que nous voulons estimer. A partir de cette étude, nous déterminons ensuite un gradient de la fonction de coût. Ce gradient sera estimé par rapport aux variables de décision (le niveau des stocks et la période de maintenance préventive). Nous déterminerons ensuite que les gradients estimés ne sont pas biaisés, ce qui rendra possible de les introduire dans un algorithme de simulation afin de trouver une valeur approchée de la valeur optimale de la fonction de coût. Des applications numériques seront implémentées afin d'illustrer cette approche.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les trois différents niveaux de décision, le type de décision associée à chaque niveau ainsi que la portée qu'elles ont dans la stratégie de l'entreprise. De plus, nous avons vu comment les décisions prises au niveau stratégique sont déclinées sur les différents niveaux de décision de l'entreprise à travers les objectifs. Nous nous sommes concentrées sur les objectifs de la production pour lesquels différents indicateurs ou mesures de performances sont définis afin de mesurer dans quel degré ces objectifs sont atteints. De la définition des niveaux de décision et des décisions prises dans chacun de ces niveaux, nous avons conclu que les problématiques traitées dans les travaux de cette thèse se situent au niveau tactique.

Selon les différentes stratégies de production, il existe des politiques de pilotage qui sont classifiées en trois catégories : politiques de pilotage à flux poussés, politiques de pilotage à flux tirés et politiques de pilotage hybrides. De ces politiques, nous retenons que les politiques de pilotage hybrides comme la politique point de séparation sont adaptées pour pallier aux aléas dans la production et dans un cadre de minimisation des coûts cette politique permet de trouver un équilibre entre les coûts des demandes perdues dû aux temps d'inactivité dans la production et les coûts de stockage. De même, dans un environnement aléatoire, les politiques de pilotage à flux tirés peuvent être adaptées pour le pilotage de systèmes de plus d'un étage. Ces politiques permettent de coordonner la production entre les différents étages du système ainsi que de partager l'information : pièces à produire dans chaque étage, demande, etc. De plus, la production dans ces politiques répond à une demande réelle, ce qui peut contribuer à la réduction des coûts de stockage.

Parmi les différentes stratégies de production, nous nous sommes intéressées aux stratégies de production qui intègrent des aléas tels que les pannes et par conséquent des actions de maintenance couplées aux activités de production. Avec l'intégration de ces aléas, le problème d'optimisation devient un problème stochastique. Ceci nous a amené à différentes méthodes d'optimisation pour des problèmes qui intègrent des incertitudes. Pour ce faire, nous avons étudié des méthodes qui permettent d'aborder les problèmes d'optimisation stochastique analytiquement et qui peuvent intégrer les résultats analytiques dans des algorithmes de simulation. Nous avons ainsi étudié différentes méthodes basées sur l'étude des trajectoires d'échantillon. Ces méthodes permettent de trouver un gradient basé sur une trajectoire nominale et une trajectoire perturbée. Le résultat peut être utilisé soit pour l'analyse de sensibilité, soit pour l'optimisation. Dans notre étude, compte tenu du modèle que nous avons choisi (modèle à flux continu) et des conditions pour l'application de la méthode IPA, nous obtenons assez facilement ce gradient. Celui-ci sera utilisé pour l'optimisation des coûts globaux. Dans les problèmes que nous abordons, nous considérons que cette méthode peut être utilisée tout au long de notre démarche.

Nous avons élargi le cadre de notre étude pour inscrire notre problématique dans le contexte actuel. En effet, de nos jours, les entreprises sont encouragées à intégrer dans leurs performances en plus de critères économiques, de critères environnementaux et sociaux/sociétaux. Ceci avec le but de prendre en charge l'impact de leurs activités sur l'environnement et la société. Cette étude nous a permis de préciser les enjeux du développement durable et les objectifs à atteindre au niveau global en matière écologique et sociale/sociétale. Pour les entreprises, les objectifs sont généralement intégrés dans leurs stratégies à travers la responsabilité sociale/sociétale des entreprises.

Ce qui suit dans notre travail est divisé en trois chapitres supplémentaires. Dans chacun, nous implémentons la méthodologie que nous avons décrite auparavant. Nous présentons ci-après le contenu de chacun d'eux.

Dans le chapitre 2, nous considérons un système de production composé d'une machine sujette à des pannes aléatoires, d'un stock et d'un client. Pour ce système, une stratégie de production qui intègre le pilotage de la production et la gestion des actions de maintenance est adoptée. Dans la modélisation, nous tenons compte des délais de transfert et de transport. L'objectif de cette première étude est de minimiser les coûts globaux, lesquels considèrent des coûts de maintenance, de stockage/pénuries et des coûts de transport. Nous soulignons que ces coûts répondent à des critères purement économiques.

Nous continuons dans le chapitre 3 avec l'étude du même système. Cependant, nous ajoutons à la fonction économique, des considérations environnementales et sociales. Ces considérations engendrent des coûts lorsqu'elles ne sont pas respectées. Ces coûts sont ajoutés aux coûts considérés dans le chapitre 2. Ainsi, les coûts globaux comportent des aspects liés aux trois piliers du développement durable.

Ces travaux sont utilisés pour comparer l'effet internaliser dans les coûts de l'entreprise les effets générés par la production dans l'environnement et dans la société.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'étude d'un système de production composé de deux étages. Dans ce chapitre une politique de pilotage différente de celle choisie pour le pilotage du système de production des deux chapitres précédents est implémentée. Nous étudions dans un premier temps, des caractéristiques propres à la politique de pilotage, tels que le dimensionnement des stocks. Ensuite, nous nous intéressons à l'approvisionnement des matières premières. Dans le même esprit que celui du troisième chapitre, nous considérons les trois critères du développement durable à travers des coûts environnementaux et sociaux que nous attribuons à chaque pièce produite.

Enfin, ce mémoire s'achève par les conclusions générales de notre travail et quelques perspectives.

Chapitre 2 : Pilotage d'un système de production incluant des actions de maintenance

2.1. Introduction

Pour piloter au mieux la production, il faut tenir compte au maximum des aléas. En effet, ceux-ci perturbent le bon fonctionnement et donc génèrent des surcoûts importants. Dans un tel environnement aléatoire, des stocks peuvent être considérés afin d'y faire face et de permettre de répondre à la demande. Du point de vue de l'optimisation, le niveau de stock optimal exact a été établi dans Akella et Kumar (1986) [AKE86] pour un système de production simple soumis à des pannes pour une politique de pilotage de type point de séparation permettant justement la construction d'un stock pour pallier aux aléas (voir Annexe 1).

Plus récemment, le problème du pilotage optimal de la production a été étendu en intégrant des politiques de maintenance qui permettent d'agir vis-à-vis des pannes des machines composant les systèmes. Dans ces approches, l'objectif est de trouver les niveaux de stock et les périodes de maintenance préventive optimaux simultanément. Cependant, l'optimisation de ce type de problèmes est complexe. C'est pourquoi, de nombreux auteurs se sont concentrés sur des méthodes d'optimisation basées sur la simulation pour trouver des solutions, tels que des méthodes basées sur des plans d'expériences (voir [GHA00], [BER10], [BER11a]) ou sur des métaheuristiques (voir [REZ04], [ROU13]). Dans ce chapitre, nous étudions ce problème et nous abordons l'optimisation à l'aide de la méthode de l'analyse des perturbations infinitésimales. Cette méthode nous permet de trouver un gradient de la mesure de performance étudiée, lequel peut être utilisé dans un algorithme de simulation comme explicité dans le premier chapitre. Nous nous intéressons à un système de production simple composé d'une machine qui fabrique un seul type de produit, d'un stock de produits finis et d'un client. La demande arrive avec une vitesse constante. Elle est satisfaite si le stock n'est pas vide sinon, elle est retardée. La machine est sujette à des pannes dépendantes du temps, i.e. les pannes peuvent se produire à n'importe quel moment même si la machine ne travaille pas. Les temps de bon fonctionnement (TBF) et les temps de réparation (TTR) suivent une distribution avec un taux de défaillance croissant. Nous considérons une politique de maintenance préventive de type bloc afin, d'augmenter la vie utile de la machine et de réduire le coût global. La politique retenue pour le pilotage de ce système est de type point de séparation. Pour la modélisation, nous utiliserons un modèle à flux continu (CFM). Ce modèle, nous permet de considérer explicitement des délais de transfert entre la machine et le stock, mais aussi entre le stock et le client. Ces délais sont supposés être constants et positifs. Notre objectif consiste alors à trouver la période de maintenance préventive et le point de séparation permettant de minimiser le coût global du système.

La suite de ce chapitre est organisée comme suit : tout d'abord, nous présentons le système de production considéré, les équations qui décrivent l'évolution du système et la politique de pilotage.

Nous continuons avec une étude des trajectoires nominales et perturbées des variables clés (la période de maintenance préventive et le niveau de stock) pour ce système. Basée sur la méthode IPA, cette analyse des trajectoires permet d'obtenir une estimation de la dérivée de la mesure de performance qui, dans notre cas correspond au coût global. L'estimation des gradients de celui-ci en fonction des paramètres choisis (le point de séparation et la période de la maintenance préventive) sera donnée dans la section suivante. Nous démontrons que ceux-ci ne sont pas biaisés.

Le chapitre continue avec une description des états du système. Ceux-ci sont utilisés dans les simulations numériques. Puis, nous proposons une approche d'optimisation couplée à la simulation pour la politique de production qui est combinée avec une stratégie de maintenance préventive basée sur les résultats de la méthode IPA. Le chapitre s'achève avec les résultats issus de l'algorithme d'optimisation, l'analyse de ceux-ci et quelques perspectives.

2.2. Système de production étudié

Nous nous intéressons à l'étude d'un système de production composé d'une machine M , d'un stock de sécurité B avec une capacité finie h^* et d'un client C (Figure 2.1.). Les produits sont stockés jusqu'à ce que la demande $d(t)$ arrive. Le flux de matières est modélisé par un modèle à flux continu. Ce système comporte des délais de transfert (convoyage) entre la machine et le stock ainsi qu'entre le stock et le client, respectivement notés par τ_1 et τ_2 et qui sont supposés être constants et positifs. Le nombre de matières transportées entre M et B , et entre B et C à l'instant t est noté par $Xtd_1(t)$ et $Xtd_2(t)$ respectivement. La machine est sujette à des pannes aléatoires dépendantes du temps selon une distribution avec un taux de défaillance croissant. Les pannes dépendantes du temps sont dues à des agressions extérieures de la machine et non à son utilisation (i.e. humidité, poussières, température, etc.). Une action de maintenance préventive de type bloc est réalisée à chaque période prédéterminée et si M tombe en panne, une action de maintenance corrective est effectuée. Cette stratégie initialement proposée dans Barlow et Hunter (1960) [BAR60] est largement utilisée depuis.

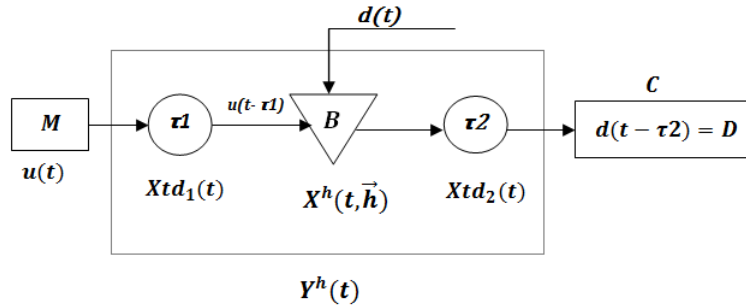


Figure 2.1. Système de production considéré

Soit $\alpha(t)$ la variable qui représente l'état de la machine à l'instant t , donné par l'équation (2.1) :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } M \text{ est en panne ou en réparation ou sous une action de maintenance préventive,} \\ 1, & \text{si } M \text{ est en fonctionnement.} \end{cases} \quad (2.1)$$

La politique de pilotage choisie possède une structure de type point de séparation. Elle est définie comme suit : si le niveau de stock $X^h(t, h)$ est inférieur au point de séparation h , la machine produit avec un taux de production maximal U . Si $X^h(t, h)$ est supérieur à h ou la machine est en panne ou en maintenance préventive, la machine ne produit pas, mais si $X^h(t, h)$ est égal à h , la machine produit à une cadence égale à la demande $d(t)$. La demande considérée est constante $d(t) = D$.

De manière analytique, la vitesse de production peut se présenter comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} D, & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } X^h(t, h) = h, \\ U, & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } X^h(t, h) < h, \\ 0, & \text{si } \alpha(t) = 0 \text{ ou } X^h(t, h) > h. \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec $h < h^*$ (capacité maximale du stock).

Hypothèse 2.1. : La demande du client est connue et constante par unité de temps : $d(t)=D$.

Le cas avec une demande aléatoire pour une machine sujette à des pannes a été étudié par Kenné et Gharbi [KEN00]. Cependant, l'optimalité de cette politique, est beaucoup plus difficile à établir analytiquement, elle n'a pas été définie pour une demande aléatoire et pour des temps de réparation et de défaillance qui suivent des lois de probabilité différentes d'une loi exponentielle.

Hypothèse 2.2. : La vitesse maximale de production U est supérieure à la demande afin de pouvoir satisfaire la demande ($U \geq D$).

Hypothèse 2.3. : Nous supposons que pendant la construction du stock initial, la machine ne tombe pas en panne.

L'évolution du niveau de stock est donnée par l'équation (2.3) :

$$dX^h(t, h)/dt = u(t - \tau_1) - d(t). \quad (2.3)$$

Dans l'équation (2.3) nous considérons que les matières sortent de la machine à t mais elles arrivent au stock à $t - \tau_1$. De manière similaire, nous modélisons la demande dans l'évolution de la position du stock (équation 2.4) comme $d(t - \tau_2)$ pour considérer que la demande arrive chez le client au moment où il en a besoin (la demande est anticipée).

$$dY^h(t)/dt = u(t) - d(t - \tau_2), \text{ avec } d(t - \tau_2) = D. \quad (2.4)$$

$Y^h(t)$ correspond à la position du stock du système : c'est la somme du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ et des pièces transportées $Xtd_1(t)$ et $Xtd_2(t)$ à l'instant t . Elle est donnée par l'équation (2.5) :

$$Y^h(t) = Xtd_1(t) + Xtd_2(t) + X^h(t, h). \quad (2.5)$$

La quantité totale de produits transitant entre la machine et le stock (entre le stock et le client) est donnée par l'équation (2.6) (et (2.7) respectivement).

$$Xtd_1(t) = \int_{t-\tau_1}^t u(s)ds. \quad (2.6)$$

$$Xtd_2(t) = \int_{t-\tau_2}^t d(s)ds. \quad (2.7)$$

Dans ce qui suit, nous étudions les trajectoires de $Y^h(t)$ et du

2.3. Etude analytique des trajectoires

Nous utilisons la méthode IPA pour l'optimisation des coûts globaux du système. Cette méthode nous permet de déterminer un gradient de la fonction de coût à partir des trajectoires nominale et perturbée de cette mesure de performance. Pour estimer ce gradient, nous devons étudier les trajectoires nominale et perturbée des variables de décision, ce qui va nous aider à définir la fonction de coût nominale et perturbée en fonction de ces variables. Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'étude des trajectoires du niveau de stock. Celui-ci dépend du point de séparation, lequel correspond à une de nos variables de décision.

Pour l'étude de ce système, nous assumons que les conditions initiales sont données par :

$$X^h(0, h) = X_0^h, \quad Y^h(0) = Y_0^h, \quad u(0) = U \quad (2.8)$$

Le théorème suivant montre la relation existant entre le niveau de stock $X^h(t, h)$ et la position du stock $Y(t)$.

Théorème 2.1. $X^h(t, h) = Y^h(t - \tau_1) - D \cdot \tau_1 - D \cdot \tau_2, \quad \forall t \geq \tau_1$.

Preuve du Théorème 2.1. :

Nous savons que les pièces arrivent de la machine vers le stock après le délai τ_1 . Par les conditions initiales nous savons que $X^h(0, h) = Y^h(0) = 0, u(0) = U$. Ensuite, à $t = \tau_1$, le niveau de stock $X^h(\tau_1, h)$ est égal à $-D * \tau_1$, alors que la position du stock est égale à $U * \tau_1 - D * \tau_1$. Donc pour $t < \tau_1$, le niveau de stock et la position de stock évoluent différemment puis à partir de $t \geq \tau_1$ le niveau de stock et la position du stock évoluent avec la même vitesse $U - D$.

Par l'équation (2.3) et par les conditions initiales données par l'équation (2.8), nous pouvons exprimer le niveau de stock par l'équation (2.9) :

$$X^h(t, h) = X_0^h + \int_0^t (u(s - \tau_1) - d(s)) ds \quad (2.9)$$

Puisque $0 \leq \tau_1 \leq t$, nous pouvons décomposer (2.9) comme suit :

$$X^h(t, h) = X_0^h + \int_0^{\tau_1} (u(s - \tau_1) - D) ds + \int_{\tau_1}^t (u(s - \tau_1) - D) ds.$$

Avec $s = s - \tau_1$, nous obtenons :

$$X^h(t, h) = X_0^h + \int_{-\tau_1}^0 (u(s)) ds + \int_0^{t-\tau_1} (u(s) - D) ds - D \cdot \tau_1. \quad (2.10)$$

Par (2.5) et les conditions initiales, nous avons :

$$\begin{aligned} Y_0^h &= X_0^h + \int_{-\tau_1}^0 (u(s)) ds + \int_{-\tau_2}^0 D ds. \\ &= X_0^h + \int_{-\tau_1}^0 (u(s)) ds + D \cdot \tau_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous obtenons :

$$X_0^h = Y_0^h - \int_{-\tau_1}^0 (u(s))ds - D. \tau_2. \quad (2.12)$$

Nous remplaçons (2.12) dans (2.10) et nous obtenons :

$$X^h(t, h) = Y_0^h + \int_0^{t-\tau_1} (u(s) - D)ds - D. \tau_1 - D. \tau_2. \quad (2.13)$$

Par les équations (2.5) et (2.8) et en supposant une demande constante, nous obtenons :

$$\frac{dY^h(t)}{dt} = u(t) - D.$$

$$Y^h(t) = Y_0^h + \int_0^t (u(s) - D)ds.$$

Avec $t = t - \tau_1$ et nous obtenons :

$$Y^h(t - \tau_1) = Y_0^h + \int_0^{t-\tau_1} (u(s) - D)ds. \quad (2.14)$$

Ensuite :

$$Y_0^h = Y^h(t - \tau_1) - \int_0^{t-\tau_1} (u(s) - D)ds. \quad (2.15)$$

En remplaçant (2.15) dans (2.13), finalement nous obtenons :

$$X^h(t, h) = Y^h(t - \tau_1) - D. \tau_1 - D. \tau_2. \quad (2.16)$$

C.Q.F.D.

Du théorème 2.1., nous concluons que l'étude peut se faire indifféremment par rapport à la position ou le niveau du stock.

Hypothèse 2.4. : Le temps de bon fonctionnement (*TBF*) et le temps de réparation (*TTR*) sont i.i.d. pour la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. Cette hypothèse vérifie que les pannes et les réparations se produisent au même moment dans les deux trajectoires. Elle garantit ainsi la similarité déterministe des deux trajectoires.

Afin de répondre à la demande, nous supposons que la demande D peut satisfaire la condition suivante : $(U * MTBF) / (MTBF + MTTR) > D$, où $MTBF$ est la moyenne des temps de bon fonctionnement et $MTTR$ est la moyenne des temps de réparation de M .

Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode IPA à notre problème. Ainsi, nous étudions deux trajectoires du niveau de stock : une trajectoire nominale et une autre perturbée. Pour ce faire, nous appliquons une perturbation Δ à la trajectoire nominale de $X^h(t, h)$ (Figure 2.2.).

Hypothèse 2.5. : La valeur de la perturbation Δ est positive ($\Delta > 0$). La trajectoire perturbée est construite à partir de la trajectoire nominale. Nous perturbons d'une valeur Δ le point de séparation h . De cette façon, le point de séparation h de la trajectoire perturbée devient égal à $h + \Delta$.

Remarque : Nous pourrions prendre en compte de manière similaire une perturbation négative (les résultats théoriques sont similaires et donc omis ici). Dans ce cas, pour le calcul d'un gradient, la dérivée à gauche serait prise en compte.

Hypothèse 2.6. : Tous les paramètres de la trajectoire nominale et de la trajectoire perturbée sont identiques.

Soit t_1 le temps nécessaire pour que la trajectoire nominale $X^h(t, h)$ atteigne le point de séparation h . A partir du temps t_1 , il y a une différence $\varphi(t)$ (avec $0 \leq \varphi(t) \leq \Delta$) entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée (cf. Figure 2.2.).

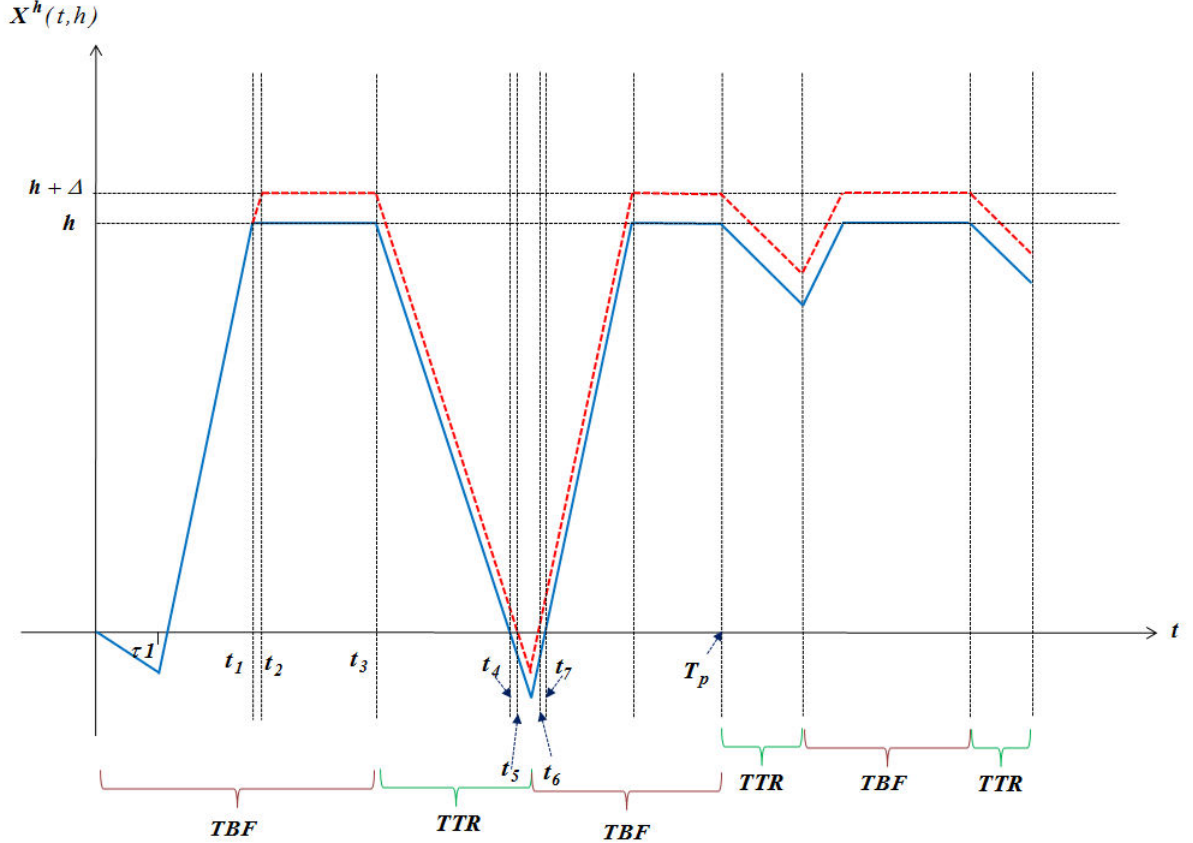


Figure 2.2. Exemple de trajectoire du niveau du stock.

Corollaire 2.1. $X^{h+\Delta}(t, h) \geq X^h(t, h), \forall t \geq t_1$.

La preuve de ce corollaire sera donnée après la preuve du théorème 2.2.

Dans le théorème 2.2 nous étudions la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée du niveau de stock. Ce théorème nous permet de savoir si la trajectoire perturbée est bornée et si c'est le cas, d'exprimer la trajectoire perturbée en fonction de la trajectoire nominale. Les résultats pourront ensuite être utilisés pour des simulations.

Théorème 2.2 : La trajectoire nominale du niveau du stock est toujours inférieure ou égale à sa trajectoire perturbée pour toute perturbation positive du point de séparation $\Delta > 0$:

$$X^h(t, h) \leq X^{h+\Delta}(t, h) \leq X^h(t, h) + \Delta, \quad \forall t \text{ et } \forall \Delta > 0.$$

Preuve du théorème 2.2. :

Pour la preuve de ce théorème, nous étudions les différents cas de figures possibles pour une trajectoire, lesquels sont représentés dans les différents intervalles de la Figure 2.2. Ces intervalles sont :

$[0, t_1],]t_1, t_2[, [t_2, t_4[, [t_4, t_5[, [t_5, t_7[.$

❖ Si $t \in [0, t_1]$

Par l'hypothèse 2.5, nous savons que la trajectoire perturbée est construite à partir du point de séparation, alors dans cet intervalle les deux trajectoires sont identiques.

$$X^h(t, h) = X_0^h + \int_0^{t_1} (u(s - \tau 1) - D) ds.$$

$$X^{h+\Delta}(t, h) = X_0^{h+\Delta} + \int_0^{t_1} (u(s - \tau 1) - D) ds.$$

❖ Si $t \in]t_1, t_2[$

Nous supposons que $t' \in]t_1, t_2[$ tel que $t' \leq t$. Nous avons 3 cas :

- Si $X^{h+\Delta}(t, h) < h + \Delta$, alors $u^\Delta(t) = U$.
- Si $X^{h+\Delta}(t, h) > h$, alors $u(t) = 0$.
- Si $X^{h+\Delta}(t, h) = h$, alors $u(t) = D$.

Ensuite :

$$X^{h+\Delta}(t, h) = X^h(t', h) + \Delta + ((u(t) - D) \cdot (t - t'))$$

Si $u(t) = 0$, donc :

$$X^h(t, h) = X^h(t', h) + ((-D) \cdot (t - t')) < X^{h+\Delta}(t, h).$$

Si $u(t) = D$, alors :

$$X^h(t, h) = X^h(t', h) + ((D - D) \cdot (t - t')).$$

$$X^h(t, h) = X^h(t', h) < X^{h+\Delta}(t, h).$$

Pour tous les cas, nous avons prouvé que $X^h(t) < X^{h+\Delta}(t)$, donc il existe une différence positive $\varphi(t) > 0$ entre $X^h(t, h)$ et $X^{h+\Delta}(t, h)$. Par conséquent $X^{h+\Delta}(t, h) = X^h(t, h) + \varphi(t)$.

❖ Si $t \in [t_2, t_4[$

On suppose que $t' \in [t_2, t_4[$, tel que $t' < t$.

$$\begin{aligned} X^{h+\Delta}(t', h) &= X^{h+\Delta}(t, h) - ((u^\Delta(t) - D) \cdot (t - t')) \\ &= X^h(t, h) + \Delta - ((u^\Delta(t) - D) \cdot (t - t')). \end{aligned}$$

$$X^h(t', h) = X^h(t, h) - ((u(t) - D) \cdot (t - t')).$$

Pour $u^\Delta(t)$ et $u(t)$ nous avons trois cas :

- Si $X^{h+\Delta}(t, h) = h + \Delta$, donc $X^h(t, h) = h$ et si $\alpha(t) = 1$, alors $u^\Delta(t) = u(t) = D$.
- Si $X^{h+\Delta}(t, h) \leq h + \Delta$, donc $X^h(t, h) \leq h$ et si $\alpha(t) = 1$, alors $u^\Delta(t) = u(t) = U$.
- Si $\alpha(t) = 0$, alors $u^\Delta(t) = u(t) = 0$.

D'où $u^\Delta(t) = u(t)$ si $t \in [t_2, t_4[$.

Alors, nous avons $X^{h+\Delta}(t', h) = X^h(t', h) + \Delta$, et donc :

$$X^{h+\Delta}(t, h) = X^h(t, h) + \Delta, \text{ si } t \in [t_2, t_4[.$$

❖ Si $t \in [t_4, t_5[$

On suppose que $t' \in [t_4, t_5[$ tel que $t' < t$.

Nous avons $u(t) = 0$ et $\alpha(t) = 0$.

D'où, nous avons :

$$\begin{aligned} X^{h+\Delta}(t, h) &= X^h(t', h) + \Delta + ((-D) \cdot (t - t')). \\ X^h(t, h) &= X^h(t', h) + ((-D) \cdot (t - t')) < X^{h+\Delta}(t, h). \end{aligned}$$

Alors $X^{h+\Delta}(t, h) = X^h(t, h) + \varphi(t)$.

❖ Si $t \in [t_5, t_7[$

Supposons que $t' \in [t_5, t_7[$

Nous avons deux cas :

- Si $\alpha(t) = 0, u(t) = 0$:

$$\begin{aligned} X^{h+\Delta}(t, h) &= X^h(t', h) + \Delta + ((-D) \cdot (t - t')). \\ X^h(t, h) &= X^h(t', h) + ((-D) \cdot (t - t')) < X^{h+\Delta}(t, h). \end{aligned}$$

- Si $\alpha(t) = 1, u(t) = U$:

$$\begin{aligned} X^{h+\Delta}(t, h) &= X^h(t', h) + \Delta + ((U - D) \cdot (t - t')). \\ X^h(t, h) &= X^h(t', h) + ((U - D) \cdot (t - t')) < X^{h+\Delta}(t, h). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$X^h(t, h) \leq X^{h+\Delta}(t, h) \leq X^h(t, h) + \Delta, \forall t \in [0, T].$$

Remarque : Pour tous les cas nous avons prouvé que $X^{h+\Delta}(t) \geq X^h(t)$, ainsi le Corollaire 2.1. est également prouvé.

Lemme 2.1. Si $t = t_2$, alors $X^{h+\Delta}(t_2, h) = X^h(t_2, h) + \Delta$.

Preuve du Lemme 2.1 :

Nous assumons que $t \in]t_1, t_2[$ tel que $t' < t$.

$$\varphi(t) = X^{h+\Delta}(t, h) - X^h(t, h). \quad (2.17)$$

Nous supposons que $t' \in]t_1, t_2[$, tel que $t' < t$.

$$\varphi(t) = X^{h+\Delta}(t', h) + ((u^\Delta(t) - D) \cdot (t - t')) - ((u(t) - D) \cdot (t - t')) - X^h(t', h).$$

Nous avons $u^\Delta(t) = U$ si $t \in]t_1, t_2[$, alors :

$$\varphi(t) = X^{h+\Delta}(t') - X^h(t') + ((U - D) \cdot (t - t')) - ((u(t) - D) \cdot (t - t')).$$

$$\varphi(t) = \varphi(t') + U \cdot t - U \cdot t' - D \cdot t + D \cdot t' - u(t) \cdot t + u(t) \cdot t' + D \cdot t - D \cdot t'.$$

$$\varphi(t) = \varphi(t') + U \cdot t - U \cdot t' - u(t) \cdot t + u(t) \cdot t'.$$

$$\varphi(t) = \varphi(t') + U \cdot (t - t') - u(t) \cdot (t - t').$$

$$\varphi(t) = \varphi(t') + (U - u(t)) \cdot (t - t').$$

Il y a deux cas pour la trajectoire nominale :

1). Si $u(t) = 0$, alors $\varphi(t) = \varphi(t') + U(t - t')$.

2). Si $u(t) = D$, alors $\varphi(t) = \varphi(t') + (U - D) \cdot (t - t')$.

Dans les deux cas, $\varphi(t)$ est croissant de t_1 à t_2 .

A $t = t_2$, $u(t) = D$ pour la trajectoire nominale et $u^\Delta(t)$ change de vitesse, parce que $X^{h+\Delta}(t, h)$ atteint son point de séparation, donc $u^\Delta(t) = D$.

Nous savons que :

$$X^h(t_2, h) = X^h(t', h) + ((u(t) - D) \cdot (t_2 - t')). \quad (2.18)$$

$$X^{h+\Delta}(t_2, h) = X^h(t', h) + ((u(t) - D) \cdot (t_2 - t')) + \Delta. \quad (2.19)$$

Nous remplaçons (2.18) et (2.19) dans (2.17) :

$$\varphi(t_2) = X^h(t', h) + ((u(t) - D) \cdot (t_2 - t')) + \Delta - X^h(t', h) - ((u(t) - D) \cdot (t_2 - t')). \quad (2.20)$$

Nous remplaçons $u(t)$ et $u^\Delta(t)$ dans (2.20) :

$$\varphi(t_2) = X^h(t', h) + ((D - D) \cdot (t_2 - t')) + \Delta - X^h(t', h) - ((D - D) \cdot (t_2 - t')). \quad (2.21)$$

De (2.21) nous obtenons :

$$\varphi(t_2) = \Delta$$

Nous avons démontré qu'à $t = t_2$, la différence $\varphi(t)$ entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée atteint sa valeur maximale Δ . Ensuite $X^{h+\Delta}(t_2, h) = X^h(t_2, h) + \Delta$.

C.Q.F.D.

(Fin preuve Lemme 2.1.)

Lemme 2.2. : $0 \leq X^{h+\Delta}(t, h) - X^h(t, h) \leq \Delta, \forall t \in [0, T]$.

Preuve du Lemme 2.2 :

La trajectoire nominale du niveau du stock est donnée par :

$$X^h(t, h) = X_0^h + \int_0^t (u(s - \tau_1) - D) ds.$$

La trajectoire perturbée du niveau de stock $\forall t \geq t_2$ est donnée par :

$$X^{h+\Delta}(t, h) = X_0^{h+\Delta} + \int_0^t (u(s - \tau_1) - D) ds + \Delta.$$

Dans laquelle t_2 est le moment à partir duquel la trajectoire perturbée atteint le point de séparation perturbé ($h + \Delta$).

A l'état initial, $X_0^{h+\Delta} = X_0^h$.

$$X^{h+\Delta}(t, h) - X^h(t, h) = X_0^h + \int_0^t (u(s - \tau_1) - D) ds + \Delta - X_0^h - \int_0^t (u(s - \tau_1) - D) ds.$$

Et nous obtenons :

$$\begin{aligned} X^{h+\Delta}(t, h) - X^h(t, h) &= \Delta, \quad \forall t \geq t_2. \\ 0 \leq X^{h+\Delta}(t, h) - X^h(t, h) &\leq \Delta, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de Théorème 2.2.

C.Q.F.D.

Ces résultats seront utilisés dans la section suivante afin de définir le pilotage à mettre en œuvre pour le système considéré.

2.4. Optimisation basée sur la méthode IPA et la simulation

Dans la section précédente, nous avons fait l'étude des trajectoires et nous avons exprimé la trajectoire perturbée du niveau de stock en fonction de la trajectoire nominale. Nous avons déterminé que l'écart entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée est inférieur ou égal à la valeur de la perturbation Δ . Nous pouvons donc utiliser ces résultats dans l'estimation de la valeur de h qui minimise le coût total moyen (stockage, maintenance et transport). Dans cette section, notre intérêt porte sur l'optimisation basée sur la méthode IPA. L'objectif est de trouver d'abord le point de séparation et ensuite la période de la maintenance préventive qui minimisent ce coût total moyen. Pour ce faire, nous calculons la dérivée de la mesure de performance par rapport au paramètre à optimiser, qui correspondra à l'estimateur IPA. Dans ce cas, nous calculons la dérivée de la fonction du coût total moyen par rapport à h (puis T_p), qui correspond au niveau de stock maximal à maintenir avec une politique point de séparation (ou la période de la maintenance préventive dans la stratégie de type bloc). Ensuite, afin d'utiliser les résultats théoriques obtenus dans la simulation, et de considérer ces résultats comme valables, nous devons prouver que l'estimateur obtenu du coût total moyen est non biaisé.

Hypothèse 2.7. : La politique de maintenance est supposée être parfaite, ce qui implique qu'après une action de maintenance, le système revient à un état d'usine (neuf).

Le coût de maintenance $C_m(t)$, est donné par l'équation (2.22).

$$C_m(t) = C_c \cdot E(N_c(t)) + C_p \cdot E(N_p(t)). \quad (2.22)$$

Où C_c correspond au coût d'une action de maintenance corrective, C_p est le coût d'une action de maintenance préventive, $N_c(t)$ est le nombre moyen de pannes et $N_p(t)$ est le nombre moyen de maintenances préventives [CHE04].

Le coût total $C(t)$ correspond à la somme du coût total de stockage (incluant les pénuries), de transport et de maintenance. Nous considérons dans cette partie des coûts fixes de transport. ct_1 est le coût unitaire des matières transportées de la machine vers le stock et ct_2 est le coût unitaire du transport des pièces du stock vers le client.

$$C(t) = g(X^h(t, h)) + Xtd_1(t).ct_1 + Xtd_2(t).ct_2 + C_m(t), \quad (2.23)$$

avec :

$$g(X^h(t, h)) = \begin{cases} X^h(t, h).c^+, & \text{si } X^h(t, h) \geq 0, \\ X^h(t, h).c^-, & \text{si } X^h(t, h) < 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

$g(X(t, h))$ correspond au coût total de stockage à l'instant t , c^+ est le coût de possession d'une pièce, c^- est le coût de pénurie par pièce.

Dans ce qui suit, nous étudions les gradients de la fonction de coût en commençant notre étude par le gradient par rapport au point de séparation.

2.4.1. Estimation des gradients par rapport au point de séparation

Dans cette partie, nous nous intéressons à trouver le point de séparation h qui minimise le coût total moyen. Ainsi, nous calculons les dérivées de la trajectoire et nous prouvons l'absence de biais de l'estimateur IPA. Ceci nous permettra d'appliquer les résultats obtenus analytiquement dans l'optimisation basée sur la simulation. Pour l'obtention de cet estimateur, nous nous basons sur les résultats obtenus dans l'étude des trajectoires pour définir la mesure de performance nominale et perturbée.

Hypothèse 2.8. : Les flux de transport sont indépendants de h . Cette hypothèse est une hypothèse forte parce que les flux de transport sont donnés en fonction de la vitesse de production, laquelle dépend de la valeur de h .

Hypothèse 2.9. : Le coût de maintenance à t , $(C_m(t))$ est indépendant de h .

Remarque : Une étude qui considère la dépendance entre la période de la maintenance préventive et le niveau de stock a été réalisée (Annexe 4) [RAM14b].

Hypothèse 2.10. : La valeur espérée du coût total moyen $J_T(h)$ existe et la fonction est continue.

Cette hypothèse est nécessaire afin de pouvoir appliquer la méthode IPA. En effet, la mesure de performance doit être continue dans l'ensemble qui contient le paramètre qui optimise la fonction de coût. Pour prouver cela, il suffit de démontrer que le coût de stockage est continu. Cette démonstration est omise du fait de sa simplicité.

La valeur espérée du coût total moyen sur un horizon fini de la trajectoire nominale est donnée par :

$$J_T(h) = E[L_T^h(t, h)]. \quad (2.25)$$

Pour faire l'étude de l'estimateur du gradient de la fonction de coût, nous nous intéressons à l'estimation échantillonnée du coût total moyen sur un horizon fini T suffisamment long. Ceci nous le faisons afin de garantir que l'horizon de temps de la mesure de performance nominale et de la mesure de performance perturbée soit identique. L'estimation échantillonnée de la fonction de coût pour la trajectoire nominale est donnée par :

$$L_T^h(t, h) = \left[\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^h(t, h)) + Xtd_1(t).ct_1 + Xtd_2(t).ct_2 \right) dt + C_m(T) \right] \quad (2.26)$$

Soit Δ la perturbation du point de séparation h . La valeur espérée du coût total moyen sur un horizon fini de la trajectoire perturbée est donnée par :

$$J_T(h + \Delta) = E[L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta)]. \quad (2.27)$$

Ainsi, pour déterminer cette valeur espérée, nous définissons un estimateur de la fonction de coût pour la trajectoire perturbée, lequel est donné par l'équation (2.28) :

$$L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) = \left[\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^{h+\Delta}(t, h + \Delta)) + Xtd_1(t).ct_1 + Xtd_2(t).ct_2 \right) dt + C_m(T) \right] \quad (2.28)$$

En outre, pour une perturbation infinitésimale Δ , $L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta)$ peut s'exprimer comme suit :

$$L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) = \left[\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^h(t, h)) + (c^+ \cdot 1(X^h(t, h) \geq 0) \cdot \Delta + c^- \cdot 1(X^h(t, h) < 0) \cdot \Delta + Xtd_1(t).ct_1 + Xtd_2(t).ct_2) \right) dt + C_m(T) \right] \quad (2.29)$$

Où :

$$\begin{aligned} 1(X^h(t, h) \geq 0) &= 1 \text{ si } (X^h(t, h) \geq 0) \text{ et zéro dans les autres cas.} \\ 1(X^h(t, h) < 0) &= 1 \text{ si } (X^h(t, h) < 0), \text{ zéro sinon.} \end{aligned}$$

Soit $T1(h)$ le temps total pendant lequel le niveau du stock est positif ($X^h(t, h) \geq 0$) et $T2(h)$ le temps total pendant lequel le niveau du stock est négatif.

Le coût total moyen perturbé peut s'écrire comme suit :

$$L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) = L_T^h(t, h) + \frac{\int_0^{T1(h)} (\Delta \cdot c^+) dt - \int_0^{T2(h)} (\Delta \cdot c^-) dt}{T} \quad (2.30)$$

$$L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) = L_T^h(t, h) + \frac{T1(h) \cdot \Delta \cdot c^+}{T} - \frac{T2(h) \cdot \Delta \cdot c^-}{T}. \quad (2.31)$$

Ensuite nous calculons l'estimation du gradient de la fonction de coût par rapport à h à partir des équations (2.26) et (2.31). Pour ce faire, nous utilisons la limite suivante, laquelle correspond à la dérivée du coût total moyen à partir des trajectoires [WAR01].

$$\frac{\partial L_T(t, h)}{\partial h} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) - L_T^h(t, h)}{\Delta} \quad (2.32)$$

Nous remplaçons l'équation (2.31) dans (2.32) :

$$\frac{\partial L_T(t, h)}{\partial h} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{L_T^h(t, h) + \frac{T1(h). \Delta. c^+ - T2(h). \Delta. c^-}{T} - L_T^h(t, h)}{\Delta}.$$

Et nous obtenons:

$$\frac{\partial L_T(t, h)}{\partial h} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{T1(h). c^+ - T2(h). c^-}{T}$$

Par les hypothèses 2.8 et 2.9 et en considérant un coût de transport fixe, nous obtenons que l'estimateur du gradient du coût total moyen est :

$$\frac{\partial L_T(t, h)}{\partial h} = \left[\frac{T1(h). c^+ - T2(h). c^-}{T} \right]. \quad (2.33)$$

Nous allons démontrer dans le théorème 2.3, que l'estimateur IPA obtenu dans (2.33) est non biaisé. Nous faisons ceci afin d'utiliser les résultats théoriques dans la simulation et de les considérer comme étant valables.

Hypothèse 2.11. : Deux événements ne se produisent pas en même temps. Cette hypothèse est nécessaire pour éviter qu'un changement dans l'ordre des événements ne se produise. Ceci conduirait à un calcul incorrect du gradient dans la simulation.

Théorème 2.3. Les estimateurs du gradient de la fonction de coût sont non biaisés. C'est-à-dire :

$$E \left[\frac{\partial L_T(t, h)}{\partial h} \right] = \frac{\partial E[L_T(t, h)]}{\partial h} = \frac{\partial J_T(h)}{\partial h}$$

Preuve du Théorème 2.3 :

Afin de démontrer ce théorème, nous devons satisfaire les conditions suivantes [WAR01] :

- (i). La dérivée de la fonction de coût $(\partial L_T^h(t, h))/\partial h$ existe avec une probabilité 1 $\forall h$.
- (ii). La fonction aléatoire $L_T^h(t, h)$ est Lipschitz continue et $L_T^h(t, h)$ a une constante de Lipschitz avec un premier moment fini.

Pour démontrer la première condition, nous devons démontrer que la dérivée à droite et à gauche coïncident $\forall h$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_T(t, h)}{\partial h} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) - L_T^h(t, h)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) - L_T^h(t, h)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0^-} \frac{L_T^h(t, h) - L_T^{h-\Delta}(t, h - \Delta)}{\Delta}. \end{aligned}$$

Nous calculons ces deux limites ci-après. Dans un premier temps, nous trouvons la dérivée à droite.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) - L_T^h(t, h)}{\Delta} = \frac{L_T^h(t, h) + \frac{T1(h). \Delta. c^+ - T2(h). \Delta. c^-}{T} - L_T^h(t, h)}{\Delta}$$

Et nous obtenons la dérivée à droite pour un certain h dans l'équation (2.34) :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) - L_T^h(t, h)}{\Delta} = \frac{T1(h). c^+ - T2(h). c^-}{T} \quad (2.34)$$

Ensuite, nous calculons la dérivée à gauche comme suit :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^-} \frac{L_T^h(t, h) - L_T^{h-\Delta}(t, h - \Delta)}{\Delta} = \frac{L_T^h(t, h) - \left(L_T^h(t, h) - \frac{(T1(h). \Delta. c^+ - T2(h). \Delta. c^-)}{T} \right)}{\Delta}$$

Et nous obtenons la dérivée gauche pour un certain h dans l'équation (2.35) :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^-} \frac{L_T^{h+\Delta}(t, h + \Delta) - L_T^h(t, h)}{\Delta} = \frac{T1(h). c^+ - T2(h). c^-}{T} \quad (2.35)$$

Nous pouvons observer que les dérivées à droite et à gauche données par les équations (2.34) et (2.35) sont égales, donc nous pouvons conclure que la dérivée existe avec une probabilité de 1. Pour prouver la condition (ii), nous utilisons le théorème de la convergence dominée qui suit l'interchangeabilité de l'espérance et de la limite (Wardi et Melamed, 2001 [WAR01]). De plus, pour prouver la condition (ii), il existe deux conditions qui garantissent que le système est ergodique (Xie 1989, pp. 99) [XIE89] : 1. La demande doit être satisfaite en moyenne, i.e. la capacité de production sur l'horizon de temps doit être supérieure à la demande; 2. La politique de pilotage consiste à produire à la capacité maximale de la machine lorsque la production est en retard par rapport à la demande et le niveau de stock n'est pas autorisé à décroître sans limite. Ces deux conditions sont satisfaites par l'hypothèse 2.2 et par l'équation 2.2 laquelle représente la politique de production de la machine.

Par conséquent, par le Théorème 2.2. et la démonstration précédente, nous concluons que cet estimateur est non biaisé.

C.Q.F.D.

2.4.2. Estimation des gradients par rapport à la période de la maintenance préventive

Afin d'estimer la période de maintenance préventive T_p qui minimise le coût total moyen, nous faisons l'étude de la fonction de coût par rapport à cette variable.

Hypothèse 2.12 : Les flux de transport sont indépendants de T_p .

Le coût total moyen sur un horizon fini de la trajectoire nominale est donné par l'équation (2.36) :

$$L_T^{T_p}(T_p) = \left[\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^h(t, h)) + Xtd_1(t).ct_1 + Xtd_2(t).ct_2 \right) dt + C_m(T) \right] \quad (2.36)$$

dans lequel $g(X^h(t, h))$ est donné par l'équation (2.24), $Xtd_1(t)$ et $Xtd_2(t)$ par les équations (2.6) et (2.7) et $C_m(T)$ est donnée par :

$$C_m(T) = \frac{C_c \cdot N_c(T) + C_p \cdot N_p(T)}{T} \quad (2.37)$$

$N_p(T)$ est donné par (2.38) :

$$N_p(T) = \frac{T}{T_p} \quad (2.38)$$

Soit Δ_p la valeur de la perturbation par rapport à T_p . Ensuite, le coût total moyen de la trajectoire perturbée sur un horizon fini est donné par l'équation (2.39) :

$$L_T^{T_p}(T_p + \Delta_p) = \left[\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^h(t, h)) + Xtd_1(t).ct_1 + Xtd_2(t).ct_2 \right) dt + C_m(T_p + \Delta_p) \right] \quad (2.39)$$

La valeur espérée du coût total moyen sur un horizon fini de la trajectoire nominale estimée par rapport à T_p est donnée par :

$$J_T(T_p) = E[L_T^{T_p h}(T_p)] \quad (2.40)$$

Sous une hypothèse de taux de défaillance croissant, nous assumons que le coût total moyen estimé par rapport à la période de maintenance préventive est convexe en T_p . Ensuite, nous pouvons définir un gradient de la fonction de coût par rapport à la période de maintenance préventive basé sur les équations de coût définies par (2.36) et (2.39).

$$\frac{\partial L_T^{T_p}(T_p)}{\partial T_p} = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \frac{L_T^{T_p}(T_p + \Delta_p) - L_T^{T_p}(T_p)}{\Delta_p} \quad (2.41)$$

Nous déterminons le gradient par rapport à T_p à partir de deux simulations : une avec T_p et une autre avec $T_p + \Delta_p$. T_p est un paramètre continu qui correspond à un temps et le coût total moyen est une fonction continue. Il est donc possible de déterminer que l'estimateur de gradient obtenu par la simulation à partir de l'équation (2.41) n'est pas biaisé.

Les gradients théoriques du coût total moyen estimés par rapport au point de séparation et par rapport à la période de maintenance préventive seront utilisés dans des algorithmes d'optimisation. Avec le gradient de l'équation (2.33), nous trouvons le point de séparation et avec le gradient de l'équation (2.41) nous trouvons la période de maintenance préventive qui minimise le coût total moyen. Les algorithmes pour trouver ces variables de décisions sont donnés dans ce qui suit.

2.4.3. Algorithmes de simulation

Nous calculons les états du système et les dates des prochains événements, par rapport à la machine et au stock, afin de connaître l'évolution du système et ensuite utiliser ces résultats dans la simulation.

Pour l'étude des états du système, nous avons défini les événements possibles qui peuvent faire changer l'état du système. Ils sont : la panne de la machine (F), la réparation de la machine (R), la saturation du stock (BF), l'épuisement du stock (BE) et la maintenance préventive (PM).

Si lors de la simulation, deux événements arrivent au même moment, nous considérons des priorités entre les événements afin de satisfaire l'hypothèse 2.11. Les priorités sont données selon l'ordre décroissant comme suit :

1. F ou R .
2. PM .
3. BE ou BF .

$r(t)$ correspond au temps qui reste avant le changement d'état de la machine M jusqu'à la panne suivante de la machine, la maintenance préventive ou la réparation. Nous calculons la date du prochain événement à partir des équations présentées dans la section 2.2, des TBF et des TTR .

Nous proposons ci-dessous un algorithme afin de trouver le point de séparation qui minimise le coût total moyen. Dans celui-ci, nous fixons la valeur de T_p et pour cette valeur, nous cherchons le point de séparation qui minimise la fonction de coût.

Etape 1 : Conditions initiales :

$X^h(0) = X_0^h = 0$; $Y^h(0) = Y_0^h = 0$; $\alpha(0) = 1$; $r(0) = TBF$; $u(0) = U, T_p = \text{valeur fixe}, h = \text{valeur initiale}$.

Etape 2 : Calcul de la date du prochain événement : $\delta_k = t - t_k$.

- Si $e_k = F$ ou R , alors $\delta_k = r(t_k)$.
- Si $e_k = PM$, alors $\delta_k = \text{Temps prochaine maintenance préventive}$.
- Si $e_k = BE$, alors $\delta_k = X(t_k)/D(t_k) - u(t_k - \tau 1)$.
- Si $e_k = BF$, alors $\delta_k = h - X(t_k)/(u(t_k - \tau 1) - D(t_k))$.

Etape 3 : Mettre à jour l'état du système :

- Si $e_k = BE$
 $X^h(t_{k+1}) = 0$
 $Y^h(t_{k+1}) = D \cdot \tau 1 + D \cdot \tau 2$
- Si $e_k = BF$
 $X^h(t_{k+1}) = h$
 $Y^h(t_{k+1}) = h + D \cdot \tau 1 + D \cdot \tau 2$
- Si $e_k = R, F$ ou PM
 $X^h(t_{k+1}) = X(t_k) + [(u(t_{k+1} - \tau 1) - D(t_{k+1})) * (t_{k+1} - t_k)]$
 $Y^h(t_{k+1}) = Y(t_k) + [(u(t_{k+1}) - D(t_{k+1} - \tau 2)) * (t_{k+1} - t_k)]$

Etape 4 : Mettre à jour les temps des événements et le temps de la simulation :

- Si $e_k = F$ ou R , alors $r(t_{k+1}) = TTR$ ou TBF
- Si $e_k = PM, BF$ ou BE , alors $r(t_{k+1}) = r(t_k) - (t_{k+1} - t_k) = r(t_k) - \delta_k$

Temps simulation = Temps simulation + δ_k

Etape 5 : Déterminer le prochain événement :

$$\delta_k = \min (TBF; TTR; \text{Temps prochaine maintenance préventive}; (h - X^h(t_{k+1}) / [(u(t_{k+1}) - \tau_1) - D(t_{k+1})]); (X^h(t_{k+1}) / [(D(t_{k+1}) - u(t_{k+1} - \tau_1))]))$$

Etape 6 : Calculer les coûts de stockage/pénuries, de transport et de maintenance et mettre à jour le coût moyen.

Etape 7 : Après avoir atteint le critère d'arrêt des simulations, calculer le coût total moyen, le coût total pour lequel $X^h(t)$ est positif ($T1(h)$) et le temps total pour lequel $X^h(t)$ est négatif ($T2(h)$).

Etape 8 : Calcul du gradient du coût avec l'équation (2.33). Tant que le signe du gradient ne change pas, répéter les pas 1 à 8 avec un h différent.

Soit K le nombre total d'événements. La fonction de coût peut être exprimée comme suit :

$$L_{T_k}(t, h) = \frac{1}{T_k} \sum_{K=1}^K \int_{t_k}^{t_{k+1}} (g(X^h(t, h)) + Xtd_1(t).ct + Xtd_2(t).ct)dt + C_m(T_k). \quad (2.42)$$

Un algorithme similaire est défini afin de déterminer la période de maintenance préventive T_p qui minimise le coût total moyen. Pour cet algorithme, la valeur de h est fixée et pour cette valeur, nous calculons la période de maintenance préventive qui minimise le coût total moyen. Cet algorithme est donné ci-dessous :

Etape 1 : Conditions initiales :

$$X^h(0) = X_0^h = 0; Y^h(0) = Y_0^h = 0; \alpha(0) = 1; r(0) = TBF; u(0) = U, h = \text{Valeur fixe}, T_p = \text{valeur initiale}.$$

Les étapes 2 à 6 sont identiques aux étapes de l'algorithme développé pour déterminer h .

Etape 7 : Après avoir atteint le critère d'arrêt des simulations pour un T_p spécifique, calculer le coût total moyen $L_T^{T_p}(T_p)$.

Etape 8 : Répéter les étapes 1 à 7 avec $T_p = T_p + \Delta_p$.

Etape 9 : Calculer le gradient de la fonction de coût avec l'équation (2.41). Pour ce faire, il faut utiliser les résultats obtenus dans l'étape 7 pour $L_T^{T_p}(T_p)$ et pour $L_T^{T_p}(T_p + \Delta_p)$. Tant que ce gradient ne change pas de signe, augmenter la valeur de T_p et répéter les étapes 1 à 9. La valeur de T_p^* qui minimise le coût total moyen sera celle qui annule le gradient (celle qui fait changer le signe du gradient).

La valeur du cout total moyen par rapport à la période de maintenance préventive sur un horizon fini définie pour tous les événements sur cet horizon peut être donnée comme suit :

$$L_{T_k}(T_p) = \frac{1}{T_k} \sum_{K=1}^K \int_{t_k}^{t_{k+1}} (g(X^h(t, h)) + Xtd_1(t).ct + Xtd_2(t).ct)dt + C_m(T_p). \quad (2.43)$$

Ces deux algorithmes sont utilisés afin d'obtenir h et T_p qui minimisent le coût total moyen. Des applications numériques sont données dans la section suivante.

2.5. Applications numériques

Pour la simulation du système de production, nous sommes partis d'une simulation de type événements discrets. Nous avons utilisé les événements définis dans la section 2.4.3 Nous avons développé un programme dans Dev-C ++ IDE et il a été testé sur un 2.3 GHz Intel ® Core ™ i7-3610QM avec Windows 7. Les paramètres de la simulation sont définis dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1. Paramètres de la simulation

U	D	c^+	c^-	τ_1	τ_2	TBF		TTR	
						α	β	α	β
4	3	10	200	1	2	2	100	2	20

Les temps de bon fonctionnement et les temps de réparation sont représentés par une loi de Weibull. Dans le Tableau 2.1. α et β représentent respectivement le paramètre de forme et le paramètre d'échelle de cette loi.

Nous calculons la fonction de coût en utilisant les résultats obtenus à partir de l'analyse IPA. Pour le calcul du coût de stockage entre deux événements successifs k et $k + 1$, nous considérons les quatre cas possibles pour le niveau de stock présentés dans Mourani *et al.* (2006, pp.326-327) [MOU06]. $X^h(t_k, h)$ est représenté par X_k et $X^h(t_{k+1}, h)$ est représenté par X_{k+1} . Ces cas sont : si $X_k \geq 0$ et $X_{k+1} \geq 0$; si $X_k \leq 0$ et $X_{k+1} \leq 0$; si $X_k \geq 0$ et $X_{k+1} \leq 0$ et finalement si $X_k \leq 0$ et $X_{k+1} \geq 0$.

Le critère d'arrêt des simulations est le nombre de pannes. Avec ce critère, nous nous assurons que les simulations s'arrêtent dans le même événement pour les deux trajectoires (nominale et perturbée). Les résultats suivants sont spécifiés pour 100.000 pannes (résultats stables voir le Tableau 2.2).

La Figure 2.3. présente différentes courbes du coût total moyen en fonction du point de séparation, pour différentes périodes de maintenance préventive. La fonction de coût a été calculée avec l'estimation du coût total moyen par rapport à h .

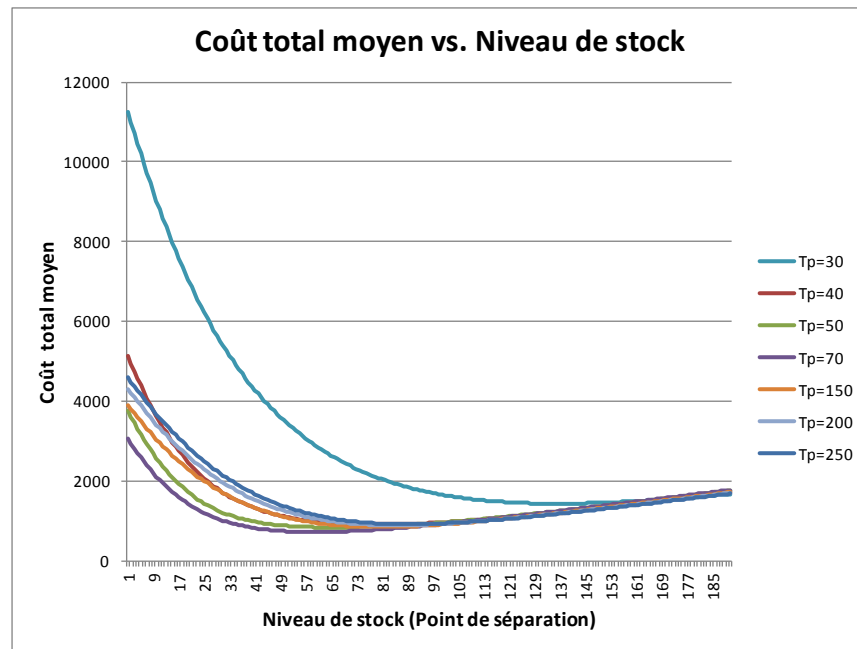


Figure 2.3. Coût total moyen estimé par rapport à h vs. point de séparation.

Les résultats de la simulation avec la fonction de coût, estimée par rapport au point de séparation (h), sont affichés dans le Tableau 2.2. Cette fonction est définie dans la section 2.4.1, p. 58.

Tableau 2.2. Résultats de la simulation pour $T_p = 200$

	Résultats de la simulation	Erreur standard
Coût total moyen (unités monétaires)	883.316 (± 1.261)	1.309
h (unités)	85.56 (± 0.158)	0.0205
Disponibilité (%)	87.023 (± 0.00013)	0.000000015

Les résultats du Tableau 2.2 ont été obtenus pour une valeur fixe de la période de la maintenance préventive égale à 200 unités de temps. Les valeurs affichées correspondent aux moyennes des résultats obtenus pour un ensemble de 20 simulations. Les valeurs entre parenthèses correspondent aux intervalles de confiance établis à un niveau de confiance égale à 95 %. Nous trouvons la valeur de la disponibilité associée à la valeur optimale du point de séparation obtenue pour une période de maintenance préventive égale à 200 unités. Pour les différents résultats affichés dans ce tableau, nous avons calculé l'erreur standard, laquelle, montre que les résultats obtenus de la simulation sont stables et donc ils sont obtenus lorsque le système atteint un état stationnaire.

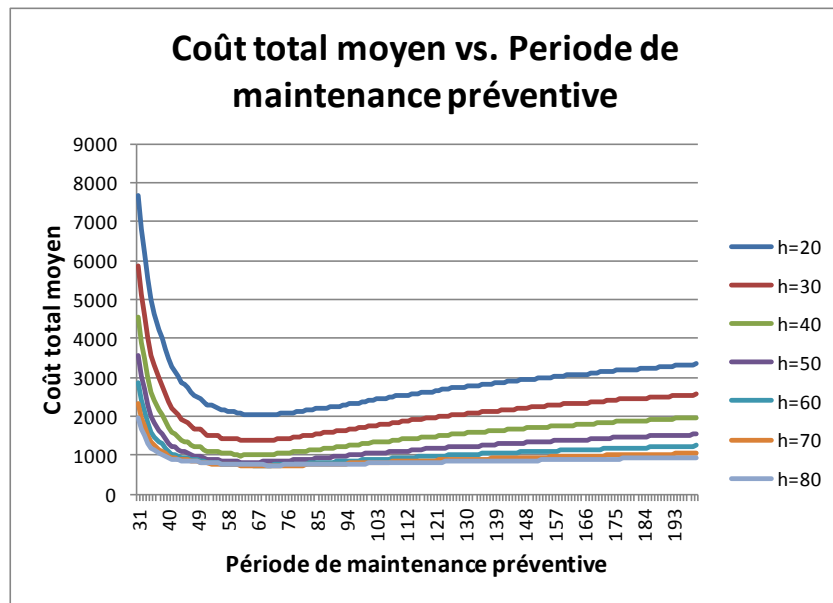


Figure 2.4. Coût total moyen estimé par rapport à T_p vs. période de maintenance préventive.

La figure 2.4. présente différentes courbes du coût total moyen en fonction de la période de maintenance préventive. Les courbes sont données pour différents points de séparation. La fonction de coût a été calculée avec l'estimation du coût total moyen par rapport à T_p .

Les résultats des simulations avec la fonction de coût estimée par rapport à T_p , sont présentés dans le Tableau 2.3. Cette fonction a été définie dans la section 2.4.2 p. 61. De plus, la valeur optimale de T_p a été calculée pour un point de séparation égal à 30 unités.

Tableau 2.3. Résultats de la simulation pour la fonction de coût dépendante de T_p et $h=30$

	Résultats de l'optimisation	Erreur standard
Coût total moyen (unités monétaires)	1509.843 (± 1.324)	1.5916
T_p (unités de temps)	65.577 (± 0.217)	0.0219
Disponibilité (%)	89.8905 (± 0.0001028)	0.00000000674

La figure 2.5 montre le niveau de stock pour la période de maintenance préventive optimale et la Figure 2.6 montre la période de maintenance préventive pour le niveau de stock optimal. Ces résultats ont été obtenus pour les paramètres donnés dans le Tableau 2.1. Nous observons que le coût total moyen minimum est obtenu pour une période de maintenance préventive égale à 69.91

(± 0.5005) unités de temps et une valeur du point de séparation $h^* = 60.14$ (± 0.328) unités (modèle à flux continus). Le coût associé est de 716.47 (± 1.621) unités monétaires.

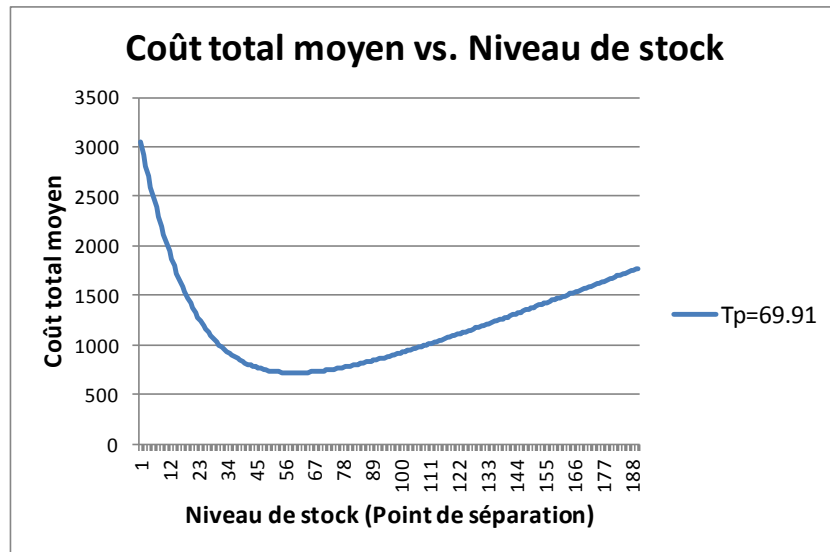


Figure 2.5. Configuration optimale du Coût total moyen vs. niveau de stock (point de séparation).

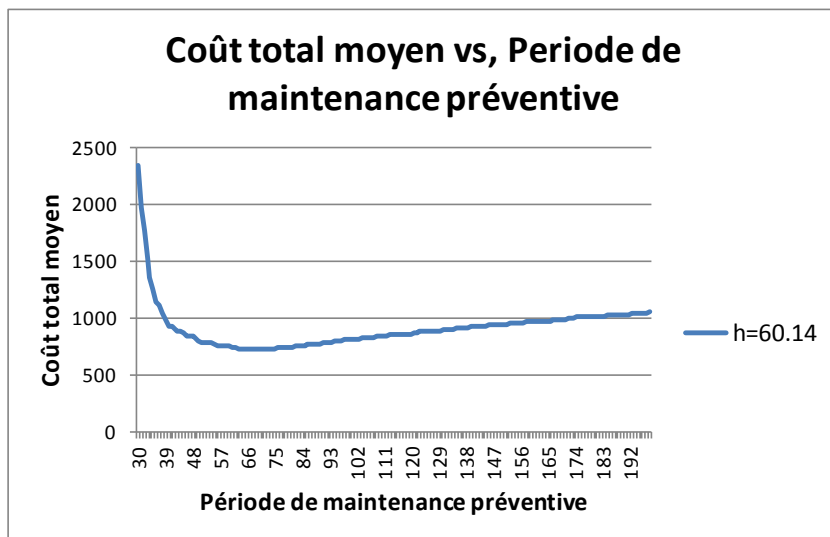


Figure 2.6. Configuration optimale du coût total moyen vs. période de la maintenance préventive.

Nous avons calculé la disponibilité du système en fonction de différentes périodes de la maintenance préventive pour $h=30$ unités (Figure 2.7.). Elle a été calculée dans la simulation avec l'équation (2.44) suivante :

$$Disponibilité = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \quad (2.44)$$

Où $MTBF$ est la moyenne des temps de bon fonctionnement et $MTTR$ la moyenne des temps de réparation.

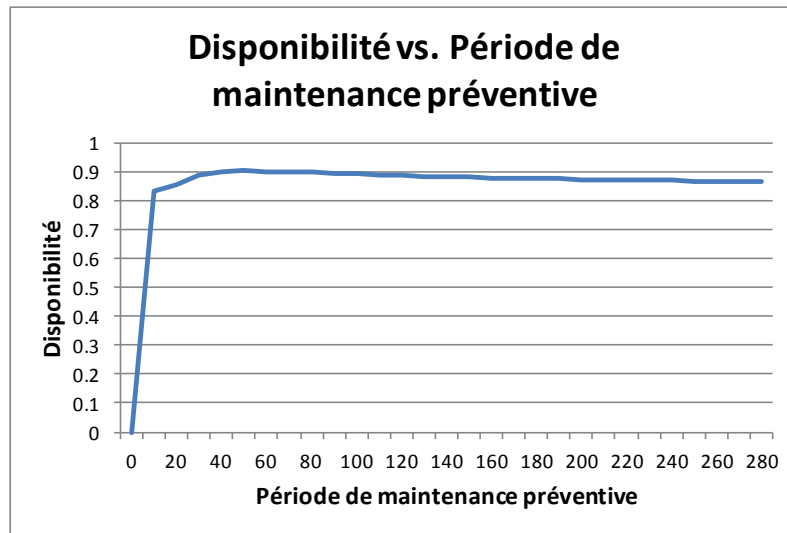


Figure 2.7. Disponibilité vs. période de maintenance préventive.

De la Figure 2.7. nous remarquons que la période de maintenance préventive qui maximise la disponibilité du système est égale à 41.3 unités de temps. La valeur de cette disponibilité est égale à 90.301%.

Nous avons fait la simulation pour des valeurs différentes de τ_1 et de τ_2 . Ces résultats sont montrés dans le Tableau 2.4.

Tableau 2.4. Résultats des simulations pour des valeurs différentes de τ_1 et τ_2

	Coût total moyen (unités monétaires)	T_p (unités de temps)	<i>Position du Stock</i> (unités)
$\tau_1=1$ et $\tau_2=20$	727.738	69.41	122.7
$\tau_1=10$ et $\tau_2=2$	722.896	69.7	95.7

Les résultats du Tableau 2.4 sont spécifiés pour les configurations optimales. Les valeurs du nombre de pièces sont données pour la position du stock. De ces résultats, nous remarquons que plus les délais de transfert augmentent, plus le nombre de pièces dans le système devient important. De plus, comme ces délais sont constants, la valeur de cette augmentation est approximativement égale à : $h + D.\tau_1 + D.\tau_2$, ce qui met en évidence le résultat du théorème 2.1. ($X^h(t, h) = Y^h(t - \tau_1) - D.\tau_1 - D.\tau_2$.)

De même, nous avons varié les valeurs des coûts de stockage ainsi que de la valeur de la demande pour étudier l'influence de ces paramètres sur le coût total moyen. Pour chaque expérimentation, un seul paramètre a été changé et les autres paramètres sont ceux donnés dans le Tableau 2.1. Les résultats de ces expérimentations sont affichés dans le Tableau 2.5.

Tableau 2.5. Résultats pour des expérimentations avec des paramètres différents

	Coût total moyen (unités monétaires)	T_p (unités de temps)	h (unités)
$c^+=15$ et $c^-=200$	924.866	69.55	50.45
$c^+=5$ et $c^-=200$	440.76	70.2	77.67
$c^+=10$ et $c^-=175$	682.343	69.87	56.82
$c^+=10$ et $c^-=225$	741.679	70.27	63.1
$D=2.7$	625.437	69.6	54.9
$D=3.3$	865.851	69.5	73.1

Des résultats du Tableau 2.5., nous remarquons que la valeur du coût total moyen est très sensible aux changements du coût de stockage/pénurie. Ainsi, si le coût de stockage augmente, le point de séparation diminue et si le coût de pénuries diminue, le point de séparation diminue également. De même, si le coût de stockage diminue, le point de séparation augmente et si le coût de pénuries augmente, le point de séparation augmente. Nous observons également que lorsque la demande est réduite, le niveau de stock (point de séparation) devient moins important et lorsque la valeur de la demande augmente, le niveau de stock devient plus important. Pour ces résultats, pour la configuration optimale, nous remarquons que la valeur de la maintenance préventive ne varie pas significativement par rapport aux résultats obtenus avec les paramètres du Tableau 2.1. Ceci peut être dû en partie au fait que dans notre étude nous avons considéré que le point de séparation et la période de la maintenance préventive sont indépendants.

2.5.1. Expérimentations pour une demande aléatoire et pour des pannes dépendantes des opérations

Dans les sections précédentes, il a été supposé que les pannes étaient dépendantes du temps et que la demande était constante. Ces deux hypothèses seront relâchées et chacune de ces problématiques sera considérée indépendamment.

Dans cette partie, l'objectif est d'approfondir avec des extensions possibles du problème formulé mais sans étude analytique (car plus complexe à démontrer). De cette façon, la demande sera considérée comme aléatoire et les pannes seront supposées être dépendantes des opérations.

Cas d'une demande aléatoire

Dans notre étude théorique, nous avons considéré une demande constante, mais pour la simulation de ce cas, nous avons pris en compte une demande aléatoire.

Pour la simulation, nous avons considéré que la valeur de la demande suit une loi exponentielle. Comme dans le cas de la demande constante, nous avons choisi le paramètre de

distribution en respectant $(U * MTBF) / (MTBF + MTTR) > D$ et par conséquent nous avons fixé λ égal à 2,5.

Nous observons que le cout total moyen, ainsi que le niveau du stock sont plus petits avec une demande qui suit une distribution exponentielle qu'avec une demande constante. Ceci est dû en partie au fait que la valeur moyenne de la demande avec la distribution exponentielle est plus petite que pour la demande constante. Le niveau de stock h est égal à 56.64 unités et le coût total moyen associé est égal à 659.98 unités monétaires. La valeur de la période de maintenance préventive pour ce niveau de stock est égale à 67.34 unités. Ces résultats sont consistants, car la valeur de la demande moyenne avec une distribution exponentielle est inférieure à la valeur de la demande constante donnée dans le Tableau 2.1, ce qui amène à une diminution du niveau du stock.

Cas de pannes dépendantes des opérations

Nous considérons des pannes dépendantes des opérations, c'est-à-dire que la machine tombe en panne seulement lorsqu'elle travaille sur une pièce. Dans ce cas, nous considérons que les défaillances s'engendrent seulement tant que la machine produit. Dans la simulation de ce problème nous avons considéré une demande constante, ainsi que les paramètres de la simulation du Tableau 2.1. Le coût total moyen obtenu est de 765.043 unités monétaires, avec un niveau de stock associé de 57.113 unités et une période de maintenance préventive de 78.054 unités de temps.

Ces résultats montrent que la période de la maintenance préventive est plus grande que la période de la maintenance préventive avec des pannes dépendantes du temps. Cela est dû au fait que la machine ne peut pas tomber en panne tant qu'elle ne produit pas. De cette manière, la période de la maintenance préventive augmente. Le niveau de stock ne change pas de manière significative par rapport au niveau de stock obtenu avec des pannes dépendantes du temps.

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un système de production mono-produit composé d'une machine, d'un stock de produits finis et d'un client. Les délais de transfert entre la machine et le stock, ainsi qu'entre le stock et le client ont été considérés. Ce système a été modélisé par un modèle à flux continus. La machine est soumise à des pannes dépendantes du temps. Une stratégie de maintenance préventive de type bloc a été adoptée. Nous avons prouvé par l'étude théorique, le lien existant entre le niveau de stock $X^h(t, h)$ et la position du stock dans tout le système $Y^h(t)$. Ce résultat met en évidence que le fait d'utiliser $Y^h(t)$ pour le calcul de la fonction du coût total n'a que peu d'impact, car $Y^h(t)$ et $X^h(t, h)$ sont liés, et la différence entre les deux est donnée par : $Y^h(t) - X^h(t, h) = D \cdot \tau_1 + D \cdot \tau_2, \forall t \geq \tau_1$.

La méthode IPA a été utilisée pour déterminer l'estimateur du gradient de la fonction de coût par rapport, d'une part à la période de la maintenance préventive et d'autre part au point de séparation, qui dans une politique de ce type, représente le niveau de stock maximal à détenir. Nous avons réalisé l'étude des trajectoires du niveau de stock et nous avons exprimé la trajectoire perturbée en fonction de la trajectoire nominale. Ceci a été possible grâce à une borne supérieure $h + \Delta$, qui correspond au niveau de stock maximum que peut atteindre la trajectoire perturbée. Il a été prouvé que l'estimateur du gradient de la fonction de coût est non biaisé, ce qui nous a permis d'utiliser nos résultats théoriques dans un algorithme d'optimisation basé sur la simulation avec comme objectif la minimisation du coût total moyen.

Nous avons fait une analyse de sensibilité en faisant varier par la simulation les valeurs des délais de transfert τ_1 et τ_2 . Nous avons logiquement noté que les valeurs de h sont plus élevées lorsque τ_1 et τ_2 deviennent plus grands. La valeur de la disponibilité de la machine a été trouvée. Nous avons constaté également, que l'implémentation d'une politique de maintenance préventive augmente le temps d'opération de la machine. Le problème a également été testé avec une demande aléatoire et avec des pannes dépendantes des opérations. Les résultats de la simulation ont montré que l'utilisation d'une variable aléatoire pour la valeur de la demande a un impact important sur la valeur du point de séparation et sur le coût total moyen. Cet impact varie selon les paramètres choisis pour la fonction de distribution de la demande, c'est-à-dire, plus la valeur moyenne de la demande augmente, plus le niveau de stock optimal devient important.

Une ouverture de la problématique étudiée dans ce chapitre a été proposée pour des lignes de transfert (voir Annexe 5). Elles ont également été modélisées par un modèle à flux continu sous différentes politiques de pilotage.

Les travaux de ce chapitre ont fait l'objet de deux communications dans des conférences internationales [RAM14a] et [RAM14b], et d'un article publié dans la revue *Computers & Industrial Engineering* (CIE) [RAM16a].

Comme perspectives aux travaux de ce chapitre, la méthode IPA pourrait être appliquée à une stratégie qui couple une politique de type point de séparation à une politique de maintenance préventive de type âge pour déterminer le point de séparation ainsi que la période de maintenance préventive qui minimisent les coûts globaux. De manière similaire, le couplage de la qualité des produits et de différentes politiques de maintenance (maintenance préventive de type bloc ou de type âge, maintenance prédictive, etc.) pourrait être étudié avec cette méthode afin d'obtenir une politique optimale de maintenance/qualité qui minimise les coûts de maintenance, de retraitement de produits, etc.

La problématique étudiée dans ce chapitre pourrait également être étendue à des systèmes de production qui considèrent plusieurs machines et plusieurs stocks (lignes de transfert) ou des systèmes dans lesquels plusieurs produits sont fabriqués.

Dans ce chapitre, nous n'avons considéré que des critères purement économiques : stockage, maintenance et transport. Dans le chapitre suivant, nous étudions le système de production considéré dans ce chapitre, mais en intégrant également des critères environnementaux et sociaux du développement durable. Pour ce faire, un coût environnemental et un coût social liés à la production sont intégrés dans la fonction de coût.

Chapitre 3 : Intégration du contexte actuel lié au développement durable dans le pilotage d'un système de production

3.1. Introduction

Face aux impacts des modes de consommation et de production sur l'environnement, les entreprises ont commencé à agir afin de les atténuer. Ces actions, influencées par les différents sommets de la Terre et ce qui a été convenu dans le Protocole de Kyoto entre autres, sont dirigées dans leur grande majorité à la limitation des émissions de gaz à effet de serre (GES). Ces actions peuvent avoir deux origines : soit parce que les organisations elles-mêmes ont pris conscience des conséquences de leurs activités sur l'environnement et veulent également anticiper par rapport aux possibles réglementations futures, soit parce que les autorités compétentes créent des mécanismes de régulation. Ces deux approches sont connues respectivement sous le nom d'approches volontaires et approches régulatrices [BRO09]. Les initiatives visant ce type de régulations couvrent les différentes activités liées aux fonctions de l'entreprise (approvisionnement, transport, production, stockage, etc.). Pour les deux types d'approches, ces régulations représentent des contraintes pour atteindre les objectifs propres à chacune de ces fonctions. Ces contraintes peuvent devenir elles-mêmes un objectif comme la minimisation d'émissions de GES ou de la consommation d'énergie, etc.

Bien que les critères économiques soient des facteurs clés pour garantir la pérennité des entreprises, elles sont amenées à prendre une attitude plus responsable envers l'environnement et la société et de s'adapter aux nouvelles réglementations imposées suite aux problèmes globaux générés tels que le changement climatique. Comme notre périmètre d'étude concerne la production, dans ce chapitre nous nous intéressons à l'intégration de critères du développement durable dans les activités associées à la production. La plupart des approches ayant pris en compte les aspects du développement durable dans les systèmes de production est basée sur un modèle permettant d'intégrer les coûts environnementaux d'approvisionnement [BON11]. Ce même principe a été utilisé par Bouchery *et al.* [BOU12] pour déterminer la quantité à stocker minimisant les émissions de gaz à effet de serre. Pour cette quantité, les auteurs ont évalué l'augmentation du coût en déterminant la quantité économique à commander. Ces différentes quantités permettent de connaître en termes économiques l'effet d'intégrer dans les coûts de gestion de l'entreprise, des coûts associés à des critères de durabilité, tels que la réduction des émissions de GES en introduisant des technologies moins polluantes. Les auteurs concluent que ces émissions peuvent être minimisées en faisant « *un petit effort* » économique qui peut être perçu comme un supplément du coût économique optimal. Hua *et al.* [HUA11] ont considéré l'internalisation des coûts d'émissions de CO₂ dans les coûts de production. Cette internalisation est basée sur l'approche réglementaire du système d'échange de quotas d'émissions de l'Union Européenne, également connue comme le système de plafonnement et échange ("*cap-and-trade system*"), lequel constitue une application du Protocole de Kyoto dans les pays membres de l'Union Européenne (*cf. section II.4*). Dans ce système, des quotas d'émissions de carbone sont alloués à une entreprise pour une période de temps (généralement un an). Si la quantité d'émissions dépasse ce plafond, l'entreprise peut acheter des émissions de carbone d'un marché d'échange de droits d'émissions carbone, sinon, elle peut vendre

les droits d'émission qui n'ont pas été consommés. Les auteurs concluent que ce système encourage la réduction des émissions, ce qui peut impliquer une augmentation du coût.

L'impact de l'intégration des approches réglementaires et des approches volontaires dans la planification de la production a été étudié dans [CHE10]. Les auteurs concluent qu'avec une approche réglementaire, le niveau de production planifié est supérieur lorsqu'il n'existe pas un standard environnemental. De plus, avec une approche volontaire, l'entreprise peut avoir un niveau de production plus stable qu'avec une approche réglementaire parce que les coûts environnementaux sont internalisés dans les coûts de production. Dans cette même optique, Ben-Salem *et al.* [BEN15a] considèrent une approche avec une limite volontaire d'émissions de polluants supérieure à la limite permise par les autorités pour un système de production soumis à des pannes aléatoires. Ce système est piloté par une politique de type point de séparation dans laquelle deux points de séparation sont considérés, l'un pour le critère économique qui correspond aux coûts de stockage/pénuries et l'autre, environnemental, correspondant aux émissions de polluants. Comme il a été souligné par les auteurs, l'intégration de critères environnementaux au pilotage de la production dans un environnement aléatoire est un problème très récent. Dans ce chapitre, nous suivons cette direction et nous étendons l'étude du système de production considéré dans le chapitre précédent, au cas de contexte de développement durable.

Ainsi, ce chapitre sera composé de deux études. Dans un premier temps, nous considérons des critères économiques (stockage, maintenance et transport) et environnementaux (qui peuvent représenter des émissions de polluants ou de GES ou la consommation d'énergie, d'eau, de matières premières, etc.). Dans un deuxième temps, nous intégrons à notre modèle en plus des critères économiques et environnementaux, des critères sociaux. Les critères sociaux peuvent être des vibrations de la machine, du bruit, des agents toxiques, des particules fines, etc., lesquels entraînent différents impacts sur la santé humaine. L'objectif est alors de déterminer le niveau de stock ainsi que la période de maintenance préventive qui minimisent le coût total moyen. Dans ce cas, la période de maintenance préventive est déterminée à partir des coûts liés aux aspects économiques, environnementaux et sociaux. A notre connaissance, même si des aléas tels que les pannes des machines ont été considérés, les politiques de maintenance préventive n'ont pas été intégrées dans ce type d'approches. Nous considérons donc que les actions de maintenance préventive périodiques remettent à neuf l'état de la machine et permettent d'agir sur les émissions polluantes ou nocives.

Le plan du chapitre est le suivant. Chacune des études comporte le modèle qui représente le système étudié, une étude des trajectoires, une estimation du gradient de la fonction de coût et les résultats des applications numériques. Ces résultats sont comparés avec ceux de l'étude menée dans le chapitre deux. Le chapitre s'achève par les conclusions concernant les résultats des études faites dans ce chapitre et quelques perspectives.

3.2. Etude d'un système de production avec prise en compte du coût environnemental de production

Dans cette section, nous reprenons le système de production étudié dans le chapitre deux, en intégrant, en plus des critères économiques étudiés, un critère environnemental lié aux émissions de « polluants » de la machine, tels que des éléments chimiques nocifs ou des gaz à effet de serre exprimés en équivalent carbone. Ce critère environnemental sera modélisé sous forme de coûts économiques.

La méthodologie suivie reste la même. Elle consiste dans un premier temps, à modéliser le système de production considéré. Ensuite, l'étude des trajectoires du niveau de stock et du niveau d'émissions environnementales sera faite. Cette étude sera utile pour faire l'estimation du coût total moyen et de son gradient, ce qui constituera l'estimateur IPA qui nous aidera à minimiser le coût total moyen à l'aide de simulations.

3.2.1. Système étudié

Nous reprenons le système de production considéré dans le chapitre deux. Pour rappel, ce système est composé d'une machine M , d'un stock B et d'un client C avec une demande constante (Figure 2.1.). Les délais de transfert entre la machine et le stock (τ_1) et entre le stock et le client (τ_2) sont supposés être constants et positifs. Un modèle à flux continu est également utilisé pour représenter le flux de matières.

Une politique de pilotage de type point de séparation avec deux points de séparation est utilisée. Cette politique sera explicitée plus bas.

Comme il a été considéré dans les hypothèses 2.1 et 2.2, la demande du client est connue et constante et la vitesse maximale de production U permet de satisfaire la demande D .

L'évolution du système est représentée par les équations (3.1) et (3.2) :

$$\frac{d(X^h(t, \vec{h}))}{dt} = u(t - \tau_1) - D \quad (3.1)$$

Avec $\vec{h} = (h, h_{en})$, dans lequel h représente le point de séparation économique et h_{en} le point de séparation environnemental.

Nous définissons un indice d'émissions constant θ correspondant aux polluants émis lors de la production, avec $0 \leq \theta \leq 1$.

La quantité émise à t est représentée par $e(t)$. Cette quantité dépend de la vitesse de production de la machine ainsi que de l'indice d'émission.

$$\frac{d(e(t))}{dt} = u(t) * \theta \quad (3.2)$$

A l'état initial, $e(0) = 0$. Pour chaque période i de maintenance préventive, les émissions reviennent à l'état initial, c'est-à-dire $e(i.T_p) = 0$ où $i.T_p$ correspond à l'instant dans lequel une maintenance préventive doit avoir lieu. Dans le but de réduire les pannes de la machine et d'augmenter la vie du système, une maintenance préventive de type bloc est implémentée. Cette maintenance permet également de réduire les émissions de polluants par désencrassement par exemple de la machine.

Un coût environnemental lié aux émissions est défini. Ce coût est calculé pour chaque période de maintenance préventive $i.T_p$ comme suit :

$$C_{env}(i.T_p) = C_{penalite}^{en} * \max(0; e(i.T_p) - L) \quad (3.3)$$

Avec L la limite d'émissions définie par les autorités de régulation et $C_{penalite}^{en}$ le coût de pénalité payé par unité émise à partir du moment auquel la limite d'émissions est dépassée. $C_{penalite}^{en}$ est donné comme suit :

$$C_{penalite}^{en} = \begin{cases} 0, & \text{si } e(i.T_p) - L \leq 0, \\ \text{coût environnemental à payer,} & \text{si } e(i.T_p) - L > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Sur l'horizon de temps fini T , le coût environnemental total est donné par l'équation (3.5) :

$$C_{env}^{total} = \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{env}(i.T_p) \quad (3.5)$$

Avec $N_p(T)$ le nombre total de maintenances préventives sur l'horizon de temps T .

Soit L_{min} une limite d'émissions volontaire définie par l'entreprise, avec $L_{min} > L$. Cette limite, permet à l'entreprise d'émettre éventuellement des polluants au-delà de la valeur réglementaire afin de satisfaire la demande dans chaque période de maintenance préventive. Une approche avec $L > L_{min}$ serait intéressante dans le cas où la limite réglementaire doit être strictement respectée.

Avec cette limite, la politique de pilotage définie dans l'équation (2.2) peut être redéfinie en fonction de deux points de séparation comme suit :

Si $e(t) \leq L_{min}$, alors :

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t).U, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) < h, \\ \alpha(t).D, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) = h, \\ 0, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) > h. \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans cette équation h représente le point de séparation avec des critères purement économiques, U la vitesse de production maximale de la machine et $\alpha(t)$ l'état de la machine à l'instant t , comme décrit dans l'équation (2.1). Elle correspond donc à la stratégie point de séparation classique avec un seul point de séparation comme il a été défini dans l'équation (2.2).

Si $e(t) > L_{min}$ alors :

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t).U, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) < h_{en}, \\ \alpha(t).D, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) = h_{en}, \\ 0, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) > h_{en}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Cette stratégie représente la politique avec le point de séparation environnemental, noté h_{en} . Nous supposons que $h > h_{en}$ [HEN15]. Pour rappel, si $\alpha(t) = 0$, la machine ne produit pas soit parce qu'elle est en panne ou sous une action de maintenance et si $\alpha(t) = 1$, la machine est en état de fonctionnement mais peut ne pas produire si le stock est suffisamment rempli.

Remarque : La valeur de h peut être prise comme étant égal au point de séparation h^* trouvée au chapitre 2 en considérant seulement des critères économiques (stockage/pénuries, transport et maintenance).

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'étude des trajectoires du niveau de stock et du niveau des émissions environnementales. Cette étude est faite afin de déterminer l'estimateur du gradient de la fonction de coût à partir des trajectoires nominale et perturbée.

3.2.2. Etude analytique des trajectoires

Dans cette section, nous allons construire les trajectoires perturbées du niveau de stock et du niveau des émissions à partir des trajectoires nominales du niveau de stock et du niveau des émissions respectivement. Pour ce faire, nous déterminons d'abord, la relation existante entre la perturbation de la trajectoire du niveau de stock et la perturbation de la trajectoire du niveau des émissions. Ensuite, nous étudions l'écart entre les trajectoires nominale et perturbée du niveau de stock et du niveau des émissions. Cette étude sera utilisée pour déterminer notre estimateur du gradient de la fonction de coût. Nous supposons également que la demande est constante.

Nous conservons les hypothèses 2.3, 2.4 et 2.6. Pour rappel, l'hypothèse 2.3 assume que la machine ne tombe pas en panne pendant la construction du stock initial, l'hypothèse 2.4 vérifie que les événements se produisent au même moment dans les deux trajectoires et l'hypothèse 2.6 dans laquelle nous assumons que tous les paramètres des trajectoires nominale et perturbée sont identiques. De plus nous considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1. : La valeur de la perturbation Δh_{en} est positive ($\Delta h_{en} > 0$).

La trajectoire perturbée est construite à partir de la trajectoire nominale. Nous perturbons d'une valeur Δh_{en} le point de séparation h_{en} . De cette façon, le point de séparation h_{en} de la trajectoire perturbée devient égale à $h_{en} + \Delta h_{en}$.

Remarque : Comme pour l'hypothèse 2.5, une perturbation négative pourrait être prise en compte (et nous pourrions obtenir des résultats similaires).

Dans cette étude, nous nous sommes intéressées à estimer la valeur du point de séparation environnemental h_{en} . Donc, nous perturbons ce paramètre dans notre étude des trajectoires. Ainsi, lorsque $e(t) \geq L_{min}$, la machine produit pour atteindre un niveau de stock égal au point de séparation h_{en} . Pour une trajectoire aléatoire du niveau de stock et du niveau d'émissions environnementales, nous avons deux cas de figure possibles lorsque $e(t)$ dépasse la limite d'émissions L_{min} : 1). Si $e(t) \geq L_{min}$ et $X^h(t, \vec{h}) \geq h_{en}$, et 2). Si $e(t) \geq L_{min}$ et $X^h(t, \vec{h}) < h_{en}$. Pour étudier ces deux cas, nous déterminons en premier la valeur de la perturbation des émissions à partir de la perturbation dans le niveau de stock et ensuite nous construisons les trajectoires perturbées des émissions $e^\Delta(t)$ et du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$.

Soit t_1 le moment auquel la trajectoire nominale du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ atteint le point de séparation h_{en} et t'_1 le moment à partir duquel la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ devient égale à $h_{en} + \Delta h_{en}$.

Cas 1 : Si $e(t) \geq L_{min}$ et $X^h(t, \vec{h}) \geq h_{en}$ ($t'_1 < t_1$)

Dans ce cas, la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ atteint le point de séparation perturbé $h_{en} + \Delta h_{en}$ avant que la trajectoire nominale du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ n'atteigne le point de séparation sans perturbation. La Figure 3.1 montre un exemple d'une trajectoire aléatoire qui représente ce cas.

Pour l'étude des trajectoires du niveau de stock, nous tenons compte du délai τ_1 . En effet, un changement dans la vitesse de production de la machine $u(t)$ à t entraîne un changement dans le niveau de stock à $t - \tau_1$. Par contre, le niveau des émissions change en même temps que change la vitesse de production de la machine. Pour l'étude des trajectoires, nous considérons la Figure 3.1.

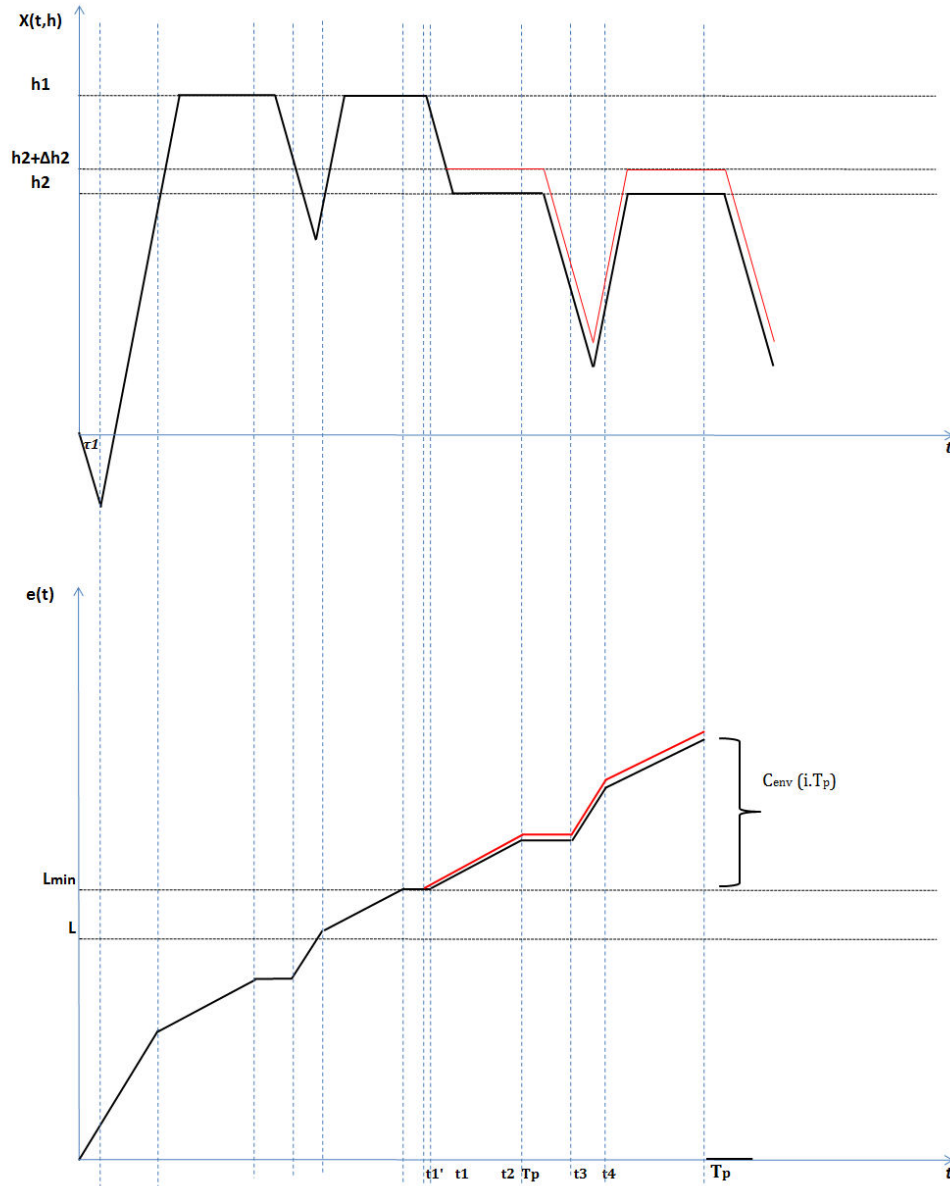


Figure 3.1. Exemple d'une trajectoire du niveau de stock et des émissions pour le cas 1.⁷

⁷ Dans la figure 3.1., à $t=0$ la machine commence à produire à sa vitesse de production maximale U . Le niveau d'émissions environnementales augmente conformément aux changements de la vitesse de production de la machine, avec une vitesse égale à $u(t) * \theta$. Dans le graphique correspondant à $X^h(t, \vec{h})$, les pièces commencent à arriver au stock à $t = \tau 1$. Lorsque le niveau de stock devient égal au point de séparation h , la machine produit à une vitesse de production égale à la demande D jusqu'à ce qu'une panne aléatoire survienne. Pendant le temps de réparation de la machine, la vitesse de production est nulle et donc, le niveau de stock décroît à une vitesse égale à $-D$. Ensuite, lorsque le système est réparé et puisque le niveau des émissions est inférieur à la limite L_{min} ($e(t) < L_{min}$) la machine produit à sa vitesse maximale U jusqu'à ce qu'elle atteigne le point de séparation h . Après la machine produit à une vitesse de production égale à la demande D jusqu'à ce que le niveau des émissions $e(t)$ atteigne la limite L_{min} . Lorsque cette limite est atteinte, la machine arrête la production jusqu'à ce que le niveau de stock devienne égal au point de séparation environnemental h_{en} . Les trajectoires perturbées du niveau de stock et des émissions se produisent à partir du moment auquel le niveau de stock atteint le point de séparation perturbé $h_{en} + \Delta h_{en}$. Pour le niveau des émissions, la trajectoire perturbée se produit à $t = t'_1$, alors que pour le niveau de stock la trajectoire perturbée se produit à $t = t'_1 - \tau 1$ du fait du délai de transfert entre la machine et le stock. Ensuite, la machine produit à une vitesse de production égale à la demande afin de maintenir le niveau de stock égal à h_{en} jusqu'à ce qu'une panne se produise (pour le niveau de stock lorsque $t = t_2 - \tau 1$). Quand la machine est réparée, elle produit à sa vitesse maximale jusqu'à ce que le niveau de stock

De la Figure 3.1., par l'équation (3.1) et par l'équation de la pente, nous avons pour t entre $t'_1 - \tau_1$ et $t_1 - \tau_1$:

$$-D = \frac{-\Delta h_{en}}{t_1 - \tau_1 - t'_1 + \tau_1} \quad (3.8)$$

$$t_1 - t'_1 = \frac{\Delta h_{en}}{D} \quad (3.9)$$



Figure 3.2. Trajectoire nominale et perturbée des émissions pour $t \in [t'_1, t_1]$ du cas 1.

Similairement, des figures 3.1 et 3.2, de l'équation (3.2) et de l'équation de la pente nous obtenons :

$$D * \theta = \frac{\Delta e}{t_1 - \tau_1 - t'_1 + \tau_1} \quad (3.10)$$

$$t_1 - t'_1 = \frac{\Delta e}{D * \theta} \quad (3.11)$$

Ensuite en prenant (3.9) égale à (3.11), nous obtenons :

$$\frac{\Delta h_{en}}{D} = \frac{\Delta e}{D * \theta} \quad (3.12)$$

Et finalement nous obtenons la valeur de la perturbation du niveau des émissions en fonction de la perturbation du point de séparation :

$$\Delta e = \Delta h_{en} * \theta \quad (3.13)$$

Ce résultat sera utilisé pour notre étude du gradient de la fonction de coût.

Maintenant nous étudions les trajectoires du niveau de stock et de la quantité d'émissions par intervalle de temps. Nous faisons l'étude des trajectoires nominale et perturbée afin de connaître leur écart et ainsi pouvoir peut-être en déduire le gradient. Comme nous l'avons mentionné précédemment, il existe un décalage dans le temps égal à τ_1 entre le niveau de stock et le niveau des émissions. Pour cette raison, nous étudions pour le niveau de stock les intervalles de temps en tenant compte du délai τ_1 .

Nous supposons qu'à l'état initial $X^h(0) = X^{h+\Delta}(0) = 0$ et $e(0) = e^\Delta(0) = 0$.

Lemme 3.1. $X^h(t, \vec{h}) \leq X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \leq X^h(t, \vec{h}) + \Delta h_{en}, \forall t$.

Preuve du Lemme 3.1. :

Par l'hypothèse 3.1, nous savons que la trajectoire perturbée est construite à partir du moment auquel le niveau de stock nominal atteint le point de séparation h_{en} . Nous avons donc $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) = X^h(t', \vec{h})$, pour $t \in [0, t'_1 - \tau_1]$.

atteigne le point de séparation h_{en} . Lorsque le point de séparation h_{en} est atteint, la machine produit à une vitesse de production égale à la demande jusqu'à ce que la période de maintenance préventive T_p arrive.

Soit $u^A(t)$ la vitesse de production de la trajectoire perturbée.

- Si $t \in [t'_1 - \tau 1, t_1 - \tau 1[$ nous avons trois possibilités pour la trajectoire de $X^h(t, \vec{h})$:
 - a) Si $h_{en} < X^h(t, \vec{h}) < h_{en} + \Delta h_{en}$, $u(t) = 0$ et $u^A(t) = D$
 - b) Si $X^h(t, \vec{h}) = h_{en} + \Delta h_{en}$, $u(t) = 0$ et $u^A(t) = 0$
 - c) Si $X^h(t, \vec{h}) = h_{en}$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$

Soit $t' \in [t'_1 - \tau 1, t_1 - \tau 1[$, tel que $t' \leq t$

$$X^h(t, \vec{h}) = X^h(t'_1, \vec{h}) + \int_{t'_1 - \tau 1}^{t_1 - \tau 1} (u(s - \tau 1) - D) ds \quad (3.14)$$

$$X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) = X^{h+\Delta}(t'_1, \vec{h}) + \int_{t'_1 - \tau 1}^{t_1} (u^A(s - \tau 1) - D) ds \quad (3.15)$$

- a) $X^h(t, \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) - D * (t - t')$
 $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^{h+\Delta}(t', \vec{h})$
 A partir de ces deux équations, nous savons que $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) \geq X^h(t', \vec{h})$, d'où $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.
- b) $X^h(t, \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) - D * (t - t')$
 $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) - D * (t - t')$
 Dans cet intervalle, $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) > X^h(t', \vec{h})$, donc nous pouvons conclure que $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.
- c) $X^h(t, \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h})$
 $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^{h+\Delta}(t', \vec{h})$
 Pour cet intervalle, nous avons également que $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) > X^h(t', \vec{h})$, donc nous pouvons conclure que $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.

Pour ces trois possibilités pour la trajectoire du niveau de stock (a, b et c), nous avons démontré que $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$. Donc pour $t \in [t'_1 - \tau 1, t_1 - \tau 1[$, $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.

A $t = t_1 - \tau 1$, la trajectoire perturbée atteint le point de séparation perturbé $h_{en} + \Delta h_{en}$. Δh_{en} correspond à l'écart maximal entre ces deux trajectoires. A partir de $t = t_1 - \tau 1$, nous avons donc $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) = X^h(t, \vec{h}) + \Delta h_{en}$.

- Si $t \in [t_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$ nous avons trois possibilités pour la trajectoire du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$:
 - a) $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^A(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^A(t) = U$

Soit $t' \in [t_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$, tel que $t' \leq t$.

$$\begin{aligned} \text{a) } X^h(t, \vec{h}) &= X^h(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) \\ X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) &= X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + \Delta h_{en}. \end{aligned}$$

Comme $\Delta h_{en} > 0$ et $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) > X^h(t', \vec{h})$, donc $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) > X^h(t, \vec{h})$.

$$\begin{aligned} \text{b) } X^h(t, \vec{h}) &= X^h(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) - D * (t - t') \\ X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) &= X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) - D * (t - t') \\ &= X^h(t', \vec{h}) + \Delta h_{en} - D * (t - t') \end{aligned}$$

De manière similaire, comme $\Delta h_{en} > 0$ et $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) > X^h(t', \vec{h})$, nous avons donc $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) > X^h(t, \vec{h})$.

$$\begin{aligned} \text{c) } X^h(t, \vec{h}) &= X^h(t', \vec{h}) + (U - D) * (t - t') \\ X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) &= X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (U - D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) + \Delta h_{en} + (U - D) * (t - t'). \end{aligned}$$

Comme $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) > X^h(t', \vec{h})$ alors $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) > X^h(t, \vec{h})$.

Pour les possibles trajectoires du niveau de stock dans l'intervalle $[t_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$, nous avons prouvé que $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.

A partir de $t = t_4 - \tau 1$, les différentes possibilités pour la trajectoire du niveau de stock sont celles étudiées pour $t \in [t_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$.

Nous avons prouvé que la trajectoire nominale du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ est inférieure ou égale à la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ ($X^h(t, \vec{h}) \leq X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$) pour $t \in [0, t - \tau 1[$.

C.Q.F.D.

Maintenant, nous étudions les trajectoires des émissions. Nous considérons chacun des intervalles étudiés pour le niveau de stock mais sans prendre en compte le délai $\tau 1$.

Lemme 3.2. $e(t) \leq e^A(t) \leq e(t) + \Delta e, \forall t$.

Preuve du Lemme 3.2. :

Comme la perturbation dans la trajectoire des émissions dépend de la perturbation du niveau de stock, nous assumons par l'hypothèse 3.1 que la trajectoire perturbée du niveau d'émissions est générée à partir du moment auquel la trajectoire du niveau de stock est perturbée. Donc pour $t \in [0, t'_1[$, $e(t) = e^A(t)$.

Ensuite, nous étudions les intervalles $[t'_1, t_1[$ et $[t_1, t_4[$.

Nous avons donc :

- Si $t \in [t'_1, t_1[$
 - a) Si $L_{min} < e^\Delta(t) < e(t) + \Delta e$, $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = D$
 - b) Si $e(t) = L_{min}$, $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = 0$
 - c) Si $e^\Delta(t) = e(t) + \Delta e$, $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = D$

Soit $t' \in [t'_1, t_1[$, tel que $t' \leq t$

$$e(t) = e(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u(s) * \theta) ds \quad (3.16)$$

$$e^\Delta(t) = e^\Delta(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u^\Delta(s) * \theta) ds \quad (3.17)$$

Avec $e^\Delta(t') \geq e(t')$.

- a) $e(t) = e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + D * \theta * (t - t')$
 Comme nous savons que $e^\Delta(t') \geq e(t')$, $\theta > 0$ et $u^\Delta(t) > u(t)$, donc $e^\Delta(t) > e(t)$.
- b) $e(t) = e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + 0 * \theta * (t - t') = e^\Delta(t')$
 Nous savons que $e^\Delta(t') \geq e(t')$, donc $e^\Delta(t) \geq e(t)$.
- c) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + D * \theta * (t - t')$
 Comme $e^\Delta(t') \geq e(t')$ donc $e^\Delta(t) \geq e(t)$.

Pour les trois possibilités pour la trajectoire des émissions dans l'intervalle $[t'_1, t_1[$, nous avons prouvé que $e^\Delta(t) \geq e(t)$.

A $t = t_1$, l'écart est maximum entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. A partir de $t = t_1$, $e^\Delta(t) = e(t) + \Delta e = e(t) + \Delta h_{en} * \theta$.

- Si $t \in [t_1, t_4[$ nous avons :
 - a) $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^\Delta(t) = U$

Soit $t' \in [t_1, t_4[$, tel que $t' \leq t$.

- a) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + D * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + D * \theta * (t - t')$
 $= e(t') + \Delta h_{en} * \theta + D * \theta * (t - t')$
 Puisque $e^\Delta(t') > e(t')$ nous concluons que $e^\Delta(t) > e(t)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } e(t) &= e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t') \\ e^\Delta(t) &= e^\Delta(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e = e(t') + \Delta h_{en} * \theta \end{aligned}$$

Similairement, comme $e^\Delta(t') > e(t')$ alors $e^\Delta(t) > e(t)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } e(t) &= e(t') + U * \theta * (t - t') \\ e^\Delta(t) &= e^\Delta(t') + U * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + U * \theta * (t - t') \\ &= e(t') + \Delta h_{en} * \theta + U * \theta * (t - t') \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons aussi $e^\Delta(t) > e(t)$.

Pour les trois cas, nous avons démontré que $e^\Delta(t) > e(t)$.

A partir de $t = t_4$ jusqu'à $t = T_p$ les cas possibles sont ceux étudiés dans l'intervalle $[t_1, t_4[$.

Nous avons prouvé que $e(t) \leq e^\Delta(t) \leq e(t) + \Delta e = e(t) + \Delta h_{en} * \theta$. Dans les intervalles étudiés, nous avons considéré tous les scénarios possibles pour la trajectoire des émissions selon la figure 3.1.

C.Q.F.D.

Cas 2 : Si $e(t) > L_{min}$ et $X^h(t, \vec{h}) < h_{en}$ ($t_1 < t'_1$)

Ce deuxième cas correspond au moment à partir duquel la trajectoire nominale du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ atteint le point de séparation h_{en} , avant que la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ n'atteigne le point de séparation perturbé $h_{en} + \Delta h_{en}$. La Figure 3.3 montre un exemple d'une trajectoire aléatoire qui représente ce cas.

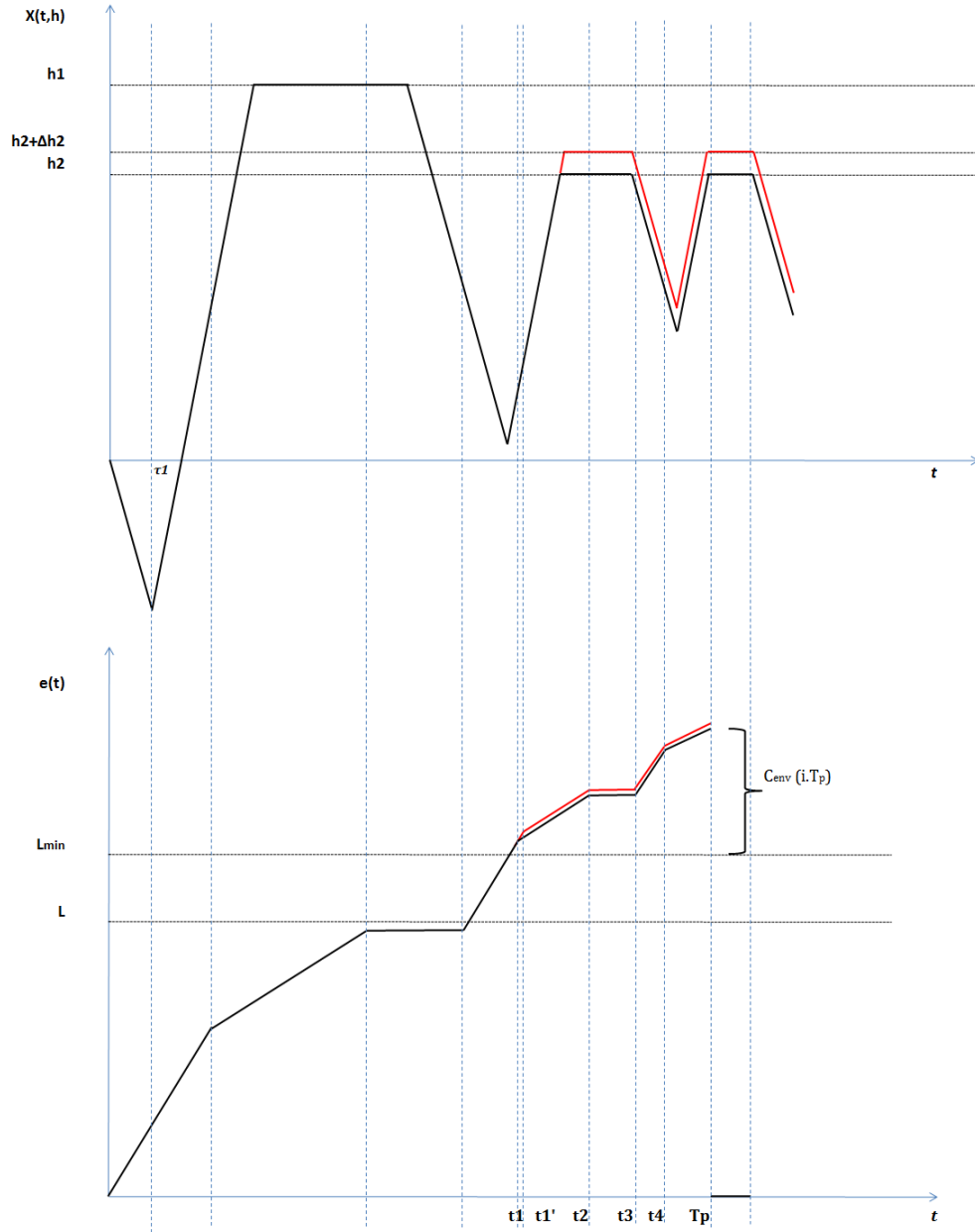


Figure 3.3. Exemple d'une trajectoire aléatoire du niveau de stock et des émissions pour le cas 2.⁸

⁸ Dans cette figure, à $t = 0$ la machine commence à produire à sa vitesse de production maximale U jusqu'à ce que le niveau de stock atteigne le point de séparation h . Le niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ à $t = \tau1$ est égal à $-D * \tau1$ dû au délai de transfert entre la machine et le stock. Le niveau des émissions $e(t)$ augmente selon la vitesse de production de la machine à une vitesse égale à $u(t) * \theta$. Lorsque le niveau de stock devient égale à h la machine produit à une vitesse égale à la demande D afin de maintenir le niveau de stock égal à h jusqu'à ce qu'une panne aléatoire se produise. Ensuite, lorsque la machine est en réparation, le niveau de stock décroît à une vitesse égale à $-D$. Postérieurement, lorsque la machine est réparée, elle produit à sa vitesse maximale U . La limite d'émissions L_{min} est dépassée lorsque la machine produit à sa vitesse maximale, mais comme le niveau de stock est inférieur au point de séparation environnemental h_{en} , la machine continue à produire avec une vitesse U jusqu'à ce que le point de séparation h_{en} soit atteint. A partir du moment auquel le point de séparation h_{en} est atteint, les trajectoires perturbées du niveau de stock et du niveau d'émissions environnementales sont construites. Ensuite, la machine continue à produire à une vitesse égale à la demande afin de maintenir le niveau

De la Figure 3.3., de l'équation de la pente et de l'équation (3.1) nous avons :

$$U - D = \frac{\Delta h_{en}}{t'_1 - t_1} \quad (3.18)$$

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta h_{en}}{U - D} \quad (3.19)$$

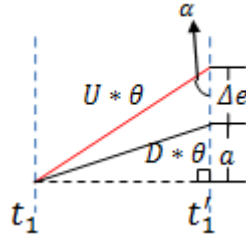


Figure 3.4. Trajectoire nominale et perturbée du niveau d'émissions entre t_1 et t'_1 du cas 2.

Nous pouvons trouver la valeur de la perturbation Δe à partir de la figure 3.4.

Par l'équation de la pente, l'équation (3.2) et la figure 3.4, nous obtenons pour la trajectoire nominale des émissions :

$$D * \theta = \frac{a}{t'_1 - t_1} \quad (3.20)$$

$$a = D * \theta * (t'_1 - t_1) \quad (3.21)$$

De même, par la figure 3.4, l'équation de la pente et l'équation 3.2 nous obtenons pour la trajectoire perturbée :

$$U * \theta = \frac{\Delta e + a}{t'_1 - t_1} \quad (3.22)$$

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta e + a}{U * \theta} \quad (3.23)$$

En remplaçant (3.21) dans (3.23) nous obtenons :

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta e + D * \theta * (t'_1 - t_1)}{U * \theta} \quad (3.24)$$

$$(t'_1 - t_1) * U * \theta = \Delta e + D * \theta * (t'_1 - t_1) \quad (3.25)$$

De (3.25) nous avons :

$$\Delta e = (t'_1 - t_1) * U * \theta - D * \theta * (t'_1 - t_1) \quad (3.26)$$

Ensuite, avec $(t'_1 - t_1) * \theta$ comme un facteur commun, nous obtenons :

$$\Delta e = (t'_1 - t_1) * \theta * (U - D) \quad (3.27)$$

Ensuite nous remplaçons (3.19) dans (3.27) afin de mettre la perturbation des émissions en fonction de la perturbation du niveau de stock Δh_{en} :

de stock égal à h_{en} jusqu'à ce qu'une panne aléatoire se produise (à $t = t_2$). Ensuite, les événements qui suivent dans la trajectoire du niveau de stock dans la figure 3.3. sont : la réparation (à $t = t_3$), point de séparation environnemental h_{en} atteint (à $t = t_4$) et une action de maintenance préventive (à $t = T_p$). Le niveau des émissions revient à zéro à chaque période de maintenance préventive.

$$\Delta e = \left(\frac{\Delta h_{en}}{U-D} \right) * \theta * (U - D)$$

Et nous obtenons :

$$\Delta e = \Delta h_{en} * \theta \quad (3.28)$$

Le résultat de l'équation (3.28) correspond à celui trouvé pour le cas 1 et sera donc utilisé pour estimer le gradient de la fonction de coût.

Comme pour le cas 1, nous étudions maintenant les trajectoires du niveau de stock et de la quantité d'émissions selon les intervalles pour le cas 2.

Nous supposons également qu'à l'état initial $X^h(0) = X^{h+\Delta}(0) = 0$ et $e(0) = e^{\Delta}(0) = 0$.

Lemme 3.3. : $X^h(t, \vec{h}) \leq X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \leq X^h(t, \vec{h}) + \Delta h_{en}, \forall t$.

La preuve de ce lemme est donnée dans l'Annexe 6.

Nous étudions maintenant la trajectoire des émissions pour le deuxième cas. Comme pour le cas 1, nous devons étudier les intervalles de temps qui correspondent aux intervalles étudiés pour la trajectoire du niveau de stock mais sans prise en compte du délai 1.

Lemme 3.4. $e(t) \leq e^{\Delta}(t) \leq e(t) + \Delta e, \forall t$.

La preuve de ce lemme est également donnée dans l'Annexe 6.

Dans chaque période T_p , tous les scénarios possibles pour la trajectoire des émissions environnementales et pour la trajectoire du niveau de stock sont compris dans les différents intervalles étudiés pour les deux cas. Ces résultats seront utilisés pour l'estimation du gradient de la fonction de coût avec prise en compte du critère environnemental. Il est à noter que les lemmes sont identiques pour les deux cas étudiés.

Nous pouvons déterminer le niveau de stock avec prise en compte du délai $X^h(t - \tau_1, \vec{h})$ selon la position du stock $Y^h(t)$ et des délais. Cela est prouvé dans le corollaire suivant qui est dérivé du théorème 2.1 démontré dans le chapitre 2. Dans celui-ci, il a été démontré que $X^h(t, \vec{h}) = Y^h(t - \tau_1) - D \cdot \tau_1 - D \cdot \tau_2, \forall t \geq \tau_1$.

Corollaire 3.1. : $X^h(t - \tau_1, \vec{h}) = Y^h(t) - D \cdot \tau_1 - D \cdot \tau_2, \forall t \geq \tau_1$.

La démonstration de ce corollaire est donnée dans l'Annexe 6.

Nous avons démontré dans cette section que la trajectoire nominale du niveau de stock est bornée par la trajectoire perturbée du niveau de stock. Nous avons fait de même pour la trajectoire nominale des émissions environnementales et sa trajectoire perturbée. La différence maximale entre les trajectoires nominale et perturbée correspond à la valeur de la perturbation (Δh_{en} pour les trajectoires du niveau de stock et Δe pour les trajectoires du niveau d'émissions environnementales).

Nous allons maintenant estimer le gradient de la fonction de coût par rapport au point de séparation environnemental (h_{en}).

3.2.3. Estimation du gradient de la fonction de coût

Après avoir fait l'étude des trajectoires pour le niveau de stock et pour les émissions, nous allons estimer le gradient de la fonction de coût qui constituera l'estimateur IPA. Pour ce faire, nous nous intéressons au coût total moyen. Ensuite, nous démontrons que ce gradient n'est pas biaisé.

Hypothèse 3.2. : Nous supposons que le coût de maintenance à t ($C_m(t)$) est indépendant de h et h_{en} . En effet, pour l'application de la méthode IPA, lorsque la perturbation est appliquée simultanément sur le point de séparation et sur la période de maintenance préventive, cette perturbation est propagée dans deux sens différents. Ceci implique qu'entre les trajectoires nominale et perturbée un écart se produit. De cette manière, la condition d'impartialité de l'estimateur du gradient de la fonction de coût pour une étude qui considère la dépendance entre ces deux variables n'est pas respectée.

Hypothèse 3.3. : La politique de maintenance est supposée être parfaite, ce qui implique qu'après une action de maintenance, le système revient à l'état comme neuf.

Hypothèse 3.4. : La valeur espérée du coût total moyen $J_T(\vec{h})$ existe et la fonction est continue.

Hypothèse 3.5. : Nous supposons que deux événements ne se produisent pas au même temps. Ceci permet de garantir que la séquence des événements entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée est identique, ce qui constitue une condition pour l'application de la méthode IPA.

Hypothèse 3.6. : Les flux de transport de matières sont indépendants de T_p .

Maintenant nous définissons le coût total moyen sur un horizon fini. Dans ce cas, nous ajoutons à l'équation (2.25) un coût environnemental d'émissions de polluants, qui correspond au quatrième terme de l'équation (3.29) :

$$L_T^{h_{en}}(t, \vec{h}) = \frac{1}{T} \left[\int_0^T g(X^h(t, \vec{h})) dt + X t d_1(T) * ct_1 + X t d_2(T) * ct_2 + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{pénalité}^{en} * \max(0; e(i, T_p) - L)}_{4} \right] + C_m(T) \quad (3.29)$$

Le coût total moyen perturbé sur un horizon fini est donné par l'équation (3.30) :

$$\begin{aligned}
 L_T^{h_{en} + \Delta h_{en}}(t, \vec{h}) &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T g(X^h(t, \vec{h})) dt + \int_0^T \left(g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) - g(X^h(t, \vec{h})) \right) dt + X t d_1(T) \right. \\
 &\quad * ct_1 + X t d_2(T) * ct_2 + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{pénalité}^e * \max(0; e(i.T_p) - L) \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{i=0}^{N_p(T)} (e^\Delta(i.T_p) - L) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i.T_p) - L) \right) * C_{pénalité}^{en} \right] + C_m(T) \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant les termes du coût total moyen perturbé (équation 3.30) qui correspondent à l'écart entre les trajectoires nominales et perturbées du niveau de stock et du niveau d'émissions environnementales, à savoir l'expression 2 pour le niveau de stock et l'expression 6 pour le niveau d'émissions environnementales.

Pour le deuxième terme de l'équation (3.30) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T \left(g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) - g(X^h(t, \vec{h})) \right) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) + \Delta h_{en}) - g(X^h(t, \vec{h})) \right) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) + g(\Delta h_{en}) - g(X^h(t, \vec{h})) \right) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (g(\Delta h_{en})) dt \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Dans lequel nous assumons par l'étude des trajectoires que $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) = X^h(t, \vec{h}) + \Delta h_{en}$.

Nous savons que Δh_{en} représente un niveau de stock, donc ce coût est calculé pour le coût de stockage comme suit :

$$g(X^h(t, \vec{h})) = \begin{cases} c^+ \cdot \Delta h_{en}, & \text{si } \Delta h_{en} \geq 0 \\ c^- \cdot \Delta h_{en}, & \text{si } \Delta h_{en} \leq 0. \end{cases}$$

Pendant l'horizon de temps T , le niveau de stock est positif dû à l'excédent de stock pour pallier les aléas comme les délais et les pannes ou négatif dû aux demandes retardées.

Nous pouvons poser que $T = T1 + T2$, avec $T1$ le temps pendant lequel $X^h(t, \vec{h}) \geq 0$ et $T2$ le temps pendant lequel $X^h(t, \vec{h}) < 0$. Donc nous pouvons réécrire (3.31) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) - g(X^h(t, \vec{h}))) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T (g(\Delta h_{en})) dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T1} (c^+ * \Delta h_{en}) dt - \int_0^{T2} (c^- * \Delta h_{en}) dt \right] \end{aligned}$$

Comme Δh_{en} est une constante nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) - g(X^h(t, \vec{h}))) dt &= \frac{1}{T} [c^+ * \Delta h_{en} * (T1 - 0) - c^- * \Delta h_{en} * (T2 - 0)] \\ \frac{1}{T} \int_0^T (g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) - g(X^h(t, \vec{h}))) dt &= \frac{c^+ * \Delta h_{en} * T1 - c^- * \Delta h_{en} * T2}{T} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Maintenant nous étudions le terme 6 de l'équation (3.30). Par l'étude des trajectoires, nous pouvons assumer que $e^A(i, T_p) = e(i, T_p) + \Delta e$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \left[\left(\sum_{i=0}^{N_p(T)} (e^A(i, T_p) - L) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i, T_p) - L) \right) * C_{pénalité}^{en} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\left(\sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i, T_p) + \Delta e - L) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i, T_p) - L) \right) * C_{pénalité}^{en} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\left(\Delta e * N_p(T) + \sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i, T_p) - L) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i, T_p) - L) \right) \right. \\ &\quad \left. * C_{pénalité}^{en} \right] \\ &= \frac{1}{T} [(\Delta e * N_p(T)) * C_{pénalité}^{en}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nous savons que le coût de pénalité environnementale est payé seulement à partir du moment auquel le niveau des émissions dépasse la limite permise par les autorités régulatrices. Donc, sur l'horizon de temps T , nous définissons le temps pendant lequel on paie une pénalité pour les émissions de manière similaire à ce que nous avons fait pour le coût de stockage/pénuries (section 2.4, p. 57). Nous définissons $T = T3 + T_{se}$, avec $T3$ le temps pendant lequel on paie une pénalité pour les émissions et T_{se} le temps pendant lequel on ne paie pas de pénalité.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta e * N_p(T) * C_{pénalité}^{en}) ds \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T3} (\Delta e * N_p(T) * C_{pénalité}^{en}) ds + \int_0^{T_{se}} (\Delta e * N_p(T) * 0) ds \right] \\
 & \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta e * N_p(T) * C_{pénalité}^{en}) ds = \frac{T3 * \Delta e * N_p(T) * C_{pénalité}^{en}}{T} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Et en remplaçant (3.28) dans (3.34) nous obtenons :

$$\frac{1}{T} \int_0^T (N_p(T) * \Delta e * C_{pénalité}^{en}) ds = \frac{T3 * N_p(T) * \Delta h_{en} * \theta * C_{pénalité}^{en}}{T} \quad (3.35)$$

Ensuite, nous pouvons réécrire le coût total moyen perturbé comme suit :

$$L_T^{\Delta h_{en}}(h, h_{en} + \Delta h_{en}, T_p) = L_T^{h_{en}}(t, \vec{h}) + \frac{c^+ * \Delta h_{en} * T1 - c^- * \Delta h_{en} * T2}{T} + \frac{T3 * N_p(T) * \Delta h_{en} * \theta * C_{pénalité}^{en}}{T} \quad (3.36)$$

Nous déterminons maintenant le gradient de la fonction de coût à partir du coût total moyen sans perturbation (équation 3.29) et du coût total moyen perturbé (équation 3.36) comme suit :

$$\frac{\partial L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})}{\partial h_{en}} = \lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} \frac{L_T^{h_{en} + \Delta h_{en}}(t, \vec{h} + \Delta h_{en}) - L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})}{\Delta h_{en}} \quad (3.37)$$

Nous remplaçons (3.36) dans (3.37) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})}{\partial h_{en}} \\
 &= \lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} \frac{L_T^{h_{en}}(t, \vec{h}) + \frac{c^+ * \Delta h_{en} * T1 - c^- * \Delta h_{en} * T2}{T} + \frac{N_p(T) * \theta * \Delta h_{en} * C_{pénalité}^{en} * T3}{T} - L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})}{\Delta h_{en}} \\
 & \frac{\partial L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})}{\partial h_{en}} = \lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} \frac{\Delta h_{en} \left(\frac{c^+ * T1 - c^- * T2}{T} + \frac{N_p(T) * \theta * C_{pénalité}^{en} * T3}{T} \right)}{\Delta h_{en}}
 \end{aligned}$$

Et finalement, nous obtenons le gradient de la fonction de coût :

$$\frac{\partial L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})}{\partial h_{en}} = \lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} \left(\frac{c^+ * T1 - c^- * T2}{T} + \frac{N_p(T) * \theta * C_{pénalité}^{en} * T3}{T} \right) \quad (3.38)$$

Afin d'utiliser les résultats théoriques obtenus dans un algorithme de simulation, et de considérer ces résultats comme étant valables, nous devons prouver que l'estimateur obtenu du coût total moyen par rapport au point de séparation environnemental est non biaisé.

Théorème 3.1 : L'estimateur du gradient de la fonction de coût $\frac{\partial L_T^{hen}(t, \vec{h})}{\partial h_{en}}$ n'est pas biaisé.

Preuve du Théorème 3.1. :

La preuve de ce théorème consiste à démontrer que :

$$E \left[\frac{\partial L_T^{hen}(t, \vec{h})}{\partial h_{en}} \right] = \frac{\partial E[L_T^{hen}(t, \vec{h})]}{\partial h_{en}} = \frac{\partial J_T(\vec{h})}{\partial h_{en}} \quad (3.39)$$

C'est-à-dire que nous devons démontrer que les opérateurs "E" et " $\partial/\partial h_{en}$ " sont interchangeables (cf. notion d'ergodicité).

Pour prouver l'interchangeabilité de ces opérateurs, nous utilisons le théorème de la convergence dominée qui permet l'interchangeabilité de l'espérance et de la limite de l'équation (3.39) [HO91].

Pour appliquer ce théorème, une condition suffisante est que $L_T^{hen}(t, \vec{h})$ soit uniformément différentiable, c'est à dire, pour un $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un $\delta > 0$, tel que $0 < |\Delta h_{en}| < \delta$, ainsi :

$$\left| \frac{L_T^{hen+\Delta h_{en}}(t, \vec{h} + \Delta h_{en}) - L_T^{hen}(t, \vec{h}) - \Delta h_{en} * (\partial L_T^{hen}(t, \vec{h})/\partial h_{en})}{\Delta h_{en}} \right| < \varepsilon \quad (3.40)$$

Ensuite, la dérivabilité de $L_T^{hen}(t, \vec{h})$ est satisfaite si :

$$\lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} \left| \frac{L_T^{hen+\Delta h_{en}}(t, \vec{h} + \Delta h_{en}) - L_T^{hen}(t, \vec{h}) - \Delta h_{en} * (\partial L_T^{hen}(t, \vec{h})/\partial h_{en})}{\Delta h_{en}} \right| = 0 \quad (3.41)$$

ce qui est le cas.

Pour satisfaire l'équation (3.41), il existe un $r(\Delta h_{en})/\Delta h_{en}$ tel que :

$$\left| \frac{L_T^{hen+\Delta h_{en}}(t, \vec{h} + \Delta h_{en}) - L_T^{hen}(t, \vec{h}) - \Delta h_{en} * (\partial L_T^{hen}(t, \vec{h})/\partial h_{en})}{\Delta h_{en}} - \frac{r(\Delta h_{en})}{\Delta h_{en}} \right| = 0$$

Et ensuite,

$$\begin{aligned} \left| \frac{L_T^{hen+\Delta h_{en}}(t, \vec{h} + \Delta h_{en}) - L_T^{hen}(t, \vec{h}) - \Delta h_{en} * (\partial L_T^{hen}(t, \vec{h})/\partial h_{en})}{\Delta h_{en}} \right| &= \left| \frac{r(\Delta h_{en})}{\Delta h_{en}} \right| \\ &= \frac{L_T^{hen+\Delta h_{en}}(t, \vec{h} + \Delta h_{en}) - L_T^{hen}(t, \vec{h})}{\Delta h_{en}} \\ &= r(\Delta h_{en}) + \frac{\partial L_T^{hen}(t, \vec{h} + \Delta h_{en})}{\partial h_{en}} * \Delta h_{en} \end{aligned}$$

$r(\Delta h_{en})/\Delta h_{en}$ ne dépend pas de " h_{en} " et $\lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} \frac{r(\Delta h_{en})}{\Delta h_{en}} = 0$.

Par les équations (3.39) et (3.40) et l'espérance, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_T(\vec{h})}{\partial h_{en}} &= \frac{\partial E[L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})]}{\partial h_{en}} = \lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} \frac{E[L_T^{h_{en} + \Delta h_{en}}(t, \vec{h} + \Delta h_{en})] - E[L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})]}{\Delta h_{en}} \\ &= \lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} E \left[\frac{\partial L_T^{h_{en}}(t, \vec{h})}{\partial h_{en}} \right] + \lim_{\Delta h_{en} \rightarrow 0} E \left[\frac{r(\Delta h_{en})}{\Delta h_{en}} \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

De l'équation (3.42) nous obtenons l'équation (3.39). Ainsi, l'estimateur de la fonction de coût n'est pas biaisé. Ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'écart qui se produit entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. De plus, les résultats obtenus théoriquement peuvent être utilisés dans la simulation et ces résultats peuvent être considérés comme étant valables.

C.Q.F.D.

3.2.4. Résultats numériques

Pour la simulation du système de production avec prise compte des émissions de GES, nous utilisons une simulation de type événements discrets. Nous considérons les événements définis dans la section 2.4.3. De plus, pour la simulation de ce système, deux événements additionnels sont considérés :

- lorsque les émissions $e(t)$ dépassent la limite L_{min} et le niveau de stock $X^h(t, \vec{h}) > h_{en}$
- lorsque les émissions dépassent la limite L_{min} et le niveau de stock $X^h(t, \vec{h}) \leq h_{en}$.

Les paramètres de la simulation sont définis dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1. Paramètres de la simulation

U	D	c^+	c^-	τ_1	τ_2	L	L_{min}	$C_{penalite}^{en}$	θ	TBF		TTR	
										α	β	α	β
4	3	10	200	1	2	20	25	30	0.4	2	100	2	20

Afin de pouvoir établir une comparaison avec nos développements précédents, nous avons considéré les paramètres de la simulation du système considéré dans le chapitre 2. Nous avons ajouté à ces paramètres les limites d'émissions réglementaire et volontaire. Les temps de bon fonctionnement et les temps de réparation sont également représentés par une loi de Weibull pour laquelle α et β représentent respectivement le paramètre de forme et le paramètre d'échelle.

Le critère d'arrêt des simulations est le nombre de pannes. Ainsi, lorsque le nombre de pannes pour un $\vec{h}$ (T_p) spécifique est égal à 100.000, la valeur de $\vec{h}$ (T_p) augmente, tant que le signe du gradient de l'équation (3.38) ne change pas.

Comme dans ce cas, nous sommes intéressées par le fait de déterminer la valeur du point de séparation environnemental, nous utilisons le gradient de l'équation (3.38) pour trouver le point de séparation environnemental h_{en} . Nous avons fait les simulations pour une valeur de $T_p = 200$ unités de temps afin de considérer la valeur de h comme étant égale à la valeur trouvée au chapitre 2 en considérant seulement des critères économiques. Ces résultats sont affichés dans le Tableau 3.2.

Tableau 3.2. Résultats de la simulation pour $T_p = 200 UT$

	Résultats de la simulation	Erreur standard	Coût total moyen (unités monétaires)	Erreur standard
h (unités)	85.56 (± 0.158)	0.0205	883.315 (± 1.2612)	1.309
h_{en} (unités)	75.357 (± 0.0943)	0.00611	1147.645 (± 2.116)	1.6957

Des résultats du Tableau 3.2., nous observons que la valeur du point de séparation environnemental est inférieure à la valeur du point de séparation qui ne tient compte que des critères économiques. Cependant, le coût total moyen est plus élevé que lorsque nous considérons seulement des critères purement économiques. La Figure 3.5. montre les courbes associées à ces résultats. Pour les paramètres du Tableau 3.1. et pour une période de maintenance préventive égale à 200 unités de temps, le fait d'intégrer les coûts environnementaux dans les coûts de production implique une augmentation de 264.329 unités monétaires, ce qui correspond à une augmentation du coût total moyen de 29.92 %.

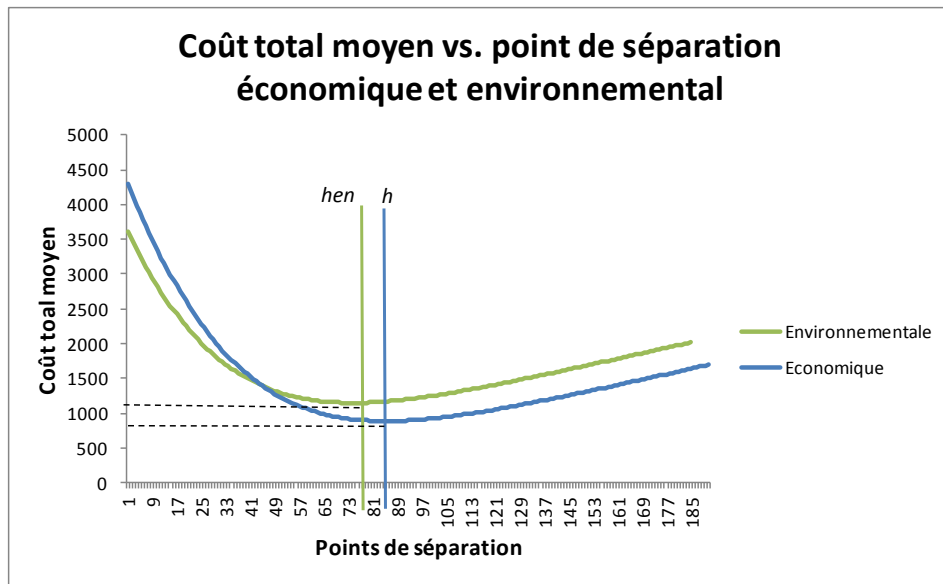


Figure 3.5. Coût total moyen vs. point de séparation économique et environnemental pour $T_p = 200 UT$.

Nous remarquons que pour des périodes de maintenance préventive inférieures approximativement à 30 unités de temps, les coûts pour les deux politiques sont similaires, ce qui correspond au fait de ne pas dépasser la limite d'émissions environnementales imposée par les autorités régulatrices. Cependant, ces coûts sont supérieurs aux coûts lorsque cette limite est dépassée (1429.72 unités monétaires pour une période de maintenance préventive égale à 30 unités de temps), ce qui implique un intérêt de dépasser cette limite pour minimiser les coûts globaux dans la politique qui intègre les coûts environnementaux.

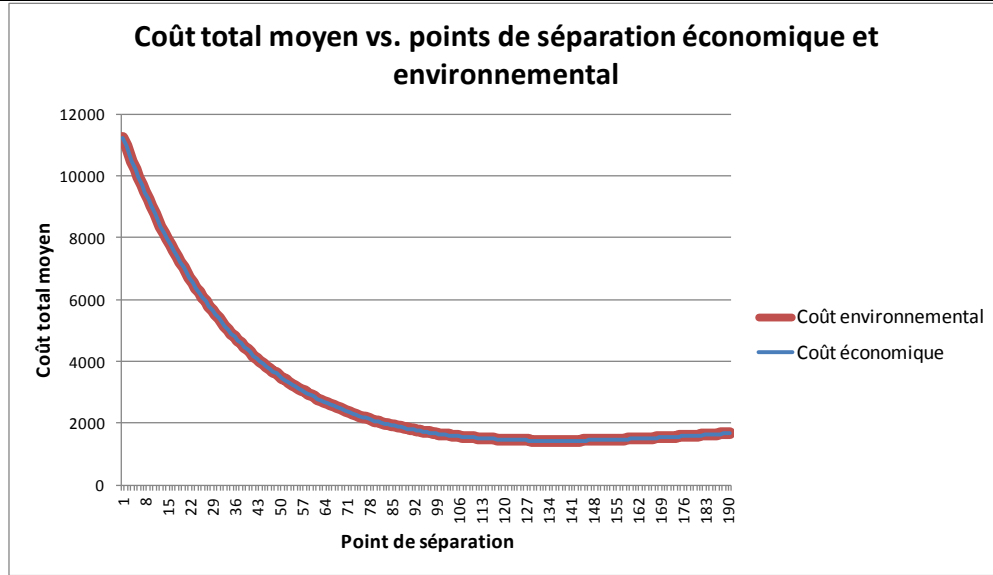


Figure 3.6. Coût total moyen vs. point de séparation économique et environnemental pour $T_p = 30 UT$.

3.3. Etude d'un système de production avec prise en compte des trois piliers du développement.

A la différence des résultats présentés dans le chapitre 2 et dans la section 3.2, nous proposons d'intégrer dans la modélisation du système de production étudié les trois piliers du développement durable. Pour ce faire, nous intégrons à nos travaux chacun des trois piliers sous forme de critères. Ainsi, le critère environnemental peut représenter les émissions de polluants de la machine ou des gaz à effet de serre comme traité dans la section 3.2, le critère social peut représenter les émissions nocives pour la santé et le critère économique le coût de stockage/pénuries, de transport et de maintenance. Ces critères seront intégrés dans notre modèle sous forme de coût économique comme nous l'avons fait dans la section précédente avec le critère environnemental. De cette manière, la fonction de coût est composée des coûts économiques (stockage/pénuries, maintenance et transport), d'un coût environnemental et d'un coût social. Nous utilisons la même méthode basée sur la méthode IPA. Nous présentons donc dans un premier temps le système de production étudié et le modèle. Ensuite, l'étude des trajectoires sera menée pour finalement déterminer l'estimateur du gradient de la fonction de coût. Les applications numériques sont données à la fin de cette section.

3.3.1. Système de production étudié

Le système de production reste le même (voir la figure 2.1). Pour le pilotage de la production, nous avons également utilisé la politique de type point de séparation.

L'évolution du système étudié est donnée par les équations (3.2), (3.3) et (3.43). Dans ce cas, dans l'équation (3.2), $\vec{h}$ est donné par $\vec{h} = (h, h_{en}, h_{soc})$, avec h le point de séparation économique, h_{en} le point de séparation environnemental et h_{soc} le point de séparation social.

La quantité d'émissions nocives pour la santé est donnée par l'équation (3.43) où σ représente la quantité d'émissions nocives pour la santé par unité produite, avec $0 \leq \sigma \leq 1$ (même principe que pour les émissions de polluants ou de GES).

$$\frac{d(s(t))}{dt} = u(t) * \sigma \quad (3.43)$$

Ainsi, le critère social est également lié à la production.

Hypothèse 3.7 : Nous supposons que $\sigma < \theta$, et $L_{min} < L_{soc}$, c'est-à-dire, avec cette politique de pilotage on produit avec un point de séparation environnemental h_{en} avant de produire avec le point de séparation social h_{soc} . L_{soc} correspond au niveau d'émissions nocives pour la santé (critère social) défini par l'entreprise avant d'atteindre le niveau $L_{soc\ max}$ défini par les autorités de régulation, et L_{min} la limite d'émissions environnementales définie par l'entreprise.

Dans ce cas, nous supposons que la limite volontaire établie par l'entreprise pour le critère social est inférieure à la limite permise par les autorités. En effet, les conséquences d'un dépassement de la limite définie par les autorités peuvent entraîner des conséquences immédiates et sévères pour la santé, selon la quantité de dépassement et le temps d'exposition.

Les conditions initiales sont définies comme suit : $s(0) = 0$, $e(0) = 0$, $X^h(0) = 0$. $h > h_{en} > h_{soc} > 0$. $L_{soc} < L_{soc\ max}$ pour le critère social et $L_{min} > L$ comme il a été défini dans le modèle établi dans la section 3.2.

Nous intégrons également des actions de maintenance préventive de type bloc. Ces actions de maintenance impactent également les émissions environnementales et sociales. A chaque période de maintenance préventive $i.T_p$, $e(t)$ et $s(t)$ deviennent égaux à zéro, c'est à dire, $e(i.T_p) = 0$ et $s(i.T_p) = 0$. Le coût de pénalité sociale $C_{pénalité}^s$ est appliqué à partir du moment auquel $s(t)$ dépasse la limite $L_{soc\ max}$ définie par les autorités régulatrices.

Sur une période $i.T_p$, si $s(i.T_p) - L_{soc\ max} > 0$, ensuite :

$$C_{soc}(i.T_p) = C_{pénalité}^s * \max(0; s(i.T_p) - L_{soc\ max}) \quad (3.44)$$

Où $C_{pénalité}^s$ est défini comme suit :

$$C_{pénalité}^s = \begin{cases} 0, & \text{si } s(i.T_p) - L_{soc\ max} \leq 0, \\ \text{Coût social à payer,} & \text{si } s(i.T_p) - L_{soc\ max} > 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

De la même manière que pour le cas avec prise en compte uniquement des critères économique et environnemental, pour une période $i.T_p$ donnée, le coût environnemental est calculé selon l'équation (3.3) et $C_{pénalité}^e$ est appliqué à partir du moment auquel $e(t)$ dépasse la limite L selon l'équation (3.4). De manière similaire, le coût environnemental total sur un horizon de temps T , est donné par l'équation (3.5).

Le seuil pour le critère social est défini de manière différente du seuil pour le critère environnemental dans le sens que la vitesse de production de la machine est changée pour atteindre un point de séparation h_{soc} si le niveau d'émissions nocives pour la santé atteint un seuil inférieur

(L_{soc}) à la limite permise par les autorités de régulation ($L_{soc\ max}$). Ainsi, lorsque $s(t) > L_{soc}$, la machine produit pour atteindre un niveau de stock égal au point de séparation social/sociétal h_{soc} .

Avec les trois critères dans la production, la politique de production de la machine est redéfinie comme suit :

- Si $s(t) \leq L_{soc}$, alors :
 - Si $e(t) \leq L_{min}$, alors :

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t).U, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) < h \\ \alpha(t).D, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) = h \\ 0, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) > h \end{cases} \quad (3.46)$$

- Si $e(t) > L_{min}$, alors :

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t).U, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) < h_{en} \\ \alpha(t).D, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) = h_{en} \\ 0, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) > h_{en} \end{cases} \quad (3.47)$$

- Si $s(t) > L_{soc}$, alors :

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t).U, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) < h_{soc} \\ \alpha(t).D, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) = h_{soc} \\ 0, & \text{si } X^h(t, \vec{h}) > h_{soc} \end{cases} \quad (3.48)$$

Dans ce cas, nous définissons cette politique par rapport au critère social. C'est-à-dire que la première condition (équation 3.46) est définie par rapport au niveau d'émissions nocives pour la santé. Si cette politique avait été définie par rapport au critère environnemental (le niveau d'émissions environnementales dans l'équation 3.46), une autre condition serait ajoutée correspondant au niveau d'émissions nocives pour la santé (critère social). Mais par l'hypothèse 3.7, nous savons que la limite L_{min} est atteinte avant la limite L_{soc} , ce qui implique qu'avant de produire pour atteindre le point de séparation h_{soc} , il faut produire en premier avec un point de séparation h_{en} . De cette manière, définir la politique de production (équations 3.46, 3.47 et 3.48) par rapport au critère social ou par rapport au critère environnemental ne change pas les résultats.

Pour le critère social nous considérons en plus d'un niveau de seuil pour les émissions nocives pour la santé, le temps d'exposition passé à un certain niveau $s(t)$. Pour cela, nous tenons compte de l'augmentation du niveau $s(t)$ entre deux maintenances, soit corrective soit préventive. Pour chaque temps d'exposition nous définissons un coût à payer comme il est montré dans la figure 3.4. Il est noté par C_{expo} .⁹

Dans la figure 3.7, chaque couleur correspond à une possible conséquence, pour lesquelles le bleu plus foncé représente les conséquences les plus légères et le rouge représente les conséquences les plus graves [INR15]. Il est à noter que pour ce type de critère social, les conséquences générées

⁹ www.hse.gov.uk

peuvent varier d'une personne à une autre. Cela est dû par exemple à des facteurs génétiques ou d'autres qui peuvent être difficiles à reconnaître.

		Durée (unités de temps)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Augmentation de $s(t)$ entre deux maintenances	1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	1.5	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
	2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.2
	2.5	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.1	1.2	1.3
	3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.2	1.3	1.4
	3.5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.2	1.3	1.4	1.6
	4	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.3	1.4	1.6	1.7
	4.5	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.3	1.4	1.6	1.7	1.8
	5	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.4	1.6	1.7	1.8	2
	5.5	0.9	1	1.1	1.2	1.4	1.6	1.7	1.8	2	2.1
	6	1	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.9	2.1	2.2
	6.5	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.9	2.1	2.2	2.4
	7	1.2	1.3	1.4	1.6	1.7	1.9	2	2.1	2.3	2.4
	7.5	1.3	1.4	1.6	1.8	1.9	2	2.2	2.3	2.4	2.5
	8	1.4	1.5	1.7	1.8	1.9	2	2.3	2.4	2.5	2.6
	8.5	1.5	1.7	1.9	2	2.2	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
	9	1.6	1.8	1.9	2	2.1	2.3	2.4	2.5	2.7	2.8
	9.5	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
	10	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
		C_{expo}									

Possibles effets (si l'on étudie les effets des émissions toxiques pour la santé)

	Gène respiratoire.
	Effets allergènes.
	Effets toxiques sur l'organisme
	Lésions au niveau du nez (rhinites)
	Problèmes pulmonaires : silicose, sidérose, etc.

Figure 3.7. Coûts associés aux temps et aux niveaux d'exposition ¹⁰

¹⁰ www.travailler-mieux.gov.fr

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'étude des trajectoires. Comme nous l'avons précisé précédemment, cette étude sera utile pour déterminer l'estimateur du gradient de la fonction de coût afin de déterminer le point de séparation social h_{soc} .

3.3.2. Etude analytique des trajectoires pour un système de production intégrant le concept de développement durable

Dans cette section nous nous intéressons à l'étude des trajectoires du niveau de stock, du niveau d'émissions environnementales et du niveau d'émissions sociales. Pour cette étude, nous considérons également les hypothèses 2.3, 2.5 et 3.2.

Hypothèse 3.8. : La valeur de la perturbation Δh_{soc} est positive ($\Delta h_{soc} > 0$). Ainsi, le point de séparation h_{soc} de la trajectoire perturbée du niveau de stock est égale à $h_{soc} + \Delta h_{soc}$. Des résultats similaires pourraient être trouvés avec une perturbation négative. Nous assumons que la trajectoire perturbée du niveau de stock est générée à partir du moment auquel $s(t) > L_{soc}$.

Comme pour le modèle considéré dans la section 3.2 pour les émissions environnementales, nous avons deux cas de figure possibles lorsque $s(t)$ surpasse la limite d'émissions L_{soc} : 1). Si $s(t) > L_{soc}$ et $X^h(t, \vec{h}) > h_{soc}$, et 2). Si $s(t) > L_{soc}$ et $X(t, \vec{h}) < h_{soc}$.

Pour ces deux cas, nous déterminons premièrement la valeur de la perturbation dans les émissions environnementales et dans les émissions nocives pour la santé en fonction de la perturbation du niveau de stock Δh_{soc} . Ensuite, les trajectoires perturbées des émissions nocives $s^A(t)$, des émissions environnementales $e^A(t)$ et du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ seront construites.

Cette étude des trajectoires est basée sur un exemple d'une trajectoire aléatoire pour le niveau de stock, le niveau d'émissions environnementales et le niveau d'émissions nocives. Nous faisons en sorte de considérer les différentes options possibles dans n'importe quelle trajectoire aléatoire.

Soit t_1 le moment à partir duquel la trajectoire nominale du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ atteint le point de séparation h_{soc} , et t'_1 le moment à partir duquel la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ atteint le point de séparation perturbé $h_{soc} + \Delta h_{soc}$.

Cas 1 : Si $s(t) > L_{soc}$ et $X^h(t, \vec{h}) \geq h_{soc}$ ($t'_1 < t_1$).

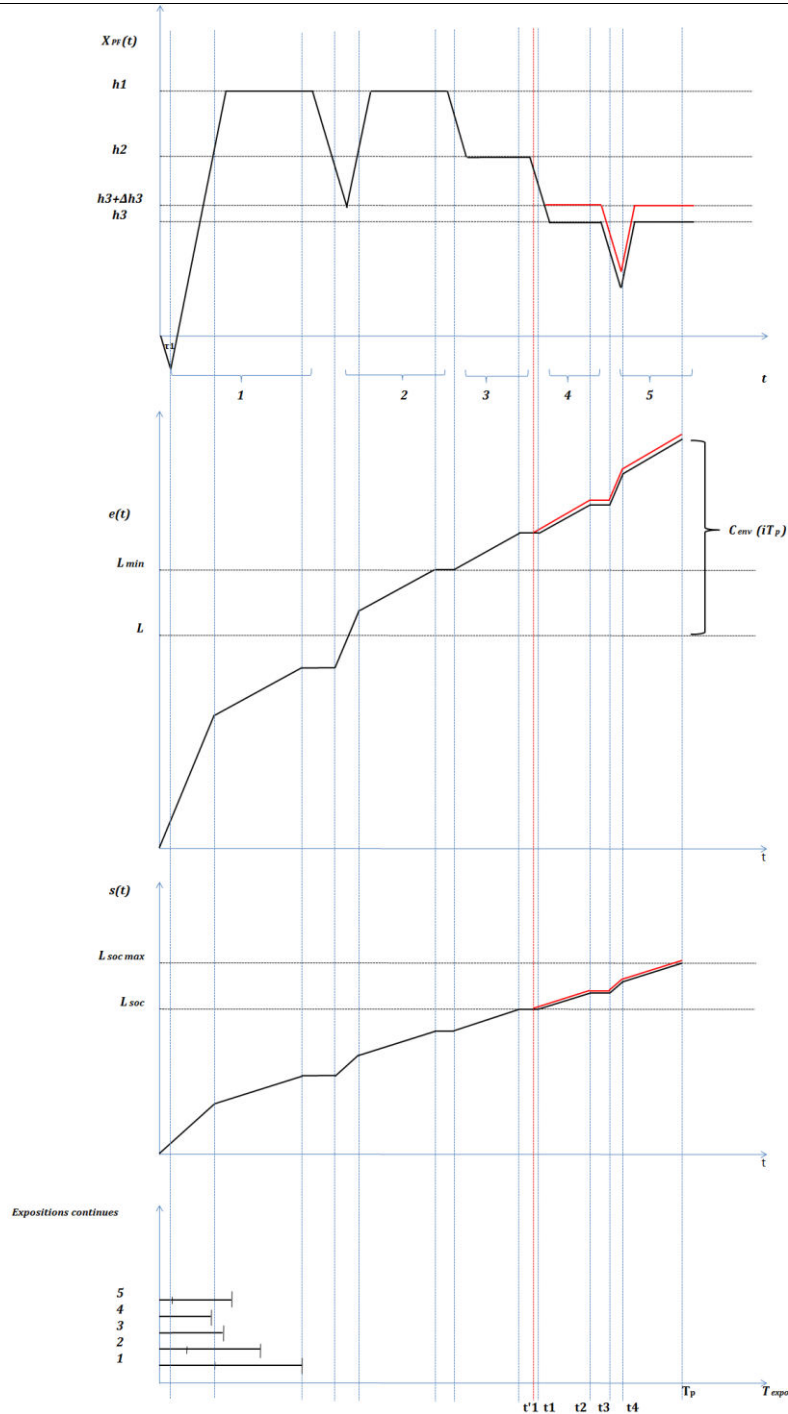


Figure 3.8. Exemple de trajectoire aléatoire avec les trois critères du développement durable pour le cas 1.¹¹

¹¹ Dans ce cas la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ atteint le point de séparation perturbé $h_{soc} + \Delta h_{soc}$ avant que la trajectoire nominale du point de séparation $X^h(t, \vec{h})$ n'atteigne le point de séparation sans perturbation h_{soc} . Nous détaillons ce cas dans la figure 3.8. Le niveau des émissions environnementales augmente selon la vitesse de production à une vitesse égale à $u(t) * \theta$, et le niveau des émissions nocives pour la santé augmente à une vitesse égale à $u(t) * \sigma$. Le temps d'exposition en continu à un niveau

De la figure 3.8, de l'équation de la pente et de l'équation (3.1) nous avons :

$$-D = \frac{-\Delta h_{soc}}{t_1 - t'_1} \quad (3.49)$$

$$t_1 - t'_1 = \frac{\Delta h_{soc}}{D} \quad (3.50)$$

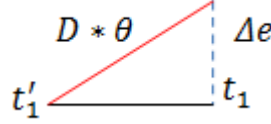


Figure 3.9. Trajectoire nominale et perturbée pour $t \in [t'_1, t_1[$ du cas 1.

Des figures 3.8. et 3.9. et de l'équation (3.2), nous obtenons :

$$D * \theta = \frac{\Delta e}{t_1 - t'_1} \quad (3.51)$$

$$t_1 - t'_1 = \frac{\Delta e}{D * \theta} \quad (3.52)$$

Ensuite en faisant (3.50) égale à (3.51), nous obtenons :

$$\frac{\Delta h_{soc}}{D} = \frac{\Delta e}{D * \theta} \quad (3.53)$$

Et de (3.53), nous obtenons la valeur de la perturbation de $e(t)$ en fonction de la perturbation Δh_{soc} :

$$\Delta e = \Delta h_{soc} * \theta \quad (3.54)$$

Soit Δs la valeur de la perturbation de $s(t)$.

d'émissions se réinitialise à chaque fois que la machine commence à produire : après une réparation, après avoir atteint la limite d'émissions environnementales ou la limite d'émissions nocives pour la santé ou après une action de maintenance préventive. Ce temps d'exposition s'arrête à chaque fois que la machine ne produit pas, dû également aux pannes, aux actions de maintenance préventive ou parce que la limite environnementale ou sociale a été atteinte. Pendant la construction du stock initial la machine produit à sa vitesse maximale U jusqu'à ce que le niveau de stock devienne égal au point de séparation économique h . Ensuite la machine produit à une vitesse égale à la demande D jusqu'à ce que la première panne aléatoire se produise. Dans ce cas, le premier temps d'exposition en continu correspond à la production à partir de $t = 0$ jusqu'à la première panne. Ensuite, un temps de réparation a lieu, pendant lequel le niveau de stock décroît à une vitesse égale à $-D$. Après la réparation de la machine, elle produit à sa vitesse maximale jusqu'à ce que le point de séparation économique h soit atteint. Ensuite, lorsque la limite d'émissions environnementales L_{min} est atteinte, la machine ne produit pas et ce jusqu'à ce que le niveau de stock atteigne le point de séparation environnemental h_{en} . Lorsque le point de séparation environnemental est atteint, la machine produit à une vitesse égale à la demande D jusqu'à ce que le niveau d'émissions nocives pour la santé $s(t)$ atteigne la limite L_{soc} . A ce moment là, la machine ne produit pas jusqu'à ce qu'elle atteigne le point de séparation social h_{soc} parce que le niveau de stock est supérieur à ce point de séparation. Lorsque le niveau de stock atteint le point de séparation h_{soc} , (à $t = t'_1$) les trajectoires perturbées du niveau de stock, du niveau d'émissions environnementales et du niveau d'émissions nocives pour la santé sont construites. Les événements qui se suivent après sont une panne (à $t = t_2$), une réparation (à $t = t_3$), le niveau de stock atteint le point de séparation h_{soc} (à $t = t_4$) et après une maintenance préventive (à $t = T_p$). Les différents événements décrits dans cette trajectoire peuvent se produire dans les différentes périodes de l'horizon de temps étudié.

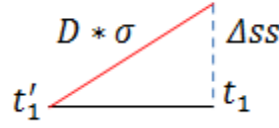


Figure 3.10. Trajectoire nominale et perturbée pour $t \in [t'_1, t_1[$ du cas 1.

De l'équation (3.43) et des figures 3.8 et 3.10, nous obtenons :

$$D * \sigma = \frac{\Delta ss}{t_1 - t'_1} \quad (3.55)$$

$$t_1 - t'_1 = \frac{\Delta ss}{D * \sigma} \quad (3.56)$$

Nous faisons (3.50) égal à (3.56) et nous obtenons :

$$\frac{\Delta h_{soc}}{D} = \frac{\Delta ss}{D * \sigma} \quad (3.57)$$

De (3.57) nous obtenons la valeur de la perturbation de $s(t)$ en fonction de la perturbation du point de séparation Δh_{soc} :

$$\Delta ss = \Delta h_{soc} * \sigma \quad (3.58)$$

Dans ce qui suit, nous étudions les trajectoires du niveau d'émissions environnementales et du niveau d'émissions nocives pour la santé.

Nous étudions en premier les trajectoires du niveau de stock.

Lemme 3.5. : $X^h(t, \vec{h}(t, \vec{h})) \leq X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \leq X^h(t, \vec{h}) + \Delta h_{soc}, \forall t.$

Preuve du Lemme 3.5.

Pour les trajectoires du niveau de stock, nous avons les mêmes cas considérés dans le cas 1 de la section 3.2.2 et les résultats sont identiques et donc non détaillés.

Lemme 3.6. : $e(t) \leq e^{\Delta}(t) \leq e(t) + \Delta e, \forall t.$

La preuve du Lemme 3.6 est donnée dans l'Annexe 6. Elle est similaire à la preuve du Lemme 3.2.

Nous étendons cette étude à la trajectoire nominale et perturbée des émissions nocives pour la santé (critère social).

Lemme 3.7. : $s(t) \leq s^{\Delta}(t) \leq s(t) + \Delta ss, \forall t.$

La preuve du Lemme 3.7. est également donnée dans l'Annexe 6.

Cas 2 : Si $s(t) > L_{soc}$ et $X^h(t, \vec{h}) < h_{soc}$ ($t'_1 > t_1$)

Dans ce cas la trajectoire nominale du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ atteint le point de séparation h_{soc} , avant que la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ n'atteigne le point de séparation perturbé $h_{soc} + \Delta h_{soc}$. La figure 3.8 montre un exemple d'une trajectoire aléatoire pour le niveau de stock, le niveau d'émissions environnementales et le niveau d'émissions nocives pour la santé pour le cas 2. De même que pour le cas 1, les trajectoires des émissions environnementales et des émissions nocives pour la santé augmentent entre deux périodes de maintenance préventive avec une vitesse $u(t) * \theta$ et $u(t) * \sigma$ respectivement.

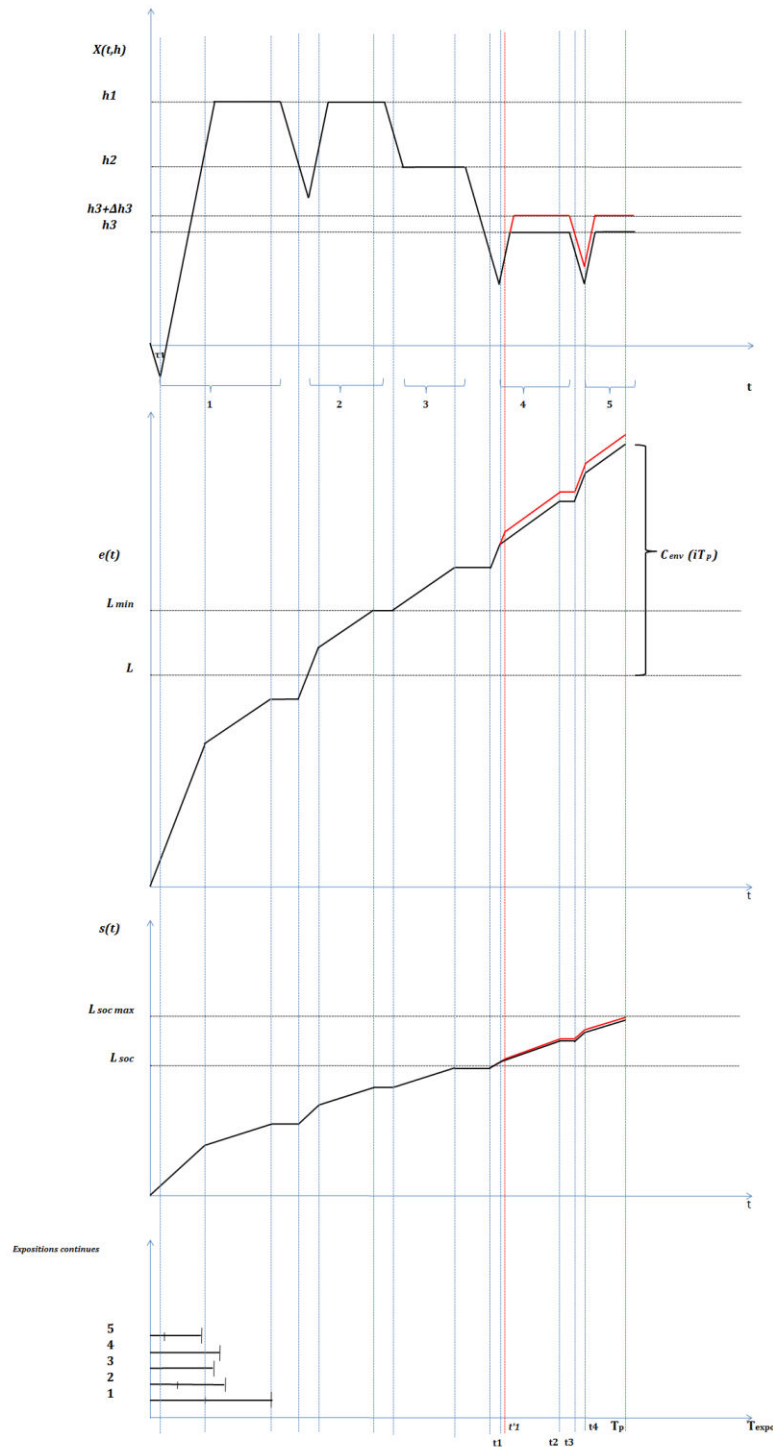


Figure 3.11. Exemple d'une trajectoire aléatoire - trois critères du développement durable pour le cas 2.¹²

¹² A partir de la figure 3.11., pendant la construction du stock initial h , la machine produit à sa vitesse maximale U . Ensuite, lorsque le point de séparation économique h est atteint, la machine produit avec une vitesse de production égale à la demande D jusqu'à ce que la

De la Figure 3.11., de l'équation de la pente et de l'équation (3.1) nous avons :

$$U - D = \frac{\Delta h_{en}}{t'_1 - t_1} \quad (3.59)$$

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta h_{en}}{U - D} \quad (3.60)$$

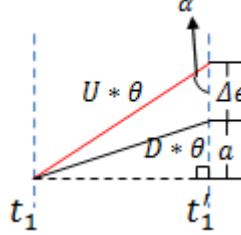


Figure 3.12. Trajectoire nominale et perturbée des émissions environnementales entre t_1 et t'_1 du cas 2.

Nous pouvons trouver la valeur de la perturbation Δe à partir des figures 3.11. et 3.12.

De l'équation (3.2) et de la figure 3.12 pour la trajectoire nominale des émissions environnementales nous avons :

$$D * \theta = \frac{a}{t'_1 - t_1} \quad (3.61)$$

$$a = D * \theta * (t'_1 - t_1) \quad (3.62)$$

De manière similaire, par l'équation (3.2), par l'équation de la pente et de la figure 3.6a pour la trajectoire perturbée des émissions environnementales, nous avons :

$$U * \theta = \frac{\Delta e + a}{t'_1 - t_1} \quad (3.63)$$

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta e + a}{U * \theta} \quad (3.64)$$

Par l'équation (3.1), l'équation de la pente et par la figure 3.12 nous avons :

$$U - D = \frac{\Delta h_{soc}}{t'_1 - t_1} \quad (3.65)$$

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta h_{soc}}{U - D} \quad (3.66)$$

première panne aléatoire survienne. Lorsque la machine est en réparation, elle ne produit pas du tout. Après la réparation, la machine produit à sa vitesse maximale afin d'atteindre le point de séparation h . Lorsque ce point de séparation est atteint, la machine produit à une vitesse égale à la demande jusqu'à ce que la limite d'émissions environnementales L_{min} soit atteinte. Ensuite la machine ne produit pas jusqu'à ce que le point de séparation environnemental h_{en} soit atteint parce que le niveau de stock est supérieur à ce point de séparation. Lorsque le point de séparation h_{en} est atteint, la machine produit à une vitesse égale à la demande D jusqu'à ce qu'elle tombe en panne. De même, la machine ne produit pas pendant qu'elle est en réparation et le niveau de stock décroît à une vitesse égale à $-D$. Après la réparation, la machine produit à sa vitesse maximale U pour atteindre le point de séparation social h_{soc} , puisque la limite d'émissions nocives pour la santé L_{soc} a été dépassée et le niveau de stock est inférieur au point de séparation h_{soc} . À partir du moment auquel le niveau de stock atteint le point de séparation social/sociétal h_{soc} (à $t = t_1$), les trajectoires perturbées du niveau de stock, du niveau d'émissions environnementales et du niveau d'émissions nocives pour la santé sont construites. Ensuite, la machine continue à produire avec une vitesse égale à la demande D jusqu'à ce qu'une panne aléatoire se produise (à $t = t_3$). Après la réparation de la machine, elle produit à sa vitesse maximale pour atteindre le point de séparation h_{soc} (à $t = t_4$) jusqu'à la période de maintenance préventive.

En remplaçant (3.62) dans (3.64) nous obtenons :

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta e + D * \theta * (t'_1 - t_1)}{U * \theta} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} (t'_1 - t_1) * U * \theta &= \Delta e + D * \theta * (t'_1 - t_1) \\ \Delta e &= (t'_1 - t_1) * U * \theta - D * \theta * (t'_1 - t_1) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Avec $(t'_1 - t_1) * \theta$ comme un facteur commun, nous obtenons :

$$\Delta e = (t'_1 - t_1) * \theta * (U - D) \quad (3.69)$$

Ensuite, nous remplaçons (3.66) dans (3.69) afin de mettre la perturbation des émissions en termes de la perturbation du niveau de stock Δh_{soc} :

$$\Delta e = \left(\frac{\Delta h_{soc}}{U - D} \right) * \theta * (U - D)$$

Et nous obtenons :

$$\Delta e = \Delta h_{soc} * \theta \quad (3.70)$$

Le résultat de (3.70) correspond à la même valeur de la perturbation que pour le cas 1.

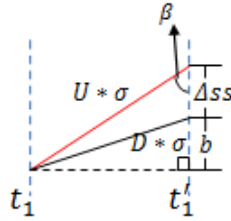


Figure 3.13. Trajectoire nominale et perturbée des émissions environnementales entre t_1 et t'_1 du cas 2.

De manière similaire, nous pouvons trouver la perturbation Δss en fonction de la perturbation Δh_{soc} à partir de la figure 3.11. et 3.13.

Par l'équation (3.55), l'équation de la pente et la figure 3.13. pour la trajectoire nominale des émissions nocives nous avons :

$$D * \sigma = \frac{b}{t'_1 - t_1} \quad (3.71)$$

$$b = D * \sigma * (t'_1 - t_1) \quad (3.72)$$

De même, par l'équation (3.55) et la figure 3.13 pour la trajectoire perturbée des émissions nocives nous obtenons :

$$U * \sigma = \frac{\Delta ss + b}{t'_1 - t_1} \quad (3.73)$$

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta ss + b}{U * \sigma} \quad (3.74)$$

Par la figure 3.11, l'équation de la pente et l'équation (3.2) nous obtenons :

$$U - D = \frac{\Delta h_{soc}}{t'_1 - t_1} \quad (3.75)$$

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta h_{soc}}{U - D} \quad (3.76)$$

En remplaçant (3.72) dans (3.74) nous obtenons :

$$t'_1 - t_1 = \frac{\Delta ss + D * \sigma * (t'_1 - t_1)}{U * \sigma} \quad (3.77)$$

$$(t'_1 - t_1) * U * \sigma = \Delta ss + D * \sigma * (t'_1 - t_1) \quad (3.78)$$

$$\Delta ss = (t'_1 - t_1) * U * \sigma - D * \sigma * (t'_1 - t_1) \quad (3.79)$$

Avec $(t'_1 - t_1) * \sigma$ comme un facteur commun, nous obtenons :

$$\Delta ss = (t'_1 - t_1) * \sigma * (U - D) \quad (3.80)$$

Ensuite nous remplaçons (3.76) dans (3.80) afin de mettre la perturbation des émissions en termes de la perturbation du niveau de stock Δh_{soc} :

$$\Delta ss = \left(\frac{\Delta h_{soc}}{U - D} \right) * \sigma * (U - D)$$

Et nous obtenons la valeur de la perturbation Δss en fonction de la perturbation Δh_{soc} du point de séparation social :

$$\Delta ss = \Delta h_{soc} * \sigma \quad (3.81)$$

Le résultat obtenu dans (3.81) est égal à celui obtenu dans l'équation (3.58). Donc, la perturbation pour les deux cas est égale.

Nous étudions maintenant les trajectoires pour les trois critères. Nous considérons dans un premier temps les trajectoires du niveau de stock, ensuite les trajectoires des émissions environnementales et finalement les trajectoires des émissions nocives pour la santé.

Lemme 3.8. : $X^h(t, \vec{h}(t, \vec{h})) \leq X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \leq X^h(t, \vec{h}) + \Delta h_{soc}, \forall t.$

Preuve du Lemme 3.8.

Les trois cas de figure du Lemme 3.3 sont considérés pour cette démonstration. Cette preuve est égale à celle du Lemme 3.3 et elle omise.

Lemme 3.9. : $e(t) \leq e^A(t) \leq e(t) + \Delta e, \forall t.$

La preuve du Lemme 3.9. est donnée dans l'Annexe 6. Elle est similaire à celle du Lemme 3.6.

Nous étudions maintenant les trajectoires des émissions nocives pour la santé (critère social).

Lemme 3.10. : $s(t) \leq s^A(t) \leq s(t) + \Delta ss, \forall t$.

La preuve du Lemme 3.10 est donnée dans l'Annexe 6. Elle est similaire à celle du Lemme 3.7.

Nous avons étudié deux cas qui comprennent les différentes possibilités pour les trajectoires du niveau de stock, du niveau des émissions environnementales et du niveau des émissions nocives pour la santé. Dans ce qui suit, nous utilisons les résultats de notre étude des trajectoires pour déterminer le gradient de la fonction de coût.

3.3.3. Estimation du gradient de la fonction de coût

Nous nous intéressons maintenant à l'estimation du coût total moyen sur un horizon fini. Nous tenons compte des hypothèses 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 et 3.9 dans cette étude.

Le coût total moyen sur un horizon fini est exprimé par l'équation (3.82) :

$$L_T^{h_{soc}}(t, \vec{h}) = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \left(g(X^h(t, \vec{h})) \right) dt + Xtd_1(T) * ct_1 + Xtd_2(T) * ct_2 \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{penalite}^e * \max(0; e(i, T_p) - L) \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{penalite}^s * \max(0; s(i, T_p) - L_{soc \max}) + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{expo} \right] + C_m(T) \quad (3.82)$$

Notons que dans l'expression (3.82) nous avons les deux termes correspondant au critère social qui apparaissent en comparaisons avec l'équation (3.29) dans laquelle seulement des critères économiques et environnementaux sont considérés.

Soit $L_T^{h_{soc} + \Delta h_{soc}}(t, \vec{h})$ le coût total moyen perturbé avec prise en compte des trois piliers du développement durable.

$$L_T^{h_{soc} + \Delta h_{soc}}(t, \vec{h}) \\ = \frac{1}{T} \left[\int_0^T (g(X^h(t, \vec{h}))) dt + \int_0^T (g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) - g(X^h(t, \vec{h}))) dt + Xtd_1(T) * ct_1 + Xtd_2(T) * ct_2 \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{penalite}^e * (e(i, T_p) - L) + C_{penalite}^{en} * \left(\sum_{i=0}^{N_p(T)} (e_p(i, T_p) - L) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i, T_p) - L) \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{penalite}^s * (s(i, T_p) - L_{soc \max}) + C_{penalite}^s \right. \\ \left. * \left(\sum_{i=0}^{N_p(T)} (s^A(i, T_p) - L_{soc \max}) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (s(i, T_p) - L_{soc \max}) \right) + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{expo} \right] \\ + C_m(T) \quad (3.83)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
 L_T^{h_{soc} + \Delta h_{soc}}(t, \vec{h}) &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T (g(X^h(t, \vec{h}))) dt + \int_0^T (g(X^{h+\Delta}(t, \vec{h})) - g(X^h(t, \vec{h}))) dt + Xtd_1(T) \right. \\
 &\quad \left. * ct_1 + Xtd_2(T) * ct_2 + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{penalite}^{en} * (e(i.T_p) - L) + \right. \\
 &\quad \left. C_{penalite}^{en} * \left(\sum_{i=0}^{N_p(T)} (e^A(i.T_p) - L) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (e(i.T_p) - L) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{penalite}^s * (s(i.T_p) - L_{soc \ max}) + \right. \\
 &\quad \left. C_{penalite}^s * \left(\sum_{i=0}^{N_p(T)} (s^A(i.T_p) - L_{soc \ max}) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (s(i.T_p) - L_{soc \ max}) \right) + \sum_{i=0}^{N_p(T)} C_{expo} \right] \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

Nous déterminons maintenant la valeur de la perturbation dans le coût de stockage/pénurie, dans le coût environnemental et dans le coût social. Elles correspondent respectivement aux termes 2, 6 et 8 montrés dans l'équation (3.84).

La perturbation dans le coût de stockage est déterminée de manière similaire à celle donnée dans la section 3.2. A la différence de celle définie dans la section 3.2. la perturbation pour le critère social est remplacée par Δh_{soc} .

La perturbation dans le coût environnemental est similaire à celle déterminée dans l'équation (3.47). A partir de cette équation, nous remplaçons la valeur de la perturbation en termes du point de séparation social h_{soc} .

Finalement, nous déterminons la perturbation du coût social, correspondant au terme 8 de l'équation (3.84) :

$$\frac{1}{T} \left[C_{penalite}^s * \left(\Delta ss * N_p(T) + \sum_{i=0}^{N_p(T)} (s(i.T_p) - L_{soc \ max}) - \sum_{i=0}^{N_p(T)} (s(i.T_p) - L_{soc \ max}) \right) \right]$$

Nous assumons que $s^A(i.T_p) = s(i.T_p) + \Delta ss$ par notre étude des trajectoires et nous obtenons la perturbation dans le coût social (équation 3.85) :

$$\text{Perturbation dans le coût social} = \frac{1}{T} * C_{\text{penalite}}^s * \Delta ss * N_p(T) \quad (3.85)$$

Pour le coût social, nous savons que la pénalité est payée seulement à partir du moment où les émissions nocives dépassent la limite imposée par les autorités régulatrices. De cette forme, nous définissons comme pour le coût environnemental, le temps pendant lequel on paie une pénalité comme $T4$ et T_{ss} le temps pendant lequel on ne paie pas de coût social.

L'horizon de temps étudié T correspond à $T = T4 + T_{ss}$ et la perturbation dans le coût social de l'équation (3.85) peut se décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T (N_p(T) * \Delta ss * C_{\text{penalite}}^s) dt \\ &= \frac{N_p(T) * \Delta ss * C_{\text{penalite}}^s * (T4 - 0) + N_p(T) * \Delta ss * (T_{ss} - 0) * 0}{T} \end{aligned}$$

Par le résultat des équations (3.58) et (3.81) nous connaissons la valeur de la perturbation Δss en fonction de la perturbation Δh_{soc} et finalement nous obtenons :

$$\frac{1}{T} \int_0^T (N_p(T) * \Delta ss * C_{\text{penalite}}^s) dt = \frac{N_p(T) * \Delta h_{soc} * \sigma * C_{\text{penalite}}^s * T4}{T}$$

Remarque : Nous supposons que lorsqu'il y a une perturbation dans une période de maintenance préventive, le coût associé au temps d'exposition (C_{expo}) ne change pas puisque la perturbation dans le temps et dans $s(t)$ est infiniment petite.

Le coût total moyen perturbé est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} L_T^{h_{soc} + \Delta h_{soc}}(t, \vec{h}) &= L_T^{h_{soc}}(t, \vec{h}) + \frac{[c^+.T1 - c^-.T2] * \Delta h_{soc}}{T} + \frac{N_p(T) * \Delta h_{soc} * \theta * C_{\text{penalite}}^e * T3}{T} + \\ & \quad \frac{N_p(T) * \Delta h_{soc} * \sigma * C_{\text{penalite}}^s * T4}{T} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Nous pouvons maintenant trouver le gradient de la fonction de coût comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_T^{h_{soc}}(t, \vec{h})}{\partial h_{soc}} &= \lim_{\Delta h_{soc} \rightarrow 0} \frac{L_T^{h_{soc} + \Delta h_{soc}}(t, \vec{h}) - L_T^{h_{soc}}(t, \vec{h})}{\Delta h_{soc}} \\ \frac{\partial L_T^{h_{soc}}(t, \vec{h})}{\partial h_{soc}} &= \lim_{\Delta h_{soc} \rightarrow 0} \left(\frac{c^+.T1 - c^-.T2}{T} + \frac{N_p(T) * \theta * C_{\text{penalite}}^e * T3}{T} + \frac{N_p(T) * \sigma * C_{\text{penalite}}^s * T4}{T} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Théorème 3.2. : L'estimateur du gradient de la fonction de coût $\frac{\partial L_T^{h_{soc}}(t, \vec{h})}{\partial h_{soc}}$ n'est pas biaisé.
La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 3.1.

3.3.4. Résultats numériques

Nous avons implémenté les résultats théoriques dans un algorithme basé sur la simulation afin de déterminer le point de séparation du critère social qui minimise le coût total moyen. Cette simulation de type événements discrets considère les événements de la section 3.2.4 et de deux événements additionnels associés au critère social. Ces deux événements sont :

- lorsque les émissions nocives pour la santé $s(t)$ dépassent la limite L_{soc} et le niveau de stock est supérieur au point de séparation du critère social ($X^h(t, \vec{h}) \geq h_{soc}$),
- lorsque les émissions nocives pour la santé $s(t)$ dépassent la limite L_{soc} et le niveau de stock est inférieur au point de séparation du critère social ($X^h(t, \vec{h}) < h_{soc}$).

Les paramètres de la simulation sont définis dans le Tableau 3.3. Ils tiennent compte des paramètres utilisés pour les simulations dans le deuxième chapitre et de ceux utilisés dans la section 3.2.4. Nous ajoutons les paramètres du critère social, lesquels correspondent aux limites d'émissions nocives (volontaire et réglementaire) et le coût de pénalité payé si la limite réglementaire est dépassée. De manière similaire, nous choisissons comme critère d'arrêt des simulations le nombre de pannes de la machine, lequel est égal à 100.000 pannes.

Tableau 3.3. Paramètres de la simulation « trois points de séparation »

U	D	c^+	c^-	τ_1	τ_2	L	L_{min}	$C_{penalite}^e$	θ	L_{soc}	$L_{soc\ max}$	$C_{penalite}^s$	σ	TBF		TTR	
														α	β	α	β
4	3	10	200	1	2	20	25	30	0.4	10	15	45	0.2	2	100	2	20

Pour déterminer le point de séparation social, nous supposons que les points de séparation économique (h) et le point de séparation environnemental (h_{en}) correspondent à ceux déterminés dans le chapitre 2 et dans la section 3.2.4 respectivement.

Nous avons déterminé la valeur du point de séparation social en utilisant le gradient de l'équation (3.87). Le Tableau 3.4 présente les résultats des trois points de séparation pour une valeur de la période de maintenance préventive $T_p = 200$ unités de temps.

Tableau 3.4. Résultats de la simulation pour $T_p = 200$

	Résultats de la simulation	Erreur standard	Coût total moyen (unités monétaires)	Erreur standard
h (unités)	85.56 (± 0.158)	0.0205	883.315 (± 1.2612)	1.309
h_{en} (unités)	75.357 (± 0.0943)	0.00611	1147.645 (± 2.116)	1.6957
h_{soc} (unités)	66.583 (± 0.104)	0.008071	1204.74 (± 2.305)	1.253

Des résultats du Tableau 3.4., nous observons que la valeur du point de séparation social est inférieure à celle du point de séparation environnemental (h_{en}) et du point de séparation avec des critères purement économiques (h). De plus, nous observons que le coût total moyen associé à cette

politique est supérieur au coût total moyen des deux autres politiques (avec un seul point de séparation et avec deux points de séparation).

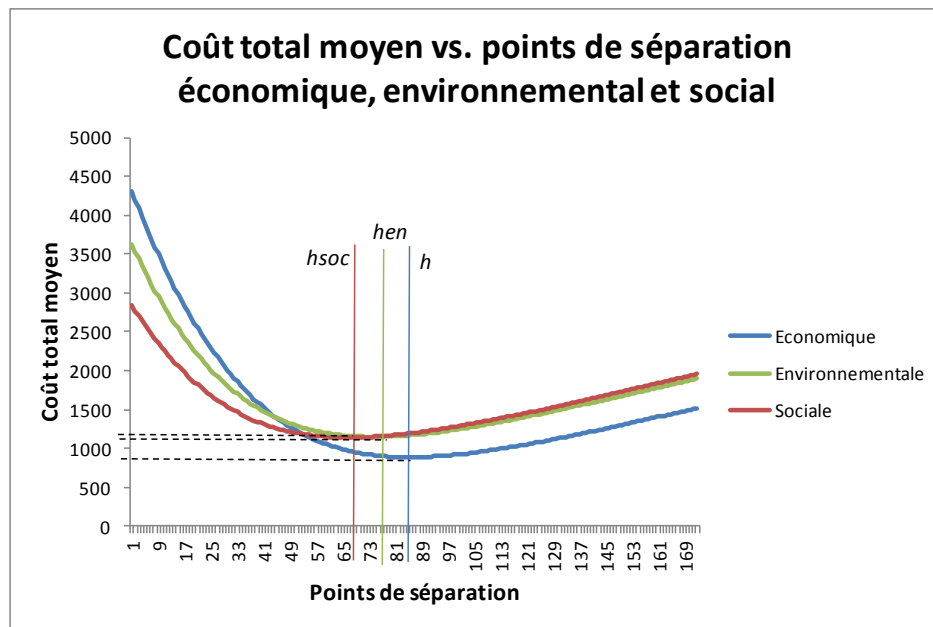


Figure 3.14. Coût total moyen vs. points de séparation économique, environnemental et social pour $T_p = 200$ UT.

La Figure 3.14. montre les courbes du coût total moyen pour les trois points de séparation lorsque la période de maintenance préventive est égale à 200 unités de temps. Nous observons que le coût total moyen pour une politique qui intègre des critères économiques, environnementaux et sociaux est plus élevé que le coût total moyen pour la politique qui intègre des coûts purement économiques. Pour les paramètres du Tableau 3.3. et pour une période de maintenance préventive égale à 200 unités de temps, le coût total moyen pour une politique qui intègre des critères des trois piliers du développement durable augmente de 324.425 unités monétaires par rapport à la politique qui ne considère que des critères économiques. Cette augmentation représente un pourcentage égal à 36,38 % du coût total moyen. Par rapport à la politique qui intègre des critères économiques et un critère environnemental, le coût total moyen de la politique qui intègre les trois piliers du développement durable est légèrement plus élevé (57.095 unités monétaires). Cette augmentation correspond à 4.975% du coût total moyen de la politique qui intègre des critères économiques et environnementaux.

Nous avons trouvé que pour cette politique, le coût total moyen minimum est égal à 768.68 unités monétaires. Il est obtenu avec une période de maintenance préventive égale à 57 unités de temps, et $h = 60$, $h_{en} = 59$ $h_{soc} = 56$ unités de temps. Ce résultat a été trouvé en calculant, pour différentes valeurs de la période de maintenance préventive, en premier le point de séparation économique, ensuite le point de séparation environnemental et finalement le point de séparation de la politique durable. Par rapport à la politique qui considère seulement des critères économiques, l'augmentation du coût total moyen correspond à 7.28% du coût total moyen. Ceci est traduit dans un effort économique de 52.206 unités monétaires afin d'intégrer au pilotage de la production des critères associés aux trois piliers du développement durable.

Comme pour les résultats numériques de la politique qui intègre des critères économiques et environnementaux, nous avons remarqué que les coûts pour les trois politiques sont similaires jusqu'à une période de maintenance préventive approximativement de 30 unités de temps, avec $h = h_{en} = h_{soc} = 137$ unités et un coût total moyen de 1432.41 unités monétaires. Ce qui implique que jusqu'à cette période de maintenance préventive, ni les émissions sociales, ni les émissions environnementales sont dépassées. Cependant, au-delà de cette période, les coûts sont supérieurs aux coûts de la politique qui considère des critères purement économiques et de la politique avec des critères économiques et environnementaux. Ceci est dû aux effets négatifs sur la santé des employés lorsqu'il y a dépassement de la limite d'émissions nocives, ce qui entraîne des coûts importants pour l'entreprise, en plus des coûts associés aux temps d'exposition à un niveau d'émissions nocives déterminé.

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un système de production pour lequel, dans un premier temps, nous avons considéré des critères économiques et environnementaux. Puis, dans un deuxième temps, des critères économiques, environnementaux et sociaux. Les flux dans le système ont été représentés par un modèle à flux continus. Ils sont pilotés par une politique de type point de séparation. Dans le premier cas, cette politique est différente de la politique définie dans le deuxième chapitre au sens où un deuxième point de séparation associé à un critère environnemental est défini. Ce deuxième point de séparation apparaît lorsqu'une limite environnementale d'émissions carbone ou d'autres polluants imposés par les autorités régulatrices est dépassée. Dans le deuxième cas, nous avons considéré un troisième point de séparation associé à un critère social. Ce critère peut représenter des conditions de travail telles que l'exposition à des agents nocifs pour la santé pendant la production. De manière similaire, ce troisième point de séparation apparaît lorsqu'une limite de cet agent imposée par les autorités régulatrices est dépassée. Pour le critère social, un coût lié au temps d'exposition à un certain niveau d'émissions nocives a été défini. Ainsi, plus le temps d'exposition à un certain niveau d'émissions nocives est grand, plus le coût sera important ainsi que les conséquences associées à ce temps et au niveau d'exposition. Nous tenons compte des actions de maintenance préventive de type bloc pour ces deux études car celles-ci permettent de réduire les émissions de polluants et / ou d'agents nocifs pour la santé des opérateurs. Les coûts de maintenance font partie des critères économiques considérés.

La méthode de résolution utilisée est basée sur la méthode IPA. Pour la minimisation des coûts globaux de chacune des politiques proposées dans ce chapitre, nous avons déterminé le gradient des fonctions de coût au moyen de deux études de trajectoires indépendantes afin de déterminer le point de séparation du critère environnemental et le point de séparation du critère social. Pour déterminer le point de séparation du critère environnemental, nous avons supposé que le point de séparation économique correspond à celui déterminé pour des critères purement économiques dans le chapitre 2. Pour déterminer le point de séparation du critère social, nous avons pris en compte le point de séparation associé à des critères économiques et au critère environnemental déterminé auparavant. Nos résultats numériques montrent que pour une politique qui considère des critères économiques et environnementaux, en termes économiques, il est plus intéressant de dépasser la limite d'émissions permises par les autorités régulatrices afin de réduire les coûts globaux. Cependant, pour la politique qui considère des critères économiques, environnementaux et sociaux, les coûts globaux à partir du moment où la limite environnementale

est dépassée, sont plus importants que pour les politiques avec des critères purement économiques et la politique avec des critères économiques et environnementaux.

Nous avons trouvé la période de maintenance préventive qui minimise les coûts globaux pour une politique qui intègre des critères associés aux trois piliers du développement durable. Cette période de maintenance est plus petite que la période de maintenance préventive minimisant ainsi les coûts globaux de la politique de pilotage présentée dans le deuxième chapitre. Ceci est dû au fait que les actions de maintenance préventive permettent d'agir également sur les niveaux d'émissions environnementales et sociales.

Comme perspective aux travaux de ce chapitre, il serait intéressant d'intégrer une période liée au temps d'évaluation des émissions environnementales (par exemple 1 an) et de minimiser les coûts globaux en tenant compte de ces deux périodes. Ceci permettrait non seulement de définir des temps d'exposition associés à un niveau d'émissions nocives plus précis mais aussi de rendre notre approche plus facilement applicable dans un milieu industriel.

Dans le chapitre suivant, nous considérons un système de production plus complexe composé de deux étages. Pour ce système, nous intégrerons des coûts liés aux trois piliers du développement durable. Initialement, nous nous sommes intéressées au dimensionnement de chacun des stocks puis, nous étudions des aspects liés à des aléas dans l'approvisionnement.

Chapitre 4 : Système de production « durable » soumis à des aléas

4.1. Introduction

Les entreprises, dans leur quête pour devenir plus compétitives, ont développé des stratégies leur permettant d'optimiser leurs processus à travers l'élimination de tout ce qui n'ajoute pas de la valeur au produit final. La philosophie du Juste-à-Temps est l'un des résultats permettant d'améliorer leurs processus. Les stocks importants peuvent masquer des problèmes de fiabilité dans l'approvisionnement ou d'autres dysfonctionnements dans le système [LAM99]. C'est pourquoi, les politiques de production en flux tirés, tels que Kanban ou Base Stock sont nées. Dans celles-ci, la production de pièces est autorisée par l'arrivée réelle de demandes et non par l'offre.

Dans ce chapitre, nous souhaitons étendre l'étude du système de production considéré dans le deuxième et troisième chapitre à des systèmes de production plus complexes mais en conservant la même méthode de résolution, à savoir la méthode IPA. Le système de production considéré est composé de deux étages, le premier correspondant au réapprovisionnement de matières premières/produits semi-finis et le deuxième correspondant à la distribution au client. Ces deux étages sont liés par une machine. Parmi les politiques de pilotage issues de la philosophie du Juste-à-Temps, nous avons fait le choix d'une politique Échelon Base Stock [BOO05], [BER11b]. Cette politique permet de limiter les pièces dans les deux étages mais aussi de considérer en même temps les besoins de tous les éléments du système en transmettant l'information sur la demande à tous les étages du système quand une demande est déclenchée (voir p. 168 pour plus de détail).

Dans ce système, les flux des pièces sont représentés par un modèle à flux continus. Ce flux représente l'un des principes du Juste-à-Temps. Il permet aux pièces de transiter d'un processus à un autre sans des encours. Plus précisément, chaque processus produit uniquement la pièce nécessaire au processus suivant. Cependant, même si le stockage n'ajoute pas de valeur au produit final, les stocks peuvent être nécessaires pour l'harmonisation du transit des flux physiques et faire face aux aléas. Ainsi, nous considérons que dans le système étudié, chacun des étages comporte un stock. Nous nous intéressons dans un premier temps au dimensionnement de ceux-ci. Ensuite, nous étudions le réapprovisionnement en composants / produits semi-finis en tenant compte en partie de l'impact environnemental. Pour ce faire, nous considérons que l'entreprise en question possède une usine de produits semi-finis et peut faire appel si besoin à des sous-traitants. Tant pour le dimensionnement des stocks que pour la sous-traitance, nous nous intéressons à la minimisation du coût global, lequel considère des critères économiques, environnementaux et sociaux. L'objectif n'est pas de préciser tous les éléments qui interviennent dans l'identification de ceux-ci mais de les prendre en compte dans notre modèle. Il est à noter que nous intégrons ces critères directement dans la fonction de coût et non comme des contraintes. Ensuite, nous considérons comme objectif la minimisation des émissions de gaz à effet de serre (GES) puis, nous déterminons le coût global associé pour connaître l'effort économique que l'entreprise doit faire pour minimiser ces émissions.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudions initialement le problème du dimensionnement des deux stocks puis, nous étudions le dimensionnement du réapprovisionnement.

4.2. Étude des stocks d'un système à deux étages

Comme nous l'avons mentionné auparavant, le rôle des stocks est important pour pallier aux différentes perturbations du fonctionnement d'un système et améliorer sa performance [CHE09]. Cependant, un surdimensionnement de ceux-ci génère des coûts de stockage (coût de la surface occupée qu'elle soit louée (voir [HAR11], [RAO98]) ou achetée (voir [COR96], [GOH01]), coûts de manutention, de nettoyage, d'entretien, etc. et même des coûts d'obsolescence). De même, si les stocks sont sous-dimensionnés, ils provoquent des pertes notamment associées à des coûts de sous-traitance pour satisfaire la demande dans les délais, au transport urgent, au manque de confiance des clients et à la possible perte de ceux-ci. Tous ces paramètres montrent qu'il est nécessaire de connaître les capacités des stocks, pour établir un équilibre entre les coûts de possession des stocks et les coûts liés aux pénuries.

Cette section est consacrée à l'étude du dimensionnement des stocks d'un système de production de deux étages. Ce système est une extension du système étudié dans les chapitres 2 et 3 où le système a été reproduit en amont de la machine. Ainsi, les deux étages sont liés par la machine et ils correspondent aux étapes de réapprovisionnement, de production et de distribution. L'objectif est de minimiser le coût total moyen espéré, lequel comporte des coûts purement économiques, des coûts environnementaux et sociaux. Dans ce travail, nous intégrons les aspects environnemental et social en utilisant des coûts.

Nous présentons dans ce qui suit le système étudié, puis, nous nous intéressons à l'étude des trajectoires des variables d'état du système. Enfin, nous estimons le gradient IPA de la fonction de coût à partir de notre étude des trajectoires. Finalement, nous déterminons les différents états du système, lesquels seront utilisés par la suite pour définir un algorithme de simulation. Pour conclure cette section, nous présentons les résultats d'une application numérique basée sur nos résultats théoriques et l'algorithme de simulation.

4.2.1. Système étudié

Nous considérons un système composé d'une machine F_i qui produit des produits semi-finis, d'un stock de matières premières/produits semi-finis B_f , d'une machine M fabriquant des produits finis, d'un stock de produits finis B_c et d'un client (Figure 4.1.). La demande $d(t) = D$, est supposée être constante et connue. Dans un système de plusieurs étages, une demande incertaine pourrait entraîner des problèmes liés à l'information sur la demande entre les différents étages, tel que l'effet coup de fouet. Celui-ci consiste à une amplification de la demande au fur et à mesure que l'on s'éloigne du consommateur final. Nous conservons un modèle à flux continu pour la modélisation des flux de matières. Ce modèle peut être appliqué pour notre problème car il reste valide pour une politique en flux tirés avec des productions importantes, tout en conservant une bonne représentation des événements se produisant. Nous tenons compte également des temps de transfert/transport dans les différents étages. La politique de pilotage retenue est de type Échelon Base Stock [GLA95b] (cf. Annexe 1), dans laquelle, les flux sont pilotés par l'information sur la demande. Ainsi, lorsqu'une demande arrive au système, elle est transmise aux deux étages pour autoriser le réapprovisionnement (premier étage) et la distribution des produits au client (deuxième étage). L'autorisation de réapprovisionnement pour la machine de produits semi-finis $d_{f_1}(t)$, est donnée par l'équation (4.7) et l'autorisation de production de la machine de produits finis $d_u(t)$ est donnée par l'équation (4.14). Ces autorisations représentent les quantités de pièces que les machines de produits semi-finis et de produits finis doivent produire afin de rétablir la position du stock de

chaque étage au niveau d'échelon base stock. Nous considérons la production d'un seul type de produits. Nous associons le premier étage à l'approvisionnement de matières premières/produits semi-finis et le deuxième étage à la distribution de produits finis.

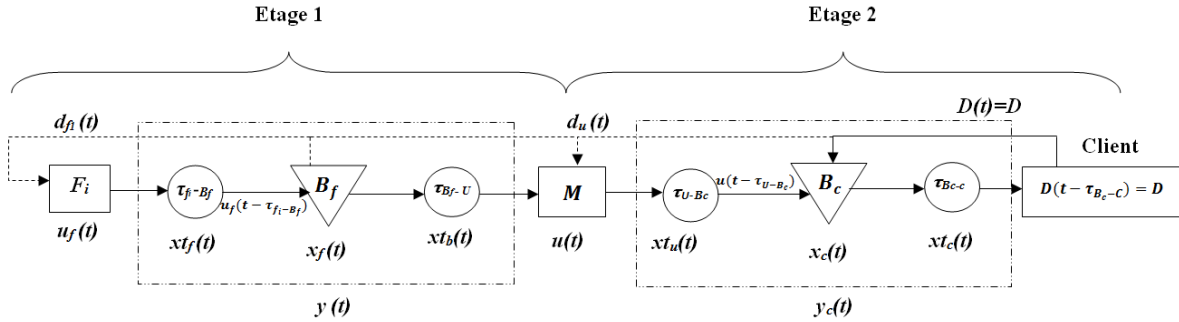


Figure 4.1. Système à deux étages piloté par la politique Échelon Base Stock.

Nous considérons que la machine de produits semi-finis peut être indisponible. Ces périodes d'indisponibilité peuvent être associées par exemple à des périodes pendant lesquelles la machine est utilisée pour la sous-traitance ([ASS15a], [FER07]) et donc, la machine n'a pas la capacité de produire les pièces nécessaires pour satisfaire la demande de production de la machine en aval M . L'équation (4.1) représente l'état de la disponibilité de celle-ci.

$$\sigma_f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si la machine } F_i \text{ n'est pas disponible} \\ 1, & \text{la machine } F_i \text{ peut satisfaire la demande de la machine } M \text{ (est disponible)} \end{cases} \quad (4.1)$$

Hypothèse 4.1. : La vitesse maximale de production $U_{f \max}$ de la machine de produits semi-finis ainsi que la vitesse de production maximale de la machine qui produit des produits finis U_u sont supérieures à la demande afin de pouvoir la satisfaire ($U_{f \max} \geq D$; $U_u \geq D$).

La vitesse de production de la machine de produits semi-finis à l'instant t est donnée par l'équation (4.2). Elle correspond à une politique de production de type Échelon Base Stock.

$$u_f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sigma_f(t) = 0 \\ U_{f \max}, & \text{si } \sigma_f(t) = 1 \text{ et } SB_{f_1} + D > y_f(t) \\ \min(U_{f \max}; D), & \text{si } \sigma_f(t) = 1 \text{ et } SB_{f_1} + D \leq y_f(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Comme pour la modélisation nous utilisons un modèle à flux continus, les équations qui décrivent la vitesse de production des machines ainsi que l'évolution du niveau de stock et de la position de stock pour les deux étages sont similaires aux équations qui décrivent ces mêmes variables d'état dans les chapitres précédents. Ainsi, l'évolution de la position du stock du premier étage est donnée par l'équation (4.3) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = u_f(t) - u(t) \quad (4.3)$$

L'équation (4.4) représente l'évolution du niveau de stock du premier étage. Elle tient compte des délais de transport entre la machine de produits semi-finis et le stock de matières premières/produits semi-finis et entre le stock de matières premières/produits semi-finis et la machine de produits finis.

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = u_f(t - \tau_{fi-B_f}) - u(t - \tau_{B_f-U}) \quad (4.4)$$

Les équations (4.5) et (4.6) correspondent respectivement aux quantités de pièces en transport de la machine de produits semi-finis au stock de matières premières/produits semi-finis et du stock de matières premières/produits semi-finis à la machine de produits finis :

$$xt_f(t) = \int_{t-\tau_{fi-B_f}}^t u_f(s) ds \quad (4.5)$$

$$xt_b(t) = \int_{t-\tau_{B_f-U}}^t u(s - \tau_{B_f-U}) ds \quad (4.6)$$

L'autorisation de réapprovisionnement de la machine de produits semi-finis $d_{f_1}(t)$, est exprimée comme la différence entre le niveau d'échelon base stock SB_f et l'échelon stock (qui correspond à la somme de produits dans le stock de matières premières/produits semi-finis et les moyens de transport du premier étage, moins la demande de produits finis en attente). L'autorisation de réapprovisionnement a pour but le rétablissement de l'échelon stock $y(t) - D$ au niveau base stock SB_f .

$$d_{f_1}(t) = SB_f - (xt_f(t) + x_f(t) + xt_b(t) - D) \quad (4.7)$$

$$SB_f = d_{f_1}(t) + (xt_f(t) + x_f(t) + xt_b(t)) - D \quad (4.8)$$

L'évolution de la position du stock du deuxième étage est donnée par l'équation (4.9). Dans cette équation nous tenons compte du délai de transport entre le stock de produits finis et le client. Avec une demande constante nous considérons que celle-ci est donnée par D .

$$\frac{dy_c(t)}{dt} = u(t) - D \quad (4.9)$$

L'équation (4.10) représente l'évolution du niveau de stock du deuxième étage. Dans celle-ci, nous tenons compte du délai de transfert entre la machine de produits finis et le stock de produits finis.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = u(t - \tau_{U-B_c}) - D \quad (4.10)$$

Les équations (4.11) et (4.12) correspondent respectivement aux quantités de pièces transportées entre la machine de produits finis et le stock de produits finis et entre le stock de produits finis et le client.

$$xt_u(t) = \int_{t-\tau_{U-B_c}}^t u(s) ds \quad (4.11)$$

$$xt_c(t) = \int_{t-\tau_{B_c-c}}^t D(s) ds \quad (4.12)$$

La vitesse de production de la machine de produits finis est donnée par l'équation (4.13). Dans cette politique, la vitesse de production dépend de la quantité de produits dans chaque étage, qui correspond à la différence entre la quantité de produits dans le stock ainsi que les moyens de transport de l'étage, et les demandes de produits finis en attente.

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha(t) = 0, \\ U_u, & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) > 0 \text{ et } xt_b(t) > 0, \\ \min\left(U_u; u_f\left(t - \tau_{B_f-U} - \tau_{f_i-B_f}\right)\right), & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) > 0 \text{ et } xt_b(t) = 0, \\ \min(D; U_u), & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) = 0 \text{ et } xt_b(t) > 0, \\ \min\left(D; U_u; u_f\left(t - \tau_{B_f-U} - \tau_{f_i-B_f}\right)\right), & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) = 0 \text{ et } xt_b(t) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

L'autorisation de production de la machine de produits finis $d_u(t)$, est exprimée comme la différence entre le niveau base stock SB_c et l'échelon stock (qui correspond à la somme de produits dans le stock de produits finis et les moyens de transport du deuxième étage moins la demande en attente). Dans cet étage, la finalité de l'autorisation de production est de rétablir l'échelon stock $y_c(t) - D$ au niveau base stock SB_c .

$$d_u(t) = SB_c - (xt_u(t) + x_c(t) + xt_c(t) - D). \quad (4.14)$$

$$SB_c = d_u(t) + (xt_u(t) + x_c(t) + xt_c(t)) + D. \quad (4.15)$$

Le coût total de stockage du stock des matières premières et celui du stock de produits finis sont donnés par les équations (4.16) et (4.17). Ils correspondent à la somme des coûts des pénuries et des coûts de possession de stock. Dans l'équation (4.16), $c_{B_f}^+$ représente le coût de possession des matières premières/produits semi-finis et $c_{B_f}^-$ le coût des pénuries de matières premières/produits semi-finis.

$$g(x_f(t)) = \begin{cases} x_f(t) * c_{B_f}^+, & \text{si } x_f(t) > 0, \\ x_f(t) * c_{B_f}^-, & \text{si } x_f(t) \leq 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Dans l'équation (4.17), $c_{B_c}^+$ correspond au coût de possession de produits finis et $c_{B_c}^-$ au coût des pénuries de produits finis.

$$g(x_c(t)) = \begin{cases} x_c(t) * c_{B_c}^+, & \text{si } x_c(t) > 0, \\ x_c(t) * c_{B_c}^-, & \text{si } x_c(t) \leq 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Nous définissons le coût de transport comme le flux transporté multiplié par le coût unitaire de transport. Il est à noter que nous considérons dans un premier temps une seule source d'approvisionnement de matières premières/produits semi-finis avec un coût de transport fixe afin de dimensionner le stock de matières premières à l'aide de la méthode IPA pour un modèle à flux continu. L'utilisation d'une tarification par tranches pour le transport des matières premières ou une méthode par transport complet discrétiserait notre modèle et dans ce cas, les estimateurs deviendraient biaisés et le problème ne serait plus solvable par la méthode IPA. Le coût total de transport est donné par la somme du coût de transport entre le F_i et B_f , entre B_f et M , entre M et B_c et entre B_c et le client (équation 4.18).

$$Ct(t) = Ct_f * xt_f(t) + Ct_b * xt_b(t) + Ct_u * xt_u(t) + Ct_c * xt_c(t) \quad (4.18)$$

L'équation (4.19) représente le coût économique à l'instant t . Il correspond à la somme des coûts de stockage/pénuries et des coûts de transport.

$$C_{ec}(t) = g(x_f(t)) + Ct(t) + g(x_c(t)) \quad (4.19)$$

L'équation (4.20) correspond au coût d'émissions de la machine qui produit des produits semi-finis, lequel est donné par les émissions totales de la machine multipliées par un coût de compensation de ces émissions¹³ [IPCC13].

$$C_d = E_m * C_{CO_2} \quad (4.20)$$

Le coût environnemental total est donné par l'équation (4.21). Ce coût tient compte d'un coût environnemental fixe lié à la machine de produits semi-finis ainsi que du coût d'émissions de celle-ci. Le coût lié à la machine peut représenter des aspects tels que l'utilisation d'énergies polluantes.

$$C_{en} = C_d + C_{ef} \quad (4.21)$$

Le coût total correspond à la somme des coûts économiques (transport, stockage, demandes retardées), des coûts environnementaux et des coûts sociaux. Il est donné par l'équation 4.22. Dans ce travail, nous ne nous intéressons pas à la définition de ceux-ci. Ils sont considérés comme des coûts fixes car ils n'ont pas d'impact sur nos résultats pour une seule source d'approvisionnement de la machine de produits finis.

$$C(t) = C_{ec}(t) + C_{en} + C_s \quad (4.22)$$

Nous remplaçons (4.18), (4.19) et (4.21) dans (4.22) et nous obtenons :

$$C(t) = g(x_f(t)) + g(x_c(t)) + Ct_f * xt_f(t) + Ct_b * xt_b(t) + Ct_u * xt_u(t) + Ct_c * xt_c(t) + C_d + C_{ef} + C_s \quad (4.23)$$

Le coût total moyen sur un horizon infini est donné par l'équation (4.24). Ce coût est donné en fonction des niveaux d'échelon base stock :

$$L(t, \vec{S}) = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \left(\int_0^T \left(g(x_f(t)) + g(x_c(t)) \right) dt \right) + Ct_f * xt_f(T) + Ct_b * xt_b(T) + Ct_u * xt_u(T) + Ct_c * xt_c(T) + C_d + C_{ef} + C_s \right) \right] \quad (4.24)$$

Dans l'équation (4.24), $\vec{S}$ est donné par : $\vec{S} = \begin{bmatrix} SB_f \\ SB_c \end{bmatrix}$.

Le coût total moyen sur un horizon fini $L_T(t, \vec{S})$ est alors donné par l'équation (4.25). Nous utiliserons celui-ci pour l'étude de l'estimateur du gradient de cette fonction de coût.

¹³ www.climatmundi.fr

$$L_T(t, \vec{S}) = \left[\left(\frac{1}{T} \left(\int_0^T (g(x(\vec{S}))) dt \right) + Ct_f * xt_f(T) + Ct_b * xt_b(T) + Ct_u * xt_u(T) + Ct_c * xt_c(T) + C_d + Ce_f + C_s \right) \right] \quad (4.25)$$

Dans ce qui suit, nous allons faire l'étude des trajectoires nominale et perturbée des quantités de pièces du premier ($y(t)$) et du deuxième étage ($y_c(t)$).

4.2.2. Etude des trajectoires du premier étage

Comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, cette section est consacrée à l'étude des trajectoires des variables d'état de notre système, lesquelles sont données en termes de variables de décision du problème. Elles correspondent aux niveaux d'échelon base stock de chaque étage. Nous commençons par étudier les trajectoires par les trajectoires du premier étage pour ensuite déduire les résultats de l'étude des trajectoires du deuxième étage.

Soit Δ_1 la perturbation du premier étage et Δ_2 la perturbation du deuxième étage.

Hypothèse 4.2. : La valeur de la perturbation Δ_i est positive ($\Delta_i > 0$, avec $i = 1$ ou 2). Comme pour les autres études, il est à noter que des résultats similaires peuvent être obtenus avec Δ_i négative.

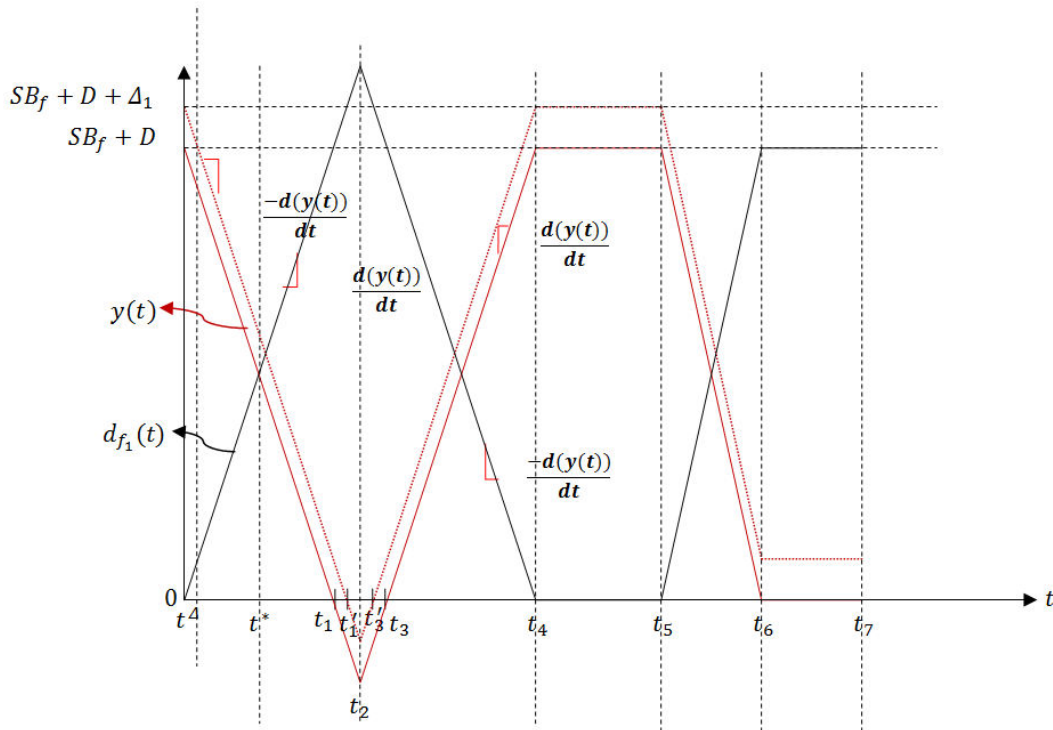


Figure 4.2. Exemple de trajectoire de $y(t)$ et de $d_{f_1}(t)$

La Figure 4.2 est une des trajectoires probables de $y(t)$ et de l'autorisation de réapprovisionnement de la machine, ces trajectoires étant bien évidemment aléatoires.

Hypothèse 4.3 : Les conditions initiales pour la mise en œuvre d'une politique Échelon Base Stock sont : à l'instant initial ($t = 0$), il n'y a pas de pièces en transport et les niveaux des deux stocks $x_f(0)$ et $x_c(0)$ sont égaux à ses niveaux d'Échelon Base Stock correspondants SB_f et SB_c avant l'arrivée d'une demande [BOO05].

De l'hypothèse 4.3 nous avons qu'à l'instant initial $y(0) = SB_f + D$, $y^A(0) = SB_f + D + \Delta_1$, $u_f(t) < u(t)$.

Pour la Figure 4.2, les temps sont définis comme suit :

- t^* : Correspond au moment où $d_{f_1}(t)$ rencontre $y(t)$.
- t_1 : Correspond au moment où $y(t)$ devient nulle (ou négative).
- t'_1 : Correspond au moment où $y^A(t)$ devient nulle (ou négative).
- t_2 : Correspond au moment où $y(t)$ et $y^A(t)$ changent de signe, c'est-à-dire, les pentes $\frac{d(y(t))}{dt}$ et $\frac{d(y^A(t))}{dt}$ deviennent positives.
- t'_3 : Correspond au moment où $y^A(t)$ devient positive (ou nulle).
- t_3 : Correspond au moment où $y(t)$ devient positive (ou nulle).
- t_4 : Correspond au moment où $y(t)$ et $y^A(t)$ deviennent égales à $SB_f + D$ et $SB_f + D + \Delta_1$ respectivement.
- t_5 : Correspond au moment où $y(t)$ et $y^A(t)$ changent de signe, c'est-à-dire que les pentes $\frac{d(y(t))}{dt}$ et $\frac{d(y^A(t))}{dt}$ deviennent négatives.

Lemme 4.1. : $y(t) \leq y^A(t) \leq y(t) + \Delta_1, \forall t$.

La démonstration de ce lemme est donnée dans l'Annexe 7, page 209. Ce lemme met en évidence le fait que la trajectoire perturbée est bornée par la trajectoire nominale, ce qui permettra de proposer facilement une optimisation basée sur la simulation.

4.2.3. Étude des trajectoires du deuxième étage

Étudions maintenant la valeur de la perturbation du deuxième système. Pour cette étude, nous supposons que la demande est la même pour les deux étages (usine-machine et machine-client), car les flux sont pilotés par une politique Base Stock (l'information qui permet de décider / piloter est issue de la demande).

$$SB_f + D = d_{f_1}(t) + y(t) \quad (4.26a)$$

$$D = d_{f_1}(t) + y(t) - SB_f \quad (4.26b)$$

$$SB_c + D = d_u(t) + y_c(t) \quad (4.27a)$$

$$D = d_u(t) + y_c(t) - SB_c \quad (4.27b)$$

En posant (4.26b) égal à (4.27b), car la demande est constante, nous obtenons :

$$d_{f_1}(t) + y(t) - SB_f = d_u(t) + y_c(t) - SB_c \quad (4.28)$$

Étage 1 :

Les équations (4.29a) et (4.29b), représentent le niveau d'échelon base stock perturbé pour le premier étage :

$$SB_f + D + \Delta_1 = d_{f_1}^\Delta(t) + y^\Delta(t) \quad (4.29a)$$

$$D = d_{f_1}^\Delta(t) + y^\Delta(t) - SB_f - \Delta_1 \quad (4.29b)$$

Étage 2 :

De manière similaire, les équations (4.30a) et (4.30b) représentent le niveau d'échelon base stock perturbé du deuxième étage :

$$SB_c + D + \Delta_2 = d_u^\Delta(t) + y_c^\Delta(t) \quad (4.30a)$$

$$D = d_u^\Delta(t) + y_c^\Delta(t) - SB_c - \Delta_2 \quad (4.30b)$$

En posant (4.29b) égal à (4.30b), nous avons :

$$d_{f_1}^\Delta(t) + y^\Delta(t) - SB_f - \Delta_1 = d_u^\Delta(t) + y_c^\Delta(t) - SB_c - \Delta_2 \quad (4.31)$$

Afin de simplifier notre étude et les simulations, nous conservons l'égalité des équations (4.28) et (4.31). La perturbation appliquée au premier étage doit donc être égale à la valeur de la perturbation du deuxième étage $\Delta_1 = \Delta_2$ pour une demande constante et identique. Comme nous l'avons mentionnée auparavant, pour la politique de pilotage de type Échelon Base Stock, lorsqu'une demande se produit dans le dernier étage, l'information sur cette demande est transmise à tous les étages simultanément, ce qui implique que tous les étages du système partagent la même information sur celle-ci. De cette manière, nous supposons que la demande pour les deux étages est identique. Une demande différente pour les deux étages entraînerait des perturbations différentes, ce qui rendrait plus complexe notre problème voire insoluble par la méthode IPA.

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'estimation du gradient de la fonction de coût.

4.2.4. Estimation du gradient de coût

Après avoir fait l'étude des trajectoires, nous pouvons définir un gradient de la fonction de coût.

Hypothèse 4.4. : Seuls les coûts de stockage sont dépendants de $\vec{S}$.

Notre intérêt porte sur le dimensionnement des stocks à maintenir dans chacun des étages. En connaissant le niveau du stock, nous pourrions ensuite déterminer les quantités transportées. L'hypothèse 4.4 nous aidera à simplifier l'étude de l'estimateur du coût.

Pour une perturbation infinitésimale Δ_1 sur le niveau d'échelon base stock du premier étage, le coût de stockage dû à la perturbation peut s'exprimer par l'équation (4.32) :

$$g(x_f(t)) = \begin{cases} c_{B_f}^+ \cdot \Delta_1, & \text{si } \Delta_1 \geq 0 \\ c_{B_f}^- \cdot \Delta_1, & \text{si } \Delta_1 < 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Soit $T1(SB_{f_1})$ la période totale pendant laquelle le niveau de stock de matières premières est positif, $T2(SB_{f_1})$ celle pendant laquelle le niveau de stock du stock de matières premières est négatif.

Sur un horizon de temps T , l'équation (4.32) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (g(x_f(t))) dt &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T1(SB_f)} (c_{B_f}^+ \cdot \Delta_1) dt - \int_0^{T2(SB_f)} (c_{B_f}^- \cdot \Delta_1) dt \right] \\ \frac{1}{T} \int_0^T (g(x_f(t))) dt &= \frac{[c_{B_f}^+ \cdot \Delta_1 \cdot T1(SB_f) - c_{B_f}^- \cdot \Delta_1 \cdot T2(SB_f)]}{T} \end{aligned}$$

De manière similaire, pour une perturbation infinitésimale Δ_2 sur le niveau d'échelon base stock du deuxième étage, le coût de stockage pour une perturbation infinitésimale peut s'exprimer par l'équation (4.33) :

$$g(x_c(t)) = \begin{cases} c_{B_c}^+ \cdot \Delta_2, & \text{si } \Delta_2 \geq 0 \\ c_{B_c}^- \cdot \Delta_2, & \text{si } \Delta_2 < 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Nous définissons $T3(SB_c)$ comme la période totale pendant laquelle le niveau de stock du stock de produits finis est positif et $T4(SB_c)$ celle pendant laquelle ce niveau de stock est négatif. Nous pouvons également réécrire l'équation (4.33) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (g(x_c(t))) dt &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T3(SB_c)} (c_{B_c}^+ \cdot \Delta_2) dt - \int_0^{T4(SB_c)} (c_{B_c}^- \cdot \Delta_2) dt \right] \\ \frac{1}{T} \int_0^T (g(x_c(t))) dt &= \frac{[c_{B_c}^+ \cdot \Delta_2 \cdot T3(SB_c) - c_{B_c}^- \cdot \Delta_2 \cdot T4(SB_c)]}{T} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire le coût total moyen perturbé sur un horizon fini comme suit :

$$L_T^A(t, SB_f + \Delta_1, SB_c + \Delta_2) = L_T(t, \vec{S}) + \frac{T1(SB_f) \cdot c_{B_f}^+ \cdot \Delta_1 - T2(SB_f) \cdot c_{B_f}^- \cdot \Delta_1 + T3(SB_c) \cdot c_{B_c}^+ \cdot \Delta_2 - T4(SB_c) \cdot c_{B_c}^- \cdot \Delta_2}{T} \quad (4.34)$$

Nous savons que $\Delta_1 = \Delta_2$. Ensuite, nous déterminons le gradient avec l'équation de la dérivée à partir des trajectoires donnée par l'équation (4.35) :

$$\frac{\partial L_T(t, \vec{S})}{\partial \vec{S}} = \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \frac{L_T(t, SB_f + \Delta_1, SB_c + \Delta_2) - L_T(t, \vec{S})}{\Delta_i} \quad (4.35)$$

Nous remplaçons (4.25) et (4.34) dans (4.35) et nous obtenons :

$$\frac{\partial L_T(t, \vec{S})}{\partial \vec{S}} = \frac{T1(SB_f) \cdot c_{B_f}^+ + T2(SB_f) \cdot c_{B_f}^- + T3(SB_c) \cdot c_{B_c}^+ + T4(SB_c) \cdot c_{B_c}^-}{T} \quad (4.36)$$

Théorème 4.1. : L'estimateur du gradient de coût est non biaisé.

$$\frac{\partial E[L_T(t, \vec{S})]}{\partial \vec{S}} = E \left[\frac{\partial L_T(t, \vec{S})}{\partial \vec{S}} \right].$$

Preuve du théorème 4.1. :

Prouvons les deux conditions énoncées dans le théorème 2.3 p.60. Pour rappel, la première condition, consiste à prouver que la dérivée de la fonction de coût $\partial[L_T(t, \vec{S})]/\partial \vec{S}$ existe avec probabilité 1 $\forall \vec{S}$. Pour ce faire, nous calculons la dérivée à droite et celle à gauche, elles doivent être égales.

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta_i \rightarrow 0^+} \frac{L_T(t, SB_f + \Delta_1, SB_c + \Delta_2) - L_T(t, \vec{S})}{\Delta_i} \\ &= \frac{L_T(t, \vec{S}) + \frac{T1(SB_f) \cdot c_{B_f}^+ \cdot \Delta_1 - T2(SB_f) \cdot c_{B_f}^- \cdot \Delta_1 + T3(SB_c) \cdot c_{B_c}^+ \cdot \Delta_2 - T4(SB_c) \cdot c_{B_c}^- \cdot \Delta_2}{T} - L_T(t, \vec{S})}{\Delta_i} \end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons la dérivée à droite pour un certain $\vec{S}$, laquelle est donnée par :

$$\lim_{\Delta_i \rightarrow 0^+} \frac{L_T(t, SB_f - \Delta_1, SB_c - \Delta_2) - L_T(t, \vec{S})}{\Delta_i} = \frac{T1(SB_f) \cdot c_{B_f}^+ + T2(SB_f) \cdot c_{B_f}^- + T3(SB_c) \cdot c_{B_c}^+ + T4(SB_c) \cdot c_{B_c}^-}{T} \quad (4.37)$$

Nous calculons la dérivée à gauche comme suit :

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta_i \rightarrow 0^-} \frac{L_T(t, \vec{S}) - L_T(t, SB_f - \Delta_1, SB_c - \Delta_2)}{\Delta_i} = \\ & \frac{L_T(t, \vec{S}) - \left(L_T(t, \vec{S}) - \frac{T1(SB_f) \cdot c_{B_f}^+ \cdot \Delta_1 - T2(SB_f) \cdot c_{B_f}^- \cdot \Delta_1 + T3(SB_c) \cdot c_{B_c}^+ \cdot \Delta_2 - T4(SB_c) \cdot c_{B_c}^- \cdot \Delta_2}{T} \right)}{\Delta_i} \end{aligned}$$

Et nous obtenons que la dérivée à gauche pour un certain $\vec{S}$ est donnée par :

$$\lim_{\Delta_i \rightarrow 0^-} \frac{L_T(t, \vec{S}) - L_T(t, SB_f - \Delta_1, SB_c - \Delta_2)}{\Delta_i} = \frac{T1(SB_f) \cdot c_{B_f}^+ + T2(SB_f) \cdot c_{B_f}^- + T3(SB_c) \cdot c_{B_c}^+ + T4(SB_c) \cdot c_{B_c}^-}{T} \quad (4.38)$$

Par les équations (4.37) et (4.38), nous voyons que les dérivées à droite et à gauche sont identiques $\forall \vec{S}$. Nous prouvons ainsi que la dérivée de la fonction de coût existe.

Ensuite, la deuxième condition consiste à prouver que la fonction $L_T(t, \vec{S})$ est Lipschitz continue et qu'elle a une constante de Lipschitz avec un premier moment fini. De manière similaire à ce qu'il a été énoncé pour la preuve du théorème 2.3, deux conditions suffisent pour garantir l'ergodicité [XIE89] : **1.** La demande doit être satisfaite en moyenne sur l'horizon de temps. Cette condition est garantie par l'hypothèse 4.1. **2.** La politique de pilotage consiste à produire à la capacité maximale de la machine lorsque la production est en retard par rapport à la demande et le niveau de stock n'est pas autorisé à décroître sans limite. Cette condition est satisfaite par les équations (4.2) et (4.13) lesquelles définissent respectivement la politique de production de l'usine et de la machine pour une politique Échelon Base Stock.

C.Q.F.D.

Dans ce qui suit, nous allons définir les différents états du système. Ils seront utilisés dans notre algorithme de simulation.

4.2.5 États du système

Nous définissons maintenant les différents événements qui font changer l'état du système. Ceux-ci seront utilisés pour définir un algorithme de simulation. Les événements possibles sont : la disponibilité des matières premières ($Disp$), l'indisponibilité des matières premières (Ind), l'épuisement du stock de matières premières (BE_f) et la saturation du stock de matières premières (BF_f), exprimée comme une autorisation de réapprovisionnement égale à zéro; les défaillances de la machine de produits finis (F), les réparations de la machine de produits finis (R), la saturation du stock de produits finis (BF_c) et l'épuisement du stock de produits finis (BE_c). Les événements de disponibilité et d'indisponibilité des matières premières sont liés à la machine qui fabrique des produits semi-finis.

Nous conservons l'hypothèse 2.11 selon laquelle deux événements ne se produisent pas en même temps avec une probabilité de 1.

Nous allons considérer chacun de ces événements. De l'hypothèse 2.11., nous savons qu'un seul événement peut se produire à la fois. Cette hypothèse est nécessaire afin d'éviter le changement dans l'ordre des événements entre les trajectoires nominale et perturbée. Ceci est une des conditions principales pour l'application de la méthode IPA. Nous considérons des priorités si lors de la simulation, deux événements arrivent simultanément. Ainsi, les priorités sont données par ordre décroissant comme suit :

1. Événements liés à l'usine : $Disp$ ou Ind
2. Événements liés au stock des matières premières : BE_f ou BF_f
3. Événements liés à la machine : F ou R
4. Événements liés au stock des produits finis : BE_c ou BF_c

4.2.6. Algorithme IPA

Dans ce système nous avons huit événements possibles comme il a été décrit dans la sous-section précédente. Nous commençons par les conditions initiales pour la politique Échelon Base Stock. Ensuite, nous déterminons l'état du système avec les équations qui décrivent l'évolution des variables d'état. Puis, nous calculons la date du prochain événement (voir équations de l'étape 3 ci-dessous) et après nous mettons à jour les temps des événements et de la simulation. Ensuite, nous déterminons le prochain événement. Nous mettons donc à jour les coûts économiques, environnementaux et sociaux et lorsque le critère d'arrêt est atteint, nous calculons le coût total moyen et le gradient obtenu pour un couple (SB_f, SB_c) donné. Ce gradient nous guidera dans le processus d'optimisation. Cette procédure est décrite en détail ci-dessous. Dans celle-ci $r_i(t)$ correspond au temps restant avant le prochain changement d'état.

Étape 1 : Conditions initiales :

- $y(0) = SB_f + D, y^A(0) = SB_f + D + \Delta_1, d_{f_1}(t) = 0, u_f(t) = D.$
- $y_c(0) = SB_c + D, y_c^A(0) = SB_c + D + \Delta_2, d_u(t) = 0, u(t) = D.$

- $xt_f(t) = 0, xt_b(t) = 0, xt_u(t) = 0, xt_c(t) = 0.$
- $r_i(0) = \text{Disponibilité}, \sigma_f(t) = 1, \alpha(t) = 1.$

Étape 2 : Déterminer l'état du système :

- $d_{f_1}(t) = d_{f_1}(t_k) + [(u(t_k) - u_f(t_k)) * (t - t_k)]$
- $y(t) = y(t_k) + [(u_f(t_k) - u(t_k)) * (t - t_k)]$
- $x_f(t) = x_f(t_k) + [(u_f(t_k - \tau_{f_i-B_f}) - u(t_k - \tau_{B_f-U})) * (t - t_k)]$
- $d_u(t) = d_u(t_k) + [(D(t_k - \tau_{B_c-c}) - u(t_k)) * (t - t_k)]$
- $y_c(t) = y_c(t_k) + [(u(t_k) - D(t_k - \tau_{B_c-c})) * (t - t_k)]$
- $x_c(t) = x_c(t_k) + [(u(t_k - \tau_{U-B_c}) - D(t_k)) * (t - t_k)]$
- $r_i(t) = r_i(t_k) - (t - t_k)$

Étape 3 : Calculer la date du prochain événement $\delta_k = t_k - t_{k-1}$:

- Si $e_k = R$ ou F ou *Indisponibilité* ou *Disponibilité*, alors $\delta_k = r(t_k)$
- Si $e_k = BF_f$, alors $\delta_k = d_{f_1}(t_k)/(u_f(t_k) - u(t_k))$
- Si $e_k = BE_f$, alors $\delta_k = x_f(t_k)/(u(t_k - \tau_{B_f-U}) - u_f(t_k - \tau_{f_i-B_f}))$
- Si $e_k = BF_c$, alors $\delta_k = d_u(t_k)/(u(t_k) - D(t_k - \tau_{B_c-c}))$
- Si $e_k = BE_c$, alors $\delta_k = x_c(t_k)/(D(t_k) - u(t_k - \tau_{U-B_c}))$

Étape 4 : Mettre à jour l'état du système selon l'événement :

- Si $e_k = R$ ou F ou *Ind* ou *Disp*
 $d_{f_1}(t_k) = d_{f_1}(t_{k-1}) + [(u(t_k) - u_f(t_k)) * (t_k - t_{k-1})]$
 $y(t_k) = y(t_{k-1}) + [(u_f(t_k) - u(t_k)) * (t_k - t_{k-1})]$
 $x_f(t_k) = x_f(t_{k-1}) + [(u_f(t_k - \tau_{f_i-B_f}) - u(t_k - \tau_{B_f-U})) * (t_k - t_{k-1})]$
 $d_u(t_k) = d_u(t_{k-1}) + [(D(t_k - \tau_{B_c-c}) - u(t_k)) * (t_k - t_{k-1})]$
 $y_c(t_k) = y_c(t_{k-1}) + [(u(t_k) - D(t_k - \tau_{B_c-c})) * (t_k - t_{k-1})]$
 $x_c(t_k) = x_c(t_{k-1}) + [(u(t_k - \tau_{U-B_c}) - D(t_k)) * (t_k - t_{k-1})]$
- Si $e_k = BF_f$
 $d_{f_1}(t_{k+1}) = 0$
 $y(t_{k+1}) = SB_f + D$
 $x_f(t_{k+1}) = x_f(t_{k-1}) + [(u_f(t_k - \tau_{f_i-B_f}) - u(t_k - \tau_{B_f-U})) * (t_k - t_{k-1})]$
 $d_u(t_k) = d_u(t_{k-1}) + [(D(t_k - \tau_{B_c-c}) - u(t_k)) * (t_k - t_{k-1})]$
 $y_c(t_k) = y_c(t_{k-1}) + [(u(t_k) - D(t_k - \tau_{B_c-c})) * (t_k - t_{k-1})]$
 $x_c(t_k) = x_c(t_{k-1}) + [(u(t_k - \tau_{U-B_c}) - D(t_k)) * (t_k - t_{k-1})]$
- Si $e_k = BE_f$
 $d_{f_1}(t_k) = SB_f + D$
 $y(t_k) = 0$

$$\begin{aligned}
 x_f(t_k) &= x_f(t_{k-1}) + \left[(u_f(t_k - \tau_{fi-B_f}) - u(t_k - \tau_{B_f-U})) * (t_k - t_{k-1}) \right] \\
 d_u(t_k) &= d_u(t_{k-1}) + \left[(D(t_k - \tau_{B_c-c}) - u(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right] \\
 y_c(t_k) &= y_c(t_{k-1}) + \left[(u(t_k) - D(t_k - \tau_{B_c-c})) * (t_k - t_{k-1}) \right] \\
 x_c(t_k) &= x_c(t_{k-1}) + \left[(u(t_k - \tau_{U-B_c}) - D(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right]
 \end{aligned}$$

- Si $e_k = BF_c$
 $d_u(t_k) = 0$
 $y_c(t_k) = SB_c + D$
 $x_c(t_k) = x_c(t_{k-1}) + \left[(u(t_k - \tau_{U-B_c}) - D(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right]$
 $d_{f_1}(t_k) = d_{f_1}(t_{k-1}) + \left[(u(t_k) - u_f(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right]$
 $y(t_k) = y(t_{k-1}) + \left[(u_f(t_k) - u(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right]$
 $x_f(t_k) = x_f(t_{k-1}) + \left[(u_f(t_k - \tau_{fi-B_f}) - u(t_k - \tau_{B_f-U})) * (t_k - t_{k-1}) \right]$
- Si $e_k = BE_c$
 $d_u(t_k) = SB_c + D$
 $y_c(t_k) = 0$
 $x_c(t_k) = x_c(t_{k-1}) + \left[(u(t_k - \tau_{U-B_c}) - D(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right]$
 $d_{f_1}(t_k) = d_{f_1}(t_{k-1}) + \left[(u(t_k) - u_f(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right]$
 $y(t_k) = y(t_{k-1}) + \left[(u_f(t_k) - u(t_k)) * (t_k - t_{k-1}) \right]$
 $x_f(t_k) = x_f(t_{k-1}) + \left[(u_f(t_k - \tau_{fi-B_f}) - u(t_k - \tau_{B_f-U})) * (t_k - t_{k-1}) \right]$

Étape 5 : Mettre à jour les temps des événements et le temps de la simulation :

- Si $e_k = R$ ou F ou Ind ou $Disp$, alors $r(t_k) = TBF$ ou TTR ou $Disponibilité$ ou $Indisponibilité$
- Si $e_k = BF_f, BE_f, BF_c, BE_c$, alors $r(t_k) = r(t_{k-1}) - (t_k - t_{k-1}) = r(t_{k-1}) - \delta_k$
- Temps simulation : $t_k = t_{k-1} + \delta_k$

Étape 6 : Déterminer le prochain événement :

$$\delta_k = \text{Min} \left(TBF; TTR; Disponibilité; Indisponibilité; d_{f_1}(t_k)/(u_f(t_k) - u(t_k)); x_f(t_k)/(u(t_k - \tau_{B_f-U}) - u_f(t_k - \tau_{fi-B_f})); d_m(t_k)/(u(t_k) - D(t_k - \tau_{B_c-c})); x_c(t_k)/(D(t_k) - u(t_k - \tau_{U-B_c})) \right)$$

Étape 7 : Calculer les coûts économiques, environnementaux et sociaux, puis, mettre à jour le coût total moyen.

Étape 8 : Lorsque le critère d'arrêt pour un certain $\vec{S}$ est atteint, calculer le coût total moyen ainsi que les temps $T1(SB_f)$, $T2(SB_f)$, $T3(SB_c)$ et $T4(SB_c)$ définis dans la section 4.2.4.

Étape 9 : Calculer le gradient de la fonction de coût avec l'équation (4.36). Tant que ce gradient ne change pas de signe pour un certain couple (SB_f, SB_c) , répéter les étapes 1 à 8 avec un couple (SB_f, SB_c) différent.

4.2.7 Application numérique

La simulation est de type événements discrets basée sur les résultats analytiques obtenus auparavant. Le critère d'arrêt des simulations est le nombre d'indisponibilités de l'usine puisqu'il est identique pour les deux trajectoires étudiées. Les paramètres utilisés pour la simulation sont affichés dans le Tableau 4.1.

Tableau 4.1. Paramètres de la simulation dimensionnement de stocks

Paramètre	Valeur
$u_f(t)$	15 pièces/unité de temps
D	3 pièces/unité de temps
U_u	4 pièces/unité de temps
$c_{B_f}^+$	5 unités monétaires
$c_{B_f}^-$	150 unités monétaires
$c_{B_c}^+$	10 unités monétaires
$c_{B_c}^-$	300 unités monétaires
τ_{f-B_f}	1.5 unités de temps
$\tau_{B_f-U}, \tau_{U-B_c}$	0.5 unité de temps
τ_{B_c-c}	1 unité de temps
Ct_b, Ct_f, Ct_w, Ct_c	3 unités monétaires
C_s	20 unités monétaires
Ce_f	10 unités monétaires
Nombre d'indisponibilités	100.000

Les temps de disponibilité et d'indisponibilité de la machine de produits semi-finis, ainsi que les temps de réparation et de bon fonctionnement de la machine de produits finis sont modélisés par une loi exponentielle avec des moyennes respectives de 10, 1, 5 et 1 unités de temps. Nous ne considérons pas la mise en place des actions de maintenance préventive, donc une loi avec un taux de défaillance non croissant peut-être utilisée pour modéliser ces différents temps.

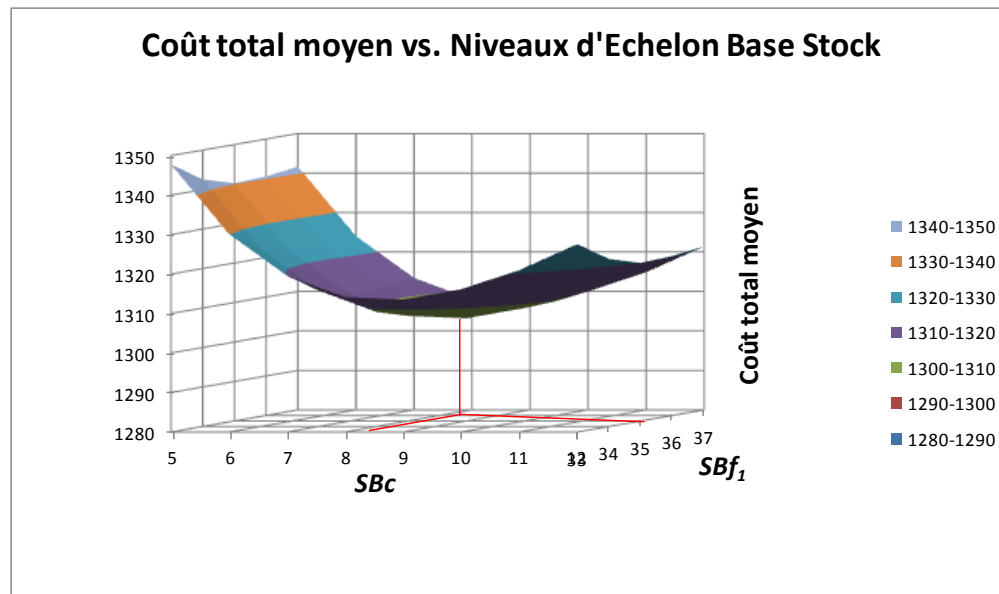


Figure 4.3. Zoom du coût total moyen par rapport aux Échelon Base Stocks.

La figure 4.3 montre un graphique du coût total moyen pour les niveaux de stocks nominaux (Base Stocks) du premier et du deuxième étage. La valeur minimale du coût total moyen est égale à 1296.43 ± 4.72 unités monétaires. Elle est obtenue avec un Base Stock pour l'étage de réapprovisionnement égal à 34.905 ± 0.7 unités de réapprovisionnement et pour le deuxième étage égal à 8.53 ± 0.63 unités de produits finis. Ces résultats correspondent au stock nécessaire à maintenir dans chacun des étages du système de production étudié pour les paramètres de simulation présentés dans la Table 4.1.

Dans la section à venir, nous partons de ces résultats et nous nous intéressons au dimensionnement du réapprovisionnement de produits semi-finis. Pour ce faire, nous considérons plus d'une source d'approvisionnement. Des coûts économiques, environnementaux et sociaux sont pris en compte afin de connaître la répartition des pièces de réapprovisionnement pour chacune de ces sources.

4.3. Dimensionnement du réapprovisionnement avec prise en compte des coûts économiques, environnementaux et sociaux

Dans cette section, nous étendons l'étude du système de la section 4.2. et nous considérons que l'approvisionnement des matières premières est fait à partir d'une usine de produits semi-finis et d'un sous-traitant. Comme dans notre problème les deux sources d'approvisionnement sont clairement identifiées, nous ne nous intéressons pas à la sélection et l'évaluation de celles-ci (voir [AGU06], [SON11], [MAN12]). La répartition optimale entre deux sources d'approvisionnement pour un modèle discret a été traitée par Sajadieh et Eshghi en tenant compte de l'effet du délai de réapprovisionnement [SAJ09] et en considérant des stratégies coopératives et non-coopératives entre les deux sources d'approvisionnement [SAJ14]. Nous considérons que l'usine est rattachée hiérarchiquement à l'entreprise qui fabrique les produits finis. Par contre, le sous-traitant n'a pas de lien hiérarchique avec l'entreprise. Ce type de situation peut surgir lorsqu'il est nécessaire

d'identifier les opérations qui représentent un avantage compétitif pour l'entreprise et les opérations qui pourraient être mieux développées par un tiers afin de réduire les coûts globaux.

La sous-traitance est définie dans [DOL13] comme "*... les tâches ou les services qui sont confiés seulement à une entreprise qui a la compétence spécifique requise et/ou les ressources pour être efficace*". Ce terme, souvent confondu avec l'externalisation diffère de celle-ci en ce que dans l'externalisation, les opérations faites par une autre entreprise ne sont pas le cœur de métier de l'entreprise, ce qui permet aux entreprises de se concentrer sur leurs compétences-clés [AGU14]. Alors que dans la sous-traitance, ces opérations dans des conditions normales peuvent être faites par l'entreprise parce qu'elles correspondent à son savoir-faire.

Ainsi, la collaboration avec des acteurs externes à l'entreprise, n'est pas toujours motivée que par la réduction de coûts, mais aussi pour assurer la production et la qualité nécessaire lorsque l'entreprise n'a pas la capacité de le faire [DAH07]. De cette manière, il est possible d'établir des contrats temporels avec des entreprises externes permettant de faire les opérations, avec la qualité et les coûts spécifiés, ainsi que dans les quantités et les délais souhaités. Ces opérations, même si elles se trouvent au cœur des compétences de l'entreprise, représentent des limitations qui peuvent être liées à la capacité de production, laquelle peut être impactée par des événements aléatoires tels que les défaillances dans le système, des retards dans l'approvisionnement, etc. [FER07]; ou par le manque de technologies de production nécessaires dans l'entreprise qui décide de sous-traiter [BER01].

Dans un contexte de développement durable, la sous-traitance représente une alternative pour les entreprises qui ne comptent pas sur les technologies de production nécessaires pour garantir une production propre. Dans ce contexte, la sous-traitance a été considérée par [BEN15b] afin de limiter les pénalités payées par le dépassement des seuils d'émissions de gaz à effet de serre permis par les autorités régulatrices. De cette manière, la sous-traitance est faite par l'absence de technologies de production « propres » et non par un manque de capacité.

Dans cette section, nous abordons la sous-traitance dans un contexte durable et nous considérons que l'entreprise fait appel à la sous-traitance afin de minimiser les coûts globaux du système, lesquels considèrent des aspects économiques, environnementaux et sociaux. Des aléas liés aux deux sources d'approvisionnement sont pris en compte. En effet, nous considérons que l'usine et le sous-traitant peuvent être indisponibles, soit du fait des actions de maintenance du sous-traitant et l'usine, soit parce que le sous-traitant et l'usine produisent pour d'autres clients. Cette indisponibilité impacte la capacité à satisfaire la demande de la machine qui fabrique les produits finis. De cette manière, l'entreprise doit définir la quantité des matières premières qu'elle doit sous-traiter et celle que l'usine de produits semi-finis doit produire afin de minimiser les coûts globaux.

Nous décrivons ci-dessous en détail, le système de production étudié.

4.3.1. Système étudié

Le système que nous étudions est représenté dans la figure 4.4. Il est composé d'une usine qui fabrique des produits semi-finis notée par F_1 et d'un sous-traitant qui est indépendant de l'entreprise considérée noté par F_2 . A ce stade de production l'entreprise reçoit une partie des produits semi-finis du sous-traitant et le reste des produits semi-finis sont élaborés par l'usine. Les produits semi-finis sont stockés dans un stock de produits semi-finis noté par B_f , en attendant d'être transformés en des produits finis par une machine M . Ensuite, les produits finis sont stockés dans un stock noté par B_c

tant qu'ils ne sont pas délivrés au client C . Nous considérons la production d'un seul type de produits finis et également, afin de simplifier notre étude, un seul type de produits semi-finis est considéré. De plus, nous tenons compte des délais de transfert et de transport entre les différents éléments du système. Ces délais sont connus et constants. Le délai de transport entre l'usine F_1 et le stock de produits semi-finis B_f est noté par $\tau_{f_1-B_f}$, le délai de transport entre le sous-traitant F_2 et le stock de produits semi-finis B_f est noté par $\tau_{f_2-B_f}$, le délai de transfert entre le stock de produits semi-finis B_f et la machine M est noté par τ_{B_f-U} , le délai de transfert entre la machine M et le stock de produits finis B_c est noté par τ_{U-B_c} et le délai de transport entre le stock de produits finis B_c et le client est noté par τ_{B_c-C} .

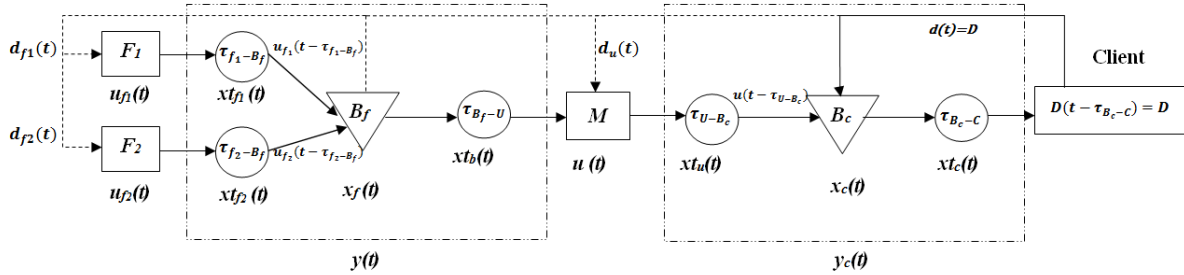


Figure 4.4. Système à deux étages avec une usine et un sous-traitant de produits finis.

Pour la modélisation des flux dans le système, nous conservons le modèle à flux continu. De même, la politique de pilotage choisie est de type Échelon Base Stock, laquelle a été utilisée dans la section 4.2. Pour rappel, avec cette politique, lorsqu'une demande arrive, l'information est transmise aux deux étages pour permettre l'approvisionnement de produits semi-finis (correspondant au premier étage) et la distribution des produits au client (représentée par le deuxième étage).

Le niveau de stock des produits semi-finis et des produits finis à l'instant t sont donnés par $x_f(t)$ et $x_c(t)$ respectivement. Le flux des pièces entre l'usine F_1 et le stock de matières premières B_f est donné par $x_{f1}(t)$, le flux de pièces entre le sous-traitant F_2 et le stock des matières premières est donné par $x_{f2}(t)$, le flux de pièces entre le stock de matières premières et la machine M est donné par $x_b(t)$, le flux de pièces entre la machine et le stock des produits finis B_c est donné par $x_u(t)$ et le flux de pièces entre le stock de produits finis B_c et le client C est donné par $x_c(t)$.

La machine est sujette à des pannes dépendantes du temps, c'est-à-dire, qu'elle peut tomber en panne à n'importe quel moment suite à des éléments externes (humidité, poussières, chaleur, etc.) ou à des éléments internes (obsolescence des composants, des incidents dus à des opérateurs, etc.) et non liés à l'utilisation directe de la machine. L'état de la machine noté par $\alpha(t)$ est donné par l'équation (4.39) :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{si la machine est en fonctionnement} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.39)$$

Avec la politique de pilotage utilisée, la vitesse de production dépend de la quantité des produits semi-finis ou finis dans chaque étage, ce qui correspond à la différence entre la quantité de produits dans le stock considéré ainsi que les pièces transportées, et les demandes en attente.

La vitesse de production maximale de la machine est notée par U_u et sa vitesse de production est donnée par $u(t)$ à chaque instant t .

Nous définissons également la capacité de production de l'usine, laquelle est notée par $u_{f1}(t)$ et la capacité de production du sous-traitant laquelle est notée par $u_{f2}(t)$ à chaque instant t . Leur capacité de production maximale est donnée respectivement par U_{f1max} et U_{f2max} .

Le niveau de Base stock du premier étage est noté par SB_f et le niveau de Base Stock du deuxième étage est noté par SB_c . Nous assumons que les valeurs optimales de ces niveaux de Base Stock sont connus et fixes et elles correspondent aux valeurs trouvées dans la section 4.2. Basés sur ces résultats, nous nous intéressons à la répartition optimale des pièces de réapprovisionnement entre l'usine et le sous-traitant. Comme cette répartition est limitée à ces deux sources de réapprovisionnement, nous pouvons définir une seule variable notée par a . Ainsi, a représente la proportion de pièces de réapprovisionnement à allouer à l'usine et $1 - a$ correspond à la proportion de pièces de réapprovisionnement à allouer au sous-traitant. L'autorisation de réapprovisionnement pour l'usine est donnée par $d_{f1}(t)$ et l'autorisation de réapprovisionnement pour le sous-traitant est donnée par $d_{f2}(t)$. Elles sont données par les équations (4.40) et (4.41) respectivement.

$$d_{f1}(t) = a * SB_f - (xt_{f1}(t) + x_f(t) * a + xt_b(t) * a - D * a) \quad (4.40)$$

$$d_{f2}(t) = (1 - a) * SB_f - (xt_{f2}(t) + x_f(t) * (1 - a) + xt_b(t) * (1 - a) - D * (1 - a)) \quad (4.41)$$

Nous dénotons par $d_f(t)$ la somme de $d_{f1}(t)$ et $d_{f2}(t)$. Ainsi, le flux de produits semi-finis provenant de l'usine est donnée par l'équation (4.42) :

$$d_{f1}(t) = a * d_f(t) \quad (4.42)$$

et le flux de produits semi-finis provenant du sous-traitant est donnée par l'équation (4.43) :

$$d_{f2}(t) = (1 - a) * d_f(t) \quad (4.43)$$

Le sous-traitant et l'usine de produits semi-finis peuvent avoir deux états : disponibles ou indisponibles. La disponibilité de l'usine est notée par $\theta_{f1}(t)$ et celle du sous-traitant par $\theta_{f2}(t)$. Elles sont données par les équations (4.44) et (4.45) respectivement.

$$\theta_{f1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si l'usine n'est pas disponible} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\theta_{f2}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le sous - traitant n'est pas disponible} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.45)$$

La demande du client à chaque instant t est notée par $d(t)$ (voir l'hypothèse 4.7).

Pour ce problème, nous tenons compte des hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.5. : La vitesse de production maximale de la machine U_u peut satisfaire la demande du client.

Hypothèse 4.6 : L'usine et le sous-traitant peuvent satisfaire la demande de la machine.

Hypothèse 4.7 : La demande est connue et constante et elle est égale à $d(t) = D$.

Hypothèse 4.8 : Les délais de transport sont constants et strictement positifs. Les résultats obtenus pourraient être facilement étendus si les délais sont nuls.

Nous tenons compte également de l'hypothèse 4.4 laquelle définit les conditions initiales pour la politique Échelon Base Stock.

L'évolution des variables d'état du système est donnée dans ce qui suit. Les équations (4.46) et (4.47) correspondent à l'évolution des niveaux de stocks des deux étages :

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = u_{f1}(t - \tau_{f1-B_f}) + u_{f2}(t - \tau_{f2-B_f}) - u(t - \tau_{B_f-U}) \quad (4.46)$$

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = u(t - \tau_{U-B_c}) - d(t) \quad (4.47)$$

Le flux de pièces transportées entre l'usine et le stock de produits semi-finis est donné par l'équation (4.48) :

$$xt_{f1}(t) = \int_{t-\tau_{f1-B_f}}^t u_{f1}(s)ds \quad (4.48)$$

Le flux de pièces transportées entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis est donné par l'équation (4.49) :

$$xt_{f2}(t) = \int_{t-\tau_{f2-B_f}}^t u_{f2}(s)ds \quad (4.49)$$

L'équation (4.50) représente les flux de pièces transportées entre le stock de produits semi-finis et la machine :

$$xt_b(t) = \int_{t-\tau_{B_f-U}}^t u(s - \tau_{B_f-U})ds \quad (4.50)$$

Le flux de pièces transportées entre la machine et le stock de produits finis est donné par l'équation (4.51) :

$$xt_u(t) = \int_{t-\tau_{U-B_c}}^t u(s)ds \quad (4.51)$$

L'équation (4.52) représente le flux des pièces transportées entre le stock de produits finis et le client :

$$xt_c(t) = \int_{t-\tau_{B_c-C}}^t D(s)ds \quad (4.52)$$

La capacité de production de l'usine est donnée par l'équation (4.53) :

$$u_{f1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta_{f1}(t) = 0 \\ U_{f1max}, & \text{si } \theta_{f1}(t) = 1 \text{ et } SB_f + D > y(t) \\ \min(U_{f1max}, D), & \text{si } \theta_{f1}(t) = 1 \text{ et } SB_f + D \leq y(t) \end{cases} \quad (4.53)$$

L'équation (4.54) représente la capacité de production du sous-traitant :

$$u_{f_2}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta_{f_2}(t) = 0 \\ U_{f_2max}, & \text{si } \theta_{f_2}(t) = 1 \text{ et } SB_f + D > y(t) \\ \min(U_{f_2max}, D), & \text{si } \theta_{f_2}(t) = 1 \text{ et } SB_f + D \leq y(t) \end{cases} \quad (4.54)$$

La vitesse de production de la machine est donnée par l'équation (4.55) :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha(t) = 0, \\ U_u, & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) > 0 \text{ et } xt_b(t) > 0, \\ \min(U_u; u_{f_1}(t - \tau_{B_f-U} - \tau_{f_1-B_f}); u_{f_2}(t - \tau_{B_f-U} - \tau_{f_2-B_f})), & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) > 0 \text{ et } xt_b(t) = 0, \\ \min(D; U_u), & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) = 0 \text{ et } xt_b(t) > 0, \\ \min(D; U_u; u_{f_1}(t - \tau_{B_f-U} - \tau_{f_1-B_f}); u_{f_2}(t - \tau_{B_f-U} - \tau_{f_2-B_f})), & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ et } d_u(t) = 0 \text{ et } xt_b(t) = 0. \end{cases} \quad (4.55)$$

4.3.2. Étude analytique de la fonction de coût

L'objectif dans cette étude est de définir la quantité de produits à sous-traiter afin de minimiser le coût moyen espéré sur un horizon de temps infini. La fonction du coût moyen considérée est le coût moyen à long terme noté par $J(t)$ défini comme la limite de la fonction du coût total pour un nombre d'événements noté par K . La fonction de coût total est donnée par la somme de coûts purement économiques, des coûts environnementaux et des coûts sociaux.

Les coûts purement économiques tiennent compte des coûts de stockage notés par $g(x_f(t))$ pour le stock de produits semi-finis et par $g(x_c(t))$ pour le stock de produits finis. Les coûts de stockage correspondent à la somme des coûts de possession de stock et des coûts des demandes retardées et ils sont donnés ci-après pour chaque stock par les équations (4.56) et (4.57).

$$g(x_f(t)) = \begin{cases} a * d_f(t) * c_{B_f}^+, & \text{si } \theta_{f_1}(t) = 1 \\ a * d_f(t) * c_{B_f}^-, & \text{si } \theta_{f_1}(t) = 0 \\ (1 - a) * d_f(t) * c_{B_f}^+, & \text{si } \theta_{f_2}(t) = 1 \\ (1 - a) * d_f(t) * c_{B_f}^-, & \text{si } \theta_{f_2}(t) = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

où $c_{B_f}^+ > 0$ et $c_{B_f}^- > 0$ correspondent respectivement au coût de possession d'une pièce de produit semi-fini et au coût de demandes retardées de produits semi-finis.

$$g(x_c(t)) = \begin{cases} x_c(t) * c_{B_c}^+, & \text{si } x_c(t) > 0, \\ x_c(t) * c_{B_c}^-, & \text{si } x_c(t) \leq 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

où $c_{B_c}^+ > 0$ et $c_{B_c}^- > 0$ correspondent respectivement au coût de possession d'une pièce de produit fini et au coût de demandes perdues de produits finis.

Le coût d'achat des produits semi-finis noté par C_a est donné par l'équation (4.58) dans laquelle C_{a1} est le coût d'achat par pièce achetée à l'usine, C_{a2} est le coût d'achat par pièce achetée au sous-traitant. Ce coût est défini de manière similaire pour l'usine et pour le sous-traitant. Il tient

compte du coût d'une pièce et des coûts éventuels de dédouanement (également donné par pièce afin de simplifier notre problème) et il est donné par :

$$C_a = C_{a1} * a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + C_{a2} * (1 - a) * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) \quad (4.58)$$

Le coût de transport, noté par C_t est donné par l'équation (4.59) :

$$C_t = C_{t1} * a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + C_{t2} * (1 - a) * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) \quad (4.59)$$

dans laquelle C_{t1} représente le coût de transport des produits semi-finis achetés à l'usine et C_{t2} le coût de transport des produits semi-finis achetés au sous-traitant.

Les coûts environnementaux et sociaux/sociétaux représentent différents problèmes causés par le système sur l'environnement et sur la société. Ils peuvent correspondre à des impacts tels que les émissions des gaz à effet de serre, des émissions d'agents polluants sur différents milieux : eau, sols et air; ou des effets sur la société tels que la santé, des salaires appropriés pour les employés, la formation de ceux-ci, etc.

Le coût environnemental est noté par C_{en} et il est donné par l'équation (4.60) dans laquelle C_{ef1} représente le coût environnemental par pièce transportée entre l'usine et le stock de produits semi-finis et C_{ef2} représente le coût environnemental par pièce transportée entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis. Nous considérons seulement les émissions de gaz à effet de serre au niveau du transport puisqu'elles sont en grande partie responsables du principal impact environnemental (le changement climatique). En outre, étant donné qu'ils ne modifieront pas l'analyse, nous ne considérons pas d'autres impacts environnementaux.

$$C_{en} = a * C_{ef1} * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + (1 - a) * C_{ef2} * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) \quad (4.60)$$

Le coût social/sociétal est noté par C_s et il est donné par l'équation (4.61) :

$$C_s = C_{s1} * a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + C_{s2} * (1 - a) * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) \quad (4.61)$$

dans laquelle C_{s1} représente le coût social/sociétal par unité de l'usine et C_{s2} représente le coût social/sociétal par unité du sous-traitant. Ainsi, par exemple si le sous-traitant ou l'usine paient des salaires très bas aux employés, s'ils embauchent des enfants, ou s'ils proposent des conditions de travail difficiles, ces coûts seront importants.

Ensuite, le coût total, lequel tient compte des coûts définis précédemment, est donné par l'équation (4.62).

$$\begin{aligned} C(t) = & C_{a1} * a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + C_{a2} * (1 - a) * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) + C_{t1} * a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + \\ & C_{t2} * (1 - a) * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) + a * c_{B_f}^+ * \theta_{f_1}(t) * d_f(t) + (1 - a) * c_{B_f}^+ * \theta_{f_2}(t) * d_f(t) + \\ & C_{s1} * a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + C_{s2} * (1 - a) * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) + a * C_{ef1} * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) + \\ & (1 - a) * C_{ef2} * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) - a * c_{B_f}^- * (1 - \theta_{f_1}(t)) * d_f(t) - (1 - a) * c_{B_f}^- * \\ & (1 - \theta_{f_2}(t)) * d_f(t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

En regroupant les termes similaires de l'équation (4.62), celle-ci peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned}
 C(t) = & a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) * (C_{a1} + Ce_{f_1} + C_{s1} + Ct_1 + c_{B_f}^+) + (1 - a) * d_f(t) * \theta_{f_2}(t) \\
 & * (C_{a2} + Ce_{f_2} + C_{s2} + Ct_2 + c_{B_f}^+) - a * c_{B_f}^- * (1 - \theta_{f_1}(t)) * d_f(t) - (1 - a) \\
 & * c_{B_f}^- * (1 - \theta_{f_2}(t)) * d_f(t)
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Ainsi, le coût moyen sur un horizon infini $J(t)$ est défini par :

$$\begin{aligned}
 J(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T & \left(a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) * (C_{a1} + Ce_{f_1} + C_{s1} + Ct_1 + c_{B_f}^+) + (1 - a) * d_f(t) \right. \\
 & * \theta_{f_2}(t) * (C_{a2} + Ce_{f_2} + C_{s2} + Ct_2 + c_{B_f}^+) - a * c_{B_f}^- * (1 - \theta_{f_1}(t)) * d_f(t) \\
 & \left. - (1 - a) * c_{B_f}^- * (1 - \theta_{f_2}(t)) * d_f(t) \right) dt
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Cette fonction dépend des valeurs des demandes, lesquelles sont connues et constantes sur l'horizon de temps. En raison de la dynamique complexe de ce système et des différents aléas dans celui-ci (les pannes de la machine et les indisponibilités du sous-traitant et de l'usine), il est difficile de définir les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence du coût moyen à long terme donnée par l'équation (4.64). Cependant, à partir de la loi de Little [CAO07], laquelle fournit un lien entre les temps d'attente, les stocks dans le système et les en-cours, les variables stochastiques ne doivent pas impliquer des valeurs infinies pour les niveaux de base stock et par conséquent il faut assurer que le niveau de stock des produits finis ne tend pas vers $-\infty$, c'est-à-dire que le coût moyen de l'équation (4.64) reste borné. Si le système est stable, c'est-à-dire si le niveau de stock de produits finis est fini, il a été démontré numériquement que le coût moyen à long terme existe toujours pour un système quasi similaire et il est indépendant de l'état initial [MOU06].

Ainsi, cette fonction objective peut être exprimée sur un horizon fini T de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 L_T(t, a) = \frac{1}{T} \int_0^T & \left(a * d_f(t) * \theta_{f_1}(t) * (C_{a1} + Ce_{f_1} + C_{s1} + Ct_1 + c_{B_f}^+) + (1 - a) * d_f(t) \right. \\
 & * \theta_{f_2}(t) * (C_{a2} + Ce_{f_2} + C_{s2} + Ct_2 + c_{B_f}^+) - a * c_{B_f}^- * (1 - \theta_{f_1}(t)) * d_f(t) \\
 & \left. - (1 - a) * c_{B_f}^- * (1 - \theta_{f_2}(t)) * d_f(t) \right) dt
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Soit $d_f(T)$ la quantité de demandes à satisfaire/autorisation de réapprovisionnement sur l'horizon de temps fini T . Elle est donnée par l'équation (4.66) dans laquelle K correspond au nombre total d'événements sur T .

$$d_f(T) = \sum_{j=0}^K d_f(t_j) \tag{4.66}$$

Ensuite :

$$d_f(T) = a * d_f(T) + (1 - a) * d_f(T) \tag{4.67}$$

Dans ce qui suit, nous appliquons la méthode IPA et nous étudions les trajectoires nominale et perturbée. L'étude théorique nous permettra de prouver que l'estimateur du gradient de la fonction de coût est non biaisé.

4.3.3. Étude des trajectoires

Nous utilisons également la méthode IPA afin d'estimer la valeur du gradient de la fonction de coût et nous montrons que ce gradient n'est pas biaisé. Pour ce faire, nous comparons la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. Nous conservons les hypothèses (2.5) et (2.10), lesquelles font référence respectivement à l'égalité des paramètres des trajectoires nominale et perturbée et à la non-simultanéité de deux événements. De plus, nous donnons d'autres hypothèses nécessaires pour cette étude.

Hypothèse 4.9 : La valeur de la perturbation est positive. Celle-ci est notée par Δa et par simplicité toutes les variables de la trajectoire perturbée sont indexées par Δ .

Hypothèse 4.10 : L'horizon de temps ne dépend pas des niveaux de Base Stock. Cette hypothèse est nécessaire pour assurer que la séquence des événements des deux trajectoires est similaire. L'horizon de temps pourrait dépendre par exemple du processus des défaillances et des réparations de la machine ou sur le processus de disponibilité de l'usine ou du sous-traitant.

Hypothèse 4.11 : Le coût total moyen $L_T(a)$ est une fonction convexe et continue sur a .

A partir de la loi de Little et étant donné que la trajectoire perturbée des quantités à acheter est bornée par rapport à la trajectoire nominale et la somme des proportions à acheter au sous-traitant et à l'usine est égale à 1, nous concluons que le coût à long terme de la trajectoire perturbée existe également.

Dans ce qui suit, la perturbation positive sera appliquée à la quantité de pièces à acheter à l'usine. Ainsi, la somme des proportions des pièces à acheter à l'usine et au sous-traitant est donnée par l'équation (4.68) :

$$1 = a + \Delta a + (1 - a - \Delta a) \quad (4.68)$$

Pour une perturbation infiniment petite Δa , le coût total moyen de la trajectoire perturbée sur un horizon fini $L_T(t, a + \Delta a)$ est donné par :

$$\begin{aligned} & L_T^\Delta(t, a + \Delta a) \\ &= L_T(t, a) + \frac{d_f(T) * \left[\begin{aligned} & T_{11} * \Delta a * (C_{a1} + C_{ef1} + C_{s1} + C_{t1} + c_{B_f}^+) - c_{B_f}^- * T_{12} * \Delta a \\ & - T_{21} * \Delta a * (C_{a2} + C_{ef2} + C_{s2} + C_{t2} + c_{B_f}^+) + c_{B_f}^- * T_{22} * \Delta a \end{aligned} \right]}{T} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Avec T_{11} le temps pendant lequel l'usine a été disponible, T_{12} le temps pendant lequel l'usine a été indisponible, T_{21} le temps pendant lequel le sous-traitant a été disponible, T_{22} le temps pendant lequel sous-traitant a été indisponible.

Nous trouvons le gradient de cette fonction de coût à partir des trajectoires nominale et perturbée.

$$\frac{\partial L_T(t, a)}{\partial a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{L_T^\Delta(t, a + \Delta a) - L_T(t, a)}{\Delta a} \quad (4.70)$$

En tenant compte de l'équation (4.65) et en remplaçant (4.69) dans (4.70), la dérivée de la fonction de coût par rapport à la proportion de pièces à acheter à l'usine est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_T(t, a)}{\partial a} &= \frac{1}{T} * d_f(T) \\ &\quad * \left[T_{11} * (C_{a1} + C_{ef1} + C_{s1} + C_{t1} + c_{B_f}^+) - c_{B_f}^- * T_{12} - T_{21} \right. \\ &\quad \left. * (C_{a2} + C_{ef2} + C_{s2} + C_{t2} + c_{B_f}^+) + c_{B_f}^- * T_{22} \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

Sous les hypothèses exposées précédemment, nous obtenons le Théorème 4.2.

Théorème 4.2. : L'estimateur du gradient de la fonction objective donné par l'équation (4.71) n'est pas biaisé.

Preuve du Théorème 4.2. :

Cette preuve consiste à démontrer que :

$$E \left[\frac{\partial L_T(t, a)}{\partial a} \right] = \frac{\partial E[L_T(t, a)]}{\partial a} = \frac{\partial J(a)}{\partial a} \quad (4.72)$$

De manière similaire aux démonstrations précédentes, pour la démonstration de ce théorème, les deux conditions doivent être satisfaites [WAR01] : 1). La dérivée de la fonction de coût $((\partial L_T(t, a))/\partial a)$ existe avec probabilité 1, $\forall a$; 2). La fonction aléatoire $L_T(t, a)/\partial a$ est Lipschitz continue et cette fonction a une constante de Lipschitz avec un premier moment fini.

Pour la première condition, nous prouvons que les dérivées à droite et à gauche de cette fonction de coût sont égales.

$$\frac{\partial L_T(t, a)}{\partial a} = \lim_{\Delta a^+ \rightarrow 0} \frac{L_T^\Delta(t, a + \Delta a) - L_T(t, a)}{\Delta a} = \lim_{\Delta a^- \rightarrow 0} \frac{L_T(t, a) - L_T^\Delta(t, a - \Delta a)}{\Delta a}$$

Nous calculons en premier la dérivée à droite :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta a^+ \rightarrow 0} \frac{L_T^\Delta(t, a + \Delta a) - L_T(t, a)}{\Delta a} &= \\ &= \frac{d_f(T) * \left[T_{11} * \Delta a * (C_{a1} + C_{ef1} + C_{s1} + C_{t1} + c_{B_f}^+) - c_{B_f}^- * T_{12} * \Delta a \right.}{L_T(t, a) + \frac{\left[-T_{21} * \Delta a * (C_{a2} + C_{ef2} + C_{s2} + C_{t2} + c_{B_f}^+) + c_{B_f}^- * T_{22} * \Delta a \right]}{T} - L_T(t, a)} \Delta a \end{aligned}$$

La dérivée à droite $\forall a$ est donnée par l'équation (4.73) comme suit :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta a^+ \rightarrow 0} \frac{L_T^\Delta(t, a + \Delta a) - L_T(t, a)}{\Delta a} &= \frac{1}{T} * d_f(T) * \left[T_{11} * (C_{a1} + C_{ef1} + C_{s1} + C_{t1} + c_{B_f}^+) - c_{B_f}^- * T_{12} - T_{21} * \right. \\ &\quad \left. (C_{a2} + C_{ef2} + C_{s2} + C_{t2} + c_{B_f}^+) + c_{B_f}^- * T_{22} \right] \end{aligned} \quad (4.73)$$

Ensuite nous calculons la dérivée à gauche :

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{L_T(t, a) - L_T^\Delta(t, a - \Delta a)}{\Delta a} = \frac{d_f(T) * \left[T_{11} * \Delta a * (C_{a1} + C_{ef1} + C_{s1} + C_{t1} + c_{B_f}^+) - c_{B_f}^- * T_{12} * \Delta a \right] - T_{21} * \Delta a * (C_{a2} + C_{ef2} + C_{s2} + C_{t2} + c_{B_f}^+) + c_{B_f}^- * T_{22} * \Delta a}{T}$$

Nous trouvons que la dérivée à gauche $\forall a$ est égale à la dérivée à droite et elle est donnée par l'équation (4.74).

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{L_T(t, a) - L_T^\Delta(t, a - \Delta a)}{\Delta a} = \frac{1}{T} * d_f(T) * \left[T_{11} * (C_{a1} + C_{ef1} + C_{s1} + C_{t1} + c_{B_f}^+) - c_{B_f}^- * T_{12} - T_{21} * (C_{a2} + C_{ef2} + C_{s2} + C_{t2} + c_{B_f}^+) + c_{B_f}^- * T_{22} \right] \quad (4.74)$$

De (4.73) et de (4.74), la première condition est satisfaite.

Pour prouver la deuxième condition, il faut démontrer que le système est ergodique [XIE89] :

- 1). La demande doit être satisfaite en moyenne. Cette condition est satisfaite par les hypothèses 4.5 et 4.6.
- 2). Lorsque la production est en retard par rapport à la demande, la politique de production consiste à produire à la capacité maximale. Cette deuxième condition est satisfaite par la définition de la politique Échelon Base Stock dans les équations (4.53), (4.54) et (4.55), lesquelles correspondent respectivement à la capacité de production de l'usine, à la capacité de production du sous-traitant et à la vitesse de production de la machine.

Par conséquent, nous pouvons conclure que l'estimateur du gradient de la fonction de coût n'est pas biaisé.

C.Q.F.D.

Ce théorème nous permettra de calculer par simulation la meilleure répartition des produits semi-finis entre l'usine et le sous-traitant à partir d'une seule simulation. En effet, la dérivée par la méthode IPA est calculée par rapport à la proportion du nombre de produits semi-finis provenant de l'usine. Ce gradient sera utilisé dans un algorithme de simulation afin d'estimer la proportion optimale à commander à l'usine et au sous-traitant. Définissons maintenant les états du système.

4.3.4 États du système

Avant de définir un algorithme de simulation, nous nous intéressons aux différents événements qui produisent un changement d'état du système. Dans ce système, nous avons des événements liés aux deux stocks, à l'usine, au sous-traitant et à la machine. Ces événements sont : la disponibilité de l'usine (*Disp1*), l'indisponibilité de l'usine (*Ind1*), la disponibilité du sous-traitant (*Disp2*), l'indisponibilité du sous-traitant (*Ind2*), l'épuisement du stock de produits semi-finis (*BE_f*) et la saturation du stock de produits semi-finis (*BF_f*), exprimée comme une autorisation de réapprovisionnement égale à zéro; les défaillances de la machine (*F*), les réparations de la machine (*R*), la saturation du stock de produits finis (*BF_c*) et l'épuisement du stock de produits finis (*BE_c*).

Afin de garantir que deux événements ne se produisent pas en même temps lors de la simulation, ce qui pourrait entraîner un changement dans l'ordre de ceux-ci, nous définissons des priorités lesquelles sont données par ordre décroissant comme suit :

1. Événements liés à l'usine : *Disp1* ou *Ind1*

2. Événements liés au sous-traitant : $Dispo2$ ou $Ind2$
3. Événements liés au stock des matières premières : BE_f ou BF_f
4. Événements liés à l'usine : F ou R
5. Événements liés au stock des produits finis : BE_c ou BF_c

A partir de ces événements, nous pouvons définir maintenant un algorithme de simulation.

4.3.5. Application numérique

Dans cette section, nous présentons d'abord notre algorithme de simulation basé sur l'étude théorique par la méthode IPA et nous simulons le système étudié pour des paramètres différents.

Afin de calculer la répartition optimale du sous-traitant, nous utilisons l'algorithme de simulation suivant :

Algorithme :

Étape 1 : Définir les conditions initiales par rapport à la politique Base Stock.

Étape 2 : Simuler le modèle à flux continus basé sur une approche de simulation à événements discrets. Pour ce faire, nous tenons compte des différents événements décrits dans la section 4.3.4.

Suivre les étapes 2 à 7 décrites dans l'algorithme de la section 4.2.6. : Déterminer l'état du système; calculer la date du prochain événement; mettre à jour l'état du système selon l'événement; mettre à jour les temps des événements et le temps de la simulation; déterminer le prochain événement; calculer les coûts économiques, environnementaux et sociaux. Puis, mettre à jour le coût total moyen.

Étape 8 : Lorsque le critère d'arrêt des simulations est atteint pour une certaine proportion α , calculer le coût total moyen ainsi que les temps T_{11} , T_{12} , T_{21} , T_{22} que nous avons défini dans l'équation (4.69) de la section 4.3.3.

Étape 9 : A partir des résultats de l'étude théorique, calculer le gradient de la fonction de coût avec l'équation (4.71). Tant que ce gradient ne change pas de signe pour une certaine proportion α , répéter les étapes 1 à 8 de l'algorithme de la section 4.2.6. avec un nouveau α .

Pour cet algorithme, les simulations sont exécutées pour une proportion α donnée jusqu'à ce que le nombre d'indisponibilités du sous-traitant atteigne une valeur qui est définie comme le critère pour arrêter les itérations. Nous avons choisi ce critère afin d'assurer que la simulation finisse dans le même événement pour la trajectoire nominale et pour la trajectoire perturbée et ainsi pouvoir comparer les résultats.

Les temps aléatoires sur les disponibilités, indisponibilités, réparation et entre les défaillances, suivent une loi exponentielle. Pour l'étude théorique, aucune condition n'est requise pour ces distributions puisque nous étudions un paramètre structurel. Nous définissons que la disponibilité de l'usine est donnée par une probabilité p_1 égale à 0.3 et pour le sous-traitant par p_2 égale à 0.5. Pour chaque événement, nous générons deux variables aléatoires qui suivent une loi uniforme $U(0,1)$ afin de modéliser le processus de disponibilité de l'usine et du sous-traitant pour produire les produits semi-finis nécessaires à la production de la machine M . Ainsi, si p_1 est inférieur à 0.3, l'usine est indisponible. De manière similaire, si p_2 est inférieur à 0.5, le sous-traitant est indisponible pour produire les produits semi-finis de l'entreprise.

A la fin de l'implémentation, et à partir du gradient de l'équation (4.71), le coût total moyen minimum est obtenu. Ainsi, les proportions de la quantité à commander au sous-traitant et à l'usine peuvent être trouvées.

Les paramètres de la simulation sont donnés dans le Tableau 4.2.

Tableau 4.2. Paramètres de la simulation approvisionnement

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur</i>
U_{f1max}, U_{f2max}	15 pièces/unité de temps
D	3 pièces/unité de temps
U_u	4 pièces/unité de temps
c_{Bf}^+	5 unités monétaires
c_r^-	150 unités monétaires
c_{Bc}^+	10 unités monétaires
c_{Bc}^-	300 unités monétaires
τ_{f1-Bf}	1.5 unités de temps
τ_{f2-Bf}	3 unités de temps
τ_{Bf-U}, τ_{U-Bc}	0.5 unité de temps
τ_{Bc-c}	1 unité de temps
Ct_1	7 unités monétaires
Ct_2	10 unités monétaires
Cef_1	30 unités monétaires
Cef_2	100 unités monétaires
Cs_1	15 unités monétaires
Cs_2	50 unités monétaires
Ca_1	15 unités monétaires
Ca_2	5 unités monétaires
SB_f	35 unités
SB_c	8 unités
Δa	0.000001
<i>Nombre d'indisponibilités du sous-traitant</i>	100.000

A l'état initial, le stock de produits semi-finis et de produits finis contiennent SB_f unités de produits semi-finis et le stock de produits finis contient SB_c unités de produits finis. Ces quantités ont été établies dans la section 4.2.7 avec les mêmes paramètres pour le problème du dimensionnement de ces stocks.

Résultats numériques

Les résultats affichés dans le Tableau 4.3 ont été obtenus avec les paramètres du tableau 4.2. Ces résultats seront pris comme les valeurs de référence pour faire une analyse de sensibilité des différents coûts. Les intervalles de confiance sont donnés pour un niveau de confiance égal à 95%.

Tableau 4.3. Résultats de la simulation

Proportion (a)	Proportion ($1-a$)	Coût total moyen
0.925 (± 0.048)	0.075 (± 0.048)	1100.554 (± 1.74)

A partir du Tableau 4.3, nous observons comme il était prévu que la plupart des pièces de réapprovisionnement pour la machine provient de l'usine parce que parmi les coûts qui influencent la décision de la quantité affectée au sous-traitant et à l'usine, seul le coût d'achat au sous-traitant est inférieur au coût d'achat à l'usine. Les autres coûts liés au sous-traitant sont plus élevés que les coûts liés à l'usine.

Dans ce qui suit, nous allons varier les paramètres des coûts d'achat, des coûts environnementaux et des coûts sociaux/sociétaux afin d'identifier leur influence sur les quantités allouées à l'usine et au sous-traitant.

Tableau 4.4. Résultats de l'analyse de sensibilité pour les coûts d'achat.

Ca_1	Ca_2	a	$1-a$	Coût total moyen	% variation a	% variation $1-a$	% variation Coût total moyen
10	5	0.95 (± 0.056)	0.05 (± 0.056)	1086.067 (± 0.997)	2.703	-33.33	-1.316
30	5	0.85 (± 0.057)	0.15 (± 0.057)	1141.53 (± 1.179)	-8.108	100	3.723
15	10	0.95 (± 0.056)	0.05 (± 0.056)	1101.121 (± 1.054)	2.703	-33.33	0.052
15	30	0.975 (± 0.048)	0.025 (± 0.048)	1103.158 (± 0.978)	5.405	-66.667	0.236
20	5	0.875 (± 0.048)	0.125 (± 0.048)	1114.396 (± 1.15)	-5.405	66.66	1.258
15	15	0.95 (± 0.057)	0.05 (± 0.057)	1101.10 (± 1.034)	2.703	-33.33	0.10

Le Tableau 4.4 montre les effets des coûts d'achat. La variation du coût total moyen est donnée par rapport aux quantités à acheter à l'usine (a) et au sous-traitant ($1 - a$) données dans le Tableau 4.3. De ces résultats, nous observons que la variation la plus grande du coût total moyen est donnée lorsque le coût d'achat à l'usine est doublé. Ceci implique une augmentation du coût total moyen de 3.723 %, alors que la quantité à acheter à l'usine est réduite de 8.108% et la quantité à acheter au sous-traitant est doublée par rapport aux résultats du Tableau 4.3. La variation la plus petite du coût total moyen est donnée lorsque le coût d'achat au sous-traitant est doublé. Ceci fait que le coût total moyen augmente seulement de 0.052% et la quantité à acheter au sous-traitant est réduite d'un tiers.

Les Figures 4.5a et 4.5b montrent le coût moyen pour des valeurs différentes du coût d'achat. Le point rouge dans la Figure 4.5a représente la valeur obtenue avec les paramètres du Tableau 4.2. A partir de ce point, l'augmentation ou la réduction du coût total moyen peut être observée. De

manière similaire, dans la Figure 4.5b, le point bleu représente la valeur obtenue avec les paramètres du Tableau 4.2. Elle montre que plus la valeur du coût d'achat est grande, plus le coût total moyen augmente.

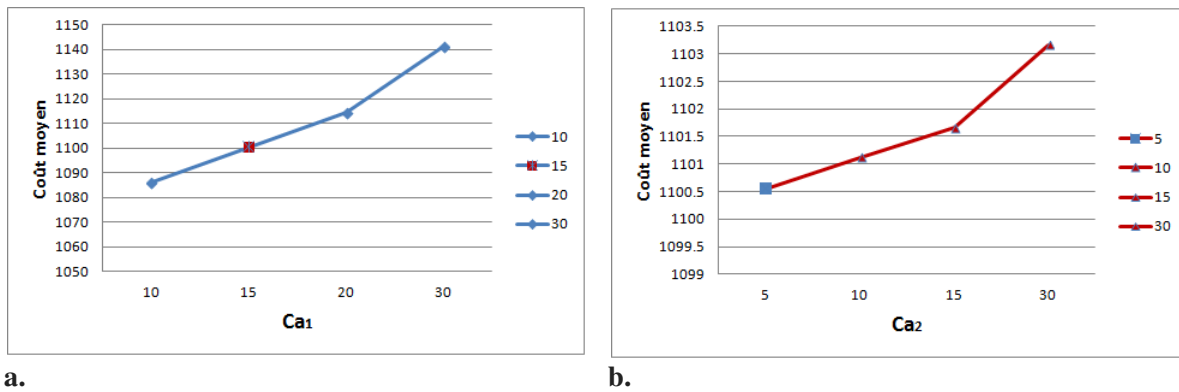


Figure 4.5. Coût d'achat vs. coût total moyen

Le Tableau 4.5. montre les résultats d'une analyse de sensibilité faite pour le coût environnemental par pièce transportée entre l'usine et le stock de produits semi-finis Ce_{f1} et pour le coût environnemental par pièce transportée entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis Ce_{f2} .

Tableau 4.5. Résultats de l'analyse de sensibilité du coût environnemental par pièce transportée.

Ce_{f1}	Ce_{f2}	a	$1-a$	Coût total moyen	% variation a	% variation $1-a$	% variation Coût total moyen
30	75	0.825 (± 0.048)	0.175 (± 0.048)	1093.211 (± 1.211)	-10.81	133.33	-0.667
30	50	0.667 (± 0.082)	0.333 (± 0.082)	1079.964 (± 1.89)	-27.928	344.44	-1.871
45	100	0.825 (± 0.056)	0.175 (± 0.056)	1140.599 (± 1.344)	-10.811	133.33	3.6387
15	100	0.95 (± 0.067)	0.05 (± 0.067)	1057.039 (± 0.87)	2.703	-33.33	-3.954
30	30	0.6 (± 0.087)	0.4 (± 0.087)	1064.397 (± 1.502)	-35.135	433.33	-3.285
50	30	0.55 (± 0.075)	0.45 (± 0.075)	1099.393 (± 1.864)	-40.54	500	-0.105

A partir du Tableau 4.5, nous observons que la variation du coût total moyen la plus grande se présente lorsque le coût environnemental par pièce transportée entre l'usine et le stock de produits semi-finis est réduit de 50%. Pour ce cas, la quantité de pièces à acheter à l'usine augmente de 2.703% et le coût total moyen est réduit de 3.954%. La variation du coût total moyen la plus petite se présente lorsque le coût environnemental par pièce transportée entre l'usine et le stock de

produits semi-finis augmente de deux-tiers. Le coût total moyen est réduit de 0.105% et la quantité à acheter à l'usine est réduite de 40.44%.

La Figure 4.6a représente les variations du coût environnemental par pièce transportée entre l'usine et le stock de produits semi-finis. Dans cette figure, le point rouge représente la valeur obtenue avec les paramètres du Tableau 4.2. La Figure 4.6b, représente le coût environnemental par pièce transportée entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis. Le point bleu dans cette figure correspond à la valeur du coût total moyen du Tableau 4.3. A partir de ces deux figures, nous pouvons observer la sensibilité du coût moyen aux changements dans les coûts environnementaux. Une augmentation de 15 unités sur le coût environnemental par pièce transportée entre l'usine et le stock de produits semi-finis engendre une augmentation du coût total moyen d'approximativement 40 unités. Et une augmentation de 20 unités sur le coût environnemental par pièce transportée entre le sous-traitant et l'entrepôt de matières premières et de produits semi-finis génère une augmentation du coût total moyen d'approximativement 15 unités. Ce résultat peut être expliqué dû fait que la proportion de pièces à acheter à l'usine est toujours supérieure à la proportion de pièces à acheter au sous-traitant.

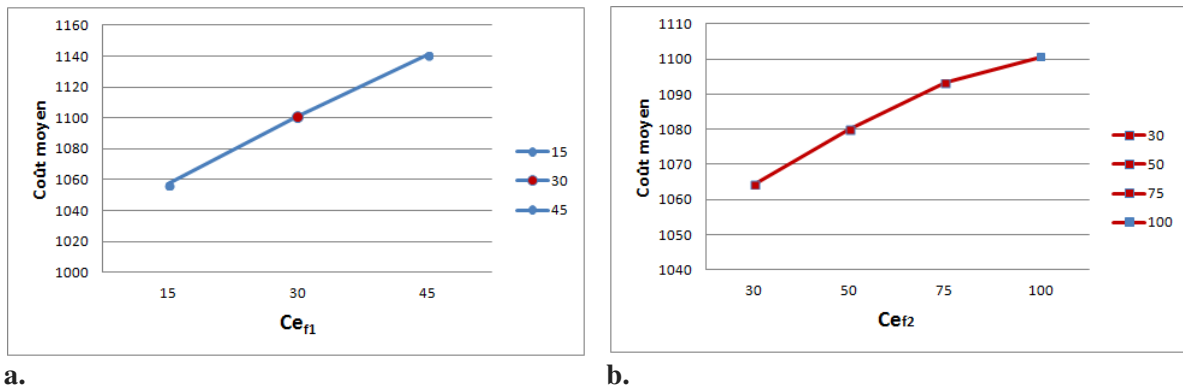


Figure 4.6. Coût environnemental vs. coût moyen.

Le Tableau 4.6. montre les résultats de l'analyse de sensibilité des coûts sociaux/sociétaux par unité pour l'usine C_{s1} et pour le sous-traitant C_{s2} .

Tableau 4.6. Résultats de l'analyse de sensibilité pour le coût social/sociétal

C_{s1}	C_{s2}	a	$1-a$	Coût total moyen	% variation a	% variation $1-a$	% variation Coût total moyen
15	30	0.825 (± 0.048)	0.175 (± 0.048)	1095.12 (± 1.186)	-10.819	133.33	-0.494
15	70	0.95 (± 0.056)	0.05 (± 0.056)	1102.743 (± 1.003)	2.703	-33.33	0.199
15	15	0.75 (± 0.079)	0.25 (± 0.079)	1088.904 (± 1.273)	-18.919	233.33	-1.059
10	50	0.95 (± 0.065)	0.05 (± 0.065)	1086.067 (± 0.997)	2.703	-33.33	-1.316
20	50	0.875 (± 0.048)	0.125 (± 0.048)	1114.397 (± 1.15)	-5.405	66.667	1.258

50	50	0.7 (± 0.08)	0.3 (± 0.08)	1187.825 (± 1.765)	-24.324	300	7.929
----	----	-----------------------	-----------------------	-----------------------------	---------	-----	-------

Du Tableau 4.6, nous observons que le pourcentage de variation le plus élevé est donné lorsque le coût social/sociétal par unité achetée à l'usine est égal au coût social/sociétal par unité achetée au sous-traitant ($C_{s1} = C_{s2} = 50$), alors le coût total moyen augmente de 7.929%. La quantité à acheter à l'usine est réduite de 24.324% et la quantité à acheter au sous-traitant est triplée. La variation du coût total moyen la plus petite se présente lorsque le coût social/sociétal par unité commandée au sous-traitant augmente de 40%. Pour ce cas, le coût total moyen augmente de 0.199% par rapport à la valeur montrée dans le Tableau 4.3 et la quantité à acheter à l'usine augmente de 2.703%.

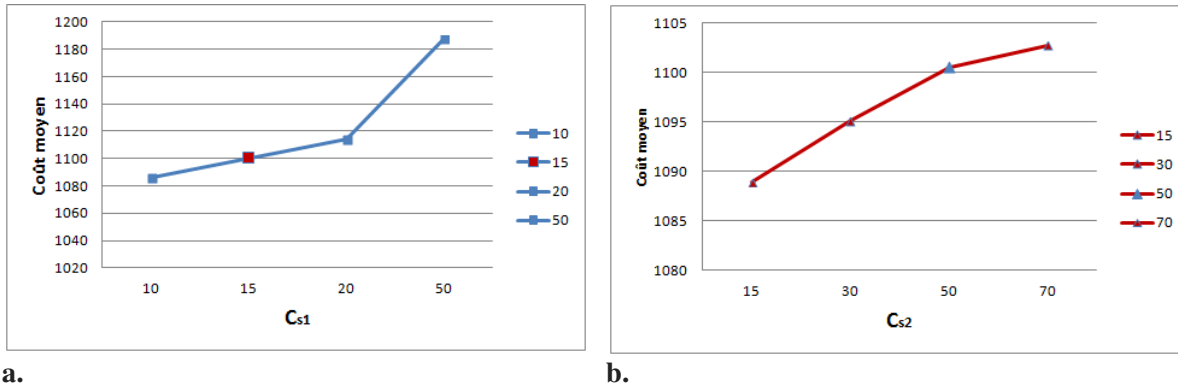


Figure 4.7. Coût social/sociétal vs. coût moyen.

Les Figures 4.7a et 4.7b montrent la variation du coût total moyen lorsque le coût social/sociétal par unité achetée à l'usine (Figure 4.7a) et par unité achetée au sous-traitant (Figure 4.7b) augmentent. Dans la figure 4.7a le point rouge indique la valeur obtenue avec les paramètres du Tableau 4.2. A partir de ce point, nous observons l'augmentation du coût total moyen lorsque le coût social/sociétal augmente. De manière similaire, le point bleu dans la Figure 4.7b représente la valeur obtenue du coût total moyen avec les paramètres du Tableau 4.2. Nous observons la réduction du coût total moyen lorsque le coût social/sociétal par unité du sous-traitant réduit. De ces figures nous observons que si le coût social/sociétal pour l'usine augmente de 5 unités, alors le coût total moyen augmente de 6 unités. Comme il a été souligné pour le coût environnemental, ceci peut être dû au fait que la quantité à acheter à l'usine est toujours supérieure à la quantité à acheter au sous-traitant. Ce dernier résultat est surtout une conséquence de la probabilité d'indisponibilité du sous-traitant, laquelle est plus élevée que celle de l'usine.

Dans la section suivante, nous adaptons ce problème, afin de considérer les émissions de gaz à effet de serre, lesquelles impactent le climat d'une manière dramatique et par conséquent le système Terre et la vie.

4.3.6. Application pour la réduction des émissions des gaz à effet de serre

Dans cette section, nous nous sommes intéressées à modéliser et à résoudre par la méthode IPA le système considéré précédemment en prenant comme objectif la minimisation des émissions de gaz à effet de serre. Ces émissions tiennent compte des six types de gaz couverts prioritairement par le Protocole de Kyoto (CO_2 , CH_4 , N_2O , SF_6 , HFC et PFC) qui peuvent être assimilés en tonnes

équivalent carbone ou CO₂ pour une année donnée [RAM08]. Nous nous intéressons alors dans cette étude à la minimisation des émissions d'équivalents carbone.

Dans notre système, les émissions peuvent être entraînées par les différents éléments qui le composent : le mode de transport, les stocks, la machine, etc. Ainsi, nous pouvons exprimer par $e_{CO_2}^i/t$ la quantité totale de gaz à effet de serre émis par an t pour chaque élément i , dans lequel i pourrait être l'usine des produits semi-finis, le sous-traitant de produits semi-finis, le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis, le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis, le mode de transport entre le stock de produits semi-finis et la machine, le mode de transport entre la machine et le stock de produits finis et le mode de transport entre le stock de produits finis et le client (Figure 4.4). Cette quantité totale émise de gaz à effet de serre est définie pour chaque pièce produite, stockée ou transportée.

La quantité totale de gaz à effet de serre pour chaque élément i est donnée en tonnes par an t :

$$e_{CO_2}^i/t(p^i) = \sum_{\zeta \in \{CO_2, CH_4, N_2O, HFC, PFC \text{ et } SF_6\}} E_{\zeta}^i(p^i) \times GWP_{\zeta} \quad (4.75)$$

dans laquelle p^i représente la quantité totale de pièces produites par an t , stockées ou transportées par l'élément i , E_{ζ}^i représente la quantité totale des gaz émis de type ζ pour chaque élément i et GWP_{ζ} correspond au pouvoir de réchauffement global pour le gaz ζ [SHI09]. Celui-ci permet de mesurer toutes les émissions de gaz à effet de serre compris dans le Protocole de Kyoto en équivalent CO₂.

Nous pouvons remarquer que cette quantité pourrait être définie également en fonction de " a ", la valeur de la répartition optimale de produits semi-finis à acheter à l'usine. Ensuite, la quantité totale émise de gaz à effet de serre par les différents éléments est représentée par l'équation suivante :

$$e_{CO_2}^i/t(a, t) = \sum_{\zeta \in \{CO_2, CH_4, N_2O, HFC, PFC \text{ et } SF_6\}} \left[E_{\zeta}^{F1} \cdot a \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{F2} \cdot (1-a) \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{F1-Bf} \cdot a \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{F2-Bf} \cdot (1-a) \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{Bf} \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{Bf-M} \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^M \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{M-Bc} \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{Bc} \cdot d_f(t) + E_{\zeta}^{Bc-C} \cdot d_f(t) \right] \times GWP_{\zeta} \quad (4.76)$$

Dans laquelle ces différentes variables représentent (voir la Figure 4.8) :

- E_{ζ}^{F1} : La quantité totale des gaz émis ζ par l'usine de produits semi-finis.
- E_{ζ}^{F2} : La quantité totale des gaz ζ émis par le sous-traitant de produits semi-finis.
- E_{ζ}^{F1-Bf} : La quantité totale des gaz ζ émis par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis.
- E_{ζ}^{F2-Bf} : La quantité totale des gaz ζ émis par le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis.
- E_{ζ}^{Bf} : La quantité totale des gaz ζ émis par le stock de produits semi-finis.

- E_{ζ}^{Bf-M} : La quantité totale des gaz ζ émis par le mode de transport entre le stock de produits semi-finis et la machine.
- E_{ζ}^M : La quantité totale des gaz ζ émis par la machine.
- E_{ζ}^{M-Bc} : La quantité totale des gaz ζ émis par le mode de transport entre la machine et le stock de produits semi-finis.
- E_{ζ}^{Bc} : La quantité totale des gaz ζ émis par le stock de produits finis.
- E_{ζ}^{Bc-C} : La quantité totale des gaz ζ émis par le mode de transport entre le stock de produits finis et le client.

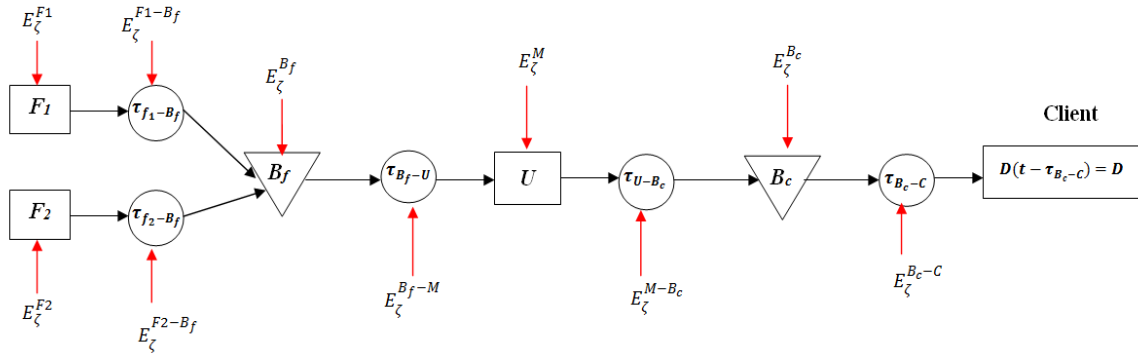


Figure 4.8. Schéma du système avec les variables GES.

Nous ne tenons pas compte des émissions des gaz à effet de serre du client sur lesquelles nous ne pouvons pas de toute manière agir.

La fonction objective, qui correspond à la minimisation des gaz à effet de serre émis par année t est donnée par l'équation (4.77) :

$$J_{CO2}/t(a) = \min \left(\sum_{\forall i \in \{F1, F2, \text{transport } (F1-Bf), \text{transport } (F2-Bf)\}} e_{CO2}^i/t(a, t) \right) \quad (4.77)$$

Comme il a été présenté précédemment, cette fonction objective peut être exprimée comme un coût économique par an t en appliquant la taxe carbone du principe " pollueur-payeur " [CHE10], selon lequel, les impacts négatifs sur l'environnement sont assumés par l'entité qui les génère. Lorsque la valeur des émissions dépasse une limite établie par les autorités régulatrices, l'entreprise doit payer une pénalité associée à ces émissions (généralement établie pour un an).

Nous considérons un indice d'émission lequel correspond à la quantité de gaz à effet de serre émis par pièce pour chaque élément qui compose le système. Les émissions totales ne doivent pas dépasser une valeur I_{CO2}/t sur l'horizon de temps étudié. Nous considérons que cette valeur est fixe et que pendant l'horizon de temps elle ne change pas.

Sur un horizon fini T , cette fonction objective peut être exprimée comme suit :

$$J_{CO_2}(a) = \frac{1}{T} \int_0^T \min \left(\sum_{i \in \{F1, F2, transport (F1-Bf), transport (F2-Bf)\}} e_{CO_2}^i(a, t) dt \right) \quad (4.78)$$

Nous définissons maintenant la quantité d'émissions de gaz à effet de serre pour chaque élément sur un horizon fini T . Comme dans notre problématique nous nous intéressons à définir les quantités à acheter au sous-traitant et à l'usine de produits semi-finis, nous définissons les quantités émises dans la production de l'usine et du sous-traitant de produits semi-finis et les émissions des moyens de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis et entre l'usine de produits semi-finis et le stock de produits semi-finis. Soit $N_{CO_2}^{F1}$ le nombre total de tonnes équivalent CO_2 émises par l'usine de produits semi-finis si a pièces sont produites, $N_{CO_2}^{F2}$ le nombre total de tonnes équivalent CO_2 émises par le sous-traitant si $(1 - a)$ lui sont allouées, $N_{CO_2}^{F1-Bf}$ représente le nombre total de tonnes équivalents CO_2 émises par le mode de transport entre l'usine de produits semi-finis et l'entrepôt de matières premières si a pièces sont transportées et $N_{CO_2}^{F2-Bf}$ le nombre total de tonnes équivalents CO_2 émises par le mode de transport entre le sous-traitant et l'entrepôt de matières premières si $(1 - a)$ pièces sont transportées. Ensuite, cette fonction objective peut être exprimée sur un horizon fini par :

$$L_{CO_2}(a) = \frac{a \cdot (N_{CO_2}^{F1} - N_{CO_2}^{F2} + N_{CO_2}^{F1-Bf} - N_{CO_2}^{F2-Bf}) + N_{CO_2}^{F2} + N_{CO_2}^{F2-Bf}}{T} \quad (4.79)$$

Nous appliquons la méthode IPA afin de trouver l'estimateur du gradient de la fonction de coût et nous prouvons par une étude théorique similaire à celle donnée par le théorème 4.2 que le gradient de l'estimateur n'est pas biaisé. Pour rappel, nous souhaitons connaître la valeur optimale de " a ", donc nous appliquons la perturbation sur cette valeur comme dans l'équation (4.68). Nous obtenons la fonction objective perturbée, laquelle est exprimée par l'équation (4.80) :

$$L_{CO_2}(a + \Delta a) = L_{CO_2}(a) + \frac{\Delta a \cdot (N_{CO_2}^{F1} - N_{CO_2}^{F2} + N_{CO_2}^{F1-Bf} - N_{CO_2}^{F2-Bf})}{T} \quad (4.80)$$

Ensuite, à partir des équations (4.79) et (4.80) nous obtenons l'estimateur du gradient avec la méthode IPA de cette fonction objective, lequel est donnée par l'équation (4.81) :

$$\frac{\partial L_{CO_2}(a)}{\partial a} = \frac{N_{CO_2}^{F1} - N_{CO_2}^{F2} + N_{CO_2}^{F1-Bf} - N_{CO_2}^{F2-Bf}}{T} \quad (4.81)$$

Ce résultat complète notre étude afin d'offrir une bonne alternative entre les émissions de gaz à effet de serre et les coûts économiques. Cependant, il convient de noter qu'avec la méthode IPA, à notre connaissance, nous ne pouvons traiter qu'une seule fonction objective à la fois.

Dans ce qui suit, nous implémentons ce gradient dans une application numérique.

4.3.7. Application numérique avec comme objectif la minimisation des émissions de gaz à effet de serre

Basés sur les paramètres du Tableau 4.6 de la section 4.3.5, nous faisons une application avec l'estimateur du gradient de l'équation (4.81) afin d'obtenir la proportion de la quantité à acheter à

l'usine et au sous-traitant qui minimise la quantité de gaz ζ émise. Nous tenons compte des paramètres définis dans le Tableau 4.2 et nous définissons également les paramètres par rapport à la quantité de gaz ζ émis, lesquels sont montrés dans le Tableau 4.7.

Tableau 4.7. Données pour les simulations des gaz à effet de serre émis

Paramètre	Valeur
E_{ζ}^{F1}	30 unités de gaz ζ
E_{ζ}^{F2}	100 unités de gaz ζ
$E_{\zeta}^{F1-B_f}$	20 unités de gaz ζ
$E_{\zeta}^{F2-B_f}$	40 unités de gaz ζ

Avec ces paramètres, nous avons obtenu un cas générique pour faire des comparaisons. Ces résultats sont donnés dans le Tableau 4.8.

Tableau 4.8. Valeurs de référence pour l'émission des gaz à effet de serre

Proportion (a)	Proportion ($1-a$)	Gaz à effet de serre émis
0.7 (± 0.00014)	0.3 (± 0.00014)	107.757 (± 1.13)

Pour la proportion optimale donnée dans le tableau 4.8., nous avons calculé le coût total moyen. Il est égal à 1176.8622 unités monétaires. C'est-à-dire que si l'objectif est de réduire les émissions de gaz à effet de serre, le coût total moyen augmente de 76.308 unités monétaires. Cette augmentation en pourcentage représente 6.93 % du coût total moyen obtenu lorsque l'objectif était la minimisation de celui-ci.

Nous faisons une analyse de sensibilité afin d'étudier les effets dans la variation des gaz ζ émis par l'usine de produits semi-finis (E_{ζ}^{F1}), par le sous-traitant de produits semi finis (E_{ζ}^{F2}), le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis ($E_{\zeta}^{F1-B_f}$) et le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis ($E_{\zeta}^{F2-B_f}$).

Les résultats de la variation des quantités émises de gaz ζ par l'usine et par le sous-traitant de produits semi-finis sont montrés dans le Tableau 4.9.

Tableau 4.9. Résultats de l'analyse de sensibilité pour la quantité totale de gaz ζ émis par l'usine et par le sous-traitant.

E_{ζ}^{F1}	E_{ζ}^{F2}	a	$1-a$	Gaz à effet de serre émis	% variation a	% variation $1-a$	% variation Gaz à effet de serre émis
40	100	0.6	0.4	120.903	-14.286	33.33	12.19

		(± 0.00017)	(± 0.00017)	(± 1.605)			
20	100	0.7 (± 0.00014)	0.3 (± 0.00014)	93.148 (± 1.207)	0	0	-13.557
30	70	0.6 (± 0.00006)	0.4 (± 0.00006)	100.192 (± 1.32)	-14.286	33.33	-7.021
30	130	0.7 (± 0.00016)	0.3 (± 0.00016)	113.284 (± 1.199)	0	0	5.129

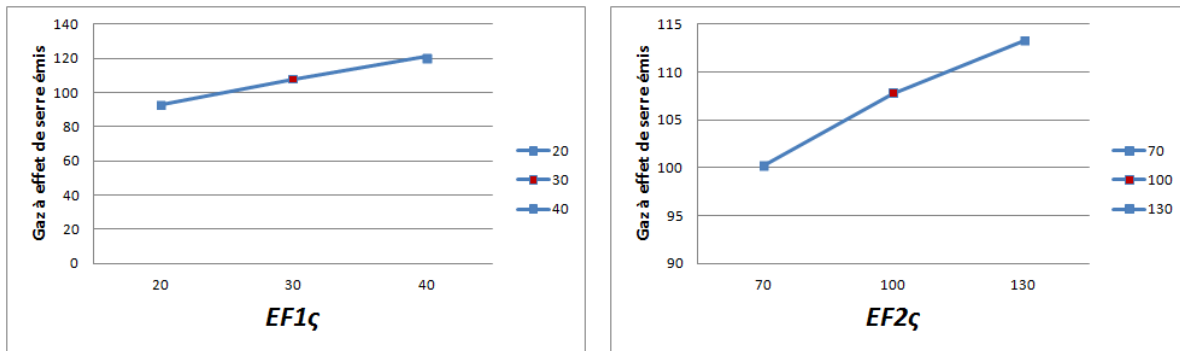
Nous comparons ci-après les résultats du Tableau 4.9 avec ceux montrés dans le Tableau 4.8.

Si la quantité émise de gaz ζ par l'usine augmente d'un-tiers, alors la quantité totale de gaz à effet de serre émise augmente de 12.19%. La proportion de la quantité à acheter à l'usine diminue de 14.286% et la proportion de la quantité à acheter au sous-traitant augmente d'un-tiers.

Si la quantité émise de gaz ζ par l'usine diminue d'un tiers, alors la quantité totale d'émissions de gaz à effet de serre est réduite de 13.557%. Les proportions des quantités à acheter à l'usine et au sous-traitant ne changent pas.

Si la quantité émise de gaz ζ par le sous-traitant réduit de 30%, alors les émissions totales de gaz à effet de serre diminuent de 7.021% et la proportion de la quantité à acheter à l'usine est réduite de 14.286%. La proportion de la quantité à acheter au sous-traitant augmente d'un-tiers.

Si la quantité émise de gaz ζ par le sous-traitant augmente de 30%, la proportion des quantités à acheter à l'usine et au sous-traitant ne changent pas. Les émissions totales de gaz à effet de serre augmentent de 5.129%.



a. b.
Figure 4.9. Quantité émise de gaz ζ pour l'usine et pour le sous-traitant vs. gaz à effet de serre émis.

La Figure 4.9a montre la variation des émissions de l'usine de produits semi-finis. Dans cette figure, le point rouge indique la valeur obtenue dans le Tableau 4.8. A partir de ce point, nous observons que lorsque la quantité de gaz émise par l'usine augmente de 10 tonnes, les émissions totales de gaz augmentent approximativement de 13 tonnes. Dans la Figure 4.9b est montrée la variation des quantités émises de gaz par le sous-traitant est montrée. Nous observons que lorsque la quantité émise de gaz par le sous-traitant est réduite de 30%, les émissions totales de gaz sont réduites d'approximativement 7.5 tonnes. L'augmentation de la quantité totale de gaz émis est approximativement de 5.5 tonnes lorsque la quantité émise de gaz par le sous-traitant augmente de 30%. Dans ce cas, l'augmentation de la quantité totale d'émissions de gaz à effet de serre est

inférieure à l'augmentation de la quantité émise de gaz par l'usine. Cela peut être expliqué parce que la quantité à acheter au sous-traitant est généralement inférieure à la quantité à acheter à l'usine, du fait de nos coûts unitaires.

Nous faisons maintenant une analyse de sensibilité des émissions des moyens de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis et entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis. Ces résultats sont montrés dans le tableau 4.10.

Tableau 4.10. Résultats de l'analyse de sensibilité pour les quantités émises de gaz ζ par les modes de transport

E^{F1-Bf}_{ζ}	E^{21-Bf}_{ζ}	a	$1-a$	Gaz à effet de serre	% variation a	% variation $1-a$	% variation Gaz à effet de serre émis
10	40	0.775 (± 0.048)	0.225 (± 0.048)	97.395 (± 1.199)	10.714	-25	-9.617
30	40	0.6 (± 0.00014)	0.4 (± 0.00014)	115.86 (± 1.526)	-14.286	33.33	7.52
20	30	0.7 (± 0.00037)	0.3 (± 0.00037)	101.308 (± 1.27)	0	0	-5.985
20	50	0.7 (± 0.0007)	0.3 (± 0.0007)	113.915 (± 1.462)	0	0	5.714

Dans le Tableau 4.10, nous observons les effets de la variation des quantités émises de gaz ζ par le transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis et entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis. A partir de ce tableau, nous observons que si la quantité émise de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis réduit de moitié, la quantité totale d'émissions de gaz à effet de serre est réduite de 9.617%. La quantité à acheter à l'usine augmente de 10.714% et la proportion de la quantité à acheter au sous-traitant est réduite de 25% par rapport aux résultats du Tableau 4.8.

Si la quantité émise de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis est doublée, alors la quantité à acheter à l'usine est réduite de 14.286% et la proportion de la quantité à acheter au sous-traitant augmente d'un-tiers. Les émissions totales de gaz à effet de serre augmentent de 5.714%.

Si la quantité émise de gaz ζ par le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis est réduite de 25%, alors les émissions totales de gaz à effet de serre diminuent de 5.985%. Les quantités à acheter à l'usine et au sous-traitant ne changent pas. De manière similaire, ces quantités ne changent pas si la quantité émise de gaz ζ pour le moyen de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis augmente de 25%. Cependant, les émissions totales de gaz à effet de serre augmentent de 5.14%.

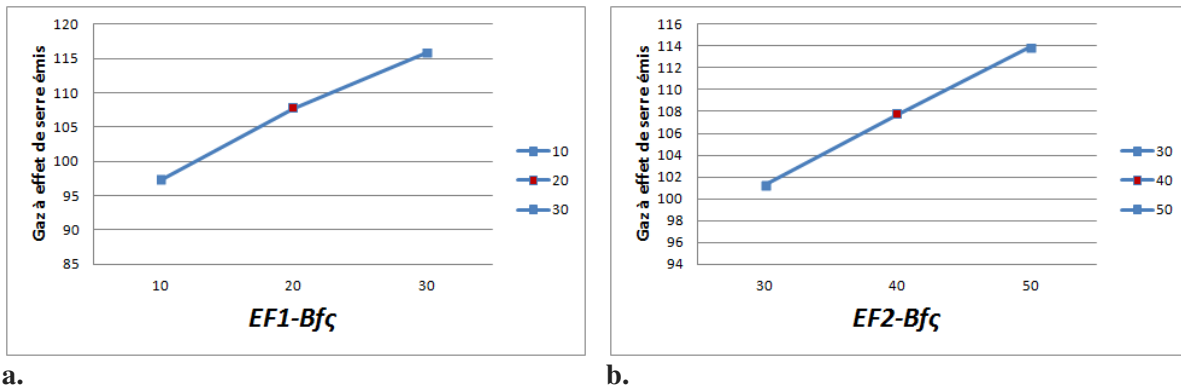


Figure 4.10. Quantités émises de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis et par le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis vs. gaz à effet de serre émis.

La Figure 4.10a montre les variations des émissions totales de gaz à effet de serre lorsque les quantités émises de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis changent. Dans cette figure, le point rouge indique la valeur des résultats du Tableau 4.8. Nous observons qu'une augmentation de 10 tonnes dans les quantités émises de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis par rapport au résultat du Tableau 4.8 représente une augmentation d'approximativement 8 tonnes dans les émissions totales de gaz à effet de serre. De manière similaire, par rapport aux résultats du Tableau 4.8, une réduction de 10 tonnes dans les quantités émises de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis réduit les émissions totales de gaz à effet de serre d'approximativement 10 tonnes.

Dans la Figure 4.10b, nous observons la variation des émissions totales de gaz ζ lorsque les émissions dans le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis changent. Les émissions totales de gaz ζ augmentent de 6 tonnes lorsque les quantités émises de gaz ζ par le mode de transport entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis augmente de 10 tonnes par rapport aux résultats du Tableau 4.8.

Une augmentation (réduction) des quantités émises de gaz ζ par le mode de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis engendre des variations plus grandes dans les émissions totales de gaz à effet de serre en comparaison à une augmentation (réduction) dans les quantités émises de gaz ζ dans le mode de transport entre le sous-traitant et l'entrepôt de matières premières. Ceci parce que la quantité de pièces à acheter à l'usine est plus grande que la quantité à acheter au sous-traitant et parce que la probabilité d'indisponibilité du sous-traitant est plus importante que celle de l'usine.

4.4. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons considéré un système de production de deux étages. Le premier des étages représente le réapprovisionnement de matières premières / produits semi-finis et le deuxième étage correspond à la distribution des produits finis au client. Ces deux étages sont liés par une machine laquelle fabrique les produits finis. Dans la modélisation, nous tenons compte des délais de transfert et de transport entre les différents éléments du système. La politique retenue pour le pilotage de ce système est la politique Échelon Base Stock. Dans un système de production à plusieurs étages, cette politique permet de piloter les flux globaux du système par l'information de la demande. Nous considérons que la demande du client est constante.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressées au dimensionnement du stock de matières premières / produits semi-finis et du stock de produits finis. Nous avons fait une étude des trajectoires des quantités des pièces en transport et dans les stocks pour les deux étages. Cette étude nous a permis de déduire la relation existante entre l'échelon stock de chaque étage et l'autorisation de réapprovisionnement / production. La somme de l'échelon stock et de l'autorisation de réapprovisionnement est équivalente au niveau de base stock. A partir de cette étude, nous avons estimé le gradient de la fonction de coût avec la méthode IPA. Cette fonction est définie en termes des niveaux d'Échelon Base Stock. Elle tient compte de coûts de stockage et rupture du stock, des coûts de transport et de coûts fixes environnementaux et sociaux. Ensuite, nous avons démontré que l'estimateur du gradient de la fonction de coût n'est pas biaisé. Nous avons ainsi défini un algorithme de simulation dans lequel nous avons intégré ce gradient. Il nous a permis de dimensionner les quantités à maintenir dans chacun des stocks afin de minimiser les coûts globaux (économiques, environnementaux et sociaux).

Nous avons étendu l'étude de ce système en nous intéressant au réapprovisionnement. Pour ce faire, nous avons considéré deux sources de réapprovisionnement clairement identifiées : la première correspondant à une usine de produits semi-finis laquelle appartient à l'entreprise qui fabrique les produits finis; et la deuxième source correspond à un sous-traitant extérieur à l'entreprise. Nous nous sommes intéressées à déterminer la répartition des quantités entre ces deux sources afin de minimiser le coût global. Cette répartition s'est basée sur des critères économiques, environnementaux et sociaux / sociétaux. Ceux-ci ont été intégrés dans notre modèle au moyen de coûts. Nous avons fait une étude des trajectoires nominale et perturbée des quantités à acheter à l'usine et au sous-traitant de produits semi-finis. Nous avons ainsi défini un estimateur du gradient de la fonction de coût. Il a été intégré dans un algorithme de simulation afin de déterminer la répartition optimale des pièces de réapprovisionnement entre l'usine et le sous-traitant. Nous avons fait une analyse de sensibilité laquelle nous a permis de connaître l'influence des différents coûts dans les proportions et dans le coût total moyen lorsque les différents coûts varient.

Pour le problème du réapprovisionnement, nous avons considéré un deuxième objectif correspondant à la minimisation des émissions de gaz à effet de serre. Nous avons défini les éléments dans le système qui contribuent à ces émissions. De cette manière, dans la fonction objective nous avons considéré les émissions des différents éléments qui composent le système. Cependant, dans la problématique de répartition des quantités à acheter à l'usine et au sous-traitant, seul les émissions de l'usine et du sous-traitant de produits semi-finis et des moyens de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis et entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis interviennent dans la détermination des proportions optimales. Nous avons également appliqué la méthode IPA pour déterminer un gradient qui nous a permis de trouver une répartition optimale des quantités à acheter à ces deux sources de réapprovisionnement avec comme objectif la minimisation des émissions de gaz à effet de serre. Nous avons trouvé que cette répartition est différente lorsque ces deux objectifs sont considérés séparément. De plus, la minimisation des émissions implique une augmentation du coût total moyen. Ce résultat reflète l'effet d'internaliser les coûts environnementaux dans les coûts de l'entreprise. La minimisation des coûts globaux et des émissions de gaz à effet de serre a été considérée indépendamment à cause de la limitation de la méthode IPA pour les traiter de manière conjointe.

Les études menées dans ce chapitre ont fait l'objet d'un article présenté dans le cadre des 6èmes Journées Doctorales / Journées Nationales GDR MACS [RAM15] et d'un article soumis à IJPR (International Journal of Production Research) [RAM16b].

Comme perspectives au travail de ce chapitre, les quantités à maintenir dans les stocks des deux étages pourraient être déterminées avec la méthode IPA avec comme objectif la minimisation des émissions des gaz à effet de serre ([BON11], [BOU12]). De plus, nous pourrions aborder l'optimisation de ce problème en considérant une méthode d'optimisation multicritère, telles que les méthodes d'agrégation ou encore, une approche basée sur la notion de non dominance (approche Pareto) qui nous permettrait d'optimiser les différents objectifs simultanément. De manière similaire à ce qu'il a été fait dans le chapitre trois, nous pourrions également intégrer des critères environnementaux et sociaux et ainsi redéfinir la politique de pilotage de ce système.

Conclusion générale

Les travaux de cette thèse ont porté sur l'optimisation de systèmes de production soumis à des aléas et plus particulièrement aux pannes des machines. De plus, nous avons considéré que l'environnement dans lequel les systèmes de production évoluent impose des contraintes de durabilité pour rester pérennes. Ces contraintes ont été intégrées dans notre étude sous forme de coûts. Nous nous sommes ainsi intéressées à la minimisation des coûts globaux, lesquels comportent des coûts purement économiques, des coûts environnementaux et sociaux. Les flux des matières ont été pilotés par des politiques de pilotage hybrides ou à flux tirés, à savoir, la politique point de séparation et la politique Echelon Base Stock. Un modèle à flux continu a été utilisé pour la modélisation de ces systèmes. Ce modèle nous a permis d'intégrer explicitement les délais de transfert et de transport entre les différents éléments des systèmes et de considérer les variables de décisions de nos problèmes comme étant continues. Nous avons ainsi pu utiliser la méthode d'Analyse des Perturbations Infinitésimales (IPA) afin de trouver des gradients qui nous ont permis de minimiser les différentes fonctions de coût.

Ce mémoire a commencé par la bibliographie et le positionnement de nos travaux. Dans ce premier chapitre, nous avons présenté les stratégies de production de l'entreprise, lesquelles ont évolué au cours du temps. Initialement, nous avons défini les éléments communs à la stratégie traditionnelle et à la stratégie actuelle. La stratégie traditionnelle est caractérisée par l'intégration d'objectifs purement économiques, alors que la stratégie de production dans le contexte actuel demande aux entreprises de prendre en compte des contraintes liées à l'environnement dans lequel elles fonctionnent. La stratégie actuelle considère donc non seulement, des aspects économiques, mais aussi des aspects environnementaux et sociaux/sociétaux. Il est à noter que dans nos travaux, nous nous sommes focalisées sur la dimension sociale (plus que sociétale) de l'entreprise. Nous avons présenté différentes politiques de pilotage de la production, lesquelles contribuent à la réalisation des objectifs fixés par la stratégie de l'entreprise. Ensuite, nous nous sommes intéressées particulièrement à une stratégie de production dans laquelle le pilotage de la production et la gestion de la maintenance sont faites conjointement. Ces stratégies sont efficaces pour l'optimisation des coûts globaux, lesquels tiennent compte des coûts liés aux politiques de pilotage (stockage/pénuries) et des coûts liés à la politique de maintenance (coûts de maintenance corrective et préventive). Puis, nous nous sommes intéressées à l'optimisation des objectifs à travers des trajectoires d'échantillon. Ces méthodes rendent possible l'optimisation en prenant en compte les aléas auxquels les systèmes sont soumis. Elles sont basées soit sur des paramètres structurels soit sur des paramètres des lois de probabilité. Parmi ces méthodes, nous avons réalisé un focus sur la famille des méthodes basées sur l'Analyse des Perturbations à laquelle appartient la méthode de résolution retenue. À la fin du chapitre nous avons décrit le plan de recherche utilisé ainsi que les différents choix que nous avons fait par rapport au modèle, à la méthode d'optimisation et à l'outil de simulation. Nous en concluons que la méthode IPA peut être utilisée pour l'optimisation et pour un système modélisé par un modèle à flux continu car dans celui-ci, les variables de décision sont considérées comme étant continues, ce qui est une condition pour l'application de cette méthode.

Dans le deuxième chapitre, nous avons considéré un système de production composé d'une machine, d'un stock et d'un client. Dans la modélisation de ce système, nous avons intégré explicitement les délais de transfert entre la machine et le stock et entre le stock et le client. Pour ce système, nous nous sommes intéressées au couplage de la production et de la maintenance. De cette manière, nous avons couplé une politique de pilotage de type point de séparation à une stratégie de

maintenance préventive de type bloc. Nous avons mené une étude théorique basée sur la méthode IPA afin d'estimer un gradient de la fonction de coût par rapport au point de séparation et un autre gradient par rapport à la période de la maintenance préventive. Ils ont été utilisés respectivement pour trouver le nombre de pièces à stocker (point de séparation) et la période de maintenance préventive qui minimisent le coût total moyen. La méthode IPA peut être utilisée pour les deux variables : le point de séparation dans un modèle à flux continu correspond à une variable structurelle continue et la période de maintenance préventive correspond à une variable continue (le temps) qui dépend de la loi de probabilité utilisée pour représenter les temps de bon fonctionnement de la machine. L'approche proposée permet de trouver le point de séparation optimal pour une période de maintenance préventive déterminée et vice-versa. Cette approche est générique, ce qui implique que différentes lois de probabilités peuvent être utilisées pour décrire les processus des pannes et de réparations du système. Cependant, il faut tenir compte qu'une stratégie de maintenance préventive est justifiée lorsque le taux de défaillance du système est croissant. Deux modèles de pannes ont été appliqués dans la simulation : soit la machine est sujette à des pannes dépendantes du temps (éléments extérieurs endommageant la machine), soit la machine est sujette à des pannes dépendantes des opérations et donc les pannes dépendent de son utilisation (cas le plus fréquent dans la réalité). Ces deux modèles ont été testés avec des temps de bon fonctionnement distribués selon une loi de Weibull. Pour l'étude théorique, la demande du client est supposée être constante, cependant nous relâchons cette hypothèse dans certaines simulations. Ceci nous a permis d'étudier le système avec une demande aléatoire et d'avoir des éléments de comparaison des résultats obtenus avec ceux d'une demande constante.

Dans le troisième chapitre, pour le système de production considéré dans le deuxième chapitre, nous avons modifié la politique de pilotage de type point de séparation afin d'intégrer dans la production les piliers environnemental et social du développement durable. Dans un premier temps, nous avons redéfini la politique de pilotage afin d'intégrer les émissions d'agents « polluants » de la machine tels que les émissions de gaz à effet de serre. Nous avons ainsi utilisé deux points de séparation : pour le premier nous assumons qu'il est égal au point de séparation déterminé dans le deuxième chapitre et le deuxième point de séparation sert à limiter les émissions de polluants en plus de réduire les coûts purement économiques. Ainsi, nous avons défini une fonction de coût qui intègre en plus des coûts économiques considérés dans le chapitre deux, un coût lié aux émissions environnementales lorsqu'un seuil d'émissions est dépassé. Nous avons fait une étude des trajectoires basée sur la méthode IPA, afin de trouver le lien existant entre la production des pièces et l'émission de polluants. Ceci nous a permis d'estimer un gradient de la fonction de coût par rapport au point de séparation environnemental. Nous avons trouvé que ce point de séparation est inférieur au point de séparation avec des critères purement économiques. Cependant, le coût total moyen est plus élevé qu'avec des critères purement économiques. Ceci s'explique en partie parce que ces points de séparation ont été déterminés indépendamment et d'autre part, cette augmentation du coût reflète l'effet d'internaliser les impacts environnementaux dans les coûts d'opération de l'entreprise. Ensuite, nous avons élargi notre étude afin d'intégrer en plus des critères économiques et environnementaux, des critères sociaux. De cette manière, la politique de pilotage est définie par rapport à trois points de séparation : le premier correspond aux critères purement économiques, le deuxième correspond aux émissions environnementales et le troisième correspond à des émissions de particules fines liées à la production de la machine lesquelles peuvent engendrer des problèmes de santé pour les employés. Pour ces émissions nocives, nous avons intégré la notion de temps d'exposition. En effet, pour ce type de critère, ce n'est pas seulement un niveau d'émissions qui impacte la santé humaine, mais également le temps d'exposition en continu à un certain niveau d'émissions. Nous avons ainsi défini des coûts pour représenter différents impacts sur la santé des personnes exposées. La méthode IPA a été utilisée afin de définir un gradient en fonction du point de séparation qui limite les émissions nocives pour

la santé. Ceci nous a permis de dimensionner ce troisième point de séparation et de déterminer le coût total moyen en intégrant les coûts associés aux trois piliers du développement durable. Cette approche reste générique et elle peut être adaptée afin de considérer par exemple, l'effet des vibrations de la machine sur la santé ou le bruit comme des critères sociaux ou la consommation d'énergie et la quantité de déchets comme des critères environnementaux. Cependant, afin d'adapter cette approche à d'autres problèmes, il faut tenir compte des relations existantes et des unités de mesure de ces critères par rapport à la production (Hz pour les vibrations, dB pour le bruit, kWh pour l'énergie, etc.) comme cela peut être fait lors d'un bilan carbone.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, nous avons élargi notre étude et nous avons considéré un système de production à deux étages. Nous avons donc intégré les trois piliers du développement durable dans notre modèle sous forme de coûts. Pour la modélisation du système, nous avons gardé le modèle à flux continu, dans lequel les délais de transfert et de transport ont été explicitement intégrés. Nous avons considéré des aléas sous forme de périodes d'indisponibilité dans la production ou de défaillances des machines. Une politique Echelon Base Stock a été choisie pour le pilotage des flux. Cette politique a été choisie parce qu'elle permet de piloter les flux globaux du système par l'information de la demande. De plus, à la différence de la politique Kanban ou de la politique CONWIP, dans lesquelles les cartes sont associées à une notion discrète et non continue, la politique Echelon Base Stock a été préférée pour l'implémentation de la méthode IPA. Nous nous sommes intéressées initialement au dimensionnement des deux stocks (matières premières et produits finis). Pour ce faire, une étude des trajectoires a été menée, afin de déterminer le lien entre l'échelon stock de chaque étage et l'autorisation de réapprovisionnement ou de production. Nous avons estimé le gradient de la fonction de coût par rapport aux niveaux d'Echelon Base Stock de chaque étage et nous avons démontré que celui-ci n'est pas biaisé. Ce gradient a été utilisé dans un algorithme de simulation, ce qui nous a permis de trouver les niveaux d'Echelon Base Stock de chaque étage qui minimisent le coût total moyen. Après avoir dimensionné ces deux stocks, nous nous sommes intéressées à l'approvisionnement des matières premières/produits semi-finis. Nous avons considéré que l'approvisionnement peut se faire par deux sources d'approvisionnement : par une usine qui appartient à l'entreprise et par un sous-traitant. Nous avons considéré que l'appel à la sous-traitance est fait afin de minimiser les coûts globaux. Ainsi la répartition des quantités à produire par l'usine de produits semi-finis et par le sous-traitant est basée sur des coûts économiques, environnementaux et sociaux associés à chacune des sources d'approvisionnement. Nous avons utilisé la méthode IPA afin de déterminer un gradient en fonction de la proportion de pièces à produire par l'usine de produits semi-finis. Ce gradient nous a permis de trouver la proportion à allouer à l'usine et au sous-traitant afin de minimiser les coûts globaux. Cette étude a été étendue afin de considérer comme objectif la minimisation de gaz à effet de serre émis par chaque élément du système. Dans la problématique de la répartition des quantités entre l'usine et le sous-traitant de produits semi-finis, l'étude se réduit aux émissions de l'usine et du sous-traitant de produits semi-finis et aux émissions des moyens de transport entre l'usine et le stock de produits semi-finis et entre le sous-traitant et le stock de produits semi-finis. La méthode IPA a été utilisée pour trouver un gradient qui permet de minimiser les émissions. Il a été défini en fonction de la proportion à allouer à l'usine de produits semi-finis. Nous avons trouvé que les proportions obtenues sont différentes de celles obtenues lorsque les coûts globaux sont minimisés et le coût total moyen associé à cette proportion est supérieur au coût total moyen lorsque la minimisation des coûts globaux est considérée comme un objectif. Ce résultat reflète également l'effet d'internaliser des coûts environnementaux dans les coûts d'opération de l'entreprise.

Perspectives

Les perspectives de ce travail pourraient suivre plusieurs directions :

- Une autre technique d'optimisation basée sur l'étude des trajectoires pourrait être implémentée, notamment l'Analyse des Perturbations Finies, laquelle nous permettrait de relâcher l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de changement dans l'ordre des événements mais aussi de considérer l'effet qu'une perturbation pourrait entraîner dans les décisions de dimensionnement des stocks ou du réapprovisionnement. De plus, elle permettrait de considérer les paramètres des politiques de pilotage comme étant discrets, notamment pour une politique Kanban ou CONWIP, pour lesquelles un nombre de cartes est associé au nombre de pièces.
- La définition de stratégies intégrées de production et de maintenance, dans lesquelles les actions de maintenance préventive sont faites selon des critères de durabilité demeure un problème ouvert dans le contexte actuel. Cette approche peut être utilisée pour déterminer une stratégie intégrée de production et de maintenance dans des systèmes de plus d'une machine et ainsi définir les périodes de maintenance préventive et les quantités à stocker qui minimisent les coûts globaux. Ce problème est assimilé au problème du couplage de la maintenance et de la qualité des produits.
- Compte tenu de la limite de la méthode IPA pour traiter plusieurs objectifs en même temps, une approche de résolution multi-objectif peut être envisageable pour le pilotage de la production dans un cadre de développement durable. Nous pourrions ainsi considérer en même temps la minimisation des coûts, de gaz à effet de serre et d'émissions nocives, que ce soit pour un système de production simple (une machine, un stock et un client) ou pour un système de production plus complexe (composé de plusieurs étages et plusieurs produits).
- Une application en utilisant des données issues de cas industriels pourrait être implémentée afin de tester l'efficacité des approches proposées, notamment dans la gestion de déchets ménagers et la valorisation de ceux-ci.

Références

- [AGU06] Aguezoul, A., and Ladet, P. (2006). Sélection et évaluation des fournisseurs : Critères et méthodes”, *Revue Française de Gestion Industrielle*, 2, pp. 5-27.
- [AGU14] Aguezoul, A. (2014). Third-party logistics selection problem: A literature review on criteria and methods. *Omega*, 49, pp. 69-78.
- [AHI13] Ahi, P., and Searcy, C. (2013). A comparative literature analysis of definitions for green and sustainable supply chain management. *Journal of Cleaner Production*, 52, pp. 329-341.
- [AHI15] Ahi, P., and Searcy, C. (2015). An analysis of metrics used to measure performance in green and sustainable supply chains. *Journal of Cleaner Production*, 86, pp. 360-377.
- [AHM11] Ahmadi-Javid, A., and Malhamé, R. (2011). Optimality of a hedging-point control policy for a failure-prone manufacturing system under a probabilistic cost criterion. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on* (pp. 5887-5892).
- [AKE86] Akella, R., and Kumar, P. R. (1986). Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 31(2), 116-126.
- [ALL08] Allaoui, H., Artiba, A., Goncalves, G., & Elmaghraby, S. E. (2008). Scheduling n jobs and preventive maintenance in a single machine subject to breakdowns to minimize the expected total earliness and tardiness costs. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), pp.15843-15848.
- [ARD08] Arda, Y. (2008). Politiques d'approvisionnement dans les systèmes à plusieurs fournisseurs et optimisation des décisions dans les chaînes logistiques décentralisées (*Thèse de doctorat, INSA de Toulouse*).
- [ARI14] Arikan, E., and Jammerneegg, W., (2014). "The single period inventory model under dual sourcing and product carbon footprint constraint", *International Journal of Production Economics*, 157, pp. 15-23.
- [ASS15a] Assid, M., Gharbi, A., and Dhouib, K. (2015). Joint production and subcontracting planning of unreliable multi-facility multi-product production systems. *Omega*, 50, pp. 54-69.
- [ASS15b] Assid, M., Gharbi, A., and Hajji, A. (2015). Joint production, setup and preventive maintenance policies of unreliable two-product manufacturing systems. *International Journal of Production Research*, 53(15), pp. 4668-4683.
- [BAB05] Babai, M. Z. (2005). Politiques de pilotage de flux dans les chaînes logistiques: impact de l'utilisation des prévisions sur la gestion de stocks (*Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris*).
- [BAR60] Barlow, R., and Hunter, L. (1960). Optimum preventive maintenance policies. *Operations research*, 8(1), pp. 90-100.
- [BEN14] Benmansour, R., Allaoui, H., Artiba, A., and Hanafi, S. (2014). Minimizing the weighted sum of maximum earliness and maximum tardiness costs on a single machine with periodic preventive maintenance. *Computers & Operations Research*, 47, pp. 106-113.
- [BEN15a] Ben-Salem, A., Gharbi, A., and Hajji, A. (2015). An Environmental Hedging Point Policy to control production rate and emissions in unreliable manufacturing systems. *International Journal of Production Research*, 53(2), pp. 435-450.
- [BEN15b] Ben-Salem, A., Gharbi, A., and Hajji, A. (2015). Production and uncertain green subcontracting control for an unreliable manufacturing system facing emissions. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pp. 1-13.
- [BER01] Bertrand, J. W. M., and Sridharan, V. (2001). A study of simple rules for subcontracting in make-to-order manufacturing. *European Journal of Operational Research*, 128(3), pp. 509-531.
- [BER10] Berthaut, F., Gharbi, A., Kenné, J. P., and Boulet, J. F. (2010). Improved joint preventive maintenance and hedging point policy. *International Journal of Production Economics*, 127(1),

- 60-72.
- [BER11a] Berthaut, F., Gharbi, A., and Dhouib, K. (2011). Joint modified block replacement and production/inventory control policy for a failure-prone manufacturing cell. *Omega*, 39(6), pp. 642-654.
- [BER11b] Berling, P., and Martínez-de-Albéniz, V. (2011). A Characterization of optimal Base-Stock levels for a Continuous Stage Serial Supply Chain. *IESE Business School. University of Navarra*.
- [BIE88] Bielecki, T. and Kumar, P. R., (1988). "Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems," *Operations Research*, vol. 36, n°. 4, pp. 532-541.
- [BON11] Bonney, M., and Jaber, M. Y. (2011). Environmentally responsible inventory models: Non-classical models for a non-classical era. *International Journal of Production Economics*, 133(1), pp. 43-53.
- [BOO05] Boonlertvanich, K. (2005). "Extended-CONWIP-Kanban system: control and performance analysis." (Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology).
- [BOU98] Boukas, E. K. (1998). "Hedging Point Policy Improvement." *Journal of Optimization Theory and Applications*, 97 (1), pp. 47-70.
- [BOU10] Bouyoud, F. (2010). Le management stratégique de la responsabilité sociale des entreprises (Thèse de doctorat, Conservatoire national des arts et métiers-CNAM).
- [BOU12] Bouchery, Y., Ghaffari, A., Jemai, Z., and Dallery, Y. (2012). Including sustainability criteria into inventory models. *European Journal of Operational Research*, 222(2), pp. 229-240.
- [BOU13] Boukherroub, Tasseda (2013). Intégration des objectifs du développement durable dans la gestion stratégique et tactique de la chaîne logistique. (Thèse de doctorat, INSA de Lyon).
- [BRA96] Brandimarte, P., Sharifnia, A., and Von Turkovich, B. F. (1996). Continuous flow models of manufacturing systems: a review. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 45(1), pp. 441-444.
- [BRO08] Brown, D. (2008). It is good to be green: environmentally friendly credentials are influencing business outsourcing decisions. *Strategic Outsourcing: An International Journal*, 1(1), pp. 87-95.
- [BRO09] Brouhle, K., Griffiths, C., and Wolverton, A. (2009). Evaluating the role of EPA policy levers: An examination of a voluntary program and regulatory threat in the metal-finishing industry. *Journal of Environmental Economics and Management*, 57(2), pp. 166-181.
- [BRU87] Brundtland, Gru, et al. (1987). "Our Common Future", (www.un-documents.net/wced-ocf.htm).
- [CAO07] Cao, X. R. (2007). Stochastic learning and optimization—A sensitivity-based approach. New York: Springer.
- [CAR08] Carter, C. R., and Rogers, D. S. (2008). A framework of sustainable supply chain management: moving toward new theory. *International journal of physical distribution & logistics management*, 38(5), pp. 360-387.
- [CAS02] Cassandras, C. G., Wardi, Y., Melamed, B., Sun, G., and Panayiotou, C. G. (2002). Perturbation analysis for online control and optimization of stochastic fluid models. *Automatic Control, IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8), pp. 1234-1248.
- [CHA11] Chardine-Baumann, E. (2011). Modèles d'évaluation des performances économique, environnementale et sociale dans les chaînes logistiques (Thèse de doctorat, INSA de Lyon).
- [CHA14] Chardine-Baumann, E., and Botta-Genoulaz, V. (2014). A framework for sustainable performance assessment of supply chain management practices. *Computers & Industrial Engineering*, 76, pp. 138-147.
- [CHE01] Cheikhrouhou, N., Paris, J. L., and Pierreval, H. (2002). Une méthode de dimensionnement de lignes de transfert via l'analyse de perturbation finie. *Journal européen des systèmes automatisés*, 36(2), pp. 199-222.

- [CHE03] Cheikhrouhou, N., and Glardon, R. (2003). Optimisation de lignes de production via simulation: une approche basée sur l'analyse de perturbation. In *quatrième conférence de modélisation et simulation MOSIM* (vol. 3).
- [CHE04] Chelbi, A., and Ait-Kadi, D. (2004). Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance. *European Journal of Operational Research*, 156(3), pp. 712-718.
- [CHE09] Chehade, H., Yalaoui, F., Amodeo, L., and De Guglielmo, P. (2009). Optimisation multi-objectif pour le problème de dimensionnement de buffers. *Journal of Decision Systems*, 18(2), pp. 257-287.
- [CHE10] Chen, C. and Monahan, G.-E., (2010). "Environmental safety stock: The impacts of regulatory and voluntary control policies on production planning, inventory control, and environmental performance", *European Journal of Operational Research*, 207, pp. 1280–1292.
- [CHI15] Chin, T. A., Tat, H. H., and Sulaiman, Z. (2015). Green Supply Chain Management, Environmental Collaboration and Sustainability Performance. *Procedia CIRP*, 26, pp. 695-699.
- [COL06] Colledani, M., and Tolio, T. (2006). Impact of quality control on production system performance. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 55(1), pp. 453-456.
- [COL12] Colledani, M., and Tolio, T. (2012). Integrated quality, production logistics and maintenance analysis of multi-stage asynchronous manufacturing systems with degrading machines. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 61(1), pp. 455-458.
- [COR96] Cormier, G. and Gunn Eldon A. (1996). On coordinating warehouse sizing, leasing and inventory policy. *IIE transactions*, vol.28, n°2, pp. 149-154.
- [CUI14] Cui, Wei-Wei, Zhiqiang Lu, and Ershun Pan (2014). "Integrated production scheduling and maintenance policy for robustness in a single machine." *Computers & Operations Research* 47, pp. 81-91.
- [DAH07] Dahane, M. (2007). Couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production sous contrainte de sous-traitance (*Thèse de Doctorat, Université Paul Verlaine de Metz*).
- [DAI95] Dai, L., and Ho, Y. C. (1995). Structural infinitesimal perturbation analysis (SIPA) for derivative estimation of discrete-event dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(7), pp. 1154-1166.
- [DAL92] Dallery, Y., and Gershwin, S. B. (1992). Manufacturing flow line systems: a review of models and analytical results. *Queueing systems*, 12 (1-2), pp. 3-94.
- [DAL99] Dallery Y. and Véricourt F. D. (1999). Pilotage de Systèmes de Production à Flux Tiré. *Logistique & Management*, 7 (1), pp. 57-66.
- [DO15] Do, P., Voisin, A., Levrat, E., and Iung, B. (2015). A proactive condition-based maintenance strategy with both perfect and imperfect maintenance actions. *Reliability Engineering & System Safety*, 133, pp. 22-32.
- [DOL10] Dolgui, A., and Proth, J. M. (2010). *Supply chain engineering: useful methods and techniques*. Springer Science & Business Media.
- [DOL13] Dolgui, A., and Proth, J. M. (2013). Outsourcing: definitions and analysis. *International Journal of Production Research*, 51(23-24), pp. 6769-6777.
- [DUB02] Dub, M., Pipan, G., and Hanzálek, Z. (2002). Stock optimization of a kanban-based assembly line. In *Proc. of the 12th int. conf. on flexible automation and intelligent manufacturing, Dresden, Germany*, pp. 1-10.
- [FER07] Fernandez, R., Hennequin, S., and Rezg, N. (2007, September). Decision Making Based on Fuzzy Logic for Product Subcontracting Taking into Account Maintenance Actions. In *2007 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*, pp. 771-776.
- [FON99] Fontanili, F. (1999). Intégration d'outils de simulation et d'optimisation pour le pilotage d'une ligne d'assemblage multiproduit à transfert asynchrone (*Thèse de Doctorat, Université*

- Paris 13).
- [FU94a] Fu, M. C. (1994). Sample path derivatives for (s, S) inventory systems. *Operations Research*, 42(2), pp. 351-364.
- [FU94b] Fu, M. C. (1994). Optimization via simulation: A review. *Annals of Operations Research*, 53(1), pp. 199-247.
- [GER03] Gerbens-Leenes, P. W., Moll, H. C., and Uiterkamp, A. S. (2003). Design and development of a measuring method for environmental sustainability in food production systems. *Ecological Economics*, 46(2), pp. 231-248.
- [GHA07] Gharbi, A., Kenné, J. P., and Beit, M. (2007). Optimal safety stocks and preventive maintenance periods in unreliable manufacturing systems. *International Journal of Production Economics*, 107(2), pp. 422-434.
- [GLA95a] Glasserman, P. (1995) "Hedging-point production control with multiple failure modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, n° 4, pp. 707-712.
- [GLA95b] Glasserman, P., and Tayur, S. (1995). Sensitivity analysis for base-stock levels in multi-echelon production-inventory systems. *Management Science*, 41(2), pp. 263-281.
- [GOH01] Goh, M., Jihong, O., and Chung-Piaw, T. (2001). Warehouse sizing to minimize inventory and storage costs. *Naval Research Logistics*, vol 48, n° 4, pp. 299-312.
- [GRI13] Sustainability Reporting Guidelines (G4) (2013). Amsterdam, The Netherlands: Global Reporting Initiative. (www.globalreporting.org)
- [HAD11] Hadidi, L. A., Al-Turki, U. M., and Rahim, A. (2011). Integrated models in production planning and scheduling, maintenance and quality: a review. *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, 10(1), pp. 21-50.
- [HAR11] Hariga, M. A. (2011). Inventory models for multi-warehouse systems under fixed and flexible space leasing contracts. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 61 n°3, pp. 744-751.
- [HAS12] Hassini, E., Surti, C., and Searcy, C. (2012). A literature review and a case study of sustainable supply chains with a focus on metrics. *International Journal of Production Economics*, 140(1), pp. 69-82.
- [HEN15] Hennequin, S., and **Ramirez Restrepo, L. M.** (2015, October). A fuzzy hedging point policy for sustainable manufacturing system. In *International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IESM)*, pp. 1041-1047.
- [HEN16] Hennequin, S., and **Ramirez Restrepo, L. M.** (2016, June). Fuzzy model of a joint maintenance and production control under sustainability constraints. In *8th IFAC Conference on Manufacturing, Modelling, Management and Control, MIM 2016*.
- [HO83] Ho, Y. C., and Cao, X. (1983). Perturbation analysis and optimization of queueing networks. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 40(4), pp. 559-582.
- [HO88] Ho, Y. C. and Li, S. (1988). Extensions of infinitesimal perturbation analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(5), pp. 427-438.
- [HO91] Ho, Y. C. L., and Cao, X. R. (1991). Perturbation analysis of discrete event dynamic systems (vol. 145). *Springer Science & Business Media*.
- [HON05] Hon, K. K. B. (2005). Performance and evaluation of manufacturing systems. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 54(2), pp. 139-154.
- [HU90] Hu, J. Q., and Strickland, S. G. (1990). Strong consistency of sample path derivative estimates. *Applied Mathematics Letters*, 3(4), pp. 55-58.
- [HUA11] Hua, G., Cheng, T. C. E., and Wang, S. (2011). Managing carbon footprints in inventory management. *International Journal of Production Economics*, 132(2), pp. 178-185.
- [INR15] Institut national de recherche et de sécurité pour la prévention des accidents du travail et des maladies professionnelles (INRS). www.inrs.fr/risques/chaleur/prevenir-risques.html. Site consulté en mars 2016.

- [IPCC13] Stocker, T. F. et al. (2013). IPCC, 2013: climate change 2013: the physical science basis. Contribution of working group I to the fifth assessment report of the intergovernmental panel on climate change. (www.ipcc.ch).
- [ISO99] ISO, 1999. ISO 14031. Environmental performance evaluation, Geneva: ISO. (En espagnol). (<http://emprendeylidera.weebly.com/uploads/8/1/6/9/8169671/ntc-iso14031-sc.pdf>)
- [ISO10] ISO, 2010. ISO 26000. Guidance on social responsibility, Geneva: ISO. (<http://www.convergence-lr.fr/userfiles/files/ISO%2026000%20V2010.pdf>)
- [ISO11] ISO, 2011. ISO 50001. Energy management systems — Requirements with guidance for use, Geneva : ISO.
- [JAB13] Jaber, M. Y., Glock, C. H., and El Saadany, A. M. (2013). Supply chain coordination with emissions reduction incentives. *International Journal of Production Research*, 51(1), pp. 69-82.
- [JAK15] Jakhar, S. K. (2015). Performance evaluation and a flow allocation decision model for a sustainable supply chain of an apparel industry. *Journal of Cleaner Production*, 87, pp. 391-413.
- [KAI10] Kaihara, T., Fujii, N., Tsujibe, A., and Nonaka, Y. (2010). Proactive maintenance scheduling in a re-entrant flow shop using Lagrangian decomposition coordination method. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 59(1), pp. 453-456.
- [KEN00] Kenne, J. P., et Gharbi, A. (2000). Production planning problem in manufacturing systems with general failure and repair time distributions. *Production Planning & Control*, 11(6), pp. 581-588.
- [KHO16] Khoury, B. N. (2016). Optimal Control of Production Rate in a Manufacturing System Prone to Failure with General Distribution for Repair Time. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [KIM83] Kimemia, J., and Gershwin, S. (1983). "An Algorithm for the Computer Control of a Flexible Manufacturing System." *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15, pp. 353-362.
- [KOR98] Koren, Y., Hu, S. J., and Weber, T. W. (1998). Impact of manufacturing system configuration on performance. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 47 (1), pp. 369-372.
- [KRO13] Kröning, S., and Denkena, B. (2013). Dynamic scheduling of maintenance measures in complex production systems. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 6(4), pp. 292-300.
- [LAB05] Labuschagne, C., Brent, A. C., and Van Erck, R. P. (2005). Assessing the sustainability performances of industries. *Journal of cleaner production*, 13(4), pp. 373-385.
- [LAM99] Lamouri, S., and Thomas, A. (1999). Juste à temps et qualité totale : concepts et outils. *Techniques de l'ingénieur. L'Entreprise industrielle*, (AG5190), AG5190-1. (<http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/genie-industriel-th6/modes-de-pilotage-des-flux-logistiques-42121210/juste-a-temps-et-qualite-totale-concepts-et-outils-ag5190/>)
- [LI89] Li, S. (1989). A tutorial on the extended perturbation analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 17(11), pp. 1467-1473.
- [LIN05] Linderman, K., McKone-Sweet, K. E., and Anderson, J. C. (2005). An integrated systems approach to process control and maintenance. *European Journal of Operational Research*, 164(2), pp. 324-340.
- [LIU15a] Liu, C., Dang, F., Li, W., Lian, J., Evans, S., & Yin, Y. (2015). Production planning of multi-stage multi-option seru production systems with sustainable measures. *Journal of Cleaner Production*, 105, pp. 285-299.
- [LIU15b] Liu, X., Wang, W., and Peng, R. (2015). An integrated production, inventory and preventive maintenance model for a multi-product production system. *Reliability Engineering & System Safety*, 137, pp. 76-86.
- [LU15] Lu, Z., Cui, W. and Han, X. (2015). Integrated production and preventive maintenance scheduling for a single machine with failure uncertainty. *Computers & Industrial Engineering*, 80, pp. 236-244.

- [MAN12] Mansini, R., Savelsbergh, M. W., & Tocchella, B. (2012). The supplier selection problem with quantity discounts and truckload shipping. *Omega*, 40(4), pp. 445-455.
- [MAR04] Martinelli, F. et Valigi, P. (2004) "Hedging point policies remain optimal under limited backlog and inventory space," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, n°. 10, pp. 1863-1871.
- [MAR10] Markou, M. M., et Panayiotou, C. G. (2010). On-line control of the threshold policy parameter for multiclass systems. *Automatica*, 46(3), pp. 528-536.
- [MEL07] Melamed, B., Pan, S., and Wardi, Y. (2007). Simulation of IPA gradients in hybrid network systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 54(2), pp. 161-182.
- [MON12] Monchy, F., and Vernier, J. P. (2012). *Maintenance-3e éd.: Méthodes et organisations pour une meilleure productivité*. Dunod, Paris, pp.31-58.
- [MOT15] Mota, B., Gomes, M. I., Carvalho, A., and Barbosa-Povoa, A. P. (2015). Towards supply chain sustainability: economic, environmental and social design and planning. *Journal of Cleaner Production*, 105, pp. 14-27.
- [MOU05] Mourani, I. (2005). Étude des systèmes de production automatisée soumis à des aléas (*Thèse de Doctorat, Université Paul Verlaine de Metz*).
- [MOU06] Mourani, I., Hennequin, S. and Xie, X. (2006). "Optimization of continuous-flow transfer lines with delay using IPA." *Proceedings of 12th IFAC Symposium of Information Control Problems in Manufacturing, (INCOM2006)*, Saint-Etienne, France, pp. 323-328.
- [NF EN 13306x 60-319] AFNOR, N. Terminologie de la maintenance. *NF-EN, 13306, X60-319*. (<http://maint.t.i.b.free.fr/Files/Other/NF%20EN%2013306.pdf>).
- [PAN99] Panayiotou, C. G., and Cassandras, C. G. (1999). Optimization of kanban-based manufacturing systems. *Automatica*, 35(9), pp.1521-1533.
- [PAS11] Pastore-Chaverot, M. (2011). *Les stratégies de RSE des grandes entreprises: les facteurs d'influence. Analyse des discours des entreprises du CAC 40* (*Thèse de Doctorat, Université Paul Verlaine, Metz*).
- [PER95] Perkins, J. R. and Srikant, R. 1995. "Hedging Policies for Failure-Prone Manufacturing Systems: Optimality of JIT and Bounds on Buffer Levels." *Proceedings of the 34th IEEE Transactions on Automatic Control*, New Orleans, USA, pp. 3144 - 3149.
- [PHA03] Pham, H. (2003). *Recent studies in software reliability engineering*. Springer, London, pp.285-302.
- [POR06] Porter, M. E., and Kramer, M. R. (2006). "Estrategia y sociedad". *Harvard business review*, 84(12), pp. 42-56 (en espagnol).
- [RAO98] Rao, A. K., and Rao, M. R. (1998). Solution procedures for sizing of warehouses. *European journal of operational research*, vol 108, n°.1, pp. 16-25.
- [RAM08] Ramudhin, A., Chaabane, A., Kharoune, M., and Paquet, M. (2008, December). Carbon market sensitive green supply chain network design. In *Industrial Engineering and Engineering Management, 2008. IEEM 2008. IEEE International Conference on* (pp. 1093-1097).
- [RAM14a] **Ramirez Restrepo**, L. M., Aguezoul, A., and Hennequin, S. (2014, August). Performance evaluation of preventive maintenance considering transportation delays. In *IFAC 2014 world congress*, vol. 19 (1), pp. 8054-8059.
- [RAM14b] **Ramirez Restrepo**, L. M., Aguezoul, A., and Hennequin, S. (2014, November). Etude d'une maintenance préventive de type bloc dans le cadre d'une politique point de séparation. In *MOSIM 2014, 10ème Conférence Francophone de Modélisation, Optimisation et Simulation*.
- [RAM15] **Ramirez Restrepo**, L. M., Aguezoul, A., Aicha and Hennequin, Sophie. "Dimensionnement d'entrepôts d'une chaîne logistique durable pilotée par la politique Echelon Base Stock ". Présenté dans le cadre des 6èmes Journées Doctorales /Journées Nationales MACS (JD-JN-MACS 2015), 16-19 juin, 2015, Bourges, France.

- [RAM16a] **Ramirez Restrepo**, L. M., Hennequin, Sophie and Aguezoul, Aicha. (2016). Optimization of integrated preventive maintenance based on infinitesimal perturbation analysis. *Computers & Industrial Engineering*, vol.98, pp. 470-482.
- [RAM16b] **Ramirez Restrepo**, L. M., Hennequin, S. and Aguezoul, A. "Decision making based on Infinitesimal Perturbation Analysis for products subcontracting in a sustainability context." Soumis à *International Journal of Production Research* le 18 Juillet 2016.
- [REZ04] Rezg, N., Xie, X., and Mati, Y. (2004). Joint optimization of preventive maintenance and inventory control in a production line using simulation. *International Journal of Production Research*, 42(10), pp. 2029-2046.
- [ROU13] Roux, O., Duvivier, D., Quesnel, G., and Ramat, E. (2013). Optimization of preventive maintenance through a combined maintenance-production simulation model. *International journal of production economics*, 143(1), pp. 3-12.
- [RUB92] Rubinstein, R. Y. (1992). Sensitivity analysis of discrete event systems by the "push out" method. *Annals of Operations Research*, vol. 39, pp. 229-250.
- [SAI08] SAI, 2008. SA8000, New York: Social Accountability International. (www.iqnet-certification.com/userfiles/SA8000%20Related%20Information/SA8000_2008%20Consolidated%20Guidance%202013.pdf).
- [SAJ09] Sajadieh, M. S., and Eshghi, K. (2009). Sole versus dual sourcing under order dependent lead times and prices. *Computers & Operations Research*, 36(12), pp. 3272-3280.
- [SAJ14] Sajadieh, M. S., and Thorstenson, A. (2014). Comparing sourcing strategies in two-echelon supply chains. *Computers & Operations Research*, 45, pp. 108-115.
- [SAL01] Salameh, M. K., and Ghattas, R. E. (2001). Optimal just-in-time buffer inventory for regular preventive maintenance. *International Journal of Production Economics*, 74(1), pp. 157-161.
- [SHI09] Shine, K. P. (2009). The global warming potential—the need for an interdisciplinary retrieval. *Climatic Change*, 96(4), pp. 467-472.
- [SIN09] Singh, R. K., Murty, H. R., Gupta, S. K., and Dikshit, A. K. (2009). An overview of sustainability assessment methodologies. *Ecological indicators*, 9(2), pp. 189-212.
- [SNY11] Snyder, L. V. et Shen, Z. J. M. (2011). *Fundamentals of supply chain theory [en ligne]*. John Wiley & Sons, 120-125. Disponible sur (juillet 2016) : <https://books.google.fr/books?id=U7GTrLyVnPMC&redir_esc=y>
- [SOB91] Sobh, T. M. (1991). Performance Evaluation via Perturbation Analysis. (http://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1379&context=cis_reports)
- [SON11] Songhori, M. J., Tavana, M., Azadeh, A., & Khakbaz, M. H. (2011). A supplier selection and order allocation model with multiple transportation alternatives. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 52(1-4), pp. 365-376.
- [SUR94] Suri, R., and Fu, B. R. (1994). On using continuous flow lines to model discrete production lines. *Discrete Event Dynamic Systems*, 4(2), pp. 129-169.
- [SWA87] Swamidass, P. M. and Newell, W. T. (1987). Manufacturing strategy, environmental uncertainty and performance: a path analytic model. *Management science*, 33(4), pp. 509-524.
- [TAM08] Tamani, K. (2008). Développement d'une méthodologie de pilotage intelligent par régulation de flux adaptée aux systèmes de production (*Thèse de Doctorat, Université de Savoie*).
- [TAN98] Tan, B. (1998). An analytical formula for variance of output from a series-parallel production system with no interstation buffers and time-dependent failures. *Mathematical and computer modelling*, 27(6), pp. 95-112.
- [TAN09] Tan, B., and Gershwin, S. B. (2009). Analysis of a general Markovian two-stage continuous-flow production system with a finite buffer. *International Journal of Production Economics*, 120(2), pp. 327-339.
- [THO14] Thomas, A., and Lamouri, S. (2014). Flux poussés: MRP et DRP. Techniques de

- l'Ingénieur AG, 5, 110. (www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/genie-industriel-th6/modes-de-pilotage-des-flux-logistiques-42121210/flux-pousses-mrp-et-drp-ag5110/).
- [TUR10] Turki, S. (2010). Impact du délai de livraison sur le niveau de stock : une approche basée sur la méthode IPA (*Thèse de Doctorat, Université Paul Verlaine de Metz*).
- [TUR12] Turki, S., Hennequin, S. and Sauer, N. (2012). "Perturbation analysis for continuous and discrete flow models: a study of the delivery time impact on the optimal buffer level." *International Journal of Production Research* 51 (13), pp. 4011–4044.
- [TUR14] Turi, A., Goncalves, G., and Mocan, M. (2014). Challenges and competitiveness indicators for the sustainable development of the supply chain in food industry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 124, pp. 133-141.
- [VAL99] Vallin, P. (1999). *La logistique: modèles et méthodes du pilotage des flux. Economica*, vol.141. pp. 3-5.
- [VAN87] Van Ryzin, G.J. (1987). *Control of Manufacturing Systems With Delays. Thèse de Doctorat MIT EECS LIDS-TH-1676*, Laboratory for Information and Decision Systems.
- [VAN91] Van Ryzin, G.J., Lou, S. X.C. and Gershwin, S.B. (1991). "Scheduling job shops with delay", *Int. J. Prod. Res.*, vol. 29, n°. 7, pp. 1407-1422.
- [WAN03] Wang, C. H., and Sheu, S. H. (2003). Determining the optimal production–maintenance policy with inspection errors: using a Markov chain. *Computers & Operations Research*, 30(1), pp. 1-17.
- [WAR01] Wardi, Y., and Melamed, B. (2001). Variational bounds and sensitivity analysis of traffic processes in continuous flow models. *Discrete Event Dynamic Systems*, 11(3), pp. 249-282.
- [WIN13] Winter, A., Deniaud, I., and Caillaud, E. (2013). Méthodes et modèle d'évaluation d'une chaîne logistique durable. Calcul des émissions CO2 chez Kuehne+ Nagel. (www.researchgate.net/publication/266030235_Methodes_et_modele_d'evaluation_d'une_chaine_logistique_durable_Calcul_des_emissions_CO2_chez_Kuehne_Nagel).
- [XIE89] Xie, X. (1989). Contrôle hiérarchique d'un système de production soumis à perturbations (*Thèse de Doctorat, Nancy I*).
- [XIE13] Xie, X., Hennequin, S. and Mourani, I. 2013. Perturbation analysis and optimization of continuous flow transfer lines with delay. *International Journal of Production Research* 51, pp. 7250-7269.
- [YU02] Yu, H., and Cassandras, C. G. (2002). Perturbation analysis and optimization of a flow controlled manufacturing system. In *Discrete Event Systems, 2002. Proceedings. Sixth International Workshop on IEEE*, pp. 258-263.
- [YU04] Yu, H., and Cassandras, C. G. (2004). Perturbation analysis for production control and optimization of manufacturing systems. *Automatica*, 40(6), pp. 945-956.

Annexe 1 : Politiques de pilotage des flux

Politiques de pilotage à flux poussés :

Dans ces politiques, le lancement de la production est fait dès que les moyens de production sont disponibles sans tenir compte de la capacité des étapes en aval du processus de production. À ce type de politiques appartiennent les méthodes MRP (MRP0, MRP1, MRP2) et la méthode DRP. Les méthodes MRP sont utilisées dans des systèmes de production à plusieurs étages pour la fabrication de produits composés de plusieurs pièces. La Planification des Besoins en Composants (MRP0), planifie les besoins en matières sur la base de commandes fermes ou prévues. Cette méthode évolue vers la Méthode de Régulation de la Production (MRP1), laquelle considère l'adéquation des charges et des capacités de production afin de connaître la faisabilité du planning de production. Ensuite, ces méthodes MRP ont évolué vers le Management des Ressources de la Production (MRP2), lequel intègre la fonction commerciale et financière. Ceci permet de connaître le coût auquel la production sera faite, ainsi que les priorités dans la production. Pour sa part, la Planification des Ressources de Distribution (DRP) permet de maintenir le niveau de stock de tous les sites d'un réseau de distribution à un niveau strictement nécessaire. Dans celui-ci, le calcul des besoins est fait à partir des besoins des étages en aval, ce qui permet de s'approcher des demandes réelles [THO14]. À la différence des méthodes MRP, dans lesquelles les besoins bruts sont calculés pour un seul site, dans le DRP ces besoins concernent plusieurs sites.

Politiques de pilotage à flux tirés :

Les politiques à flux tirés sont celles dans lesquelles la production est déclenchée en réponse à une demande réelle, soit par la demande d'un étage en aval d'un système de production, soit par la demande des clients. Dans ce type de politiques, nous trouvons les politiques issues de la philosophie du Juste à Temps. C'est le cas des politiques de type Kanban : Kanban par étage, Kanban généralisé et Kanban étendu. Nous trouvons également les politiques de type Base Stock ou politiques à Stock Nominal et la politique CONWIP (CONstantWork-In-Process). Dans ces politiques la taille d'un stock de sécurité peut être déterminée pour chaque stock qui compose le système. Ces stocks permettent de satisfaire les demandes en présence d'aléas tels que des retards, des pannes, des demandes exceptionnelles, etc.

Politique Kanban

Cette politique fait son apparition dans les années soixante-dix chez Toyota. Son fonctionnement est basé sur des cartes (ou kanbans) qui sont attachées aux pièces afin d'autoriser son passage à une étape en aval du système (stockage, transport, une autre étape de fabrication, etc.). Dans cette politique, plus le nombre de cartes est élevé, plus les stocks sont importants et plus le système est fiable et inversement [DUB02].

Dans cette politique, avant l'arrivée d'une demande, les stocks qui composent le système contiennent un nombre de pièces égal au nombre de kanbans de l'étage. Lorsqu'une demande arrive au dernier étage, si le stock n'est pas vide, la demande est satisfaite et les cartes qui étaient attachées aux pièces qui ont satisfait la demande sont libérées. Ensuite, elles remontent vers l'amont de l'étage

pour déclencher la production d'une quantité de pièces égale à la quantité de kanbans libérés. Ce mécanisme est propagé vers les autres étages en amont du système.

Nous expliquons le fonctionnement de cette politique à partir de la Figure A.1.1. Le système de production présenté est composé de deux étages. M_i représente les machines et S_i les stocks de matières (pièces d'approvisionnement ou produits finis). Les stocks de cartes sont représentés par k_i . Lorsque le système est dans l'état initial, S_1 contient k_1 pièces d'approvisionnement et S_2 contient k_2 pièces de produits finis et chaque pièce possède une carte attachée. Ainsi, lorsqu'une demande du client C se produit à la fin du deuxième étage, s'il y a une pièce dans le stock S_2 , la demande est délivrée au client [BOO05]. Ensuite, les cartes qui étaient attachées aux pièces délivrées au client sont libérées et transmises en amont de la machine M_2 , afin de produire une quantité de pièces (produits finis) égale à la quantité de cartes libérées pour le deuxième étage. Ce mécanisme est propagé en amont du système. Le mouvement des pièces dans le système est toujours de l'amont vers l'aval. Le mouvement des cartes tant qu'elles sont attachées aux pièces est de l'amont vers l'aval, mais lorsque ces cartes sont détachées, le mouvement des cartes est de l'aval vers l'amont. Le paramètre à déterminer dans cette politique est le nombre de kanbans pour chaque étage, lesquels déterminent le nombre de pièces (en production, en stock et en transit) dans les différents étages. Cette politique permet donc de limiter les pièces dans chaque étage.

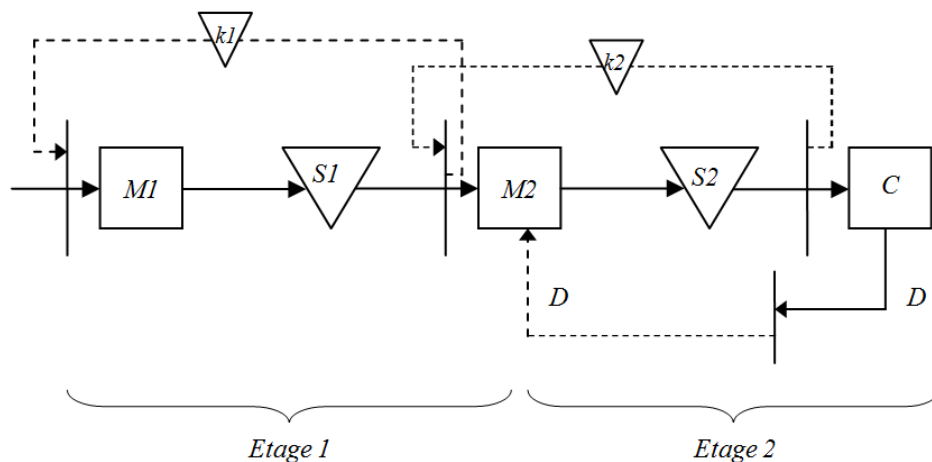


Figure A.1.1. Pilotage par la politique Kanban

Politique CONWIP (CONstant Work In Process)

Cette politique contrôle la quantité de pièces dans le système avec le même principe que celui de la politique Kanban par étage. La différence est que dans cette politique, un seul ensemble de cartes CONWIP, noté ici par k (Figure A.1.2), est nécessaire pour limiter la quantité de pièces dans tout le système. Dans cette politique, l'étage peut être vu comme toute la chaîne de production [DAL99]. A l'état initial, le stock S_2 contient une quantité de pièces finies égale à k . Lorsqu'une demande arrive dans le système, si une pièce est disponible dans le stock S_2 , cette pièce est livrée au client et ensuite la carte qui était attachée à cette pièce revient en amont de $M1$ pour lancer une autre pièce en production. Cette pièce va ensuite traverser toutes les étapes de fabrication avec la même carte jusqu'à ce qu'elle soit livrée au client.

Le paramètre à déterminer avec cette politique est le nombre de cartes k . Lorsque le nombre d'étages dans le système est supérieur à un, cette politique peut être vue comme une politique

hybride, dans laquelle le dernier étage correspond à un sous-système à flux tirés et les étages en amont de celui-ci fonctionnent comme une politique de type flux poussés. Cela s'explique parce que l'autorisation de production entre les différents étages n'est pas limitée par un nombre de cartes [MOU05], [BOO05].

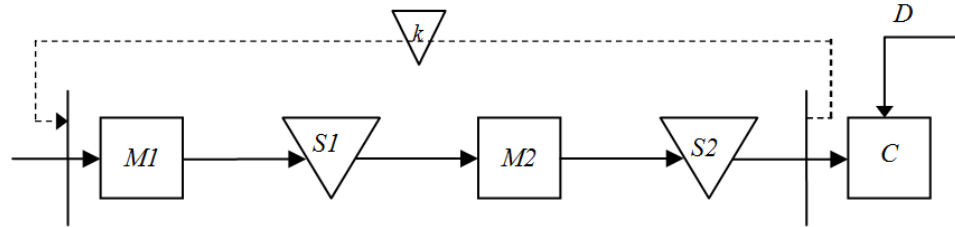


Figure A.1.2. Pilotage par la politique CONWIP

Politique Kanban Généralisé

Cette politique est une combinaison de la politique Kanban et de la politique Base Stock. A l'état initial, les kanbans $k1$ du premier étage et le kanban $k2$ du deuxième étage (Figure A.1.3) sont disponibles à l'entrée de chaque étage. Dans les stocks $S1$ et $S2$, il y a un nombre de pièces égal à son niveau respectif de Stock Nominal (Base Stock) $Sn1$ pour le premier étage et $Sn2$ pour le deuxième étage.

Dans un système piloté par cette politique, le fonctionnement est comme suit : lorsqu'une demande arrive, elle est divisée en deux demandes. La première ira demander la libération d'une pièce à la sortie du stock du dernier étage $S2$ et la deuxième va remonter en amont du dernier étage et va autoriser le lancement de la production d'une pièce dans le dernier étage (voir [BOO05]).

- Lorsque la première demande arrive et si une pièce est disponible dans le stock $S2$ (ce qui est le cas à l'état initial), la demande est satisfaite. Sinon, la demande est retardée et elle doit attendre qu'une pièce arrive à $S2$.

- Lorsque la deuxième demande arrive en amont du deuxième étage et si un kanban du deuxième étage est disponible (ce qui est le cas à l'état initial), l'information sur la demande est transmise immédiatement en amont du premier étage et un kanban $k2$ va bouger en autorisant la production du deuxième étage.

Si une nouvelle pièce est disponible dans le stock $S1$, et si un kanban $k2$ est disponible, elle est immédiatement attachée à ce kanban et la paire pièce/kanban est libérée au processus de fabrication du deuxième étage. Dans le cas contraire, le kanban $k2$ doit attendre qu'une pièce arrive à $S1$. Si un kanban $k2$ n'est pas disponible, la demande doit attendre un kanban du deuxième étage $k2$ et l'information sur la demande sera bloquée pour remonter en amont.

Dans cette politique, pour qu'une demande soit transférée en amont d'un étage donné, deux conditions sont nécessaires : Il doit y avoir une demande en attente ainsi qu'un kanban disponible dans l'étage en aval.

A la différence de la politique Kanban, dans cette politique, les kanbans sont détachés des pièces une fois que les pièces finissent le processus de fabrication dans un étage. Cette politique dépend de deux paramètres par étage : la quantité de kanbans dans chaque étage ainsi que de son niveau de stock nominal (Base Stock).

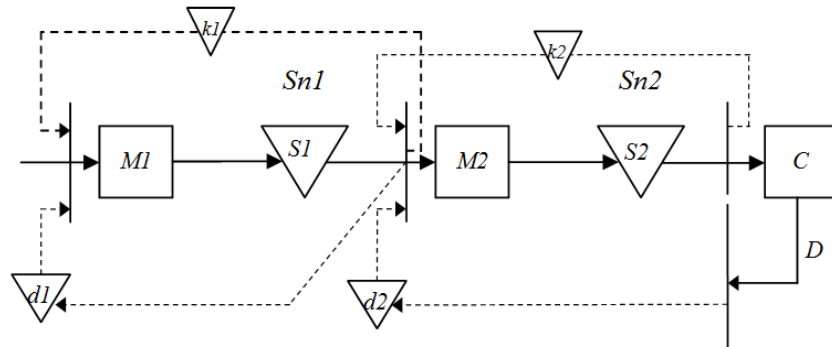


Figure A.1.3. Pilotage par la politique Kanban Généralisé

Politique Kanban Etendu

Dans cette politique, les politiques Kanban et Stock Nominal sont également combinées.

À l'état initial, les stocks de chaque étage contiennent un nombre de pièces égal au Base Stock associé à l'étage avec un kanban attaché à chaque pièce, avec $k_i > S_{ni}$ (Figure A.1.4). Le reste des cartes sont stockés dans les stocks pour cartes dans leurs étages respectifs.

Les paramètres de cette politique pour chaque étage sont donc les kanbans k_i et les stocks nominaux S_{ni} .

Lorsque la première demande arrive au système, si une pièce est disponible dans le dernier stock S2, elle est livrée au client après avoir détaché le kanban k2. Ce kanban est ensuite transmis en amont de l'étage 2 dans le stock de kanbans k2. S'il n'y a pas de pièces disponibles dans S2, la demande est retardée en attendant que des produits finis arrivent à S2 (voir [BOO05] et [MOU05]).

Lorsqu'une demande se présente, elle est transmise à tous les étages. Mais pour qu'une pièce soit lancée en fabrication dans l'étage en aval, une carte k2 doit être disponible et une demande doit être présente. Ensuite, la carte k1 est détachée de la pièce et transmise en amont et elle est remplacée par une carte k2.

Le rôle des kanbans dans cette politique est d'autoriser le transfert de pièces en aval et non d'autoriser le transfert de demandes en amont.

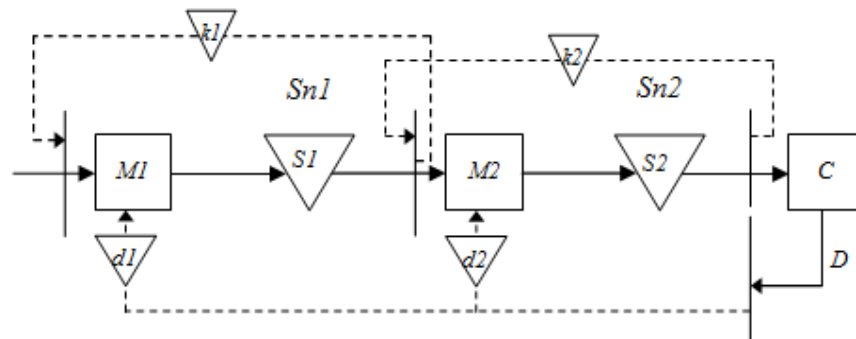


Figure A.1.4. Pilotage par la politique Kanban Etendu

Politique Base Stock (Stock Nominal)

Cette politique permet de piloter les flux globaux de la chaîne de production à partir de l'information sur la demande. Dans cette politique, un stock nominal est associé à chaque étage. L'objectif est de maintenir la position du stock de chaque étage égale au niveau de son stock nominal [SNY11].

Deux définitions de la position peuvent être données, selon la politique de type installation (locale) ou échelon. La position du stock dans un système de type installation est définie comme le nombre de pièces du stock de l'étage en question plus les commandes attendues. Dans les systèmes de type échelon, la position du stock est définie comme étant la somme des ordres de fabrication de l'étage en question et du nombre de pièces en transit dans toutes les étapes en aval de la machine M_i , moins la demande de produits finis en attente. Dans ce type de système, la position du stock est donc diminuée par les demandes finales [ARD08].

Pour le système présenté dans la Figure A.1.5., $d1$ représente l'autorisation de production de $M1$ et $d2$ l'autorisation de production de $M2$. Dans l'état initial, chacun des stocks $S1$ et $S2$ contient un nombre de pièces égal à son stock nominal $Sn1$ et $Sn2$ respectivement. Lorsqu'une demande arrive au dernier étage du système, l'information sur cette demande est transmise à tous les étages simultanément. Pour qu'une pièce soit produite par $M1$ ou par $M2$, une autorisation de production doit être présente à $d1$ ou à $d2$, respectivement, c'est-à-dire lorsque le niveau de base stock devient inférieur à Sn_i , avec $i=1$ ou 2 . A l'état initial, chacun des stocks possède une quantité de pièces égale au niveau de stock nominal associé à leur étage respectif. Dans une politique Echelon Base Stock, le niveau de Stock Nominal (Base Stock) correspond à la différence entre, la quantité de produits finis dans chaque étage et en aval, moins les demandes finales en attente [MOU05], [BOO05].

Le paramètre à déterminer dans cette politique est le niveau de Base Stock de chaque étage.

Les capacités de stockage des stocks sont bornées par les niveaux de Base Stock. Cependant, les encours dans le système ne sont pas limités. Le mécanisme utilisé dans cette politique répond rapidement au client puisque lorsqu'une demande se présente, l'autorisation de production est lancée à tous les étages [DAL99].

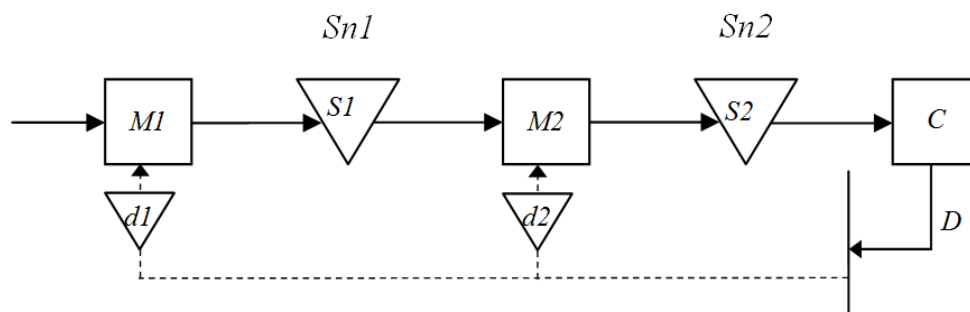


Figure A.1.5. Pilotage de la politique Base Stock

Politiques de pilotage hybrides : Dans cette section, nous nous focalisons sur les politiques dans lesquelles les principes du pilotage à flux poussés et du pilotage à flux tirés sont combinés pour la définition d'une politique.

Des politiques de pilotage à flux tirés peuvent être vues comme des politiques hybrides lorsque le système de production est composé de plus d'un étage (voir politique CONWIP).

Une autre politique de pilotage des flux qui peut être classée comme étant une politique hybride est la politique de type "point de séparation" (ou hedging point), proposée pour la première fois dans Kimenia et Gershwin [KIM83] et qui a été largement étudiée depuis. Elle a été utilisée pour le pilotage de systèmes de production lorsqu'ils sont soumis à des aléas tels que les pannes des machines. Cette politique est expliquée dans ce qui suit.

Politique point de séparation

Le principe de cette politique est de construire un niveau de stock afin de pouvoir satisfaire la demande pendant des périodes d'indisponibilité des machines, telles que les périodes dans lesquelles elles sont en panne et les temps de réparation. Cette politique consiste à produire à un taux maximal de la machine lorsque l'état des stocks est inférieur à un niveau de seuil appelé point de séparation. Si l'état des stocks est égal à ce niveau de seuil, la machine produit à une cadence de production égale à la demande, et si l'état des stocks est supérieur au niveau du seuil ou si la machine n'est pas en fonctionnement (en panne ou en réparation), la machine ne produit pas. Dans cette politique l'état des stocks est ramené à un état stable ([XIE89]).

Du point de vue de la construction du stock, cette politique anticipe la demande, ce qui correspond au principe de la production à flux poussés. De la même manière, lorsque le système est dans un état stable et ce point de séparation est atteint, le taux de la production est égal au taux de la demande, ce qui correspond au principe d'une politique à flux tirés.

L'accumulation de pièces dans le stock est limitée et la quantité stockée est suffisante pour équilibrer les coûts de stockage et les demandes retardées/perdus. La politique point de séparation dépend d'un seul paramètre qui est le point de séparation.

Cette politique a été proposée initialement [KIM83] pour un atelier flexible composé de plusieurs machines soumises à des pannes qui produisent plusieurs types de pièces et avec une demande qui arrive à un taux constant. Elle a été démontrée comme étant optimale par Akella et Kumar [AKE86] pour un système composé d'une machine produisant un seul type de pièces. Les valeurs analytiques optimales du coût total actualisé ainsi que du point de séparation ont été trouvées. Pour ce même système de production, pour le cas du coût total moyen, Bielecki et Kumar [BIE88] ont démontré que pour un système soumis à des aléas tels que les temps de bon fonctionnement (TBF) ou les temps de réparation (TTR), une politique de zéro stock (point de séparation égal à zéro) peut être optimale. Pour ce faire, les auteurs ont trouvé une condition nécessaire et suffisante basée sur les coûts de stockage et de pénuries et sur une probabilité de ne pas avoir des coûts de pénuries. Ainsi, les auteurs cherchent quand cette probabilité est suffisamment grande pour différentes valeurs du point de séparation, pour qu'il soit avantageux d'avoir un stock égal à zéro.

Dans Glasserman [GLA95a], un autre résultat du point de séparation a été obtenu pour le coût total actualisé présenté dans Akella et Kumar [AKE86] et pour le coût total moyen proposé dans [BIE88]. Dans ce travail, les intervalles de temps dans lesquels la machine ne produit pas sont distribués selon une loi exponentielle. Cependant, l'optimalité de ses résultats n'a pas été démontrée analytiquement. Dans Perkins et Srikant [PER95], pour un système de production à une seule machine qui produit plusieurs pièces et qui est sujette à des pannes, des conditions d'optimalité sont établies pour des politiques dans lesquelles le point de séparation est égal à zéro. Les bornes

supérieures et inférieures du point de séparation optimal ont été trouvées. Boukas [BOU98] a étudié un système de production composé d'une machine qui produit un seul type de produits. Une politique qui contrôle la vitesse de production ainsi que la vitesse de réparation en maintenance corrective a été proposée. Dans ce travail, l'auteur a montré que ce problème de pilotage de la production est plus performant que celui donné par Akella et Kumar [AKE86] et il garantit une augmentation dans la disponibilité du système ainsi que dans la productivité grâce au contrôle de la vitesse de réparation. Kenné et Gharbi [KEN00] ont étendu les résultats obtenus par [AKE86] en utilisant des temps de fonctionnement et de réparation non exponentiels ainsi qu'une demande aléatoire. Leurs résultats montrent que la structure de la politique optimale peut être approchée par la politique point de séparation sans des variations significatives dans le coût. Dans Martinelli et Valigi [MAR04], cette même politique a été étudiée pour le coût total moyen. Les auteurs ont utilisé des bornes pour le coût de stockage et le coût des demandes retardées. Il a été prouvé que l'utilisation de ces bornes n'affecte pas l'optimalité de cette politique. Pour le problème étudié dans [BIE88], Ahmadi-Javid et Malhamé [AHM11] ont prouvé l'optimalité de la politique point de séparation avec comme objectif la minimisation de la probabilité que le coût total moyen dépasse une limite que le producteur est disposé à payer. En comparaison à la solution dans [BIE88], dans cette politique le point de séparation est toujours positif. Dans [KHO16] le problème étudié dans [BIE88] a été étendu pour tenir compte des temps de réparation non exponentiels. L'optimalité de cette politique a été démontrée analytiquement.

Annexe 2 : Techniques d'optimisation issues de l'Analyse des Perturbations

L'Analyse des Perturbations Lissées (SPA) [HO91, pp. 255-257] est basée sur une espérance conditionnelle pour lisser les discontinuités (par exemple si la fonction est continue par morceaux par rapport aux paramètres d'intérêt). Cette espérance représente une probabilité d'un changement dans l'ordre des événements dans la trajectoire perturbée ainsi que les effets de ces changements. L'estimateur déterminé par cette méthode est composé d'une " contribution " IPA qui représente les différences infinitésimales entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée et d'une composante SPA qui représente la probabilité qu'il ait un changement dans l'ordre des événements. Cette méthode a été appliquée par la première fois à des paramètres structurels par Fu [FU94a] pour atténuer le problème lié aux changements dans la séquence des événements. Ainsi, dans le système étudié de gestion des stocks à quantité et date variables, lorsque la perturbation est appliquée à la quantité à commander pour chaque période, la perturbation peut résulter dans un changement de décision de passer une commande à ne pas la passer. C'est-à-dire, comme la perturbation appliquée est positive, elle peut faire que la position du stock dans la trajectoire perturbée soit au-dessus du point de commande, alors que la trajectoire nominale est en dessous de celui-ci après la satisfaction de la demande pour une période (voir la Figure A.2.1.). Dans son estimateur la composante SPA représente la probabilité qu'il ait un changement de décision de commander à ne pas commander.

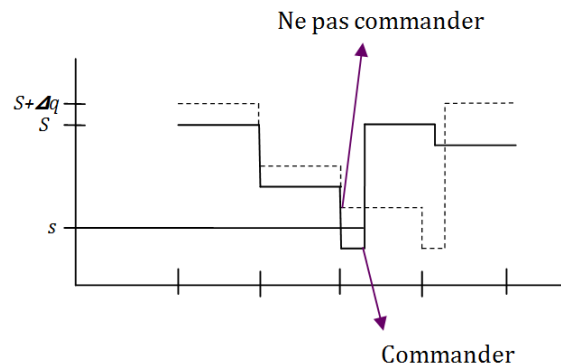


Figure A.2.1. Trajectoire de la position du stock pour le calcul de l'espérance conditionnelle en utilisant l'Analyse des Perturbations Lissées. Source : [FU94a].

L'Analyse des Perturbations Finies (FPA) a été utilisée initialement au niveau expérimental comme une technique heuristique et ensuite ses bases théoriques ont été développées [SOB91]. De plus, plutôt qu'être utilisée comme une technique d'estimation d'un gradient, elle est utilisée pour mesurer les effets des perturbations. Ainsi, elle permet d'intégrer les effets des perturbations de premier ordre (pour l'IPA les perturbations sont d'ordre zéro, lesquelles n'entraînent pas de changement dans l'ordre des événements), c'est-à-dire, des perturbations qui peuvent créer des changements dans l'ordre des événements adjacents, telles que des nouvelles périodes de famine (files d'attente, lignes de production, etc.). Autrement dit, seulement les perturbations adjacentes à un événement sont considérées et les perturbations dans les événements au-delà de l'événement adjacent sont ignorées du fait du manque de clarté des règles de propagation des perturbations sur ceux-ci [HO83]. Cette méthode a été utilisée dans [PAN99] pour un problème d'allocation du nombre de kanbans à chaque étage d'une ligne de production. L'objectif est de maximiser la cadence de production. Dans ce cas, un kanban supplémentaire a été ajouté à un étage quelconque afin de

construire la trajectoire perturbée, ce qui aide à déterminer comment la cadence de production évolue si l'on ajoute un kanban additionnel à l'un des étages. Cette méthode a permis de conserver la nature discrète du paramètre perturbé (le nombre de kanbans). FPA a également été utilisée pour le calcul du gradient du taux de production (avec comme objectif la maximisation de celui-ci) dans un problème du couplage du dimensionnement des stocks et du temps de service des lignes de transfert dans Cheikhrouhou *et al.* [CHE01] et des lignes de production dans Cheikhrouhou et Glardon [CHE03]. En effet, cette méthode a permis aux auteurs de tenir compte de la nature discrète des quantités dans les stocks et de la nature continue des temps de service dans un environnement stochastique. De plus, la suppression et/ou la création de périodes de blocage et de famine dans les trajectoires perturbées ont été considérées, ce qui peut entraîner un changement dans l'ordre des événements. Ainsi, cette technique a été utilisée sur un paramètre d'une fonction de probabilité (le temps de service dépend d'un paramètre d'une loi) et sur un paramètre structurel (la quantité des pièces dans le stock).

L'Analyse des Perturbations Etendues (EPA) est née pour surmonter les difficultés imposées par les hypothèses de la méthode IPA et de la méthode FPA. Cette méthode est également appliquée lorsque l'hypothèse de similarité déterministe n'est pas conservée. EPA se base donc sur l'idée qu'après avoir appliqué une perturbation, les trajectoires nominale et perturbée de la fonction de performance devraient atteindre un état commun à partir duquel elles vont évoluer similairement. Donc, avec cette méthode une trajectoire perturbée est construite à partir de la trajectoire nominale en gardant les mêmes propriétés que celle de la trajectoire nominale (cette idée est connue comme " l'idée de **copier** et **coller**" [HO91, pp.188-191]). Cette trajectoire sera appelée la " trajectoire perturbée construite ". De même, deux trajectoires qui commencent à partir du même état initial sont statistiquement similaires si les deux trajectoires aléatoires sont générées par les mêmes lois de probabilité [HO88].

L'Analyse des Perturbations Infinitésimales Structurelles (SIPA) a été créée comme une extension de la méthode IPA pour être appliquée spécifiquement sur des paramètres structurels, dû au fait qu'une perturbation sur des paramètres structurels peut entraîner une discontinuité dans la mesure de performance. Partant de la même idée de considérer les effets d'une perturbation infiniment petite sur la trajectoire perturbée, cette méthode diffère de la méthode IPA parce qu'elle calcule directement la limite comme montré dans l'équation (A.2.1.), laquelle est un résultat de l'espérance et par conséquent il n'existe pas de difficulté pour commuter l'espérance et la dérivée comme dans l'équation (1.2). Puisque la perturbation est faite sur des paramètres structurels, les temps des événements seront les mêmes dans la trajectoire perturbée. Cette méthode peut être appliquée sur des paramètres continus et discrets (voir [DAI95] pour plus de détails).

$$\frac{\partial J(\xi, \theta)}{\partial \theta} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{J(\xi, \theta + \Delta \theta) - J(\xi, \theta)}{\Delta \theta} \quad (\text{A.2.1.})$$

Dans cette équation $J(\xi, \theta + \Delta \theta)$ représente la valeur réelle perturbée de la mesure de performance et $J(\xi, \theta)$ la valeur réelle nominale de la mesure de performance.

Tableau A.2.1. Méthodes d'optimisation basées sur des trajectoires

Méthode d'optimisation	Applicable à des paramètres structurels ?	Applicable à des paramètres de lois de probabilité ?	Type de mesure de performance / type de paramètre
Analyse des Perturbations Infinitésimales (IPA) ([HO83], [FU94a], [YU02], [YU04], [CAO07])	Oui	Oui	Fonction continue sur l'ensemble qui contient le paramètre θ . Paramètres continus
Analyse des Perturbations Lissées (SPA) ([HO91], [FU94a])	Oui	Oui	Applicable lorsque la fonction est définie par morceaux et qu'elle n'est pas continue dans le point de subdivision. Paramètres continus
Analyse des Perturbations Finies (FPA) ([HO83], [SOB91], [PAN99])	Oui	Oui	Fonction non continue/ Paramètre discret
Analyse des Perturbations Infinitésimales Structurelles (SIPA) ([DAI95])	Oui	Oui, cas spéciaux	Paramètres continus ou discrets
Rapport de vraisemblance (LR) ([HO91], [CAO07])	Non	Oui	-
Méthode "Push-out Score Function" ([RUB92])	Oui	Oui : transformation du paramètre en fonction d'une loi de probabilité	Trajectoire d'échantillon non continue

Annexe 3 : Performances liées à la durabilité

Indicateurs

Parmi les piliers du développement durable, le pilier économique reste important pour les Nations, puisque même les émissions de carbone sont quantifiées en termes monétaires (*c.f.* les pénalités que doivent payer les pays qui ne respectent pas les accords). Cependant, le développement économique ne devrait pas se faire au détriment des aspects sociaux (comme l'exploitation des employés ou le non-respect des normes de sécurité) et des aspects environnementaux en consommant les ressources comme si elles étaient illimitées. Bien que la croissance soit un aspect qui peut être quantifié, le développement est un aspect plutôt qualitatif qui est donc plus difficile à mesurer. A ce propos, des organismes internationaux tels que l'ONU ont mis en place des indicateurs pour mesurer le progrès des pays dans un contexte durable. C'est ainsi qu'en 1990, l'Indice de Développement Humain (IDH) a été créé pour mesurer le développement humain en termes de santé, de travail, d'éducation, etc. Cet indicateur mesure ainsi des critères du pilier social.

Plus récemment en 2012 à l'occasion de la conférence de Rio +20, un autre indicateur a été proposé : l'IWI (*Inclusive Wealth Index* ou *Indice de Richesse Global*), un PIB vert qui a pour objectif d'intégrer, en plus de la production de capital économique, le capital humain et le capital naturel, afin de mesurer la capacité d'une nation à créer et à maintenir le bien-être humain. Cet indicateur a montré que pour les pays qui ont le plus de croissance économique dans leur PIB économique, le PIB vert est beaucoup plus faible. C'est le cas de la Chine, pour laquelle entre 1990 et 2008, la croissance économique a été de 9.6%, cependant son PIB vert a eu une croissance de 2.1%, ou les Etats Unis pour lequel la croissance du PIB vert est un tiers de la croissance du PIB pour la même période.

Un autre indicateur proposé dans le cadre de la Conférence de Rio (" Le Sommet de la Terre de Rio ") en 1992 a été l'empreinte écologique. Cet indicateur mesure la consommation humaine en termes du taux de renouvellement de la Terre et il met en évidence d'une certaine manière la dépendance des ressources naturelles entre les pays. Ainsi, par exemple, selon cet indicateur il faudrait 1.6 fois la capacité de la France pour satisfaire aux besoins des Français, 2.5 fois la capacité de la Chine pour subvenir aux besoins des Chinois ou 1.9 fois la capacité des Etats-Unis pour remplir les besoins des Américains. Au niveau global, il faudrait 1.5 fois la capacité de la Terre pour satisfaire durablement aux besoins de l'humanité.¹⁴

Déjà le 12 août 2015, l'ONG World Wildlife Fund (WWF ou Fonds mondial pour la nature) annonçait que l'humanité avait déjà consommé toutes les ressources de 2015, et le 13 août elle commencerait à consommer les ressources de 2016. Ce jour est connu comme le "jour de dépassement" (ou "*overshoot day*"). Cette même organisation fait un pronostic pour 2030 selon lequel si nous continuons à consommer avec la même tendance, nous aurons besoin de 2 planètes pour satisfaire nos besoins.

Les objectifs à atteindre : le cadre normatif international

Pour atteindre les objectifs mondiaux liés au changement climatique global, la réduction de la pauvreté ou l'équité sociale, les entreprises peuvent intégrer dans leur stratégie, des objectifs

¹⁴ www.footprintnetwork.org

découlant d'objectifs mondiaux définis lors des différentes réunions internationales (comme les sommets de la Terre, la COP21, etc.) et traduits au niveau national et international par différentes incitations.

Aujourd'hui les entreprises affrontent donc différentes pressions pour l'adoption de stratégies socialement responsables. Ces pressions sont dues aux réglementations, à l'opinion publique, à l'image de l'entreprise vis-à-vis des parties prenantes; ou des pressions morales vis-à-vis de l'environnement comme la prise de conscience de l'épuisement de ressources naturelles; ou de ses parties prenantes les plus proches telles que la sensibilisation des clients, la motivation des employés, etc.

Au niveau international il existe différentes structures et normes qui ont été créées pour donner les directives au niveau de la gestion du développement durable dans les organisations. Nous présentons différentes structures qui guident la stratégie des organisations pour l'intégration des objectifs du développement durable.

Le " *Global Compact* " ¹⁵ (ou Pacte mondial) des Nations Unies est une initiative volontaire lancée en 2000, qui a pour but de promouvoir des principes de durabilité au sein des entreprises. Elle regroupe dix principes qui sont répartis en quatre matières : les droits de l'homme, les normes du travail, l'environnement et la lutte contre la corruption. Pour les droits de l'homme, les principes sont : 1. Les entreprises doivent soutenir et respecter la protection des droits de l'homme proclamés au niveau international. 2. Les entreprises doivent s'assurer qu'elles ne sont pas complices de la violation de ces droits. En matière de travail, les principes sont : 3. Les entreprises doivent respecter la liberté d'association et reconnaître le droit de négociation collective. 4. Eliminer toutes les formes de travail forcé et obligatoire. 5. Contribuer à l'abolition effective du travail des enfants. 6. Eliminer la discrimination dans le cadre du travail. En matière environnementale, les principes sont : 7. Les entreprises doivent soutenir une approche préventive des défis environnementaux. 8. Entreprendre des initiatives qui tendent à promouvoir une plus grande responsabilité environnementale. 9. Encourager le développement et la diffusion de technologies propres. Et en matière de lutte contre la corruption : 10. Les entreprises doivent agir contre la corruption sous toutes ses formes y compris l'extorsion et les pots-de-vin.

L'Organisation internationale de normalisation (ISO ou *International Organization for Standardization*) en tant qu'organisme non gouvernemental à but non lucratif est le plus grand producteur de normes dans le monde. Ces normes couvrent la plupart de secteurs de l'industrie et elles sont applicables à tout type d'organisation selon le cas.

En matière environnementale, ISO a créé la famille de normes **ISO 14000** qui servent par exemple à quantifier et vérifier les émissions de gaz à effet de serre (ISO 14064), à calculer l'empreinte carbone des produits, services et de leur chaîne d'approvisionnement (ISO 14069); à compiler et communiquer les informations environnementales quantitatives (ISO 14033). La norme **ISO 14031** [ISO99] établit les lignes directrices sur l'évaluation de la performance environnementale d'une organisation au niveau interne. Cette évaluation est faite par des indicateurs selon les critères de performance environnementale évalués, en comparant les performances passées et les performances présentes. Elle suit le modèle de la roue de Deming (P : Planifier, D : Développer, C : Contrôler, A : Ajuster). Cette norme ne fait pas objet d'une certification. La norme **ISO 50001** [ISO11] s'inscrit dans le cadre du management de l'énergie. Elle est destinée à l'amélioration de son efficacité, de son utilisation et de sa consommation. L'objectif de son

¹⁵ www.unglobalcompact.org

application est la réduction des impacts environnementaux et des coûts énergétiques. Cette norme est applicable indépendamment du type d'énergie utilisée. Elle suit également le modèle de la roue de Deming.

En matière de responsabilité sociétale, la norme **ISO 26000** [ISO10] fournit les lignes directrices relatives à la responsabilité sociétale. Elle aborde sept questions centrales qui sont : les communautés et le développement local, les droits de l'homme, les relations et les conditions de travail, l'environnement, la loyauté des pratiques, des questions relatives aux consommateurs et la gouvernance de l'organisation.

Deux pratiques de responsabilité sociétale sont traitées : la reconnaissance de la part de l'organisation de sa responsabilité sociétale et l'identification de ses parties prenantes. De plus, elle fournit des orientations pour mettre en place la responsabilité sociétale dans l'organisation. Cette norme ne fait pas l'objet d'une certification.

Le standard **SA8000** [SAI08] créé par la SAI (*Social Accountability International*, une organisation non gouvernementale) est basée sur des conventions de l'OIT (Organisation Internationale du Travail) et les droits de l'homme et des enfants. Elle valide des aspects relatifs au travail. Les critères traités sont liés au travail des enfants, au travail forcé, à la sécurité et à la santé, à la rémunération, à la discrimination, au droit aux syndicats, aux horaires de travail, etc. Ce standard est applicable à tout type d'entreprises.

Dans cette même voie, il est prévu pour octobre 2016, la publication d'une nouvelle norme ISO relative aux systèmes de management de la santé et de la sécurité au travail (ISO 45001). Cette norme aura pour but d'établir un cadre de référence pour l'amélioration de la sécurité et des conditions de travail ainsi que la réduction des risques sur le lieu de travail. Elle tiendra compte d'autres normes existantes dans le domaine, telle que la OHSAS 18001.

Les normes évoquées précédemment n'intègrent pas conjointement des aspects relatifs aux trois piliers du développement durable. La plupart d'entre elles ont été développées pour être appliquées à tout type d'organisation.

Annexe 4 : Etude de la maintenance préventive sous hypothèse de dépendance entre le niveau de stock et la période de la maintenance préventive

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié un système de production soumis à des pannes, pour lequel une stratégie de maintenance préventive du type bloc a été appliquée. La politique de pilotage est du type point de séparation. Pour ce modèle, nous avons considéré que la période de la maintenance préventive et le point de séparation étaient indépendants. Dans cette partie, nous nous intéressons à étudier le lien existant entre le point de séparation et la période de la maintenance préventive [RAM14b].

Hypothèse A.4.1. : La politique de maintenance est basée sur une réparation minimale, ce qui implique qu'après une maintenance, le système revient à l'état dans lequel il était avant de tomber en panne.

Le coût de maintenance $C_m(T_p)$ basé sur une stratégie de type bloc est donné par l'équation (A.5.1) [CHE04].

$$C_m(T_p) = \frac{C_c \cdot N_c(t) + C_p}{T_p} \quad (A.4.1)$$

Où T_p est la période de maintenance préventive, C_c correspond au coût de l'action de maintenance corrective, C_p est le coût de l'action de maintenance préventive et $N_c(T)$ est le nombre moyen de pannes. T_p est positive strictement.

Supposons qu'il existe un lien entre le niveau de stock et la période de la maintenance préventive.

Pour cette étude, nous allons calculer le nombre moyen de défaillances lesquelles suivent une distribution de Weibull (α, β) . Soit $E(N_p(T))$ le nombre moyen de maintenances préventives sur un horizon de temps fini. Il est donné par l'équation (A.4.2).

$$E(N_p(T)) = \frac{T}{T_p} \quad (A.4.2)$$

Soit $E(N_c(T_p))$ le nombre moyen de pannes qui se produisent sur un horizon de temps égal à la période de maintenance préventive T_p pour une loi de Weibull (α, β) . Il est donné par l'équation (A.4.3) :

$$E(N_c(T_p)) = \int_0^{T_p} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{s}{\beta}\right)^{\alpha-1} ds \quad (A.4.3)$$

Le nombre moyen de défaillances sur un horizon de temps fini et défini T est donc donné par :

$$E(N_c(T)) = \frac{T}{T_p} \cdot \left[\int_0^{T_p} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{s}{\beta} \right)^{\alpha-1} ds \right]. \quad (A.4.4)$$

Soit $C_m(T)$ le coût total de maintenance sur un horizon de temps fini T :

$$C_m(T) = C_c \cdot E(N_c(T)) + C_p \cdot E(N_p(T)). \quad (A.4.5)$$

Ensuite, nous remplaçons (A.4.2) et (A.4.4) dans (A.4.5) et nous obtenons :

$$C_m(t) = \frac{T}{T_p} \cdot \left(C_c \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \int_0^{T_p} \left(\frac{s}{\beta} \right)^{\alpha-1} ds + C_p \right). \quad (A.4.6)$$

Hypothèse A.4.2. : A l'instant initial, nous supposons que pendant la construction du stock initial, la machine ne tombe pas en panne.

Lorsqu'une action de maintenance préventive est réalisée, nous considérons, deux cas de figures (section 4.2 Gharbi *et al.*, 2007 [GHA07]) : **a).** Il n'y a pas des pénuries à la fin de la période de maintenance préventive (Figure A.4.1.) ; **b).** A la fin d'une action de maintenance préventive, il y a des pénuries (Figure A.4.2.).

Nous étudions chacun de ces cas, afin de déduire la valeur de T_p .

Cas a)

Soit DMP la durée de l'action de maintenance préventive et T_{p1} la période de maintenance préventive lorsque, à la fin de l'action de maintenance, le niveau de stock est positif.

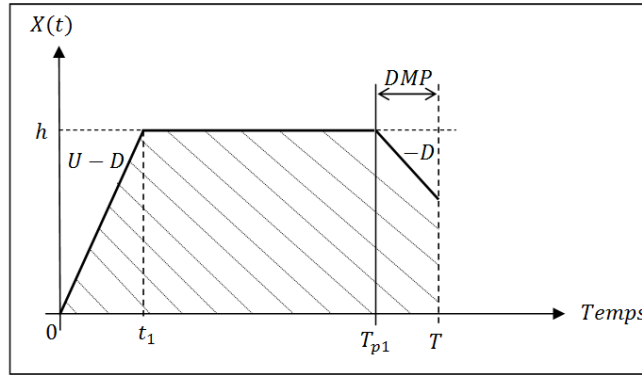


Figure A.4.1. L'action de maintenance préventive commence à T_p et il n'y a pas des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.

L'aire rayée A_1 , de la Figure A.4.1. est donnée par :

$$A_1 = \left(\frac{t_1 * h}{2} \right) + \left(T_{p1} * h - 2 \cdot \left(\frac{t_1 * h}{2} \right) \right) + \left(DMP * h - \left(\frac{D * DMP^2}{2} \right) \right) \quad (A.4.7)$$

De l'équation de la pente nous avons :

$$(U - D) = \frac{h}{t_1}$$

et ensuite :

$$t_1 = \frac{h}{(U - D)} \quad (\text{A.4.8})$$

En remplaçant (A.4.7) dans (A.4.8), nous obtenons :

$$A_1 = h \left(T_{p1} - \frac{h}{2(U - D)} \right) + DMP \left(h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right) \quad (\text{A.4.9})$$

Nous supposons que $\bar{N}_1(t)$ est le niveau de stock moyen pour une période de maintenance préventive, si à la fin de cette période, le niveau de stock est positif.

$$\bar{N}_1(t) = \frac{c}{T_{p1}}. \quad (\text{A.4.10})$$

avec c une constante qui représente le stock cumulé sur une période de maintenance préventive.

Soit $R(T_{p1})$ la fiabilité du système à l'instant T_{p1} : probabilité de ne pas avoir de défaillance dans l'intervalle $[0, T_{p1}[$. Pour une loi de Weibull, elle est donnée par l'équation (A.4.11) :

$$R(T_{p1}) = e^{-\left(\frac{T_{p1}}{\beta}\right)^\alpha}. \quad (\text{A.4.11})$$

Ensuite, nous avons :

$$\bar{N}_1(t) = \frac{\left[h \cdot \left(T_{p1} - \frac{h}{2(U - D)} \right) \right] \cdot R(T_{p1}) + DMP \left(h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right)}{T_{p1} + DMP}. \quad (\text{A.4.12})$$

Nous remplaçons (A.4.12) dans (A.4.10) et nous obtenons :

$$\frac{c}{T_{p1}} = \frac{\left[h \cdot \left(T_{p1} - \frac{h}{2(U - D)} \right) \right] \cdot R(T_{p1}) + DMP \left(h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right)}{T_{p1} + DMP}. \quad (\text{A.4.13})$$

$$c \cdot (T_{p1} + DMP) = T_{p1} \cdot \left[\begin{array}{c} h \cdot T_{p1} \cdot R(T_{p1}) \\ - \frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2(U - D)} \\ + DMP \left(h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right) \end{array} \right]. \quad (\text{A.4.14})$$

A partir de l'équation (A.4.14), nous obtenons une expression quadratique :

$$h \cdot R(T_{p1}) \cdot T_{p1}^2 - \left(\frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2 \cdot (U - D)} - h \cdot DMP + \frac{D \cdot DMP^2}{2} + c \right) \cdot T_{p1} - c \cdot DMP = 0. \quad (\text{A.4.15})$$

De l'équation (A.4.15), nous obtenons la valeur de T_{p1} en fonction de h comme suit :

$$T_{p1} = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2 \cdot (U - D)} - h \cdot DMP + \frac{D \cdot DMP^2}{2} + c\right)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p1}) \cdot c \cdot DMP}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p1})}. \quad (A.4.16)$$

■

Cas b)

Soit T_{p2} la période de maintenance préventive quand à la fin de l'action de maintenance le niveau de stock est négatif. L'aire rayée A_2 , de la Figure A.4.2. est donnée par :

$$A_2 = \frac{h^2}{2 \cdot (U - D)} + h \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(U - D)}\right) + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D}. \quad (A.4.17)$$

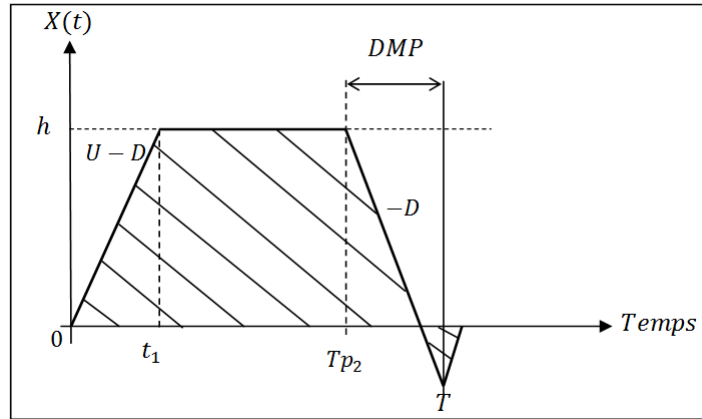


Figure A.4.2. L'action de maintenance préventive commence à T_p et il y a des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.

Soit $\bar{N}_2(t)$ le niveau de stock moyen, lorsqu'à la fin de la période de maintenance préventive, le niveau de stock est négatif. Il est donné par l'équation (A.4.18).

$$\bar{N}_2(t) = \frac{\left[\frac{h^2}{2 \cdot (U - D)} + h \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(U - D)}\right)\right] \cdot R(T_{p2}) + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D}}{T_{p2} + DMP}. \quad (A.4.18)$$

Nous appelons $\bar{N}_2(t)$ le niveau de stock moyen, si à la fin de la période de maintenance préventive, le niveau de stock est négatif. Il est donné par l'équation (A.4.19).

$$\bar{N}_2(t) = \frac{c}{T_{p2}} \quad (A.4.19)$$

$$\frac{c}{T_{p2}} = \frac{\left[\frac{h^2}{2 \cdot (U-D)} + h \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(U-D)} \right) \right] \cdot R(T_{p2}) + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D}}{T_{p2} + DMP} \quad (A.4.20)$$

$$c \cdot (T_{p2} + DMP) = T_{p2} \left[\frac{\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (U-D)}}{+ h \cdot R(T_{p2}) \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(U-D)} \right)} + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D} \right] \quad (A.4.21)$$

De (A.4.21), nous obtenons une équation quadratique :

$$h \cdot R(T_{p2}) \cdot T_{p2}^2 - \left(\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (U-D)} - \frac{DMP^2 \cdot D}{2} - h \cdot DMP - \frac{h^2}{D} + c \right) \cdot T_{p2} - DMP \cdot c = 0 \quad (A.4.22)$$

A partir de l'équation (A.4.22), nous pouvons obtenir la valeur de T_{p2} en fonction de h . Cette valeur est donnée par l'équation (A.4.23) :

$$T_{p2} = \frac{\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (U-D)} - \frac{DMP^2 \cdot D}{2} - h \cdot DMP - \frac{h^2}{D} + c \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (U-D)} - \frac{DMP^2 \cdot D}{2} - h \cdot DMP - \frac{h^2}{D} + c \right)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p2}) \cdot DMP \cdot c}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p2})} \quad (A.4.23)$$

Nous intégrons la probabilité pour chacun des cas [GU05], afin d'obtenir la valeur totale de T_p . Finalement, la valeur de T_p est donnée par l'équation (A.4.24) :

$$T_p = E(T_{p1}) \cdot P_{np} + E(T_{p2}) \cdot P_p. \quad (A.4.24)$$

où P_{np} représente la probabilité de ne pas avoir de pénurie à la fin de l'action de maintenance préventive et P_p est la probabilité d'avoir de pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.

Etude de la fonction de coût selon le niveau de stock

Le coût total $C(t)$ correspond à la somme des coûts de stockage, de transport, de maintenance et de pénurie. Dans cet article, les coûts de transport ct_i sont considérés fixes. ct_1 est le coût unitaire des matières transportées de la machine vers le stock et ct_2 est le coût du transport des pièces du stock vers le client.

$$C(t) = g(X^h(t, h)) + Xtd_1(t) \cdot ct_1 + Xtd_2(t) \cdot ct_2 + C_m(T) \quad (A.4.25)$$

avec $g(X^h(t, h))$ comme indiqué dans l'équation (2.24) p. 58.

Le coût total moyen sur un horizon fini $L_T^h(h)$, est donné par l'équation (2.26) p.59. Nous développons l'équation (A.4.6) et nous obtenons une expression plus simple, afin de remplacer la valeur obtenue de T_p dans l'équation (2.26) p.59.

$$C_m(T) = \frac{T}{T_p} \cdot \left(C_c \cdot \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot T_p^\alpha + C_p \right) = T \cdot \left(C_c \cdot \frac{T_p^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} + \frac{C_p}{T_p} \right). \quad (A.4.26)$$

Nous remplaçons (A.4.26) dans (2.26) p.59. et nous obtenons :

$$L_T^h(h) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^h(t, h)) + Xt d_1(t) \cdot ct_1 + Xt d_2(t) \cdot ct_2 \right) dt + T \cdot \left(C_c \cdot \frac{T_p^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} + \frac{C_p}{T_p} \right) \quad (A.4.27)$$

En remplaçant (A.4.24) dans (A.4.27) nous obtenons :

$$L_T^h(h) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^h(t, h)) + Xt_1(t) \cdot ct_1 + Xt_2(t) \cdot ct_2 \right) dt + T \cdot \left(C_c \cdot \frac{(E(T_{p1}) \cdot P_{np} + E(T_{p2}) \cdot P_p)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} + \frac{C_p}{(E(T_{p1}) \cdot P_{np} + E(T_{p2}) \cdot P_p)} \right) \quad (A.4.28)$$

Pour simplifier, nous notons les termes de l'équation (A.4.16) comme suit :

$$A = \frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2 \cdot (U-D)}, \quad B = -h \cdot DMP, \quad C = \frac{D \cdot DMP^2}{2} + c$$

Nous faisons de même avec les termes de l'équation (A.4.23) comme suit :

$$D = \frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (U-D)}, \quad E = -\frac{DMP^2 \cdot D}{2} - h \cdot DMP, \quad F = -\frac{h^2}{D} + c$$

Ainsi, nous obtenons pour le coût total moyen sur un horizon fini, l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 & L_T^h(h) \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{t=T} \left(g(X^h(t, h)) + Xt_1(t) \cdot ctd_1 + Xtd_2(t) \cdot ct_2 \right) dt \\
 &+ T \cdot \left(\frac{mc \cdot \left(\left(\frac{A+B+C + \sqrt{(A+B+C)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p1}) \cdot DMP \cdot c}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p1})} \right) \cdot P_{np} + \left(\frac{D+E+F + \sqrt{(D+E+F)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p2}) \cdot DMP \cdot c}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p2})} \right) \cdot P_p \right)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha mp} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\left(\frac{A+B+C + \sqrt{(A+B+C)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p1}) \cdot DMP \cdot c}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p1})} \right) \cdot P_{np} + \left(\frac{D+E+F + \sqrt{(D+E+F)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p2}) \cdot DMP \cdot c}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p2})} \right) \cdot P_p}{\beta^\alpha mp} \right) \quad (A.4.29)
 \end{aligned}$$

Le résultat précédent, nous permet de trouver le coût total moyen sur un horizon fini, en considérant une interaction entre la période de la maintenance préventive et le point de séparation. Dans [RAM14a], une étude de la valeur de la maintenance préventive ainsi que du point de séparation a été réalisée, en négligeant le lien entre ces deux valeurs (voir également chapitre 2).

Nous avons fait une application numérique dans laquelle les résultats théoriques sont utilisés et couplés à une simulation pour déterminer les valeurs de la période de la maintenance préventive et du point de séparation.

Application numérique

Nous avons réalisé une simulation de type événements discrets, dans laquelle les événements possibles dans le système sont les pannes, les réparations et les maintenances préventives de la machine, ainsi que l'épuisement et la saturation du stock, comme décrit dans la section 2.4.3. p. 62. Nous avons développé un programme sous le logiciel Dev-C++ IDE.

Les données du Tableau A.4.1 ont été utilisées pour la simulation.

Tableau A.4.1. Paramètres de la simulation

U	D	c ⁺	c ⁻	τ1	τ2	TBF		TTR		mp	mc
						α	β	α	β		
4	2	30	600	1	2	12	3	2	3	150	750

La fonction de coût a été calculée en étudiant les cas possibles pour le coût de stockage entre deux événements successifs.

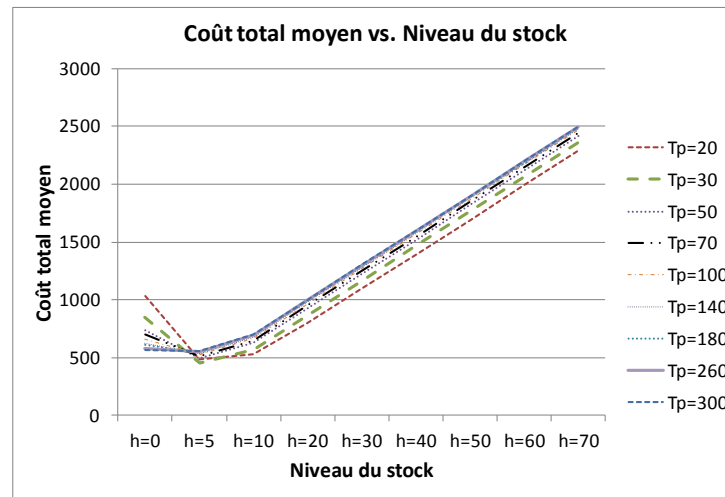


Figure A.4.3. Coût total moyen en fonction du niveau de stock

Dans la Figure A.4.3, nous pouvons observer la variation du coût total moyen en fonction du niveau de stock, pour des valeurs différentes de T_p .

Des figures A.4.3 et A.4.4, nous observons que la valeur minimale du coût total moyen est obtenue avec une valeur de T_p égale à 26 unités de temps et un niveau de stock égal à 5 unités. La valeur du coût total moyen associée est égale à 445.2920 unités monétaires.

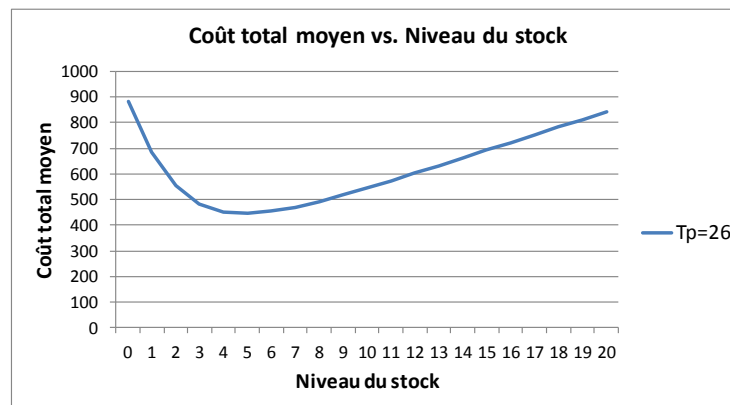


Figure A.4.4. Coût total moyen vs. niveau de stock pour la valeur de T_p qui minimise le coût total moyen.

La figure A.4.5. montre des courbes différentes de la période de la maintenance préventive en fonction du coût total moyen, avec des valeurs différentes du niveau de stock. Les valeurs les plus petites pour le coût total moyen ont été trouvées avec $h = 5$ unités. Cette valeur nous donne une idée préliminaire pour réaliser l'optimisation.

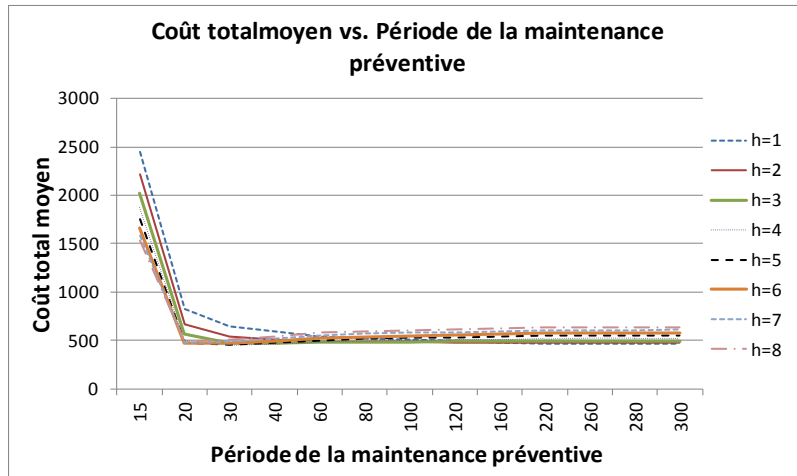


Figure A.4.5. Période de la maintenance préventive vs. coût total moyen

La figure A.4.6. permet de faire un focus autour du niveau de stock qui minimise la valeur du coût total moyen, il existe une valeur de T_p pour laquelle le coût total moyen est minimum.

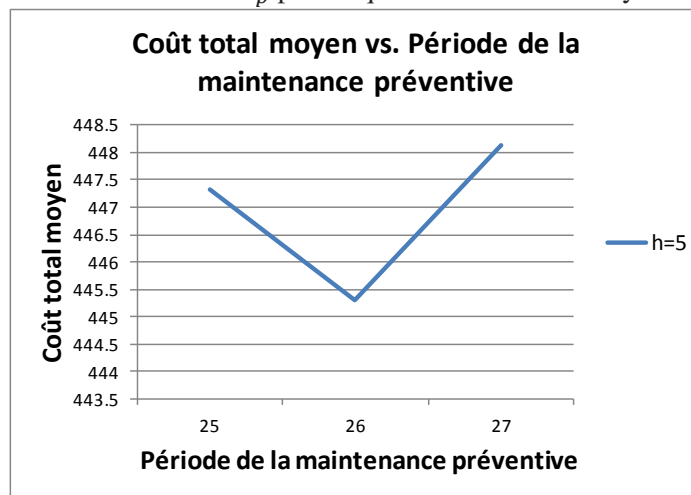


Figure A.4.6. Zoom de la période de la maintenance préventive vs. coût total moyen pour $h = 7$ unités.

Nous avons trouvé pour T_p^* une valeur optimale égale à 25.08 unités de temps et pour h^* une valeur de 4.82 ± 0.0748 unités. Le coût total moyen associé est de 441.1365 unités monétaires.

Nous allons traiter les deux cas théoriques étudiés précédemment. Pour rappel, dans le cas a , nous considérons qu'il n'y a pas des pénuries à la fin de la période de la maintenance préventive et dans le cas b , à la fin de la période de la maintenance préventive, il y a des pénuries.

Exemple d'application numérique pour le cas a.

Tableau A.4.2. Données numériques cas a.

U	D	DMP	c	$R(T_{p1})$
4	2	12.05 UT	1	1

Les valeurs du Tableau A.4.2. ont été remplacées dans l'équation (A.4.16). Nous obtenons une courbe de type convexe qui prend sa valeur minimale quand $h = 31$ unités (Figure A.4.7.). Cette valeur a été obtenue en considérant des valeurs différentes pour le niveau du stock entre 1 et 160 unités.

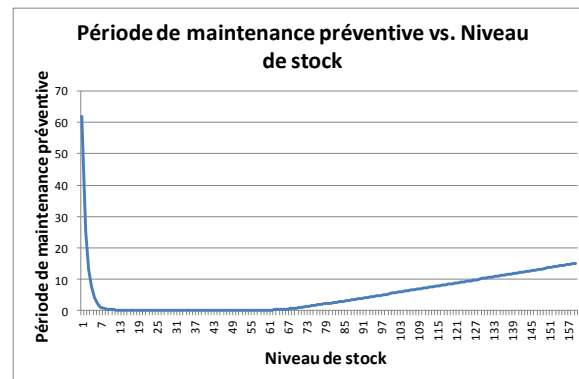


Figure A.4.7. T_{p1} en fonction de h

Exemple d'application numérique pour le cas b.

Tableau A.4.3. Données numériques cas b.

U	D	DMP	c	$R(T_{p2})$
4	2	12.05 UT	1	1

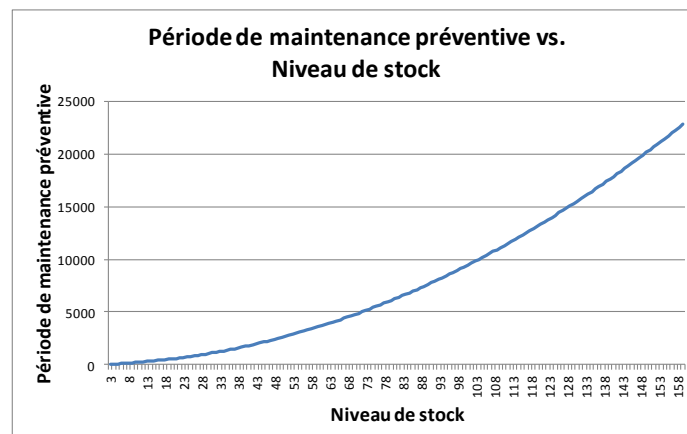


Figure A.4.8. T_{p2} en fonction de h

En remplaçant les données du Tableau A.4.3. dans l'équation (A.4.23), nous obtenons la courbe montrée dans la Figure A.4.8. Cette courbe laisse voir que plus la période de la maintenance préventive est importante, plus le niveau de stock augmente. Cela s'explique parce que s'il y a un stock important, il est possible de couvrir une période de maintenance préventive plus grande.

Annexe 5 : Extension aux lignes de transfert avec prise en compte du transport

Politique Base Stock

Nous nous intéressons à la modélisation d'une ligne de transfert avec prise en compte des différents délais. La politique utilisée dans cette partie est de type Base Stock. La figure A.5.1 représente le système considéré selon cette politique.

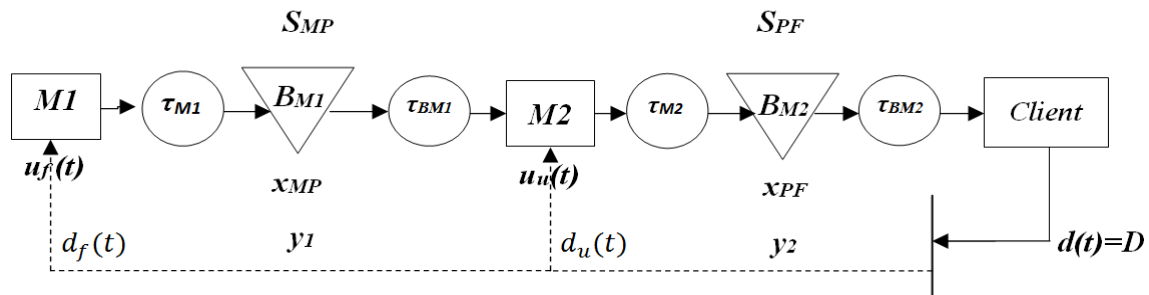


Figure A.5.1. Système d'une ligne de transfert avec une politique de type Base Stock.

Soient $M1$ et $M2$ les machines composant la ligne de transfert, B_{M1} et B_{M2} les stocks intermédiaires entre les machines, τ_{M1} et τ_{M2} les délais entre les machines et les stocks intermédiaires et τ_{BM1} et τ_{BM2} les délais entre les stocks et les machines.

Politique de pilotage :

La vitesse de production de $M1$, est donnée par l'équation (A.5.1)

$$u_f(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha_f(t) = 0, \\ \alpha_f(t) \cdot U_f, & \text{if } S_{MP} + D > y_1(t), \\ \min(\alpha_f(t) \cdot U_f; D), & \text{if } S_{MP} + D = y_1(t). \end{cases} \quad (A.5.1)$$

Afin de maintenir un niveau d'échelon base stock S_{MP} dans le premier étage, une autorisation de production de la machine $M1$ apparaît lorsque le niveau d'échelon base stock devient inférieur à S_{MP} .

L'autorisation de production de $M1$, est donnée par l'équation (A.5.2) :

$$d_f(t) = S_{MP} - (y_1(t) - D). \quad (A.5.2)$$

Le niveau d'échelon base stock du deuxième étage est nommé S_{pF} . Quand le nombre de produits dans le deuxième étage est inférieur à S_{pF} , une autorisation de production pour la machine $M2$ est générée.

L'autorisation de production de $M2$, est donnée par l'équation (A.6.3) :

$$d_u(t) = S_{PF} - (y_2(t) - D). \quad (A.5.3)$$

Soit $u_u(t)$ la vitesse de production de la machine $M2$. Elle est décrite par l'équation (A.5.4) :

$$u_u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_u(t) = 0, \\ \alpha_u(t) \cdot U_u, & \text{si } x_{MP}(t - \tau_{BM1}) > 0 \text{ et } d_u(t) > 0, \\ \min(\alpha_u(t) \cdot U_u, \alpha_u(t) \cdot D), & \text{si } x_{MP}(t - \tau_{BM1}) > 0 \text{ et } d_u(t) = 0, \\ \min(\alpha_u(t) \cdot (U_u; u_f(t - \tau_{BM1} - \tau_{M1}))), & \text{si } x_{MP}(t - \tau_{BM1}) = 0 \text{ et } d_u(t) > 0, \\ \min(\alpha_u(t) \cdot (U_u; u_f(t - \tau_{BM1} - \tau_{M1}); D)), & \text{si } x_{MP}(t - \tau_{BM1}) = 0 \text{ et } d_u(t) = 0. \end{cases} \quad (A.5.4)$$

L'étude théorique de la méthode IPA est similaire à celle menée dans [MOU05, chapitre 5] selon les résultats obtenus dans le chapitre 2, et l'application numérique reste une perspective de notre travail.

Politique de type Kanban par étage

Nous étudions un système composé de deux machines $M1$ et $M2$ et de deux stocks intermédiaires B_{M1} et B_{M2} . Soit k_{MP} la quantité de kanbans du premier étage et k_{PF} le nombre de kanbans du deuxième étage. Lorsque le système est à l'état initial, B_{M1} contient k_{MP} pièces d'approvisionnement et B_{M2} possède k_{PF} produits finis et chaque élément possède un kanban attaché à lui. Si une demande arrive dans le système, elle est délivrée au client (si elle est disponible), et le kanban k_{PF} correspondant est libéré. Ce kanban est transféré ensuite en amont de la machine $M2$, avec un signal de production d'un nouveau produit fini pour le deuxième étage. La Figure A.5.2 schématise ce système.

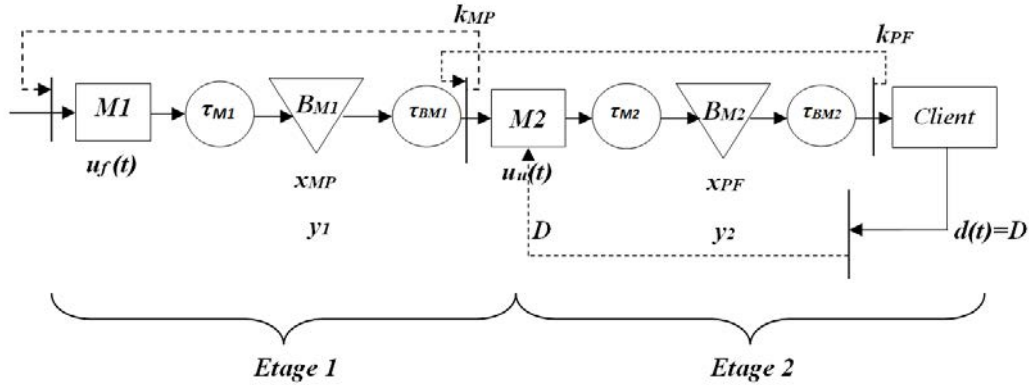


Figure A.5.2. Système d'une ligne de transfert avec une politique de type kanban.

----- : Flux d'information (demande d'information ou autorisation de production)

L'état du stock des matières premières est décrit par l'équation (A.5.5) :

$$x_{MP}(t) = x_{MP}(0) + \int_0^t [u_f(s - \tau_{FB}) - u_u(s + \tau_{BU})] ds. \quad (A.5.5)$$

La quantité de produits du premier étage est donnée par l'équation (A.5.6) :

$$y_1(t) = y_1(0) + \int_0^t [u_f(s) - u_u(s)] ds. \quad (A.5.6)$$

Avec $y_1(t) \leq k_{MP}$.

L'état du stock des produits finis est décrit par l'équation (A.5.7) :

$$x_{PF}(t) = x_{PF}(0) + \int_0^t [u_u(s - \tau_{UB}) - D] ds. \quad (A.5.7)$$

La quantité de produits du deuxième étage est donnée par l'équation (A.5.8) :

$$y_2(t) = y_2(0) + \int_0^t [u_u(s) - D] ds. \quad (A.5.8)$$

Avec $y_2(t) \leq k_{PF}$.

La stratégie de pilotage est donnée comme suit :

$$u_f(t) = \begin{cases} \alpha_f(t) \cdot U_f, & \text{si } y_1(t) < k_{MP} \\ \min(u_u(t); \alpha_f(t) \cdot U_f), & \text{si } y_1(t) = k_{MP} \end{cases} \quad (A.5.9)$$

$$\alpha_f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si M1 est indisponible} \\ 1, & \text{si M1 est disponible} \end{cases} \quad (A.5.10)$$

$$u_u(t) = \begin{cases} \alpha_u(t) \cdot U_u, & \text{si } y_2(t) < k_{PF} \text{ et } x_{MP}(t - \tau_{BU}) > 0 \\ \min(u_f(t - \tau_{FB} - \tau_{BU}); \alpha_u(t) \cdot U_u), & \text{si } y_2(t) < k_{PF} \text{ et } x_{MP}(t - \tau_{BU}) = 0 \\ \min(\alpha_u(t) \cdot U_u; D), & \text{si } y_2(t) = k_{PF} \text{ et } x_{MP}(t - \tau_{BU}) > 0 \\ \min(\alpha_u(t) \cdot U_u; D; u_f(t - \tau_{FB} - \tau_{BU})), & \text{si } y_2(t) = k_{PF} \text{ et } x_{MP}(t - \tau_{BU}) = 0 \end{cases} \quad (A.5.11)$$

Etude des trajectoires

Théorème A.5.1. : $\forall t > 0$, $x_{PF}(0) = y_2(0) = 0$ et il n'y a pas de pièces en transit dans les deux étages nous avons :

$$x_{PF}(t) = y_2(t - \tau_{UB}) - \tau_{UB} \cdot D - \tau_{BC} \cdot D.$$

Preuve du théorème A.5.1 :

$$\begin{aligned} x_{PF}(t) &= x_{PF}(0) + \int_0^t [u_u(s - \tau_{UB}) - D] ds \\ &= x_{PF}(0) + \int_{-\tau_{UB}}^0 u_u(s) ds - \tau_{UB} \cdot D + \int_0^{t-\tau_{UB}} [u_u(s) - D] ds \end{aligned}$$

Donc,

$$x_{PF}(t) = y_2(0) - \left\{ \begin{matrix} \tau_{UB} \cdot D \\ \tau_{BC} \cdot D \end{matrix} + \int_0^{t-\tau_{UB}} [u_u(s) - D] ds \right.$$

Par conséquent :

$$x_{PF}(t) = y_2(t - \tau_{UB}) - \tau_{UB} \cdot D - \tau_{BC} \cdot D.$$

C.Q.F.D.

Théorème A.5.2. : $\forall t$ et s'il n'y a pas de pièces en transit et avec $x_{PF}(0)$ et $y_2(0)$ qui respectent la politique kanban par étage. Alors :

$$y_1(t) - (2 \cdot \tau_{FB} + \tau_{BU}) \cdot U_f \leq x_{MP}(t) \leq y_1(t)$$

Preuve Théorème A.5.2 :

Par définition :

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dx_{MP}(t)}{dt} + u_f(t - \tau_{FB}) + u_f(t - \tau_{FB} - \tau_{BU}).$$

Par conséquent, nous avons 4 cas :

1. $u_f(t - \tau_{FB}) = 0$ et $u_f(t - \tau_{FB} - \tau_{BU}) = 0$ (pas de pièces en transit dans l'étage 1)
 $y_1(t) = x_{MP}(t).$
2. $u_f(t - \tau_{FB}) = 0$ et $u_f(t - \tau_{FB} - \tau_{BU}) > 0.$
 $y_1(t) > x_{MP}(t) \geq -u_f(\tau_{FB} - \tau_{BU}) + y_1(t).$
3. $u_f(t - \tau_{FB}) > 0$ et $u_f(t - \tau_{FB} - \tau_{BU}) = 0.$
 Alors $y_1(t) > x_{MP}(t) \geq y_1(t) - U_f \cdot \tau_{FB}.$
4. $u_f(t - \tau_{FB}) > 0$ et $u_f(t - \tau_{FB} - \tau_{BU}) > 0.$
 Alors $y_1(t) > x_{MP}(t) \geq y_1(t) - 2 \cdot U_f \cdot \tau_{FB} - U_f \cdot \tau_{BU}.$

C.Q.F.D.

Ces deux théorèmes impliquent que le fait de calculer la fonction de coût à partir de $y_i(t)$ n'aura pas d'impact comparativement au calcul de la fonction de coût à partir de $x_i(t)$ car $x_i(t)$ peut être déterminé à partir de $y_i(t)$.

Etude IPA

Soit $y_1^{A1}(t)$ la trajectoire perturbée avec $\Delta_1 > 0$, et $y_2^{A2}(t)$ la trajectoire perturbée avec $\Delta_2 > 0$.

Remarque : Des résultats similaires peuvent être obtenus avec $\Delta_1 < 0$.

Théorème A.5.3. : $\forall t$ et selon les conditions initiales établies dans l'Annexe 1 pour une politique kanban ($x_{MP}(0) = k_{MP}$, $x_{PF}(0) = k_{PF}$), nous avons :

$$\begin{cases} y_1(t) \leq y_1^{A1}(t) \leq y_1(t) + \Delta_1, \\ y_2(t) \leq y_2^{A2}(t) \leq y_2(t) + \Delta_2. \end{cases}$$

Preuve du Théorème A.5.3. :

Par définition de la politique de pilotage nous avons :

$$\begin{cases} y_1(t) \leq k_{MP}, \\ y_2(t) \leq k_{PF}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y_1^{\Delta_1}(t) \leq k_{MP} + \Delta_1, \\ y_2^{\Delta_2}(t) \leq k_{PF} + \Delta_2. \end{cases}$$

Remarque : Pour cette stratégie de pilotage, Δ_1 peut être différent de Δ_2 , mais pour simplifier et pour appliquer la méthode IPA, nous choisissons $\Delta_1 = \Delta_2$.

Gradients de la fonction de coût :

Le coût total moyen sur un horizon fini est donné par l'équation (A. 5.12) :

$$\begin{aligned} L_T(\vec{k}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^2 g(y_i(\vec{k}, t) + C) dt \right). \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T g(y_i(\vec{k}, t)) dt + C. \end{aligned} \quad (A. 5.12)$$

Avec C égal à la somme des coûts de transport et des coûts de maintenance. Ces coûts sont indépendants de $\vec{k}$.

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_{MP} \\ k_{PF} \end{bmatrix}.$$

A partir du théorème A.5.3., nous avons :

$$L_T \left(\begin{bmatrix} k_{MP} + \Delta_1 \\ k_{PF} + \Delta_2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^2 g(y_i + \Delta_i; t) dt + C. \quad (A. 5.13)$$

Comme Δ_i est infiniment petit, nous avons $L_T^A = L_T + Constante$.

$$Constante = \frac{1}{T} [T_1 \cdot c^+ \cdot \Delta_1 - T_2 \cdot c^+ \cdot \Delta_1 + T_3 \cdot c^+ \cdot \Delta_2 - T_4 \cdot c^+ \cdot \Delta_2].$$

dans laquelle T_1 représente le temps pendant lequel le niveau de stock du premier stock est positif et T_2 le temps pendant lequel le niveau de stock est négatif. Une définition similaire est donné pour T_3 et pour T_4 respectivement.

Remarque : T doit être choisi selon un nombre de pannes (critère identique pour les deux trajectoires afin de pouvoir faire des comparaisons).

En tenant compte de l'hypothèse 2.11., selon laquelle deux événements ne se produisent pas au même temps, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème A.5.4. : L'estimateur du gradient de coût est non biaisé.

$$\frac{\partial E[L_T(\vec{k})]}{\partial \vec{k}} = E \left[\frac{\partial L_T(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right].$$

Preuve du théorème A.5.4. : cf. preuve du théorème 2.3 p.60. Les résultats obtenus sont similaires.

Optimisation basée sur la simulation :

L'algorithme utilisé pour déterminer $\vec{k}$, est donnée par :

1. Conditions initiales : $\alpha_i = 1$, $y_i = 0$, $x_i = 0$, $\vec{k}_0$.
2. Simuler le système et déterminer la fonction de coût et sa dérivée à partir des résultats obtenus, cf. page 58 et suite.
3. Mettre à jour $\vec{k}$ en utilisant la méthode de gradient avec une méthode de descente de type $\alpha_k d_k$. Avec $\alpha_k = \arg_{\alpha \geq 0} \min L(k_k + \alpha \cdot d_k)$.
4. Répéter les étapes 2-3 jusqu'à la convergence.

Les simulations numériques pour ce problème n'ont pas été faites et restent comme perspective de notre travail.

Annexe 6 : Démonstrations pour l'étude des trajectoires du chapitre 3

Preuve du Lemme 3.3. :

Soit $u^A(t)$ la vitesse de production de la trajectoire perturbée.

Par l'hypothèse 3.1, nous savons que la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+A}(t, \vec{h})$ est construite à partir du moment auquel le niveau de stock atteint le point de séparation h_{en} . Nous avons donc pour $t \in [0, t_1 - \tau_1[$ $X^h(t, \vec{h}) = X^{h+A}(t, \vec{h})$.

Pour l'étude de la trajectoire du niveau de stock, nous tenons compte du délai τ_1 . Ensuite, nous étudions les intervalles $[t_1 - \tau_1, t'_1 - \tau_1[$ et $[t'_1 - \tau_1, t_4 - \tau_1[$.

- Si $t \in [t_1 - \tau_1, t'_1 - \tau_1[$ nous avons trois cas possibles pour $X^h(t, \vec{h})$:
 - a) Si $X^h(t, \vec{h}) = h_{en}$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = U$.
 - b) Si $X^h(t, \vec{h}) = h_{en} + \Delta h_{en}$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$.
 - c) Si $h_{en} < X^h(t, \vec{h}) < h_{en} + \Delta h_{en}$, $u(t) = 0$ et $u^A(t) = U$.

Soit $t' \in [t'_1 - \tau_1, t_1 - \tau_1[$, tel que $t' \leq t$ et $X^{h+A}(t', \vec{h}) \geq X^h(t', \vec{h})$

$$X^h(t, \vec{h}) = X^h(t'_1, \vec{h}) + \int_{t'_1 - \tau_1}^{t_1 - \tau_1} (u(s - \tau_1) - D) ds \quad (A.6.1)$$

$$X^{h+A}(t, \vec{h}) = X^{h+A}(t'_1, \vec{h}) + \int_{t'_1 - \tau_1}^{t_1 - \tau_1} (u^A(s - \tau_1) - D) ds \quad (A.6.2)$$

- a) $X^h(t, \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h})$
 $X^{h+A}(t, \vec{h}) = X^{h+A}(t', \vec{h}) + (U - D) * (t - t')$
 Dans ce cas, $X^{h+A}(t', \vec{h}) \geq X^h(t', \vec{h})$ et $(U - D) > 0$, d'où $X^{h+A}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.
- b) $X^h(t, \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h})$
 $X^{h+A}(t, \vec{h}) = X^{h+A}(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^{h+A}(t', \vec{h})$
 Dans cet intervalle, $X^{h+A}(t', \vec{h}) > X^h(t', \vec{h})$, donc nous pouvons conclure que $X^{h+A}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.
- c) $X^h(t, \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) - D * (t - t')$
 $X^{h+A}(t, \vec{h}) = X^{h+A}(t', \vec{h}) + (U - D) * (t - t')$
 Dans ce cas, nous obtenons également que $X^{h+A}(t', \vec{h}) > X^h(t', \vec{h})$, alors $X^{h+A}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.

Pour ces trois cas (a, b et c) nous avons démontré que $X^{h+A}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$. Donc pour $t \in [t'_1 - \tau_1, t_1 - \tau_1[$, $X^{h+A}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.

A partir de $t = t'_1 - \tau_1$, nous avons $X^{h+A}(t, \vec{h}) = X^h(t, \vec{h}) + \Delta h_{en}$.

- Si $t \in [t'_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$ nous avons trois cas pour $X^h(t, \vec{h})$:
 - a) $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^A(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^A(t) = U$

Soit $t' \in [t'_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$, tel que $t' \leq t$ et avec $X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) \geq X^h(t', \vec{h})$

$$\begin{aligned} \text{a) } X^h(t, \vec{h}) &= X^h(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) \\ X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) &= X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (D - D) * (t - t') = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) = X^h(t', \vec{h}) + \Delta h_{en}. \end{aligned}$$

Comme $\Delta h_{en} > 0$, donc $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) > X^h(t, \vec{h})$.

$$\begin{aligned} \text{b) } X^h(t, \vec{h}) &= X^h(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) - D * (t - t') \\ X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) &= X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (-D) * (t - t') = X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) - D * (t - t') \\ &= X^h(t', \vec{h}) + \Delta h_{en} - D * (t - t') \end{aligned}$$

Nous avons donc $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) > X^h(t, \vec{h})$.

$$\begin{aligned} \text{c) } X^h(t, \vec{h}) &= X^h(t', \vec{h}) + (U - D) * (t - t') \\ X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) &= X^{h+\Delta}(t', \vec{h}) + (U - D) * (t - t') = X^h(t', \vec{h}) + \Delta h_{en} + (U - D) * (t - t'). \end{aligned}$$

Donc $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) > X^h(t, \vec{h})$.

Pour les trois cas possibles dans l'intervalle $[t'_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$, nous avons prouvé que $X^{h+\Delta}(t, \vec{h}) \geq X^h(t, \vec{h})$.

A partir de $t = t_4 - \tau 1$, les cas possibles sont ceux étudiés pour $t \in [t'_1 - \tau 1, t_4 - \tau 1[$.

Nous avons prouvé que la trajectoire nominale du niveau de stock $X^h(t, \vec{h})$ est inférieure ou égale à la trajectoire perturbée du niveau de stock $X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$ ($X^h(t, \vec{h}) \leq X^{h+\Delta}(t, \vec{h})$) pour $t \in [0, t - \tau 1[$. Et les différents intervalles étudiés représentent tous les cas de figure possible du cas 2.

C.Q.F.D.

Lemme 3.4. $e(t) \leq e^A(t) \leq e(t) + \Delta e, \forall t$.

Preuve du Lemme 3.4.

Par l'hypothèse 3.1, nous savons que la trajectoire perturbée du niveau de stock est construite à partir du moment auquel la trajectoire nominale du niveau de stock atteint le point de séparation h_{en} . De plus, la perturbation dans la trajectoire des émissions dépend de la perturbation dans le niveau de stock. Nous pouvons donc assumer que pour $t \in [0, t_1[$ $e(t) = e^A(t)$.

Ensuite, nous étudions les trajectoires des émissions dans les intervalles de temps $[t_1, t'_1[$ et $[t'_1, t_4[$.

Nous avons donc :

- Si $t \in [t_1, t'_1[$

- a) Si $e(t) = e^\Delta(t)$ et $e^\Delta(t) < e(t) + \Delta e$, $u(t) = U$ et $u^\Delta(t) = U$.
- b) Si $e(t) < e^\Delta(t) < e(t) + \Delta e$, $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = U$.
- c) Si $e^\Delta(t) = e(t) + \Delta e$, $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = D$.

Soit $t' \in [t_1, t'_1]$, tel que $t' \leq t$

$$e(t) = e(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u(s) * \theta) ds \quad (A.6.3)$$

$$e^\Delta(t) = e^\Delta(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u^\Delta(s) * \theta) ds \quad (A.6.4)$$

Avec $e^\Delta(t') \geq e(t')$.

- a) $e(t) = e(t') + U * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + U * \theta * (t - t') = e^\Delta(t')$
 Nous savons que $e^\Delta(t') \geq e(t')$, donc $e^\Delta(t) \geq e(t)$.
- b) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + U * \theta * (t - t')$
 Comme nous savons que $e^\Delta(t') \geq e(t')$ et $U > D$, alors $e^\Delta(t) > e(t)$.
- c) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + D * \theta * (t - t')$
 Ensuite nous savons $e^\Delta(t') \geq e(t')$ et $u^\Delta(t) > u(t)$, donc $e^\Delta(t) > e(t)$.

Pour les trois cas possibles de l'intervalle $[t_1, t'_1]$, nous avons prouvé que $e^\Delta(t) \geq e(t)$.

A partir de $t = t'_1$, nous avons $e^\Delta(t) = e(t) + \Delta e = e(t) + \Delta h_{en} * \theta$ par l'équation (3.28).

- Si $t \in [t'_1, t_4]$ nous avons :
 - a) $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^\Delta(t) = U$

Soit $t' \in [t'_1, t_4]$, tel que $t' \leq t$.

- a) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + D * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + D * \theta * (t - t')$
 $= e(t') + \Delta h_{en} * \theta + D * \theta * (t - t')$
 Nous concluons donc que $e^\Delta(t) > e(t)$ parce que $\Delta h_{en} > 0$.

- b) $e(t) = e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e = e(t') + \Delta h_{en} * \theta$

Comme $\Delta h_{en} > 0$, alors $e^\Delta(t) > e(t)$.

- c) $e(t) = e(t') + U * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + U * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + U * \theta * (t - t')$
 $= e(t') + \Delta h_{en} * \theta + U * \theta * (t - t')$

Dans ce cas, nous avons aussi que $e^A(t) > e(t)$.

Pour les trois cas (a, b et c), nous avons démontré que $e^A(t) > e(t)$.

A partir de $t = t_4$ jusqu'à $t = T_p$, les cas possibles pour la trajectoire des émissions se répètent comme pour l'intervalle $[t'_1, t_4]$.

Nous avons prouvé que $e(t) \leq e^A(t) \leq e(t) + \Delta e$, avec $\Delta e = \Delta h_{en} * \theta$ comme dans l'équation (3.28). Dans les intervalles étudiés, nous avons considéré tous les cas de figure possibles pour la trajectoire des émissions.

C.Q.F.D.

Preuve du lemme 3.6.

Par l'hypothèse 3.8 nous savons que pour $t \in [0, t'_1]$, $e(t) = e^A(t)$.

Nous considérons les intervalles : $[t'_1, t_1]$ et $[t_1, t_4]$.

Nous avons donc :

- Si $t \in [t'_1, t_1]$
 - a) Si $e(t) < e^A(t) < e(t) + \Delta e$, $u(t) = 0$ et $u^A(t) = D$
 - b) Si $e(t) = e^A(t)$, $u(t) = 0$ et $u^A(t) = 0$
 - c) Si $e^A(t) = e(t) + \Delta e$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$

Soit $t' \in [t'_1, t_1]$, tel que $t' \leq t$

$$e(t) = e(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u(s) * \theta) ds \quad (A.6.5)$$

$$e^A(t) = e^A(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u^A(s) * \theta) ds \quad (A.6.6)$$

Avec $e^A(t') \geq e(t')$.

- a) $e(t) = e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^A(t) = e^A(t') + D * \theta * (t - t')$
 Nous savons que $e^A(t') \geq e(t')$ et $u^A(t) > u(t)$, donc $e^A(t) > e(t)$.

- b) $e(t) = e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^A(t) = e^A(t') + 0 * \theta * (t - t') = e^A(t')$
 Comme $e^A(t') \geq e(t')$, alors $e^A(t) \geq e(t)$.

- c) La démonstration de ce cas est la même que pour le système de production avec prise en compte du critère environnemental. Elle est donnée comme suit :
 $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^A(t) = e^A(t') + D * \theta * (t - t')$
 Comme $e^A(t') \geq e(t')$ donc $e^A(t) \geq e(t)$.

Pour les trois cas possibles de l'intervalle $[t'_1, t_1[$, nous avons prouvé que $e^A(t) \geq e(t)$.
A partir de $t = t_1$, nous avons $e^A(t) = e(t) + \Delta e = e(t) + \Delta h_{soc} * \theta$.

- Si $t \in [t_1, t_4[$ nous avons :
 - a) $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^A(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^A(t) = U$

La démonstration de ces trois cas est similaire à la démonstration pour le système de production avec prise en compte du critère environnemental p. 74. Elle est donnée comme suit :

Soit $t' \in [t_1, t_4[$, tel que $t' \leq t$.

- a) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^A(t) = e^A(t') + D * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + D * \theta * (t - t')$
 $= e(t') + \Delta h_{soc} * \theta + D * \theta * (t - t')$
 Puisque $\Delta h_{soc} * \theta > 0$, nous concluons donc que $e^A(t) > e(t)$.
- b) $e(t) = e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^A(t) = e^A(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e = e(t') + \Delta h_{soc} * \theta$

Similairement, comme $e^A(t') \geq e(t')$, donc $e^A(t) > e(t)$.

- c) $e(t) = e(t') + U * \theta * (t - t')$
 $e^A(t) = e^A(t') + U * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + U * \theta * (t - t')$
 $= e(t') + \Delta h_{soc} * \theta + U * \theta * (t - t')$

Dans ce cas, nous avons aussi $e^A(t) > e(t)$, parce que $\Delta h_{soc} * \theta > 0$.

Pour les trois cas (a, b et c), nous avons prouvé que $e^A(t) > e(t)$.

A partir de $t = t_4$ jusqu'à T_p , les cas possibles sont ceux considérés dans l'intervalle $[t_1, t_4[$.

Nous avons prouvé que $e(t) \leq e^A(t) \leq e(t) + \Delta e = e(t) + \Delta h_{soc} * \theta$. Dans les intervalles étudiés, nous avons considéré tous les cas de figure possibles pour la trajectoire des émissions environnementales.

C.Q.F.D.

Preuve du lemme 3.7.

Par l'hypothèse 3.8, nous savons que la trajectoire perturbée des émissions nocives pour la santé est construite à partir du moment auquel le niveau de stock atteint le point de séparation h_{soc} . Donc pour $t \in [0, t'_1[$, $s(t) = s^A(t)$.

Nous étudions les intervalles étudiés pour la démonstration du lemme 3.6. : $[t'_1, t_1[$ et $[t_1, t_4[$.
Nous avons donc :

- Si $t \in [t'_1, t_1[$

- a) Si $L_{soc} < s^\Delta(t) < s(t) + \Delta ss$, $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = D$
- b) Si $s(t) = s^\Delta(t) = L_{soc}$, $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = 0$
- c) Si $s^\Delta(t) = L_{soc} + \Delta ss = s(t) + \Delta ss$, $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = D$

Soit $t' \in [t'_1, t_1[$, tel que $t' \leq t$.

$$s(t) = s(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u(s) * \sigma) ds \quad (A.6.7)$$

$$s^\Delta(t) = s^\Delta(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u^\Delta(s) * \sigma) ds \quad (A.6.8)$$

Avec $s^\Delta(t') \geq s(t')$.

- a) $s(t) = s(t') + 0 * \sigma * (t - t') = s(t')$
 $s^\Delta(t) = s^\Delta(t') + D * \sigma * (t - t')$
 Nous savons que $s^\Delta(t') \geq s(t')$ et $u^\Delta(t) > u(t)$, donc $s^\Delta(t) > s(t)$.
- b) $s(t) = s(t') + 0 * \sigma * (t - t') = s(t')$
 $s^\Delta(t) = s^\Delta(t') + 0 * \sigma * (t - t') = s^\Delta(t')$
 Puisque $s^\Delta(t') \geq s(t')$, alors $s^\Delta(t) \geq s(t)$.
- c) $s(t) = s(t') + D * \sigma * (t - t')$
 $s^\Delta(t) = s^\Delta(t') + D * \sigma * (t - t')$
 Comme $s^\Delta(t') \geq s(t')$ donc $s^\Delta(t) \geq s(t)$.

Pour ces trois cas possibles dans l'intervalle $[t'_1, t_1[$, nous avons démontré que $s^\Delta(t) \geq s(t)$.

A partir de $t = t_1$, nous avons $s^\Delta(t) = s(t) + \Delta ss = s(t) + \Delta h_{soc} * \sigma$.

- Si $t \in [t_1, t_4[$ nous avons :
 - a) $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^\Delta(t) = U$

Soit $t' \in [t_1, t_4[$, tel que $t' \leq t$.

- a) $s(t) = s(t') + D * \sigma * (t - t')$
 $s^\Delta(t) = s^\Delta(t') + D * \sigma * (t - t') = s(t') + \Delta ss + D * \sigma * (t - t')$
 $= s(t') + \Delta h_{soc} * \sigma + D * \sigma * (t - t')$
 Puisque $\Delta h_{soc} * \sigma > 0$, nous concluons donc que $s^\Delta(t) > s(t)$.
- b) $s(t) = s(t') + 0 * \sigma * (t - t') = s(t')$
 $s^\Delta(t) = s^\Delta(t') + 0 * \sigma * (t - t') = s(t') + \Delta ss = s(t') + \Delta h_{soc} * \sigma$

Similairement $\Delta h_{soc} * \sigma > 0$, donc $s^\Delta(t) > s(t)$.

- c) $s(t) = s(t') + U * \sigma * (t - t')$
 $s^\Delta(t) = s^\Delta(t') + U * \sigma * (t - t') = s(t') + \Delta ss + U * \sigma * (t - t')$
 $= s(t') + \Delta h_{soc} * \sigma + U * \sigma * (t - t')$

Dans ce cas, nous avons aussi $s^A(t) > s(t)$.

Pour ces trois cas, nous avons démontré que $s^A(t) > s(t)$.

A partir de $t = t_4$ jusqu'à T_p les cas possibles sont ceux-ci considérés dans l'intervalle $[t_1, t_4]$.

Nous avons prouvé par des intervalles que $s(t) \leq s^A(t) \leq s(t) + \Delta s \leq s(t) + \Delta h_{soc} * \sigma$. Dans ces intervalles, nous avons considéré tous les cas de figure possibles pour la trajectoire des émissions nocives pour la santé.

C.Q.F.D.

Démonstration Corollaire 3.1. :

Soit $Y^h(t)$ la position du stock pour laquelle l'évolution est donnée par l'équation (2.4). Pour rappel, elle est donnée par :

$$dY^h(t)/dt = u(t) - d(t - \tau_2), \text{ avec } d(t - \tau_2) = D$$

De (2.4) et des conditions initiales, nous avons :

$$Y^h(t) = Y_0^h + \int_0^t (u(s) - D)ds \quad (A.6.9)$$

$$\begin{aligned} X^h(t, \vec{h}) &= X_0 + \int_0^t (u(s - \tau_1) - D)ds \\ &= X_0 + \int_0^{\tau_1} (u(s - \tau_1) - D)ds + \int_{\tau_1}^t (u(s - \tau_1) - D)ds \end{aligned} \quad (A.6.10)$$

Soit $Y^h(t)$ la position du stock, laquelle est donnée par l'équation (2.5). Pour rappel celle-ci est donnée par :

$$Y^h(t) = Xtd_1(t) + Xtd_2(t) + X^h(t, h).$$

Soit $Xtd_1(t)$ la quantité totale de pièces transitant entre la machine et le stock et $Xtd_2(t)$ le flux de pièces transitant entre le stock et le client. Ces quantités sont données par les équations (2.6) et (2.6). Elles sont données pour rappel ci-dessous.

$$Xtd_1(t) = \int_{t-\tau_1}^t u(s)ds.$$

$$Xtd_2(t) = \int_{t-\tau_2}^t d(s)ds.$$

Ensuite, par (2.5), (2.6) et (2.7) et par les conditions initiales, nous obtenons :

$$Y_0^h = X_0 + \int_{-\tau_1}^0 (u(s))ds + \int_{-\tau_2}^0 Dds \quad (A.6.11)$$

$$Y_0^h = X_0^h + \int_{-\tau_1}^0 (u(s))ds + D \cdot \tau_2 \quad (\text{A.6.12})$$

$$X_0^h = Y_0^h - \int_{-\tau_1}^0 (u(s))ds - D \cdot \tau_2 \quad (\text{A.6.13})$$

De (A.6.10), si $s = s - \tau_1$ nous avons :

$$X^h(t, \vec{h}) = X_0^h + \int_{-\tau_1}^0 (u(s))ds + \int_0^{t-\tau_1} (u(s) - D)ds - D \cdot \tau_1 \quad (\text{A.6.14})$$

En remplaçant (A.6.13) dans (A.6.14) nous obtenons :

$$\begin{aligned} X^h(t, \vec{h}) &= Y_0^h - \int_{-\tau_1}^0 (u(s))ds - D \cdot \tau_2 + \int_{-\tau_1}^0 (u(s))ds + \int_0^{t-\tau_1} (u(s) - D)ds - D \cdot \tau_1 \\ X^h(t, \vec{h}) &= Y_0^h + \int_0^{t-\tau_1} (u(s) - D)ds - D \cdot \tau_1 - D \cdot \tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A.6.15})$$

Si $t = t - \tau_1$

$$\begin{aligned} X^h(t - \tau_1, \vec{h}) &= Y_0^h + \int_0^t (u(s) - D)ds - D \cdot \tau_1 - D \cdot \tau_2 \\ X^h(t - \tau_1, \vec{h}) + D \cdot \tau_1 + D \cdot \tau_2 &= Y_0^h + \int_0^t (u(s) - D)ds \end{aligned} \quad (\text{A.6.16})$$

En remplaçant (A.6.1) dans (A.6.12) nous obtenons :

$$\begin{aligned} Y^h(t) &= X^h(t - \tau_1, \vec{h}) + D \cdot \tau_1 + D \cdot \tau_2 \\ X^h(t - \tau_1, \vec{h}) &= Y^h(t) - D \cdot \tau_1 - D \cdot \tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A.6.17})$$

C.Q.F.D.

Preuve du Lemme 3.9.

Par l'hypothèse 3.8, nous savons que la trajectoire perturbée des émissions environnementales est construite à partir du moment auquel le niveau de stock atteint le point de séparation h_{soc} . Donc selon la figure 3.8 p. 100 pour $e \in [0, t_1[$, $e(t) = e^A(t)$.

Ensuite, nous étudions les intervalles $[t_1, t'_1[$ et $[t'_1, t_4[$ selon la figure 3.6.

Pour les trajectoires des émissions environnementales nous avons :

- Si $t \in [t_1, t'_1[$
 - a) Si $e(t) = e^A(t)$ et $e^A(t) < e(t) + \Delta e$, $u(t) = U$ et $u^A(t) = U$.
 - b) Si $e(t) < e^A(t) < e(t) + \Delta e$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = U$.
 - c) Si $e^A(t) = e(t) + \Delta e$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$.

Ces trois cas sont identiques à ceux étudiés pour le cas 1 pour le même intervalle. La démonstration est donnée ci-dessous :

Soit $t' \in [t_1, t'_1[$, tel que $t' \leq t$

$$e(t) = e(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u(s) * \theta) ds \quad (\text{A.6.18})$$

$$e^\Delta(t) = e^\Delta(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u^\Delta(s) * \theta) ds \quad (\text{A.6.19})$$

Avec $e^\Delta(t') \geq e(t')$.

- a) $e(t) = e(t') + U * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + U * \theta * (t - t') = e^\Delta(t')$
 Nous savons que $e^\Delta(t') \geq e(t')$, donc $e^\Delta(t) \geq e(t)$.
- b) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + U * \theta * (t - t')$
 Comme nous savons que $e^\Delta(t') \geq e(t')$ et $u^\Delta(t) > u(t)$, donc $e^\Delta(t) > e(t)$.
- c) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + D * \theta * (t - t')$
 Nous concluons que $e^\Delta(t) > e(t)$ parce que $e^\Delta(t') \geq e(t')$.

Pour les trois cas possibles de l'intervalle $[t_1, t'_1[$, nous avons prouvé que $e^\Delta(t) \geq e(t)$.
 A partir de $t = t'_1$, nous avons $e^\Delta(t) = e(t) + \Delta e = e(t) + \Delta h_{soc} * \theta$ par l'équation (3.70).

- Si $t \in [t'_1, t_4[$ nous avons :
 - a) $u(t) = D$ et $u^\Delta(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^\Delta(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^\Delta(t) = U$

Soit $t' \in [t'_1, t_4[$, tel que $t' \leq t$.

- a) $e(t) = e(t') + D * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + D * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + D * \theta * (t - t')$
 $= e(t') + \Delta h_{soc} * \theta + D * \theta * (t - t')$
 Nous concluons donc que $e^\Delta(t) > e(t)$ parce que $\Delta h_{soc} * \theta > 0$.
- b) $e(t) = e(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + 0 * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e = e(t') + \Delta h_{soc} * \theta$
 Comme $\Delta h_{soc} * \theta > 0$, alors $e^\Delta(t) > e(t)$.
- c) $e(t) = e(t') + U * \theta * (t - t')$
 $e^\Delta(t) = e^\Delta(t') + U * \theta * (t - t') = e(t') + \Delta e + U * \theta * (t - t')$
 $= e(t') + \Delta h_{soc} * \theta + U * \theta * (t - t')$

Dans ce cas, nous avons également $e^A(t) > e(t)$ parce que $\Delta h_{soc} * \theta > 0$. Pour les trois cas, nous avons démontré que $e^A(t) > e(t)$.

A partir de $t = t_4$ et jusqu'à $t = i.T_p$, les cas possibles sont ceux étudiés pour l'intervalle $[t'_1, t_4]$.

Nous avons prouvé que $e(t) \leq e^A(t) \leq e(t) + \Delta e$, avec $\Delta e = \Delta h_{soc} * \theta$ comme dans l'équation (3.70). Dans les intervalles étudiés, nous avons considéré tous les cas de figure possibles pour la trajectoire des émissions environnementales.

C.Q.F.D.

Preuve du Lemme 3.10.

De même, par l'hypothèse 3.8 p.100, nous savons que la trajectoire perturbée des émissions nocives pour la santé est construite à partir du moment auquel la trajectoire nominale du niveau de stock atteint le point de séparation h_{soc} . Nous savons alors que $s(t) = s^A(t)$ pour $t \in [0, t_1]$.

Nous étudions ensuite les intervalles étudiés dans la preuve du lemme 3.9 selon la figure 3.8 p.100 à savoir $[t_1, t'_1]$ et $[t'_1, t_4]$. Nous avons donc :

- Si $t \in [t_1, t'_1]$
 - a) Si $s(t) = s^A(t)$ et $s^A(t) < s(t) + \Delta ss$, $u(t) = U$ et $u^A(t) = U$.
 - b) Si $s(t) < s^A(t) < s(t) + \Delta ss$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = U$.
 - c) Si $s^A(t) = s(t) + \Delta ss$, $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$.

Soit $t' \in [t_1, t'_1]$, tel que $t' \leq t$

$$s(t) = s(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u(s) * \sigma) ds \quad (A.6.20)$$

$$s^A(t) = s^A(t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} (u^A(s) * \sigma) ds \quad (A.6.21)$$

Avec $s^A(t') \geq s(t')$.

- a) $s(t) = s(t') + U * \sigma * (t - t') = s(t')$
 $s^A(t) = s^A(t') + U * \sigma * (t - t') = s^A(t')$
 Nous savons que $s^A(t') \geq s(t')$, donc $s^A(t) \geq s(t)$.
- b) $s(t) = s(t') + D * \sigma * (t - t')$
 $s^A(t) = s^A(t') + U * \sigma * (t - t')$
 Comme nous savons que $s^A(t') \geq s(t')$ et $u^A(t) > u(t)$, alors $s^A(t) > s(t)$.
- c) $s(t) = s(t') + D * \sigma * (t - t')$
 $s^A(t) = s^A(t') + D * \sigma * (t - t')$
 Nous concluons que $s^A(t) > s(t)$ parce que $s^A(t') \geq s(t')$.

Pour les trois cas possibles de l'intervalle $[t_1, t'_1]$, nous avons prouvé que $s^A(t) \geq s(t)$.

A partir de $t = t'_1$, nous avons $s^A(t) = s(t) + \Delta ss = s(t) + \Delta h_{soc} * \sigma$ par l'équation (3.81).

- Si $t \in [t'_1, t_4]$ nous avons :
 - a) $u(t) = D$ et $u^A(t) = D$
 - b) $u(t) = 0$ et $u^A(t) = 0$
 - c) $u(t) = U$ et $u^A(t) = U$

Soit $t' \in [t'_1, t_4]$, tel que $t' \leq t$.

- a) $s(t) = s(t') + D * \sigma * (t - t')$
 $s^A(t) = s^A(t') + D * \sigma * (t - t') = s(t') + \Delta ss + D * \sigma * (t - t')$
 $= s(t') + \Delta h_{en} * \sigma + D * \sigma * (t - t')$
 Nous concluons donc que $s^A(t) > s(t)$ parce que $\Delta h_{soc} > 0$.
- b) $s(t) = s(t') + 0 * \sigma * (t - t') = s(t')$
 $s^A(t) = s^A(t') + 0 * \sigma * (t - t') = s(t') + \Delta ss = s(t') + \Delta h_{soc} * \sigma$
 Comme $\Delta h_{soc} > 0$, alors $s^A(t) > s(t)$.
- c) $s(t) = s(t') + U * \sigma * (t - t')$
 $s^A(t) = s^A(t') + U * \sigma * (t - t') = s(t') + \Delta ss + U * \sigma * (t - t')$
 $= s(t') + \Delta h_{soc} * \sigma + U * \sigma * (t - t')$

Dans ce cas, nous avons aussi $s^A(t) > s(t)$ puisque $\Delta h_{soc} * \sigma > 0$.

Pour les trois cas, nous avons démontré que $s^A(t) > s(t)$.

De $t = t_4$ jusqu'à $t = T_p$ le cas de figure possible ($u(t) = D$) a été étudié pour l'intervalle $[t'_1, t_4]$.

Nous avons prouvé que $s(t) \leq s^A(t) \leq s(t) + \Delta ss$, avec $\Delta ss = \Delta h_{soc} * \sigma$ comme dans l'équation (3.81). Dans les intervalles étudiés, nous avons considéré tous les cas de figure possibles pour la trajectoire des émissions nocives pour la santé.

C.Q.F.D.

Annexe 7 : Démonstrations pour l'étude des trajectoires du chapitre 4

Lemme 4.1. : $y(t) \leq y^A(t) \leq y(t) + \Delta, \forall t$.

Preuve du Lemme 4.1. :

La démonstration de ce lemme est réalisée sur la base de la figure 4.2, laquelle représente une trajectoire probable (nominale et perturbée) de la quantité de pièces dans le transport et dans le stock. Nous faisons en sorte que cette figure représente les différents états de $y(t)$. Elle est faite avec les conditions initiales établies pour la politique Base Stock : $y(0) = SB_{f_1} + D, y^A(0) = SB_{f_1} + D + \Delta, u_f(t) < u(t)$. Cette démonstration est menée sur les intervalles : $[0, t_2[, [t_2, t_3[, [t_3, t_4[, [t_4, t_5[, [t_5, t_6[, [t_6, t_7[$.

- Pour $t \in [0, t_2[$:

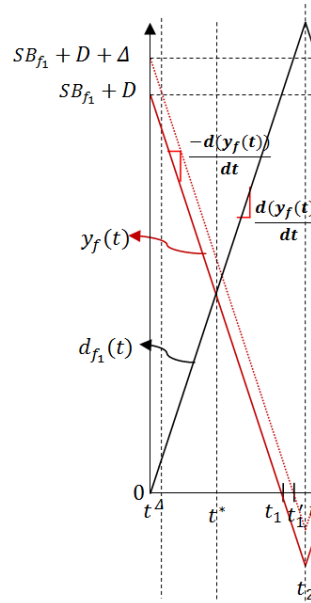


Figure A.7.1. Zoom de l'intervalle $[0, t_2[$

$$\frac{-d(y(t))}{dt} = u_f(t) - u(t).$$

Les cas dans lesquels $u_f(t) < u(t)$ sont montrés ci-dessous :

Avec $U_{fmax} > U_u, U_u > D$ et $U_{fmax} > D$.

$$u_f(t) - u(t) = \begin{cases} 0 - U_u, & \text{si } \sigma_f(t) = 0, \alpha(t) = 1, d_u(t) > 0 \text{ et } xt_b(t) \geq 0, \\ 0 - D, & \text{si } \sigma_f(t) = 0, \alpha(t) = 1, d_u(t) = 0 \text{ et } xt_b(t) \geq 0, \\ D - U_u, & \text{si } \sigma_f(t) = 1, \alpha(t) = 1, d_u(t) = 0 \text{ et } xt_b(t) \geq 0. \end{cases}$$

Soit $t' \in [0, t_2[,$ tel que $t' < t$.

Entre 0 et t_2 nous avons :

$$y(t) = y(t') + (u_f(t) - u(t)) * (t - t'). \quad (A.7.1)$$

$$y^A(t) = y(t') + (u_f(t) - u(t)) * (t - t') + \varphi(t). \quad (A.7.2)$$

Pour les 3 cas, nous nous avons :

- Si $u_f(t) - u(t) = -U_u$

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t') + (-U_u) * (t - t') = y(t') - U_u * (t - t'). \\ y^A(t) &= y(t') + (-U_u) * (t - t') + \varphi(t) = y(t') - U_u * (t - t') + \varphi(t). \\ y^A(t) - y(t) &= y(t') - U_u * (t - t') + \varphi(t) - y(t') + U_u * (t - t'). \\ y^A(t) - y(t) &= \varphi(t). \end{aligned}$$

Par conséquent $y(t) < y^A(t)$.

- Si $u_f(t) - u(t) = -D$.

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t') + (-D) * (t - t') = y(t') - D * (t - t'). \\ y^A(t) &= y(t') + (-D) * (t - t') + \varphi(t) = y(t') - D * (t - t') + \varphi(t). \\ y^A(t) - y(t) &= y(t') - D * (t - t') + \varphi(t) - y(t') + D * (t - t'). \\ y^A(t) - y(t) &= \varphi(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons aussi $y(t) < y^A(t)$.

- Si $u_f(t) - u(t) = D - U_u$, avec $D < U_u$.

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t') + (D - U_u) * (t - t'). \\ y^A(t) &= y(t') + (D - U_u) * (t - t') + \varphi(t). \\ y^A(t) - y(t) &= y(t') + (D - U_u) * (t - t') + \varphi(t) - y(t') - (D - U_u) * (t - t'). \\ y^A(t) - y(t) &= \varphi(t). \end{aligned}$$

Ensuite, $y(t) < y^A(t)$.

Nous concluons que pour $t \in [0, t_2[$ il existe un déphasage $\varphi(t)$ entre les deux trajectoires et $y^A(t) > y(t)$.

- Pour $t \in [t_2, t_3[$:

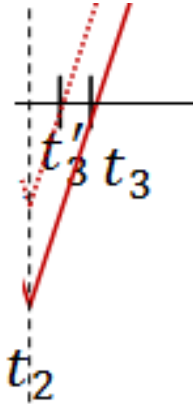


Figure A.7.2. Zoom de l'intervalle $[t_2, t_3[$

Soit $t' \in [t_2, t_3[$, tel que $t' < t$.

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t') + (u_f(t) - u(t)) * (t - t'). \\ y^A(t) &= y(t') + (u_f(t) - u(t)) * (t - t') + \phi(t). \end{aligned}$$

Les cas dans lesquels $u_f(t) > u(t)$ sont donnés ci-dessous :

$$u_f(t) - u(t) = \begin{cases} U_{fmax} - 0, & \text{si } \sigma_f(t) = 1, \alpha(t) = 0 \text{ et } SB_{f_1} + D > y_f(t), \\ U_{fmax} - \min(D, U_u), & \text{si } \sigma_f(t) = 1, \alpha(t) = 1, d_u(t) \geq 0, SB_{f_1} + D > y_f(t) \text{ et } xt_b(t) \geq 0. \end{cases}$$

- Si $u_f(t) - u(t) = U_{fmax} - 0 = U_{fmax}$.

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t') + U_{fmax} * (t - t'). \\ y^A(t) &= y(t') + U_{fmax} * (t - t') + \phi(t). \\ y^A(t) - y(t) &= y(t') + U_{fmax} * (t - t') + \phi(t) - y(t') - U_{fmax} * (t - t'). \\ y^A(t) - y(t) &= \phi(t). \end{aligned}$$

Par conséquent $y^A(t) > y(t)$.

- Si $u_f(t) - u(t) = U_{fmax} - D$.

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t') + (U_{fmax} - D) * (t - t'). \\ y^A(t) &= y(t') + (U_{fmax} - D) * (t - t') + \phi(t). \\ y^A(t) - y(t) &= y(t') + (U_{fmax} - D) * (t - t') + \phi(t) - y(t') - (U_{fmax} - D) * (t - t'). \\ y^A(t) - y(t) &= \phi(t). \end{aligned}$$

D'où, nous obtenons $y^A(t) > y(t)$.

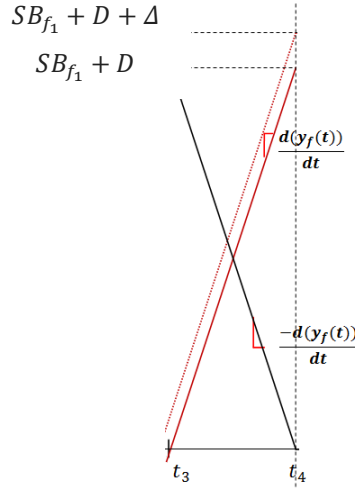
- Si $u_f(t) - u(t) = U_{fmax} - U_u$.

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t') + (U_{fmax} - U_u) * (t - t'). \\ y^A(t) &= y(t') + (U_{fmax} - U_u) * (t - t') + \phi(t). \\ y^A(t) - y(t) &= y(t') + (U_{fmax} - U_u) * (t - t') + \phi(t) - y(t') - (U_{fmax} - U_u) * (t - t'). \\ y^A(t) - y(t) &= \phi(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, $y^A(t) > y(t)$.

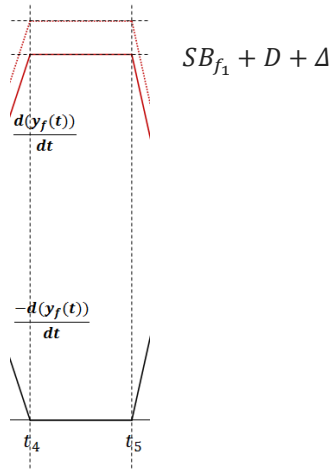
Nous concluons que pour $t \in [t_2, t_3[$, il existe un décalage $\phi(t)$ entre la trajectoire perturbée $y^A(t)$ et la trajectoire nominale $y(t)$, et $y^A(t) > y(t)$.

- Pour $t \in [t_3, t_4[$:


 Figure A.7.3. Zoom de l'intervalle $[t_3, t_4[$.

De la démonstration précédente, nous connaissons que $y^\Delta(t) = y(t) + \varphi(t)$ et nous savons aussi qu'un changement de $u_f(t)$ ou de $u(t)$, se produit en même temps dans la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée. Nous connaissons également les pentes $\frac{d(y(t))}{dt}$ et $\frac{d(y^\Delta(t))}{dt}$ qui sont égales et pour $t \in [t_2, t_4[$, il n'y a pas de changement de signe des pentes $\frac{d(y(t))}{dt}$ et $\frac{d(y^\Delta(t))}{dt}$. Nous pouvons conclure qu'à $t = t_4$, $y^\Delta(t) = y(t) + \Delta$.

- Pour $t \in [t_4, t_5[$:


 Figure A.7.4. Zoom de l'intervalle $[t_4, t_5[$

Soient les points l_1 et l_2 lesquels sont définis par $l_1 = (t_4, SB_{f_1} + D)$ et $l_2 = (t_4, SB_{f_1} + D + \Delta)$.

Nous calculons la distance existante entre l_1 et l_2 , notée par d_1 :

$$d_1 = \sqrt{(SB_{f_1} + D + \Delta - SB_{f_1} - D)^2 + (t_4 - t_4)^2} \quad (A.7.3)$$

$$\boxed{d_1 = \Delta}$$

Soient les points m_1 et m_2 déterminés par :

$$m_1 = (t_5, SB_{f_1} + D) \text{ et } m_2 = (t_5, SB_{f_1} + D + \Delta).$$

Nous calculons la distance existante entre m_1 et m_2 , notée par d_2 :

$$d_2 = \sqrt{(SB_{f_1} + D + \Delta - SB_{f_1} - D)^2 + (t_5 - t_5)^2} \quad (A.7.4)$$

$$\boxed{d_2 = \Delta}$$

Donc, nous avons $d_1 = d_2$, dans les points extrêmes des deux segments compris entre t_4 et t_5 . Nous pouvons conclure que dans l'intervalle $[t_4, t_5[$, il y a un écart entre $y(t)$ et $y^A(t)$, avec $y^A(t) > y(t)$. L'écart est égal à Δ . Par conséquent, $y^A(t) = y(t) + \Delta$.

- Pour $t \in [t_5, t_6[$

Dans cet intervalle, nous avons les mêmes cas que pour $t \in [0, t_2[$. Nous concluons aussi que pour $t \in [t_5, t_6[$, il y a un décalage $\varphi(t)$ entre la trajectoire perturbée $y^A(t)$ et la trajectoire nominale $y(t)$, et $y^A(t) = y(t) + \varphi(t)$.

- Pour $t \in [t_6, t_7[$

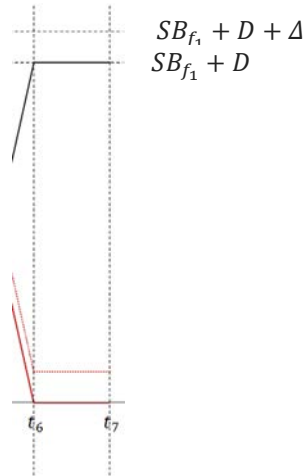


Figure A.7.5. Zoom de l'intervalle $[t_6, t_7[$.

Soient l_1 et l_2 les points définis par : $l_1 = (t_6, 0)$ et $l_2 = (t_6, \varphi(t))$.

Nous calculons la distance existante entre l_1 et l_2 , notée par d_1 :

$$d_1 = \sqrt{(\varphi(t) - 0)^2 + (t_6 - t_6)^2} \quad (A.7.5)$$

$$\boxed{d_1 = \varphi(t)}$$

Soient m_1 et m_2 les points définis par $m_1 = (t_7, 0)$ et $m_2 = (t_7, \varphi(t))$.

Nous calculons la distance existante entre m_1 et m_2 , notée par d_2 :

$$d_2 = \sqrt{(\varphi(t) - 0)^2 + (t_7 - t_7)^2} \quad (A.7.6)$$

$d_2 = \varphi(t)$

Nous avons $d_1 = d_2$, dans les points extrêmes des deux segments compris entre t_6 et t_7 . Nous pouvons conclure que dans l'intervalle $[t_6, t_7[$, il existe un écart entre $y(t)$ et $y^A(t)$, avec $y^A(t) > y(t)$. Cet écart est égal à $\varphi(t)$. Par conséquent, $y^A(t) = y(t) + \varphi(t)$.

Ces différents intervalles représentent toutes les trajectoires possibles que peuvent suivre $y(t)$ et $y^A(t)$ avec les mêmes conditions initiales. Ainsi, ces différents cas se répètent tout au long de l'horizon du temps.

Nous avons démontré par des intervalles, que $\forall t \in [0, t_7[$, il existe un écart $\varphi(t)$, entre la trajectoire nominale et la trajectoire perturbée de la position du stock ($y(t)$) du premier étage et $y(t) \leq y^A(t) \leq y(t) + \Delta$.