UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE
GeoRessources - RP2E

Thèse

Présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

spécialité « Mécanique - Génie Civil »

par

Maxime FAIVRE

Modélisation du comportement hydrogéomécanique d'un réseau de failles sous l'effet des variations de l'état de contrainte

Thèse soutenue publiquement le 06/07/2016 devant le jury composé de :

Pr. Nicolas Moës	Laboratoire GeM - École Centrale de Nantes	Rapporteur
Pr. Brice Lecampion	École Polytechnique Fédérale de Lausanne	Rapporteur
Pr. Jianfu Shao	Laboratoire de Mécanique de Lille - Université de Lille	Examinateur
Dr. Patrick Massin	IMSIA - EDF R&D	Examinateur
Dr. Fabrice Golfier	Laboratoire GeoRessources - Université de Lorraine	Directeur
Dr. Richard Giot	Laboratoire GeoRessources - Université de Lorraine	Co-directeur
Dr. Darius Sayedi	ANDRA	Invité

Laboratoire GeoRessources - ENSG,
Rue du Doyen Marcel Roubault,
54518 VANDOEUVRE-LES-NANCY CEDEX.

Remerciements

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes encadrants, Fabrice Golfier et Richard Giot, pour l'encadrement de qualité qu'ils ont pu m'apporter au cours de ces trois années de thèse. Ce fut un réel plaisir de travailler sous leur direction tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. J'ai énormément appris et évolué grâce à leurs conseils. Je souhaite également remercier Patrick Massin pour sa disponibilité et son engagement permanent tout au long de ma thèse. Je le remercie également d'avoir accepté de participer à mon Jury de Thèse en tant qu'examinateur. Je n'oublie pas non plus mon collègue de travail, Bertrand Paul, avec qui j'ai eu la chance de travailler pendant toute la durée de ma thèse.

Enfin mes remerciements vont d'abord à Jianfu Shao pour avoir accepté de participer et de présider mon Jury de Thèse. Ensuite, je remercie les membres du Jury, Nicolas Moës, Brice Lecampion, Patrick Massin et Darius Sayedi pour avoir accepté de juger mes travaux de thèse.

Nancy, le 31 août 2016.

Table des matières

Table des matières **iv**

Liste des figures **vi**

Notations **1**

1 Contexte géologique de la thèse **5**
- 1.1 Introduction . . . 6
- 1.2 La Nouvelle-Calédonie : un massif ophiolitique témoin des mécanismes de fracturation hydraulique . . . 6
  - 1.2.1 Contexte de formation de la Nouvelle-Calédonie . . . 6
  - 1.2.2 Conséquences des circulations de fluides sur la dynamique du réseau de fractures 8
- 1.3 Description et objectifs de la thèse . . . 11

2 Présentation des méthodes numériques pour la représentation et la caractérisation du milieu fracturé **13**
- 2.1 Introduction . . . 14
- 2.2 Justification du choix de la méthode XFEM . . . 15
  - 2.2.1 Des *meshless methods* 15
  - 2.2.2 ... vers des méthodes hybrides plus performantes . . . 18
- 2.3 Une alternative à l'enrichissement singulier : les modèles de zone cohésive . . . 20
- 2.4 Une manière simple de représenter les discontinuités : les level-sets . . . 27
  - 2.4.1 Propriétés des *level-sets* . . . 27
  - 2.4.2 Méthodes d'actualisation des *level-sets* . . . 29
- 2.5 Synthèse et objectifs . . . 36

3 Couplage du modèle poro-mécanique saturé avec la méthode XFEM **39**
- 3.1 Présentation du problème . . . 40
  - 3.1.1 Définition du domaine d'étude . . . 40
  - 3.1.2 Hypothèses et notations . . . 40
  - 3.1.3 Conditions aux limites . . . 41
- 3.2 Équations constitutives du modèle HM-XFEM . . . 42
  - 3.2.1 Équations pour la mécanique (cas du massif) . . . 42
  - 3.2.2 Équations pour l'hydrodynamique . . . 42
  - 3.2.3 Équations du modèle poro-mécanique . . . 43
- 3.3 Formulations variationnelles du modèle HM-XFEM . . . 45
  - 3.3.1 Espaces fonctionnels . . . 45
  - 3.3.2 Formulation faible du problème mécanique . . . 46
  - 3.3.3 Formulation faible du problème hydrodynamique . . . 50
- 3.4 Discrétisation du problème . . . 51

3.4.1 Discrétisation temporelle . . . 51
3.4.2 Formulation éléments finis : discrétisation spatiale par la méthode XFEM . . 53
3.5 Résolution du problème couplé . . . 61
3.5.1 Linéarisation du problème couplé . . . 61
3.5.2 Écriture des termes élémentaires avec XFEM . . . 64

4 Validation du modèle HM-XFEM : Application au cas du modèle KGD **71**
4.1 Introduction . . . 72
4.2 Rappel des modèles de propagation . . . 74
4.3 Problème de référence . . . 76
4.3.1 Géométrie du problème 2D et conditions aux limites . . . 76
4.3.2 Caractérisation des régimes de propagation . . . 78
4.4 Présentation de la solution analytique pour chaque régime . . . 80
4.4.1 Équations constitutives du modèle KGD . . . 80
4.4.2 Near-toughness dominated regimes : solution pour les temps courts et les temps longs . . . 82
4.4.3 Viscosity-dominated regimes . . . 83
4.5 Résultats des simulations numériques . . . 87
4.5.1 Near-storage-toughness dominated regime . . . 87
4.5.2 Near-leak-off-toughness dominated regime . . . 91
4.5.3 Storage-viscosity dominated regime . . . 94
4.5.4 Near-leak-off-viscosity dominated regime . . . 97
4.6 Synthèse . . . 99

5 Étude paramétrique du comportement d'un réseau de fractures non connectées **101**
5.1 Introduction . . . 102
5.2 Géométrie du problème 2D et conditions aux limites . . . 104
5.3 Résultats des simulations numériques . . . 107
5.3.1 Cas de référence . . . 107
5.3.2 Étude de l'influence de la viscosité du fluide sur la dynamique des fractures . 111
5.3.3 Étude de l'influence du débit d'injection sur la dynamique des fractures . . . 124
5.3.4 Étude de l'influence de l'écartement sur la dynamique des fractures . . . 131
5.3.5 Synthèse des résultats . . . 139

Conclusion générale **145**

Annexes **149**

A Annexe : Article publié **149**

B Annexe : Validation intermédiaire I **187**

C Annexe : Validation intermédiaire II **207**

Bibliographie **229**

Liste des figures

1.1 Phase d'orogenèse Rangitata - Profil SO-NE - Crétacé inférieur (-120 Ma) (extraite de [50]). . . . 7
1.2 Mise en place de la marge active du Gondwana est - Profil SO-NE - Crétacé supérieur (-90 Ma) (extraite de [50]). . . . 7
1.3 Phase d'extension des bassins et migration de la marge Pacifique - Profil SO-NE - Campanien-Paléocène (-80 Ma, -65 Ma) (extraite de [50]). . . . 7
1.4 Dynamique du bassin des Loyautés - Profil SO-NE - Éocène inférieur (-50 Ma) (extraite de [50]). . . . 7
1.5 Phase d'obduction - Profil SO-NE - Éocène supérieur (-34 Ma) (extraite de [50]). . . . 8
1.6 Mise en évidence des interactions fluide-structure. . . . 9
1.7 Carte structurale actuelle de la région du Pacifique-ouest - NC = Nouvelle-Calédonie (extraite de [206], d'après [50]). . . . 9
1.8 Profil latéritique (Nouvelle-Calédonie, type Poya) (d'après Jébrak et Marcoux [118]). . . . 10
1.9 Schéma de principe contextualisant les objectifs de la thèse. . . . 11

2.1 Un exemple de discrétisation 2D employée pour les meshless methods (extraite de [162]). . . . 16
2.2 Représentation d'une fracture non conforme au maillage et nœuds enrichis par la fonction de Heaviside (points rouges) et par les fonctions singulières (carrés bleus). . . . 20
2.3 Représentation d'un modèle de zone cohésive associé à un écoulement de fluide. 22
2.4 Évolution de la contrainte cohésive en fonction du saut de déplacement - cas de la loi linéaire régularisée (extraite de [63]). . . . 25
2.5 Représentation d'une fracture au moyen des *level-sets* : cas 2D. . . . 28
2.6 Exemple d'actualisation des *level-sets* vectorielles (extraite de [209]). . . . 34
2.7 Configuration initiale avant l'actualisation des level-sets (extraite de [52]). . . 35
2.8 Configuration après actualisation des level-sets et localisation du domaine figé (en gris) et celui concerné par l'actualisation (zone circulaire) (extraite de [52]). 36

3.1 Décomposition symbolique du domaine Ω. . . . 40
3.2 Conventions d'orientation adoptées au niveau de l'interface. . . . 41
3.3 Interprétation graphique de l'unicité de la solution en mode I (d'après Lorentz [142]). . . . 47
3.4 Régime de la loi de Talon-Curnier en mode I (d'après Lorentz [142]). . . . 49
3.5 Sous-découpage pour l'intégration et coexistence entre les éléments HM-XFEM et les éléments HM standards. . . . 55
3.6 Modification des fonctions de forme associées aux multiplicateurs de Lagrange. 57
3.7 Relations d'égalité entre les degrés de liberté associés aux champs de multiplicateurs de Lagrange (d'après Geniaut [100]). . . . 59
3.8 Relations d'égalité entre les degrés de liberté associés aux champs de multiplicateurs de Lagrange (d'après Ferte [83]). . . . 60

3.9 Représentation d'un élément quadrangulaire HM-XFEM. 61

4.1 Modèle de propagation PKN [177, 167] (extraite de [5]). 75
4.2 Modèle de propagation radiale [3] (extraite de [5]). 75
4.3 Modèle de propagation KGD [124] (extraite de [5]). 76
4.4 Géométrie et conditions aux limites. 77
4.5 Représentation du maillage de Carrier et al. [36]. 78
4.6 Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) et régime de propagation des simulations HM-XFEM. . . 80
4.7 Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [32] (near storage-toughness dominated regime) : ouverture au point d'injection (gauche) et profil de la fracture à $t = 10s$ (droite). 87
4.8 Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [32] (near storage-toughness dominated regime) : longueur de la fracture (gauche) et profil de pression nette au point d'injection (droite). 88
4.9 Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à $t = 18s$. 89
4.10 Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture et la longueur de la fracture ($K^{int} = 10^{-15}\ m^2$) : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite). 90
4.11 Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture, la longueur de la fracture et la pression nette au point d'injection ($K^{int} = 10^{-16}\ m^2$) : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite). 91
4.12 Solutions numériques et analytiques [32] pour l'ouverture au point d'injection (gauche) et le déplacement des parois à t=80s (droite) : near-leak-off-toughness dominated regime. 92
4.13 Solutions numériques et analytiques [32] pour la longueur de fracture : near-leak-off-toughness dominated regime. 92
4.14 Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à t=80s. 93
4.15 Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture et la longueur de la fracture : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite). 93
4.16 Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [7] (storage-viscosity dominated regime) : ouverture au point d'injection (gauche) et profil de la fracture à $t = 20s$ (droite). 95
4.17 Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [7] (storage-viscosity dominated regime) : longueur de la fracture (gauche) et profil de pression nette au point d'injection (droite). 95
4.18 Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à $t = 30s$. 96
4.19 Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture, la longueur de la fracture et la pression nette au point d'injection : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite). 96
4.20 Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [4] (leak-off-viscosity dominated regime) : ouverture au point d'injection (gauche) et profil de la fracture à $t = 200s$ (droite). 97
4.21 Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [4] (leak-off-viscosity dominated regime) : longueur de la fracture (gauche) et profil de pression nette au point d'injection (droite). 98
4.22 Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à $t = 200s$. 98

4.23 Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture, la longueur de la fracture et la pression nette au point d'injection : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite). 99

5.1 Représentation du domaine d'étude et conditions aux limites associées. 104
5.2 Profils des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence. 107
5.3 Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence. 108
5.4 Cartes d'iso-valeurs du déplacements relatif pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence. 109
5.5 Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence. 109
5.6 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence. 110
5.7 Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence. 110
5.8 Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) - Trajectoires d'évolution des 3 fractures pour différentes valeurs de la viscosité du fluide injecté. 111
5.9 Profils des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 112
5.10 Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 113
5.11 Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 114
5.12 Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 114
5.13 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 115
5.14 Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 115
5.15 Profils des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 116
5.16 Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 116
5.17 Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 117
5.18 Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 117
5.19 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 118
5.20 Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 119
5.21 Profils des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 120
5.22 Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 120
5.23 Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 121
5.24 Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 121

5.25 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 122
5.26 Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 123
5.27 Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) - Trajectoires d'évolution des 3 fractures pour différents débits d'injection. 124
5.28 Profils des trois fractures pour le cas $Q_0 = 1 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 7.5s$ (gauche) et $t_2 = 25s$ (droite). 125
5.29 Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $Q_0 = 1 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 7.5s$ (gauche) et $t_2 = 25s$ (droite). 126
5.30 Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas $Q_0 = 1 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 7.5s$ (gauche) et $t_2 = 25s$ (droite). 126
5.31 Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas $Q_0 = 1 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 7.5s$ (gauche) et $t_2 = 25s$ (droite). 127
5.32 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $Q_0 = 1 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 7.5s$ (gauche) et $t_2 = 25s$ (droite). 128
5.33 Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $Q_0 = 1 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 7.5s$ (gauche) et $t_2 = 25s$ (droite). 128
5.34 Profils des trois fractures pour le cas $Q_0 = 2 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 3.75s$ (gauche) et $t_2 = 12.5s$ (droite). 129
5.35 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $Q_0 = 2 \times 10^{-3}$ $m^2.s^{-1}$ à $t_1 = 3.75s$ (gauche) et $t_2 = 12.5s$ (droite). 130
5.36 Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) - Trajectoires d'évolution des 3 fractures en fonction de l'écartement des fractures par rapport à l'axe des abscisses. 131
5.37 Profils des trois fractures pour le cas $H = 9.5$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 132
5.38 Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $H = 9.5$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 132
5.39 Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas $H = 9.5$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). (droite). 133
5.40 Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas $H = 9.5$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 133
5.41 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $H = 9.5$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 134
5.42 Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $H = 9.5$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 135
5.43 Profils des trois fractures pour le cas $H = 14.25$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 135
5.44 Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $H = 14.25$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 136
5.45 Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas $H = 14.25$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 137
5.46 Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas $H = 14.25$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 137
5.47 Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $H = 14.25$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 138
5.48 Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $H = 14.25$ m à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). 138
5.49 Représentation du volume de pore injecté en fonction de la viscosité du fluide injecté : fracture centrale (gauche) et latérales (droite). 140
5.50 Représentation du volume de pore injecté en fonction du débit d'injection : fracture centrale (gauche) et latérales (droite). 142

5.51 Représentation du volume de pore injecté en fonction de l'écartement des fractures : fracture centrale (gauche) et latérales (droite). 143
5.52 Exemple d'améliorations du modèle HM-XFEM : cas 2D d'injection d'un fluide dans deux fractures connectées (gauche) et déformée 3D d'un réseau de fractures courbes avec jonctions (droite) (extraites de Paul et al. [173]). . . 147

Notations

$\frac{1}{K_w}$	compressibilité du liquide
b	coefficient de Biot
cos	fonction cosinus
C_L	coefficient d'échange
$\mathscr{C}$	coefficient d'échange adimensionnel
$\mathscr{C}_i$	coefficient d'échange adimensionnel pour la fracture (Pi) $i \in \{1,2,3\}$
exp	fonction exponentielle
E_p	énergie potentielle totale du système
E	module de Young
E'	module de déformations planes
$\boldsymbol{F}$	forces de gravité
g	volume de fuite par unité de longueur de la fracture $g = -\frac{q_1+q_2}{\rho}$ (chap. 4)
G_c	énergie cohésive
H	fonction de Heaviside généralisée
$[\boldsymbol{Id}]$	matrice identité
K_c	tenacité de la fracture (mode I)
K^{int}	perméabilité intrinsèque isotrope
K_x^{int}	perméabilité intrinsèque dans la direction horizontale
K_y^{int}	perméabilité intrinsèque dans la direction verticale
K_I	facteur d'intensité des contraintes (mode I)
K'	tenacité du matériau (coefficient effectif)
$\mathscr{K}$	tenacité adimensionnelle
$\mathscr{K}_i$	tenacité adimensionnelle pour la fracture (Pi) $i \in \{1,2,3\}$
l	longueur de la fracture
l_{coh}	longueur de la zone cohésive
L_k	coefficient de mise à l'échelle (*K-regime* ou $\widetilde{K}$*-regime*)
L_m	coefficient de mise à l'échelle (*M-regime*)
$L_{\widetilde{m}}$	coefficient de mise à l'échelle ($\widetilde{M}$*-regime*)
L_r	Lagrangien augmenté
m_w	apports massiques (massif)
$\boldsymbol{M}$	flux massiques
$\boldsymbol{n}$	normale sortante à la frontière du domaine
$\boldsymbol{n_c}$	normale sortante à la fracture
p	pression de pore du massif
p_f	pression de fluide dans la fracture
p_n	pression nette
q_i	multiplicateurs de Lagrange (hydrodymamique) $i \in \{1,2\}$
q	flux d'injection donné par la loi cubique $q = \frac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\tau_c}}{\rho}$ (chap. 4)

Q_0	flux d'injection
r	coefficient d'augmentation
r^{hom}	masse volumique homogénéisée
sin	fonction sinus
t	temps
t_0	temps d'arrivée de la pointe de la fracture
$\boldsymbol{t_c}$	contrainte cohésive totale
t_{c_n}	contrainte cohésive totale (composante normale)
$\boldsymbol{t'_c}$	contrainte cohésive effective
t'_{c_n}	contrainte cohésive effective (composante normale)
$\boldsymbol{u}$	déplacement nodal
$[\![\boldsymbol{u}]\!]$	saut de déplacement nodal
w	apports massiques (fracture)
$\boldsymbol{W}$	flux massiques (fracture)
W^m_{ext}	travail des forces extérieures
W_{ext}	flux d'injection imposés
x	coordonnée horizontale
y	coordonnée verticale
$\boldsymbol{\beta}$	multiplicateur augmenté
γ	mobilité du fluide
γ_k	longueur adimensionnelle de la fracture (*K-regime* ou $\widetilde{K}$*-regime*)
γ_{m0}	longueur adimensionnelle de la fracture (*M-regime*)
$\gamma_{\widetilde{m}0}$	longueur adimensionnelle de la fracture ($\widetilde{M}$*-regime*)
ε_k	coefficient de mise à l'échelle (*K-regime* ou $\widetilde{K}$*-regime*)
ε_m	coefficient de mise à l'échelle (*M-regime*)
$\varepsilon_{\widetilde{m}}$	coefficient de mise à l'échelle ($\widetilde{M}$*-regime*)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur de déformation élastique
ε_v	déformation volumique
$\boldsymbol{\delta}$	saut de déplacement aux points de Gauss
δ_c	ouverture critique
δ_{eq}	saut de déplacement équivalent
δ_n	saut de déplacement aux points de Gauss (composante normale)
κ	variable interne de la loi cohésive
$\boldsymbol{\lambda}$	multiplicateur de Lagrange (mécanique)
μ	viscosité dynamique
ν	coefficient de Poisson
ρ	masse volumique du fluide
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur de contrainte totale élastique
$\boldsymbol{\sigma'}$	tenseur de contrainte effective élastique
σ_c	contrainte critique
σ_0	contrainte de confinement
ϕ	porosité eulériennne
ϕ_n	*level-set* normale
ϕ_t	*level-set* tangente
φ_i	fonction de forme quadratique au nœud i
Φ	énergie élastique du système
ψ_i	fonction de forme linéaire au nœud i

Ψ	énergie de surface
Π	densité d'énergie surfacique
Π_k	pression nette adimensionnelle (*K-regime* ou $\widetilde{K}$*-regime*)
Π_{m0}	pression nette adimensionnelle (*M-regime*)
$\Pi_{\widetilde{m}0}$	pression nette adimensionnelle ($\widetilde{M}$*-regime*)
π	nombre rationnel $\pi \approx 3.14159265359...$
$\phi(\boldsymbol{\varepsilon(u)})$	densité volumique d'énergie élastique
θ	paramètre de la θ-méthode
$\boldsymbol{\tau_c}$	vecteur tangent à la fracture
ω	ouverture de la fracture $\omega = \frac{w}{\rho}$ (chap. 4)
Ω_k	ouverture adimensionnelle de la fracture (*K-regime* ou $\widetilde{K}$*-regime*)
Ω_{m0}	ouverture adimensionnelle de la fracture (*M-regime*)
$\Omega_{\widetilde{m}0}$	ouverture adimensionnelle de la fracture ($\widetilde{M}$*-regime*)
$\cdot$	produit scalaire
$\otimes$	produit tensoriel
$:$	produit tensoriel doublement contracté
$\mathbb{C}$	tenseur de souplesse d'ordre 4 (loi élastique linéaire)
$\|\| \cdot \|\|$	norme
$\| \cdot \|$	fonction valeur absolue
$\langle \cdot \rangle$	crochets de Macauley
∂	opérateur de dérivée partielle
∇	opérateur nabla
$Div(\cdot)$	opérateur divergence
$Tr(\cdot)$	application linéaire trace
$\boldsymbol{x}^T$	transposée du vecteur $\boldsymbol{x}$
$\{\cdot\}$	vecteur ligne
$(\cdot)$	vecteur colonne
$[\cdot]$	matrice

Contexte géologique de la thèse 1

Sommaire

1.1 Introduction 6
1.2 La Nouvelle-Calédonie : un massif ophiolitique témoin des mécanismes de fracturation hydraulique 6
1.2.1 Contexte de formation de la Nouvelle-Calédonie 6
1.2.2 Conséquences des circulations de fluides sur la dynamique du réseau de fractures 8
1.3 Description et objectifs de la thèse 11

1.1 Introduction

La perméabilité des roches est largement affectée par la présence de fractures dès lors qu'elles induisent la formation de chemins préférentiels aux circulations de fluides. Leur taille, ainsi que leur nombre, peuvent affecter le comportement hydro-mécanique de la formation géologique. Par conséquent, la libération de polluants, de fluides etc. est susceptible d'avoir lieu, soit dans une zone restreinte autour de la zone fracturée, soit à l'échelle de la formation géologique. Dans l'ingénierie, une attention toute particulière est accordée à ce type de phénomènes. En effet, dans le cas du stockage des déchets nucléaires en couches géologiques profondes, le creusement des alvéoles de stockage perturbe non seulement l'état de contrainte *in situ* mais induit également la formation de fractures autour de la zone excavée [132]. Ce réseau de fractures connectées peut modifier significativement les propriétés de confinement de l'encaissant, favorisant ainsi la migration des radionucléides. De la même façon, les gisements métallifères liés à l'enrichissement supergène [51] (*e.g.* pour le nickel) sous l'effet de l'altération et du lessivage des roches ultramafiques, sont fortement contraints par le développement et l'extension du réseau de fractures préexistant. Ces phénomènes participent ainsi aux processus de minéralisation. La pression interstitielle ainsi que l'état de contrainte *in situ* se voient alors perturbés du fait des modifications structurales à l'échelle du pore. Des phénomènes similaires ont été identifiés par Das et al. [60] dans le cas des processus d'intrusion magmatique et de circulations de fluides hydrothermaux, qui participent à la dispersion et la ségrégation des éléments traces [136, 103, 163] dans le milieu géologique. Tous les deux sont des exemples de fracturation hydraulique naturelle.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous focaliserons sur le massif ophiolitique de la Nouvelle-Calédonie, puisque celui-ci constitue un excellent exemple de mise en évidence des interactions entre les circulations de fluides et le contexte géo-dynamique local et régional. La Nouvelle-Calédonie constitue en effet l'un des plus gros gisement de Nickel de la planète. Or, la dynamique du réseau de fractures va jouer un rôle fondamental dans la mobilisation de certaine espèce minérale (dont le nickel) et la mise en place de processus de dépôt. Une meilleure compréhension de ces mécanismes de bréchification hydraulique (voir Myagkiy et al. [158]) est essentielle pour réussir à prédire la localisation de ces dépôts nickelifères qui constituent l'application à l'origine de ces travaux de thèse.

1.2 La Nouvelle-Calédonie : un massif ophiolitique témoin des mécanismes de fracturation hydraulique

1.2.1 Contexte de formation de la Nouvelle-Calédonie

La formation de la Nouvelle-Calédonie résulte de la succession de plusieurs phénomènes géologiques complexes à grande échelle. Selon Paris et al. [172] et Bradshaw [30], le premier épisode à l'origine de la formation du massif ophiolitique a été l'orogenèse Rangitata responsable de la création de la Nouvelle-Zélande apparue au Crétacé inférieur (-120 Ma) (cf. Figure 1.1). Puis au début du Crétacé supérieur (-90 Ma), un épisode de rifting a eu lieu (*i.e.* marge passive du Gondwana Est) (cf. Figure 1.2). La formation de ce rift continental est due à une remontée locale du manteau supérieur asthénosphérique. Dans ce contexte, l'anomalie thermique engendrée par cette remontée de matériel chaud produit une extension avec basculement de blocs de la couverture continentale le long de failles normales. En aval de cette zone d'extension, la croûte océanique (en gris sur la Figure 1.2) entre en subduction "océan-océan" et génère la formation d'un volcanisme d'arrière arc associé à une fusion partielle des péridotites du manteau asthénosphérique (roches ultrabasiques riches en pyroxène et olivine). Le résidu de la fusion partielle correspond à la Harzburgite, qui est une variante de péridotite peu différenciée.

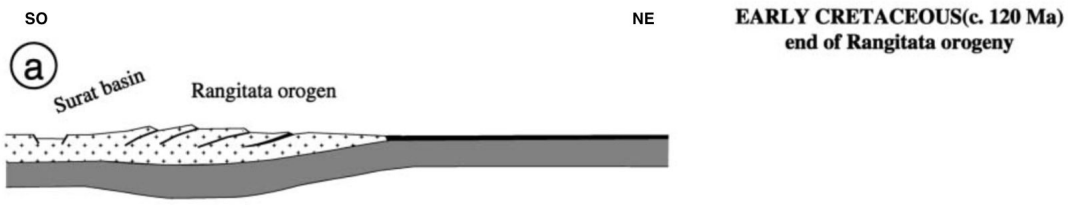


FIGURE 1.1 – *Phase d'orogenèse Rangitata - Profil SO-NE - Crétacé inférieur (-120 Ma) (extraite de [50]).*

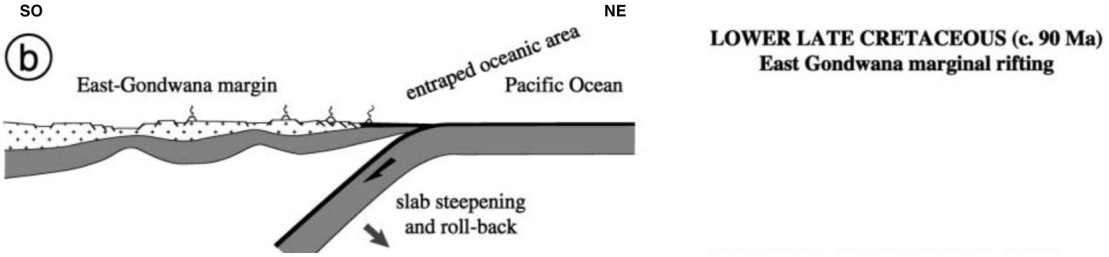


FIGURE 1.2 – *Mise en place de la marge active du Gondwana est - Profil SO-NE - Crétacé supérieur (-90 Ma) (extraite de [50]).*

Cluzel et al. [50, 49] et Aitchison et al. [8], suggèrent que la période Campanien-Paléocène (-80 Ma, -65 Ma), du fait de la migration dans la direction nord-est de la marge Pacifique (*i.e.* zone en subduction, dont le mouvement est symbolisé par la flèche grise horizontale sur la Figure 1.3), est caractérisée par la création de plusieurs bassins en amont de cette zone. En particulier, on distingue l'ouverture du bassin nord associée à l'actuelle Mer de Tasmanie, le bassin néo-calédonien (achevée pour ces derniers à la fin du Paléocène) et le bassin sud des Loyautés.

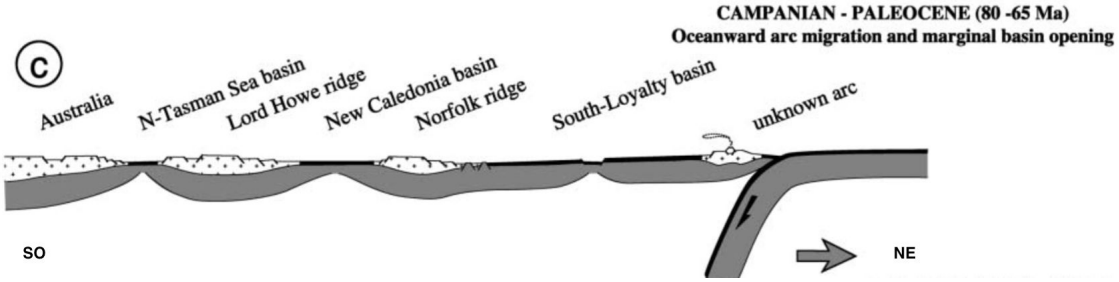


FIGURE 1.3 – *Phase d'extension des bassins et migration de la marge Pacifique - Profil SO-NE - Campanien-Paléocène (-80 Ma, -65 Ma) (extraite de [50]).*

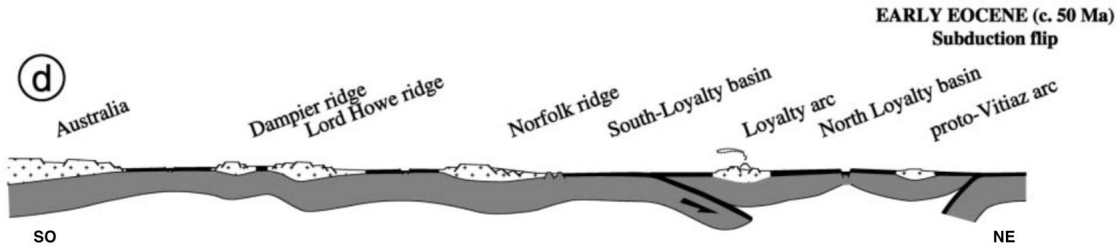


FIGURE 1.4 – *Dynamique du bassin des Loyautés - Profil SO-NE - Éocène inférieur (-50 Ma) (extraite de [50]).*

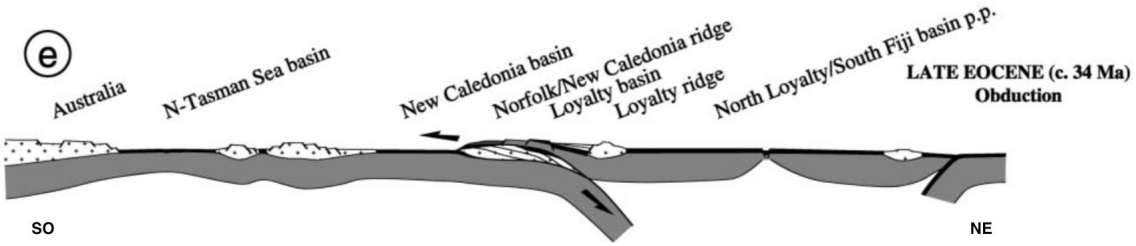


FIGURE 1.5 – *Phase d'obduction - Profil SO-NE - Éocène supérieur (-34 Ma) (extraite de [50]).*

À l'Éocène inférieur (-50 Ma), le comportement du bassin sud des Loyautés a radicalement changé, passant d'un contexte en extension à un contexte de convergence (subduction de la partie orientée sud-ouest sous la partie orientée nord-est) entrainant la fermeture de ce dernier (cf. Figure 1.4 (Cluzel et al. [50], Ulrich et al. [206])). Dans cette configuration, il s'est produit encore une fois une fusion partielle de la péridotite en profondeur (associée à un volcanisme d'arrière arc identifié par l'Arc des Loyautés sur la Figure 1.4), entrainant la formation de Harzburgite. Cependant, au cours de la subduction, le plongement de la Lithosphère océanique va permettre l'hydratation de cette Harzburgite. Cet apport d'eau va contribuer à l'altération de cette Harzburgite par serpentinisation dans la zone en amont de l'Arc des Loyautés. Notons que le bassin nord des Loyautés est en extension à cette période.

Alors que la subduction progresse entrainant la ride de Norfolk (vestige du continent Gondwana, donc moins dense que la plate-forme océanique) dans son sillage, la pointe de celle-ci va bloquer ce mécanisme (cf. Figure 1.5 à l'Éocène supérieur (-34 Ma)). Alors que le bassin nord des Loyautés est encore en extension à cette période, la partie de la lithosphère océanique sur laquelle repose l'Arc des Loyautés est obduite sur la ride de Norfolk qui subit un cisaillement crustal. Afin de retrouver l'équilibre isostatique, il va se produire un soulèvement des masses rocheuses conduisant à leur fracturation.

1.2.2 Conséquences des circulations de fluides sur la dynamique du réseau de fractures

Sur la Figure 1.6, nous donnons une représentation schématique du complexe ophiolitique actuel. Comme nous avons pu le montrer dans la section précédente, les terrains océaniques obduits sur la ride de Norflok ont été métamorphisés (*i.e.* en majorité par serpentinisation de la Harzburgite dans des conditions HT-HP) du fait de la circulation de fluides hydrothermaux au cours de la phase de subduction-obduction (cf. Figures 1.4 et 1.5 à l'Éocène inférieur et supérieur (entre -50 Ma et -34 Ma)). La serpentinisation induit le lessivage de la silice et du magnésium composant la structure des olivines de la Harzburgite, et une partie du nickel présent dans les olivines va soit se retrouver mobilisée en solution soit se concentrer massivement dans la roche mère altérée. Comme indiqué sur la Figure 1.6, il en résulte un gradient décroissant du degré de serpentinisation de la roche, orienté de la base de l'ophiolite vers sa surface. Notons également que cette Harzburgite est fortement fracturée du fait des contraintes tectoniques régionales. Cette fracturation est un héritage de la dynamique antérieure de la région, mais également de sa dynamique actuelle, puisque la Nouvelle-Calédonie est proche d'une zone de subduction active entre la plaque australienne et la plaque pacifique et d'une zone d'extension au niveau du bassin nord des Fidjis (cf. Figure 1.7).

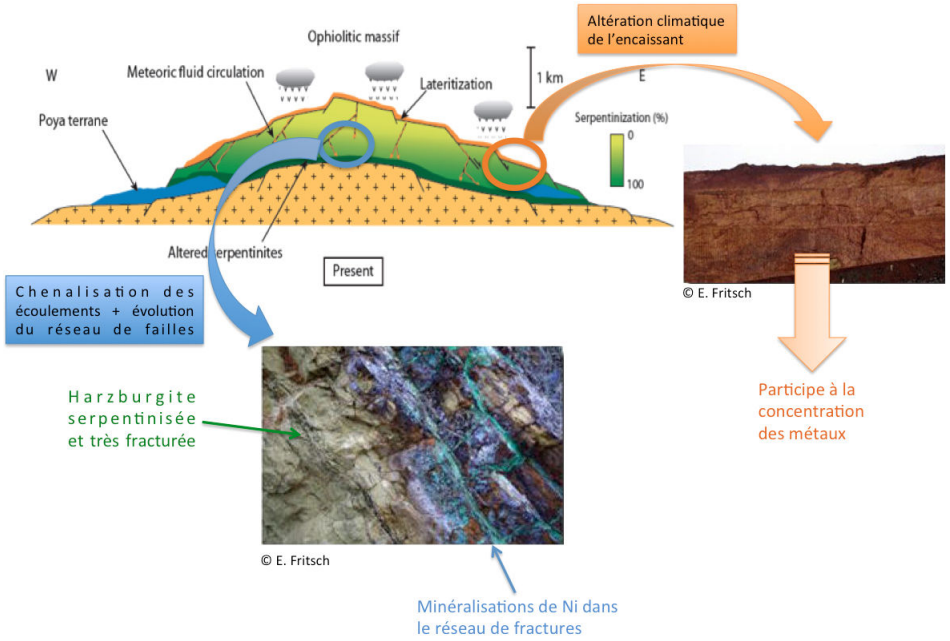


FIGURE 1.6 – *Mise en évidence des interactions fluide-structure.*

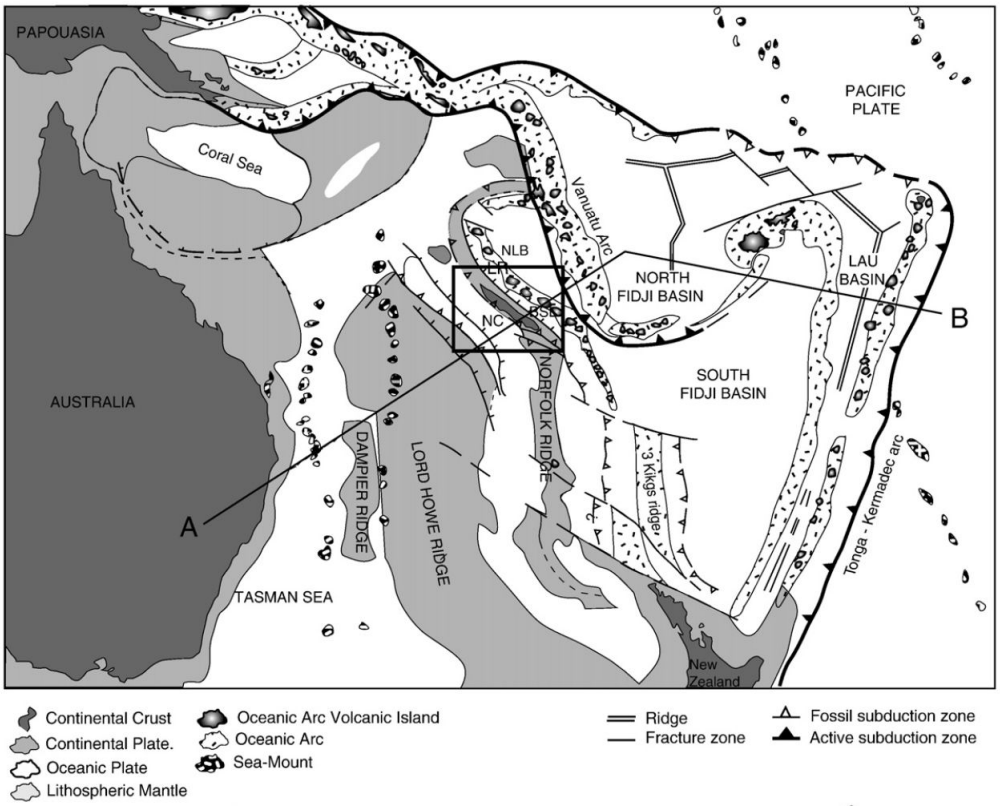


FIGURE 1.7 – *Carte structurale actuelle de la région du Pacifique-ouest - NC = Nouvelle-Calédonie (extraite de [206], d'après [50]).*

En particulier, le réseau de fractures induit par les changements de l'état de contrainte locaux/régionaux joue le rôle de chemins d'écoulement préférentiels à la circulation des fluides météoriques et hydrothermaux (cf. Figure 1.6). En effet, ces fluides vont avoir une action mécanique sur la dynamique des fractures. En s'infiltrant dans le massif rocheux, ils vont participer non seulement à la réactivation de fractures existantes (voire en créer de nouvelles)

par augmentation de la pression de fluide, mais vont également participer à mobiliser en solution certaine espèce minérale. De manière très schématique, deux situations peuvent être envisagées : soit les espèces ont déjà cristallisé dans les fractures et leur mobilisation en solution induit leur réouverture par perte du matériel de colmatage, ou à l'inverse de nouvelles espèces minérales peuvent précipiter au sein des ces fractures et les colmater, participant ainsi à leur refermeture.

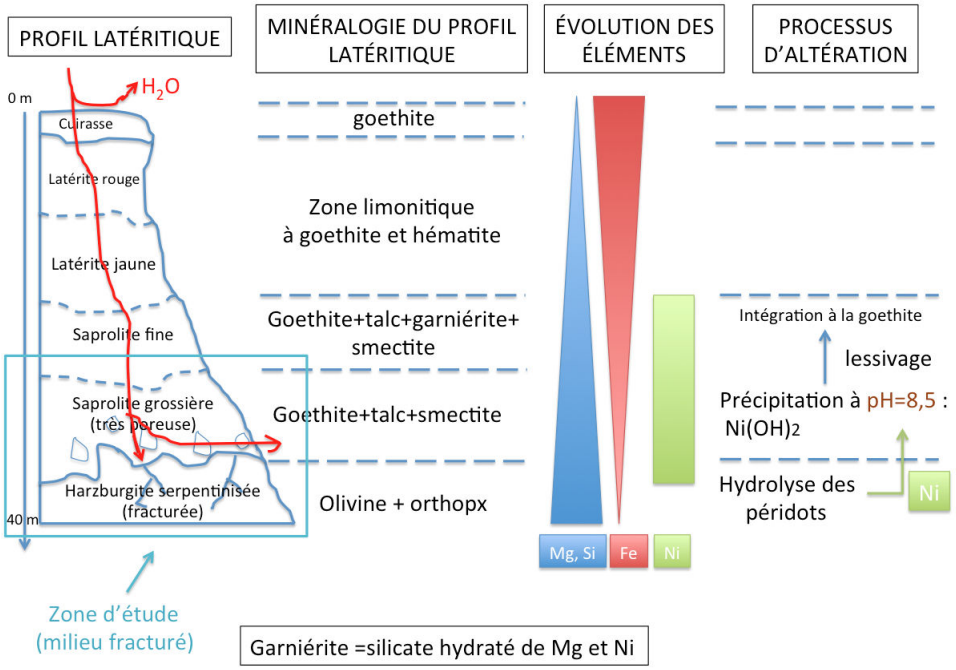


FIGURE 1.8 – *Profil latéritique (Nouvelle-Calédonie, type Poya) (d'après Jébrak et Marcoux [118]).*

D'autre part, du fait des conditions climatiques particulières de cette région du monde (*i.e.* climat tropical et humide), le complexe ophiolitique a subi au cours des temps géologiques une forte altération des roches en surface (cf. Figure 1.6). La combinaison de l'action de la fracturation et des conditions climatiques va engendrer la formation de profils latéritiques caractéristiques. Selon Jébrak [118] (cf. Figure 1.8), le processus de latérisation débute par un lessivage du magnésium Mg et du nickel Ni, alors que les éléments les moins solubles auront tendance à se concentrer localement (par exemple le fer Fe) pour former une cuirasse compacte d'oxyde de fer en surface (*i.e.* goethite) ainsi que des horizons limonitiques à goethite et hématite. Le nickel et le magnésium sont ensuite mobilisés par les fluides percolant et s'accumulent dans la partie basse de la formation dans les horizons saprolitiques (saprolite fine et grossière). Dans ces zones de conditions de pH basique (pH autour de 8.5), le nickel va précipiter et être incorporé à la goethite et les minéraux argileux (comme la smectite) par adsorption. Le nickel sera présent en abondance dans l'horizon de saprolite fine sous forme de garniérite qui est un silicate hydraté de magnésium et de nickel.

D'autre part, bien qu'il soit généralement admis que les processus de minéralisation du nickel et du magnésium soient issus du lessivage de la partie supérieure des régolithes, de récentes études suggèrent que les veines de silicates de nickel résultent en partie de phénomènes de fracturation hydraulique et de la convection de fluides ascendants liés aux évènements sismiques [158, 39].

1.3 Description et objectifs de la thèse

La présente thèse a été financée en partie par le LABEX RESSOURCES21 dont l'objectif est de contribuer au développement d'outils performants pouvant être mis en application pour la prospection des métaux stratégiques. L'axe de recherche du LABEX RESSOURCES21 se divise en 6 actions thématiques prioritaires, dont trois sont directement axées sur la compréhension et le développement de méthodes pour la prospection de ces ressources stratégiques. Trois actions complémentaires viennent appuyer ces axes piliers. Cette thèse s'inscrit dans l'un des trois axes auxiliaires intitulé "ATP5 : Modéliser la géométrie, le transport et les processus physico-chimiques en 3D".

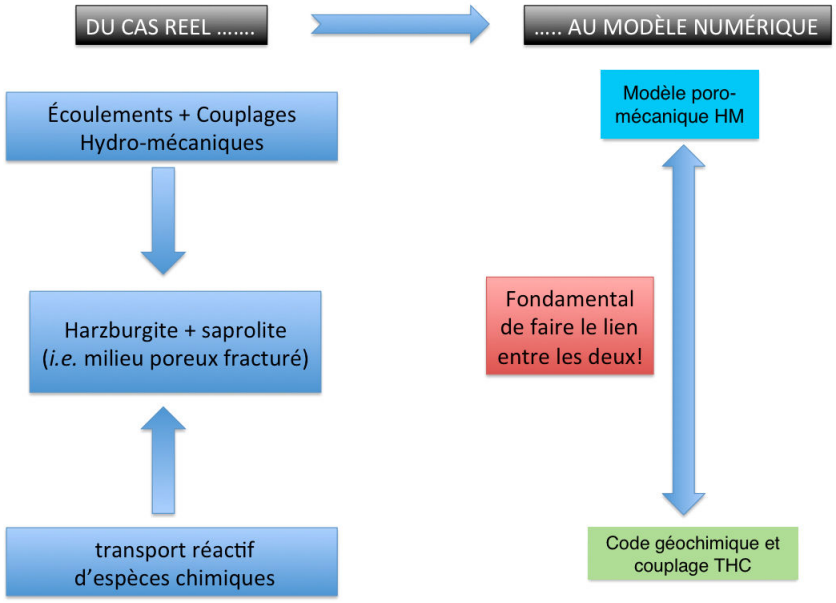


Figure 1.9 – *Schéma de principe contextualisant les objectifs de la thèse.*

Dans le cadre de cette thématique, le schéma de principe présenté sur la Figure 1.9 résume les objectifs de la thèse. Nous avons montré précédemment, sur l'exemple de la Nouvelle-Calédonie, qu'il existe une interaction forte entre la présence de fractures dans la roche mère Harzburgite (dont la dynamique est contrôlée par l'écoulement de fluides météoriques et hydrothermaux au travers de couplages hydro-mécaniques (HM)) et la distribution et la transformation des ressources minérales dans le massif rocheux (associées aux transports réactifs). Il est donc fondamental de réussir à décrire et simuler ces processus. Toutefois, les échelles de temps caractéristiques des mécanismes mis en jeu sont suffisamment différents pour envisager de découpler, au moins partiellement, les processus HM des couplages thermo-hydro-chimiques (THC). Dans le cadre de cette thèse seul le modèle poro-mécanique (couplé avec la méthode XFEM) a été développé dans le logiciel aux éléments finis Code_Aster développé par EDF. Compte tenu des conditions d'application (pas de propagation de fractures à proprement dire, mais uniquement de la réactivation de fractures pré-existantes (*i.e.* ouverture/fermeture)), nous nous bornerons dans le cadre de ce modèle à considérer la propagation de fractures selon des chemins pré-définis pour des cas d'étude 2D. Notons que l'extension de ce modèle au cas 3D et tenant compte des intersections des fractures et de leur direction de propagation fonction de l'état de contrainte, est en cours dans le cadre de la thèse de Bertrand Paul (Thèse IFPEN 2013-2016 "Modélisation de la propagation de fissures hydrauliques par la méthode des éléments finis étendue"), focalisée sur des applications plus pétrolières. Ces deux thèses étant réalisées en étroite collaboration, nous reviendrons au cours du document, et plus particulièrement dans les perspectives, sur

leurs interactions.

La modélisation géochimique 1D (sous PHREEQC) des processus mis en jeu a été réalisée dans le cadre de la thèse d'Andrey Myagkiy (Thèse LABEX RESSOURCES21 2014-2017 "Mineralization of nickel in saprolitic ore of New Caledonia : dynamics of metal transfer and modeling of coupled geochemical and hydrodynamical processes"). Le couplage avec les processus thermique et d'écoulement (mais découplés de l'évolution du comportement mécanique) au sein d'un milieu fracturé, représentatifs des profils structurels types de Nouvelle-Calédonie, sera effectif dans le cours de l'année 2017. L'application de notre modèle dans ce cadre sera discuté dans les perspectives, à la fin de ce mémoire.

Le manuscript s'articule autour de 5 chapitres. Dans le chapitre 2, à travers une revue bibliographique des méthodes numériques disponibles dans la littérature pour décrire le comportement d'un milieu fracturé, nous tenterons de justifier le choix de la méthode XFEM utilisée dans la formulation de notre modèle, dont le formalisme sera exposé dans le chapitre 3 (également disponible dans Faivre et al. [80]). En particulier, nous présenterons dans le chapitre 3 un modèle poro-mécanique (inspiré des travaux de Carrier et al. [36]) capable de prendre en compte la propagation de fractures hydrauliques au moyen d'une loi cohésive non-régularisée de type Talon-Curnier [204]. Dans le chapitre 4, nous appliquerons notre modèle numérique au cas du modèle théorique de propagation (sur chemin pré-défini) de fractures hydrauliques de type KGD [124], afin de prouver sa validité lorsque différents régimes de propagation sont impliqués. Enfin dans le chapitre 5, nous étudierons les interactions potentielles qui peuvent exister entre les fractures d'un réseau (fractures non-connectantes se propageant le long de chemins pré-définis) lorsque plusieurs paramètres varient.

2 Présentation des méthodes numériques pour la représentation et la caractérisation du milieu fracturé

Sommaire

2.1 Introduction . . . 14
2.2 Justification du choix de la méthode XFEM . . . 15
2.2.1 Des *meshless methods* 15
2.2.2 ... vers des méthodes hybrides plus performantes . . . 18
2.3 Une alternative à l'enrichissement singulier : les modèles de zone cohésive . . . 20
2.4 Une manière simple de représenter les discontinuités : les level-sets . . . 27
2.4.1 Propriétés des *level-sets* . . . 27
2.4.2 Méthodes d'actualisation des *level-sets* . . . 29
2.5 Synthèse et objectifs . . . 36

Dans la suite de ce chapitre, nous tenterons d'identifier les avantages et les inconvénients des principales méthodes numériques utilisées dans la littérature. Dans le contexte de la mécanique des milieux fracturés, nous chercherons donc à orienter notre choix vers la méthode la plus adaptée, ou du moins celle présentant le moins d'inconvénients tant sur le plan de la mise en œuvre informatique que sur ses performances à rendre compte de l'évolution de la fracturation. Nous verrons que la méthode XFEM semble être un bon candidat, en particulier lorsque celle-ci est associée à des *level-sets* pour suivre l'évolution spatio-temporelle de la fracturation.

2.1 Introduction

Comme nous avons pu le voir dans le chapitre 1 de ce mémoire, la présence de fractures dans la matrice rocheuse va induire une modification certaine du comportement de la roche, tant à l'échelle de l'affleurement qu'à l'échelle régionale. Un certain nombre de modèle de comportement ont été développés afin de caractériser certain de ces phénomènes. En particulier, des modèles d'endommagement [117, 157] ont permis de caractériser l'évolution de la micro-fracturation conduisant à la détérioration de la structure du matériau jusqu'à sa rupture du fait de la croissance progressive puis de la coalescence des micro-fractures en une ou plusieurs macro-fractures [29, 213, 217]. L'endommagement est associé à la déformation non-élastique (par exemple la plasticité) du matériau cassant ou semi-cassant. Dans la littérature, Xie et al. [219] et Yao et al. [221] nous rappellent qu'il est possible de distinguer deux catégories de modèles d'endommagement. La première, dite phénoménologique, se base sur la considération de variables internes et d'endommagement intervenant dans la définition de l'énergie libre du matériau. Par exemple, ces modèles ont été appliqués aux cas des géo-matériaux saturés en fluide dans [191, 28, 192]. Dans ce contexte, Xie et al. [218] rappellent que l'action du chargement mécanique ainsi que celle de la pression de pore ont une influence significative sur l'endommagement et réciproquement. Cependant comme le mentionne Zhou et al. [229], le principe des contraintes effectives n'est pas réellement basé sur des considérations physiques solides pour ce type d'approche, ou plus généralement ces méthodes peinent à représenter les relations existantes entre l'endommagement et les déformations non-élastiques à différentes échelles [218]. Afin de surmonter ces limitations, plusieurs auteurs ont proposé d'introduire une seconde catégorie de modèles d'endommagement basés sur la considération de la micro-structure du matériau cassant en considérant différents modes de distribution et de propagation des micro-fractures : il s'agit des modèles d'endommagement micro-mécaniques [9, 176, 72]. Dans les faits, il est nécessaire d'exprimer, dans un premier temps et de manière indépendante, une relation contrainte-déformation aux échelles microscopique et macroscopique respectivement, puis de faire le lien entre les deux échelles grâce à des techniques d'homogénéisation [231]. L'étude de l'endommagement appliquée au cas du milieu élastique saturé (donc impliquant une dynamique de fracture réversible) a été conduite par Dormieux et al. [72] et Dormieux et Kondo [71] par exemple. D'autres auteurs comme Xie et al.[218] ont étendu les travaux de Zhu et al. [233] en introduisant les effets de la pression de pore sur l'évolution de l'endommagement couplée avec le développement de la plasticité induite par glissement-frottement le long de micro-fractures fermées. D'autre part, du fait de la structure hétérogène des géo-matériaux (inclusions rigides, anisotropie structurelle telle que des plans de stratification etc.), des modèles micro-mécaniques basés sur la considération des tenseurs d'Eshelby ou de Hill (pour la détermination des propriétés (poro)-élastiques effectives du matériau par des techniques d'homogénéisation) ont été développés. Par exemple, Qi et al. [178] proposent d'introduire un modèle d'endommagement 3D afin de caractériser la croissance de micro-fractures dans un milieu initialement anisotrope et fragile. Ces travaux se basent sur le modèle de Zhu et Shao [232] et sur les travaux de Pan et Chou [171] et Giraud et al. [102] pour la détermination du tenseur de Hill par intégration numérique de la fonction de Green. En général, l'emploi de ce type de modèle est particulièrement adapté aux cas d'études impliquant un grand nombre de fractures. Néanmoins, ces modèles micro-mécaniques impliquant des techniques d'homogénéisation sont fortement dépendant de l'échelle considérée et s'avèrent peu efficaces pour décrire la propagation des fractures macroscopiques, notamment en ce qui concerne la prise en compte de la discontinuité du champ de déplacement (et de son gradient) comme le présente Yao et al. [222].

Au contraire si le nombre de fractures est relativement faible, la propagation de ces fractures, induites par l'écoulement d'un fluide, peut être modélisée fidèlement au moyen de modèles poro-mécaniques impliquant des éléments d'interface dans le cadre de la méthode des éléments finis (FEM) (cf. Carrier et al. [36]). Cependant, la méthode FEM doit faire

face à certaines restrictions dans le cadre de la mécanique de la rupture. En effet, dans ce contexte, la géométrie de la discontinuité doit être représentée explicitement. En d'autres termes, ses parois doivent concorder avec les arêtes des éléments du maillage. Dans le cas des modélisations 3D, pour lesquelles la fracture va se propager selon des chemins non pré-définis, la méthode FEM est alors inefficace dans la plupart des cas. En effet, alors que la fracture évolue dans le temps et dans l'espace, il est nécessaire d'avoir recours à des algorithmes de remaillage complexes capables d'adapter la structure du maillage à la nouvelle géométrie de la fracture, et ce, pendant tout le processus d'actualisation. Cela implique des coûts non négligeables en terme de temps de calcul. De plus, pour le cas de géométries de fractures complexes, un certain nombre d'instabilités numériques peuvent se manifester, notamment liées à des problèmes de conditionnement des matrices de rigidité. Cet effet sera amplifié si la dimension des éléments du maillage n'est pas judicieusement choisie. Afin de remédier à cette forte dépendance liée au maillage, des méthodes alternatives ont vu le jour : les *meshless methods*. En particulier, trois méthodes semblent se démarquer et présenter un réel potentiel pour modéliser les mécanismes de fracturation : la méthode DEM (*Discrete Element Method* [57]), la méthode BEM (*Boundary Element Method*) et la méthode XFEM (*eXtended Finite Element Method* [14, 150]). Dans le cadre de la méthode DEM, la structure du matériau est discrétisée par un ensemble de particules liées entre elles par des "ressorts" (chacun caractérisé par une rigidité normale et tangentielle). L'initiation et la propagation de la fracturation sont prises en compte par la rupture de ces liens inter-particulaires. Cette méthode sera particulièrement adaptée pour décrire la propagation mais également pour prendre en compte certains mécanismes d'interaction associés à la structure granulaire de roches comme le grès. Dans la littérature, des modèles DEM ont été proposés afin de caractériser le développement progressif de l'endommagement des roches cassantes (Scholtès et Donzé [188]), ainsi que l'initiation et la propagation de fractures tant à l'échelle des essais de laboratoire qu'à l'échelle du massif rocheux (Duriez et al. [77], Scholtès et Donzé [187]). L'écoulement de fluides au sein de milieux granulaires a également été mis en application en couplant la méthode DEM avec un schéma de volume finis (Catalano et al. [38], Scholtès et al. [186]). D'autre part, dans le cadre de la méthode BEM associée à l'étude de la propagation de fractures, seules les frontières du domaine et la surface des fractures seront discrétisées [56, 65]. Les avantages certains de cette méthode sont de réduire la dimension spatiale du problème, facilitant ainsi la procédure de remaillage, et d'être plus précise que la méthode FEM puisqu'elle ne nécessite pas de dériver les fonctions de formes (mais implique la dérivation de solutions fondamentales [81]) pour le calcul des contraintes [230, 193]. Cependant, étant donné que les nœuds appartenant aux parois de la fracture sont confondus, cela donne lieu à un système d'équations algébriques singulier [220]. Afin de s'affranchir de ce problème, Wolf et Song [215] ont proposé de combiner la méthode BEM avec la méthode FEM : il s'agit de la *Scaled Boundary Finite Element Method* (SBFEM). D'autre part, la méthode XFEM se base sur l'enrichissement local de la base d'approximation FEM (voir discussion dans la suite de ce chapitre).

Dans ce chapitre, à travers une brève étude bibliographique des *meshless methods*, nous tenterons de justifier les raisons nous ayant conduit finalement à retenir la méthode XFEM pour l'associer avec le modèle de comportement couplé hydro-mécanique, que nous détaillons dans le chapitre 3 de ce mémoire.

2.2 Justification du choix de la méthode XFEM

2.2.1 Des *meshless methods* ...

La caractéristique commune de ces méthodes repose sur le fait que l'approximation des champs est uniquement effectuée au niveau de nœuds, déconnectés les uns des autres, à l'in-

verse des méthodes basées sur des maillages. Nous donnons sur la Figure 2.1 un exemple de discrétisation employée pour les *meshless methods* (figure extraite de Nguyen et al. [162]). Pour cela, nous considérons un domaine Ω contenant un certain nombre de nœuds. Chacun de ces nœuds (points rouges sur la Figure 2.1) est caractérisé par une fonction poids définie uniquement au niveau d'un sous-domaine compact Ω_I de Ω correspondant à la zone d'influence (en gris sur la Figure 2.1) du nœud I. Chaque sous-domaine est caractérisé par un coefficient dit de *dilatation* (équivalent à la longueur caractéristique d'un élément en FEM) qui conditionne fortement la précision et la stabilité de la solution numérique [162].

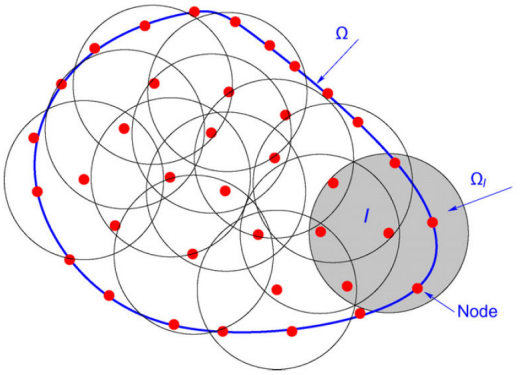


FIGURE 2.1 – *Un exemple de discrétisation 2D employée pour les meshless methods (extraite de [162]).*

D'après Li et Liu [134], il est possible de classer les *meshless methods* en deux groupes : le groupe de méthodes basées sur des considérations physiques, et le groupe de méthodes basées sur des critères purement numériques. Le premier groupe se décompose en deux sous-groupes. Nous pouvons distinguer d'une part les méthodes déterministes (*e.g. Vortex Method* [23]) et d'autre part les méthodes probabilistes (*e.g. Direct Simulation Monte Carlo* (DSMC) [169]). Dans le cas du second groupe, il est possible de faire la distinction entre les méthodes dont la formulation repose sur la considération de la forme forte d'équations aux dérivées partielles (EDP), des méthodes impliquant la formulation faible d'EDP. Dans la suite de ce chapitre, comme Li et Liu [134], nous nous focaliserons sur les méthodes appartenant au second groupe.

Ainsi, l'une des premières *meshless methods* a été développée par Lucy [143] dans le domaine de l'astrophysique (*i.e. Smooth Particle Hydrodynamics Method* (SPH)) pour modéliser l'évolution des galaxies et des objets célèstes. Cette méthode fait intervenir dans sa formulation la forme forte d'équations aux dérivées partielles. Comme le rappellent Li et Liu [134], ces équations sont discrétisées par une technique de collocation particulière. En effet, afin d'exprimer localement la forme forte de ces EDP, l'introduction locale de fonctions de type kernel est conduite au moyen d'un produit de convolution. En particulier, les fonctions kernel participeront à prévenir l'apparition de singularités. Par la même occasion, ces fonctions (identifiées comme des fonctions poids associées aux différents sous-domaine Ω_I) servent à exprimer les fonctions de forme intervenant dans l'approximation de la solution. Néanmoins comme le soulignent Belytschko et al. [17], les fonctions de forme résultantes ne peuvent pas vraiment être assimilées à celles classiquement rencontrées en FEM, puisque celles-ci ne se confondent pas exactement avec les points du support. De plus, cette méthode souffre de nombreux inconvénients, notamment liés à un défaut de consistance (*e.g.* pour une EDP du second ordre l'approximation d'un champ linéaire doit être reproduite exactement [17]) et de complétude (*i.e.* la base d'approximation d'un champ est capable de reproduire une fonction quelque soit le degré de précision [17]). Pour palier cela, une correction des fonctions kernel a été introduite afin d'augmenter l'ordre d'approximation : il s'agit de la

Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) [139].

À ces travaux, d'autres méthodes sont venues s'ajouter aux précédentes. On peut par exemple citer la *Diffuse Element Method* [159], la *Element Free Galerkin Method* (EFGM) [18, 20, 16] (particulièrement adaptée au cas des milieux fracturés et à la croissance des fractures) ou encore la *Discrete Element Method* (DEM) [57]. Contrairement à la *Smooth Particle Hydrodynamics Method*, ces méthodes sont formulées à partir de la forme faible d'équations aux dérivées partielles. Comme le rappellent Liew et al. [135] les *meshless methods* ont pour avantages de représenter plus précisément la géométrie des objets étudiés. De plus, l'ordre des fonctions de forme sera plus élevé et possèdera un support compact. Par exemple, il s'agira de fonctions de type kernel corrigées pour RKPM, alors qu'elles seront estimées par moindres carrés pour les méthodes EFGM et *Diffuse Element Method*. Ensuite, l'utilisation de ces méthodes est nettement plus adaptée dans les cas d'études impliquant de fortes déformations du domaine ou bien pour simuler la propagation dynamique de fractures, car elles ne nécessitent aucun alignement avec la structure d'un maillage. Enfin, grâce à la méthode *h-adaptative* pour les *meshless methods* [140], il est nettement plus simple d'ajouter des nœuds supplémentaires dans certaines zones d'intérêt (*i.e.* zones de raffinement) puisqu'il n'existe aucune connectivité entre les particules du domaine. En FEM, différentes méthodes de raffinement du maillage sont également disponibles pour améliorer la qualité de la solution dans certaines zones pour lesquelles l'erreur sur la solution est la plus importante. Par exemple, la méthode *r-adaptative* [205] (distortion du maillage initial sans modification de la connectivité nodale), la méthode *h-adaptative* [64] (ajout d'éléments de plus petite taille), la méthode *s-adaptative* (introduction de grilles auxiliaires raffinées) [85] ou encore la méthode *p-adaptative* [10] (augmentation locale de l'ordre d'interpolation des fonctions de forme). Néanmoins, en FEM, ces méthodes de raffinement devront être utilisées plusieurs fois au cours d'un même calcul afin d'assurer la qualité de la solution. Cela peut s'avérer très coûteux en temps de calcul.

Néanmoins, Nguyen et al. [162] ne sont pas sans rappeler que ces méthodes présentent des limitations. En particulier, puisque les fonctions de forme sont des fonctions rationnelles, il est fondamental de faire intervenir des schémas d'intégration d'ordre élevé afin de garantir la convergence de la solution numérique. Cela induit une augmentation considérable des temps de calcul. D'autre part, il est très difficile d'imposer des conditions aux limites de type Dirichlet, puisque la propriété de Kronecker-δ n'est en général pas vérifiée pour la plupart des fonctions de forme considérées. Dans certains cas bien précis, en particulier lorsque la géométrie du domaine est relativement simple (*i.e.* linéaire par morceaux), il est toutefois possible de forcer la réalisation de la propriété de Kronecker-δ le long de sa frontière, en y répartissant des nœuds (voir la courbe bleue sur la Figure 2.1) comme ont pu le montrer Gosz et Liu [108]. Par contre, Li et Liu [134] rappellent qu'il existe des moyens détournés d'imposer des conditions aux limites de type Dirichlet en ayant recours à :

- la méthode des multiplicateurs de Lagrange initialement proposée par Belytschko et al. [18] dans le cadre de la EFGM ;
- la méthode du lagrangien pénalisé également proposée par Belytschko et al. dans [19]. Cette méthode est plus économe en terme de temps de calcul en comparaison de la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;
- la méthode de transformation initiée par Chen et al. [40]. En séparant l'expression de l'approximation en une partie dédiée aux particules sur la frontière et une partie associée à celles dans le domaine, il est possible par inversion de définir un ensemble de fonctions de forme respectant la propriété de Kronecker-δ (voir Li et Liu [134] pour plus de détails) ;
- la méthode des kernels singuliers inspirée par Lancaster et Salkauskas [127]. Néan-

moins, comme il a pu être montré par [41], lorsque le paramètre de dilatation est trop important la méthode devient inefficace ;

- l'introduction locale d'une bande d'éléments finis au niveau de la frontière du domaine (Krongauz et Belytschko [126] et Liu et al. [141]). Les conditions aux limites sont imposées au niveau des nœuds des éléments finis, et une fonction de type rampe fera la connection entre le domaine maillé et le reste du domaine contenant les particules (donc non maillé).

2.2.2 ... vers des méthodes hybrides plus performantes

Afin de profiter des avantages de ces méthodes, et d'en réduire partiellement les inconvénients (en particulier les difficultés liées à l'imposition de certains types de condition aux limites), des méthodes hybrides (*i.e.* couplage d'une *meshless method* avec la méthode FEM) ont été proposées. En d'autres termes, cette alliance entre les deux types de méthode permettra non seulement de retrouver la propriété de Kronecker-δ des fonctions de forme (afin d'imposer facilement les conditions de type Dirichlet), mais également d'augmenter l'ordre d'approximation sans ajouter de nœuds supplémentaires [162]. Par exemple, nous pouvons citer la *hp-cloud Method* [74], la *Generalized Finite Element Method* (GFEM) [199] ou encore la *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM) [144]. Toutes les méthodes citées précédemment sont basées sur le principe de partition de l'unité. En pratique, cela signifie que, pour un domaine Ω découpé en N sous-domaines Ω_I auxquels sont associés une fonction non nulle $f_I(x)$ (et nulle partout ailleurs), la relation suivante est satisfaite sur Ω :

$$\sum_{I=1}^{N} f_I(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{2.1}$$

Globalement la *hp-cloud Method* et la PUFEM sont équivalentes : pour la première les fonctions de forme sont obtenues par moindres carrés alors que dans la seconde, il s'agit de polynômes de Lagrange (plus simples d'utilisation). En particulier, pour la PUFEM, la propriété de Kronecker-δ des fonctions de forme est parfaitement respectée, et l'augmentation de l'ordre d'approximation se fera en considérant un ensemble de fonctions supplémentaires (dites fonctions d'enrichissement), respectant le principe de partition de l'unité, et venant s'ajouter à l'expression de l'approximation FEM classique. Par exemple, l'approximation du champ de déplacement dans le cas général s'écrit :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_i \boldsymbol{a_i}\varphi_i(\boldsymbol{x}) + \text{termes d'enrichissement} \tag{2.2}$$

Une variante de la méthode PUFEM est la méthode XFEM (*eXtended Finite Element Method*). Une des particularités très intéressante de la méthode XFEM est que celle-ci est capable de prendre en compte les discontinuités de type *faible* et *forte*. Autrement dit, des fonctions d'enrichissement discontinues seront introduites afin de rendre compte à la fois de la discontinuité du champ primal (uniquement dans le cas des discontinuités *fortes*), mais également de son gradient, et ce, sans avoir recours à des techniques de remaillage. Ensuite, contrairement à la PUFEM (ou à la GFEM), cet enrichissement est local pour la méthode XFEM. En particulier, l'enrichissement local sera un point fort de cette méthode. Premièrement, cela permettra de réduire le temps de calcul dédié à l'inversion des matrices de rigidité ainsi que pour l'intégration des différentes contributions des formes faibles des équations d'équilibre. Deuxièmement, le nombre d'inconnues supplémentaires dans le problème à résoudre sera réduit, en comparaison de certaines *meshless methods* comme la GFEM (*i.e.* enrichissement global). La méthode XFEM, faisant intervenir dans sa formulation des termes d'enrichissement supplémentaires, est couramment rencontrée dans la littérature sous

la dénomination *extrinsic XFEM*. Une variante, identifiée par l'appellation *intrinsic XFEM* (proposée par Fries et Belytschko [88]), consiste à modifier localement la nature des fonctions de forme grâce à des fonctions obtenues par moindres carrés pouvant représenter la discontinuité de la solution. L'avantage de cette formulation est qu'elle n'augmente pas le nombre de termes supplémentaires. Néanmoins, en pratique, la mise en œuvre de l'*intrinsic XFEM* semble être plus coûteuse que l'*extrinsic XFEM* du fait de la nature des fonctions d'enrichissement [89]. Dans la suite de ce mémoire, nous ne ferons référence qu'à l'*extrinsic XFEM*.

La méthode XFEM a été proposée initialement par Belytschko et al. [14] et Moës et al. [150]. Dans la littérature, cette méthode a été employée pour modéliser le comportement des trous et des inclusions [201], des jonctions de fractures [62], la croissance d'une fracture cohésive (en 2D [148, 145, 234] et en 3D [100]), mais également dans le cadre des lois de contact-frottement (pour le cas des petits glissements [70, 123] et grands glissements [164]). Récemment cette méthode a également été combinée avec les modèles de couplage hydro-mécanique [212, 119, 180, 152] (voir également chapitre 3 de ce mémoire). Avec XFEM, la géométrie de la fracture n'est plus dépendante de la structure du maillage (lié au fait que cette méthode est un hybride entre la PUM et la FEM). En d'autres termes, la fracture n'est plus maillée. Mathématiquement, cette méthode se fonde sur l'ajout local de fonctions d'enrichissement [14, 150, 69, 21]. En particulier, la fonction de Heaviside (cf. équations (2.4) et (2.3)) est couramment considérée comme une fonction d'enrichissement afin de rendre compte de la discontinuité du champ de déplacement dans une fine bande d'éléments autour de la fracture. D'autre part, au niveau de la pointe de la fracture, des fonctions singulières sont ajoutées afin de prendre en compte le comportement asymptotique de la pointe (cf. équations (2.5) et (2.3)). À ces fonctions d'enrichissement sont associés des degrés de liberté supplémentaires. L'approximation du champ de déplacement s'écrit donc pour XFEM [148] :

$$\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_{i\in E} \varphi_i\left(\boldsymbol{x}\right) \boldsymbol{a_i} + \sum_{j\in F} \varphi_j\left(\boldsymbol{x}\right) H\boldsymbol{b_j} + \sum_{k\in G} \varphi_k\left(\boldsymbol{x}\right) \sum_{\alpha=1}^{4} \boldsymbol{e_k^\alpha} F_\alpha \tag{2.3}$$

avec F l'ensemble des nœuds dont le support est entièrement traversé par la fracture et qui contient le point $\boldsymbol{x}$, G l'ensemble des nœuds dont le support contient la pointe de la fracture ainsi que le point $\boldsymbol{x}$ (cf. Figure 2.2). H représente la fonction de Heaviside généralisée et F_α les fonctions d'enrichissement singulières (respectivement associées aux degrés de liberté additionnels $\boldsymbol{b_j}$ et $\boldsymbol{e_k}$) telles que :

$$H\left(x\right) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$F_{\alpha=\{1,4\}} = \left[\sqrt{r}sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right), \sqrt{r}cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right), \sqrt{r}sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right) sin\left(\theta_r\right), \sqrt{r}cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) sin\left(\theta_r\right)\right] \tag{2.5}$$

avec (r, θ_r) la base locale à la pointe de fracture.

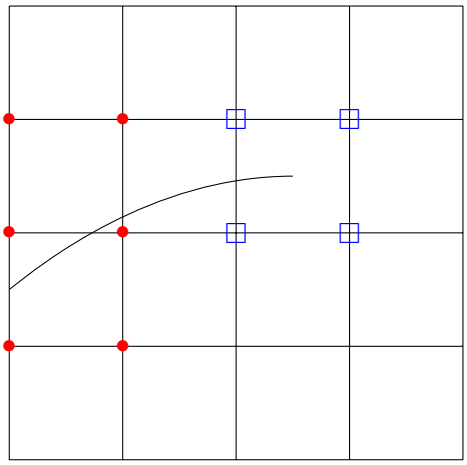


FIGURE 2.2 – *Représentation d'une fracture non conforme au maillage et nœuds enrichis par la fonction de Heaviside (points rouges) et par les fonctions singulières (carrés bleus).*

Classiquement dans l'ingénierie, la modélisation du milieu fracturé implique l'utilisation d'éléments d'interface qui ont été développés en mécanique avec la méthode FEM par Goodman et al. [104]. L'extension au cas du milieu poreux fracturé a été réalisée par Noorishad et al. [166] et plus récemment par Cornec et al. [54] et Carrier et al. [36]. Cependant, comme le mentionne Watanabe et al. [212], l'emploi des éléments d'interface peut être désavantageux, car ils impliquent une structuration complexe du maillage et peuvent conduire à d'importants défauts de convergence pour le cas de problèmes fortement couplés. Afin de s'affranchir de ces aspects, ces auteurs ont proposé une nouvelle formulation des éléments d'interface combinée avec la méthode XFEM en considérant des éléments de dimension inférieure sur chemin de propagation pré-défini. Dans la littérature, l'association du modèle de couplage HM avec XFEM est de plus en plus répandue. Par exemple, le comportement du milieu poreux saturé et fracturé a été simulé avec XFEM par Khoei et Haghighat [119], puis étendu au cas du milieu poreux partiellement saturé par Mohammadnejad et Khoei [152]. L'application à l'analyse de l'impact des séismes sur le milieu poreux fracturé et l'évolution d'ouvrages de génie civil comme les barrages, est traitée dans [122]. L'initiation de la rupture en thermo-élasticité a été étudiée par Zamani et Eslami [223] et le cas du couplage THM pour le milieu saturé en présence d'interfaces imperméables a été traité dans [121]. Les problématiques associées à la propagation de fractures hydrauliques ont été présentées dans [105, 106] et dans [179] pour le cas de la fracturation hydraulique du béton. Rethore et al. [180], proposent une approche à « deux échelles » pour laquelle la circulation du fluide le long de la fracture y est simulée indépendamment du champ de pression de pore. Ces travaux ont été étendus ensuite au cas du milieu poreux partiellement saturé dans [181] à l'aide d'un modèle de zone cohésive pour rendre compte de la dynamique de la fracture. Cette approche met en oeuvre une dépendance de la perméabilité de la fracture à la porosité du milieu. Ces auteurs suggèrent que le développement de fractures et de micro-fractures dans la zone d'endommagement modifie significativement la porosité de la matrice solide.

2.3 UNE ALTERNATIVE À L'ENRICHISSEMENT SINGULIER : LES MODÈLES DE ZONE COHÉSIVE

Dans le reste de ce mémoire, le processus de propagation dû à l'injection d'un fluide sera assimilé à la réactivation de fracture(s) pré-existante(s). Une manière efficace de caractériser la réactivation, et ainsi de s'affranchir de l'enrichissement singulier en pointe de fracture, est d'introduire un modèle de zone cohésive. La notion de modèle cohésif a initialement été introduite par Barenblatt [12] et Dugdale [76], afin d'améliorer la théorie de Griffith, du fait de la singularité du champ de contrainte en pointe de fracture. Ce type de modèle a ensuite

été étendu par Hillerborg et al. [112] par l'introduction de la notion d'énergie de rupture. Needleman et al. [161] proposent ensuite que la contrainte cohésive dérive d'un potentiel. La formulation des lois cohésives auxquelles nous faisons référence dans ce chapitre, se base sur ce principe.

Récemment, plusieurs modèles de couplage HM, impliquant des loi cohésives, ont été développés avec XFEM. Par exemple, Mohammadnejad et Khoei [154] ont étudié la propagation de fractures cohésives pour le cas du milieu poreux partiellement saturé, dans la continuité des travaux de [180]. Ce modèle a ensuite été appliqué aux problématiques associées à la fracturation hydraulique par Mohammadnejad et Khoei [153]. La formulation du modèle HM-XFEM, développé dans le chapitre 3 de ce mémoire, présente quelques similarités avec celui de [153], mais diffère sur d'autres points :

- Premièrement, Mohammadnejad et Khoei [153] prennent en compte les échanges au niveau de l'interface au moyen d'une condition de Neumann de type flux. Au contraire, nous traitons cet aspect grâce à l'introduction de deux degrés de liberté supplémentaires (*i.e.* correspondant à des champs de multiplicateur de Lagrange) dans la formulation du problème couplé, de la même manière que Carrier et al. [36] ;
- et deuxièmement, Mohammadnejad et Khoei [153] emploient une loi cohésive régularisée afin de décrire le comportement mécanique de l'interface.

Cependant, concernant le deuxième point, Ferte et al. [84] suggèrent d'éviter l'emploi de telles lois quand différents régimes de propagation sont (ou peuvent être) impliqués (*i.e.* contact, adhérence initiale, endommagement avec charge/décharge). C'est pourquoi l'introduction d'une formulation lagrangienne augmentée, que nous avons adaptée au cas du couplage hydro-mécanique, semble être un bon compromis afin d'éviter toute instabilité sur la solution numérique. Cela requiert une attention particulière notamment en ce qui concerne la construction des espaces d'approximation des champs de multiplicateur de Lagrange (pour la mécanique et l'hydraulique) au niveau de l'interface.

De plus, du fait de la circulation d'un fluide au sein de la fracture, le recours à un modèle de zone cohésive semble être plus adapté pour gérer la singularité des champs de déplacement et de pression de fluide au niveau de la pointe de la fracture. Sans modèle cohésif avec XFEM, des fonctions singulières spécifiques doivent être introduites (exposant 1/2 pour le cas des déplacement et 2/3 pour la pression de fluide (voir Lecampion [129])), notamment dans le cas où la fracture se propagerait selon un régime dominé par le comportement visqueux du fluide. Grâce à la formulation en contrainte effective et aux différents domaines de validité de la loi cohésive considérée (*i.e.* endommagement, rupture, etc.) la prise en compte de l'écoulement et de la propagation de la fracture au moyen d'un modèle de zone cohésive se fait plus naturellement (cf. Figure 2.3), et ce, quelque soit le régime considéré (voir chapitres 3 et 4 pour plus de détails). En considérant ce type de comportement, la fracture peut être décomposée en trois zones distinctes :

- une zone entièrement ouverte (zone 1), au niveau de laquelle la contrainte totale sur les parois de la fracture est égale à $p_f \boldsymbol{n_c}$ sur Γ_1 et égale à $-p_f \boldsymbol{n_c}$ sur Γ_2. Dans cette zone la valeur de la contrainte cohésive est due au fluide y circulant. D'autre part, la fracturation y est irréversible ;
- une zone intermédiaire (zone 2 ou Fracture Process Zone (FPZ)) dont l'ouverture est conditionnée par la valeur de la contrainte totale. Cette contrainte est alors égale à $\boldsymbol{t_c} = \boldsymbol{t_c'} - p_f \boldsymbol{n_c}$ (*i.e.* $-p_f < t_{c_n} < -p_f + \sigma_c$ où t_{c_n} est la contrainte cohésive totale normale et σ_c la contrainte critique). Au-delà d'une certaine ouverture limite δ_c, la contrainte correspond à celle de la zone 1 ;

- et enfin une zone saine (zone 3) pour laquelle les parois de la fracture sont en adhérence parfaite et ne s'interpénètrent pas. Dans cette zone, il n'y a aucune circulation de fluide.

La zone cohésive correspond à la partie de la fracture où la micro-fracturation de la roche se manifeste. Cependant, ces micro-fissures n'ont pas encore fusionné entre elles pour former une seule et unique macro-fracture. La limite entre la zone 1 et la FPZ correspond à la pointe de fracture réellement observable (*i.e. physical crack front* sur la Figure 2.3). La limite entre la FPZ et la zone adhérente localise, quant à elle, la zone d'initiation de la micro-fissuration : il s'agit de la pointe de fracture fictive (*i.e. fictitious crack front* sur la Figure 2.3) correspondant à la zone de décollement du matériau endommagé en amont de la pointe réelle de la fracture. Par abus de language, la pointe fictive de la fracture sera désormais assimilée à la pointe de fracture dans la suite de ce mémoire.

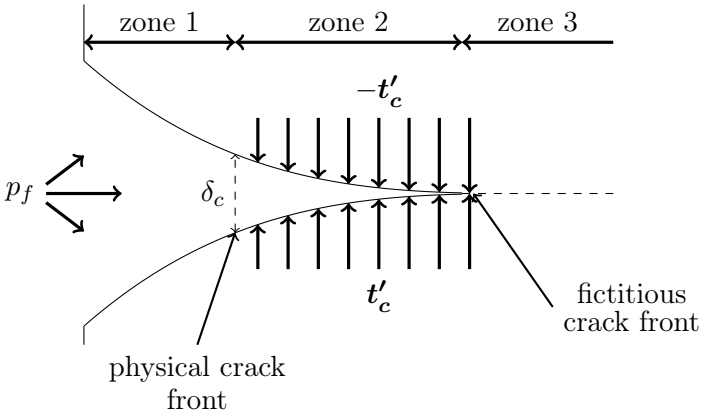


FIGURE 2.3 – *Représentation d'un modèle de zone cohésive associé à un écoulement de fluide.*

En suivant le formalisme exposé par Laverne [128], notre modèle repose sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale du système :

$$E_p\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}\right) = \Phi\left(\boldsymbol{u}\right) + \Psi\left(\boldsymbol{\delta}\right) - W_{ext}^m\left(\boldsymbol{u}\right) \tag{2.6}$$

avec :

- $\Psi\left(\boldsymbol{\delta}\right) = \int_{\Gamma_c} \Pi\left(\boldsymbol{\delta}\right) d\Gamma_c$ l'énergie de surface liée à l'ouverture de la fracture et $\Pi\left(\boldsymbol{\delta}\right)$ la densité d'energie surfacique ;
- $\Phi\left(\boldsymbol{u}\right) = \int_{\Omega} \phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}\right)\right) d\Omega$ l'énergie élastique du système et $\phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)$ la densité volumique d'énergie élastique ;
- $W_{ext}^m\left(\boldsymbol{u}\right)$ le travail des forces extérieures au domaine Ω (*i.e.* les forces de traction).

L'énergie potentielle totale met en jeu le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ et le saut de déplacement au niveau de la fracture tel que $\boldsymbol{\delta} = [\![\boldsymbol{u}]\!]$. La solution du problème consiste à minimiser l'énergie potentielle totale du système :

$$\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}} \left(E_p\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}\right)\right) \tag{2.7}$$

En fait, deux types de formulations, toutes deux basées sur l'approche énergétique précédente, sont envisageables en se basant sur les travaux de Laverne [128] et Debruyne et al. [63]. Le premier type de loi envisageable est dit *régularisé*. La contrainte cohésive est reliée au saut de déplacement via une simple relation explicite telle que :

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{c}}' = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\delta}} \tag{2.8}$$

La particularité de ces lois régularisées est d'être des lois dites « à mémoire ». de ce fait, l'irréversibilité de la fracturation est prise en compte par l'introduction d'un paramètre, noté κ, qui enregistre la plus grande valeur du saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$ atteint. Si n se réfère à l'instant courant du processus de fracturation, on pose :

$$\kappa^{n+1} = \max\left(\kappa^n, \|\boldsymbol{\delta}\|_+\right) \tag{2.9}$$

Remarque 2.1 *Afin d'être cohérent avec les notations adoptées dans la section 3.1.2 et de rester fidèle au formalisme de [128], la norme* $\|\boldsymbol{\delta}\|_+$ *est définie telle que* $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ = \sqrt{\langle [\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c \rangle_+^2 + [\![\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\tau}}]\!]^2}$ *avec* $\langle [\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c \rangle_+ = \max\left([\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c, 0\right)$. *L'intérêt de considérer la partie positive du saut de déplacement est d'interdire la dissipation de l'énergie en cas d'interpénétration des parois de la fracture.*

Il est alors possible de définir l'expression de l'énergie de surface qui caractérise le comportement mécanique de la fracture (Laverne [128]) :

$$\begin{aligned} \Psi\left(\kappa, \boldsymbol{\delta}\right) &= H\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+ - \kappa\right) \Psi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right) + \left[1 - H\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+ - \kappa\right)\right] \Psi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right) \\ &+ I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

avec H la fonction de Heaviside.

En considérant la définition de l'énergie de surface, plusieurs points sont à souligner :

- si $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ \geqslant \kappa$ alors il se produit une dissipation d'énergie au cours de la fracturation. Au cours de cette phase, l'énergie élastique du système va être convertie en énergie de surface [63]. Ce processus est irréversible. On parle alors de régime dissipatif. L'énergie de surface vaut alors :

$$\Psi\left(\kappa, \boldsymbol{\delta}\right) = \Psi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right) + I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c\right) \tag{2.11}$$

- si $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ < \kappa$ alors il n'y a pas de dissipation d'énergie, et contrairement au cas précédent, il peut se produire une (re)fermeture des parois de la fracture. Ce processus est réversible [63]. On parle alors de régime linéaire. Dans ce cas particulier, l'énergie de surface vaut :

$$\Psi\left(\kappa, \boldsymbol{\delta}\right) = \Psi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right) + I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c\right) \tag{2.12}$$

- enfin, afin de s'assurer de la non-interpénétration des parois de la fracture (et conserver un saut de déplacement normal positif), une fonction $I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c\right)$ est introduite dans l'expression de l'énergie de surface et possède les caractéristiques suivantes :

$$I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c < 0 \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

En fonction de la forme de la loi utilisée (*i.e.* linéaire ou exponentielle), nous indiquons dans les Tableaux 2.1 et 2.2 l'expression des densités d'énergie surfacique $\Pi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right)$ et $\Pi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right)$ associées aux énergies de surface :

- $\Psi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right) = \int_{\Gamma_c} \Pi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right) d\Gamma_c$ (pour le régime dissipatif) ;
- $\Psi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right) = \int_{\Gamma_c} \Pi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right) d\Gamma_c$ (pour le régime linéaire).

	Loi cohésive linéaire
$\Pi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right)$	$\begin{cases} -\dfrac{\sigma_c^2}{4G_c}\|\boldsymbol{\delta}\|_+^2 + \sigma_c\|\boldsymbol{\delta}\|_+ & \text{si } \|\boldsymbol{\delta}\|_+ < \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \\ G_c & \text{si } \|\boldsymbol{\delta}\|_+ \geqslant \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \end{cases}$
$\Pi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right)$	$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sigma_c\left(\dfrac{1}{\kappa} - \dfrac{\sigma_c}{2G_c}\right)\right)\|\boldsymbol{\delta}\|_+^2 + C_0 & \text{si } \kappa < \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \\ C_0 & \text{si } \kappa \geqslant \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \end{cases}$

TABLE 2.1 – *Expression de la densité d'énergie surfacique pour la loi cohésive régularisée linéaire (d'après Laverne [128]).*

	Loi cohésive exponentielle
$\Pi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right)$	$G_c\left(1 - \exp\left(-\dfrac{\sigma}{G_c}\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right)\right)$
$\Pi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma_c}{\kappa}\exp\left(-\dfrac{\sigma}{G_c}\kappa\right)\right)\|\boldsymbol{\delta}\|_+^2 + C_0$

TABLE 2.2 – *Expression de la densité d'énergie surfacique pour la loi cohésive régularisée exponentielle (d'après Laverne [128]).*

Deux paramètres, intrinsèques au matériau, sont remarquables dans les expressions de la densité d'énergie surfacique. D'une part G_c, l'énergie cohésive et σ_c la contrainte critique à la rupture. À partir de ces deux nouvelles données, il est possible de définir le saut de déplacement critique $\delta_c = \dfrac{2G_c}{\sigma_c}$ au-delà duquel la fracturation est irréversible (cf. Figure 2.3).

Avant de donner l'expression de la contrainte cohésive effective $\boldsymbol{t}_c^{'}$ qui s'exerce sur les parois de la fracture, il est important de souligner la non-dérivabilité de la densité d'énergie surfacique $\Pi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right)$ par rapport au saut de déplacement en zéro (*a contrario* la densité d'énergie surfacique du regime linéaire $\Pi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right)$ est dérivable en zéro). En effet si la fracturation est amorcée, en considérant $\kappa = 0$ (et donc $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ \geqslant 0$), et en se basant sur sa définition, l'énergie de surface est telle que :

$$\Psi\left(\kappa = 0, \boldsymbol{\delta}\right) = \Psi_{diss}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right) + I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c\right) \tag{2.14}$$

Pour éviter une singularité en 0 dans l'expression de la contrainte, Laverne [128] propose de fixer initialement $\kappa = \kappa_0 \neq 0$. De ce fait, cet artifice suggère que la fracture est initialement ouverte et ne dissipera pas d'énergie au cours de sa propagation tant que $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ < \kappa_0$. Dans ce cas, et pour la condition $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ < \kappa_0$, l'énergie de surface s'écrit :

$$\Psi\left(\kappa_0, \boldsymbol{\delta}\right) = \Psi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa_0\right) + I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}_c\right) \tag{2.15}$$

Compte tenu de la définition de $\Psi_{lin}\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+, \kappa\right)$, il n'y a plus de problèmes en zéro.

Nous constatons donc qu'avec ce type de lois, l'adhérence initiale n'est pas vérifiée, dès lors qu'un paramètre additionnel (*i.e.* paramètre de régularisation κ_0) autorise, d'une part un minimum d'interpénétration associé au décollement des parois de la fracture lorsque celles-ci sont supposées être fermées et adhérentes, et d'autre part une certaine ouverture initiale avant l'entrée en phase d'endommagement.

En utilisant les équations (2.8) et (2.10), la contrainte cohésive effective s'exprime de la manière suivante :

$$\boldsymbol{t}_c^{'} = H\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+ - \kappa\right)\boldsymbol{t}_{diss,c}^{'} + \left(1 - H\left(\|\boldsymbol{\delta}\|_+ - \kappa\right)\right)\boldsymbol{t}_{lin,c}^{'} + \boldsymbol{t}_{pen,c}^{'} \tag{2.16}$$

Étant donnée l'expression de la contrainte cohésive indiquée ci-dessus, il est possible de remarquer que :

- si $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ \geqslant \kappa \geqslant \kappa_0$ alors il se produit une dissipation d'énergie au cours de la fracturation (i.e régime dissipatif) et celle-ci, au niveau de la zone 2 (cf. Figure 2.3) vaut :

$$\boldsymbol{t}_c^{'} = \boldsymbol{t}_{diss,c}^{'} + \boldsymbol{t}_{pen,c}^{'} \tag{2.17}$$

- au contraire, si $\|\boldsymbol{\delta}\|_+ < \kappa < \kappa_0$ alors il n'y a pas de dissipation d'énergie, et contrairement au cas précédent les parois de la fracture peuvent se refermer (i.e. régime linéaire). Dans ce cas, la contrainte cohésive dans la zone 2 (cf. Figure 2.3) vaut :

$$\boldsymbol{t}_c^{'} = \boldsymbol{t}_{lin,c}^{'} + \boldsymbol{t}_{pen,c}^{'} \tag{2.18}$$

Sur la Figure 2.4 (d'après Debruyne et al. [63]), nous indiquons l'évolution de la norme de la contrainte cohésive (uniquement pour le cas d'une loi cohésive régularisée linéaire) en fonction de la norme du saut de déplacement $\boldsymbol{\delta}$. En particulier, il est possible de remarquer sur cette figure les différents régimes mentionnés précédemment en fonction de la valeur de κ. La phase d'évolution réversible est indiquée par des doubles flèches opposées (*i.e.* régime linéaire), et la phase dissipative, donc irréversible, est représentée par des flèches simples.

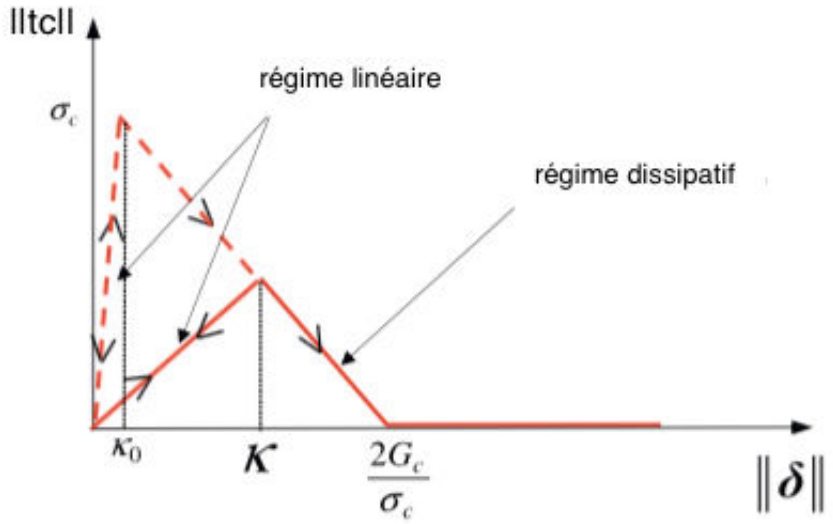


FIGURE 2.4 – *Évolution de la contrainte cohésive en fonction du saut de déplacement - cas de la loi linéaire régularisée (extraite de [63]).*

Comme pour la densité d'énergie surfacique, nous indiquons dans les Tableaux 2.3 et 2.4, l'expression de $\boldsymbol{t}_{lin,c}^{'}$ et $\boldsymbol{t}_{diss,c}^{'}$:

	Loi cohésive linéaire
$\boldsymbol{t}_{diss,c}^{'} = \dfrac{\partial \Pi_{diss}}{\partial \boldsymbol{\delta}}$	$\begin{cases} \sigma_c \boldsymbol{\delta} \left(\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\delta}\|_+} - \dfrac{\sigma_c}{2G_c} \right) & \text{si } \|\boldsymbol{\delta}\|_+ < \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \\ 0 & \text{si } \|\boldsymbol{\delta}\|_+ \geqslant \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \end{cases}$
$\boldsymbol{t}_{lin,c}^{'} = \dfrac{\partial \Pi_{lin}}{\partial \boldsymbol{\delta}}$	$\begin{cases} \sigma_c \boldsymbol{\delta} \left(\dfrac{1}{\kappa} - \dfrac{\sigma_c}{2G_c} \right) & \text{si } \kappa < \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \\ 0 & \text{si } \kappa \geqslant \dfrac{2G_c}{\sigma_c} \end{cases}$

TABLE 2.3 – *Expression de $\boldsymbol{t}_{lin,c}^{'}$ et $\boldsymbol{t}_{diss,c}^{'}$ pour la loi cohésive régularisée linéaire (d'après Laverne [128]).*

	Loi cohésive exponentielle
$\boldsymbol{t}'_{diss,c} = \dfrac{\partial \Pi_{diss}}{\partial \boldsymbol{\delta}}$	$\sigma_c \dfrac{\boldsymbol{\delta}}{\|\boldsymbol{\delta}\|_+} \exp\left(-\dfrac{\sigma_c}{G_c}\|\boldsymbol{\delta}\|_+\right)$
$\boldsymbol{t}'_{lin,c} = \dfrac{\partial \Pi_{lin}}{\partial \boldsymbol{\delta}}$	$\sigma_c \dfrac{\boldsymbol{\delta}}{\kappa} \exp\left(-\dfrac{\sigma_c}{G_c}\kappa\right)$

TABLE 2.4 – *Expression de $\boldsymbol{t}'_{lin,c}$ et $\boldsymbol{t}'_{diss,c}$ pour la loi cohésive régularisée exponentielle (d'après Laverne [128]).*

Ferte et al. [82, 84] ont récemment montré qu'un modèle de zone cohésive se basant sur des lois régularisées est instable dans le cas de modélisations XFEM impliquant des maillages quadratiques. Le test d'arrachement mené par Ferte et al. [82, 84] montre différentes situations fonctions de la valeur du paramètre de régularisation. En effet, si κ_0 est trop petit, l'ouverture de la fracture est sur-estimée par rapport à la solution de référence obtenue en FEM pour le cas d'un maillage conforme : le saut de déplacement n'a alors pas de signification physique et l'interpénétration des parois de la fracture est observable. Au contraire, si la valeur du paramètre de régularisation est trop grande, des oscillations parasites sont observées au niveau de la zone en adhérence. Ces oscillations peuvent conduire à une mauvaise évaluation du régime actuel (*i.e.* adhérence ou régime dissipatif). Elles sont en effet liées au fait que l'espace d'approximation discret de la contrainte de traction est trop riche en comparaison de celui du champ de déplacement au niveau de la discontinuité. Par conséquent, la condition de stabilité LBB (ou condition *inf-sup*) [144] n'est pas respectée. Cette condition garantie l'unicité de la solution conditionnée par une construction appropriée des espaces d'approximation des multiplicateurs de Lagrange (cf. section 3.4.2.2).

Cependant, les éléments HM-XFEM auxquels nous faisons référence dans le chapitre 3 de ce mémoire (cf. section 3.4.2.3), doivent impérativement respecter cette condition pour garantir la stabilité de la solution numérique. Afin de remplir cet objectif, en ce qui concerne la partie mécanique de ce modèle, une solution alternative est de considérer un modèle de zone cohésive dont la formulation implique l'utilisation d'une loi cohésive non-régularisée, pour laquelle l'adhérence initiale est parfaite. Pour ce faire, nous avons choisi de reprendre la formulation de Lorentz [142] basée sur la résolution d'un problème de minimisation de l'énergie de type *point-selle*.

Contrairement au formalisme des lois cohésives régularisées, celui des lois non-régularisées considère deux nouveaux champs supplémentaires. En considérant l'approche énergétique (2.7) et l'argumentation de Lorentz [142], le champ $\boldsymbol{\delta}$ est désormais considéré comme une nouvelle inconnue, due à la dualisation de la contrainte d'égalité $\boldsymbol{\delta} = [\![\boldsymbol{u}]\!]$. Le problème à résoudre devient :

$$\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}=[\![\boldsymbol{u}]\!]} \left(E_p\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}\right)\right) \tag{2.19}$$

Une solution $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta})$ de l'équation (2.19) est obtenue à partir de la formulation de type point-selle $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})$ associée au Lagrangien augmenté L_r (cf. section 3.3.2). Le champ $\boldsymbol{\lambda}$, apparaissant dans l'expression de ce Lagrangien, est relié à la contrainte $\boldsymbol{\delta} = [\![\boldsymbol{u}]\!]$ associée au problème d'optimisation (2.19). Contrairement au champ $\boldsymbol{\delta}$, le champ $\boldsymbol{\lambda}$ est considéré comme un degré de liberté supplémentaire dans la formulation discrète du modèle HM-XFEM.

Sachant que pour ce type de formulation, la densité d'énergie surfacique Π est non-différentiable en zéro [142], ce champ $\boldsymbol{\delta}$ est alors estimé localement au niveau du réseau de point de Gauss de l'interface. Cette démarche permet de confiner localement cette propriété de Π. Ensuite, pour pouvoir relier la contrainte cohésive au saut de déplacement local $\boldsymbol{\delta}$,

le sous-différentiel de la densité d'énergie surfacique $\partial\Pi(\boldsymbol{\delta})$ [48] est introduit. La contrainte cohésive effective doit alors vérifier en chaque point de Gauss :

$$\boldsymbol{t}'_{\boldsymbol{c}} \in \partial\Pi(\boldsymbol{\delta}) \tag{2.20}$$

Nous détaillons, dans la section 3.3.2, l'expression de ce sous-différentiel qui permet de définir les différents régimes de validité de la loi cohésive non-régularisée que nous souhaitons utiliser : la loi de *Talon-Curnier* [204].

2.4 Une manière simple de représenter les discontinuités : les level-sets

Le recours à un modèle de zone cohésive (qui au final ne gère que la dynamique de la fracture) et l'introduction de l'enrichissement Heaviside local ne permettent cependant pas de repérer la position d'un point par rapport à la discontinuité. En se basant sur les travaux novateurs de Osher et Sethian [170] pour représenter une interface mobile, la méthode XFEM a été associée avec les *level-sets*. Auparavant, les discontinuités étaient représentées en ayant recours à un remaillage local ou à des techniques de *mapping* pour le cas des fractures coudées (cf. [14] et [69] respectivement). Cependant grâce aux *level-sets*, le remaillage local est inutile et leur utilisation se conjugue parfaitement avec la méthode XFEM (voir [75]). L'emploi des *level-sets* est particulièrement adapté au cas de la propagation d'une fracture comme ont pu le montrer Stolarska et al. [198]. Au cours de la propagation, seuls les champs de *level-sets* seront actualisés, à partir d'un maillage figé du début jusqu'à la fin du processus d'actualisation. Autrement dit, la croissance de la fracture se fait indépendamment de la structure du maillage.

2.4.1 Propriétés des *level-sets*

Soit Ω (en gris sur la Figure 2.5) un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et Γ une discontinuité. Soit $\boldsymbol{n}$ une normale de Γ orientée positivement à Ω, $\boldsymbol{x}$ un point de l'espace suffisamment proche de la discontinuité et $\boldsymbol{x_p}$ sont projeté orthogonal sur Γ. Afin de représenter mathématiquement cette discontinuité et son voisinage, il est possible de définir sur cet ouvert une fonction lipschitzienne $\phi_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que [151] :

$$\phi_n(\boldsymbol{x}, t) = \min_{\boldsymbol{x_p} \in \Gamma} || \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_p} || \; sign(\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x_p} - \boldsymbol{x})) \tag{2.21}$$

avec

$$sign(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La discontinuité se réfèrera soit à une interface soit à une fracture. Dans le premier cas, celle-ci est uniquement caractérisée par la fonction ϕ_n (communément appelée *level-set* normale). Dans le cas d'une fracture, il est nécessaire de prendre en compte la pointe par l'ajout d'une seconde *level-set* ϕ_t (communément appelée *level-set* tangente), qui sera orthogonale à la *level-set* normale ϕ_n. Dans la suite de ce chapitre, nous considèrerons la discontinuité comme une fracture afin de rester le plus général. Cependant, le modèle HM-XFEM présenté dans le chapitre 3, implique uniquement la *level-set* normale pour représenter la discontinuité. En effet, comme nous avons pu le faire remarquer dans la section 2.3, l'emploi d'un modèle de zone cohésive permet de s'affranchir de l'enrichissement en pointe de fracture. De ce fait, dans le cas où la propagation a lieu sur un chemin pré-défini, l'utilisation d'une *level-set* tangente est inutile.

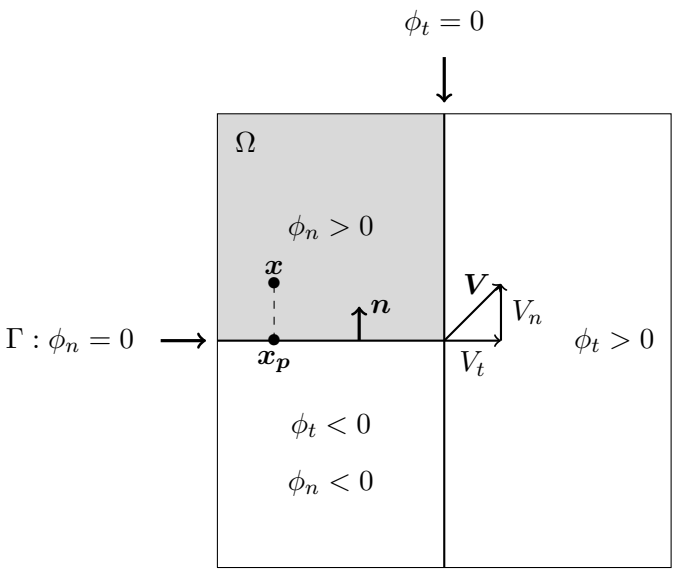


FIGURE 2.5 – *Représentation d'une fracture au moyen des level-sets : cas 2D.*

À partir de la Figure 2.5, le signe des différentes *level-sets* permet de définir :

- la surface de la fracture telle que $\phi_n(\boldsymbol{x}, t) = 0$ et $\phi_t(\boldsymbol{x}, t) < 0$;
- la pointe de la fracture telle que $\phi_n(\boldsymbol{x}, t) = 0$ et $\phi_t(\boldsymbol{x}, t) = 0$;
- la zone où la fracture peut potentiellement se propager $\phi_t(\boldsymbol{x}, t) > 0$.

D'autre part, si $\phi_n(\boldsymbol{x}, t) > 0$ alors le point $\boldsymbol{x}$ sera considéré au-dessus de la surface de la fracture. Au contraire, si $\phi_n(\boldsymbol{x}, t) < 0$, il sera positionné en-dessous de la surface de la fracture. Ensuite les deux *level-sets* ϕ_n et ϕ_t possèdent la propriété de distance signée. En d'autres termes, cela signifie que la distance d'un point par rapport à l'iso-zéro des deux *level-sets* (*i.e.* donc la position par rapport à la surface et la pointe de la fracture) sera donnée par la valeur de ϕ_n et ϕ_t et s'exprime par les deux équations eikonales suivantes :

$$|| \nabla \phi_n || = 1 \qquad || \nabla \phi_t || = 1 \tag{2.22}$$

La propriété d'orthogonalité des *level-sets* va permettre de définir une base locale au niveau de la pointe de la fracture (proposée par Stolarska et al. [198]). Cette base locale, exprimée en coordonnées polaires, va être particulièrement utile pour définir les fonctions singulières $F_{\alpha=\{1,4\}}$ afin de respecter exactement la condition $\phi_n = 0$ et $\phi_t < 0$ (*i.e.* définissant la surface de la fracture) et ainsi éviter d'avoir recours à des techniques de *mapping*, comme cela pouvait être le cas dans [14] et [69]. On aura ainsi :

$$r = \sqrt{\phi_n^2 + \phi_t^2} \quad \theta_r = arctan\left(\frac{\phi_n}{\phi_t}\right) \tag{2.23}$$

De même, la construction de l'enrichissement Heaviside sera grandement facilitée et correspondra à :

$$H(\phi_n) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi_n \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } \phi_n < 0 \end{cases}$$

Dans la pratique, les valeurs des *level-sets* sont stockées au niveau des nœuds des éléments du maillage et ces champs de *level-sets* seront interpolés à partir des fonctions de forme φ_i utilisées dans l'approximation du champ de déplacement tels que :

$$\phi_n(\boldsymbol{x},t) = \sum_i (\phi_n)_i(t)\varphi_i(\boldsymbol{x}) \quad \phi_t(\boldsymbol{x},t) = \sum_i (\phi_t)_i(t)\varphi_i(\boldsymbol{x}) \tag{2.24}$$

Ensuite, l'utilisation des valeurs nodales de la *level-set* normale $(\phi_n)_i$ et de la *level-set* tangente $(\phi_t)_i$ permettra de repérer quels sont les éléments concernés par l'enrichissement local mentionné en section 2.2.2 (voir équations (2.3) à (2.5) et Figure 2.2).

De ce fait, si un élément donné e du maillage est traversé par la fracture alors la condition stipulant que les nœuds de cet élément sont enrichis par la fonction de Heaviside H est la suivante [201, 198] :

$$\max(\phi_n(n_i)) \min(\phi_n(n_j)) \leqslant 0 \tag{2.25}$$

$$\phi_t < 0 \tag{2.26}$$

En effet, si le nœud n_i de e est situé au-dessus de la surface de la fracture alors $\phi_n(n_i) > 0$ et si n_j est situé en-dessous de sa surface alors $\phi_n(n_j) < 0$. Il est donc évident que le produit des deux valeurs nodales est négatif et l'iso-zéro de la *level-set* normale est forcement comprise entre ces deux nœuds. Cependant, tout deux doivent être en amont de la *level-set* tangente car $\phi_t < 0$.

Sur le même principe, un élément e du maillage contiendra la pointe de fracture (et donc tout ses nœuds seront enrichis par les fonctions singulières F_α) si [198] :

$$\max(\phi_n(n_i)) \min(\phi_n(n_j)) \leqslant 0 \tag{2.27}$$

$$\min(\phi_t(n_i)) \max(\phi_t(n_k)) \leqslant 0 \tag{2.28}$$

La première condition (équation (2.27)) indique, comme précédemment, que l'élément e est coupé par la fracture (*i.e.* par exemple, le nœud n_i sera au-dessus de la fracture et n_j sera en-dessous de la fracture), tandis que pour la deuxième condition (équation (2.28)) si le nœud n_i est en amont de la *level-set* tangente alors $\phi_t(n_i) < 0$, et si n_k est en aval de la *level-set* tangente alors $\phi_t(n_k) > 0$. Encore une fois, il est évident que la pointe de fracture, définie comme l'intersection des deux *level-sets* normale et tangente, est contenue dans l'élément e si les deux conditions sont remplies simultanément.

2.4.2 Méthodes d'actualisation des *level-sets*

Comme Duflot le rappelle dans [75], quelque soit la méthode considérée, l'actualisation des *level-sets* en mécanique de la rupture ne suit pas le même schéma que celui généralement considéré pour décrire l'évolution des interfaces mobiles. Premièrement, l'iso-zéro de deux *level-sets* est nécessaire pour représenter une fracture (*i.e.* la *level-set* normale ϕ_n et la *level-set* tangente ϕ_t). Seule la *level-set* normale est utile dans le cas d'une interface mobile. Ensuite, sachant que le processus de fracturation est irréversible, il faut conserver la surface de la fracture intacte en amont de sa pointe. Ceci implique donc que dans cette zone l'iso-zéro de la *level-set* normale ne doit pas être affectée au cours de l'actualisation. Enfin, la grandeur clef à considérer pour décrire l'évolution de la fracture est la vitesse au niveau de sa pointe.

Plusieurs approches, permettant d'actualiser les *level-sets*, sont disponibles dans la littérature. En particulier, nous pouvons citer les approches basées sur la résolution d'équations de type Hamilton-Jacobi (voir [109, 53] par exemple), ou bien des approches basées sur des considérations géométriques (soit vectorielles [210, 99] ou bien scalaires [52]). Dans le cadre

de la formulation du modèle HM-XFEM présentée dans le chapitre 3 de ce mémoire, l'actualisation des *level-sets* n'est pas nécéssaire. En effet, nous considérons la propagation d'une fracture le long d'un chemin pré-défini (impliquant une unique *level-set*). Nous souhaitons néanmoins présenter un bref état de l'art sur les méthodes d'actualisation, afin de montrer comment est pris en compte la propagation d'une fracture lorsque le chemin est non pré-défini, et d'autre part montrer certaines limites dans la mise en œuvre de ces techniques d'actualisation.

2.4.2.1 Méthodes basées sur la résolution d'équations aux dérivées partielles

Pour accommoder la propagation de la fracture au niveau du domaine défini par $\phi_t > 0$, il est nécessaire de définir la vitesse de propagation $\boldsymbol{V}$ au niveau de la pointe de la fracture. Grâce à la propriété d'orthogonalité des deux *level-sets*, il est possible de définir une base orthonormée $(\boldsymbol{n_n}, \boldsymbol{n_t})$ en tout point du domaine où les *level-sets* sont définies, telle que :

$$\boldsymbol{n_t} = \frac{\boldsymbol{\nabla}\phi_t}{|| \boldsymbol{\nabla}\phi_t ||} \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{n_n} = \frac{\boldsymbol{\nabla}\phi_n}{|| \boldsymbol{\nabla}\phi_n ||} \tag{2.30}$$

avec $\boldsymbol{n_t}$ le vecteur unitaire normal à l'iso-zero de la *level-set* tangente et $\boldsymbol{n_n}$ le vecteur unitaire normal à l'iso-zero de la *level-set* normale. Dans cette base, la vitesse de propagation de la pointe de fracture s'exprime donc par (cf. Figure 2.5) :

$$\boldsymbol{V} = V_t \boldsymbol{n_t} + V_n \boldsymbol{n_n} \tag{2.31}$$

Selon Gravouil et al. [109], le processus d'actualisation se décompose en 4 étapes principales :

- la première étape consiste à actualiser les deux champs de *level-sets* indépendamment l'un de l'autre au moyen des deux équations de type Hamilton-Jacobi de la forme :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + || \boldsymbol{\nabla}\phi_n || V_n = 0 \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} + || \boldsymbol{\nabla}\phi_t || V_t = 0 \tag{2.33}$$

avec t le temps physique.

Néanmoins, alors que la vitesse de propagation $\boldsymbol{V}$ est donnée par la loi de propagation mécanique qui régit le comportement de la pointe de fracture (donc uniquement connue au niveau de la pointe), il est nécessaire que cette grandeur soit connue sur l'ensemble du domaine où les deux champs de *level-set* seront actualisés (*i.e.* dans la zone correspondant à $\phi_t > 0$ uniquement). Pour ce faire, les composantes normale V_n et tangentielle V_t du champ de vitesse en pointe de la fracture seront réparties au niveau des nœuds des éléments contenus dans la zone d'actualisation des *level-sets* et seront interpolés par les mêmes fonctions de forme qu'utilisées dans l'approximation des champs ϕ_n et ϕ_t [113] :

$$V_n(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i \varphi_i(\boldsymbol{x})(V_n)_i(t) \tag{2.34}$$

$$V_t(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i \varphi_i(\boldsymbol{x})(V_t)_i(t) \tag{2.35}$$

Ensuite, la vitesse en pointe est propagée à tout le domaine d'actualisation en résolvant le système d'équation (2.36) à (2.39) à l'équilibre par rapport au temps virtuel τ [175, 109] :

$$\frac{\partial V_t}{\partial \tau} + sign(\phi_t)\frac{\boldsymbol{\nabla}\phi_t}{||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_t\ ||} \cdot \boldsymbol{\nabla} V_t = 0 \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial \tau} + sign(\phi_n)\frac{\boldsymbol{\nabla}\phi_n}{||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_n\ ||} \cdot \boldsymbol{\nabla} V_t = 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial \tau} + sign(\phi_n)\frac{\boldsymbol{\nabla}\phi_n}{||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_n\ ||} \cdot \boldsymbol{\nabla} V_n = 0 \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial \tau} + sign(\phi_t)\frac{\boldsymbol{\nabla}\phi_t}{||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_t\ ||} \cdot \boldsymbol{\nabla} V_n = 0 \tag{2.39}$$

Du fait de l'extension de la vitesse à tout le domaine d'actualisation des *level-sets* selon la direction normale à la surface de la fracture, il est important de rétablir un champ de vitesse nul en amont de l'iso-zero de la *level-set* tangente propagée, puisque dans cette zone la fracturation est irréversible. Ainsi la composante normale de la vitesse en pointe de fracture, après actualisation, devient :

$$V_n^{act} = H\left(\phi_t\right)\frac{V_n \phi_t}{V_t \Delta t} \tag{2.40}$$

avec $H\left(\phi_t\right) = 0$ si $\phi_t < 0$ et $H\left(\phi_t\right) = 1$ si $\phi_t > 0$.

- la deuxième étape consiste à actualiser la *level-set* normale en tenant compte de la correction de la composante normale de la vitesse $\boldsymbol{V}$:

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + V_n^{act}\ ||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_n\ || = 0 \tag{2.41}$$

Elle sera ensuite suivie par sa réinitialisation (d'après Sussman et al. [202] et Sukumar et al. [201]) car la *level-set* normale a perdu sa propriété de distance signée au cours de la phase précédente (*i.e.* le gradient de la *level-set* normale est modifié du fait de l'équation (2.41)). En d'autres termes, la *level-set* sera réinitialisée jusqu'à l'atteinte de l'état d'équilibre $||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_n\ || = 1$. Pour cela on considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \tau} + sign(\phi_n)\left(||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_n\ || - 1\right) = 0 \tag{2.42}$$

- au cours de la première étape, étant donné que la propagation des *level-sets* normale et tangente se fait indépendamment l'une de l'autre, il en résulte une perte de la propriété d'orthogonalité des deux champs de *level-set*. Par conséquent, la troisième étape consiste, après avoir réinitialisé la *level-set* normale, à réorthogonaliser la *level-set* tangente à la *level-set* normale [34, 109]. Cela est possible en résolvant l'équation (2.43) jusqu'à atteindre l'équilibre :

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial \tau} + sign(\phi_n)\frac{\boldsymbol{\nabla}\phi_n}{||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_n\ ||} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi_t = 0 \tag{2.43}$$

- enfin, le processus se terminera par la réinitialisation de la *level-set* tangente, car comme la *level-set* normale, celle-ci a perdu sa propriété de distance signée au cours de la première étape :

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial \tau} + sign(\phi_t)\left(||\ \boldsymbol{\nabla}\phi_t\ || - 1\right) = 0 \tag{2.44}$$

Ces quatre étapes seront répétées exactement dans l'ordre indiqué (cela est en effet important pour le cas des géométries de fractures courbes), et ce, pour chaque pas de propagation de la fracture. Cependant, Duflot [75] a montré que la phase d'actualisation des *level-sets* impliquant les équations (2.32) et (2.33) générait des imprécisions qui s'amplifient au fur et à mesure de la propagation. Pour cela, il propose de considérer à la place les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \phi_n \cdot \boldsymbol{V_N} = 0 \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \phi_t \cdot \boldsymbol{V_T} = 0 \tag{2.46}$$

où $\boldsymbol{V_N}$ et $\boldsymbol{V_T}$ représentent respectivement les vecteurs vitesse normale et tangentielle à la surface de la fracture.

Comme le rappellent Colombo et Massin [53], l'utilisation d'équations aux dérivées partielles pour actualiser les champs de *level-set* est un atout majeur dans le sens où la dimension du problème physique est invisible dans la formulation des équations. Néanmoins, ces méthodes d'actualisation présentent de nombreux inconvénients. Premièrement, bien que les *level-sets* seront actualisées dans une zone restreinte autour de la fracture [198], l'intégration numérique des EDP peut s'avérer extrêmement coûteuse en temps de calcul en particulier pour les géométries de fractures complexes et pour le cas des modélisations 3D. Dans le cadre de la méthode d'actualisation des *level-sets* présentée dans cette section (voir Gravouil et al. [109]), les équations aux dérivées partielles sont intégrées en temps grâce à un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 2. Bien que ce schéma numérique soit explicite et conditionnellement stable, il n'empêche que des instabilités numériques (voire un défaut de convergence de l'algorithme de propagation) peuvent apparaître lorsque la surface de la fracture est fortement coudée (comme ont pu le montrer Colombo et Massin dans [53]). Cela est notamment lié au fait que dans une zone coudée l'expression des champs de *level-set* sera non différentiable (*i.e.* du fait de la discontinuité du gradient des *level-sets* au niveau du coude). Le recours à la *Fast marching method* [190, 201] peut être une alternative pour prévenir ce genre de problèmes sans les résoudre complètement.

Néanmoins, Colombo et Massin [53] ont proposé une méthode hybride entre une approche géométrique et une approche basée sur la résolution d'équations de type Hamilton-Jacobi. Pour la phase d'actualisation des *level-sets*, ils proposent de ne plus utiliser les équations aux dérivées partielles (2.32) et (2.33) (ou les équations (2.45) et (2.46)), mais à la place d'introduire deux fonctions polynomiales explicites telles que :

$$\Delta \phi_n = -(\boldsymbol{V_N} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi_n) \cdot \Delta t_{tot} \tag{2.47}$$

$$\Delta \phi_t = -(\boldsymbol{V_T} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi_t) \cdot \Delta t_{tot} \tag{2.48}$$

où Δt_{tot} représente le temps que met la fracture pour se propager d'un incrément Δa pour un pas de propagation donné. Il est incontestable qu'en ayant recours à ces fonctions polynomiales, l'utilisation d'un schéma d'intégration numérique est inutile puisque l'expression des *level-sets* ϕ_n et ϕ_t est obtenue directement et ainsi améliore les performances du processus d'actualisation (cf. étape 1).

Ensuite, pour la phase d'extension du champ de vitesse au domaine d'actualisation des *level-sets*, une approche géométrique par rotation rigide est conduite afin de s'affranchir une fois encore des problèmes d'instabilité liées à l'intégration des équations (2.36) à (2.39). Dans

cette approche hybride, les phases de réinitialisation et de réorthogonalisation des *level-sets* normale ϕ_n et tangente ϕ_t sont toujours basées sur l'intégration des équations d'Hamilton-Jacobi (cf. équations (2.42) à (2.44)). Cependant, ces auteurs proposent de mener ces phases en combinant l'intégration de ces équations avec un schéma de différences finies à l'ordre 1 : le schéma *upwind* [200]. L'avantage d'utiliser ce schéma d'intégration est qu'il sera parfaitement capable d'accommoder la discontinuité du gradient des *level-sets* au niveau de zones coudées. Néanmoins, il nécessite d'avoir recours à un maillage régulier. Dans le cas des maillages physiques, l'utilisation d'une grille auxiliaire régulière est requise. Ceci peut apparaître comme un inconvénient à la méthode puisque le processus d'évolution des *level-sets* s'appuiera sur cette grille, puis les champs nouvellement calculés seront projetés au niveau des nœuds des éléments du maillage pour chaque pas de propagation, ce qui peut s'avérer coûteux en temps de calcul. Néanmoins, Colombo et Massin [53] proposent d'effectuer l'actualisation et la projection grille/maillage des *level-sets* au niveau d'un domaine circulaire centré en pointe de fracture.

2.4.2.2 Méthodes géométriques

Nous avons présenté dans la section précédente quelques exemples de méthodes d'actualisation des *level-sets* basées sur la résolution d'équations aux dérivées partielles de type Hamilton-Jacobi. Pour des cas relativement simples, en particulier des fractures dont le chemin de propagation est plan ou relativement lisse, l'utilisation d'EDP reste un bon compromis. Néanmoins, lorsque que le chemin de propagation va présenter une discontinuité marquée du gradient des champs de *level-set*, ces méthodes deviennent inefficaces voire conduisent à l'échec de la convergence de l'algorithme de propagation. Colombo et Massin [53] ont proposé une méthode généraliste afin de surmonter une partie des ces problèmes en couplant la résolution des EDP avec une approche géométrique. Néanmoins cette approche reste sujette à la résolution d'EDP réduisant ses performances en termes de temps de calcul et de robustesse. Une alternative serait donc de considérer des méthodes purement géométriques pour actualiser les *level-sets*. Un des avantages majeur de ces méthodes géométriques est qu'elles impliquent seulement un nombre restreint d'équations explicites. Dans la suite de cette section, nous présenterons quelques exemples de méthodes géométriques, d'abord vectorielle puis scalaire.

2.4.2.2.1 Méthode géométrique vectorielle

Dans le cadre des *meshless methods* (*i.e.* Element-Free Galerkin Method (EFGM)), Ventura et al. [210] ont proposé de remplacer les formulations basées sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, par une formulation basée uniquement sur l'actualisation de champs de *level-sets* vectorielles. Cette formulation a également été couplée avec la méthode XFEM dans [209].

Contrairement à la formulation standard (cf. section 2.4.1), la formulation de Ventura et al. [210, 209] fait intervenir une unique fonction pour représenter la fracture. Celle-ci sera définie à partir d'un ensemble de deux objets, $\boldsymbol{f}$ représentant la projection la plus courte d'un point $\boldsymbol{x}$ de l'espace (un nœud du maillage par exemple) sur la surface de la fracture, et un opérateur booléen B (équivalent à la fonction de Heaviside généralisée) prenant les valeurs $+1$ ou -1. Cet ensemble ainsi que la fonction *level-set* (dont la définition est équivalente à celle décrite en section 2.4.1) s'expriment respectivement par :

$$g(\boldsymbol{x},t) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t), B(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t))\} \tag{2.49}$$

$$f(\boldsymbol{x},t) = || \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \ || \ B(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)) \tag{2.50}$$

Au pas de propagation n, deux vecteurs de propagation seront définis au niveau de la fracture. Le vecteur $\boldsymbol{s^{n-1}}$ servira à repérer la zone déjà propagée et sera orienté tangentiellement à la surface de la fracture. Le second, $\boldsymbol{s^n}$, sera orienté tangentiellement à la nouvelle direction de propagation et se terminera au niveau de la position de la pointe $\boldsymbol{x^n}_{TIP}$ pour cet instant de propagation (cf. Figure 2.6). Ce vecteur sera particulièrement utile pour déterminer les nœuds des éléments pour lesquels l'ensemble $g(\boldsymbol{x}, t)$ sera actualisé (et par conséquent pour lesquels la *level-set* sera actualisée). Il s'agit de la zone en gris clair sur le Figure 2.6, la zone en gris foncé n'étant pas concernée par l'actualisation. Le critère de selection des nœuds $\boldsymbol{x}_I$ des éléments coupés ou contenant partiellement le vecteur $\boldsymbol{s^n}$ sera (cf. $\boldsymbol{x}_I$ et $\boldsymbol{x}_K$ sur la Figure 2.6) :

$$(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x^n}_{TIP}) \cdot \boldsymbol{s^n} \leqslant 0 \quad (\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x^{n-1}}_{TIP}) \cdot \boldsymbol{s^{n-1}} > 0 \tag{2.51}$$

Ensuite la *level-set* sera actualisée dans cette zone de la manière suivante :

$$B(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_I, t)) = sign((\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x^{n-1}}_{TIP}) \cdot \boldsymbol{s^n}_{\perp}) \tag{2.52}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_I, t) = \begin{cases} -\boldsymbol{u^n}_{\perp}((\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x^{n-1}}_{TIP}) \cdot \boldsymbol{u^n}_{\perp}) & \text{si } (\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x^{n-1}}_{TIP}) \cdot \boldsymbol{s^n} \geqslant 0 \\ -(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x^{n-1}}_{TIP}) & \text{si } (\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x^{n-1}}_{TIP}) \cdot \boldsymbol{s^n} < 0 \end{cases} \tag{2.53}$$

avec $\boldsymbol{s^n}_{\perp}$ le vecteur normal à $\boldsymbol{s^n}$ et $\boldsymbol{u^n}_{\perp} = \frac{\boldsymbol{s^n}_{\perp}}{||\boldsymbol{s^n}_{\perp}||}$.

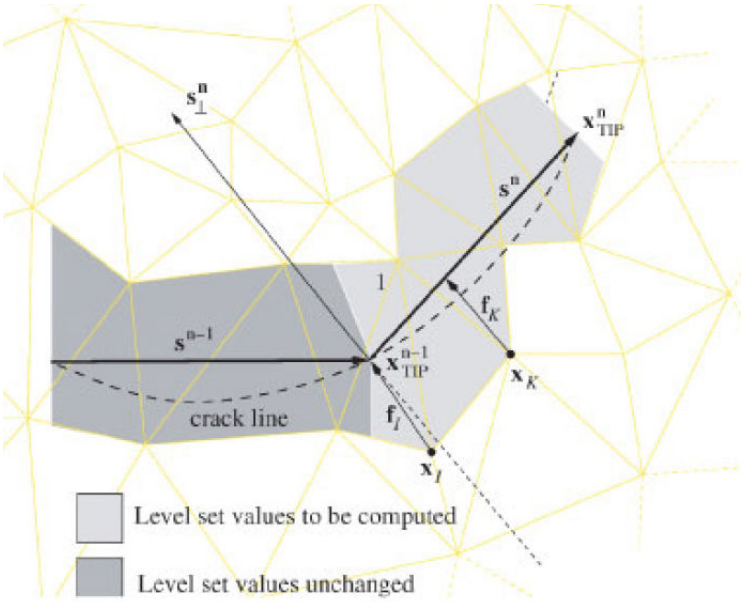


FIGURE 2.6 – *Exemple d'actualisation des level-sets vectorielles (extraite de [209]).*

2.4.2.2.2 Méthode géométrique scalaire

Nous terminerons ce chapitre par l'exemple d'actualisation des *level-sets* au moyen d'une méthode géométrique impliquant deux *level-sets* scalaires (par opposition à la section précédente où l'utilisation de *level-sets* vectorielles est mentionnée). Cette méthode a été proposée par Colombo [52] qui a montré que la manière d'actualiser les champs de *level-set* avec XFEM est 30 fois plus rapide en 2D (respectivement environ 3 à 6 fois plus rapide en 3D) que celle impliquant la résolution d'équations aux dérivées partielles de type Hamilton-Jacobi. Elle permet également de gagner en robustesse, puisqu'aucun schéma d'intégration numérique n'est employé. Grâce à cette méthode d'actualisation, les phases successives de

réinitialiation et de réorthogonalisation, ainsi que la phase d'extension de la vitesse en pointe de fracture seront éliminées.

Soit P, le point repérant la position actuelle de la pointe de fracture et correspondant à l'intersection entre les deux *level-sets* ϕ_n et ϕ_t. En P sera définie une base locale $(\boldsymbol{n_p}, \boldsymbol{t_p})$. Soit Δa le vecteur donnant la direction de propagation de la fracture et β l'angle de propagation entre l'iso-zéro de la *level-set* normale et Δa au point P. La position actualisée de la pointe de fracture est repérée par le point Q (cf. Figure 2.7). On notera O l'origine du repère global. La première étape consiste à exprimer la base locale $(\boldsymbol{n_p}, \boldsymbol{t_p})$ au niveau du point Q à l'aide d'une rotation rigide et ainsi redéfinir une nouvelle base locale en Q telle que :

$$\boldsymbol{n_Q} = -sin(\beta)\boldsymbol{t_p} + cos(\beta)\boldsymbol{n_p} \tag{2.54}$$

$$\boldsymbol{t_Q} = cos(\beta)\boldsymbol{t_p} + sin(\beta)\boldsymbol{n_p} \tag{2.55}$$

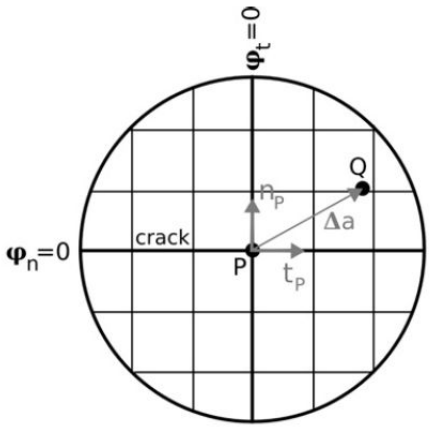


FIGURE 2.7 – *Configuration initiale avant l'actualisation des level-sets (extraite de [52]).*

À partir de cette base locale, il sera alors possible de déterminer à la fois la nouvelle position de la pointe de fracture au point Q (cf. équation (2.56)) mais également d'exprimer les *level-sets* en tout point M du domaine à actualiser grâce aux équations scalaires (2.57) et (2.58) :

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \Delta a \boldsymbol{t_Q} \tag{2.56}$$

$$\phi_n(M) = \overrightarrow{QM} \cdot \boldsymbol{n_Q} \tag{2.57}$$

$$\phi_t(M) = \overrightarrow{QM} \cdot \boldsymbol{t_Q} \tag{2.58}$$

Il est important de noter que l'ensemble des points en amont du point P (c'est-à-dire la zone correspondant à $\phi_t \leqslant 0$ en gris clair sur la Figure 2.8) ne seront pas impliqués dans le processus d'actualisation, afin de conserver intacte la surface de la fracture déjà propagée. Cela engendrera une discontinuité des champs de *level-set* comme il est possible de le remarquer dans la partie en aval du point P. Néanmoins, il sera capital de conserver la continuité de la surface de la fracture avec la zone déjà propagée. Pour ce faire, tout point M situé sur le segment [PQ] devra satisfaire les deux conditions suivantes :

$$\phi_n(M) = 0 \tag{2.59}$$

$$\phi_t(M) = - \parallel \overrightarrow{QM} \parallel \tag{2.60}$$

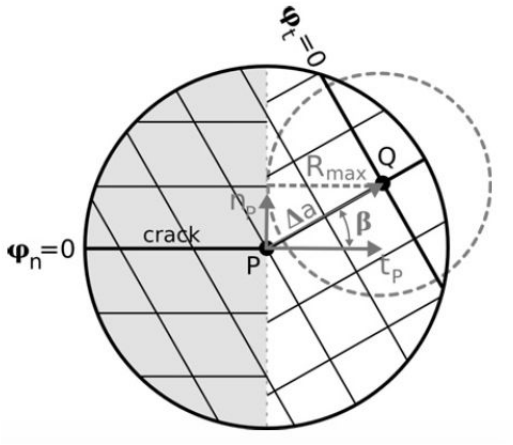


FIGURE 2.8 – *Configuration après actualisation des level-sets et localisation du domaine figé (en gris) et celui concerné par l'actualisation (zone circulaire) (extraite de [52]).*

La discontinuité des *level-sets* d'un domaine à l'autre importe peu car, comme le souligne Colombo [52], il est suffisant de déterminer la valeur correcte des *level-sets* (*i.e.* ϕ_n et ϕ_t orthogonales entre elles, et possédant chacune la propriété de fonction distance signée) dans une zone circulaire de rayon maximal $R_{max} = \Delta a_{max} cos(\beta_{max})$ centrée en Q (cf. Figure 2.8). Le critère de propagation ne devra alors être appliqué que dans cette zone circulaire où les *level-sets* ont été correctement actualisées.

2.5 SYNTHÈSE ET OBJECTIFS

Nous avons donc vu que le choix de la méthode XFEM, pour modéliser le comportement d'une fracture, est un bon compromis par rapport à la multitude de *meshless methods* disponibles dans la littérature. Bien sûr, cette méthode a ses inconvénients (notamment en ce qui concerne l'imposition de conditions aux limites au niveau d'une interface (voir Moës et al. [147] et Béchet et al. [13] et chapitre 3 de ce mémoire), mais est également peu adaptée aux cas impliquant de très fortes déformations du domaine). Cependant sa principale force repose sur sa flexibilité d'association avec d'autres techniques comme les *level-sets* pour représenter la discontinuité des champs au niveau de la fracture, et ce, indépendamment du maillage. Par exemple, il sera plus aisé de représenter des fractures présentant des géométries complexes (voir par exemple Fries et al. [90] pour le cas d'interfaces courbes pour le cas mécanique sans couplage). Ensuite, l'utilisation d'un modèle de zone cohésive pour gérer la propagation de la fracture, semble également être une bonne alternative. En effet, il sera plus simple de rendre compte de la circulation du fluide au sein de la fracture (et ce quelque soit le régime dominant la propagation), puisque la pression de fluide générée par l'écoulement est directement introduite dans la formulation de la loi cohésive. Ensuite, ce type de modèle permet de s'affranchir de la nécessité d'introduire des fonctions d'enrichissement singulières pour rendre compte de la discontinuité des champs de déplacement et de pression au niveau de la pointe de fissure. Néanmoins, il faudra être prudent dans la manière de définir ces champs au niveau des éléments finis du maillage intersectés par la fracture.

Dans la suite de ce mémoire, nous présenterons en détails le modèle numérique HM-XFEM dont nous avons déjà fait mention dans ce chapitre. En particulier, nous détaillerons la loi cohésive non-régularisée (*i.e.* loi de Talon-Curnier [204]) que nous avons adapté au cas de l'écoulement d'un fluide dans une fracture. Ensuite, dans le chapitre 4, nous montrerons que l'utilisation d'un modèle de zone cohésive est particulièrement bien adapté à la propagation d'une fracture hydraulique (sur chemin pré-défini), puisque différents régimes seront étudiés

sans avoir eu besoin de faire de distinctions (*e.g.* dominance des effets visqueux) dans le formalisme éléments finis.

Couplage du modèle poro-mécanique saturé avec la méthode XFEM

3

Sommaire

3.1 Présentation du problème . . . 40
3.1.1 Définition du domaine d'étude . . . 40
3.1.2 Hypothèses et notations . . . 40
3.1.3 Conditions aux limites . . . 41
3.2 Équations constitutives du modèle HM-XFEM . . . 42
3.2.1 Équations pour la mécanique (cas du massif) . . . 42
3.2.2 Équations pour l'hydrodynamique . . . 42
3.2.3 Équations du modèle poro-mécanique . . . 43
3.3 Formulations variationnelles du modèle HM-XFEM . . . 45
3.3.1 Espaces fonctionnels . . . 45
3.3.2 Formulation faible du problème mécanique . . . 46
3.3.3 Formulation faible du problème hydrodynamique . . . 50
3.4 Discrétisation du problème . . . 51
3.4.1 Discrétisation temporelle . . . 51
3.4.2 Formulation éléments finis : discrétisation spatiale par la méthode XFEM . . . 53
3.5 Résolution du problème couplé . . . 61
3.5.1 Linéarisation du problème couplé . . . 61
3.5.2 Écriture des termes élémentaires avec XFEM . . . 64

Comme nous avons pu le voir dans le chapitre introductif de ce mémoire, les failles ou les fractures jouent un rôle fondamental dans la chenalisation des écoulements de polluants ou de fluides minéralisateurs au sein du milieu géologique. Dans le cas de variations locales de l'état de contrainte et sous l'effet de la pression fluide, de nouvelles fractures sont susceptibles de se développer ; la perméabilité ainsi que l'orientation de celles-ci sont également des facteurs évolutifs en temps et en espace. L'approche, mise en oeuvre dans ce chapitre, permet de rendre compte de ces processus complexes et d'apporter une caractérisation fiable de la dynamique du milieu poreux fracturé au cours du temps. Le modèle présenté ici [80] a été introduit dans le logiciel élément finis *Code_ Aster*, développé par EDF R&D [1].

3.1 Présentation du problème

3.1.1 Définition du domaine d'étude

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine entièrement traversé par une fracture perméable (les problématiques associées à la pointe de fissure sont hors de propos ici). Soit $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$ du domaine, et $\boldsymbol{n_c}$ la normale sortante à la fracture Γ_c. Le domaine est divisé en deux sous-domaines distincts Ω_1 et Ω_2 respectivement les parties supérieure et inférieure de Ω tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Il est possible de décomposer :

- la frontière du domaine Ω en $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_p \cup \Gamma_F$ où sont imposées les conditions aux limites (*i.e.* (Dirichlet, Neumann)) pour l'hydrodynamique (Γ_p, Γ_F) et pour la mécanique (Γ_u, Γ_t) ;
- la fracture en $\Gamma_c = \Gamma_f \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où Γ_1 et Γ_2 représentent les parois de celle-ci. On impose des conditions de flux sur Γ_f (flux d'injection dans la fracture par exemple) ainsi que des efforts surfaciques cohésifs sur Γ_1 et Γ_2.

La Figure 3.1 donne une représentation symbolique des conditions imposées sur la frontière du domaine.

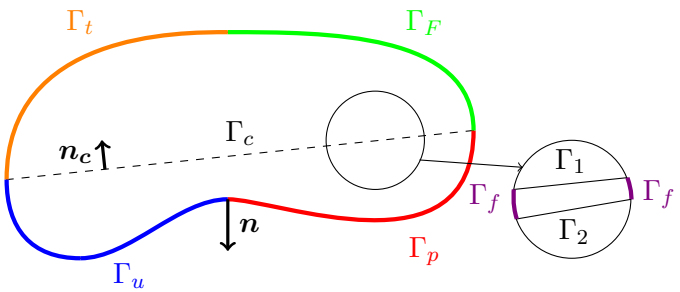


FIGURE 3.1 – *Décomposition symbolique du domaine* Ω.

3.1.2 Hypothèses et notations

Le milieu poreux est supposé être entièrement saturé par un fluide mouillant et un écoulement se produit au sein de la fracture et du massif. En supposant que le massif est perméable, les échanges de fluide ont lieu entre le massif (partie de Ω qui n'est pas la fracture) et la fracture. Nous conceptualisons ces échanges à l'aide des deux grandeurs q_1 et q_2, exprimées en $kg.m^{-2}.s^{-1}$.

Le champ de pression de pore du massif est noté p et celui associé à la fracture est noté p_f (champ induit par le fluide circulant dans la fracture). Le champ de déplacement est noté $\boldsymbol{u}$ et le saut de déplacement au niveau de l'interface est symbolisé par $[\![\boldsymbol{u}]\!]$. Soit P_1 un point de Γ_1 et P_2 un point de Γ_2. La normale extérieure (*i.e.* orientée vers l'intérieur de la fracture) à Γ_1 se note $\boldsymbol{n_c^1} = -\boldsymbol{n_c}$ et celle extérieure à Γ_2 se note $\boldsymbol{n_c^2} = \boldsymbol{n_c}$. Le saut de déplacement normal (pris positif ou nul en ouverture et négatif en interpénétration des parois) est donc défini de la manière suivante :

$$[\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n_c} = (\boldsymbol{u}(P_1) - \boldsymbol{u}(P_2)) \cdot \boldsymbol{n_c} \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Sur la Figure 3.2, on précise l'orientation des échanges entre le massif et la fracture, ainsi que les conventions adoptées pour définir le saut de déplacement au niveau de l'interface.

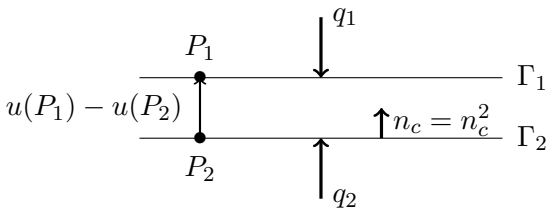


FIGURE 3.2 – *Conventions d'orientation adoptées au niveau de l'interface.*

Dans le cadre de la théorie des contraintes effectives de Biot [25, 26, 27], nous définissons :

- dans le cas du massif, la contrainte totale telle que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - bp[\boldsymbol{Id}]$ où b représente le coefficient de Biot [133] ;
- dans le cas de la fracture, la contrainte totale telle que $\boldsymbol{t_c} = \boldsymbol{t_c'} - p_f \boldsymbol{n_c}$ au niveau de la zone d'endommagement (cf. section 2.3 et Figure 2.3).

L'hypothèse des petites perturbations est admise. D'autre part on considère que les grandeurs mécaniques et hydrauliques sont isotropes.

3.1.3 Conditions aux limites

Comme indiqué sur la Figure 3.1, les conditions aux limites existant sur la frontière du domaine Ω et au niveau de la fracture Γ_c sont utilisées pour obtenir les formulations variationnelles des équations de conservations du modèle HM-XFEM (cf. section 3.3).

Sur la frontière extérieure de Ω, les conditions de Dirichlet suivantes sont imposées :

1. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_0}$ sur Γ_u (déplacements constants) ;
2. $p = p_0$ sur Γ_p (pression de pore constante).

et les conditions de Neuman sont telles que :

3. $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$ sur Γ_t (efforts surfaciques imposés) ;
4. $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n} = M_{ext}$ sur Γ_F (flux massiques constants).

De plus, les conditions de Dirichlet au niveau de la fracture Γ_c sont les suivantes :

5. $\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n_c} = W_{ext}$ sur Γ_f (flux d'injection constant) ;
6. $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n_c^1} = q_1$ sur Γ_1 et $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n_c^2} = q_2$ sur Γ_2 (égalité des flux au niveau de chaque paroi de la fracture)
7. $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n_c^1} = -\boldsymbol{t_c}$ sur Γ_1 (efforts cohésifs surfaciques imposés) ;
8. $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n_c^2} = \boldsymbol{t_c}$ sur Γ_2 (efforts cohésifs surfaciques imposés).

Une condition aux limites supplémentaire est requise afin de garantir la continuité de la pression de pore p avec la pression de fluide p_f au niveau de chaque paroi de la fracture. Cette hypothèse est légitime du fait de la faible épaisseur de la discontinuité. Ainsi il est possible d'écrire :

9. $p = p_f$ sur Γ_1
10. $p = p_f$ sur Γ_2

La pression de pore p a été mathématiquement construite (l'approximation discrète de ce champ pour être exact) afin d'être discontinue (voir section 3.4.2.1.1). Cependant, en considérant les deux conditions d'égalité précédentes, nous forçons la continuité de ce champ par dualisation de ces deux conditions dans la formulation faible du problème couplé. Ainsi, seul le gradient de la pression de pore est discontinu. Deux multiplicateurs de Lagrange sont introduits pour satisfaire cette exigence au niveau des parois de la fracture : q_1 et q_2 interprétés comme les flux massiques qui quantifient les échanges entre la fracture et le massif.

3.2 Équations constitutives du modèle HM-XFEM

3.2.1 Équations pour la mécanique (cas du massif)

Dans le cas du massif, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (en tenant compte des efforts volumiques) peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{Div}\,(\boldsymbol{\sigma}) + r^{hom}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{3.2}$$

avec :

- $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte totale ;
- r^{hom} la masse volumique homogénéisée telle que dans le cas saturé $r^{hom} = r_0 + m_w$ où r_0 est la masse volumique homogénéisée dans la configuration de référence et m_w les apports massiques ;
- et $\boldsymbol{F}$ représente les efforts volumiques agissant sur Ω (dans la pratique il s'agira des forces de gravité).

Une loi élastique linéaire est employée afin de relier la contrainte effective aux déformations et s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{'} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.3}$$

où $\mathbb{C}$ représente le tenseur de souplesse (d'ordre 4) et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations.

Nous détaillons dans la section 3.3.2 les équations d'équilibre gouvernant le comportement mécanique de l'interface, puisque celles-ci sont directement déterminées à partir de la formulation intégrale du Lagrangien augmenté.

3.2.2 Équations pour l'hydrodynamique

3.2.2.1 Équation de conservation de la masse (cas du massif)

Dans le cas du massif, l'équation de conservation de la masse, décrivant le comportement du fluide interstitiel, se met sous la forme :

$$\frac{\partial m_w}{\partial t} + Div\,(\boldsymbol{M}) = 0 \tag{3.4}$$

avec :

- m_w les apports massiques (par unité de volume), exprimés en $kg.m^{-3}$;
- $\boldsymbol{M}$ les flux massiques, exprimés en $kg.m^{-2}.s^{-1}$.

3.2.2.2 Équation de conservation de la masse (cas de la fracture)

Une approche similaire est conduite au niveau de la fracture. Une pression continue p_f est introduite afin de tenir compte de l'écoulement du fluide au sein de la fracture. D'autre part, les échanges entre la fracture et le massif sont pris en compte au niveau de chaque parois de la fracture au moyen des flux massiques q_1 et q_2. Ainsi l'équation de conservation de la masse pour la fracture est telle que :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Div\,(\boldsymbol{W}) = q_1 + q_2 \tag{3.5}$$

avec :

- w les apports massiques (par unité de surface), exprimés en $kg.m^{-2}$;
- $\boldsymbol{W}$ les flux massiques, exprimés en $kg.m^{-1}.s^{-1}$.

3.2.3 Équations du modèle poro-mécanique

3.2.3.1 Expression des apports massiques

- Cas du massif
  Les apports massiques peuvent être mis sous la forme (en considérant que le milieu poreux est entièrement saturé en fluide $S_{lq} = 1$) :

$$m_w = \rho\phi\left(1 + \varepsilon_v\right) \tag{3.6}$$

  avec :
  - ρ, ϕ respectivement la masse volumique du fluide (en $kg.m^{-3}$), et la porosité eulérienne du massif ;
  - $\varepsilon_v = Tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = Tr\left(\dfrac{\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla u}^T}{2}\right)$, la déformation volumique (où Tr est l'application linéaire trace).

- Cas de la fracture
  Les apports massiques sont définis par :

$$w = \rho[\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c \tag{3.7}$$

3.2.3.2 Expression des flux massiques

- Cas du massif
  Les flux massiques dans le massif sont régis par la loi de Darcy. Ainsi on pose :

$$\boldsymbol{M} = \gamma\rho\left(-\boldsymbol{\nabla}p + \rho\boldsymbol{F}\right) \tag{3.8}$$

  avec $\gamma = \dfrac{K^{int}}{\mu}$ la mobilité du liquide (en $kg^{-1}.m^3.s$) où K^{int} représente la perméabilité intrinsèque du massif (en m^2) et μ la viscosité dynamique du fluide (en $Pa.s$). $\boldsymbol{F}$ représente les forces de gravité.

  Remarque 3.1 *L'expression de la mobilité fait intervenir en réalité la perméabilité relative au fluide $k_{lq}^{rel}\left(S_{lq}\right)$ (qui est une fonction de la saturation du milieu poreux, et est donnée par exemple par la loi de Mualem/Van-Genuchten [185]). On pose alors $\gamma = K^{int}k_{lq}^{rel}\left(S_{lq}\right)/\mu$. Étant donné que le milieu poreux est saturé par une seule phase fluide, la perméabilité relative au fluide est égale à $k_{lq}^{rel}\left(S_{lq}\right) = 1$.*

- Cas de la fracture
  Nous supposons que la conductivité hydraulique de la fracture est proportionnelle au cube de son ouverture de façon à ce que l'écoulement du fluide soit relié à l'ouverture de la fracture via une loi cubique [214]. Ayant choisi de négliger les effets gravitaires, nous posons :

$$\boldsymbol{W} = -\frac{\rho\left([\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c\right)^3}{12\mu}\boldsymbol{\nabla}p_f \tag{3.9}$$

3.2.3.3 Évolution de la porosité

L'évolution de la porosité (en représentation eulérienne) est donnée, dans le cas isotherme, par :

$$d\phi = (b - \phi)\left(d\varepsilon_v + \frac{dp}{K_s}\right) \tag{3.10}$$

avec $1/K_s$ le module de compressibilité de la matrice solide (en Pa^{-1}) et b le coefficient de Biot [133].

3.2.3.4 Évolution de la masse volumique du fluide

- Cas du massif
  L'évolution de la masse volumique du fluide, saturant les pores du massif, est donnée dans le cas isotherme par la relation suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K_w} \tag{3.11}$$

  avec $1/K_w$ le module de compressibilité du fluide (en Pa^{-1}).

- Cas de la fracture
  Sur le même principe que pour le massif, l'expression de la variation de la masse volumique du fluide circulant dans la fracture, pour le cas isotherme, est telle que :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp_f}{K_w} \tag{3.12}$$

3.2.3.5 Dérivée des apports massiques

Étant donné que la différentielle des apports massiques intervient dans l'expression des matrices associées au problème linéarisé (voir section 3.5.1.2), son expression est donnée ici dans le cas du milieu saturé en conditions isothermes.

- Cas du massif
  Les apports massiques étant fonctions de la déformation volumique ε_v, de la porosité ϕ et de la masse volumique du fluide ρ, la différentielle des apports massiques peut donc s'écrire :

$$dm_w = \rho\phi d\varepsilon_v + \rho\left(1+\varepsilon_v\right)d\phi + \phi\left(1+\varepsilon_v\right)d\rho \tag{3.13}$$

  Compte tenu de l'hypothèse des petites perturbations, par souci de simplification, on suppose que $(1+\varepsilon_v) \approx 1$. Au final, en combinant les équations (3.11) et (3.10) avec l'équation (3.13), nous obtenons :

$$dm_w = \rho b d\varepsilon_v + \left(\frac{\rho\left(b-\phi\right)}{K_s} + \frac{\rho\phi}{K_w}\right)dp \tag{3.14}$$

- Cas de la fracture
  De la même manière que précédemment, la différentielle des apports massiques est :

$$dw = \rho \boldsymbol{n}_c \cdot d[\![\boldsymbol{u}]\!] + \left([\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n}_c\right)\rho\frac{dp_f}{K_w} \tag{3.15}$$

3.2.3.6 Dérivée des flux massiques

Comme pour le cas des apports massiques, nous jugeons nécessaire de rappeler l'expression de la différentielle des flux massiques, ceux-ci intervenant dans l'expression des matrices du système linéarisé (voir section 3.5.1.2).

- Cas du massif
  La différentielle des flux massiques dans le cas du massif s'écrit :

$$d\boldsymbol{M} = \left(\frac{\boldsymbol{M}}{\rho} + \rho\gamma\boldsymbol{F}\right)\rho\frac{dp}{K_w} + \frac{\boldsymbol{M}}{\gamma}d\gamma - \rho\gamma d\boldsymbol{\nabla}p \tag{3.16}$$

- Cas de la fracture
  La différentielle des flux massiques dans le cas de la fracture est :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{W} &= \left(\frac{\boldsymbol{W}}{\rho}\right)\rho\frac{dp_f}{K_w} - \frac{\rho}{12\mu}\left(3\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^2\right)\boldsymbol{\nabla}p_f\otimes\boldsymbol{n_c}\cdot d\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket \\ &- \frac{\rho\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^3}{12\mu}d\boldsymbol{\nabla}p_f \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.3 Formulations variationnelles du modèle HM-XFEM

3.3.1 Espaces fonctionnels

Avant de préciser les formulations variationnelles des équations de conservation précédentes, il est important de définir les espaces fonctionnels des fonctions tests associées aux champs de déplacement virtuel $\boldsymbol{u^*}$, de pression de pore virtuelle p^*, de pression de fluide virtuelle p_f^* et des champs de multiplicateurs de Lagrange virtuels ($\boldsymbol{\lambda^*}$, q_1^* et q_2^*). La théorie associée à la construction de ces espaces n'est pas le propos de ce chapitre. Pour plus d'informations concernant l'établissement de ces différents espaces, nous conseillons au lecteur de se référer à [13, 147], dont nous étendons les travaux en considérant quatre champs de multiplicateurs de Lagrange au niveau de l'interface. Les espaces fonctionnels de ces champs ont été choisis afin d'assurer la stabilité et la convergence de la solution numérique.

L'ensemble des déplacements et champ de pression cinématiquement admissibles dans le domaine Ω et sur sa frontière $\partial\Omega$ sont respectivement :

$$U_0 = \{\boldsymbol{u}^* \in H^1(\Omega_1)\times H^1(\Omega_2)\,/\,\boldsymbol{u}^* \text{pratiquement discontinus à travers } \Gamma_c \text{ et } \boldsymbol{u}^* = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$$

$$P_0 = \{p^* \in H^1(\Omega_1)\times H^1(\Omega_2)\,/\,\boldsymbol{\nabla}p^* \text{pratiquement discontinus à travers } \Gamma_c \text{ et } p^* = 0 \text{ sur } \Gamma_p\}$$

et les ensembles associés à chaque champ de multiplicateurs de Lagrange sont tels que :

$$Q_1 = \{q_1^* \in H^{-1/2}(\Gamma_1)\,/\,q_1^* \in \Gamma_1\}$$

$$Q_2 = \{q_2^* \in H^{-1/2}(\Gamma_2)\,/\,q_2^* \in \Gamma_2\}$$

$$P_0^f = \{p_f^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c)\,/\,p_f^* \geqslant 0 \text{ on } \Gamma_c\}$$

$$\Lambda_0 = \{\boldsymbol{\lambda^*} \in H^{-1/2}(\Gamma_c)\,/\,\lambda^* \geqslant 0 \text{ on } \Gamma_c\}$$

où $H^1(\Omega_1)$ et $H^1(\Omega_2)$ sont les espaces de Sobolev des fonctions dont les dérivés premières sont de carré intégrable respectivement sur Ω_1 et Ω_2. Le saut de déplacement nodal $\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket$ est défini sur l'espace $H^{1/2}(\Gamma_c)$ associé à la trace de $H^1(\Omega)$ restreint à Γ_c. Son espace dual est $H^{-1/2}(\Gamma_c)$. Nous indiquons dans la section 3.4.2.2 l'algorithme utilisé pour construire ces espaces de multiplicateurs de Lagrange.

Selon Nistor et al. [164], chaque élément de Λ_0 est associé à une contrainte de traction, suggérant ainsi que la fracture est ouverte. De même, tout élément de P_0^f indique qu'une pression de fluide mesurée positive au niveau de l'interface, génère un écoulement de fluide au sein de la fracture.

3.3.2 Formulation faible du problème mécanique

Pour résoudre l'équation (2.19), nous avons choisi de nous baser sur la formulation de Lorentz [142] en introduisant le lagrangien augmenté L_r tel que :

$$L_r\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}\right) \overset{\text{def}}{=} E_p\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}\right) + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket - \boldsymbol{\delta}\right) d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \frac{r}{2}\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket - \boldsymbol{\delta}\right)^2 d\Gamma_c \tag{3.18}$$

Afin de satisfaire la relation (2.19), et ainsi être en mesure de déterminer les formes variationnelles pour la mécanique, il nous faut trouver les différentes conditions d'optimum du lagrangien augmenté. Étant donné que le lagrangien (3.18) est une fonction des trois inconnues $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})$, les conditions d'optimum sont au nombre de trois. Ainsi :

$$\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}=\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket}\left(E_p\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}\right)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\boldsymbol{\delta}^* & \frac{\partial L_r}{\partial\boldsymbol{\delta}} = 0 \\ \forall\boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda_0 & \frac{\partial L_r}{\partial\boldsymbol{\lambda}} = 0 \\ \forall\boldsymbol{u}^* \in U_0 & \frac{\partial L_r}{\partial\boldsymbol{u}} = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

La première condition d'optimum du lagrangien augmenté donne :

$$\forall\boldsymbol{\delta}^* \quad \int_{\Gamma_c}\left[\boldsymbol{t_c} - \boldsymbol{\lambda} - r\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket - \boldsymbol{\delta}\right)\right]\cdot\boldsymbol{\delta}^* d\Gamma_c = 0 \tag{3.20}$$

L'équation (3.20) fait intervenir la contrainte cohésive totale $\boldsymbol{t_c}$. Cependant, ce champ est local car la loi cohésive est définie uniquement au niveau de la fracture. Afin de respecter cette exigence, il est nécessaire que $\boldsymbol{\delta}$ soit un champ constant et discrétisé par collocation au niveau des points de Gauss de la discontinuité. Ainsi, l'expression locale de la contrainte cohésive totale $\boldsymbol{t_c}$ est donnée par l'équation (3.21) et suit la loi de Talon-Curnier :

$$\boldsymbol{t_c}\left(\boldsymbol{\delta},\kappa\right) = \boldsymbol{\lambda} + r\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket - \boldsymbol{\delta}\right) \tag{3.21}$$

Sachant que le milieu poreux est saturé et qu'il existe un écoulement de fluide dans la fracture, nous devons prendre en compte l'influence de la pression de fluide dans la formulation de la contrainte cohésive. En particulier, en considérant l'hypothèse des contraintes effectives au niveau de l'interface (*i.e.* $\boldsymbol{t_c} = \boldsymbol{t'_c} - p_f\boldsymbol{n_c}$), la relation à satisfaire au niveau de chaque point de Gauss est à présent :

$$\boldsymbol{t'_c}\left(\boldsymbol{\delta},\kappa\right) = \boldsymbol{\lambda} + r\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket - \boldsymbol{\delta}\right) + p_f\boldsymbol{n_c} \tag{3.22}$$

Graphiquement [142], la solution du problème correspond à l'intersection de l'application linéaire $f : \boldsymbol{\delta} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} + r\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket - \boldsymbol{\delta}\right) + p_f\boldsymbol{n_c}$ avec le graphe du sous-différentiel $\partial\Pi\left(\boldsymbol{\delta}\right)$ pour le mode I (cf. Figure 3.3). L'avantage d'introduire le terme d'augmentation $\int_{\Gamma_c}\frac{r}{2}\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket - \boldsymbol{\delta}\right)^2 d\Gamma_c$ dans l'équation (3.18) est d'assurer l'unicité de la solution si le paramètre r n'est pas trop grand. Ce paramètre est assimilé à la pente de la fonction f. Ainsi, le champ $\boldsymbol{\delta}$ s'écrit localement comme une fonction du multiplicateur augmenté $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket + p_f\boldsymbol{n_c}$. Ce faisant, $\boldsymbol{\delta}$ n'est plus considéré comme une inconnue du problème à résoudre.

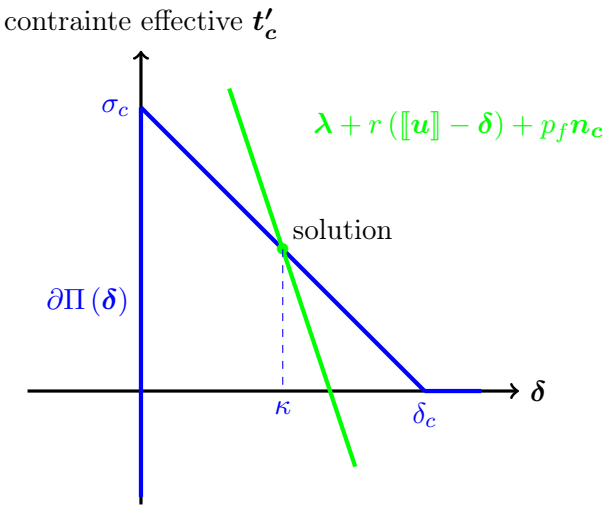


FIGURE 3.3 – *Interprétation graphique de l'unicité de la solution en mode I (d'après Lorentz [142]).*

Avant de donner les formulations variationnelles de la partie mécanique du modèle HM-XFEM, il est important de préciser l'expression du champ $\boldsymbol{\delta}$ à l'aide de la définition du sous-différentiel $\partial\Pi\left(\boldsymbol{\delta}\right)$, dont nous faisions référence dans la section 2.3. Nous donnons également le détail de la dérivée de ce champ, car celle-ci intervient dans l'expression des matrices de rigidité du problème couplé.

3.3.2.1 Description du modèle de zone cohésive non régularisé : Loi de Talon-Curnier

Selon Lorentz [142], 5 points clefs sont à prendre en considération dès lors que la loi de Talon-Curnier est utilisée pour décrire le comportement mécanique de la fracture :

(i) la non-interpénétration des parois de la fracture ;

(ii) l'adhérence initiale doit être parfaite ;

(iii) les deux modes de rupture I et II doivent être pris en compte ;

(iv) quand la fracture est complètement ouverte, le déplacement est supérieur ou égal au saut de déplacement critique δ_c ;

(v) et la fracturation est irréversible.

Afin de satisfaire la condition (iii), le saut de déplacement équivalent est introduit :

$$\delta_{eq} = \sqrt{\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}} \tag{3.23}$$

De plus afin d'assurer l'irréversibilité de la fracturation (*i.e.* condition (v)), comme pour le cas des lois cohésives régularisées (cf. section 2.3), nous introduisons la variable de mémoire κ qui enregistre la plus grande norme du saut de déplacement local $\boldsymbol{\delta}$ atteinte au cours de la fracturation. Ainsi la condition (v) est satisfaite pour :

$$\kappa\left(t\right) = \sup_{t'<t} \delta_{eq}\left(t'\right) \tag{3.24}$$

Ensuite, afin de remplir la condition de contact, c'est à dire empêcher l'interpénétration des parois de la fracture (*i.e.* condition (i)), une fonction indicatrice I est introduite dans l'expression de la densité d'énergie surfacique $\Pi\left(\boldsymbol{\delta}\right)$. Cette indicatrice force la positivité du saut de déplacement dans la direction normale. Ainsi, l'expression modifiée de la densité d'énergie surfacique est telle que :

$$\Pi\left(\boldsymbol{\delta}, \kappa\right) = I\left(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n_c}\right) + \psi\left(\max\left(\delta_{eq}, \kappa\right)\right) \tag{3.25}$$

avec $I(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{n_c}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{n_c} \geqslant 0 \\ +\infty & \text{si } \boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{n_c} < 0 \end{cases}$ et $\psi(\delta_{eq}) = \begin{cases} G_c \frac{\delta_{eq}}{\delta_c}\left(2 - \frac{\delta_{eq}}{\delta_c}\right) & \text{si } \delta_{eq} \leqslant \delta_c \\ G_c & \text{si } \delta_{eq} > \delta_c \end{cases}$

$G_c = \frac{1}{2}\sigma_c\delta_c$ est l'énergie cohésive, σ_c la contrainte critique et δ_c le saut de déplacement critique. La fonction ψ est introduite dans l'équation (3.25) pour assurer une adhérence initiale parfaite des parois (*i.e.* condition (ii)) jusqu'au moment où la contrainte cohésive effective atteint la contrainte critique σ_c (*i.e.* $\psi'(0) = \sigma_c$) (*i.e.* condition (iv)). En fait, cette fonction caractérise la dissipation d'énergie du début de l'initiation de la phase d'endommagement jusqu'à la rupture complète du matériau.

Pour finir, nous introduisons dans la suite de ce chapitre les notations suivantes $\langle\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle\beta_n\rangle\boldsymbol{n_c} + \boldsymbol{\beta_s}$ et $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\langle\boldsymbol{\beta}\rangle\cdot\langle\boldsymbol{\beta}\rangle}$. Les crochets de Macauley $\langle.\rangle$ se rapportent à la partie positive de $\boldsymbol{\beta}$. Cet opérateur garantit la non-interpénétration des parois de la fracture lors du calcul du saut de déplacement local.

Ainsi, en considérant la formulation de [142] et l'expression du multiplicateur augmenté $\boldsymbol{\beta}$, tenant compte de l'influence de la pression de fluide dans sa définition, le saut de déplacement local $\boldsymbol{\delta}$ est tel que (voir également Figure 3.4) :

- dans le cas où l'adhérence initiale est parfaite (*i.e.* avant amorçage de la fracturation) ($\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{0}, \kappa = 0$) :

$$\partial\Pi(\boldsymbol{\delta}) = \{\boldsymbol{t'_c} \in \mathbb{R}^2 / \|\boldsymbol{t'_c}\| \leqslant \sigma_c\} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{0} \quad \text{si } \|\boldsymbol{\beta}\| \leqslant \sigma_c \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f\boldsymbol{n_c}$$

- lors du processus d'endommagement, avant la rupture, c'est-à-dire pour $\delta_{eq} > \kappa$ et en considérant les conditions de contact :

$$\partial\Pi(\boldsymbol{\delta}) = \{t'_{c_n}\boldsymbol{n_c} + \psi'(\delta_{eq})\frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta_{eq}} / t'_{c_n} \leqslant 0, \delta_n \geqslant 0, t'_{c_n}\delta_n = 0\} \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\langle\boldsymbol{\beta}\rangle}{\psi'(\delta_{eq}) + r\delta_{eq}}\delta_{eq} \quad \text{si } \|\boldsymbol{\beta}\| > r\kappa + \psi'(\delta_{eq})$$

avec δ_{eq} la solution de $\psi'(\delta_{eq}) + r\delta_{eq} = \sqrt{\|\boldsymbol{\beta_s}\|^2 + \langle\beta_n\rangle^2}$ et $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f\boldsymbol{n_c}$

- en situation de charge/décharge verticale c'est-à-dire pour $\delta_{eq} = \kappa$ et en considérant les conditions de contact :

$$\partial\Pi(\boldsymbol{\delta}) = \{t'_{c_n}\boldsymbol{n_c} + \alpha\boldsymbol{\delta}; / 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\psi'(\kappa)}{\kappa}, t'_{c_n} \leqslant 0, \delta_n \geqslant 0, t'_{c_n}\delta_n = 0\} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\langle\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|}\kappa \quad \text{si } r\kappa < \|\boldsymbol{\beta}\| < r\kappa + \psi'(\kappa)$$

avec $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f\boldsymbol{n_c}$

- dans le cas du retour à zéro du saut de déplacement (*i.e.* glissement après décharge, crumpling sur la Figure 3.4) $\delta_{eq} < \kappa$ et en considérant les conditions de contact :

$$\partial\Pi(\boldsymbol{\delta}) = \{t'_{c_n}\boldsymbol{n_c} / t'_{c_n} \leqslant 0, \delta_n \geqslant 0, t'_{c_n}\delta_n = 0\} \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\langle\boldsymbol{\beta}\rangle}{r} \quad \text{si } \|\boldsymbol{\beta}\| \leqslant r\kappa \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f\boldsymbol{n_c}$$

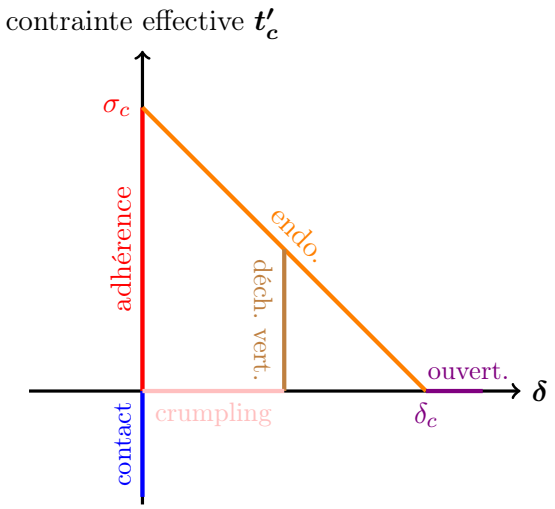


FIGURE 3.4 – *Régime de la loi de Talon-Curnier en mode I (d'après Lorentz [142]).*

Il est alors possible d'en déduire l'expression de l'opérateur tangent (*i.e.* termes intervenant dans l'expression de la matrice de rigidité) à partir de celle du saut de déplacement local $\boldsymbol{\delta}$. Ainsi, pour chaque régime décrit précédemment :

- dans le cas où l'adhérence initiale est parfaite (*i.e.* avant amorçage de la fracturation) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \tag{3.30}$$

- lors du processus d'endommagement, avant la rupture, c'est-à-dire pour $\delta_{eq} > \kappa$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \delta_{eq} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \right) + \frac{\partial \delta_{eq}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \left(\frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \right)$$

  c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\delta_{eq}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} [\boldsymbol{Id}] - \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle \otimes \langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|^3} \delta_{eq} + \frac{1}{r - H^c} \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle \otimes \langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2} \tag{3.31}$$

  avec $\delta_{eq} = \dfrac{\|\boldsymbol{\beta}\| - r\delta_c}{r - H^c}$. Dans ce cas précis, nous exprimons le saut de déplacement équivalent en fonction des paramètres matériau grâce à la relation $\psi' (\delta_{eq}) + r\delta_{eq} = \sqrt{\|\boldsymbol{\beta_s}\|^2 + \langle \beta_n \rangle^2}$. D'autre part on pose $\dfrac{\partial \delta_{eq}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \dfrac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\| (r - H^c)}$ et $H^c = \dfrac{\sigma_c}{\delta_c}$.

- en situation de charge/décharge verticale c'est-à-dire pour $\delta_{eq} = \kappa$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\kappa}{\|\boldsymbol{\beta}\|} [\boldsymbol{Id}] - \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle \otimes \langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|^3} \kappa \tag{3.32}$$

  avec κ la variable interne utilisée pour actualiser le saut de déplacement.

- dans le cas du retour à zéro du déplacement (*i.e.* glissement après déchargement) $\delta_{eq} < \kappa$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{[\boldsymbol{Id}]}{r} \tag{3.33}$$

La formulation faible du problème mécanique est alors donnée en considérant les deux dernières conditions d'optimum du lagrangien augmenté L_r(cf. équation (3.19)). Ainsi :

- Équation d'équilibre $\forall (\boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{u^*}) \in \Lambda_0 \times U_0$:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u^*})\, d\Omega + \int_{\Gamma_c} [\boldsymbol{\lambda} + r(\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\beta}))] \cdot \llbracket \boldsymbol{u^*} \rrbracket d\Gamma_c \\ - & \int_\Omega r^{hom} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u^*} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u^*} d\Gamma_t = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

  avec r^{hom} la masse volumique homogénéisée et $\boldsymbol{F}$ les forces de gravité.

- Loi d'interface $\forall \lambda^* \in \Lambda_0$:

$$\int_{\Gamma_c} (\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket - \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\beta})) \cdot \boldsymbol{\lambda^*} d\Gamma_c = 0 \tag{3.35}$$

3.3.3 Formulation faible du problème hydrodynamique

3.3.3.1 Formulation faible pour le massif

En appliquant le Principe des Travaux Virtuels, la formulation faible de l'équation de conservation de la masse, pour le massif, s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall p^* \in P_0 \quad & - \int_\Omega \frac{\partial m_w}{\partial t} p^* d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega = \int_{\Gamma_F} M_{ext} p^* d\Gamma_F \\ & - \int_{\Gamma_1} q_1 p^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} q_2 p^* d\Gamma_2 \end{aligned} \tag{3.36}$$

avec M_{ext} les flux imposés sur la partie Γ_F de $\partial\Omega$ (cf. condition aux limites (4), section 3.1.3).

3.3.3.2 Formulation faible pour la fracture

De la même manière, la formulation faible de l'équation de conservation de la masse pour le cas de la fracture se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall p_f^* \in P_0^f \quad & - \int_{\Gamma_c} \frac{\partial w}{\partial t} p_f^* d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c = \int_{\Gamma_f} W_{ext} p_f^* d\Gamma_f \\ & + \int_{\Gamma_1} q_1 p_f^* d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} q_2 p_f^* d\Gamma_2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

avec W_{ext} les flux imposés sur la partie Γ_f de Γ_c (cf. condition aux limites (5), section 3.1.3).

La formulation faible de la condition de continuité entre la pression de pore p du massif et de la pression de fluide p_f générée par l'écoulement dans la fracture, peut se mettre sous la forme (au niveau de chacune des parois de la fracture) :

$$\forall q_1^* \in Q_1 \quad \int_{\Gamma_1} (p - p_f)\, q_1^* d\Gamma_1 = 0 \tag{3.38}$$

$$\forall q_2^* \in Q_2 \quad \int_{\Gamma_2} (p - p_f)\, q_2^* d\Gamma_2 = 0 \tag{3.39}$$

3.4 Discrétisation du problème

Dans les codes aux éléments finis, la forme forte des équations aux dérivées partielles décrivant le comportement du milieu ((3.2), (3.4) et (3.5) ici) ne peuvent être utilisées directement pour la résolution numérique du problème couplé. En effet, il est nécéssaire de passer par une formulation faible de ces équations (cf. section 3.3) pour prendre en compte les conditions aux limites exercées sur la frontière du domaine et au niveau de la fracture, mais également afin de permettre la résolution locale de ces équations. En effet, la méthode des éléments finis est une méthode numérique discrète pour laquelle les inconnues du problème (associées à des degrés de liberté ou DDL) sont interpolées par combinaison linéaire de ces DDLs, chacun étant réparti au niveau des nœuds des éléments du maillage (représentant la structure discrétisée que l'on cherche à étudier). La discrétisation des formes faibles des équations (3.34) à (3.39) est donc fondamentale.

Pour le modèle HM-XFEM, nous avons recours à une double discrétisation :

- d'abord temporelle, car la composante hydrodynamique de ce modèle, fait intervenir le temps comme une variable physique ;
- puis spatiale, au moyen de la méthode des éléments finis étendue (XFEM) [14, 150].

3.4.1 Discrétisation temporelle

Le temps intervenant uniquement dans les équations de conservation de la masse pour le massif et la fracture, nous discrétisons les équations (3.36) et (3.37) à l'aide d'un θ-schéma. En fonction de la valeur donnée au paramètre θ, il est possible de résoudre le problème couplé :

- explicitement ($\theta = 0$) ;
- semi-implicitement ($\theta = 0.5$) : méthode de Cranck-Nicholson ;
- implicitement ($\theta = 1$).

Dans le cas du modèle HM-XFEM, nous avons recours à un schéma de discrétisation implicite en temps. De cette façon, le schéma de discrétisation en temps est inconditionnellement stable (*i.e.* si $0.5 \leqslant \theta \leqslant 1$). Dans la suite de ce mémoire, toutes les simulations ont été menées en considérant $\theta = 1$. Ensuite, il est important de remarquer qu'entre chaque pas de temps, un certain nombre d'itérations de Newton est considéré jusqu'à convergence de l'algorithme de résolution. Lorsque celle-ci est atteinte, on passe au pas de temps suivant. et l'algorithme de Newton est réitéré. Ainsi dans la suite de cette partie, une variable indexée par (n) est une variable prise au pas de temps courant et une variable indexée par $(n-1)$ est une variable estimée au pas de temps précédent et est donc *a priori* connue au pas de temps courant (n). L'incrément entre deux pas de temps est noté $\Delta t = t^{(n)} - t^{(n-1)}$.

3.4.1.1 Discrétisation des équations pour l'hydrodynamique

3.4.1.1.1 Cas du massif

La discrétisation temporelle de la forme faible de l'équation de conservation de la masse pour le massif se met donc sous la forme :

$$\begin{aligned}
\forall p^* \in P_0 \quad - & \int_\Omega \frac{m_w^{(n)} - m_w^{(n-1)}}{\Delta t} p^* d\Omega + \theta \int_\Omega \boldsymbol{M^{(n)}} \cdot \boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega + (1-\theta) \int_\Omega \boldsymbol{M^{(n-1)}} \cdot \boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega \\
= \; & \theta \int_{\Gamma_F} M_{ext}^{(n)} p^* d\Gamma_F + (1-\theta) \int_{\Gamma_F} M_{ext}^{(n-1)} p^* d\Gamma_F - \theta \int_{\Gamma_1} q_1^{(n)} p^* d\Gamma_1 \\
- \; & (1-\theta) \int_{\Gamma_1} q_1^{(n-1)} p^* d\Gamma_1 - \theta \int_{\Gamma_2} q_2^{(n)} p^* d\Gamma_2 - (1-\theta) \int_{\Gamma_2} q_2^{(n-1)} p^* d\Gamma_2 \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

3.4.1.1.2 Cas de la fracture

De la même manière, la forme discrétisée de l'équation de conservation de la masse pour la fracture est la suivante :

$$\begin{aligned}\forall p_f^* \in P_0^f \quad - & \int_{\Gamma_c} \frac{w^{(n)} - w^{(n-1)}}{\Delta t} p_f^* d\Gamma_c + \theta \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W^{(n)}} \cdot \boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c + (1-\theta) \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W^{(n-1)}} \cdot \boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c \\ = & \ \theta \int_{\Gamma_f} W_{ext}^{(n)} p_f^* d\Gamma_f + (1-\theta) \int_{\Gamma_f} W_{ext}^{(n-1)} p_f^* d\Gamma_f + \theta \int_{\Gamma_1} q_1^{(n)} p_f^* d\Gamma_1 \\ + & \ (1-\theta) \int_{\Gamma_1} q_1^{(n-1)} p_f^* d\Gamma_1 + \theta \int_{\Gamma_2} q_2^{(n)} p_f^* d\Gamma_2 + (1-\theta) \int_{\Gamma_2} q_2^{(n-1)} p_f^* d\Gamma_2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

3.4.1.2 Discrétisation des équations du modèle poro-mécanique

Les équations présentées dans cette partie correspondent aux équations de la section 3.2.3, intégrées sur un pas de temps.

3.4.1.2.1 Cas des apports massiques

- Cas du massif
  En intégrant sur un pas de temps, les apports massiques (3.6) s'écrivent :

$$m_w^{(n)} - m_w^{(n-1)} = \rho^{(n)} \phi^{(n)} \left(1 + \varepsilon_v^{(n)}\right) - \rho^{(n-1)} \phi^{(n-1)} \left(1 + \varepsilon_v^{(n-1)}\right) \tag{3.42}$$

- Cas de la fracture
  De la même manière que précédement, la variation des apports massiques (3.7) sur un pas de temps, dans le cas de la fracture se mettent sous la forme :

$$w^{(n)} - w^{(n-1)} = \rho^{(n)} [\![\boldsymbol{u}]\!]^{(n)} \cdot \boldsymbol{n}_c - \rho^{(n-1)} [\![\boldsymbol{u}]\!]^{(n-1)} \cdot \boldsymbol{n}_c \tag{3.43}$$

3.4.1.2.2 Cas de la porosité du massif

En intégrant sur un pas de temps, l'expression de la variation de porosité (3.10) s'écrit :

$$\phi^{(n)} = b - \left(b - \phi^{(n-1)}\right) \exp\left[-\left(\varepsilon_v^{(n)} - \varepsilon_v^{(n-1)}\right) - \frac{p^{(n)} - p^{(n-1)}}{K_s}\right] \tag{3.44}$$

3.4.1.2.3 Cas de la masse volumique

Comme pour le cas de la porosité du massif, les expressions de la variation de la masse volumique (3.11) du fluide saturant les pores du massif et du fluide circulant dans la fracture (3.12) sont intégrées de la manière suivante :

- Cas du massif

$$\rho^{(n)} = \rho^{(n-1)} \exp\left[\frac{p^{(n)} - p^{(n-1)}}{K_w}\right] \tag{3.45}$$

- Cas de la fracture

$$\rho^{(n)} = \rho^{(n-1)} \exp\left[\frac{p_f^{(n)} - p_f^{(n-1)}}{K_w}\right] \tag{3.46}$$

3.4.2 Formulation éléments finis : discrétisation spatiale par la méthode XFEM

3.4.2.1 Approximations des champs avec XFEM

3.4.2.1.1 Cas du massif

Du fait de la présence de la fracture, tous les champs associés au massif sont supposés être discontinus de part et d'autre de la fracture. Ici, nous considérons que la discontinuité du champ de déplacement est une discontinuité dite *forte*. Selon Mosler [155], le champ primal de l'approximation du déplacement ainsi que son gradient associé (*i.e.* le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$) sont tous deux discontinus dû au saut au niveau de la fracture. D'autre part, contrairement au champ de déplacement, le champ de pression p (*i.e.* pression de pore du massif) doit être continu au niveau de chacune des parois de la fracture du fait de la condition de continuité $p = p_f$ sur Γ_1 et Γ_2. Ainsi, l'approximation de ce champ est associée à une discontinuité dite *faible* : le champ de pression de pore est continu, cependant son gradient est discontinu. Ainsi, il est possible de capter la discontinuité du gradient normal du champ de pression de pore lorsque de forts échanges se produisent entre la fracture et le milieu poreux environnant. Il est important de signaler que les fonctions d'enrichissement introduites autorisent une discontinuité *forte* de l'approximation du champ de pression de pore de part et d'autre de la fracture, mais la continuité du champ primal est imposée par dualisation de la condition au limite $p = p_f$ au moyen des 2 multiplicateurs de Lagrange q_1 et q_2 (cf. équations (3.38) et (3.39)) (également employé par Zilian et Legay [235]). Dans la littérature, certaines études en mécanique, impliquant des discontinuités dites *faibles*, ont été conduites. Hansbo et Hansbo [110] proposent d'utiliser l'enrichissement pour représenter une discontinuité *forte*, mais de forcer la continuité (afin de retrouver une discontinuité *faible*) au moyen de la méthode de Nitsche [165]. Pour leur part, Sukumar et al. [201] ont suggéré d'introduire la valeur absolue des *level-sets* comme fonctions d'enrichissement, mais celles-ci s'avèrent peu efficaces en termes de convergence. Enfin, Moës et al. [149] proposent ensuite d'introduire des fonctions d'enrichissement à gradient discontinu (*i.e. ridge functions*). Le taux de convergence avec ce type de fonctions se voit optimisé.

Ainsi, nous avons finalement choisi de considérer une discontinuité *faible* en forçant la continuité au moyen de multiplicateurs de Lagrange (contrairement à Hansbo et Hansbo [110], puisque les méthodes Nitschiennes nécessitent la détermination d'un paramètre de pénalisation) :

- pour des raisons de stabilité puisque N'Deffo et al. [160] ont montré que cet artefact améliore la précision et le conditionnement dans le cas des éléments quadratiques ;
- et pour des raisons pratiques. En effet, l'impact sur la structure du code élément finis est moindre puisque seulement deux formulations variationnelles (cf. équations (3.38) et (3.39)) sont introduites au niveau de chacune des parois de la fracture.

Les approximations des champs de déplacement et de pression de pore se mettent sous la forme :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} \boldsymbol{a_i} \varphi_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j \in J} \boldsymbol{b_j} \varphi_j(\boldsymbol{x}) H(\phi_n(\boldsymbol{x})) \tag{3.47}$$

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I_s} c_i \psi_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j \in J_s} d_j \psi_j(\boldsymbol{x}) H(\phi_n(\boldsymbol{x})) \tag{3.48}$$

Comme nous pouvons le remarquer dans les deux expressions précédentes, la partie standard est enrichie au moyen d'une fonction d'enrichissement associée à des degrés de liberté supplémentaires. I correspond à l'ensemble des nœuds dont le support contient le point x, et I_s la restriction de I à l'ensemble des nœuds sommets. De la même manière, $J \subset I$ est le sous-ensemble des nœuds dont le support est entièrement coupé par la fracture.

$J_s \subset I_s$ est la restriction à l'ensemble des nœuds sommets.

D'après l'équation (3.47), l'approximation du champ de déplacement est divisée en deux parties :

- la partie classique qui est une combinaison linéaire du degré de liberté $\boldsymbol{a_i}$ associé au nœud $i \in I$ avec les fonctions de forme quadratiques $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ au nœud i ;
- la partie enrichie qui est une combinaison linéaire du degré de liberté enrichi $\boldsymbol{b_j}$ au nœud $j \in J$ avec les fonctions de forme quadratiques $\varphi_j(\boldsymbol{x})$ au nœud j, pondérée par la fonction d'enrichissement H.

De la même manière, dans l'équation (3.48), l'approximation du champ de pression de pore est divisée en deux parties :

- la partie classique qui est une combinaison linéaire du degré de liberté c_i associé au nœud $i \in I_s$ avec les fonctions de forme linéaires $\psi_i(\boldsymbol{x})$ au nœud i ;
- la partie enrichie qui est une combinaison linéaire du degré de liberté enrichi d_j au nœud $j \in J_s$ avec les fonctions de forme linéaires $\psi_j(\boldsymbol{x})$ au nœud j, pondérée par la fonction d'enrichissement H.

Comme mentionné dans [36] et démontré par Ern et al. [79], l'interpolation du champ de déplacement par des fonctions de forme quadratique et l'interpolation du champ de pression de pore par des fonctions de forme linéaire est nécessaire afin de réduire les oscillations de la solution numérique. Ainsi, les degrés de liberté classiques $\boldsymbol{a_i}$ d'une part et enrichis $\boldsymbol{b_j}$ d'autre part, tous deux associés au champ de déplacement, sont portés par les nœuds milieux et sommets des éléments HM-XFEM. Au contraire, les degrés de liberté classiques c_i et enrichis d_j associés au champ de pression de pore du massif sont uniquement stockés au niveau des nœuds sommets de ces éléments.

Les ensembles de nœuds J et J_s sont enrichis par la fonction de Heaviside généralisée définie comme suit :

$$H\left(\phi_n(\boldsymbol{x})\right) = \begin{cases} -1 & \text{si } \phi_n(\boldsymbol{x}) < 0 \\ +1 & \text{si } \phi_n(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \end{cases}$$

Nous devons ensuite faire la distinction entre deux types d'éléments. Dans un premier temps, nous considérons les éléments entièrement traversés par la fracture. Tous les nœuds de ces éléments sont enrichis par la fonction de Heaviside généralisée mentionnée précédemment, et portent les degrés de liberté standards et enrichis sus-mentionnés. Selon Chessa et al. [45], ce type d'éléments est capable de reproduire exactement la fonction d'enrichissement et *a fortiori* capte localement la discontinuité des champs de déplacement et du gradient du champ de pression de pore. Il s'agit des *reproducing elements*. Dans ce cas, le principe de partition de l'unité [144] est parfaitement respecté. D'autre part, les éléments adjacents aux *reproducing elements* ont au moins un nœud non enrichi par la fonction d'enrichissement. Ces éléments correspondent aux *blending elements*. Chessa et al. [45] ont montré que les *blending elements* ne reproduisent pas exactement la fonction d'enrichissement au niveau de tous leurs nœuds, car ils ne sont pas capables de satisfaire le principe de partition de l'unité. Pour ces éléments, les degrés de liberté associés à (aux) nœud(s) non enrichis ne sont donc plus compensés par les degrés de liberté associés à la partie classique de l'approximation des champs concernés [87]. Pour cette raison, la convergence de la solution numérique peut être fortement dégradée. Pour le cas général, des méthodes spécifiques (*e.g.* méthode de correction des fonctions d'enrichissement [149, 15, 87]) ont été mises en

œuvre afin de remédier aux problèmes liés aux *blending elements*. Mohammadnejad et al. [152] ont étudié la convergence de la solution numérique pour le cas d'un milieux poreux partiellement saturé. En comparant le taux de convergence des phases solide et fluide, pour différentes stratégies d'enrichissement (valeur absolue des *level-sets* [201], *ridge functions* [149] et les fonctions d'enrichissement corrigées [87, 90]), il en ressort que les deux derniers type d'enrichissement conduisent à des taux de convergence assez similaires et optimaux pour chaque phase. Dans notre cas, nous avons choisi de procéder différemment en ce qui concerne le choix de la fonction d'enrichissement dès lors que nous faisons intervenir une discontinuité *faible* dans la formulation de notre modèle. En se basant sur les travaux récents de Fries [87], nous avons choisi la fonction de Heaviside généralisée comme fonction d'enrichissement pour les *reproducing* et *blending elements*, car cette fonction permet de dépasser naturellement les inconvénients mentionnées ci-dessus. Bien que l'enrichissement par la fonction Heaviside est généralement utilisé pour reproduire une discontinuité *forte* [87], il n'y a aucune contre-indication à choisir ce type d'enrichissement pour reproduire la discontinuité *faible* du champ de pression de pore du fait de la condition de continuité $p = p_f$ imposée faiblement au niveau de chaque paroi de la fracture. En d'autres termes, nous obtenons un champ primal continu par cette condition, mais en prenant le gradient de ce champ, celui-ci est discontinu grâce à la fonction de Heaviside.

De plus, afin d'assurer une convergence optimale de la solution numérique et de permettre la coexistence entre les *blending elements* et les éléments standards (*i.e.* éléments non coupés par l'interface et non adjacents aux *reproducing elements*, cf. Figure 3.5), nous réutilisons la méthode proposée par Geniaut [98]. Cette procédure consiste à mettre à zéro les degrés de liberté supplémentaires partagés entre les *blending elements* et les éléments standards. En pratique, les seconds membres associés à ces degrés de liberté enrichis sont mis à zéro, et les termes diagonaux des matrices de rigidité, associés à ces degrés de liberté en trop, sont imposés à 1. Une procédure similaire est mise en œuvre pour les multiplicateurs de Lagrange au niveau des nœuds non enrichis des *blending elements*.

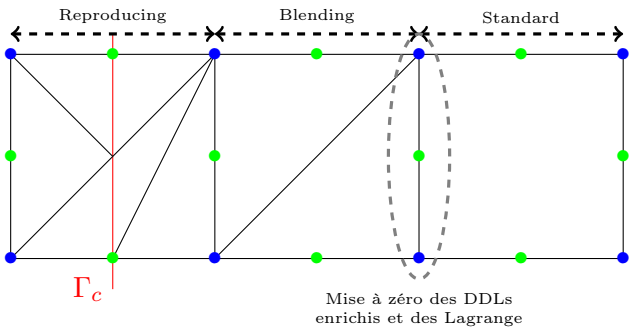


FIGURE 3.5 – *Sous-découpage pour l'intégration et coexistence entre les éléments HM-XFEM et les éléments HM standards.*

La géométrie de la fracture (Γ_c sur la Figure 3.5) est prise en compte grâce à l'iso-zéro de la *level-set* normale, possédant la propriété de fonction distance signée (voir également chapitre 2). Afin d'enrichir un nœud dont le support est entièrement coupé par la fracture (pour les *reproducing* et *blending elements*), le signe de la *level-set* normale donne la valeur de la fonction de Heaviside généralisée. Dans la littérature, pour le cas des modèles HM couplés avec XFEM, la *level-set* normale est généralement interpolée au moyen de fonctions de forme linéaires par morceaux. Une des spécificités du modèle présenté dans ce chapitre est de pouvoir interpoler la *level-set* normale grâce à des fonctions de forme quadratiques (*i.e.* interfaces à géométrie courbe). Cet aspect a été pris en compte par Bertrand Paul (thèse IFPEN - GeoRessources), mais ne sera pas développé dans ce mémoire de thèse.

Ainsi, la *level-set* normale est interpolée à partir des valeurs nodales de la fonction distance signée ϕ_n en utilisant soit les fonctions de forme quadratiques $F = \varphi$ (cf. Moës et al. [151] et Faivre et al. [80] pour un exemple de propagation de fractures courbes, due à l'injection d'un fluide incompressible) ou bien les fonctions de forme linéaires $F = \psi$ (cf. chapitres 4 et 5 de ce mémoire pour la mise en application) :

$$\phi_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} (\phi_n)_i F_i(\boldsymbol{x}) \tag{3.49}$$

3.4.2.1.2 Cas de la fracture

Au niveau de l'interface, la formulation des champs diffère de celle du massif. Tous les champs impliqués (*i.e.* p_f, q_1, q_2 et $\boldsymbol{\lambda}$) doivent être continus, car chacune des parois de la fracture est représentée conceptuellement par une seule et même ligne unidimensionnelle (repérée comme étant la surface de contact). En se basant sur la formulation de Géniaut [100], la surface de contact est définie par l'ajout d'éléments quadratiques 1D (*i.e.* segments à 3 nœuds) le long de la fracture (définie par l'iso-zéro de la *level-set* normale ϕ_n). Pour être plus exact, l'ensemble des points d'intersection entre la fracture et les éléments enrichis est considéré pour l'ajout de ces segments. Les points d'intersection représentent alors les nœuds sommets de ces éléments 1D. Dans notre cas et sur la base des travaux de ces auteurs, un ensemble de 4 degrés de liberté (associés aux multiplicateurs de Lagrange) est stocké au niveau des nœuds sommets portés par les arêtes des éléments parents intersectés par la fracture. Néanmoins, les espaces d'approximation associés à chacune de ces grandeurs duales sont soumis à certaines restrictions (cf. section 3.4.2.2).

Ainsi, l'approximation du champ de pression de fluide le long de la fracture est telle que :

$$p_f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K} (p_f)_i \widetilde{\psi}_i(\boldsymbol{x}) \tag{3.50}$$

et les approximations des champs de multiplicateurs de Lagrange se mettent sous la forme :

$$q_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K} (q_1)_i \widetilde{\psi}_i(\boldsymbol{x}) \tag{3.51}$$

$$q_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K} (q_2)_i \widetilde{\psi}_i(\boldsymbol{x}) \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K} \boldsymbol{\lambda}_i \widetilde{\psi}_i(\boldsymbol{x}) \tag{3.53}$$

où K est l'ensemble des nœuds sommets des *reproducing elements*.

Les fonctions de formes impliquées dans l'expression de l'approximation des champs précédents diffèrent de celle de l'élément parent. En somme, $\widetilde{\psi}_i$ correspondront à des fonctions de forme linéaires, mais il sera nécessaire d'adapter leur expression au cas des éléments non simpliciaux. En d'autres termes, pour les éléments parents linéaires dont au moins un nœud sommet (*i.e.* nœud circulaire bleu sur la Figure 3.6) n'appartient à aucune arête coupée par la discontinuité (les degrés de libertés seront alors portés uniquement par les nœuds sommets (*i.e.* nœuds circulaires rouges sur la Figure 3.6) des arêtes strictement intersectées), ces fonctions de forme s'exprimeront de la manière suivante afin de respecter la partition de l'unité :

$$\begin{cases} \widetilde{\psi}_i = \psi_i + \dfrac{\psi_2}{3} & i \in \{1,3,4\} \\ \widetilde{\psi}_2 = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

Mathématiquement, les champs q_1, q_2 et $\boldsymbol{\lambda}$ résultent de la dualisation de deux contraintes d'égalité. La première permet de forcer la continuité de la pression de fluide circulant dans la fracture avec la pression de pore du massif au niveau de chacune des parois de celle-ci. La seconde assure l'égalité entre le saut de déplacement nodal $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ et le saut de déplacement local $\boldsymbol{\delta}$ défini par collocation au niveau du réseau de points de Gauss de l'interface. Ces 3 champs correspondent naturellement à des multiplicateurs de Lagrange. Comme mentionné dans [147, 164], une attention toute particulière doit être accordée à la manière dont les espaces d'approximation de ces multiplicateurs sont construits, afin de satisfaire la condition numérique *inf-sup* ou LBB, et ainsi garantir l'unicité de la solution [144]. Dans le cas contraire, des oscillations parasites de la solution numérique peuvent apparaître. Dans un souci d'exactitude avec la formulation impliquant les 3 champs de multiplicateurs de Lagrange, nous avons choisi de construire l'espace d'approximation de la pression de fluide p_f de la même manière que pour les multiplicateurs q_1, q_2 et $\boldsymbol{\lambda}$. En effet, ce champ, uniquement défini au niveau de l'interface, intervient dans l'estimation locale de la loi cohésive non régularisée. Dans la suite de ce chapitre, par abus de langage, l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange que nous considérons inclut le champ p_f.

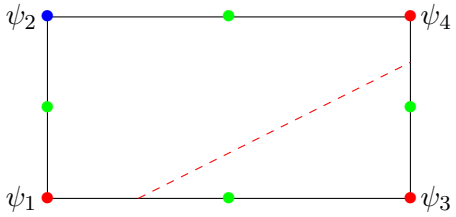


FIGURE 3.6 – *Modification des fonctions de forme associées aux multiplicateurs de Lagrange.*

3.4.2.2 Méthodologie pour la construction des espaces d'approximation des multiplicateurs de Lagrange

Dans ce chapitre, les relations dualisées (*i.e.* $\boldsymbol{\delta} = [\![\boldsymbol{u}]\!]$ et $p = p_f$) reviennent à considérer l'imposition de conditions de type *Dirichlet* (sous forme faible comme nous avons pu le voir précédemment) au niveau de la fracture. Imposer ce type de relation au niveau d'une interface XFEM n'est pas trivial. Dans la littérature, d'après Béchet et al. [13], il est possible de trouver deux approches principales pour parvenir à ce but. Premièrement, les approches dites *Nitschiennes* [165], et deuxièmement les approches impliquant des multiplicateurs de Lagrange [70] initialement introduites dans le cadre de la méthode XFEM.

Dans la pratique, les approches Nitschiennes ne sont pas simples à mettre en œuvre. En effet, elles reposent sur une formulation faible, impliquant un paramètre de pénalisation. La détermination de ce paramètre est fortement liée aux types de problèmes à résoudre, comme les formulations impliquant des lois de comportement non-linéaires (*i.e.* loi de contact, modèle de couplage hydro-mécanique etc.). Une mauvaise estimation de ce paramètre peut donc conduire à de fortes instabilités de la solution numérique. Certaines formulations impliquant des fonctions bulles [31, 156, 68] ont été mises en œuvre dans le but de faciliter l'estimation de ce paramètre et d'atténuer les oscillations de la solution. L'effet de ces fonctions bulles est d'augmenter la dimension de l'espace d'approximation du champ de déplacement, puisque ce champ va être enrichi par les fonctions bulles. Cependant, Geniaut [100] précise que ces fonctions perdent leur action stabilisante lorsque l'interface passe près d'un nœud, étant donné que ces fonctions atteignent un maximum au centre de l'arête enrichie et s'annulent au niveau des bords.

Les approches impliquant des multiplicateurs de Lagrange sont pour leur part moins contraignantes que les approches Nitschiennes, notamment lorsque des lois de comportement

non-linéaires sont impliquées pour décrire le comportement de l'interface. Cependant l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange est tout de même soumise à des précautions d'emploi, en particulier en ce qui concerne la construction des différents espaces d'approximation (*i.e.* respect de la condition LBB [144]), afin d'éviter l'apparition d'oscillations parasites dans la solution du problème. Une stratégie envisageable pour remédier à ces instabilités, est de réduire la dimension des espaces d'approximation des multiplicateurs de Lagrange. Cette idée a d'abord été introduite par Moës et al. [147] et a ensuite été améliorée par Béchet et al. [13]. Une formulation, basée sur celle de Moës et al. [147], a spécifiquement été développée par Geniaut [100], pour le cas des modèles impliquant des lois de contact-frottement au niveau de l'interface. Pour la réduction des dimensions des espaces de multiplicateurs de Lagrange, la formulation du modèle HM-XFEM se base sur le formalisme de Geniaut [100] et étend celui-ci au cas impliquant quatre champs de multiplicateurs de Lagrange : un champ pour décrire le comportement mécanique de l'interface et trois autres champs liés à la circulation du fluide dans la fracture et aux échanges avec le massif.

L'objectif de cette approche est d'obtenir des dimensions d'espace de multiplicateurs de Lagrange suffisamment grandes pour garantir la convergence de la solution numérique. En contrepartie, la dimension de ces espaces doit rester inférieure à celle de l'espace d'approximation du champ de déplacement pour éviter l'apparition d'oscillations de la solution numérique.

Algorithme 1 : Algorithme de sélection des arêtes vitales [100]

Input : E et N l'ensemble des arêtes et nœuds du maillage et $(n_1, n_2) \in N^2$ les extrémités de chaque arête.

$nb_arc \leftarrow 0$ (nombre d'arête(s) coupée(s)) ;
pour *chaque arête du maillage* $a \leftarrow 1$ *à* N_{ar}^{tot} **faire**
  si $\phi_n(n_1(a)) \cdot \phi_n(n_2(a)) < 0$ **alors**
    l'arête a est coupée et $nb_arc \leftarrow nb_arc + 1$;
  sinon
    l'arête n'est pas coupée ;
pour *chaque arête coupée (vitale + non-vitale)* $a_c \leftarrow 1$ *à* nb_arc **faire**
  pour *chaque arête coupée restante* $ia \leftarrow 1$ *à* nb_ar **faire**
    1. estimer le nombre minimal $score(ia)$ d'arête(s) connectée(s) aux nœuds de ia ;
    2. chercher le score le plus élevé pour ia $score(ia) \leftarrow score_max$;
  si $score_max = 1$ **alors**
    il ne reste que des arêtes vitales (on sort de la boucle sur a_c);
  sinon si $score_max > 1$ **alors**
    l'arête ia est non-vitale, elle est retirée et on continue à trier les arêtes restantes $nb_ar \leftarrow nb_ar - 1$;

La méthode d'élimination proposée par Géniaut [100] est résumée par l'algorithme 1. Dans la pratique, cette méthode repose sur le concept de sélection des arêtes vitales, parmi toutes celles intersectées par la discontinuité. Pour faire simple, si l'arête d'un groupe intersecté (ou dans le cas d'une arête isolée et intersectée) peut être supprimée sans isoler le(s) nœud(s) auquel(s) elle est connectée, alors cette arête est considérée comme non-vitale. Ensuite, des relations d'égalité seront établies entre les multiplicateurs de Lagrange portés par les nœuds des arêtes restantes, identifiées comme étant vitales. Au niveau des arêtes vitales d'un groupe, c'est-à-dire celles émanant d'un unique nœud, les degrés de liberté des champs de multiplicateurs de Lagrange portés par les nœuds des arêtes du groupe seront tous égaux

entre eux. De même, pour le cas des arêtes vitales isolées, des relations d'égalité seront établies.

Un exemple avec notre formulation à 4 multiplicateurs de Lagrange est présenté en Figure 3.7. Afin de simplifier le schéma, nous ne représentons que les nœuds sommets des éléments intersectés par la discontinuité. L'ensemble des arêtes vitales est symbolisé par des lignes continues bleues, alors que l'ensemble des arêtes non-vitales est représenté par des lignes en pointillés noirs. Les multiplicateurs de Lagrange impliqués dans des relations d'égalité sont symbolisés sur la Figure 3.7 par la notation condensée $\Lambda_i = \begin{bmatrix} (p_f)_i & (q_1)_i \\ (q_2)_i & \boldsymbol{\lambda}_i \end{bmatrix}$ avec $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dans ce cas la dimension de chaque espace de multiplicateurs de Lagrange est égale à 5.

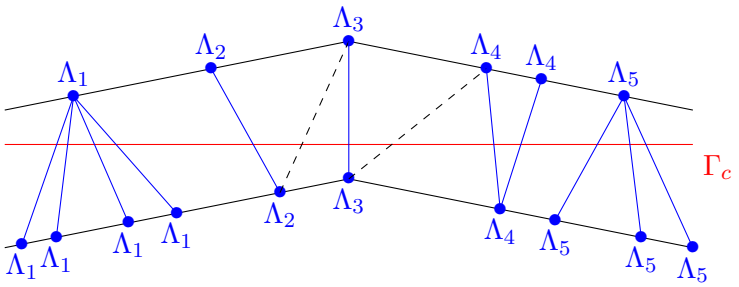


FIGURE 3.7 – *Relations d'égalité entre les degrés de liberté associés aux champs de multiplicateurs de Lagrange (d'après Geniaut [100]).*

Récemment Ferte [82, 83] a proposé d'introduire un nouvel espace d'approximation des champs de multiplicateurs de Lagrange, plus adapté aux cas des éléments quadratiques et des discontinuités *faibles*. Il suggère un nouvel algorithme afin d'imposer des relations d'égalité entre les degrés de liberté associés à ces champs de multiplicateurs. Le principe repose toujours sur le concept de réduction de la dimension de l'espace des multiplicateurs de Lagrange. Avec cet algorithme (cf. algorithme 2), l'imposition des relations d'égalité se base désormais sur la proximité des points d'intersection entre l'interface et les nœuds des arêtes intersectées. Avec ce nouvel espace, Ferte [83] a montré au travers de différents tests numériques que le taux de convergence est nettement optimisé (*i.e.* convergence en h^2 pour les deux normes L^2 et H^1 des champs de multiplicateur et de déplacement respectivement) par rapport à l'espace proposé par Géniaut [100] (*i.e.* convergence en h pour la norme L^2 des champs de multiplicateurs et convergence en $h^{3/2}$ pour la norme H^1 du champ de déplacement). Le paramètre h représente la longueur caractéristique des éléments du maillage.

Algorithme 2 : Algorithme de restriction des espaces de multiplicateurs [83]

Input : E l'ensemble des arêtes *intersectées* du maillage.

pour *chaque nœud proche d'un point d'intersection arête-fracture* $n \leftarrow 1$ *à* N^{tot} **faire**
  pour *chaque arête connectée à* n **faire**
    1. imposer une relation d'égalité entre le nœud n et son opposé n_{op} appartenant à la même arête ;
    2. vérifier que n_{op} n'est pas déjà impliqué dans une relation d'égalité ;

Supprimer les arêtes impliquées dans une relation d'égalité ;
Lister les groupes d'arêtes connexes ;
pour *chaque groupe connexe* **faire**
  si *un nœud sommet est déjà connecté* **alors**
    pas de relations d'égalité supplémentaires;
  sinon
    on impose une unique relation pour tout le groupe connexe ;

Sur la Figure 3.8, nous donnons un exemple d'imposition des relations d'égalité avec l'algorithme de Ferte [83] pour notre formulation à 4 multiplicateurs de Lagrange. Les degrés de liberté associés aux multiplicateurs de Lagrange des nœuds portés par les arêtes en bleu sont impliqués dans des relations d'égalité. Le groupe d'arêtes connexe est entouré en rouge. Pour ce groupe, il n'existe aucun point d'intersection proche d'un nœud des arêtes intersectés. Par conséquent, une unique relation est imposée au niveau des nœuds sommets d'une arête prise au hasard. La dimension de l'espace est donc égale à 8 ici. Bien que cette dimension soit plus grande que dans le cas impliquant l'algorithme de Géniaut [100], l'ordre de convergence est désormais quadratique. Cet algorithme n'a cependant pas été combiné avec notre modèle HM-XFEM, car il n'a été publié que très récemment.

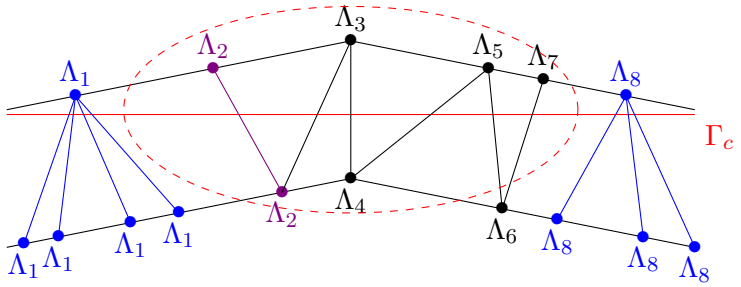


FIGURE 3.8 – *Relations d'égalité entre les degrés de liberté associés aux champs de multiplicateurs de Lagrange (d'après Ferte [83]).*

3.4.2.3 Représentation de l'élément HM-XFEM et répartition des degrés de liberté

Pour représenter l'élément HM-XFEM, qui est un élément 2D, nous avons choisi d'utiliser des éléments quadratiques qui peuvent être soit des quadrangles à 8 nœuds soit des triangles à 6 nœuds. Il est important de remarquer que seuls les *blending* et *reproducing elements* sont symbolisés par les éléments HM-XFEM (cf. Figure 3.9). Les autres éléments du maillage sont des éléments HM standards ne portant que les degrés de liberté classiques $\boldsymbol{a_i}$ et c_i. Les facettes de contact déjà mentionnées précédemment (ligne en pointillés rouges pour le cas d'une interface droite et en pointillés orange pour le cas d'une interface courbée sur la Figure 3.9) sont ajoutées virtuellement le long de la fracture afin de procéder à l'intégration numérique des intégrales de surface présentes dans les équations (3.34) à (3.39). Ces facettes de contact sont représentées par des segments à trois nœuds. Les nœuds sommets de ces

facettes correspondent aux points d'intersection entre l'interface et les arêtes de l'élément parent surfacique (*i.e.* quadrangle ou triangle). Le nœud milieu est ensuite positionné, dans le système de coordonnées de référence, en considérant le point d'intersection entre la bissectrice de la facette et l'iso-zéro de la *level-set* normale. Ainsi, il est plus facile de prendre en compte l'éventuelle courbure de l'interface. Pour finir, la position des points de Gauss au niveau de l'interface (ou des points d'intégration dans le cas général) est interpolée à partir des coordonnées de ces segments à trois nœuds. Nous représentons, sur la Figure 3.9, le réseau de points de Gauss par des croix rouges (respectivement des croix orange) dans le cas d'une seule facette de contact plane (respectivement une seule facette de contact courbée) au niveau desquelles le champ de déplacement local $\boldsymbol{\delta}$ est calculé. De part et d'autre de la fracture, chacun des *blending* et *reproducing elements* est virtuellement sous-découpé en sous-éléments triangulaires quadratiques [150] (cf. Figure 3.5) afin de réaliser l'intégration numérique des intégrales volumiques au niveau des équations (3.34) et (3.36). Dans le cas d'une interface courbe, le sous-découpage en éléments triangulaires n'est pas trivial et nécessite un traitement particulier pour chaque cellule d'intégration (voir Paul et al. [174]).

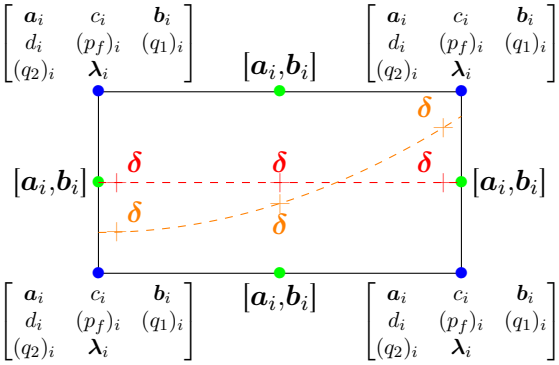


FIGURE 3.9 – *Représentation d'un élément quadrangulaire HM-XFEM.*

3.5 RÉSOLUTION DU PROBLÈME COUPLÉ

3.5.1 Linéarisation du problème couplé

3.5.1.1 Développement de Taylor autour de la solution

Le problème couplé étant non linéaire (la non-linéarité étant due aux termes faisant intervenir le temps pour les formulations variationnelles des équations de conservation de la masse dans le massif et la fracture et aux termes liés au comportement cohésif pour la mécanique) nous procédons à sa linéarisation à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre. Le système linéaire ensuite obtenu sera résolu à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Dans la suite de cette section nous désignons l'itération courante par (k) et l'itération suivante par $(k+1)$.

Soit $\boldsymbol{N}$ le système non-linéaire associé aux formulations variationnelles des équations de conservation de la masse (3.36) et (3.37), de l'équation d'équilibre mécanique (3.34), de la loi d'interface (3.35) et de la condition de continuité de la pression au niveau des parois de la fracture (3.38) et (3.39). Soit $\boldsymbol{x^{(k)}}$ le vecteur des inconnues à l'itération de Newton courante (k) tel que :

$$\boldsymbol{x^{(k)}} = \left(\boldsymbol{u}^{(k)}, p^{(k)}, p_f^{(k)}, q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}\right)^T$$

A l'itération de Newton $(k+1)$ (le vecteur des inconnues $\boldsymbol{x^{(k+1)}}$ n'est pas connu), on

pose :

$$\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right)=\boldsymbol{0}$$

Afin de pouvoir déterminer le vecteur des inconnues $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$, nous avons recours à un développement de Taylor du système non-linéaire $\boldsymbol{N}$ (qui est une fonction vectorielle supposée continue et dérivable) au voisinage de la solution $\boldsymbol{x}^{(k)}$ (alors connu à l'itération $(k+1)$). Ainsi le système linéarisé à l'itération $(k+1)$ s'écrit :

$$-\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)}{\partial \boldsymbol{x}^{(k)}}\delta\boldsymbol{x}^{(k)}$$

avec $\delta\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}$ l'incrément de la solution entre deux itérations successives (qui est une inconnue à l'itération $(k+1)$), $\frac{\partial \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)}{\partial \boldsymbol{x}^{(k)}}$ représente l'opérateur tangent (ou matrice jacobienne) et $\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$ le second membre (cette quantité représente la contribution des forces internes, des efforts cohésifs et des échanges matrice/fracture). Ces deux derniers termes sont connus à l'itération de Newton $(k+1)$ et sont fonctions de $\boldsymbol{x}^{k}$.

3.5.1.2 Écriture intégrale du problème linéarisé

Dans la suite de ce chapitre, les inconnues sont spécifiées à l'aide du symbole δ et les champs tests avec une $*$ en exposant.

Remarque 3.2 *Pour plus de lisibilité, le numéro de l'itération de Newton ainsi que le numéro du pas de temps sont omis pour les termes matriciels. Pour les seconds membres, la notation $G^{(n,k)}$ signifie que la grandeur G est définie pour le pas de temps courant (n) pour l'itération de Newton (k), et $G^{(n-1,\infty)}$ signifie qu'il s'agit d'une grandeur calculée au pas de temps précédent $n-1$ pour lequel la convergence de la solution a été atteinte. Cette grandeur est donc connue et constante à l'instant (n) quelque soit l'itération de Newton.*

Le système linéaire à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrit (intégré sur un pas de temps) :

- équation d'équilibre mécanique :
  Ainsi $\forall(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)\in(U_0\times\Lambda_0)$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \boldsymbol{\sigma'}\left(\delta\boldsymbol{u}\right):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}^*\right)d\Omega-\int_\Omega b\delta p\left(\mathbf{1}:\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}^*\right)\right)d\Omega-\int_\Omega \rho bTr\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\delta\boldsymbol{u}\right)\right)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}^*d\Omega\\
-&\int_\Omega\left(\frac{\rho\left(b-\phi\right)}{K_s}+\frac{\rho\phi}{K_w}\right)\delta p\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}^*d\Omega+\int_{\Gamma_c}\left([\boldsymbol{Id}]-r\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\lambda}\cdot[\![\boldsymbol{u}^*]\!]d\Gamma_c\\
+&\int_{\Gamma_c}r\left([\boldsymbol{Id}]-r\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right)\cdot\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot[\![\boldsymbol{u}^*]\!]d\Gamma_c-\int_{\Gamma_c}r\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{n_c}\cdot[\![\boldsymbol{u}^*]\!]\delta p_f d\Gamma_c\\
=&-\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}'\left(\boldsymbol{u}\right):\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}^*\right)d\Omega+\int_\Omega bp\left(\mathbf{1}:\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}^*\right)\right)d\Omega+\int_\Omega r^{hom}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}^*d\Omega+\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}^*d\Gamma_t\\
-&\int_{\Gamma_c}\left[\boldsymbol{\lambda}+r\left([\![\boldsymbol{u}]\!]-\boldsymbol{\delta}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right)\right]\cdot[\![\boldsymbol{u}^*]\!]d\Gamma_c
\end{aligned}\tag{3.55}$$

- loi d'interface (mécanique) :
  Ainsi $\forall\boldsymbol{\lambda}^*\in\Lambda_0$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_c}\left([\boldsymbol{Id}]-r\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right)\cdot\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{\lambda}^*d\Gamma_c-\int_{\Gamma_c}\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\cdot\delta\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*d\Gamma_c-\int_{\Gamma_c}\frac{\partial\boldsymbol{\delta}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{n_c}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*\delta p_f d\Gamma_c\\
=&-\int_{\Gamma_c}\left([\![\boldsymbol{u}]\!]-\boldsymbol{\delta}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right)\cdot\boldsymbol{\lambda}^*d\Gamma_c
\end{aligned}\tag{3.56}$$

- équation de conservation de la masse (cas du massif) :
  Ainsi $\forall p^* \in P_0$:

$$
\begin{aligned}
- & \int_\Omega \rho b Tr\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\delta \boldsymbol{u}\right)\right) p^* d\Omega - \int_\Omega \left(\left(\frac{\rho\left(b-\phi\right)}{K_s} + \frac{\rho\phi}{K_w}\right)\delta p\right) p^* d\Omega \\
+ & \Delta t\theta \left[\int_\Omega \frac{\rho}{K_w}\delta p\left(\gamma\left(-\boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{F}\right) + \gamma\rho\boldsymbol{F}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega\right] \\
+ & \Delta t\theta \left[\int_\Omega \rho\frac{\partial\gamma}{\partial p}\delta p\left(-\boldsymbol{\nabla} p + \rho\boldsymbol{F}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega\right] \\
- & \Delta t\theta \left[\int_\Omega \rho\gamma\boldsymbol{\nabla}\left(\delta p\right)\cdot\boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega\right] \\
+ & \Delta t\theta \left[\int_\Omega \rho\frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon_v} Tr\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\delta\boldsymbol{u}\right)\right)\left(-\boldsymbol{\nabla} p + \rho\boldsymbol{F}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega\right] \\
+ & \Delta t\theta \int_{\Gamma_1} \delta q_1 p^* d\Gamma_1 + \Delta t\theta \int_{\Gamma_2} \delta q_2 p^* d\Gamma_2 = \int_\Omega \left(m_w^{(n,k)} - m_w^{(n-1,\infty)}\right) p^* d\Omega \\
- & \Delta t\theta \int_\Omega \boldsymbol{M^{(n,k)}}\cdot\boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega - \Delta t\left(1-\theta\right)\int_\Omega \boldsymbol{M^{(n-1,\infty)}}\cdot\boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega \\
+ & \Delta t\theta \int_{\Gamma_F} M_{ext}^{(n,k)} p^* d\Gamma_F + \Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_F} M_{ext}^{(n-1,\infty)} p^* d\Gamma_F \\
- & \Delta t\theta \int_{\Gamma_1} q_1^{(n,k)} p^* d\Gamma_1 - \Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_1} q_1^{(n-1,\infty)} p^* d\Gamma_1 \\
- & \Delta t\theta \int_{\Gamma_2} q_2^{(n,k)} p^* d\Gamma_2 - \Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_2} q_2^{(n-1,\infty)} p^* d\Gamma_2
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

- équation de conservation de la masse (cas de la fracture) :
  Ainsi $\forall p_f^* \in P_0^f$:

$$
\begin{aligned}
- & \int_{\Gamma_c} \rho\delta\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{n_c} p_f^* d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c}\left(\frac{\rho\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{n_c}}{K_w}\delta p_f\right) p_f^* d\Gamma c \\
+ & \Delta t\theta\left[\int_{\Gamma_c} -\frac{\rho}{12\mu}\left(3\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^2\right)\boldsymbol{\nabla} p_f\otimes\boldsymbol{n_c}\cdot\delta\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c\right] \\
+ & \Delta t\theta\left[\int_{\Gamma_c} -\frac{\rho^+}{K_w}\frac{\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^3}{12\mu}\delta p_f\boldsymbol{\nabla} p_f\cdot\boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c\right] \\
+ & \Delta t\theta\left[\int_{\Gamma_c} -\frac{\rho\left(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^3}{12\mu}\boldsymbol{\nabla}\left(\delta p_f\right)\cdot\boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c\right] \\
- & \Delta t\theta\int_{\Gamma_1}\delta q_1 p_f^* d\Gamma_1 - \Delta t\theta\int_{\Gamma_2}\delta q_2 p_f^* d\Gamma_2 \\
= & \int_{\Gamma_c}\left(w^{(n,k)} - w^{(n-1,\infty)}\right) p_f^* d\Gamma_c - \Delta t\theta\int_{\Gamma_c}\boldsymbol{W^{(n,k)}}\cdot\boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c \\
- & \Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_c}\boldsymbol{W^{(n-1,\infty)}}\cdot\boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c + \Delta t\theta\int_{\Gamma_f} W_{ext}^{(n,k)} p_f^* d\Gamma_f \\
+ & \Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_f} W_{ext}^{(n-1,\infty)} p_f^* d\Gamma_f + \Delta t\theta\int_{\Gamma_1} q_1^{(n,k)} p_f^* d\Gamma_1 \\
+ & \Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_1} q_1^{(n-1,\infty)} p_f^* d\Gamma_1 + \Delta t\theta\int_{\Gamma_2} q_2^{(n,k)} p_f^* d\Gamma_2 \\
+ & \Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_2} q_2^{(n-1,\infty)} p_f^* d\Gamma_2
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

- conditions de continuité de la pression p_f au niveau de la fracture :
  Ainsi $\forall q_1^* \in Q_1$ et $\forall q_2^* \in Q_2$, respectivement sur Γ_1 et Γ_2 :

$$\int_{\Gamma_1} \delta p q_1^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \delta p_f q_1^* d\Gamma_1 = - \int_{\Gamma_1} (p - p_f)\, q_1^* d\Gamma_1 \tag{3.59}$$

$$\int_{\Gamma_2} \delta p q_2^* d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} \delta p_f q_2^* d\Gamma_2 = - \int_{\Gamma_2} (p - p_f)\, q_2^* d\Gamma_2 \tag{3.60}$$

3.5.2 Écriture des termes élémentaires avec XFEM

3.5.2.1 Écriture matricielle du problème couplé

Au niveau élémentaire, c'est-à-dire pour chaque nœud d'un élément HM-XFEM, le système d'équations précédemment linéarisé (équations (3.55) à (3.60)) peut se mettre sous la forme matricielle suivante à l'itération de Newton $(k+1)$:

Remarque 3.3 *Pour le système d'équations suivant, la notation* $\{.\}$ *se réfère à un vecteur ligne, tandis que* $(.)$ *se réfère à un vecteur colonne.*

- équilibre mécanique :

$$\begin{aligned} & \{\boldsymbol{u}^*\} \cdot [K^1_{meca}] \cdot (\delta \boldsymbol{u}) + \{\boldsymbol{u}^*\} \cdot [K^2_{meca}] \cdot (\delta p) \\ + \;& \{\boldsymbol{u}^*\} \cdot [A] \cdot (\delta \boldsymbol{u}) + \{\boldsymbol{u}^*\} \cdot [B] \cdot (\delta p) \\ + \;& \{[\![\boldsymbol{u}^*]\!]\} \cdot [C^1] \cdot (\delta [\![\boldsymbol{u}]\!]) + \{[\![\boldsymbol{u}^*]\!]\} \cdot [C^2] \cdot (\delta p_f) \\ + \;& \{[\![\boldsymbol{u}^*]\!]\} \cdot [C^3] \cdot (\delta \boldsymbol{\lambda}) = \{\boldsymbol{u}^*\} \cdot (L_{meca}) + \{[\![\boldsymbol{u}^*]\!]\} \cdot \left(L^1_{coh}\right) \end{aligned} \tag{3.61}$$

- loi d'interface :

$$\begin{aligned} & \{\boldsymbol{\lambda}^*\} \cdot [C^4] \cdot (\delta \boldsymbol{\lambda}) + \{\boldsymbol{\lambda}^*\} \cdot [C^5] \cdot (\delta [\![\boldsymbol{u}]\!]) \\ + \;& \{\boldsymbol{\lambda}^*\} \cdot [C^6] \cdot (\delta p_f) = \{\boldsymbol{\lambda}^*\} \left(L^2_{coh}\right) \end{aligned} \tag{3.62}$$

- conservation de la masse (cas du massif) :

$$\begin{aligned} & \{p^*\} \cdot [M^1_{hydro}] \cdot (\delta \boldsymbol{u}) + \{p^*\} \cdot [M^2_{hydro}] \cdot (\delta p) \\ + \;& \Delta t \theta \{p^*\} \cdot [K^1_{hydro}] \cdot (\delta p) + \Delta t \theta \{p^*\} \cdot [K^2_{hydro}] \cdot (\delta p) \\ + \;& \Delta t \theta \{p^*\} \cdot [K^3_{hydro}] \cdot (\delta p) + \Delta t \theta \{p^*\} \cdot [K^4_{hydro}] \cdot (\delta \boldsymbol{u}) \\ + \;& \Delta t \theta \{p^*\} \cdot [E^1] \cdot (\delta q_1) + \Delta t \theta \{p^*\} \cdot [E^2] \cdot (\delta q_2) \\ = \;& \{p^*\} \cdot \left(L^1_{hydro}\right) + \Delta t \{p^*\} \cdot \left(L^2_{hydro}\right)_\theta \\ + \;& \Delta t \{p^*\} \cdot \left(L^3_{hydro}\right)_\theta + \Delta t \{p^*\} \cdot \left(L^4_{hydro}\right)_\theta \\ + \;& \Delta t \{p^*\} \cdot \left(L^5_{hydro}\right)_\theta \end{aligned} \tag{3.63}$$

- conservation de la masse (cas de la fracture) :

$$\begin{aligned} & \{p_f^*\} \cdot [W^1_{hydro}] \cdot (\delta [\![\boldsymbol{u}]\!]) + \{p_f^*\} \cdot [W^2_{hydro}] \cdot (\delta p_f) \\ + \;& \Delta t \theta \{p_f^*\} \cdot [H^1_{hydro}] \cdot (\delta [\![\boldsymbol{u}]\!]) + \Delta t \theta \{p_f^*\} \cdot [H^2_{hydro}] \cdot (\delta p_f) \\ + \;& \Delta t \theta \{p_f^*\} \cdot [H^3_{hydro}] \cdot (\delta p_f) + \Delta t \theta \{p_f^*\} \cdot [E^3] \cdot (\delta q_1) \\ + \;& \Delta t \theta \{p_f^*\} \cdot [E^4] \cdot (\delta q_2) \\ = \;& \{p_f^*\} \cdot \left(L^6_{hydro}\right) + \Delta t \{p_f^*\} \cdot \left(L^7_{hydro}\right)_\theta \\ + \;& \Delta t \{p_f^*\} \cdot \left(L^8_{hydro}\right)_\theta + \Delta t \{p_f^*\} \cdot \left(L^9_{hydro}\right)_\theta \\ + \;& \Delta t \{p_f^*\} \cdot \left(L^{10}_{hydro}\right)_\theta \end{aligned} \tag{3.64}$$

- Continuité de la pression :

$$\{q_1^*\} \cdot [D^1] \cdot (\delta p) + \{q_1^*\} \cdot [D^2] \cdot (\delta p_f) = \{q_1^*\} \cdot \left(J_{cont}^1\right) \tag{3.65}$$

$$\{q_2^*\} \cdot [D^3] \cdot (\delta p) + \{q_2^*\} \cdot [D^4] \cdot (\delta p_f) = \{q_2^*\} \cdot \left(J_{cont}^2\right) \tag{3.66}$$

avec :

- $[K_{meca}^1]$ est la matrice élémentaire de rigidité mécanique classiquement rencontrée en mécanique. Cette matrice est associée au tenseur des contraintes effectives $\boldsymbol{\sigma}'$;
- $[K_{meca}^2]$ est due à la décomposition du tenseur des contraintes totales du massif en une partie effective (voir matrice précédente) et une partie liée à la pression de pore p ;
- $[A]$ et $[B]$ sont dues à la prise en compte des apports massiques dans l'expression de la masse volumique homogénéisée intervenant dans l'écriture des efforts volumiques sur Ω ;
- $[C^1]$, $[C^2]$, $[C^3]$, $[C^4]$, $[C^5]$ et $[C^6]$ sont les contributions des efforts cohésifs au niveau de Γ_c ;
- $[M_{hydro}^1]$ et $[M_{hydro}^2]$ sont les matrices élémentaires liées à la contribution des apports massiques associés au massif pour le cas de l'hydrodynamique ;
- $[W_{hydro}^1]$ et $[W_{hydro}^2]$ sont les matrices élémentaires liées à la contribution des apports massiques associés à la fracture pour le cas de l'hydrodynamique ;
- $[K_{hydro}^1]$, $[K_{hydro}^2]$, $[K_{hydro}^3]$ et $[K_{hydro}^4]$ sont les matrices de rigidité élémentaires pour l'hydrodynamique liées au massif ;
- $[H_{hydro}^1]$, $[H_{hydro}^2]$, $[H_{hydro}^3]$ sont les matrices de rigidité élémentaires pour l'hydrodynamique liées à la fracture ;
- $[E^1]$, $[E^2]$, $[E^3]$ et $[E^4]$ sont les matrices d'échange entre la fracture et le massif ;
- $[D^1]$, $[D^2]$, $[D^3]$ et $[D^4]$ sont les matrices liées à la condition de continuité entre les pressions au niveau de l'interface fracture/massif ;
- (L_{meca}) est le second membre lié aux efforts volumiques et surfaciques appliqués au domaine Ω et au niveau de sa frontière $\partial\Omega$;
- (L_{coh}^1) et (L_{coh}^2) sont les seconds membres liés aux efforts cohésifs ;
- (L_{hydro}^1) et $(L_{hydro}^i)_\theta$ avec $i \in [\![2, 5]\!]$ sont les seconds membres dus à la contribution des apports massiques et des flux dans le cas du massif ;
- (L_{hydro}^6) et $(L_{hydro}^i)_\theta$ avec $i \in [\![7, 10]\!]$ sont les seconds membres dus à la contribution des apports massiques et des flux dans le cas de la fracture ;
- (J_{hydro}^1) et (J_{hydro}^2) sont les seconds membres dus aux échanges respectivement au niveau de Γ_1 et Γ_2.

Remarque 3.4 *Comme nous pouvons le remarquer dans les expressions des matrices élémentaires (cf. équations (3.55) à (3.60) et sections 3.5.2.2 à 3.5.2.4) les quantités ρ, ϕ, $\boldsymbol{\nabla} p$, $[\![\boldsymbol{u}]\!]$, $\boldsymbol{\sigma'}$ et $\boldsymbol{\nabla} p_f$ sont laissées en l'état, et ne seront pas concernées par la discrétisation avec XFEM (cf. sections suivantes), car il s'agit de grandeurs obtenues au cours de l'itération de Newton (k) (pour le pas de temps courant (n)). Elles sont donc a priori connues à l'itération de Newton $(k+1)$ du pas de temps courant (n).*

3.5.2.2 Expression des matrices élémentaires pour la mécanique

La matrice élémentaire de rigidité mécanique à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrit :

$$\{\boldsymbol{u}^*\}_i \cdot [K_{meca}^1]_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{u})_j = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \otimes \boldsymbol{\nabla}\varphi_i + \boldsymbol{\nabla}\varphi_i \otimes (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \right] \right) : \mathbb{C} : \left(\frac{1}{2} \left[(\delta\boldsymbol{a}_j + H\delta\boldsymbol{b}_j) \otimes \boldsymbol{\nabla}\varphi_j + \boldsymbol{\nabla}\varphi_j \otimes (\delta\boldsymbol{a}_j + H\delta\boldsymbol{b}_j) \right] \right) d\Omega$$

La matrice élémentaire due à la décomposition du tenseur des contraintes totales du massif (en considérant l'hypothèse des contraintes effectives) s'écrit à l'itération de Newton $(k+1)$:

$$\{\boldsymbol{u}^*\}_i \cdot [K^2_{meca}]_{ij} \cdot (\delta p)_j = -\int_\Omega b \boldsymbol{\nabla}\varphi_i \cdot (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*)\, \psi_j\, (\delta c_j + H\delta d_j)\, d\Omega$$

La matrice $[A]$ à l'itération de Newton $(k+1)$ est donnée par :

$$\{\boldsymbol{u}^*\}_i \cdot [A]_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{u})_j = -\int_\Omega \rho b \varphi_i\, (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi_j\, (\delta \boldsymbol{a}_j + H\delta \boldsymbol{b}_j)\, d\Omega$$

La matrice $[B]$ à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrit :

$$\{\boldsymbol{u}^*\}_i \cdot [B]_{ij} \cdot (\delta p)_j = -\int_\Omega \left(\frac{\rho\,(b-\phi)}{K_s} + \frac{\rho\phi}{K_w}\right) \varphi_i\, (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \cdot \boldsymbol{F} \psi_j\, (\delta c_j + H\delta d_j)\, d\Omega$$

La loi de comportement associée aux efforts cohésifs s'exprime localement au niveau de l'interface, notamment dû à la délocalisation du champ nodal $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ en chaque point de Gauss des facettes de contact. Mathématiquement, cela se traduit par la nécessité d'avoir recours à un changement de repère, afin d'être cohérent avec le système de coordonnées associé aux contributions des efforts s'exerçant sur le massif, qui elles s'expriment dans le repère global. Pour ce faire, nous définissons une base locale aux facettes de contact composée d'un vecteur normal $\boldsymbol{n_c}$ et d'un vecteur tangent $\boldsymbol{\tau_c}$, orthogonal au précédent. Afin de prendre en compte ce changement de base, nous introduisons une matrice de passage $[\boldsymbol{Q}]$ telle que en 2D :

$$[\boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} n_c^x & n_c^y \\ \tau_c^x & \tau_1^y \end{bmatrix}$$

La matrice tangente locale s'exprime donc dans le repère local par :

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^{gl} = [\boldsymbol{Q}]^{\boldsymbol{T}} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^{loc} \cdot [\boldsymbol{Q}]$$

Remarque 3.5 *Le saut de déplacement nodal $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ s'exprime dans la base globale, alors que les champs $p_f \boldsymbol{n_c}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ s'expriment dans la base locale aux facettes de contact.*

Ainsi, les matrices élémentaires associées à la contribution des efforts cohésifs, pour l'équation d'équilibre (3.55), s'écrivent à l'itération de Newton $(k+1)$:

$$\{[\![\boldsymbol{u^*}]\!]\}_i \cdot [C^1]_{ij} \cdot (\delta[\![\boldsymbol{u}]\!])_j = \int_{\Gamma_c} r\varphi_i\, (2\boldsymbol{b}_i^*) \cdot \left([\boldsymbol{Id}] - r\left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^{gl}\right) \cdot (2\delta \boldsymbol{b}_j)\, \varphi_j d\Gamma_c$$

$$\{[\![\boldsymbol{u^*}]\!]\}_i \cdot [C^2]_{ij} \cdot (\delta p_f)_j = -\int_{\Gamma_c} r\varphi_i\, (2\boldsymbol{b}_i^*) \cdot [\boldsymbol{Q}]^{\boldsymbol{T}} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^{loc} \cdot \boldsymbol{n_c}\, (\delta p_f)_j\, \psi_j d\Gamma_c$$

$$\{[\![\boldsymbol{u^*}]\!]\}_i \cdot [C^3]_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{\lambda})_j = \int_{\Gamma_c} \varphi_i\, (2\boldsymbol{b}_i^*) \cdot [\boldsymbol{Q}]^{\boldsymbol{T}} \cdot \left([\boldsymbol{Id}] - r\left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^{loc}\right) \cdot \delta \boldsymbol{\lambda}_j \psi_j d\Gamma_c$$

Pour la loi d'interface (cf. équation (3.56)), les matrices élémentaires à l'itération de Newton $(k+1)$ se mettent sous la forme :

$$\{\boldsymbol{\lambda}^*\}_i \cdot [C^4]_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{\lambda})_j = -\int_{\Gamma_c} \psi_i \boldsymbol{\lambda}_i^* \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^{loc} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda}_j \psi_j d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{\lambda}\}_i \cdot [C^5]_{ij} \cdot (\delta[\![\boldsymbol{u}]\!])_j = \int_{\Gamma_c} \psi_i \boldsymbol{\lambda}_i^* \cdot \left([\boldsymbol{Id}] - r \left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right]^{loc} \right) \cdot [\boldsymbol{Q}] \cdot (2\delta \boldsymbol{b}_j)\, \varphi_j d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{\lambda}^*\}_i \cdot [C^6]_{ij} \cdot (\delta p_f)_j = - \int_{\Gamma_c} \psi_i \boldsymbol{\lambda}_i^* \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right]^{loc} \cdot \boldsymbol{n_c} \left(\delta p_f\right)_j \psi_j d\Gamma_c$$

Remarque 3.6 *On suppose que sur Γ_1, la fonction Heaviside H vaut $+1$ alors que sur Γ_2 cette fonction prend la valeur de -1. Par conséquent, le saut de déplacement estimé au niveau d'un noeud j, dont le support est entièrement coupé par la fracture, est tel que :*

$$[\![\boldsymbol{u}]\!]_j = (\boldsymbol{a}_j + H\boldsymbol{b}_j)_{\Gamma_1} - (\boldsymbol{a}_j + H\boldsymbol{b}_j)_{\Gamma_2} = (\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j) - (\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{b}_j) = 2\boldsymbol{b}_j$$

3.5.2.3 Expression des seconds membres élémentaires pour la mécanique

La contribution des forces internes au second membre à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{u}^*\}_i \cdot (L_{meca})_i = & - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}'(\boldsymbol{u}) : \left(\frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \otimes \boldsymbol{\nabla}\varphi_i + \boldsymbol{\nabla}\varphi_i \otimes (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \right] \right) d\Omega \\ & + \int_\Omega b \boldsymbol{\nabla}\varphi_i \cdot (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*)\, p d\Omega + \int_\Omega \varphi_i (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \cdot \boldsymbol{F}(r_0 + m_w)\, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_t} \varphi_i (\boldsymbol{a}_i^* + H\boldsymbol{b}_i^*) \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma_t \end{aligned}$$

La contribution des forces cohésives au second membre à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrit :

$$\{[\![\boldsymbol{u^*}]\!]\}_i \cdot \left(L^1_{coh}\right)_i = - \int_{\Gamma_c} (2\boldsymbol{b}_i^*)\, \varphi_i \left([\boldsymbol{Q}]^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda} + r \left([\![\boldsymbol{u}]\!] - [\boldsymbol{Q}]^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\beta}) \right) \right) d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{\lambda}^*\}_i \cdot \left(L^2_{coh}\right)_i = - \int_{\Gamma_c} \psi_i \boldsymbol{\lambda}_i^* \cdot \left([\boldsymbol{Q}] \cdot [\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\beta}) \right) d\Gamma_c$$

3.5.2.4 Expression des matrices élémentaires pour l'hydrodynamique

3.5.2.4.1 Cas du massif

Les matrices élémentaires liées à la contribution des apports massiques à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrivent :

$$\{p^*\}_i \cdot [M^1_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{u})_j = - \int_\Omega b\rho\psi_i (c_i^* + Hd_i^*)\, \boldsymbol{\nabla}\varphi_j \cdot (\delta \boldsymbol{a}_j + H\delta \boldsymbol{b}_j)\, d\Omega$$

$$\{p^*\}_i \cdot [M^2_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta p)_j = - \int_\Omega \left(\frac{\rho(b-\phi)}{K_s} + \frac{\rho\phi}{K_w} \right) (c_i^* + Hd_i^*)\, \psi_i\psi_j (\delta c_j + H\delta d_j)\, d\Omega$$

Les matrices élémentaires de rigidité à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrivent :

$$\{p^*\}_i \cdot [K^1_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta p)_j = \int_\Omega \frac{\rho}{K_w} (\gamma(-\boldsymbol{\nabla}p + \rho\boldsymbol{F}) + \rho\gamma\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_i (c_i^* + Hd_i^*)\, \psi_j (\delta c_j + H\delta d_j)\, d\Omega$$

$$\{p^*\}_i \cdot [K^2_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta p)_j = \int_\Omega \rho \frac{\partial \gamma}{\partial p} (-\boldsymbol{\nabla}p + \rho\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_i (c_i^* + Hd_i^*)\, \psi_j (\delta c_j + H\delta d_j)\, d\Omega$$

$$\{p^*\}_i \cdot [K^3_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta p)_j = -\int_\Omega \rho\gamma \left(c_i^* + Hd_i^*\right) \boldsymbol{\nabla}\psi_i \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_j \left(\delta c_j + H\delta d_j\right) d\Omega$$

$$\{p^*\}_i \cdot [K^4_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{u})_j = \int_\Omega \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_v} \left(-\boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{F}^m\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_i \left(c_i^* + Hd_i^*\right) \boldsymbol{\nabla}\varphi_j \cdot \left(\delta \boldsymbol{a}_j + H\delta \boldsymbol{b}_j\right) d\Omega$$

Les matrices élémentaires d'échange pour le massif s'écrivent à l'itération de Newton $(k+1)$:

$$\{p^*\}_i \cdot [E^1]_{ij} \cdot (\delta q_1)_j = \int_{\Gamma_1} \left(c_i^* + Hd_i^*\right) \psi_i\psi_j \left(\delta q_1\right)_j d\Gamma_1$$

$$\{p^*\}_i \cdot [E^2]_{ij} \cdot (\delta q_2)_j = \int_{\Gamma_2} \left(c_i^* + Hd_i^*\right) \psi_i\psi_j \left(\delta q_2\right)_j d\Gamma_2$$

3.5.2.4.2 Cas de la fracture

Les matrices élémentaires de masse à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrivent :

$$\{p_f^*\}_i \cdot [W^1_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta[\![\boldsymbol{u}]\!])_j = -\int_{\Gamma_c} \rho\left(p_f^*\right)_i \psi_i\varphi_j \left(2\delta \boldsymbol{b}_j\right) \cdot \boldsymbol{n}_c d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot [W^2_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta p_f)_j = -\int_{\Gamma_c} \frac{\rho[\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c}{K_w} \left(p_f^*\right)_i \psi_i\psi_j \left(\delta p_f\right)_j d\Gamma_c$$

Les matrices élémentaires de rigidité à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrivent :

$$\{p_f^*\}_i \cdot [H^1_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta[\![\boldsymbol{u}]\!])_j = -\int_{\Gamma_c} \frac{\rho\left(3\left([\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c\right)^2\right)}{12\mu} \boldsymbol{\nabla} p_f \otimes \boldsymbol{n}_c \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\psi_i \left(p_f^*\right)_i\right) \cdot \left(2\delta \boldsymbol{b}_j\right) \varphi_j d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot [H^2_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta p_f)_j = -\int_{\Gamma_c} \frac{\rho}{K_w} \frac{\left([\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c\right)^3}{12\mu} \boldsymbol{\nabla} p_f \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_i \left(p_f^*\right)_i \psi_j \left(\delta p_f\right)_j d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot [H^3_{hydro}]_{ij} \cdot (\delta p_f)_j = -\int_{\Gamma_c} \frac{\rho\left([\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n}_c\right)^3}{12\mu} \left(p_f^*\right)_i \boldsymbol{\nabla}\psi_i \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_j \left(\delta p_f\right)_j d\Gamma_c$$

Les matrices élémentaires d'échanges pour la fracture à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrivent :

$$\{p_f^*\}_i \cdot [E^3]_{ij} \cdot (\delta q_1)_j = -\int_{\Gamma_1} \left(p_f^*\right)_i \psi_i\psi_j \left(\delta q_1\right)_j d\Gamma_1$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot [E^4]_{ij} \cdot (\delta q_2)_j = -\int_{\Gamma_2} \left(p_f^*\right)_i \psi_i\psi_j \left(\delta q_2\right)_j d\Gamma_2$$

3.5.2.4.3 Continuité de la pression au niveau de la discontinuité

Les matrices élémentaires relatives à l'équation de continuité de la pression massif/fracture à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrivent :

$$\{q_1^*\}_i \cdot [D^1]_{ij} \cdot (\delta p)_j = \int_{\Gamma_1} (q_1^*)\, \psi_i \psi_j \, (\delta c_j + \delta d_j)\, d\Gamma_1$$

$$\{q_1^*\}_i \cdot [D^2]_{ij} \cdot (\delta p_f)_j = -\int_{\Gamma_1} (q_1^*)\, \psi_i \psi_j \, (\delta p_f)_j \, d\Gamma_1$$

$$\{q_2^*\}_i \cdot [D^3]_{ij} \cdot (\delta p)_j = \int_{\Gamma_2} (q_2^*)\, \psi_i \psi_j \, (\delta c_j - \delta d_j)\, d\Gamma_2$$

$$\{q_2^*\}_i \cdot [D^4]_{ij} \cdot (\delta p_f)_j = -\int_{\Gamma_2} (q_2^*)\, \psi_i \psi_j \, (\delta p_f)_j \, d\Gamma_2$$

Remarque 3.7 *Étant donné que sur Γ_1 la fonction de Heaviside H prend la valeur de $+1$, l'interpolation du champ de pression du massif au nœud enrichi i est $(\delta p)_i = \psi_i \, (\delta c_i + \delta d_i)$. De même sur Γ_2, la fonction de Heaviside prend la valeur de -1. Par conséquent l'interpolation du champ de pression du massif au nœud enrichi i s'écrit $(\delta p)_i = \psi_i \, (\delta c_i - \delta d_i)$*

3.5.2.5 Expression des seconds membres élémentaires pour l'hydrodynamique

3.5.2.5.1 Cas du massif

Les seconds membres élémentaires pour l'hydrodynamique à l'itération de Newton $(k+1)$ (le numéro de l'itération de Newton, ainsi que celui de l'instant de calcul sont indiqués ici) s'écrivent :

$$\{p^*\}_i \cdot \left(L^1_{hydro}\right)_i = \int_\Omega \psi_i \, (c_i^* + H d_i^*) \left(m_w^{(n,k)} - m_w^{(n-1,\infty)}\right) d\Omega$$

$$\{p^*\}_i \cdot \left(L^2_{hydro}\right)_{\theta,i} = -\theta \int_\Omega (c_i^* + H d_i^*)\, \boldsymbol{\nabla} \psi_i \cdot \boldsymbol{M}^{(n,k)} d\Omega - (1-\theta) \int_\Omega (c_i^* + H d_i^*)\, \boldsymbol{\nabla} \psi_i \cdot \boldsymbol{M}^{(n-1,\infty)} d\Omega$$

$$\{p^*\}_i \cdot \left(L^3_{hydro}\right)_{\theta,i} = \theta \int_{\Gamma_F} (c_i^* + H d_i^*)\, \psi_i M_{ext}^{(n,k)} d\Gamma_F + (1-\theta) \int_{\Gamma_F} (c_i^* + H d_i^*)\, \psi_i M_{ext}^{(n-1,\infty)} d\Gamma_F$$

D'après la remarque 3.7, il est possible d'écrire :

$$\{p^*\}_i \cdot \left(L^4_{hydro}\right)_{\theta,i} = -\theta \int_{\Gamma_1} (c_i^* + d_i^*)\, \psi_i q_1^{(n,k)} d\Gamma_1 - (1-\theta) \int_{\Gamma_1} (c_i^* + d_i^*)\, \psi_i q_1^{(n-1,\infty)} d\Gamma_1$$

$$\{p^*\}_i \cdot \left(L^5_{hydro}\right)_{\theta,i} = -\theta \int_{\Gamma_2} (c_i^* - d_i^*)\, \psi_i q_2^{(n,k)} d\Gamma_2 - (1-\theta) \int_{\Gamma_2} (c_i^* - d_i^*)\, \psi_i q_2^{(n-1,\infty)} d\Gamma_2$$

3.5.2.5.2 Cas de la fracture

Les seconds membres élémentaires pour l'hydrodynamique à l'itération de Newton $(k+1)$ (le numéro de l'itération de Newton, ainsi que celui de l'instant de calcul sont indiqués ici) s'écrivent :

$$\{p_f^*\}_i \cdot \left(L^6_{hydro}\right)_i = \int_{\Gamma_c} \psi_i \left(p_f^*\right)_i \left(w^{(n,k)} - w^{(n-1,\infty)}\right) d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot \left(L^7_{hydro}\right)_{\theta,i} = -\theta \int_{\Gamma_c} \left(p_f^*\right)_i \boldsymbol{\nabla}\psi_i \cdot \boldsymbol{W}^{(n,k)} d\Gamma_c - (1-\theta) \int_{\Gamma_c} \left(p_f^*\right)_i \boldsymbol{\nabla}\psi_i \cdot \boldsymbol{W}^{(n-1,\infty)} d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot \left(L^8_{hydro}\right)_{\theta,i} = \theta \int_{\Gamma_f} \left(p_f^*\right)_i \psi_i W_{ext}^{(n,k)} d\Gamma_f + (1-\theta) \int_{\Gamma_f} \left(p_f^*\right)_i \psi_i W_{ext}^{(n-1,\infty)} d\Gamma_f$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot \left(L^9_{hydro}\right)_{\theta,i} = \theta \int_{\Gamma_1} \left(p_f^*\right)_i \psi_i q_1^{(n,k)} d\Gamma_1 + (1-\theta) \int_{\Gamma_1} \left(p_f^*\right)_i \psi_i q_1^{(n-1,\infty)} d\Gamma_1$$

$$\{p_f^*\}_i \cdot \left(L^{10}_{hydro}\right)_{\theta,i} = \theta \int_{\Gamma_2} \left(p_f^*\right)_i \psi_i q_2^{(n,k)} d\Gamma_2 + (1-\theta) \int_{\Gamma_2} \left(p_f^*\right)_i \psi_i q_2^{(n-1,\infty)} d\Gamma_2$$

3.5.2.5.3 Continuité de la pression au niveau de la discontinuité

Les seconds membres élémentaires associés à la condition de continuité de la pression massif/fracture à l'itération de Newton $(k+1)$ s'écrivent :

$$\{q_1^*\}_i \cdot \left(J^1_{cont}\right)_i = -\int_{\Gamma_1} \left(q_1^*\right)_i \psi_i \left(p - p_f\right) d\Gamma_1$$

$$\{q_2^*\}_i \cdot \left(J^2_{cont}\right)_i = -\int_{\Gamma_2} \left(q_2^*\right)_i \psi_i \left(p - p_f\right) d\Gamma_2$$

4 Validation du modèle HM-XFEM : Application au cas du modèle KGD

Sommaire

4.1 Introduction . . . 72
4.2 Rappel des modèles de propagation . . . 74
4.3 Problème de référence . . . 76
4.3.1 Géométrie du problème 2D et conditions aux limites . . . 76
4.3.2 Caractérisation des régimes de propagation . . . 78
4.4 Présentation de la solution analytique pour chaque régime . . . 80
4.4.1 Équations constitutives du modèle KGD . . . 80
4.4.2 Near-toughness dominated regimes : solution pour les temps courts et les temps longs . . . 82
4.4.3 Viscosity-dominated regimes . . . 83
4.5 Résultats des simulations numériques . . . 87
4.5.1 Near-storage-toughness dominated regime . . . 87
4.5.2 Near-leak-off-toughness dominated regime . . . 91
4.5.3 Storage-viscosity dominated regime . . . 94
4.5.4 Near-leak-off-viscosity dominated regime . . . 97
4.6 Synthèse . . . 99

Afin de valider les différentes fonctionnalités du modèle HM-XFEM (voir chapitre 3), nous avons choisi de conduire une série de simulations numériques, toutes basées sur le benchmark KGD [124] (en condition de déformations planes) couramment employé dans l'industrie pétrolière. Au travers de ces différents tests, nous cherchons à valider l'influence que peut avoir l'injection d'un fluide incompressible au sein d'une fracture pré-existante, dont la propagation en temps et en espace peut être caractérisée par différents régimes. Notons que Carrier et al. [36], dans le cadre de la méthode des éléments finis (FEM), ont déjà réalisé cette comparaison avec les solutions asymptotiques développées par Bunger et al. [32] et Adachi et al. (2008) [4] et Adachi et al. (2002) [7]. Une partie des résultats présentés dans ce chapitre (avec le développement du modèle issu du chapitre 3) ont fait l'objet d'une publication dans le journal *Engineering Fracture Mechanics* [80] (voir Annexe A).

4.1 Introduction

Dans le domaine de l'industrie pétrolière, la fracturation hydraulique induite est un processus couramment employé afin d'augmenter la perméabilité du réservoir fracturé ainsi que son rendement [207]. Le fluide, injecté à haute pression, participe à la réouverture et à la propagation de ces fractures. Dans ce cas, leur propagation est gouvernée par des phénomènes physiques complexes. Afin d'améliorer leur compréhension, de nombreux modèles numériques ont vu le jour au cours des cinquante dernières années. Bien que l'approche numérique reste un concept séduisant, elle ne permet pas forcément de caractériser rigoureusement les différents domaines de validité des régimes gouvernant la propagation d'une fracture hydraulique. Pour ce faire, de nombreux auteurs ont développé des modèles théoriques faisant intervenir des géométries de fractures idéales, dont les contributions historiques sont associées principalement à Khristianovic et Zheltov [124], Geerstma et de Klerc [97] (modèle KGD : propagation d'une fracture de faible longueur en déformations planes), Perkins et Kerns [177], Nordgren [167] (modèle PKN : propagation verticale d'une fracture dans un réservoir stratifié), Abe et al. [3] (modèle *penny-shape* : propagation radiale d'une fracture elliptique autour d'un puit d'injection).

Dans le cadre du modèle de propagation d'une fracture en déformations planes (KGD), de nombreuses études ultérieures ont été menées, conduisant ainsi au développement de diverses solutions asymptotiques. Ces modèles asymptotiques prennent en compte les trois caractéristiques suivantes [5] : (i) le fluide injecté induit une déformation de la matrice solide du fait de l'augmentation de la pression sur les parois de la fracture, (ii) le fluide injecté s'écoule dans la fracture et, pour le cas des roches perméables, dans le milieu poreux environnant, (iii) le fluide injecté induit la propagation de la fracture. En particulier, la déformation du milieu poreux suite à l'injection du fluide sera prise en compte par une équation intégro-différentielle (équation d'élasticité [24]) qui décrit le caractère non local existant entre la pression nette (différence entre la pression de fluide dans la fracture et la valeur de la contrainte *in situ*) et l'ouverture de la fracture. L'écoulement dans la fracture est controlé par la conservation de la masse à laquelle une loi cubique [214] est associée. Les échanges, supposées unidirectionnels avec la matrice poreuse, seront gouvernés par la loi de Carter [37]. Enfin la propagation de la fracture [116] est associée à l'égalité entre le facteur d'intensité des contraintes en mode I et la tenacité de la matrice poreuse (*i.e.* fracture en équilibre mobile) ou à un facteur d'intensité pris nul (*i.e.* fracture en équilibre limite). Ce dernier aspect soulève un point fondamental pour l'identification des mécanismes impliqués. Dans le premier cas, la tenacité du matériau est un facteur contrôlant la propagation de la fissure. Dans le second cas, le comportement du fluide visqueux sera à l'origine de la propagation. Une approche, consistant à transformer le système d'équation précédent sous forme adimensionnelle [66], permet d'introduire deux paramètres caractéristiques : $\mathscr{K}$ la tenacité adimensionnelle faisant la distinction entre les régimes de dissipation de l'énergie, et $\mathscr{C}$ le coefficient d'échange adimensionnel décrivant la transition entre l'instant où la majorité du fluide est stocké dans la fracture vers l'instant où il se retrouve stocké dans le milieu poreux environnant. En fonction de la gamme de valeur pour ces deux coefficients, il en résulte diverses solutions asymptotiques. Detournay [66], pour le cas du milieu poreux imperméable, suggère que le comportement de la fracture sera dominé par les effets de la tenacité du matériau si $\mathscr{K} \gg 1$ (et inversement pour le cas où les effets de dissipation liés au fluide visqueux domineraient son comportement). Hu et Garagash [114] ont proposé de raffiner numériquement le domaine de validité des solutions asymptotiques pour le cas du milieu poreux perméable (voir les courbes pleines sur la Figure 4.6). Il est possible de distinguer dans le cas général 4 principaux régimes asymptotiques : *storage-toughness dominated regime*, *leak-off-toughness dominated regime*, *storage-viscosity dominated regime* et *leak-off-toughness dominated regime*.

La spécificité des solutions disponibles dans la littérature repose sur le développement

asymptotique en série des inconnues adimensionnelles (*i.e.* déplacement, pression nette, ouverture de la fracture), initialement proposé par Spence et Sharp [197]. La montée en ordre des termes de la série permettra d'accommoder l'évolution de la solution, d'un des 4 régimes asymptotiques précédents vers un régime intermédiaire où les deux modes de propagation sont en compétition.

Comme le rappelle Bao et al. [11], le comportement asymptotique de la pointe conditionne le régime asymptotique de propagation de la fracture. Il est donc capital de développer une solution analytique capable de prendre en compte cet aspect. À titre d'exemple, pour le cas du milieu poreux imperméable pour lequel la tenacité est faible (ou dit autrement lorsque la dissipation d'énergie liée aux effets visqueux est prépondérante), l'ordre de la singularité au niveau de la pointe de fissure est en 2/3 dans l'expression de l'ouverture, ce qui est incompatible avec le critère de propagation en mode I (singularité en 1/2). Garagash et Detournay [96, 94] ont montré dans ce cas précis, qu'il existe une zone dite *Linear Elastic Fracture Mechanics boundary layer*, de longueur $\mathscr{K}^6 l$ (avec l la longueur de la fracture) proche de la pointe où l'influence de la tenacité du matériau est prépondérante. Au niveau de cette zone, la solution asymptotique pour les petites gammes de $\mathscr{K}$ [93] s'applique. Au contraire, la solution asymptotique pour le cas du *viscosity dominated regime* [4, 7, 35] sera valable proche du point d'injection si et seulement si $B_1 \mathscr{K}^b \ll 1$ avec $B_1 \approx 0.1076$ et $b \approx 3.168$. Dans le cas inverse, pour des valeurs de $\mathscr{K}$ intermédiaires, l'effet de la tenacité n'est plus négligeable et doit être pris en compte, en plus des effets visqueux liés au fluide. La caractérisation de ce régime intermédiaire n'est alors plus possible que numériquement (voir [197] et [6]).

D'autre part, pour le cas des roches imperméables, le front d'avancée du fluide ainsi que la pointe de fracture ne coincident pas en général. Il existe alors, proche de la pointe, une cavité saturée de vapeur de fluide, du fait de la baisse de pression, à l'origine du *fluid lag* [137, 93, 95]. Prendre en compte le *fluid lag* dans la formulation des solutions asymptotiques rajoute un degré de complexité. Dans le cas où la viscosité du fluide domine le régime de propagation de la fracture, le *fluid lag* est nécessairement présent, et il n'existe aucune incompatibilité mathématique de la solution. Cependant, comme le soulignent Garagash et Detournay [93], dans le cas où la tenacité du matériau est non nulle, il est indispensable de considérer ce *fluid lag* dans la formulation de la solution. Autrement, la singularité du champ de pression nette serait en $ln(x)$ et ne permettrait pas de retrouver la singularité en 1/2 pour l'ouverture, comme le prédit le critère de propagation [116]. Physiquement parlant, cette singularité logarithmique impliquerait une succion infinie en pointe de fracture. Garagash [92] propose une solution asymptotique (aux temps courts) pour le cas où le *fluid lag* est non négligeable. Il introduit un nouveau paramètre adimensionnel $\mathscr{O}_m$: le coefficient de confinement adimensionnel, qui est une fonction de la contrainte de confinement σ_0 et de la pression négative en pointe. Pour les faibles valeurs de $\mathscr{K}$ et $\mathscr{O}_m$, le fluide sera confiné dans une zone proche du point d'injection. Au contraire, pour de fortes valeurs de $\mathscr{K}$, le *fluid lag* disparaît, et la solution asymptotique est réduite à celle développée par Garagash [91]. Lecampion et Detournay [131] proposent un algorithme capable de décrire la transition entre la solution asymptotique pour les temps courts, proposée par Garagash [92], vers celle développée par [197] pour les temps longs, pour lesquels le *fluid lag* disparaît.

La question du comportement en pointe de fracture a également été largement étudiée au moyen de modèles numériques, notamment dans le cadre de la méthode XFEM [14, 150]. En particulier, Gordeliy et Peirce [105] ont proposé deux schémas numériques, l'un permettant de caractériser la propagation de la fracture en présence d'un *fluid lag* (*i.e. Neuman to Dirichlet map* : la pression nette imposée détermine l'ouverture le long de la fracture), l'autre pour le cas où les deux fronts sont confondus (*i.e. mixed Dirichlet to Neuman map* : l'ouverture imposée en pointe et la pression imposée le long de la fracture (sauf en pointe) déterminent l'ouverture de la fracture). Dans le cas où les deux fronts coïncident, ces auteurs ont ensuite proposé d'associer le deuxième schéma avec des *level-sets* (*i.e. ILSA-*

XFEM scheme) [106]. Ainsi, afin de prendre en compte la singularité en pointe de fissure, pour un régime de propagation donné, ils proposent : (i) de considérer la singularité en pointe de manière faible au moyen d'une condition aux limites (schéma XFEM-s) ou (ii) d'introduire des fonctions d'enrichissement au niveau des éléments contenant la pointe, pour un régime de propagation donné (schéma XFEM-t). Dans les deux cas, la *level-set* permet d'actualiser la position des deux fronts confondus. La convergence des schémas XFEM-t et XFEM-s est étudiée dans [107] et montre que XFEM-s semble être plus performante que XFEM-t, notamment du fait de l'absence d'intégrales singulières à estimer numériquement pour chaque pas de propagation. Lecampion [129] a également proposé d'introduire des fonctions d'enrichissement singulières dans l'approximation du champ de pression pour le *storage-viscosity dominated regime* et le *storage-toughness dominated regime*. Celles-ci sont choisies afin de rester cohérentes avec l'approximation du champ de déplacement.

Il existe une alternative à l'introduction des fonctions d'enrichissement singulières en pointe de fracture. Comme déjà mentionné dans les chapitres 2 et 3 de ce mémoire, les modèles de zone cohésive restent un bon compromis. En effet, ces types de modèles compensent naturellement la singularité des contraintes en pointe de fracture *a contrario* des modèles précédemment mentionnés dans ce chapitre. En particulier, cette formulation nous dispense de tout traitement spécifique au niveau de la pointe de fracture et semble plus performante numériquement du fait de l'absence d'intégrales singulières à évaluer. Dans le cadre de l'étude de la propagation de fractures hydrauliques, Chen et al. [43] ont modélisé le comportement d'une fracture hydraulique au moyen d'éléments d'interface, d'abord pour le cas du *toughness-dominated regime*, puis dans le cas du *viscosity-dominated regime* [42]. Carrier et al. [36] ont également développé un modèle similaire, mais ont étudié en détail les 4 régimes de propagation sur la base d'un modèle numérique FEM impliquant des éléments d'interface. Plus récemment, Wang [211] a développé un modèle XFEM impliquant un modèle de zone cohésive pour le cas de la propagation d'une fracture non plane au sein du milieu poreux perméable.

Dans la suite de ce chapitre nous nous baserons sur les travaux de Carrier et al. [36] afin de valider le modèle HM-XFEM en comparant les résultats numériques obtenus avec les solutions asymptotiques de Adachi et al. (2002) [7] et Adachi et al. (2008) [4](*storage-viscosity dominated regime* et *leak-off-viscosity dominated regime* respectivement) et Bunger et al. [32] (*storage-toughness dominated regime* et *leak-off-toughness dominated regime*). Un bref rappel des différentes solutions asymptotiques sera effectué (cf. section 4.4).

4.2 Rappel des modèles de propagation

Comme nous avons pu le mentionner dans l'introduction de ce chapitre, il existe trois modèles principaux pour modéliser la propagation d'une fracture hydraulique dans le cas 2D, chacun ayant des conditions d'application qui lui sont propre.

La première configuration a été introduite par Perkins et Kerns [177] puis modifiée par Nordgren [167]. Il s'agit du modèle PKN. Dans ce cas, pour chaque section perpendiculaire à la direction de propagation, l'hypothèse des déformations planes est valide. Cela implique donc que la hauteur H de la fracture est supposée être plus faible que sa longueur l (cf. Figure 4.1) [5]. Du fait de l'applicabilité de la condition de déformations planes dans la direction verticale et de la longueur prononcée de la fracture, l'influence de la tenacité du matériau est en général négligeable. La propagation sera donc majoritairement associée à la dissipation d'énergie lié au comportement du fluide d'injection. La propagation et l'écoulement sont supposées unidimensionnels dans la direction perpendiculaire à l'axe horizontal.

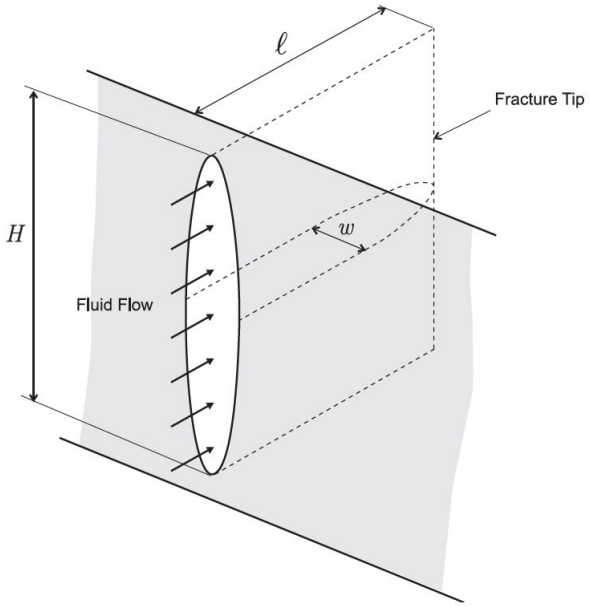


FIGURE 4.1 – *Modèle de propagation PKN [177, 167] (extraite de [5]).*

Le deuxième cas envisageable en 2D est le modèle *penny-shape* introduit par Abe et al. [3]. Ce modèle de propagation radiale (cf. Figure 4.2) est applicable dans le cas où l'injection ponctuelle d'un fluide est effectuée dans réservoir homogène dont les dimensions sont supposées infinies par rapport à celles de la fracture. La propagation se fera radialement dans un plan perpendiculaire à l'axe du puit en 2D.

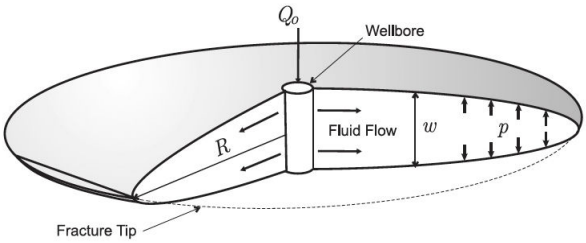


FIGURE 4.2 – *Modèle de propagation radiale [3] (extraite de [5]).*

Pour finir, le troisième type est le modèle KGD proposé par Khristianovic et Zheltov [124]. Pour ce modèle, on suppose que l'ouverture est indépendante de la hauteur H de la fracture (voir la représentation 3D de la fracture sur la Figure 4.3). Cela signifie que, pour toute section parallèle à la direction de propagation, l'ouverture est constante et l'hypothèse des déformations planes est valide pour chacune de ces sections si et seulement si la longueur l de la fracture est plus petite que sa hauteur H [5]. De ce fait, l'utilisation de ce modèle est particulièrement adaptée pour modéliser le comportement d'une fracture de faible longueur notamment pour des temps de propagation courts (contrairement au modèle PKN), comme il sera le cas dans la suite de ce chapitre (cf. sections 4.5.1 et 4.5.3). Ensuite, tout les régimes de propagation sont envisageables dans cette configuration. Enfin, les directions de l'écoulement et de la propagation sont supposées unidimensionnelles. Pour ces raisons, nous avons finalement préféré cette configuration aux deux autres précédemment citées.

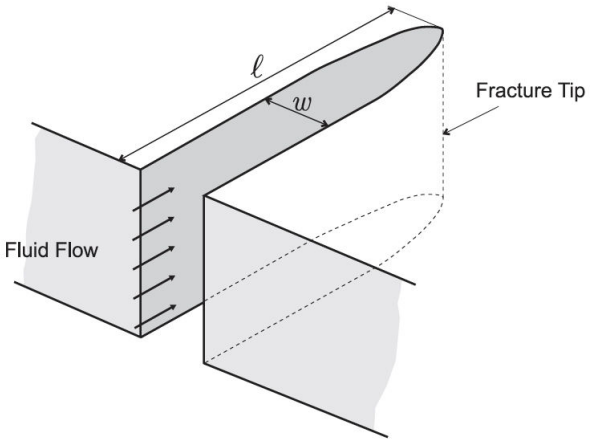


FIGURE 4.3 – *Modèle de propagation KGD [124] (extraite de [5]).*

4.3 PROBLÈME DE RÉFÉRENCE

4.3.1 Géométrie du problème 2D et conditions aux limites

Nous considérons un milieu poreux infini de hauteur $H = 60\ m$ et de longueur $L = 45\ m$. Le milieu poreux est entièrement traversé par une fracture existante. La géométrie de cette fracture est représentée au moyen d'une seule *level-set* (*i.e.* la *level-set* normale). Dans notre cas, il n'est pas nécessaire de faire intervenir une seconde *level-set* (*i.e.* la *level-set* tangente) pour prendre en compte le comportement de la pointe de fracture au cours du processus de propagation. En effet, la propagation va se produire sur un chemin prédéfini et surtout le modèle de zone cohésive que nous utilisons est parfaitement adapté pour gérer le comportement de la fracture au niveau de sa pointe. La *level-set* normale représente le chemin de propagation de la fracture et coïncide avec l'axe des abscisses.

Au point de coordonnées (0,0), nous simulons l'injection d'un fluide incompressible, associée au débit d'injection constant Q_0. Le fluide se propage le long du chemin prédéfini, et en fonction des propriétés de la matrice poreuse environnante, des échanges peuvent se produire. Sur les faces supérieure et inférieure du milieu poreux, nous appliquons une contrainte verticale constante σ_0 afin de prendre en compte l'influence du champ de contrainte *in situ*. Comme indiqué sur la Figure 4.4, la pression de pore est fixée à zéro sur les faces supérieure, inférieure et latérale droite du massif (cf. lignes bleues). Étant donnée la symétrie du problème, nous ne modélisons qu'une moitié du domaine. Ainsi, les déplacements sont bloqués dans la direction horizontale au niveau de la face latérale gauche. Le milieu poreux est supposé être saturé par un fluide mouillant.

En ce qui concerne l'état initial, on suppose que les pressions de pore du massif et de fluide dans la fracture sont nulles. Le champ de contrainte *in situ* est initialisé à σ_0. D'autre part, afin d'assurer la continuité des contraintes au niveau de l'interface, la contrainte cohésive effective est initialisée à σ_0.

Les propriétés matériau de la matrice poreuse, ainsi que les caractéristiques de la zone cohésive sont résumées dans le Tableau 4.1.

TABLE 4.1 – *Paramètres matériaux du massif et de la zone cohésive (d'après [36]).*

Viscosité dynamique	μ	dépend du régime
Compressibilité du liquide	$\frac{1}{K_w}$	0
Masse volumique	ρ	1 $kg.m^{-3}$
Module de Young	E	17 GPa
Coeff. de Poisson	ν	0.2
Coeff. de Biot	b	0.75
Perméabilité	K^{int}	dépend du régime
Contrainte critique	σ_c	1.25 MPa
Énergie cohésive	G_c	120 Pa.m
Coeff. d'augmentation	r	100 $Pa.m^{-1}$
Porosité	ϕ	0.2
Flux d'injection	Q_0	0.0005 $m^2.s^{-1}$

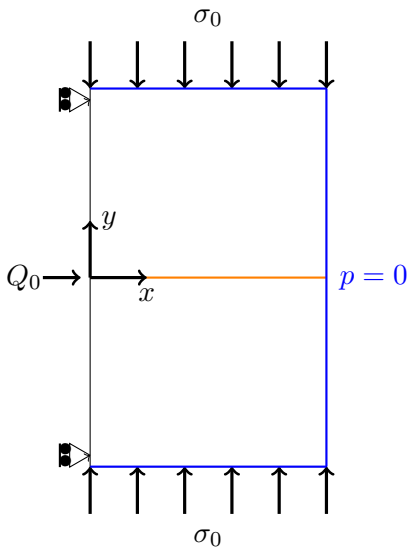


FIGURE 4.4 – *Géométrie et conditions aux limites.*

Dans le cas de Carrier et al. [36], un raffinement autour de la zone de propagation a été nécessaire (cf. Figure 4.5) afin d'assurer la précision et la convergence de la solution numérique. D'autre part, le chemin de propagation est maillé explicitement et les frontières des éléments du maillage coïncident avec la géométrie de la fracture. En ce qui nous concerne, l'utilisation de la méthode XFEM permet de s'affranchir de cette contrainte liée au maillage. Étant donné que la fracture est représentée à l'aide de l'iso-zéro de la *level-set* normale, nous avons choisi de considérer un maillage quadratique régulier et composé d'éléments HM standards et d'éléments HM-XFEM quadrangulaires. Le maillage utilisé comporte 120×121 éléments. Pour le cas de la simulation du *near-leak-off-toughness dominated regime*, un maillage régulier composé de 360×361 éléments a été considéré du fait d'instabilités locales constatées au cours du post-traitement des résultats numériques. Nous avons choisi de considérer un maillage relativement grossier et régulier afin de montrer que la qualité des résultats numériques obtenus avec le modèle HM-XFEM peut être tout à fait satisfaisante et comparable à ceux obtenus en FEM avec un maillage physique (cf. résultats de Carrier et al. [36]).

Afin de tester la sensibilité du modèle HM-XFEM, nous procèderons à une comparaison des résultats du *near-storage-toughness dominated regime* (cf. section 4.5.1) obtenus avec deux types de maillage : le maillage régulier composé par des éléments HM quadratiques quadrangulaires (*i.e.* 120×121 éléments), et un maillage composé par des éléments HM quadratiques triangulaires plus raffiné autour de la zone fracturée (*i.e.* 11 168 éléments). Ce

dernier est similaire à celui utilisé par Carrier et al. [36]. Dans les deux cas, la discontinuité est non conforme avec les frontières des éléments du maillage.

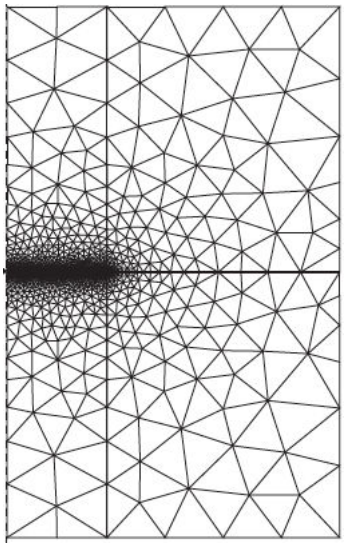


FIGURE 4.5 – *Représentation du maillage de Carrier et al. [36].*

4.3.2 Caractérisation des régimes de propagation

Dans le cas général, deux types de mécanismes, agissant en parallèle et associés à des effets de compétition, contrôlent la propagation de la fracture du fait de l'injection du fluide :

- le premier mécanisme se rapporte à la dissipation d'énergie associée soit à la création de volume dans la matrice poreuse (*i.e.* fracturation) soit celle associée aux effets de dissipation visqueux (dans ce dernier cas, la fracture est pré-existante) [66] ;
- le second étant lié au stockage préférentiel du fluide au sein de la fracture à des échelles de temps courts ou au sein de la matrice poreuse pour des temps plus longs [197].

Le second type de mécanisme, lié aux échanges entre la fracture et le massif, peut être quantifié au moyen de temps caractéristiques. Les temps caractéristiques, associés soit à la création de volume soit à la dissipation due aux effets visqueux, sont respectivement :

$$\tau_1 = \frac{K'^4 Q_0^2}{E'^4 (2C_L)^6} \qquad \tau_2 = \frac{12\mu Q_0^3}{E'(2C_L)^6} \tag{4.1}$$

Les deux types de mécanisme contrôlant la propagation d'une fracture hydraulique peuvent être reliés aux deux coefficients adimensionnels précédemment évoqués dans l'introduction (respectivement la tenacité adimensionnelle et le coefficient d'échange adimensionnel) :

$$\mathscr{K} = \frac{4K_c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3Q_0 E'^3 \mu} \right)^{\frac{1}{4}} \qquad \mathscr{C} = 2C_L \left(\frac{E' t}{12\mu Q_0^3} \right)^{\frac{1}{6}} \tag{4.2}$$

avec $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2}$, $K' = 4K_c \left(\dfrac{2}{\pi} \right)^{1/2}$ et $C_L = \dfrac{K^{int}}{\mu} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\pi c}}$. Le paramètre c est le coefficient poro-élastique de diffusion intrinsèque [55]. K_c représente la tenacité du matériau (K' possède la même signification, mais est introduit afin de ne pas avoir de facteur numérique dans l'expression du temps caractéristique τ_1), E' est le module de déformations planes, et

C_L est le coefficient d'échange [37] entre la matrice et la fracture.

Comme le suggère Detournay [66], la tenacité adimensionnelle $\mathscr{K}$ est interprétée comme étant le rapport entre l'énergie dissipée nécessaire pour fracturer le milieu poreux, et la dissipation d'énergie associée aux effets visqueux liés au fluide injecté participant à la réactivation de la fracture. D'autre part, le coefficient $\mathscr{C}$ (coefficient d'échange adimensionnel) est un paramètre dépendant du temps [197]. Il permet de quantifier la transition entre un régime de propagation sans échanges de fluide avec la matrice poreuse (aux temps faibles), vers un régime dominé par les échanges de fluide avec la matrice.

Hu et Garagash [114] ont proposé une représentation de l'espace paramétrique $(\mathscr{K},\mathscr{C})$ (cf. Figure 4.6) afin de donner une estimation de la validité des différentes solutions asymptotiques disponibles dans la littérature. À partir de ce découpage de l'espace des solutions, il est possible de remarquer que :

- les sommets du diagramme (*i.e. M-corner*, $\widetilde{M}$*-corner*, *K-corner*, $\widetilde{K}$*-corner*) correspondent respectivement aux régimes asymptotiques *storage-viscosity dominated regime*, *leak-off-viscosity dominated regime*, *storage-toughness dominated regime* et *leak-off-toughness dominated regime*. Dans ces cas, un seul des deux mécanismes de stockage du fluide (dans la fracture ou dans la matrice solide) et un seul des deux mécanismes de dissipation de l'énergie contrôlent le régime de propagation de la fracture ;
- les frontières (*i.e.* $K\widetilde{K}$*-edge,* $M\widetilde{M}$*-edge,* $\widetilde{M}\widetilde{K}$*-edge, MK-edge*) sont assimilées aux cas où soit un mécanisme de stockage disparaît ou soit un mécanisme de dissipation de l'énergie disparaît. La frontière *MK-edge* (respectivement la frontière $\widetilde{M}\widetilde{K}$*-edge*), correspond au cas où les deux mécanismes de dissipation co-existent, mais le fluide est stocké uniquement dans la fracture (respectivement dans la matrice solide). Les frontières $K\widetilde{K}$*-edge* et $M\widetilde{M}$*-edge* correspondent respectivement au *toughness-dominated regime* et *viscosity-dominated regime* caractérisés par la transition entre le *K-corner* et le $\widetilde{K}$*-corner* (respectivement entre le *M-corner* et le $\widetilde{M}$*-corner*).

Ainsi, aux temps courts, le *storage-toughness dominated regime* est caractérisé par $\mathscr{K} > 4$ et $\mathscr{C} < 0.1$, tandis que le *storage-viscosity dominated regime* est caractérisé par $\mathscr{K} < 1$ et $\mathscr{C} < 0.1$. Au contraire, pour les temps longs, le *leak-off-toughness dominated regime* est tel que $\mathscr{K} > 4$ et $\mathscr{C} > 4$, tandis que le *leak-off-viscosity dominated regime* est défini par $\mathscr{K} < 1$ et $\mathscr{C} > 4$.

Dans la suite de ce mémoire, la terminologie "near-" (par exemple *near-storage-toughness dominated regime*) indique que le processus d'évolution de la fracture est associé à une trajectoire de propagation proche d'une des 4 frontières décrites précédemment. Ce type de régime sera contenu dans le rectangle curviligne formé par l'intersection des 4 frontières du diagramme.

Sur la Figure 4.6, nous présentons pour chaque simulation effectuée (cf. sections 4.5.1 à 4.5.4) la position des régimes dominant la propagation de la fracture dans le diagramme $(\mathscr{K},\mathscr{C})$.

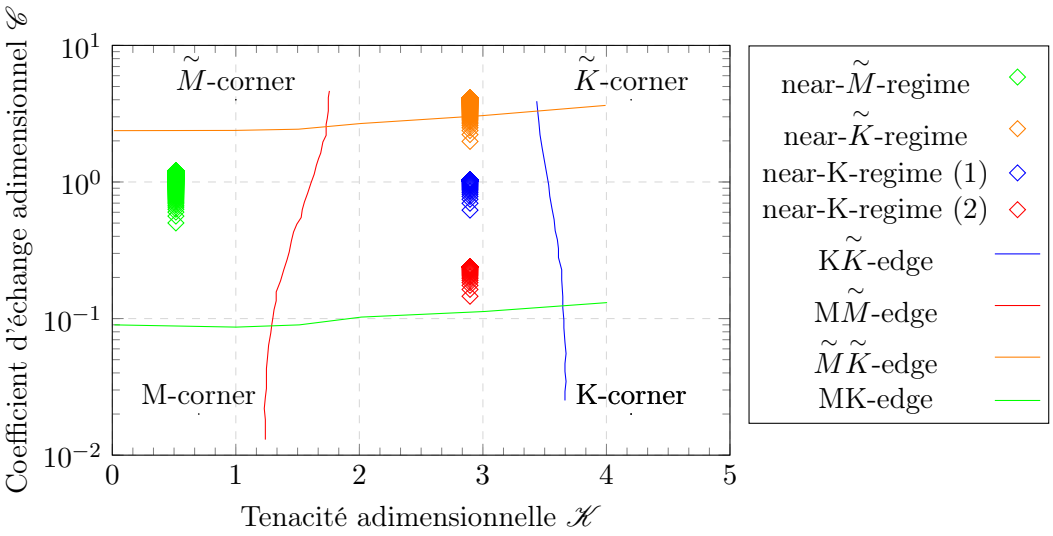


FIGURE 4.6 – *Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) et régime de propagation des simulations HM-XFEM.*

4.4 PRÉSENTATION DE LA SOLUTION ANALYTIQUE POUR CHAQUE RÉGIME

4.4.1 Équations constitutives du modèle KGD

Les quatre solutions analytiques présentées dans les sections 4.4.2 à 4.4.3 ont été obtenues à partir des équations de conservation et conditions aux limites présentées dans cette section [32, 4, 7]. Nous présentons les différentes équations sous leur forme dimensionnelle dans le cas général.

L'équilibre des fluides entre le milieu poreux et la fracture est gouverné par l'équation de conservation de la masse telle que pour tout $x \in [0, l]$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + g + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{4.3}$$

L'écoulement du fluide au sein de la fracture est géré par une loi cubique [214] :

$$q = -\frac{\omega^3}{12\mu}\frac{\partial p_f}{\partial x} \tag{4.4}$$

La combinaison de ces deux équations donne l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + g = \frac{1}{12\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^3 \frac{\partial p_f}{\partial x}\right) \tag{4.5}$$

De plus, pour le cas des régimes impliquant des échanges entre la fracture et la matrice poreuse (*i.e near-leak-off-toughness dominated regime* (cf. section 4.5.2) et *leak-off-viscosity dominated regime* (cf. section 4.5.4)), ceux-ci sont pris en compte au moyen de la loi de Carter [37] :

$$g(x,t) = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_0(x)}} \quad t > t_0(x) \tag{4.6}$$

avec $t_0(x)$ le temps d'arrivée de la pointe de fracture en x. Autrement dit, $t_0(x)$ revient à considérer $x = l(t_0(x))$. Dans le cas des régimes dominés par le stockage du fluide dans la fracture, ce terme est négligeable (cf. sections 4.5.1 et 4.5.3).

Remarque 4.1 *Étant donné que le modèle KGD considère l'injection d'un fluide incompressible (i.e.* $\frac{1}{K_w} = 0$*), l'équation de conservation de la masse dans la fracture* (3.5) *devient l'équation* (4.3)*, avec (en reprenant les notation du chapitre 3)* $\omega = \frac{w}{\rho}$, $g = -\frac{q_1 + q_2}{\rho}$ *et* $q = \frac{\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\tau_c}}{\rho}$ *(avec* $\boldsymbol{\tau_c}$ *le vecteur unitaire tangent à la surface de la fracture).*

L'équation de conservation reliant la pression nette (*i.e.* $p_n = p_f - \sigma_0$) à la l'ouverture de la fracture (équation d'élasticité [24]) est de la forme :

$$p_n(x,t) = -\frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^{l} \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{ds}{s-x} \tag{4.7}$$

Enfin, le critère de propagation repose sur l'égalité entre le facteur d'intensité des contraintes en mode I et la tenacité du matériau [116]. En outre :

$$K_I = K_c \tag{4.8}$$

avec [182] :

$$K_I = 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_0^l \frac{p_n}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx \tag{4.9}$$

Dans le cas de la solution de Bunger et al. [32], ce critère est légitime et implique que l'ouverture asymptotique de la fracture en pointe est telle que [182] :

$$\omega = \frac{K'}{E'} \sqrt{l - x} + O((l-x)^{3/2}) \quad x \to l \tag{4.10}$$

Cependant, dans le cas où la propagation de la fracture est contrôlée par les effets de dissipation visqueux (cas des solutions de Adachi et al. (2002) [4] et Adachi et al. (2008) [7]), cela signifie que $K_c \to 0$. Dans ce cas l'utilisation du critère (4.10) devient caduque. Le critère de propagation à considérer est alors :

$$\int_0^l \frac{p_n}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx = 0 \tag{4.11}$$

En particulier, l'ouverture asymptotique de la fracture en pointe doit satisfaire la condition :

$$\lim_{x \to l} \omega \sqrt{l - x} = 0 \tag{4.12}$$

Pour finir, les conditions aux limites et initiales sont respectivement :

- flux d'injection constant (le facteur 1/2 est lié à la condition de symétrie du domaine) :

$$q(0,t) = \frac{Q_0}{2} \tag{4.13}$$

- gradient négatif au point d'injection :

$$\left. \frac{\partial p_n}{\partial x} \right|_{x=0} < 0 \tag{4.14}$$

- $\omega = 0$ et $q = 0$ pour $x = l$ (en pointe de fracture)
- $l = 0$, $\omega = 0$ et $p_n = 0$ à $t = 0$.

Étant données les conditions aux limites et initiales précédentes, l'équation de conservation de la masse peut se mettre sous la forme (après intégration en temps et en espace) :

$$\frac{1}{2}Q_0 t = \int_0^l w dx + 2C_L \int_0^l \sqrt{t - t_0(x)} dx \tag{4.15}$$

4.4.2 Near-toughness dominated regimes : solution pour les temps courts et les temps longs

Dans cette section, nous présentons les solutions asymptotiques proposées par Bunger et al. [32] afin de décrire l'évolution de la fracture le long d'une trajectoire parallèlement proche de la frontière $K\widetilde{K}$-*edge*, pour les temps courts (*i.e. near-storage-toughness dominated regime*) jusqu'à des temps plus longs (*i.e. near-leak-off-toughness dominated regime*).

À partir du système d'équations constitutives donné en section 4.4.1, nous voyons que les inconnues du problème à résoudre sont l'ouverture de la fracture ω, la pression nette p_n et la longueur de la fracture l. Afin de pouvoir capturer le régime asymptotique gouvernant la propagation de la fracture, la première étape consiste à mettre les équations (4.3) à (4.15) sous forme adimensionnelle comme le suggère Detournay [66]. Pour ce faire, les inconnues du problème sont décomposées en produit de facteurs adimensionnels. Ainsi, dans le cas des *near-K-regime* et *near-*$\widetilde{K}$*-regime*, Bunger et al. [32] proposent d'exprimer ces grandeurs sous la forme suivante :

$$\omega(\xi,\tau) = \varepsilon_k L_k \Omega_k(\xi,\tau) \quad p_n(\xi,\tau) = \varepsilon_k E' \Pi_k(\xi,\tau) \quad l(\tau) = \gamma_k(\tau) L_k \tag{4.16}$$

avec $t = \tau_1 \tau$ et $x = l(t)\xi$.

$\xi \in [0,1]$ représente un système de coordonnées mobiles le long de la fracture. Le paramètre ε_k est introduit de manière à satisfaire la condition $\omega/l \ll 1$. L_k est un paramètre de mise à l'échelle, du même ordre de grandeur que la longueur de la fracture $l(t)$. Ces deux paramètres sont dépendants du régime considéré. Enfin, Ω_k, Π_k et γ_k sont respectivement l'ouverture adimensionnelle, la pression nette adimensionnelle et la longueur de fracture adimensionnelle.

Dans le cadre des deux régimes mentionnés dans cette section, les deux paramètres de mise à l'échelle s'expriment par :

$$\varepsilon_k = \frac{(2C_L)^2}{Q_0} \quad L_k = \left(\frac{K' Q_0}{E'(2C_L)^2}\right)^2 \tag{4.17}$$

L'ouverture adimensionnelle, ainsi que la pression nette adimensionnelle s'expriment quant à elles par :

$$\Omega_k(\xi,\tau) = 2^{-1/2}(\gamma_k(\tau))^{1/2}\left(1-\xi^2\right)^{1/2} \quad \Pi_k(\xi,\tau) = 2^{-5/2}(\gamma_k(\tau))^{-1/2} \tag{4.18}$$

Nous voyons que dans l'expression des deux grandeurs adimensionnelles précédemment définies (cf. équation (4.18)), Bunger et al. [32] suggèrent que le paramètre contrôlant la transition depuis le régime de propagation du *K-corner* (pour les temps de propagation courts) vers le $\widetilde{K}$*-corner* (pour les temps de propagation plus longs) est la longueur de fracture adimensionnelle $\gamma_k(\tau)$. En se basant sur la méthodologie de Spence et al. [197], le départ d'un coin du diagramme $(\mathscr{K}, \mathscr{C})$ vers un autre selon une trajectoire parallèle à une des quatre frontières (cf. Figure 4.6) est rendu possible en ayant recours à un développement asymptotique en série de la grandeur adimensionnelle, en l'occurence $\gamma_k(\tau)$ ici.

Ainsi l'expression de la longueur adimensionnelle $\gamma_k(\tau)$ s'exprime par :

- pour les temps courts ($\tau \ll 1$, *near-K-regime*) :

$$\gamma_k(\tau) = \tau^{\beta} \sum_{i=0}^{n} \gamma_{ki} \tau^{i\alpha} + O(\tau^{(n+1)\alpha+\beta}) \tag{4.19}$$

- pour les temps longs ($\tau \gg 1$, *near-$\widetilde{K}$-regime*) :

$$\gamma_k(\tau) = \tau^{\widetilde{\beta}} \sum_{i=0}^{n} \widetilde{\gamma}_{ki} \tau^{i\widetilde{\alpha}} + O(\tau^{(n+1)\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}) \tag{4.20}$$

Le terme correspondant à $i = 0$ dans les équations (4.19) et (4.20) est associé aux solutions asymptotiques pour le *K-corner* et le $\widetilde{K}$*-corner* respectivement. Les termes suivants ($i > 0$) serviront à exprimer le départ d'un des deux régimes asymptotiques vers un régime intermédiaire (dont la trajectoire sera assez proche de la frontière $K\widetilde{K}$*-edge* sur la Figure 4.6) pour lequel le stockage du fluide dans la fracture sera majoritaire soit dans la fracture, soit dans la matrice poreuse.

Les différentes valeurs des coefficients intervenant dans le développement en série de la longueur adimensionnelle sont répertoriées dans le Tableau 4.2.

TABLE 4.2 – *Valeurs des coefficients des séries asymptotiques pour le near-K-regime et le near-$\widetilde{K}$-regime (d'après [32]).*

$\tau \ll 1$		$\tau \gg 1$	
β	2/3	$\widetilde{\beta}$	1/2
α	1/6	$\widetilde{\alpha}$	−1/4
γ_{k0}	0.9324	$\widetilde{\gamma}_{k0}$	0.3183
γ_{k1}	−1.714	$\widetilde{\gamma}_{k1}$	-5.706×10^{-2}
γ_{k2}	2.196	$\widetilde{\gamma}_{k1}$	1.341×10^{-2}
γ_{k3}	−1.863	$\widetilde{\gamma}_{k1}$	-3.131×10^{-3}
γ_{k4}	0.7093	$\widetilde{\gamma}_{k1}$	6.368×10^{-4}

4.4.3 Viscosity-dominated regimes

Les deux solutions analytiques répertoriées dans les deux sections suivantes, correspondent aux solutions asymptotiques pour le *storage-viscosity dominated regime* et le *leak-off-viscosity dominated regime*, respectivement associés aux sommets *M-corner* et $\widetilde{M}$*-corner* du diagramme $(\mathscr{K}, \mathscr{C})$. Ces solutions ont été introduites par Adachi et al. (2002) [7] et Adachi et al. (2008) [4] respectivement.

4.4.3.1 Storage-viscosity dominated regime : solution pour les temps courts

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 4.4.2, la première étape pour résoudre le problème posé, est d'exprimer les différentes inconnues en un produit de facteurs adimensionnels. Ainsi dans le cas du *storage-viscosity dominated regime* (ou *M-regime*) on pose :

$$\omega(\xi, t) = \varepsilon_m(t) L_m(t) \Omega_{m0}(\xi) \quad p_n(\xi, t) = \varepsilon_m(t) E' \Pi_{m0}(\xi) \quad l(t) = \gamma_{m0} L_m(t) \tag{4.21}$$

avec $x = l(t)\xi$, le système de coordonnées mobiles le long de la fracture ($\xi \in [0,1]$). Pour ce régime, nous voyons donc que les grandeurs adimensionnelles Ω_{m0}, Π_{m0} et γ_{m0} sont indépendantes du temps, étant donné que la solution asymptotique est exprimée au niveau du *M-corner* du diagramme $(\mathscr{K}, \mathscr{C})$.

Ainsi les deux paramètres de mise à l'échelle s'écrivent :

$$\varepsilon_m(t) = \left(\frac{12\mu}{E't}\right)^{1/3} \qquad L_m(t) = \left(\frac{E'Q_0^3t^4}{12\mu}\right)^{1/6} \tag{4.22}$$

Pour ce régime, l'ouverture adimensionnelle Ω_{m0}, ainsi que la pression nette adimensionnelle Π_{m0} seront exprimées comme dans le cas précédent, à l'aide d'une décomposition asymptotique en série (d'après Spence et al. [197]). Ainsi on pose :

$$\Omega_{m0} \approx \gamma_{m0}\left(\sum_{j=1}^{m} A_j\Omega_j^* + B\Omega^{**}\right) \tag{4.23}$$

$$\Pi_{m0} \approx \left(\sum_{j=1}^{m} A_j\Pi_j^* + B\Pi^{**}\right) \tag{4.24}$$

avec Ω_j^* et Π_j^* la base d'approximation de la série, A_j et B des coefficients numériques (cf. Tableau 4.3), m l'ordre de décomposition de la série et Ω^{**} et Π^{**} des fonctions introduites afin d'assurer une valeur non nulle pour le gradient de pression au niveau du point d'injection.

Afin de respecter le comportement en pointe de fracture et de satisfaire les équations d'équilibre (4.5) et (4.7), la base d'approximation est choisie de telle sorte que :

$$\Omega_j^* = \left(1-\xi^2\right)^{\alpha} C_{2j-2}^{\alpha-1/2}(\xi) \tag{4.25}$$

avec $C_k^{(\lambda)}(\xi)$ les polynômes de Gegenbauer de degré k et d'index λ. Adachi et al. [7] ont suggéré que le choix des polynômes de Gegenbauer est le meilleur afin de pouvoir obtenir la base d'approximation de la pression nette à partir de l'équation d'élasticité (4.7) et de satisfaire le critère de propagation (4.11).

Concernant la base d'approximation pour la pression nette, à partir des équations (4.7) et (4.25) il est possible d'écrire :

$$\Pi_1^* = \frac{\alpha}{2\pi}B\left(\frac{1}{2},\alpha\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\alpha,1;\frac{1}{2};\xi^2\right) \quad (j=1) \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\Pi_j^* \;=\; & \frac{(2\alpha-1)(2j-1)}{4\pi(j-1+\alpha)}B\left(\frac{1}{2}-j,\alpha+j\right)\left(\alpha\xi^2{}_2F_1\left(\frac{5}{2}-j-\alpha,j;\frac{3}{2};\xi^2\right)\right.\\ & \left.-\frac{1}{2}{}_2F_1\left(\frac{3}{2}-j-\alpha,j-1;\frac{1}{2};\xi^2\right)\right) \quad (j>1)\end{aligned} \tag{4.27}$$

avec $\alpha = \dfrac{2}{3}$, $B(.,.)$ la fonction Beta d'Euler et ${}_2F_1(.,.;.;.)$ la fonction hypergéométrique de Gauss.

Cependant, le gradient des fonctions Π_j^* ($j>0$) ne permet pas de récupérer un gradient de pression nette (ou de manière équivalente de pression de fluide) négatif au niveau du point d'injection. Pour pallier cet inconvénient majeur de la base d'approximation (cf. équations

(4.26) et (4.27)), Adachi et al. [7] ont proposé de corriger la série (4.24) grâce au terme suivant :

$$\Pi^{**} = 2 - \pi \mid \xi \mid \tag{4.28}$$

Cette fonction respecte à la fois le critère de propagation (4.11) ainsi que la condition de gradient négatif (4.14) au niveau du point d'injection. Étant donné que l'expression de la pression nette et celle de l'ouverture sont liées par l'équation d'élasticité (4.7) [24], il est naturel qu'une correction de la série (4.23) soit effectuée. Ainsi on pose :

$$\Omega^{**} = 4\sqrt{1-\xi^2} + 2\xi^2 ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}}\right| \tag{4.29}$$

Enfin, la longueur adimensionnelle, qui est une constante, est obtenue à partir de l'équation (4.15) par (le second terme du membre de droite de l'équation (4.15) est nul car le milieu poreux est supposé imperméable) :

$$\frac{1}{\gamma_0^2} = 2\int_0^1 \frac{\Omega_0}{\gamma_0} d\xi = \frac{2\alpha}{2\alpha+1} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right)\left(A_1 - \frac{2\alpha-1}{2\alpha+3}A_2\right) + \frac{4\pi}{3}B \tag{4.30}$$

Soit $\gamma_0 = 0.6152$.

TABLE 4.3 – *Valeurs des coefficients A_j et B pour le M-regime (d'après [7]).*

Coefficient	Valeur
A_1	1.61750
A_2	0.39650
$A_3 \times 10^{-2}$	1.00297
$A_4 \times 10^{-2}$	1.06179
$A_5 \times 10^{-3}$	−2.97947
$A_6 \times 10^{-3}$	−0.74268
$A_7 \times 10^{-3}$	−1.34675
B	0.06858

4.4.3.2 Leak-off-viscosity dominated regime : solution pour les temps longs

De manière similaire, dans le cas du *leak-off-viscosity dominated regime*, la décomposition des inconnues en produit de facteurs adimensionnels s'écrit :

$$\omega(\xi,t) = \varepsilon_{\widetilde{m}}(t) L_{\widetilde{m}}(t) \Omega_{\widetilde{m}0}(\xi) \quad p_n(\xi,t) = \varepsilon_{\widetilde{m}}(t) E' \Pi_{\widetilde{m}0}(\xi) \quad l(t) = \gamma_{\widetilde{m}0} L_{\widetilde{m}}(t) \tag{4.31}$$

Pour ce régime, nous voyons donc que les grandeurs adimensionnelles $\Omega_{\widetilde{m}0}$, $\Pi_{\widetilde{m}0}$ et $\gamma_{\widetilde{m}0}$ sont indépendantes du temps, étant donné que la solution asymptotique est exprimée au niveau du $\widetilde{M}$*-corner* du diagramme $(\mathscr{K}, \mathscr{C})$.

Ainsi les deux paramètres de mise à l'échelle s'écrivent :

$$\varepsilon_{\widetilde{m}}(t) = \left(\frac{12\mu(2C_L)^2}{E' Q_0 t}\right)^{1/4} \qquad L_{\widetilde{m}}(t) = \left(\frac{Q_0^2 t}{(2C_L)^2}\right)^{1/2} \tag{4.32}$$

Comme pour la section précédente, l'ouverture adimensionnelle $\Omega_{\widetilde{m}0}$, ainsi que la pression nette adimensionnelle $\Pi_{\widetilde{m}0}$ se décomposent de la manière suivante :

$$\Omega_{\widetilde{m}0} \approx \gamma_{\widetilde{m}0}^{3/4} \left(\sum_{j=0}^{m} A_j \Omega_j^* + B\Omega^{**} \right) \tag{4.33}$$

$$\Pi_{\widetilde{m}0} \approx \gamma_{\widetilde{m}0}^{-1/4} \left(\sum_{j=0}^{m} A_j \Pi_j^* + B\Pi^{**} \right) \tag{4.34}$$

avec Ω_j^* et Π_j^* la base d'approximation de la série, A_j et B des coefficients numériques (cf. Tableau 4.4), m l'ordre de décomposition de la série et Ω^{**} et Π^{**} des fonctions introduites afin d'assurer, comme précédemment, une valeur non nulle pour le gradient de pression au niveau du point d'injection. L'expression de ces fonctions pour le $\widetilde{M}$*-regime* est identique à celle du *M-regime* (cf. équations (4.29) et (4.28)).

Les bases d'approximation Ω_j^* et Π_j^* se mettent sous la forme :

$$\Omega_j^* = \begin{cases} (1-\xi^2)^{\alpha} & j = 0 \\ (1-\xi^2)^{\alpha+1} C_{2j-1}^{\alpha+1/2}(\xi) & j > 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

$$\Pi_j^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \alpha, 1; \frac{1}{2}; \xi^2\right) & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{\pi(2\alpha+1)} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2} - \alpha, 1; \frac{1}{2}; \xi^2\right) & j = 1 \\ \frac{2j-1}{2\pi} B\left(\frac{1}{2} - j, \alpha + j\right) \left((\alpha+1)\xi^2 {}_2F_1\left(\frac{3}{2} - j - \alpha, j; \frac{3}{2}; \xi^2\right)\right. & \\ \left. -\frac{1}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - j - \alpha, j - 1; \frac{1}{2}; \xi^2\right)\right) & j > 1 \end{cases} \tag{4.36}$$

avec $\alpha = \dfrac{5}{8}$, $B(.,.)$ la fonction Beta d'Euler et ${}_2F_1(.,.;.;.)$ la fonction hypergéométrique de Gauss et $C_k^{(\lambda)}(\xi)$ les polynômes de Gegenbauer de degré k et d'index λ.

L'expression de la longueur adimensionnelle, également une constante pour ce régime, est donnée par le second terme de l'équation (4.15) (*i.e.* pour la forme adimensionnelle de cette équation, terme en $O(1)$ pour exprimer la solution au niveau du $\widetilde{M}$*-corner*). Ainsi :

$$4\gamma_{\widetilde{m}0} \int_0^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi = 1 \tag{4.37}$$

Soit $\gamma_{\widetilde{m}0} = \dfrac{1}{\pi} \approx 0.3183$.

TABLE 4.4 – *Valeurs des coefficients A_j et B pour le $\widetilde{M}$-regime (d'après [4]).*

Coefficient	Valeur
A_1	-1.4678×10^{-1}
A_2	-5.4776×10^{-3}
A_3	-3.0884×10^{-3}
A_4	-6.5627×10^{-4}
A_5	-2.6745×10^{-4}
A_6	-6.6398×10^{-6}
A_7	1.8079×10^{-5}
A_8	3.2996×10^{-5}
A_9	1.4595×10^{-5}
A_{10}	7.8147×10^{-6}
B	6.9801×10^{-2}

4.5 Résultats des simulations numériques

4.5.1 Near-storage-toughness dominated regime

Dans cette section nous présentons les résultats des simulations effectuées dans le cas du *near-storage-toughness dominated regime*. Afin d'étudier les effets de ce régime sur l'évolution de la fracture, le fluide injecté au niveau du point d'injection est caractérisé par une viscosité dynamique $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$. Dans ce cas, la dissipation de l'énergie liée aux effets visqueux est fortement réduite au cours du processus de propagation. D'autre part, deux simulations ont été conduites pour ce régime. Pour la première (cf. Figure 4.6 : *near-K-regime* (1)), le coefficient d'échange est fixé à $C_L = 6.28 \times 10^{-5}\ m.s^{1/2}$ permettant ainsi d'avoir de faibles échanges entre la fracture et la matrice poreuse. Afin que la majorité du fluide soit stockée dans la fracture, la perméabilité intrinsèque est telle que $K^{int} = 1 \times 10^{-15}\ m^2$ et la contrainte de confinement est $\sigma_0 = 3.7\ MPa$. Dans le second cas (cf. Figure 4.6 : *near-K-regime* (2)), le coefficient d'échange est fixé à $C_L = 1.47 \times 10^{-5}\ m.s^{1/2}$ et la perméabilité intrinsèque est telle que $K^{int} = 1 \times 10^{-16}\ m^2$. La contrainte de confinement reste cependant identique au cas précédent.

La définition de C_L et de $\mathscr{C}$ (cf. équation (4.2)) suggère qu'une augmentation de la perméabilité intrinsèque K^{int} et de la contrainte de confinement σ_0 est suffisante pour atteindre le *near-leak-off-tougness dominated regime* pour des gammes de temps plus longues. Au contraire une diminution de la perméabilité intrinsèque aura pour effet de favoriser le séjour dans le *near-storage-tougness dominated regime*, et cela est montré grâce au deuxième cas.

Les simulations ont été conduites pour $t \in [0, 20]$. Dans les deux cas, la tenacité adimensionnelle est $\mathscr{K} = 2.89$, alors que le coefficient d'échange adimensionnel est tel que $\mathscr{C} \in [0, 1.02]$ pour le cas du *near-K-regime* (1), et $\mathscr{C} \in [0, 0.23]$ pour le *near-K-regime* (2). La gamme de valeurs pour ces deux coefficients est suffisante pour rester dans le *near-storage-toughness dominated regime* comme le confirme la Figure 4.6.

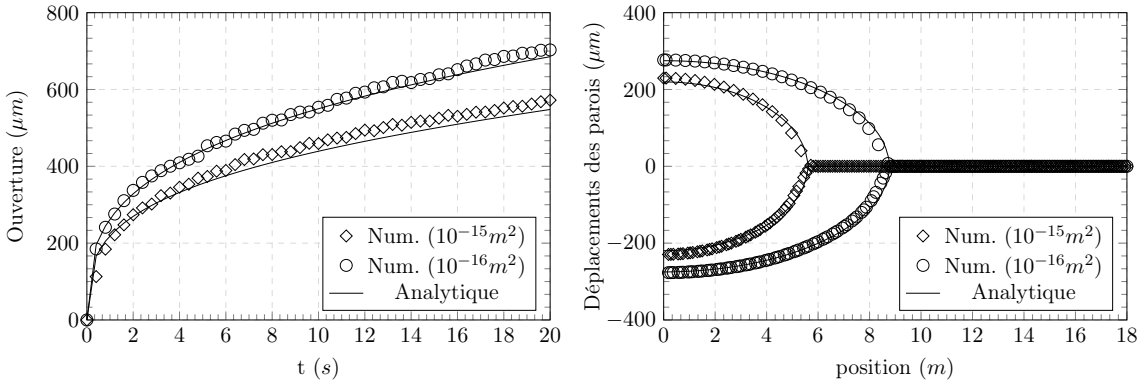


Figure 4.7 – *Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [32] (near storage-toughness dominated regime) : ouverture au point d'injection (gauche) et profil de la fracture à $t = 10s$ (droite).*

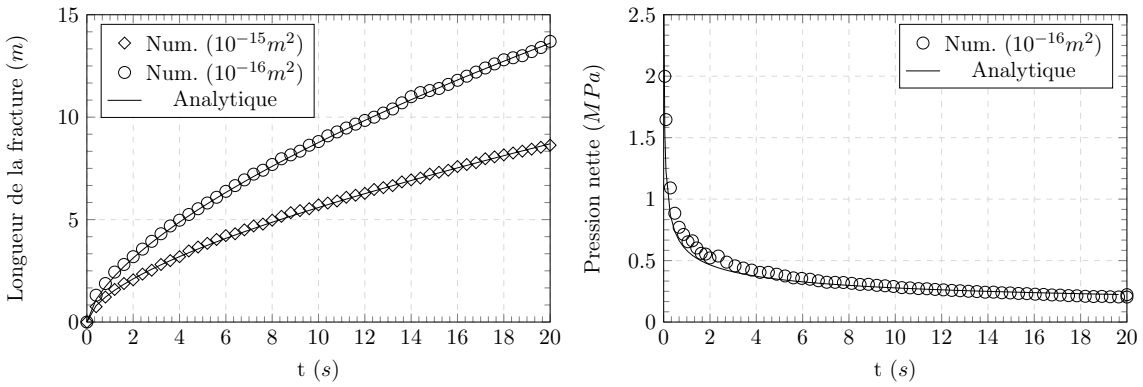


FIGURE 4.8 – *Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [32] (near storage-toughness dominated regime) : longueur de la fracture (gauche) et profil de pression nette au point d'injection (droite).*

Les Figures 4.7 et 4.8 montrent la comparaison entre les résultats numériques obtenus avec le modèle HM-XFEM et la solution analytique proposée par Bunger et al. [32]. Les résultats pour les deux gammes de perméabilité intrinsèque ont été superposés sur les mêmes figures. Dans un premier temps, il est important de souligner le très bon accord, dans les deux cas, entre la solution analytique et la solution numérique. D'autre part, nous remarquons que lorsque la perméabilité du massif diminue, la fracture va avoir tendance à croître d'avantage ($l = 13.6\ m$ pour le cas du *near-K-regime* (2) contre $l = 8.7\ m$ pour le *near-K-regime* (1) à $t = 20\ s$). De même, l'ouverture de la fracture suit le même schéma (cf. Figure 4.7 (gauche) et (droite)). Dans le cas du *near-K-regime* (2), l'ouverture est estimée à 685 μm à $t = 20s$ alors qu'elle sera égale à 547 μm à $t = 20s$ pour le *near-K-regime* (1). D'après ces observations, nous voyons donc que l'influence de la perméabilité intrinsèque (et donc le coefficient d'échange C_L) a un effet majeur sur le comportement de la fracture : ainsi dans le cas d'un milieu poreux relativement imperméable, une fracture hydraulique aura tendance à s'ouvrir plus et se propager plus que dans un milieu où les échanges fracture/matrice seront importants.

L'évolution de la pression nette (différence entre la pression de fluide p_f et la valeur de la contrainte de confinement σ_0) au cours du temps est tracée sur la Figure 4.7 (droite), pour le cas du *near-K-regime* (2). Étant donnée la nature du régime considéré, nous avons montré dans la section 4.3.2 que la propagation de la fracture est contrôlée par les effets de dissipation de l'énergie liés à la fracturation de la matrice solide, ainsi que ceux associés aux effets visqueux. En se rappelant de la position de notre étude dans le diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$), nous pouvons néanmoins supposer que les effets visqueux sont mineurs. Comme le modèle de Carrier et al. [36], le modèle HM-XFEM prend en compte le couplage hydro-mécanique existant au niveau de l'interface. Au contraire la solution analytique de Bunger et al. [32] ne prend pas en compte ce phénomène dans sa formulation. Le couplage hydro-mécanique va en effet générer une contrainte compressive, due à la pression générée par la circulation du fluide. Cette contrainte supplémentaire mesurée correspond au *back-stress effect* identifié par [208, 67]. Cependant, afin de pouvoir procéder à une comparaison efficace des résultats numériques avec la solution analytique de Bunger et al. [32], ce *back-stress effect* a été artificiellement supprimé en fixant à zéro le coefficient de Biot b dans l'expression de la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma'} - bp[\boldsymbol{Id}]$. Ayant procédé ainsi, on remarque que la solution analytique est en très bon accord avec la solution numérique. Notons que cet artifice n'a été pris en compte que pour représenter la pression nette. Les comparaisons numériques/analytiques précédentes font intervenir la contribution de la pression p dans l'expression de la contrainte totale.

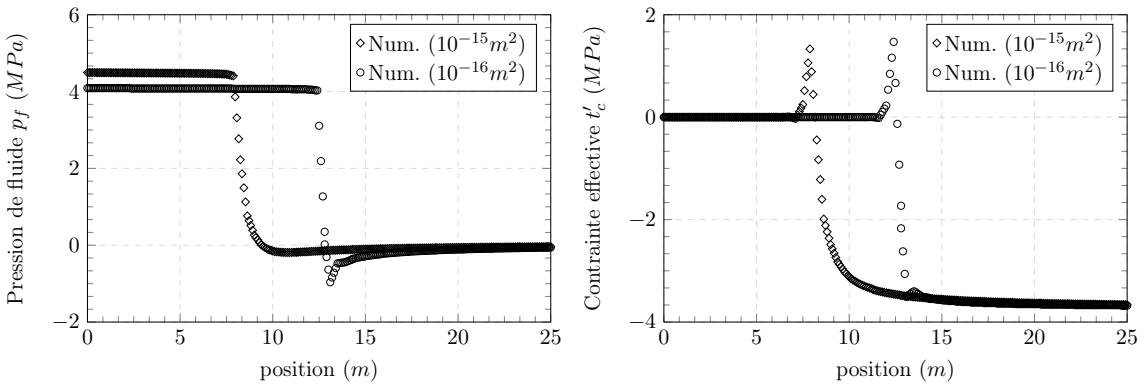


FIGURE 4.9 – *Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à* $t = 18s$.

L'évolution de la pression de fluide le long de la fracture, ainsi que celle de la contrainte cohésive effective sont représentées sur la Figure 4.9 pour les deux cas, *near-K-regime* (1) et *near-K-regime* (2) à $t = 18s$. Quelque soit la valeur de la perméabilité intrinsèque considérée, il est important de remarquer que la forme de la zone cohésive, ainsi que sa longueur ne change pas. En se focalisant par exemple sur le profil de la contrainte cohésive effective du *near-K-regime* (1) (la même interprétation est valable pour le cas du *near-K-regime* (2)), il est possible de remarquer que la gamme de valeurs pour laquelle $t'_c = 0\ MPa$ correspond à la zone 1 comme indiquée sur la Figure 2.3. Rappelons qu'au niveau de cette zone, le milieu poreux est entré en rupture. En faisant le lien avec le profil de pression du *near-K-regime* (1) (cf. Figure 4.9 (gauche)), la pression de fluide est uniforme au niveau de cette zone et est égale à $p_f = 4.5\ MPa$. Notons que dans le cas où la perméabilité du massif est plus faible, la valeur de la pression de fluide le long de la fracture reste uniforme, mais est légèrement plus faible. Cela est dû au fait que la fracture est plus ouverte et plus longue, favorisant un espace de stockage du fluide plus important pour un volume de fluide injecté identique et constant dans les deux cas. D'autre part, la partie ascendante du profil observée entre $t'_c = 0\ MPa$ et $t'_c = 1.25\ MPa = \sigma_c$ correspond à la zone en endommagement de la zone cohésive (zone 2 sur la Figure 2.3). La pression de fluide est également uniforme dans cette zone et reste égale à $p_f = 4.5\ MPa$. Ensuite, la phase descendante observée pour $t'_c = 1.25\ MPa$ est assimilée à la zone en adhésion jusqu'à ce que l'état de contrainte *in-situ* $t'_c = -\sigma_0 = -3.7\ MPa$ soit atteint, et qui correspond à la zone de contact. La partie du profil en adhésion et celle en contact correspondent à la zone 3 sur la Figure 2.3. Au niveau de la zone en contact, la pression de fluide chute brutalement, passant de $p_f = 4.5\ MPa$ à $p_f = 0\ MPa$. De plus, les déplacements verticaux sont alors nuls dans cette région, comme le montre le profil de la fracture sur la Figure 4.7.

Pour finir, il est intéressant de remarquer dans le cas où le milieu poreux est supposé imperméable (cas du *near-K-regime* (2)), dans la partie descendante du profil de pression de fluide (cf. Figure 4.9 (gauche)), une zone de très faible extension (environ 0.6 m) pour laquelle la pressure de fluide est négative. Cette anomalie peut être reliée à un choc de pression dû à la faible perméabilité du milieu poreux. Dès lors que les parois de la fracture sont en adhésion dans cette zone, la pression de fluide mesurée est en fait la pression de pore du massif. Étant donnée l'absence de diffusion en pointe, cet effet sera observable dans le cas du *near-K-regime* (2), alors que dans le cas où la perméabilité du massif augmente (*i.e.* *near-K-regime* (1)), une faible diffusion dans le massif s'établit en pointe et compense cet effet (cf. Figure 4.9 (gauche)).

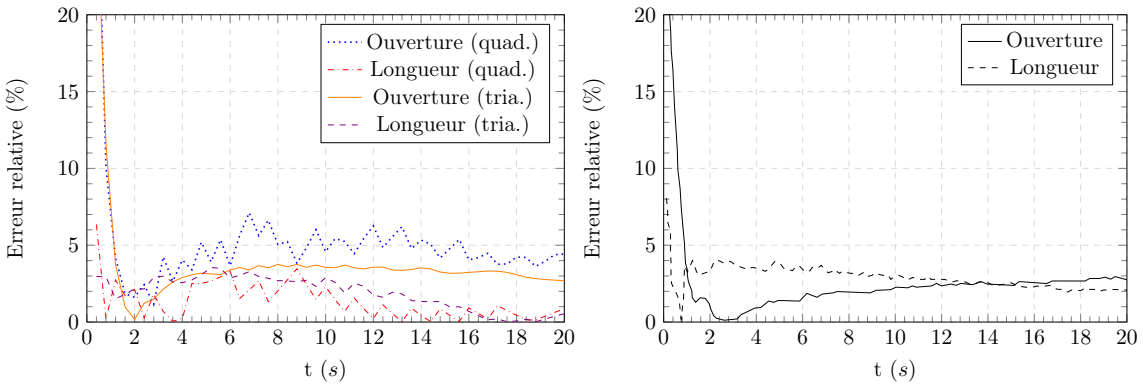


FIGURE 4.10 – *Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture et la longueur de la fracture ($K^{int} = 10^{-15}\ m^2$) : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite).*

Sur les Figures 4.10 et 4.11, l'erreur relative entre la solution analytique et la solution numérique est affichée pour le cas du modèle HM-XFEM (gauche) et dans le cas du modèle d'éléments d'interface proposé par Carrier et al. [36] (droite). Il est possible de remarquer que l'erreur relative est similaire pour les deux types de modèles considérés. En particulier, pour le cas du *near-K-regime* (1), nous comparons l'erreur relative obtenue à partir du maillage régulier composé d'éléments quadrangulaires (référencé par "quad." sur la Figure 4.10 (gauche)) et du maillage optimisé composé d'éléments triangulaires (référencé par "tria." sur la Figure 4.10 (gauche)). L'erreur relative mesurée pour le cas impliquant des éléments triangulaires est un peu plus faible et plus lisse que celle obtenue pour le cas du maillage régulier. Ceci s'explique par le fait que le maillage optimisé est plus raffiné autour de la fracture. Cependant, que ce soit pour le cas du modèle HM-XFEM (quelque soit le maillage utilisé) ou pour le cas des éléments d'interface de Carrier et al. [36], la solution numérique ne correspond pas parfaitement à la solution analytique. En effet, le critère de propagation, sur lequel se base la solution analytique, repose sur l'égalité entre le facteur d'intensité des contraintes en mode d'ouverture I et la tenacité du matériau [116]. Au contraire, pour le modèle HM-XFEM, la loi de Talon-Curnier [204] gouverne la propagation de la fracture ainsi que l'évolution de l'ouverture du fait de l'injection d'un fluide incompressible. En particulier, le critère de propagation pour cette loi cohésive sera basé sur la considération de deux paramètres indépendants, et intrinsèques au matériau (*i.e.* l'énergie cohésive G_c et la contrainte critique σ_c (à partir desquels est défini le saut de déplacement critique δ_c) (cf. chapitre 3)) et s'écrit :

$$K_I = K_c = \sqrt{G_c \frac{E}{1-\nu^2}} \tag{4.38}$$

Pour le modèle analytique, l'évolution de l'ouverture est gérée par une équation intégro-différentielle (cf. équation (4.7)), reliant la pression nette à l'ouverture de la fracture [24], classiquement rencontrée en mécanique de la rupture.

D'autre part, une erreur notable peut être observée sur les premiers instants de calcul (autour de 20% pour l'ouverture de la fracture). Cet artefact peut être relié à la dimension de la zone cohésive. En fait, au cours de la propagation de la fracture, la taille de la zone cohésive est constante et mesure approximativement [182] :

$$l_{coh} = \frac{9\pi}{32} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{G_c}{\sigma_c^2} = 1.2\ m \tag{4.39}$$

Avant $t = 1s$, la taille de la zone cohésive est supérieure ou égale à la longueur de la fracture (cf. Figure 4.8 (gauche)). Ceci peut donc expliquer les instabilités numériques

observées, qui semblent disparaitre lorsque la fracture croît.

Notons également que l'erreur relative obtenue pour le modèle HM-XFEM est légèrement plus grande en comparaison de celle de Carrier et al. [36]. Nous attribuons cette différence au fait que Carrier a conduit ses simulations avec un maillage optimisé, c'est-à-dire qu'un raffinement autour de la fracture a été effectué. Néanmoins, l'utilisation d'un maillage régulier donne des résultats tout à fait satisfaisant, moyennant quelques oscillations locales sur le profil de l'erreur relative.

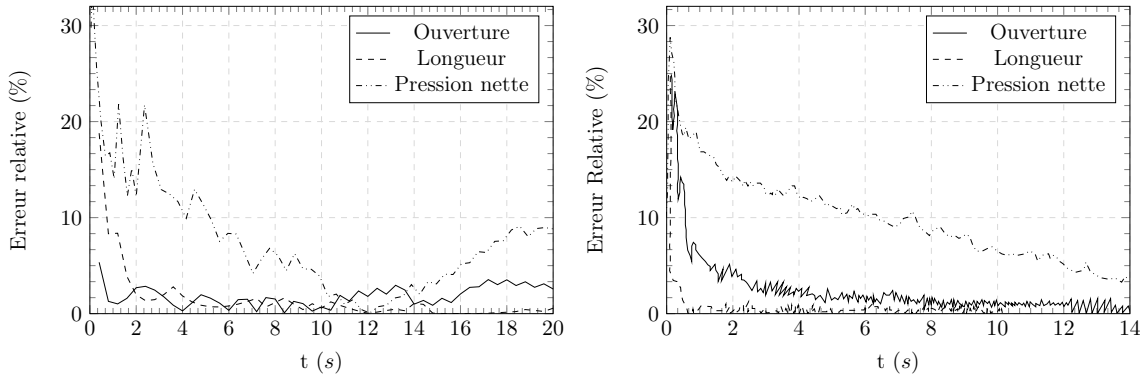


FIGURE 4.11 – *Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture, la longueur de la fracture et la pression nette au point d'injection ($K^{int} = 10^{-16}\ m^2$) : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite).*

4.5.2 Near-leak-off-toughness dominated regime

Nous nous intéressons à présent au cas du *near-leak-off-toughness dominated regime*. Pour ce régime, des échanges de fluide entre la fracture et le massif vont avoir lieu. Cependant, comme nous avons pu le constater dans la formulation de la solution analytique de Bunger et al. [32] (cf. section 4.4), les échanges sont pris en compte au moyen de la loi de Carter [37]. Cette loi repose sur le fait que les échanges de fluide auront principalement lieu latéralement autour de la fracture. Autrement dit, le flux d'échange est unidimensionnel, majoritairement orienté verticalement et négligeable dans la direction horizontale, en particulier en pointe de fracture. Numériquement, afin de satisfaire cette condition nous avons choisi de considérer un milieu poreux dont la perméabilité intrinsèque est anisotrope : la perméabilité dans la direction verticale sera plus importante que dans la direction horizontale. Pour ce faire nous choisissons de fixer la perméabilité dans la direction verticale à $K_y^{int} = 5 \times 10^{-15}\ m^2$ alors que dans la direction horizontale, la perméabilité intrinsèque est $K_x^{int} = 1 \times 10^{-16}\ m^2$. Ainsi, le coefficient d'échange est $C_L = 2 \times 10^{-4}\ m.s^{1/2}$. Afin de rester dans le domaine où la tenacité du matériau domine sur les effets de dissipation liés au fluide injecté, la viscosité dynamique est fixée à $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$. Néanmoins, pour favoriser les échanges latéraux, comme le suggère la définition de C_L et $\mathscr{C}$ (cf. équation (4.2)), la valeur de la contrainte de confinement a été augmentée et est égale à $\sigma_0 = 5\ MPa$. Dans ces conditions, la tenacité adimensionnelle est toujours égale à $\mathscr{K} = 2.89$ tandis que la gamme de valeur pour le coefficient d'échange adimensionnel (pour une simulation telle que $t \in [0, 80]$) est $\mathscr{C} \in [0, 4.11]$. Nous voyons donc que les valeurs des deux paramètres contrôlant la propagation de la fracture assurent de rester dans le *near-leak-off-toughness dominated regime*.

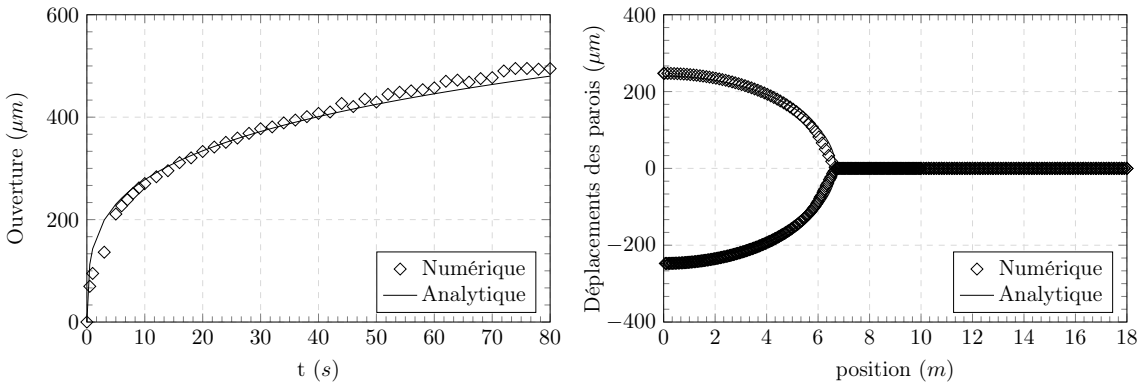


FIGURE 4.12 – *Solutions numériques et analytiques [32] pour l'ouverture au point d'injection (gauche) et le déplacement des parois à t=80s (droite) : near-leak-off-toughness dominated regime.*

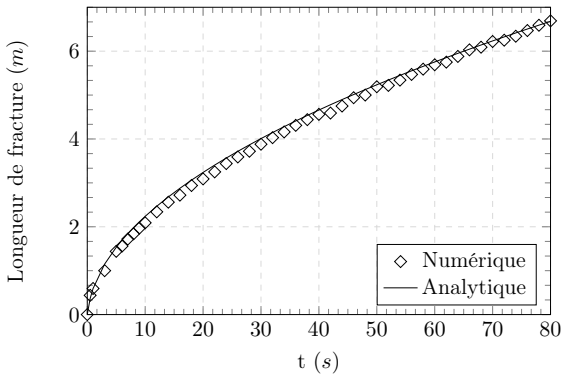


FIGURE 4.13 – *Solutions numériques et analytiques [32] pour la longueur de fracture : near-leak-off-toughness dominated regime.*

Sur les Figures 4.12 et 4.13, on donne la comparaison entre les résultats numériques et la solution analytique de Bunger et al. [32], pour le cas où les échanges de fluide fracture/matrice ne sont plus négligeables. Globalement, les résultats numériques sont en bon accord avec la solution analytique. En opposant les résultats obtenus pour cette simulation, avec ceux obtenus précédemment (cf. section 4.5.1), il est possible de remarquer que dans le cas où les échanges latéraux sont prépondérantes, l'ouverture de la fracture, ainsi que sa longueur, sont fortement diminuées par rapport au cas où la majorité du fluide est stocké dans la fracture. Par exemple, pour le cas du milieu poreux imperméable (*i.e. near-K-regime* (2)) nous enregistrons une longueur de fracture $l = 13.6\ m$ (cf. Figure 4.8 (gauche)) alors que dans le cas du *near-*$\widetilde{K}$*-regime* la longueur est telle que $l = 3.2\ m$ à $t = 20s$, soit une réduction de longueur d'un facteur 4.25. Le même genre d'observation peut être fait pour l'ouverture de la fracture : pour le cas du *near-K-regime* (2) l'ouverture est estimée à 685 μm contre 334 μm à $t = 20s$ pour le *near-*$\widetilde{K}$*-regime* (soit une réduction de l'ouverture d'un facteur 2 environ). Néanmoins, la réduction de l'ouverture pour le cas du *near-*$\widetilde{K}$*-regime* peut être attribuée à l'augmentation de la contrainte de confinement (sachant que le débit d'injection est inchangé) sur les faces supérieure et inférieure du domaine. Le volume de fluide échangé est aussi un argument expliquant cette différence. En effet, plus les échanges seront importants, et moins l'espace nécessaire à stocker le fluide restant dans la fracture sera important. D'où une ouverture plus faible. Nous reviendrons dans le chapitre 5 sur l'influence des conditions opératoires sur la longueur de propagation des fractures.

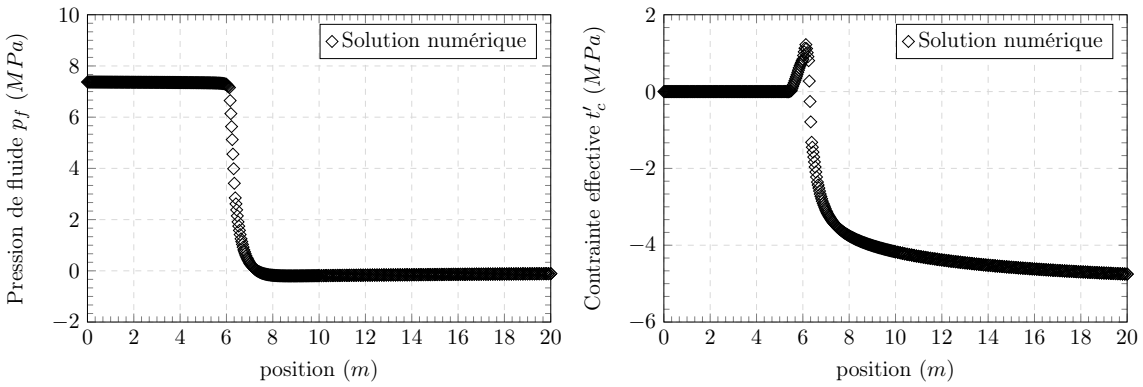


FIGURE 4.14 – *Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à t=80s.*

La Figure 4.14 montre l'évolution de la pression de fluide le long de la fracture (à gauche) ainsi que le profil de la contrainte cohésive effective (à droite), à t=80s. Il est intéressant de remarquer que les différentes zones précédemment identifiées dans le cas du *near-K-regime*, sont toujours présentes pour ce régime. La taille de la zone cohésive reste également inchangée. En ce qui concerne le profil de pression de fluide, nous notons que le long de la fracture la valeur de la pression de fluide est constante jusqu'en pointe de fissure. Ce phénomène est caractéristique d'une fracture dont le régime de propagation est dominée par la tenacité du matériau. Pour finir, nous remarquons que la zone de pression négative, observée dans le cas du *near-K-regime* (2) a disparu. En effet, bien que dans les deux cas, *near-K-regime* (2) et *near-*$\widetilde{K}$*-regime*, la perméabilité horizontale est identique (*i.e.* $K_x^{int} = 1 \times 10^{-16}\ m^2$), nous supposons donc que dans le cas où les échanges latéraux sont plus importantes ce choc de pression observé sera compensé par l'homogénéisation du champ de pression de pore du massif dans cette zone où les parois de la fracture sont supposées en contact parfait.

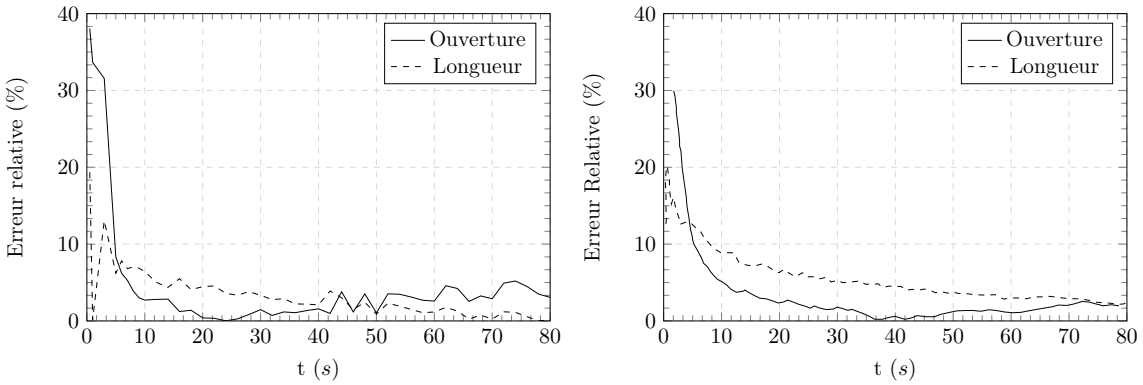


FIGURE 4.15 – *Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture et la longueur de la fracture : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite).*

Pour conclure cette section, l'erreur relative comparant la solution analytique avec les résultats numériques est représentée sur la Figure 4.15. Comme pour le cas précédent, nous donnons l'erreur obtenue dans le cas du modèle HM-XFEM ainsi que celle obtenue au moyen du modèle de Carrier et al. [36]. Nous constatons que, d'un modèle à un autre, l'erreur relative est similaire. Notons que dans le cas du modèle HM-XFEM, l'erreur sur la longueur de fracture semble être meilleure (également observable pour les deux simulations présentées dans la section 4.5.1). Nous pouvons associer cette amélioration au fait que, dans le cas de notre formulation, une loi cohésive non-régularisée est employée (et pour laquelle il n'y a de pénalisation ni pour la phase en contact ni pour celle en adhérence), contrairement au cas

de Carrier et al. [36] qui emploient une loi cohésive linéaire régularisée (cf. section 2.3 pour plus de détails). Or, du fait de la nécessité d'imposer une ouverture initiale avant le passage en endommagement du matériau, cela peut générer quelques instabilités voire une légère erreur numérique sur la solution, puisque l'adhérence initiale n'est pas vérifiée.

Notons enfin qu'une forte erreur est toujours observable pour les premiers instants de calcul. Comme montré précédemment, cela est lié à la dimension de la zone cohésive par rapport à la longueur de la fracture.

4.5.3 Storage-viscosity dominated regime

Dans cette section, nous nous intéressons au cas du régime de propagation pour lequel le fluide est confiné dans la fracture et la dissipation d'énergie associée aux effets visqueux est le seul mécanisme de dissipation dominant : le *storage-viscosity dominated regime*. Contrairement aux cas précédents, il faut interpréter ce régime de propagation comme un processus de stimulation d'une fracture déjà existante. En effet, comme le montre Adachi et al. [7] dans la formulation de sa solution analytique utilisée pour valider cette simulation, le critère de propagation considéré est celui d'une fracture en équilibre limite. En d'autres termes, la tenacité du matériau est considérée comme étant nulle et le facteur d'intensité des contraintes en mode I est tel que $K_I = 0$. Dans le cadre de notre étude, il est évident que la tenacité du matériau n'est pas nulle, autrement dit la convergence des tests numériques ne serait pas assurée. Cependant, le jeu de paramètres qu'ont considéré Carrier et al. [36], est suffisant pour se placer dans les conditions de validité de ce régime asymptotique. Ainsi, le coefficient d'échange est fixé à $C_L = 0$. Cela suggère que les échanges entre la fracture et la matrice solide sont impossibles. La perméabilité intrinsèque est $K^{int} = 1 \times 10^{-15}\ m^2$ et la contrainte de confinement est imposée à la valeur $\sigma_0 = 3.7\ MPa$. La viscosité dynamique du fluide injecté est quant à elle égale à $\mu = 1 \times 10^{-1}\ Pa.s$. À partir de ces données, nous déduisons la tenacité adimensionelle telle que $\mathscr{K} = 0.51$. Par contre le coefficient d'échange adimensionnel est supposé égale à $\mathscr{C} = 0$ quelque soit l'instant $t \in [0, 30]$. Nous voyons donc que la gamme de valeurs pour ces deux paramètres autorise la fracture à évoluer dans le *storage-viscosity dominated regime*. Ce regime n'apparaît pas sur la Figure 4.6, étant donnée l'échelle logarithmique considérée.

Il est important de remarquer un dernier point. Comme déjà mentionné dans la section 4.5.1, nous avons eu recours à un artefact numérique afin d'éliminer l'influence du *back-stress effect* sur la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$. Étant donnée la nature du régime asymptotique impliqué dans ce cas présent, le *back-stress effect* aura un très fort impact sur l'ouverture de la fracture, sa longueur et la pression nette (ou de manière équivalente la pression de fluide le long de la fracture), le coefficient de Biot a été imposé à $b = 0$ dans l'expression de la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$.

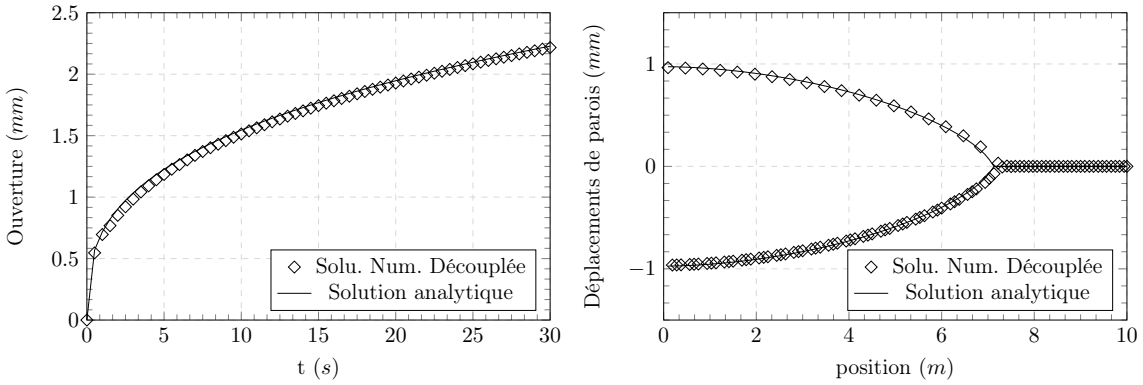


FIGURE 4.16 – *Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [7] (storage-viscosity dominated regime) : ouverture au point d'injection (gauche) et profil de la fracture à $t = 20s$ (droite).*

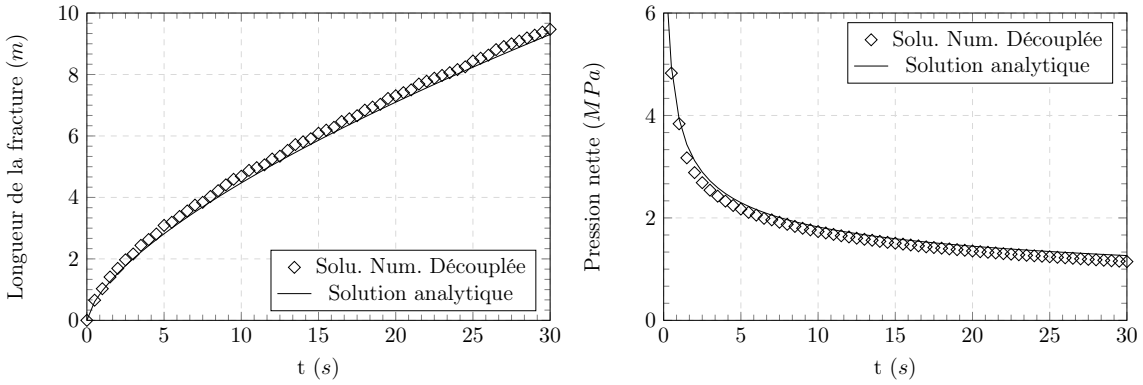


FIGURE 4.17 – *Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [7] (storage-viscosity dominated regime) : longueur de la fracture (gauche) et profil de pression nette au point d'injection (droite).*

Sur les Figures 4.16 et 4.17, nous présentons la comparaison des résultats obtenus numériquement avec le modèle HM-XFEM, avec la solution analytique d'Adachi et al. [7]. La correspondance avec la solution analytique est très bonne. Nous remarquons également que, lorsque la fracture évolue dans le *storage-viscosity dominated regime*, l'extension de la fracture sera plus faible que dans le cas du *near-K-regime* (1) (comparaison sur la base d'une valeur de perméabilité intrinsèque identique). En effet dans le cas du *near-K-regime*, la longueur de la fracture est $l = 8.7\ m$ contre $l = 7\ m$ pour le *storage-viscosity dominated regime* à $t = 20s$ (cf. Figures 4.8 (gauche) et 4.17 (gauche)). Cependant, il se produit l'effet inverse sur l'ouverture de la fracture, car nous mesurons une ouverture de 547 μm pour le *near-K-regime* alors que celle-ci est de 1.94 mm pour le *M-regime* (cf. Figures 4.7 (gauche) et 4.16 (gauche)), soit une ouverture 3.5% plus grande à $t = 20s$. Cette exemple montre clairement l'impact que peut avoir l'injection d'un fluide visqueux dans une fracture. En outre, celle-ci aura tendance à moins s'étendre, mais sera nettement plus ouverte que dans le cas où un fluide très peu visqueux est injecté.

En ce qui concerne l'évolution de la pression nette (cf. Figure 4.17 (droite)), pour une même valeur de contrainte de confinement, nous remarquons que celle-ci est nettement plus importante dans le cas du *storage-viscosity dominated regime*. Il semble logique de constater cette différence, car le fluide visqueux aura tendance à générer une pression beaucoup plus forte au niveau du point d'injection (et par extension le long des parois de la fracture) du fait de sa faible capacité à se répandre au sein de la cavité.

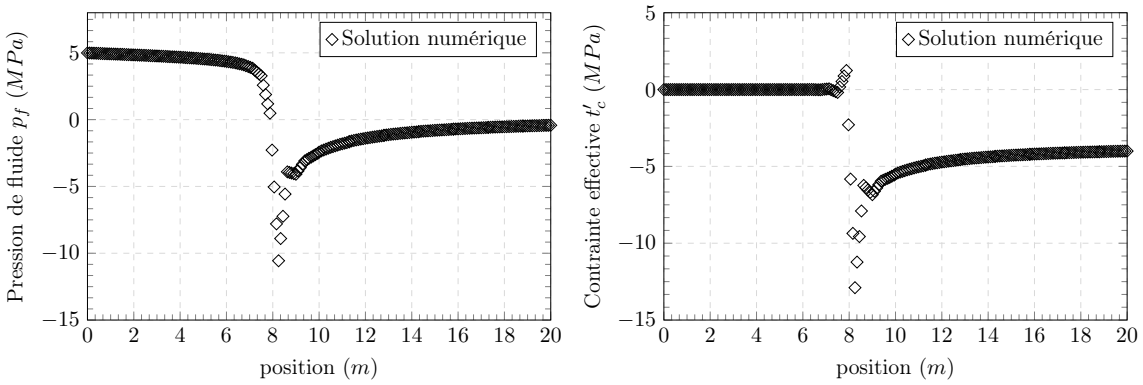


FIGURE 4.18 – *Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à* $t = 30s$.

Les profils d'évolution de la pression de fluide le long de la fracture, ainsi que celui de la contrainte cohésive effective sont représentés sur la Figure 4.18. Dès lors que les effets de dissipation de l'énergie sont exclusivement attribués aux effets visqueux pour ce régime de propagation, il est normal que la pression de fluide ne soit plus uniforme le long de la fracture. La décroissance du gradient est observée entre le point d'injection et la pointe de fissure. Cet aspect est une caractéristique fondamentale de ce régime. Concernant le profil de la contrainte cohésive effective, les différents régimes caractéristiques de la loi de Talon-Curnier sont identiques aux cas précédemment étudiés dans ce chapitre. Cependant, il est possible de remarquer une singularité marquée (*i.e.* forte contrainte négative) au niveau de la zone de contact. Cette partie est également visible sur le profil de pression. Les valeurs négatives mesurées dans cette zone peuvent être expliquées par l'incapacité du modèle HM-XFEM à gérer le choc de pression existant au niveau de la zone de transition entre la partie de la zone cohésive en contact et le massif non affecté par la fracturation. Ce choc ne possède pas de signification physique particulière, mais tend à être associé à une instabilité numérique. Cette instabilité est observée dans le cas du *near-K-regime* (2) pour lequel de faibles échanges avec la matrices avaient lieu (cf. section 4.5.1). Ici, alors que les échanges entre la fracture et massif sont inexistants (car $C_L = 0$), cette instabilité semble être fortement amplifiée et engendrer des valeurs de pression aberrantes. Dès lors que l'on s'éloigne de la zone cohésive, la contrainte cohésive effective tend vers la valeur de l'état de contrainte *in situ*, de même pour la pression de fluide qui rejoint la valeur de la pression de pore initiale nulle.

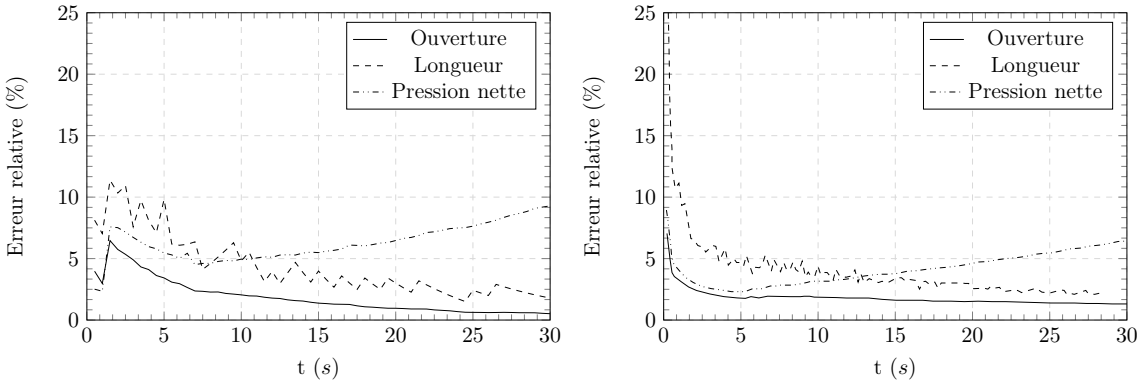


FIGURE 4.19 – *Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture, la longueur de la fracture et la pression nette au point d'injection : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite).*

Pour conclure cette section, l'erreur relative est représentée sur la Figure 4.19, pour le modèle HM-XFEM (à gauche) et pour le modèle FEM de Carrier et al. (à droite). Globalement, l'erreur relative pour les deux types de modélisation est similaire. Quelques oscillations

locales sont observées pour l'erreur en HM-XFEM. Cela est notamment lié à la discrétisation spatiale. Moyennant ces oscillations, l'erreur relative sur la longueur de la fracture semble être plus faible en HM-XFEM grâce à l'utilisation de la loi de Talon-Curnier.

4.5.4 Near-leak-off-viscosity dominated regime

Pour terminer la validation de ce modèle, nous nous intéressons désormais au cas du régime dominé par les effets visqueux auxquels sont combinés des échanges entre la fracture et la matrice solide. Il s'agit toujours d'un régime associé à la réactivation d'une fracture pré-existante mais cette fois-ci en tenant compte des échanges latéraux avec la matrice solide. De ce fait, comme dans le cas du *near-$\widetilde{K}$-regime*, afin de satisfaire les conditions de validité de la loi de Carter [37], il est impératif que la perméabilité intrinsèque du massif soit plus faible dans la direction horizontale afin de ne favoriser que les échanges latéraux. Pour ce faire, la perméabilité intrinsèque du massif dans la direction selon l'axe des abscisses est $K_x^{int} = 1 \times 10^{-16}\ m^2$ alors que dans la direction selon l'axe vertical, elle est imposée à $K_y^{int} = 5 \times 10^{-12}\ m^2$. Du fait de la forte viscosité du fluide $\mu = 1 \times 10^{-1}\ Pa.s$, il est nécessaire de prendre une perméabilité assez forte dans la direction verticale. Dans le cas contraire, les échanges seraient fortement limités. Ensuite, la valeur du coefficient d'échange est prise telle que $C_L = 1.6 \times 10^{-4}\ m.s^{1/2}$. Enfin, afin de permettre aux échanges d'avoir lieu, la valeur de la contrainte de confinement doit, pour le cas de ce régime, être élevée. Par conséquent $\sigma_0 = 7.2\ MPa$. À partir de là, la tenacité adimensionnelle est telle que $\mathscr{K} = 0.51$ et le coefficient d'échange adimensionnel sera $\mathscr{C} \in [0, 1.2]$ pour $t \in [0, 200]$. À partir de la Figure 4.6, et des conditions estimées par Hu et Garagash [114] (*i.e.* $\mathscr{K} < 1$ et $\mathscr{C} > 4$), il est possible d'affirmer que le régime dominant l'évolution de la fracture sera le *near-leak-off-viscosity dominated regime*. Ce régime est spécifié par *near-$\widetilde{M}$-regime* sur la Figure 4.6. Dans ce cas précis, la fracture va évoluer selon une trajectoire parallèle à la frontière *$M\widetilde{M}$-edge*. Néanmoins, la condition $\mathscr{C} > 4$ pour que le régime soit dominé par les échanges n'est pas entièrement satisfaite. La solution analytique utilisée pour valider cette simulation est celle du *leak-off-viscosity dominated regime* de Adachi et al. [4]. Pour les mêmes raisons exposées dans la section 4.5.3, le *back-stress effect* a été supprimé.

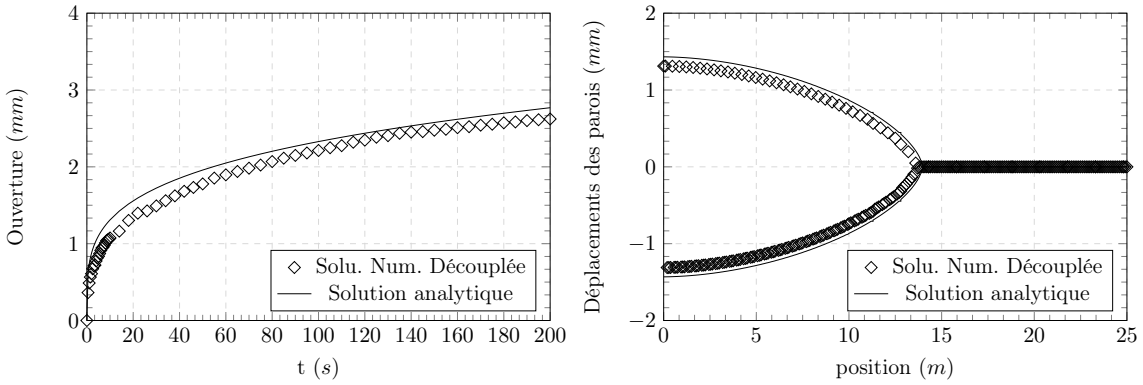


FIGURE 4.20 – *Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [4] (leak-off-viscosity dominated regime) : ouverture au point d'injection (gauche) et profil de la fracture à $t = 200s$ (droite).*

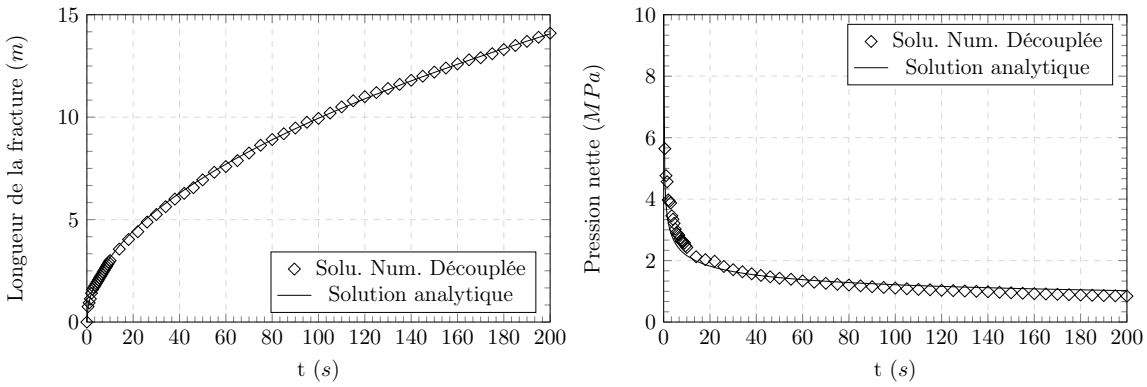


FIGURE 4.21 – *Comparaison des résultats numériques avec la solution asymptotique de [4] (leak-off-viscosity dominated regime) : longueur de la fracture (gauche) et profil de pression nette au point d'injection (droite).*

Les Figures 4.20 et 4.21 comparent la solution analytique de Adachi et al. [4] avec les résultats numériques obtenus avec le modèle HM-XFEM. Pour ce régime, des observations similaires à celles faites en section 4.5.2 peuvent être réitérées. D'une part, nous observons qu'en comparaison du *storage-viscosity dominated regime*, l'ouverture de la fracture est environ de 2.22 m pour le *M-regime* (cf. Figure 4.17 (gauche)), contre 1.78 m pour le *near-*$\widetilde{M}$*-regime* à $t = 30s$. Il en est de même pour la longueur de fracture. Pour le cas du *storage-viscosity dominated regime* $l = 9.3$ m alors qu'elle mesure $l = 5.44$ m pour le *near-leak-off-viscosity dominated regime*. Une fois encore cela s'explique par le fait que le volume de fluide à stocker dans la fracture est plus faible en comparaison de celui échangé avec la matrice poreuse. L'augmentation de la contrainte de confinement peut également être un facteur participant à la réduction de l'ouverture de la fracture. En ce qui concerne le profil de pression nette (cf. Figure 4.21 (droite)), nous remarquons que celle-ci est légèrement supérieure à celle mesurée pour le *storage-viscosity dominated regime* étant donné le plus faible volume de fracture dans le premier cas. Par exemple, elle vaut 1.69 MPa pour le *near-*$\widetilde{M}$*-regime*, alors qu'elle atteint 1.26 MPa pour le *M-regime* à $t = 30s$.

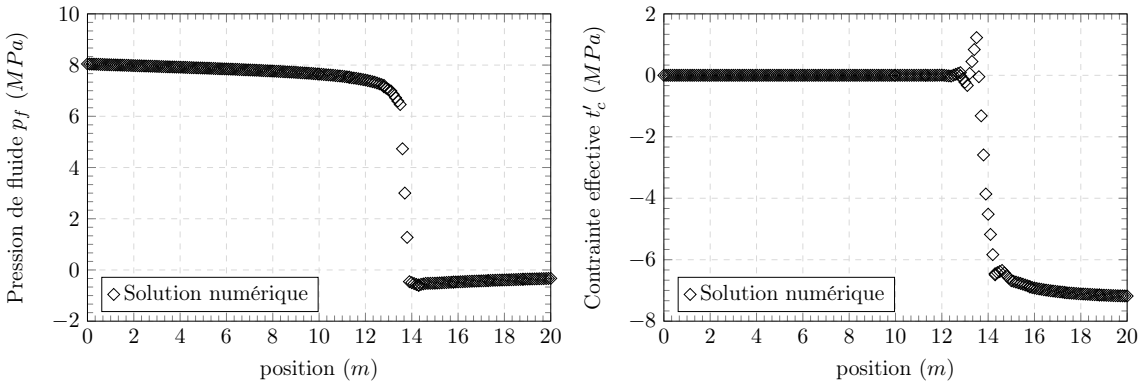


FIGURE 4.22 – *Représentation des profils de pression de fluide (gauche) et de la contrainte cohésive effective (droite) à* $t = 200s$.

Les profils de pression de fluide et de la contrainte cohésive effective sont indiqués sur la Figure 4.22 à $t = 200s$. Comme nous pouvons encore le remarquer, la pression de fluide en amont de la zone cohésive n'est pas uniforme étant donnée la dominance des effets visqueux comme mécanisme de dissipation de l'énergie. La zonation du profil de contrainte cohésive est identique aux différents cas étudiés précédemment. Ces expériences, impliquant différents régimes de propagation, ont montré que les caractéristiques de la zone cohésive sont invariantes quelque soit les mécanismes gouvernant l'évolution de la fracture. Enfin, nous notons

que la forte singularité (sur les profils de pression et de contrainte) observée dans la zone en contact a disparu dans ce cas, puisque les échanges de fluide avec la matrice poreuse ont permis d'accommoder le choc de pression.

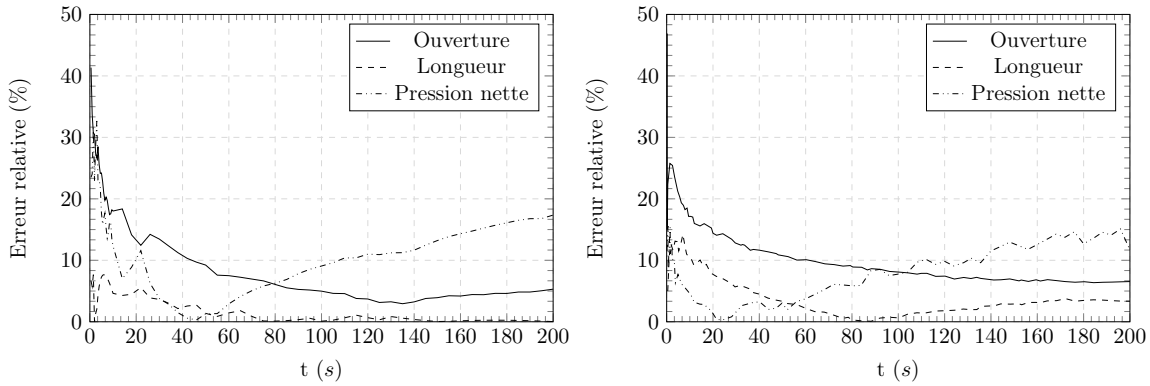


FIGURE 4.23 – *Représentation de l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour l'ouverture, la longueur de la fracture et la pression nette au point d'injection : modèle HM-XFEM (gauche) et modèle de Carrier et al. [36] (droite).*

Nous terminerons cette partie sur la comparaison de l'erreur relative pour le cas des modélisations avec HM-XFEM (cf. Figure 4.23 (gauche)) et pour le cas des modélisations impliquant les éléments d'interface développés par Carrier et al. (cf. Figure 4.23 (droite)). Comme il est possible de le remarquer, la correspondance entre la solution analytique et les résultats numériques est plutôt satisfaisante. Néanmoins, dans le cas de l'évolution de l'ouverture au cours du temps, ainsi que pour le profil de la fracture à $t = 200s$, nous remarquons que la solution analytique s'éloigne localement de la solution numérique (cf. Figure 4.20). Cela est remarquable également sur le profil d'erreur relative pour les deux types de modélisation. Cela s'explique par la nature de la solution analytique considérée. En effet nous avons montré précédemment que le régime contrôlant l'évolution de la fracture est le *near-leak-off-viscosity dominated regime*. Or la solution proposée par Adachi et al. [4] (cf. section 4.4.3.2) décrit le *leak-off-viscosity dominated regime*. Pour avoir une meilleure correspondance entre les solutions numérique et analytique, il aurait fallu avoir recours à la solution (*i.e.* estimation numérique de la solution intermédiaire entre le *M-regime* et le $\widetilde{M}$*-regime*) que propose Adachi et al. [4]. Néanmoins, le choix de comparer la solution analytique du $\widetilde{M}$*-regime* avec les résultats obtenus avec le modèle HM-XFEM reste une bonne approximation, puisque l'erreur relative pour l'ouverture est inférieure à 10% pour $t > 40s$. Pour finir, nous remarquerons que l'allure générale des courbes d'erreur pour les deux types de modèles sont très similaires, démontrant ainsi l'efficacité du modèle HM-XFEM.

4.6 SYNTHÈSE

La comparaison des résultats numériques avec les différentes solutions asymptotiques, décrivant les principaux régimes de propagation d'une fracture hydraulique, a permis de valider le modèle HM-XFEM. En particulier, nous avons pu constater un bon accord en terme de précision et de convergence en dépit d'un maillage relativement grossier (ce qui serait parfaitement inenvisageable dans le cas de modélisations FEM impliquant des éléments d'interface). Néanmoins, quelques imprecisions subsistent encore comme la présence d'un choc de pression associé à une pression négative dans la partie en contact de la zone cohésive ou encore une forte erreur relative mesurée pour les temps courts (quelque soit le régime considéré), du fait des dimensions de la zone cohésive proches de celles de la fracture. Dans le chapitre suivant, nous allons maintenant appliquer notre modèle au cas d'un milieu poreux multi-fracturé (fractures non connectantes et évoluant selon un chemin prédéfini)

afin d'étudier les effets de compétition entre ces fractures.

Nous donnons en Annexes B et C, deux exemples de validation intermédiaire qui consistaient à valider les fonctionnalités du modèle HM-XFEM au fur et à mesure de son développement. Ils ont été restitués officiellement dans la base de données de Code_Aster. Ces travaux de validation ont été réalisés en collaboration avec B. Paul (Thèse IFPEN). Les cas 2D ont été validés dans le cadre de cette thèse, et les cas 3D par Bertrand Paul dans le cadre de sa thèse.

5 Étude paramétrique du comportement d'un réseau de fractures non connectées

Sommaire

5.1 Introduction . . . 102
5.2 Géométrie du problème 2D et conditions aux limites . . . 104
5.3 Résultats des simulations numériques . . . 107
5.3.1 Cas de référence . . . 107
5.3.2 Étude de l'influence de la viscosité du fluide sur la dynamique des fractures . . . 111
5.3.3 Étude de l'influence du débit d'injection sur la dynamique des fractures . . . 124
5.3.4 Étude de l'influence de l'écartement sur la dynamique des fractures . . . 131
5.3.5 Synthèse des résultats . . . 139

Les simulations présentées dans le chapitre 4 de ce mémoire nous ont confirmé la validité du modèle HM-XFEM dans quatre configurations de propagation d'une fracture hydraulique. Ce faisant, il est intéressant d'appliquer ce modèle au cas du milieu poreux multi-fracturé et d'étudier les interactions entre les différentes fractures du réseau lorsque certains paramètres d'intérêt varient. L'étude portera sur un réseau de fractures non connectées entre elles et évoluant sur des chemins déjà existant dans la matrice rocheuse.

5.1 Introduction

Dans la nature, la fracturation hydraulique induite par la circulation de fluides naturels (*e.g.* magma [60], dioxyde de carbone, fluides mantelliques etc. [111]) est responsable de la réactivation et/ou de la création de fractures, pouvant conduire à la formation de réseaux de fractures complexes et interconnectées entre elles [47, 189, 22]. En règle générale, les fractures constituent des chemins préférentiels pour la circulation des fluides, du fait de leur conductivité importante. Néanmoins, compte tenu de la répartition inégale de l'ouverture de certaines fractures dans un réseau (due aux multiples interactions qu'elles peuvent entretenir, aux variations de l'état de contrainte *in situ* etc.), il est possible d'observer des variations de l'ouverture (soit localement au sein d'une même fracture, soit affectant différentes fractures du réseau) modifiant ainsi la répartition des écoulements dans la matrice rocheuse [228]. De manière équivalente, les jonctions entre fractures, ainsi que leur proximité auront une influence sur la répartition des écoulements de fluide au sein du réseau [227]. La topologie des fractures peut également avoir un impact, comme par exemple la présence de coudes. Ces changements dans la forme des fractures peuvent générer une augmentation locale de la pression de fluide et participer à la création de nouvelles fractures [224]. Ce sont ces mécanismes de compétition inter-fractures qui contrôlent la mise en place des chemins préférentiels au sein de l'encaissant et donc la localisation des dépôts.

L'activité anthropique est également responsable de la genèse de nombreuses fractures dans le sous-sol, notamment dans le cadre de l'exploitation des gisements d'hydrocarbures (pétrole, gaz). Pour ce faire, une des techniques les plus couramment employées dans l'industrie pétrolière est la fracturation hydraulique. Cette technique, largement utilisée pour augmenter la productivité et la rentabilité des réservoirs conventionnels, semble cependant faire face à de nombreux obstacles dans le cas des réservoirs non conventionnels, notamment dus à leur très faible perméabilité. Alors que la rentabilité économique des réservoirs conventionnels commence peu à peu à décroître du fait de leur intense exploitation, les réservoirs non conventionnels (*e.g.* de type *shale*) sont une source potentielle de ressources disponibles en très grande quantité. Le procédé de fracturation hydraulique consiste à injecter un fluide à très haute pression le long d'un puits horizontal. Cela entraine l'apparition de multiples fractures perpendiculaires à l'axe de ce puits [115, 78, 125], qui se développent dans la direction où la contrainte *in situ* est majeure. En effet, Soliman et al. [195] ont montré que des fractures orientées de cette manière augmentaient considérablement la rentabilité et la productivité d'extraction du réservoir. Au fur et à mesure de leur propagation, ces fractures néo-formées vont établir des connections avec les fractures déjà existantes dans le réservoir et ainsi permettre la migration des hydrocarbures vers le puits d'injection [46]. Ces effets d'interaction entre les fractures hydrauliques néo-formées (*i.e.* une propagation basée sur le modèle KGD [124]) et le réseau de fractures pré-existantes ont notamment été étudiés avec XFEM par [58, 59].

Il est possible de distinguer deux méthodes de stimulation d'un réservoir non conventionnel. La première consiste à injecter séquentiellement le fluide en un point donné du puits pour un instant donné [168, 183]. Le but de cette manœuvre est de générer des interactions entre la fracture en croissance avec d'autres fractures hydrauliques préalablement existantes. La seconde, plus largement utilisée dans l'industrie, consiste à injecter simultanément en plusieurs points du puits le fluide d'injection [146]. Par exemple, Lecampion et Desroches [130] ont étudié la propagation simultanée de fractures se développant radialement autour d'un puits d'injection horizontal. Ces auteurs, afin d'expliquer la croissance préférentielle de certaines fractures, se sont focalisés sur les effets induits par la contrainte élastique générée par l'extension des différentes fractures sur la répartition du fluide injecté dans les différentes fractures. Dans [33], une approche basée sur la puissance nécessaire pour propager simultanément plusieurs fractures hydrauliques est proposée. Grâce à son modèle analytique, prenant notamment en compte l'écartement des fractures, Bunger montre que dans le cas des géomé-

tries *penny-shape* [3] et PKN [177, 167], dominées par le *storage-viscosity dominated regime*, un certain nombre de fractures nécessitera moins d'énergie pour se propager (avant qu'elles commencent à interagir entre elles), alors qu'il se produira l'effet inverse pour le cas d'une seule fracture. D'autres auteurs comme [101, 225, 226] ont également montré l'importance que peut avoir la dissipation de l'énergie associée aux effets visqueux, en tenant compte du fort couplage hydro-mécanique qui existe lors de la propagation du réseau de fractures.

Il existe principalement deux modes de compétition entre les fractures dans le cadre du processus de stimulation simultanée d'un réservoir. Le premier est lié au débit d'injection. En effet comme le rappellent Lecampion et Desroches [130], du fait de l'injection à débit constant (en tête de puits) et des variations de perméabilité entre fractures, l'écoulement est inégalement réparti (associé à une chute locale de la pression au niveau de la zone de transition puits-fractures) dans chacune des fractures orientées transversalement à l'axe du puits horizontal. Au fur et à mesure que la fracture principale se propage, les débits diminuent dans les fractures secondaires qui finissent par se stabiliser voire se refermer. Ce phénomène (communément appelé perforation) implique donc que les fractures n'interagissent pas directement entre elles. En effet, il s'agit plutôt d'une compétition indirecte favorisant (ou pénalisant) une partie des fractures. Le second mode de compétition à prendre en compte dans l'évolution du réseau de fractures est l'impact que peut avoir le changement de l'état de contrainte au voisinage de chacune d'entre elles. Comme le rappelle Liu et al. [138], l'augmentation de l'ouverture des différentes fractures transversales va induire une réorientation locale de l'état de contrainte *in situ*, associée au développement d'un état de contrainte compressif très important dans les zones inter-fractures : il s'agit du *stress-shadowing effect* [86]. De nombreuses contributions sont associées à la compréhension de ce phénomène. En particulier, Cheng [44] a montré numériquement, au moyen de la méthode des éléments frontières, que l'espacement entre les fractures était un facteur déterminant dans l'expression du *stress-shadowing effect*. Cet effet peut avoir pour conséquence de réduire localement l'ouverture de certaines fractures du réseau, voire de les refermer totalement, conduisant à une diminution de la rentabilité du réservoir. Afin de prévenir une partie de ces conséquences néfastes associées au *stress-shadowing effect*, certains auteurs comme [196, 183, 184] ont étudié les conditions d'optimalité sur l'espacement des fractures à créer le long du puits. Taghichian et al. [203] ont également développé un modèle numérique capable d'évaluer la taille de la zone pour laquelle le *stress-shadowing effect* se manifeste. En particulier, ils ont montré que le *stress-shadowing effect* sera fortement dépendant du degré d'anisotropie de l'état de contrainte *in situ*, du coefficient de Poisson, de la pression dans les fractures et de l'écartement des fractures. Néanmoins cette étude a été menée pour des fractures ne se propageant pas.

Dans ce chapitre, nous étudierons l'influence de certains paramètres (*i.e.* viscosité du fluide injecté, débit d'injection et écartement des fractures) sur la propagation de fractures hydrauliques stimulées simultanément. Nous chercherons en effet à montrer l'évolution et l'importance du *stress-shadowing effect* pour chacun des cas étudiés. Néanmoins, nous ne cherchons pas à étudier l'influence de la perforation sur le comportement du réseau puisqu'un débit constant et identique est imposé pour chaque fracture. Enfin, nous ne prétendons pas simuler dans cette étude le comportement d'un réservoir non conventionnel, ni celui d'un gisement fracturé, en raison des valeurs intermédiaires de perméabilité considérées. Nous cherchons simplement à illustrer les capacités du modèle HM-XFEM lorsque plusieurs fractures se propagent simultanément, pour différents régimes de propagation (par exemple avec ou sans échange entre les fractures et la matrice poreuse), et cherchons à mieux comprendre l'influence que peuvent avoir ces effets de compétition sur la répartition des écoulements au sein de la matrice poreuse.

5.2 Géométrie du problème 2D et conditions aux limites

Nous considérons un domaine de dimension $60 \times 60\ m$ entièrement traversé par trois fractures planes, pré-existantes et non connectées entre elles. La géométrie de ces fractures est représentée par une unique *level-set* (pour les raisons énoncées dans le chapitre 4). Comme indiqué sur la Figure 5.1, la première fracture (P1) coupe le domaine en $y = 4.75\ m$, la seconde (P2) en $y = 0$ et la troisième (P3) en $y = -4.75\ m$. De plus, la fracture centrale (P2) traverse une couche d'épaisseur $e = 3.7\ m$ (rectangle orange sur la Figure 5.1) caractérisée par une perméabilité plus faible que celle du reste du domaine. Au niveau des points (0,0), (0, 4.75) et (0, -4.75) un fluide incompressible est injecté avec un débit constant Q_0.

Les déplacements sont bloqués dans la direction horizontale, au niveau de la face latérale gauche du massif. La pression de pore est supposée nulle au niveau des faces inférieure et supérieure, ainsi que sur la face latérale droite. Afin de prendre en compte l'influence des contraintes *in situ*, une pression de confinement constante et identique pour tous les cas traités (cf. sections 5.3.1 à 5.3.4) est fixée à $\sigma_0 = 5\ MPa$. Cette valeur a été choisie, d'après les résultats obtenus dans le cas du *near-leak-off-toughness dominated regime* (cf. section 4.5.2), pour s'assurer que des échanges fractures/massif puissent se produire. Enfin, l'état initial est caractérisé par des pressions de pore et de fluide nulles, et la contrainte verticale effective est fixée à σ_0.

Nous indiquons également dans le Tableau 5.1 les valeurs des différents paramètres matériau utilisés.

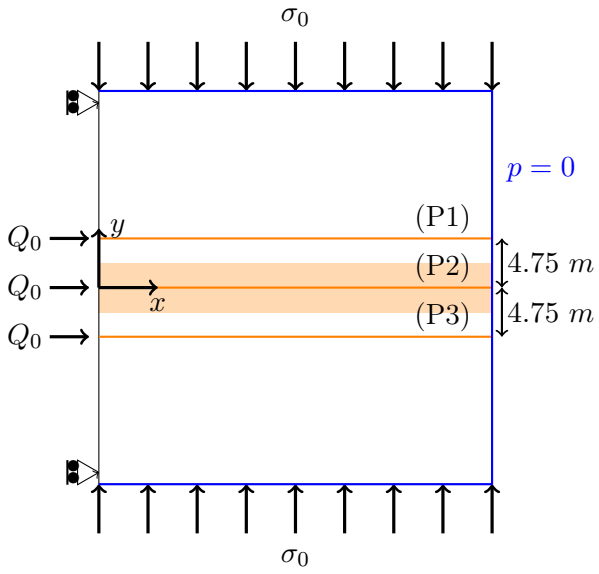


Figure 5.1 – *Représentation du domaine d'étude et conditions aux limites associées.*

TABLE 5.1 – *Paramètres matériaux du massif et de la zone cohésive.*

Viscosité dynamique	μ	dépend du régime (en $Pa.s$)
Compressibilité du liquide	$\frac{1}{K_w}$	0
Masse volumique	ρ	1 $kg.m^{-3}$
Module de Young	E	17 GPa
Coeff. de Poisson	ν	0.2
Coeff. de Biot	b	0.75
Perméabilité (massif)	K_x^{int}	1×10^{-16} m^2
	K_y^{int}	5×10^{-15} m^2
Perméabilité (couche)	K_x^{int}	1×10^{-16} m^2
	K_y^{int}	5×10^{-16} m^2
Contrainte critique	σ_c	1.25 MPa
Énergie cohésive	G_c	120 Pa.m
Coeff. d'augmentation	r	100 $Pa.m^{-1}$
Porosité	ϕ	0.2
Flux d'injection	Q_0	dépend du régime (en $m^2.s^{-1}$)

Afin de caractériser les différents régimes de propagation, pour chaque cas étudié dans la suite de ce chapitre, la donnée du coefficient d'échange C_L est primordiale. Pour chacune des trois fractures, ce coefficient a été recalculé, en utilisant les valeurs numériques des multiplicateurs de Lagrange q_1 et q_2, par régression linéaire grâce à la loi de Carter (cf. équation (4.6)) [37]. Les valeurs de C_L sont répertoriées dans le Tableau 5.2. Comme Carrier et al. [36] l'ont suggéré et comme nous l'avons redémontré dans le chapitre 4, pour rester dans le cadre de validité de la loi de Carter [37], les échanges entre les fractures et le milieu poreux doivent être orientés dans la direction verticale au niveau de chacune des parois des fractures. Pour ce faire, la perméabilité du massif, ainsi que celle de la couche centrale, seront donc plus importantes verticalement. Les différentes valeurs de perméabilité horizontale et verticale, pour le massif et la couche centrale, sont indiquées dans le Tableau 5.1.

Le choix d'introduire cette hétérogénéité au centre du massif repose sur la volonté d'explorer les interactions que peuvent entretenir différentes fractures dont la propagation est gouvernée par des mécanismes de stockage différents au sein du même réseau. Globalement, mais cela peut varier en fonction des cas traités, la fracture centrale (P2) aura tendance à stocker préférentiellement le fluide injecté, alors que les fractures latérales (P1) et (P3) seront plus sujettes à échanger le fluide injecté avec la matrice poreuse.

À ce stade de l'étude, il est fondamental de préciser que les coefficients adimensionnels $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C}$ sont utilisés pour caractériser le régime de propagation des trois fractures comme si chacune d'entre elles était isolée. En effet, à la lumière des différentes contributions disponibles dans la littérature, il semblerait qu'il existe à l'heure actuelle peu de formulations spécifiques de ces coefficients tenant compte des interactions entre plusieurs fractures. Bunger [33] propose d'introduire des coefficients adimensionnels, fonctions de l'écartement inter-fractures, dans sa démarche d'estimer la puissance d'injection nécessaire pour permettre la propagation simultanée de plusieurs fractures. Toutefois, ceux-ci sont uniquement valides aux temps courts (*i.e.* lorsque les interactions entre les fractures viennent juste de commencer), et ne tiennent pas compte de l'influence des fractures extrêmes du réseau, c'est-à-dire (P1) et (P3) dans notre cas. Les valeurs que nous fournirons dans la suite de cette étude sont à prendre avec précaution, et sont données uniquement afin d'avoir une estimation du régime de propagation des différentes fractures et une estimation de l'impact de ces effets de compétition sur la propagation elle-même (par rapport au cas d'une fracture isolée).

En considérant la définition des coefficients adimensionnels $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C}$ (cf. équation (4.2)

[66]), il est possible de remarquer que les paramètres facilement modulables en conditions réelles et qui contrôlent le régime de propagation d'une fracture sont le débit d'injection et la viscosité du fluide injecté. Un autre paramètre d'intérêt, (bien qu'absent de la définition des coefficients $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C}$) peut être l'écartement entre les fractures du réseau. Intuitivement, il est possible d'imaginer que des fractures assez rapprochées auront une influence plus importante l'une sur l'autre, notamment sur l'ouverture et sur l'intensité des échanges avec la matrice solide. Nous chercherons donc à étudier ce point en éloignant progressivement les fractures latérales (P1) et (P3) de la fracture centrale (P2). Cet aspect a notamment été étudié par Singh et Miskimins [194]. Les valeurs des coefficients adimensionnels $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{K}_i$ ($i \in [\![1,3]\!]$) sont répertoriées dans le Tableau 5.3 pour chaque cas étudié.

TABLE 5.2 – *Valeurs du coefficient C_L pour chaque fracture et pour chaque paramètre d'évolution.*

Paramètre	C_L $(m.s^{1/2})$ pour (P1) et (P3)	C_L $(m.s^{1/2})$ pour (P2)
$\mu = 1 \times 10^{-1}$	2.28×10^{-6}	1.65×10^{-6}
$\mu = 1 \times 10^{-2}$	1.02×10^{-5}	3.64×10^{-6}
$\mu = 1 \times 10^{-3}$	3.84×10^{-5}	1.74×10^{-6}
$\mu = 1 \times 10^{-4}$	2×10^{-4}	3.6×10^{-5}
$Q_0 = 1 \times 10^{-3}$	3.1×10^{-4}	3.97×10^{-5}
$Q_0 = 2 \times 10^{-3}$	3.25×10^{-4}	4.85×10^{-5}
$H = 9.5$	4.55×10^{-4}	3.7×10^{-5}
$H = 14.25$	4.4×10^{-4}	5.5×10^{-5}

TABLE 5.3 – *Valeurs des coefficients adimensionnels $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{K}_i$ ($i \in [\![1,3]\!]$) pour chaque fracture et pour chaque paramètre d'évolution.*

Paramètre	$\mathscr{C}_{1,3}$	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{K}_{1,3}$	$\mathscr{K}_2$
$\mu = 1 \times 10^{-1}$	[0.007, 0.13]	[0.005, 0.009]	0.51	0.51
$\mu = 1 \times 10^{-2}$	[0.046, 0.089]	[0.016, 0.032]	0.91	0.91
$\mu = 1 \times 10^{-3}$	[0.26, 0.49]	[0.11, 0.22]	1.62	1.62
$\mu = 1 \times 10^{-4}$	[1.98, 3.78]	[0.35, 0.68]	2.89	2.89
$Q_0 = 1 \times 10^{-3}$	[2.17, 3.68]	[0.27, 0.47]	2.43	2.43
$Q_0 = 2 \times 10^{-3}$	[1.6, 2.4]	[0.24, 0.36]	2.04	2.04
$H = 9.5$	[4.5, 8.59]	[0.36, 0.7]	2.89	2.89
$H = 14.25$	[4.35, 8.33]	[0.54, 1.04]	2.89	2.89

Bien évidemment, en raison de la symétrie de la géométrie, les fractures latérales sont supposées avoir le même comportement de propagation. Cependant, nous aurions pu réaliser les simulations sur un quart de domaine (*i.e.* moitié du domaine représenté sur la Figure 5.1). Toutefois, nous conserverons la configuration présentée sur la Figure 5.1 afin de mettre en évidence les éventuels problèmes de stabilité du modèle (*e.g.* perte de symétrie etc.).

Concernant la discrétisation par éléments finis, le maillage utilisé est composé de 101×180 éléments bilinéaires quadrangulaires. Nous avons choisi de considérer un maillage régulier et moyennement raffiné, puisque les résultats des simulations de validation ont montré un très bon accord avec les différentes solutions analytiques.

Remarque 5.1 *Dans la suite de ce chapitre, nous ne présenterons pas les profils de la contrainte cohésive effective. Comme nous avons pu le montrer dans le chapitre précédent, et quelque soit le cas traité, le comportement de la zone cohésive est indépendant du régime de propagation considéré. En outre, les quatre régimes de la loi de Talon-Curnier (cf. Figure 3.4) sont inchangés (sauf le cas pour lequel les parois de la fracture sont en contact, car les limites de ce dernier dépendent de l'état de contrainte in situ). Nous présenterons à la place*

*les profils de pression de fluide qui refl*ètent *mieux les interactions éventuelles entre les fractures.*

Remarque 5.2 *La convention des contraintes compressives négatives est adoptée dans la suite de ce chapitre.*

5.3 Résultats des simulations numériques

5.3.1 Cas de référence

Le cas présenté dans cette section servira de référence aux différents cas étudiés des sections 5.3.2 à 5.3.4. Au niveau des Figures 5.8, 5.27 et 5.36, ce cas est repéré par le label "[ref.]".

Pour les trois fractures (P1) à (P3), la viscosité du fluide injecté est $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$ et le débit d'injection est fixé à $Q_0 = 5 \times 10^{-4}\ m^2.s^{-1}$. Pour la fracture centrale (P2), le coefficient d'échange est $C_L = 3.6 \times 10^{-5} m.s^{1/2}$ et pour les fractures latérales (P1) et (P3) $C_L = 2 \times 10^{-4} m.s^{1/2}$. Pour les fractures (P1) et (P3), la tenacité adimensionnelle est $\mathscr{K}_{1,3}^{ref} = 2.89$ et le coefficient d'échange adimensionnel est $\mathscr{C}_{1,3}^{ref} \in [1.98, 3.78]$. Cependant pour la fracture centrale (P2), si le coefficient $\mathscr{K}_2^{ref}$ est inchangé, le coefficient d'échange adimensionnel est désormais $\mathscr{C}_2^{ref} \in [0.35, 0.68]$. En reportant ces gammes de valeurs dans le diagramme $(\mathscr{K}, \mathscr{C})$ (Figure 5.8), nous supposons que la fracture centrale (P2) évolue dans le *near-storage-toughness dominated regime* alors que les fractures latérales (P1) et (P3) sont gouvernées par le *near-leak-off-toughness dominated regime.*

Sur les Figures 5.2 et 5.3, l'ouverture normale ainsi que l'évolution de la pression de fluide pour chaque fracture sont respectivement tracées pour les temps $t_1 = 15s$ et $t = 50s$.

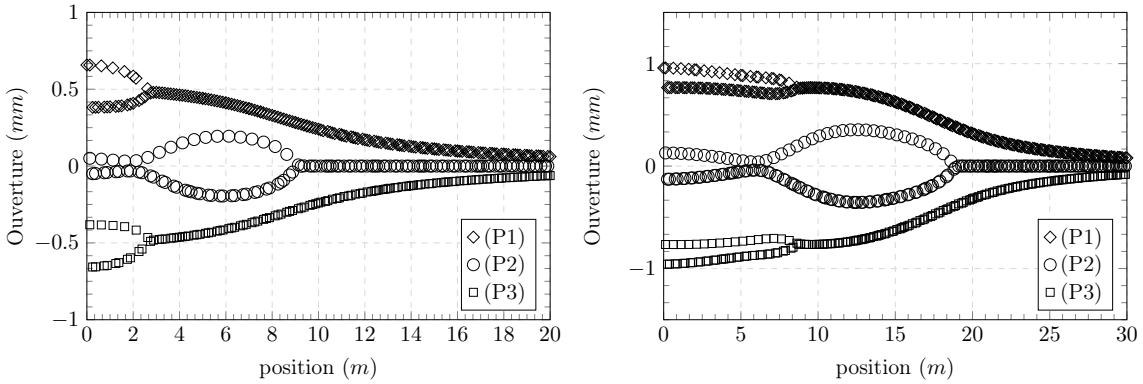


Figure 5.2 – *Profils des trois fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence.*

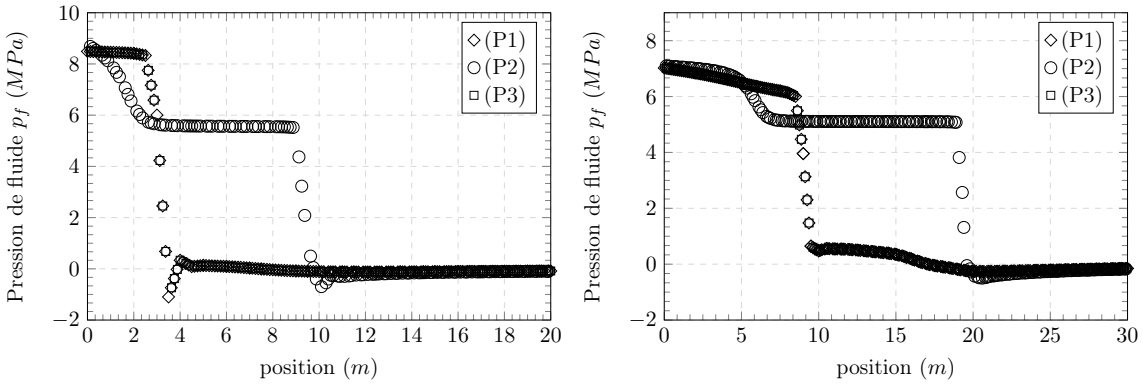


FIGURE 5.3 – *Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite) : cas de référence.*

À $t = 15s$ (cf. Figure 5.2 (gauche)), nous remarquons que l'extension des fractures (P1) et (P3) est plus faible en comparaison de celle de (P2). Comme nous avons déjà pu le mentionner, deux régimes de stockage distincts sont impliqués dans la propagation des différentes fractures. En effet, dans le cas du *near-leak-off-toughness dominated regime* (*i.e.* (P1) et (P3)), la longueur des deux fractures est réduite du fait des échanges latéraux majeurs avec la matrice poreuse. Les échanges de fluide sont associés à un minimum de volume créé au cours de la propagation. Nous confirmons cet argument grâce à la Figure 5.5 montrant une large bande de diffusion verticale au niveau des parois supérieure et inférieure des fractures (P1) et (P3) respectivement, et ce orientées vers le massif. Du fait de la faible perméabilité dans la direction horizontale, les échanges ont lieu verticalement entre le point d'injection et les pointes des fractures (P1) et (P3) ($x \in [0, 2.4]$).

D'autre part, pour la fracture centrale (P2) à $t = 15s$, la Figure 5.3 (gauche) montre une forte diminution de la pression de fluide dans la zone proche du point d'injection. De plus, nous avons pu vérifier dans la section 4.5.1, que le *near-storage-toughness dominated regime* est normalement caractérisé par un profil de pression de fluide uniforme dans la fracture. Ainsi, ce gradient de pression de fluide suggère que la réduction locale de l'ouverture de (P2), due à un changement local de l'état de contrainte (zones en jaune entre les fractures (P1) et (P3) observées sur la Figure 5.6 (gauche)), favorise localement les effets de dissipation visqueux, et donc les pertes de charge.

Au contraire, pour $x > 2.4$ m, l'ouverture de (P2) est plus importante et le profil de pression de fluide est uniforme jusqu'en pointe de fracture. Étant donné que (P2) va stocker préférentiellement le fluide injecté, contrairement aux deux fractures latérales, celle-ci va avoir tendance à se propager davantage que les deux autres. Cette rétention de fluide au sein de (P2) est compensée par la fracturation. Cependant, pour les fractures (P1) et (P3), la pression de fluide est uniforme. Cet effet est induit par une ouverture suffisante et une faible action de la fracture centrale sur (P1) et (P3). Le mécanisme de dissipation de l'énergie associé à la tenacité du matériau semble dominer pour les fractures latérales.

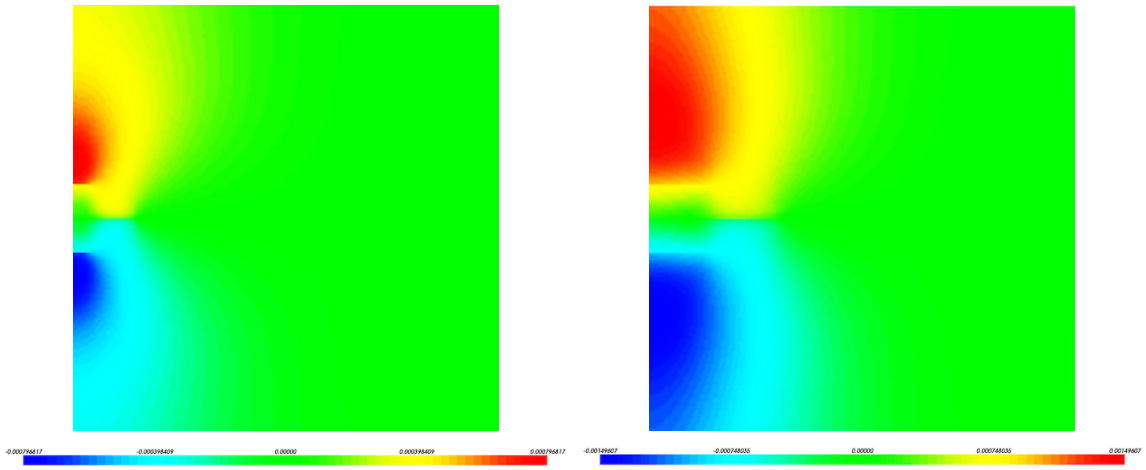


FIGURE 5.4 – *Cartes d'iso-valeurs du déplacements relatif pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite) : cas de référence.*

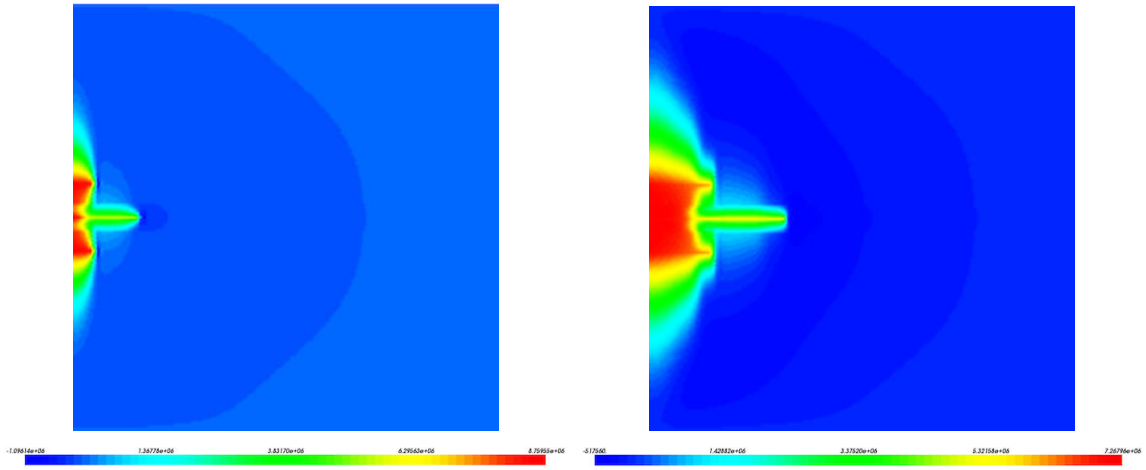


FIGURE 5.5 – *Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite) : cas de référence.*

Pour des temps d'évolution plus longs, à $t_2 = 50s$, (P1) et (P3) poursuivent leur propagation, mais leur extension est réduite en comparaison de (P2). Pour $x \in [0, 5]$ (cf. Figure 5.2 (droite)), le fluide est préférentiellement confiné au sein de (P2). Cela induit localement une réouverture de (P2), ainsi que la ré-uniformisation du profil de pression de fluide pour (P2) dû à un volume de stockage suffisant. La refermeture des fractures latérales induit également une perturbation du profil de pression de fluide le long des fractures (P1) et (P3). De plus, comme le montre la carte d'iso-valeurs de pression de pore (Figure 5.5 (droite)), celle-ci est maximale dans la zone entourée par (P1) et (P3) pour $x \in [0, 5]$. En ce qui concerne la contrainte effective verticale (cf. Figure 5.6 (droite)), cette zone semble correspondre à une évolution du comportement du massif en traction. Bien que nous soyons en domaine compressif, l'augmentation de la pression de pore entraine une diminution de la contrainte effective verticale en valeur absolue, correspondant à une variation en traction de ce champ. Du fait des fuites observées au niveau de chacune des parois des fractures latérales (P1) et (P3), il va donc se produire un gonflement du milieu poreux dans cette zone, ce qui explique la diminution de l'ouverture à la fois pour les fractures latérales (P1) et (P3), mais également pour la fracture centrale (P2). Dans cette zone, la compétition entre les trois fractures est prépondérante. Cela est en effet observé sur la Figure 5.4 (droite) montrant une zone de déplacement verticaux proches de zéro (*i.e.* en vert sur cette figure) jusqu'à ce que les pointes des fractures (P1) et (P3) soient dépassées. Cette rude compétition entre les trois fractures peut être associée au *stress-shadowing effect* décrit par [86, 44, 216],

dont nous apporterons quelques precisions dans sa définition à la fin de cette section. Cet effet est également observé à $t_1 = 15s$ pour $x \in [0, 2.4]$ mais commence seulement à se manifester du fait de la faible extension des trois fractures et de la faible avancée du front de pression de pore. D'autre part, les déplacements mesurés au-dessus et en-dessous de (P1) et (P3) respectivement sont symétriques par rapport à l'axe horizontal x et sont non nuls étant donné le retour à l'état de contrainte *in situ* de la contrainte effective verticale.

Pour $x \in]5, 8]$, à proximité des pointes des fractures (P1) et (P3) comme le suggère la Figure 5.7 (droite), les flux verticaux semblent être maximaux, et ce pour chacune des parois des deux fractures latérales. Par conséquent, (P2) est partiellement fermée dans cette zone (cf. Figure 5.2 (droite)). Du fait de cette compétition locale, la pression de fluide décroît fortement au niveau de cette zone d'étranglement, suggérant que la circulation de fluide est partiellement réduite à cause de la faible ouverture de la fracture (P2). Ensuite, pour $x \in]7, 19]$ l'influence que peuvent avoir (P1) et (P3) sur (P2) disparaît et l'ouverture de (P2) augmente et est symétrique par rapport à l'axe horizontal x. La pression de fluide mesurée le long de cette zone est alors uniforme jusqu'à la pointe, au delà de laquelle la pression subit une brusque décroissance pour atteindre la valeur de la pression de pore initiale.

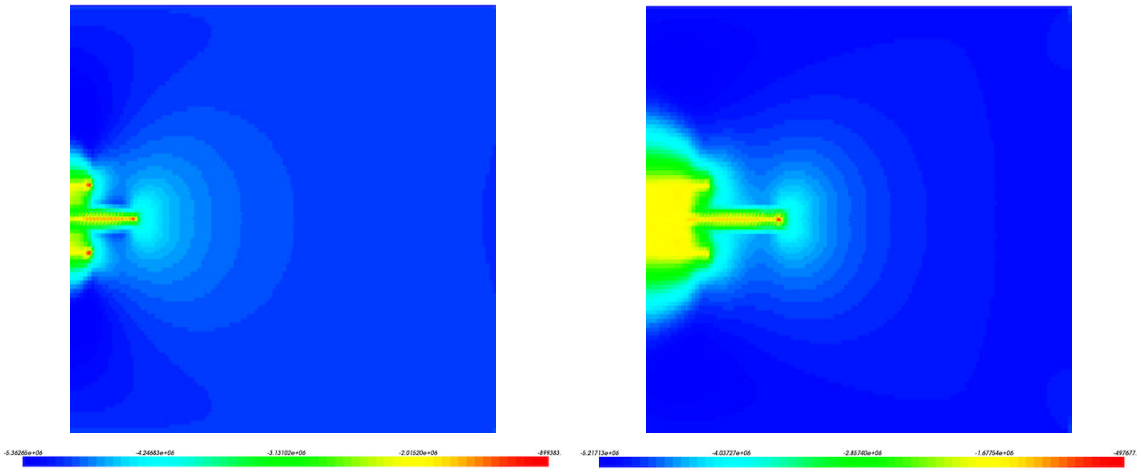


FIGURE 5.6 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ Pa.s à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence.*

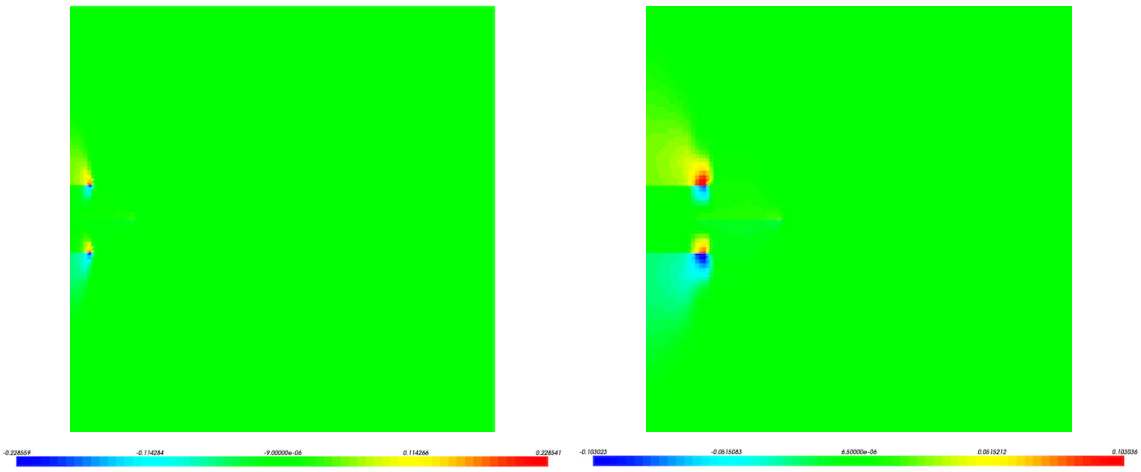


FIGURE 5.7 – *Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ Pa.s à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite) : cas de référence.*

Pour finir, les cartes d'iso-valeurs des flux normaux sont données par la Figure 5.7. Premièrement, il est possible de remarquer que quelque soit l'instant considéré, les flux sont uniquement localisés au niveau des parois supérieure de (P1) et inférieure de (P3). Ensuite, on remarque que ceux-ci sont maximaux près des pointes de ces deux fractures, puisque la compétition entre les fractures semble s'atténuer. Au contraire, dans la zone de *stress-shadowing effect* ($y \in [-4.75, 4.75]$ et $x \in [0, 5]$) les échanges localisés sur les parois inférieure de (P1) et supérieure de (P3) sont rendus impossibles. Deuxièmement, d'un point de vue pratique, cet exemple confirme l'intérêt d'introduire le degré de liberté enrichi d_i dans l'expression de l'approximation de la pression de pore du massif p (cf. équation (3.48)) . Bien que la condition de continuité de la pression $p = p_f$ est forcée au niveau de chacune des *level-sets* normales, nous sommes effectivement en mesure de capter un gradient de pression de pore discontinu d'une paroi à l'autre pour chacune des trois fractures.

À partir de ce cas de référence, nous pouvons apporter une nouvelle interprétation du *stress-shadowing effect* lorsque une (ou plusieurs) fracture(s) est (sont) sujette(s) à des échanges de fluide avec la matrice. Dans la littérature, Fisher et al. [86] ont montré, dans le cas des réservoirs non conventionnels (donc caractérisés par une très faible perméabilité), que le *stress-shadowing effect* se manifestait par une zone de contrainte en forte compression. Ici, nous avons pu remarquer que dans le cas de deux fractures (*i.e.* fractures (P1) et (P3)) évoluant dans le *leak-off dominated regime* et entourant une fracture évoluant dans le *storage dominated regime*, la zone de *stress-shadowing effect* sera caractérisée par une variation en traction de la contrainte verticale (du fait de l'augmentation de la pression de pore, induisant un gonflement du milieu poreux environnant).

5.3.2 Étude de l'influence de la viscosité du fluide sur la dynamique des fractures

5.3.2.1 Diagramme d'évolution du régime de propagation des fractures

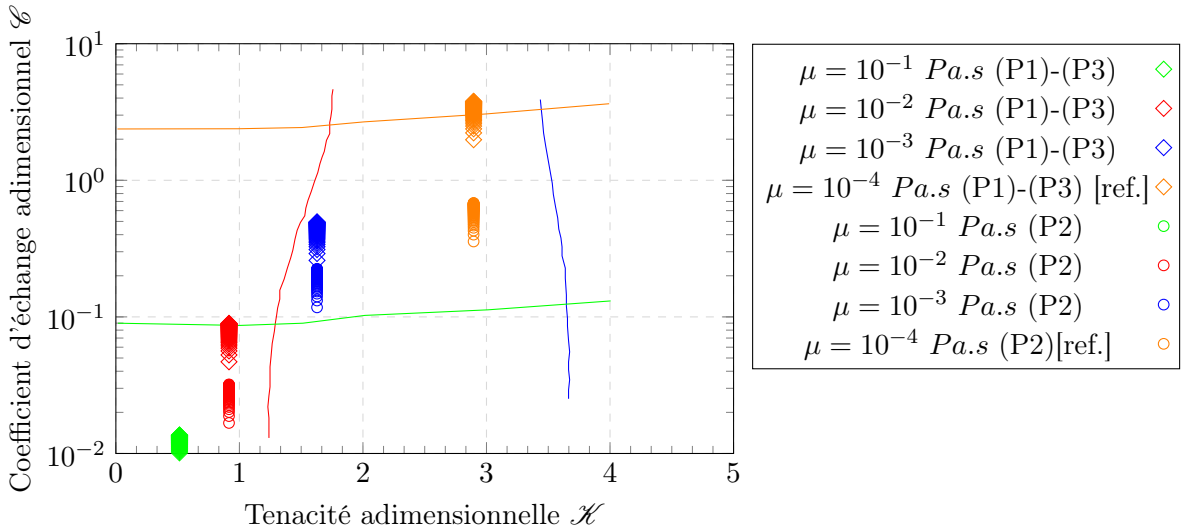


FIGURE 5.8 – *Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) - Trajectoires d'évolution des 3 fractures pour différentes valeurs de la viscosité du fluide injecté.*

Nous présentons sur la Figure 5.8, les trajectoires d'évolution des fractures (P1), (P2) et (P3) dans le diagramme $(\mathscr{K}, \mathscr{C})$ [114] pour différentes valeurs de viscosité du fluide d'injection entre $t = 0s$ et $t = 50s$.

Dans un premier temps nous remarquerons, que pour de fortes valeurs de viscosité (*i.e.* $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ et $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$), les trajectoires d'évolution seront localisées dans la

zone du *M-corner*. Cette zone est caractérisée par $\mathscr{K} < 1$ et $\mathscr{C} < 0.1$. Pour ces deux gammes de viscosité, les fractures (P1), (P2) et (P3) vont donc se propager dans le *storage-viscosity dominated regime*. Pour ces cas (voir sections 5.3.2.2 et 5.3.2.3) la dissipation d'énergie au cours de la propagation sera uniquement attribuée aux effets visqueux du fluide injecté. D'autre part, la majorité du fluide sera stockée dans les fractures.

En diminuant progressivement la viscosité du fluide injecté (*i.e.* $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ et $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$), nous voyons que les trajectoires d'évolution des fractures vont se déplacer en direction des $\widetilde{M}M$*-edge* et $K\widetilde{K}$*-edge* respectivement. Cette évolution semble logique, étant donné que la tenacité adimensionnelle $\mathscr{K}$ est inversement proportionnelle à la viscosité du fluide. De même, nous observerons un départ de la *MK-edge* vers la $\widetilde{M}\widetilde{K}$*-edge*. Néanmoins, contrairement au cas des fortes valeurs de μ, en particulier pour le cas de référence (*i.e.* $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$), le comportement, lié au stockage du fluide, des fractures latérales (P1) et (P3) va se dissocier de celui de la fracture centrale (P2) : (P2) aura tendance à évoluer dans une zone proche de la *MK-edge* tandis que (P1) et (P3) évolueront dans une zone très proche de la $\widetilde{M}\widetilde{K}$*-edge*.

Ainsi pour ces deux gammes de valeurs de μ, les deux mécanismes de dissipation de l'énergie seront en compétition. Néanmoins, pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$, les effets de dissipation liés au fluide visqueux domineront les effets associés à la tenacité du matériau (*i.e.* (P1), (P2) et (P3) évolueront dans le *near-storage-viscosity dominated regime*), tandis que la réciproque sera vraie pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$ (*i.e.* (P1) et (P3) évolueront dans le *near-leak-off-toughness dominated regime* et (P2) dans le *near-storage-toughness dominated regime*).

5.3.2.2 Viscosité $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$

Dans cette section, nous considérons toujours un flux d'injection constant $Q_0 = 5 \times 10^{-4}$ $m^2.s^{-1}$ et identique pour les trois fractures (P1) à (P3). Cependant, la viscosité du fluide injecté est maintenant 1000 fois plus grande que celle considérée dans le cas de référence (*i.e.* $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$). Sachant que le coefficient d'échange est une fonction inverse de la viscosité (*i.e.* $C_L = \dfrac{K^{int}}{\mu}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\pi c}}$) il est logique d'observer une diminution de ce paramètre dans le cas présent. Les valeurs des coefficients C_L, $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{K}_i$ ($i \in [\![1,3]\!]$) sont répertoriés dans les Tableaux 5.2 et 5.3 respectivement. De plus, comme indiqué dans la section 5.3.2.1, les trois fractures évoluent dans le *storage-viscosity dominated regime*.

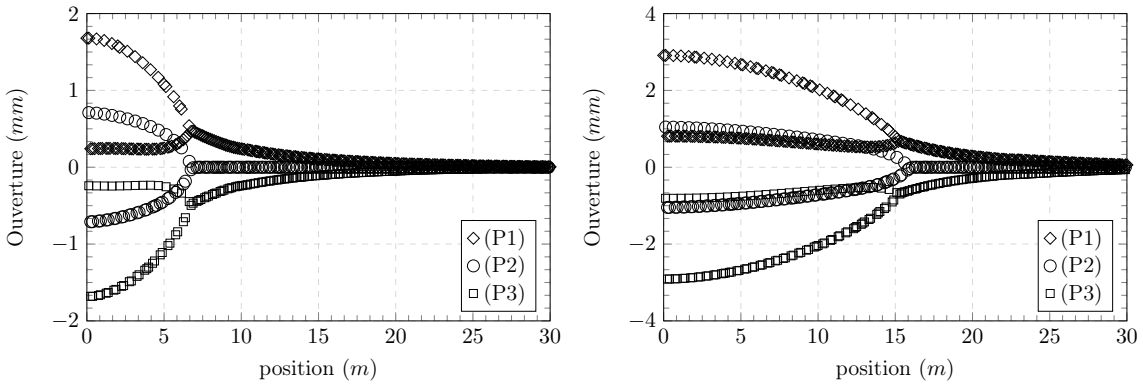


FIGURE 5.9 – *Profils des trois fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

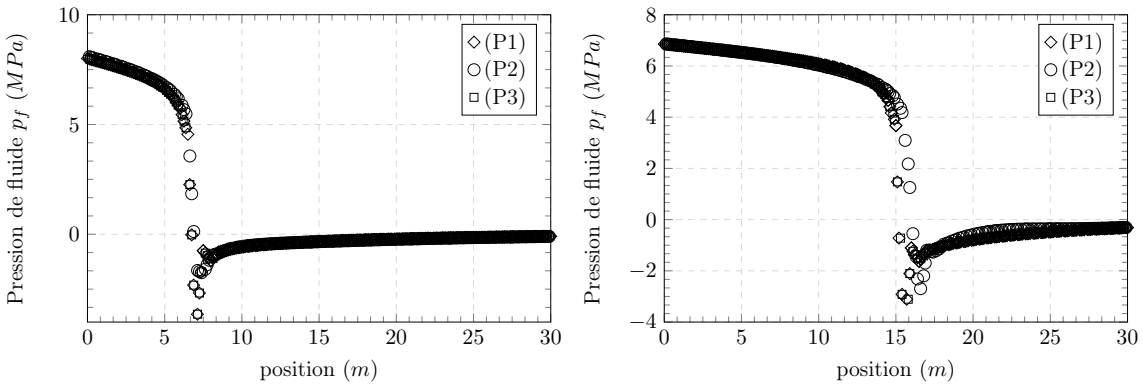


FIGURE 5.10 – *Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Sur les Figures 5.9 et 5.10 sont représentés les profils d'ouverture ainsi que ceux montrant l'évolution de la pression de fluide le long des trois fractures à $t_1 = 15s$ et $t_2 = 50s$. Par rapport au cas de référence, nous remarquons que les trois fractures ont une longueur identique (*i.e.* $l_1 = l_2 = l_3 \approx 6.25\ m$) à $t_1 = 15s$, alors qu'à $t_2 = 50s$ la fracture centrale va se propager légèrement plus loin que les deux autres fractures (*i.e.* $l_1 = l_3 \approx 15\ m$ pour (P1) et (P3) contre $l_2 \approx 16\ m$ pour (P2)). Cette différence mineure étant due à la perméabilité plus faible de la couche centrale, favorisant la propagation. D'autre part, le profil de la fracture centrale (P2) à $t_1 = 15s$ (cf. Figure 5.9 (gauche)) ne semble pas subir de variations locales, comme cela pouvait être le cas pour le cas de référence. Il en est de même à $t_2 = 50s$ (cf. Figure 5.9 (droite)). Cette observation est appuyée par les Figures 5.11 (gauche) et (droite) montrant un déplacement relatif positif au niveau de la paroi supérieure de (P2) et négatif au niveau de sa paroi inférieure. Aucun déplacement vertical antagoniste n'est généré par les parois inférieure de (P1) et supérieure de (P3). Les déplacements mesurés au niveau de (P2) induisent donc une déformation locale du milieu poreux participant à une fermeture mineure des parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement (voir Figures 5.9 (gauche) et (droite)). Cette action modérée de (P2) sur les deux fractures latérales peut être reliée à la proximité des fractures les unes par rapport aux autres. Contrairement au cas de référence, les trois fractures sont encore ici en compétition à $t_2 = 50s$ même si la fracture centrale (P2) commence à prendre le dessus sur les deux autres.

En considérant maintenant l'évolution de la pression de fluide pour chacune des trois fractures (cf. Figures 5.10 (gauche) et (droite)), une forte décroissance est observée du point d'injection jusqu'en pointe. Nous retrouvons ici le comportement hydrodynamique classique de fractures se propageant dans le *storage-viscosity dominated regime*. D'autre part, pour les trois fractures, les profils sont confondus du point d'injection jusqu'en pointe pour $t_1 = 15s$, avec un léger décalage du profil de (P2) proche de sa pointe à $t_2 = 50s$. Comme le montrent les cartes d'iso-valeurs de pression de pore (cf. Figures 5.12 (gauche) et (droite)) quelque soit l'instant considéré, les plus grandes valeurs de pression de pore sont mesurées le long des trois interfaces, puisque tout le fluide injecté est concentré dans les trois fractures. Contrairement au cas de référence, nous observons sur ces deux figures qu'il n'existe aucun front de diffusion de la pression de pore autour des fractures.

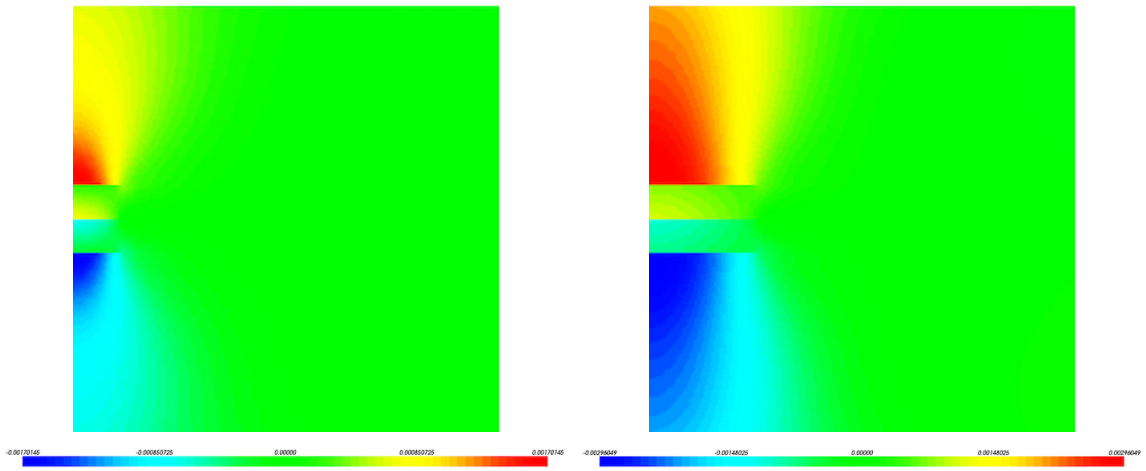


FIGURE 5.11 – *Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

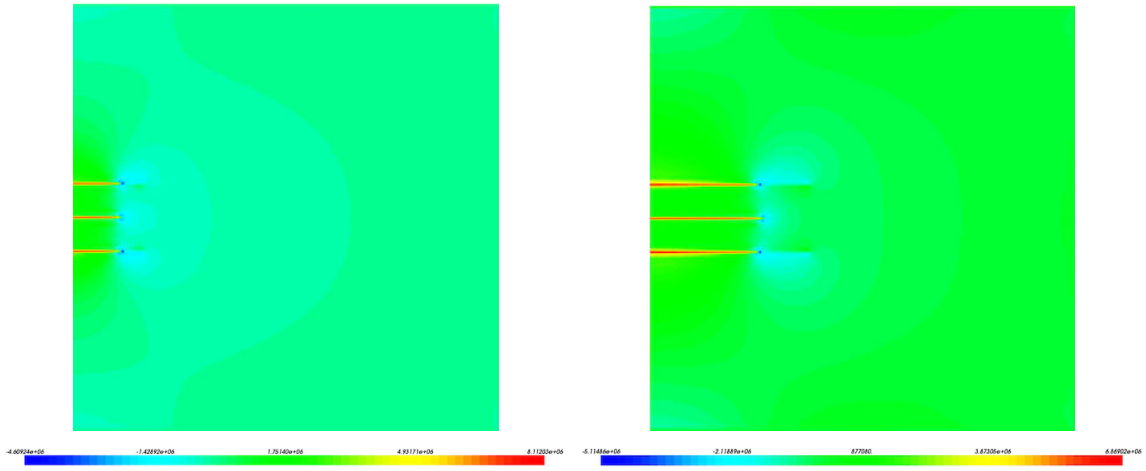


FIGURE 5.12 – *Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Étant donnée cette absence de diffusion latérale de la pression de pore autour des fractures, les cartes d'iso-valeurs de contrainte effective verticale (cf. Figures 5.13 (gauche) et (droite)) montrent qu'il existe une zone entre (P1) et (P2) (*i.e.* $y \in [0, 4.75]$) et entre (P2) et (P3) (*i.e.* $y \in [-4.75, 0[$) pour lesquelles la contrainte verticale présente une forte variation en compression. La même chose est constatée au-dessus de (P1) (*i.e.* $y > 4.75\ m$) et en-dessous de (P3) (*i.e.* $y < -4.75\ m$). À $t_1 = 15s$ l'étendue de ces zones est faible, mais augmente considérablement à $t_2 = 50s$ dès lors que les fractures grandissent. Nous remarquons que la contrainte effective verticale dans cette région est en moyenne de $-6.97\ MPa$ à $t_1 = 15s$ et $-6.23\ MPa$ à $t_2 = 50s$. Ces gammes de valeurs, supérieures à la valeur de la contrainte *in situ* sont une conséquence de l'augmentation de la pression de fluide le long de chacune des trois fractures, puisque que le fluide y reste confiné. La matrice entre les fractures se voit alors comprimée. Dans ce cas précis, le milieu poreux peut être considéré comme un milieu imperméable. La zone d'interaction entre les fractures couvre la longueur des trois fractures et est marquée par une contrainte effective verticale fortement compressive. À partir des Figures 5.9 (gauche) et (droite), il est possible de remarquer une légère dominance de la fracture centrale (P2) par rapport aux deux fractures latérales (P1) et (P3). Celle-ci, du fait de sa plus grande capacité à confiner le fluide en son sein, aura tendance à refermer les parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement. Nous déduisons de ce cas que, malgré une perméabilité intermédiaire du milieu poreux laissant supposer que des échanges de fluide pourraient se produire entre les fractures latérales et le massif, le choix d'injecter

un fluide caractérisé par une viscosité importante va, d'une part empêcher les échanges d'avoir lieu et, d'autre part, amplifier le *stress-shadowing effect* dans la zone inter-fractures par le développement d'une contrainte compressive importante (en valeur absolue) comme le décrivent Fisher et al. [86].

Terminons enfin avec l'interprétation des cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des parois des trois fractures, représentés sur les Figures 5.14 à $t_2 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite). Nous remarquons dans un premier temps, que les flux verticaux mesurés à t_1 et t_2 sont nuls en tout point de la fracture (P2). Ensuite, il semblerait que les fractures (P1) et (P3) soient sujettes à des échanges localisés sur une très fine épaisseur sur toute leur longueur. Cependant les valeurs mesurées sont négligeables (environ 200 fois plus faibles que dans le cas de référence à t_1 et 100 fois moins importantes à t_2). Ces observations nous confirment effectivement le caractère imperméable du milieu poreux et concordent avec le fait que les trois fractures évoluent dans le *storage-viscosity dominated regime*.

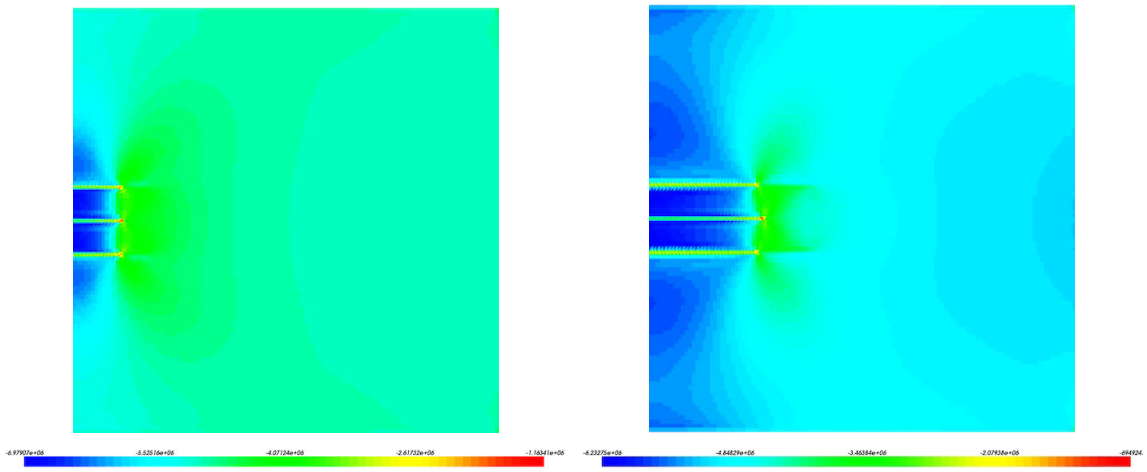


FIGURE 5.13 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite).*

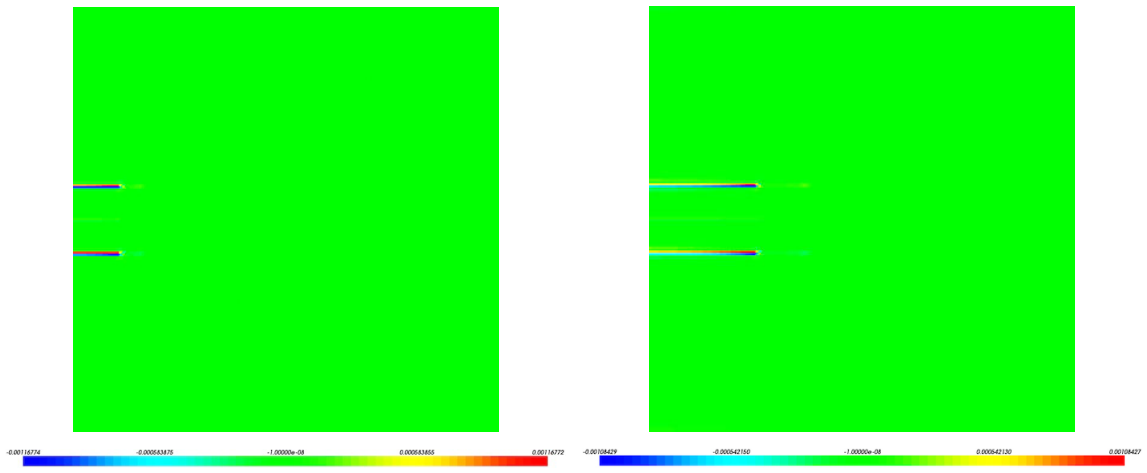


FIGURE 5.14 – *Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite).*

Nous voyons donc qu'avec une viscosité du fluide injecté $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$ assez importante et lorsque les effets de dissipation de l'énergie sont uniquement associés aux effets visqueux, le milieu poreux, en dépit des valeurs de perméabilité assez élevées (à l'exception de la couche centrale), se comporte comme un milieu imperméable, étendant la zone d'interaction entre les trois fractures sur toute leur longueur. (P2) sera perçue comme la fracture

dominante, puisque sa dynamique ne semble pas être affectée par les latérales. Étudions à présent le cas pour lequel la viscosité du fluide injecté a été diminuée d'un facteur 10.

5.3.2.3 Viscosité $\mu = 1 \times 10^{-2}\ Pa.s$

À présent nous simulons l'injection d'un fluide visqueux (*i.e.* $\mu = 1 \times 10^{-2}\ Pa.s$) avec un débit constant $Q_0 = 5 \times 10^{-4}\ m^2.s^{-1}$ identique pour les trois fractures. La position des trajectoires d'évolution des trois fractures dans le diagramme $(\mathscr{K}, \mathscr{C})$ (cf. Figure 5.8) et la donnée des valeurs des coefficients adimensionnels (cf. Tableau 5.3) nous confirment que les trois fractures évolueront dans le *storage-viscosity dominated regime*, mais en comparaison du cas précédent, des échanges légèrement plus importants (mais restant négligeables) pourraient apparaître pour les temps d'évolution longs.

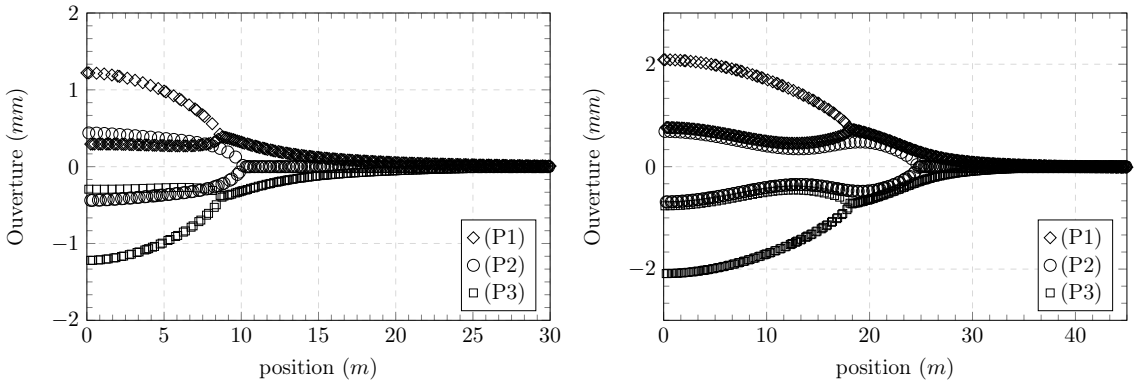


FIGURE 5.15 – *Profils des trois fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-2}\ Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

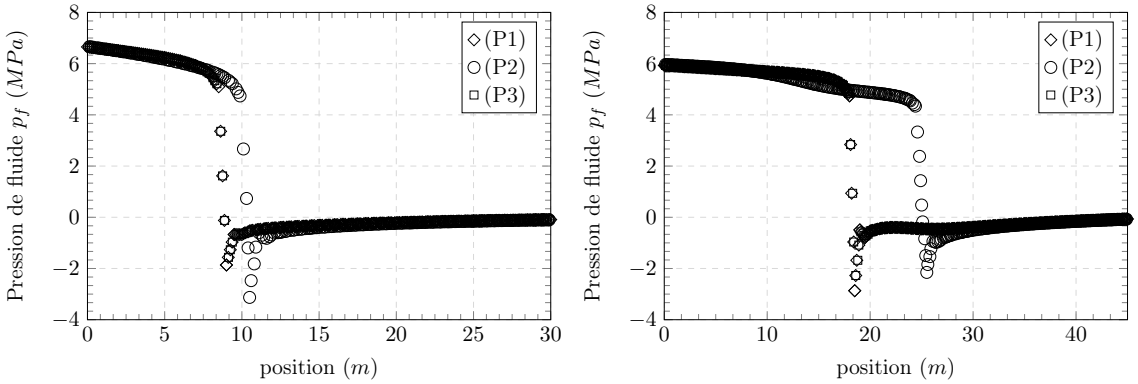


FIGURE 5.16 – *Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-2}\ Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Pour les temps d'évolution courts, nous pouvons remarquer sur la Figure 5.15 (gauche) que l'allure générale des profils des trois fractures varie peu par rapport au cas où la viscosité du fluide injecté est 10 fois plus grande (cf. section 5.3.2.2). En effet, (P2) semble prendre l'avantage sur (P1) et (P3). Cela est confirmé par la Figure 5.17 (gauche) à $t_1 = 15s$ montrant des déplacements relatifs positifs au-dessus de la paroi supérieure de (P2) et négatifs en-dessous de sa paroi inférieure (pour $y \in [-4.75, 4.75]$). Ceux-ci suggèrent qu'il se produit une déformation du milieu poreux dans cette zone, favorisant la refermeture des parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement. Concernant l'évolution de la pression de fluide le long des trois fractures (cf. Figure 5.16 (gauche)), nous remarquons une diminution de la pression de fluide, du point d'injection jusqu'aux pointes des trois fractures. Cette évolution conforte l'idée que les fractures se propagent dans le *storage-viscosity dominated regime* et

par conséquent que les effets visqueux représentent le seul et unique mécanisme contrôlant la propagation des trois fractures.

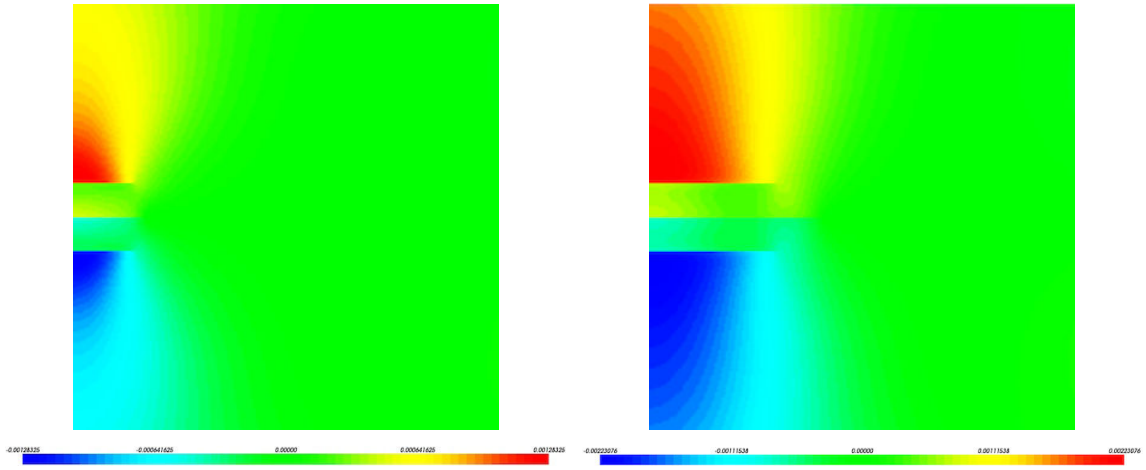


FIGURE 5.17 – *Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

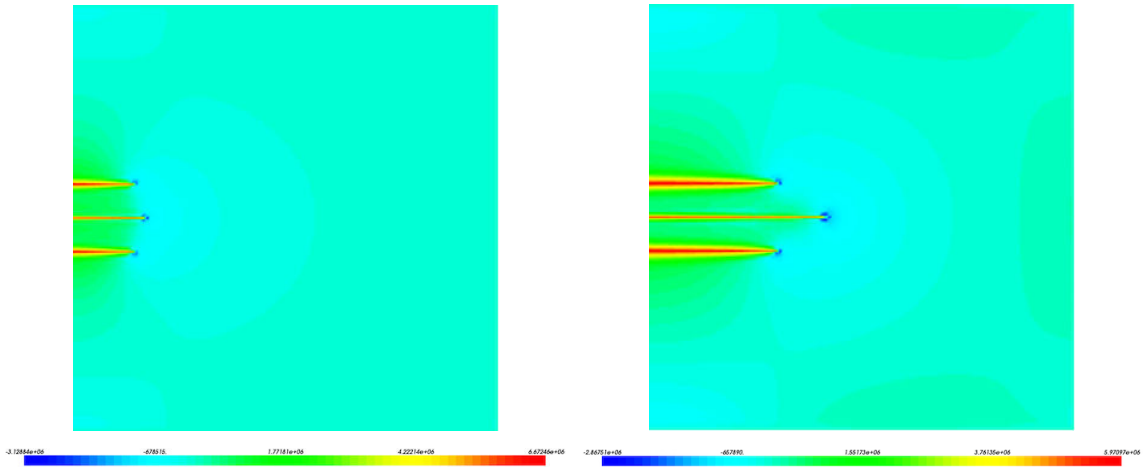


FIGURE 5.18 – *Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Pour des temps de propagation un peu plus longs, $t_2 = 50s$, il est désormais possible de constater un changement du comportement dans l'évolution des trois fractures. En effet, nous observons que sur la Figure 5.15 (droite), les profils des trois fractures sont sujets à quelques perturbations locales. Néanmoins, la tendance constatée aux temps courts est un peu plus marquée aux temps longs : les trois fractures se propagent bien plus que dans le cas où $\mu = 1 \times 10^{-1}$ $Pa.s$, mais ici la fracture (P2) est maintenant nettement plus longue que les fractures latérales. Cette augmentation de longueur peut s'expliquer par la capacité qu'aura la fracture centrale à retenir le fluide injecté en son sein. En effet, pour la fracture centrale (P2), le coefficient adimensionnel d'échange est estimé à $\mathscr{C}_2 = 0.032$ contre $\mathscr{C}_{1,3} = 0.089$ pour les fractures latérales (P1) et (P3) à l'instant $t_2 = 50s$. Cette différence suggère qu'il existe une légère diffusion de pression au niveau des deux parois des fractures (P1) et (P3) comme le confirme la Figure 5.18 (droite) (cet effet n'est pas vraiment marqué à $t_1 = 15s$ puisque les trois fractures se propagent quasiment toute au même niveau). De ce fait, les fractures latérales vont participer à réduire l'ouverture de (P2) pour $x \in [10, 15]$ (cf. Figure 5.15 (droite)) où les déplacements verticaux mesurés sont pratiquement nuls (cf. Figure 5.17 (droite)). Cet effet est largement plus prononcé pour le cas de référence, pour lequel les

échanges sont plus importants dans une zone proche des pointes des fractures latérales.

Sur la Figure 5.16 (droite) il est possible de repérer cet effet d'interaction entre les différentes fractures. En effet, il semblerait que l'influence de (P2) sur la croissance de (P1) et (P3) n'ait pas vraiment d'effets remarquables sur le profil de pression de fluide des fractures latérales. Un gradient de pression, caractéristique du *storage-viscosity dominated regime*, est observé sans perturbation locale. Cependant, sur le profil de pression de fluide le long de la fracture centrale (P2), cette compétition est observable, ayant pour effet d'entrainer une diminution locale de la pression de fluide pour $x \in [10, 15]$. Ensuite pour $x > 15\ m$, la pression continue de diminuer progressivement (caractéristique du *storage-viscosity dominated regime*) avant la chute brutale observée après la pointe (*i.e.* zone en contact).

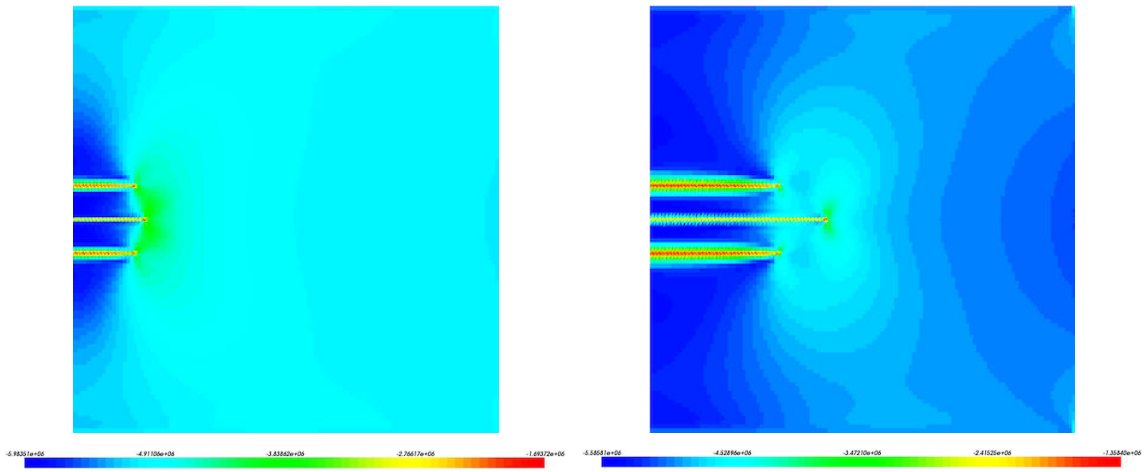


FIGURE 5.19 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-2}\ Pa.s$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

L'interprétation des cartes d'iso-valeurs de contrainte effective verticale (cf. Figures 5.19 (gauche) à $t_1 = 15s$ et (droite) à $t_2 = 50s$) corroborent les observations déjà faites précédemment. En effet pour $t_1 = 15s$, comme les longueurs des trois fractures sont très proches ((P2) légèrement plus longue), il est possible de remarquer un fort état compressif, en particulier dans la zone inter-fractures. Dans cette zone, le profil d'ouverture de la fracture centrale (P2) est symétrique et ne semble pas être affecté par les deux fractures latérales. À l'inverse, les parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement, vont subir l'influence de (P2) et se refermer (cf. Figure 5.15 (gauche)). Néanmoins à la différence du cas où $\mu = 1 \times 10^{-1}\ Pa.s$, une légère variation en traction de la contrainte verticale autour des parois des fractures (P1) et (P3) est observable, le coefficient d'échange adimensionnel est $\mathscr{C}_2 = 0.072$, autorisant une très faible diffusion de pression autour de ces fractures. Mais cela ne semble avoir guère d'impact sur le champ de contrainte environnant, ni engendrer d'interaction particulière avec (P2). Une fois encore, la compétition entre les fractures se fera sur toute leur longueur, avec (P2) dominant les fractures (P1) et (P3).

Néanmoins, pour les temps de propagation plus longs (cf. Figure 5.19 (droite) à $t_2 = 50s$), la zone autour des fractures latérales, caractérisée par une variation en traction de la contrainte effective verticale, semble s'étendre puisque la diffusion de pression de pore progresse autour de ces deux fractures. De plus, il est possible d'observer deux zones (*i.e.* entre (P1) et (P2) pour $y \in [0, 4.75]$ et entre (P2) et (P3) pour $y \in [-4.75, 0]$) pour lesquelles la contrainte est fortement compressive, suggérant que la fracture centrale continue de refermer partiellement les parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement. La progression des deux zones caractérisées par une variation en traction de la contrainte effective verticale est un argument appuyant le fait que les fractures latérales (P1) et (P3)

vont commencer à agir sur la fracture centrale (P2). En particulier, cela se manifeste par l'apparition d'une perturbation locale sur le profil d'ouverture de la fracture centrale pour $x \in [10, 15]$ (cf. Figure 5.15 (droite)).

Enfin, d'après les observations faites sur la contrainte effective verticale, qui suggèrent des interactions modérées entre les trois fractures, nous pouvons remarquer que cela a pour effet d'autoriser des échanges bilatéraux cantonnés au niveau des parois des fractures latérales observables pour les temps courts et les temps longs (cf. Figures 5.20 (gauche) et (droite)). Néanmoins, ces flux verticaux, en comparaison du cas de référence, sont 100 moins intenses et ils sont bilatéraux. Le caractère unilatéral des échanges pour le cas de référence est relié à la très forte variation en traction de la contrainte pour $y \in [-4.75, 4.75]$ (suggérant un gonflement du matériau) du fait de l'augmentation de la pression de pore dans cette zone.

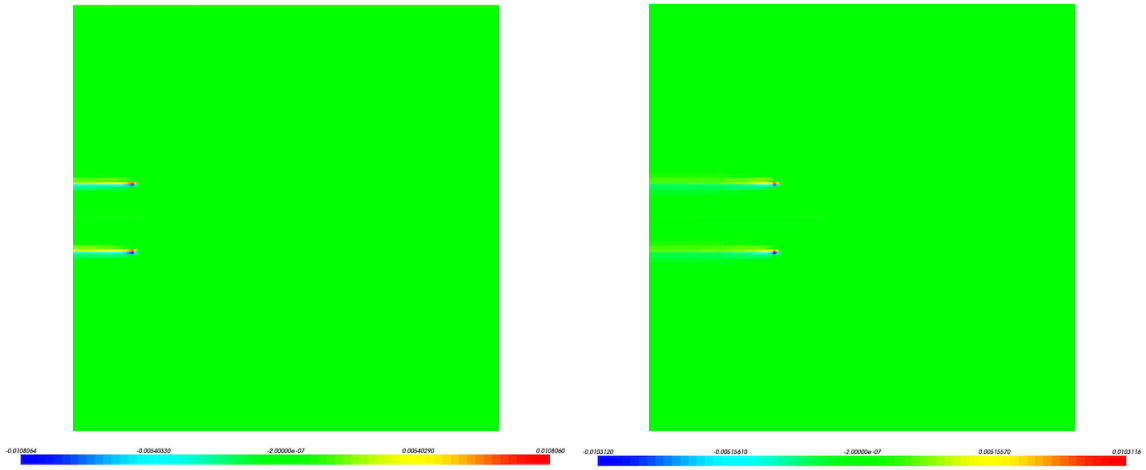


FIGURE 5.20 – *Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-2}$ *Pa.s à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Nous venons ainsi de montrer qu'en diminuant la viscosité d'un facteur 10, des interactions locales entre les fractures commencent à se manifester. En particulier, cet exemple suggère une transition dans l'évolution du *stress-shadowing effect*. Dans le cas précédent, cet effet était nettement caractérisé par une variation en compression de la contrainte verticale effective dans toute la zone inter-fractures (également pour les temps court pour ce cas). Dans cet exemple, alors que les échanges avec la matrice semblent débuter autour des fractures latérales pour des temps suffisamment longs, le *stress-shadowing effect* sera caractérisé par une variation en traction de la contrainte effective verticale autour des fractures latérales. Au contraire, cet effet se manifestera par une variation en compression de la contrainte verticale autour de la fracture centrale, dans laquelle le fluide reste confiné. Il semblerait donc qu'une diminution supplémentaire de la viscosité conduise à renforcer cet effet.

5.3.2.4 Viscosité $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$

Dans la suite de cette section, un fluide visqueux caractérisé par une viscosité $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$ est injecté avec le même débit constant Q_0 pour les trois fractures (P1) à (P3). Comme nous avons déjà pu le mentionner dans la section 5.3.2.1, les trois fractures évolueront dans le *near-storage-viscosity dominated regime*. Les coefficients adimensionnels sont donnés dans le Tableau 5.3.

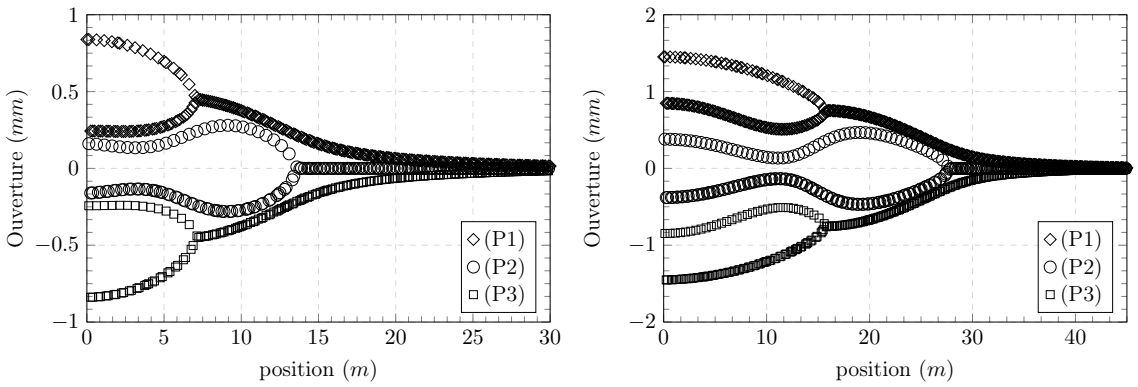


FIGURE 5.21 – *Profils des trois fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

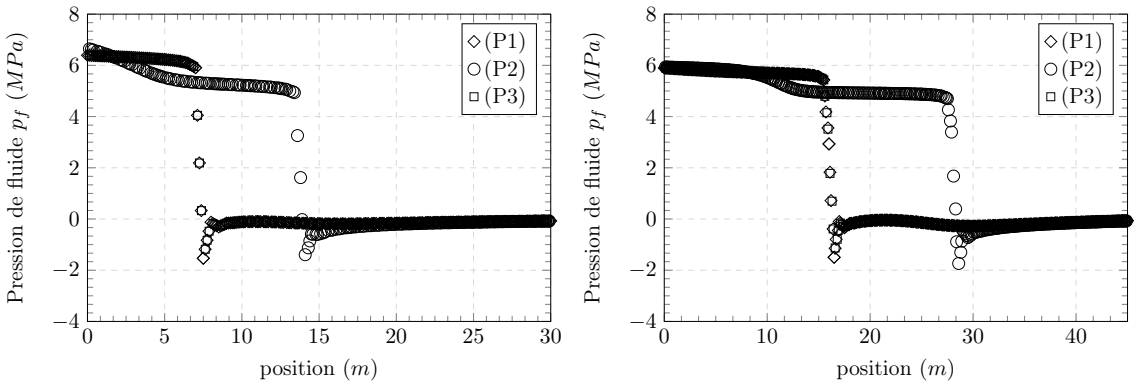


FIGURE 5.22 – *Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Dans ce cas d'étude, nous observons sur les Figures 5.21 (gauche) et (droite), du fait de la diminution de la viscosité du fluide injecté, que l'ouverture des trois fractures est en moyenne réduite par rapport aux deux cas précédemment étudiés pour lesquels la viscosité du fluide est importante.

À présent, il semblerait que l'émergence d'une fracture dominante, en l'occurence (P2), soit beaucoup plus flagrante dès $t_1 = 15s$ (cf. Figure 5.21 (gauche)). De plus, l'action conjuguée des fractures latérales (P1) et (P3) tend à refermer localement la fracture centrale (P2) pour $x \in [0, 5]$, qui à son tour pour $x > 5$ m, du fait de son ouverture et de sa longueur plus importante, va avoir tendance à freiner la croissance des deux fractures latérales. Pour des temps de propagation plus longs (cf. Figure 5.21 (droite) pour $t_2 = 50s$), cet effet va être translaté dans la direction horizontale (*i.e.* $x \in [7.5, 12.5]$). Cependant, alors que les pointes des fractures latérales (P1) et (P3) s'éloignent du point d'injection, la fracture (P2) va subir une réouverture partielle dans cette zone. Par conséquent, les parois inférieure et supérieure des fractures (P1) et (P3) respectivement vont être poussées verticalement et conduire à la fermeture modérée de ces fractures. Pour les deux instants considérés, les Figures 5.23 (gauche) et (droite) viennent appuyer ces observations. À $t_1 = 15s$, la zone pour $y \in [-4.75, 4.75]$ et $x \in [0, 5]$ met en avant l'action des fractures latérales sur la fracture centrale, puisque des déplacements quasi-nuls sont mesurés. Ensuite à $t = 50s$, la zone pour $y \in [-4.75, 4.75]$ et $x \in [0, 7.5]$ est caractérisée par des déplacements positifs au-dessus de (P2) et négatifs en-dessous de (P2) indiquant la dominance locale de (P2). Des interprétations similaires peuvent êtres faites lorsque les pointes de (P1) et (P3) ont été dépassées.

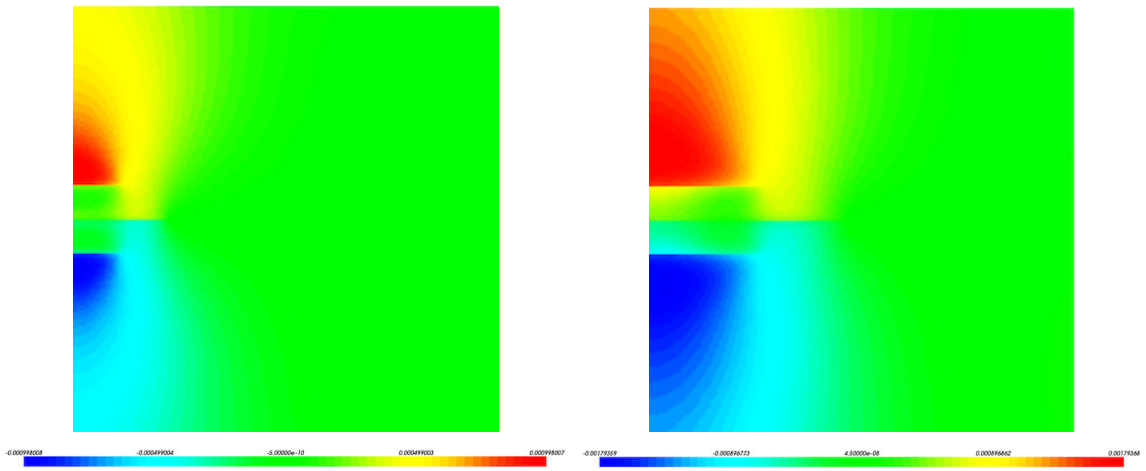


FIGURE 5.23 – *Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

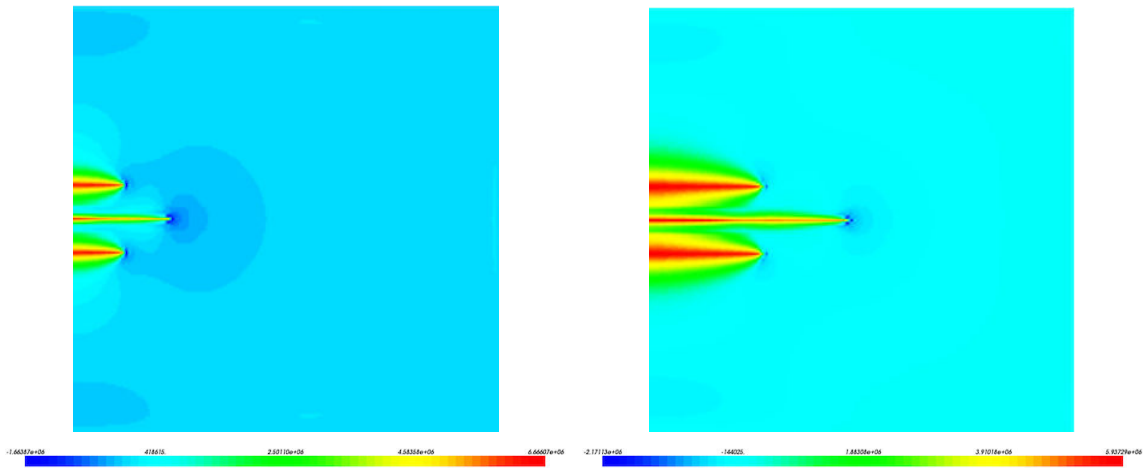


FIGURE 5.24 – *Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Sur les Figures 5.22 (gauche) et (droite) est représentée l'évolution de la pression de fluide le long de chacune des trois fractures. Dans un premier temps, il est possible de remarquer à $t_1 = 15s$ que pour les fractures latérales (P1) et (P3), il existe toujours une diminution significative de la pression mesurée du point d'injection jusqu'aux pointes des deux fractures qui, encore une fois, est caractéristique d'un régime dominé par les effets visqueux. Pour les deux instants considérés, aucune perturbation des profils de pression de fluide n'est enregistrée. Par contre, le profil de la fracture centrale (P2) montre quelques différences remarquables. Globalement pour les temps faibles, l'allure générale du profil indique que la pression de fluide diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de la pointe de fissure. Cependant, il existe une zone marquée par une diminution franche de la pression pour $x \in [0, 5]$, correspondant à la zone identifiée sur la Figure 5.21 (gauche) pour laquelle l'ouverture de cette fracture est réduite. Ensuite pour $x > 5\ m$, alors que l'influence des fractures latérales est moins marquée, la décroissance du profil de pression de fluide est plus douce. Cette rupture dans l'allure du profil de pression de fluide est également observée à $t_2 = 50s$ pour $x \in [7.5, 12.5]$ et est associée au même phénomène décrit à l'instant $t_1 = 15s$. Néanmoins, un fait intéressant peut être remarqué à $t_2 = 50s$ pour $x \in]12.5, 27.5]$ (cf. Figure 5.22 (droite)). En effet, dans cette zone, la fracture centrale (P2) est majoritairement ouverte et ne semble plus être affectée par l'action des fractures latérales (cf. Figure 5.21 (droite)) et la pression mesurée est uniforme. Nous avons montré que la propagation de cette fracture s'inscrit dans le *near-storage-viscosity dominated regime*. En

effet, le mécanisme de dissipation de l'énergie est principalement associé aux effets visqueux, mais les effets de la tenacité du matériau sont tout de même présents, puisque la tenacité adimensionnelle est telle que $\mathscr{K}_2 > 1$. L'uniformité de la pression dans cette zone suggère donc que, pour $x \in]12.5, 27.5]$, la dissipation de l'énergie associée à la tenacité du matériau va dominer localement le comportement de la fracture.

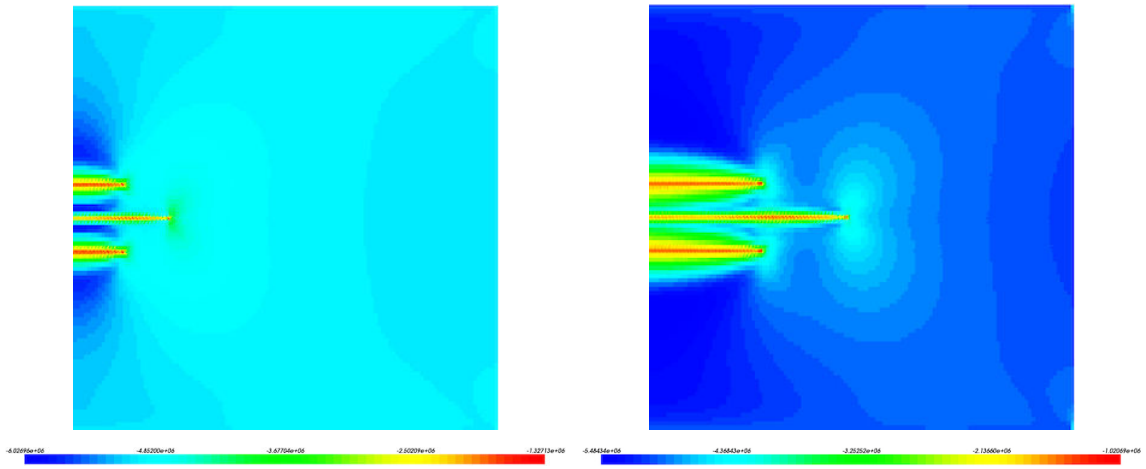


FIGURE 5.25 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Les Figures 5.25 (gauche) et (droite) montrent la répartition de la contrainte effective verticale dans le massif pour $t_1 = 15s$ et $t_2 = 50s$ respectivement. Nous remarquons, à $t_1 = 15s$, qu'il existe toujours entre (P1) et (P2) d'une part, et entre (P2) et (P3) une zone de forte compression proche de la fracture centrale (P2). Par rapport aux deux cas précédents, pour lesquels ces deux zones compressives étaient plus étendues dans la partie inter-fractures, ici elles tendent à se réduire alors que la diffusion autour des fractures augmente de plus en plus du fait de la diminution de la viscosité du fluide injecté (cf. Figure 5.24 (gauche)). Par conséquent, comme le montre la Figure 5.21 (gauche), les fractures latérales (P1) et (P3) vont avoir nettement plus d'impact sur l'ouverture de la fracture centrale (P2) conduisant à sa refermeture locale pour $x \in [0, 5]$. Néanmoins, (P2) continue de pénaliser l'ouverture des parois inférieure de (P1) et supérieure de (P3).

Cependant la tendance semble s'inverser à $t_2 = 50s$ (cf Figure 5.25 (droite)). Alors que la diffusion verticale du fluide augmente de plus en plus autour des deux fractures latérales (P1) et (P3), les deux zones observées précédemment, proches de (P2) et caractérisées par une forte contrainte effective verticale compressive, sont désormais quasiment résorbées. En effet, comme le montre la Figure 5.24 (droite) les fronts de diffusion de pression de pore en provenance des fractures latérales (P1) et (P3) ont quasiment fusionné dans la zone inter-fractures. Par conséquent la variation de contrainte effective verticale est en traction dans cette zone. Il semblerait alors que les interactions entre les fractures semblent s'intensifier. En effet, du fait des pertes latérales observées au niveau des fractures (P1) et (P3), d'une part celles-ci vont moins croître, et d'autre part la matrice poreuse entre (P1)-(P2) et (P2)-(P3) va subir un gonflement, participant à refermer simultanément les trois fractures (cf. Figure 5.21 (droite)). En particulier, (P2) subira davantage les effets de (P1) et (P3) dans une zone proche de leur pointe.

Comme le montrent les cartes d'iso-valeurs des flux verticaux à $t_1 = 15s$ et $t_2 = 50s$ (cf. Figures 5.26 (gauche) et (droite) respectivement), alors que les interactions entre les fractures semblent être de faible intensité aux temps courts, il semblerait que des échanges bilatéraux aient lieu au niveau des fractures (P1) et (P3) sur toute leur longueur. Cependant, à $t_2 = 50s$,

du fait du gonflement de la zone inter-fractures, les échanges vont être considérablement réduits le long des fractures latérales (P1) et (P3), mais auront lieu dans une zone proche des pointes de ces fissures, et bilatéralement, ce qui permet en partie d'expliquer la forte refermeture de (P2) pour $x \in [7.5, 12.5]$.

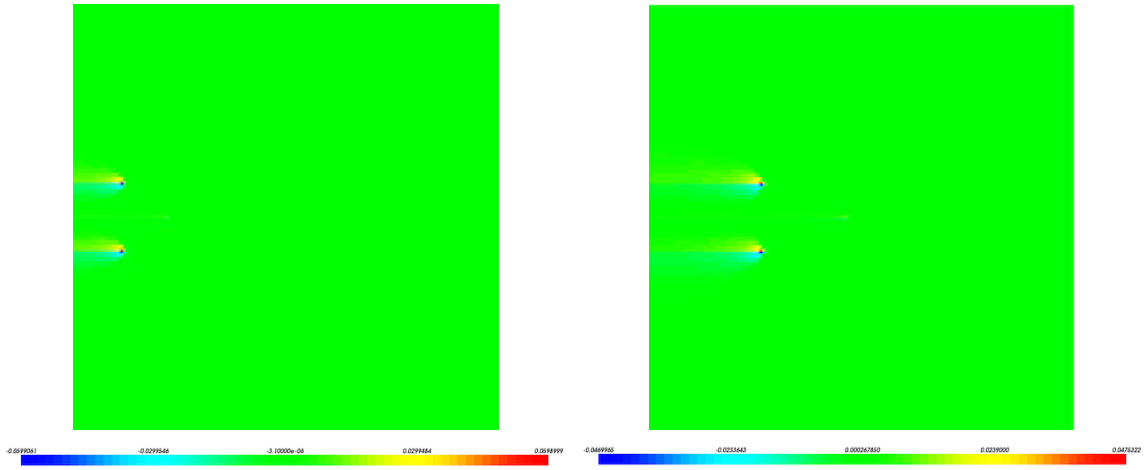


FIGURE 5.26 – *Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas* $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Il semblerait que la valeur de la viscosité considérée dans cette étude marque une transition dans la manière dont s'exprime le *stress-shadowing effect*. En effet, nous avons remarqué que dans le cas où la viscosité est relativement importante (cf. section 5.3.2.2), le *stress-shadowing effect* sera marqué par de fortes contraintes compressives dans la zone inter-fractures. En termes d'interactions, la fracture centrale semble impacter les fractures latérales sur toute leur longueur. Au contraire, nous avons vu qu'en diminuant progressivement la viscosité, alors que le front de diffusion augmente autour des fractures latérales, le *stress-shadowing effect* semble s'exprimer différemment. Nous observerons en effet, autour de ces deux fractures, une zone caractérisée par une variation en traction de la contrainte effective verticale. L'étendue de cette zone croît avec la progression du front de pression de pore. Pour $\mu = 1 \times 10^{-2}$ *Pa.s*, elle sera confinée autour de (P1) et (P3) respectivement, et (P2) sera entourée par une zone de forte compression (quelque soit l'instant considéré). Ensuite, pour $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s*, nous retrouverons ce schéma pour les temps faibles (avec une forte réduction de la zone de forte compression autour de (P2)). Aux temps longs, toute la zone inter-fractures est caractérisée par une variation en traction de la contrainte verticale. De même pour le cas de référence, et ce, quelque soit l'instant considéré.

Le régime de propagation semble également apparaître comme un facteur responsable de cette transition de l'expression du *stress-shadowing effect*. Dans les deux premiers cas, les fractures se propagent dans le *storage-viscosity dominated regime*. Pour le cas de référence les fractures se propagent selon le *toughness dominated regime* (nous omettons volontairement le mode de stockage ici). Néanmoins, le cas $\mu = 1 \times 10^{-3}$ *Pa.s* est intermédiaire, puisque les fractures évoluent dans le *near-viscosity dominated regime*. La compétition entre les deux mécanismes de dissipation de l'énergie (*i.e.* fracturation et effets visqueux) peut expliquer cette transition dans l'expression du *stress-shadowing effect*, en particulier pour le cas de la fracture centrale (P2) entre les temps courts et les temps longs (cf. transition de régime observée entre les Figures 5.22 (gauche) et (droite) pour $x \in]12.5, 27.5]$).

Nous pouvons donc déduire de ces observations que lorsque les fractures se propagent selon un régime majoritairement dominé par les effets de dissipation visqueux et lorsque les fractures latérales n'échangent pas le fluide injecté, le *stress-shadowing effect* sera caractérisé

par une zone inter-fractures marquée par de fortes contraintes compressives. Les fractures latérales (P1) et (P3) auront peu d'influence sur la fracture centrale (P2). Cette dernière agit sur (P1) et (P3). Au contraire, lorsque la dissipation de l'énergie est associée à la fracturation et que les fractures latérales échangent le fluide avec la matrice rocheuse, le *stress-shadowing effect* se manifestera par une zone inter-fractures présentant une variation en traction de la contrainte effective verticale. Dans ce cas, les fractures latérales (P1) et (P3) participeront à refermer localement la fracture centrale (P2), qui elle-même aura une influence sur leur ouverture.

5.3.3 Étude de l'influence du débit d'injection sur la dynamique des fractures

5.3.3.1 Diagramme d'évolution du régime de propagation des fractures

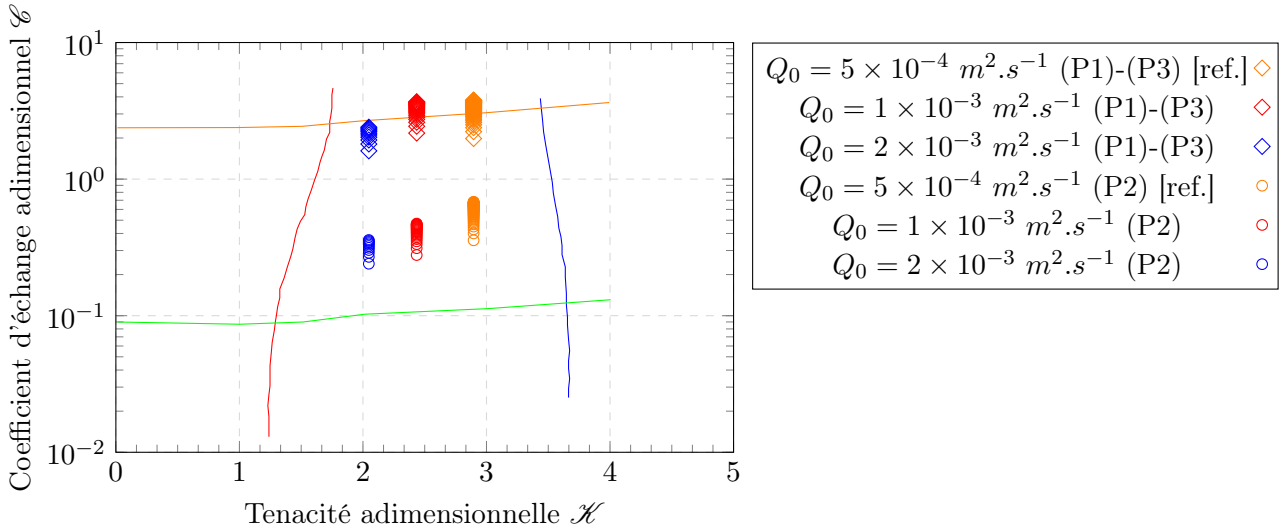


FIGURE 5.27 – *Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) - Trajectoires d'évolution des 3 fractures pour différents débits d'injection.*

Le diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) (d'après Hu et Garagash [114]) représenté sur la Figure 5.27 montre l'évolution des fractures (P1), (P2) et (P3) pour différents débits d'injection. La comparaison des résultats se fera à volume d'injection identique. Ainsi, si pour le cas de référence la simulation sera effectuée entre $t = 0s$ et $t = 50s$, en doublant le débit d'injection nous simulerons la propagation des fractures entre $t = 0s$ et $t = 25s$, et ainsi de suite. De plus, pour toutes les simulations conduites, le débit est supposé constant et identique pour les trois fractures. Les propriétés du matériau restent inchangées (cf. Tableau 5.1) par rapport au cas de référence (marqueurs orange sur la Figure 5.27).

Pour cette étude, nous remarquons que l'augmentation du débit décale les trajectoires d'évolution des trois fractures vers la $\widetilde{MM}$*-edge*, suggérant que le mécanisme de dissipation de l'énergie associé aux effets visqueux domine en partie la propagation des fractures pour de fortes valeurs de Q_0. La tendance inverse a été constatée dans la section 5.3.2 lorsque la viscosité du fluide d'injection diminue : les trajectoires d'évolution des différentes fractures se rapprochent de la $\widetilde{K}K$*-edge* indiquant que le mécanisme dominant de dissipation de l'énergie est lié à la tenacité du matériau. C'est effectivement ce que nous avons constaté dans l'étude du cas de référence (cf. section 5.3.1).

Ensuite, nous remarquons que la variation du débit affecte peu la position des trajectoires d'évolution par rapport aux *MK-edge* et $M\widetilde{M}$*-edge* : les fractures latérales (P1) et (P3)

auront tendance à échanger massivement le fluide injecté avec le milieu poreux environnant, alors que la fracture centrale aura un comportement d'échange intermédiaire.

Pour conclure, lorsque $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$, les fractures latérales (P1) et (P3) évolueront dans le *near-leak-off-toughness dominated regime*, tandis que la fracture centrale est contrôlée par le *near-storage-toughness dominated regime*. D'autre part, pour $Q_0 = 2 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$, bien que les fractures latérales suivent une trajectoire d'évolution proche du $\widetilde{M}$*-corner*, nous supposons qu'elles seront contrôlées par le *near-leak-off-toughness dominated regime*. Comme le soulignent Hu et Garagash [114], ce diagramme permet de donner une estimation du régime de propagation d'une fracture hydraulique. Or en considérant la valeur de la tenacité adimensionnelle pour les fractures (P1) et (P3) $\mathscr{K}_{1,3} = 2.04$, celle-ci correspond à une valeur intermédiaire. Nous considérerons donc le régime nommé précédemment pour ces fractures. À l'inverse, la fracture centrale aura tendance à évoluer dans le *near-storage-toughness dominated regime*.

5.3.3.2 Débit d'injection constant $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$

Nous simulons ici l'injection d'un fluide dont la viscosité est $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$ avec un débit constant et identique pour les trois fractures tel que $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$. Le temps de simulation est donc $t \in [0, 25]$. Contrairement à ce que la définition du coefficient d'échange suggère (*i.e.* C_L indépendant de Q_0), il semblerait que la variation du débit d'injection induise une variation du coefficient C_L (voir Tableau 5.2). En effet, en considérant les valeurs de ce coefficient estimées par régression linéaire à partir des multiplicateurs de Lagrange q_1 et q_2, l'augmentation du débit d'injection provoque une augmentation du coefficient d'échange. Les valeurs des différents coefficients adimensionnels (cf. Tableau 5.3) confirment que les fractures latérales et centrale évoluent dans le *near-leak-off-toughness dominated regime* et *near-storage-toughness dominated regime* respectivement.

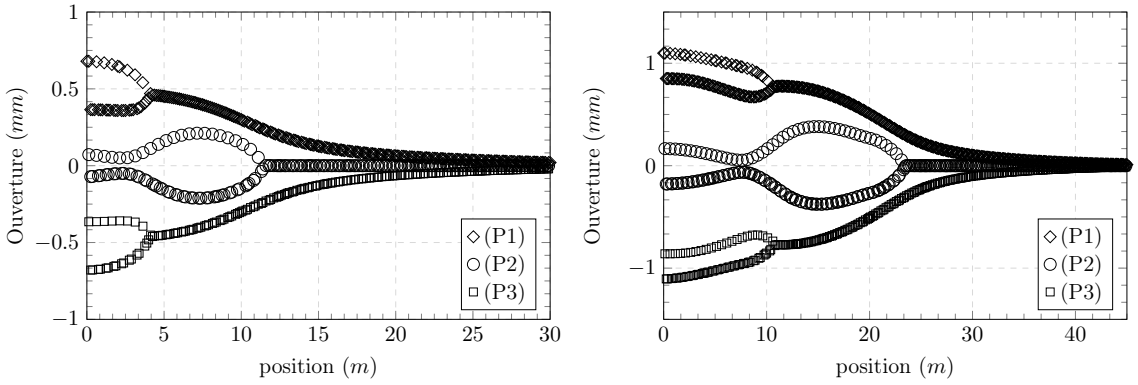


FIGURE 5.28 – *Profils des trois fractures pour le cas* $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 7.5s$ *(gauche) et* $t_2 = 25s$ *(droite).*

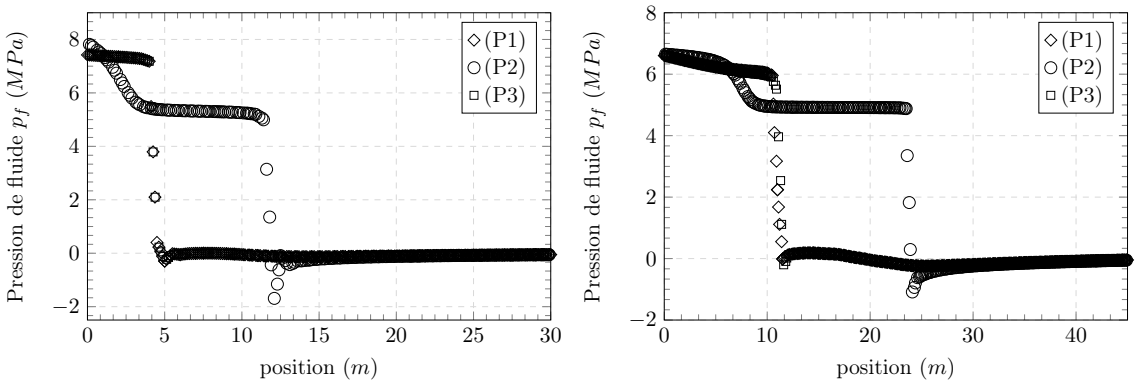


FIGURE 5.29 – *Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas* $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 7.5s$ *(gauche) et* $t_2 = 25s$ *(droite).*

Sur les Figures 5.28 (gauche) et (droite) sont représentés les profils d'ouverture des trois fractures à $t_1 = 7.5s$ et $t_2 = 25s$ respectivement. Nous remarquons, par rapport au cas de référence, que l'augmentation d'un facteur 2 du débit d'injection va induire une augmentation de l'ouverture et de la longueur des trois fractures pour les deux temps considérés. Globalement comme pour le cas de référence, le même type d'interaction entre les fractures est constaté pour les temps courts et les temps longs. En effet, comme le montrent les cartes d'iso-valeurs des déplacements verticaux (cf. Figure 5.30 (gauche) et (droite)), la répartition des déplacements autour des fractures est similaire à celle observée sur les Figures 5.4 (gauche) et (droite).

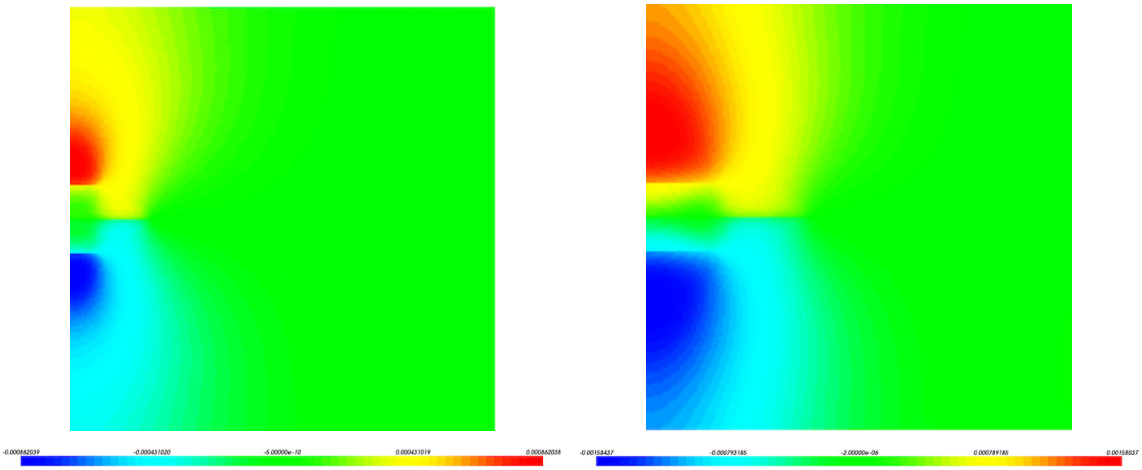


FIGURE 5.30 – *Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas* $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 7.5s$ *(gauche) et* $t_2 = 25s$ *(droite).*

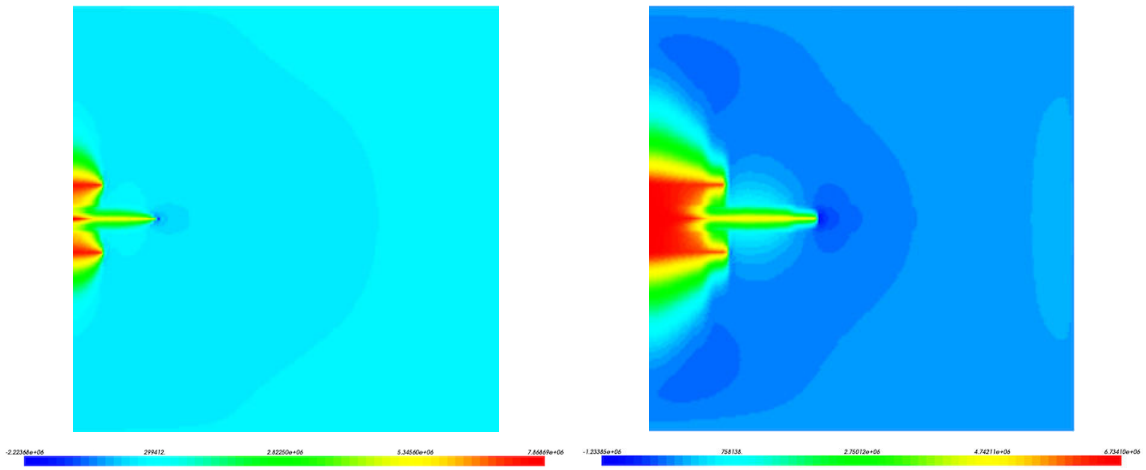


FIGURE 5.31 – *Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas* $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 7.5s$ *(gauche) et* $t_2 = 25s$ *(droite).*

Au niveau des profils de pression de fluide le long des trois fractures (cf. Figures 5.29 (gauche) et (droite) à $t_1 = 7.5s$ et $t_2 = 25s$ respectivement), quelques differences mineures peuvent être constatées par rapport au cas de référence. Tout d'abord, à $t_1 = 7.5s$, il est possible de remarquer que le profil de pression de fluide pour les fractures latérales (P1) et (P3) est caractérisé par un léger gradient pour $x \in [0, 4.8]$. De même à $t_1 = 25s$, un gradient un peu plus important est constaté pour $x \in [0, 10]$, mais est nettement plus faible que dans le cas de référence (*i.e.* à $t_2 = 50s$ pour $x \in [0, 8.75]$). Dans le cas de référence, cette non uniformité de la pression avait été attribuée à la fermeture des parois des fractures latérales (P1) et (P3) du fait de l'action de la fracture centrale (P2). Il semblerait donc qu'ici, les effets de dissipation associés au fluide visqueux soient atténués étant données l'ouverture et la longueur plus importantes des fractures latérales. En effet, l'augmentation du débit va permettre de créer davantage de volume pour les deux fractures latérales, et sachant que la gamme de valeur du coefficient d'échange adimensionnel est du même ordre de grandeur que pour le cas de référence, la diffusion de la pression de fluide dans le milieu poreux (cf. Figures 5.31 (gauche) et (droite)) va permettre de ré-équilibrer la compétition entre la dissipation associée aux effets visqueux et celle associée à la fracturation.

Ensuite, pour la fracture centrale (P2), nous observons également à $t_1 = 7.5s$ une légère décroissance du profil de pression pour $x \in]4.8, 12]$, alors que dans le cas de référence la pression de fluide est uniforme (*i.e.* à $t_1 = 15s$ pour $x \in [2.5, 9]$). Puis, dès lors que la longueur de la fracture centrale augmente à $t_2 = 50s$, nous observons que le profil de pression de fluide est uniforme pour $x \in]8, 24]$. Nous avons montré que la fracture centrale (P2) évolue dans le *near-storage-toughness dominated regime*, comme pour le cas de référence. Cependant, comme $\mathscr{K}_2 < \mathscr{K}_2^{ref}$ (cf. Figure 5.27), la fracture centrale (P2) sera plus sujette aux effets visqueux. Pour les temps courts et compte tenu de la valeur importante du débit d'injection, il semblerait que ces effets dominent partiellement le comportement de (P2), puisque le volume de stockage est faible, et la couche centrale contenant (P2) est imperméable. Néanmoins, à $t_2 = 25s$, alors que la longueur et l'ouverture de la fracture centrale (P2) augmentent, l'espace de stockage semble être suffisant pour contre-balancer l'action des effets visqueux et ainsi permettre une ré-uniformisation de la pression de fluide le long de (P2) dans cette zone.

Nous retrouvons enfin le comportement déjà observé précédemment pour $x \in [0, 4.8]$ à $t_1 = 7.5s$ et pour $x \in [0, 8]$ à $t_2 = 25s$ (cf Figure 5.29 (droite)), montrant une forte diminution de la pression de fluide, puisque la refermeture locale des parois de la fracture centrale (P2) va avoir tendance à favoriser le mécanisme de dissipation de l'énergie lié au fluide visqueux.

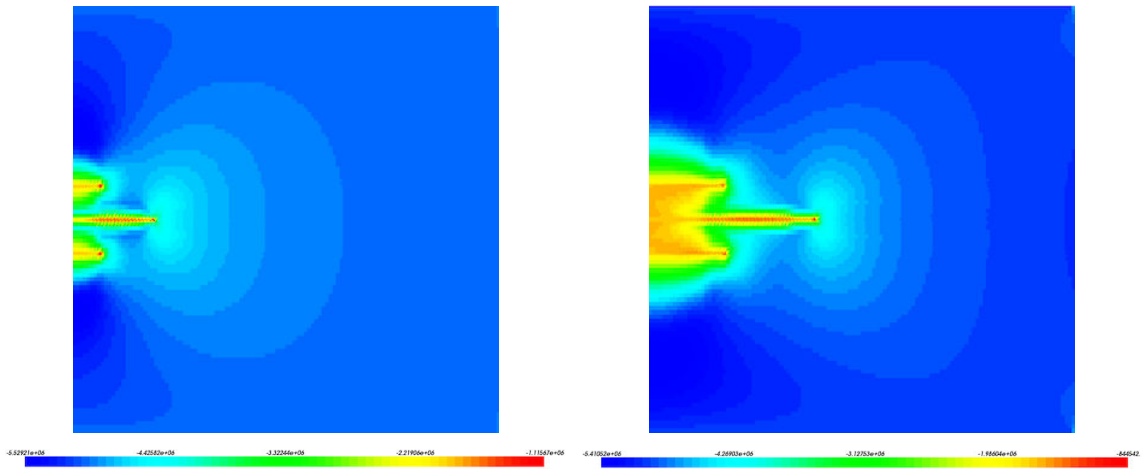


FIGURE 5.32 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas* $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 7.5s$ *(gauche) et* $t_2 = 25s$ *(droite).*

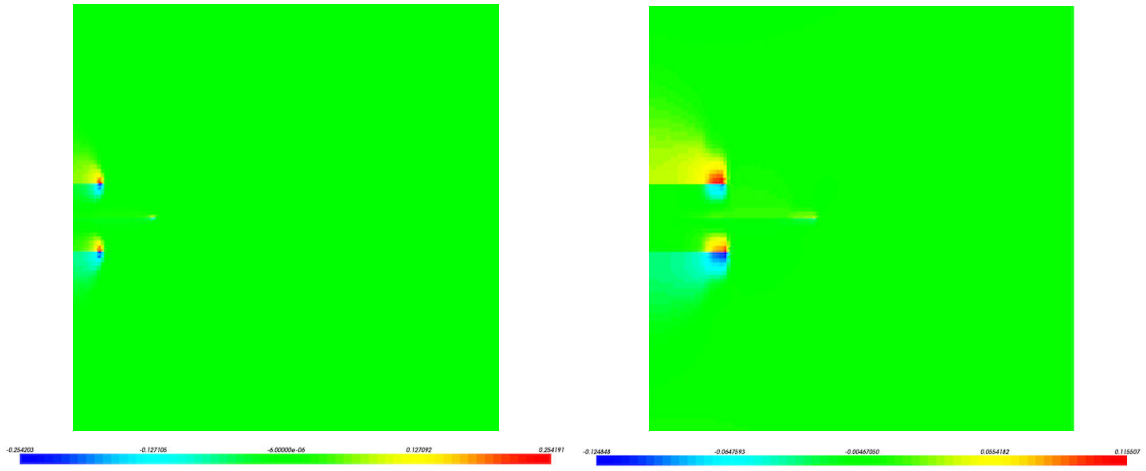


FIGURE 5.33 – *Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas* $Q_0 = 1 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 7.5s$ *(gauche) et* $t_2 = 25s$ *(droite).*

Il est intéressant d'étudier la répartition de la contrainte effective verticale (cf. Figures 5.32 (gauche) et (droite)) autour des fractures afin de mesurer l'importance des interactions qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre. Pour l'instant, l'interprétation des données suggèrent un comportement similaire au cas de référence. À $t_1 = 7.5s$, nous remarquons à nouveau, au niveau de la zone inter-fractures, que la contrainte verticale subit une variation en traction. Cet effet est également observé à $t_2 = 25s$. Pour cet instant, en $y \in [-4.75, 4.75]$ et $x \in [0, 8]$, la compétition entre les trois fractures est la plus importante et correspond à la zone de *stress-shadowing effect*. Néanmoins, la contrainte mesurée (en valeur absolue) dans cette zone d'interaction semble être moins importante que dans le cas de référence (*i.e.* environ 1 MPa ici contre 1.9 MPa dans le cas de référence). Or, comme nous avons pu le montrer dans cette section, l'augmentation du débit d'injection va induire une augmentation de la longueur des trois fractures, mais également de leur ouverture. Cette augmentation du volume de stockage dans les fractures, pour un volume de fluide injecté identique au cas de référence, peut être une explication à cet état de contrainte moins compressif (ou dit autrement cette plus grande variation en traction de la contrainte effective verticale) observé ici, au niveau de la zone inter-fractures. En effet, ces fractures seront capables d'échanger une plus grande quantité de fluide avec la matrice poreuse que dans le cas de référence.

À $t_1 = 7.5s$, tout comme à $t_2 = 25s$ (cf. Figures 5.33 (gauche) et (droite)), les flux seront uniquement concentrés sur les parois supérieure et inférieure de (P1) et (P3) respectivement.

Ensuite lorsque la zone de *stress-shadowing effect* commence à s'atténuer, c'est-à-dire proche des pointes des fractures latérales (P1) et (P3), les flux sont bilatéraux, également constaté dans le cas de référence. D'autre part, par rapport à la référence, les flux sont en moyenne 1.2 fois plus importants. On constatera également quelques échanges proches de la pointe de (P2).

Nous avons montré dans cette section que l'augmentation du débit d'injection favorise la croissance des trois fractures sans exception. Nous retrouvons des perturbations locales, tant sur le profil d'ouverture que sur celui de pression, suggérant un changement des mécanismes dominant la propagation. Cependant, dans ce cas, les fractures tendent à s'affirmer les unes par rapport aux autres (dans le cas de référence la fracture centrale (P2) tendait à pénaliser les latérales). Enfin, l'expression du *stress-shadowing effect* ne semble pas différer du cas de référence. Dans ce cas présent, comme dans le cas de référence, les trois fractures évoluent selon un régime dominé par la fracturation (moyennant une dominance locale des effets de dissipation visqueux due aux interactions entre les fractures). Ici encore, nous voyons que pour un groupe de fractures évoluant dans le *toughness-dominated regime*, dont certaines échangent le fluide injecté avec la matrice, le *stress-shadowing effect* s'exprimera encore par une zone inter-fractures caractérisée par une variation en traction de la contrainte verticale. Voyons maintenant ce qu'il se passe lorsque le débit d'injection est augmenté d'un facteur 4 par rapport à la valeur de référence.

5.3.3.3 Débit d'injection constant $Q_0 = 2 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$

Dans cette section, un débit d'injection constant $Q_0 = 2 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ est considéré pour toutes les fractures. Nous simulons l'injection pour $t \in [0, 12.5]$ (comparaison avec la référence à volume de fluide injecté identique). Compte tenu des valeurs des coefficients adimensionnels (cf. Tableau 5.3), les fractures latérales (P1) et (P3) se propageront dans le *near-leak-off-toughness dominated regime* et la fracture centrale (P2) dans le *near-storage-toughness dominated regime*.

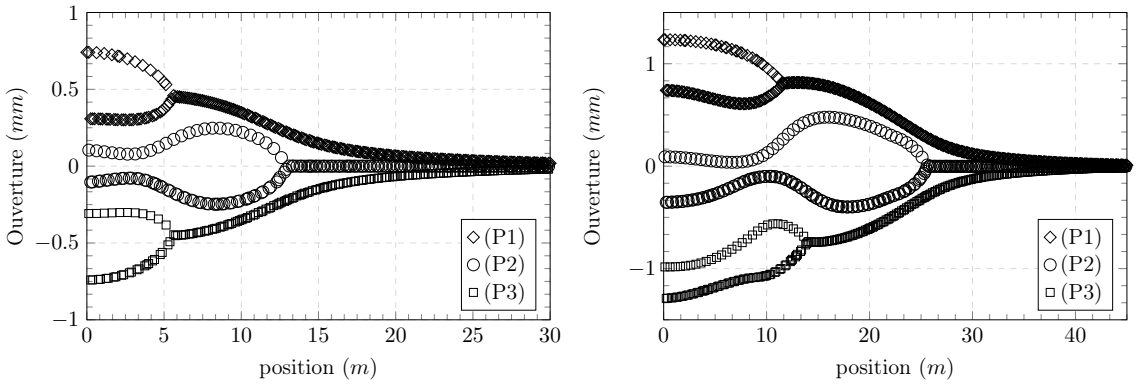


FIGURE 5.34 – *Profils des trois fractures pour le cas* $Q_0 = 2 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 3.75s$ *(gauche) et* $t_2 = 12.5s$ *(droite).*

À partir de la Figure 5.34 (droite), nous remarquons qu'à $t_2 = 12.5s$ les profils d'ouverture des différentes fractures du réseau ne sont plus symétriques. Ceci ne devrait pas se produire étant donné la symétrie des conditions aux limites imposées sur le domaine. Cette asymétrie peut être attribuée à une erreur numérique liée au découpage asymétrique (cf. Figure 3.5) en sous-éléments triangulaires des éléments quadrangulaires parents traversés par les différentes fractures. La répartition asymétrique des points d'intégration, associés à ces cellules d'intégration triangulaires, conduit à amplifier l'erreur numérique initiale, et ce, d'autant plus vite que le débit est important. Nous suspectons en effet que cette erreur numérique existait dans les configurations précédemment étudiées, mais restait négligeable

pour les gammes de débit et de temps de propagation considérées.

Ainsi, nous ne procèderons pas à l'analyse détaillée de ce cas, puisque les relations entre les différentes fractures semblent biaisées par cette anomalie numérique. Nous le mentionnons tout de même afin de souligner une limite supplémentaire du modèle HM-XFEM. Néanmoins, nous remarquerons tout de même que ce cas suit le même schéma que celui présenté en section 5.3.3.2. À partir des figures obtenues aux temps courts (pour lesquels l'anomalie numérique ne semble pas être encore remarquable) nous observons que :

- la longueur des fractures est plus importante que dans le cas de référence (cf. Figure 5.34 (gauche)) ;
- la fracture centrale (P2) semble dominer les fractures latérales (cf. Figure 5.34 (gauche)) ;
- le *stress-shadowing effect* se manifeste par une variation en traction de la contrainte effective verticale autour des fractures (P1) et (P3), corrélée à la progression du front de pression provenant de celles-ci (cf. Figure 5.35 (gauche)).

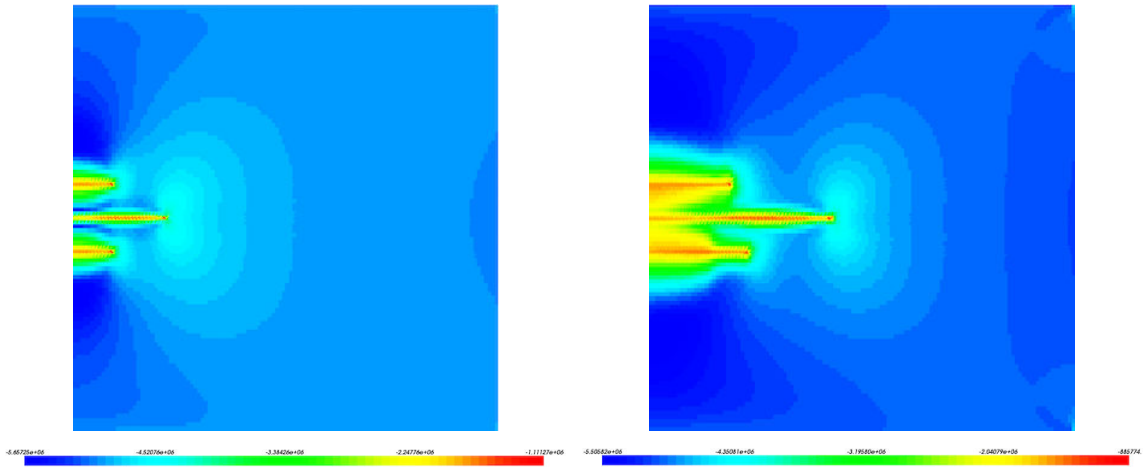


FIGURE 5.35 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas* $Q_0 = 2 \times 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$ *à* $t_1 = 3.75s$ *(gauche) et* $t_2 = 12.5s$ *(droite).*

5.3.4 Étude de l'influence de l'écartement sur la dynamique des fractures

5.3.4.1 Diagramme d'évolution du régime de propagation des fractures

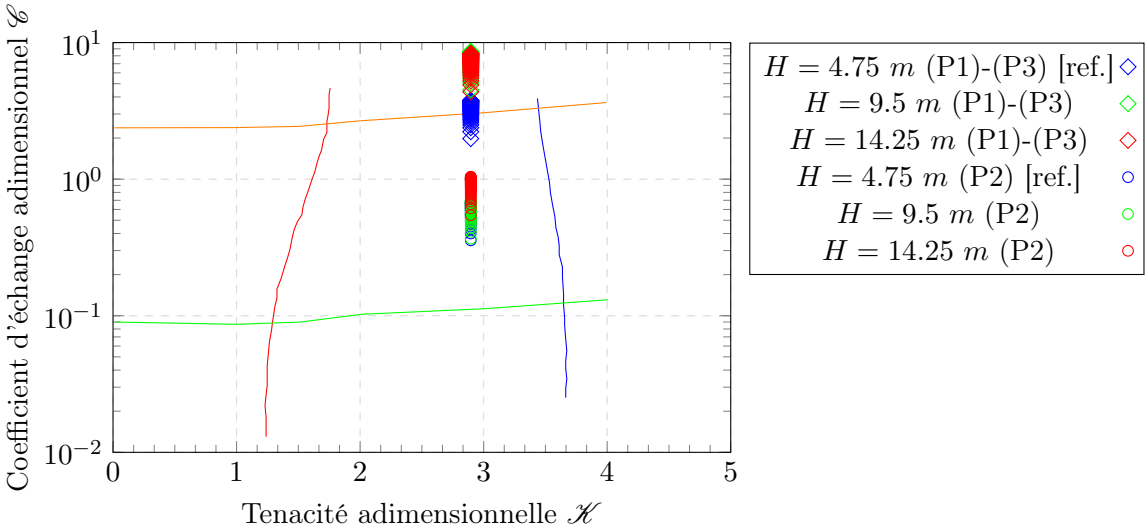


FIGURE 5.36 – *Diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) - Trajectoires d'évolution des 3 fractures en fonction de l'écartement des fractures par rapport à l'axe des abscisses.*

Pour finir ce chapitre, nous étudions dans cette section les interactions entre les trois fractures lorsque les deux latérales sont progressivement éloignées de la fracture centrale. Pour ce faire, nous présentons sur la Figure 5.36 les trajectoires d'évolution des différentes fractures dans le diagramme ($\mathscr{K}$,$\mathscr{C}$) proposé par Hu et Garagash [114].

Étant donné que l'écartement n'est pas un paramètre intervenant dans la définition des deux coefficients adimensionnels $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C}$ (cf. équation 4.2), il est normal de constater que quelque soit l'écartement considéré, les trois fractures suivront une trajectoire parallèle à la $K\widetilde{K}$*-edge* sachant que les paramètres matériau et d'évolution sont identiques à ceux du cas de référence. Cependant, alors que les fractures latérales sont éloignées de la fracture centrale, nous nous attendons à ce que les interactions entre les fractures se réduisent fortement.

Ainsi, quelque soit l'écartement considéré la fracture centrale (P2) évoluera dans le *near-storage-toughness dominated regime*, quasiment sans grande différence par rapport au cas de référence. En ce qui concerne les fractures latérales (P1) et (P3), on remarquera qu'elles se propageront dans le *near-leak-off-toughness dominated regime*, mais ce régime sera nettement plus marqué par les échanges dans le cas où $H = 14.25\ m$.

5.3.4.2 Écartement des fractures $H = 9.5\ m$

Nous simulons ici l'injection d'un fluide visqueux dont la viscosité est $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$ entre $t = 0s$ et $t = 50s$. Le débit d'injection est supposé constant et identique pour les trois fractures et est tel que $Q_0 = 5 \times 10^{-4}\ m^2.s^{-1}$. Cependant, dans ce cas présent, l'écartement est fixé à $H = 9.25\ m$ entre les fractures (P1) et (P2), ainsi qu'entre les fractures (P2) et (P3). D'après le Tableau 5.2, nous constatons que le coefficient d'échange a augmenté pour les fractures (P1) et (P3) et vaut désormais $C_L = 4.55 \times 10^{-4}\ m.s^{1/2}$. Pour la fracture centrale (P2), il semblerait que ce coefficient soit quasiment identique à celui considéré dans le cas de référence et vaut $C_L = 3.7 \times 10^{-5}\ m.s^{1/2}$. La valeur de la tenacité adimensionnelle est inchangée par rapport au cas de référence et est identique pour les trois

fractures. Ainsi $\mathscr{K}_{1,2,3} = 2.89$. La gamme de valeurs du coefficient d'échange adimensionnel est $\mathscr{C}_{1,3} = [4.5, 8.59]$ pour les fractures latérales et $\mathscr{C}_2 = [0.36, 0.7]$ pour la fracture centrale.

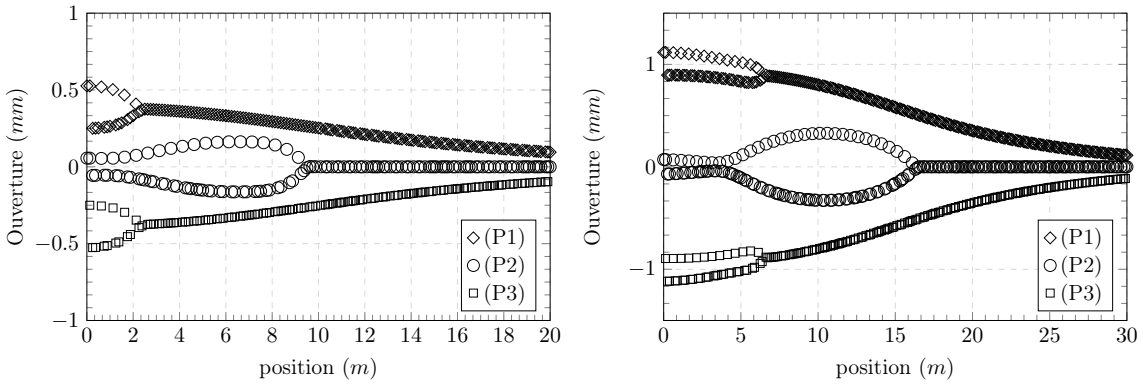


FIGURE 5.37 – *Profils des trois fractures pour le cas $H = 9.5\ m$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite).*

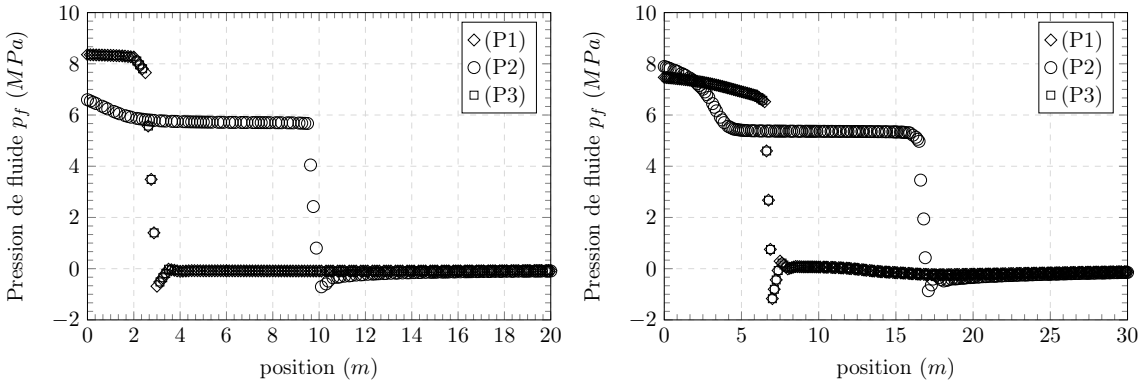


FIGURE 5.38 – *Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas $H = 9.5\ m$ à $t_1 = 15s$ (gauche) et $t_2 = 50s$ (droite).*

Pour commencer, nous remarquons qu'à $t_1 = 15s$ (cf. Figure 5.37 (gauche)), la longueur des fractures latérales (P1) et (P3) est un peu plus faible que dans le cas de référence. Au contraire, la longueur de la fracture centrale (P2) est inchangée par rapport à la référence. D'autre part, le profil d'ouverture des fractures latérales ne montre aucune perturbation locale, ce qui est cependant le cas pour (P2) pour $x \in [0, 2]$. En observant la carte d'iso-valeurs de la pression de pore dans le massif à $t_1 = 15s$ (cf. Figure 5.40 (gauche)), nous observons une large bande de diffusion du front de pression de chaque coté des deux fractures (P1) et (P3). Premièrement cela suggère des échanges de fluide importants avec le milieu poreux, et ce, au niveau des deux parois des fractures latérales (comme le confirme la Figure 5.42 (gauche)). Deuxièmement, dans le cas de référence à $t_1 = 15s$ (cf. Figure 5.5 (gauche)), la zone pour $y \in [-4.75, 4.75]$ (c'est-à-dire entourée par les deux fractures latérales (P1) et (P3)) est marquée par une valeur maximale de la pression de pore (environ 8.75 MPa). Or dans ce cas d'étude, la zone équivalente entourée par les deux fractures (P1) et (P3) pour $y \in [-9.25, 9.25]$ est caractérisée par une pression de pore plus faible (environ 3.7 MPa). Dans le cas de référence cette augmentation de la pression de pore induisait à la fois la refermeture des parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement, mais également des deux parois de (P2).

D'autre part, nous remarquons que sur la Figure 5.40 (gauche), la pression de pore sera maximale autour des deux fractures latérales (P1) et (P3), et décroît progressivement en s'écartant de l'axe de ces fractures. Ensuite, la carte d'iso-valeurs de la contrainte effective

verticale (cf. Figure 5.41 (gauche)) montre des bulbes de contraintes isolés les uns des autres (caractérisés par une variation en traction de la contrainte verticale) et séparés de part et d'autre de (P2) par deux zones un peu plus compressives. Par ces observations, nous déduisons qu'à $t_1 = 15s$, les fractures latérales vont évoluer quasiment indépendamment de la présence de (P2), mais auront une légère action sur (P2) étant donné qu'elles évoluent toutes les deux dans le *near-leak-off toughness dominated regime* (*i.e.* les échanges seront responsables de cette refermeture sur (P2)). La Figure 5.38 (gauche) vient renforcer cet argument. En effet, nous constatons que le profil de pression de fluide le long des fractures latérales (P1) et (P3) est uniforme, suggérant que d'une part la pression n'est localement pas perturbée par d'éventuels changements d'ouverture, et d'autre part que seule la dissipation d'énergie associée à la tenacité du matériau va contrôler leur propagation. Ensuite, une légère baisse de la pression est observée pour $x \in [0, 2]$, correspondant à une zone de réduction de l'ouverture de (P2). Les effets visqueux auront tendance à se manifester, mais seront rapidement atténués car, pour $x \in]2, 9.5]$, la pression mesurée le long de (P2) est uniforme, attestant que les effets de la tenacité du matériau participent à dissiper l'énergie du système.

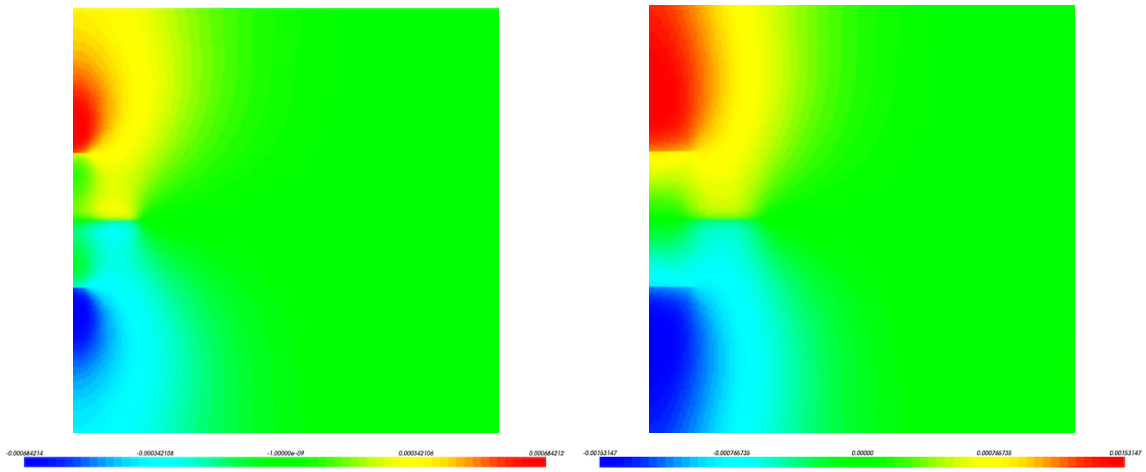


FIGURE 5.39 – *Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas* $H = 9.5\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite). (droite).*

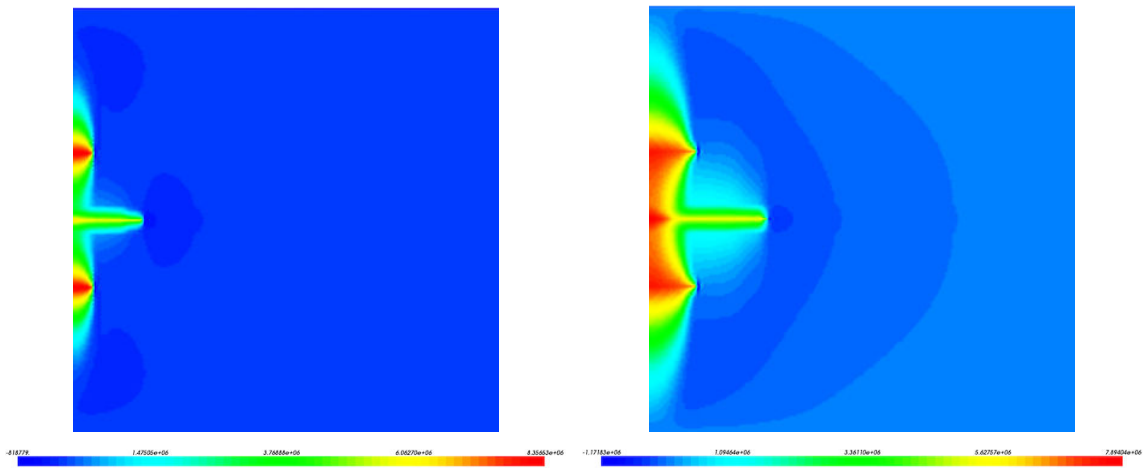


FIGURE 5.40 – *Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas* $H = 9.5\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

À $t_2 = 50s$, les interactions entre les fractures du réseau semblent évoluer. Notamment, nous remarquerons que la longueur des fractures latérales (P1) et (P3), et celle de (P2) sont légèrement plus petites que dans le cas de référence (cf. Figures 5.37 (droite) et 5.2 (droite)). Pour (P1) et (P3) cette différence s'explique par leur plus grande capacité à échanger le

fluide injecté avec le milieu poreux, puisque d'après la Figure 5.36, la position de ce cas d'étude par rapport au cas de référence dépasse la $\widetilde{M}\widetilde{K}$-*edge*. Dans le cas de (P2), alors que la pression continue d'augmenter dans la zone pour $y \in [-9.25, 9.25]$ jusqu'à atteindre sa valeur maximale (cf. Figure 5.40 (droite)), il se produit une forte variation en traction de la contrainte effective verticale (cf. Figure 5.41 (droite)). Cette variation en traction a un double impact sur la dynamique du réseau de fractures. Premièrement, elle va induire la fermeture de (P2) pour $x \in [0, 5]$, et deuxièmement induire la fermeture des parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement (cf. bande de déplacements positifs au niveau de (P1) et bande de déplacements négatifs au niveau de (P3) sur la Figure 5.39 (droite)). Ceci s'explique notamment par le gonflement du milieu poreux dans la zone inter-fractures. Ensuite, la refermeture locale de (P2) va induire une réduction de l'écoulement dans cette fracture. Ce qui explique pourquoi celle-ci est un peu plus courte que dans le cas de référence. D'autre part, nous retrouvons ces effets sur les profils de pression de fluide le long des trois fractures (cf. Figure 5.38 (droite)). En effet, la réduction d'ouverture des fractures latérales (P1) et (P3) va favoriser la dissipation de l'énergie associée aux effets visqueux. De même, pour $x \in [0, 5]$, le long de (P2). Pour $x \in]5, 16]$, alors que l'ouverture de la fracture augmente à nouveau, le profil de pression de fluide sera uniforme.

Pour conclure, nous remarquerons que pour ce cas où l'écartement entre les fracture a été multiplié par 2, il ressort que pour les faibles temps, associés à une faible dispersion du fluide dans la matrice poreuse, le *stress-shadowing effect* est pratiquement inexistant (cf. Figure 5.41 (gauche)), ou du moins participe à refermer localement la fracture centrale (P2). De ce fait les échanges au niveau des fractures latérales sont rendus possibles et sont bilatéraux (cf. Figure 5.42 (gauche)). Au contraire, pour des temps de propagation plus importants, les fronts de diffusion de pression en provenance des fractures latérales (pour $y \in [-9.75, 9.75]$) vont avoir tendance à fusionner, entrainant une variation en traction de la contrainte effective verticale dans cette zone. Pour cette configuration, le *stress-shadowing effect* sera renforcé (cf. Figure 5.41 (droite)) et s'exprimera bien comme dans le cas de référence. De ce fait, les échanges de fluide seront principalement localisés dans une zone restreinte proche des pointes des fractures (P1) et (P3) (cf. Figure 5.42 (droite)). L'augmentation de l'écartement inter-fractures semble donc retarder la mis en place des effets de compétition.

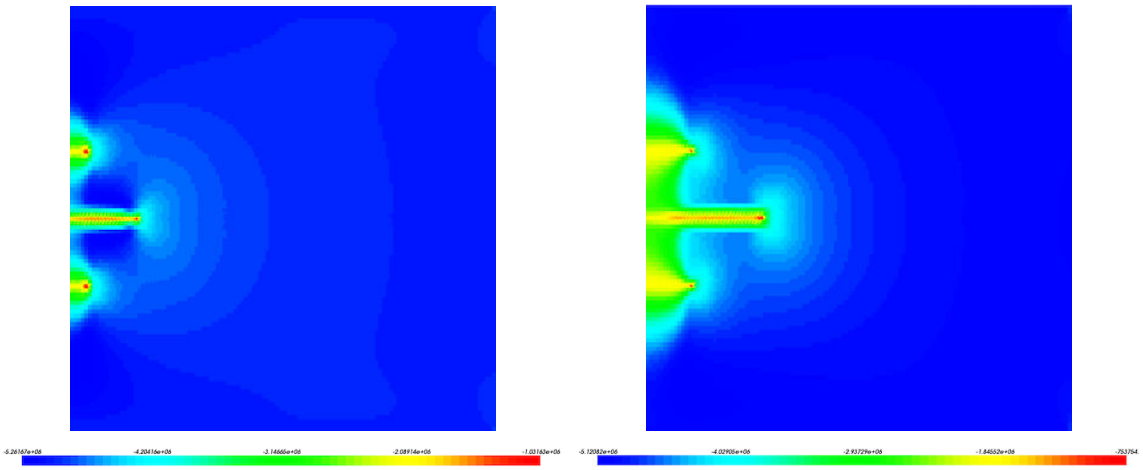


FIGURE 5.41 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas* $H = 9.5\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

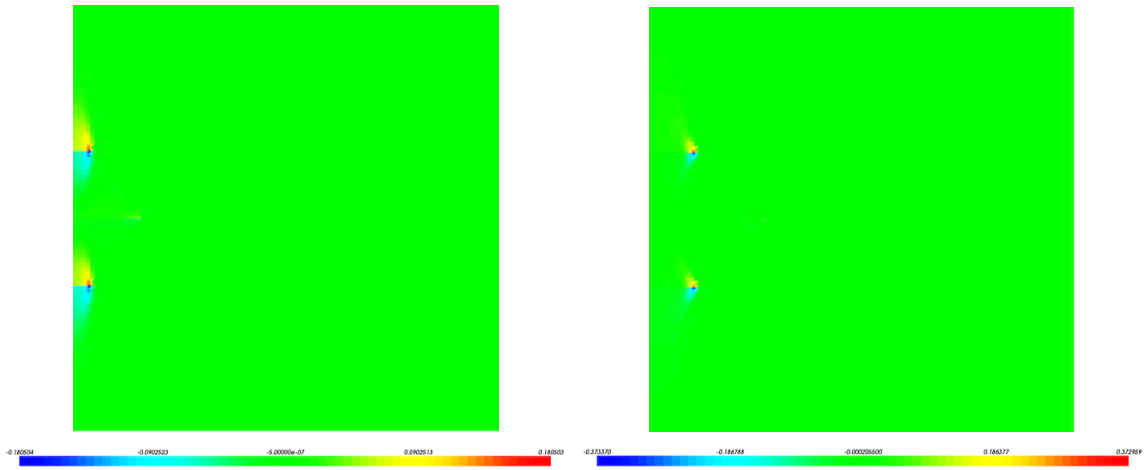


FIGURE 5.42 – *Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas* $H = 9.5\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

5.3.4.3 Écartement des fractures $H = 14.25\ m$

Pour terminer, nous étudions ici les interactions entre les fractures pour un écartement $H = 14.25\ m$ des fractures latérales (P1) et (P3) par rapport à l'axe de la fracture centrale (P2), soit une distance inter-fractures multipliée par 3 par rapport au cas de référence. Nous considérons toujours un fluide visqueux dont la viscosité est $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$. Le débit d'injection est inchangé, et identique (*i.e.* $Q_0 = 5 \times 10^{-4}\ m^2.s^{-1}$) pour les trois fractures. La simulation a été conduite entre $t = 0s$ et $t = 50s$. La gamme des coefficients adimensionnels (cf. Tableau 5.3), nous confirment bien que les fractures latérales (P1) et (P3) seront contrôlées par le *near-leak-off-toughness dominated regime* tandis que la fracture centrale (P2) se propagera dans le *near-storage-toughness dominated regime.*

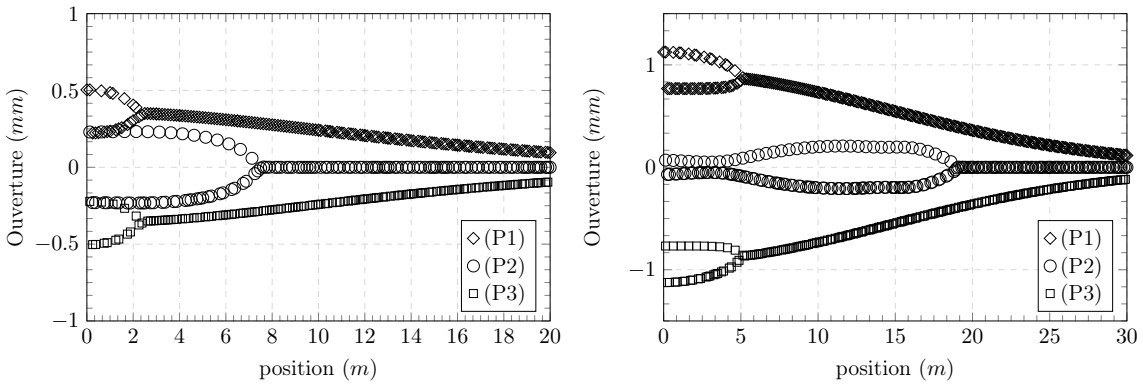


FIGURE 5.43 – *Profils des trois fractures pour le cas* $H = 14.25\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

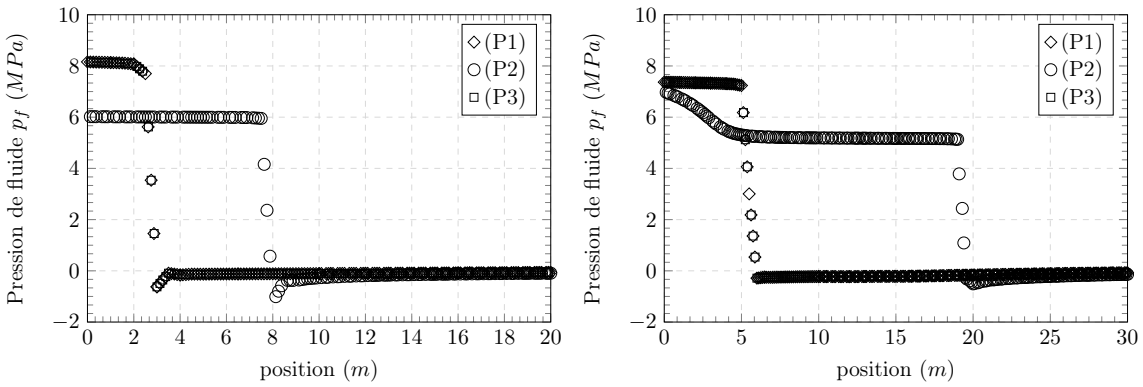


FIGURE 5.44 – *Profils de pression de fluide le long des trois fractures pour le cas* $H = 14.25\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Pour les temps courts, à $t_1 = 15s$, nous remarquons dans un premier temps que l'ouverture et la longueur des fractures latérales (P1) et (P3) est inchangée par rapport au cas où l'écartement des fractures est $H = 9.25\ m$. Cependant, pour les raisons exposées dans la section 5.3.4.2, l'ouverture et la longueur de ces fractures sont un peu plus faibles que dans le cas de référence. Ensuite, nous constatons que l'ouverture de la fracture centrale (P2) ne présente plus de perturbations locales, comme cela pouvait être le cas pour un écartement de $H = 9.25\ m$ et pour le cas de référence (cf. Figure 5.43 (gauche)). Nous pouvons en effet observer sur la carte d'iso-valeurs des déplacements verticaux (cf. Figure 5.45 (gauche)) des zones de déplacements déconnectées d'une fracture à une autre. Nous pouvons noter aussi que les fronts de diffusion de la pression de pore émanant des fractures latérales (pour $y \in [-14.25, 14.25]$) n'interagissent quasiment plus entre eux (cf. Figure 5.46 (gauche)), et la pression de pore mesurée dans le massif, proche de la couche centrale, est d'environ 1.12 MPa sachant que dans cette zone la pression est bien plus importante, soit environ 3.46 MPa. De plus, nous observons sur la Figure 5.47 (gauche), que les zones caractérisées par une variation en traction de la contrainte effective verticale semblent être totalement déconnectées les unes des autres et entourent les fractures. Enfin, la zone inter-fractures est caractérisée par un état de contrainte proche de la valeur de celle du champ de contrainte *in situ* (*i.e.* $\sigma_0 = 5\ MPa$). Les échanges de fluide seront également autorisés dans les deux sens au niveau des fractures latérales (P1) et (P3) comme le montre la Figure 5.48 (gauche). Cela nous confirme bien que les trois fractures vont évoluer indépendamment les unes des autres. En effet, sur les profils de pression de fluide le long des trois fractures, nous ne constatons aucune perturbation locale, et pour chaque fracture, la pression de fluide mesurée est uniforme, attestant que la propagation des fractures (P1), (P2) et (P3) ne sera sujette qu'aux effets de dissipation de l'énergie associés à la tenacité du matériau. Toutes ces observations montrent que le *stress-shadowing effect* est inexistant à $t_1 = 15s$.

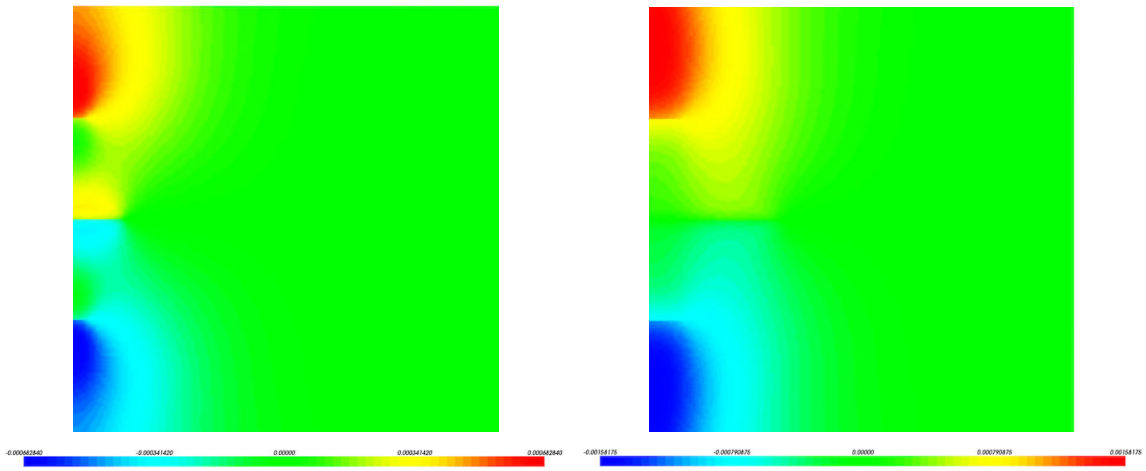


FIGURE 5.45 – *Cartes d'iso-valeurs des déplacements relatifs pour le cas* $H = 14.25\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

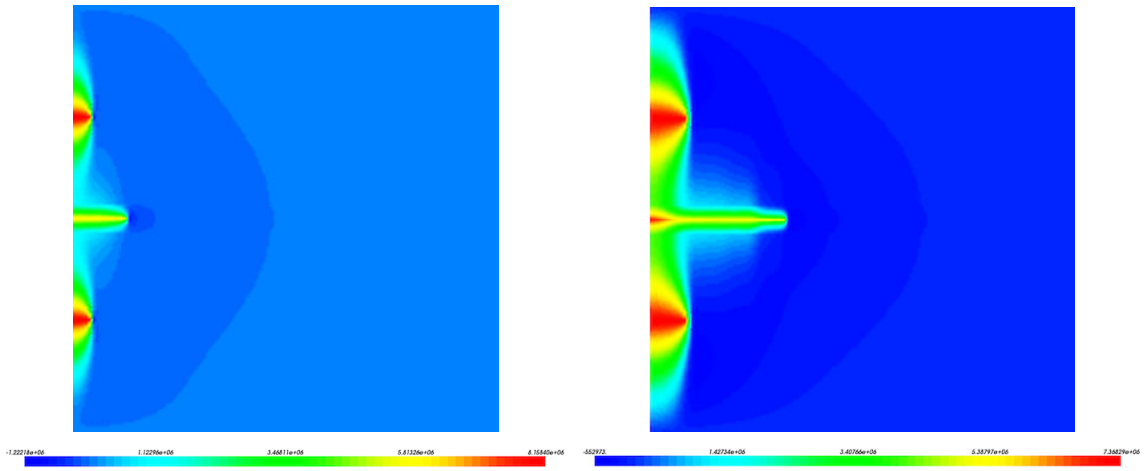


FIGURE 5.46 – *Cartes d'iso-valeurs de pression de pore pour le cas* $H = 14.25\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Pour $t_2 = 50s$, il est désormais possible d'observer des interactions entre les trois fractures. En effet, comme le montre la Figure 5.45 (droite), les bulbes de déplacements positifs et négatifs observés autour de (P2) semblent avoir disparu et font désormais place à des déplacements quasiment nuls dans la zone entourée par (P1) et (P3) jusqu'à leurs pointes. À partir de la Figure 5.43 (droite), nous remarquons effectivement que l'ouverture de (P2) est localement réduite pour $x \in [0, 5]$, correspondant approximativement à la longueur des fractures latérales (P1) et (P3), qui semblent néanmoins plus courtes que dans le cas où l'écartement est $H = 9.25\ m$. D'autre part, la fracture centrale (P2) semble être plus longue, mais moins ouverte pour $x \in]5, 18.75]$ par rapport au cas précédent (cf. Figure 5.37 (droite)). Afin d'expliquer ces effets, penchons nous sur l'analyse des cartes d'iso-valeurs de la pression de pore (cf. Figure 5.46 (droite)) et de la contrainte effective verticale (cf. Figure 5.47 (droite)). Dans la zone inter-fractures pour $y \in [-14.25, 14.25]$, la contrainte mesurée est proche de la valeur de la contrainte *in situ*, mais subit néanmoins une variation en traction moins importante que dans le cas de référence et dans le cas évoqué dans la section précédente. En effet, du fait du plus grand espacement entre les fractures, une pression de pore plus importante est mesurée autour des fractures latérales, et celle-ci tendra naturellement à diminuer dès lors que le front de diffusion s'atténue au fur et à mesure qu'il se rapproche de la fracture centrale (P2). Cela provoque tout de même un gonflement de la matrice dans la zone inter-fractures, à l'origine de la refermeture de

la fracture centrale (P2) et des parois inférieure et supérieure de (P1) et (P3) respectivement.

De plus, nous constatons encore sur l'évolution des profils de pression de fluide (cf. Figure 5.44 (droite)), une diminution de la pression de fluide sur le profil de (P2), due à la fermeture locale de ses parois pour $x \in [0, 5]$, suivie ensuite d'une évolution uniforme de la pression lorsque l'ouverture augmente à nouveau. Dans le premier cas, la dissipation de l'énergie associée aux effets visqueux dominera dans une zone proche du point d'injection, puis laissera place aux effets associés à la tenacité du matériau lorsqu'on se rapproche de la pointe de (P2). Ce dernier sera également le moteur de la propagation de (P1) et (P3), puisque la pression mesurée est uniforme du point d'injection jusqu'aux pointes de ces fractures.

Nous voyons donc que dans cette configuration, la répartition des contraintes à $t_2 = 50s$ est comparable à celle du cas où l'écartement des fractures est $H = 9.25\ m$ mais à $t_1 = 15s$ (cf. Figure 5.41 (gauche)). Les effets de compétition (*i.e.* le *stress-shadowing effect*) se font toujours ressentir mais plus tardivement.

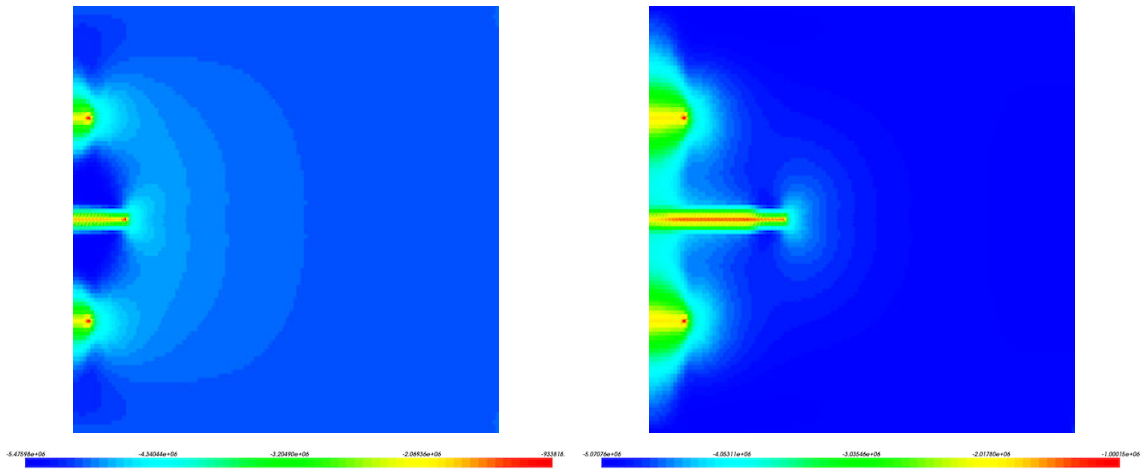


FIGURE 5.47 – *Cartes d'iso-valeurs de la contrainte verticale pour le cas* $H = 14.25\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

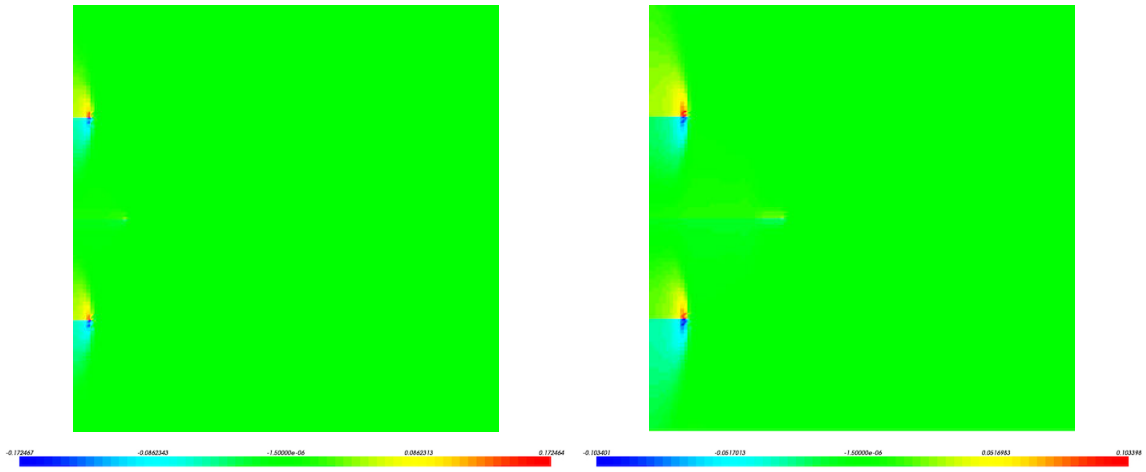


FIGURE 5.48 – *Cartes d'iso-valeurs des flux verticaux au niveau des 3 fractures pour le cas* $H = 14.25\ m$ *à* $t_1 = 15s$ *(gauche) et* $t_2 = 50s$ *(droite).*

Pour conclure, l'étude de l'influence de l'écartement des fractures a montré que, pour une valeur fixe de la tenacité adimensionnelle $\mathscr{K}$ suggérant que les fractures évoluent uniquement dans le *toughness dominated regime*, seuls les échanges de fluide avec la matrice (provenant

des fractures latérales) influent sur l'expression du *stress-shadowing effect*. Celui-ci sera toujours caractérisé par une variation en traction de la contrainte effective verticale dans la zone inter-fractures. Néanmoins, il semblerait que cet effet soit retardé lorsque l'écartement augmente. Pour retrouver de fortes interactions entre les fractures, il faudrait considérer des temps de propagation suffisamment grands (suggérant une augmentation du coefficient d'échange adimensionnel $\mathscr{C}$) pour permettre des échanges de fluide important avec la matrice.

5.3.5 Synthèse des résultats

Afin de synthétiser les résultats obtenus au cours de cette étude, nous avons trouvé judicieux de représenter, pour chacune des trois fractures, le temps de propagation des fractures (pour une longueur donnée) en fonction du paramètre d'interêt (*i.e.* la viscosité du fluide injecté μ, le débit d'injection Q_0, et l'écartement inter-fractures H). De manière adimensionnée, ce temps de percée t_p peut s'exprimer par le rapport d'un volume de pore de percée V_{BT} sur le volume de pore initial V_p et est tel que :

$$\frac{V_{BT}}{V_p} = \frac{Q_0 t_p}{L_p h \varphi} \tag{5.1}$$

avec L_p la longueur de percée considérée, $h = 60\ m$ la hauteur du domaine, φ la porosité de la matrice solide, Q_0 le débit d'injection et t_p le temps de percée.

Ce rapport peut être vu comme un temps adimensionnel permettant d'estimer l'instant pour lequel un sous-domaine du domaine total sera entièrement percé par les fractures. Étant donné que les trois fractures ne se propagent pas selon le même régime (en particulier (P1) et (P3) seront beaucoup plus courtes que (P2), du fait des échanges de fluide avec la matrice), nous définissons deux sous-domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ respectivement associés à la fracture centrale (P2) et aux fractures latérales (P1)-(P3). La longueur de percée L_p est choisie arbitrairement de manière à ce que, pour un instant de percée t_p donné, la totalité du domaine $\mathscr{D}_i$ est entièrement traversée par la fracture. Ainsi :

$$\mathscr{D}_1 : L_p \times h = 15 \times 60 = 900\ m^2 \tag{5.2}$$

$$\mathscr{D}_2 : L_p \times h = 5 \times 60 = 300\ m^2 \tag{5.3}$$

5.3.5.1 Cas de la viscosité du fluide injecté

Nous présentons sur les Figures 5.49 (gauche) et (droite) l'évolution du temps de propagation adimensionnel en fonction de la viscosité du fluide pour la fracture centrale (P2) et les fractures latérales (P1) et (P3) respectivement. Sur ces deux figures, il est intéressant de remarquer la présence de deux minima locaux, le premier en $\mu = 1 \times 10^{-3}\ Pa.s$ pour la fracture centrale (P2), et le second en $\mu = 1 \times 10^{-2}\ Pa.s$ pour (P1) et (P3). La présence de ces optima suggère qu'il existe un changement dans le comportement et dans les interactions entre les fractures, comme nous avons pu le montrer dans la section 5.3.2.

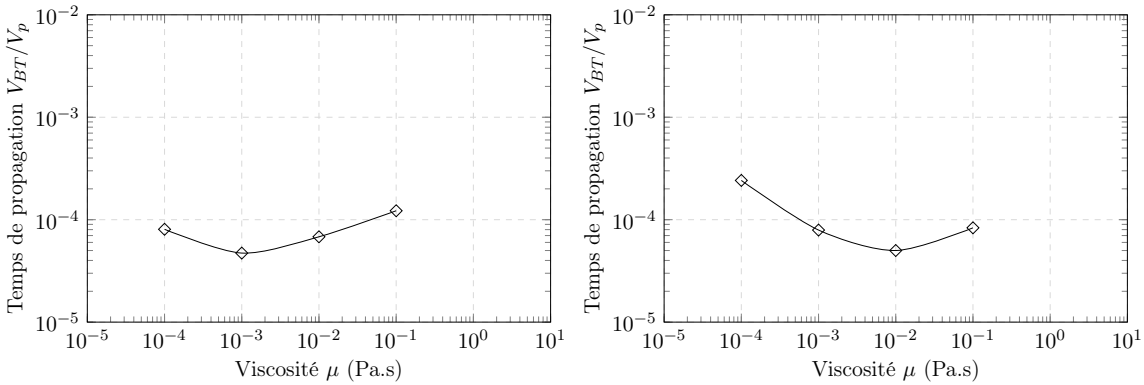


FIGURE 5.49 – *Représentation du volume de pore injecté en fonction de la viscosité du fluide injecté : fracture centrale (gauche) et latérales (droite).*

Rappelons que dans le cas de la fracture centrale (P2) (cf. Figure 5.8), pour de fortes valeurs de viscosité (en aval de l'optimum $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$), (P2) se propage dans le *storage-viscosity dominated regime* (*i.e.* la dissipation de l'énergie est associée exclusivement aux effets visqueux et les échanges de fluide avec la matrice n'ont pas lieu). Dès que l'optimum est dépassé, pour des valeurs de viscosité plus faibles, elle se propage dans le *near-storage-toughness dominated regime* (*i.e.* la dissipation de l'énergie est majoritairement associée à la fracturation du matériau, mais les effets visqueux peuvent se manifester localement. De faibles échanges de fluide se produisent au niveau de la couche centrale). Ensuite, le régime de propagation observé à l'optimum peut expliquer la présence de ce point particulier sur la courbe. En effet, en ce point, la fracture (P2) se propage dans le *near-storage-viscosity dominated regime*. Comme nous avons pu le montrer dans la section 5.3.2.4, la dissipation de l'énergie est principalement associée aux effets visqueux pour les temps courts, mais la fracturation du matériau est favorisée pour les temps longs (cf. profil de pression de fluide sur les Figures 5.22 (gauche) et (droite)). Pour μ évoluant de 1×10^{-1} $Pa.s$ à 1×10^{-3} $Pa.s$, l'influence des effets visqueux sur la dissipation de l'énergie s'atténue progressivement : le rapport V_{BT}/V_p diminue suggérant que le temps pour percer la totalité du domaine représentatif $\mathscr{D}_1$ est plus court, donc que la longueur de la fracture augmente avec la diminution de la viscosité. En $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$, le temps mis par la fracture centrale pour percer $\mathscr{D}_1$ est le plus court. Ensuite, lorsque l'optimum est dépassé (P2) va mettre plus de temps pour percer $\mathscr{D}_1$. Du fait de sa position dans le diagramme présenté sur le Figure 5.8, il peut se produire des échanges avec la matrice rocheuse (ceux-ci sont mineurs puisque (P2) traverse la couche centrale imperméable) qui peuvent participer à réduire l'avancée de (P2). Ce changement de comportement associé aux échanges, est un argument supplémentaire justifiant la présence de cet optimum.

Contrairement à la fracture centrale (P2), la position de l'optimum pour les fractures latérales apparaît pour $\mu = 1 \times 10^{-2}$ $Pa.s$. La position décalée de cet optimum par rapport au cas de la fracture centrale s'explique par les valeurs prises par le coefficient d'échange adimensionnel $\mathscr{C}_{1,3}$, plus importantes que $\mathscr{C}_2$. De ce fait, pour de fortes valeurs de viscosité (en aval de l'optimum) alors que la matrice se comporte comme un milieu imperméable, le temps pour percer la totalité du domaine représentatif $\mathscr{D}_2$ diminue lorsqu'on se rapproche de l'optimum (*i.e.* le rapport V_{BT}/V_p diminue). Puis lorsque l'optimum est dépassé (la viscosité du fluide injecté diminue), le temps pour percer la totalité du domaine $\mathscr{D}_2$ augmente (*i.e.* le rapport V_{BT}/V_p augmente), puisque les fractures latérales vont échanger de plus en plus le fluide injecté avec la matrice poreuse. Pour les fractures latérales, il semblerait que le régime de dissipation de l'énergie soit moins impliqué dans l'apparition de cet optimum. En effet, pour $\mu \in [0.001, 0.1]$, les effets de dissipation de l'énergie associée aux effets visqueux semblent dominer la propagation de (P1) et (P3). Or, pour $\mu = 1 \times 10^{-3}$ $Pa.s$, l'optimum à

été dépassé.

La présence de ces deux optima va également donner une indication sur le mode d'expression du *stress-shadowing effect* :

- pour $\mu > 1 \times 10^{-2}$, le *stress-shadowing effect* sera surtout marqué par une zone inter-fractures caractérisée par de fortes contraintes compressives. Dans ce cas, la fracture centrale (P2) semble avoir une influence sur les fractures latérales (P1) et (P3) sur toute leur longueur, alors que (P1) et (P2) n'en n'ont pas. La dissipation de l'énergie associée à la dominance des effets visqueux semble être à l'origine de ce phénomène ;
- au contraire pour $\mu < 1 \times 10^{-3}$, les interactions entre les fractures vont évoluer différemment. Le *stress-shadowing effect* sera associé à une zone inter-fractures montrant une variation en traction de la contrainte effective verticale. Les fractures latérales auront alors une influence locale prononcée (proche de leurs pointes) sur la fracture centrale (P2), participant à la refermeture de ses parois. (P2) participera également à refermer (P1) et (P3). Le mécanisme responsable de ces interactions sera principalement les échanges de fluide avec la matrice solide (*i.e.* gonflement du milieu poreux dans la zone inter-fractures) ;
- la gamme de viscosité $\mu \in [0.001, 0.01]$ marquera la zone de transition entre le *stress-shadowing effect* marqué par de fortes contraintes compressives et le *stress-shadowing effect* marqué par une variation en traction de la contrainte verticale effective. Cette transition sera particulièrement visible pour le cas de la fracture centrale (P2) entre les temps courts et les temps longs (cf. Figure 5.25 (gauche) et (droite)). Dans le cas de cette fracture, la transition d'un régime dominé par les effets de dissipation visqueux vers un régime dominé par la tenacité du matériau et associé à de faibles échanges dans la couche centrale semble être à l'origine de cette transition entre les temps courts ((P1) et (P3) auront une influence faible sur (P2)) et les temps longs ((P1) et (P3) auront une influence plus importante sur (P2)).

Abbas et Lecampion [2], pour le cas de la propagation radiale d'une seule fracture dans un milieu imperméable, ont introduit un temps adimensionnel pour caractériser la transition entre le *M-regime* et le *K-regime*. Ils ont notamment pu constater que la longueur de la fracture semblait augmenter avec la diminution de la valeur de ce paramètre adimensionnel (*i.e.* diminution des effets liés à la viscosité). En effet, cette évolution est constatée dans notre étude (cf. Figure 5.49 pour $\mu \in [0.001, 0.1]$ dans le cas de (P2) par exemple). Cependant, nous observerons la présence d'un optimum du fait de l'évolution des interactions entre les différentes fractures, contrairement à Abbas et Lecampion [2] qui ne considèrent qu'une seule fracture et un milieu imperméable.

5.3.5.2 Cas du débit d'injection

Dans cette section, nous représentons sur les Figures 5.50 (gauche) et (droite) l'évolution du temps de propagation adimensionnel en fonction du débit d'injection pour la fracture centrale (à gauche) et les fractures latérales (à droite). Dans les deux cas, nous observons un comportement similaire entre les trois fractures. De plus, dans la gamme de valeurs du débit d'injection considéré, nous n'observons pas ici d'optimum comme cela pouvait être le cas dans la section 5.3.5.1.

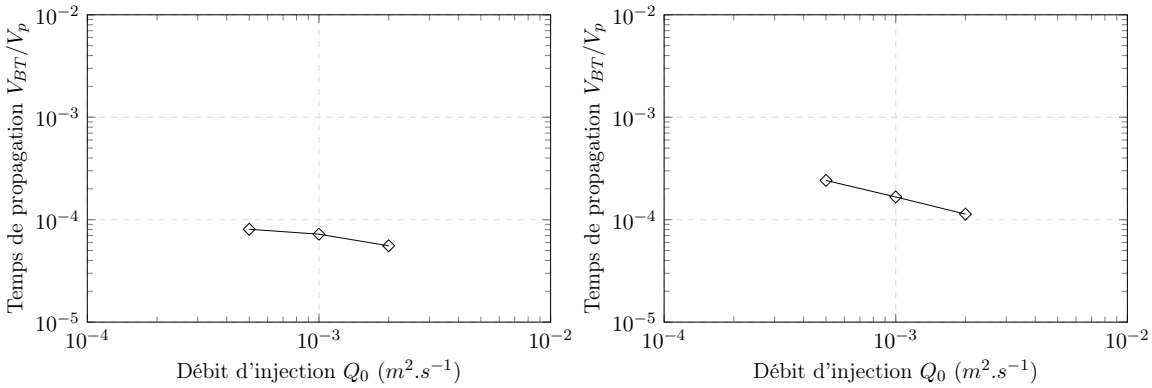


FIGURE 5.50 – *Représentation du volume de pore injecté en fonction du débit d'injection : fracture centrale (gauche) et latérales (droite).*

Globalement pour les trois fractures, nous observons que le rapport V_{BT}/V_p diminue quand le débit d'injection Q_0 augmente. En d'autres termes, le temps pour percer la totalité des volumes représentatifs $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ (associés respectivement aux fractures (P2) et (P1)-(P3)) diminue avec l'augmentation du débit. Par conséquent, la longueur des fractures est globalement plus importante. De plus, l'évolution des trois fractures est similaire au comportement observé pour (P2) et (P1)-(P3) sur les Figures 5.49 (gauche) et (droite) respectivement lorsque $\mu \in [0.0001, 0.001]$. En effet, comme nous pouvons le remarquer sur les Figures 5.8 et 5.27, les trois simulations portant sur l'étude du débit et les deux simulations portant sur l'étude de la viscosité (pour $\mu \in [0.0001, 0.001]$) se situent dans le même domaine délimité par les quatre frontières des régimes asymptotiques. Il semblerait que l'augmentation de la valeur du débit d'injection entraine des effets similaires à l'augmentation de la viscosité du fluide injecté : cela participe à renforcer les effets visqueux sur la dissipation de l'énergie du système. De plus, dans le cas de l'augmentation de la viscosité du fluide injecté, cela s'accompagnait d'une diminution des échanges, en particulier pour les fractures latérales (celles-ci passaient du *near-leak-off-toughness dominated regime* au *near-storage-viscosity dominated regime*). Au contraire, lorsque le débit d'injection augmente, les échanges avec la matrice rocheuse ne semblent pas être affectés significativement ($\mathscr{C}_{1,3}$ sont assez proches) puisque pour les trois simulations, (P1) et (P3) restent dans le *near-leak-off-toughness dominated regime* (de même pour la fracture (P2) restant dans le *near-storage-toughness dominated regime*). Cependant, leur trajectoire d'évolution tend à se rapprocher de la $M\widetilde{M}$*-edge*. Ainsi, pour une viscosité donnée, l'augmentation du débit d'injection aura tendance à favoriser la compétition entre les deux mécanismes responsables de la dissipation de l'énergie du système au cours de la propagation.

En termes d'interactions, comme nous avons pu le montrer dans la section 5.3.3, le *stress-shadowing effect* sera toujours caractérisé par une variation en traction de la contrainte effective verticale dans la zone inter-fractures, du fait de l'augmentation de la pression de pore dans cette zone. En particulier, les fractures latérales auront tendance à refermer localement la fracture centrale (qui elle même agira sur ces dernières) dans une zone proche de leurs pointes où les échanges sont supposés être les plus importants.

5.3.5.3 Cas de l'écartement des fractures

Pour finir, nous présentons dans cette section l'évolution du temps de propagation adimensionnel en fonction de l'écartement inter-fractures (cf. Figures 5.51 (gauche) et (droite) pour la fracture centrale (P2) et les fractures latérales (P1) et (P3) respectivement).

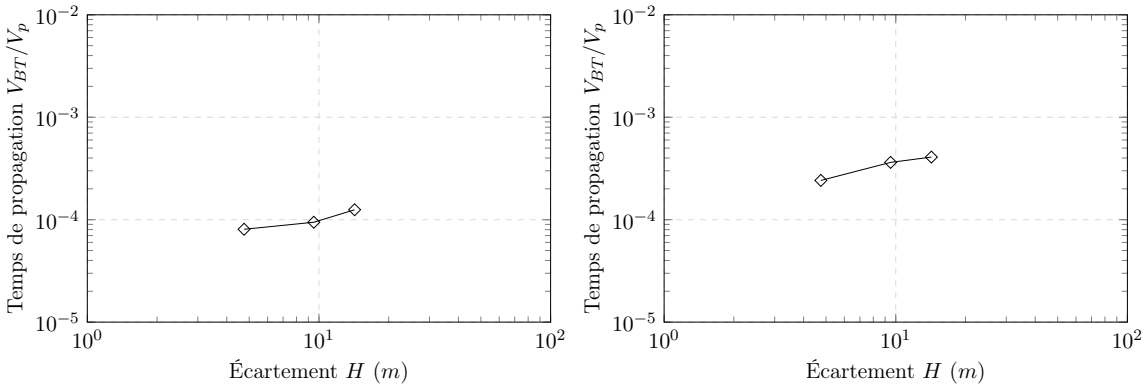


FIGURE 5.51 – *Représentation du volume de pore injecté en fonction de l'écartement des fractures : fracture centrale (gauche) et latérales (droite).*

Étant donné que l'écartement inter-fractures n'est pas un paramètre contrôlant la dissipation de l'énergie au cours de la propagation (évolution des trois simulations selon une trajectoire verticale unique (cf. Figure 5.36)), le seul mécanisme contrôlant la propagation et les interactions entre les fractures est relié aux échanges latéraux de fluide avec la matrice poreuse.

Comme nous pouvons le remarquer sur les Figures 5.51 (gauche) et (droite), le rapport V_{BT}/V_p augmente lorsque l'écartement inter-fractures augmente (mais cela est très peu significatif pour la fracture centrale (P2)). Cela implique donc que le temps pour percer la totalité des volumes représentatifs $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ augmente avec l'écartement inter-fractures. Ainsi, les fractures auront tendance à être plus courtes (comme nous avons pu le remarquer dans la section 5.3.4) puisque les échanges avec la matrice poreuse seront bilatéraux du fait de l'augmentation de l'espace inter-fractures. De plus, le comportement des fractures latérales (P1) et (P3) semble tendre vers un palier (pas encore le cas de (P2)), correspondant à la propagation d'une fracture isolée (cf. Figure 5.51 (droite)).

En termes d'interactions, le *stress-shadowing effect* s'exprimera par une variation en traction de la contrainte effective verticale. Néanmoins, nous avons observé que l'intensité de cet effet semblait dépendre de la progression du front de diffusion de pression de pore (donc indirectement à l'instant de propagation considéré). En d'autres termes, pour les temps courts, le *stress-shadowing effect* sera quasiment inexistant (voire inexistant lorsque l'espace inter-fractures augmente : la contrainte mesurée est alors proche de la valeur *in situ* dans cette zone). Au contraire, il s'exprimera par une variation en traction de la contrainte effective verticale pour les temps plus longs. Encore une fois, plus l'écartement entre les fractures augmentera et plus cette variation sera faible, et la contrainte mesurée dans la zone inter-fractures tendra vers la valeur *in situ*.

Conclusion générale

Dans le cadre de l'action thématique prioritaire ATP5 du LABEX RESSOURCES 21, axée sur le développement de géo-modèles, nous avons mis en œuvre un modèle numérique original capable de rendre compte de l'évolution de fractures soumises à un écoulement de fluide. En particulier, grâce à la méthode XFEM (et à la technique des *level-sets*), nous sommes désormais capables de modéliser le comportement du milieu poreux fracturé sans avoir recours à des techniques de remaillage complexes, et ce, quelque soit le nombre et la forme des fractures considérées.

Bien que la méthode XFEM soit relativement flexible, en termes de mise en œuvre et d'efficacité, nous avons dû faire face à quelques points sensibles dans la formulation théorique et informatique du modèle HM-XFEM. Le problème majeur a été le choix du type de loi cohésive à introduire. Initialement nous étions supposés considérer une loi cohésive régularisée afin de décrire la dynamique hydro-mécanique de la fracture. En effet, du fait de sa formulation, peu d'efforts de mise en œuvre auraient été requis. Cependant, dans l'état actuel de Code_Aster, ces lois ne sont disponibles que pour des éléments finis linéaires (or notre modèle requiert des éléments quadratiques). D'autre part, il a été montré par Ferte et al. [84] que ce type de loi est instable dans le cadre de la méthode XFEM. La loi cohésive non régularisée de Talon-Curnier a donc été envisagée et étendue au cas des fractures hydrauliques. Néanmoins, cette loi nécessite une attention particulière dans la formulation des grandeurs définies au niveau de la discontinuité. Une formulation impliquant des multiplicateurs de Lagrange a donc été introduite, pour la mécanique (selon les travaux de Lorentz [142]) et pour l'hydrodynamique (suivant Carrier et al. [36], mais initialement développée pour le cas des lois cohésives régularisées). À l'aide des développements préalablement existants dans Code_Aster, que nous avons adaptés et étendus aux cas du modèle de couplage poro-mécanique couplé HM, nous avons ainsi gagné en stabilité.

Le modèle HM-XFEM a ensuite été validé au moyen du benchmark KGD, et ce, pour différents régimes de propagation d'une fracture hydraulique. Le modèle se limite cependant à la propagation d'une fracture selon un chemin prédéfini. Dans tous les cas testés, la correspondance entre la solution analytique et la solution numérique est très bonne. En particulier, nous n'avons pas noté d'oscillations parasites dans les résultats numériques. Cela suggère donc que le choix d'une loi cohésive non régularisée était approprié. Cependant, il semblerait tout de même que de petites instabilités locales persistent encore. En particulier, nous avons montré l'existence d'une singularité sur le profil de contrainte cohésive effective (également visible sur le profil de pression de fluide) dans la partie en contact de la zone cohésive lorsque les échanges avec la matrice sont négligeables. Néanmoins, lorsque la fracture échange le fluide injecté avec le massif, cette singularité est d'autant plus faible (voire inexistante) que les échanges sont importants. Le couplage de l'écoulement, avec le régime de la loi de Talon-Curnier pour lequel les parois de la fracture sont en contact, semble donc être un point à améliorer. Ce point est actuellement en évaluation dans le cadre de la thèse de Bertrand Paul, notamment grâce à l'adaptation au formalisme du modèle HM-XFEM des éléments cohésifs basés sur une formulation de type MORTAR développée par Ferte et

al. [82, 84].

Enfin, nous avons montré que le modèle HM-XFEM était capable de gérer la propagation de plusieurs fractures (le long de chemins prédéfinis mais sans que ceux-ci ne s'intersectent) au sein du milieu poreux. L'étude des effets d'interaction entre les différentes fractures était l'objectif de cette étude. Pour ce faire, nous avons fait varier différents paramètres, afin de constater l'importance des interactions lorsque différents régimes de propagation sont impliqués. Au travers de cette étude, nous avons pu mettre en évidence quelques instabilités numériques (perte de symétrie des profils des différentes fractures) pour des valeurs élevées du flux d'injection. Le sous-découpage asymétrique des éléments parents traversés par les fractures pourrait expliquer cette instabilité.

Perspectives

Afin de parvenir à mettre en place un géo-modèle robuste et polyvalent, de nouvelles fonctionnalités doivent être intégrées au modèle HM-XFEM. En particulier, il sera étendu au cas 3D. Cependant, cette extension n'est pas triviale puisqu'elle nécessite l'introduction de nouveaux éléments 3D quadratiques. Malheureusement, ces éléments sont peu robustes et souffrent de défauts de conditionnement. Une procédure a été mise en place par Paul et al. [174], pour surmonter les inconvénients liés à ces éléments quadratiques en 3D. De plus, il sera ensuite possible de considérer un réseau de fractures hydrauliques comportant des jonctions (cf. exemple sur la Figure 5.52 (gauche)). En mécanique, ce type de problème impliquant des jonctions a été étudié par Duarte et al. [73] et Fries et al. [90]. Comme déjà mentionné dans le chapitre 3 de ce mémoire (et voir Faivre et al. [80]), il sera ensuite possible de prendre en compte des géométries de fractures plus complexes, notamment des fractures courbes. Cette amélioration sera possible grâce aux travaux récents de N'Deffo et al. [160] en ce qui concerne la nette amélioration du conditionnement des matrices pour le cas des éléments quadratiques 3D mécaniques (cf. exemple sur la Figure 5.52 (droite)). Il serait ensuite judicieux d'adapter l'algorithme de réduction des espaces de multiplicateur de Lagrange proposé par Ferte et al. [83] pour le cas du modèle HM-XFEM. Pour finir, nous étendrons notre modèle au cas de la propagation de fractures hydrauliques sur chemin non-prédéfinis. En effet, une méthode originale pour décrire la propagation de fractures cohésives en 3D, sur chemins non-prédéfinis, a été proposée par Ferte et al. [84]. Toutes ces améliorations sont en cours d'implantation dans le cadre de la thèse de Bertrand Paul (Thèse IFPEN 2013-2016 "Modélisation de la propagation de fissures hydrauliques par la méthode des éléments finis étendue").

De nombreux points d'amélioration restent encore, bien entendu, à développer. En dépit des récents développements effectués au travers de cette thèse et de celle de Bertrand Paul, le modèle actuel reste limité à un milieu parfaitement saturé, dont le comportement du massif est régi par une loi poro-élastique isotrope. La prise en compte de l'anisotropie structurelle de la matrice rocheuse dans le cadre du modèle HM-XFEM et ses conséquences sur la propagation des fissures est en cours d'étude au travers de la thèse de Sourena Moosavi (Thèse GeoRessources 2015-2018 "Crack initiation and propagation in anisotropic medium accounting for Hydro-Mechanical couplings"). Des premiers travaux ont aussi été effectués afin d'étendre le modèle actuel aux conditions partiellement saturés (écoulement multiphasique eau/gaz). Notons que certaines études (par exemple Mohammadnejad et Khoei [154] ou Dastjerdy et al. [61]) ont déjà montré les possibilités d'étendre les capacités d'un modèle XFEM au comportement d'un milieu partiellement saturé. Toutefois, ceux-ci restent limités à des systèmes simplifiés (milieu homogène 2D, fracture isolée) et au comportement de phases non miscibles (pas de transfert de masse entre les phases fluides et gazeuses).

D'autre part, pour des formations souterraines structurellement complexes où les hétérogénéités sont présentes sur plusieurs échelles de longueur caractéristiques, les premières simulations HM couplées réalisées en 3D ont montré qu'elles pouvaient être extrêmement coûteuses en temps de calcul. C'est pourquoi, pour des raisons d'efficacité, il peut être souhaitable de se concentrer uniquement sur les hétérogénéités principales, à savoir les grandes failles et fractures dominantes qui gouvernent l'hydrodynamique avec, toutefois, le risque de passer à coté de phénomènes couplés importants. En effet, dans de nombreux cas, la contribution des fractures secondaires à l'écoulement du fluide et le comportement poro-mécanique de toute la formation ne peut pas être ignorée. Une solution consiste à coupler un modèle continu décrivant le comportement du massif traversé par les fissures secondaires à une description des fractures principales à l'aide du modèle HM-XFEM. Ceci nécessite d'effectuer un changement d'échelle préalable à partir des simulations numériques directes réalisées sur un réseau de fractures non connectées (avec le modèle développé dans le cadre de cette thèse par exemple) afin d'identifier les variables pertinentes et indépendantes (scalaires et/ou tenseurs) qui pointent l'état de détérioration du matériau vis-à-vis de ses propriétés HM. Des premiers travaux sur ces aspects sont en cours au sein de l'équipe, et notons qu'une première approche dans ce sens a été récemment proposée par Khoei et al. [120].

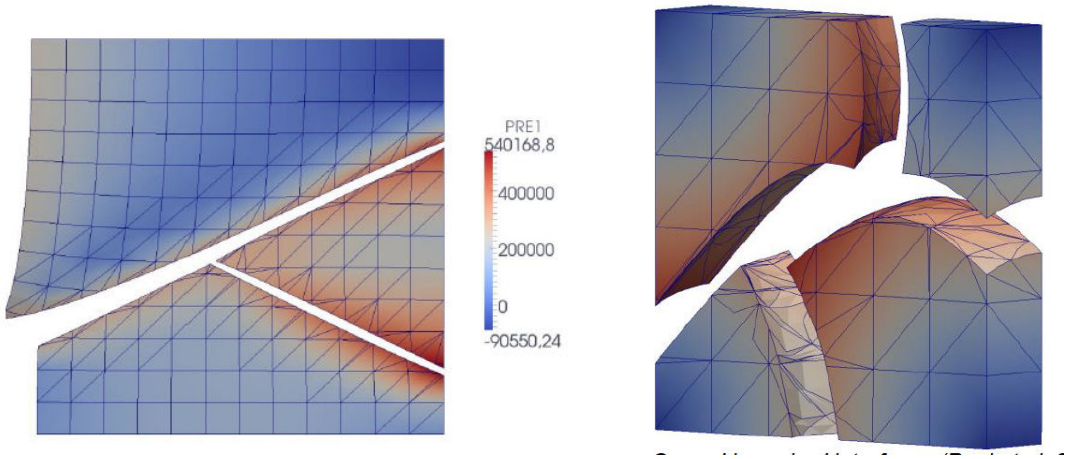


FIGURE 5.52 – *Exemple d'améliorations du modèle HM-XFEM : cas 2D d'injection d'un fluide dans deux fractures connectées (gauche) et déformée 3D d'un réseau de fractures courbes avec jonctions (droite) (extraites de Paul et al. [173]).*

Concernant les applications de ce modèle, en particulier pour répondre à la demande du LABEX RESSOURCES 21, il serait intéressant de procéder au couplage partiel du modèle HM-XFEM avec un code géo-chimique. Notre but est d'améliorer la compréhension des interactions, existantes entre les phénomènes hydro-mécaniques et de transport d'espèces chimiques, impliquées dans les processus de bréchification et de fracturation hydraulique observés en Nouvelle-Calédonie. En particulier, il subsiste toujours de nombreuses d'incertitudes sur l'estimation de la pression fluide requise pour ouvrir les fractures. Pour ce faire, il serait envisageable dans un premier temps de simuler le comportement HM d'un massif rocheux fracturé au niveau de sa base et affecté par des circulations de fluides ascendants dans ces fractures. La prochaine étape serait de considérer les écoulements de fluides hydrothermaux à la fois ascendants et descendants et de mesurer l'impact que cela peut avoir sur la mobilisation/dépôt des espèces minérales au sein du réseau de fractures. Ces tests seront réalisés dans le cadre de la thèse d'Andrey Myagkiy (Thèse LABEX RESSOURCES21 2014-2017 "Mineralization of nickel in saprolitic ore of New Caledonia : dynamics of metal transfer and modeling of coupled geochemical and hydrodynamical processes").

Annexe : Article publié

A

2D coupled HM-XFEM modeling with cohesive zone model and applications to fluid-driven fracture network

M. Faivre[a,*], B. Paul[a,b,c], F. Golfier[a], R. Giot[a], P. Massin[b], D. Colombo[c]

[a] *Université de Lorraine, ENSG; CNRS; CREGU; GeoRessources Laboratory, F-54501 Vandoeuvre-Lès-Nancy, France.*
[b] *IMSIA, UMR EDF-CNRS-CEA-ENSTA ParisTech, Université Paris Saclay, France*
[c] *IFP Energies Nouvelles, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France*

Abstract

The present work focuses on a new numerical model for the fully coupled hydro-mechanical analysis of groundwater flows through poroelastic saturated media. In particular, the presence and eventual propagation of fluid-driven fractures is accounted for within a non-regularized cohesive zone model. In this paper, the fracture propagation is considered as a reactivation process : the fracture already exists and evolves (*i.e.* opens or closes) on a pre-defined path initially constrained. The Talon-Curnier constitutive law is considered for the fracture interfaces and its expression has been adapted to the hydro-mechanical coupling related to the fracture evolution. The fluid pressure inside the fracture is governed by the lubrication equation. The momentum-stress balance equations involving fluid flow and deformation of the solid porous matrix are derived within the framework of the generalized Biot theory. The extended finite element method (XFEM) is preferred to a standard finite element spatial discretization in order to easily handle the presence and evolution of discontinuities in the porous medium. A set of four Lagrange multipliers is introduced to prevent spurious oscillations of the numerical solution at the interface. Comparisons between numerical results and theoretical solution assess the validity of the model presented in this paper. In addition, the hydro-mechanical interactions between neighboring fractures and the effects of the permeability of the porous medium are investigated. We also demonstrate the capability of our model to handle non-planar fracture paths.

Keywords: XFEM, non-regularized cohesive zone model, hydro-mechanical coupling, fluid-driven fracture, multiple fracturing

1. Introduction

The permeability of rocks is widely affected by the presence of fractures as they establish preferential paths for fluid flow. Natural fractures are then a critical factor for determining the hydro-mechanical behavior of geological formations. As a consequence, leakage or detrimental spreading (of pollutants, fluids etc) can locally or regionally occur. In engineering studies, those aspects have to be considered. For nuclear waste storage in deep layers, implantation of storage cells modifies the *in situ* stress field and generates fractures [1], increasing significantly the hazards associated to potential radionuclides leakage. The scenario of leakage across the cavity seal through fractures or reactivated faults is then a matter of great concern. Similarly, metal deposits resulting from supergene weathering of ultramafic rocks [2], are strongly constrained by the development and extension of pre-existing fracture networks which participate to mineralization, modifiying the porous structure and leading to perturbations in the pore pressure as well as in the *in situ* stress field. Similar processes have been reviewed by Das et al. [3] concerning magmatic intrusions and hydrothermal processes that participate to extension and segregation of trace elements [4, 5, 6]. Both are examples of natural hydraulic fractures. In the field of petroleum engineering, stimulation techniques like hydraulic fracturing are commonly used for low permeability reservoirs in order to increase their permeability and make them economically exploitable [7]. A high pressure flow is injected in the well, causing fracture opening and propagation. Both the

*Corresponding author at : ENSG (bat. E), Rue du Doyen Marcel Roubault, TSA 70605, 54518 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex, France
Email address: maxime.faivre@univ-lorraine.fr (M. Faivre)

Nomenclature

b	Biot's coefficient
C_L	leak-off coefficient
$\mathscr{C}$	dimensionless leak-off coefficient
$\mathscr{C}_i$	dimensionless leak-off coefficient for fracture (Pi) or (Ci) $i \in \{1, 2, 3\}$
E	Young's modulus
E'	plane strain modulus
G_c	cohesive energy
H	generalized Heaviside function
K_c	fracture toughness for mode I
K'	effective toughness
K^{int}	intrinsic permeability
$\mathscr{K}$	dimensionless toughness coefficient
$\mathscr{K}_i$	dimensionless toughness coefficient for fracture (Pi) or (Ci) $i \in \{1, 2, 3\}$
lsn	normal level-set
L_r	augmented Lagrangian
$\boldsymbol{M}$	mass flux
$\boldsymbol{n}$	outward normal to the domain boundary
$\boldsymbol{n_c}$	outward normal to the fracture
p	pore pressure field in the porous medium
p_f	fluid pressure field inside the fracture
q_i	Lagrange multipliers (hydrodymamical part) $i \in \{1, 2\}$
Q_i	injection rates $i \in \{0, 1\}$
r	augmented ratio
t	time
$\boldsymbol{t_c}$	total cohesive stress
t_{c_n}	normal total cohesive stress
$\boldsymbol{t'_c}$	effective cohesive stress
t'_{c_n}	normal effective cohesive stress
$\boldsymbol{u}$	nodal displacement field
$[\![\boldsymbol{u}]\!]$	nodal displacement jump
$\boldsymbol{W}$	mass fluid rate
x	horizontal coordinate
y	vertical coordinate
$\boldsymbol{\beta}$	augmented multiplier
γ	fluid mobility
$\boldsymbol{\delta}$	local displacement jump
δ_c	critical opening
δ_{eq}	equivalent displacement jump
δ_n	normal local displacement jump
$\boldsymbol{\lambda}$	Lagrange multiplier (mechanical part)
μ	dynamic viscosity
ν	Poisson's ratio
ρ	fluid density
σ_c	critical stress
σ_0	confining stress
ϕ	eulerian porosity

fracture front and the fluid front propagate simultaneously [8, 9], depending on the rock toughness and fluid viscosity [10, 11]. To better understand and simulate all of these phenomena, developing and implementing more efficient and reliable numerical models would be beneficial.

Among all current available numerical methods, the finite element method (FEM) is one of the most convenient and is the most widely used. Modeling fracture propagation or thermo-hydro-mechanical problems have been successfully conducted with numerical models based on zero-thickness interface elements within the classical FEM (see for example [12]). Unfortunately, FEM applied to fracture mechanics requires meshes that match the discontinuities. So its extension to fracture mechanics with fracture growth and complex 3D geometries becomes in most cases inefficient. Indeed, as the fracture propagates in space and time, it is necessary to use advanced remeshing algorithms, and to maintain the mesh structure during the update process. This implies additional computational costs with uncertain reliability on complicated geometries due to mesh fitting and associated conditioning issues for large aspect ratio elements. To overcome these drawbacks, meshless methods have been introduced. As depicted in Belytschko et al. [13], we can distinguish four main categories of meshless methods : kernel based methods (*e.g.* the Smooth Particle Hydrodynamics method (SPH) [14]), Moving Least Square Methods (MLS) (*e.g.* the Diffuse Elements Method [15]), particle-based methods (*e.g.* Discrete Element Methods (DEM) [16]) and partition of unity methods [17]. Kernel methods and MLS are not really handy due to their conceptual formulations. In particular, the definition of interpolation functions is not an easy task. The particle-based methods suffer from intensive calculation time because of the large amount of particles involved to perform numerical simulations. The extended finite element method (XFEM), based on the partition of unity [17] retains most advantages of meshless methods while alleviating their negative sides. However, XFEM is not considered as a meshless method in its own right given that a physical mesh is involved.

The extended finite element method has initially been implemented by Belytschko et al. [18] and Moës et al. [19]. In the literature, XFEM has been employed to model holes and inclusions [20], branched and intersected fractures [21], fracture growth with cohesive zone model (in 2D [22, 23, 24] and in 3D [25]), fracture growth with frictional contact (for small sliding [26, 27] and large sliding [28]) and recently in conjunction with hydro-mechanical (HM) model [29, 30, 31, 32]. With XFEM, the fracture representation is no longer dependent on the structural mesh. In other words, it does not need to match the element edges. On a mathematical point of view, this method allows the local incorporation of enrichment functions [18, 19, 33, 34]. Basically, the Heaviside function is usually used to simulate a displacement jump across the fracture in a narrow band of elements. In addition, in the fracture tip area, asymptotic functions are added to represent properly the singularity. The classical finite element approximation is then enriched with additional degrees of freedom to take into account the discontinuity at each node whose support is cut (or partially cut) by the fracture. But the main issue is to incorporate the discontinuity into this approximation in the narrow band. Following the pioneer work of Osher and Sethian [35] to represent a moving interface, XFEM has been associated to the level method which localizes the discontinuity. Previously, discontinuities were represented using minimal remeshing or mapping process for kinked fracture as depicted in [18] and [33] respectively. But with the level-sets, remeshing is useless and it can be used with XFEM in a natural way (see [36]). For this purpose, the iso-zeros of two orthogonal signed distance functions are used to characterize the fracture geometry (the iso-zero of the normal level-set describes the fracture surface and the iso-zero of the tangential level-set is orthogonal to the fracture surface on the crack front). This method is particularly suited to simulate fracture propagation [37]. During this process, only the two level-set fields are updated on a fixed mesh at each time step. In other words, the fracture grows independently from the mesh structure. Several approaches exist to actualise level-sets to take into account propagation like solving Hamilton-Jacobi-type equations (see [38, 39] for more details), or like geometrical approaches either vectorial [40, 41] or scalar [42].

Classically, engineering studies involve interface elements which have been developed in mechanics with FEM by Goodman et al. [43]. Extension to the saturated fractured porous medium has been performed by Noorishad et al. [44] and more recently by Cornec et al. [45] and Carrier et al. [46]. However, as mentioned in Watanabe et al. [29], the use of interface elements may be a major disadvantage because these elements involve complex mesh structure and may lead to convergence problems for strongly coupled modelings. To overcome those drawbacks, Watanabe et al. [29] proposed a new formulation of interface elements with XFEM by means of lower-dimensional elements on pre-existing fracture paths. In the literature, HM models with XFEM have been widely considered. For example, the fluid-saturated porous medium with arbitrary discontinuities has been modeled with XFEM [30], then extended to the partially-saturated porous medium [32] both for seismic analysis and dams failure [47]. The failure initiation in thermo-elasticity has been studied in [48] and a thermo-hydro-mechanical model for the saturated porous medium

with impermeable interfaces has been treated in [49]. Application to hydraulic fracture propagation has been presented in [8, 9] or in [50] for concrete hydraulic fracturing. In Rethore et al. [31] a two-scale approach is considered where the fluid circulation along the fracture is simulated independently from the pore pressure field. This work has been adapted to the partially-saturated porous medium in [51] with a cohesive zone model at the vicinity of the fracture. This approach involves a porosity-dependent permeability of the fracture. These authors assume that the development of the fracture and micro-cracks in the damaged zone modifies significantly the porosity of the porous medium.

The case of multiple hydraulic fractures has recently been investigated for petroleum engineering applications. In [52], Lecampion et al. have studied the simultaneous propagation of parallel radial hydraulic fractures from an horizontal wellbore. In particular, the elastic stress interactions between the different fractures as well as the partitioning of the fluid flow into the different fractures are examined in order to explain the preferential growth of a subset of dominant fractures. In [53], an energy rate approach is adopted to compare the simultaneous propagation of parallel hydraulic fractures with various geometrical frames. The injected fluid rate and the spacing between each fracture is adjusted in order to prevent the appearance of a reduced number of dominant fractures, propagating to the detriment of the majority. Finally, the work of Wang et al. [54] associates the Mohr-Coulomb theory of plasticity to a cohesive zone model within the XFEM in order to study the propagation of hydraulic fractures in brittle as well as ductile rocks. Furthermore, this fully coupled numerical model allows the propagation of 2D curved hydraulic fractures on non-predefined paths. However, these authors consider a phantom-node method [55] with a cohesive zone model to update the fracture path propagation, which suffers from the mesh sensitivity problem.

In the present paper, the propagation process due to injection of fluid can be assimilated as a reactivation procedure of pre-existing fractures. A convenient way to characterized this process is the introduction of a cohesive zone model. This kind of model has been introduced by Barenblatt [56] and Dugdale [57] to overcome Griffith's theory limitations due to the singularity of the stress field at the fracture tip. More recently, several HM models have been developed by means of a cohesive zone model with XFEM. Mohammadnejad et al. [58] have studied the propagation of cohesive fractures for the partially-saturated porous medium as a continuation of Rethore et al. [31]. This model has been applied to hydraulic fracture problems in [59]. The formulation of the HM-XFEM model presented in this paper is quite similar to the one developed in Mohammadnejad et al. [59] but differs on several points. Firstly, Mohammadnejad et al. [59] considered fluid leakages from the fracture to the surrounding porous medium by means of boundary conditions. On the contrary, we introduced in our model two additional degrees of freedom to take into account these leakage rates at each wall of the fracture in the same manner as Carrier et al. [46]. Secondly, in Mohammadnejad et al. [59] an explicit cohesive law has been considered to treat the fracture evolution. Ferte [60] recommands not using explicit or regularized formulations with XFEM to avoid oscillations in the contact pressure and displacements at the interface and obtain a meaningful solution, when different regimes are considered (contact, initial adhesion, damage phase with loading or unloading *etc.*). Under this consideration, we have adapted to HM problems the augmented Lagrangian formulation developed in Lorentz [61] and the classical Talon-Curnier mixed-interface cohesive constitutive law [62]. Then, specific Lagrange multiplier approximation spaces have been introduced in our HM-XFEM model formulation to avoid spurious instabilities in the numerical solution. Finally, the continuity of the pore pressure field is forced at the interface as in [46] and the fluid circulation is ruled by a cubic law [63].

This article is organized as follows. In section 2, we present the set of equations used to describe the fractured porous medium. In particular, the modified formulation of the Talon-Curnier mixed interface cohesive law is written in details. In section 3, we introduce the finite element formulation of the HM-XFEM model. A brief description of the finite element design is illustrated and details about the spatial discretization are depicted. Finally in section 4, we apply to our model the notorious KGD test case. Then simple test cases are presented to show the ability of our HM-XFEM model to simulate fluid circulation in 2D with a non-connected fracture network (two cases with straight interfaces and another with curved interfaces are considered).

2. Overview of the HM-XFEM model : theoretical aspects

2.1. Hypothesis and notations

We consider a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ entirely cut by a discontinuity Γ_c with respective outward normals $\boldsymbol{n}$ and $\boldsymbol{n_c}$. The domain is divided into two distinct sub-domains Ω_1 and Ω_2, respectively the upper and lower part of Ω so that

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

We decompose the boundary of the domain Ω into $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_p \cup \Gamma_F$ where hydrodynamic and mechanical Dirichlet/Neumann boundary conditions are enforced respectively on (Γ_p, Γ_F) and (Γ_u, Γ_t). In the same way, the fracture is split into $\Gamma_c = \Gamma_f \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Γ_1 and Γ_2 represent each wall of the fracture where fluid exchanges may occur (*i.e.* between the fracture and the surrounding porous medium) and Γ_f represents the surface where a prescribed flux along the fracture is applied. Surface cohesive efforts must be taken into account on Γ_1 and Γ_2.

The domain and fracture boundary decomposition is summarized in Figure 1.

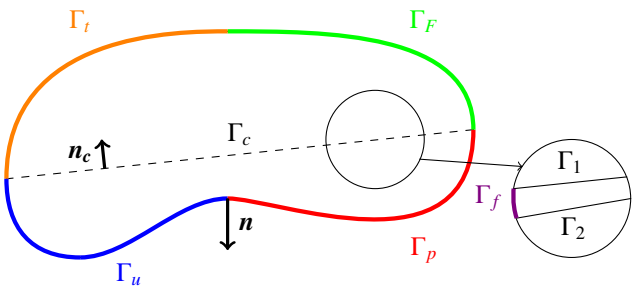


Figure 1: Domain decomposition.

The surrounding porous medium is fully saturated with a single-fluid phase and fluid flow takes place in the fracture. As a consequence, a pressure p is associated to the interstitial fluid in the porous matrix and a distinct pressure p_f is associated to the fluid in the fracture. We denote $\boldsymbol{u}$ the displacement field and $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ the displacement jump (at the level-set interface).

We consider a point P_1 on Γ_1 and a point P_2 on Γ_2. The outward normal to Γ_1 is denoted as $\boldsymbol{n_c^1} = -\boldsymbol{n_c}$ and the outward normal to Γ_2 is $\boldsymbol{n_c^2} = \boldsymbol{n_c}$. The normal displacement jump (positive or equal to zero in opening and negative in the case of interpenetration) is defined as follows :

$$[\![\boldsymbol{u}]\!] \cdot \boldsymbol{n_c} = (\boldsymbol{u}(P_1) - \boldsymbol{u}(P_2)) \cdot \boldsymbol{n_c} \geqslant 0 \tag{1}$$

The orientation of the exchanges between the surrounding porous medium and the fracture, as well as the conventions for the displacement jump adopted at the interface are represented in Figure 2.

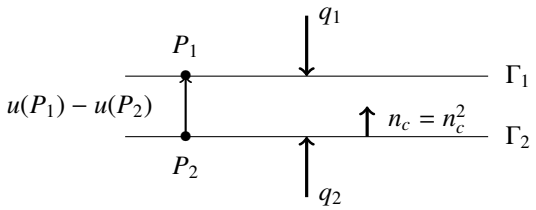


Figure 2: Conventions adopted.

In addition, infinitesimal strain and Biot effective stress are assumed.

2.2. Boundary conditions

As depicted in Figure 1, boundary conditions existing on the external boundary of the domain Ω and on the fracture Γ_c are used to get the weak formulation of the governing equations (see section 2.4).

On the external boundary of Ω, the following essential boundary conditions are imposed :

- $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_0}$ on Γ_u (prescribed displacements);
- $p = p_0$ on Γ_p (prescribed pore pressure).

and the natural boundary conditions are written as :

- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$ on Γ_t (prescribed traction);
- $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{M_{ext}}$ on Γ_F (constant flux toward the surrounding porous medium).

Additionally, the essential boundary conditions on the fracture Γ_c are the following :

- $\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n_c} = \boldsymbol{W_{ext}}$ on Γ_f (prescribed flux along the fracture);
- $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n_c^1} = q_1$ on Γ_1 and $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n_c^2} = q_2$ on Γ_2 (equality of fluxes between the surrounding porous medium and the fracture on both sides)
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n_c^1} = -\boldsymbol{t_c}$ on Γ_1 (imposed suface cohesive efforts);
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n_c^2} = \boldsymbol{t_c}$ on Γ_2 (imposed suface cohesive efforts).

An additional boundary condition is needed to guarantee the continuity of the pore pressure p with the fluid pressure p_f at the fracture walls. This hypothesis is legitimate regarding the relative thickness of the discontinuity. So we can write :

- $p = p_f$ on Γ_1;
- $p = p_f$ on Γ_2.

As previously mentioned in the introduction, the pore pressure field is mathematically built to be discontinuous across the fracture (see section 3.1.1). But considering the previous boundary condition for each fracture wall, we weakly enforce $p = p_f$. Then, only the gradient of the pore pressure field is discontinuous. Two Lagrange multiplier fields are introduced to fulfill this condition on fracture walls : q_1 and q_2 which are interpreted as potential mass interfacial fluxes between the surrounding porous medium and the fracture.

2.3. Governing equations of the HM-XFEM model

In the following the main governing-equations set is presented. In particular, we have to distinguish between the mechanical equations (related to the cohesive zone model (CZM) and the solid matrix elastic behavior) from the flow equations that describe the behavior of interstitial fluid located in the pores of the solid matrix and in the fracture.

2.3.1. Mass and momentum balance equations

The pore pressure p associated to the single-fluid phase in the porous matrix and in the fracture is governed by the mass balance equation. For the surrounding porous medium its expression is given by :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + Div\,(\boldsymbol{M}) = 0 \tag{2}$$

where ρ is the fluid density, ϕ the eulerian porosity of the bulk and $\boldsymbol{M}$ the mass flux.

The variations of the fluid density and of the porosity are respectively of the form :

$$d\phi = (b - \phi)\left(d\varepsilon_v + \frac{dp}{K_s}\right) \tag{3}$$

and

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K_w} \tag{4}$$

where K_s is the bulk compressibility modulus for the solid phase, K_w the fluid compressibility modulus, b Biot's coefficient [64] and $\varepsilon_v = Tr(\boldsymbol{\nabla u}) = Tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ the volumetric strain.

Finally, the mass flux is given by Darcy's law (gravity is neglected) :

$$\boldsymbol{M} = -\gamma\rho\boldsymbol{\nabla} p \tag{5}$$

The velocity is expressed in terms of the fluid mobility $\gamma = K^{int}k_{lq}^{rel}\left(S_{lq}\right)/\mu$ where K^{int} represents the intrinsic permeability and μ the dynamic viscosity. Furthermore, the mobility is a function of the relative permeability of the fluid phase $k_{lq}^{rel}\left(S_{lq}\right)$ (given by the *Mualem/Van-Genuchten's* law [65]) and is a function of the saturation S_{lq}. Considering a fully-saturated porous medium we set $k_{lq}^{rel}\left(S_{lq}\right) = 1$.

A similar approach is conducted for the fracture. A continuous pressure p_f is associated to the fluid flow in the fracture and mass interfacial fluxes q_1 and q_2 may occur between the fracture and the surrounding porous medium. Under these considerations an additional mass balance equation (*i.e.* the lubrication equation) is introduced :

$$\frac{\partial(\rho[\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n}_c)}{\partial t} + Div\left(\boldsymbol{W}\right) = q_1 + q_2 \tag{6}$$

where $\boldsymbol{W}$ is the mass fluid rate inside the fracture. We assume that the fracture conductivity depends on the cube of its aperture so that the fluid flow inside the fracture is related to the fracture aperture by means of a cubic law [63]. Neglecting the gravity effects, we obtain :

$$\boldsymbol{W} = -\frac{\rho\left([\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n}_c\right)^3}{12\mu}\boldsymbol{\nabla} p_f \tag{7}$$

To conclude, the variation of the fluid density inside the fracture is given by :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp_f}{K_w} \tag{8}$$

2.3.2. Evolution of the fracture : introduction of a cohesive zone model

As previously mentioned in the introduction, one of the features of the HM-XFEM model is the use of a cohesive zone model along the fracture path (see Figure 3). Under this assumption, the fracture is decomposed into three distinct zones :

- an entirely opened zone (zone 1) where the total stress on the fracture walls is only due to the fluid and is equal to $-p_f\boldsymbol{n}_c$ on Γ_2 and $p_f\boldsymbol{n}_c$ on Γ_1;
- a partially opened zone (zone 2 or fracture process zone FPZ) where the total stress on the fracture walls (under the assumption of the effective stress) is $\boldsymbol{t_c} = \boldsymbol{t_c^{'}} - p_f\boldsymbol{n_c}$ (*i.e.* $-p_f < t_{c_n} < -p_f + \sigma_c$ where t_{c_n} is the normal total cohesive stress and σ_c the critical stress). Over a critical fracture opening δ_c the total stress is equal to the stress defined in zone 1;
- a non-damaged zone (zone 3) where the two sides of the fracture are in perfect adhesion and no interpenetration occurs. Fluid circulation is not possible in this area.

The cohesive zone models the area where micro-cracking has occurred, but micro-cracks have not yet coalesced with a single macro-crack. The boundary between the entirely opened zone and the cohesive zone thus locates the physical crack front of the observable macro-crack. On the contrary, the boundary between cohesive and adherent zone only locates the onset of micro-cracking : it is the front of the fictitious crack representing the material debonding

ahead of the physical crack. In a purposeful misuse of language, the *fictitious crack front* is simply referred to as *crack front* from here onward.

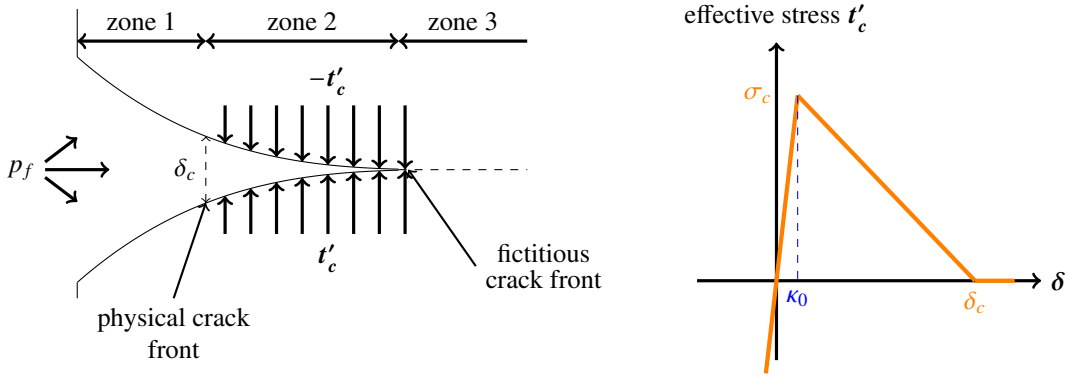


Figure 3: Representation of a cohesive zone model under fluid circulation (left) and the chart of a regularized cohesive contitutive law (right).

One can notice that the fracture mentioned above is entirely invaded by the fluid. In case of dry fracture (not considered in this model), the stress repartition would be unchanged. Only the value of the cohesive stress is modified in zone 2 since the total cohesive stress is equal to the effective cohesive stress.

In this paper, the cohesive zone model relies on the principle of minimization of the total potential energy of the system :

$$E_p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta}) = \Phi(\boldsymbol{u}) + \Psi(\boldsymbol{\delta}) - W_{ext}(\boldsymbol{u}) \tag{9}$$

with :

- $\Psi(\boldsymbol{\delta}) = \int_{\Gamma_c} \Pi(\boldsymbol{\delta})\, d\Gamma_c$ the surface energy related to the fracture opening and $\Pi(\boldsymbol{\delta})$ the surface cohesive energy density;
- $\Phi(\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega} \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))\, d\Omega$ the elastic energy of the system and $\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))$ the bulk strain energy density;
- $W_{ext}(\boldsymbol{u})$ the work of external forces to the domain Ω (*i.e.* traction forces). The work of gravity forces is neglected.

The total potential energy is a function of the displacement field $\boldsymbol{u}$ and of the fracture aperture $\boldsymbol{\delta} = [\![\boldsymbol{u}]\!]$. The solution of the problem consists in minimizing the total potential energy of the system :

$$\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}} \left(E_p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta}) \right) \tag{10}$$

In fact, two specific formulations (based on the previous energetic approach) should be taken under consideration following the recent works of Laverne [66] and Debruyne et al. [67]. The first formulation is a regularized cohesive constitutive law. The effective stress is then related to the fracture aperture via a simple explicit relation :

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{c}}^{'} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\delta}} \tag{11}$$

where Π is the surface cohesive energy density.

The use of this explicit formulation requires the introduction of a penalization parameter which corresponds to an initial fracture opening κ_0 at the critical stress σ_c (see Figure 3 (right)). While $\|\boldsymbol{\delta}\| \leqslant \kappa_0$, the energy dissipation is null. This allows a small interpenetration associated to small debonding when the lips should be closed and adherent, as

well as a small initial aperture with small debonding before damage occurs at the interface. The initial adherence is thus not verified.

As mentioned in the introduction, Ferte [60] recommends not using explicit or regularized formulations with XFEM. The inclusion debonding test case conducted by Ferte [60] shows different situations depending on the value of the penalization parameter. If the penalization parameter is too small, the fracture aperture is far away from the reference solution obtained in FEM with conforming meshes : we get non physical opening or interpenetration. On the contrary, if the value of this parameter is too high, spurious oscillations of the traction in the adherent zone appear. Such oscillations may lead to a misevaluation of the regime (adherence or debonding). They are linked to the fact that the discretization space for traction is too rich in comparison with that of the displacement. As a consequence, the numerical LBB condition (or commonly denominated as the *inf-sup* condition in the literature) fulfillment [17] is no longer realized. This condition ensures the uniqueness and the stability of the numerical solution regarding the appropriate design of each Lagrange multiplier approximation space (see section 3).

However (see section 3) the HM-XFEM finite element must satisfy this condition. To reach this goal, an alternative solution is to consider a non-regularized cohesive zone model that will satisfy the LBB condition [68]. This model is based on a specific set of active constraints on the Lagrange multipliers and on the resolution of a saddle-point problem [61].

Unlike the regularized formulation, this one involves a formulation with two additional fields. Following the previous energetic formulation and the argumentation of Lorentz [61], the field $\boldsymbol{\delta}$ is now considered as a new unknown in the mathematical formulation (*i.e.* due to the dualisation of the equality constraint $\boldsymbol{\delta} = [\![\boldsymbol{u}]\!]$). The solution of the mechanical problem is now :

$$\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}=[\![\boldsymbol{u}]\!]} \left(E_p\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta}\right)\right) \tag{12}$$

A solution $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta})$ of equation (12) is obtained from the saddle point $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})$ of an augmented Lagrangian L_r (see section 2.4.2). The field $\boldsymbol{\lambda}$ which appears in the Lagrangian is related to the enforcement of the constraint $\boldsymbol{\delta} = [\![\boldsymbol{u}]\!]$ in the optimization problem (12). Unlike the field $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\lambda}$ is an additional degree of freedom (see section 3.1.2).

2.4. Weak formulation of the HM-XFEM model

2.4.1. Function spaces

Before specifying the weak formulations of the previous constitutive equations, we define the test function spaces of the displacement field $\boldsymbol{u^*}$, the pore pressure field p^*, the fluid pressure field p_f^*, and the Lagrange multiplier fields ($\boldsymbol{\lambda^*}$, q_1^* and q_2^*). We refer the reader to [69, 70] for more informations about the establishment of these function spaces.

The sets of kinematically admissible displacements and pore pressure on Ω are respectively :

$$U_0 = \{\boldsymbol{u}^* \in H^1\left(\Omega_1\right) \times H^1\left(\Omega_2\right) / \boldsymbol{u}^* \text{discontinuous accross } \Gamma_c \text{ and } \boldsymbol{u}^* = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$$

$$P_0 = \{p^* \in H^1\left(\Omega_1\right) \times H^1\left(\Omega_2\right) / \boldsymbol{\nabla} p^* \text{discontinuous across } \Gamma_c \text{ and } p^* = 0 \text{ on } \Gamma_p\}$$

and the spaces of each Lagrange multiplier field are such as :

$$Q_1 = \{q_1^* \in H^{-1/2}\left(\Gamma_1\right) / q_1^* \in \Gamma_1\}$$

$$Q_2 = \{q_2^* \in H^{-1/2}\left(\Gamma_2\right) / q_2^* \in \Gamma_2\}$$

$$P_0^f = \{p_f^* \in H^{-1/2}\left(\Gamma_c\right) / p_f^* \geqslant 0 \text{ on } \Gamma_c\}$$

$$\Lambda_0 = \{\boldsymbol{\lambda^*} \in H^{-1/2}(\Gamma_c) / \lambda^* \geqslant 0 \text{ on } \Gamma_c\}$$

where $H^1(\Omega_1)$ and $H^1(\Omega_2)$ are the Sobolev spaces of integrable square functions whose first order partial derivatives are integrated respectively on Ω_1 and Ω_2. The nodal displacement jump $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ is defined in $H^{1/2}(\Gamma_c)$, the trace space of $H^1(\Omega)$ restricted to Γ_c. Its dual space is $H^{-1/2}(\Gamma_c)$. A brief justification of the Lagrange multiplier spaces construction is given in section 3.

According to the argumentation of Nistor et al. [28], each element in Λ_0 corresponds to a tensile stress, which suppose the fracture is opened. In the same way, for each element in P_0^f a positive fluid pressure through the fracture generates a flow.

2.4.2. Weak formulation of the mechanical part

A common way to solve equation (12) is based on the introduction of the augmented lagrangian L_r as explained in Lorentz [61].

$$L_r(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}) \overset{\text{def}}{=} E_p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta}) + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda} \cdot ([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta})\, d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \frac{r}{2} ([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta})^2\, d\Gamma_c \tag{13}$$

To get the first optimality condition, we consider the first partial derivative of L_r with respect to $\boldsymbol{\delta}$. Thus $\forall \boldsymbol{\delta}^*$:

$$\int_{\Gamma_c} [\boldsymbol{t_c} - \boldsymbol{\lambda} - r([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta})] \cdot \boldsymbol{\delta^*} d\Gamma_c = 0 \tag{14}$$

Note that equation (14) involves the total cohesive stress. However this field is only defined locally, because the cohesive constitutive law is integrated at the level of the Gauss points network at the interface. To do that, the field $\boldsymbol{\delta}$ is discretized as a constant by collocation at each Gauss point of the discontinuity. Under the consideration of equation (14), the local expression of the total cohesive stress $\boldsymbol{t_c}$ is given by equation (15) and follows the classical Talon-Curnier [62] constitutive law :

$$\boldsymbol{t_c}(\boldsymbol{\delta}, \kappa) = \boldsymbol{\lambda} + r([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta}) \tag{15}$$

Considering a fully-saturated porous medium and fluid circulation inside the fracture, the contribution of the fluid pressure in the fracture has to be taken into account in the formulation of the cohesive stress. Particularly, under the assumption of the effective stress ($\boldsymbol{t_c} = \boldsymbol{t'_c} - p_f \boldsymbol{n_c}$), the relationship that must be satisfied at each Gauss point is now :

$$\boldsymbol{t'_c}(\boldsymbol{\delta}, \kappa) = \boldsymbol{\lambda} + r([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta}) + p_f \boldsymbol{n_c} \tag{16}$$

Graphically, the solution fits the intersection of the linear function $f : \boldsymbol{\delta} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} + r([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta}) + p_f \boldsymbol{n_c}$ with the chart of the effective cohesive stress $\boldsymbol{t'_c}$ (see Figure 4). The main advantage of introducing the augmented term $\int_{\Gamma_c} \frac{r}{2} ([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta})^2 d\Gamma_c$ in equation (13) is to ensure the uniqueness of the solution if the parameter r is high enough. This parameter is interpreted as the slope of the linear function f. The field $\boldsymbol{\delta}$ is locally written as a function of the augmented multiplier $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f \boldsymbol{n_c}$. As a consequence, $\boldsymbol{\delta}$ is no longer an unknown of the coupled problem.

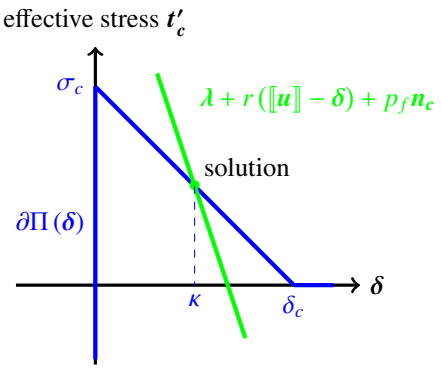


Figure 4: Uniqueness of the solution (based on Lorentz [61]).

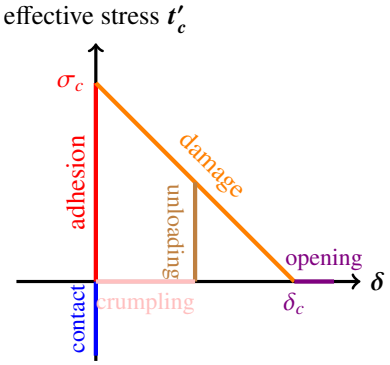


Figure 5: Regimes of the Talon-Curnier constitutive law (based on Lorentz [61]).

Before specifying the weak formulation of the mechanical part related to this cohesive constitutive law, it is appropriate to specify the expression of the field $\boldsymbol{\delta}$ by means of the definition of the subgradient $\partial\Pi(\boldsymbol{\delta})$ (for more details see [61]).

According to Lorentz [61], 5 key points have to be kept in mind when using the Talon-Curnier constitutive law :

- the non-interpenetrability of the fracture walls;
- a perfect initial adhesion;
- a coupling between both failure mode I and II;
- when the fracture is opened, the displacement reaches a critical value δ_c;
- the failure irreversibility.

To fulfill the third condition, we consider the equivalent displacement jump defined as :

$$\delta_{eq} = \sqrt{\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}} \tag{17}$$

To ensure the failure irreversibility, the variable κ is introduced to record the highest norm that the displacement jump $\boldsymbol{\delta}$ reaches during the failure process :

$$\kappa(t) = \sup_{t' < t} \delta_{eq}(t') \tag{18}$$

Then the contact condition is ensured by the addition of a function I in the expression of the surface cohesive energy density $\Pi(\boldsymbol{\delta})$ to force a positive value of the normal displacement jump. The modified surface cohesive energy density is of the form :

$$\Pi(\boldsymbol{\delta}, \kappa) = I(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n_c}) + \psi\left(\max(\delta_{eq}, \kappa)\right) \tag{19}$$

with $I(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n_c}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n_c} \geqslant 0 \\ +\infty & \text{if } \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n_c} < 0 \end{cases}$ and $\psi\left(\delta_{eq}\right) = \begin{cases} G_c \frac{\delta_{eq}}{\delta_c}\left(2 - \frac{\delta_{eq}}{\delta_c}\right) & \text{if } \delta_{eq} \leqslant \delta_c \\ G_c & \text{if } \delta_{eq} > \delta_c \end{cases}$

$G_c = \frac{1}{2}\sigma_c \delta_c$ is the cohesive energy, σ_c the critical stress and δ_c the critical opening. The function ψ is introduced in equation (19) to ensure the perfect initial adhesion until it reaches the critical stress σ_c (*i.e.* $\psi'(0) = \sigma_c$). In fact, this function characterizes the energy dissipation of the system from the damage process initiation to the failure.

Finally, we define the following notations $\langle \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \beta_n \rangle \boldsymbol{n_c} + \boldsymbol{\beta_s}$ and $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\beta} \rangle}$. The Macauley brackets $\langle . \rangle$ denotes the positive part of $\boldsymbol{\beta}$. This operator takes into account the non-interpenetrability of both fracture sides for the displacement jump computation.

Thus considering the formulation of [61] and the modified expression of the augmented multiplier $\boldsymbol{\beta}$ (which takes into account the fluid pressure contribution) the displacement jump $\boldsymbol{\delta}$ is expressed as (see Figure 5 for the regimes listed below):

- in the case of perfect adhesion ($\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}, \kappa = 0$) :

$$\partial \Pi (\boldsymbol{\delta}) = \{ \boldsymbol{t'_c} \in \mathbb{R}^2 / \|\boldsymbol{t'_c}\| \leqslant \sigma_c \} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \quad \text{if } \|\boldsymbol{\beta}\| \leqslant \sigma_c \text{ with } \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f \boldsymbol{n_c}$$

- during the damage phase $\delta_{eq} > \kappa$:

$$\partial \Pi (\boldsymbol{\delta}) = \{ t'_{c_n} \boldsymbol{n_c} + \psi' \left(\delta_{eq} \right) \frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta_{eq}} / t'_{c_n} \leqslant 0, \delta_n \geqslant 0, t'_{c_n} \delta_n = 0 \} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\psi' \left(\delta_{eq} \right) + r \delta_{eq}} \delta_{eq} \quad \text{if } \|\boldsymbol{\beta}\| > r\kappa + \psi' \left(\delta_{eq} \right)$$

with δ_{eq} solution of $\psi' \left(\delta_{eq} \right) + r\delta_{eq} = \sqrt{\|\boldsymbol{\beta_s}\|^2 + \langle \beta_n \rangle^2}$ and $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f \boldsymbol{n_c}$

- in the case of unloading $\delta_{eq} = \kappa$:

$$\partial \Pi (\boldsymbol{\delta}) = \{ t'_{c_n} \boldsymbol{n_c} + \alpha \boldsymbol{\delta}; / 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\psi' (\kappa)}{\kappa}, t'_{c_n} \leqslant 0, \delta_n \geqslant 0, t'_{c_n} \delta_n = 0 \} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \kappa \quad \text{if } r\kappa < \|\boldsymbol{\beta}\| < r\kappa + \psi' (\kappa)$$

with $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f \boldsymbol{n_c}$

- in the case of crumpling (*i.e.* sliding after unloading) $\delta_{eq} < \kappa$:

$$\partial \Pi (\boldsymbol{\delta}) = \{ t'_{c_n} \boldsymbol{n_c} / t'_{c_n} \leqslant 0, \delta_n \geqslant 0, t'_{c_n} \delta_n = 0 \} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \rangle}{r} \quad \text{if } \|\boldsymbol{\beta}\| \leqslant r\kappa \text{ with } \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda} + r[\![\boldsymbol{u}]\!] + p_f \boldsymbol{n_c}$$

The weak formulation of the mechanical part is finally given by the last two optimality conditions :

- equilibrium equation :

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{\lambda^*}, \boldsymbol{u^*}) \in \Lambda_0 \times U_0 \qquad & \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{u^*}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_c} [\boldsymbol{\lambda} + r ([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta} (\boldsymbol{\beta}))] \cdot [\![\boldsymbol{u^*}]\!] d\Gamma_c \\ & - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u^*} d\Gamma_t = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

- interface equation :

$$\forall \lambda^* \in \Lambda_0 \quad \int_{\Gamma_c} ([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{\delta} (\boldsymbol{\beta})) \cdot \boldsymbol{\lambda^*} d\Gamma_c = 0 \tag{25}$$

2.4.3. Weak formulation of the hydrodynamical part

The mass balance equation for the surrounding porous medium and the fracture involves time as a physical unknown. Thus, both equations are discretized in time by means of a θ-scheme. A variable indexed by + is expressed at the current time-step whereas a variable indexed by − is expressed at the previous time-step, and $\Delta t = t^+ - t^-$.

According to the principle of Virtual Work, the weak formulation of the mass balance equation related to the surrounding porous medium is of the form :

$$\begin{aligned} \forall p^* \in P_0 \quad - & \int_\Omega \frac{m_w^+ - m_w^-}{\Delta t} p^* d\Omega + \theta \int_\Omega \boldsymbol{M^+} \cdot \boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega + (1-\theta) \int_\Omega \boldsymbol{M^-} \cdot \boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega \\ = & \ \theta \int_{\Gamma_F} M_{ext}^+ p^* d\Gamma_F + (1-\theta) \int_{\Gamma_F} M_{ext}^- p^* d\Gamma_F - \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p^* d\Gamma_1 \\ - & \ (1-\theta) \int_{\Gamma_1} q_1^- p^* d\Gamma_1 - \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p^* d\Gamma_2 - (1-\theta) \int_{\Gamma_2} q_2^- p^* d\Gamma_2 \end{aligned} \tag{26}$$

with $m_w^+ - m_w^- = \rho^+ \varphi^+ \left(1 + \varepsilon_v^+\right) - \rho^- \varphi^- \left(1 + \varepsilon_v^-\right)$

In the same manner, we set for the fracture :

$$\begin{aligned} \forall p_f^* \in P_0^f \quad - & \int_{\Gamma_c} \frac{w^+ - w^-}{\Delta t} p_f^* d\Gamma_c + \theta \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W^+} \cdot \boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c + (1-\theta) \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W^-} \cdot \boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c \\ = & \ \theta \int_{\Gamma_f} W_{ext}^+ p_f^* d\Gamma_f + (1-\theta) \int_{\Gamma_f} W_{ext}^- p_f^* d\Gamma_f + \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p_f^* d\Gamma_1 \\ + & \ (1-\theta) \int_{\Gamma_1} q_1^- p_f^* d\Gamma_1 + \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p_f^* d\Gamma_2 + (1-\theta) \int_{\Gamma_2} q_2^- p_f^* d\Gamma_2 \end{aligned} \tag{27}$$

with $w^+ - w^- = \rho^+ [\![\boldsymbol{u}]\!]^+ \cdot \boldsymbol{n}_c - \rho^- [\![\boldsymbol{u}]\!]^- \cdot \boldsymbol{n}_c$

To finish, the weak formulation of the pressure continuity along each fracture side Γ_1 and Γ_2 respectively is given by :

$$\forall q_1^* \in Q_1 \quad \int_{\Gamma_1} \left(p - p_f\right) q_1^* d\Gamma_1 = 0 \tag{28}$$

$$\forall q_2^* \in Q_2 \quad \int_{\Gamma_2} \left(p - p_f\right) q_2^* d\Gamma_2 = 0 \tag{29}$$

As the fracture acts like a preferential channel for the fluid circulation, a strong coupling of the mechanical behavior with the mass transfer occurs between the surrounding porous medium and the fluid in the fracture. At the process zone, where fracturing occurs, the fluid pressure influences the cohesive stress arise which is transferred to the bulk (see equation (24)). In the mean time, as the fluid circulates inside the fracture (*i.e.* the second and third terms in the left-hand side of equation (27)), mass transfers may occur from the fracture to the bulk (*i.e.* the fourth last terms in the right-hand side of equations (27) and (26) respectively). These mass transfers due to leakage, are then governed by Darcy's law in the bulk (*i.e.* the second and third terms in the left-hand side of equation (26)). On the counterpart, the pressure continuity conditions (equations (28) and (29)) on each wall of the fracture participate to the variation of the bulk porosity (see equation (3) and first left-hand side term of equation (26)).

3. Finite element formulation : discretization with the XFEM-method

3.1. Fields involved

3.1.1. Bulk

Because of the presence of the fracture, all the fields related to the surrounding porous medium have to be discontinuous on both sides of the fracture. Firstly, the discontinuity of the approximation of the displacement field is

considered as a strong discontinuity following [71]. In this sense, the primary field and its gradient (*i.e.* strain field) are discontinuous in order to take into account the displacement jump at the interface. Secondly, unlike the displacement field, the pore pressure field must be continuous across the fracture considering the continuity condition $p = p_f$ on Γ_1 and Γ_2. Thus, the approximation of the pore pressure must be able to take into account a weak discontinuity : the pore pressure field is continuous along the fracture, but its normal gradient is discontinuous. It is for example possible to obtain a discontinuity of the fluid pore pressure normal gradient in case of fluid leakage from the fracture to both sides of the porous medium. It is important to note that the XFEM enrichment authorizes a strong discontinuity for the pore pressure field across the fracture, but that pore pressure continuity is weakly enforced at each fracture lip with Lagrange multipliers. This artefact prevents us from using weakly discontinuous shape functions for which a separate analysis has been performed by N'Deffo et al. [72] showing that for quadratic elements this choice has the best numerical properties in terms of conditioning issues and precision amongst several other ones available in the literature [20, 73, 74].

The approximation of the displacement field and of the pore pressure field are of the form :

$$\boldsymbol{u}(x) = \sum_{i \in I} \boldsymbol{a_i} \varphi_i(x) + \sum_{j \in J} \boldsymbol{b_j} \varphi_j(x) H(lsn(x)) \tag{30}$$

$$p(x) = \sum_{i \in I_s} c_i \psi_i(x) + \sum_{j \in J_s} d_j \psi_j(x) H(lsn(x)) \tag{31}$$

For both of them, the standard finite element approximation is enriched at the vicinity of the fracture by means of an enrichment function associated to additional degrees of freedom. I is the subset of nodes whose support contains the point x and I_s is the restriction of I to the vertex nodes subset. In the same way, $J \subset I$ is the subset of nodes whose support is entirely cut by the fracture. $J_s \subset I_s$ is the restriction to the vertex nodes subset.

In equation (30), the approximation of the displacement field is divided into two parts :

- the standard part which is a linear combination of the degree of freedom $\boldsymbol{a_i}$ at node $i \in I$ with the quadratic shape function $\varphi_i(x)$ of node i ;
- and the enriched part which is a linear combination of the enriched degree of freedom $\boldsymbol{b_j}$ at node $j \in J$ with the quadratic shape function $\varphi_j(x)$ of node j weighted by the enrichment function H.

In equation (31), the approximation of the pore pressure is divided into two parts :

- the standard part which is a linear combination of the degree of freedom c_i at node $i \in I_s$ with the linear shape function $\psi_i(x)$ of node i ;
- and the enriched part which is a linear combination of the enriched degree of freedom d_j at node $j \in J_s$ with the linear shape function $\psi_j(x)$ of node j weighted by the enrichment function H.

As mentioned in [46] and demonstrated by Ern et al. [75], a quadratic interpolation for the displacement field and a linear interpolation for the pore pressure field is adopted to reduce oscillations of the solution if highly transient boundary conditions are prescribed. As a consequence, the classical $\boldsymbol{a_i}$ and the enriched $\boldsymbol{b_i}$ degrees of freedom related to the displacement field are carried by the vertex and middle nodes of the HM-XFEM elements. This differs from the classical c_i and the enriched d_i degrees of freedom related to the pore pressure field which are only carried by the vertex nodes of the HM-XFEM elements.

The set of nodes J and J_s are enriched with the generalized Heaviside function defined as :

$$H(lsn(x)) = \begin{cases} -1 & \text{if } lsn(x) < 0 \\ +1 & \text{if } lsn(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

We have to make the distinction between two kinds of elements. Firstly, we have to distinguish the elements entirely cut by the fracture. All the nodes of these elements are enriched by the enrichment function. According to the argumentation of Chessa et al. [76], this kind of element is able to reproduce exactly the enrichment function and is able to *a fortiori* catch the discontinuity of both discontinuous fields. We call them the reproducing elements. In this case the partition of unity [17] is completely realized. Secondly, all the elements adjacent to the reproducing elements have at least one non-enriched node. We call them the blending elements. Chessa et al. [76] have shown that the blending elements do not realize the partition of unity because they are not able to reproduce exactly the enrichment function at each node. Moreover, unwanted enriched terms are not compensated by terms from the standard approximation part (see [77]). For that reason, the convergence rate of the numerical solution may be highly degraded. For the general case, specific methods have been designed to overcome these drawbacks like the enrichment functions correction. Application to the partially-saturated porous medium has been successfully conducted by Mohammadnejad et al. in [32]. Following the demonstration of Fries [77], we choose the generalized Heaviside function because this function overcomes naturally the problems aforementioned. To insure optimal convergence rates of the numerical solution and the coexistence between blending elements and standard elements (see Figure 6), we reuse the convenient method proposed by Geniaut [78] to eliminate the unwanted enriched degrees of freedom in the blending elements by setting them to zero. Briefly, we set the corresponding enriched second-member terms to zero in the matricial system of equations to be solved and set the corresponding diagonal enriched stiffness matrix terms to unity. The same procedure is conducted for the Lagrange multiplier degrees of freedom (see section 3.1.2) for the non-enriched nodes of the blending elements.

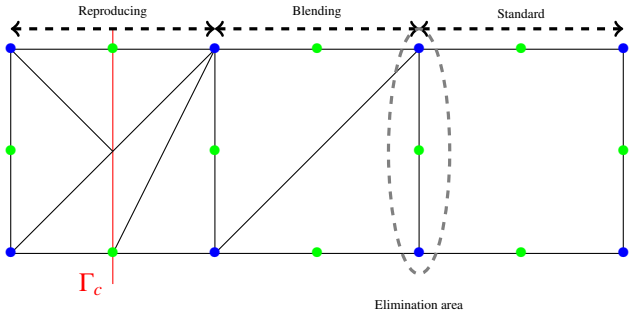


Figure 6: Sub-division for integration and coexistence between HM-XFEM and standard HM elements.

The iso-zero of the normal level-set *lsn* (solid red line in Figure 6), which is a signed distance function, represents the fracture geometry. To enrich properly a node whose support is entirely cut by the fracture (for the reproducing and blending elements), the sign of the normal level-set function gives the sign of the generalized Heaviside function. In the literature, the normal level-set field is commonly interpolated by means of linear piecewise shape functions. In the HM-XFEM model described in this paper, the fracture surface can be represented by means of quadratic shape functions. Thus, the normal level-set field is interpolated from the nodal value of the signed distance function *lsn* by means of either the standard quadratic shape functions $F = \varphi$ (*i.e.* curved interface used in section 4.2.4) [79] or the standard linear shape functions $F = \psi$ (*i.e.* straight interface used from sections 4.1.3 to 4.2.3) :

$$lsn\,(x) = \sum_{i \in I} lsn_i F_i\,(x) \tag{32}$$

3.1.2. Along the fracture

At the interface, the field formulation is quite different from the one defined for the surrounding porous medium. All the fields (*i.e.* p_f, q_1, q_2 and $\boldsymbol{\lambda}$) involved at the level of the fracture are continuous, because both sides of the fracture represent a single line (referred to as the contact surface in this paper). Following the formulation of Geniaut et al. [25], the contact surface is defined by adding virtual 1D quadratic elements (*i.e.* three-node segments) along the fracture path (defined by the normal level-set *lsn*). To be more precise, a set of intersection points between the fracture and the extended elements is considered. In our case and based on these authors work, a set of four Lagrange

multiplier degrees of freedom is added to the vertex node belonging to the edge of the parent element intersected by the fracture. Nevertheless, this interpolation space is submitted to restriction (see below).

We consider the approximation of the continuous fields defined along the fracture path. So that the approximation of the fluid pressure field is of the form :

$$p_f(x) = \sum_{i \in K} \left(p_f\right)_i \psi_i(x) \tag{33}$$

and the approximation of the Lagrange multiplier fields are given by :

$$q_1(x) = \sum_{i \in K} (q_1)_i \psi_i(x) \tag{34}$$

$$q_2(x) = \sum_{i \in K} (q_2)_i \psi_i(x) \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(x) = \sum_{i \in K} \boldsymbol{\lambda}_i \psi_i(x) \tag{36}$$

where K is the set of vertex nodes from the reproducing elements.

Mathematically, the fields q_1, q_2 and $\boldsymbol{\lambda}$ result from the dualisation of two equality constraints, which enforce respectively the continuity of the fluid pressure across the upper and the lower fracture lips on the one side and the equality between the nodal displacement jump $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ and the local displacement jump $\boldsymbol{\delta}$ on the other side. They naturally correspond to Lagrange multipliers. As mentioned in [70, 28, 60], a great attention has to be paid to build these three Lagrange multiplier spaces in order to satisfy the LBB condition and ensure the uniqueness of the solution [17]. Otherwise, oscillations of the numerical solution may appear. For the sake of simplicity, we choose for the fluid pressure the same approximation space as for the three other Lagrange multipliers because this field is only defined at the interface and is involved in the local estimate of the cohesive constitutive law.

A strategy to avoid oscillations of the numerical solution is to reduce locally the dimension of the Lagrange multiplier approximation spaces. This idea has been developed to deal with boundary conditions within the XFEM in Moës et al. [70] and then improved by Bechet et al. [69] and Ferte et al. [60]. A specific formulation, based on the one of Moës et al. [70], has been adapted for the frictional-contact problem by Geniaut et al. [25]. Therefore, the Lagrange multiplier space dimension has to be high enough to ensure a good convergence rate of the numerical solution, but at the same time it has to remain small enough compared to the one of the displacement field in order to avoid numerical oscillations. In practice, the method relies on the concept of a vital edge selection amongst the edges intersected by the normal level-set. For each intersected edge e, the connectivity of the node i above and of the node j below the fracture is considered. Here is the idea for the selection algorithm : if the longest edge of a group can be removed without isolating the nodes i or j, this edge is considered as a non-vital edge. Hence, equality relationships between Lagrange multipliers are imposed at each node of a group of vital edges. For isolated vital edges, equality relationships are prescribed in between the vertex nodes.

An example with our 4 Lagrange multiplier formulation is presented in Figure 7. For the sake of simplicity, only the vertex nodes of the bilinear triangular elements are represented in Figure 7. The set of vital edges is represented with solid blue lines and the one for the non-vital edge set with dashed lines. The Lagrange multipliers involved in equality relationships are specified with $\Lambda_i = \begin{bmatrix} (p_f)_i & (q_1)_i \\ (q_2)_i & \boldsymbol{\lambda}_i \end{bmatrix}$ where $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

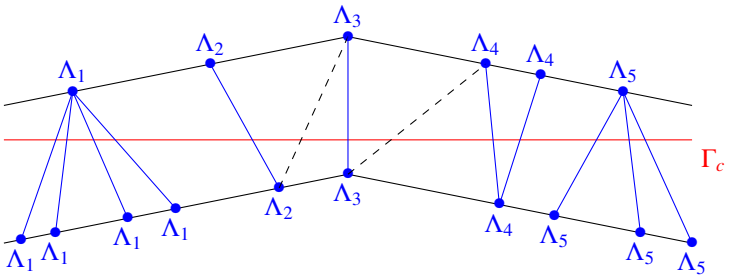


Figure 7: Equality relationships between Lagrange multiplier degrees of freedom (from [25]).

3.2. Design of a HM-XFEM element

To conclude the finite element formulation, the representation of an HM-XFEM finite element is given Figure 8.

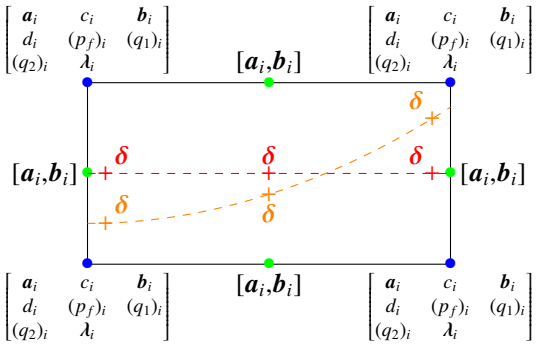


Figure 8: Representation of a quadrangular element.

Quadrangular as well as triangular quadratic meshes are available for this HM-XFEM model. It is essential to note that only the blending and reproducing elements are HM-XFEM elements, the remaining elements being classical HM elements. Moreover, the contact surfaces (red dashed line for straight interface and orange dashed line for curved interface) aforementioned are virtually added along the fracture path to perform the numerical integration of the surface integrals from equations (24) to (29). They are represented by three-node segments. The vertex nodes correspond to the intersections between the interface and the edges of the parent element. Then, the middle node of the segment is determined in the reference space as the intersection between the perpendicular bisector of the segment and the iso-zero of the normal level-set, in order to take into account the eventual curvature of the interface. Finally, the positions of the Gauss points on the interface are interpolated from the coordinates of this three-node segment. We specify in Figure 8 with the red crosses (respectively orange crosses) the Gauss point network for a single straight contact surface (respectively curved contact surface), where the local displacement field $\boldsymbol{\delta}$ is computed. Then on both sides of the fracture, each reproducing and blending element is virtually divided into triangular integration sub-cells [19] to perform the numerical integration of the bulk integrals in equations (24) and (26) (see Figure 6). In the case of curved interfaces, the sub-division process is not trivial and needs specific treatments to perform the integration in each sub-cells (see Paul et al. [80] (submitted)).

4. Validation and numerical results

In the following, the HM-XFEM model is applied firstly to the well-known plane-strain KGD benchmark [10, 11] classically used in petroleum engineering. We want to validate the influence of fluid injection inside a pre-existing fracture that propagates in time and space under different regimes (see section 4.1). Carrier et al. [46] have already

compared the analytical solutions developed by [81] and [82] with their numerical simulations performed with a FEM interface element model. Then, some numerical test-cases are presented to illustrate the capabilities of the HM-XFEM model, including the example of a multi-fractured porous medium (with non-connected fractures) submitted to fluid injection in each one of them (see section 4.2). With this test case we aim at appreciating numerically the influence of the permeability of the surrounding porous medium on the evolution of the different fractures and at evaluating the competition that takes place between nearby fractures. In this paper, all the simulations have been conducted with the finite element software Code_Aster developed by EDF R&D [83].

4.1. Validation of the HM-XFEM model on the KGD benchmark

In this section, all the simulations are performed with the exact same data from Carrier et al. [46] and our numerical results are compared to the analytical solutions of Bunger et al. [81] and Adachi et al. [82].

4.1.1. Geometry and boundary conditions

We consider an infinite porous medium of 60 m high and 45 m wide. The medium is entirely cut by a pre-existing discontinuity. The geometry of the discontinuity is represented by means of a single level-set (*i.e.* the normal level-set). As previously mentioned, there is no need to use a tangent level-set to take into account the fracture tip behavior due to the pre-existing propagation path assumption and the cohesive zone model features. This normal level-set represents the propagation path of the fracture which coincides with the x-axis of the coordinate system. At point (0,0), an incompressible fluid is injected with a constant rate Q_0. The fluid propagates along the fracture path. A compressive regional-field σ_0 is applied at the top and the bottom of the medium to incorporate the *in situ* stress state field. As depicted in Figure 9, the pore pressure is set to zero at the top, the bottom and the right side of the medium (solid blue lines). The displacements are set to zero in the x-direction at the left side. Moreover, we consider a fully-saturated porous medium with a wetting fluid. Initially the fluid pressure and the interstitial pore pressure are both set to zero. Considering the symmetry of the problem, we model just an half of the porous medium geometry.

The material properties of the surrounding porous medium and the features of the cohesive zone are summarized in Table 1.

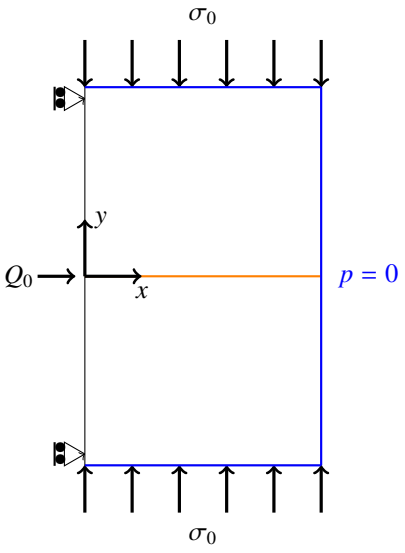


Figure 9: Geometry and boundary conditions.

Table 1: Parameters for the bulk and the cohesive zone (from [46]).

Viscosity	μ	depends on the regime
Liquid compressibility	$\frac{1}{K_w}$	0
Density	ρ	1 $kg.m^{-3}$
Young's Modulus	E	17 GPa
Poisson's ratio	ν	0.2
Biot coefficient	b	0.75
Permeability	K^{int}	depends on the regime
Critical stress	σ_c	1.25 MPa
Cohesive energy	G_c	120 Pa.m
Augmented ratio	r	100 $Pa.m^{-1}$
Porosity	ϕ	0.2
Constant injection rate	Q_0	0.0005 $m^2.s^{-1}$

Compared to Carrier et al. [46], we use a regular mesh composed of the quadrangular elements referenced in section 3.2. No specific refinement has been carried out at the vicinity of the fracture path propagation, demonstrating

the mesh independence of the HM-XFEM model. Moreover, the interface is not conformed with the element edges. Nevertheless, the mesh used is fine enough to ensure the convergence and the precision of the numerical solution (120×121 elements). We present here the results for the near storage-toughness dominated regime and the storage-viscosity dominated regime.

4.1.2. Propagation regimes features

As depicted in [81], two parallel mechanisms are involved during fluid propagation :

- the energy dissipation associated either with surface creation in the bulk (*i.e.* fracturing) or with the fluid (*i.e.* viscous effects);
- storage of fluid either in the fracture (for short time) or in the matrix (for large time).

The characteristic leakage times are τ_1 for the viscosity dominated regime and τ_2 for the toughness dominated regime :

$$\tau_1 = \frac{12\mu Q_0^3}{E'(2C_L)^6} \qquad \tau_2 = \frac{K'^4 Q_0^2}{E'^4(2C_L)^6} \tag{37}$$

The dissipation mechanisms are governed by the dimensionless toughness $\mathscr{K}$ and the dimensionless leak-off coefficient $\mathscr{C}$ respectively :

$$\mathscr{K} = \frac{4K_c}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{3Q_0E'^3\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \mathscr{C} = 2C_L\left(\frac{E't}{12\mu Q_0^3}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{38}$$

where $K_c = \sqrt{G_c\frac{E}{1-\nu^2}}$, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, $K' = 4K_c\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$ and $C_L = \frac{K^{int}}{\mu}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi c}}$. Parameter c is the poroelastic intrinsic diffusion coefficient [84]. K_c represents the fracture toughness (K' has the same meaning, but is introduced to avoid carrying numerical factors in equation (38)), E' is the plane strain modulus, and C_L is the leak-off coefficient which estimates the fluid leakage from the fracture into the porous matrix.

Detournay [85] suggests that the dimensionless toughness $\mathscr{K}$ is interpreted as the ratio between the energy dissipated in fracturing the porous matrix and the dissipation associated to the viscous effects under zero fluid-lag and zero leak-off assumptions. The dimensionless leak-off coefficient $\mathscr{C}$ is a time-dependent parameter [86], which quantifies the transition between the propagation regime where zero leak-off (*i.e.* the storage dominated regime for $\mathscr{C} < 1$) occurs to the regime characterized by large leak-off (*i.e.* the leak-off dominated regime for $\mathscr{C} > 1$).

According to [87], at short time, the storage-toughness dominated regime is characterized by $\mathscr{K} > 4$ and $\mathscr{C} < 1$ whereas the storage-viscosity dominated regime corresponds to $\mathscr{K} < 1$ and $\mathscr{C} < 1$. Contrariwise, at large time, two other regimes can be observed : the leak-off-toughness dominated regime (*i.e.* $\mathscr{K} > 4$ and $\mathscr{C} > 1$) and the leak-off-viscosity dominated regime (*i.e.* $\mathscr{K} < 1$ and $\mathscr{C} > 1$), the latest not being investigated in this validation section. For intermediate regimes between viscosity and toughness dominated regimes, at all time, both energy dissipation mechanisms are competing.

4.1.3. Numerical results for the near storage-toughness dominated regime

In this section, we present the numerical experiments performed in the case of the near storage-toughness dominated regime. To investigate the effects of this regime on the fracture evolution, the fluid injected at the inlet is characterized by a viscosity $\mu = 1 \times 10^{-4}$ $Pa.s$. In this case, viscous effects related to the fluid are reduced during the propagation process. Moreover the leak-off coefficient is set to $C_L = 6.28 \times 10^{-5}$ $m.s^{1/2}$ allowing small leakage in the porous medium. To stay in the storage regime, the intrinsic permeability is set to $K^{int} = 1 \times 10^{-15}$ m^2 and the confining stress is set to $\sigma_0 = 3.7$ MPa. The definitions of C_L and $\mathscr{C}$ (see equation (38)) suggests that the increase

of K^{int} and σ_0 is sufficient to reach the (near) leak-off toughness dominated regime for large time. We perform the simulation between $t = 0s$ and $t = 20s$. For this example the dimensionless toughness is equal to $\mathscr{K} = 2.89$ and the dimensionless leakage-coefficient $\mathscr{C} \in [0, 1.02]$. The range for these two dimensionless parameters allows to stay in the near storage-toughness dominated regime, but starting at $t = 20s$ leakage starts to dominate and the equilibrium is reached at $\tau_2 = 1213\ s$.

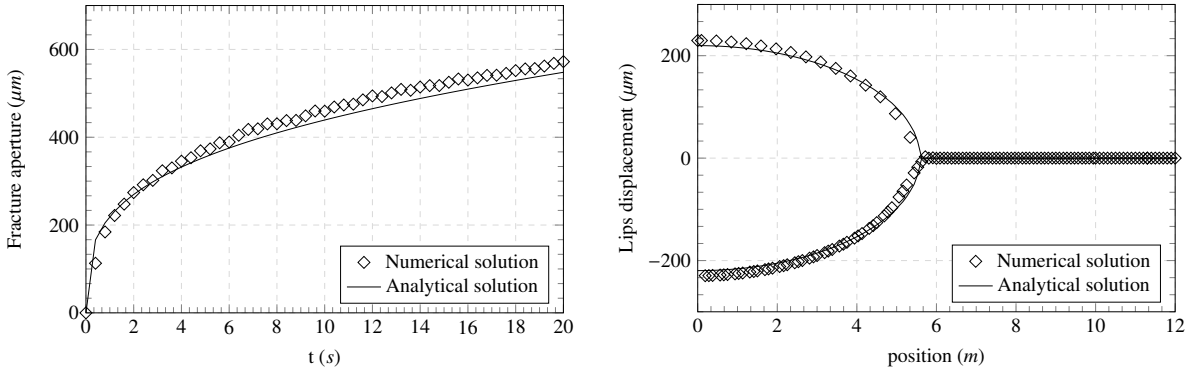


Figure 10: Numerical and analytical solutions [81] for the fracture aperture at the inlet (left) and the lips displacement at t=10s (right) : near storage-toughness dominated regime.

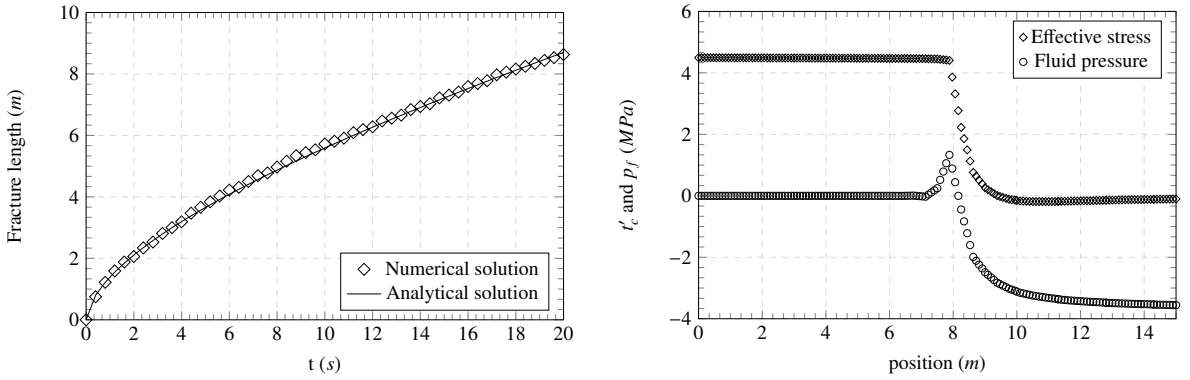


Figure 11: Numerical and analytical solutions [81] for the fracture length at the inlet (left). Numerical profiles of the effective cohesive stress and the fluid pressure at t=18s (right) : near storage-toughness dominated regime.

Figure 10 and Figure 11 show the comparison between the simulations performed with our HM-XFEM model and the analytical solution of [81]. The numerical results are in very good agreement with the theory. As predicted by the analytical solution, the fracture opening profile is symmetrical (Figure 10 (right)) and the fracture length overpasses 6 m after $t = 10s$. For information purposes only, the fluid pressure inside the fracture and the cohesive effective stress are displayed in Figure 11 (right). The range of values for which $t_c' = 0\ MPa$ corresponds to *zone 1* referenced in Figure 3, where the porous medium is completely broken. In this zone, the fluid pressure is uniform and equal to $p_f = 4.5\ MPa$. The ascending part of the profile from $t_c' = 0\ MPa$ to $t_c' = 1.25\ MPa = \sigma_c$ corresponds to the damaged zone (referenced as *zone 2* in Figure 3). During this phase, loading/unloading or crumpling can be observed. The fluid pressure field is uniform and is still equal to $p_f = 4.5\ MPa$. Then, the descending part from $t_c' = 1.25\ MPa$ corresponds to the adhesion zone until the far-field *in-situ* stress $t_c' = -\sigma_0 = -3.7\ MPa$ is reached. This far-field corresponds to the contact zone. These two zones are tagged as *zone 3* in Figure 3. In the contact and the adhesion zones, the fluid pressure drops abruptly from $p_f = 4.5\ MPa$ to $p_f = 0\ MPa$, the latest corresponding to a zero displacement on the lips displacement profile.

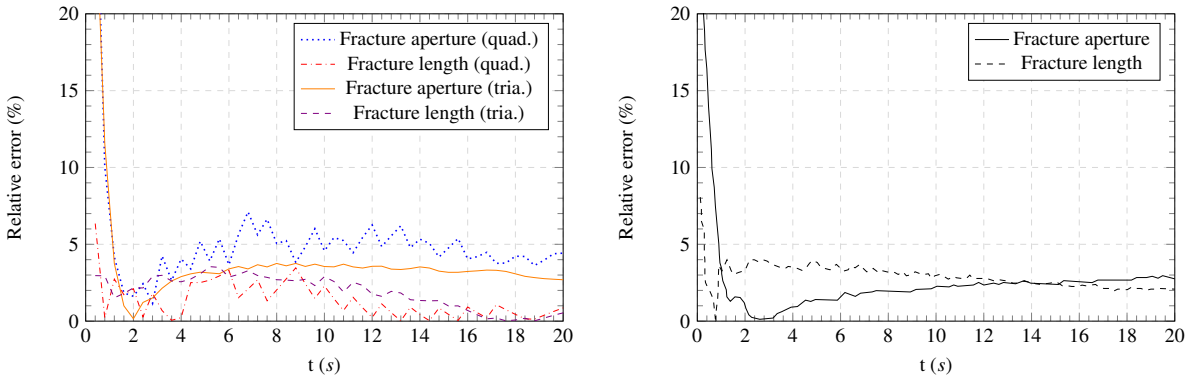


Figure 12: Relative error for the fracture opening and for the fracture length at the inlet in the situation of near storage-toughness dominated regime : HM-XFEM model (left) and Carrier et al. [46] model (right).

In Figure 12, the relative error between the analytical solution and the numerical solution is displayed for the simulations performed with the HM-XFEM model (left) and for the simulations performed by Carrier et al. [46] (right). The relative error is quite similar between the two methods used, XFEM in this paper and interface elements in Carrier et al. [46]. As an example, we compared the relative error obtained with a regular quadrangular mesh (labelled as "quad." in Figure 12 (left)) and with a physical mesh, whose density element is 11168 triangles (labelled as "tria." in Figure 12 (left)). The relative error, for the triangular mesh case, is lower than the one obtained with the regular quadrangular mesh. However, in both cases, the numerical solutions do not match perfectly the analytical solution (even observed by Carrier et al. [46]). Indeed, the propagation criterion used for the analytical model is based on the consideration of the equality between the stress intensity factor in mode I and the material toughness [88]. In our case, the Talon-Curnier constitutive law governs the propagation and the fracture opening due to the fluid injection. On the contrary, the latter is governed by an integro-differential equation classically used in Linear Elastic Fracture Mechanics [89] for the analytical model.

To finish, it is important to underline the high relative error (around 20% for the fracture aperture) recorded at the very first time steps. This artefact can be related to the Fracture Process Zone position. In fact, the Fracture Process Zone size is constant and is approximately [90]

$$l = \frac{9\pi}{32}\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{G_c}{\sigma_c^2} = 1.2\ m \tag{39}$$

Before $t = 1s$, the Fracture Process Zone length is greater or equal than the fracture length. This can explain the numerical perturbations observed which disappear as the fracture grows.

4.1.4. Numerical results for the storage-viscosity dominated regime

We now perform simulations in the case of the storage-viscosity dominated regime. Unlike the previous regime, the hydraulic fracture propagation is only dependent on the viscous dissipation due to the fluid injection. Like [46], our HM-XFEM model takes into account the hydro-mechanical coupling in contrast with the analytical solution of [82]. Indeed, due to the strong interactions existing between the viscous fluid injection and the impermeable surrounding porous medium, an additional compressive stress occurs and is assimilated to the so-called back-stress effect [91, 92]. Given the restrictive assumptions of the KGD analytical solution, the back-stress effect has been removed from our simulations in storage-viscosity dominated regime (*i.e.*, by taking $b = 0$) to conduct a fair comparison. The leak-off coefficient is $C_L = 0\ m.s^{1/2}$. The fluid viscosity has been increased and is set to $\mu = 1 \times 10^{-1}\ Pa.s$. To stay in the storage regime, the intrinsic permeability is chosen as $K^{int} = 1 \times 10^{-15}\ m^2$ and the confining stress is set to $\sigma_0 = 3.7\ MPa$. The dimensionless toughness coefficient reaches $\mathscr{K} = 0.51$ and the dimensionless leak-off coefficient is $\mathscr{C} = 0$ at all time steps. We simulate over 30s in this example. The range for these two dimensionless parameters

is in agreement with the conditions $\mathscr{K} < 1$ and $\mathscr{C} < 1$. However, the leakage equilibrium is never reached because $\tau_1 \to +\infty$.

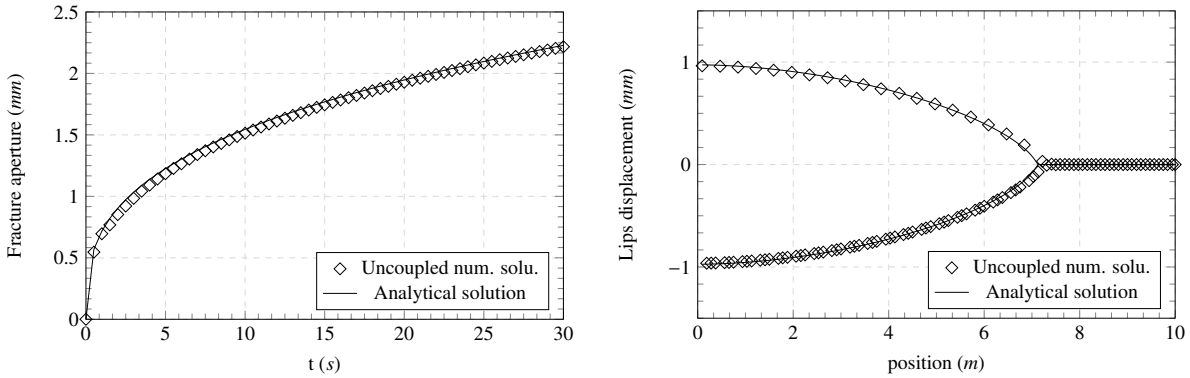


Figure 13: Numerical and analytical solutions [82] for the fracture aperture at the inlet (left) and the lips displacement at t=20s (right) : storage-viscosity dominated regime.

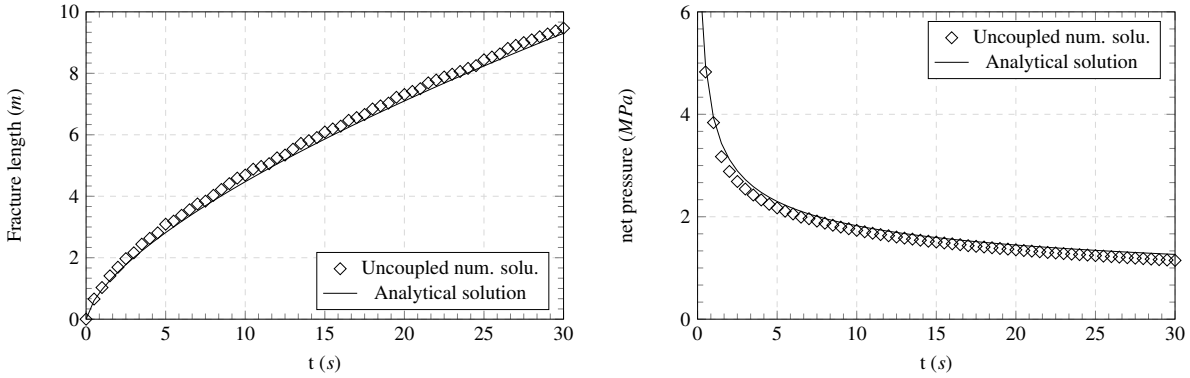


Figure 14: Numerical and analytical solutions [82] for the fracture length (left) and the net pressure (right) both at the inlet : storage-viscosity dominated regime.

The comparison between the HM-XFEM results and the analytical solution of [82] is shown in Figure 13 and Figure 14. The numerical results are in very good agreement with the theory. Compared to the near storage-toughness dominated regime, the dissipation due to the viscous effects reduces the fracture length but increases the fracture aperture at the inlet. Moreover, our simulations confirm the results of Carrier et al. [46] concerning the removal of back-stress effect from the numerical solution. Indeed, the numerical plot for the net pressure, which is $p_n = p_f - \sigma_0$, matches the analytical solution (see Figure 14 (right)).

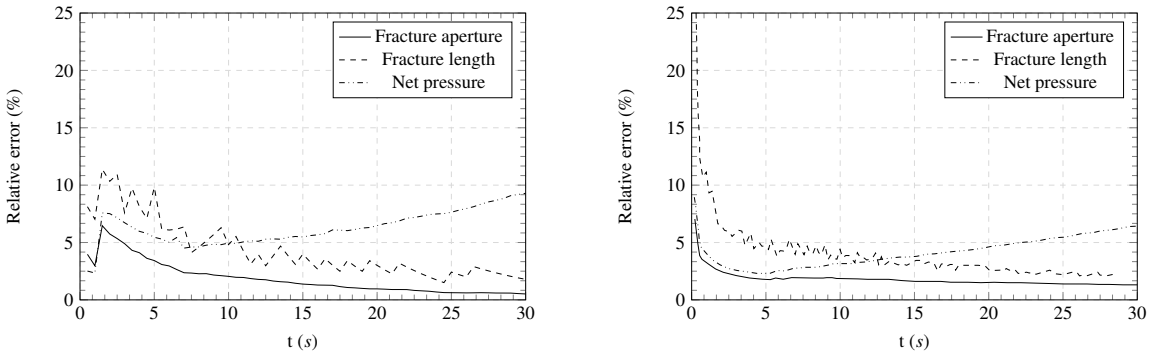


Figure 15: Relative error for the fracture opening and the fracture length at the inlet for the storage-viscosity dominated regime : HM-XFEM model (left) and Carrier et al. [46] model (right).

In Figure 15, the relative error between the analytical solution and the numerical solution is displayed for the simulations performed with the HM-XFEM model and for the simulations performed by Carrier et al. [46]. Like with the near storage-toughness dominated regime, the simulations performed with the HM-XFEM model seem to be as efficient as the simulations conducted with interface elements.

Simulations carried out in this section confirm the validity of the HM-XFEM model. It allows us to apply our model to the case of a multi fluid-driven fractured porous medium. Such a configuration is representative of the multi-stage fracturing technique which is the most popular completion method for horizontal wells in unconventional reservoirs.

4.2. Computational results for the multi-fractured porous medium

4.2.1. Geometry and boundary conditions

In this section the dimensions of the sample are the same as previously. The medium is entirely cut by three pre-existing discontinuities, each one represented by means of a single level-set. Two types of fracture geometries are considered as illustrated in Figure 16. In the case of planar discontinuities (see section 4.2.2 and 4.2.3) the first fracture (P1) cuts the medium at $y = 4.44\ m$, the second fracture (P2) at $y = 0$ and the third one (P3) at $y = -4.44\ m$. (P2) splits a layer of thickness $l = 3.7\ m$ (orange rectangle in Figure 16) whose permeability is lower than that of the whole domain. At points (0,0), (0,4.44) and (0,-4.44) an incompressible fluid is injected with a constant flow rate Q_0.

For the case involving three pre-existing curved interfaces (see section 4.2.4), the first fracture (C1) is represented by the normal level-set $y = 8 + 6.5\cos(x/7.16)$, the second (C2) is represented by $y = 0$ (planar interface) and the third one (C3) is represented by $y = -8 - 6.5\cos(x/7.16)$. The factor 7.16 is introduced to display only one period in the whole domain. In the same way, we inject an incompressible fluid with a constant flow rate Q_0 at point (0,0) and a constant flow rate Q_1 at points (0,14.5) and (0,-14.5).

The boundary conditions are unchanged (see Figure 16). The material properties of the surrounding porous medium and the features of the cohesive zone are summarized in Table 1. Here again, the interfaces are not conformed with the element edges.

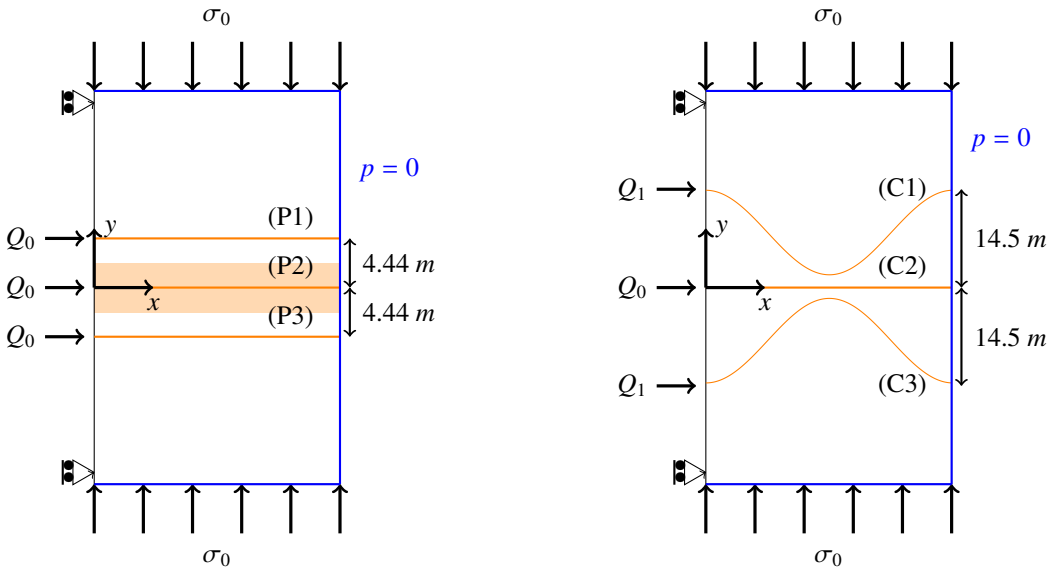


Figure 16: Geometry and boundary conditions for straight (left) and curved (right) interfaces.

Table 2: Permeabilities of the bulk and the orange layer.

	Bulk	Orange layer
$K_x^{int}(m^2)$	1×10^{-16}	1×10^{-16}
$K_y^{int}(m^2)$	5×10^{-15}	5×10^{-16}

4.2.2. Computational results for a fracture network with straight interfaces : anisotropic diffusion

In this first example, we investigate the effects of a fluid injection in an anisotropic medium cut by three straight interfaces as depicted in Figure 16 (left). The anisotropy is only considered for the hydraulic parameters but the elastic parameters remain isotropic. The vertical confining stress is $\sigma_0 = 5\ MPa$. The surrounding porous medium and the orange layer are characterized by different permeabilities in the vertical and horizontal directions (see Table 2). With this configuration, the diffusion is oriented vertically for each fracture. For all of them, the fluid injection rate is $Q_0 = 0.0005\ m^2.s^{-1}$ and the fluid viscosity is $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$.

For the fracture (P2), the leak-off coefficient is $C_L = 3.47 \times 10^{-5}\ m.s^{1/2}$. This coefficient has been calculated from the numerical values of the Lagrange multipliers q_1 and q_2 by linear regression using Carter's law [93]. As demonstrated by Carrier et al. [46], Carter's law is a good approximation for the case of unidimensional diffusion. Moreover, the leak-off coefficient for (P1) and (P3) is $C_L = 2 \times 10^{-4}\ m.s^{1/2}$. For (P1) and (P3), the dimensionless toughness coefficients are equal to $\mathscr{K}_{1,3} = 2.89$ and the dimensionless leakage coefficients are $\mathscr{C}_{1,3} \in [1, 4.11]$. For both fractures, the characteristic leakage time is $\tau_2 = 1.16s$. However for (P2), if the dimensionless toughness is still $\mathscr{K}_2 = 2.89$, the dimensionless leakage coefficient is now $\mathscr{C}_2 \in [0, 0.71]$.

We chose to account for a layer with different properties in order to investigate the interactions of fractures characterized by different storage regimes : (P1) and (P3) are near leak-off-toughness dominated fractures ($1 < \mathscr{K}_{1,3} < 4$ and $\mathscr{C}_{1,3} > 1$) whereas (P2) is a near storage-toughness dominated fracture ($1 < \mathscr{K}_2 < 4$ and $\mathscr{C}_2 < 1$).

In sections 4.2.2 to 4.2.4, we use the two dimensionless parameters to characterize the propagation regime of the three fractures as if each one was isolated, since, to the authors knowledge, no specific formulation of both dimensionless coefficients has been mentioned in the literature for fracture network. Hence we have to keep in mind that such an analysis could be partially biased.

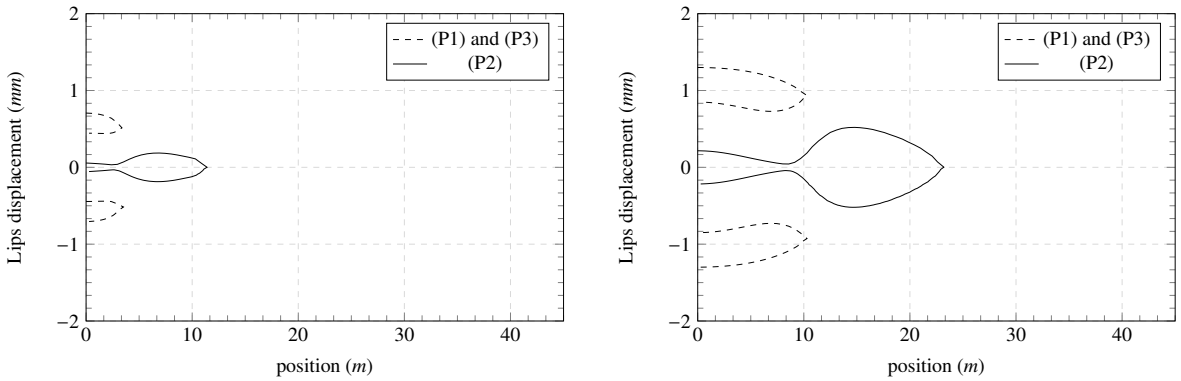


Figure 17: Lips displacement for each fracture at $t_1 = 18s$ (left) and $t_2 = 80s$ (right).

In Figure 17 and Figure 18, the normal opening and the fluid pressure evolution for each fracture are respectively plotted for two time steps $t_1 = 18s$ and $t_2 = 80s$. We display here the relative lips displacements measured with respect to the horizontal x-axis.

At $t_1 = 18s$ (Figure 17 (left)), we notice that the extension of (P1) and (P3) is smaller compared to (P2). As mentioned before, two different storage regimes are involved for each fracture. Indeed, in the case of the near leak-off-toughness dominated regime (*i.e.* (P1) and (P3)), the fracture lengths are shorter because of the large fluid leakage around. Leakage is associated to a minimal volume creation. We confirm this argument with Figure 19, which shows a large vertical leakage area from the fracture to the porous matrix, for both time steps. Because of the small permeability in the horizontal direction, the fluid diffusion operates only from the inlet to (P1) and (P3) fracture tips ($x \in [0, 3.3]$). As a result, the opening of (P2) is very small for $x \in [0, 3.3]$. For (P2) at $t_1 = 18s$, Figure 18 (left) shows a perturbation in the profile of the fluid pressure in this area close to the inlet. As expected, the fluid pressure in (P2) is greater than in (P1) and (P3) because of the small volume storage close to the inlet. Moreover, as demonstrated in section 4.1.3, the near storage-toughness dominated regime is normally characterized by an uniform fluid pressure repartition along the fracture profile. In this case, both dissipation effects are competing (*i.e.* fracturing and viscous effects) for the near storage-toughness dominated regime. But considering the range of values for coefficient $\mathscr{K}_2 = 2.89$, we would expect the fracturing dissipation mechanism to prime. Thus, this fluid pressure perturbation might suggest that the dissipation mechanism due to viscous effects starts to dominate in this area due to the compressive stress state generated by the behavior of (P1) and (P3). On the contrary, for $x > 3.3\ m$, the normal opening of (P2) is bigger and the fluid pressure is uniform up to the fracture tip. In this area the influence of (P1) and (P3) vanishes, and fracturing dissipation mechanism dominates for the central fracture. As (P2) is a near storage-toughness dominated fracture, it propagates further than the two others. As a matter of fact, the fluid storage inside (P2) is compensated by a large volume creation (*i.e.* propagation).

For larger time, $t_2 = 80s$, (P1) and (P3) still propagate, but their extensions are slowed down compared to (P2). For $x \in [0, 7]$ (see Figure 17 (right)), the fluid is preferentially stored inside (P2) which leads to an increase of the normal opening. So, the volume created is high enough to get a uniform fluid pressure repartition in this zone (see Figure 18 (right)). Fractures (P1) and (P3) are deflected due to a change in the stress field. As shown in Figure 20 (left and right), the horizontal and vertical effective stresses are maximal in the area (*i.e.* $x \in [0, 7]$) surrounded by the fractures (P1) and (P3) where the fluid pressure is maximal (see Figure 19 (right)). In this zone the competition between the fractures is the strongest. It is confirmed by the displacement map (see Figure 21 (left)) that shows a relative vertical displacement close to zero until the tips of (P1) and (P3) are overpassed. We assimilate this process to the stress shadowing effect as depicted in [94, 95, 96] (also observed at $t_1 = 18s$ for $x \in [0, 3.3]$). The displacements above (P1) and below (P3) are symmetrical with respect to the x-axis and are non-zero, as the vertical compressive effective stress decreases until reaching the *in-situ* stress state $\sigma_0 = -5\ MPa$ (see Figure 20 (right)). For $x \in]7, 10]$, near the tips of (P1) and (P3), pressure diffusion in the porous matrix is more important. As a consequence (P2) is partially closed (see Figure 17 (right)). Due to this competition, the fluid pressure decreases in this bottleneck, which supposes that

the fluid circulation is partially dropped off, related to the tight opening of the fracture. This phenomenon is observed and circled in Figures 20 (left and right) and is related to a maximal vertical compressive stress in this zone. For the horizontal direction (see Figure 20 (left)), this bottleneck is located at the limit of a large tensile zone followed by a large compressive zone. In this way, the dissipation mechanism associated to viscous effects seems to override the toughness influence of the solid matrix in this area. Then, for $x \in]10, 23]$ the influence of (P1) and (P3) on (P2) vanishes and the normal opening is bigger and symmetric. Once again in this area, the fluid pressure remains uniform until it reaches the initial pore pressure field.

For information purposes, Figure 20 (left) shows, for $x \in]10, 15]$ along (P2), a decrease of the horizontal effective stress, then for $x \in]15, 23]$ an increase of this field. The first phase is explained by the stress field relaxation in the horizontal direction, as the influence of (P1) and (P3) vanishes. The second phase is related to the existence of the process zone. Then for $x > 23\ m$, the relaxation of the far-field stress is observed.

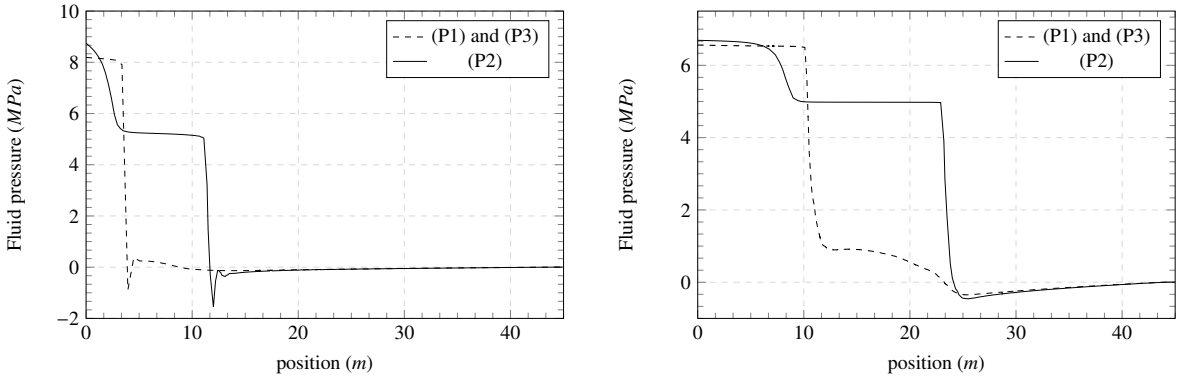


Figure 18: Evolution of the fluid pressure along each fracture path at $t_1 = 18s$ (left) and $t_2 = 80s$ (right).

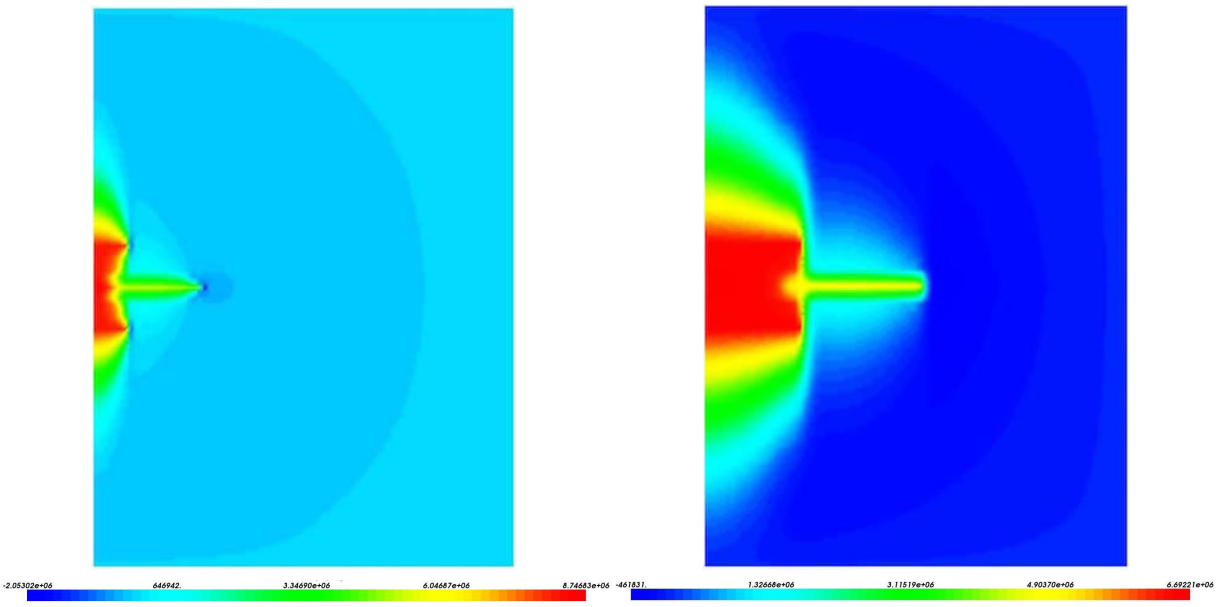


Figure 19: Scalar maps for the pore pressure at $t_1 = 18s$ (left) and $t_2 = 80s$ (right).

Figure 18 at $t_2 = 80s$, indicates a raise of the (P1) and (P3) pressure profile for $x \in]10, 23]$. As the tips of (P1) and (P3) are overpassed in this area, we measure the pore pressure rather than the fluid pressure, because the two

fractures (P1) and (P3) are in adherence for $x > 10\ m$. Moreover in this area, (P2) is widely opened. The opening of this fracture generates the deformation of the bulk whose behavior is governed by linear elasticity. Figure 19 (right) shows a weak fluid diffusion from (P2) for $x \in]10, 23]$. Indeed, the weak pressure diffusion between the orange layer and the domain leads to a fluid pressure increase within the orange layer. As a result, the pore pressure in the bulk also increases and induces an additional compressive stress in this zone (see Figure 20 (right) for $x \in]10, 23]$ and $|y| \in [0, 4.44]$), which is interpreted as the back-stress effect aforementioned in section 4.1.4. When the tip of (P2) is overpassed for $x > 23\ m$, the pressure profile of (P1) and (P3) reaches the expected initial pore pressure field (*i.e.* $p = 0$).

We display in Figure 21 (right) the normal flux map. Two points can be highlighted here. Firstly, leakage is located only above (P1) and below (P3). The maximum leak-off rate (at the upper and lower sides of each surrounding fracture) is measured near both fracture tips, where the competition between all of the three fractures starts to disappear. On the contrary, in the competition area where the stress shadowing effect is the strongest, leakage does not exist. As the permeability of the orange layer is lower than the bulk one, small leakage happens for $x \in]10, 23]$ along (P2). Secondly, this example confirms the interest of introducing the enriched degree of freedom d_i in the expression of the approximation of the pore pressure field (see equation (31)). Although the pressure continuity $p = p_f$ is enforced at the interface, we are able to catch the discontinuity of the pore pressure gradient on each side of the fractures.

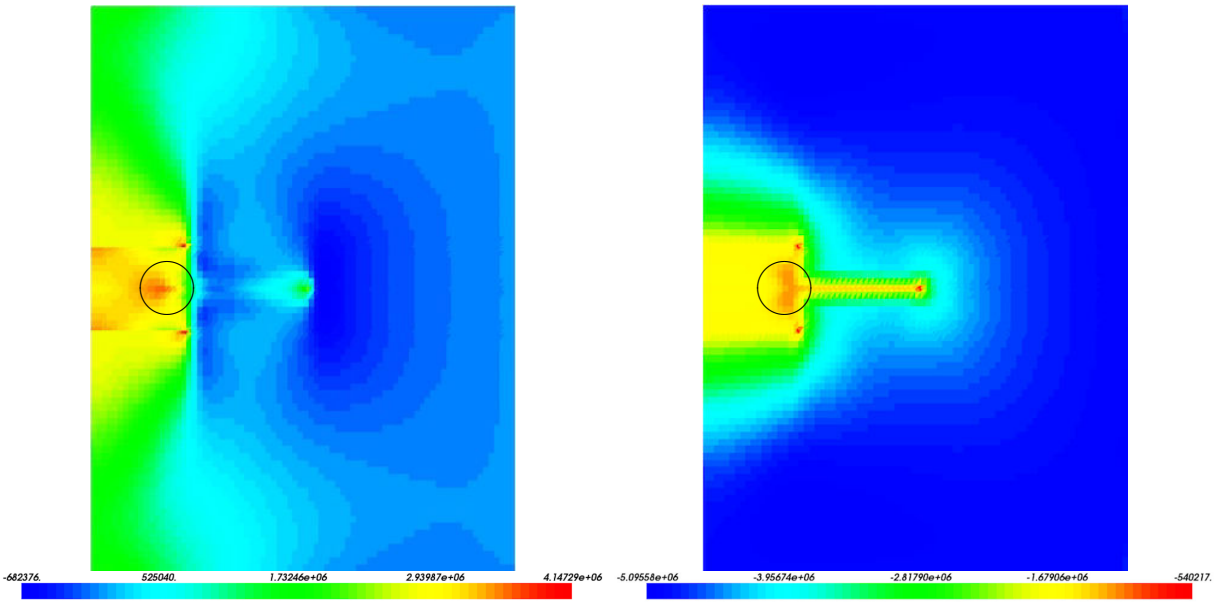


Figure 20: Scalar maps for the horizontal effective stress (left) and the vertical effective stress (right) at $t_2 = 80s$. The circles indicate the position of the bottleneck observed in Figure 17 (right).

To confirm the efficiency of our XFEM formulation, we plotted in Figure 22 a cross section perpendicular to the fracture network for $x = 8\ m$. As can be seen, the pressure profile at $t_1 = 18s$ and $t_2 = 80s$ are symmetrical with respect to the x-axis (*i.e.* $y = 0$) and no spurious oscillations are mentioned. Both ascending parts observed for $|y| \in [0, 4.44]$ at $t_2 = 80s$ are related to the strong interaction between each fracture in this area.

Finally, at the fracture tips for $t_1 = 18s$, the fluid pressure in (P1), (P2) and (P3) drops very quickly to reach the initial pore pressure field (*i.e.* $p = 0$), and we measure negative values of fluid pressure (see in Figure 18 (left) and Figure 19 (left)). These negative values are due to pressure shock propagation related to the weak permeability of the porous medium in the horizontal direction. When the fracture is closed, the fluid pressure is equal to the pore pressure of the surrounding porous medium. Before the pressure diffusion at the tip begins in the porous medium, negative

pressure values are measured. Then, when large diffusion time is reached, this effect is reduced (see Figure 18 (right) and Figure 19 (right)).

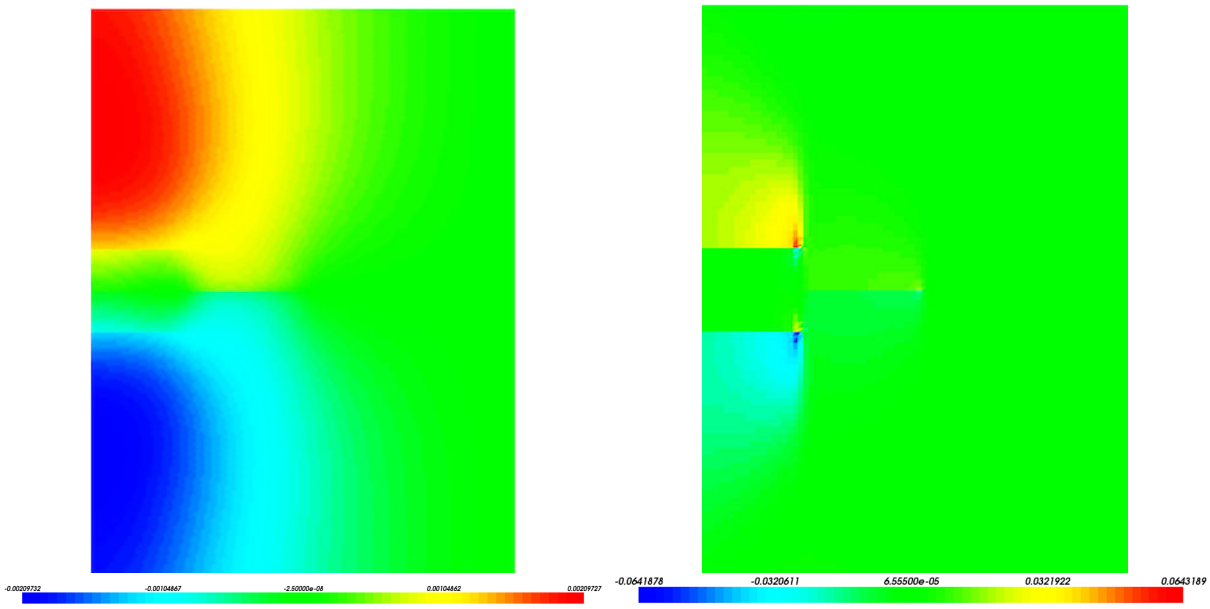


Figure 21: Scalar maps for the vertical displacement (left) and the normal flux for each fracture (right) at $t_2 = 80s$.

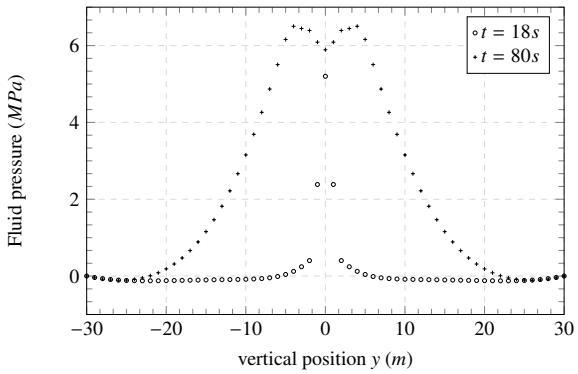


Figure 22: Evolution of the pore pressure field along a cross section perpendicular to the fracture network (for $x = 8m$) at $t_1 = 18s$ and $t_2 = 80s$.

4.2.3. Computational results for a fracture network with straight interfaces : isotropic diffusion

We now perform simulations for three straight horizontal fractures in an homogenous rock (*i.e.* the orange layer is no longer considered) where the diffusion in the bulk is bi-dimensional. In this case, we investigate the competition of fractures whose storage regimes are identical, in contrast with the previous case. The geometry of the problem is depicted in Figure 16 (left).

The vertical confining stress is $\sigma_0 = 5\ MPa$, the permeability of the solid matrix is $K^{int} = 5 \times 10^{-15}\ m^2$ and the fluid viscosity is $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$. The injection rates are $Q_0 = 0.0005\ m^2.s^{-1}$. The leak-off coefficient is $C_L = 2 \times 10^{-4}\ m.s^{1/2}$ for each fracture. As previously, the simulation will represent over 80s. The dimensionless toughness coefficient are equal to $\mathscr{K}_{1,2,3} = 2.89$ and the dimensionless leakage coefficient are $\mathscr{C}_{1,2,3} \in [1, 4.11]$. Thus, the three fractures propagate in the near leak-off-toughness dominated regime since $1 < \mathscr{K}_{1,2,3} < 4$ and $\mathscr{C}_{1,2,3} > 1$.

In Figure 25, we observe the pore pressure field at $t_1 = 18s$ and $t_2 = 80s$. The fluid pressure inside the fractures as well as the opening profiles are given for each fracture at t_1 and t_2 in Figure 24 and Figure 23 respectively. We also measure the relative lips displacements with respect to the horizontal x-axis.

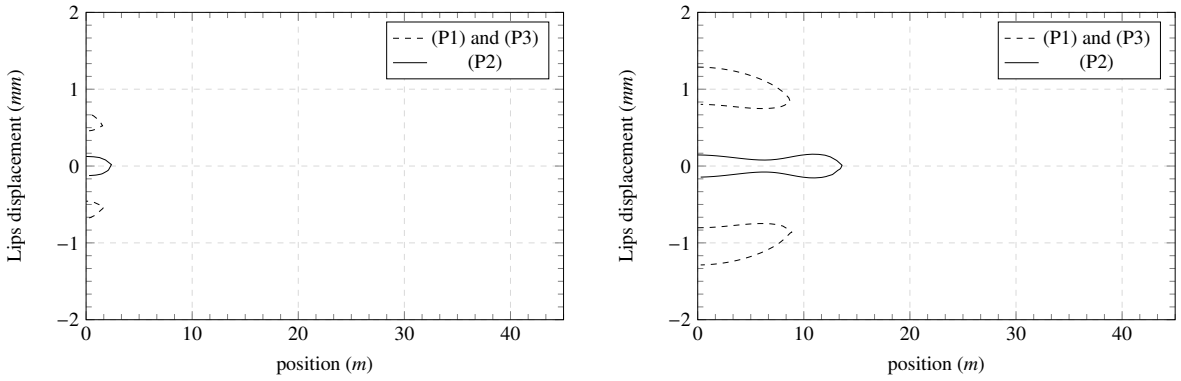


Figure 23: Lips displacement for each fracture at $t_1 = 18s$ (left) and $t_2 = 80s$ (right).

At $t_1 = 18s$ (see Figure 23 (left)), the profile of the three fractures is quite similar except for a slight advance of the central fracture. The diffusion process in the porous matrix has started around each of the fractures and the pore pressure map (see Figure 25 (left)) suggests that interactions between the fractures are just beginning as the diffusion areas intersect. As a result, the domain located between the two open fractures (P1) and (P3) is supplied by the fluid leak-off of these two surrounding fractures at the same time, accelerating the raise of the pore pressure in these areas. This augmentation of the pore pressure has two consequences. The first one, considering the generalized Biot theory, is the swelling of the medium, submitted to an important fluid pressure in its pores. Secondly, the fluid leakages from the fractures to the porous medium decrease as the pressure gap reduces between the fluid pressure in the fractures and the pore pressure in the vicinity of the fractures. As (P2) is affected by this phenomenon on both of its sides, it is then progressively constrained to store all of its injected fluid instead of releasing a part of it in the surrounding porous medium. This explains the slight difference of length between (P2) and the outlying fractures (P1) and (P3). At $t_1 = 18s$, the fluid pressure inside the fractures is almost the same for (P2) and the two surrounding fractures (P1) and (P3) (approximately 8 MPa). As depicted in Figure 24 (left), the fluid pressure profile is characteristic of a near leak-off-toughness dominated regime as the fluid pressure is constant for each fracture ($x \in [0, 2.5]$). The fracturing dissipation mechanism seems to dominate.

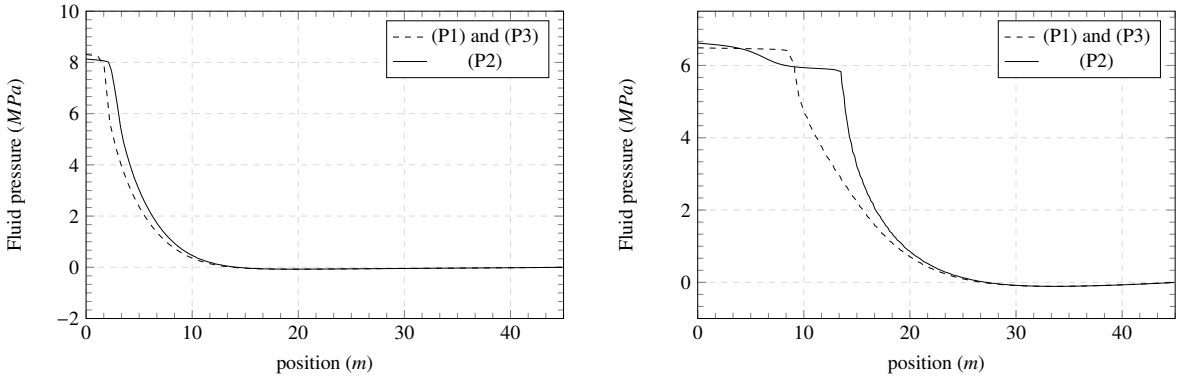


Figure 24: Evolution of the fluid pressure along each fracture path at $t_1 = 18s$ (left) and $t_2 = 80s$ (right).

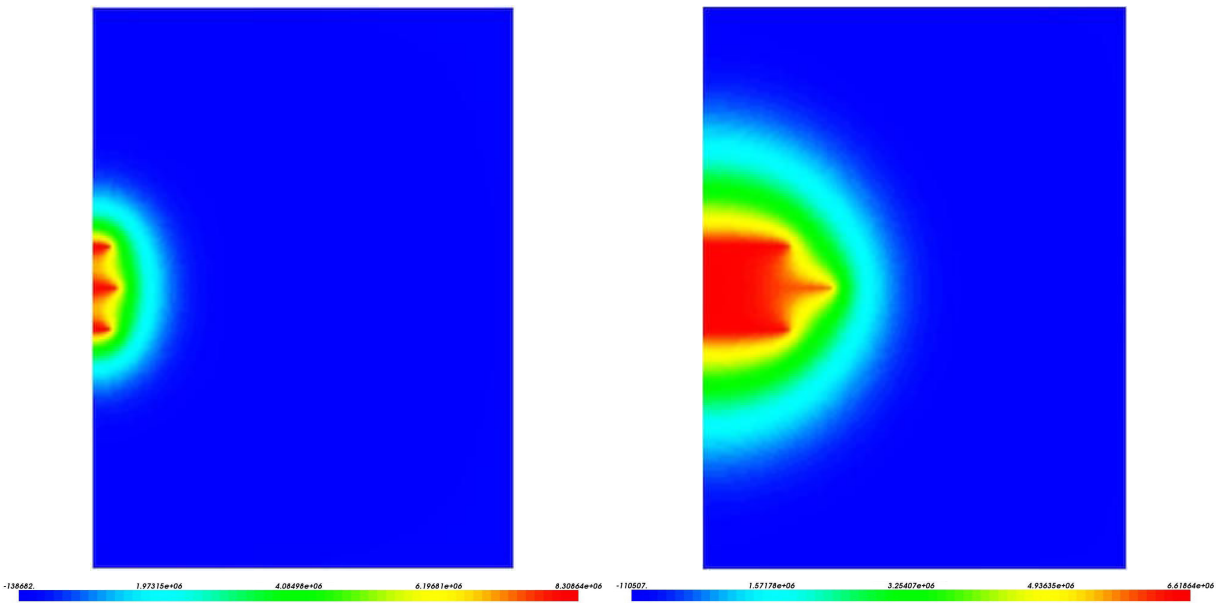


Figure 25: Scalar maps for the pore pressure at $t_1 = 18s$ (left) and $t_2 = 80s$ (right).

At $t_1 = 18s$, the interactions between the three parallel fractures are just beginning. But for $t_2 = 80s$, the fracture profiles are significantly affected by the interactions between one another. The areas between the open fractures are subject to an important swelling and the local stress state is altered. There is no fluid leakage possible from the fractures to the porous matrix in these areas. This explains the unsymmetrical profiles of (P1) and (P3) with respect to the propagation path, and the uncommon profile of (P2) as illustrated in Figure 23 (right), which is constrained to extend ahead of the peripheral fracture fronts in order to carry its fluid. Indeed, the opening of (P2) is significantly smaller than the opening of (P1) and (P3) because it suffers on both sides from the stress shadowing effect, induced by the two surrounding fractures interactions. As presented in section 4.2.2, the same perturbation is observed on the fluid pressure profile of (P2) (see Figure 24 (right)). Indeed, close to the tips of (P1) and (P3), where the normal opening of (P2) is reduced (see Figure 23 (right) for $x \in [5, 7]$), the viscous dissipation mechanism seems to prime due to the fracture aperture reduction. However, the fluid pressure gradient observed in this case is less important compared to the previous case (see section 4.2.2). This difference can be attributed to the propagation regime of (P2) (*i.e.* near-leak-off-toughness dominated regime here) and the bi-dimensional fluid diffusion around this fracture. In this area, the combination of these two processes tends toward the reduction of the energy dissipation mechanism due to viscous effects. For $x > 10\ m$, the fluid pressure inside (P2) is uniform and its aperture increases, because the influence of (P1) and (P3) vanishes. Hence, the fracturing dissipation mechanism dominates again.

In this experience, we have highlighted the strong interactions likely to take place between different fractures in the near leak-off-toughness dominated regime as soon as their diffusion areas intersect. Similarities with the results of section 4.2.2 have been noticed, but the fluid pressure field is more affected when the competition involves a near storage-toughness dominated fracture. Moreover, the negative values observed at the fracture tips (see section 4.2.2) are no longer relevant here. Indeed, the bi-dimensional diffusion allows to balance the fluid pressure front value with the pore pressure field (see the smooth pressure decrease ahead each fracture tip in Figure 24).

4.2.4. Computational results for a fracture network with curved interfaces

In this last configuration, the impact of the fracture shape (*i.e.* curved or straight fractures) is investigated. The geometry of the problem is depicted in Figure 16 (right). The vertical confining stress is $\sigma_0 = 3.7\ MPa$, the permeability of the solid matrix is $K^{int} = 1 \times 10^{-16}\ m^2$ and the viscosity of the fluid is $\mu = 1 \times 10^{-4}\ Pa.s$. The injection rates are $Q_0 = 0.001\ m^2.s^{-1}$ for the central fracture (C2) and $Q_1 = 0.0014\ m^2.s^{-1}$ for both curved fractures (C1) and (C3). The leak-off coefficient is $C_L = 1.47 \times 10^{-5}\ m.s^{1/2}$ for each fracture. We simulate over 40s. So, the dimensionless

toughness is equal to $\mathscr{K}_2 = 2.43$ and the dimensionless leakage-coefficient $\mathscr{C}_2 \in [0, 0.19]$ for (C2). The dimensionless toughness coefficients are $\mathscr{K}_{1,3} = 2.24$ and the dimensionless leakage coefficients are $\mathscr{C}_{1,3} \in [0, 0.16]$ for (C1) and (C3). Thus, the conditions $1 < \mathscr{K}_{1,2,3} < 4$ and $\mathscr{C}_{1,2,3} < 1$ are fulfilled to stay in the near storage-toughness dominated regime for each fracture.

The interest of this experiment is double. First, this demonstrates the ability of our model to handle strongly curved fractures. In particular, the Lagrange approximation space is non-trivial for these curved fractures. The set of equality relations applied to the Lagrange multipliers ensures the stability of the numerical solution. Secondly, it allows us to appreciate the behavior of the fractures when they approach close to each other and when the predefined fracture path is not identically perpendicular to the confining stress direction. In Figure 26, we display the deformed mesh and the pore pressure for $t_1 = 17s$ and $t_2 = 40s$.

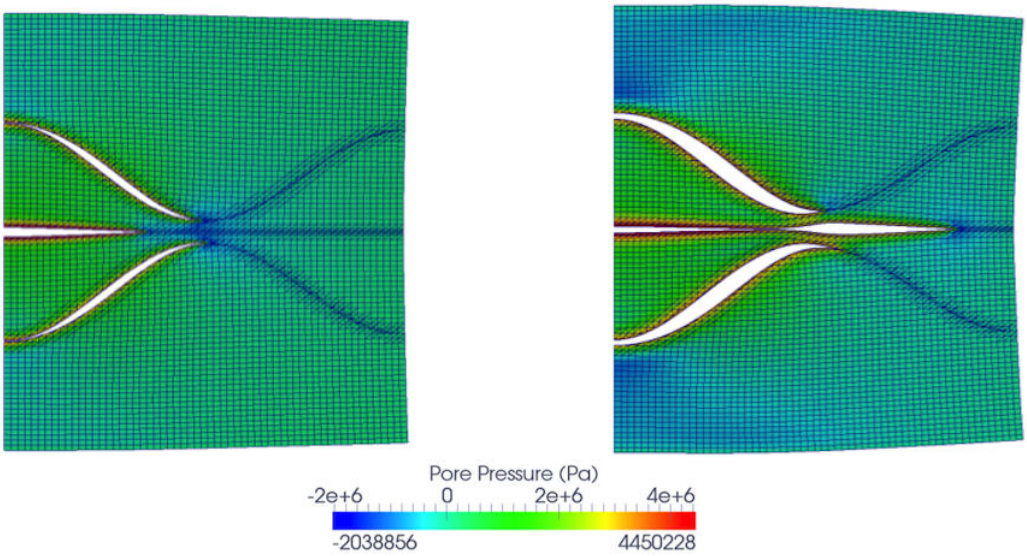


Figure 26: Deformed mesh (× 800) and pore pressure for $t_1 = 17s$ (left) and $t_2 = 40s$ (right).

The fluid pressure in the fractures is also given for $t_1 = 17s$ and $t_2 = 40s$ as well as the normal opening of the fractures in Figures 27 and 28 respectively ("position" refers to the horizontal coordinate x). Note that the profiles of the two curved fractures have been symmetrized.

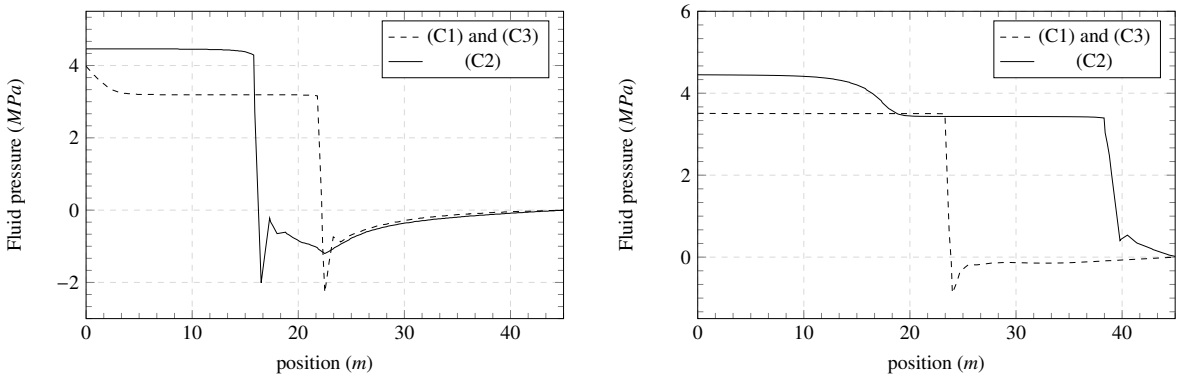


Figure 27: Evolution of the fluid pressure along each fracture path at $t_1 = 17s$ (left) and $t_2 = 40s$ (right).

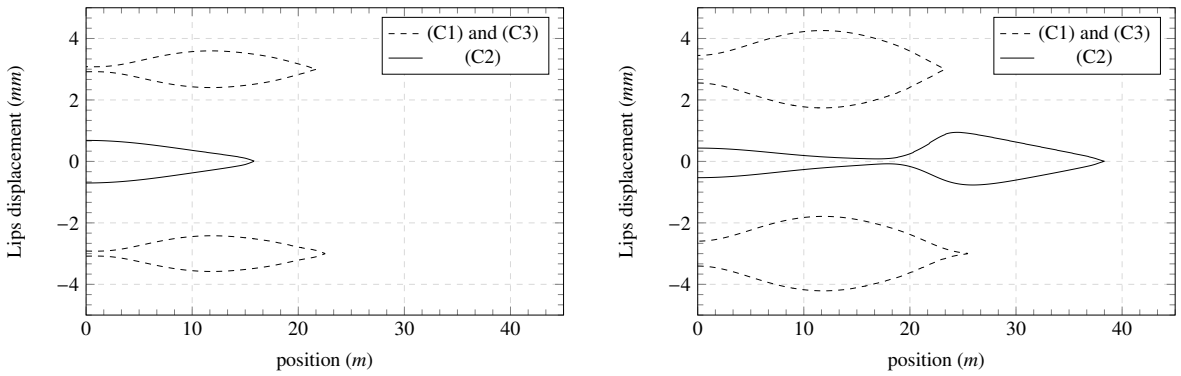


Figure 28: Lips displacement for each fracture at $t_1 = 17s$ (left) and $t_2 = 40s$ (right).

The two outlying curved fractures (C1) and (C3) scarcely propagate between $t_1 = 17s$ and $t_2 = 40s$, and their shape is unpredictable since they significantly differ from the case with planar fractures (see Figure 28). They obviously store the injected fluid instead of extending. This can be attributed to the important vertical confining stress. Indeed, the shape of their normal opening indicates that the local thickness of the fracture is related to its orientation. The more the fracture is inclined compared to the horizontal direction, the less confining stress it faces in the direction normal to its path. It is then easier for the fluid in the fracture to sustain and open the fracture. Also, we note that their propagation almost stops after $t_1 = 17s$, when they reach the narrow gully that coincides with a fracture path perpendicular to the confining stress. It seems then easier for these fractures to store the injected fluid in the areas that present a low perpendicular compressive stress than to extend in a direction perpendicular to the confining stress. This explains the shape of the curved fractures. The slight differences between these two fractures are due to the unsymmetrical discretization of the fracture, that relies on the integration sub-cells (see Figure 28). For information purposes, Abbas et al. [97] investigated within XFEM the influence of the far-field stress state and fracture offset angles on the growth of hydraulic fracture networks.

The central straight fracture (C2) also exhibits an uncommon shape at $t_2 = 40s$ (see Figure 28 (right)). It seems to suffer a lot from the competition of the two surrounding fractures that shield it for $x < 20\ m$. The normal opening becomes smaller as the two other fractures approach and tighten the central fracture (C2). The stress interaction between fractures is maximal here. In the area of the narrow gully, the three fractures have approximately the same direction and the opening of the central fracture increases as the competition becomes fair. Then, for $x > 20\ m$, the central fracture is on its own, the opening is wider as it is easier to store fluid in this area, deprived of competition with other fractures.

Concerning the fluid pressure in the fractures, at $t_1 = 17s$ (see Figure 27 (left)), it is significantly higher in the central fracture (C2) compared to the curved fractures (C1) and (C3). The pressure necessary to sustain a fracture perpendicular to the confining stress is greater than the fluid pressure necessary to sustain a fracture whose path is closer to the confining stress direction. For the curved fractures (C1) and (C3), we observe a pressure drop near the injection points ($x \in [0, 5]$). Indeed, due to the combination of the normal stress effects, which is maximal in this area, and the influence of the normal opening of (C2) which participates to close (C1) and (C3), the viscous dissipation mechanism seems to dominate locally. The propagation of the curved fractures in the inclined part is very fast, because the path direction is more favorable. An important area is then rapidly opened for the fluid, which is sucked up in this area. We do not have it at $t_2 = 40s$ because in this area, the influence of (C2) slowly disappears as it propagates. So, (C1) and (C3) start to reopen. However, the fluid pressure in the central fracture (C2) at $t_2 = 40s$ is $p_f \in [3.4, 4.4]$ for $x \in [15, 20]$. This pressure drop is related to the change in the profile of the normal opening of this fracture and the direction of the maximal stress state, which both enable the viscous dissipation mechanism to dominate here again. For $x \in [15, 20]$, it suffers from a disadvantage due to the curved fractures, while for $x > 20\ m$, it has no competitors and an uniform fluid pressure profile is observed. In this case, the fracturing dissipation mechanism is preponderant and allows (C2) to propagate.

At all the fracture tips (see Figure 27), like in section 4.2.2, we still measure negative values of the fluid pressure field. In this example this effect is increased because of the smaller permeability of the bulk and of the lack of diffusion at the fracture tips.

Still, this experience allows us to appreciate the robustness of our numerical model and to connect our observations to physical phenomena.

5. Conclusion

We proposed in this paper a strongly coupled HM-XFEM model for the simulation of groundwater flows through a fractured porous medium. The ability to apprehend the various phenomena involved in the hydraulic fracturing process relies on the use of different approximation spaces. The stability of the hydro-mechanical coupling in the deformable porous matrix is guaranteed by a mixed interpolation in the standard finite element approximation of the bulk. The fluid flow in the fracture and the non-regularized cohesive zone model which rule the fracture evolution have been successfully inserted in the model thanks to additional approximation spaces designed for the fields associated to the interface. This insures the numerical stability of our model.

The HM-XFEM model has shown promising results on the KGD benchmark. One of its main advantages compared to the existing models (*e.g.* interface elements) is the use of the eXtended Finite Element Method, that enables us to propose complex fracture geometries on relatively coarse and regular meshes.

Numerical simulations of the KGD benchmark applied to a non-connected fracture network have proven the capabilities of the HM-XFEM model to account for the interaction of nearby fractures. Indeed, we performed numerical simulations to demonstrate the influence of the matrix permeability on the propagation of each fracture of the network. Therefore, we highlighted the competition of both dissipation mechanisms involved in the propagation of the fracture network. In the first example, where different storage regimes (*i.e.* in the fracture and in the porous medium) and an anisotropic diffusion were considered, we showed a strong influence of the two outlying fractures on the local appearance of viscous dissipation effects at the level of the central fracture. On the contrary, the second example demonstrated that the combination of bi-dimensional diffusion and identical propagation regimes for each fracture (*i.e.* near leak-off-toughness dominated regime), in an isotropic medium, participates to reduce these local viscous dissipation effects. Moreover in the case of highly curved interfaces, non-uniform fracture opening and non-uniform fluid pressure repartition are still observable due to the influence of the regional stress field orientation. In this way, we underlined some limits of the KGD benchmark when applied to a fracture network, because the analytical solutions do not account for the hydro-mechanical coupling generated by another fracture or by the fracture geometry.

In the near future, a second paper will come along with significant extensions of the HM-XFEM model. First of all, we extended our model to the 3D case. But this requires 3D quadratic XFEM elements that suffer from major robustness and conditioning issues. A robust procedure has recently been developed by Paul et al. [80] (submitted) for the design of robust volumetric quadratic XFEM elements. It includes the possibility of having fracture junctions in our HM-XFEM model. Other approaches have also been proposed in [98, 99]. When it comes to the conditioning issue inherent to 3D quadratic XFEM elements, major advances have recently been performed by N'Deffo et al. [72] (submitted) enabling the use of complex fracture geometries for 3D XFEM models. Finally, we would like to model the propagation of fluid-driven fractures on non-predefined paths. An original method for 3D cohesive crack growth on non-predefined paths has been developed by Ferte et al. [60] in Code_Aster. We rely on these works to complete the design of our coupled HM-XFEM elements.

Acknowledgments

This work was supported by the French National Research Agency through the national program "Investissements d'avenir" with the reference ANR-10-LABEX-21-RESSOURCES21 and by the Regional Council of Lorraine. Part of

this work was financially supported by EDF and IFPEN that we thank for their participation. The authors are grateful to Sylvie Granet and Sam Cuvillez (EDF R&D AMA T64) for their constructive remarks.

References

[1] S. Levasseur, R. Charlier, B. Frieg, F. Collin, Hydro-mechanical modelling of the excavation damaged zone around an underground excavation at Mont Terri Rock Laboratory., Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. 47 (2010) 414–425.
[2] D. Cluzel, B. Vigier, Syntectonic mobility of supergene nickel ores of New Caledonia (Southwest Pacific). evidence from garnierite veins and faulted regolith, Resource Geology 58 (2008) 161–170.
[3] R. Das, Y. Zhang, P. Schaubs, P.W.Cleary, Modelling rock fracturing caused by magma intrusion using the smoothed particle hydrodynamics method, Comput. Geosci. 18 (2014) 927–947.
[4] V.A.Lisitsin, I. Gonzalez-Alvarez, A. Porwal, Regional prospectivity analysis for hydrothermal-remobilised nickel mineral systems in western Victoria, Australia, Ore Geology Reviews 52 (2013) 100–112.
[5] I. Gonzalez-Alvarez, F. Pirajno, R. Kerrich, Hydrothermal nickel deposits : Secular variation and diversity, Ore Geology Reviews 52 (2013) 1–3.
[6] P. Nimis, V.V.Zaykov, P. Omenetto, I.Y.Melekestseva, S.G.Tesalina, J.J.Orgeval, Peculiarities of some mafic-ultramafic and ultramafic-hosted massive sulphide deposits from the main Uralian Fault Zone, southern Urals, Ore Geology Reviews 33 (2008) 49–69.
[7] P. Valko, M.J.Economides, Hydraulic Fracture Mechanics, John Wiley and Sons, Chichester UK, 1995.
[8] E. Gordeliy, A. Peirce, Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 253 (2013) 305–322.
[9] E. Gordeliy, A. Peirce, Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the XFEM, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 266 (2013) 125–143.
[10] S. Khristianovic, Y. Zheltov, Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids, Proceedings of the 4th world petroleum congress 2 (1955) 579–586.
[11] J. Geertsma, F. de Klerk, Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids, A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures 21 (1969) 1571–1581.
[12] S. Granet, Modélisations THHM : Généralités et algorithmes [R7.01.10], http://www.code-aster.org/.
[13] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl, Meshless methods: An overview and recent developments, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 3–47.
[14] L.B.Lucy, A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, The Astron J. 12 (1977) 1013–1024.
[15] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, Comput. Mech. 10 (1992) 307–318.
[16] P.A.Cundall, O.D.L.Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, Géotechnique 29 (1979) 47–65.
[17] J.M.Melenk, I. Babushka, The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 289–314.
[18] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering 45 (1999) 601–620.
[19] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering 46 (1999) 131–150.
[20] N. Sukumar, D.L.Chopp, N. Moës, T. Belytschko, Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 6183–6200.
[21] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, T. Belytschko, Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method, Int. J. Numer. Meth. Engng. 48 (2000) 1741–1760.
[22] N. Moës, T. Belytschko, Extended finite element method for cohesive crack growth, Engineering Fracture Mechanics 69 (2002) 813–833.
[23] G. Meschke, P. Dumstorff, Energy-based modelling of cohesive and cohesionless cracks via XFEM, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 2338–2357.
[24] G. Zi, T. Belytschko, New crack-tip element for XFEM and applications to cohesive cracks, Int. J. Numer. Meth. Engng. 57 (2003) 2221–2240.
[25] S. Geniaut, P. Massin, N. Moës, A stable 3D contact formulation for cracks using XFEM, Revue Europénne de Mécanique Numérique 75 (2007) 259–276.
[26] J. Dolbow, N. Moës, T. Belytschko, An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 6825–6846.
[27] A.R.Khoei, M. Nikbakht, Contact friction modelling with the extended finite element method (XFEM), Journal of Materials Technology 177 (2006) 58–62.
[28] I. Nistor, M.L.E.Guiton, P. Massin, N. Moës, S. Geniaut, An X-FEM approach for large sliding contact along discontinuities, Int. J. Numer. Meth. Engng. 78 (2009) 1407–1435.
[29] N. Watanabe, W. Wang, J. Taron, U.J.Gorke, O. Kolditz, Lower-dimensional interface elements with local enrichment:application to coupled hydro-mechanical problems in discretely fractured porous media, International Journal for Numerical Methods in Engineering 90 (2012) 1010–1034.
[30] A.R.Khoei, E. Haghighat, Extended finite element modelling of deformable porous media with arbitrary interfaces, Applied Mathematical Modelling 35 (2011) 5426–5441.
[31] J. Rethore, R. de Borst, M.A.Abellan, A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media, International Journal For Numerical Methods In Engineering 71 (2007) 780–800.

[32] T. Mohammadnejad, A.R.Khoei, An extended finite element method for fluid flow in partially saturated porous media with weak discontinuities; the convergence analysis of local enrichment strategies, Comput. Mech. 51 (2013) 327–345.
[33] J. Dolbow, N. Moës, T. Belytschko, Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method, Finite Elements in Analysis and Design 36 (2000) 235–260.
[34] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, C. Parimi, Arbitrary discontinuities in finite elements, Int. J. Numer. Meth. Engng. 50 (2001) 993–1013.
[35] S. Osher, J.A.Sethian, Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, Journal of Computational Physics 79 (1988) 12–49.
[36] M. Duflot, A study of the representation of cracks with the level sets, Int. J. Numer. Meth. Engng. 70 (2007) 1261–1302.
[37] M. Stolarska, D.L.Chopp, N. Moës, T. Belytschko, Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method, Int. J. Numer. Meth. Engng. 51 (2001) 943–960.
[38] A. Gravouil, N. Moës, T. Belytschko, Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set update, Int. J. Numer. Meth. Engng. 53 (2002) 2569–2586.
[39] D. Colombo, P. Massin, Fast and robust level set update for 3D non-planar XFEM crack propagation modelling, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 200 (2011) 2160–2180.
[40] G. Ventura, E. Budyn, T. Belytschko, Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements, Int. J. Numer. Meth. Engng. 58 (2003) 1571–1592.
[41] S. Geniaut, E. Galenne, A simple method for crack growth in mixed mode with XFEM, International Journal of Solids and Structures 49 (2012) 2094–2106.
[42] D. Colombo, An implicit geometrical approach to level sets update for 3D non-planar XFEM crack propagation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 237-240 (2012) 39–50.
[43] R.E.Goodman, R.L.Taylor, A model for the mechanics of jointed rock, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division ASCE 94 (1968) 637–659.
[44] J. Noorishad, C.F.Tsang, P. Witherspoon, Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks -1. development and verification of a numerical simulator, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts 29 (1992) 401–409.
[45] A. Cornec, I. Scheider, K.H.Schwalbe, On the practical application of the cohesive model, Engng. Fract. Mech. 70 (1963) 1963–1987.
[46] B. Carrier, S. Granet, Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model, Engineering Fracture Mechanics 79 (2012) 312–328.
[47] A.R.Khoei, T. Mohammadnejad, Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfall dams, Computers and Geotechnics 38 (2011) 142–166.
[48] A. Zamani, M.R.Eslami, Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation, International Journal of Solids and Structures 47 (2010) 1392–1404.
[49] A.R.Khoei, S. Moallemi, E. Haghighat, Thermo-hydro-mechanical modelling of impermeable discontinuity in saturated porous media with X-FEM technique, Engineering Fracture Mechanics 96 (2012) 701–723.
[50] Q. Ren, Y. Dong, T. Yu, Numerical modelling of concrete hydraulic fracturing with extended finite element method, Sci. China Ser. E-Tech. Sci. 52 (2009) 559–565.
[51] J. Rethore, R. de Borst, M.A.Abellan, A two-scale model for fluid flow in an unsaturated porous medium with cohesive cracks, Comput. Mech. 48 (2008) 227–238.
[52] B. Lecampion, J. Desroches, Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from horizontal wellbore, Journal of the Mechanics of Physics and Solids 82 (2015) 235–258.
[53] A.P.Bunger, Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures, International Journal of Solids and Structures 50 (2013) 1538–1549.
[54] H. Wang, Numerical modeling of non-planar hydraulic fracture propagation in brittle and ductile rocks using XFEM with cohesive zone method, Journal of Petroleum Science and Engineering 135 (2015) 127–140.
[55] T. Rabczuk, G. Zi, A. Gerstenberger, A. Wall, A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks, Int. J. Numer. Meth. Eng. 75 (2008) 577–599.
[56] G. Barenblatt, The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, Adv. Appl. Mech. 7 (1962) 55–130.
[57] D. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits, J. Mech. Phys. 8 (100-104).
[58] T. Mohammadnejad, A.R.Khoei, Hydro-mechanical modeling of cohesive crack propagation in multiphase porous media using the extended finite element method, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 37 (2013) 1247–1279.
[59] T. Mohammadnejad, A.R.Khoei, An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous medium with the cohesive crack model, Finite Elements in Analysis and Design 73 (2013) 77–95.
[60] G. Ferte, P. Massin, N. Moës, 3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering 300 (2016) 347–374.
[61] E. Lorentz, A mixed interface finite element for cohesive zone models, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2008) 302–317.
[62] C. Talon, A. Curnier, A model of adhesion coupled to contact and friction, European Journal of Mechanics - A/Solids 22 (2003) 545–565.
[63] P.A.Witherspoon, J.S.Y.Wang, K. Iwai, J.E.Gale, Validity of the cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture, Water Resour. Res. 16 (1980) 1016–1024.
[64] R.W.Lewis, B.A.Schrefler, The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media 2nd edition, Wiley Chichester, 1998.
[65] M.G.Schaap, M. Genuchten, A modified Mualem-van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation, Vadose Zone Journal 5 (2006) 27–34.
[66] J. Laverne, Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques, Ph.D. thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Paris XIII (2004).
[67] G. Debruyne, J. Laverne, P.E.Dumouchel, Dynamic crack growth: Analytical and numerical cohesive zone model approaches from basic tests

to industrial structures, Engineering Fracture Mechanics 90 (2012) 1–29.
[68] G. Ferte, P. Massin, N. Moës, Interface problems with linear or quadratic X-FEM: design of a stable multiplier space and error analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng. 100 (2014) 834–870.
[69] E. Bechet, N. Moës, B. Wohlmuth, A stable lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method, International Journal For Numerical Methods in Engineering 78 (2009) 931–954.
[70] N. Moës, E. Bechet, M. Tourbier, Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method, International Journal For Numerical Methods in Engineering 67 (2006) 1641–1669.
[71] J. Mosler, Numerical analyses of discontinuous material bifurcation : strong and weak discontinuities, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 (2005) 979–1000.
[72] M. N'Deffo, P. Massin, N. Moës, On the construction of approximation spaces to model strong discontinuities and cracks with linear and quadratic elements (2015, submitted).
[73] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, J.F.Remacle, A computational approach to handle complex microstructure geometries, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 3163–3177.
[74] T. Belytschko, T. Black, N. Moës, N. Sukumar, S. Usui, Structured extended finite element methods of solids defined by implicit surfaces, Int. J. Numer. Meth. Engrg. 56 (2003) 609–635.
[75] A. Ern, S. Meunier, A posteriori error analysis of euler-galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems, ESAIM: M2AN 43 (2009) 353–375.
[76] J. Chessa, H. Wang, T. Belytschko, On the construction of blending elements for local partition of enriched finite elements, International Journal For Numerical Methods in Engineering 57 (2003) 1015–1038.
[77] T.P.Fries, A corrected XFEM approximation without problems in blending elements, International Journal For Numerical Methods in Engineering 75 (2008) 503–532.
[78] S. Geniaut, Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles, Ph.D. thesis, Ecole Centrale Nantes (2006).
[79] N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko, Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I : Mechanical model, Int. J. Numer. Meth. Engng. 53 (2002) 2549–2568.
[80] B. Paul, M. N'Deffo, P. Massin, D. Colombo, N. Moës, A higher order integration technique for 3D cracks and branching discontinuities (2015, submitted).
[81] A. Bunger, E. Detournay, D. Garagash, Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off, Int. J. Fract. 134 (2005) 175–190.
[82] J. Adachi, E. Detournay, Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock, Engng. Fract. Mech. 75 (2008) 4666–4694.
[83] EDF R&D, site officiel de Code_Aster, http://www.code-aster.org/.
[84] O. Coussy, Poromechanic, John Wiley & Sons, 2004.
[85] E. Detournay, Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks, Int. J. Geomech 4 (2004) 1–11.
[86] D.A.Spence, P.W.Sharp, Self-similar solution for elastohydrodynamic cavity flow, Proc. Roy. Soc. London Series A 400 (1985) 289–313.
[87] J. Hu, D.I.Garagash, Plaine-strain propagation of a fluid-driven crack in a permeable rock with fracture toughness, Journal of Engineering Mechanics 136 (2010) 1152–1166.
[88] G. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, ASME Trans. J. Appl. Mech. 24 (1957) 361–364.
[89] B. Bilby, J. Eshelby, "Dislocations and the theory of fracture" Fracture, an advanced treatise, New York : Academic, 1968.
[90] J. Rice, The mechanics of earthquake rupture. In: Dziewonski, A.M. (Ed.), Physics of the Earth's Interior, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.
[91] L. Vandamme, J. Roegiers, Poroelasticity in hydraulic fracturing simulators, J. Pet. Technol. 42 (1957) 1199–1203.
[92] E. Detournay, A. Cheng, J. McLennan, A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm, ASME J. Ener. Res. Tech. 112 (1990) 224–230.
[93] E. Carter, Optimum fluid characteristics for fracture extension, Drill Prod. Pract. (1957) 261–270.
[94] M.K.Fisher, J.R.Heinze, C.D.Harris, B.M.Davidson, C.A.Wright, K.P.Dunn, Optimizing horizontal completion techniques in the Barnett Shale using microseismic fracture mapping, in: Paper SPE 90051 presented at the 2004 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston TX, September 26-29.
[95] Y. Cheng, Boundary element analysis of the stress distribution around multiple fractures : Implications for the spacing of perforation clusters of hydraulically fractured horizontal wells, in: SPE 125769, 2009.
[96] S.W.Wong, M. Geilikam, G. Xu, Interaction of multiple hydraulic fractures in horizontal wells, in: SPE 163982, 2013.
[97] S. Abbas, E. Gordeliy, A. Peirce, B. Lecampion, D. Chuprakov, R. Prioul, Limited height growth and reduction opening of hydraulic fractures due to fracture offsets : An XFEM application, in: SPE 168622, 2014.
[98] A.C.Duarte, L.G.Reno, A. Simone, A high-order generalized FEM for through-the-thickness branched cracks, International Journal for Numerical Methods in Engineering 72 (2007) 325–351.
[99] T.P.Fries, S. Omerovic, Higher-order accurate integration of implicit geometries (doi: 10.1002/nme.5121), International Journal for Numerical Methods in Engineering.

Annexe : Validation intermédiaire I

B

WTNV143 - Application d'une pression répartie sur les lèvres d'une fissure XFEM pour le cas hydro-mécanique

Résumé :

Le but de ce test est de s'assurer du bon fonctionnement de la méthode des éléments finis étendue dans le modèle de couplage HM en milieu saturé fracturé.

Dans ce test nous cherchons à vérifier dans le cas où la pression de pore est prise uniformément nulle dans tout le domaine d'étude (*i.e* afin de se placer dans un cas mécanique « classique » sans couplage), qu'il existe bien une discontinuité du champ de déplacements de part et d'autre de l'interface. Les résultats sont comparés à une solution analytique et aux résultats obtenus avec un test XFEM mécanique (semblables aux tests ssnv203, modélisations F et H).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie du problème

Il s'agit d'une colonne de hauteur $LZ=5\,m$, de longueur $LX=1\,m$ et de largeur $LY=1\,m$. Cette colonne présente en $Z=\frac{LZ}{2}$ une discontinuité de type interface. La colonne est ainsi entièrement traversée par la discontinuité.

On représente sur la Figure 1.1-a la géométrie de la colonne.

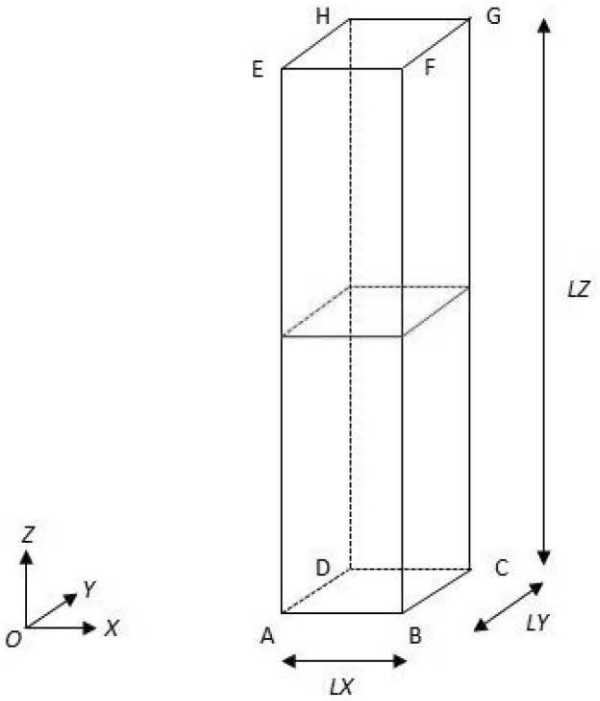


Figure 1.1-a: Géométrie du problème

1.2 Propriétés matériaux

Les paramètres donnés dans le Tableau 1.2-1 , correspondent aux paramètres utilisés pour la modélisation dans le cas couplé hydromécanique. La loi de couplage utilisée est `'LIQU_SATU'` . Les paramètres spécifiques à cette loi de couplage sont donnés mais n'ont aucune influence sur la solution (car nous avons choisi de prendre une pression de pore uniformément nulle dans tout le domaine). Seuls les paramètres élastiques ont une influence sur la solution du problème pseudo-couplé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Liquide (eau)	Viscosité $\mu_w(en\ Pa.s)$	10^{-3}
	Module de compressibilité $\frac{1}{K_w}(en\ Pa^{-1})$	5.10^{-10}
	Densité du liquide $\rho_w(en\ kg/m^3)$	1
Paramètres élastiques	Module de Young $E(en\ MPa)$	5800
	Coefficient de Poisson ν	0
	Coefficient de dilatation thermique $\alpha(en\ K^{-1})$	0
Paramètres de couplage	Coefficient de Biot b	1
	Masse volumique homogénéisée initiale $r_0(en\ kg/m^3)$	2,5
	Perméabilité intrinsèque $K^{int}(en\ m^2/s)$	$1{,}01937^{-19}$

Tableau 1.2-1 : Propriétés du matériau

D'autre part les forces liées à la pesanteur (dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement) sont négligées. La pression de pore de référence est prise nulle $p_1^{ref}=0\,MPa$ et la porosité du matériau est $\varphi = 0{,}15$.

On prend $\nu=0$ afin d'avoir un problème unidimensionnel selon la direction y .

1.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites que l'on peut appliquer sur le domaine sont de deux types :
- conditions de type Dirichlet,
- conditions de type Neuman.

Les conditions de Dirichlet sont :
- sur [ABCD] et [EFGH] les déplacements sont bloqués dans toutes les directions ($u_x=0$, $u_y=0$ et $u_z=0$),
- dans tout le domaine la pression de pore est nulle $p_1=0$, ainsi que le degré de liberté enrichi associé à cette pression de pore $Hp_1=0$.

Les conditions de Neuman sont :
- sur [ABCD] et [EFGH] les flux massiques d'eau sont nuls $\boldsymbol{M}.\boldsymbol{n}=0$,
- sur chacune des lèvres de l'interface on impose une pression répartie uniforme $p=10\,MPa$ par l'intermédiaire de AFFE_CHAR_MECA et du mot-clef FISSURE de PRES_REP.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Il s'agit d'une solution analytique. Compte tenu des conditions aux limites, les déplacements peuvent être obtenus à partir de la résolution analytique de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

En négligeant la pesanteur, l'équation s'écrit (en contraintes totales) :

$$\mathbf{Div}(\sigma)=\mathbf{0}$$

Dans le cas d'une modélisation couplée, le tenseur des contraintes totales s'écrit :

$$\sigma=\sigma'-p_1\mathbf{1}$$

σ' est le tenseur des contraintes dans le squelette et p_1 et la pression de pore dans le massif. Le module de Poisson ν étant nul , et étant dans le cas élastique, on a $\sigma'=E\epsilon$.

Or $\forall y\ p_1=0$ donc finalement $\mathbf{Div}(\epsilon)=\mathbf{0}$

Dans le cas 2D, ν étant nul, les conditions aux limites et le chargement rendent le problème unidimensionnel selon y . Seul ϵ_{yy} est non nul et :

$$\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y}=0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}=0$$

En particulier on s'intéresse aux déplacements selon la direction y au niveau de l'interface. Compte tenu des conditions aux limites au niveau de l'interface :

- les déplacements au dessus de l'interface en $y=\frac{LY^+}{2}$ s'écrivent $u_y\left(\frac{LY^+}{2}\right)=\frac{p}{E}\left(\frac{LY^+}{2}\right)$
- les déplacements en dessous de l'interface en $y=\frac{LY^-}{2}$ s'écrivent $u_y\left(\frac{LY^-}{2}\right)=-\frac{p}{E}\left(\frac{LY^-}{2}\right)$

Dans le cas 3D, la solution de référence est rigoureusement la même :

- les déplacements au dessus de l'interface en $z=\frac{LZ^+}{2}$ s'écrivent $u_z\left(\frac{LZ^+}{2}\right)=\frac{p}{E}\left(\frac{LZ^+}{2}\right)$
- les déplacements en dessous de l'interface en $z=\frac{LZ^-}{2}$ s'écrivent $u_z\left(\frac{LZ^-}{2}\right)=-\frac{p}{E}\left(\frac{LZ^-}{2}\right)$
- les déplacements suivant x et y sont nuls.

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On teste la valeur des déplacements sur les lèvres inférieure et supérieure de l'interface :

	Déplacements verticaux	Déplacements horizontaux
Lèvre inférieure	-4.310344828E-03	0
Lèvre supérieure	4.310344828E-03	0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune la solution est analytique.

2.4 Références bibliographiques

[1] Documentation de référence R7.02.12 (eXtended Finite Element Method).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation D_PLAN_HM utilisant des éléments HM-XFEM quadratiques. Le barreau sur lequel on effectue la modélisation est divisé en 5 QUAD8. L'interface est non maillée et coupe l'élément central. Ainsi on a 3 éléments HM-XFEM et 2 éléments HM classiques. Comme indiqué sur la Figure 3.1-a, les 3 éléments XFEM subissent un sous découpage en sous triangles (pour effectuer l'intégration de Gauss-Legendre de part et d'autre des lèvres de l'interface, mais ces sous-éléments triangulaires ne sont pas des éléments du maillage).

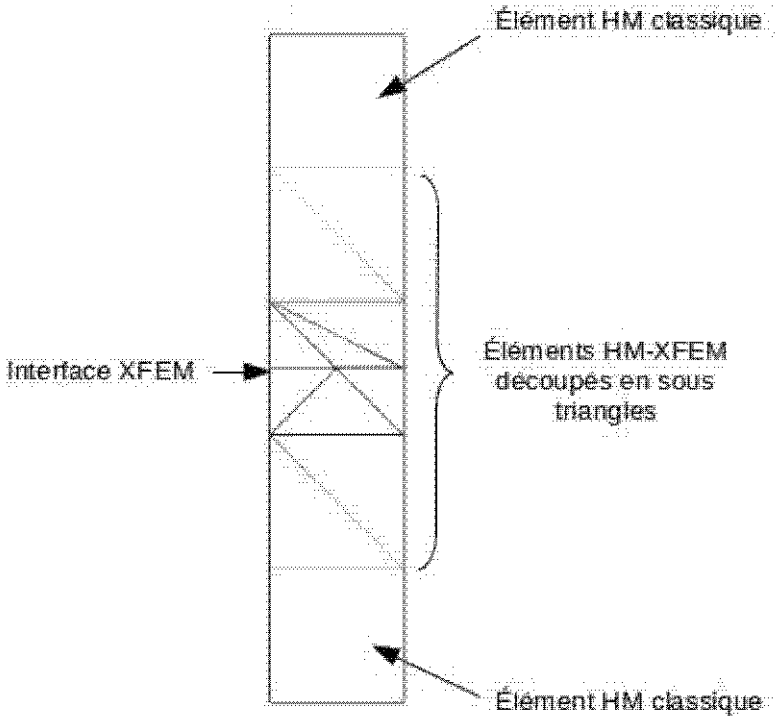


Figure 3.1-a: Caractéristiques de la modélisation

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 mailles quadrangles quadratiques (QUAD8).

3.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans le tableau ci-dessous pour la direction y . Pour tester tous les nœuds du barreau en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DY (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DY (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DY (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001
DY (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les résultats (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans le tableau ci-dessous pour la direction x . Pour tester tous les nœuds du barreau en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DX (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

On peut alors constater (à partir de la Figure 3.3-a) une discontinuité franche du champ de déplacements liée à la présence de l'interface traversant le massif. Cela suggère la bonne prise en compte de l'enrichissement dans l'approximation du champ de déplacements par la fonction Heaviside.

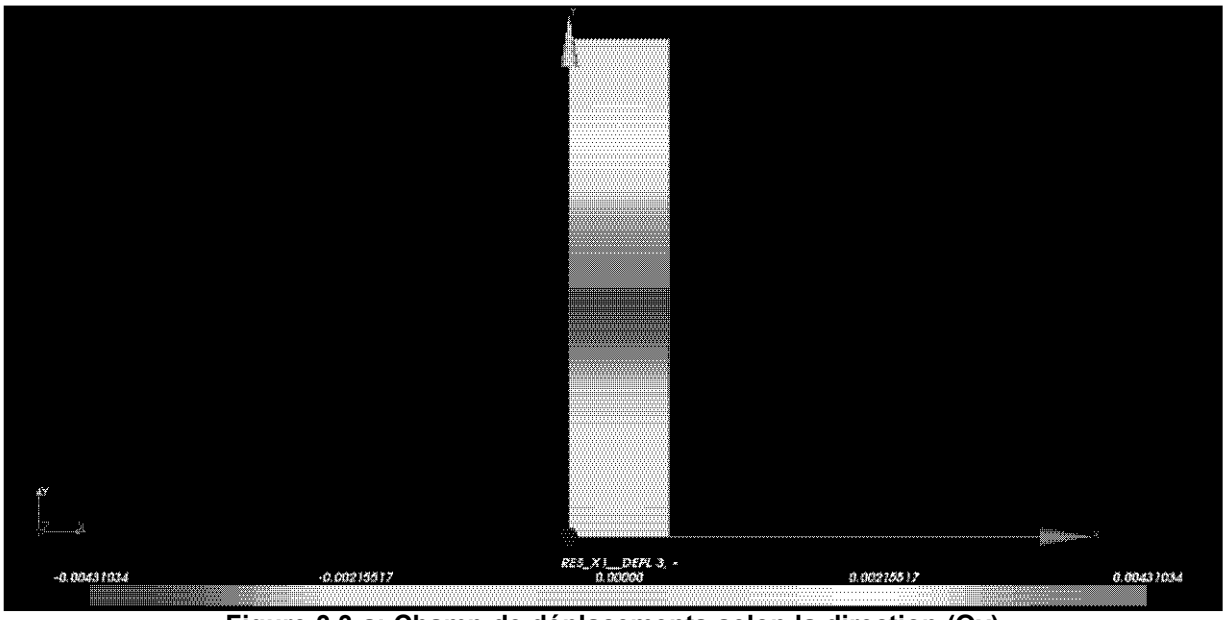


Figure 3.3-a: Champ de déplacements selon la direction (Oy)

On effectue ensuite une seconde modélisation qui utilise les mêmes paramètres que la précédente, mais cette fois ci en conduisant le calcul XFEM (qui est alors un calcul de mécanique pure) avec l'opérateur MECA_STATIQUE au lieu de l'opérateur STAT_NON_LINE dans le cas HM-XFEM. Les résultats obtenus sont strictement identiques aux précédents.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est strictement identique à la précédente. Afin de tester que le modèle HM-XFEM est fonctionnel avec des TRIA6, nous choisissons de subdiviser les 5 QUAD8 de la modélisation précédente, chacun en 2 TRIA6. Ce qui fait au total 10 éléments triangulaires quadratiques. Comme précédemment les éléments triangulaires contenus dans les quadrangles extrêmes sont non enrichis. *A contrario* ceux contenus dans les 3 quadrangles centraux sont enrichis par la fonction Heaviside.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 10 mailles triangulaires quadratiques (TRIA6).

4.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans le tableau ci-dessous selon la direction y . La tolérance est fixée à 10^{-6} . Pour tester tous les nœuds du barreau en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DY (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DY (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DY (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001
DY (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001

Les résultats (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans le tableau ci-dessous selon la direction x . Pour tester tous les nœuds du barreau en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DX (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

On peut alors constater, comme dans le cas de la modélisation A, une discontinuité franche du champ de déplacement liée à la présence de la l'interface traversant le massif. Cela suggère la bonne prise en compte de l'enrichissement de l'approximation du champ de déplacements par la fonction Heaviside.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

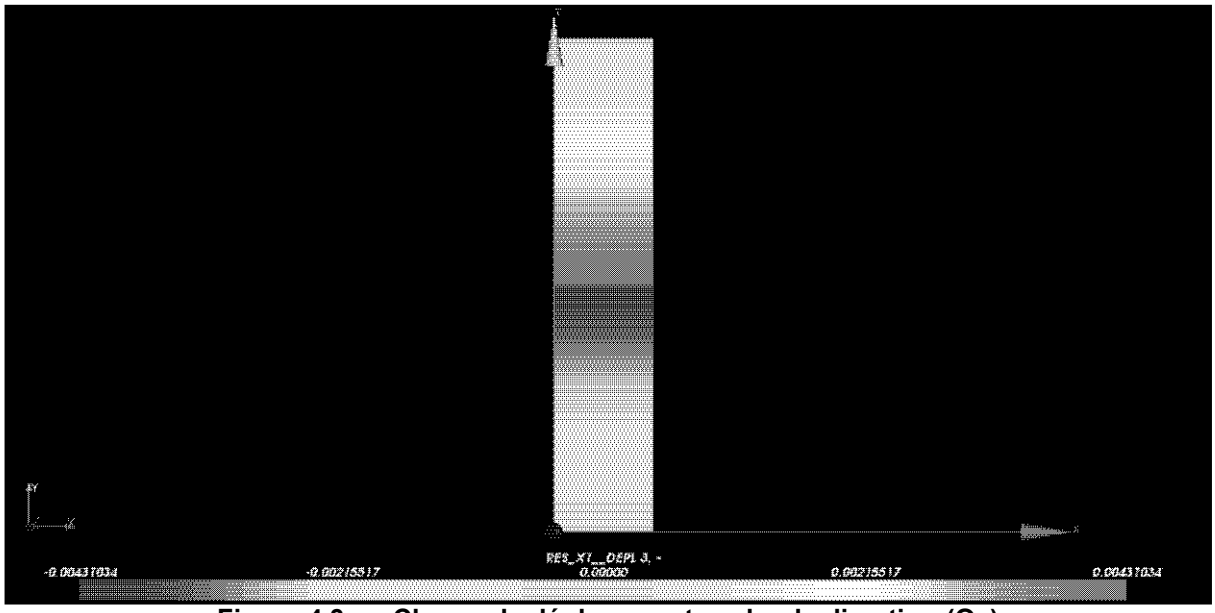


Figure 4.3-a : Champ de déplacements selon la direction (Oy)

On effectue ensuite une seconde modélisation qui utilise les mêmes paramètres que la précédente, mais cette fois ci en conduisant le calcul XFEM (qui est alors un calcul de mécanique pur) avec l'opérateur MECA_STATIQUE au lieu de l'opérateur STAT_NON_LINE dans le cas HM-XFEM. Les résultats obtenus sont strictement identiques aux précédents.

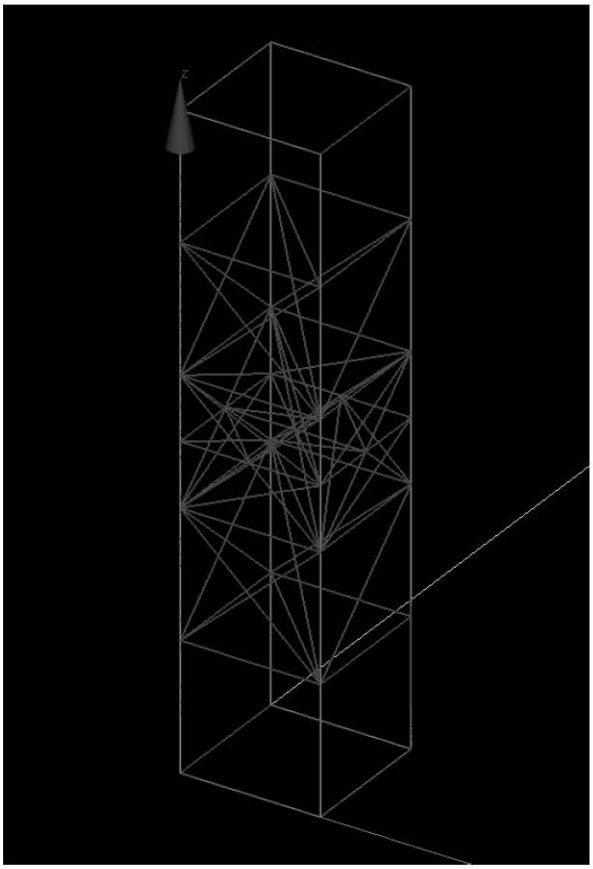
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation 3D_HM utilisant des éléments HM-XFEM quadratiques. La colonne sur laquelle on effectue la modélisation est divisée en 5 HEXA20. L'interface est non maillée et coupe l'élément central. Ainsi on a 3 éléments HM-XFEM et 2 éléments HM classiques (les deux hexaèdres qui forment les extrémités de la colonne). Comme indiqué sur la Figure 5.1-a, les 3 éléments XFEM subissent un sous découpage en sous tétraèdres (pour effectuer l'intégration de Gauss-Legendre de part et d'autre des lèvres de l'interface, mais ces sous-éléments tétraèdres ne sont pas des éléments du maillage).

Figure 5.1-a: Caractéristiques de la modélisation



5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 mailles hexaèdriques quadratiques (HEXA20).

5.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans les tableaux ci-dessous. Pour tester tous les nœuds de la colonne en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DZ (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DZ (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DZ (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001
DZ (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DX (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DY (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

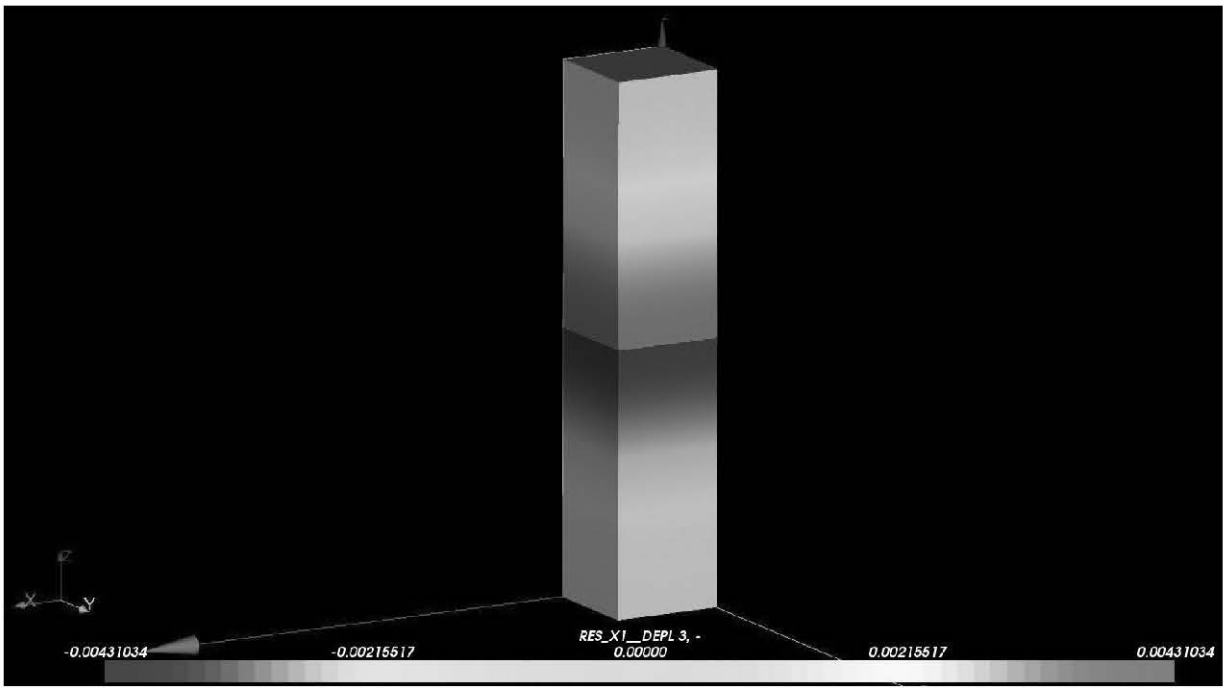


Figure 5.3-a: Champ de déplacements selon la direction (Oz)

On effectue ensuite une seconde modélisation qui utilise les mêmes paramètres que la précédente, mais cette fois ci en conduisant le calcul XFEM (qui est alors un calcul de mécanique pur) avec l'opérateur MECA_STATIQUE au lieu de l'opérateur STAT_NON_LINE dans le cas HM-XFEM. Les résultats obtenus sont strictement identiques aux précédents.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est strictement identique à la précédente. Afin de tester que le modèle HM-XFEM est fonctionnel avec des PENTA15, nous choisissons de subdiviser les 5 HEXA20 de la modélisation précédente, chacun en 2 PENTA15. Ce qui fait au total 10 éléments pentaèdres quadratiques. Comme précédemment les éléments pentaèdres contenus dans les hexaèdres extrêmes sont non enrichis. *A contrario* ceux contenus dans les 3 hexaèdres centraux sont enrichis par la fonction Heaviside.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 10 mailles pentaèdriques quadratiques (PENTA15).

6.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans les tableaux ci-dessous. Pour tester tous les nœuds de la colonne en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DZ (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DZ (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DZ (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001
DZ (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DX (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DY (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

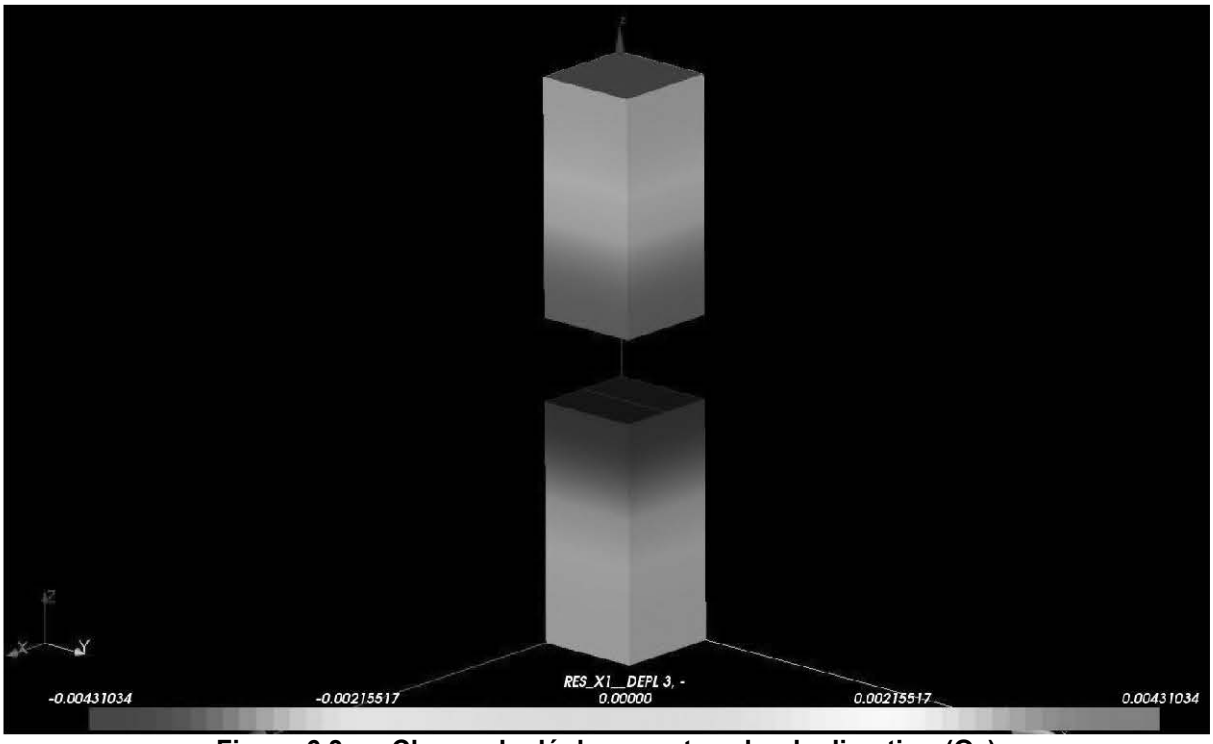


Figure 6.3-a : Champ de déplacements selon la direction (Oz)

On effectue ensuite une seconde modélisation qui utilise les mêmes paramètres que la précédente, mais cette fois ci en conduisant le calcul XFEM (qui est alors un calcul de mécanique pur) avec l'opérateur MECA_STATIQUE au lieu de l'opérateur STAT_NON_LINE dans le cas HM-XFEM. Les résultats obtenus sont strictement identiques aux précédents.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est strictement identique aux précédentes. Afin de tester que le modèle HM-XFEM est fonctionnel avec des TETRA10, nous choisissons de subdiviser les 5 HEXA20 de la modélisation C, chacun en 6 TETRA10. Ce qui fait au total 30 éléments tétraèdres quadratiques. Comme précédemment les éléments tétraèdres contenus dans les hexaèdres extrêmes sont non enrichis. *A contrario* ceux contenus dans les 3 hexaèdres centraux sont enrichis par la fonction Heaviside.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 30 mailles tétraèdriques quadratiques (TETRA10).

7.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans les tableaux ci-dessous. Pour tester tous les nœuds de la colonne en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DZ (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DZ (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,0001
DZ (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001
DZ (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,0001

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DX (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DY (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

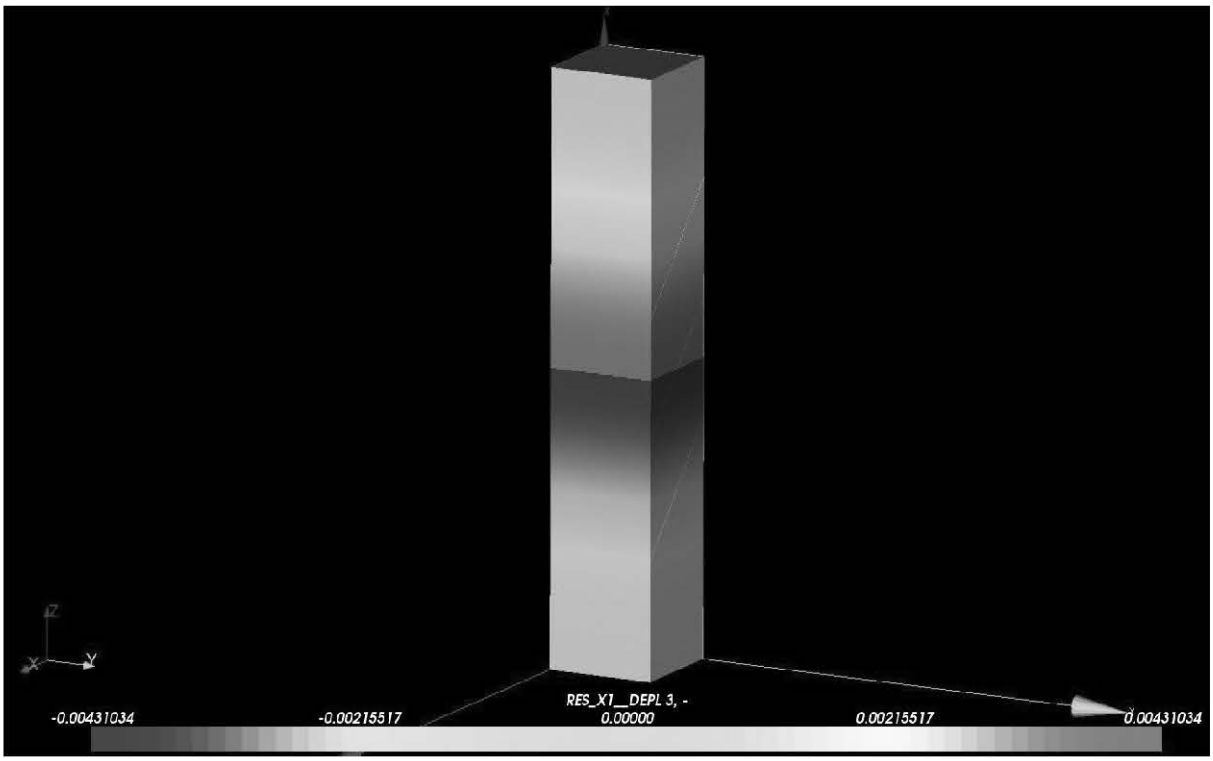


Figure 7.3-a : Champ de déplacements selon la direction (Oz)

On effectue ensuite une seconde modélisation qui utilise les mêmes paramètres que la précédente, mais cette fois ci en conduisant le calcul XFEM (qui est alors un calcul de mécanique pur) avec l'opérateur MECA_STATIQUE au lieu de l'opérateur STAT_NON_LINE dans le cas HM-XFEM. Les résultats obtenus sont strictement identiques aux précédents.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est strictement identique aux précédentes. Afin de tester que le modèle HM-XFEM est fonctionnel avec des PYRAM13, nous choisissons de subdiviser les 5 HEXA20 de la modélisation C, chacun en 6 PYRAM13. Ce qui fait au total 30 éléments pyramidaux quadratiques. Comme précédemment les éléments pyramidaux contenus dans les hexaèdres extrêmes sont non enrichis. *A contrario* ceux contenus dans les 3 hexaèdres centraux sont enrichis par la fonction Heaviside.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 30 mailles pyramidales quadratiques (PYRAM13).

8.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats obtenus avec *Code_Aster* (résolution avec STAT_NON_LINE) sont synthétisés dans les tableaux ci-dessous. Pour tester tous les nœuds de la colonne en même temps, on calcule le MIN et le MAX.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DZ (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,1
DZ (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	-4.310344828E-03	0,1
DZ (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,1
DZ (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	4.310344828E-03	0,1

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DX (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DX (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

Grandeurs testées	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
DY (en dessous) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (en dessous) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MIN	'ANALYTIQUE'	0	0,0001
DY (au dessus) MAX	'ANALYTIQUE'	0	0,0001

Remarque :

La tolérance pour le test sur DZ est plus élevée, on passe de 10^{-6} à 10^{-3}. En effet, les fonctions de forme des pyramides ne sont pas des polynômes mais des fractions rationnelles. Cela explique la moins bonne précision obtenue pour ce problème linéaire par rapport aux précédentes modélisations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

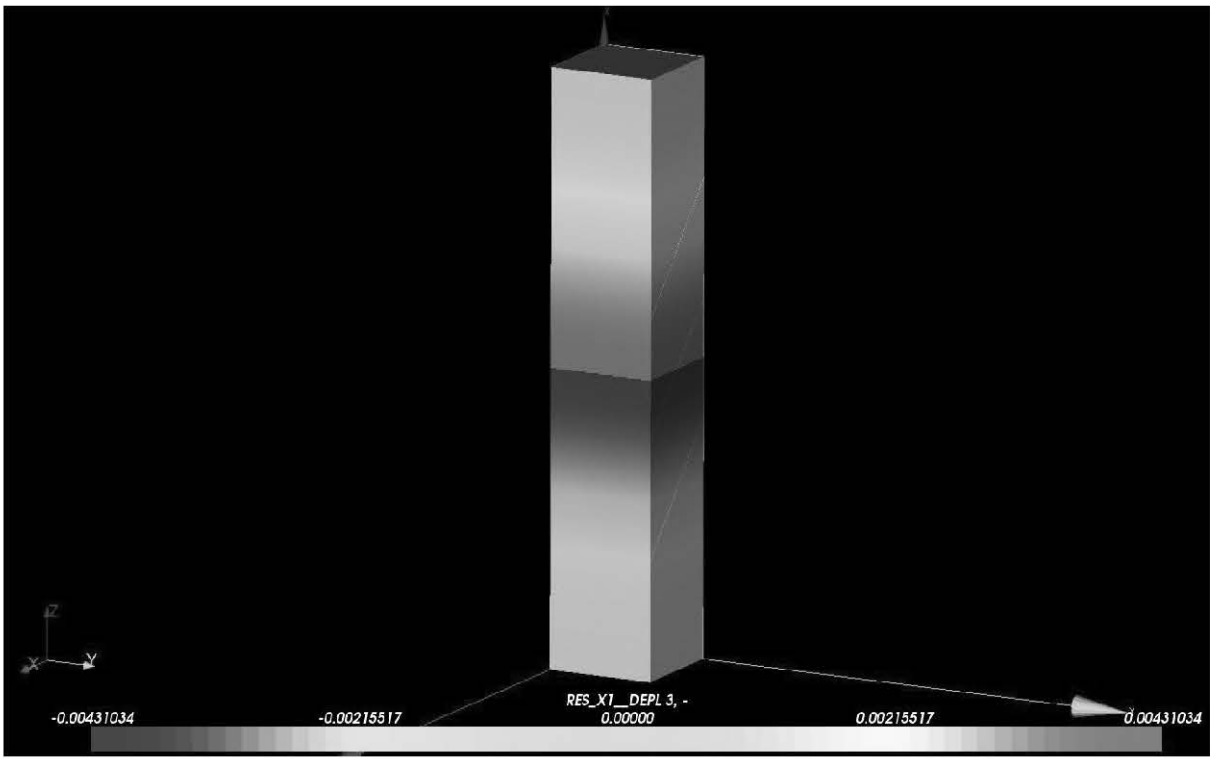


Figure 8.3-a : Champ de déplacements selon la direction (Oz)

On effectue ensuite une seconde modélisation qui utilise les mêmes paramètres que la précédente, mais cette fois ci en conduisant le calcul XFEM (qui est alors un calcul de mécanique pur) avec l'opérateur MECA_STATIQUE au lieu de l'opérateur STAT_NON_LINE dans le cas HM-XFEM. Les résultats obtenus sont strictement identiques aux précédents.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse des résultats

Pour chacun des éléments finis HM-XFEM testés, les résultats concordent avec la solution analytique.
Pour les éléments HM-XFEM, les fonctionnalités suivantes sont désormais validées :

- MODI_MODELE_XFEM ,
- application d'une pression répartie,
- POST_CHAM_XFEM,
- le calcul des matrices et vecteurs élémentaires dans le cas où les degrés de liberté Heaviside mécaniques ont été introduits dans les développements du modèle de couplage HM.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe : Validation intermédiaire II

C

WTNV144 - Consolidation d'une colonne de sol poro-élastique saturée et fracturée :utilisation de la méthode XFEM

Résumé :

Il s'agit d'un test de validation permettant de s'assurer du bon fonctionnement de la méthode des éléments finis étendue dans le cas du modèle de couplage HM en milieu saturé fracturé.
Le but de ce test de validation est de tester la bonne prise en compte de la discontinuité du champ de pression dans le massif de part et d'autre de la fracture ainsi que le comportement hydromécanique des éléments HM-XFEM.
Il s'agit d'imposer en haut d'une colonne de sol deux chargements différents de part et d'autre de la fracture et d'observer l'évolution de la pression de pore dans chaque partie. Ce test est similaire au cas de validation wtnl100 à la seule différence que nous introduisons dans la modélisation une fracture (de type interface) traitée par l'approche XFEM. Les résultats sont ensuite comparés à la solution analytique du cas de validation wtnl100.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie du problème 2D (modélisation A et B)

Soit une colonne de sol de longueur $L=LX$ et de hauteur $H=10\mathrm{m}$. Cette colonne présente en $X=L_d$ une discontinuité de type interface (interface non maillée qui est introduite dans le modèle par l'intermédiaire des *level-sets* grâce à l'opérateur DEFI_FISS_XFEM). Le barreau est entièrement traversé par la discontinuité (au niveau de l'approximation des champs de déplacement et de pression de pore du massif, on ne prend en compte que l'enrichissement **Heaviside**).

La température au sein de la colonne est uniforme quel que soit l'instant t . La colonne est de plus entièrement saturée par un fluide (de l'eau par exemple) et les effets des forces de pesanteur ne sont pas pris en compte.

Afin d'avoir une solution unidimensionnelle (selon la direction y du repère d'espace) le coefficient de Poisson est pris nul.

Sur la Figure1.1-1 est représentée la géométrie de la colonne de sol.

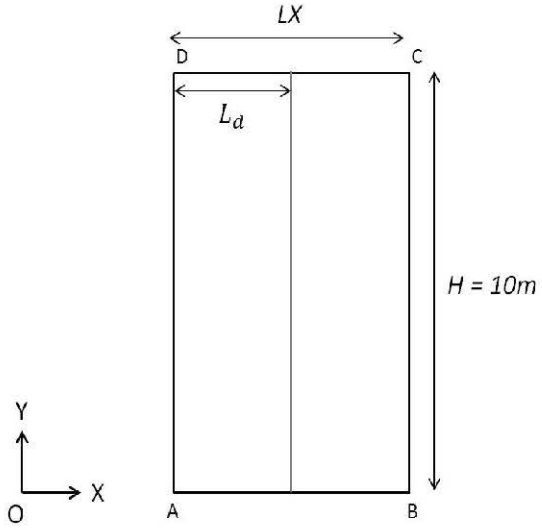


Figure1.1-1: Géométrie du problème 2D

1.2 Géométrie du problème 3D (modélisations C et D)

Soit une colonne de sol de longueur $L=LX$, d'épaisseur $E=1\mathrm{m}$ et de hauteur $H=10\mathrm{m}$. Cette colonne présente en $X=L_d$ une discontinuité de type interface (interface non maillée qui est introduite dans le modèle par l'intermédiaire des *level-sets* grâce à l'opérateur DEFI_FISS_XFEM). Le barreau est entièrement traversé par la discontinuité (au niveau de l'approximation des champs de déplacement et de pression de pore du massif, on ne prend en compte que l'enrichissement **Heaviside**).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La température au sein de la colonne est uniforme quelque soit l'instant t . La colonne est de plus entièrement saturée par un fluide (de l'eau par exemple) et les effets des forces de pesanteur ne sont pas pris en compte.

Afin d'avoir une solution unidimensionnelle (selon la direction z du repère d'espace) le coefficient de Poisson est pris nul.

Sur la Figure1.2-1 est représentée la géométrie de la colonne de sol.

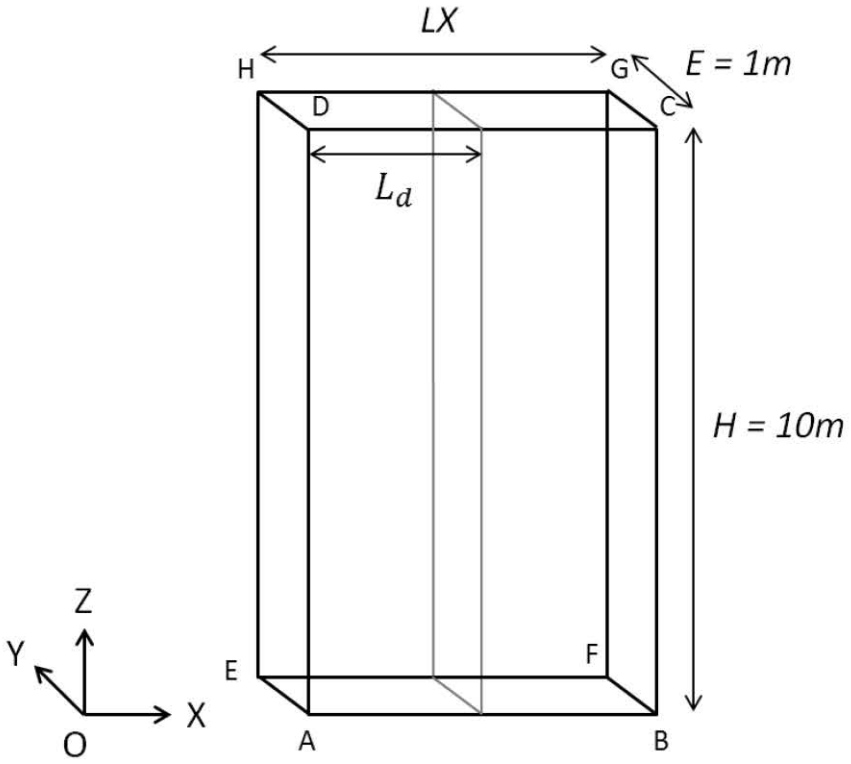


Figure1.2-1: Géométrie du problème 3D

1.3 Propriétés du matériau

Les paramètres donnés dans le Tableau 1.3-1, correspondent aux paramètres utilisés pour la modélisation dans le cas couplé hydromécanique. La loi de couplage utilisée est `'LIQU_SATU'`.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Liquide (eau)	Viscosité $\mu_w(en\ Pa.s)$:	10^{-3}
	Module de compressibilité $\frac{1}{K_w}(en\ Pa^{-1})$:	0
	Densité du liquide $\rho_w(en\ kg/m^3)$:	1000
	Perméabilité relative au fluide $k_{lq}^{rel}(S_{lq})$:	1
Paramètres élastiques	Module de Young drainé $E(en\ MPa)$:	10
	Coefficient de Poisson ν :	0
Paramètres de couplage	Coefficient de Biot b :	1
	Masse volumique homogénéisée initiale $r_0(en\ kg/m^3)$:	2800
	Perméabilité intrinsèque $K^{int}(en\ m^2/s)$:	10^{-8}

Tableau 1.3-1 : Propriétés du matériau

La porosité du matériau est prise égale à $\varphi = 0{,}5$.

1.4 Conditions aux limites, conditions initiales et chargements

1.4.1 Conditions aux limites cas 2D

Les déplacements sont bloqués sur les faces [AD] et [BC] dans la direction horizontale, et sur la face inférieure [AB] aussi bien dans la direction verticale qu'horizontale. Sur l'interface, les déplacements horizontaux sont bloqués.

La pression de pore au sommet de la colonne est nulle quelque soit l'instant considéré, c'est-à-dire $p(H,t)=0.0$.

1.4.2 Conditions aux limites cas 3D

Les déplacements sont bloqués sur la face [ABFE]. Les déplacements selon (0x) sont bloqués sur les faces [EADH], [FBCG] ainsi que sur l'interface. Les déplacements selon (Oy) sont bloqués sur les faces [ABCD] et [EFGH].

La pression de pore au sommet de la colonne est nulle quel que soit l'instant considéré, c'est-à-dire $p(H,t)=0.0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.4.3 Chargements et conditions initiales

Afin de partir d'un chargement différent de part et d'autre de la fracture, on cherche à créer initialement dans la colonne une discontinuité du champ de pression sur le toit de la colonne. Ainsi pour la partie de la colonne située à gauche, la charge imposée est $F_G = -1.0\,Pa$ et pour la partie de la colonne située à droite, la charge imposée est $F_D = -1.54\,Pa$.

Les conditions initiales en pression pour l'équilibre hydraulique s'écrivent donc :

- $p^G(y,0) = -\dfrac{F_G}{b} = 1.0\,Pa$
- $p^D(y,0) = -\dfrac{F_D}{b} = 1.54\,Pa$

Les conditions aux limites sont résumées sur la Figure 1.4.3-1 :

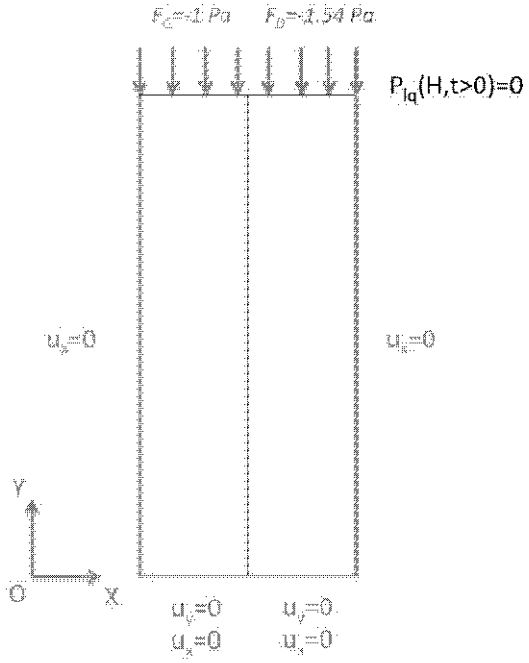


Figure 1.4.3-1 Conditions aux limites et initiales pour la modélisation 2D

La fracture est indiquée en rouge sur la Figure 1.4.3-1. Aucune condition aux limites n'est appliquée sur cette interface.

1.4.4 Remarque sur la modélisation utilisée

Compte tenu de la discontinuité du champ de pression au sommet de la colonne [V7.30.100], on remarque que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} p(y,0) = -\dfrac{F_0}{b} & si\ y < H \\ p(y,0) = 0 & si\ y = H \end{cases}$$

Cette particularité de la solution confère une instabilité au niveau de la résolution numérique (apparition d'oscillations) du problème couplé en haut de la colonne. Cela est lié au nom respect de la condition LBB [V7.30.100].

En effet dans le cas classique, la modélisation de type D_PLAN_HMD est utilisée pour y parvenir. Or en HM-XFEM seule l'extension de la modélisation D_PLAN_HM a été effectuée. Les résultats (pour le cas HM-XFEM) obtenus en haut de la colonne sont donc à prendre avec précaution. On observe en effet que les résultats obtenus avec le modèle HM-XFEM sont moins précis en haut de la colonne, surtout pour des temps petits. Mais ces résultats sont similaires à ceux obtenus avec la modélisation de type D_PLAN_HM dans le cas classique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Il s'agit d'une solution analytique. Ce test permettant de valider la discontinuité de la pression du massif, nous nous focaliserons uniquement sur la résolution théorique de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{b^2}{E_0}\frac{\partial p_{lq}(y,t)}{\partial t}-\left(\frac{K^{\text{int}}.k_{\text{lq}}^{\text{rel}}}{\mu_{\text{lq}}}\frac{\partial^2 p_{\text{lq}}(y,t)}{\partial y^2}\right)=0$$

L'équation différentielle ci-dessus étant homogène, à coefficients constants, on utilise la méthode de résolution par variables séparables (voir annexe 1 pour la résolution de cette équation).

Compte tenu des conditions initiales et aux limites considérées au paragraphe 1.4 l'expression de la pression de pore pour la colonne de gauche s'exprime par :

$$P^G(y,t)=\frac{-4\mathrm{F}_G}{\pi b}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2\mathrm{m}-1}e^{-\lambda E\pi^2(2\mathrm{m}-1)^2\frac{t}{4\mathrm{b}^2H^2}}\cos\left(\frac{\pi y(2\mathrm{m}-1)}{2\mathrm{H}}\right)$$

et l'expression de la pression de pore pour la colonne de droite s'exprime par :

$$P^D(y,t)=\frac{-4\mathrm{F}_D}{\pi b}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2\mathrm{m}-1}e^{-\lambda E\pi^2(2\mathrm{m}-1)^2\frac{t}{4\mathrm{b}^2H^2}}\cos\left(\frac{\pi y(2\mathrm{m}-1)}{2\mathrm{H}}\right)$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On teste la pression de pore PRE1 et la contrainte SIYY à différentes hauteurs dans la colonne et à différents instants.

2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune la solution est analytique.

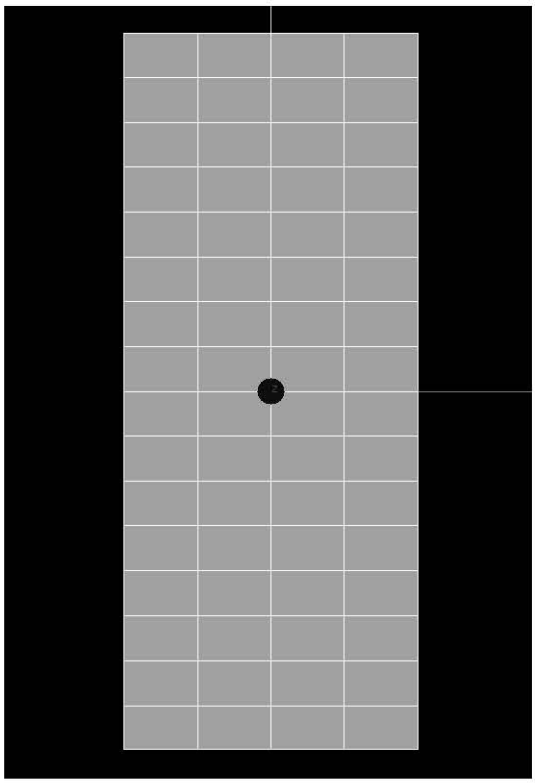
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Les caractéristiques sont identiques à la solution de référence. La modélisation utilisée est de type D_PLAN_HM. Le maillage est représenté sur la Figure 3.1-1. Dans cette modélisation, $LX=4\mathrm{m}$ et $L_d=2\,m$, la discontinuité est ainsi conforme au maillage.

Figure 3.1-1 maillage 2D modélisation A



3.2 Grandeurs testées et résultats

Dans la colonne de gauche, on teste la pression de pore PRE1et la contrainte SIYY à l'instant final $t=250\mathrm{s}$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation D_PLAN_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation D_PLAN_HMD classique dans le haut de la colonne.

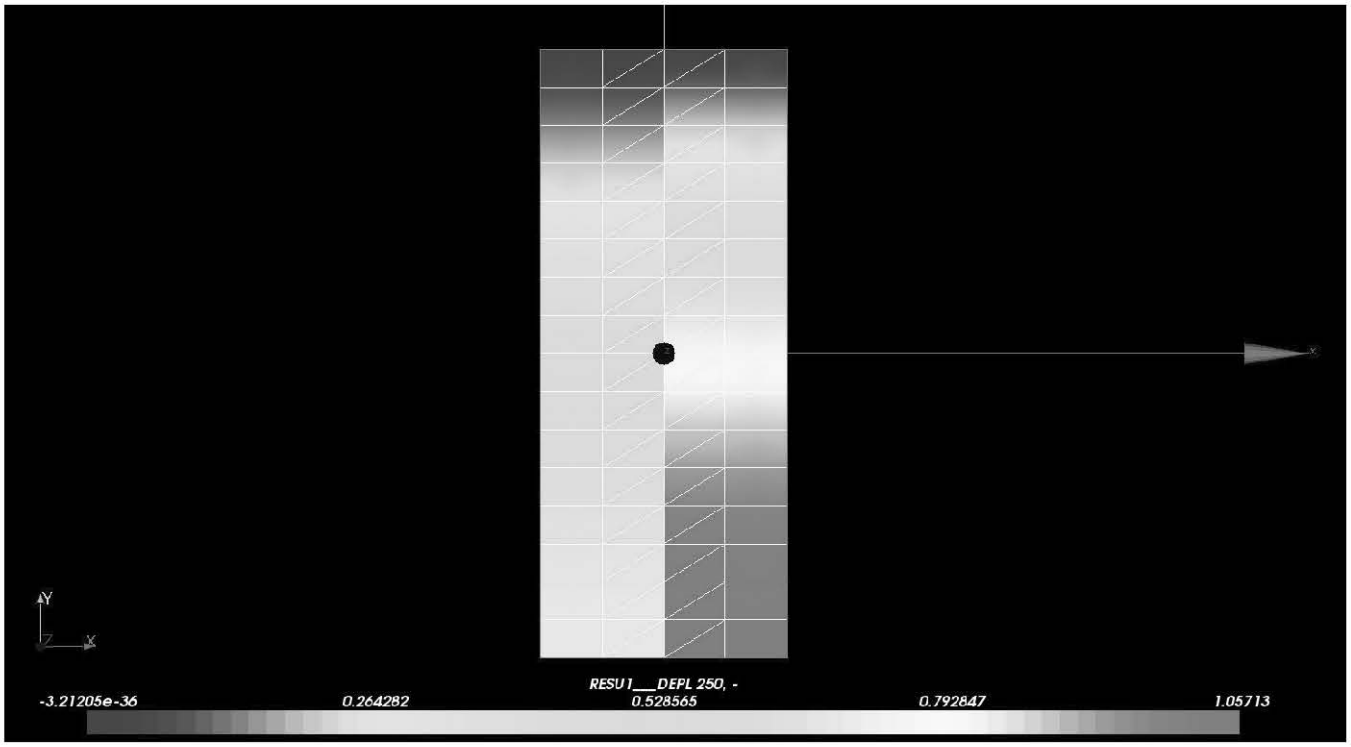
Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	8.75	0.	ANALYTIQUE	1.0
Déplacement PRE1	9.375	0.	ANALYTIQUE	1.0
Déplacement PRE1	0.0	250.	ANALYTIQUE	0.68544576689
Déplacement PRE1	0.625	250.	ANALYTIQUE	0.682208147164
Déplacement PRE1	1.25	250.	ANALYTIQUE	0.67252104433
Déplacement PRE1	1.875	250.	ANALYTIQUE	0.656461946263
Déplacement PRE1	2.5	250.	ANALYTIQUE	0.634160686593
Déplacement PRE1	3.125	250.	ANALYTIQUE	0.605800331394
Déplacement PRE1	3.75	250.	ANALYTIQUE	0.571618145927
Déplacement PRE1	4.375	250.	ANALYTIQUE	0.531906397249
Déplacement PRE1	5.0	250.	ANALYTIQUE	0.487012719208
Déplacement PRE1	5.625	250.	ANALYTIQUE	0.437339762565

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Déplacement PRE1	6.25	250.	ANALYTIQUE	0.38334387542
Déplacement PRE1	6.875	250.	ANALYTIQUE	0.32553260623
Déplacement PRE1	7.5	250.	ANALYTIQUE	0.264460889851
Déplacement PRE1	8.125	250.	ANALYTIQUE	0.200725860656
Déplacement PRE1	8.75	250.	ANALYTIQUE	0.134960328921
Déplacement PRE1	9.375	250.	ANALYTIQUE	0.0678250497631
Déplacement PRE1	10.0	250.	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	8.75	0.00	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	0.0	250.	ANALYTIQUE	-0.31455423311
Contrainte SIYY	0.625	250.	ANALYTIQUE	-0.317791852836
Contrainte SIYY	1.25	250.	ANALYTIQUE	-0.32747895567
Contrainte SIYY	1.875	250.	ANALYTIQUE	-0.343538053737
Contrainte SIYY	2.5	250.	ANALYTIQUE	-0.365839313407
Contrainte SIYY	3.125	250.	ANALYTIQUE	-0.394199668606
Contrainte SIYY	3.75	250.	ANALYTIQUE	-0.428381854073
Contrainte SIYY	4.375	250.	ANALYTIQUE	-0.468093602751
Contrainte SIYY	5.0	250.	ANALYTIQUE	-0.512987280792
Contrainte SIYY	5.625	250.	ANALYTIQUE	-0.562660237435
Contrainte SIYY	6.25	250.	ANALYTIQUE	-0.61665612458
Contrainte SIYY	6.875	250.	ANALYTIQUE	-0.67446739377
Contrainte SIYY	7.5	250.	ANALYTIQUE	-0.735539110149
Contrainte SIYY	8.125	250.	ANALYTIQUE	-0.799274139344
Contrainte SIYY	8.75	250.	ANALYTIQUE	-0.865039671079
Contrainte SIYY	9.375	250.	ANALYTIQUE	-0.932174950237
Contrainte SIYY	10,0	250.	ANALYTIQUE	-1,0
Contrainte VMIS	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.0
Contrainte VMIS_SG	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.0
Contrainte PRIN_1	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.0
Contrainte PRIN_2	10,0	250.	NON_REGRESSION	0,00
Contrainte PRIN_3	10,0	250.	NON_REGRESSION	0.00
Contrainte TRESCA	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.0

Les résultats obtenus pour la pression de pore à l'instant final $t=250\text{s}$ sont représentés sur la Figure 3.2-1 . On observe bien une discontinuité nette de la pression de pore de part et d'autre de la fissure. Les QUAD8 centraux sont subdivisés en sous TRIA HM_XFEM.

Figure 3.2-1 Pression de pore à l'instant t=250s



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la colonne de droite, on teste la pression de pore PRE1et la contrainte SIYY à l'instant final $t=250\text{s}$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation D_PLAN_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation D_PLAN_HMD classique dans le haut de la colonne.

Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	8.75	0.	ANALYTIQUE	1.54
Déplacement PRE1	9.375	0.	ANALYTIQUE	1.54
Déplacement PRE1	0.0	250.	ANALYTIQUE	1.055586481
Déplacement PRE1	0.625	250.	ANALYTIQUE	1.050600547
Déplacement PRE1	1.25	250.	ANALYTIQUE	1.035682408
Déplacement PRE1	1.875	250.	ANALYTIQUE	1.010951397
Déplacement PRE1	2.5	250.	ANALYTIQUE	0.9766074572
Déplacement PRE1	3.125	250.	ANALYTIQUE	0.9329325102
Déplacement PRE1	3.75	250.	ANALYTIQUE	0.8802919447
Déplacement PRE1	4.375	250.	ANALYTIQUE	0.8191358517
Déplacement PRE1	5.0	250.	ANALYTIQUE	0.7499995876
Déplacement PRE1	5.625	250.	ANALYTIQUE	0.6735032343
Déplacement PRE1	6.25	250.	ANALYTIQUE	0.5903495681
Déplacement PRE1	6.875	250.	ANALYTIQUE	0.5013202135
Déplacement PRE1	7.5	250.	ANALYTIQUE	0.4072697703
Déplacement PRE1	8.125	250.	ANALYTIQUE	0.3091178253
Déplacement PRE1	8.75	250.	ANALYTIQUE	0.207838906
Déplacement PRE1	9.375	250.	ANALYTIQUE	0.104450576
Déplacement PRE1	10.0	250.	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	8.75	0.00	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	0.0	250.	ANALYTIQUE	-0.484413519
Contrainte SIYY	0.625	250.	ANALYTIQUE	-0.489399453
Contrainte SIYY	1.25	250.	ANALYTIQUE	-0.504317591
Contrainte SIYY	1.875	250.	ANALYTIQUE	-0.529048602
Contrainte SIYY	2.5	250.	ANALYTIQUE	-0.563392542
Contrainte SIYY	3.125	250.	ANALYTIQUE	-0.607067489
Contrainte SIYY	3.75	250.	ANALYTIQUE	-0.659708055
Contrainte SIYY	4.375	250.	ANALYTIQUE	-0.720864148
Contrainte SIYY	5.0	250.	ANALYTIQUE	-0.790000412
Contrainte SIYY	5.625	250.	ANALYTIQUE	-0.866496765
Contrainte SIYY	6.25	250.	ANALYTIQUE	-0.949650431
Contrainte SIYY	6.875	250.	ANALYTIQUE	-1.038679786
Contrainte SIYY	7.5	250.	ANALYTIQUE	-1.13273023
Contrainte SIYY	8.125	250.	ANALYTIQUE	-1.230882175
Contrainte SIYY	8.75	250.	ANALYTIQUE	-1.332161093
Contrainte SIYY	9.375	250.	ANALYTIQUE	-1.435549423
Contrainte SIYY	10,0	250.	ANALYTIQUE	-1,54
Contrainte VMIS	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.54
Contrainte VMIS_SG	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.54
Contrainte PRIN_1	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.54
Contrainte PRIN_2	10,0	250.	NON_REGRESSION	0,00
Contrainte PRIN_3	10,0	250.	NON_REGRESSION	0.00
Contrainte TRESCA	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.54

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Les caractéristiques sont identiques à la solution de référence. La modélisation utilisée est de type D_PLAN_HM. Le maillage est représenté sur la Figure 4.1-1. Dans cette modélisation, $LX=5\mathrm{m}$ et $L_d=2{,}6\,m$, la discontinuité est ainsi non conforme au maillage, elle traverse des QUAD8.

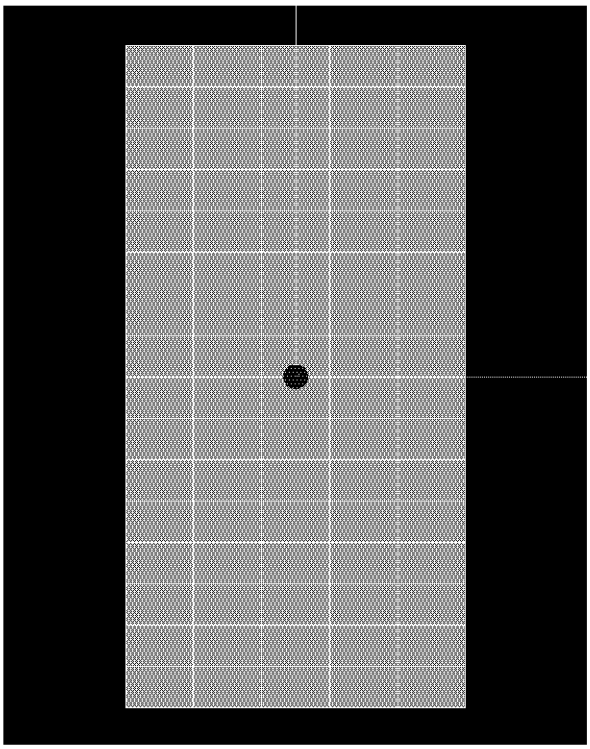


Figure 4.1-1 maillage 2D modélisation B

4.2 Grandeurs testées et résultats

Dans la colonne de gauche, on teste la pression de pore PRE1et la contrainte SIYY à l'instant final $t=250\mathrm{s}$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation D_PLAN_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation D_PLAN_HMD classique dans le haut de la colonne.

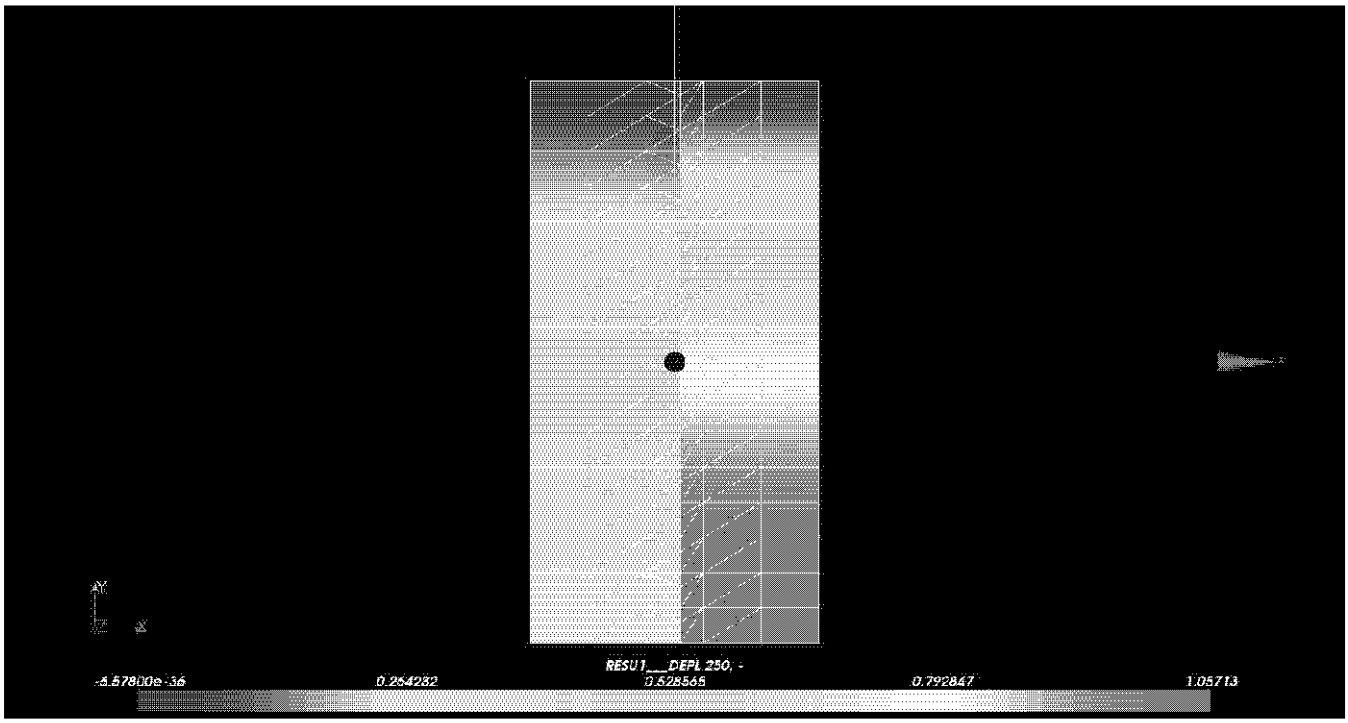
Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	8.75	0.	ANALYTIQUE	1.0
Déplacement PRE1	9.375	0.	ANALYTIQUE	1.0
Déplacement PRE1	0.0	250.	ANALYTIQUE	0.68544576689
Déplacement PRE1	0.625	250.	ANALYTIQUE	0.682208147164
Déplacement PRE1	1.25	250.	ANALYTIQUE	0.67252104433
Déplacement PRE1	1.875	250.	ANALYTIQUE	0.656461946263
Déplacement PRE1	2.5	250.	ANALYTIQUE	0.634160686593
Déplacement PRE1	3.125	250.	ANALYTIQUE	0.605800331394
Déplacement PRE1	3.75	250.	ANALYTIQUE	0.571618145927

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Déplacement PRE1	4.375	250.	ANALYTIQUE	0.531906397249
Déplacement PRE1	5.0	250.	ANALYTIQUE	0.487012719208
Déplacement PRE1	5.625	250.	ANALYTIQUE	0.437339762565
Déplacement PRE1	6.25	250.	ANALYTIQUE	0.38334387542
Déplacement PRE1	6.875	250.	ANALYTIQUE	0.32553260623
Déplacement PRE1	7.5	250.	ANALYTIQUE	0.264460889851
Déplacement PRE1	8.125	250.	ANALYTIQUE	0.200725860656
Déplacement PRE1	8.75	250.	ANALYTIQUE	0.134960328921
Déplacement PRE1	9.375	250.	ANALYTIQUE	0.0678250497631
Déplacement PRE1	10.0	250.	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	8.75	0.00	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	0.0	250.	ANALYTIQUE	-0.31455423311
Contrainte SIYY	0.625	250.	ANALYTIQUE	-0.317791852836
Contrainte SIYY	1.25	250.	ANALYTIQUE	-0.32747895567
Contrainte SIYY	1.875	250.	ANALYTIQUE	-0.343538053737
Contrainte SIYY	2.5	250.	ANALYTIQUE	-0.365839313407
Contrainte SIYY	3.125	250.	ANALYTIQUE	-0.394199668606
Contrainte SIYY	3.75	250.	ANALYTIQUE	-0.428381854073
Contrainte SIYY	4.375	250.	ANALYTIQUE	-0.468093602751
Contrainte SIYY	5.0	250.	ANALYTIQUE	-0.512987280792
Contrainte SIYY	5.625	250.	ANALYTIQUE	-0.562660237435
Contrainte SIYY	6.25	250.	ANALYTIQUE	-0.61665612458
Contrainte SIYY	6.875	250.	ANALYTIQUE	-0.67446739377
Contrainte SIYY	7.5	250.	ANALYTIQUE	-0.735539110149
Contrainte SIYY	8.125	250.	ANALYTIQUE	-0.799274139344
Contrainte SIYY	8.75	250.	ANALYTIQUE	-0.865039671079
Contrainte SIYY	9.375	250.	ANALYTIQUE	-0.932174950237
Contrainte SIYY	10,0	250.	ANALYTIQUE	-1,0
Contrainte VMIS	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.0
Contrainte VMIS_SG	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.0
Contrainte PRIN_1	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.0
Contrainte PRIN_2	10,0	250.	NON_REGRESSION	0,00
Contrainte PRIN_3	10,0	250.	NON_REGRESSION	0.00
Contrainte TRESCA	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.0

Les résultats obtenus pour la pression de pore à l'instant final $t=250\text{s}$ sont représentés sur la Figure 4.2-1 . On observe bien une discontinuité nette de la pression de pore de part et d'autre de la fissure. Les QUAD8 centraux sont subdivisés en sous TRIA6 HM_XFEM.

Figure 4.2-1 Pression de pore à l'instant t=250s



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la colonne de droite, on teste la pression de pore PRE1et la contrainte SIYY à l'instant final $t=250\text{s}$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation D_PLAN_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation D_PLAN_HMD classique dans le haut de la colonne.

Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	8.75	0.	ANALYTIQUE	1.54
Déplacement PRE1	9.375	0.	ANALYTIQUE	1.54
Déplacement PRE1	0.0	250.	ANALYTIQUE	1.055586481
Déplacement PRE1	0.625	250.	ANALYTIQUE	1.050600547
Déplacement PRE1	1.25	250.	ANALYTIQUE	1.035682408
Déplacement PRE1	1.875	250.	ANALYTIQUE	1.010951397
Déplacement PRE1	2.5	250.	ANALYTIQUE	0.9766074572
Déplacement PRE1	3.125	250.	ANALYTIQUE	0.9329325102
Déplacement PRE1	3.75	250.	ANALYTIQUE	0.8802919447
Déplacement PRE1	4.375	250.	ANALYTIQUE	0.8191358517
Déplacement PRE1	5.0	250.	ANALYTIQUE	0.7499995876
Déplacement PRE1	5.625	250.	ANALYTIQUE	0.6735032343
Déplacement PRE1	6.25	250.	ANALYTIQUE	0.5903495681
Déplacement PRE1	6.875	250.	ANALYTIQUE	0.5013202135
Déplacement PRE1	7.5	250.	ANALYTIQUE	0.4072697703
Déplacement PRE1	8.125	250.	ANALYTIQUE	0.3091178253
Déplacement PRE1	8.75	250.	ANALYTIQUE	0.207838906
Déplacement PRE1	9.375	250.	ANALYTIQUE	0.104450576
Déplacement PRE1	10.0	250.	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	8.75	0.00	ANALYTIQUE	0.00
Contrainte SIYY	0.0	250.	ANALYTIQUE	-0.484413519
Contrainte SIYY	0.625	250.	ANALYTIQUE	-0.489399453
Contrainte SIYY	1.25	250.	ANALYTIQUE	-0.504317591
Contrainte SIYY	1.875	250.	ANALYTIQUE	-0.529048602
Contrainte SIYY	2.5	250.	ANALYTIQUE	-0.563392542
Contrainte SIYY	3.125	250.	ANALYTIQUE	-0.607067489
Contrainte SIYY	3.75	250.	ANALYTIQUE	-0.659708055
Contrainte SIYY	4.375	250.	ANALYTIQUE	-0.720864148
Contrainte SIYY	5.0	250.	ANALYTIQUE	-0.790000412
Contrainte SIYY	5.625	250.	ANALYTIQUE	-0.866496765
Contrainte SIYY	6.25	250.	ANALYTIQUE	-0.949650431
Contrainte SIYY	6.875	250.	ANALYTIQUE	-1.038679786
Contrainte SIYY	7.5	250.	ANALYTIQUE	-1.13273023
Contrainte SIYY	8.125	250.	ANALYTIQUE	-1.230882175
Contrainte SIYY	8.75	250.	ANALYTIQUE	-1.332161093
Contrainte SIYY	9.375	250.	ANALYTIQUE	-1.435549423
Contrainte SIYY	10,0	250.	ANALYTIQUE	-1,54
Contrainte VMIS	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.54
Contrainte VMIS_SG	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.54
Contrainte PRIN_1	10,0	250.	NON_REGRESSION	-1.54
Contrainte PRIN_2	10,0	250.	NON_REGRESSION	0,00
Contrainte PRIN_3	10,0	250.	NON_REGRESSION	0.00
Contrainte TRESCA	10,0	250.	NON_REGRESSION	1.54

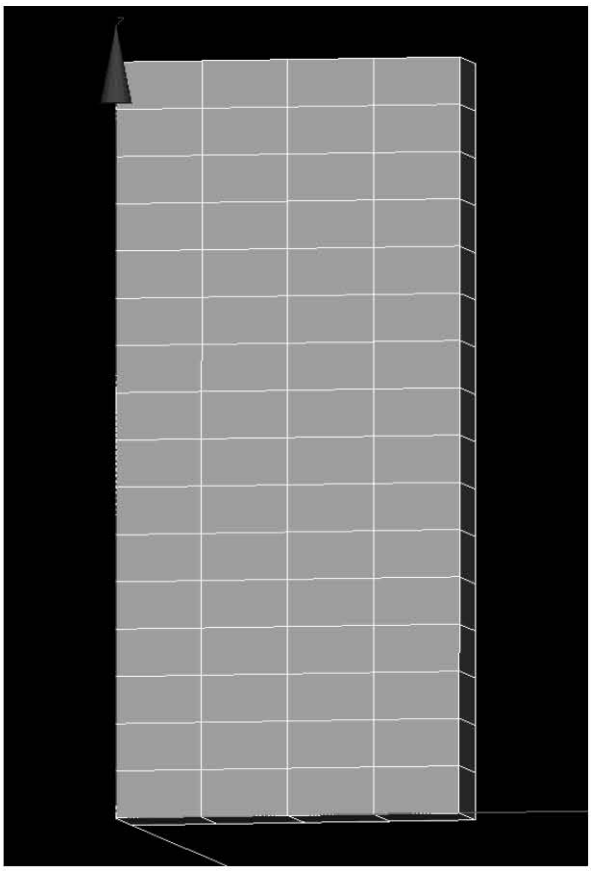
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation C

Les caractéristiques sont identiques à la solution de référence. La modélisation utilisée est de type 3D_HM. Le maillage est représenté sur la Figure 5.1-1, il est constitué de 64 HEXA20. Dans cette modélisation, $LX=4\mathrm{m}$ et $L_d=2m$, la discontinuité est ainsi conforme au maillage.

Figure 5.1-1 maillage 3D modélisation C



5.2 Grandeurs testées et résultats

Dans la colonne de gauche, on teste la pression de pore PRE1 à l'instant $t=0{,}0001s$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation 3D_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation 3D_HMD classique dans le haut de la colonne.

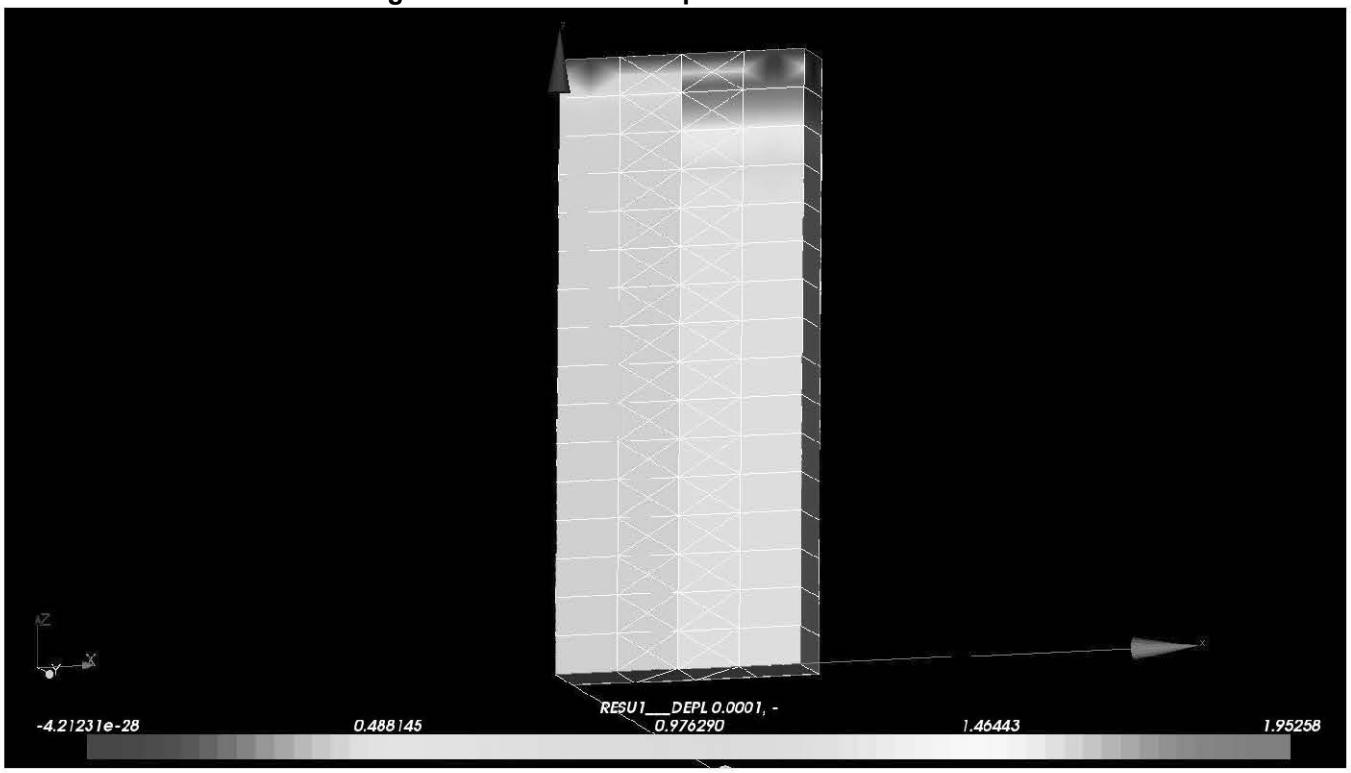
Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	0,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	0,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	1,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	1,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	2,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	3,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	3,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	4,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	5,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	5,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Déplacement PRE1	6,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	6,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	7,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	8,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	8,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	9,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	10,0	0.0001	ANALYTIQUE	0,0

Les résultats obtenus pour la pression de pore à l'instant final $t=0.0001\mathrm{s}$ sont représentés sur la Figure 5.2-1 . On observe bien une discontinuité nette de la pression de pore de part et d'autre de la fissure. Les HEXA20 centraux sont subdivisés en sous TETRA HM_XFEM.

Figure 5.2-1 Pression de pore à l'instant t=0.001s



Dans la colonne de droite, on teste la pression de pore PRE1 à l'instant $t=0,0001\,s$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation 3D_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation 3D_HMD classique dans le haut de la colonne.

Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	0,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	0,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	1,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	1,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	2,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	3,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	3,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	4,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	5,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	5,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	6,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	6,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	7,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	8,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	8,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	9,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	10,0	0.0001	ANALYTIQUE	0,0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation D

Les caractéristiques sont identiques à la solution de référence. La modélisation utilisée est de type 3D_HM. Le maillage est représenté sur la Figure 6.1-1, il est constitué de 80 HEXA20. Dans cette modélisation, $LX=5\,m$ et $L_d=2{,}6\,m$, la discontinuité est ainsi non conforme au maillage. Les HEXA20 centraux sont traversés par la fissure.

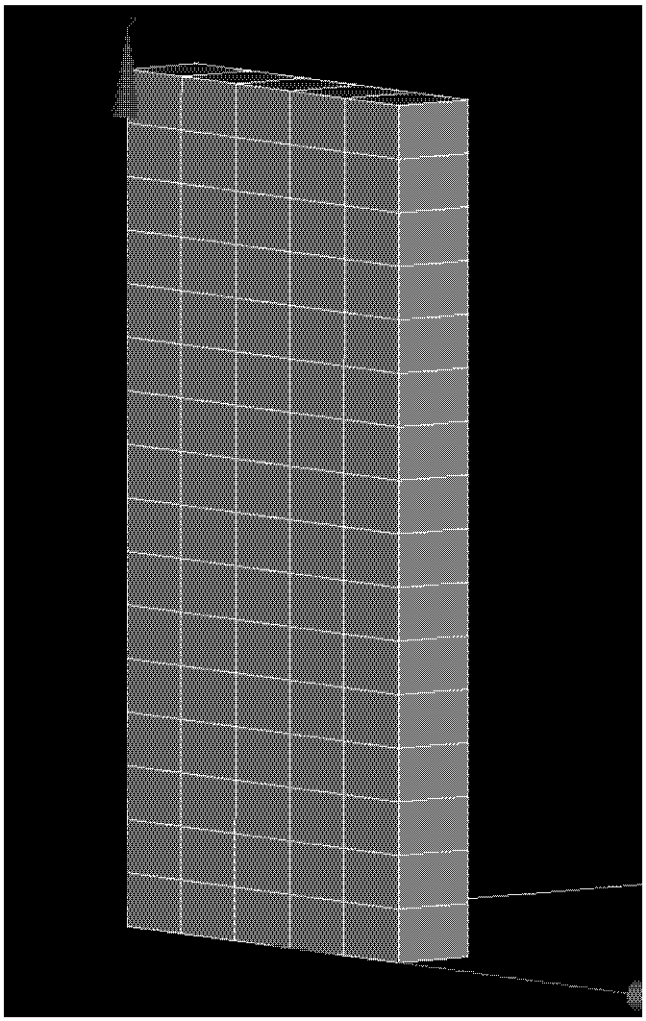


Figure 6.1-1 maillage 3D modélisation D

6.2 Grandeurs testées et résultats

Dans la colonne de gauche, on teste la pression de pore PRE1 à l'instant $t=0{,}0001\,s$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation 3D_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation 3D_HMD classique dans le haut de la colonne.

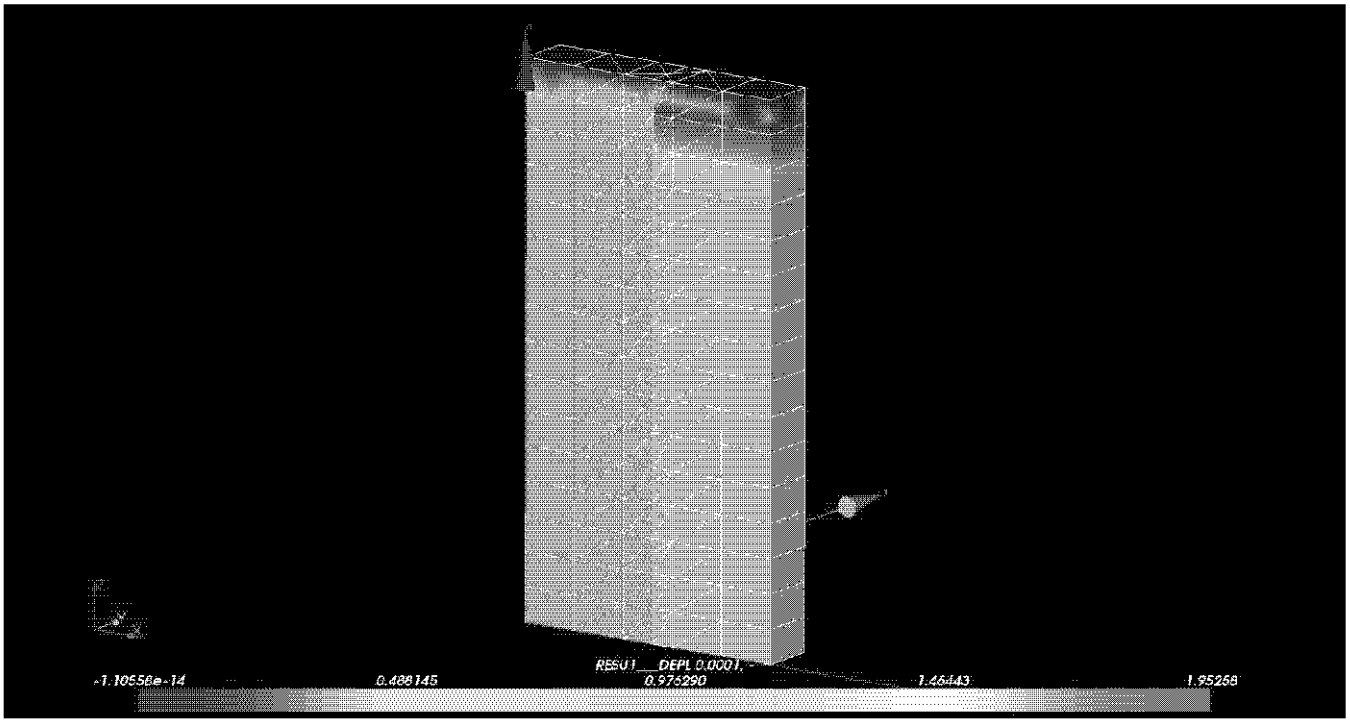
Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	0,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	0,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Déplacement PRE1	1,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	1,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	2,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	3,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	3,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	4,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	5,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	5,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	6,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	6,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	7,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	8,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	8,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	9,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,0
Déplacement PRE1	10,0	0.0001	ANALYTIQUE	0,0

Les résultats obtenus pour la pression de pore à l'instant final $t=0.0001\mathrm{s}$ sont représentés sur la Figure 6.2-1 . On observe bien une discontinuité nette de la pression de pore de part et d'autre de la fissure. Les HEXA20 centraux sont subdivisés en sous TETRA HM_XFEM.

Figure 6.2-1 Pression de pore à l'instant t=0.001s



Dans la colonne de droite, on teste la pression de pore PRE1 à l'instant $t=0{,}0001\,s$ à différentes hauteurs dans la colonne. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus pour une modélisation 3D_HM classique mais légèrement moins précis que ceux obtenus avec une modélisation 3D_HMD classique dans le haut de la colonne.

Valeur testée	Hauteur (m)	Instant (s)	Type	Référence
Déplacement PRE1	0,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	0,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	1,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	1,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	2,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	3,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	3,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	4,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	5,0	0.0001	ANALYTIQUE	1,54

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Déplacement PRE1	5,625	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	6,25	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	6,875	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	7,5	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	8,125	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	8,75	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	9,375	0.0001	ANALYTIQUE	1,54
Déplacement PRE1	10,0	0.0001	ANALYTIQUE	0,0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Conclusion

Pour chacune des deux modélisations, les résultats concordent avec la solution analytique ainsi qu'avec les résultats obtenus avec une modélisation HM classique pour chaque côté de l'interface. Le degré de liberté de pression enrichi HPRE1 est correctement introduit et le comportement hydromécanique des éléments HM-XFEM coïncide avec celui des éléments HM classiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Bibliographie

[1] EDF R&D, site officiel de Code_Aster, http ://www.code-aster.org/.

[2] S. Abbas and B. Lecampion. *Initiation and Breakdown of an Axisymmetric Hydraulic Fracture Transverse to a Horizontal Wellbore. In : Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing.* InTech, 2013.

[3] H. Abe, T. Mura, and L.M. Keer. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks. *J. Geophys. Res.*, 81 :5335–5340, 1976.

[4] J. Adachi and E. Detournay. Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock. *Engng. Fract. Mech.*, 75 :4666–4694, 2008.

[5] J. Adachi, E. Siebrits, A. Peirce, and J. Desroches. Computer simulation of hydraulic fractures. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 44 :739–757, 2007.

[6] J.I. Adachi. *Fluid-driven fracture in permeable rock.* PhD thesis, University of Minnesota, 2001.

[7] J.I. Adachi and E. Detournay. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid. *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.*, 26 :579–604, 2002.

[8] J.C. Aitchison, G.L. Clarke, D. Cluzel, and S. Meffre. Eocene arc-continent collision in New Caledonia and implications for regional Southwest Pacific tectonic evolution. *Geology*, 23 :161–164, 1995.

[9] S. Andrieux, Y. Bamberger, and J. Marigo. Un modèle de matériau microfissuré pour les roches et les bétons. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 5 :471–513, 1986.

[10] I. Babushka and M. Suri. The optimal convergence rate of the p-version of the finite-element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24 :750–776, 1987.

[11] J.Q. Bao, E. Fathi, and S. Ameri. Uniform investigation of hydraulic fracturing propagation regimes in the plane strain model. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 39 :507–523, 2015.

[12] G. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7 :55–130, 1962.

[13] E. Bechet, N. Moës, and B. Wohlmuth. A stable lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 78 :931–954, 2009.

[14] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :601–620, 1999.

[15] T. Belytschko, T. Black, N. Moës, N. Sukumar, and S. Usui. Structured extended finite element methods of solids defined by implicit surfaces. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 56 :609–635, 2003.

[16] T. Belytschko, M. Fleming, D. Organ, Y. Krongauz, and W.K. Liu. Smoothing and accelerated computations in the Element Free Galerkin Method. *J. Comput. Appl. Math.*, 74 :111–126, 1996.

[17] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl. Meshless methods : An overview and recent developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139 :3–47, 1996.

[18] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Element Free Galerkin Method for three-dimensional structural analysis. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 37 :229–256, 1994.

[19] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods. *Model. Simul. Sci. Comput. Engng.*, 2 :519–534, 1994.

[20] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Element Free Galerkin Method for static and dynamic fracture. *Int. J. Solids Struct.*, 32 :2547–2570, 1995.

[21] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 50 :993–1013, 2001.

[22] I. Berchenko, E. Detournay, and N. Chandler. Propagation of natural hydraulic fractures. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 34 :3–4, 1997.

[23] P.S. Bernard. A deterministic vortex sheet method for boundary layer flow. *J. Comput. Phys.*, 117 :132–145, 1995.

[24] B.A. Bilby and J.D. Eshelby. *"Dislocations and the theory of fracture" Fracture, an advanced treatise.* New York : Academic, 1968.

[25] M.A. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.*, 26 :155–164, 1955.

[26] M.A. Biot. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. *J. Appl. Phys.*, (78) :91–96, 1956.

[27] M.A. Biot. Theory of finite deformations of porous solids. *Indiana Univ. Math. J.*, 7 :597–620, 1972.

[28] F. Bourgeois, N. Burlion, and J.F. Shao. Modelling of elastoplastic damage in concrete due to desiccation shrinkage. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 26 :759–774, 2002.

[29] W. Brace and E. Bombolakis. A note on brittle crack growth in compression. *J. Geophys. Res.*, 68 :3709–3713, 1963.

[30] J.D. Bradshaw. Carboniferous to Cretaceous on the Pacific margin of Gondwanaland : the Rangitata phase of New Zealand. In *Fifth Gondwana Symposium Wellington*, 1979.

[31] F. Brezzi, D. Marini, and A. Russo. Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 :51–63, 1998.

[32] A. Bunger, E. Detournay, and D. Garagash. Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off. *Int. J. Fract.*, 134 :175–190, 2005.

[33] A.P. Bunger. Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures. *International Journal of Solids and Structures*, 50 :1538–1549, 2013.

[34] P. Burchard, L.T. Cheng, B. Merriman, and S.J. Osher. Motion of curves in the three spatial dimensions using a level set approach. *Journal of Computational Physics*, 170 :720–741, 2001.

[35] R. Carbonell, J. Desroches, and E. Detournay. A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture. *Int. J. Solids Struct.*, 36 :4869–4888, 1999.

[36] B. Carrier and S. Granet. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model. *Engineering Fracture Mechanics*, 79 :312–328, 2012.

[37] E. Carter. Optimum fluid characteristics for fracture extension. *Drill Prod. Pract.*, pages 261–270, 1957.

[38] E. Catalano, B. Chareyre, and E. Barthélemy. Pore-scale modeling of fluid-particles interaction and emerging poromechanical effects. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 38 :51–71, 2014.

[39] M. Cathelineau, A. Myagkiy, B. Quesnel, M.C. Boiron, P. Gauthier, P. Boulvais, M. Ulrich, L. Truche, F. Golfier, and M. Drouillet. Multistage infillings, hydraulic fracturing and early hydrothermal Ni enrichment in fractures from serpentinized ultrabasic rocks : the case of the Koniambo massif (New Caledonia) (submitted). 2016.

[40] J.S. Chen, C. Pan, C.T. Wu, and W.K. Liu. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 139 :195–227, 1996.

[41] J.S. Chen and H.F. Wang. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems. *Math. Comput.*, 187 :441–468, 2000.

[42] Z. Chen. Finite element modelling of viscosity-dominated hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 88-89 :136–144, 2012.

[43] Z. Chen, A. Bunger, X. Zhang, and R. Jeffrey. Cohesive zone finite element-based modeling of hydraulic fractures. *Acta Mech. Solida Sinica*, 22 :443–452, 2009.

[44] Y. Cheng. Boundary Element analysis of the stress distribution around multiple fractures : Implications for the spacing of perforation clusters of hydraulically fractured horizontal wells. In *SPE 125769*, 2009.

[45] J. Chessa, H. Wang, and T. Belytschko. On the construction of blending elements for local partition of enriched finite elements. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 57 :1015–1038, 2003.

[46] C. Cipolla, N.R. Warpinski, M.J. Mayerhofer, E.P. Lolon, and M.C. Vincent. The relationship between fracture complexity, reservoir treatment and fracture treatment design. *SPE Prod.*, 25 :438–452, 2010.

[47] J.B. Clark. A hydraulic process for increasing the productivity of wells. *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Eng.*, 186 :1–8, 1949.

[48] F.H. Clarke. *Optimization and non smooth analysis, Classics in Applied Mathematics.* SIAM, 1989.

[49] D. Cluzel, J.C. Aitchison, G. Clarke, S. Meffre, and C. Picard. Point de vue sur l'évolution tectonique et géodynamique de la Nouvelle-Calédonie. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 319 :683–688, 1994.

[50] D. Cluzel, J.C. Aitchison, and C. Picard. Tectonic accretion and underplating of mafic terranes in the late Eocene intraoceanic fore-arc of New Caledonia (Southwest Pacific) : geodynamic implications. *Tectonophysics*, 340 :23–59, 2001.

[51] D. Cluzel and B. Vigier. Syntectonic mobility of supergene nickel ores of New Caledonia (Southwest Pacific). evidence from garnierite veins and faulted regolith. *Resource Geology*, 58 :161–170, 2008.

[52] D. Colombo. An implicit geometrical approach to level sets update for 3D non-planar XFEM crack propagation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 237-240 :39–50, 2012.

[53] D. Colombo and P. Massin. Fast and robust level set update for 3D non-planar XFEM crack propagation modelling. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200 :2160–2180, 2011.

[54] A. Cornec, I. Scheider, and K.H.Schwalbe. On the practical application of the cohesive model. *Engng. Fract. Mech.*, 70 :1963–1987, 1963.

[55] O. Coussy. *Poromechanic*. John Wiley & Sons, 2004.

[56] T.A. Cruse. *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1988.

[57] P.A. Cundall and O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29 :47–65, 1979.

[58] A. Dahi-Taleghani and J.E. Olson. Numerical modeling of multi-stranded hydraulic fracture propagation : accounting for the interaction between induced and natural fractures. *SPE J.*, 16 :575–581, 2009.

[59] A. Dahi-Taleghani and J.E. Olson. How natural fractures could affect hydraulic-fracture geometry. *SPE J.*, 19 :161–171, 2014.

[60] R. Das, Y. Zhang, P. Schaubs, and P.W.Cleary. Modelling rock fracturing caused by magma intrusion using the Smoothed Particle Hydrodynamics Method. *Comput. Geosci.*, 18 :927–947, 2014.

[61] F. Dastjerdy, O. Barani, and F. Kalantary. Modeling of hydraulic fracture problem in partially saturated porous media using cohesive zone model. *Int. J. Civ. Eng.*, 13 :185–194, 2015.

[62] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 48 :1741–1760, 2000.

[63] G. Debruyne, J. Laverne, and P.E. Dumouchel. Dynamic crack growth : Analytical and numerical cohesive zone model approaches from basic tests to industrial structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 90 :1–29, 2012.

[64] L. Demkowicz, P. Devloo, and J. Oden. On a h-type mesh refinement strategy based on minimization of interpolation errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53 :67–89, 1985.

[65] M. Denda and Y.F. Dong. Complex variable approach to the BEM for multiple crack problems. *Compt. Methods Appl. Mech. Eng.*, 141 :247–264, 1997.

[66] E. Detournay. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks. *International Journal of Geomechanics*, 4 :35–45, 2004.

[67] E. Detournay, A. Cheng, and J. McLennan. A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm. *ASME J. Ener. Res. Tech.*, 112 :224–230, 1990.

[68] J. Dolbow and L.P. Franca. Residual-free bubbles for embedded Dirichlet problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :3751–3759, 2008.

[69] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 36 :235–260, 2000.

[70] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko. An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 :6825–6846, 2001.

[71] L. Dormieux and D. Kondo. Micromechanics of damage propagation in fluid-saturated media. *Revue européenne de Génie Civil*, 11 :945–962, 2007.

[72] L. Dormieux, D. Kondo, and F.J. Ulm. *Microporomechanics*. Wiley, 2006.

[73] A.C. Duarte, L.G. Reno, and A. Simone. A high-order generalized FEM for through-the-thickness branched cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72 :325–351, 2007.

[74] C.A. Duarte and J.T. Oden. Hp clouds - an hp meshless method. *Numercial Methods for Partial Differential Equations*, 12 :673–705, 1996.

[75] M. Duflot. A study of the representation of cracks with the level sets. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 70 :1261–1302, 2007.

[76] D. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys.*, 8(100-104), 1960.

[77] J. Duriez, L. Scholtès, and F. Donzé. Micromechanics of wing crack propagation for different flaw properties. *Engineering Fracture Mechanics*, 153 :378–398, 2016.

[78] M. Dusseault and J. McLennan. Massive multi-stage hydraulic fracturing : where we are ? In *ARMA (American Rock Mechanics Association) e-Newsletter*, 2011.

[79] A. Ern and S. Meunier. A posteriori error analysis of Euler-Galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems. *ESAIM : M2AN*, 43 :353–375, 2009.

[80] M. Faivre, B. Paul, F. Golfier, R. Giot, P. Massin, and D. Colombo. 2D coupled HM-XFEM modeling with cohesive zone model and applications to fluid-driven fracture network. *Engineering Fracture Mechanics*, 159 :115–143, 2016.

[81] P. Fedelinski, M.H. Aliabadi, and D.P. Rooke. A single-region time-domain BEM for dynamic crack problems. *Int. J. Solids Struct.*, 32 :3555–3571, 1995.

[82] G. Ferte. *Développement de l'approche X-FEM cohésive pour la modélisation de fissures et d'interfaces avec le logiciel libre EDF Code-Aster*. PhD thesis, Ecole Centrale Nantes, 2014.

[83] G. Ferte, P. Massin, and N. Moës. Interface problems with quadratic XFEM : design of a stable multiplier space and error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100 :834–870, 2014.

[84] G. Ferte, P. Massin, and N. Moës. 3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300 :347–374, 2016.

[85] J. Fish. The s-version of the finite-element method. *Computers and Structures*, 43 :539–547, 1992.

[86] M.K. Fisher, J.R. Heinze, C.D. Harris, B.M. Davidson, C.A. Wright, and K.P. Dunn. Optimizing horizontal completion techniques in the Barnett Shale using microseismic fracture mapping. In *Paper SPE 90051 presented at the 2004 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston TX*, September 26-29.

[87] T.P. Fries. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 75 :503–532, 2008.

[88] T.P. Fries and T. Belytschko. The intrinsic XFEM : a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68 :1358–1385, 2006.

[89] T.P. Fries and T. Belytschko. The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84 :253–304, 2010.

[90] T.P. Fries and S. Omerovic. Higher-order accurate integration of implicit geometries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106 :323–371, 2016.

[91] D.I. Garagash. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in : Asymptotics of large toughness. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 :456–481, 2006.

[92] D.I. Garagash. Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag : Early-time solution. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :5811–5835, 2006.

[93] D.I. Garagash and E. Detournay. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *ASME J. Appl. Mech.*, 67 :183–192, 2000.

[94] D.I. Garagash and E. Detournay. Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials*, . :25–29, 2002.

[95] D.I. Garagash and E. Detournay. The tip region of a fluid-driven fracture in an permeable elastic solid. *J. Fluid Mech.*, 494 :1–32, 2003.

[96] D.I. Garagash and E. Detournay. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture : Small toughness solution. *Journal of Applied Mechanics*, 72 :916–928, 2005.

[97] J. Geertsma and F. de Klerk. A rapid method of predicting width and extent of hydraulic induced fractures. *J. Pet. Technol.*, 246 :1571–1581, 1969.

[98] S. Geniaut. *Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles*. PhD thesis, Ecole Centrale Nantes, 2006.

[99] S. Geniaut and E. Galenne. A simple method for crack growth in mixed mode with XFEM. *International Journal of Solids and Structures*, 49 :2094–2106, 2012.

[100] S. Geniaut, P. Massin, and N. Moës. A stable 3D contact formulation for cracks using XFEM. *Revue Europénne de Mécanique Numérique*, 75 :259–276, 2007.

[101] L.N. Germanovich, L.M. Ring, D.K. Astakhov, J. Shlyopobersky, and M.J. Mayerhofer. Hydraulic fracture with multiple segments II : Modeling. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 34 :3–4, 1997.

[102] A. Giraud, Q.V. Huynh, D. Hoxha, and D. Kondo. Application of results on Eshelby tensor to the determination of effective poroelastic properties of anisotropic rock-like composites. *Int. J. Solids Struct.*, 44 :3756–3772, 2007.

[103] I. Gonzalez-Alvarez, F. Pirajno, and R. Kerrich. Hydrothermal nickel deposits : Secular variation and diversity. *Ore Geology Reviews*, 52 :1–3, 2013.

[104] R.E. Goodman and R.L. Taylor. A model for the mechanics of jointed rock. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division ASCE*, 94 :637–659, 1968.

[105] E. Gordeliy and A. Peirce. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 253 :305–322, 2013.

[106] E. Gordeliy and A. Peirce. Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the XFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 266 :125–143, 2013.

[107] E. Gordeliy and A. Peirce. Enrichment strategies and convergence properties of the XFEM for hydraulic fracture problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 283 :305–322, 2015.

[108] J. Gosz and W.K. Liu. Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method. *Computational Mech.*, 19 :120–135, 1996.

[109] A. Gravouil, N. Moës, and T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II : Level set update. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 53 :2569–2586, 2002.

[110] A. Hansbo and P. Hansbo. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :5537–5552, 2002.

[111] S. Hickman, R. Sibson, and R. Bruhn. Introduction to special section : Mechanical involvement of fluids in faulting. *J. Geophys. Res.*, 100 :831–840, 1995.

[112] A. Hillerborg, M. Modeer, and P.E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.*, 6 :163–168, 1976.

[113] T.Y. Hou, Z. Li, S. Osher, and H. Zhao. A hybrid method for moving interface problems with application to the Hele-Shaw flow. *Journal of Computational Physics*, 134 :236–252, 1997.

[114] J. Hu and D.I. Garagash. Plane-strain propagation of a fluid-driven crack in a permeable rock with fracture toughness. *Journal of Engineering Mechanics*, 136 :1152–1166, 2010.

[115] M.K. Hubbert and D. Willis. Mechanics of hydraulic fracturing. *Trans. Am. Inst. Min. Eng.*, 210 :153–158, 1957.

[116] G.R. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 24 :361–364, 1957.

[117] J. Ju. On energy based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Fract.*, 25 :803–833, 1989.

[118] M. Jébrak and E. Marcoux. *Géologie des ressources minérales*. Géologie Québec, 2008.

[119] A.R. Khoei and E. Haghighat. Extended finite element modelling of deformable porous media with arbitrary interfaces. *Applied Mathematical Modelling*, 35 :5426–5441, 2011.

[120] A.R. Khoei, N. Hosseini, and T. Mohammadnejad. Numerical modeling of two-phase fluid flow in deformable fractured porous media using the extended finite element method and a equivalent continuum model. *Advances in Water Resources*, 94 :510–528, 2016.

[121] A.R. Khoei, S. Moallemi, and E. Haghighat. Thermo-hydro-mechanical modelling of impermeable discontinuity in saturated porous media with X-FEM technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 96 :701–723, 2012.

[122] A.R. Khoei and T. Mohammadnejad. Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media : A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfall dams. *Computers and Geotechnics*, 38 :142–166, 2011.

[123] A.R. Khoei and M. Nikbakht. Contact friction modelling with the extended finite element method (XFEM). *Journal of Materials Technology*, 177 :58–62, 2006.

[124] S. Khristianovic and Y. Zheltov. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. *Proceedings of the 4th world petroleum congress*, 2 :579–586, 1955.

[125] G.E. King, L. Haile, J. Shuss, and T.A. Dobkins. Increasing fracture path complexity and controlling downward fracture growth in the barnett shale. In *SPE 119896*, 2008.

[126] Y. Krongauz and T. Belytschko. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite element approaches. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 131 :133–145, 1996.

[127] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surface generated by moving least square methods. *Math. Comput.*, 37 :141–158, 1980.

[128] J. Laverne. *Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques*. PhD thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Paris XIII, 2004.

[129] B. Lecampion. An extended finite element method for hydraulic fracture problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25 :121–133, 2009.

[130] B. Lecampion and J. Desroches. Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from horizontal wellbore. *Journal of the Mechanics of Physics and Solids*, 82 :235–258, 2015.

[131] B. Lecampion and E. Detournay. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag. *Compt. Methods Appl. Mech. Engng.*, 196 :4863–4880, 2007.

[132] S. Levasseur, R. Charlier, B. Frieg, and F. Collin. Hydro-mechanical modelling of the excavation damaged zone around an underground excavation at Mont Terri Rock Laboratory. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 47 :414–425, 2010.

[133] R.W. Lewis and B.A. Schrefler. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media 2nd edition.* Wiley Chichester, 1998.

[134] S. Li and W.K. Liu. Meshfree and particle methods and applications. *Applied Mechanics Reviews*, 55 :1–34, 2002.

[135] K.M. Liew, X. Zhao, and A.J.M. Ferreira. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 93 :2031–2041, 2011.

[136] V.A. Lisitsin, I. Gonzalez-Alvarez, and A. Porwal. Regional prospectivity analysis for hydrothermal-remobilised nickel mineral systems in western Victoria, Australia. *Ore Geology Reviews*, 52 :100–112, 2013.

[137] J.R. Lister. Buoyancy-driven fluid fracture : the effects of material toughness and of low-viscosity precursors. *J. Fluid Mech.*, 210 :263–280, 1990.

[138] C. Liu, H. Liu, Y. Zhang, D. Deng, and H. Wu. Optimal spacing of staged fracturing in horizontal shale-gas well. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 132 :86–93, 2015.

[139] W.K. Liu, S. Jun, and Y.F. Zhang. Reproducing Kernel Particle Methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 74 :1081–1106, 1996.

[140] W.K. Liu, R.A. Uras, and Y. Chen. Enrichment of the finite element method with reproducing kernel particle method. *ASME J. Appl. Mech.*, 64 :861–870, 1997.

[141] W.K. Liu, R.A. Uras, and Y. Chen. Enrichment of the finite element method with reproducing kernel particle method. *ASME J. Appl. Mech.*, 64 :861–870, 1997.

[142] E. Lorentz. A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198 :302–317, 2008.

[143] L.B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astron J.*, 12 :1013–1024, 1977.

[144] J.M. Melenk and I. Babushka. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139 :289–314, 1996.

[145] G. Meschke and P. Dumstorff. Energy-based modelling of cohesive and cohesionless cracks via XFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 :2338–2357, 2007.

[146] N. Modeland, D. Buller, and K.K. Chong. Stimulation's influence on production in the Haynesville Shale : A playwide examination of fracture-treatment variables that show effect on production. In *SPE 148940*, 2011.

[147] N. Moës, E. Bechet, and M. Tourbier. Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 67 :1641–1669, 2006.

[148] N. Moës and T. Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 :813–833, 2002.

[149] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, and J.F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :3163–3177, 2003.

[150] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.

[151] N. Moës, A. Gravouil, and T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I : Mechanical model. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 53 :2549–2568, 2002.

[152] T. Mohammadnejad and A.R. Khoei. An extended finite element method for fluid flow in partially saturated porous media with weak discontinuities ; the convergence analysis of local enrichment strategies. *Comput. Mech.*, 51 :327–345, 2013.

[153] T. Mohammadnejad and A.R. Khoei. An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous medium with the cohesive crack model. *Finite Elements in Analysis and Design*, 73 :77–95, 2013.

[154] T. Mohammadnejad and A.R. Khoei. Hydro-mechanical modeling of cohesive crack propagation in multiphase porous media using the extended finite element method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37 :1247–1279, 2013.

[155] J. Mosler. Numerical analyses of discontinuous material bifurcation : strong and weak discontinuities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194 :979–1000, 2005.

[156] H.M. Mourad, J. Dolbow, and I. Harari. A bubble-stabilized finite element method for Dirichlet constraints on embedded interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69 :772–793, 2007.

[157] S. Murakami and K. Kamiya. Constitutive and damage evolution equations of elastic brittle materials based on irreversible thermodynamics. *Int. J. Mech. Sci.*, 39 :473–486, 1996.

[158] A. Myagkiy, M. Cathelineau, F. Golfier, L. Truche, B. Quesnel, and M. Drouillet. Defining mechanisms of brecciation in Ni-silicate bearing fractures (Koniambo, New Caledonia). In *Proceedings of the 13th Biennal SGA (Society for Geology Applied to Mineral Deposits) meeting*, 2015.

[159] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements. *Comput. Mech.*, 10 :307–318, 1992.

[160] M. N'Deffo, P. Massin, and N. Moës. On the construction of approximation spaces to model strong discontinuities and cracks with linear and quadratic elements (2015, submitted). 2015.

[161] A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.*, 54 :525–531, 1987.

[162] V.P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, and M. Duflot. Meshless methods : A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79 :763–813, 2008.

[163] P. Nimis, V.V. Zaykov, P. Omenetto, I.Y. Melekestseva, S.G. Tesalina, and J.J. Orgeval. Peculiarities of some mafic-ultramafic and ultramafic-hosted massive sulphide deposits from the main Uralian Fault Zone, southern Urals. *Ore Geology Reviews*, 33 :49–69, 2008.

[164] I. Nistor, M.L.E. Guiton, P. Massin, N. Moës, and S. Geniaut. An X-FEM approach for large sliding contact along discontinuities. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 78 :1407–1435, 2009.

[165] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminaren des Universität Hamburg*, 36 :9–15, 1971.

[166] J. Noorishad, C.F. Tsang, and P. Witherspoon. Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks -1. development and verification of a numerical simulator. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 29 :401–409, 1992.

[167] R. Nordgren. Propagation of vertical hydraulic fractures. *J. Pet. Technol.*, 253 :306–314, 1972.

[168] J.E. Olson and A. Dahi-Taleghani. Modeling simultaneous growth of multiple hydraulic fractures and their interaction with natural fractures. In *SPE 119739*, 2009.

[169] E.S. Oran, C.K. Oh, and B.Z. Cybyk. Direct simulation Monte Carlo : Recent advances and applications. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30 :403–441, 1998.

[170] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.

[171] Y.C. Pan and T.W. Chou. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. *J. Appl. Mech.*, 43 :608–612, 1976.

[172] J.P. Paris, P. Andreieff, and J. Coudray. Sur l'âge Éocène supérieur de la mise en place de la Ophiolitic Nappe de Nouvelle-Calédonie déduit d'observations nouvelles sur la série de Népoui. *C. R. Acad. Sci. Fr., Ser. D*, 288 :1659–1661, 1979.

[173] B. Paul, M. Faivre, P. Massin, R. Giot, D. Colombo, and F. Golfier. A 3D coupled HM-XFEM model for fluid driven fractures in porous media. In *Interpore - Cincinnati, Ohio, USA.*, 2016.

[174] B. Paul, M. N'Deffo, P. Massin, D. Colombo, and N. Moës. A higher order integration technique for 3D cracks and branching discontinuities (2015, submitted). 2015.

[175] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, and M. Kang. A PDE-based fast local level set method. *Journal of Computational Physics*, 155 :410–438, 1999.

[176] V. Pensee, D. Kondo, and L. Dormieux. Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *J. Eng. Mech. ASCE*, 128 :889–897, 2002.

[177] T.K. Perkins and L.R. Kern. Widths of fractures. *J. Pet. Technol.*, 222 :937–949, 1961.

[178] M. Qi, J.F. Shao, A. Giraud, Q.Z. Zhu, and J.B. Colliat. Damage and plastic friction in initially anisotropic quasi brittle materials. *International Journal of Plasticity*, 82 :260–282, 2016.

[179] Q. Ren, Y. Dong, and T. Yu. Numerical modelling of concrete hydraulic fracturing with extended finite element method. *Sci. China Ser. E-Tech. Sci.*, 52 :559–565, 2009.

[180] J. Rethore, R. de Borst, and M.A. Abellan. A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 71 :780–800, 2007.

[181] J. Rethore, R. de Borst, and M.A. Abellan. A two-scale model for fluid flow in an unsaturated porous medium with cohesive cracks. *Comput. Mech.*, 48 :227–238, 2008.

[182] J.R. Rice. *The mechanics of earthquake rupture. In : Dziewonski, A.M. (Ed.), Physics of the Earth's Interior.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

[183] N.P. Roussel and M.M. Sharma. Optimizing fracture spacing and sequencing in horizontal-well fracturing. In *SPE 127986*, pages 173–184, 2011.

[184] N.P. Roussel and M.M. Sharma. Strategies to minimize frac spacing and stimulate natural fractures in horizontal completions. In *SPE 146104*, 2011.

[185] M.G. Schaap and M.T. Van Genuchten. A modified Mualem-van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation. *Vadose Zone Journal*, 5 :27–34, 2006.

[186] L. Scholtès, B. Chareyre, H. Michallet, E. Catalano, and D. Marzougui. Modeling wave-induced pore pressure and effective stress in a granular seabed. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 27 :305–323, 2015.

[187] L. Scholtès and F. Donzé. Modelling progressive failure in fractured rock masses using a 3D discrete element method. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 52 :18–30, 2012.

[188] L. Scholtès and F. Donzé. A DEM model for soft and hard rocks : role of grain interlocking on strength. *J. Mech. Phys. Solids*, 61 :352–369, 2013.

[189] T.D. Secor. Role of fluid pressure in jointing. *Am. J. Sci.*, 263 :633–646, 1965.

[190] J.A. Sethian and A. Vladimirsky. Fast methods for the Eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 97 :5699–5703, 2000.

[191] J.F. Shao. Poroelastic behaviour of brittle rock materials with anisotropic damage. *Mech. Mater.*, 30 :41–53, 1998.

[192] J.F. Shao, Y.F. Lu, and D. Lydzba. Damage modeling of saturated rocks in drained and undrained conditions. *J. Eng. Mech. ASCE*, 130 :733–740, 2004.

[193] E. Shmoylova, S. Potapenko, and L. Rothenburg. Boundary element analysis of stress distribution around a crack in plane micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 45 :199–209, 2007.

[194] I. Singh and J.L. Miskimins. A numerical study of the effects of packer-induced stresses and stress shadowing on fracture initiation and stimulation of horizontal wells. In *CSUG/SPE 136856*, 2010.

[195] M.Y. Soliman, M. Azari, J.L. Hunt, and C.C. Chen. Design and analysis of fractured horizontal wells in gas reservoirs. In *SPE 35343*, 1996.

[196] M.Y. Soliman, L.E. East, and J.R. Augustine. Fracturing design aimed at enhancing fracture complexity. In *SPE 130043*, 2010.

[197] D.A. Spence and P.W. Sharp. Self-similar solution for elasto-hydrodynamic. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 400 :289–313, 1985.

[198] M. Stolarska, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 51 :943–960, 2001.

[199] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babushka. The Generalized Finite Element Method : an example of its implementation and illustration of its performance. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47 :1401–1417, 2000.

[200] N. Sukumar, D.I. Chopp, E. Béchet, and N. Moës. Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 76 :727–748, 2008.

[201] N. Sukumar, D.L.Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 :6183–6200, 2001.

[202] M. Sussman, P. Smereka, and S.J. Osher. A level set method for computing solutions for incompressible two-phases flow. *Journal of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994.

[203] A. Taghichian, M. Zaman, and D. Devegowda. Stress shadow size and aperture of hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 124 :209–221, 2014.

[204] C. Talon and A. Curnier. A model of adhesion coupled to contact and friction. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22 :545–565, 2003.

[205] A. Tezuka and O. Okudo. Trial by the r-method - An adaptive mesh refinement for the finite-element method. *JSME International Journal - Serie I*, 31 :50–55, 1988.

[206] M. Ulrich, C. Picard, S. Guillot, C. Chauvel, D. Cluzel, and S. Meffre. Multiple melting stages and refertilization as indicators for ridge to subduction formation : The New Caledonia ophiolite. *Lithos*, 115 :223–236, 2010.

[207] P. Valko and M.J.Economides. *Hydraulic Fracture Mechanics*. John Wiley and Sons, Chichester UK, 1995.

[208] L. Vandamme and J. Roegiers. Poroelasticity in hydraulic fracturing simulators. *J. Pet. Technol.*, 42 :1199–1203, 1957.

[209] G. Ventura, E. Budyn, and T. Belytschko. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 58 :1571–1592, 2003.

[210] G. Ventura, X. Xu, and T. Belytschko. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 54 :923–944, 2002.

[211] H. Wang. Numerical modeling of non-planar hydraulic fracture propagation in brittle and ductile rocks using XFEM with cohesive zone method. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 135 :127–140, 2015.

[212] N. Watanabe, W. Wang, J. Taron, U.J. Gorke, and O. Kolditz. Lower-dimensional interface elements with local enrichment :application to coupled hydro-mechanical problems in discretely fractured porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90 :1010–1034, 2012.

[213] W. Wawersik and W. Brace. Post-failure behavior of a granite and diabase. *Rock Mech.*, 3 :61–85, 1971.

[214] P.A. Witherspoon, J.S.Y. Wang, K. Iwai, and J.E. Gale. Validity of the cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. *Water Resour. Res.*, 16 :1016–1024, 1980.

[215] J.P. Wolf and C. Song. *Finite-element modelling of unbounded media.* Chichester : Wiley, 1996.

[216] S.W. Wong, M. Geilikam, and G. Xu. Interaction of multiple hydraulic fractures in horizontal wells. In *SPE 163982*, 2013.

[217] T. Wong. Micromechanics of faulting in westerly granite. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 19 :49–56, 1982.

[218] N. Xie, Q.Z. Zhu, J.F. Shao, and L.H. Xu. Micromechanical analysis of damage in saturated quasi brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49 :919–928, 2012.

[219] N. Xie, Q.Z. Zhu, L.H. Xu, and J.F. Shao. A micromechanics-based elastoplastic damage model for quasi-brittle rocks. *Computers and Geotechnics*, 38 :970–977, 2011.

[220] Z. Yang. Fully automatic modelling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 :1711–1731, 2006.

[221] C. Yao, Q.H. Jiang, and J.F. Shao. Numerical simulation of damage and failure in brittle rocks using a modified rigid block spring method. *Computers and Geotechnics*, 64 :48–60, 2015.

[222] C. Yao, Q.H. Jiang, J.F. Shao, and C.B. Zhou. A discrete approach for modeling damage and failure in anisotropic cohesive brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 155 :102–118, 2016.

[223] A. Zamani and M.R. Eslami. Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation. *International Journal of Solids and Structures*, 47 :1392–1404, 2010.

[224] X. Zhang and R.G. Jeffrey. Re-initiation or termination of fluid-driven fractures at frictional bedding interfaces. *J. Geophys. Res.*, 113 :B08416, 2008.

[225] X. Zhang, R.G. Jeffrey, A.P. Bunger, and M. Thiercelin. Initiation and growth of a hydraulic fracture from a circular wellbore. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 48 :984–995, 2011.

[226] X. Zhang, R.G. Jeffrey, and M. Thiercelin. Deflection and propagation of fluid-driven fractures at frictional bedding interfaces : A numerical investigation. *J. Struct. Geol.*, 29 :984–995, 2007.

[227] X. Zhang, R.G. Jeffrey, and M. Thiercelin. Mechanics of fluid-driven fracture growth in naturally fractured reservoirs with simple network geometries. *J. Geophys. Res.*, 114 :B12406, 2009.

[228] X. Zhang and D.J. Sanderson. Anisotropic features of geometry and permeability in fractured rock mass. *Eng. Geol.*, 40 :65–75, 1995.

[229] J.J. Zhou, J.F. Shao, and W.Y. Xu. Coupled modeling of damage growth and permeability variation in brittle rocks. *Mechanics Research Communications*, 33 :450–459, 2006.

[230] C. Zhu, G. Lin, and J. Li. Modelling cohesive crack growth in concrete beams using scaled boundary finite element method based on super-element remeshing technique. *Computers and Structures*, 121 :76–86, 2013.

[231] Q.Z. Zhu, D. Kondo, and J.F. Shao. Micromechanical analysis of coupling between anisotropic damage and friction in quasi brittle materials : role of the homogenization scheme. *Inter. J. Solids Struct.*, 45 :1385–1405, 2008.

[232] Q.Z. Zhu and J.F. Shao. A refined micromechanical damage-friction model with strength for rock-like materials under compression. *Int. J. Solids Struct.*, 60-61 :75–83, 2015.

[233] Q.Z. Zhu, J.F. Shao, and D. Kondo. Micromechanics-based thermodynamic formulation of isotropic damage with unilateral and friction effects. *Euro. J. Mech. A/Solids*, 30 :316–325, 2011.

[234] G. Zi and T. Belytschko. New crack-tip element for XFEM and applications to cohesive cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 57 :2221–2240, 2003.

[235] A. Zilian and A. Legay. The enriched space-time finite element method (EST) for simultaneous solution of fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75 :305–334, 2008.

Title

Modeling of the hydro-geomechanical behavior of a fault network under the stress-state variations

Abstract

In the present work, we address the issue of groundwater flow in the fractured porous media submitted to local or regional stress-state variations. Due to the increasing pore fluid pressure, the length and aperture distribution of the fractures are modified resulting in the formation of preferential flow channels within the geological formation. The numerical approach proposed is a fully coupled hydro-poro-mechanical model in saturated conditions involving single-phase flow both in fractures and in the porous matrix. The extended finite element method (XFEM) is employed for modeling fracture dynamics and flow calculation for fracture which do not lie on the mesh but cross through the elements. In this study : (i) we consider the pressure build up generated by fluid flow inside and through the fracture, (ii) the fracture dynamics by using a cohesive zone model (CZM) on pre-existing propagation path and (iii) fluid exchanges may occur in between fractures and porous medium. The last specification of the HM-XFEM model is taken into account through the introduction of a Lagrange multiplier field along the fracture path. These fields are the result of the dualised condition of pressure continuity between the pore pressure and the fluid pressure inside the fracture. As a function of the Lagrange multiplier value, both permeable and impervious fractures can be considered. The cohesive law employed is a non-regularized-type cohesive law to ensure propagation and eventually closure of the fracture. Validation of the model has been conducted by means of the well-known KGD fracture model when different propagation regimes are considered. We applied the HM-XFEM model to the case of multi-stage fracture network stimulated by the injection of incompressible fluid at constant rate. Fractures are not connected to each other and evolve on pre-existing propagation paths. We aim at appreciating the influence of the fluid viscosity, the injection rate and spacing between each fracture, on the fracture propagation. A peculiar attention is paid to the stress-shadowing effect (*i.e.* interaction between fractures).

Keywords

XFEM method, non-regularized cohesive constitutive law, fracture mechanics, fluid circulation, fluid-driven fracture network, stress-shadowing effect

Titre

Modélisation du comportement hydrogéomécanique d'un réseau de failles sous l'effet des variations de l'état de contrainte

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire l'influence que peuvent avoir les écoulements de fluide au sein de la matrice rocheuse fracturée, laquelle est sujette aux variations locales ou régionales de l'état de contrainte *in situ*. Du fait de l'augmentation de la pression de pore, la longueur et l'ouverture de la (les) fracture(s) peuvent subir des variations significatives et conduire à la formation de chemins préférentiels pour l'écoulement du fluide dans le milieu géologique. Les modèles théorique et numérique évoqués ici sont des modèles de comportement hydro-mécanique pour le milieu poreux saturé en présence d'une seule phase fluide. La méthode des éléments finis étendue (XFEM) est utilisée afin de modéliser la dynamique des fractures ainsi que les écoulements de fluide dans la matrice rocheuse fracturée, sans être tributaire de la dépendance au maillage. Ainsi, nous considérons : (i) qu'il existe une pression fluide induite par l'écoulement au sein de la fracture, (ii) que la dynamique de la fracture est gérée grâce à un modèle de zone cohésive en supposant un chemin de propagation prédéfini, et (iii) que des échanges entre la fracture et la matrice poreuse peuvent se produire. Ce dernier aspect sera pris en compte en introduisant, dans la formulation du problème couplé, un champ de multiplicateur de Lagrange. Ce champ résulte de la dualisation de la condition d'égalité entre la pression de pore et de la pression de fluide au niveau des parois de la fracture. Afin de respecter les contraintes liées à XFEM, nous avons choisi d'introduire dans la formulation une loi cohésive non-régularisée de type Talon-Curnier. Ce type de loi est capable de gérer la propagation et/ou la refermeture de la fracture. Le modèle HM-XFEM a été validé à partir des solutions analytiques du modèle 2D de fracture KGD, et ce, pour différents régimes de propagation. Nous avons ensuite appliqué le modèle HM-XFEM au cas d'un réseau de fractures non connectées entre elles et évoluant sur des chemins de propagation prédéfinis, afin d'analyser comment les fractures d'un réseau peuvent influer les unes sur les autres lorsqu'elles sont soumises à un écoulement. En particulier, une étude paramétrique a été menée afin de montrer l'influence que peuvent avoir la viscosité, le débit d'injection et l'écartement entre les fractures sur leur propagation. Une attention particulière sera porté à l'évolution du *stress-shadowing effect* (*i.e.* modification de l'état de contrainte due à l'effet d'interaction entre les fractures).

Mots-clés

Méthode XFEM, loi cohésive non-régularisée, mécanique de la rupture, circulation de fluide, réseau de fractures hydrauliques, KGD, *stress-shadowing effect*