



SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Utilisation des non-linéarités Kerr et Brillouin dans les résonateurs à modes de galerie cristallins pour la synthèse de micro-ondes

■ SOULEYMANE DIALLO

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

N° X | X | X |

THÈSE présentée par

SOULEYMANE DIALLO

pour obtenir le

Grade de Docteur de

l'Université de Bourgogne-Franche-Comté

Spécialité : **Photonique**

Utilisation des non-linéarités Kerr et Brillouin dans
les résonateurs à modes de galerie cristallins pour la
synthèse de micro-ondes

Soutenue publiquement le 25 novembre 2016 devant le Jury composé de :

GOERY GENTY	Rapporteur	Professeur à l'Université Technologique de Tampere
STEFAN WABNITZ	Rapporteur	Professeur à l'Université de Brescia
JULIEN JAVALOYES	Examinateur	Chercheur à Universitat de les Illes Balareas
LAURENT LARGER	Examinateur	Professeur à l'Université de Franche-Comté
HERVÉ MAILLOTTE	Examinateur	Directeur de recherche à l'Institut Femto-ST [UMR CNRS 6174]
YANNE CHEMBO	Examinateur	Chargé de recherche à l'Institut Femto-ST [UMR CNRS 6174]

"There is nothing wrong with aspiring to more than what society had intend for you. Ambition is a worthy and necessary attribute to succeed..."

REMERCIEMENTS

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit se sont déroulés au laboratoire d'optique PM Duffieux de l'Institut Femto-ST à Besançon sous la direction de Yanne CHEMBO et Laurent LARGER dans le cadre du projet NextPhase. Mes premiers remerciements s'adressent à eux de m'avoir choisi parmi de nombreux candidats. Je tiens à les remercier pour le cadre de travail qu'ils m'ont offert mais aussi pour la rigueur scientifique et le sens du détail qu'ils m'ont inculqués. Je remercie aussi l'European Research Council pour avoir financé mes travaux.

Je remercie de manière particulière Yanne d'avoir trouvé les mots et méthodes justes pour m'amener à fournir à chaque échéance un travail de qualité dans les délais indiqués. Tout le long de ces travaux, Yanne n'a jamais ménagé ses efforts pour me prodiguer des conseils aussi bien sur le plan professionnel que personnel afin de faire de moi un bon chercheur et une personne accomplie. J'ai énormément appris à ses côtés et j'espère que ce manuscrit est le début d'une longue et fructueuse collaboration au cours de laquelle je continuerai à apprendre et à m'inspirer de lui. Je ne le remercierai jamais assez.

La dernière année de mes travaux a coïncidé à l'arrivée dans notre équipe de Jean Pierre AUBRY. Il a joué un rôle très important dans le développement du chapitre concernant les interactions photons-phonons dans les résonateurs à modes de galerie. Son expertise en matière de cristallographie m'a permis d'aborder ce type d'interaction sous un angle qui est la base de la théorie développée dans le chapitre trois de ce manuscrit. Jean Pierre ne s'est pas ménagé pour m'aider à préparer ma soutenance en scrutant chaque slide de ma présentation dans ses détails les plus fins. Mille mercis Jean Pierre.

Je remercie Stéphane WABNITZ et Goery GENTY d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Je remercie Julien JAVALOYES d'avoir effectué le déplacement depuis l'Espagne pour être mon examinateur. Je remercie également Hervé MAILLOTTE d'avoir présidé la cérémonie de soutenance de mes travaux. Cette dernière a été l'objet d'échanges fructueux, de questions et remarques pertinentes qui me seront d'une grande utilité pour la suite de mes travaux de recherche.

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre d'un projet européen où j'ai collaboré avec 4 post-doctorants qui sont Aurélien COILLET, Khaldoun SALEH, Guoping LIN, Romain MARTINENGHI, un ingénieur de recherche qui est Patrice SALZENSTEIN et un doctorant qui est Rémi HENRIET. J'ai appris de chacun d'eux, je me dois de les remercier pour leur disponibilité et leur contribution à la réussite de ces travaux. L'une des tâches de cette thèse a été le polissage de résonateurs à modes de galerie cristallins, je tiens à remercier Rémi HENRIET de m'avoir transmis son savoir-faire en la matière. Certains résultats présentés dans ce manuscrit n'auraient pas été possible sans.

Je remercie Abdoulaye N'DAO avec qui j'ai développé des rapports qui ont pris une dimension fraternelle. Son soutien, ses conseils et son regard d'"ancien" m'ont été d'une grande utilité. Je remercie mon professeur de physique au lycée Mr Amadou Tangaly BALDE de m'avoir inculqué les notions de base nécessaires pour faire de la physique.

Je remercie les professeurs de l'université de Bourgogne-Franche-comté qui ont contribué à ma formation et de manière très particulière, je tiens à remercier Fabrice DEVAUX, Maxime JACQUOT, Remo GIUST et Thibaut SYLVESTRE de leur soutien.

Je remercie ma compagne Angélique BRUCHON pour sa patience, son soutien et son amour inconditionnel. Je remercie mon père et ma mère d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Chaque lever de soleil que je vis me permet de mesurer le poids et l'importance des valeurs que vous m'avez inculquées. Je vous dédie ce manuscrit en étant convaincu qu'il ne représente pas le dixième des sacrifices auxquels vous avez consenti pour mon accomplissement personnel et professionnel. Je remercie Mon grand-oncle Dr CAMARA Boubacar, mes frères Aliou, Oury, Thierno Amadou, Sadialiou et ma sœur Hadja Issa pour leur soutien moral et financier durant mes années d'étude. Je suis convaincu que sans vous, je n'en serais pas à ce stade. Je remercie toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont soutenu.

Je remercie enfin Dieu de m'avoir offert autant d'opportunités et d'avoir inclus dans ma destinée les personnes que je viens de remercier.

SOMMAIRE

1	Théorie, fabrication, couplage et caractérisation	5
1.1	Théorie des modes de galerie	5
1.1.1	Approche géométrique	5
1.1.2	Approche ondulatoire	6
1.1.2.1	Approximation de l'eikonale	7
1.1.2.2	Problème électromagnétique exact	10
1.1.2.3	Position des résonances	12
1.1.2.4	Facteur de qualité	14
1.1.2.5	Finesse	16
1.1.2.6	Volume du mode	16
1.2	Fabrication des résonateurs à modes de galerie	17
1.2.1	Fabrication par fusion	17
1.2.1.1	Fusion par laser	17
1.2.1.2	Fusion par microchalumeau	18
1.2.1.3	Fusion par arc électrique	18
1.2.2	Fabrication par technique de lithographie	18
1.2.3	Fabrication par polissage	18
1.3	Couplage de la lumière dans les résonateurs à modes de galerie	22
1.3.1	Les régimes de couplage	22
1.3.2	Techniques de couplage	23
1.3.2.1	Couplage par prisme	23
1.3.2.2	Couplage par fibre érodée	24
1.3.2.3	Couplage par fibre biseautée ou fibre prisme	25
1.3.2.4	Couplage par fibre étirée ou taper	25
1.4	Méthodes de Caractérisation des résonateurs à modes de galerie	26
1.4.1	Méthode du balayage lent en longueur d'onde	26
1.4.2	Mesure du temps de vie des photons : réponse temporelle sans balayage en longueur d'onde	28

1.4.3	Mesure du temps de vie des photons : réponse temporelle avec balayage en longueur d'onde	29
1.5	Description des cristaux fluorés abordés dans le cadre de cette thèse	30
1.6	Conclusion	32
2	Peignes de fréquences optiques de Kerr	35
2.1	Introduction	35
2.2	Peignes de fréquences optiques de Kerr	37
2.2.1	Peigne de fréquences optiques	37
2.2.2	Effet Kerr optique et mélange à quatre ondes	37
2.2.3	Dispositif expérimental et résultats expérimentaux	38
2.2.4	Stabilisation des peignes de Kerr	38
2.2.4.1	Stabilisation par voie thermique ou thermal locking	40
2.2.4.2	Stabilisation par la technique de Pound Drever Hall	41
2.2.5	Spectres RF de peignes de fréquences	42
2.2.5.1	Largeurs de raies et bruits de phase	42
2.2.6	Bruit de fréquence d'un peigne de Kerr généré à travers un résonateur à modes de galerie	48
2.3	Modélisation numérique des peignes de fréquences optiques	49
2.3.1	Introduction	49
2.3.2	Modèles théoriques de peignes de Kerr optiques	49
2.3.3	Modèle modal	51
2.3.4	Modèle spatio-temporel	53
2.3.5	Analyse de stabilité	56
2.3.6	Diagramme de bifurcation : dispersion normale β positif et dispersion anormale β négatif	56
2.4	Instabilités oscillatoires dans les résonateurs à modes de galerie	58
2.4.1	Dispositif expérimental et résultats expérimentaux	61
2.4.2	Modèle théorique et simulations numériques	62
2.5	Conclusion	65
3	Interactions photons-phonons dans les résonateurs à modes de galerie	67
3.1	Introduction	67
3.2	Processus de diffusion de la lumière	67
3.2.1	La diffusion Rayleigh	68
3.2.2	Diffusion Brillouin spontanée	69
3.2.3	Diffusion Brillouin stimulée	71

3.3 Ondes acoustiques et structures cristallines	72
3.3.1 Propagations d'ondes acoustiques dans un cristal	72
3.3.2 Expression des coefficients élastiques dans le repère tourné : Rotation des matrices élastiques	76
3.3.3 Calcul des fréquences acoustiques	79
3.4 Diffusion Brillouin stimulée dans les résonateurs à mode de galerie	82
3.4.1 Montage expérimental et résultats expérimentaux	84
3.5 Diffusion Brillouin stimulée : étude théorique	85
3.5.1 équations de la diffusion Brillouin stimulée et puissance seuil Brillouin	85
3.6 Conclusion	89
4 Conclusion générale et perspectives	91
I Annexes	113
A Premier chapitre des annexes	115
B Second chapitre des annexes	117

INTRODUCTION GÉNÉRALE ET PLAN DE LA THÈSE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les résonateurs à modes de galerie sont des cavités diélectriques qui supportent des modes à très haut facteur de qualité et à faible volume. Ces modes demeurent confinés à l'interface air-diélectrique pour des durées pouvant atteindre voire dépasser la micro-seconde [1, 2, 3]. Cette propriété a suscité un grand intérêt au sein de la communauté scientifique. En effet, un fort confinement du mode pour de longues durées combiné à un faible volume accentue fortement l'interaction lumière-matière. Le résonateur devient sujet à de fortes interactions non-linéaires dont les puissances seuil sont inversement proportionnelles au carré, au cube, voire à la puissance 4 du facteur de qualité. Toutes ces propriétés ouvrent des portes à de nombreuses applications dans des domaines tels que la spectroscopie, les capteurs, les télécommunications, les hyperfréquences etc. L'objectif de cette thèse est d'explorer ces effets non-linéaires dans des résonateurs à modes de galerie cristallins pour générer des micro-ondes ultra-stables à très haute pureté spectrale à la longueur d'onde de pompe de 1550 nm.

Depuis de nombreuses années, les phénomènes non-linéaires ont été explorés dans de nombreux résonateurs à modes de galerie faits de différents matériaux. Ces travaux ont par exemple permis la génération de peignes de fréquences optiques via l'effet Kerr à travers des résonateurs amorphes, cristallins mais aussi intégrés. Les peignes de fréquences optiques figurent parmi les découvertes qui ont le plus révolutionné le monde de la métrologie à très haute précision. L'impact de cette technologie est tel qu'il a conduit en 2005 Théodore Hänsch et John Hall au prix Nobel de physique pour leurs contributions à la technologie des peignes de fréquences optiques [4, 5]. Avant l'exploration de l'effet Kerr optique dans les résonateurs à modes de galerie, les peignes de fréquences optiques étaient générés à partir de lasers à modes verrouillés qui délivrent des impulsions optiques. Cependant, en 2004, deux équipes indépendantes ont généré pour la première fois des peignes de fréquences optiques à travers des résonateurs à modes de galerie amorphes [6] et cristallins [7]. L'un des avantages de cette approche par rapport aux peignes de fréquences optiques via lasers à modes verrouillés est le taux de répétition qui correspond à l'intervalle spectral libre du résonateur à modes de galerie. Cette particularité permet de générer des peignes de fréquences avec des taux de répétition dans le domaine du TéraHertz mais aussi du GigaHertz. Dans les travaux de cette thèse, un de nos objectifs est de tirer profit de cette propriété afin de générer des micro-ondes ultra-stables de fréquences comprises entre 5 et 20 GHz. Pour des raisons que nous évoquons dans les chapitres suivants, nos choix se sont portés sur des résonateurs cristallins fluorés de diamètre compris entre 6 et 12 mm.

Le second aspect de cette thèse concerne l'exploration de la diffusion Brillouin stimulée

dans ces mêmes cristaux pour la génération de micro-ondes à haute pureté spectrale. La diffusion Brillouin stimulée est un processus non-linéaire qui entraîne la diffusion de la lumière par des ondes élastiques créées par des phonons acoustiques. Ce phénomène non-linéaire est très exploité dans la communauté des lasers car il est accompagné de la génération d'une onde connue sous le nom d'onde Stokes qui est décalée de l'onde pompe à une fréquence correspondant à celle de l'onde acoustique et qui, dans certains cas, subit une forte réduction de largeur de raie. Des facteurs de réduction atteignant 10^4 ont déjà été démontrés dans des résonateurs fibrés ainsi que des largeurs de raies de quelques hertz pour l'onde Stokes [8, 9, 10]. Au même titre que dans les fibres optiques, la diffusion Brillouin stimulée a été rapportée dans des résonateurs à modes de galerie amorphes, intégrés mais aussi cristallins avec des démonstrations d'applications dans le domaine des lasers et micro-ondes. La majorité des cristaux fluorés utilisés dans le cadre de cette thèse sont de taille millimétrique et présentent un intervalle spectral libre qui est du même ordre de grandeur que le décalage Brillouin à 1550 nm à savoir, quelques dizaines de GHz. Cette particularité donne la possibilité d'y observer la diffusion Brillouin stimulée. Par conséquent, la détection des ondes pompe et Stokes sur une photodiode rapide (environ 20 GHz de bande passante) donne la possibilité de générer des ondes Radio-Fréquence (RF). En termes de micro-ondes, la largeur de raie de l'onde RF est très importante. Il se pose alors la question de connaître le cristal fluoré le mieux indiqué pour générer des ondes RF à très faible largeur de raie. En effet, comme nous le verrons plus loin dans le manuscrit, les cristaux fluorés utilisés dans le cadre de nos travaux sont des lames monocristallines anisotropes. L'orientation de leur axe normal par rapport aux axes cristallins dictent le comportement de l'onde acoustique qui se propage dans le résonateur et qui est responsable de la diffusion Brillouin. Par le biais d'une analyse poussée de l'influence de l'orientation du cristal sur la largeur de raie de l'onde RF, nous essayons de répondre à cette question à travers des simulations numériques et travaux expérimentaux.

PLAN DE LA THÈSE

Cette thèse comprend trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la théorie, la fabrication, le couplage et la caractérisation de résonateurs à modes de galerie. Dans ce chapitre, à travers la première section intitulée "théorie des modes de galerie", nous présentons les notions théoriques nécessaires à la bonne compréhension des modes de galerie. La deuxième section concerne la fabrication de résonateurs à modes de galerie. Nous y présentons différentes techniques de fabrication dont celle utilisée dans le cadre des travaux de cette thèse. La troisième section est consacrée aux différentes techniques de couplage de la lumière dans les résonateurs à modes de galerie. Nous clôturons ce chapitre par une quatrième section sur la caractérisation. Elle est consacrée aux différentes méthodes permettant de caractériser un résonateur à modes de galerie. Nous y présentons la méthode retenue dans le cadre de cette thèse et présentons quelques résultats expérimentaux.

Le second chapitre intitulé "peignes de fréquences optiques de Kerr" est consacré à la génération de peignes de fréquences dans ces résonateurs. Dans la première section, nous introduisons les peignes de fréquences optiques en abordant leur historique, en les définissant, en présentant les moyens permettant de les générer, puis présentons quelques résultats expérimentaux. La deuxième section du chapitre concerne la géné-

ration de peignes de fréquences optiques dans les résonateurs à modes de galerie et leurs applications à la génération de microondes ultra-stables. Nous y présentons nos résultats expérimentaux. Ce chapitre comporte également une troisième section consacrée à la modélisation numérique des peignes de fréquences optiques dans les résonateurs à modes de galerie. La quatrième section est consacrée à l'analyse d'instabilités oscillatoires d'origine thermique observées lors de nos travaux expérimentaux. Nous y présentons nos résultats expérimentaux, le modèle théorique d'instabilités oscillatoires que nous avons développé ainsi que les résultats de simulations numériques.

Le dernier chapitre concerne l'interaction photons-phonons dans les résonateurs à modes de galerie. Nous commençons ce chapitre par une section d'introduction suivie d'une seconde dans laquelle nous apportons quelques explications sur le processus de diffusion de la lumière. Une troisième section est consacrée à l'étude des ondes acoustiques dans les structures cristallines. La quatrième section de ce chapitre concerne la diffusion Brillouin stimulée dans les résonateurs à modes de galerie cristallins ; nous y présentons nos résultats expérimentaux. Dans la cinquième section, nous présentons le modèle temporel développé dans le cadre de cette thèse afin de décrire la dynamique temporelle de l'onde transmise et de celle retrodiffusée dans les résonateurs. Nous y présentons les résultats des simulations numériques que nous avons effectué puis nous concluons.

Le manuscrit de thèse sera clôturé par une conclusion générale.

THÉORIE, FABRICATION, COUPLAGE ET CARACTÉRISATION

1.1/ THÉORIE DES MODES DE GALERIE

A la cathédrale Saint-Paul de Londres, une personne située à un bout de son dôme et chuchotant contre sa paroi interne se fait entendre par son interlocuteur situé à l'opposé. Ce phénomène acoustique curieux a donné naissance au terme modes de galerie plus connu sous son appellation anglaise *whispering gallery modes*. En 1877, Lord Rayleigh dans ses travaux intitulés *The theory of sound* [11], a expliqué ce phénomène comme étant la propagation d'ondes acoustiques par successions de réflexions le long de la paroi interne du dôme. Cette explication a été transposée dans le domaine optique où les modes de galerie correspondent à la propagation guidée par réflexion totale interne de la lumière dans une micro-bille constituée d'un milieu diélectrique. Ce sont les travaux de Mie en 1908 [12] sur la diffusion de la lumière par une bille qui ont mis en évidence les modes de galerie dans le domaine optique. Ils apparaissent sous la forme de résonances fines dans le spectre de diffusion de la lumière par la bille. Les modes de galerie possèdent des propriétés qui suscitent beaucoup d'intérêts. Le but de ce chapitre est dans un premier temps de décrire la propagation de la lumière dans un résonateur à modes de galerie et de mettre en évidence certaines propriétés des modes de galerie. Pour ce faire, nous utiliserons dans un premier temps une approche d'optique géométrique afin d'expliquer la propagation de la lumière dans ces résonateurs par réflexion totale interne. Nous introduirons ensuite une approche d'optique ondulatoire qui s'avèrera plus complète que la précédente. Tout le long de ce chapitre, nous assimilerons nos résonateurs à des sphères constituées de milieux diélectriques. Nous présenterons ensuite les différentes méthodes de fabrication des résonateurs, les techniques de couplage de la lumière dans ces résonateurs et les méthodes permettant de les caractériser.

1.1.1/ APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Soit une sphère de rayon a et d'indice de réfraction N telle que représentée sur la figure 1.1 ; nous pouvons expliquer la propagation d'un rayon lumineux à l'intérieur de cette sphère par une approche d'optique géométrique à condition que le paramètre de taille défini par $x = 2\pi a/\lambda$ soit supérieur à 50. En d'autres termes, nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique où le rayon de la sphère a est beaucoup plus grand que la longueur d'onde λ . Prenons un rayon lumineux faisant

un angle d'incidence θ_i avec la normale à la surface de la sphère tel qu'illustré sur la figure 1.1, les lois de Descartes stipulent que lorsque l'angle i est supérieur à l'angle critique $\theta_{ic} = \arcsin(1/N)$, il y a réflexion totale. Compte tenu de la symétrie sphérique, tous les angles subséquents sont identiques et le rayon lumineux est piégé dans la sphère. Ce résultat s'applique à tous les rayons lumineux ayant un angle d'incidence compris entre $\pi/2$ et θ_{ic} . Ces derniers se propagent alors à l'intérieur de la sphère en décrivant une caustique interne de rayon $r_1 = a \sin(\theta_i)$ [(cercle en pointillé sur la figure (1.1)]. En d'autres termes, la lumière reste confinée entre la caustique et la paroi externe de la sphère. Si l'angle d'incidence du rayon lumineux est quasi-rasant ($\theta_i \approx \pi/2$), ce dernier parcourt approximativement un trajet équivalent au périmètre de la sphère $2\pi a$ en un tour. Il y a interférences constructives si le chemin optique parcouru en un tour par le rayon lumineux est un multiple entier de la longueur d'onde et interférences destructives dans le cas contraire. Cela se traduit par la condition de résonance qui s'écrit comme suit :

$$2\pi a \approx \ell \frac{\lambda}{N}, \quad (1.1)$$

où ℓ est un nombre entier qui correspond au nombre de cotés du polygone décrit par le rayon lumineux dans la sphère et λ la longueur d'onde dans le vide. En incluant le paramètre de taille x dans l'expression de la condition de résonance (1.1), nous pouvons réécrire celle-ci sous la forme suivante :

$$Nx = \frac{\pi}{\sin(\pi/\ell)} \approx \ell. \quad (1.2)$$

Cette relation permet la quantification des fréquences de résonance des modes de galerie par leur espacement $\Delta\nu_\ell$ qui est connu sous le nom d'"Intervalle Spectral Libre" (ISL) de cavité. Il s'exprime comme suit :

$$\Delta\nu_\ell = \frac{c}{2\pi Na}, \quad (1.3)$$

où $c = 3 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide. Il est à noter qu'une bonne caractérisation des modes de galerie prend également compte l'état de polarisation du champ électrique qui peut être transverse électrique (TE) ou transverse magnétique (TM). Ces deux paramètres sont pris en compte par l'approche ondulatoire qui est l'objet de la sous-section qui suit.

1.1.2/ APPROCHE ONDULATOIRE

La description des propriétés des modes de galerie et de la propagation d'une onde électromagnétique dans un résonateur à modes de galerie ne peut se résumer à une description géométrique. De nombreuses propriétés des modes de galerie relèvent du domaine de l'optique ondulatoire. Dans ce cadre, deux approches qui sont l'approximation de l'eikonale et le problème électromagnétique exact apportent plus de précisions sur les modes de galerie. Chacune d'elles est abordée ci-après.

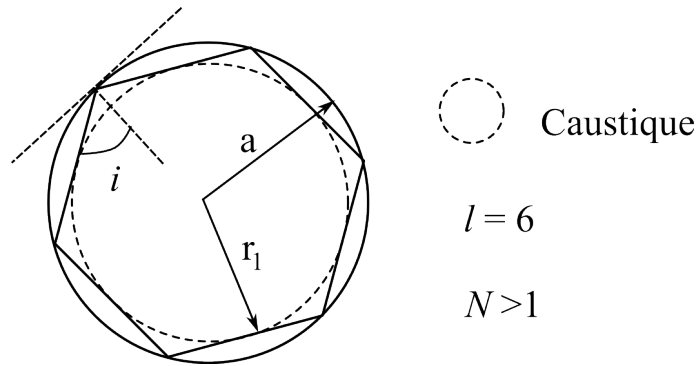


FIGURE 1.1 – Figure illustrant la propagation d'un rayon lumineux par réflexion totale interne à l'intérieur d'un résonateur à modes de galerie de rayon a en définissant une figure géométrique inscrite dans un cercle ici en pontillé que nous appelons "caustique" de rayon r_1 .

1.1.2.1/ APPROXIMATION DE L'EIKONALE

L'approximation de l'eikonale relie la phase S du champ électromagnétique $\Phi = \exp(iS)$ au vecteur d'onde k_0 dans le vide. Cette phase S a pour expression :

$$S(r) = \int_{r_0}^{r_1} k_0 N(r) ds, \quad (1.4)$$

où l'intégrale est prise le long des rayons r_0 et r_1 . Si on considère que la longueur d'onde reste courte à l'échelle des variations de l'indice $N(r)$, nous nous inscrivons dans le cadre de l'approximation de l'eikonale. Le champ scalaire $\Phi = \exp(iS)$ solution de l'équation de Helmholtz conduit alors à l'équation de l'eikonale à laquelle S obéit. Elle a pour expression :

$$(\nabla S)^2 = N^2(r) k_0^2. \quad (1.5)$$

Pour une onde se propageant dans une sphère parfaite, la symétrie du problème conduit à la conservation du moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \nabla S$ au cours du temps. L'angle azimuthal φ qui est une variable périodique du problème conduit également à la conservation du moment conjugué L_z projection du moment cinétique L sur l'axe polaire (Oz). Dans la suite du manuscrit, nous désignons le moment conjugué L_z , constante du mouvement, par M . Le module du moment cinétique $L = r_1 k_0 N$ est aussi une constante du mouvement. De ces propriétés découlent deux relations :

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = M \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{M^2}{\sin^2 \theta} = L^2. \quad (1.6)$$

Nos résonateurs étant assimilés à des sphères, l'équation de l'éikonale doit être écrite en coordonnées sphériques (voir figure 1.2), ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = N^2 k_0^2. \quad (1.7)$$

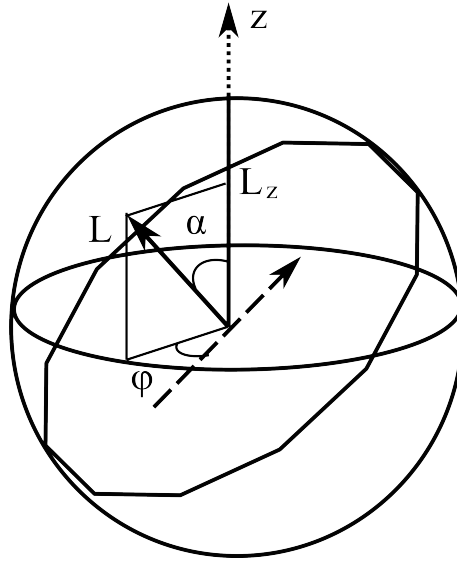


FIGURE 1.2 – Moment cinétique L associé à un mode de galerie et sa projection $L_z = M$ sur l'axe polaire.

Nous constatons que l'équation de l'éikonale en coordonnées sphériques est fonction de trois variables qui sont r , θ et φ . Nous pouvons donc lui appliquer la méthode de séparation des variables en introduisant $S_1(r)$, $S_2(\theta)$ et $S_3(\varphi)$, toutes définies par le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = N^2 k_0^2 \\ \left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{M^2}{r^2 \sin^2 \theta} = L^2 \\ \frac{dS_3}{d\varphi} = M \end{cases} \quad (1.8)$$

A partir de ces trois équations, il apparaît que les mouvements angulaires correspondent à une précession uniforme de φ et à une oscillation suivant θ qui est compris entre $\theta = \pi/2 - \alpha$ et $\theta = \pi/2 + \alpha$, où $\alpha = \arccos |L_z|/L$ est l'angle formé par le moment cinétique L et l'axe (Oz). Le mouvement radial correspond à son tour à une oscillation entre le rayon de la caustique intérieure $r_1 \equiv L/k_0 N$ et la surface de la sphère définie par $r = a$.

Le retour en phase de l'onde dépend du déphasage à chaque réflexion et donc de l'état de polarisation (TE/TM). Cette condition nous impose la prise en compte l'effet de Goos-Hänchen où la réflexion totale interne s'effectue en $a_{\text{eff}} = a + \delta_p$, où δ_p que nous appellerons épaisseur de peau dépend de la polarisation. La phase du coefficient de Fresnel défini par l'expression ci-dessous donne ce déphasage pour des sphères de grand rayon :

$$r_p = \frac{P \cos \theta_i - j \sqrt{N^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{P \cos \theta_i + j \sqrt{N^2 \sin^2 \theta_i - 1}} = e^{-2j\theta_p} \quad , \quad \text{avec} \quad \tan \theta_p = \frac{\sqrt{N^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{P \cos \theta_i}, \quad (1.9)$$

où P représente l'état de la polarisation ; il s'écrit :

$$P = \begin{cases} N, & \text{si le mode est polarisé TE} \\ 1/N, & \text{si le mode est polarisé TM} \end{cases}. \quad (1.10)$$

L'épaisseur de peau introduite précédemment se déduit de la relation ci-dessous :

$$Nk_0\delta_p \cos i = \pi/2 - \theta_p = \arctan\left(\frac{P \cos i}{\sqrt{N^2 \sin^2 i - 1}}\right). \quad (1.11)$$

Après un tour, les composantes de la phase sur les degrés de libertés r , θ et φ sont respectivement :

$$\begin{cases} \Delta S_1 = 2\pi f(Nk_0 a_{\text{eff}}/L) - 3\pi/2 \\ \Delta S_2 = 2\pi(L - |M|) - \pi \\ \Delta S_3 = 2\pi|M| \end{cases}, \quad (1.12)$$

où $f(u) = \sqrt{u^2 - 1} - \arccos(1/u)$.

Un mode de galerie est soumis à un retour en phase après un tour, et par conséquent, chaque composante du déphasage ΔS_i doit être un multiple de 2π . Il en résulte la quantification du moment cinétique par deux nombres entiers dont l'un est angulaire ℓ et l'autre azimutal m . Ils sont obtenus à partir de ΔS_2 et ΔS_3 et ont pour expression :

$$\begin{cases} M = m \\ L = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \approx \ell + 1/2 \end{cases}. \quad (1.13)$$

Le nombre entier m est compris entre $-\ell$ et ℓ dans la mesure où il correspond à la projection du moment cinétique sur l'axe Oz . La condition de retour en phase dans la direction radiale nécessite l'introduction de l'ordre radial n par le biais de la variable d'action J qui a pour expression :

$$J \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{a_{\text{eff}}} \sqrt{(Nk_0)^2 - \frac{L^2}{r^2}} dr = \frac{L}{\pi} f\left(\frac{Nk_0 a_{\text{eff}}}{L}\right) = n - \frac{1}{4}. \quad (1.14)$$

L'indice radial n introduit précédemment correspond au nombre d'oscillations entre les extrêmes r_1 et a_{eff} et prend les valeurs $n = 1, 2, 3, \dots$. La prise en compte de l'effet Goss-Hänchen impose à r_1 d'être compris entre a_{eff}/N et a_{eff} car, à la réflexion totale, $\sin \theta_{ic} = 1/N$. Au regard de l'expression (1.14), il apparaît clairement que la diminution de L entraîne l'augmentation de la variable d'action radiale J . Par conséquent, les modes ayant un grand n sont ceux qui pénétreront le plus profondément dans la sphère. En prenant en compte le paramètre de taille x_{eff} , nous déduisons un encadrement du nombre quantique ℓ qui est :

$$x_{\text{eff}} < \ell + \frac{1}{2} < Nx_{\text{eff}}. \quad (1.15)$$

Cette expression permet à son tour de déduire un encadrement de l'ordre radial n . En effet, la condition (1.15) peut s'écrire sous la forme $1 < Nk_0a_{\text{eff}}/L < N$; puisque la fonction f introduite dans l'équation (1.12) est croissante et $f(1) = 0$, alors l'encadrement de l'indice radial n est :

$$0 < n - \frac{1}{4} < \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{N^2 - 1} - \arccos \frac{1}{N} \right) \quad (1.16)$$

A travers les trois paramètres quantiques n, m, ℓ ainsi que leurs domaines de variation, nous pouvons décrire la position d'une résonance en fonction de l'indice de réfraction et du diamètre du résonateur.

1.1.2.2/ PROBLÈME ÉLECTROMAGNÉTIQUE EXACT

Comparée à l'approximation de l'eikonale et à l'approche géométrique, l'approche électromagnétique présente de nombreux avantages. Elle permet de remonter à des paramètres clés des modes de galerie tels que la position des résonances, le volume du mode etc. Les modes de galerie auxquels on applique les conditions aux limites pour les champs $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ à l'interface sphère/air sont solutions de l'équation de Maxwell. Il existe dans la littérature de nombreux ouvrages qui traitent de ce problème à symétrie sphérique [13, 14]. Parmi eux, la méthode de Hansen décrite dans le Stratton [15] permet de calculer le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. De manière générale, le champ électrique de fréquence angulaire ω obéit à l'équation de Helmholtz vectorielle donnée par la relation ci-dessous :

$$\Delta \mathbf{E} + N^2(r)k_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta \mathbf{E} = 0. \quad (1.17)$$

Dans cette équation, $k_0 = \omega/c$ représente le vecteur d'onde dans le vide. L'indice $N(r)$ du résonateur vaut N à l'intérieur de la sphère ($r < a$) et 1 à l'extérieur ($r > a$). La méthode de Hansen stipule que pour un milieu homogène, il est possible d'obtenir les solutions vectorielles de l'équation de Helmholtz scalaire exprimée ci-dessous.

$$\Delta \phi(r) + N(r)k_0^2 \phi(r) = 0. \quad (1.18)$$

Ces solutions en coordonnées sphériques sont de la forme :

$$\phi(r) = \frac{f_\ell(r)}{r} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.19)$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire dans la direction $\mathbf{r}$, Y_ℓ^m l'harmonique sphérique, ℓ le moment angulaire orbital et m les valeurs de ses projections. Il convient d'exprimer les solutions de l'équation de Helmholtz scalaire pour les champs TE et TM ; elles sont :

$$\text{Mode TE} \begin{cases} \mathbf{E}_{\ell m}^{TE}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{f_\ell(r)}{k_0 r} \mathbf{X}_\ell^m \\ \mathbf{B}_{\ell m}^{TE}(\mathbf{r}) = -\frac{iE_0}{c} \left(\frac{f'_\ell(r)}{k_0^2 r} \mathbf{Y}_\ell^m + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f_\ell(r)}{k_0^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m \right) \end{cases}, \quad (1.20)$$

$$\text{Mode TM} \begin{cases} \mathbf{E}_{\ell m}^{TE}(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{N} \left(\frac{f'_\ell(r)}{k_0^2 r} \mathbf{Y}_\ell^m + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f_\ell(r)}{k_0^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m \right), \\ \mathbf{B}_{\ell m}^{TE}(\mathbf{r}) = -i \frac{E_0}{c} \frac{f_\ell(r)}{k_0 r} \mathbf{X}_\ell^m \end{cases} \quad (1.21)$$

où X_ℓ^m , Y_ℓ^m et Z_ℓ^m sont les 3 fonctions harmoniques sphériques vectorielles décrites par J. Jackson [14] et définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(m)} = \frac{\mathbf{grad} Y_\ell^m \wedge \mathbf{r}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} & : \text{noté } \mathbf{X}_\ell^m \\ \mathbf{Y}_{\ell m}^{(e)} = \frac{r \mathbf{grad} Y_\ell^m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} & : \text{noté } \mathbf{Y}_\ell^m \\ \mathbf{Y}_{\ell m}^{(o)} = Y_\ell^m \mathbf{r} & : \text{noté } \mathbf{Z}_\ell^m \end{cases} \quad (1.22)$$

Dans les équations (1.20), (1.21) et (1.22), $f_\ell(r)$ est la fonction radiale qui traduit la dépendance radiale du champ. Elle satisfait l'équation radiale ci dessous :

$$f''(r) + \left(N^2(r) k_0^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f(r) = 0. \quad (1.23)$$

C'est une équation de Ricatti-Bessel. La fonction $f_\ell(r)$ est telle que :

$$f_\ell(r) = \begin{cases} f_\ell(r) = \psi_\ell(Nk_0)r & : \text{pour } r < a \\ f_\ell(r) = \alpha\psi(k_0r) + \beta\chi_\ell(k_0r) & : \text{pour } r > a \end{cases} \quad (1.24)$$

où ψ_ℓ est la solution régulière de l'équation telle que $\psi_\ell(0) = 0$ et χ_ℓ la solution irrégulière telle que $\chi_\ell(\rho) \rightarrow -\infty$ lorsque $\rho \rightarrow 0$. Elles ont toutes deux pour expression :

$$\begin{cases} \psi_l(\rho) = \rho j_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{l+1/2}(\rho) \\ \chi_l(\rho) = \rho N_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{l+1/2}(\rho) \end{cases} \quad (1.25)$$

où J_ν et j_l sont les fonctions de Bessel (de première espèce) cylindrique et sphérique, et N_ν et n_l les fonctions de Neumann (ou de Bessel de seconde espèce) cylindrique et sphérique.

L'équation radiale (1.23) est identique à l'équation de Schrödinger (1.26) avec un pseudo-potentiel V_{eff} qui dépend de l'énergie $E = k_0^2$.

$$-f''(r) + V_{\text{eff}}(r)f(r) = Ef(r). \quad (1.26)$$

Cette dépendance est due à la discontinuité de l'indice de réfraction à la surface de la sphère à laquelle s'ajoute un potentiel centrifuge défini par la relation (1.27) et illustré sur la figure 1.3.

$$V_{\text{eff}}(r) = k_0^2 \left[(1 - N^2(r)) \right] + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (1.27)$$

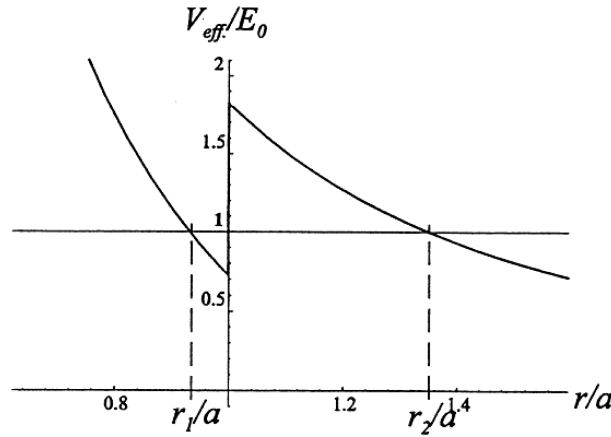


FIGURE 1.3 – Représentation du profil du potentiel d'une sphère isolée pour $n = 1$ et $x = 74.464$, d'après [16].

Cette dernière met en évidence le caractère évanescent de l'onde optique. Les figures [1.4(a),(b)] mettent en évidence le rapport entre le nombre quantique n qui correspond au nombre d'oscillations entre la caustique interne et la surface de la sphère dans le cadre de l'approche eikonale et le nombre de lobes de la distribution radiale du champ dans la sphère. Il apparaît clairement que les deux sont identiques. Nous constatons également sur ces figures qu'à l'intérieur de la barrière de potentiel, le champ est évanescent et au delà, il est radiatif avec perte d'énergie. Ces observations permettent de conclure que :

1. Les modes de galerie sont des modes à fuite.
2. Les modes les plus confinés qui correspondent à la combinaison n petit et l maximum ont une partie radiative très faible, par conséquent, les facteurs de qualité de ces modes sont très élevés.

1.1.2.3/ POSITION DES RÉSONANCES

Les composantes tangentielles du champ à la surface de la sphère sont continues. Cela implique que les solutions régulière $\psi_\ell(Nk_0r)$ et irrégulière $\chi_\ell(Nk_0r)$ obéissent aux relations ci-dessous :

$$\begin{cases} \psi_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi_\ell(k_0a) + \beta\chi_\ell(k_0a) \\ P\psi'_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi'_\ell(k_0a) + \beta\chi'_\ell(k_0a) \end{cases}, \quad (1.28)$$

où $P = N$ pour les modes TE et $P = N^{-1}$ pour les modes TM. En supposant que la partie radiative externe du champ est nulle c'est à dire $\alpha = 0$, la condition de résonance en fonction du paramètre de taille devient :

$$P \frac{\psi'(Nx)}{\psi(Nx)} = \frac{\chi'_\ell(x)}{\chi_\ell(x)} \quad (1.29)$$

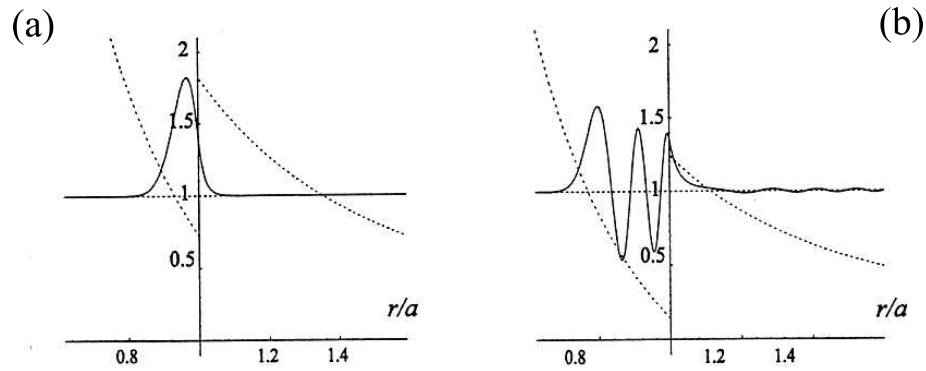


FIGURE 1.4 – Ces deux figures sont deux exemples de distributions radiales du champ pour deux paramètres de taille x différents [16]. **[(a)]** $N = 1.45$, $n = 1$, $l = 100$, $x = 74.4064$, et **[(b)]** $N = 1.45$, $n = 5$, $l = 100$, $x = 90.0955$.

Les travaux de Lam [17] ou de Schiller [18] donnent les positions des résonances pour une valeur élevée de ℓ dans une sphère d'indice N :

$$Nx_{\ell,n} = \nu + 2^{-1/3} \alpha_n \nu^{1/3} - \frac{P}{(N^2 - 1)^{1/2}} + \left(\frac{3}{10} 2^{-2/3} \right) \alpha_n^2 \nu^{-1/3} - \frac{2^{-1/3} P (N^2 - 2P^2/3)}{(N^2 - 1)^{3/2}} \alpha_n \nu^{-2/3} + O(\nu^{-1}). \quad (1.30)$$

Dans cette expression, $\nu = (\ell + 1/2)$ et α_n sont les racines nièmes de la fonction d'Airy $A_i(-z)$. A partir de cette expression, il devient facile de déduire l'expression des écarts fréquentiels entre modes d'une même famille que nous définissons par des modes possédant un nombre quantique ℓ différent mais un ordre radial n identique. Cet écart $\Delta \nu_{n,\ell}^{\Delta \ell}$ que nous appellerons "Pseudo Intervalle Spectral Libre" est donné par la relation suivante :

$$\Delta \nu_{n,\ell}^{\Delta \ell} = c \frac{x_{n,\ell+1} - x_{n,\ell}}{2\pi} = \frac{c}{2\pi Na} \left(1 + \alpha_n \left(\frac{\ell + 1/2}{2} \right)^{1/3} \left(1 - \left(1 + \frac{\ell}{\ell + 1/2} \right)^{1/3} \right) \right) \quad (1.31)$$

Ce "Pseudo Intervalle Spectral Libre" devient égal à l'expression (1.32) pour des modes ayant de grandes valeurs de ℓ :

$$\Delta \nu_{n,\ell}^{\Delta \ell} \approx \frac{c}{2\pi Na}. \quad (1.32)$$

Si on considère une famille de modes à n et ℓ fixés, l'écart entre deux modes TE et TM peut s'exprimer sous la forme ci-dessous :

$$\Delta \nu_{n,\ell}^{\text{TE,TM}} \approx \frac{c}{2\pi Na} \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N}. \quad (1.33)$$

Dans la sous-section qui suit, nous introduisons la notion de facteur de qualité.

1.1.2.4/ FACTEUR DE QUALITÉ

Parmi les paramètres permettant de caractériser les résonateurs à modes de galerie, le facteur de qualité que nous notons Q est sans aucun doute l'un des plus importants. En effet, comme nous le verrons plus loin, les puissances seuil des phénomènes non-linéaires explorés dans ce manuscrit lui sont inversement proportionnelles. En d'autres termes, plus il est élevé, moins la puissance laser nécessaire à l'excitation des effets non-linéaires est importante. Le facteur de qualité indique le temps de vie τ_{ph} des photons dans la cavité. D'un point de vue énergétique, il correspond au rapport à 2π près entre l'énergie moyenne E dans un mode et l'énergie dissipée ΔE dans ce même mode sur une période d'oscillation.

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \quad (1.34)$$

Pour un mode résonant ayant une largeur de raie $\Delta\omega$ à la fréquence angulaire ω_0 , le facteur de qualité s'exprime comme suit :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}, \quad (1.35)$$

où $\Delta\lambda_0$ est la largeur de raie en longueur d'onde et λ_0 la longueur d'onde du laser. Pour un résonateur parfait, il n'y aurait pas de dissipation d'énergie ; le facteur de qualité tendrait donc vers l'infini. En réalité, il existe des pertes qui dégradent le facteur de qualité. Ces pertes sont la somme de toutes les différentes pertes contenues dans les termes qui définissent le facteur de qualité :

$$Q_0^{-1} = Q_{diff}^{-1} + Q_{att}^{-1} + Q_{surf}^{-1}. \quad (1.36)$$

Dans cette expression, nous distinguons 3 termes de pertes. Il s'agit de Q_{diff} qui traduit des pertes par diffusion, Q_{att} qui traduit des pertes par absorption et Q_{surf} qui traduit des pertes de surface dues aux irrégularités de surface du résonateur. Nous détaillons dans les lignes qui suivent chacun de ces termes.

Pertes par diffraction Q_{diff} : Comme expliqué dans l'approche ondulatoire, le champ devient radiatif en dehors de la barrière de potentiel et génère une perte d'énergie du mode par effet tunnel qui affecte le facteur de qualité. Ces pertes sont analogues aux pertes par transmission d'une cavité Fabry-Pérot. Ces pertes et les facteurs de qualité qui en résultent, peuvent être obtenus en comparant la partie du champ oscillant à l'extérieur de la sphère au champ intérieur [16]. Il s'exprime comme suit :

$$Q_{diff}^{-1} \approx x e^{2(l+1/2)g\left(\frac{x}{l+1/2}\right)}, \quad (1.37)$$

où x est le paramètre de taille et $g(y) = -f(y)$. Il apparaît dans l'équation (1.37) que Q_{diff} est légèrement plus élevé pour les modes TE comparé aux modes TM. Pour nos résonateurs qui sont de taille millimétrique, la contribution des pertes par diffraction sur le facteur de qualité global est négligeable. Ceci n'est cependant pas le cas pour des résonateurs de tailles inférieures à la dizaine de micromètre. A titre d'exemple, on estime à 10^{40} le facteur de qualité en diffraction Q_{diff} d'un résonateur sphérique en silice de $50 \mu m$ de diamètre pour le mode le plus confiné ($n = 1$) à la longueur d'onde de 810 nm [19].

On estime aussi à 10^{10} le facteur de qualité Q_{diff} d'un résonateur sphérique de $15 \mu\text{m}$ de diamètre pour le mode $\ell = 75$ et $n = 1$ [16].

Pertes par absorption ou diffusion de volume Q_{abs} : Ces pertes sont dues au matériau utilisé. Elles ont plusieurs origines et sont issues de différents processus de diffusion parmi lesquels :

1. **La diffusion Rayleigh** : qui est due à des centres de diffusion introduits par les fluctuations de densité du résonateur lorsque la lumière se propage. Dans ce cas ci, les diffuseurs sont de taille comparable ou supérieure à la longueur d'onde.
2. **La diffusion Brillouin** : qui est une diffusion inélastique due à l'interaction entre la lumière incidente et une onde acoustique créée par des phonons acoustiques présents dans le résonateur.
3. **La diffusion Raman** : qui est une diffusion inélastique due à l'interaction entre la lumière incidente et les molécules qui constituent le résonateur.

Pour un cristal parfait la diffusion Raman sera prépondérante et la diffusion Rayleigh négligeable [20]. Pour un cristal qui contient des impuretés comme dans notre cas, la diffusion Rayleigh sera prépondérante à basse température et la diffusion Brillouin à température ambiante [21]. Le facteur de qualité relatif aux pertes par absorption a pour expression [16] :

$$Q_{\text{att}} \approx \frac{2\pi N}{\lambda} \frac{4.3 \times 10^3}{\alpha}, \quad (1.38)$$

où α est le coefficient d'atténuation en dB/km représente les différentes diffusions citées précédemment, N est l'indice du matériau et λ est la longueur d'onde.

Pertes par diffusion de surface Q_{surf} : Ces pertes sont liées à la rugosité introduites sur la surface du résonateur lors de la fabrication. Cette rugosité provoque une diffusion qui dégrade le facteur de qualité. Il existe dans la littérature de nombreux articles qui traitent des pertes de diffusion en surface. Dans leurs travaux relatifs à la fabrication d'une microsphère par fusion d'une tige de verre silicate [22], Vernooy et *al.* ont mis en évidence des défauts de surface de l'ordre de 2 nm. Ces défauts limitent le facteur de qualité à des valeurs comprises entre 10^{11} et 10^{12} dans l'infrarouge. Une expression du facteur de qualité Q_{surf} est donnée par la relation suivante :

$$Q_{\text{surf}} = \frac{3\lambda^2 l^{10/3}}{16\pi^5 \sigma^2 N^2 n^{5/2}}, \quad (1.39)$$

où σ est l'inhomogénéité de surface [23].

En réalité, l'exploitation d'un résonateur nécessite l'excitation des modes de galerie par le biais d'un couplage qui permet d'injecter et d'extraire la lumière dans le résonateur. La conséquence directe est qu'à l'expression (1.36), nous devons ajouter la contribution du couplage Q_e au facteur de qualité totale Q_{tot} qui devient :

$$\frac{1}{Q_{\text{tot}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_e}. \quad (1.40)$$

A travers cette équation, nous constatons que le couplage joue un rôle important sur la valeur du facteur de qualité totale Q_{tot} . De ce fait, nous distinguons 3 régimes de couplage qui sont fonction des valeurs de Q_e et Q_0 .

- **Sous couplage** : il est caractérisé par un facteur de qualité intrinsèque Q_0 inférieur au facteur de qualité dû au couplage Q_e ; ($Q_0 < Q_e$).
- **Couplage critique** : il est caractérisé par un facteur de qualité intrinsèque Q_0 égal au facteur de qualité dû au couplage Q_e ; ($Q_0 = Q_e$).
- **Sur couplage** : il est caractérisé par un facteur de qualité intrinsèque Q_0 supérieur au facteur de qualité dû au couplage Q_e ; ($Q_0 > Q_e$).

1.1.2.5/ FINESSE

Un paramètre important pour caractériser un résonateur est sa finesse que nous notons $\mathcal{F}$. Il correspond au rapport entre l'intervalle spectral libre ISL et la largeur à mi-hauteur d'une résonance $\Delta\omega$.

$$\mathcal{F} \equiv \frac{ISL}{\Delta\omega} = \frac{ISL \times Q}{\omega}. \quad (1.41)$$

L'ordre de grandeur de $\mathcal{F}$ est de 10^6 pour des microrésonateurs ayant un facteur de qualité de 10^9 , et 10^4 pour des résonateurs de taille millimétrique avec le même facteur de qualité.

1.1.2.6/ VOLUME DU MODE

Le volume du mode d'un résonateur joue un rôle très important dans les interactions non-linéaires entre lumière et résonateur. Une bonne approximation de ce volume pour une géométrie sphérique est :

$$V = 3.4 \times \pi^{3/2} \times \left(\frac{\lambda}{2\pi N} \right) \ell^{11/6} \sqrt{\ell - m + 1}. \quad (1.42)$$

Nous clôturons cette section par la figure 1.5 qui contient quelques photographies de résonateurs à modes de galerie de formes différentes et faits de différents matériaux.

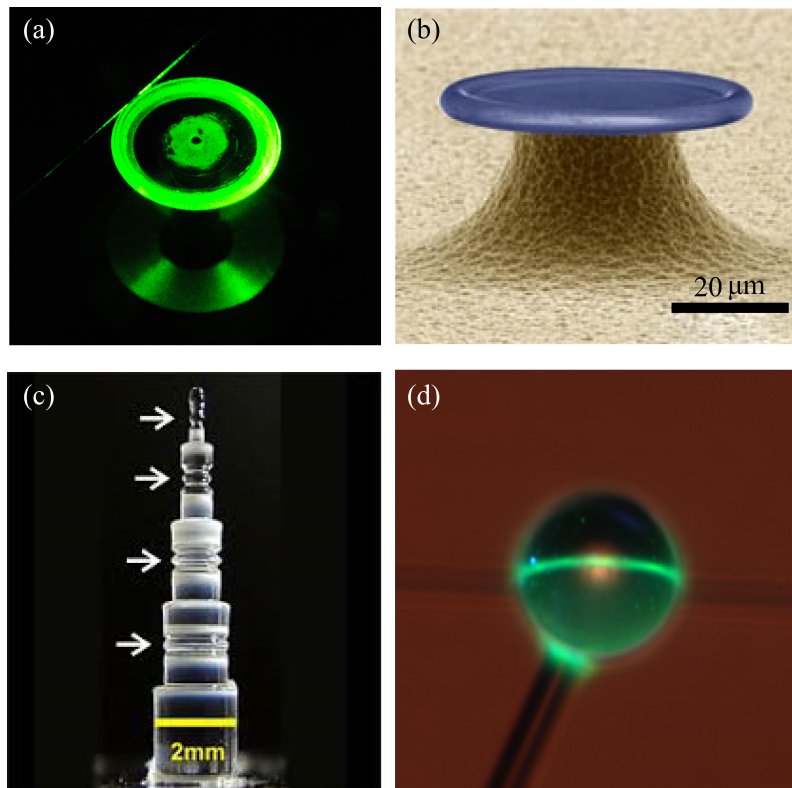


FIGURE 1.5 – Photographies de résonateurs à modes de galerie de formes différentes et faits avec différents matériaux. **[(a)]** Résonateur millimétrique en fluorure de magnésium, sous forme de disque ayant un facteur de qualité $Q > 10^9$ [24]. **[(b)]** Résonateur micro-métrique de forme toroïdale, sur puce silicium avec un facteur de qualité $Q > 10^8$ [25]. **[(c)]** résonateur sous forme de micro-barre en quartz fondu avec un facteur de qualité $Q = 5 \times 10^8$ [26]. **[(d)]** Résonateur sphérique micrométrique extrait de [27].

1.2/ FABRICATION DES RÉSONATEURS À MODES DE GALERIE

1.2.1/ FABRICATION PAR FUSION

La fabrication de résonateurs à modes de galerie par fusion est essentiellement adaptée à la fabrication de résonateurs en matériaux amorphes. Il existe plusieurs procédés que nous présentons ci-après.

1.2.1.1/ FUSION PAR LASER

Elle est utilisée par de nombreuses équipes [1, 16, 19, 22, 28] et a permis l'obtention de facteurs de qualité au delà de 10^9 pour des résonateurs en silice. Le principe de cette méthode est basée sur la fusion d'une ébauche par le biais d'un faisceau laser CO_2 ayant une puissance maximale comprise entre 10 et 35 W et dont la puissance est ajustable. Pour fabriquer un résonateur en silice, une tige en silice ayant un diamètre défini par la taille du résonateur voulu est placée au foyer de deux lentilles. Ces dernières font converger deux faisceaux de même puissance et se propageant en sens opposé sur une zone bien précise de la fibre. Elle est alors chauffée au delà de sa température de fusion

et une forme sphérique apparaît sous l'effet des contraintes de tension superficielle. Cette méthode permet de démontrer des résonateurs de taille millimétrique ayant des facteurs de qualité supérieur à $Q = 2 \times 10^8$.

1.2.1.2/ FUSION PAR MICROCHALUMEAU

Cette technique de fabrication est manuelle et a été introduite afin de parer à la difficulté et à la lenteur d'alignement du faisceau du laser CO_2 lors de la fabrication par fusion laser. Dans cette méthode de fabrication, le laser a été remplacé par la flamme d'un microchalumeau contenant un mélange d'oxygène, de butane et de propane. La tige en silice d'environ 1 mm de diamètre est placée au dessus d'une flamme avec une légère inclinaison. La bille se forme à son extrémité en prenant l'orientation du gaz. Une des faiblesses de cette méthode réside dans les ellipticités résiduelles pouvant atteindre 2% et qui sont plus importantes qu'avec le procédé de fusion par laser CO_2 .

1.2.1.3/ FUSION PAR ARC ÉLECTRIQUE

Elle est basée sur l'utilisation d'un arc électrique produit par une soudeuse à fibres optiques programmable pour faire fondre une ébauche constituée d'un matériau qui peut par exemple être de la silice. Durant la fabrication, une fois au delà de la température de fusion de l'ébauche, les forces de tension superficielles donnent une forme sphéroïdale au matériau. Cette méthode a par exemple été utilisée afin de fabriquer des microsphères en silice de diamètre compris entre 60 et 400 μm [19]. Au delà de ces diamètres, la fusion par arc s'est avérée inadaptée car les sphères obtenues présentaient des défauts apparents sous microscope.

1.2.2/ FABRICATION PAR TECHNIQUE DE LITHOGRAPHIE

Cette technique est indiquée pour la fabrication de résonateurs intégrés en silicium, nitrure de silicium et autres. La fabrication du résonateur se fait par technique de lithographie. Elle a été utilisée par de nombreuses équipes de recherche. [29, 30, 31].

1.2.3/ FABRICATION PAR POLISSAGE

Cette technique est indiquée pour la fabrication de résonateurs cristallins. Elle a été introduite en 1961 par Garrett et *al.* [32] pour la fabrication d'un résonateur en $\text{CaF}_2 : \text{Sm}^{++}$ ayant un diamètre de 2 mm. Elle a ensuite été utilisée et continue à l'être par de nombreuses équipes [2, 33], y compris la nôtre afin de polir des résonateurs cristallins. Nous savons qu'un des paramètres critiques limitant les facteurs de qualité d'un résonateur est son état de surface (rugosité). Le polissage est très intéressant dans la mesure où il permet de fabriquer des résonateurs avec des états de surface présentant une rugosité en dessous du nm et des facteurs de qualité au delà de 10^9 . En 2004, Savchenkov et *al.* ont fabriqué plusieurs résonateurs de diamètre compris entre 4 et 7 mm et d'épaisseur compris entre 0.5 et 1 mm [2]. Parmi ces résonateurs figurent un en fluorure de calcium (CaF_2) présentant un facteur de qualité supérieur à 2×10^{10} , un en tantalate de lithium (LiTaO_3) et un en niobate de lithium (LiNbO_3) présentant chacun un facteur de qualité au

delà de 2×10^8 puis un en saphir (Al_2O_3) présentant un facteur de qualité 2×10^9 à $1.319 \mu\text{m}$. En 2006, Grudin et *al.* [3] ont démontré un résonateur en fluorure de calcium de 1.5 mm de diamètre ayant un facteur de qualité de 6.3×10^{10} à 1064 nm. En 2007, en combinant polissage et recuit, Savchenkov et *al.* ont démontré un résonateur en fluorure de calcium possédant un facteur de qualité record supérieur à 10^{11} à 1550 nm [34]. Au regard de ces performances, la fabrication de résonateurs par polissage est une méthode très efficace et adaptée à nos besoins.

En effet, le but de cette thèse est d'explorer les effets non-linéaires dans les résonateurs à modes de galerie cristallins afin de générer des micro-ondes de fréquences comprises entre 5 et 20 GHz. Ce besoin nécessite donc l'utilisation de résonateurs ayant un ISL compris entre 5 et 20 GHz c'est à dire des résonateurs de taille millimétrique. Notre choix s'est porté sur des résonateurs de 12 mm de diamètre, soit un ISL de 6 GHz. Nous souhaitons également disposer de résonateurs dont les facteurs de qualité ne se dégradent pas sous l'effet de la vapeur d'eau présente dans l'atmosphère comme c'est le cas pour les résonateurs en silice [22]. Notre choix s'est porté sur les cristaux fluorés qui, en plus de permettre l'obtention de facteurs de qualité élevés, présentent une transparence allant de l'ultra-violet au moyen infra-rouge. De surcroît, certains de ces cristaux (comme le fluorure de calcium) présentent une dispersion normale tandis que d'autres (comme le fluorure de magnésium) présentent une dispersion anormale à 1550 nm. Les cristaux fluorés donnent donc la possibilité d'explorer les effets non-linéaires dans les deux régimes de dispersion. Il existe également plusieurs formes de résonateurs ; nous avons opté pour une forme en disque illustrée par la figure 1.6 afin de bénéficier d'un fort confinement de la lumière dans une faible zone. Au delà de ces propriétés générales, chaque cristal fluoré poli ou abordé dans le cadre de cette thèse présente des propriétés particulières que nous abordons dans la section 2.5. Pour ce qui est du polissage, il se fait en 4 étapes :

1. La première étape consiste à disposer d'une machine de polissage qui empêche ou limite fortement la transmission des vibrations au résonateur. Dans ce cadre, nous disposons à l'Institut Femto-St d'un moteur *air-spindle* représenté sur la figure 1.7 qui est un système de mise en rotation à très haute stabilité alimenté en air et qui a l'avantage de ne pas avoir de frottements mécaniques entre le rotor et le stator. Cela permet d'éviter les pertes par échauffement, l'usure des balais ainsi que le bruit. Un support a été rajouté au moteur afin de maintenir le disque lors du polissage.
2. La seconde étape consiste à fixer le disque sur un nouveau support en aluminium duquel il ne se détache pas lors du polissage. Pour ce faire, un support en aluminium cylindrique comportant deux parties a été retenu. La première partie du support a 3.5 cm de longueur et 4 mm de diamètre et la seconde partie est un "téton" d'environ 1 mm de longueur et 0.85 mm de diamètre. Sur ce téton est appliquée une colle thermique de marque *Aremco*. Le résonateur et le support sont ensuite placés dans un boîtier fait par nos soins qui permet de coller de manière orthogonale les deux éléments. L'ensemble est ensuite placé dans un four et chauffé à environ 150 degrés celsius pendant environ 6 heures de temps. Après refroidissement, le résonateur est opérationnel pour le polissage. Le résonateur et le support visibles sur la figure 1.7.
3. La troisième étape correspond au polissage qui se fait en 3 sous-étapes :
 1. **Mise en forme des biseaux** : Cette étape consiste à roder le résonateur afin

de former des biseaux en forme de "V" où la lumière sera piégée. Les biseaux, illustrés sur la figure 1.6, sont créés en attaquant successivement la face gauche et droite du résonateur sous un angle compris entre 10 et 60 degrés grâce à une meule. Sur cette meule est appliquée un abrasif, dans notre cas, du carbure de calcium que nous mélangeons à de l'huile et dont les grains ont des diamètres respectifs de $29\text{ }\mu\text{m}$, $9\text{ }\mu\text{m}$ et $3\text{ }\mu\text{m}$ pour la première, deuxième et troisième étape du rodage. La durée de chaque étape de rodage est dictée par l'indice de dureté du résonateur à polir. Cet indice est encore connu sous le nom d'indice de Mohs. La phase de rodage est représenté sur la figure 1.8.

2. **Doucissage de la surface rodée** : Cette étape consiste à adoucir la zone rodée du résonateur avec un support en feutre synthétique doux, adapté à la finition plane délicate des verres et des cristaux. Elle permet également de rattraper les éclats qui font leur apparition lors du rodage. Pour ce faire, nous appliquons sur le support de doucissage de la suspension diamantée qui contient des grains de $6\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre mélangée à de la pâte diamantée contenant des grains de $6\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre. Le support est ensuite amené au contact du résonateur qui tourne à la vitesse de rotation du moteur qui est d'environ 1200 tours/min durant deux à trois heures de temps environ. Cette étape est reproduite avec de la suspension diamantée qui contient des grains de $3\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre mélangée à de la pâte diamantée contenant des grains de $3\text{ }\mu\text{m}$ puis de la suspension diamantée de $1\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre mélangé à de la pâte diamantée contenant des grains de $1\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre. Cette étape nous permet généralement de porter le facteur de qualité du résonateur à 10^7 . La phase de doucissage est représentée sur la figure 1.9.
3. **Polissage du résonateur** : Cette étape est celle qui permet d'obtenir des facteurs de qualité supérieurs à 10^9 et plus. Grâce à elle, le résonateur présente une rugosité d'environ 2 nm. Elle consiste à polir la face doucie du résonateur avec un mélange de suspension diamantée et de pâte diamantée de manière dégressive. Un premier mélange avec des grains ayant $1\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre est appliqué sur le support en feutre synthétique. Après polissage pendant un certain temps, le résonateur est testé et le facteur de qualité obtenu est souvent de 10^8 . Le processus est repris une seconde fois avec un mélange avec des grains de $1/4\text{ }\mu\text{m}$. Le facteur de qualité du résonateur est désormais de 10^9 . La phase de polissage est représentée sur la figure 1.9.
4. **Nettoyage** : Cette étape est très importante ; elle intervient après chacune des étapes et sous-étapes définies précédemment. En effet après chacune d'elles, il faut nettoyer le résonateur afin de lui enlever toute trace d'abrasif, de poussières et de pollutions car ces dernières provoquent une dégradation du facteur de qualité. Pour ce faire, nous commençons par souffler le résonateur avec une bombe d'air comprimé purifié afin d'éliminer les poussières. Nous utilisons ensuite un papier optique doux et non pelucheux que nous imbibons dans un premier temps d'éthanol pour nettoyer le résonateur. Nous effectuons la même opération avec un papier optique doux et non pelucheux imbibé cette fois d'isopropanol. Chacune des 3 opérations est accompagnée d'une inspection soigneuse de l'état de surface du résonateur au microscope. La procédure de nettoyage est reproduite plusieurs fois avant de passer à la caractérisation du résonateur.

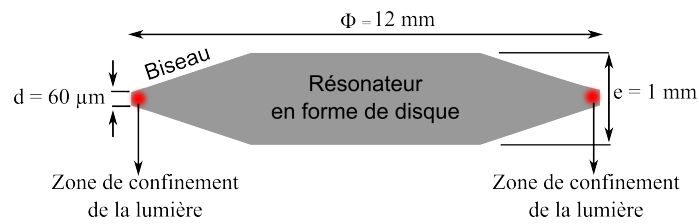


FIGURE 1.6 – Illustration et dimensions de nos résonateurs à modes de galerie en forme de disque.

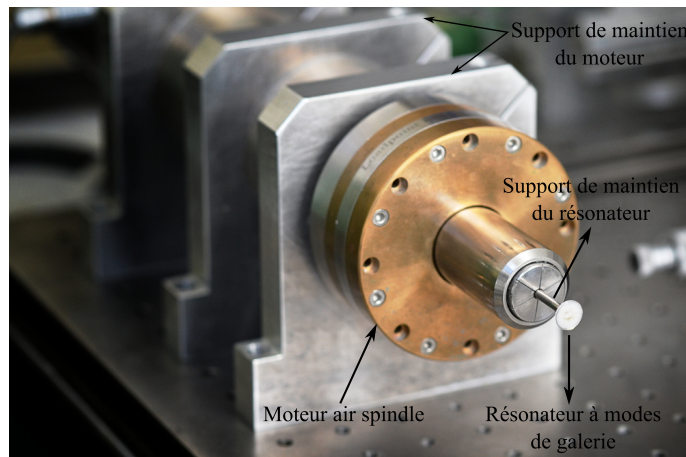


FIGURE 1.7 – Photographie du moteur *air-spindle* utilisé dans le cadre de cette thèse pour la fabrication de résonateurs à modes de galerie.

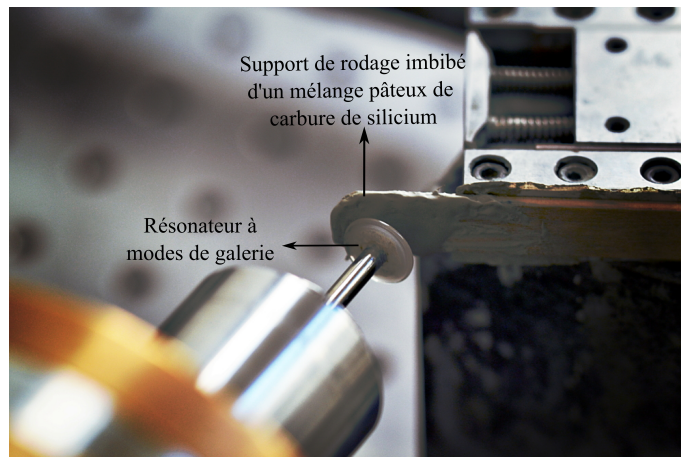


FIGURE 1.8 – Photographie d'un résonateur à modes de galerie en phase de rodage par un support imbibé d'une solution pâteuse de carbure de silicium. Le disque est attaqué sous un angle compris entre 10 et 60 degrés afin de former des biseaux.

Après chacune des étapes décrites précédemment, il faut caractériser les résonateurs en déterminant leur facteur de qualité. Cela se fait par excitation des modes de galerie en injectant de la lumière dans le résonateur. De nombreuses méthodes que nous appelons techniques de couplage ont été mises en place à ce propos. Elles sont caractérisées par de nombreuses propriétés qui les différencient, dont entre autres la facilité de mise en

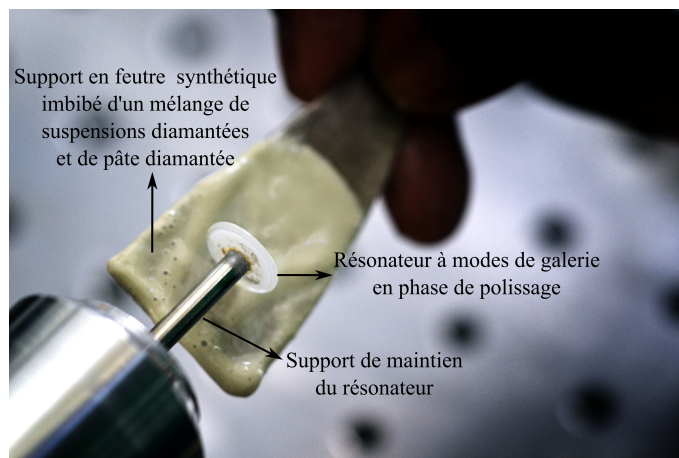


FIGURE 1.9 – Photographie d'un résonateur à modes de galerie en phase de doucissage/polissage par un feutre synthétique imbibé d'un mélange de suspension diamantée et de pâte diamantée.

place, le taux de couplage, la stabilité, la robustesse etc. Le but de la section qui suit est de présenter ces techniques dans le détail.

1.3/ COUPLAGE DE LA LUMIÈRE DANS LES RÉSONATEURS À MODES DE GALERIE

1.3.1/ LES RÉGIMES DE COUPLAGE

L'exploitation des modes de galerie nécessite leur excitation. Cela se fait par le biais d'ondes évanescentes générées à partir d'un guide d'onde que nous appelons coupleur ou par l'utilisation d'autres méthodes que nous présentons plus loin. Pour ce qui est du guides d'onde, le choix de ce dernier dépend de plusieurs paramètres parmi lesquels l'obtention d'un accord de phase entre la fréquence du faisceau d'excitation et la résonance du mode de galerie, la facilité de mise en œuvre, la stabilité, la robustesse mais aussi le taux de couplage pouvant être obtenu. L'excitation des modes de galerie exige également que le coupleur soit positionné à une distance d inférieure à la longueur d'onde λ tel qu'illustré sur la figure 1.10 ($d \leq \lambda$). Cette condition joue un rôle très important dans la mesure où elle dicte le régime de couplage de la lumière dans le résonateur et agit par conséquent sur le facteur de qualité extrinsèque Q_e . En effet, Haus et *al.* [35] ont introduit une approche théorique permettant d'obtenir le spectre en transmission en fonction du paramètre de désaccord de fréquence δ défini par $\omega = \omega_0 + \pi\delta$. Leur modèle qui prend en compte le résonateur et le coupleur exprime la transmission en intensité lumineuse de l'ensemble résonateur-coupleur par la relation ci-dessous :

$$|T|^2 = \left| \frac{S_{\text{out}}}{S_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{\left(\frac{1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 + 4\pi^2\delta^2}{\left(\frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_0} \right)^2 + 4\pi^2\delta^2}. \quad (1.43)$$

Ici, τ_0 est le temps de vie d'un photon dans la cavité sans coupleur, et τ_e le temps de

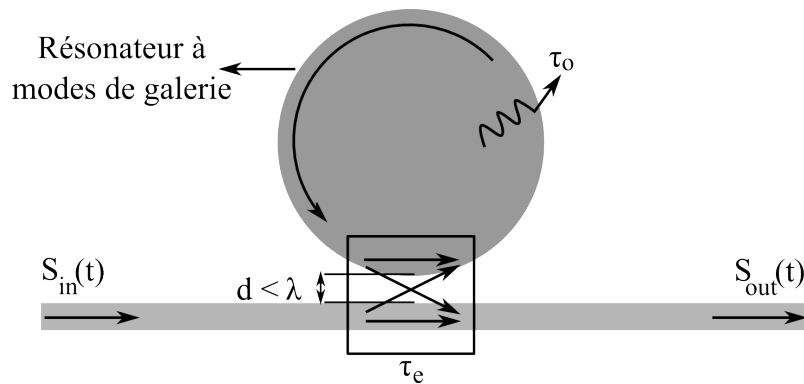


FIGURE 1.10 – Figure illustrant un résonateur à modes de galerie couplé par une ligne d'accès. Le couplage de la lumière ne se fait dans le résonateur que si la distance d entre ce dernier et la ligne d'accès est inférieure à la longueur d'onde λ .

vie d'un photon induit avec coupleur. On peut alors introduire le temps de décroissance du champ τ , défini par $1/\tau = 1/\tau_e + 1/\tau_0$ et lié au facteur de qualité par $Q = \omega_0 \tau_{ph}$ où $\tau_{ph} = \tau/2$. De même, nous pouvons définir le facteur de qualité intrinsèque par $Q_0 = \omega_0 \tau_0/2$ et le facteur de qualité extrinsèque par $Q_e = \omega_0 \tau_e/2$. La figure 1.11 représente sans souci d'échelle, en fonction de la distance d les 3 régimes de couplage possibles lors de l'excitation des modes de galerie. On distingue :

Le régime de sous-couplage $Q_0 < Q_e$: représenté par la courbe en rouge sur la figure 1.11 est caractérisé par un résonateur assez éloigné du coupleur, donc du champ évanescent. Les modes de galerie excités sont peu influencés par sa présence. Les pertes intrinsèques du résonateur représentées par Q_0 limitent le facteur de qualité.

Le régime de couplage critique $Q_0 = Q_e$: représenté par la courbe en bleu sur la figure 1.11. Il est le régime optimum car un maximum de lumière est couplé dans le résonateur. Les pertes de couplage sont égales aux pertes intrinsèques.

Le régime de sur-couplage $Q_0 > Q_e$: représenté par la courbe en vert sur la figure 1.11. Il est caractérisé par une distance d très faible entre le résonateur et le coupleur. Le facteur de qualité est limité par les pertes par couplage.

1.3.2/ TECHNIQUES DE COUPLAGE

1.3.2.1/ COUPLAGE PAR PRISME

Le couplage par prisme a été introduit en 1989 par Braginsky et *al.* [1] afin d'exciter les modes de galerie de microsphères en quartz fondu ayant des diamètres compris entre 40 et 400 μm . Cette technique décrite dans de nombreux travaux [36, 37, 38, 39] est désormais utilisée par de nombreuses équipes de recherche y compris la nôtre [40]. Elle est robuste ; des taux de couplage de 80% ont déjà été atteints et la possibilité d'obtenir mieux est prédite par les travaux de Sarid et *al.* [37, 38]. La technique du couplage par prisme est basée sur la génération d'ondes évanescentes par réflexion totale à l'interface résonateur-prisme. Cela se fait par l'injection de la lumière sous un angle $\sin i_p = N_r/N_p$ satisfaisant la condition d'accord de phase. L'indice N_p du prisme doit être supérieur à l'indice N_r du résonateur. Une lentille fibrée placée à l'entrée du prisme permet de focali-

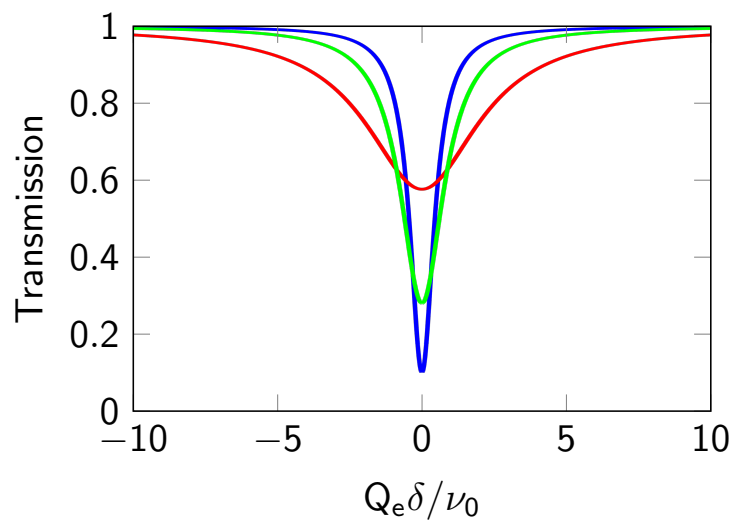


FIGURE 1.11 – Illustration de l’allure des résonances suivant le régime de couplage du résonateur. Le spectre en rouge correspond à un régime de sous-couplage, celui en vert à un régime de sur-couplage et celui en bleu à un régime de couplage critique.

ser la lumière sur une de ses faces lors de l’injection. Une seconde lentille fibrée placée sur la face opposée permet de collecter la lumière en sortie du résonateur. L’inconvénient majeur de cette technique est la difficulté d’alignement du faisceau.

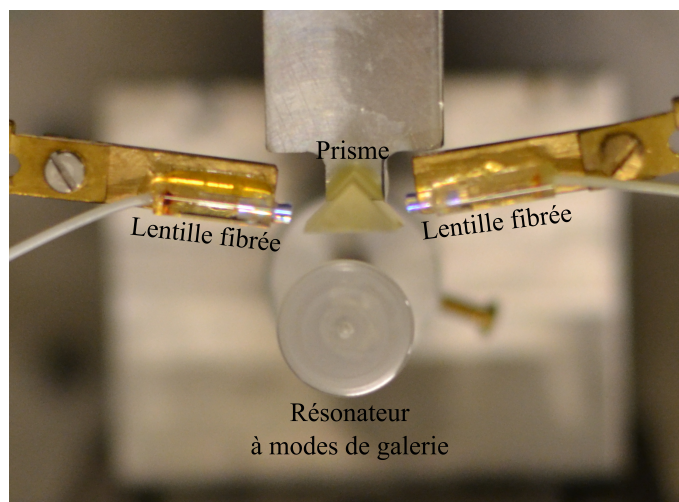


FIGURE 1.12 – Cette photographie représente une vue de dessus d’un couplage par prisme. Une première lentille fibrée focalise la lumière sur une des faces du prisme sous un certain angle afin de générer le champ évanescent nécessaire au couplage de la lumière dans le résonateur. La seconde lentille fibrée récupère la lumière transmise par le résonateur.

1.3.2.2/ COUPLAGE PAR FIBRE ÉRODÉE

Une fibre noyée dans un bloc de verre est polie jusqu’au cœur afin de permettre l’accès au mode optique qui sera ensuite couplé au résonateur. Cette technique a été utilisée

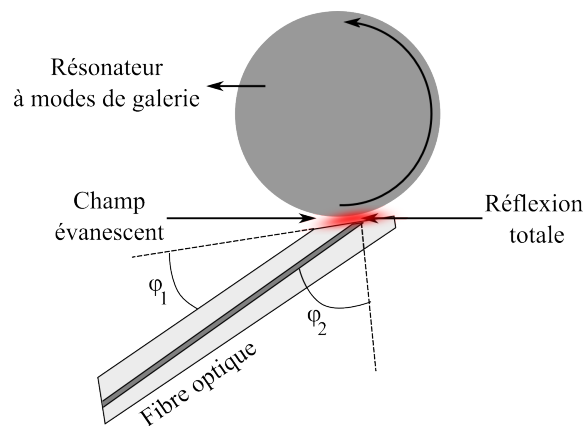


FIGURE 1.13 – Illustration du principe du couplage par fibre prisme.

par Dubreuil et *al.* [41] pour exciter les modes de galerie de sphères ayant des diamètres supérieurs à $250\ \mu\text{m}$. Le taux de couplage obtenu dans ces travaux est très faible ; il est d'environ 10% pour des pertes d'insertion d'environ 6 dB.

1.3.2.3/ COUPLAGE PAR FIBRE BISEAUTÉE OU FIBRE PRISME

Cette technique introduite par Ilchenko et *al.* [42, 43] présente des taux de couplage pouvant atteindre 60% pour des pertes d'insertion d'environ 2 dB. Elle associe le couplage par prisme et celui par fibre érodée. Elle consiste à polir la fibre sous un certain angle jusqu'à son cœur afin de réaliser la réflexion totale interne nécessaire à l'interface air/fibre à la génération d'ondes évanescentes. Tout comme le prisme, l'inconvénient de cette technique réside dans la difficulté des réglages du système coupleur/résonateur et la résistance du dispositif aux vibrations mécaniques due au port-à-faux de la fibre. Elle est illustrée sur la figure 1.13.

1.3.2.4/ COUPLAGE PAR FIBRE ÉTIRÉE OU TAPER

La fibre étirée plus connue sous le nom de *taper* est très utilisée compte tenu de sa facilité de mise en œuvre et du fort taux de couplage pouvant être obtenu. Elle a été introduite en 1997 par Knight et *al.* [44] afin de coupler la lumière dans des sphères de $85\ \mu\text{m}$ de diamètre. Des études théoriques prédisent des taux de couplage de 99.99% [45]. De nombreux travaux expérimentaux y compris les nôtres soutiennent ces prédictions en démontrant des taux de couplage au delà de 90% aussi bien pour des résonateurs amorphes que cristallins [46, 47, 48, 49]. Contrairement aux autres techniques où les ondes évanescentes sont obtenues par réflexion totale, la génération d'ondes évanescentes dans le cadre du couplage par *taper* est le résultat d'un fort déconfinement du champ dans une zone amincie de la fibre [50, 51, 52]. Le *taper* est obtenu par fusion et étirage simultanée d'une fibre optique SMF – 28 d'environ $150\ \mu\text{m}$ de diamètre jusqu'à obtention d'un diamètre compris entre 1 et $3\ \mu\text{m}$. L'amincissement de la fibre doit se faire de manière adiabatique [53] afin de minimiser les pertes d'énergie lors du passage du mode de la gaine en silice à l'air.

Il existe plusieurs méthodes de fabrication de *tapers*. On distingue les fours céramiques

qui permettent l'obtention de grandes longueurs ou encore l'amincissement de la fibre par attaque chimique jusqu'à obtention d'un diamètre d'environ $6\ \mu\text{m}$. La méthode la plus répandue qui est celle utilisée dans le cadre de cette thèse est la fusion-étirage simultanée d'une fibre optique SFM – 28 par un moteur pas à pas. La fibre optique est connectée à un laser et à une photodiode qui nous permet d'observer sa transmission sur un oscilloscope. La fibre est également maintenue par deux plots alignés parallèlement et placée au dessus d'une flamme émise par un chalumeau à base de butane. Les plots sont ensuite écartés l'un de l'autre par le biais d'un moteur pas à pas piloté par un programme fait par nos soins. Le spectre de transmission observé par l'oscilloscope nous permet d'arrêter l'étirage lorsque la zone adiabatique est atteinte. La figure 1.15 est un spectre de transmission enregistré lors de la fabrication d'un *taper*. Nous y distinguons 3 phases à savoir :

1. **Guidage cœur-gaine** : qui correspond au guidage de la lumière dans le cœur de la fibre optique. Une partie de la fibre que nous appellerons *zone taper* est quasi-immersée dans la flamme et commence à chauffer. Environ 30 s après le début de l'étirage, le diamètre de la *zone taper* diminue, la fibre devient multimode. C'est le début de la deuxième phase.
2. **Interférences multimodes** : l'étirage continue et le diamètre de la zone *taper* diminue. Cette phase est caractérisée par une multitude d'interférences destructives entre les différents modes de la fibre qui est désormais multimode. Au bout d'environ 60 s d'étirage, la fibre redevient monomode. À ce moment précis, l'étirage est arrêté et la flamme éteinte ; le *taper* obtenu a un diamètre compris entre $1\ \mu\text{m}$ et $3\ \mu\text{m}$.
3. **Microfibre monomode** : la troisième étape correspond au refroidissement du *taper*. Elle est importante car tout juste après l'étirage, le *taper* est encore chaud et très facile à casser.

Le banc d'étirage que nous avons mis en place et illustré sur la figure 1.14 permet d'obtenir de manière reproductible des *tapers* avec une transmission comprise entre 80% et 95%. Il est très important de préciser que le couplage par *taper* ne fonctionne que lorsque l'indice N_r du résonateur est inférieur à l'indice N_f de la fibre. L'unique inconvénient de cette technique est sa robustesse car le diamètre très réduit de la fibre supporte peu les vibrations mécaniques. Ceci étant, pour un expérimentateur averti, il est possible d'effectuer de nombreuses expériences sans endommager le *taper*.

1.4/ MÉTHODES DE CARACTÉRISATION DES RÉSONATEURS À MODES DE GALERIE

1.4.1/ MÉTHODE DU BALAYAGE LENT EN LONGUEUR D'ONDE

Cette méthode consiste à balayer lentement la longueur d'onde d'un laser accordable qui vient sonder le résonateur à caractériser. Le signal transmis par ce dernier est constitué de plusieurs spectres d'absorption de forme lorentzienne que nous appelons résonances. Le rapport entre largeur à mi-hauteur d'une résonance et la longueur d'onde du laser $Q = \nu_0/\Delta\nu$ donne le facteur de qualité de l'ensemble résonateur-coupleur. La largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$ d'une résonance se mesure dans le domaine temporel, il faut ensuite la

1.4. MÉTHODES DE CARACTÉRISATION DES RÉSONATEURS À MODES DE GALERIE27

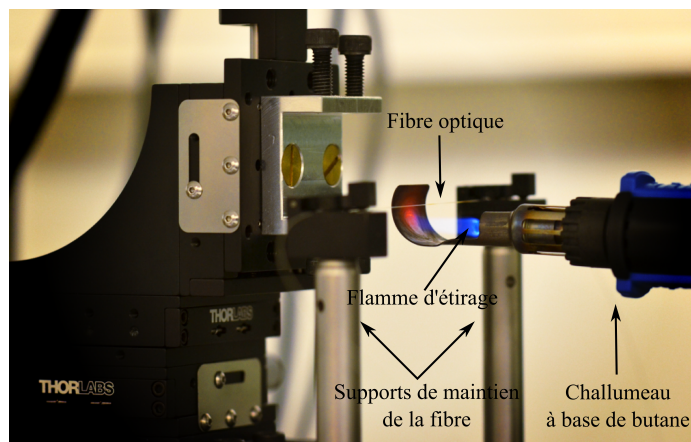


FIGURE 1.14 – Photographie représentant notre banc de fabrication de *tapers* par étirage. Une fibre optique SMF – 28 maintenue par deux supports est plongée dans une flamme produite par un chalumeau à base de butane. Un moteur pas à pas piloté par un programme déclenche l'étirage.

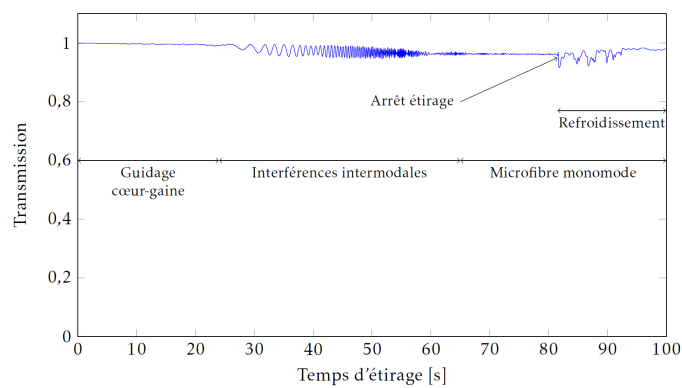


FIGURE 1.15 – Illustration de la transmission d'une fibre optique lors de la fabrication d'un *taper* par étirage.

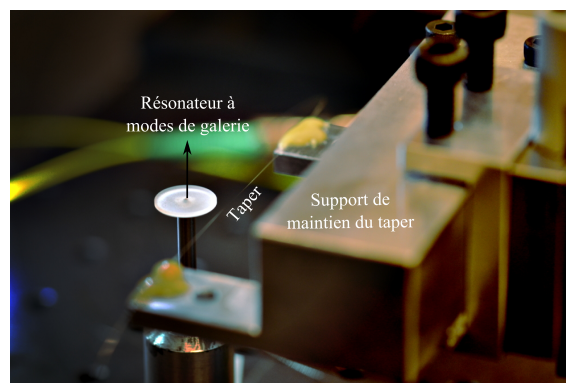


FIGURE 1.16 – Photographie d'un couplage par *taper*. Le résonateur est positionné vers la zone étirée du taper où réside le champ évanescent nécessaire à l'excitation des modes de galerie.

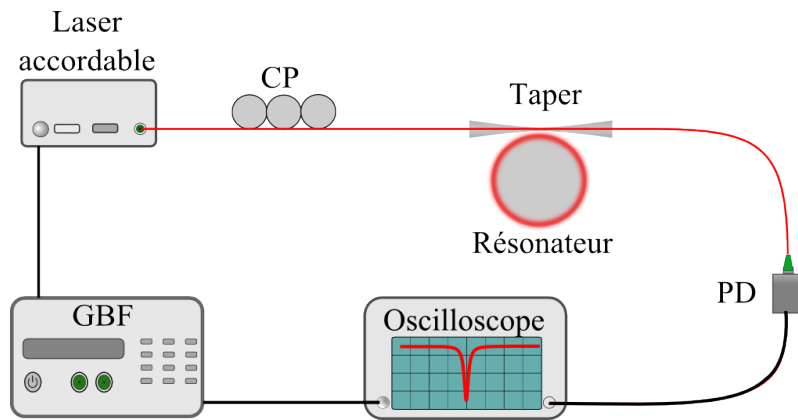


FIGURE 1.17 – Illustration de la caractérisation d'un résonateur à modes de galerie par la technique du balayage lent en longueur d'onde. CP : Contrôleur de Polarisation, PD : Photodiode, GBF : Générateur Basse Fréquence.

convertir en longueur d'onde en se servant de la vitesse de balayage V_s du laser (moins d'une dizaine de GHz/s) ; $\Delta\nu = V_s \times \Delta t$. Le dispositif expérimental de cette méthode est constitué d'un laser accordable en longueur d'onde comportant une entrée électrique. Sur cette dernière, est appliqué un signal triangulaire issu d'un générateur basse fréquence afin de déclencher le balayage. Un contrôleur de polarisation placé avant le résonateur permet de sélectionner la polarisation TE/TM. Un coupleur placé après le contrôleur de polarisation permet d'injecter la lumière dans le résonateur. Le signal en sortie de ce dernier est transmis à une photodiode connectée à un oscilloscope sur lequel on observe et caractérise les résonances.

La méthode du balayage lent présente cependant de nombreuses limitations car elle nécessite un laser ayant une largeur de raie très inférieure aux largeurs de raies des résonances du résonateur qui peuvent valoir moins d'une dizaine de kilohertz pour des facteurs de qualité supérieurs ou égaux à 10^9 . Les résonateurs à modes de galerie sont aussi sujets à des effets thermo-optiques qui provoquent une forte distorsion de la résonance [54, 55]. De ce fait, il est difficile de mesurer la largeur à mi-hauteur d'une résonance, donc d'obtenir le facteur de qualité. De surcroît, cette méthode permet uniquement de mesurer le facteur de qualité de l'ensemble résonateur-coupleur. Elle ne renseigne pas sur le régime de couplage (sous-couplage, couplage critique, sur-couplage).

1.4.2/ MESURE DU TEMPS DE VIE DES PHOTONS : RÉPONSE TEMPORELLE SANS BALAYAGE EN LONGUEUR D'ONDE

Cette méthode consiste à mesurer le temps de vie τ_{ph} des photons en mesurant le temps de décroissance de l'énergie lumineuse de l'ensemble résonateur-coupleur. Pour ce faire, le résonateur est soumis à une impulsion laser de fréquence ν et de durée Δt . Lorsque cette fréquence coïncide à celle d'une résonance du résonateur, ce dernier se charge ; nous observons une diminution de la transmission (signal de "Ring Up"). Lorsque le régime stationnaire est atteint, (minimum de transmission), l'interrogation laser est interrompue. L'énergie stockée ressort progressivement du résonateur, en d'autres termes, le résonateur se décharge (signal de "Ring Down"). Nous mesurons alors un temps qui correspond au temps de vie τ_{ph} des photons dans la cavité. Ce dernier est lié au facteur

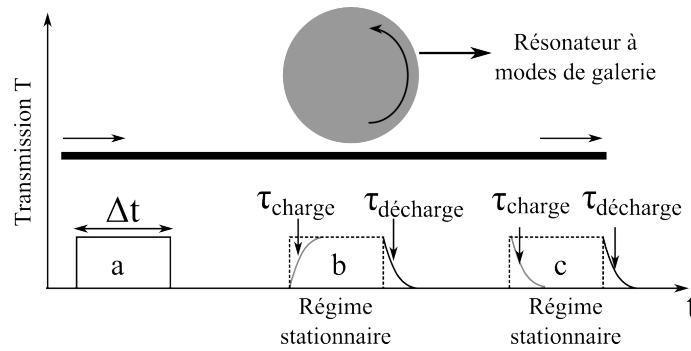


FIGURE 1.18 – Illustration de la caractérisation par mesure du temps de vie des photons sans balayage en longueur d'onde.

de qualité extrinsèque par $Q = \omega\tau_{ph}$.

Le dispositif expérimental de cette méthode est constitué d'un laser dont le faisceau en sortie est modulé par un interféromètre de Mach-Zehnder. Le signal de commande de ce dernier est obtenu par un générateur d'impulsions pseudo-aléatoires (Pseudo Random Bit Sequency-Clock, PRBS). L'impulsion carrée générée qui vient sonder l'ensemble résonateur-coupleur doit avoir une durée Δt supérieure au temps de réponse de ce dernier. Une source électrique délivrant une tension de commande continue accordable sur une certaine plage avec un pas fin est appliquée à l'entrée électrique du laser afin d'ajuster sa fréquence à celle d'une résonance de l'ensemble sous test. Cette fréquence, une fois trouvée, la tension de commande est maintenue fixe ; les mesures de temps de vie peuvent alors être effectuées.

Cette méthode dont le chronogramme des différentes étapes est représenté sur la figure 1.18 permet de connaître le facteur de qualité ainsi que le régime de couplage. Elle souffre cependant des limitations en performances des composants électroniques qui constituent le dispositif de mesure. Il est par exemple difficile de générer un signal d'excitation parfaitement carré. De surcroît, la recherche manuelle de la fréquence de résonance rend les mesures fastidieuses. A cela s'ajoute la nécessité de stabilisation du laser sur la résonance afin d'éviter les fluctuations de fréquence du laser qui peuvent brouiller les signaux *Ring Up* et *Ring Down*.

1.4.3/ MESURE DU TEMPS DE VIE DES PHOTONS : RÉPONSE TEMPORELLE AVEC BALAYAGE EN LONGUEUR D'ONDE

Cette méthode encore connue sous le nom de *cavity ring down* est celle utilisée dans le cadre de cette thèse. Elle consiste à balayer rapidement la longueur d'onde de laser sonde. Une valeur approximative de la vitesse de balayage que nous utilisons est d'environ 65 GHz/s. Le signal qui en résulte est couplé au résonateur par le biais d'un coupleur. Lorsque la fréquence du laser de sonde est accordée sur une fréquence de résonance ν_0 , le champ résonne dans la cavité et est réémis vers le port de sortie avec un temps de décroissance τ . Il se produit alors une interférence entre le champ en sortie de la cavité et celui en entrée qui est désormais à la fréquence $\nu_0 + \Delta\nu$. Le battement qui en résulte présente des oscillations dont l'enveloppe correspond au temps de vie τ du photon dans la cavité. De la sorte, on remonte au facteur de qualité de l'ensemble résonateur-coupleur $Q = \omega\tau_{ph}$. L'un des intérêts de cette méthode est qu'il existe un modèle mathématique dé-

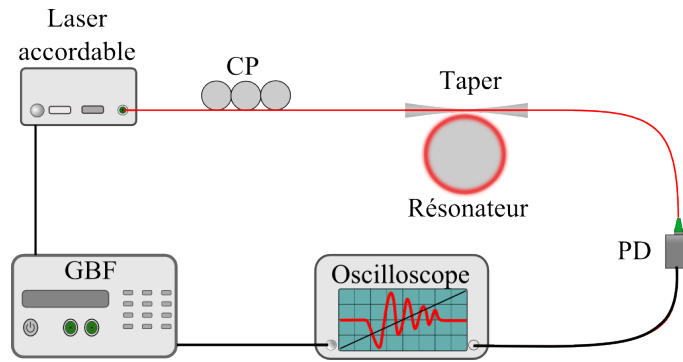


FIGURE 1.19 – Figure illustrant la caractérisation d'un résonateur à modes de galerie par la technique du balayage rapide en longueur d'onde. CP : Contrôleur de Polarisation, PD : Photodiode, GBF : Générateur Basse Fréquence.

veloppé à l'ENSSAT FOTON [56, 57] pour sa compréhension théorique. Par le biais de ce modèle, un algorithme permet d'obtenir les temps de vie intrinsèque τ_0 , extrinsèque τ_e du photon dans la cavité. Par conséquent, la méthode de mesure du temps de vie des photons par balayage en longueur d'onde renseigne sur le régime de couplage. Les temps de vie τ_0 et τ_e sont liés aux facteurs de qualité intrinsèque par la relation $Q_0 = 2\pi\nu\tau_0$ et extrinsèque par la relation $Q_e = 2\pi\nu\tau_e$.

Le dispositif expérimental que nous avons mis en place dans le cadre de la caractérisation de nos résonateurs est représenté sur la figure 1.19. Il est constitué d'un laser accordable en fréquence (Koheras Adjustik 1550 nm) qui émet en continu. La longueur d'onde de ce laser est balayé grâce à un générateur de fréquence qui délivre un signal triangulaire. Le signal en sortie du laser passe par un contrôleur de polarisation qui permet de sélectionner la polarisation TE/TM. Un taper placé après le contrôleur de polarisation permet de coupler la lumière dans le résonateur. Le signal en sortie de ce dernier est transmis à une photodiode connectée à un oscilloscope sur lequel nous observons les interférences.

La figure 1.20 correspond à des résultats expérimentaux que nous avons obtenus lors de la caractérisation de résonateurs en fluorure de lithium et en fluorure de calcium ; tous fabriqués par nos soins par polissage. Il est à noter que les performances obtenues en terme de facteur de qualité pour le résonateur en fluorure sont à notre connaissance les meilleures pour un cristal monofluoré.

1.5/ DESCRIPTION DES CRISTAUX FLUORÉS ABORDÉS DANS LE CADRE DE CETTE THÈSE

1. **Le fluorure de magnésium** MgF_2 est un cristal fluoré tétragonal dont la plage de transparence se situe entre 118 nm et 8.5 μm . Son indice de réfraction à 1550 nm qui est de 1.3717 est inférieur à celui de la silice à la même longueur d'onde, il est donc possible de coupler par taper la lumière dans des résonateurs à base de MgF_2 . Il est à noter que ce cristal est biréfringent. Son indice de dureté *Moh hardness* est de 6, son coefficient thermo-optique dn/dT est de $0.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ pour une onde ordinaire et $0.3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ pour une onde extra-ordinaire. Son coefficient d'expansion thermique dL/dT est de $9.4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ou $13.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ selon l'orientation de l'axe

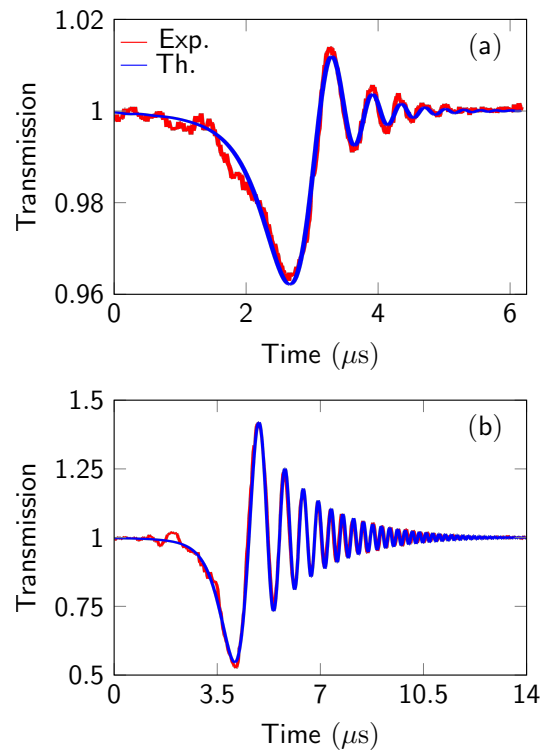


FIGURE 1.20 – Spectres de transmission enregistrés lors de la caractérisation d'un résonateur en fluorure de lithium LiF et d'un résonateur en fluorure de calcium CaF₂ par la technique du *cavity ring down*. Les résonateurs ont été fabriqués par nos soins par polissage. Les spectres en rouge correspondent aux résultats expérimentaux de caractérisation, et ceux en bleu correspondent aux fits théoriques obtenus grâce au modèle mathématique développé dans [56, 57]. Les facteurs de qualité sont les suivants : **[(a)]** LiF : $Q_o = 3.35 \times 10^8$, $Q_e = 2.58 \times 10^8$, $Q = 1.46 \times 10^8$; **[(b)]** CaF₂ : $Q_o = 1.64 \times 10^9$, $Q_e = 3.8 \times 10^9$, $Q = 1.15 \times 10^9$.

cristallin. Des facteurs de qualité supérieurs à 10^9 ont été démontrés pour ce cristal [58].

2. **Le fluorure de calcium** CaF₂ est un cristal cubique fluoré dont la plage de transparence se situe entre 125 nm et 10.5 μ m. Son indice de réfraction est de 1.426 est légèrement inférieure à celui de la silice à la même longueur d'onde, il est donc possible de coupler par taper la lumière dans des résonateurs à base de CaF₂. Son indice de dureté *Moh hardness* est de 4, son coefficient thermo-optique dn/dT est de $-11.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ et celui d'expansion thermique dL/dT est de $18.4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Des facteurs de qualité supérieurs à 10^{10} ont été démontrés pour ce cristal [3, 34].
3. **le fluorure de baryum** BaF₂ est un cristal fluoré tétragonal dont la plage de transparence se situe entre 140 nm et 13 μ m. Son indice de réfraction à 1550 nm qui est de 1.4648 est supérieur à celui de la silice à la même longueur d'onde, il est donc impossible de coupler par taper la lumière dans des résonateurs à base de BaF₂ ; le couplage par prisme est mieux indiqué et a été démontré [40]. Son indice de dureté *Moh hardness* est de 3, son coefficient thermo-optique dn/dT est de $-16.2 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ et celui d'expansion thermique dL/dT est de $18.4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Un facteur de qualité égal à 1.3×10^9 à 1550 nm a été démontré pour ce cristal [40].
4. **le fluorure de strontium** SrF₂ est un métal alcalino-terreux, un cristal cubique fluoré

dont la plage de transparence se situe entre 130 nm et 11 μm . Son indice de réfraction à 1550 nm qui est de 1.43 est légèrement inférieur à celui de la silice à la même longueur d'onde. Il est donc possible de coupler par taper la lumière dans des résonateurs à base de SrF_2 . Son indice de dureté *Moh hardness* est de 3.5, son coefficient thermo-optique dn/dT est de $12.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ et celui d'expansion thermique dL/dT est de $18.4 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Le record de facteur de qualité pour ce cristal est 9.76×10^8 à 1550 nm [59].

5. **le fluorure de lithium** LiF un cristal cubique fluoré dont la plage de transparence se situe entre 116 nm et 7.4 μm . Son indice de réfraction à 1550 nm qui est de 1.33 est légèrement inférieur à celui de la silice à la même longueur d'onde. Il est donc possible de coupler par taper la lumière dans des résonateurs à base de LiF. Son indice de dureté *Moh hardness* est de 4, son coefficient thermo-optique dn/dT est de $-11.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ et celui d'expansion thermique dL/dT est de $37 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Un facteur de qualité égal à 1.45×10^9 à 1550 nm a été démontré pour ce cristal [60].

1.6/ CONCLUSION

Ce chapitre a comporté quatre sections. Dans la première, nous avons introduit la théorie des modes de galerie. Cette section est indispensable à la bonne compréhension de la propagation de la lumière dans un résonateur à modes de galerie. Nous y avons introduit les deux approches permettant de décrire cette propagation à savoir l'approche géométrique et l'approche ondulatoire. Il apparaît clairement que cette dernière, par le biais de la résolution du problème électromagnétique exact est la plus complète. En effet, de nombreuses propriétés des modes de galerie relèvent du domaine de l'optique ondulatoire. A travers cette section, nous avons défini et donné les expressions de plusieurs paramètres des résonateurs à modes de galerie tels que la position des résonances par le biais de l'équation (1.30) ou encore l'intervalle spectral libre par le biais de l'équation (1.3). Nous y avons également introduit l'un des paramètres les plus importants des résonateurs à modes de galerie à savoir le facteur de qualité par le biais de l'équation (1.34). De nombreuses lignes lui sont consacrées car, comme nous le verrons plus loin dans ce manuscrit, il joue un rôle primordial dans les travaux qui ont motivé cette thèse.

La deuxième section de ce chapitre a été consacrée aux méthodes de fabrication des résonateurs à modes de galerie. Nous y avons présenté les méthodes de fabrication des résonateurs à modes de galerie amorphes, intégrés et cristallins en appuyant chacune par des exemples de performances en termes de facteur de qualité. Nous y avons également détaillé la technique de fabrication par polissage ainsi que les raisons qui nous ont poussé à la retenir pour les travaux de cette thèse.

La troisième section a porté sur les méthodes d'excitation des modes de galerie ou encore techniques de couplage. Quelques unes y sont décrites dont entre autres la technique de couplage par prisme illustrée par la figure 1.12 et celle par taper qui a été la plus utilisée dans le cadre des travaux de cette thèse. Nous avons détaillé dans cette section notre méthode de fabrication de *taper* en l'illustrant par les figures 1.16 et 1.14. Cette méthode nous permet d'obtenir de manière reproductible des *tapers* avec une transmission comprise entre 80% et 95%.

Dans la quatrième section, nous avons dans un premier temps présenté deux techniques de caractérisation des résonateurs à modes de galerie en précisant les avantages et in-

convénients de chacune d'elles et en illustrant chaque technique par un dispositif expérimental à travers les figures 1.18 et 1.17. Nous avons également présenté la technique utilisée dans le cadre de cette thèse à savoir la mesure du temps de vie des photons par balayage rapide plus connue sous son appellation anglaise de *cavity ring down*. Cette technique représentée par la figure 1.19 est très efficace car elle renseigne sur le régime de couplage mais aussi les facteurs de qualité intrinsèque, extrinsèque et global du résonateur caractérisé. Elle nous a permis de caractériser le premier résonateur mono-fluoré avec un facteur de qualité supérieur à 10^8 . Il s'agit d'un cristal de fluorure de lithium dont le spectre de transmission lors la caractérisation est représenté sur la figure [1.20(a)].

Avant de conclure ce chapitre, une dernière section a été consacrée à la description des cristaux fluorés évoqués ou polis dans la cadre de cette thèse. Chacun d'eux y est décrit en fonction de son indice de dureté, son indice de réfraction à 1550 nm, la technique de couplage possible, son coefficient thermo-optique dn/dT , son coefficient d'expansion thermique dL/dT ainsi que les facteurs de qualité déjà démontrés.

PEIGNES DE FRÉQUENCES OPTIQUES DE KERR

2.1/ INTRODUCTION

Traditionnellement, la génération d'un peigne de fréquences optiques nécessite l'utilisation d'un laser à modes verrouillés qui délivre en sortie de cavité un train d'impulsions optiques séparées de la même distance. Le spectre optique c'est à dire la transformée de Fourier du train d'impulsions est un peigne de fréquences optiques. Les composantes spectrales du peigne sont situées à égale distance l'une de l'autre. Cet espacement appelé taux de répétition est un paramètre très important dans les peignes de fréquences optiques comme nous le verrons plus loin.

Une approche alternative aux lasers à modes verrouillés est l'utilisation de résonateurs à modes de galerie à très haut facteur de qualité permettant d'obtenir une forte intensité de lumière dans la périphérie interne du résonateur [40, 61, 62, 63]. Cette forte intensité combinée au faible volume des modes exalte de manière considérable l'interaction lumière-matière. Le résonateur devient alors une plateforme où différents processus non-linéaires prennent place. Parmi ces processus figurent l'effet Raman, Brillouin mais aussi l'effet Kerr optique. Ce dernier est celui qui permet la génération de fréquences optiques de Kerr via le principe du mélange à 4 ondes.

Lorsqu'on injecte de la lumière au delà d'un certain seuil dans un résonateur à modes de galerie possédant une non-linéarité Kerr, les photons pompe subissent un processus de conversion d'énergie qui entraîne la création de bandes latérales réparties de manière équidistante autour de la fréquence de pompe. L'augmentation de la puissance de pompe entretient le processus de conversion d'énergie qui conduit à un peigne de fréquences optiques pouvant s'étaler sur plus d'une octave. Cette approche simple et peu coûteuse en énergie a été mise en œuvre pour la première fois en 2004 [64, 65] par deux équipes de recherches indépendantes qui ont démontré la génération de peignes de fréquences à travers des résonateurs à modes de galerie amorphe et cristallin. En 2007, Del'Haye et *al.* [25] ont démontré un peigne de fréquences optiques à travers un résonateur à modes de galerie s'étalant sur une très grande plage. En 2011, ils ont présenté un peigne de Kerr s'étalant sur une octave [66]. Depuis leur première observation, les peignes de fréquences optiques ont été générés dans différents types de résonateurs (à modes de galeries, intégrés sur puce) et différents matériaux [59, 67, 68].

Le grand avantage des peignes de fréquences optiques à base de résonateurs à modes de galerie par rapport à ceux à base de lasers à modes verrouillés est le taux de répétition qui est inversement proportionnel au diamètre du résonateur. Par conséquent, des taux de répétition compris entre le GHz et plusieurs THz ont été atteints par simple contrôle du diamètre du résonateur. Cette caractéristique, associée à la cohérence et à la haute pureté spectrale des peignes de Kerr donne accès à des applications où taux de répétition élevé, composants intégrables à faibles coûts de fabrication et de consommation en puissance sont indispensables. Elle a motivé et continue à motiver d'intenses recherches théoriques et expérimentales afin de porter la technologie au niveau de maturité des peignes de fréquences à base de lasers à modes verrouillés. Des applications dans de nombreux domaines ont ainsi été démontrées [62, 69].

Dans le domaine des micro-ondes par exemple, la simple détection d'un peigne de fréquences optiques à base de résonateurs à modes de galerie a permis la démonstration d'une onde RF à 22 GHz avec une performance de -113 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse [70]. Des oscillateurs photoniques commercialisables avec des performances de -115 dBc/Hz et -130 dBc/Hz à respectivement 10 kHz et 100 kHz d'une porteuse RF à 21.953 GHz sont désormais disponibles [71]. Cette performance a récemment été améliorée et portée à -60 dBc/Hz, -90 dBc/Hz et -170 dBc/Hz à respectivement 10 Hz, 100 Hz et 100 MHz d'une porteuse RF à 9.9 GHz [72]. Des performances intéressantes en terme de stabilisation sur des transitions atomiques ont également été démontrées [73].

La pureté spectrale et la cohérence qui caractérisent les peignes de Kerr permettent leur utilisation dans les télécommunications optiques à des fins de transmission haut débit [74, 75]. Dans ce cadre, des performances atteignant 144 Gbit/s ont été démontrées à partir d'un peigne de Kerr généré via un résonateur cristallin en MgF_2 qui présente un facteur de qualité de 10^9 à 1550 nm [76].

Depuis peu, de nombreuses équipes de recherche se tournent vers la génération de peignes de Kerr optique dans le domaine de l'infra-rouge moyen pour des applications en spectroscopie [77, 78, 79, 80]. En effet, de nombreuses molécules présentent des spectres d'absorption dans l'infra-rouge moyen. Un peigne de Kerr dans cette zone ou s'étalant sur plusieurs octaves devient donc un puissant moyen d'investigation. Ces raisons motivent l'exploration de voies et moyens pour créer le type de dispersion nécessaire à la génération de peignes pouvant s'étaler sur plusieurs octaves [81, 82, 83, 84].

Les performances citées précédemment traduisent le potentiel des peignes de Kerr optiques pour de nombreuses applications. Elles justifient les efforts de recherche consentis par de nombreuses équipes afin d'explorer théoriquement et expérimentalement cette technologie. Notre objectif à travers cette thèse et particulièrement ce chapitre est d'apporter notre contribution à ce propos en présentant nos résultats expérimentaux dans le cadre d'application micro-onde ainsi que nos résultats théoriques. Dans ce chapitre, nous présentons en premier les bases nécessaires à la compréhension du processus de génération de peignes de fréquences optiques dans un résonateur à modes de galerie. Nous présentons ensuite nos résultats expérimentaux ainsi que les modèles théoriques développés depuis l'avènement de la technologie. La dernière section du chapitre est consacrée aux instabilités oscillatoires qui apparaissent dans la réponse de certains résonateurs compte tenu de leurs paramètres physiques et du fort confinement de la lumière dans leur périphérie interne.

2.2/ PEIGNES DE FRÉQUENCES OPTIQUES DE KERR

2.2.1/ PEIGNE DE FRÉQUENCES OPTIQUES

Nous définissons un peigne de fréquences optiques comme une série de modes discrets, équidistants et mutuellement cohérents dans le domaine fréquentiel. Un moyen permettant de les générer est l'utilisation de résonateurs à modes de galerie [40, 59, 61, 85]. La lumière se propage dans de tels résonateurs par réflexion totale interne et peut y être confinée pour des durées de l'ordre de la dizaine de microsecondes conduisant ainsi à de fortes intensités de lumière dans sa périphérie interne. Le fort confinement de la lumière combiné aux faibles volumes des modes et à leurs très hauts facteurs de qualité exalte de manière considérable les effets non-linéaires tels que la diffusion Raman [27], la diffusion Brillouin [86] ou encore l'effet Kerr optique [68]. Ce dernier est l'effet non-linéaire utilisé pour l'excitation de peignes de fréquences optiques dans les résonateurs à modes de galerie.

2.2.2/ EFFET KERR OPTIQUE ET MÉLANGE À QUATRE ONDES

L'effet Kerr optique est un processus non-linéaire qui traduit la variation de l'indice de réfraction n d'un matériel soumis à un champ électrique d'intensité $I = \|E\|^2$. Son expression est :

$$n = n_0 + n_2 I, \quad (2.1)$$

où n_0 est l'indice de réfraction linéaire du matériau, n_2 son coefficient Kerr. L'effet Kerr optique est le processus moteur de la génération de peignes de fréquences optiques dans un résonateur à modes de galerie. En effet, au delà d'une certaine puissance que nous appelons puissance seuil, les photons interagissent dans un milieu Kerr à travers le principe du mélange à quatre ondes. Au cours de cette interaction, deux photons de fréquences identiques ou différentes interagissent entre eux et génèrent deux photons à des fréquences différentes. Nous noterons ω_α et ω_β les fréquences des photons incidents, ω_μ et ω_η celles des photons générés. Le mélange à quatre ondes est piloté par le principe de conservation d'énergie et puisque les modes résonants sont ceux satisfaisant cette condition mais aussi la condition de conservation du moment angulaire. Nous pouvons écrire les équations ci dessous :

$$\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\eta + \omega_\mu. \quad (2.2)$$

$$\ell_\alpha + \ell_\beta = \ell_\eta + \ell_\mu. \quad (2.3)$$

Les indices α, β, η, μ désignent les modes et $\ell_\alpha, \ell_\beta, \ell_\eta, \ell_\mu$ représentent leur ordre azimuthal. Lorsqu'on injecte donc de la lumière dans un résonateur à modes de galerie, l'onde pompe dont la fréquence est notée ω_p interagit avec elle-même et génère deux autres photons de fréquences ω_μ et ω_η . L'interaction est dégénérée et l'équation (2.2) devient :

$$2\omega_p = \omega_\eta + \omega_\mu. \quad (2.4)$$

Cette dégénérescence illustrée sur la figure 2.1(a) est caractérisée par l'apparition de deux bandes latérales situées à égale distance Δ autour de la pompe. L'augmentation de la puissance de pompe entraîne d'autres interactions conduisant à l'apparition de bandes latérales espacées également de Δ . L'interaction devient non-dégénérée et le peigne de fréquences qui en résulte est appelé peigne de Kerr primaire représenté sur la figure 2.1(b). Il s'en suit alors une série d'interactions où le photon pompe interagit avec les photons générés qui, à leur tour, interagissent entre eux pour générer de nouveaux photons à de nouvelles fréquences. Les bandes obtenues sont réparties autour des bandes du peigne de Kerr primaire et sont espacées de δ . Le peigne de Kerr obtenu est appelé peigne secondaire et est illustré sur la figure 2.1(c). L'augmentation de la puissance de pompe conduit ensuite à une cascade d'interactions qui aboutit à la formation d'un peigne de fréquences optiques que nous appelons peigne de Kerr chaotique ; c'est la figure 2.1(d). Sous certaines conditions de dispersion, ce dernier peut s'étaler sur plus d'une octave.

2.2.3/ DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Le dispositif expérimental qui permet la génération de peignes de fréquences est présenté à la figure 2.2. Il est constitué d'un laser fibré, accordable en fréquence (Koheras Adjustik) qui émet en continu à la longueur d'onde de 1550 nm avec une largeur de raie de l'ordre du kilohertz. Un signal triangulaire issu d'un générateur basses fréquences est appliqué au laser afin de le balayer en longueur d'onde et d'exciter les modes de galerie du résonateur. Le signal résultant est contrôlé en polarisation via des contrôleurs de polarisation afin d'accorder la sienne à celle des modes résonants dans la cavité. Un amplificateur optique fibré dopé Erbium (*Erbium Doped Fiber Amplifier*) placé en sortie des contrôleurs de polarisation amplifie le signal optique qui est ensuite envoyé vers le résonateur. Le couplage de la lumière dans le résonateur se fait par le biais d'un *taper* fait maison ayant un diamètre d'environ $1\ \mu\text{m}$. Ce *taper* est maintenu par un support placé sur une platine de translation piézoélectrique contrôlable suivant les 3 axes x , y et z afin de permettre un réglage fin du couplage. Un atténuateur optique variable est placé après le résonateur afin de protéger les instruments de mesure. La première branche d'un coupleur optique fibré 3 dB (placé après l'atténuateur) est connectée à une photodiode de type *InGaAs Amplified Detector PDA 10CF-EC* de marque Thorlabs ayant une bande passante de 150 MHz. Cette dernière est à son tour connectée à un oscilloscope afin d'observer les résonances et sélectionner celles qui conviennent le mieux à l'excitation des peignes de fréquences. La seconde branche du coupleur 3 dB est connectée à un analyseur de spectre optique de marque APEX 2440 B ayant une résolution de 5 MHz sur lequel les peignes de fréquences seront observés et analysés. Une fois le dispositif prêt, il faut stabiliser une des résonances du résonateur sur le laser ou l'inverse afin de générer des peignes de Kerr stables. C'est l'objet de la sous-section qui suit.

2.2.4/ STABILISATION DES PEIGNES DE KERR

La caractérisation et l'exploitation des peignes de fréquences à des fins diverses nécessitent leur stabilisation. Comme nous le verrons plus loin, les résonateurs à modes de galerie subissent des effets thermiques [54, 87, 88] qui entraînent la dérive des résonances. Dans de telles circonstances, le laser n'est jamais longtemps résonant avec les

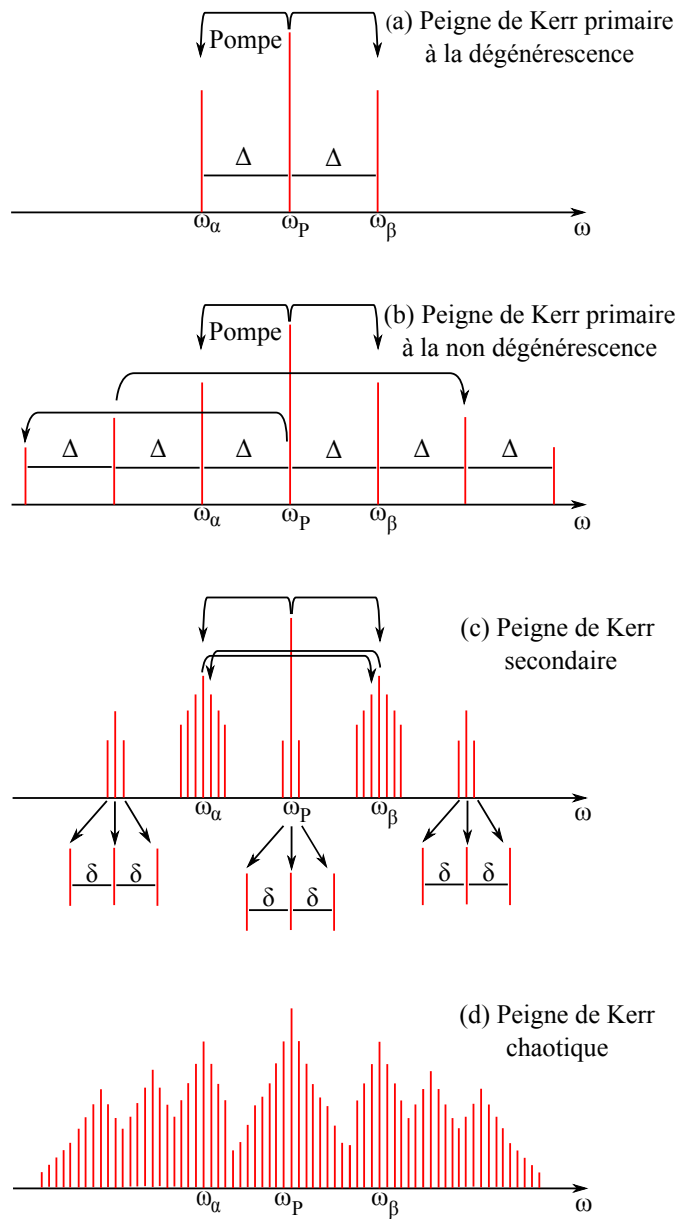


FIGURE 2.1 – Figure illustrant le processus de formation d'un peigne de fréquences optiques dans un résonateur à modes de galerie. **[(a)]** Étape initiale à la dégénérescence avec formation d'un peigne de Kerr primaire aux composantes consécutives espacées de Δ . **[(b)]** Continuité du processus d'interactions entre photons avec formation d'un peigne de Kerr primaire et conservation de l'espacement Δ . **[(c)]** Formation d'un peigne secondaire où les nouvelles bandes secondaires réparties autour des composantes du peigne primaire sont espacées de δ . **[(d)]** Peigne de Kerr chaotique se formant suite à une cascade d'interactions entre les photons du peigne de Kerr secondaire.

modes de la cavité. Il devient donc impossible d'avoir un peigne de Kerr stable. Pour y remédier, il faut stabiliser l'ensemble laser-résonateur. Cela peut se faire par voie passive ou active. Il se trouve que la dynamique thermique d'un résonateur à modes de galerie

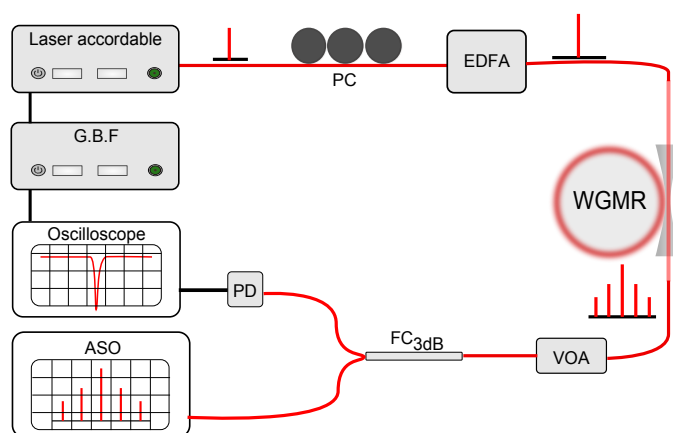


FIGURE 2.2 – Dispositif expérimental pour la génération de peignes de fréquences. PC : Contrôleur de Polarisation, EDFA : Amplificateur optique fibré dopé Erbium (*Erbium Doped Fiber Amplifier*), WGMR : Résonateur à modes de galerie, VOA : Atténuateur Optique Variable, FC_{3dB} : Coupleur optique fibré 3 dB, PD : Photodiode, ASO : Analyseur de Spectre Optique.

permet d'opérer dans un régime connu sous le nom de *thermal locking* [88], à condition que ses coefficients thermo-optiques, thermo-élastiques et Kerr soient positifs. Ce régime permet une stabilisation passive des résonances sur le laser. Il est également possible de stabiliser activement l'ensemble laser résonateur. Nous avons opté dans ce cadre pour la technique du *Pound Drever Hall* [89]. Les deux techniques de stabilisation sont abordées dans les lignes ci-après.

2.2.4.1/ STABILISATION PAR VOIE THERMIQUE OU THERMAL LOCKING

La stabilisation par voie thermique ou *thermal locking* est une technique expérimentale passive qui est largement exploitée dans la communauté des résonateurs à modes de galerie. Elle est décrite théoriquement et expérimentalement dans les travaux de Carmon et *al.* [88]. Sa mise en place ne nécessite pas d'ajout d'instruments supplémentaires au dispositif expérimental de génération de peignes de fréquences. Considérons une résonance à droite du laser tel qu'illustré sur la figure 2.3 ; la réduction de la puissance de pompe entraîne une baisse de la température du résonateur qui à son tour induit un décalage de la résonance vers la gauche. Par conséquent, la puissance intra-cavité augmente et compense l'effet de la réduction de la puissance de pompe. Le système devient alors stable et opère en régime de verrouillage thermique plus connu sous le nom de *thermal locking*. Si la résonance est à gauche du laser, une diminution de la puissance de pompe la décalera encore plus vers la gauche. L'ensemble laser-résonateur n'est plus résonant. Il faut à ce moment augmenter la puissance de pompe, balayer lentement le laser en longueur d'onde afin de provoquer le décalage de la résonance vers la droite pour obtenir le *thermal locking*. Les performances en termes de largeurs de raies spectrales et de bruit de fréquences des spectres RF obtenus dans ce régime sont présentées dans la section suivante. Cette technique assez stable est cependant sensible aux variations lentes de température du milieu environnant d'où la nécessité d'une stabilisation active.

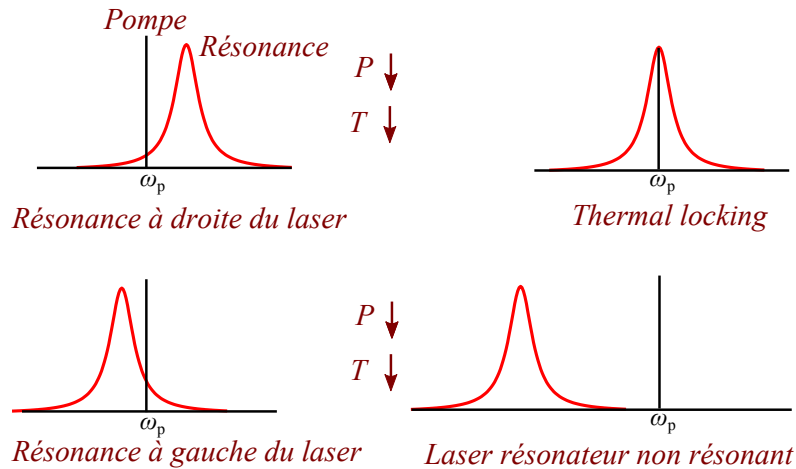


FIGURE 2.3 – Schéma illustrant le principe du *thermal locking*. Pour une résonance à droite du laser (en haut à gauche), la diminution de la puissance laser décale la résonance vers la gauche et conduit au *thermal locking* (en haut à droite). Le cas contraire en bas à gauche) conduit à une situation où l'ensemble laser-résonateur n'est pas résonant (en bas à droite).

2.2.4.2/ STABILISATION PAR LA TECHNIQUE DE POUND DREVER HALL

La stabilisation par la technique du Pound-Drever-Hall est une méthode d'asservissement active qui consiste à verrouiller la fréquence du laser de pompe sur un des modes résonants dans le cavité. La figure illustre le dispositif expérimental mis en place à ce propos. Le signal provenant d'un laser (Koheras Adjustik) est modulé en phase grâce à un modulateur électro-optique (Photline) sur lequel est appliqué un signal sinusoïdal de fréquence f_{PDH} . Cette dernière (f_{PDH}) est supérieure à la largeur de raie des résonances et inférieure à l'intervalle spectral libre du résonateur, typiquement autour de quelques MHz. Le signal laser modulé est ensuite couplé au résonateur à modes de galerie grâce à un taper puis détecté sur une photodiode. Le signal électrique à la fréquence f_{PDH} qui en résulte a une amplitude proportionnelle au décalage de fréquence entre le laser et les résonances de la cavité. Le signal électrique correspondant à une de ces résonances est mélangé dans un mixeur à une fraction du signal de modulation de fréquence f_{PDH} . Le résultat de ce mélange est un signal d'erreur proportionnel au décalage de fréquences entre le laser et le mode résonant sélectionné. Ce signal d'erreur passe ensuite par un contrôleur Proportionnel-Intégrateur-Dérivateur (PID) qui délivre le signal de correction à appliquer à l'actuateur piézoélectrique du laser afin que ce dernier ajuste sa fréquence. La figure 2.4 montre une résonance modulée à la fréquence f_{PDH} et le signal d'erreur qui en résulte. Une fois le verrouillage obtenu, la puissance laser est augmentée progressivement afin d'exciter le peigne de fréquences qui demeurera stable tant que le laser est verrouillé sur la résonance sélectionnée. Les performances en termes de largeurs de raies et de bruit de fréquences des spectres RF obtenus dans ce régime sont présentées dans la sous-section suivante.

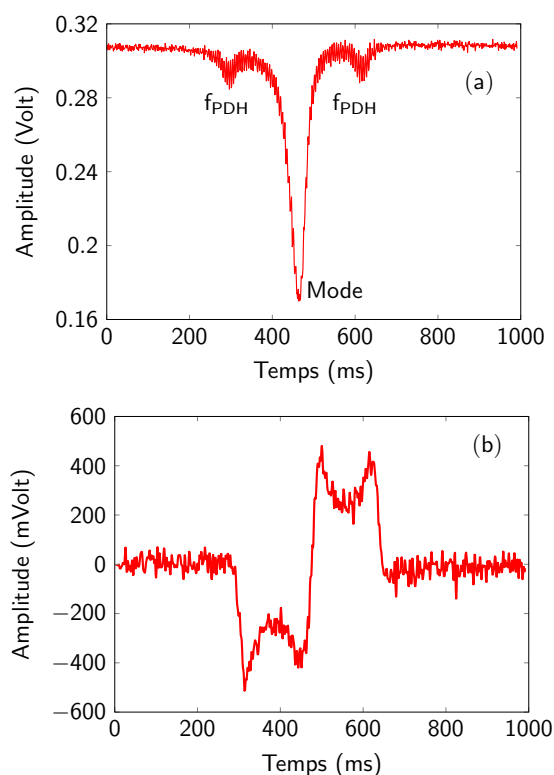


FIGURE 2.4 – Représentation d’une résonance ou mode modulé à la fréquence f_{PDH} [(a)] et le signal d’erreur en sortie du mixeur [(b)]. Ce dernier passe ensuite par un contrôleur PID qui délivre le signal de correction nécessaire à la stabilisation du laser sur le mode.

2.2.5/ SPECTRES RF DE PEIGNES DE FRÉQUENCES

2.2.5.1/ LARGEURS DE RAIES ET BRUITS DE PHASE

Cette sous-section est consacrée à l’analyse de la performance d’ondes RF générées à partir d’un peigne de fréquences. Ces ondes résultent du battement de fréquences entre les composantes spectrales du peigne. Leurs fréquences correspondent aux écarts de fréquences δ et Δ entre les dents du peigne. Par conséquent, leurs performances en termes de largeur de raies et de bruit de phase vont être fortement influencées par les différents bruits de fréquences générés par le peigne. Après une brève présentation du dispositif expérimental, nous présentons et commentons les résultats expérimentaux puis nous discutons des différentes sources de bruit limitant les performances en bruit de phase de ces signaux RF.

Le dispositif expérimental en vue de la mesure de spectres RF de peignes de fréquences est présenté sur la figure 2.5. Il est proche de celui utilisé pour la génération de peignes de fréquences à la seule différence qu’une photodiode rapide, des coupleurs 90/10 et un analyseur de spectre RF ont été rajoutés. Le signal provenant d’un laser émettant en continu et balayé en longueur d’onde est contrôlé en polarisation, amplifié puis injecté dans un résonateur à modes de galerie grâce à un taper. L’ensemble laser-résonateur est stabilisé par voie thermique ou par la technique du Pound-Drever-Hall. Le signal sortant du résonateur est envoyé vers un coupleur 90/10 dont la première branche soit (10%)

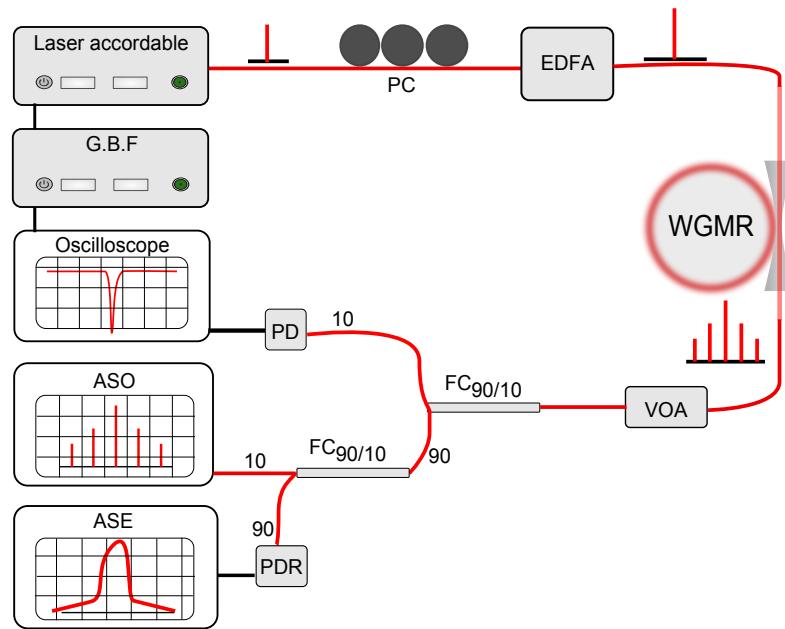


FIGURE 2.5 – Dispositif expérimental pour la mesure de spectres RF des peignes de fréquences optiques. PC : Contrôleur de Polarisation, EDFA : Amplificateur Optique (*Erbium Doped Fiber Amplifier*), WGMR : Résonateur à modes de galerie, VOA : Atténuateur Optique Variable, FC_{90/10} : Coupleur optique fibré 90/10, PD : Photodiode, ASO : Analyseur de Spectre Optique, PDR : Photodiode Rapide, ASE : Analyseur de Spectre Electrique

est connectée à un analyseur de spectre optique de marque APEX 2440 B sur lequel le peigne de fréquences est observé. La seconde partie du coupleur (90%) est connectée à une photodiode rapide XPDV212OR de marque Finisar avec une bande passante de 50 GHz. Cette dernière convertit le signal optique en signal électrique et l'envoie sur un analyseur de spectre électrique de marque ROHDE & SCHWARZ pour investigations en termes de largeur de raies et de bruit de phase.

Les spectres RF obtenus à partir de peignes de Kerr primaire 2.6(a) et secondaire 2.6(d) en régime de *thermal locking* [88] sont présentés sur les figures 2.6(b) et 2.6(e). Sur ces dernières, les spectres RF affichent des structures similaires ; elles sont constituées d'une multitude de battements de fréquences quasi uniformément répartis autour d'une fréquence de battement centrale. Cette dernière a la fréquence de 11.8 GHz sur les figures 2.6(c) pour le peigne de Kerr primaire et 2.6(f) pour le peigne de Kerr secondaire. Elle présente dans les deux cas des largeurs de raies de respectivement 1 et 2 kHz. Il nous a cependant été impossible d'obtenir leurs performances en terme de bruit de phase compte tenu de leur faible puissance et de leur instabilité. Les peignes de Kerr chaotiques présents sur les figures 2.6(g) et 2.6(j) ont conduit à des battements de fréquences avec des largeurs de raies de l'ordre du MHz que nous n'avons également pas pu caractériser en terme de bruit de phase pour les mêmes raisons que précédemment. Nos observations rejoignent celles d'autres équipes où des battements de fréquences multimodes [66, 90] ont été observés pour des peignes de Kerr primaires et secondaires. Elles rejoignent également les observations de ces mêmes équipes concernant les peignes de Kerr chaotiques où des battements de fréquences à largeurs de raies de l'ordre du MHz [66, 90] ont été obtenus avec différents types de résonateurs. Il convient donc d'apporter des explications aux battements de fréquences multimodes et aux largeurs de raies mé-

gahertz. Les pistes que nous avons explorées concernant ces deux points sont entre autres l'existence de résonances optomécaniques, la compréhension de la dynamique des résonateurs et des peignes en terme de bruits de fréquences. C'est l'objet de la section (2.2.6).

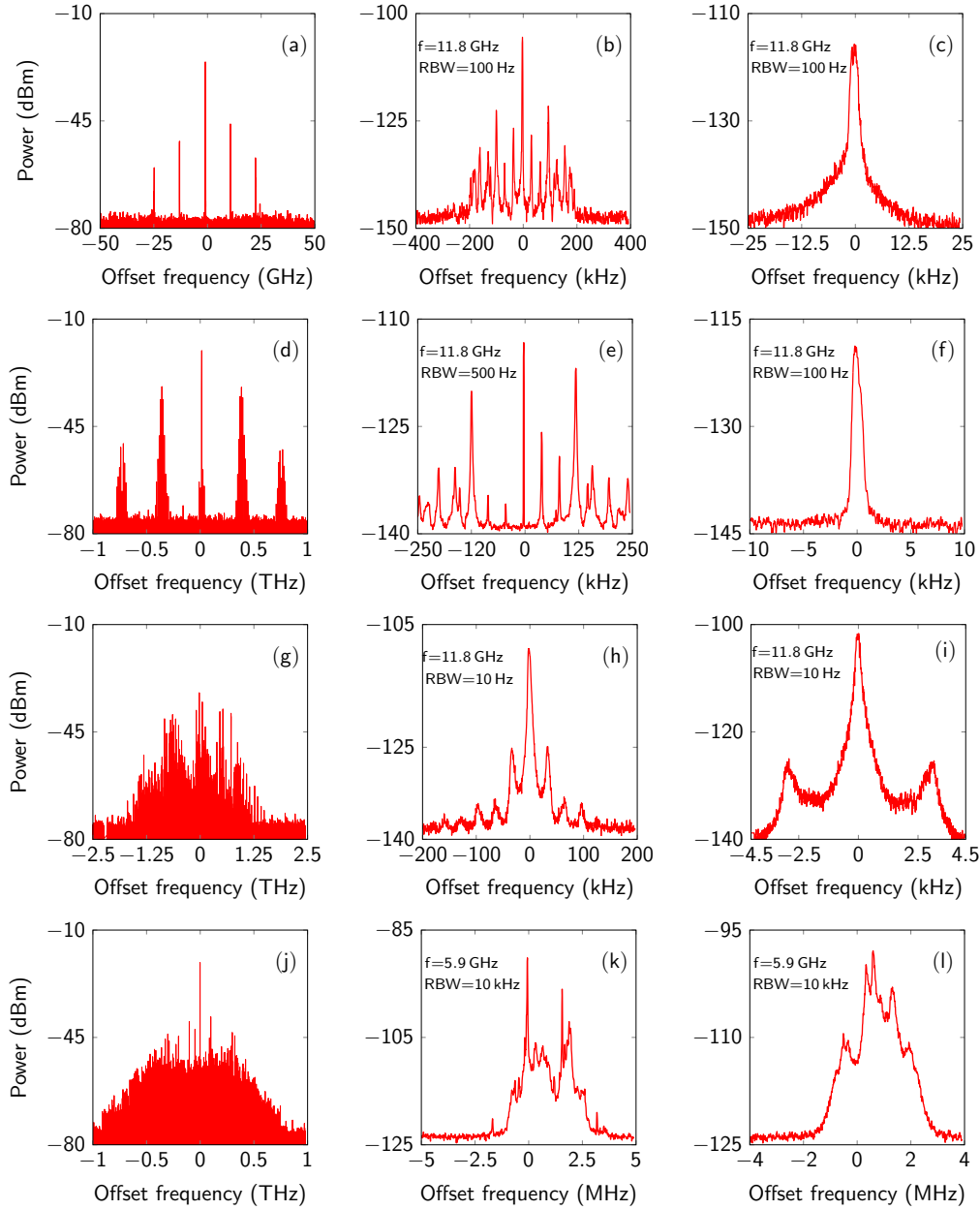


FIGURE 2.6 – Peignes de Kerr obtenus en régime de *locking* thermique à des puissances lasers comprises entre 100 et 200 mW [(a), (d), (g), (j)] ainsi que leurs spectres RF respectifs pour différentes résolutions de l'analyseur de spectre RF [(b,c), (e,f), (h,i), (k,l)]. Ces spectres sont multimodes, faibles puissances et présentent des largeurs de raies de l'ordre du kHz pour les peignes de Kerr primaire et secondaire [(a), (d)], et des largeurs de raies MHz pour les peignes de Kerr chaotiques [(g), (i)]. Ces performances, comparées à celles obtenues en régime de stabilisation par la technique du Pound-Drever-Hall ne sont pas de qualité métrologique.

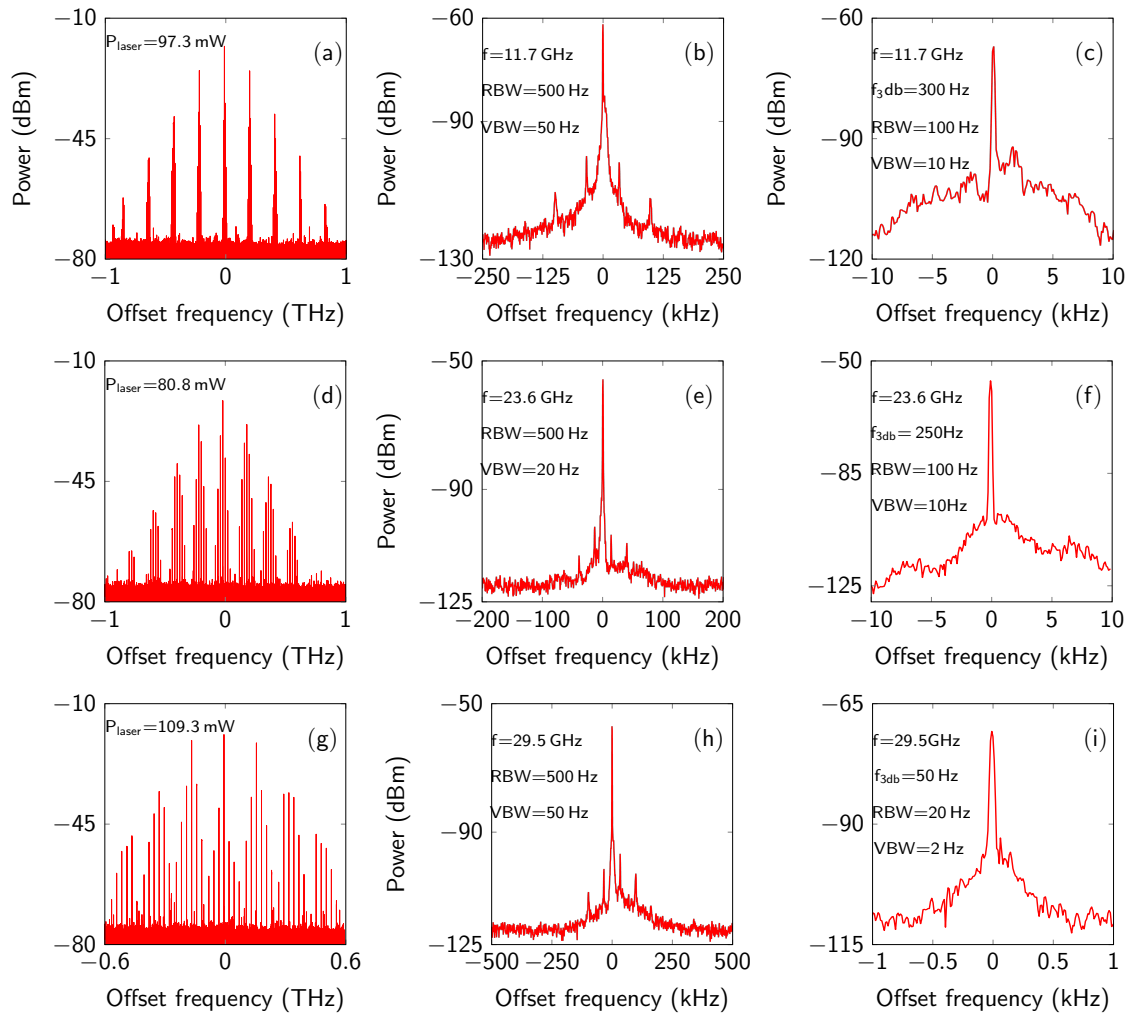


FIGURE 2.7 – Peignes de Kerr obtenus dans le cadre d’une stabilisation de l’ensemble laser-résonateur par la technique du Pound-Drever-Hall [(a),(d),(g)]. Les spectres RF respectifs obtenus pour différentes résolutions de l’analyseur de spectre électrique sont représentés sur les figures [(b,c), (e,f), (h,i)]. Ces spectres ont des largeurs de raies comprises entre 300 Hz et 50 Hz. Ces performances sont de loin meilleures à celles obtenues en régime de *thermal locking*.

Contrairement aux spectres RF obtenus en régime de *locking thermique*, ceux obtenus à partir de la technique du PDH présentent des performances intéressantes en termes de largeurs de raie et de bruits de phase comme le montrent les figures (2.7) (2.9) et (2.8). Les spectres RF ont la même allure, et ce, malgré la différence de fréquence. On constate la présence de petits pics situés entre 50 kHz et 100 kHz autour de la fréquence centrale. Ces pics sont la signature de *cross-talk*. Aux peignes de Kerr 2.7 [(a),(d),(g)] correspondent respectivement les spectres 2.7 [(c),(f),(i)] aux fréquences de 11.8 GHz, 23.6 GHz, 29.5 GHz et avec des largeurs de raies respectives de 300 Hz, 250 Hz et 50 Hz.

Les performances de nos peignes de Kerr en termes de bruits de phase sont les suivantes :

1. Le peigne de Kerr primaire présent sur la figure 2.8(a) et généré à la puissance de 77.4 mW a conduit à une onde RF à la fréquence 30.4 GHz. Cette dernière présente une performance de -88 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse.
2. L'augmentation de la puissance de pompe a généré un peigne de Kerr secondaire qui est présenté sur la figure 2.9(e). Sa détection sur photodiode rapide a conduit à deux ondes RF dont les fréquences respectives 6.04 GHz et 30.4 GHz correspondent aux espacements Δ entre bandes primaires et δ entre bandes secondaires consécutives du peigne. Le spectre de bruit de phase de l'onde RF à 6.04 GHz sur la figure 2.9(f) a une performance de -60 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse qui est loin d'être satisfaisante. Celui de l'onde RF à 30.4 GHz sur la figure 2.9(g), présente quant à lui une performance de -90 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse

Ces performances sont en dessous de nos objectifs, Il convient donc d'apporter des explications aux raisons qui limitent nos performances en termes de largeur de raies dans le cadre d'un locking thermique et en bruit de phase dans le cadre d'une stabilisation par PDH. C'est l'objet de la section qui suit

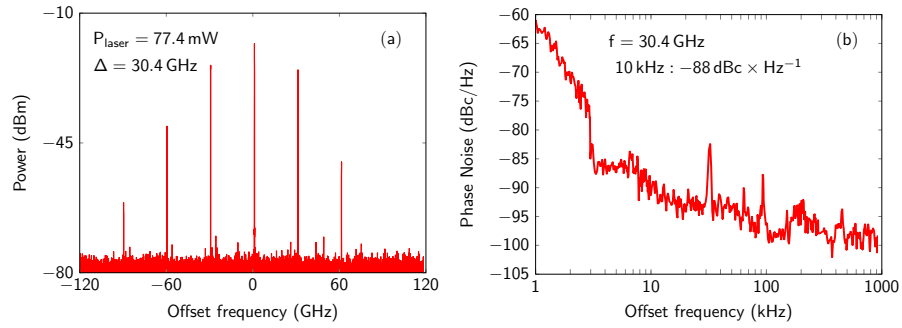


FIGURE 2.8 – Peigne de Kerr primaire en régime de stabilisation PDH obtenu avec une puissance laser de 77.4 mW [(a)]. Ses bandes consécutives sont espacées de $\Delta = 30.4 \text{ GHz}$. Le spectre de bruit de phase [(b)] du signal RF résultant à la fréquence de 30.4 GHz présente une performance de -88 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse.

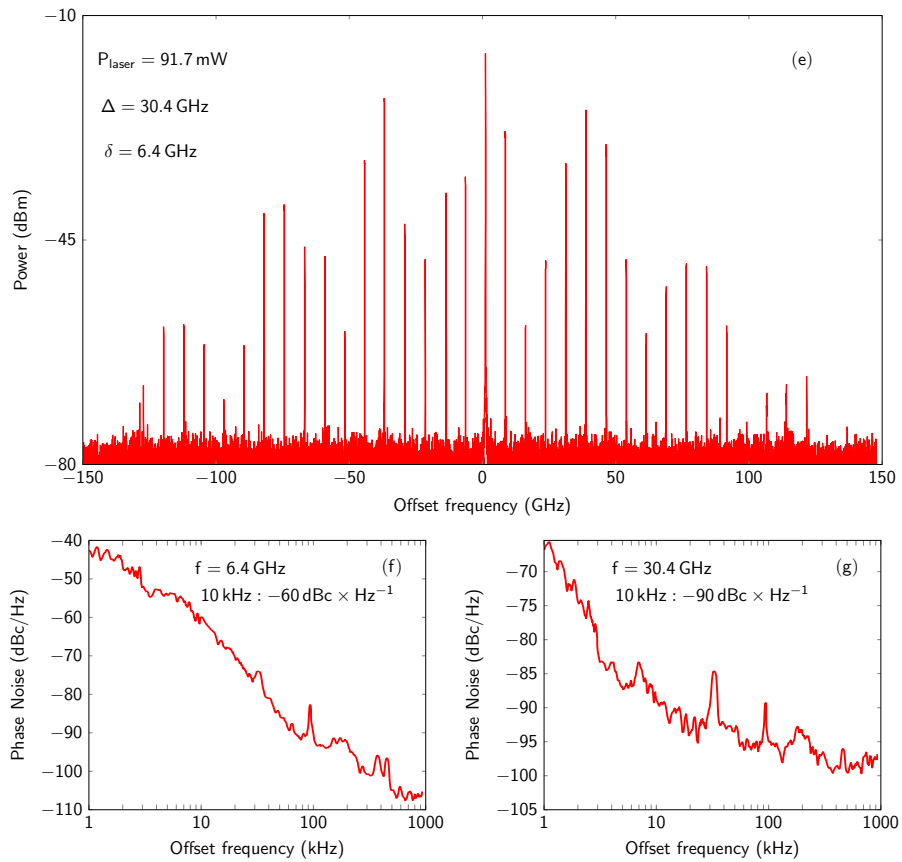


FIGURE 2.9 – Peigne de Kerr secondaire en régime de stabilisation PDH obtenu avec une puissance laser de 91.7 mW [(e)]. Il comporte des bandes primaires consécutives espacées de $\Delta = 30.4 \text{ GHz}$ autour desquelles figurent les bandes secondaires espacées de $\delta = 6.4 \text{ GHz}$. Le spectre de bruit de phase du signal RF à 6.4 GHz [(f)] présente une performance de -60 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse. Celui à 30.4 GHz [(g)] présente une performance de -90 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse.

2.2.6/ BRUIT DE FRÉQUENCE D'UN PEIGNE DE KERR GÉNÉRÉ À TRAVERS UN RÉSONATEUR À MODES DE GALERIE

Notre motivation à explorer les peignes de fréquences optiques dans les résonateurs à modes de galerie est la génération d'ondes RF à haute pureté spectrale. Au regard des performances que nous avons obtenues dans ce sens, il est important de connaître les différentes sources de bruit qui représentent un frein à cela mais aussi les voies et moyens pour y remédier. Le bruit de fréquence d'un peigne de Kerr est constitué du bruit de fréquence présent sur chaque composante du peigne, du bruit de fréquence correspondant aux écarts Δ et δ entre les dents du peigne de fréquences générées. Il faut aussi considérer le bruit de grenaille, le bruit quantique et le bruit thermique provenant tous les trois de la photodiode, et de manière générale de l'électronique utilisée pour stabiliser le peigne. Chacun de ces bruits peut être caractérisé. Nous nous sommes cependant concentrés sur la caractérisation du bruit de fréquence résultant des écarts entre les dents du peigne dans la mesure où ils dictent la fréquence de l'onde RF générée. Les spectres RF que nous avons obtenus en régime de *thermal locking* présentent des structures multimodes avec des largeurs de raies kilohertz dans certains cas et mégahertz dans d'autres. Le caractère multimode de ces ondes RF s'explique par l'existence de modes optomécaniques. Ils sont dûs à une pression radiative qui les excite à condition que leurs fréquences coïncident avec une résonance optique du résonateur à modes de galerie, d'où le nom de modes optomécaniques. Une description théorique de leur couplage aux résonances optiques d'un résonateur en silice de forme microtoroidale ainsi que leur observation expérimentale a été rapportée par Kippenberg et al [91] en 2005. Dans ces travaux, des modes mécaniques avec des facteurs de qualité atteignant 10^6 à des fréquences comprises entre 1 et 100 MHz ont été démontrés. En 2010, Hofer et al [92] ont observé ces modes optomécaniques dans des résonateurs cristallins en MgF_2 et CaF_2 avec des facteurs qui atteignent 10^5 à environ 20 MHz. Ces valeurs sont assez élevées et justifient le caractère multimode des ondes RF générées.

Les largeurs de raies élevées obtenues sont la signature de bruit de fréquence. Nous savons que les résonateurs à modes de galerie sont sujets à des effets pouvant conduire à des fluctuations de fréquence. Ces fluctuations de fréquence peuvent être à l'origine de bruits qui élargissent les raies des spectres RF. Parmi ces bruits, nous pouvons citer le bruit thermo-réfractif, le bruit thermo-élastique, le bruit photothermique, le bruit pondéromotif, le bruit du laser mais aussi les bruits provenant de l'effet Kerr [71, 93, 94, 95, 96]. Si nous notons $\Delta\omega$ le terme représentant la fluctuation de fréquence, ω la valeur moyenne du mode résonant sélectionné, R et ΔR les valeurs du rayon du résonateur et ses fluctuations, n et Δn l'indice de réfraction du résonateur et ses fluctuations, les variations relatives de la fréquence du mode résonant peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta n}{n}. \quad (2.5)$$

Dans cette expression, $\Delta R/R$ et $\Delta n/n$ sont la signature du bruit thermo-élastique qui agit sur le diamètre du résonateur et du bruit thermoréfractif qui agit sur l'indice de réfraction du résonateur. Les travaux de Matsko et al. [96] sur les fluctuations thermodynamiques ont démontré que pour un résonateur à modes de galerie cristallin, les fluctuations de fréquences sont essentiellement dues aux bruits thermoréfractifs, thermo-élastiques et aux effets pondéromotifs de la lumière. De surcroît, l'augmentation de la puissance de

pompe laser et le changement du désaccord laser-résonance entraînent l'émergence de nouvelles bandes sur le peigne de fréquences généré. Le résultat est une onde RF à largeur de raie élevée (MHz) qui change de fréquence de manière continue ou discontinue.

Les explications concernant les limites de nos performances en régime de locking thermiques sont valables en régime de stabilisation par Pound-Drever-Hall. Aux fluctuations de fréquences s'ajoutent le bruit de l'électronique utilisée pour la stabilisation. En effet, nous utilisons à ce propos un module TOPTICA qui contient toute l'électronique nécessaire à la stabilisation par PDH à savoir le générateur de fréquences, et le contrôleur PID qui génère le signal de correction. Sa contribution se manifeste sur les spectres RF par des composantes spectrales de faible amplitude autour de l'onde RF que nous appelons *cross-talk*, mais aussi en bruit de phase.

2.3/ MODÉLISATION NUMÉRIQUE DES PEIGNES DE FRÉQUENCES OPTIQUES

2.3.1/ INTRODUCTION

L'étude de spectres RF des peignes de fréquences optiques ne suffit pas à expliquer leurs dynamiques. Nous avons introduit précédemment les notions de peignes de fréquences primaire, secondaire et chaotique sans expliquer de manière précise le rôle joué par des paramètres tels que la dispersion, le désaccord laser-résonance, le facteur de qualité ou encore la puissance de pompe sur la dynamique du peigne. À ce stade du manuscrit, il nous est par exemple impossible de donner une expression analytique de la puissance seuil nécessaire à l'excitation de peignes de Kerr. Il nous est également impossible d'expliquer la formation de solitons dans les résonateurs à modes de galerie encore moins la formation de peigne de fréquences en régime de dispersion normale. Les réponses à toutes ces questions passent par l'étude théorique de peigne de Kerr dans un résonateur à modes de galerie. C'est l'objet de cette section.

Depuis leur observation en 2004 [6, 7], les peignes de fréquences optiques à base de résonateurs à modes de galerie ont suscité beaucoup d'attention aussi bien dans le domaine expérimental que dans le domaine théorique. L'étude théorique de ces peignes a permis la bonne compréhension de leur dynamique. Deux types de modèles se démarquent à savoir les modèles modal et spatiotemporel. Nous commençons cette section par la présentation des différents modèles théoriques introduits depuis l'avènement de la technologie. Nous introduisons ensuite le modèle modal puis le modèle spatiotemporel qui a été utilisé dans le cadre de cette thèse. L'analyse de stabilité de ce modèle est également brièvement présentée. Elle est très importante dans la mesure où elle décrit les différents régimes de peigne de Kerr et établit un lien entre ces régimes et les paramètres expérimentaux tels que la dispersion, la puissance laser et autres.

2.3.2/ MODÈLES THÉORIQUES DE PEIGNES DE KERR OPTIQUES

En 2009, un premier modèle a été introduit par Agha et *al.* [97]. Les champs des modes y sont traités comme un champ unique se propageant à travers une cavité en anneau

unidimensionnelle via la méthode de split-step Fourier. D'après ce formalisme, lorsqu'on injecte un champ optique noté E_{in} à l'intérieur d'une cavité de taille L grâce à une lame semi-réfléchissante de réflectivité R et de transmittivité T , le champ intracavité noté E_c à la position $z = 0$ et à l'instant t s'exprime comme suit :

$$E_c(z = 0, t) = \sqrt{R}E_{\text{in}} + i\sqrt{T}E_c(z = L, t - 1). \quad (2.6)$$

Dans cette expression, $E_c(z = L, t - 1)$ est la valeur avancée du champ intra-cavité via la méthode de split-step. Bien qu'étant le premier du genre, ce modèle est assez limité dans la mesure où il ne permet pas de simuler tout les types de peignes de Kerr. Les auteurs reconnaissent que leur formalisme ne permet par exemple pas de décrire la formation d'impulsions dans le domaine temporel.

Dans le cadre de leurs études concernant les régimes chaotiques dans les résonateurs à modes de galerie, Matsko et *al.* [98] ont présenté un modèle modal qui décrit la dynamique de chaque mode. Ce dernier s'exprime comme suit :

$$\dot{\hat{b}}_j = -(\gamma + i\omega)\hat{b}_j + \frac{i}{\hbar}[\hat{V}, \hat{b}_j] + Fe^{-i\omega t}\delta_{j_0,j}, \quad (2.7)$$

où $\hat{b}_j$ est le champ du mode d'ordre j , γ la largeur à mi-hauteur des modes optiques résonant dans la cavité, $\hbar$ la constante de Planck et $\hat{V}$ le Hamiltonien d'interaction qui a pour expression :

$$\hat{V} = -\frac{\hbar g}{2}(\hat{e}^*)^2\hat{e}^2. \quad (2.8)$$

Ici, $\hat{e}^* = \sum \hat{b}_j$ est la somme des opérateurs d'annihilation du champ électromagnétique pour tous les modes pris en considération et $g = \hbar\omega_0^2cn_2/vn_0^2$ est le paramètre de couplage. Dans l'équation (2.7), F correspond à l'amplitude de la pompe et s'exprime comme suit :

$$F = [(2\gamma_0cP/\hbar\omega_0)]^{1/2}, \quad (2.9)$$

où P est la puissance de pompe. Le modèle modal de Matsko et *al.* très proche de celui que nous présentons plus loin permet de reproduire différents types de peignes de Kerr. Le problème de coût numérique élevé de ce modèle a récemment été résolu par Wabnitz et *al.*

Dans le but d'analyser les peignes de fréquences à modes verrouillés dans les résonateurs à modes de galerie, Matsko et *al.* [99] ont introduit en 2011 le premier modèle spatio-temporel. Leur formalisme est une variante de l'équation de Schrödinger non-linéaire qui admet des solutions analytiques explicites applicables aux générateurs de peignes de fréquences tels que les résonateurs à modes de galerie. Le modèle se ramène à une équation unique qui a pour expression :

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{i}{2}\beta_2 \Sigma \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i\gamma_\Sigma |A|^2 A = -\left(\alpha_\Sigma + \frac{T_c}{2} + i\delta_0\right)A + \sqrt{T_c}A_{\text{in}}, \quad (2.10)$$

où $A(t, \tau)$ est l'amplitude de l'enveloppe du champ électrique en tenant compte de l'approximation de l'enveloppe lentement variable, τ le temps, $V_g = 1/\beta_1 \simeq c/n_0$ la vitesse

de groupe, $\beta_{2\Sigma} = (2\omega_l - \omega_{l-1} - \omega_{l+1})(\tau_0/\omega_{\text{FSR}}^2)$ le paramètre traduisant la dispersion de vitesse de groupe du résonateur. Dans cette dernière, $\tau_0 = 2\pi nR/V_g$ est le temps nécessaire à un photon pour faire un tour de cavité où R est le rayon de la cavité. Dans l'équation (2.10), l'amplitude de l'atténuation par tour de cavité est notée α_Σ , les pertes de couplage par tour de cavité sont représentées par $T_c/2$ et le paramètre non-linéaire par γ . Ce dernier intervient dans l'expression de γ_Σ qui est $\gamma_\Sigma = 2\pi R\gamma$. L'amplitude du champ de pompe est $A_{\text{in}} = \sqrt{P_0} \exp(i\Phi_{\text{in}})$, où P_0 est la puissance de pompe. Ce modèle qui présente des résultats analytiques sans simulations numériques de peignes de fréquences est également limité dans la mesure où il considère que le résonateur a un facteur de qualité infini et limite le développement de la dispersion de vitesse de groupe au second ordre.

En 2013, Coen et *al.* [100] ont introduit à leur tour un formalisme spatio-temporel résolu numériquement par la méthode de Newton-Raphson [101] afin de modéliser les peignes de fréquence dans les résonateurs à modes de galerie à très haut facteur de qualité. Ils expriment le champ intra-cavité E_c d'un résonateur en anneau pompé en continu par un laser de champ E_{in} comme suit :

$$t_r \frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} = \left[-\alpha - i\delta_0 + iL \sum_{k \geq 2} \frac{\beta_k}{k!} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^k + i\gamma L |E|^2 \right] E + \sqrt{\theta} E_{\text{in}}. \quad (2.11)$$

Dans cette équation, t_r est le temps nécessaire à un photon pour faire un tour de cavité, $\alpha = (\alpha_i + \theta)/2$ représente les pertes totales de la cavité où θ est le coefficient de transmission du coupleur, $\delta_0 = 2\pi l - \phi_0$ correspond au décalage fréquentiel entre le laser et la résonance, β_k le coefficient de dispersion avec k , l'ordre de dispersion. Le coefficient non-linéaire est $\gamma = n_2 \omega_0 / (c A_{\text{eff}})$, où n_2 est le coefficient Kerr, A_{eff} l'aire effective du mode. Enfin, L représente la longueur du chemin optique. Il est important de préciser que dans leurs travaux, Coen et *al.* ont restreint leur étude au cas particulier des solitons temporels.

Nous constatons que deux formalismes se démarquent concernant la modélisation des peignes de fréquences dans les résonateurs à modes de galerie. Le formalisme modal et le formalisme spatio-temporel. Le formalisme modal permet de traiter la dynamique de chaque mode de manière individuelle. Ses faiblesses se situent au niveau de son coût numérique. Le formalisme spatio-temporel quant à lui semble plus complet ; il est celui qui a été utilisé dans le cadre de cette thèse. Nous présentons dans la section qui suit notre modèle modal en apportant plus de précisions sur ses limites puis expliquons dans la section d'après le passage du modèle modal à notre modèle spatio-temporel. Ce dernier est globalement équivalent à celui développé par Coen et *al.* dans [100] .

2.3.3/ MODÈLE MODAL

En 2010, un modèle modal permettant la simulation numérique de peignes de fréquences à travers les résonateurs à modes de galerie a été développé [102]. Les auteurs ont effectué une analyse de stabilité de leur modèle qui permet d'expliquer différents régimes de peignes de Kerr. Cette analyse est soutenue par des simulations numériques qui sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux obtenus par de nombreuses équipes de recherche du domaine. Il est à noter que ces travaux sont d'une grande importance

dans la mesure où ils sont les premiers à avoir expliqué de manière exacte la cascade d'interactions permettant la formation de peignes de Kerr dans les résonateurs à modes de galerie. Ils ont en particulier démontré que l'interaction entre la dispersion et la non-linéarité du résonateur joue un rôle déterminant sur la stabilité, le profil spectral et la largeur spectrale du peigne formé [102, 103]. Ce modèle modal repose sur le suivi de la dynamique temporelle de chaque mode résonant dans la cavité et a pour expression :

$$\dot{\mathcal{A}}_\eta = -\frac{1}{2}\Delta\omega_\eta\mathcal{A}_\eta - ig_0 \sum_{\alpha,\beta,\mu} \Lambda_\eta^{\alpha\beta\mu} \mathcal{A}_\eta \mathcal{A}_\beta^* \mathcal{A}_\mu e^{i\varpi_{\alpha,\beta,\mu,\eta}t} + \frac{1}{2}\Delta\omega_\eta\mathcal{F}_\eta e^{i(\Omega_0-\omega_\eta)t}, \quad (2.12)$$

où $\mathcal{A}_\eta$ est l'enveloppe complexe champ électrique du mode d'ordre η . Son module $|\mathcal{A}_\eta|^2$ correspond au nombre de photons instantanés sur le mode en question. La largeur de raie du mode $\Delta\omega_\eta$ qui est liée au facteur de qualité du résonateur et que nous appellerons largeur de raie modale est :

$$\Delta\omega_\eta = 2\Gamma_\eta \frac{\omega_\eta}{n_0} [n_{\text{int}}(\omega_\eta) + n_{\text{ext}}(\omega_\eta)] = \Delta\omega_{\text{int},\eta} + \Delta\omega_{\text{ext},\eta}, \quad (2.13)$$

avec n_0 l'indice de réfraction du résonateur, n_{in} et n_{ext} les coefficients de pertes intrinsèques et extrinsèques. La largeur de raie modale est proportionnelle au facteur de confinement du mode Γ_η qui s'exprime comme suit :

$$\Gamma_\eta = \int_V \|\Upsilon_\eta(\mathbf{r})\|^2 dV. \quad (2.14)$$

Les modes de galerie étant très confinés, $\Gamma_\eta \simeq 1$. Le gain Kerr g_0 a pour expression

$$g_0 = \frac{n_2 c}{n_0^2} \frac{\hbar \omega_{\eta_0}^2}{V_{\eta_0}}. \quad (2.15)$$

Il est fonction du coefficient Kerr n_2 (environ $10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ pour les résonateurs utilisés dans cette thèse), de la vitesse de la lumière c , de l'indice de réfraction du résonateur n_0 , de la constante de Planck $\hbar$, de la fréquence angulaire ω_{η_0} et du volume effectif V_{η_0} (environ 10^{-20} m^3 pour les résonateurs utilisés dans cette thèse). Ce dernier se définit comme suit :

$$V_\eta = \left[\int_V \|\Upsilon_\eta(\mathbf{r})\|^4 dV \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

Le coefficient de couplage intermodal $\Lambda_\eta^{\alpha\beta\mu}$ qui s'écrit :

$$\Lambda_\eta^{\alpha\beta\mu} = \frac{\omega_\mu^2}{\omega_{\eta_0}} \sqrt{\frac{\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\mu}{\omega_\eta^3}} \frac{\int [\Upsilon_\eta^* \cdot \Upsilon_\mu] [\Upsilon_\beta^* \cdot \Upsilon_\alpha]}{\int_V \|\Upsilon_\eta(\mathbf{r})\|^4 dV}, \quad (2.17)$$

traduit de la force de couplage entre les quatre modes α, β, μ , et η . Il est d'autant plus élevé que le recouvrement entre les modes est fort et sa valeur maximale est 1. La condition

de résonance idéale intervient quand le décalage fréquentiel intermodal noté ici $\varpi_{\alpha\beta\mu\eta}$ et défini par :

$$\varpi_{\alpha\beta\mu\eta} = \omega_\alpha - \omega_\beta + \omega_\mu - \omega_\eta \quad (2.18)$$

devient nul. Cette situation est en général difficile à satisfaire à cause de la dispersion. La dernière partie de l'équation (2.12) contient le facteur de pompe externe F_η qui s'écrit :

$$\mathcal{F}_\eta = -\frac{i\Omega_0^2}{\omega_\eta \Delta\omega_\eta} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 n_0^2}{\hbar \omega_\eta}} \varepsilon_{\text{ext}} \int_V \Upsilon_\eta(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_0 \cdot dV. \quad (2.19)$$

Il traduit l'interaction entre la pompe et le mode de galerie d'ordre η et a été normalisé afin d'avoir un ordre de grandeur comparable à celui de $\mathcal{A}_\eta$.

Le modèle modal est très efficace pour suivre la dynamique de chaque mode. Il a par exemple permis de donner l'expression analytique de la puissance seuil Kerr $\mathcal{A}_{0\text{th}}$ qui est :

$$|\mathcal{A}_{0\text{th}}|^2 = \frac{1}{2} \frac{\delta\omega_0}{g_0} = \frac{1}{2\hbar\omega_0} \frac{n_0^2}{n_2 c} \frac{V_0}{Q_0}. \quad (2.20)$$

Il permet également de mettre en évidence les conditions d'obtention des peignes de Kerr primaires et secondaires. Le modèle modal était initialement limité lorsque le nombre de modes augmente car le coût de la simulation numérique augmentait de manière cubique avec celui-ci [104]. Hanson et Wabnitz ont résolu ce problème [105]. Le nombre de modes devient très élevé lorsque le peigne de fréquences s'étale sur une octave voir plus. La formation d'impulsions nécessite également l'interaction entre plusieurs modes. Le besoin d'un modèle simple, rapide, permettant d'expliquer et de simuler tous les régimes de peignes de Kerr s'impose. Le formalisme spatio-temporel utilisé dans le cadre de cette thèse a donc été introduit pour répondre à ces problèmes. Il est une variante de l'équation de Lugiato-Lefever [106] et est l'objet de la section qui suit.

2.3.4/ MODÈLE SPATIO-TEMPOREL

Le modèle spatio-temporel utilisé dans cette thèse pour la modélisation des peignes de fréquence dans les résonateurs à modes de galerie a été introduit en 2013 *al.* [104]. Il a été obtenu à partir du modèle modal présenté précédemment [103]. Il permet de parer aux problèmes de coût numérique, de rapidité de simulation, et aux limites du modèle modal en terme de nombre de modes qui rend difficile voir impossible l'étude de la formation d'impulsions ou de peignes s'étalant sur une large plage (octave). Contrairement au modèle modal qui traite de la dynamique de chaque mode, le modèle spatio-temporel traite de la dynamique de l'enveloppe du champ somme de tous les modes notée $\mathcal{A}(\theta, t)$. En se plaçant dans le cadre de l'approximation de l'enveloppe lentement variable, $\mathcal{A}(\theta, t)$ s'écrit :

$$\mathcal{A}(\theta, t) = \sum_l \mathcal{A}_l(t) \exp[i(\omega_l - \omega_0)t - i(l - l_0)\theta], \quad (2.21)$$

où θ est l'angle azimuthal le long de la circonférence du résonateur, $\mathcal{A}_l$ et ω_l le champ et la fréquence du mode l . Cette dernière s'exprime comme suit :

$$\omega_l = \omega_{l_0} + \sum_{n=1}^N \frac{\zeta_n}{n!} (l - l_0)^n, \quad (2.22)$$

où l_0 est l'ordre du mode pompé, $\zeta_1 = d\omega/dl|_{l=l_0} = \Delta\omega_{FSR}$ l'intervalle spectral libre du résonateur, $\zeta_2 = d^2\omega/dl^2|_{l=l_0}$ la dispersion du second ordre. La dérivée temporelle de l'équation (2.21) et sa dérivée suivant θ conduisent aux équations ci après :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \sum_l \left[\frac{d\mathcal{A}_l}{dt} + i(\omega_l - \omega_0)\mathcal{A}_l \right] \exp[i(\omega_l - \omega_0)t - i(l - l_0)\theta], \quad (2.23)$$

$$i^n \frac{\partial^n \mathcal{A}}{\partial \theta^n} = \sum_l (l - l_0)^n \mathcal{A}_l \exp[i(\omega_l - \omega_0)t - i(l - l_0)\theta]. \quad (2.24)$$

En considérant que $\Delta\omega_l = \Delta\omega_{l_0}$, l'équation (2.23) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = & -\frac{1}{2}\delta\omega_{l_0}\mathcal{A} - ig_0|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} + \frac{1}{2}\delta\omega_{l_0}\mathcal{F}_0 e^{i\sigma t} + \sum_{n=1}^N i^{n+1} \frac{\zeta_n}{n!} \frac{\partial^n \mathcal{A}}{\partial \theta^n} \\ & + g_0 \left[\eta_l \frac{\partial}{\partial \theta} (|\mathcal{A}|^2 \mathcal{A}) + 2\eta_{lm} |\mathcal{A}|^2 \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \theta} - \eta_{ln} \mathcal{A}^2 \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dans cette expression, $\sigma = \Omega_0 - \omega_{l_0}$ est le décalage fréquentiel entre le laser et le mode résonnant dans la cavité. Par souci de simplicité, il est préférable de poser que $\mathcal{A} = \mathcal{A} \exp(i\sigma t)$ et $\theta = \theta - \zeta_1 t \bmod [2\pi]$. En limitant le développement de la dispersion au second ordre, le facteur de confinement $\Lambda_l^{l_m l_n l_p} = 1$. Ainsi l'équation (2.25) devient :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\omega_{l_0}\mathcal{A} - i\sigma\mathcal{A} + \frac{1}{2}\Delta\omega_{l_0}\mathcal{F}_0 - ig_0|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} - i\frac{\zeta_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \theta^2}. \quad (2.26)$$

Elle peut être réécrite sous une forme normalisée comme suit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -(1 + i\alpha)\psi + i|\psi|^2\psi - i\frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + F, \quad (2.27)$$

où $\psi = (2g_0/\Delta\omega_{l_0})^{1/2} \mathcal{A}^*$ est l'enveloppe complexe du champ total intra-cavité, $\tau = \Delta\omega_{l_0} t/2$ le temps normalisé, $\alpha = -2\sigma/\Delta\omega_{l_0}$ le décalage fréquentiel normalisé, $\beta = -2\zeta_2/\Delta\omega_{l_0}$ la dispersion et $F = (2g_0/\Delta\omega_{l_0})^{1/2} \mathcal{F}_0^*$ le terme représentant la pompe externe. Cette équation est homologue à l'équation de Lugiato-Lefever introduite en 1987 par L. A. Lugiato et R. Lefever [106]. Dans leurs études concernant les structures spatiales dissipatives dans les systèmes optiques passifs, ils ont considéré une cavité constituée de 4 miroirs. Deux de ces miroirs sont orthogonaux à l'axe z , distant de L avec un coefficient de transmission $T \ll 1$. Les deux autres miroirs sont orthogonaux à l'axe x , distants de b avec un coefficient de réflexion de 100%. Dans cette cavité est injectée une onde plane cohérente noté E_l , le champ transmis par cette cavité est proportionnel à la fonction normalisée de l'enveloppe $E(x)$ et s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{t}} = -E + E_l + i\eta E(|E|^2 - \theta) + ia \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{x}^2}. \quad (2.28)$$

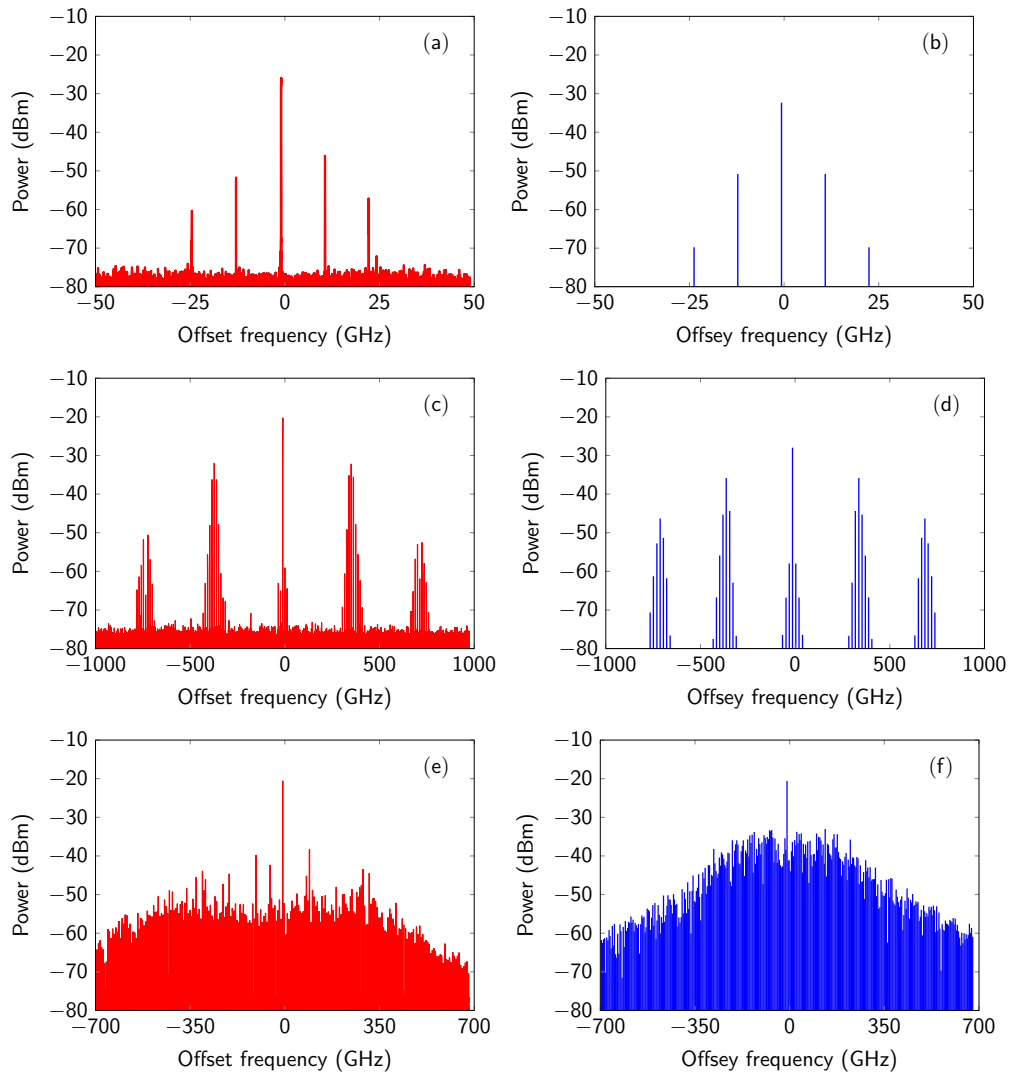


FIGURE 2.10 – Les figures **[(a,c,e)]** en rouge sont des peignes de Kerr expérimentaux obtenus pour des puissances laser comprises entre 70 et 200 mW. Celles en bleu **[(b,d,f)]** sont les résultats de simulations numériques obtenues à partir de l'équation de Lugiato-Lefever. Les paramètres des simulations numériques sont $\alpha = 1.1$, $\beta = -0.387$, $F = 1.05$ pour **[(b)]**; $\alpha = 1.1$, $\beta = -0.005$, $F = 1.05$ pour **[(d)]**; $\alpha = 2$, $\beta = -0.04$, $F = 21$ pour **[(f)]**.

Dans cette équation, $\bar{a} = x/b$, $\bar{t}$ sont des paramètres indépendants et $k = cT/2L$ est la largeur de raie de la cavité. Le paramètre de diffraction est noté $a = 1/2\pi T\mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est le nombre de Fresnel et λ la longueur d'onde. L'auto-focalisation et l'auto-défocalisation non-linéaire représentées ici par η est égale à ± 1 et le produit $\eta\theta$ est le paramètre traduisant le désaccord laser-résonance ou *detuning*. L'unique différence entre les équations (2.27) et (2.28) se situe au niveau du dernier terme de ce dernier où le paramètre de diffraction a est remplacé par la dispersion β .

Nous venons de présenter le modèle spatio-temporel qui a été utilisé dans le cadre de cette thèse et de lister ses avantages. Dans la suite de ce manuscrit, nous appellerons l'équation du modèle "l'équation de Lugiato Lefever" et la désignerons par "LLE". La section qui suit présente de manière brève l'analyse de stabilité de cette équation Lugiato-

Lefever [107].

2.3.5/ ANALYSE DE STABILITÉ

Pour rappel, l'équation (2.29) ci-dessous que nous appelons LLE traduit l'évolution de l'enveloppe complexe du champ total intra-cavité ψ en fonction du temps.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -(1 + i\alpha)\psi + i|\psi|^2\psi - i\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + F. \quad (2.29)$$

Son expression contient le décalage fréquentiel normalisé α entre le laser et le mode résonant dans la cavité, la dispersion de vitesse de groupe β , l'angle $\theta \in [-\pi, \pi]$ et la pompe externe notée ici F . Les travaux de Godey et *al.* [107] ont conduit au tracé de deux diagrammes de bifurcation permettant d'obtenir le type de peigne voulu. En effet, les paramètres de ces diagrammes sont la dispersion de vitesse de groupe β , la pompe F et le décalage fréquentiel α . Les paramètres α F sont les seuls ajustables lors d'expériences de génération de peignes de fréquences. La dispersion de vitesse de groupe β est également un paramètre clé. Deux régimes de dispersion sont abordés dans ces travaux à savoir le régime de dispersion normal qui correspond au cas ($\beta > 0$, $\zeta_2 < 0$) et le régime de dispersion anormale qui correspond au cas $\beta < 0$, $\zeta_2 > 0$. Leurs influences sur la position des modes sont illustrées par la figure 2.11. Cette analyse de stabilité permet donc de prédire les couples (α, F^2) et le type de dispersion β permettant d'obtenir des peignes primaires, secondaires, chaotiques ou encore des solitons. Dans la section qui suit, nous présentons de manière très brève les deux diagrammes de bifurcation.

2.3.6/ DIAGRAMME DE BIFURCATION : DISPERSION NORMALE β POSITIF ET DISPERSION ANORMALE β NÉGATIF

Les deux diagrammes de stabilité présentés sur les figures 2.12 et 2.13 comportent les solutions de l'équation de Lugiato-Lefever. Ces solutions correspondent à des peignes de Kerr ayant des allures et dynamiques bien différentes. Nous distinguons parmi elles les peignes primaires correspondant à des rouleaux de Turing, les peignes secondaires, les peignes chaotiques, les solitons qui peuvent être sombres ou brillants [108]. Par le biais de ces diagrammes, il est possible de connaître le type de dispersion et les couples (α, F) permettant d'obtenir le type de peigne voulu. Quelques simulations numériques en régime de dispersion anormale sont présentées sur les figures 2.14, 2.15, 2.16 [107].

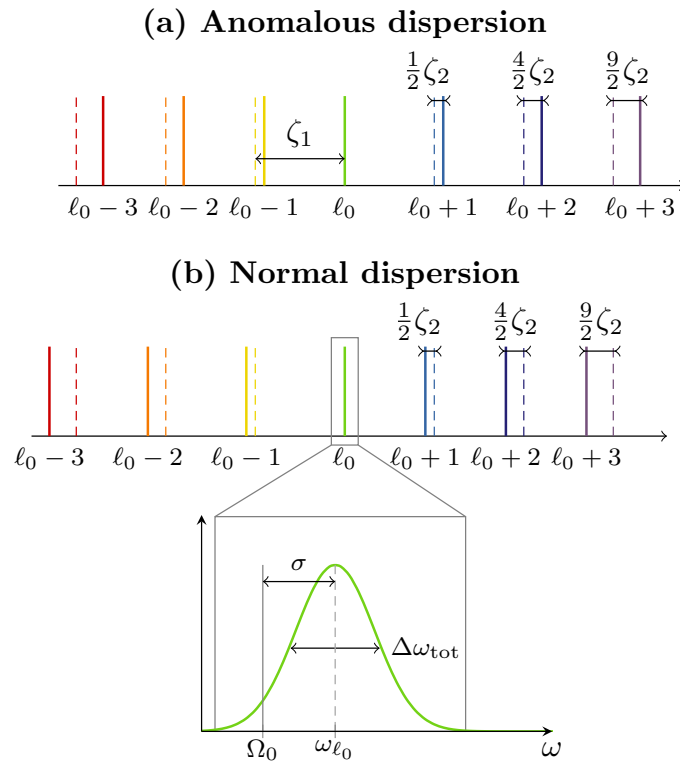


FIGURE 2.11 – Figure illustrant la dispersion anormale [(a)] qui correspond au cas $\beta > 0, \zeta_2 < 0$ et la dispersion normale [(b)] qui correspond au cas $\beta > 0, \zeta_2 < 0$ d'après [107].

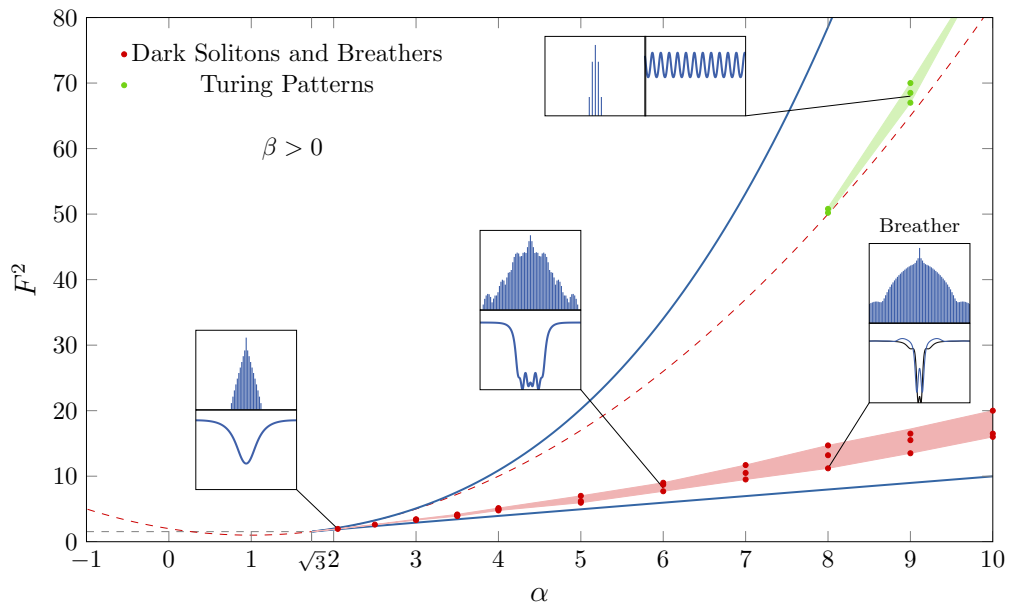


FIGURE 2.12 – Diagramme de bifurcation en régime de dispersion normale qui présente les couples (α, F^2) permettant d'obtenir des peignes primaires ou *Turing rolls*, des solitons sombres ou *dark solitons* ainsi que des *breathers* d'après [107]

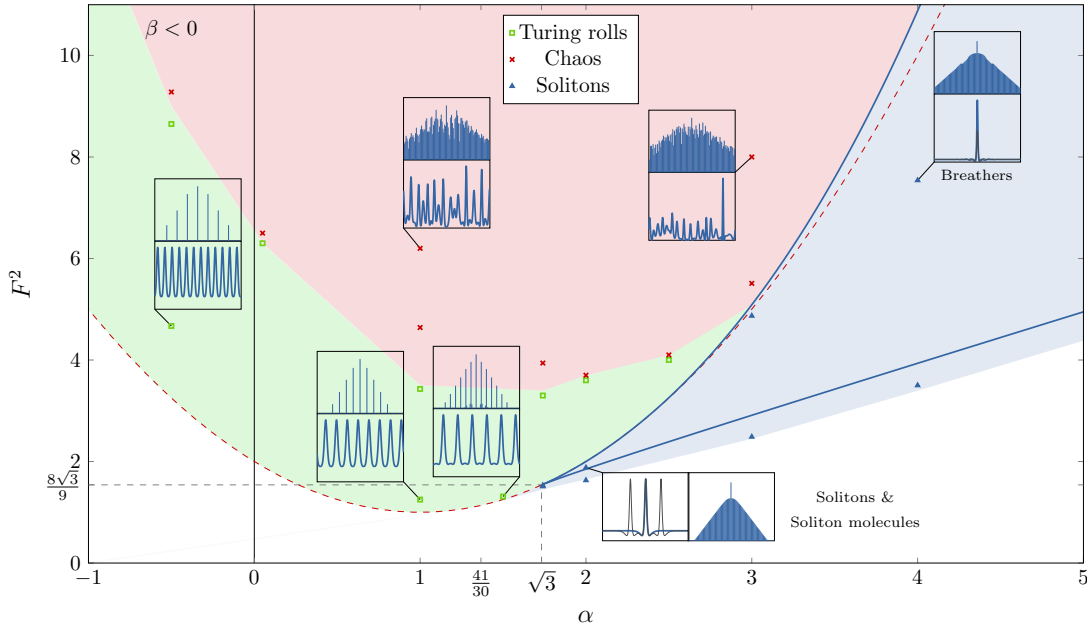


FIGURE 2.13 – Diagramme de bifurcation en régime de dispersion anormale qui présente les couples (α, F^2) permettant d'obtenir des peignes primaires ou rouleaux de Turing, du chaos, des solitons sombres, des solitons brillants d'après [107]

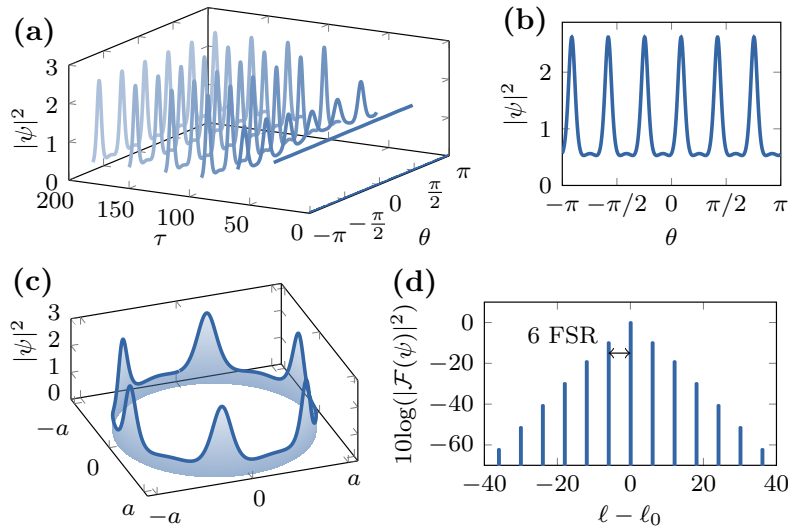


FIGURE 2.14 – Simulation numérique d'un peigne de Kerr primaire en régime de dispersion anormale. Les paramètres sont $\alpha = 1$, $\beta = -0.04$ et $F = 1.3107$. **[(a)]** Dynamique transitoire, **[(b)]** Signal temporel dans la direction azimuthale, **[(c)]** Représentation 3D du peigne, **[(d)]** signal temporel correspondant, d'après [107]

2.4/ INSTABILITÉS OSCILLATOIRES DANS LES RÉSONATEURS À MODES DE GALERIE

Un résonateur à modes de galerie pompé par un laser émettant en continu est sujet à des effets thermiques pouvant conduire à des instabilités oscillatoires [109, 110, 111].

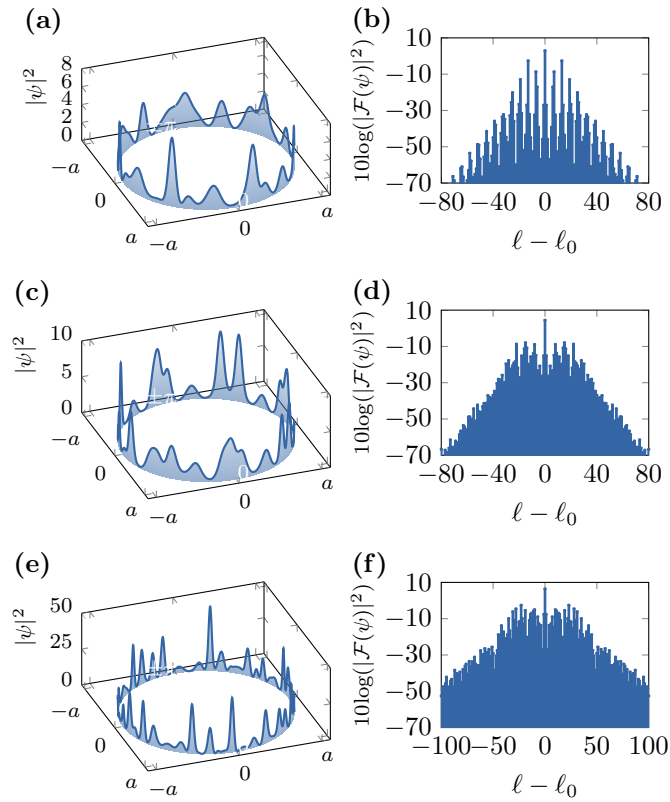


FIGURE 2.15 – Simulations numériques de peignes de Kerr chaotiques en régime de dispersion anormale. **[(a)]** Représentation 3D d'un peigne de Kerr chaotique pour $\alpha = 0$, $\beta = -0.04$ et $F = 7.0711$. **[(b)]** Peigne de fréquences correspondant. **[(c)]** Représentation 3D d'un peigne de Kerr chaotique pour $\alpha = 0$, $\beta = -0.04$ et $F = 15.8237$. **[(d)]** Peigne de fréquences correspondant. **[(e)]** Représentation 3D d'un peigne de Kerr chaotique pour $\alpha = 2$, $\beta = -0.04$ et $F = 15.2971$. **[(f)]** Peigne de fréquences correspondant.

Ces instabilités oscillatoires que nous qualifions de thermo-optiques sont dues à l'interaction complexe entre les coefficients thermiques du résonateur et sa non-linéarité intrinsèque de Kerr. Nous savons que les résonateurs à modes de galerie peuvent être utilisés pour des applications type laser [96, 112, 113], capteurs [111, 114] ou encore pour la génération de peignes de fréquences optiques [115]. De ce fait, la bonne compréhension de ces effets thermiques s'avère indispensable pour une maîtrise des domaines d'applications cités précédemment. Nous rapportons dans ce chapitre la première observation d'instabilités oscillatoires dans un résonateur à modes de galerie cristallin en fluorure de barium (BaF_2) de taille millimétrique. Nous proposons un modèle non-linéaire temporel permettant de décrire la dynamique de ces instabilités et présentons les résultats de nos simulations numériques. Celles-ci démontrent que même dans le cas de résonateurs de taille millimétrique, ce type d'instabilité extrême peut être modélisé et analysé avec une grande précision.

Lorsqu'un résonateur à modes de galerie est pompé avec un laser émettant en continu, les photons peuvent être piégés dans sa périphérie interne pour des durées de l'ordre de quelques microsecondes. Le champ laser devient intense dans le volume du mode et chauffe la périphérie interne du résonateur. Intuitivement, il est facile de penser que la chaleur provenant de cette augmentation locale de température se dissipe doucement à

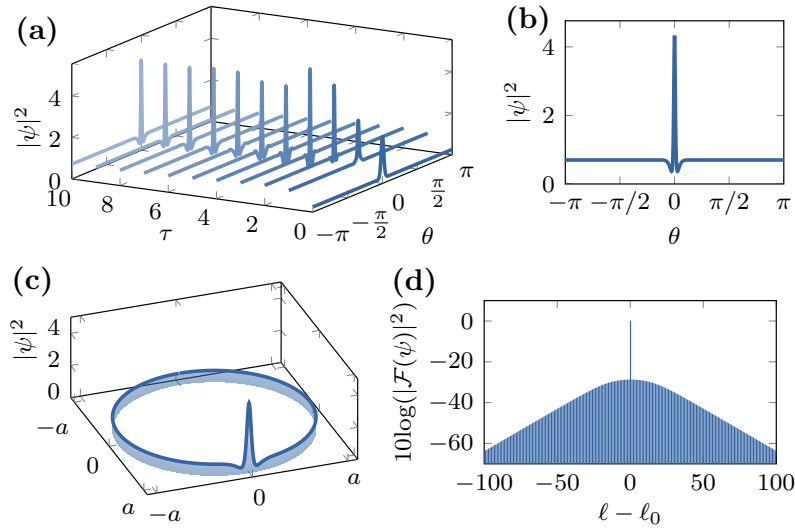


FIGURE 2.16 – Simulation numérique d'un soliton brillant en régime de dispersion anormale. Les paramètres de la simulation numérique sont $\alpha = 2$, $\beta = -0.004$, $F = 2.5548$. **[(a)]** Dynamique transitoire du soliton. **[(b)]** Peigne dans la direction azimutale. **[(a)]** Représentation 3D du soliton. **[(d)]** Peigne de Kerr correspondant, d'après [107].

l'intérieur mais aussi à l'extérieur du résonateur. Cela conduit à une dépendance spatiale indépendante du temps de la distribution de la température. C'est toujours le cas lorsque la puissance de pompe est suffisamment faible au regard des propriétés optiques du résonateur. Cependant, lorsque la puissance laser est suffisamment élevée, comme c'est le cas lors de nos expériences de génération de peignes de Kerr, la dynamique de la température du volume du mode et celle de la cavité deviennent dépendants du temps et affichent des oscillations complexes. Ce phénomène a déjà été mis en évidence, analysé et modélisé dans des microsphères [55, 116, 117] où le petit volume du mode et du résonateur est fortement affecté par l'augmentation de la température, mais jamais dans les résonateurs à modes de galerie de taille millimétrique.

En effet, la température induit un décalage fréquentiel de la résonance qui, à son tour, affecte l'énergie intra-cavité et par conséquent la température du résonateur. Cette sorte de boucle de contre-réaction peut être instable en fonction des paramètres de notre système et il a déjà été démontré que les modèles non-linéaires temporels sont bien indiqués pour l'étude et la compréhension de ce type de phénomènes complexes. Lors de nos expériences de génération de peignes de Kerr, nous avons observé des oscillations complexes qui ont particulièrement retenu notre attention. Partant du constat que ce type de phénomène n'a jamais été modélisé dans des résonateurs à modes de galerie de taille millimétrique où le volume du mode est très faible comparé à la taille du résonateur, nous avons entrepris d'explorer leurs dynamiques. Dans les parties qui suivent, nous rapportons l'observation d'oscillations thermo-optiques dans un résonateur à modes de galerie de taille millimétrique à très haut facteur de qualité. Nous démontrons que dans le cas de notre résonateur qui est un cristal de fluorure de baryum (BaF_2), l'interaction entre ses paramètres thermiques et sa non-linéarité Kerr peut conduire via la résonance à des oscillations extrêmes dont les périodes peuvent aller de la centaine de microsecondes à la seconde. Nous présentons par la suite un modèle théorique temporel non-linéaire qui reproduit avec une très bonne fidélité les résultats expérimentaux. Ce modèle traduit de

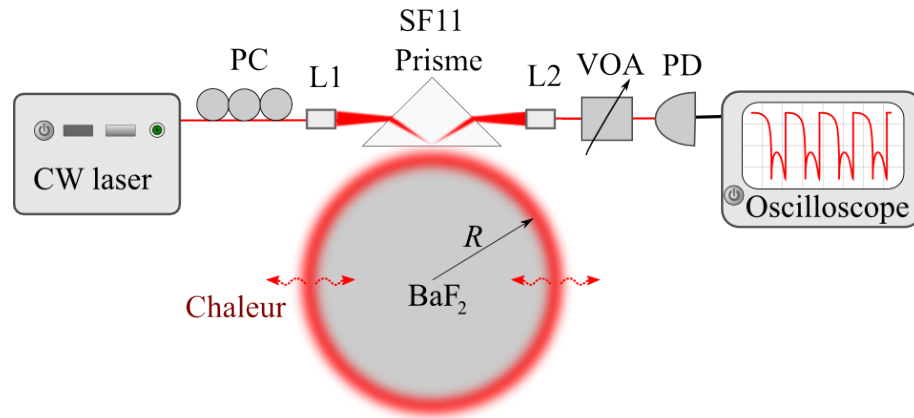


FIGURE 2.17 – Dispositif expérimental en vue de la caractérisation d'instabilités oscillatoires dans un résonateur à modes de galerie cristallin de taille millimétrique. CW laser : laser émettant en continu, PC : Contrôleur de Polarisation, VOA : Atténuateur Optique Variable, PD : Photodiode, $L_{1,2}$: Lentille Fibrée, R : rayon du résonateur, BaF_2 : Fluorure de Barium.

manière claire l'interaction complexe entre les paramètres thermiques des résonateurs et leur non-linéarité Kerr.

2.4.1/ DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Le dispositif expérimental pour la caractérisation des instabilités oscillatoires est présenté sur la figure 2.17. Il est constitué d'un laser fibré de marque Koheras accordable en fréquence qui émet à la longueur d'onde de 1550 nm. Un prisme SF11 est utilisé afin de générer l'onde évanescence nécessaire à l'excitation des modes de galerie. La lentille fibrée L_1 permet de focaliser la lumière sur le prisme tandis que la lentille fibrée L_2 permet de collecter la lumière transmise par le résonateur afin de l'envoyer vers une photodiode connectée à un oscilloscope. Un signal triangulaire permettant de scanner le laser en longueur d'onde lui est appliqué. Le signal résultant est envoyé dans le résonateur afin d'exciter les résonances et repérer celles ayant un haut facteur de qualité. Un résonateur en fluorure de baryum présentant un facteur de qualité intrinsèque de 1.0×10^8 a été choisi pour étudier les oscillations thermiques [118]. Afin de les observer, la fréquence du laser est ajustée très finement afin qu'elle coïncide avec le centre de la résonance puis maintenue fixe à cette valeur par stabilisation thermique.

Les oscillations thermiques observées dans la réponse transmise par l'ensemble prisme-résonateur sont rapportées sur la figure 2.18. Nous y observons différents types de réponses dépendant chacune du signal optique couplé dans le résonateur, par conséquent de la puissance de pompe. Pour de faibles puissances intra-cavité (quasi-nulles), aucune oscillation n'est observée. Cependant, au delà d'un certain seuil, nous observons des oscillations dont la période varie en fonction de la puissance. Elle est respectivement de 181 ms pour une puissance de pompe de 45 mW [2.18 (a)], 290 ms pour une puissance de pompe de 71 mW [2.18 (b)] et 504 ms pour une puissance de pompe de 200 mW [2.18 (c)]. Au delà de ces longues périodes, un aspect remarquable de ces oscillations est leur forme qui présente 2 pics d'absorption intense qui deviennent de plus en plus prononcés lorsque la puissance augmente. Ces pics correspondent à un décalage fréquentiel nul

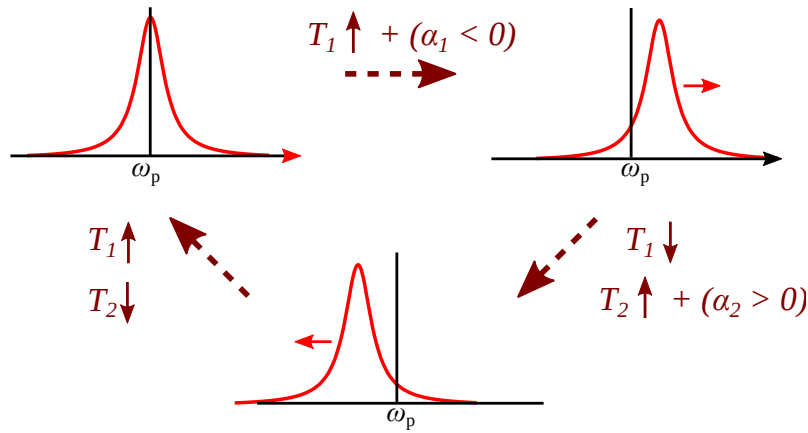


FIGURE 2.18 – Schéma des oscillations thermiques. Dans la première étape (en haut à gauche), la longueur d'onde du laser est accordée à la cavité. Le mode chauffe et sa température T_1 augmente. De ce fait, la résonance est décalée vers le bleu car le coefficient thermo-optique du résonateur $\alpha_1 < 0$. Dans la seconde étape (en haut à droite), l'ensemble laser-résonateur n'est plus résonnant avec la cavité, la température du mode résonant T_1 diminue. La chaleur accumulée lors de la première étape se diffuse à travers le résonateur dont la température T_2 augmente. L'expansion thermique qui en résulte induit un décalage de la résonance vers le rouge car le coefficient thermo-élastique $\alpha_2 > 0$. Dans la troisième étape (en bas), la température du résonateur et du mode baisse car le laser n'est plus accordé à la cavité. Par conséquent, la résonance retrouve sa position initiale c'est à dire la première étape. Il est à nouveau accordé avec le laser et le cycle décrit précédemment recommence.

entre le laser et la résonance comme le montrent plus loin les simulations numériques.

2.4.2/ MODÈLE THÉORIQUE ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Comme nous l'illustrons dans la figure 2.18, lorsque le résonateur est pompé à l'aide d'un laser émettant en continu, le volume du mode résonant dans la cavité subit une forte augmentation de la température. Ce volume modal joue alors le rôle de source chaude qui diffuse la chaleur à l'intérieur du résonateur qui, à son tour, transfère une partie de sa chaleur au milieu environnant. Cette dynamique thermique induit un décalage de la résonance suivant deux mécanismes bien distincts. Le premier est la dépendance de l'indice de réfraction de la température. Par conséquent, les propriétés optiques telle que la vitesse de groupe sont affectées par le champ intra-cavité via le transfert de chaleur induit. Le second mécanisme est la dilatation du résonateur sous l'effet de l'augmentation de la température ; en effet son rayon augmente. Tous ces deux mécanismes entraînent un décalage de la résonance qui est donné par la relation (2.30).

$$\Delta\omega_{th}(t) = -\omega_c [\alpha_1 \Delta T_1(t) + \alpha_2 \Delta T_2(t)]. \quad (2.30)$$

Dans cette expression, ω_c est la fréquence angulaire de la résonance, ΔT_1 la variation de température au sein du volume modal, ΔT_2 la variation moyenne de température au sein du résonateur. Les paramètres $\alpha_{1,2}$ sont ses coefficients thermo-optique et thermo-élastique à travers lesquels les variations de température induisent un décalage fréquen-

tiel de la résonance. Un troisième mécanisme contribue également à ce décalage ; il s'agit de la non-linéarité Kerr dont la contribution est la suivante :

$$\Delta\omega_{\text{nl}}(t) = -\omega_c \left[\frac{n_2}{n_{\text{eff}}} \frac{P_c(t)}{A_{\text{eff}}} \right], \quad (2.31)$$

où n_{eff} est l'indice de réfraction effectif du résonateur à mode de galerie, n_2 son coefficient Kerr, $P_c(t)$ la puissance intra-cavité et A_{eff} l'aire effective du résonateur à modes de galerie. Pour un résonateur ayant la forme d'un disque, une bonne approximation de son aire effective est $A_{\text{eff}} \sim D^2 \lambda^2$ [54] où λ est la longueur d'onde du laser de pompe. La puissance intra-cavité $P_c(t)$ s'exprime en fonction du champ intra-cavité $E_c(t)$ comme suit : $P_c(t) = |E_c(t)|^2 / T_r$ où $T_r = \pi D n_{\text{eff}} / c$ est le temps nécessaire à un photon pour faire un tour de cavité et c la vitesse de la lumière dans le vide. Le champ intra-cavité obéit alors à l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{dE_c}{dt} = - \left[\frac{1}{2} \delta\omega_Q + i(\sigma + \Delta\omega_{\text{th}} + \Delta\omega_{\text{nl}}) \right] E_c + i \frac{k}{T_r} E_{\text{in}}, \quad (2.32)$$

où $\sigma = \omega_c - \omega_p$ est le décalage fréquentiel ou *detuning* entre la fréquence ω_p du laser de pompe et la fréquence de résonance ω_c . Le paramètre $E_{\text{in}} = \sqrt{P_{\text{in}} \times T_r}$ est l'amplitude du champ optique à l'injection et $k = \sqrt{T_r \times \Delta\omega_{\text{ext}}}$ est le coefficient optique de couplage. La largeur de raie à charge $\Delta\omega_Q = \omega_c / Q$ est la somme de la largeur de raie intrinsèque $\Delta\omega_{\text{in}} = \omega_c / Q_{\text{in}}$ et de celle extrinsèque (sans couplage) $\Delta\omega_{\text{ext}} = \omega_c / Q_{\text{ext}}$, où $Q^{-1} = Q_{\text{in}}^{-1} + Q_{\text{ext}}^{-1}$ est le facteur de qualité en charge. Le champ électrique en sortie de l'ensemble prisme-résonateur est défini par :

$$E_{\text{out}}(t) = \sqrt{1 - k^2} E_{\text{in}} + ik E_c(t). \quad (2.33)$$

La transmission normalisée $\mathcal{T}$ s'obtient facilement grâce à l'expression ci dessous :

$$\mathcal{T} = \frac{|E_{\text{out}}|^2}{|E_{\text{in}}|^2}, \quad (2.34)$$

avec $0 \leq \mathcal{T} \leq 1$. Cette transmission normalisée est la grandeur dynamique expérimentale et théorique qui nous intéresse. En effet, c'est en elle que s'observe les instabilités oscillatoires présentent dans le résonateur.

Afin de compléter l'analyse de notre système, il est indispensable de décrire les dynamiques temporelles de la température. Pour ce faire, deux variables de températures sont à prendre en compte à savoir la température du volume du mode ΔT_1 et celle du résonateur ΔT_2 . Elles obéissent aux équations ci-dessous :

$$\frac{d\Delta T_i}{dt} = -\gamma_{\text{th},i} \Delta T_i(t) + \gamma_{\text{abs},i} P_c(t) \text{ avec } i = 1, 2, \quad (2.35)$$

où $\gamma_{\text{th},i}$ est le taux de relaxation thermique à température ambiante, $\gamma_{\text{abs},i}$ le taux d'absorption thermique. Ce dernier traduit le transfert de chaleur entre le laser, le mode résonant dans la cavité et le résonateur.

Par souci de simplification, nous avons décidé de normaliser les équations (2.32) et (2.35) comme suit :

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\left[1 + i(\varsigma + \beta_1\Delta\theta_1 + \beta_2\Delta\theta_2 + \eta|\xi|^2)\right]\xi + i\mu \quad (2.36)$$

$$(2.37)$$

$$\frac{d\Delta\theta_i}{d\tau} = -\rho_i\Delta\theta_i + \kappa_i|\xi|^2, \quad i = 1, 2 \quad (2.38)$$

Dans ces trois équations, les paramètres sans dimension τ pour le temps, $\xi(t)$ pour le champ intra-cavité et $\Delta\theta_i$ pour les températures relatives sont définis comme suit :

$$\tau = \frac{t}{2\tau_{\text{ph}}} \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{ph}} = \frac{1}{\delta\omega_Q} \quad (2.39)$$

$$\xi = \frac{E_c}{E_{\text{ref}}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{T_r\delta\omega_Q^3}{8\gamma v_g\delta\omega_{\text{ext}}}} \quad (2.40)$$

$$\Delta\theta_i = \sqrt{-\alpha_1\alpha_2} \Delta T_i, \quad (2.41)$$

où τ_{ph} est le temps de vie du photon dans le résonateur, $v_g = c/n_{\text{eff}}$ la vitesse de groupe, et $\gamma = \omega_c n_2 / c A_{\text{eff}}$ le paramètre Kerr qui est habituellement utilisé dans les structures guidées non-linéaires. Le champ électrique de référence E_{ref} utilisé pour la normalisation correspond au champ électrique minimum nécessaire à la génération de peigne de Kerr.

Les paramètres sans dimensions des équations (2.37) et (2.38) sont explicitement définis par :

$$\varsigma = \frac{2\sigma}{\delta\omega_Q}; \quad \eta = \frac{-2\omega_c n_2 E_{\text{ref}}^2}{\delta\omega_Q A_{\text{eff}} n_{\text{eff}} T_r}; \quad \mu = \frac{2kE_{\text{in}}}{E_{\text{ref}}\delta\omega_Q T_r} \quad (2.42)$$

$$\rho_i = \frac{2\gamma_{\text{th},i}}{\delta\omega_Q}; \quad \kappa_i = \frac{2E_{\text{ref}}^2 \sqrt{-\alpha_1\alpha_2}}{\delta\omega_Q T_r} \gamma_{\text{abs},i};$$

$$\beta_i = \frac{-2\omega_c \alpha_i}{\delta\omega_Q \sqrt{-\alpha_1\alpha_2}} \quad (2.43)$$

avec $i = 1, 2$.

En se servant des équations (2.37), (2.38), et des paramètres listés ci-après : $D = 3$ mm, $A_{\text{eff}} = 10^{-11} \text{ m}^2$, $n_{\text{eff}} = 1.466$, $n_2 = 2.89 \times 10^{-20} \text{ W/m}^2$, $Q = 10^8$, $\omega_L = 1.3 \times 10^{15} \text{ rad/s}$, $\gamma_{\text{th}1} = 1.0 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_{\text{th}2} = 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_{\text{abs}1} = 0.25 \times 10^{-3} \text{ K/J}$, $\gamma_{\text{abs}2} = 1.0 \text{ K/J}$, nous reproduisons avec un excellent accord les oscillations thermiques observées expérimentalement [voire figure 2.19 (d-f)]. Les figures 2.19 (g-i) en vert traduisent le décalage fréquentiel (*detuning*) entre le laser et la résonance. Elles montrent que les deux pics d'absorption observés expérimentalement et reproduits numériquement correspondent à un détuning nul. Les équations (2.37) et (2.38) sont des équations différentielles couplées du premier ordre. De manière générale, la méthode de Runge Kutta du 4^{ème} ordre est très efficace pour simuler numériquement ce type d'équations [119]. Cependant, celle-ci s'est avérée inadaptée dans notre cas. En effet, nous avons été confronté à deux problèmes. Le premier est que nous avons affaire à des échelles de temps qui sont très différentes, et le second est que la plus grande échelle de temps est exceptionnellement importante.

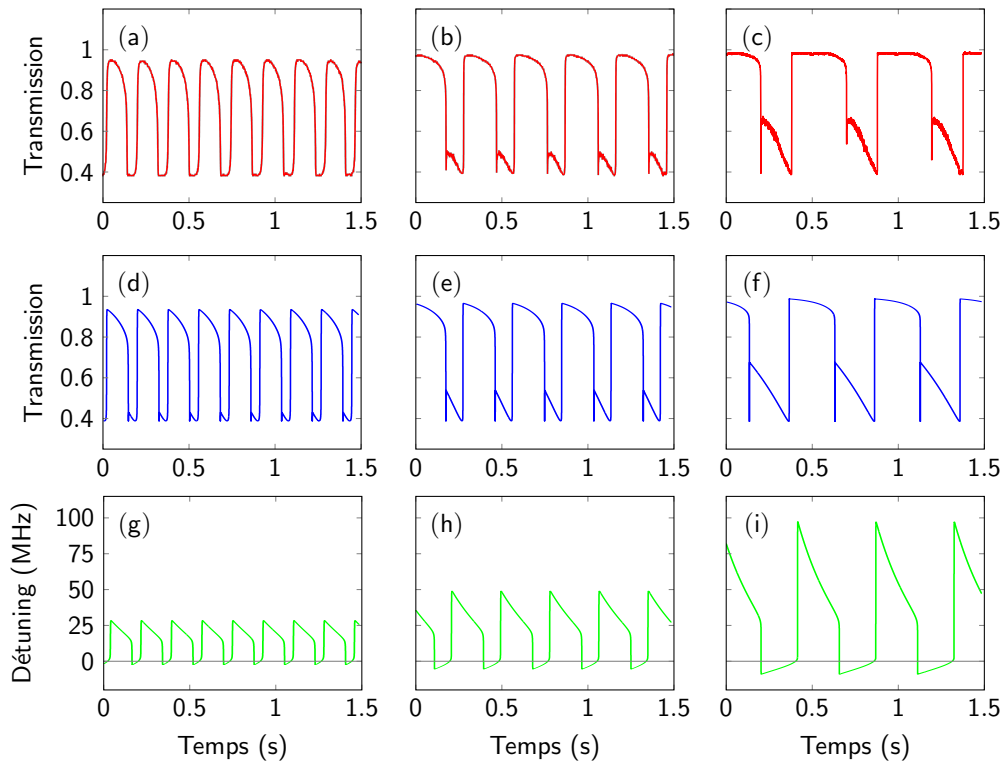


FIGURE 2.19 – Traces temporelles expérimentales [(a)-(c)] et numériques [(d)-(f)] des oscillations thermiques. Les variations numériques des différences de fréquence entre le laser et la résonance $\detuning \Delta\omega_{th}(t)/2\pi$ sont affichées [(g)-(i)]. Les périodes des oscillations sont : 181 ms [(a), (d) et (g)], 290 ms [(b), (e) et (h)], and 504 ms [(c), (f) et (i)]. Il est à noter que le minimum de transmission correspond au *detuning* nul (maximum de lumière couplé à l'intérieur du résonateur).

Par conséquent, la méthode de Runge Kutta s'est avérée si lente qu'il était impossible de reproduire une seule période d'oscillation. Nous avons donc utilisé l'algorithme de Runge-Kutta-Felbergh [120] (qui est une méthode à pas adaptatif) et les super-calculateurs du Mésocentre de l'Université de Franche-Comté. Cela nous a permis de réduire considérablement le temps de calcul (moins d'une heure au lieu de 2 à 3 jours pour les périodes les plus longues en utilisant la méthode de Runge Kutta).

2.5/ CONCLUSION

Ce chapitre a comporté trois grandes sections. Dans la première, nous avons expliqué le processus de formation d'un peigne de Kerr dans un résonateur à modes de galerie. Nous avons présenté le dispositif expérimental permettant de les générer puis présenté quelques résultats expérimentaux. L'utilisation des peignes de fréquences pour des applications de type micro-onde nécessite leur stabilisation. Deux méthodes de stabilisation ont été introduites à ce propos. La première est une technique de stabilisation passive qui s'appelle *thermal locking*. Elle a conduit à des ondes RF de faibles puissances, multimodes, à largeurs de raies comprises entre le kHz et le MHz figure (2.6) et que nous n'avons pas pu caractériser en terme de bruit de phase. Nous avons ensuite opté pour

une technique de stabilisation active qui est la technique de Pound-Drever-Hall. Cette dernière a conduit à des ondes RF à largeurs de raies comprises entre 50 Hz et 500 Hz figure 2.7 et des performances en terme de bruit de phase ne dépassant pas -90 dBc/Hz. Nous avons entrepris des investigations afin de connaître l'origine des battements de fréquences multimodes, des largeurs de raies MHz ainsi que l'origine de nos limitations en terme de bruit de phase. Il s'est avéré que les résonateurs à modes de galerie peuvent supporter de manière générale des modes optomécaniques qui présentent des facteurs de qualité assez élevés ; environ 10^5 . Ces derniers sont à l'origine de battements de fréquence multimodes. Les résonateurs sont également sujets à de nombreux effets qui entraînent des fluctuations de fréquences se transformant en bruits de fréquence. Ces dernières sont à l'origine de largeurs de raies MHz en régime de *thermal locking*. Elles sont également l'une des raisons de nos performances limitées en terme de bruit de phase dans le cadre de la stabilisation par PDH. En 2012, Li et *al.* [70] ont démontré un peigne de fréquence avec une onde RF à 24.953 GHz qui a une performance de -113 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse. Dans leurs travaux, ils ont eu recours à une technique de stabilisation qui s'appelle *self injection locking*. Récemment, de nouvelles performances à -125 dBc/Hz à 10 kHz ont été démontrées par Liang et *al.* [72] en régime de *self-injection locking*. Cette technique de stabilisation semble mieux indiquée que celles que nous avons exploitées dans les travaux de cette thèse. Faute de temps et de recul face à cette méthode, nous n'avons pas pu la mettre en pratique dans le cadre de cette thèse.

Dans la seconde section, nous avons discuté de la modélisation numérique des peignes de fréquences optiques de Kerr à travers les résonateurs à modes de galerie. Après avoir présenté les différents modèles numériques développés à ce propos, nous avons introduit le modèle spatio-temporel utilisé dans le cadre de cette thèse et présenté des résultats de simulations numériques en accord quasi-parfait avec les résultats expérimentaux. Nous avons ensuite présenté brièvement l'analyse de stabilité de ce modèle.

Dans la dernière section du chapitre, nous avons mis en évidence et modélisé pour la première fois les oscillations thermo-optiques dans un résonateur à modes de galerie à très haut facteur de qualité de taille millimétrique pompé par un laser émettant en continu. Il est important de noter que l'élément clé pour déclencher ce type d'oscillations est l'opposition de signe entre le coefficient thermo-optique (ici noté α_1) et le coefficient thermo-élastique (noté α_2) du résonateur. Nous avons démontré que les décalages fréquentiels de la résonance induits par les coefficients thermiques et la non-linéarité Kerr peuvent conduire à de grandes oscillations de relaxation dont la période peut être de l'ordre de la seconde. Notre modèle numérique basé sur des équations différentielles temporelles permet d'obtenir des résultats numériques en accord quasi-parfait avec les résultats expérimentaux. Le prochain chapitre concerne les interactions photons-phonons dans les résonateurs à modes de galerie.

INTERACTIONS PHOTONS-PHONONS DANS LES RÉSONATEURS À MODES DE GALERIE

3.1/ INTRODUCTION

L'interaction entre photons et phonons dans un milieu matériel à travers lequel la lumière se propage est un processus de diffusion. Dans cette interaction, la lumière incidente est diffusée par les phonons présents ou créés lors de sa propagation à travers le milieu en question [121, 122]. Nous distinguons essentiellement trois types de diffusions à savoir : la diffusion Rayleigh qui est qualifiée d'élastique, la diffusion Brillouin et la diffusion Raman qui sont elles qualifiées d'inélastiques [123]. Ces trois phénomènes largement explorés dans les fibres optiques [121, 124] sont également présents dans les résonateurs à modes de galerie. Ils ouvrent la voie à de nombreuses applications aussi bien dans le domaine des micro-ondes que dans le domaine des lasers [10, 125]. Dans ce chapitre, nous présentons nos travaux relatifs à la diffusion de la lumière dans les résonateurs à modes de galerie. Ceux-ci comportent une partie théorique et une partie expérimentale sur la diffusion Brillouin dans les résonateurs. Dans la partie théorique relative à la diffusion Brillouin, nous expliquons le principe de la propagation d'ondes acoustiques dans un cristal anisotrope et détaillons le rôle important joué par la vitesse de ce dernier sur la variation de la fréquence de l'onde diffusée. Nous introduisons par la suite un modèle non-linéaire temporel permettant de suivre l'évolution de la lumière transmise et de celle rétrodiffusée. Ce modèle nous a permis grâce à une étude de stabilité de déterminer l'expression de la puissance seuil Brillouin. Ceci étant, avant d'aborder ces travaux, il est important de poser les bases nécessaires à une bonne compréhension du processus de diffusion de la lumière dans un milieu matériel.

3.2/ PROCESSUS DE DIFFUSION DE LA LUMIÈRE

La diffusion de la lumière est due aux inhomogénéités présentes dans les propriétés optiques du milieu matériel à travers lequel elle se propage. Ces inhomogénéités induisent des modifications des propriétés optiques de celui-ci. Les modifications induites correspondent spatialement ou temporellement à différentes grandeurs caractéristiques. De ce fait, à chaque grandeur optique modifiée correspond une des diffusions citées plus haut.

Processus de diffusion	Décalage fréquentiel	Temps de relaxation	Largeur de raie	Gain m/W
Rayleigh	0	100 ns	15 MHz	10^{-12}
Rayleigh d'aile	0	100 ps	150 GHz	10^{-11}
Raman	13.2 THz	56 fs	5 THz	10^{-13}
Brillouin	11 GHz	10 ns	25 MHz	5×10^{-11}

TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif des paramètres de diffusion pour une fibre optique à la longueur d'onde de 1550 nm [126].

La figure 3.1 illustre le processus de diffusion de la lumière autour d'une fréquence pompe ν_P [124, 126]. Nous constatons la présence d'une composante Stokes qui correspond, par effet Doppler, au décalage fréquentiel de l'onde diffusée lorsque la lumière incidente et les phonons se propagent dans la même direction. Nous observons également la présence d'une composante anti-Stokes qui correspond au décalage fréquentiel observé dans le cas contraire. Il apparaît sur ce spectre de diffusion que les composantes Stokes et anti-Stokes Raman sont très éloignées de la pompe. Il est à noter que le processus de diffusion peut être spontané ou stimulé. Dans les parties qui suivent, nous décrivons la diffusion Rayleigh puis mettons l'accent sur la diffusion Brillouin et Raman en présentant nos travaux sur les deux phénomènes. Le tableau 3.1 présente les paramètres des différents processus de diffusion à 1550 nm pour une fibre optique télécom standard de type SMF-28 [126].

3.2.1/ LA DIFFUSION RAYLEIGH

La diffusion Rayleigh a été décrite pour la première fois en 1871 par Lord Rayleigh. Elle est due à des centres de diffusion introduits par les fluctuations de densité du milieu matériel à travers lequel la lumière se propage. Ces fluctuations de densité entraînent une modification spatiale des propriétés optiques du milieu conduisant ainsi à la diffusion Rayleigh [122]. Cette diffusion n'induit pas de décalage fréquentiel de l'onde diffusée car les centres de diffusion de dimensions sub-longueur sont statiques. Lorsqu'une onde incidente en l'occurrence la lumière se propage à travers un milieu matériel, celle-ci déforme sous certaines conditions le nuage électronique des atomes, créant ainsi un dipôle qui rayonne. Une de ses particularités est que l'intensité de l'onde diffusée est inversement proportionnelle à la puissance 4 ($1/\lambda^4$) de la longueur d'onde incidente, affectant négativement les télécommunications optiques aux courtes longueurs d'onde [122, 124]. Nos spectres expérimentaux de diffusion Brillouin stimulée présentés plus loin comportent des résidus parasites de diffusion Rayleigh. De ce fait, nous avons jugé nécessaire d'apporter des éléments permettant au lecteur de se faire une idée générale de la diffusion Rayleigh bien que celle-ci ne soit pas l'objet de ce chapitre. Nous pouvons à présent aborder la diffusion Brillouin spontanée.

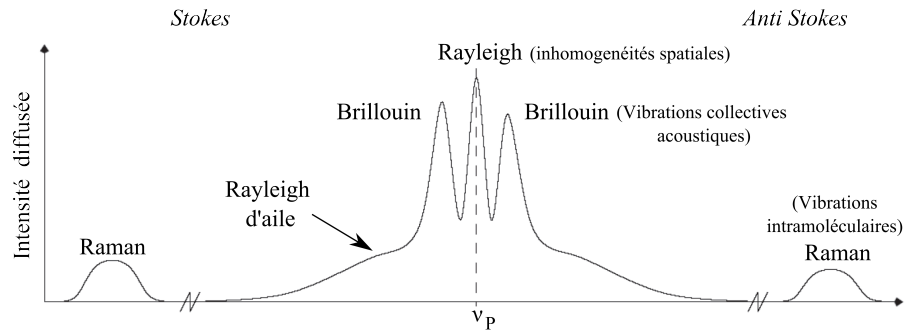


FIGURE 3.1 – Schéma extrait de [124] illustrant la diffusion spontanée de la lumière par un milieu matériel autour d'une fréquence pompe ν_P .

3.2.2/ DIFFUSION BRILLOUIN SPONTANÉE

La diffusion Brillouin spontanée est un processus non-linéaire résultant de l'interaction entre une onde électromagnétique en l'occurrence l'onde pompe optique de fréquence ν_P de fréquence angulaire ω_P et une onde acoustique de fréquence ν_B de pulsation ω_B . Cette interaction se traduit par la diffusion de l'onde pompe par l'onde acoustique [121, 122]. L'apparition de l'onde acoustique est due à la création de phonons acoustiques eux-mêmes causés par l'agitation thermique des molécules constituant le milieu. Le couplage entre ces phonons induit une modulation de l'indice du milieu matériel qui provoque le processus de diffusion spontanée. Il est à noter que la diffusion Brillouin est accompagnée d'un décalage fréquentiel de l'onde électromagnétique incidente car l'onde acoustique se déplace avec une certaine vitesse que nous noterons V_a . Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Doppler. Une onde diffusée appelée onde "Stokes" est générée lorsque la lumière incidente et l'onde acoustique se déplacent dans le même sens et une autre appelée "anti Stokes" est générée dans le cas contraire. La diffusion Brillouin spontanée se distingue de la diffusion Brillouin stimulée par la non-modification de l'onde acoustique par les ondes optiques. En effet, les phonons acoustiques dans le cas de la diffusion Brillouin spontanée sont d'origine thermique alors que ceux créés lors de la diffusion Brillouin stimulée sont causés par l'électrostriction [121, 122]. Une approche énergétique telle qu'illustrée sur la figure 3.2 explique la diffusion Brillouin comme étant la création d'un photon Stokes de fréquence inférieure ν_S et d'un phonon acoustique de fréquence ν_B sous l'effet d'un photon pompe de fréquence ν_P ; c'est le cas de la figure 3.2 (a). Ce processus a lieu lorsque les états vibrationnels du matériau sont à l'état fondamental. Lorsque ces derniers sont à l'état excité, nous sommes dans le cas de la figure 3.2 (b) où le photon pompe peut se combiner avec le phonon acoustique pour générer un photon anti-Stokes de fréquence ν_{aS} de fréquence angulaire ω_{aS} . Il est à noter que cette dernière est supérieure à la fréquence du photon pompe. Le principe de conservation de l'impulsion et de l'énergie nous permet d'écrire :

$$\hbar\nu_P = \hbar\nu_S + \hbar\nu_B, \quad (3.1)$$

$$\hbar\nu_P = \hbar\nu_{aS} - \hbar\nu_B. \quad (3.2)$$

Notons le vecteur d'onde de l'onde acoustique $\mathbf{K}_B$, celui de l'onde pompe $\mathbf{K}_P$ et celui de l'onde Stokes $\mathbf{K}_S$ tel qu'illustré sur la figure 3.3 qui schématise la diffusion d'une onde pompe par une onde acoustique. Nous pouvons écrire :

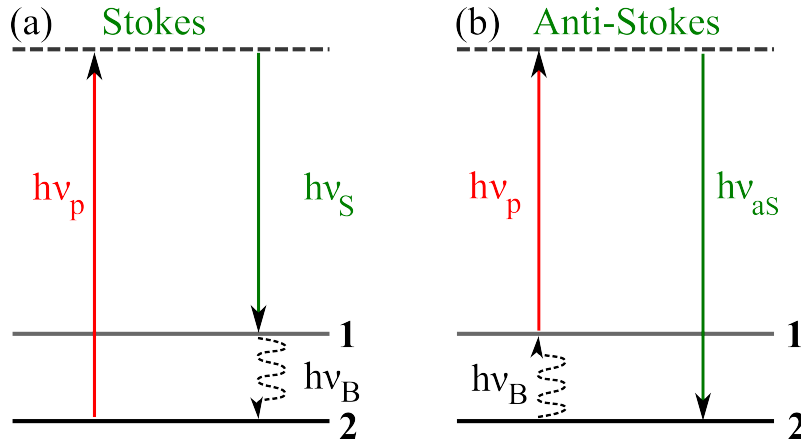


FIGURE 3.2 – Diagramme énergétique décrivant la diffusion Brillouin Stokes et anti-Stokes.

$$\nu_P = \nu_S + \nu_B, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}_P = \mathbf{K}_S + \mathbf{K}_B. \quad (3.4)$$

Les trois vecteurs d'ondes s'expriment sous la forme :

$$\mathbf{K}_P = \frac{2\pi n_{\text{eff}} \nu_P}{c} \mathbf{e}_P, \quad \mathbf{K}_S = \frac{2\pi n_{\text{eff}} \nu_S}{c} \mathbf{e}_S, \quad \mathbf{K}_B = \frac{2\pi n_{\text{eff}} \nu_B}{c} \mathbf{e}_B, \quad (3.5)$$

où n_{eff} représente l'indice effectif du milieu matériel et c la vitesse de la lumière. Pour un angle de diffusion que nous noterons θ , nous pouvons alors écrire :

$$|\mathbf{K}_B| = |\mathbf{K}_P| + |\mathbf{K}_S| - 2|\mathbf{K}_P||\mathbf{K}_S| \cos(\theta). \quad (3.6)$$

En considérant que $\mathbf{K}_P \simeq \mathbf{K}_S$, nous déduisons l'expression de la fréquence de l'onde acoustique ν_B .

$$\nu_B = \frac{2n_{\text{eff}} V_a}{\lambda_P} \sin(\theta/2). \quad (3.7)$$

Dans l'expression (3.7), λ_P représente la longueur d'onde de la pompe, ν_B la fréquence de l'onde acoustique. Cette dernière est fonction de la vitesse de l'onde acoustique et de la longueur d'onde de pompe. Elle correspond au décalage fréquentiel entre l'onde Stokes et l'onde pompe et est d'environ 11.2 GHz dans une fibre télécom standard de type SMF-28. La diffusion Brillouin encore connue sous le nom d'"effet Brillouin" est réputée être un facteur limitant la puissance dans les télécommunications par fibre optique [124]. En effet, lorsque la puissance de l'onde optique injectée augmente, celle de l'onde acoustique augmente également. La fibre optique se comporte alors comme un miroir de Bragg diffusant une grande partie de la puissance injectée. Cependant, l'effet Brillouin présente également de nombreux avantages qui sont présentés plus loin. Un second phénomène connu sous le nom électrostriction combiné à la diffusion Brillouin spontanée est à la base de la diffusion Brillouin stimulée. Nous traitons de cette diffusion dans la section qui suit.

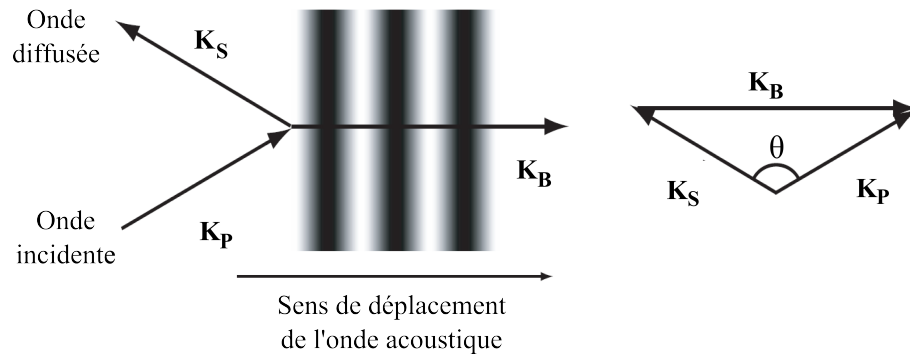


FIGURE 3.3 – Illustration de la diffusion Brillouin spontanée extrait de citebeu-gnot2007complete. Une onde incidente est diffusée par une onde acoustique, il se crée alors une onde diffusée que nous appelons onde Stokes.

3.2.3/ DIFFUSION BRILLOUIN STIMULÉE

L'électrostriction est la propriété des diélectriques à se déformer sous l'effet d'un champ électrique. Elle sert de moteur à la diffusion Brillouin stimulée car elle augmente de manière considérable le nombre de phonons acoustiques [123, 126]. De manière simple, nous montrons sur la figure 3.4 que lorsque l'onde pompe devient intense, elle interfère avec l'onde Stokes. Le battement résultant crée par électrostriction une onde élastique qui diffuse l'onde pompe, amplifiant l'onde Stokes. Le processus de diffusion est alors qualifié de stimulé et fonctionne comme une boucle où l'électrostriction renforce la diffusion et vice-versa. Contrairement à la diffusion Brillouin spontanée où l'onde optique ne modifie pas l'onde acoustique, il apparaît clairement que l'onde acoustique est amplifiée par l'onde optique. Lorsque la diffusion Brillouin stimulée a lieu dans une fibre optique par exemple, celle-ci devient un milieu à gain pour l'onde Stokes qui ne cesse de s'amplifier de manière exponentielle tout le long de son trajet [121, 122, 124].

La diffusion Brillouin a été et continue à être l'objet de nombreuses études dans la communauté scientifique, particulièrement dans la communauté des fibres optiques. En effet, elle présente de nombreux avantages qui permettent de l'utiliser pour des fins lasers connus sous le nom de lasers Brillouin. Cela est dû à la possibilité d'obtention de faibles largeurs de raie pour l'onde Stokes. [8, 9, 127, 128]. Les résonateurs à modes de galerie sont des guides d'ondes dont l'architecture et le fonctionnement sont assez proche de ceux de certains types de fibres communément appelés résonateurs fibrés. Il est important de noter qu'on peut observer la diffusion Brillouin stimulée dans ces deux types de guide d'onde. Les résonateurs que nous utilisons sont des cristaux anisotropes. Leurs orientations ainsi que leurs familles jouent un rôle important sur la variation de fréquence des ondes acoustiques qui s'y propagent [129, 130, 131]. Dans les parties qui suivent, nous décrivons une méthode permettant de calculer la fréquence des ondes acoustiques et présentons quelques résultats numériques à ce propos. Nous décrivons ensuite des résultats relatifs à la diffusion Brillouin stimulée dans certains types de résonateurs à modes de galerie. Nous présentons aussi nos travaux expérimentaux concernant la diffusion Brillouin stimulée dans un résonateur à modes de galerie cristallin mono-fluoré.

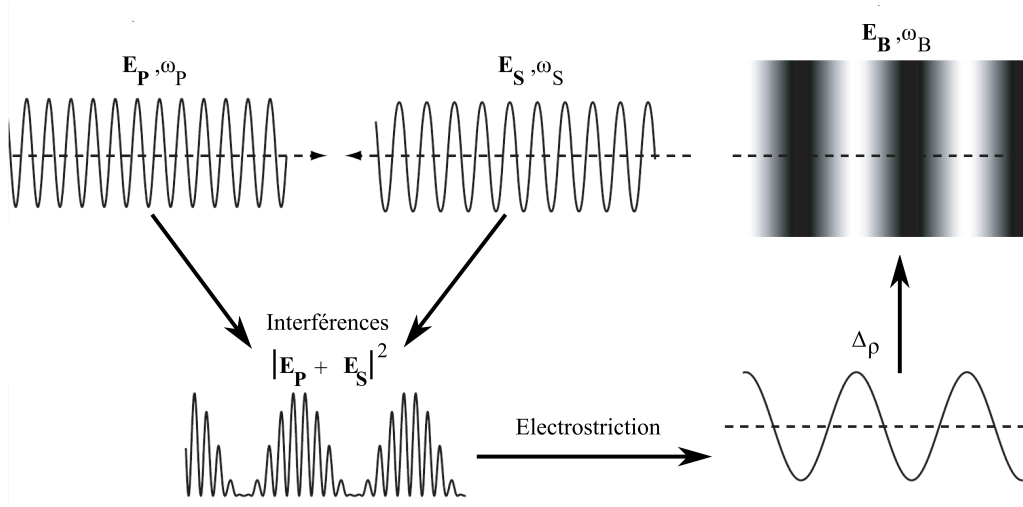


FIGURE 3.4 – Processus d'électrostriction servant de moteur à la diffusion Brillouin stimulée extrait de citebeugnot2007complete. L'onde Stokes déjà présente en régime de diffusion Brillouin spontanée interfère avec l'onde pompe. Cette interférence donne naissance à un signal de battement dont les variations créent une onde de pression. Celle-ci diffuse l'onde incidente renforçant de ce fait l'onde Stokes.

3.3/ ONDES ACOUSTIQUES ET STRUCTURES CRISTALLINES

La vitesse de propagation d'ondes acoustiques qui se propagent le long de la périphérie d'un disque nécessite beaucoup d'attention. En effet, l'amplification Brillouin s'appuie sur la fréquence ν_B des ondes acoustiques longitudinales qui se propagent le long de la périphérie du disque. Cette amplification a une bande passante $\Delta \nu_B$ qui répartit l'énergie acoustique et contribue à l'élargissement des raies optiques Stokes et anti-Stokes. Elle a pour expression :

$$\frac{\Delta \nu_B}{\nu_B} = \frac{\nu_B^{max} - \nu_B^{min}}{\nu_B} = \frac{V_a^{max} - V_a^{min}}{V_a}. \quad (3.8)$$

Il apparaît clairement que minimiser la variation de la vitesse de l'onde acoustique réduira de manière considérable la bande passante d'amplification Brillouin et par conséquent les largeurs de raies des ondes Stokes et anti Stokes. Cette minimisation se fait par une sélection du matériau. En effet, tel qu'illustré sur la figure 3.5, la vitesse de propagation de l'onde acoustique V_a varie le long de la périphérie du matériau selon l'orientation du vecteur d'onde K_B qui est colinéaire au vecteur d'onde optique K_P . Il convient donc de poser les bases nécessaires à la bonne compréhension de la propagation des ondes acoustiques dans un cristal anisotrope et de développer un modèle permettant de calculer la vitesse/fréquence de ces ondes.

3.3.1/ PROPAGATIONS D'ONDES ACOUSTIQUES DANS UN CRISTAL

Les résonateurs utilisés dans le cadre de cette thèse sont des lames monocristallines anisotropes. L'orientation de leur normale par rapport aux axes cristallins dicte le comportement de l'onde acoustique qui se propage dans le résonateur. De manière géné-

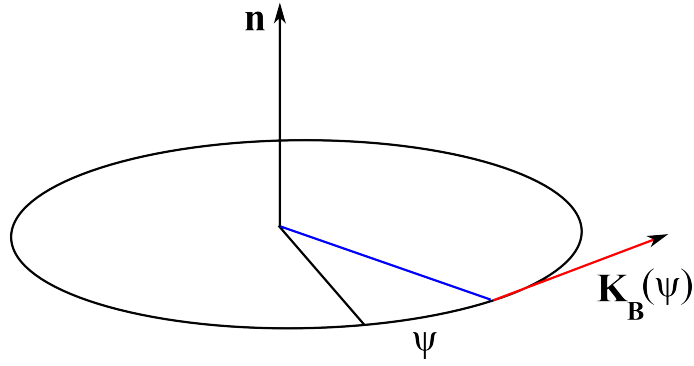


FIGURE 3.5 – Illustration du vecteur normal $\mathbf{n}$ et de l'angle ψ qui caractérise la direction de propagation de l'onde acoustique dans le plan de la lame cristalline.

rale, on introduit la notion de tenseur pour établir des relations linéaires entre effets et causes dans un milieu anisotrope [129]. En appliquant une cause dans une direction donnée, l'effet obtenu va être orienté dans une autre direction. De surcroît, un cristal est un ensemble ordonné d'atomes dont les propriétés se décrivent essentiellement par des tenseurs [129]. Par conséquent, une contrainte caractérisée par le tenseur des contraintes T_{ij} appliquée à un cristal anisotrope induit des déformations caractérisées par le tenseur déformations S_{kl} . Les deux sont liés de manière linéaire par la loi de Hooke [129, 131, 132] qui s'écrit :

$$T_{ij} = c_{ijkl}S_{kl}, \quad (3.9)$$

où c_{ijkl} représente les constantes élastiques du cristal. Par convention, on caractérise une lame cristalline par la direction de sa normale, sa structure ainsi que sa famille. Les coupes simples sont par exemple appelées par leur normale ; ainsi, les coupes [001], [010] et [100] portent respectivement les noms "z-cut", "y-cut" et "x-cut". La structure et la famille du cristal donnent accès à ses coefficients élastiques qui permettent de remonter à la vitesse de l'onde acoustique par le biais de l'équation de propagation des ondes que nous introduisons plus loin

En effet, pour une onde plane de fréquence f se propageant dans une direction $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ quelconque dans le matériau, les points de ce dernier sont mis en mouvement par le passage de l'onde. Le déplacement $u(u_1, u_2, u_3)$ des points du matériau aura une dépendance temporelle et spatiale qui nous permet d'écrire l'équation ci dessous :

$$U = u_i(x_i, t). \quad (3.10)$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

où T_{ij} est le tenseur des contraintes et ρ la masse volumique du cristal. En insérant la loi de Hooke dans l'équation (3.11), on obtient l'équation du mouvement qui est :

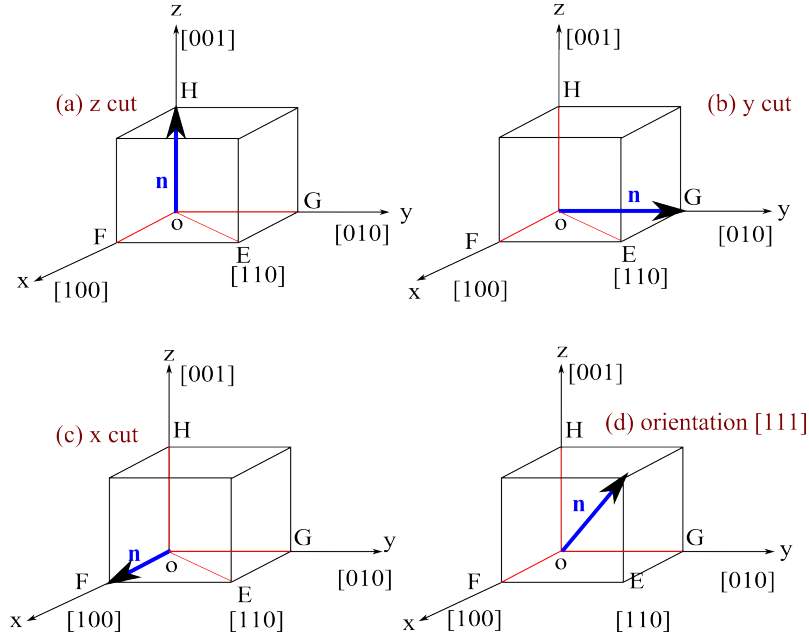


FIGURE 3.6 – Illustration de l'orientation d'un cristal en fonction de la direction de sa normale $\mathbf{n}$ en bleu. les figures **[(a), (b), (c)]** correspondent respectivement aux coupes simples *z-cut*, *y-cut*, *x-cut* et **[(d)]** correspond à l'orientation [111].

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (3.12)$$

Les coefficients i, j, k, l varient de 1 à 3 et les solutions de cette équation sont trois ondes planes qui s'expriment chacune comme suit :

$$u_i = U_i f\left(t - \frac{n_i x_i}{V}\right). \quad (3.13)$$

Ici, V est la vitesse de l'onde en question. En insérant cette solution dans l'équation (3.12), on obtient une nouvelle expression de l'équation du mouvement qui est connue sous le nom d'équation de Christoffel [129, 131, 132] :

$$\rho V^2 U_i = c_{ijkl} n_j n_k U_l. \quad (3.14)$$

Dans cette équation, n_j et n_k sont les projections de la direction de propagation $\mathbf{n}$. A partir de l'équation de Christoffel, nous pouvons introduire le tenseur du second ordre Γ dont les termes s'écrivent :

$$\Gamma_{il} = c_{ijkl} n_j n_k. \quad (3.15)$$

Compte tenu de sa symétrie ($\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$), le tenseur Γ_{ij} ne comporte que 6 termes différents sur les 9 qui le composent. Pour une onde ayant une polarisation $U_{ij} = \delta_{ij} U_i$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, l'équation de Christoffel devient :

$$(\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il}) U_l = 0. \quad (3.16)$$

Cette équation n'admet de solutions que si son déterminant que nous appellerons déterminant de Christoffel et défini par la relation ci-dessous est nul.

$$|\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il}| = 0. \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) est connue sous le nom d'équation séculaire. Sa résolution montre l'existence de 3 ondes se propageant simultanément dans le cristal ; une d'entre elles est longitudinale et les deux autres sont transversales [129, 131, 132, 133]. En développant l'équation séculaire, nous obtenons les expressions ci dessous :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2 + 2c_{16}n_1n_2 + 2c_{15}n_1n_3 + 2c_{56}n_2n_3, \\ \Gamma_{22} &= c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + 2c_{26}n_1n_2 + 2c_{46}n_1n_3 + 2c_{24}n_2n_3, \\ \Gamma_{33} &= c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2 + c_{33}n_3^2 + 2c_{45}n_1n_2 + 2c_{35}n_1n_3 + 2c_{34}n_2n_3, \\ \Gamma_{12} &= c_{16}n_1^2 + c_{26}n_2^2 + c_{45}n_3^2 + (c_{12} + c_{66})n_1n_2 + (c_{14} + c_{56})n_1n_3 + (c_{46} + c_{25})n_2n_3, \\ \Gamma_{13} &= c_{15}n_1^2 + c_{46}n_2^2 + c_{55}n_3^2 + (c_{14} + c_{56})n_1n_2 + (c_{13} + c_{55})n_1n_3 + (c_{36} + c_{45})n_2n_3, \\ \Gamma_{23} &= c_{65}n_1^2 + c_{24}n_2^2 + c_{43}n_3^2 + (c_{46} + c_{25})n_1n_2 + (c_{36} + c_{45})n_1n_3 + (c_{23} + c_{44})n_2n_3. \end{aligned}$$

Prenons un cristal possédant une symétrie cubique, la matrice des constantes élastiques est :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

Les termes du tenseur de Christoffel pour ce cristal sont alors :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{44}(n_2^2 + n_3^2), \\ \Gamma_{12} &= \Gamma_{21} = (c_{12} + c_{44})n_1n_2, \\ \Gamma_{13} &= \Gamma_{31} = (c_{12} + c_{44})n_1n_3, \\ \Gamma_{22} &= c_{44}(n_1^2 + n_3^2) + c_{11}n_2^2, \\ \Gamma_{23} &= \Gamma_{32} = (c_{12} + c_{44})n_2n_3, \\ \Gamma_{33} &= c_{44}(n_1^2 + n_2^2) + c_{11}n_3^2. \end{aligned}$$

Pour une propagation dans la direction [100] c'est à dire suivant l'axe Ox_1 , le déterminant de Christoffel est :

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \rho V^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} - \rho V^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} - \rho V^2 \end{pmatrix} = 0$$

De cette expression, Brissaud [133] et Authier [134] déduisent la vitesse de l'onde longitudinale V_L qui est polarisée suivant [100] et celles des deux ondes transversales $V_{T_{1,2}}$ polarisées respectivement suivant [010] et tout vecteur normal à la direction [100].

$$V_L = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad V_{T_1} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \quad V_{T_2} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}. \quad (3.18)$$

Pour une propagation suivant la direction [110], le déterminant de christoffel est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_{11} + c_{44}) - \rho V^2 & \frac{1}{2}(c_{11} + c_{44}) & 0 \\ \frac{1}{2}(c_{12} + c_{44}) & \frac{1}{2}(c_{11} + c_{44}) - \rho V^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} - \rho V^2 \end{pmatrix} = 0$$

De la même manière que précédemment, Authier [134] déduit de ce déterminant l'expression de la vitesse de l'onde longitudinale V_L polarisée suivant [110] et celles des deux ondes transversales $V_{T_{1,2}}$ polarisées respectivement suivant $[1\bar{1}0]$ et $[011]$.

$$V_L = \sqrt{(c_{11} + c_{12} + 2c_{44})/2\rho}, \quad V_{T_1} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})/\rho}, \quad V_{T_2} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}. \quad (3.19)$$

A travers ces deux exemples, il apparait clairement que l'onde acoustique suivant la direction [100] aura une composante longitudinale d'expression $V_L = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$ de périodicité $\pi/2$, colinéaire au vecteur d'onde optique. Pour une propagation suivant la direction [110], la composante longitudinale aura pour expression $V_L = \sqrt{(c_{11} + c_{12} + 2c_{44})/2\rho}$ avec une périodicité $\pi/2$ colinéaire au vecteur d'onde optique en ces points particuliers. Cela est illustré par la figure 3.7. En dehors de ces directions précises, on s'attend le long de la périphérie du disque à des variations de vitesse d'ondes (par conséquent de fréquences) qui sont fonctions de l'angle ψ entre le vecteur d'onde acoustique et les axes du plan de la lame.

Nous venons de voir que le déterminant de Christoffel donné par la relation (3.17) permet d'obtenir l'expression des vitesses de l'onde longitudinale et des deux ondes transversales ainsi que leurs polarisations. Ces vitesses sont fonction des constantes élastiques du cristal qui à leur tour dépendent de l'orientation de l'onde acoustique par rapport aux axes cristallins. Il convient donc de développer une méthode permettant d'exprimer les constantes élastiques en tout point de la circonférence du disque dans le système de coordonnées le mieux indiqué. C'est l'objet de la sous-section qui suit.

3.3.2/ EXPRESSION DES COEFFICIENTS ÉLASTIQUES DANS LE REPÈRE TOURNÉ : ROTATION DES MATRICES ÉLASTIQUES

Il existe dans la littérature de nombreux articles qui traitent des approches matricielles ou tensorielles des coefficients élastiques $[c_{ijkl}]$ et de souplesse $[s_{pqrs}]$. L'un des buts de chacune de ces approches est d'obtenir une expression simple reliant élasticité et souplesse à travers la loi de Hooke. Différentes approches de matrices et tenseurs élastiques ont été développées à ce propos. Ces tentatives de généralisation de la loi de Hooke ont longtemps buté sur le besoin de réciprocity élasticité-souplesse en cherchant une expression permettant la circulation $[s] = [c]^{-1}$, et autorisant également une simplification par une approche de calculs tensoriels. Dans ce cadre une notation connue sous

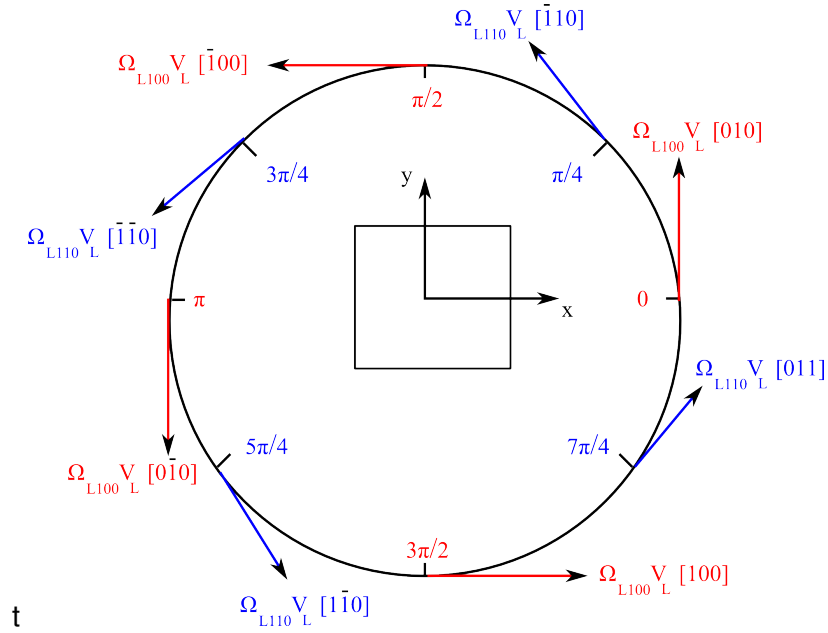


FIGURE 3.7 – Illustration des couples [vitesses acoustiques longitudinales V_L /fréquences Ω_L] pour des directions particulières en accord avec les expressions des vitesses longitudinales données par la relation (3.19) pour une lame cristalline orientée [001]

le nom de notation de Voigt a été introduite [134]. Elle est intéressante dans la mesure où elle fait apparaître les coefficients élastiques sous la forme d'un vecteur. Cependant, elle peut prêter à confusion car les coefficients introduits ne coïncident pas forcément aux coefficients matriciels usuels. En effet, l'approche de Voigt fait apparaître de nouveaux coefficients tel que $\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$ afin d'obtenir une réciprocité qui rend difficile l'intégration dans des calculs par simulation [134].

En 1943, Bond [135] a introduit une approche matricielle qui permet le passage direct d'un système de coordonnées à un autre. Sa méthode utilise une matrice 6×6 qui transforme les coefficients élastiques et de souplesse dans le système de coordonnées voulu par simple multiplication. Elle est bien décrite dans les travaux de Auld et al [132] et a été retenue dans le cadre des travaux de cette thèse car elle est applicable à tout type de cristal et pour n'importe quelle orientation. Nous la décrivons dans les lignes qui suivent.

Soit T_{ij} le champ des contraintes se transformant en $T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}$ par changement de système de coordonnées où i, j, k, l sont les axes x, y, z et a_{mn} les cosinus directeurs du nouveau système de coordonnées ou encore de la nouvelle base. Le développement du champ de contraintes T'_{xx} conduit à l'équation ci dessous :

$$T'_{xx} = a_{xx}^2 T_{xx} + a_{xx}a_{xy} T_{xy} + a_{xx}a_{xz} T_{xz} + a_{xy}a_{zx} T_{yx} + a_{xy}^2 T_{yy} + a_{xy}a_{xz} T_{yz} + a_{xz}a_{xx} T_{zx} + a_{xz}a_{xy} T_{zy} + a_{xz}^2 T_{zz}. \quad (3.20)$$

Le champ de contrainte étant symétrique $T_{ij} = T_{ji}$, l'équation (3.20) devient :

$$T'_{xx} = a_{xx}^2 T_{xx} + a_{xy}^2 T_{yy} + a_{xz}^2 T_{zz} + 2a_{xx}a_{xy} T_{xy} + 2a_{xx}a_{xz} T_{xz} + 2a_{xy}a_{xz} T_{yz}. \quad (3.21)$$

En notation réduite où $xx = 1$, $yy = 2$, $zz = 3$, $yz = zy = 4$, $zx = xz = 5$ et $xy = yx = 6$ pour les

tenseurs, nous avons :

$$T'_1 = a_{xx}^2 T_1 + a_{xy}^2 T_2 + a_{xz}^2 T_3 + 2a_{xx}a_{xy} T_6 + 2a_{xx}a_{xz} T_5 + 2a_{xy}a_{xz} T_4. \quad (3.22)$$

En réitérant la même procédure pour les 9 composantes de $[T']$, il vient : $T_H = M_{HI} T_I$ avec $H, I = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. La matrice $[M]$ définie par les 36 coefficients de M_{HI} est la matrice de passage 6×6 introduite par Bond. Elle s'exprime comme suit :

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{xx}^2 & a_{xy}^2 & a_{xz}^2 & 2a_{xy}a_{xz} & 2a_{xz}a_{xx} & 2a_{xx}a_{xy} \\ a_{yx}^2 & a_{yy}^2 & a_{yz}^2 & 2a_{yy}a_{yz} & 2a_{yz}a_{yx} & 2a_{yx}a_{yy} \\ a_{zx}^2 & a_{zy}^2 & a_{zz}^2 & 2a_{zy}a_{zz} & 2a_{zz}a_{zx} & 2a_{zx}a_{zy} \\ a_{yx}a_{zx} & a_{yy}a_{zy} & a_{yz}a_{zz} & a_{yy}a_{zz} + a_{yz}a_{zy} & a_{yx}a_{zz} + a_{yz}a_{zx} & a_{yy}a_{zx} + a_{yx}a_{zy} \\ a_{zx}a_{xx} & a_{zy}a_{xy} & a_{zz}a_{xz} & a_{xy}a_{zx} + a_{xz}a_{zy} & a_{xz}a_{zx} + a_{xx}a_{zz} & a_{xx}a_{zy} + a_{xy}a_{zx} \\ a_{xx}a_{yx} & a_{xy}a_{yy} & a_{xz}a_{yz} & a_{xy}a_{yz} + a_{xz}a_{yy} & a_{xz}a_{yx} + a_{xx}a_{yz} & a_{xx}a_{yy} + a_{xy}a_{yx} \end{bmatrix}$$

Le même raisonnement s'applique à la matrice souplesse en introduisant $S'_{ij} = a_{ik}a_{jl}S_{kl}$ qui devient en notation réduite $S'_K = N_{KJ}S_J$ où les indices réduits K et J varient de 1 à 6. La matrice de passage $[N]$ s'écrit alors :

$$[N] = \begin{bmatrix} a_{xx}^2 & a_{xy}^2 & a_{xz}^2 & a_{xy}a_{xz} & a_{xz}a_{xx} & a_{xx}a_{xy} \\ a_{yx}^2 & a_{yy}^2 & a_{yz}^2 & a_{yy}a_{yz} & a_{yz}a_{yx} & a_{yx}a_{yy} \\ a_{zx}^2 & a_{zy}^2 & a_{zz}^2 & a_{zy}a_{zz} & a_{zz}a_{zx} & a_{zx}a_{zy} \\ 2a_{yx}a_{zx} & 2a_{yy}a_{zy} & 2a_{yz}a_{zz} & a_{yy}a_{zz} + a_{yz}a_{zy} & a_{yx}a_{zz} + a_{yz}a_{zx} & a_{yy}a_{zx} + a_{yx}a_{zy} \\ 2a_{zx}a_{xx} & 2a_{zy}a_{xy} & 2a_{zz}a_{xz} & a_{xy}a_{zx} + a_{xz}a_{zy} & a_{xz}a_{zx} + a_{xx}a_{zz} & a_{xx}a_{zy} + a_{xy}a_{zx} \\ 2a_{xx}a_{yx} & 2a_{xy}a_{yy} & 2a_{xz}a_{yz} & a_{xy}a_{yz} + a_{xz}a_{yy} & a_{xz}a_{yx} + a_{xx}a_{yz} & a_{xx}a_{yy} + a_{xy}a_{yx} \end{bmatrix}$$

Les coefficients de $[M]$ et $[N]$ sont identiques à un facteur près dans les parties haute-droite et bas-gauche. En reportant ces coefficients dans la loi de Hooke, on a : $[T] = [C][S]$, et $[T'] = [M][T] = [M][C][S]$, et puisque $[S] = [N]^{-1}[S']$, il vient $[T'] = [M][C][N]^{-1}[S'] = [C'][S']$, soit :

$$[C'] = [M][C][N]^{-1}. \quad (3.23)$$

De la même manière, on trouvera que :

$$[S'] = [N][S][M]^{-1}. \quad (3.24)$$

La matrice du cosinus directeur a une particularité qui est que son inverse est égal à sa transposée : $[a]^{-1} = [a]^T$. De ce fait, si la matrice $[N]$ est basée sur celle des cosinus directeurs $[a]$, la matrice $[N]^{-1}$ correspond à la matrice $[a]^{-1}$ elle-même égale à sa transposée. Par conséquent, $[N]^{-1} = [M]^T$. L'expression des coefficients élastiques dans la nouvelle base devient alors :

$$[C'] = [M][C][M]^T \quad (3.25)$$

Cette nouvelle matrice élastique perd son aspect de réduction liée à la symétrie du réseau et présentera potentiellement 36 coefficients non-nuls. Le fluorure de magnésium MgF_2

qui a 7 coefficients non-nuls et 3 symétriques dans le repère XYZ présente 13 coefficients non-nuls dans le repère 111.

3.3.3/ CALCUL DES FRÉQUENCES ACOUSTIQUES

Au regard de la sous-section précédente et dans le but de mener à bien l'examen des conditions de couplage photon-phonon dans le cadre de la diffusion Brillouin stimulée, il nous semble judicieux de mettre en place une procédure permettant de calculer les vitesses et fréquences des ondes acoustiques en tout point de la périphérie du disque. Cette procédure comporte 10 étapes qui sont les suivantes :

1. Sélectionner un matériau (CaF_2 , BaF_2 , MgF_2 , LiF , ...);
2. Choisir une orientation du plan de la lame pour le matériau sélectionné ($[100]$, $[110]$, $[111]$ etc);
3. Exprimer le changement de repère en utilisant la matrice de passage **[M]**;
4. Exprimer les matrices des coefficients élastiques dans ce repère par changement de repère en utilisant l'expression (3.25);
5. Choisir une direction de propagation pour l'onde acoustique dans le plan de la lame et exprimer les coordonnées du vecteur propagation **n** dans le plan de la lame;
6. Définir la matrice de Christoffel pour chaque valeur de l'angle ψ (qui caractérise la direction de propagation de l'onde acoustique dans le plan de la lame) en utilisant l'équation de Christoffel donnée par la relation (3.16);
7. Déterminer les caractéristiques des ondes longitudinales et transverses en tout point de la périphérie du disque;
8. Déterminer, en fonction de l'angle ψ la direction de propagation de l'onde acoustique dans le plan de la lame, les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice obtenue précédemment. Ce calcul se fait en se servant du déterminant de Christoffel donné par la relation (3.16) :
 - Valeurs propres : C^m pour chaque mode $m=1,3$
 - Vecteurs propres : P^m polarisation de l'onde (m);
9. Identifier les vitesses du mode longitudinal et des modes transverses;
10. Déterminer l'offset de fréquence Brillouin généré par les ondes longitudinales du disque choisi et ce, pour la longueur d'onde optique utilisée.

Afin de tester notre procédure, nous avons dans un premier temps calculé la fréquence du mode acoustique longitudinal (responsable de la diffusion Brillouin) le long de la périphérie d'un cristal de CaF_2 orienté $[111]$ à la longueur d'onde de 1064 nm. Ces résultats ont été comparés à ceux de Grudinin et *al.* qui ont publié dans leurs travaux [86] une étude détaillée de l'effet Brillouin dans le même cristal avec la même orientation et à la même longueur d'onde. Notre calcul de fréquence acoustique du mode longitudinal présenté sur la figure 3.8(a) est en accord avec le leur qui est présenté sur la figure 3.8(b) en bleu. Tout les deux calculs relèvent un mode acoustique longitudinal à une fréquence d'environ 17.7 GHz avec une dispersion sur la périphérie d'environ 112 MHz.

Nous avons ensuite simulé et comparé les modes acoustiques longitudinaux et transverses pour 4 cristaux fluorés orientés $[111]$ à savoir le fluorure de baryum BaF_2 , le fluorure de calcium CaF_2 , le fluorure de lithium LiF et le fluorure de magnésium MgF_2 . Ces

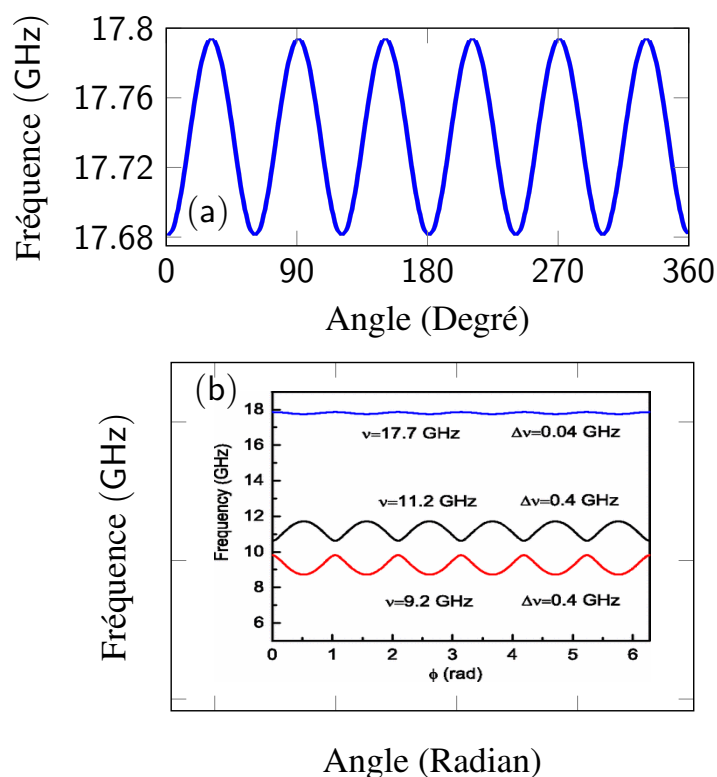


FIGURE 3.8 – Comparaison entre notre calcul de fréquence du mode acoustique longitudinal présenté en [(a)] et celui de Grudin et *al.* présenté en [(b)] par la courbe bleue extrait de [86] en tout point de la périphérie d'un disque de CaF_2 orienté [111] à la longueur d'onde de 1064 nm. Les deux calculs relèvent un mode acoustique longitudinal à une fréquence d'environ 17.7 GHz avec une variation de fréquence pic à pic sur la périphérie de 112 MHz.

simulations représentées sur la figure 3.9 nous ont permis de remonter à la variation de fréquence Brillouin de chacun de ces cristaux et de connaître celui qui minimise cette variation.

Les résultats de ces simulations sont récapitulés dans le tableau 3.2. Nous constatons que le fluorure de barium présente une variation de fréquence faible d'environ 30 kHz pour son mode longitudinal qui est à la fréquence de 8.22 GHz. Le fluorure de calcium et le fluorure de lithium présentent respectivement une variation de fréquence de 43.2 MHz et 70 MHz pour leurs modes longitudinaux à environ 12.15 GHz et 13.61 GHz. Le fluorure de magnésium quant à lui présente une variation de fréquence importante de 1 GHz avec un profil assez complexe pour le mode longitudinal. Il apparaît clairement que le fluorure de barium en orientation [111] semble être le cristal et l'orientation la plus intéressante pour exploiter la diffusion Brillouin stimulée.

Dans la section qui suit, nous apportons plus de précisions sur la diffusion Brillouin stimulée dans les résonateurs à modes de galerie, présentons le dispositif expérimental que nous avons mis en place ainsi que nos résultats expérimentaux sur un cristal de fluorure de lithium.

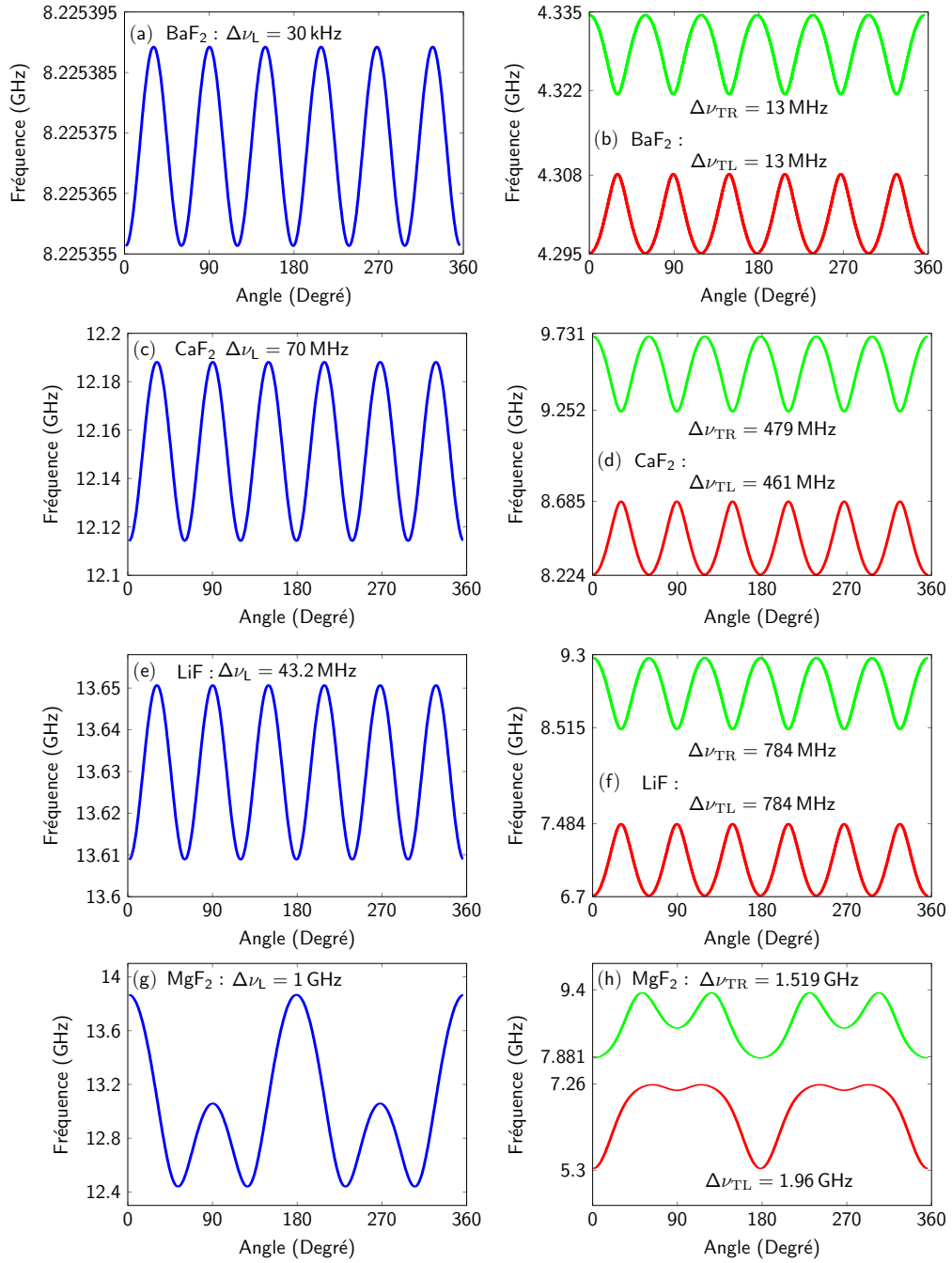


FIGURE 3.9 – Simulations numériques des fréquences acoustiques Brillouin à 1550 nm pour différents cristaux orientés [111] en suivant la démarche indiquée dans la sous-section 4.3.3. Les figures [(a),(c),(e),(g)] (en bleu) correspondent respectivement aux ondes acoustiques longitudinales pour un cristal de BaF_2 , CaF_2 , LiF , MgF_2 . Les figures [(b),(d),(f),(h)] représentent respectivement les ondes acoustiques transverses rapides (en vert) et lentes en rouge pour les cristaux cités précédemment.

Cristal	BaF ₂	LiF	CaF ₂	MgF ₂
f_L GHz	8.225	[13.61–13.65]	[12.11 - 12.19]	[12.4 - 13.8]
$\Delta\nu_L$ MHz	0.03	43.2	70	1000
f_{TR} GHz	[4.322 - 4.335]	[8.515 - 9.3]	[9.252 - 9.731]	[7.881 - 9.4]
$\Delta\nu_{TR}$ MHz	13	784	479	1519
f_{TL} GHz	[4.295 - 4.308]	[6.7 - 7.484]	[8.224 - 8.685]	[5.3 - 7.26]
$\Delta\nu_{TL}$ MHz	13	784	461	1.96

TABLE 3.2 – Tableau récapitulatif des fréquences Brillouins longitudinales f_L , transverses rapides f_{TR} et transverses lentes f_{TL} ainsi que leurs variations respectives $\Delta\nu_L$, $\Delta\nu_{TR}$, $\Delta\nu_{TL}$ pour Ψ allant de 0 à 2π pour les cristaux suivants en orientation [111] : BaF₂, CaF₂, LiF, MgF₂.

3.4/ DIFFUSION BRILLOUIN STIMULÉE DANS LES RÉSONATEURS À MODE DE GALERIE

Comme expliqué précédemment, la diffusion Brillouin stimulée a été étudiée pour des applications diverses et variées. Nous pouvons par exemple citer les résonateurs fibrés plus connus sous le nom de *Fiber Ring Resonator* (FRR) [10, 136, 137, 138], les fibres microstructurées et les fibres à cristaux photoniques [124, 139], etc. Par exemple, une cascade d'interactions peut conduire à la formation de plusieurs ordres d'ondes Stokes avec une puissance seuil inférieure à 1 mW [140]. Le décalage fréquentiel entre ces ondes Stokes compris entre 10 et 100 GHz donne ainsi la possibilité par photo-détection de générer des ondes RF dans cette plage de fréquence. En plus, les phonons acoustiques générés en nombre important lors de la diffusion Brillouin stimulée ont préférentiellement une fréquence correspondant au maximum de la courbe de gain Brillouin [123]. Cela conduit à une réduction considérable de la largeur de raie de l'onde Stokes comparé à la pompe [9, 127, 136]. Un facteur de réduction de l'ordre de 10^4 [127] a déjà été démontré dans des résonateurs fibrés et des largeurs de raies de quelques hertz pour l'onde Stokes ont également été démontrées [136]. Les propriétés ainsi que les travaux cités précédemment justifient l'utilisation de la diffusion Brillouin stimulée pour des applications type lasers ou de génération de micro-ondes.

Parmi les avantages des résonateurs à modes de galerie, nous pouvons citer le fort confinement de la lumière dans leur périphérie interne, le faible volume du mode et la possibilité d'obtenir des modes de galerie à très haut facteur de qualité [118]. Ces propriétés accentuent fortement les effets non-linéaires. De ce fait, la puissance seuil nécessaire pour les exciter devient très faible. La diffusion Brillouin stimulée dans les résonateurs à modes de galerie n'est pas évidente dans la mesure où la largeur de raie du gain Brillouin est de quelques dizaines de MHz tandis que l'intervalle spectral libre (ISL) de nos résonateurs est de l'ordre de la dizaine de GHz. En plus, il n'y a aucune garantie que l'onde Stokes corresponde à un mode résonnant dans la cavité. A priori, il y a peu de chances d'avoir un mode de galerie coïncidant au décalage Brillouin pour supporter l'onde Stokes [86, 141].

Cependant, les résonateurs à modes de galerie supportent des modes d'ordre supérieur pouvant être espacés du décalage Brillouin comme le montre la figure 3.10. La diffusion Brillouin a donc été reportée dans plusieurs architectures de résonateurs à modes de

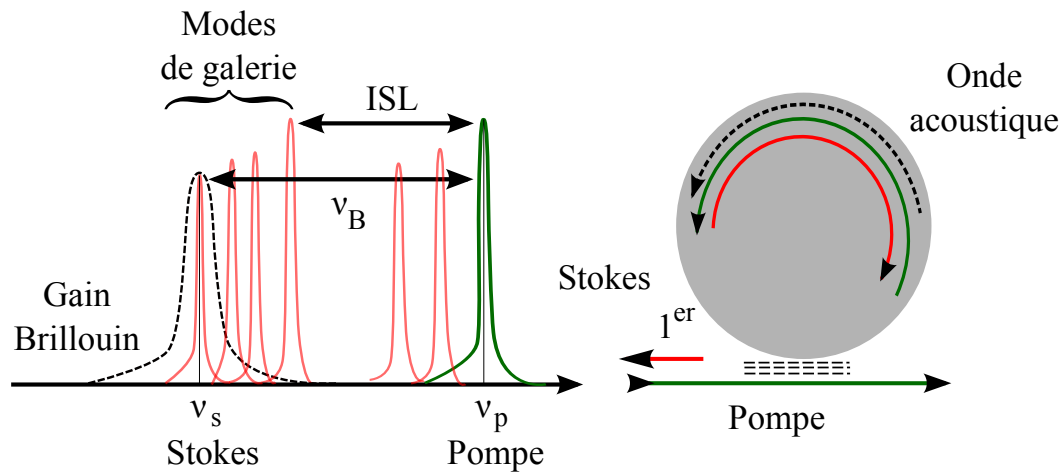


FIGURE 3.10 – Résonateur à modes de galerie et modes d'ordre élevés dans une configuration favorable à la diffusion Brillouin stimulée. Parmi les modes résonants en rouge, un d'entre eux coïncide avec le maximum de la courbe de gain Brillouin (en pointillé). Il va de ce fait supporter l'onde Stokes qui va être excitée.

galerie [7, 88, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148]. Dans le cas de nos résonateurs qui sont fluorés et de tailles millimétriques, le décalage Brillouin et leur ISL à 1550 nm sont du même ordre de grandeur, environ quelques dizaines de GHz. Il est donc possible d'y observer la diffusion Brillouin stimulée. Dans leurs travaux, Lee et *al.* [149] ont observé la diffusion Brillouin stimulée dans un résonateur à base de silice sur puce silicium présentant un facteur de qualité record de 8.75×10^8 . L'originalité de ces travaux réside sur le contrôle précis à l'échelle 1/20000 par technique de lithographie du diamètre du résonateur afin que son ISL corresponde au décalage Brillouin c'est à dire à la fréquence de l'onde acoustique ν_B . En s'inspirant des travaux cités précédemment, Li et *al.* [125] ont réalisé un synthétiseur micro-onde utilisant une cascade de diffusion Brillouin. Cette première réalisation d'une source micro-onde sur puce basée sur la diffusion Brillouin stimulée dans un résonateur à modes de galerie fonctionne sur la photo-détection d'ondes Stokes d'ordres différents. Le décalage Brillouin dans leur résonateur étant de 10.8 GHz, la détection des ondes Stokes d'ordre 1 et 3 leur a permis de générer une micro-onde à la fréquence de 21.7 GHz. La détection d'autres ordres Stokes ouvre donc la possibilité de générer des micro-ondes dans d'autres plages de fréquence. Il est à noter que ce synthétiseur présente un record de bruit de phase de plancher de -160 dBc/Hz. On peut également citer d'autres travaux parmi lesquels ceux de Li et *al.* [150] démontrant un laser Brillouin faible bruit sur puce opérant à 1064nm avec un bruit de fréquence Schawlow Townes de $0.1 \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ et ceux de Loh et *al.* [151] en 2015 qui ont réalisé un laser Brillouin ayant une largeur de raie de 240 Hz.

La première démonstration de diffusion Brillouin stimulée dans un résonateur à modes de galerie cristallin revient à Grudinin et *al.* [86]. Cette démonstration a été faite à travers un cristal de fluorure de calcium (CaF_2) d'environ 5 mm de diamètre avec une onde Stokes décalée d'environ 17.7 GHz pour une puissance seuil de $3 \mu\text{W}$. Dans ces travaux, Grudinin et *al.* dérivent également une expression de la puissance seuil Brillouin en accord avec celle que nous présentons plus loin. Plus récemment Lin et *al.* [40] ont mis en évidence

une cascade d'ordres Stokes Brillouin allant de 8.2 GHz à 49 GHz dans un résonateur à base de fluorure de baryum (BaF_2).

Dans nos travaux relatifs à la diffusion Brillouin stimulée dans les résonateurs à modes de galerie, nous démontrons pour la première fois le processus de diffusion Brillouin stimulée dans un résonateur à mode de galerie cristallin mono-fluoré à savoir le fluorure de lithium (LiF) orienté z – *cut* c'est à dire [001]. Dans les parties qui suivent, nous décrivons notre dispositif expérimental de caractérisation de la diffusion Brillouin, présentons le spectre de diffusion Brillouin observé dans le LiF que nous comparons à notre calcul de vitesse et fréquence acoustique Brillouin pour cette orientation. Nous introduisons également un modèle théorique permettant de décrire la dynamique temporelle de la lumière transmise à travers le résonateur à savoir l'onde pompe, ainsi que la dynamique temporelle de celle rétrodiffusée à savoir l'onde Stokes. Nous effectuons par la suite une étude de stabilité nous permettant d'obtenir une expression analytique de la puissance seuil Brillouin.

3.4.1/ MONTAGE EXPÉRIMENTAL ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Avant de décrire le montage expérimental, il convient de rappeler qu'il est possible de prédire la position de l'onde Stokes par rapport à l'onde pompe en fonction de la fréquence du mode acoustique longitudinal se propageant le long du cristal. Cette fréquence est fonction de la vitesse de propagation de ce même mode. La procédure de calcul de ces deux paramètres en tout point de la périphérie d'un disque a été l'objet de la sous-section 3.3.3. Lors de la diffusion Brillouin stimulée, les ondes Stokes et pompe sont décalées de la fréquence de l'onde acoustique ν_B qui a pour expression :

$$\nu_B = \frac{\Omega_B}{2\pi} = \frac{2n_{\text{eff}}V_a}{\lambda_p}. \quad (3.26)$$

Dans cette équation, on a noté n_{eff} l'indice effectif du mode de galerie optique résonant dans la cavité, λ_p la longueur d'onde de pompe et V_a la vitesse de l'onde acoustique dans le résonateur. Cette dernière est fonction des constantes élastiques, de la densité du matériau et de l'angle ψ (voir section 3.3.3). Pour $\psi = 0$ par exemple c'est à dire pour une propagation de l'onde acoustique suivant la direction [100], elle s'exprime comme suit :

$$V_a = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}}. \quad (3.27)$$

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats obtenus en fonction des paramètres définis plus haut pour le fluorure de lithium. Les valeurs de ces paramètres sont toutes disponibles dans le livre intitulé *Handbook of optical material* [152].

Notre calcul représenté sur la figure 3.13 prédit environ 13.2 GHz comme fréquence du mode acoustique longitudinal et donc, un décalage en fréquence de cette valeur entre l'onde pompe et l'onde Stokes. Afin de vérifier cette prédiction, nous avons mis en place le dispositif expérimental présenté sur la figure 3.11. Il est constitué d'un laser fibré accordable en fréquence de marque Koheras émettant en continu à la longueur d'onde de 1550 nm avec une largeur de raie de l'ordre du kilohertz. Un circulateur optique fibré placé avant le résonateur permet d'observer via un analyseur de spectre optique la lumière rétrodiffusée. L'indice de réfraction du LiF qui est de 1.38 à la longueur d'onde de 1550 nm

Définition des paramètres	Valeurs numériques
Constante élastique C_{11}	$1.3197 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Constante élastique C_{12}	$0.4767 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Constante élastique C_{44}	$0.6364 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Densité ρ	2.639 g/cm^{-3}
Indice effectif n_{eff}	1.38
Vitesse de l'onde acoustique V_a	7.62 km/s
Fréquence de l'onde acoustique ν_B	13 GHz

TABLE 3.3 – Tableau récapitulatif des paramètres nécessaires au calcul de la vitesse et de la fréquence de l'onde acoustique ainsi que la valeur de ces dernières.

étant inférieur à celui de la silice 1.45 à la même longueur d'onde, nous utilisons un *taper* fait maison à base de silice avec une transmission d'environ 80 % pour coupler la lumière dans le résonateur. La première branche d'un coupleur 3 dB nous permet d'observer les modes résonants dans notre cavité via une photodiode (*InGaAs Amplified Detector, PDA 10CF-EC*) de marque Thorlabs connectée à l'oscilloscope. La seconde branche du coupleur nous permet d'observer les ondes pompe et Stokes via un analyseur de spectre optique de marque APEX 2440B ayant une résolution de 5 MHz.

La figure 3.12 pour une puissance pompe de 55 mW montre en **[(a)]** le spectre de la lumière transmise à travers le résonateur et en **[(b)]** celui de l'onde retrodiffusée ou onde Stokes. Cette dernière est décalée d'environ 13 GHz de la pompe comme prédit par nos calculs. Notre spectre Brillouin comporte une unique raie Stokes sans présence d'autres raies Stokes d'ordre supérieur ni de composantes spectrales issues d'un autre phénomène non-linéaire du genre mélange à quatre ondes. On observe sur chacun de ces spectres la présence d'un signal parasite qui est dû à la diffusion Rayleigh.

3.5/ DIFFUSION BRILLOUIN STIMULÉE : ÉTUDE THÉORIQUE

3.5.1/ ÉQUATIONS DE LA DIFFUSION BRILLOUIN STIMULÉE ET PUISSANCE SEUIL BRILLOUIN

Nous avons vu plus haut qu'une onde pompe peut engendrer un processus de diffusion de la lumière à travers un résonateur à modes de galerie. De manière générale, lorsqu'une onde électromagnétique se propage à travers un milieu matériel, il y a apparition d'un champ de polarisation $\mathbf{P}$ qui est fonction de la susceptibilité électrique du milieu χ , de sa permittivité ϵ_0 ainsi que du champ électrique $\mathbf{E}$ de l'onde électromagnétique en question. Nous pouvons exprimer ce champ de polarisation sous la forme :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}. \quad (3.28)$$

Il convient d'ajouter à ce champ de polarisation la contribution de la diffusion que nous désignons par P_d . Nous définissons cette dernière comme étant le produit du champ électrique $\mathbf{E}$ et du tenseur diélectrique $\Delta\epsilon$. Le champ de polarisation final devient alors la somme des deux champs introduits précédemment. Nous écrivons :

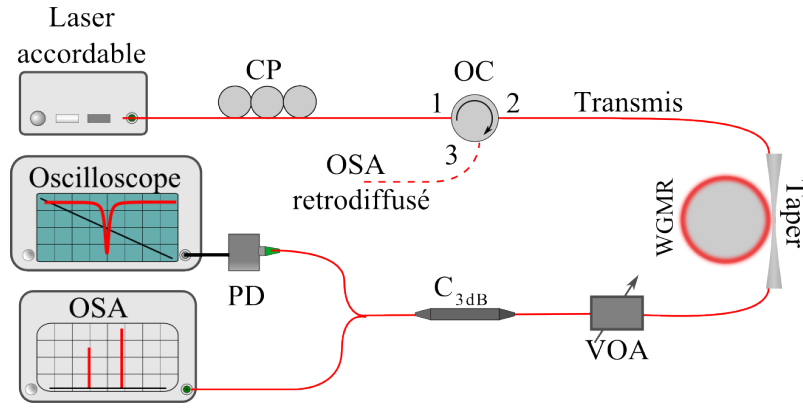


FIGURE 3.11 – Dispositif expérimental en vue de la caractérisation de la diffusion Brillouin stimulée. PC : Contrôleur de Polarisation fibrée, OC : Circulateur Optique fibré, VOA : Atténuateur Optique Variable, C_{3dB} : Coupleur fibré 3 dB, PD : Photodiode, OSA : analyseur de spectre optique.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} + \Delta \epsilon \mathbf{E}. \quad (3.29)$$

En introduisant ce champ de polarisation dans l'équation d'onde, il devient :

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_{B,F} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{B,F}}{\partial t^2}, \quad (3.30)$$

où $\mathbf{E}_B$ représente le champ retrodiffusé c'est à dire l'onde Stokes et $\mathbf{E}_F$ celui transmis c'est à dire l'onde pompe transmise à travers le milieu matériel en question. Nous pouvons en utilisant l'approximation de l'enveloppe lentement variable, les exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}_F = \frac{1}{2} A_F(t) \exp(i\omega_{l_F} - l_{F,\phi}) F_F(r, \theta) + cc, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{E}_B = \frac{1}{2} A_B(t) \exp(i\omega_{l_B} - l_{B,\phi}) B_B(r, \theta) + cc. \quad (3.32)$$

Dans ces deux expressions, c désigne la vitesse de la lumière, n l'indice de réfraction du milieu. A_F , ω_{l_F} , l_F , F_F désignent respectivement l'amplitude, la fréquence, l'ordre angulaire du mode et le profil du mode optique transmis. De même, A_B , ω_{l_B} , l_B , F_B désignent respectivement l'amplitude, la fréquence, l'ordre angulaire du mode et le profil du mode optique retrodiffusé. Nous avons négligé la contribution de l'onde acoustique en supposant que le champ acoustique du phonon suit de manière adiabatique celui du photon. En nous servant de la méthode utilisée dans la modélisation de l'effet Kerr optique ayant aboutit à l'équation de Lugiato-Lefever, nous obtenons un modèle temporel permettant de suivre la dynamique temporelle de l'onde transmise que nous notons $\mathcal{F}(t)$ et celle de l'onde réfléchi que nous notons $\mathcal{B}(t)$. Ce modèle se résume à deux équations couplées de la forme :

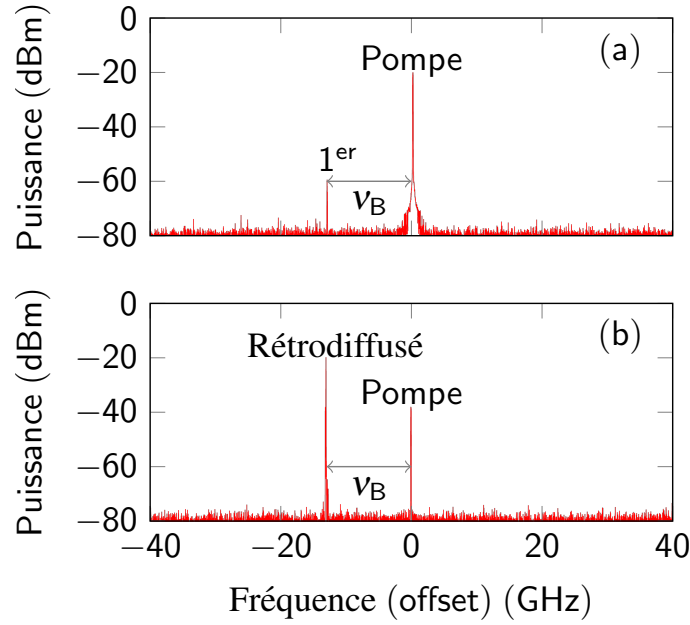


FIGURE 3.12 – Spectres expérimentaux des champs intracavité. La fréquence ν_B correspond au décalage Brillouin [(a)] sens de la transmission, [(b)] sens de la retrodiffusion. le signal Brillouin dans le spectre la transmission ainsi que celui de pompe dans le spectre retrodiffusé sont dus à la diffusion Rayleigh que nous qualifions de parasite.

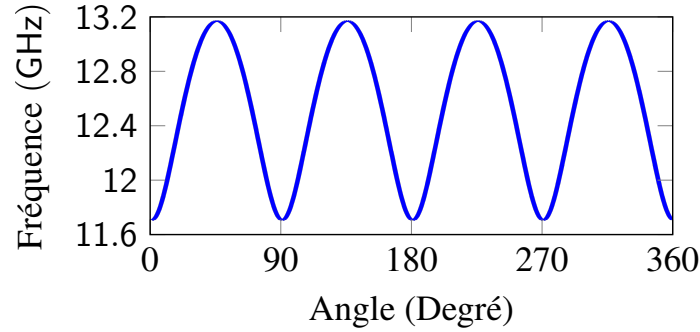


FIGURE 3.13 – Calcul de la fréquence de l'onde acoustique selon la procédure définie dans la section 3.3.3 pour un résonateur en LiF orienté *z-cut*. Le calcul relève une onde acoustique d'environ 13.2 GHz en accord avec les observations expérimentales avec une variation de fréquence pic à pic d'environ 1.5 GHz.

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -\frac{1}{2}\Delta\omega_{\text{tot}}\mathcal{F} + i\sigma_f\mathcal{F} - \frac{g_B v_g}{2A_{\text{eff}}} |\mathcal{B}|^2 \mathcal{F} + \sqrt{\Delta\omega_{\text{ext}}/T_R} E_{\text{ext}}, \quad (3.33)$$

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} = -\frac{1}{2}\Delta\omega_{\text{tot}}\mathcal{B} + i\sigma_b\mathcal{B} + \frac{g_B v_g}{2A_{\text{eff}}} |\mathcal{F}|^2 \mathcal{B}, \quad (3.34)$$

où $P = E_{\text{ext}}^2$ correspond à la puissance de pompe en watts. La largeur de raie $\Delta\omega_{\text{tot}} = \omega_c/Q$ est la somme de la largeur de raie intrinsèque $\Delta\omega_{\text{in}} = \omega_c/Q_{\text{in}}$ et de celle extrinsèque due

au couplage $\Delta\omega_{\text{ext}} = \omega_c/Q_{\text{ext}}$ où $Q^{-1} = Q_{\text{in}}^{-1} + Q_{\text{ext}}^{-1}$ est le facteur de qualité à charge du résonateur. $T_r = \pi D/v_g$ correspond au temps nécessaire à un photon pour faire un tour de cavité, $g_B \sim 10^{-11}\text{m/W}$ le gain Brillouin du cristal, v_g la vitesse de groupe, $A_{\text{eff}} \sim r^{\frac{5}{6}}\lambda^{\frac{7}{6}}$ l'aire effective du mode pompé et D le diamètre du résonateur. Les termes σ_f et σ_b sont les paramètres correspondant aux décalages fréquentiels entre les différents champs (transmis et retrodiffusé) et les résonances froides de la cavité. Dans le but de simplifier nos calculs, nous les considérerons nuls. Cette approximation implique que la fréquence angulaire du laser que nous désignons par ω_L coïncide avec celle résonant dans la cavité que nous désignons par ω_c .

En partant de l'équation (3.34) et en effectuant une étude de stabilité de notre système, nous pouvons déterminer de manière analytique l'expression de la puissance seuil nécessaire pour déclencher la diffusion Brillouin. Pour ce faire, nous commençons par déterminer les points fixes de notre système en dessous de la puissance seuil en annulant toutes les dérivées et en fixant le champ retrodiffusé $\mathcal{B}$ à 0. Nous trouvons que les champs stationnaires intra-cavité transmis $\mathcal{F}_{\text{st}}$ et retrodiffusé $\mathcal{B}_{\text{st}}$ sont définis par les équations ci dessous :

$$\mathcal{F}_{\text{st}} = 2 \frac{\sqrt{\Delta\omega_{\text{ext}}/T_R}}{\Delta\omega_{\text{tot}}} \sqrt{P}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{B}_{\text{st}} = 0. \quad (3.36)$$

En appliquant une perturbation à ces deux états, nous pouvons statuer sur la croissance exponentielle de la perturbation, auquel cas il y a diffusion Brillouin. Dans le cas contraire, les points fixes sont stables, ce qui implique qu'il n'y a pas de diffusion Brillouin. Le champ transmis est perturbé comme suit : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{st}} + \delta\mathcal{F}$; son module au carré est : $|\mathcal{F}|^2 = |\mathcal{F}_{\text{st}}|^2 + \mathcal{F}_{\text{st}}\delta\mathcal{F}^* + \mathcal{F}_{\text{st}}^*\delta\mathcal{F}$ (nous avons négligé le terme d'ordre supérieur $|\delta\mathcal{F}|^2$). Le champ rétrodiffusé est à son tour perturbé comme suit : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{st}} + \delta\mathcal{B} \equiv \delta\mathcal{B}$; son module carré au premier ordre est nul. En insérant ces variables perturbées dans les équations (3.33) et (3.34), nous obtenons les expressions ci-dessous :

$$\delta\dot{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2}\Delta\omega_{\text{tot}}\delta\mathcal{F}, \quad (3.37)$$

$$\delta\dot{\mathcal{B}} = \left[-\frac{1}{2}\Delta\omega_{\text{tot}} + \frac{g_B v_g}{2A_{\text{eff}}} |\mathcal{F}_{\text{st}}|^2 \right] \delta\mathcal{B}. \quad (3.38)$$

A travers ces deux expressions, il apparait qu'il n'y a pas de couplage entre la perturbation de l'onde transmise et celle de l'onde retrodiffusée. En effet la perturbation de l'onde transmise décroît toujours tandis que celle de l'onde rétrodiffusée est excitée dès que le gain Brillouin devient supérieur aux pertes, tel qu'illustré par l'équation suivante :

$$\frac{g_B v_g}{2A_{\text{eff}}} |\mathcal{F}_{\text{st}}|^2 > \frac{1}{2}\Delta\omega_{\text{tot}}. \quad (3.39)$$

En incluant cette inégalité dans l'équation (3.35) (3.36) et les équations suivantes, nous obtenons l'expression de la puissance seuil nécessaire à la diffusion Brillouin.

$$P_{\text{th}} = \omega_L^2 \frac{Q_{\text{ext}}}{Q_{\text{tot}}^3} \frac{A_{\text{eff}} T_R}{4g_B v_g} \propto \frac{1}{g_B} \frac{V_{\text{eff}}}{Q_{\text{tot}}^2}, \quad (3.40)$$

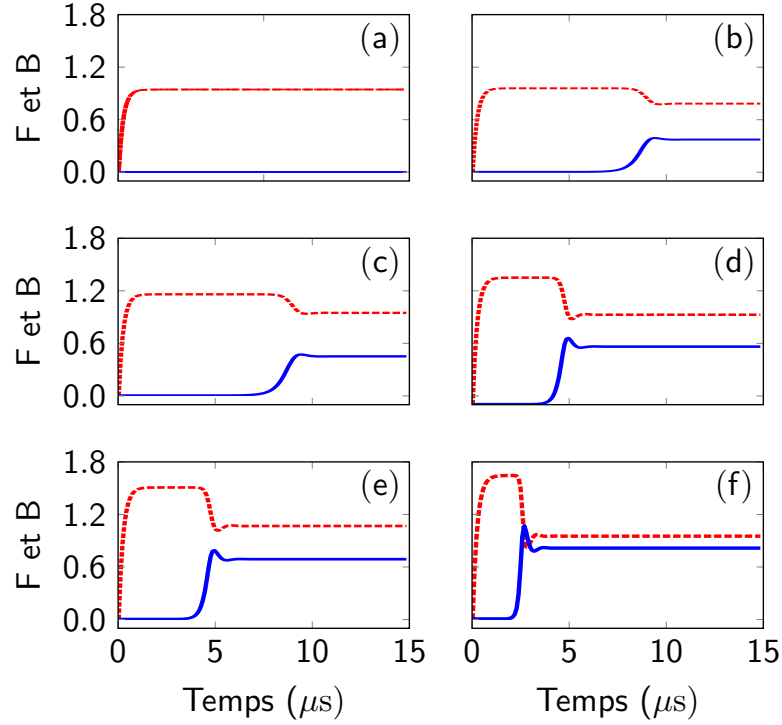


FIGURE 3.14 – Traces temporelles du champ transmis $|\mathcal{F}(t)|$ et celui retrodiffusé $|\mathcal{B}(t)|$ pour une puissance de pompe en dessous du seuil : **[(a)]** $0.99 \times P_{th}$, au delà du seuil : **[(b)]** $1.01 \times P_{th}$, **[(c)]** $1.5 \times P_{th}$, **[(d)]** $2 \times P_{th}$, **[(e)]** $2.5 \times P_{th}$, **[(f)]** $3 \times P_{th}$

où $V_{eff} = 2\pi A_{eff}$ est le volume du mode. L'équation (3.40) stipule qu'une puissance seuil faible requiert un gain Brillouin élevé, un facteur de qualité élevé et un faible volume du mode. Cette expression est quasi-identique à celle proposée par Grudinin et *al.* [86] dans le cas d'un couplage critique. Les paramètres physiques utilisés pour la simulation numérique sont : $D = 12$ mm, $A_{eff} = 1.0 \times 10^{-11} \text{ m}^2$, $n_{eff} = 1.38$, $Q_{load} = 1.45 \times 10^8$, $Q_{in} = 3.35 \times 10^8$, $Q_{ext} = 2.58 \times 10^8$, $\omega_L = 1.3 \times 10^{15}$ rad/s.

Les résultats de la simulation numérique sont présentés figure 3.14. Nous observons qu'en dessous de la puissance seuil définie par l'expression (3.40), le champ retrodiffusé $\mathcal{F}$ n'est pas excité. Cependant, dès que la puissance de pompe devient supérieure à la puissance seuil $P > P_{th}$, la diffusion Brillouin est déclenchée et augmente rapidement d'intensité au fur et à mesure que la puissance pompe augmente. Le régime permanent est atteint au bout d'une dizaine de microsecondes. Ce temps est assez proche du temps de vie d'un photon dans la cavité $\tau_{ph} = 1/\Delta\omega_{tot}$.

3.6/ CONCLUSION

Ce chapitre a comporté quatre grandes sections. Après une première section introductive, nous avons présenté à travers la section (3.2) les différents processus de diffusion de la lumière dans un milieu matériel. Nous y avons introduit les processus de diffusion Brillouin spontanée et stimulée puis traité de manière brève de l'intérêt de la diffusion Brillouin stimulée.

La troisième section de ce chapitre traite de la propagation des ondes acoustiques dans les structures cristallines car nos résonateurs sont des lames cristallines anisotropes. En effet, l'expression de la bande passante Brillouin donnée par l'équation (3.8) stipule que la vitesse des ondes acoustiques dans un cristal joue un rôle très important sur l'élargissement des raies Stokes et anti-Stokes. Dans la mesure où le comportement de l'onde acoustique dans un cristal est dicté par les propriétés de ce dernier, il a fallu dans un premier temps introduire les paramètres caractéristiques d'un cristal puis présenter un modèle numérique permettant de calculer la vitesse des ondes acoustiques en tout point de la périphérie du cristal en fonction de ses paramètres caractéristiques et ce, indépendamment de son orientation. Ce modèle nous a permis d'effectuer des simulations numériques qui ont mis en évidence les variations de fréquence du mode acoustique longitudinal qui se propage le long de la périphérie de plusieurs cristaux fluorés (CaF_2 , MgF_2 , SrF_2 , BaF_2 et LiF). Le résultat de ces simulations qui est présenté sur la figure 3.9 a mis en évidence la faible variation de fréquence (30 kHz) du mode acoustique longitudinal pour le fluorure de baryum BaF_2 en orientation [111]. Cela signifie que l'onde Stokes générée présentera une faible largeur de raie. Par conséquent, ce cristal semble être le mieux indiqué des cristaux fluorés explorés dans le cadre de cette thèse afin d'exploiter la diffusion Brillouin stimulée à 1550 nm pour la synthèse de micro-ondes.

La quatrième section de ce chapitre contient nos résultats expérimentaux sur la diffusion Brillouin stimulée dans un cristal de fluorure de lithium orienté *z-cut*. L'accord entre la valeur expérimentale de la fréquence de l'onde acoustique soit 13 GHz et la valeur obtenue numériquement soit l'intervalle 13.2 GHz est excellent. Dans cette section, nous avons également présenté le modèle temporel développé dans le cadre de cette thèse afin de suivre la dynamique temporelle de l'onde transmise $\mathcal{F}(t)$ et celle de l'onde retrodiffusée $\mathcal{B}(t)$. Une analyse de stabilité de ce modèle, nous a permis d'obtenir une expression analytique de la puissance seuil Brillouin. Les simulations numériques présentées sur la figure 3.14 attestent de la validité du modèle temporel que nous avons développé.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

L'objectif de cette thèse était d'exploiter les non-linéarités Kerr et Brillouin dans les résonateurs à modes de galerie cristallins à la longueur d'onde de 1550 nm pour générer des micro-ondes ultra-stables de fréquences comprises entre 5 et 20 GHz. En effet, telle qu'évoquée tout le long de ce manuscrit, une propriété très intéressante de ces résonateurs est le fort confinement des modes à l'interface air-diélectrique et leurs très hauts facteurs de qualité qui accentuent les effets non-linéaires. A travers ces propriétés et via le mélange à quatre ondes dans des résonateurs de taille millimétrique, des peignes de fréquences optiques avec des taux de répétition se situant dans la plage de fréquences qui nous intéresse peuvent être générés. Ces propriétés permettent également l'interaction photons-phonons acoustiques à travers ces résonateurs. Cela conduit dans le cas des cristaux fluorés à la génération d'ondes Stokes décalées de l'onde pompe de la plage de fréquence qui nous intéresse. Par détection du peigne de fréquence optique ou des ondes pompe et Stokes sur une photodiode ayant une bande passante supérieure ou égale à 20 GHz, il est possible de générer des micro-ondes caractérisables sur un analyseur de spectre électrique. Ce schéma de génération d'ondes RF est celui qui a été utilisé tout le long des travaux de cette thèse que nous avons présentée dans ce manuscrit en 3 chapitres.

Le premier chapitre était consacré à la théorie, la fabrication, le couplage ainsi que la caractérisation des résonateurs à modes de galerie. Nous y avons fourni les outils nécessaires à la bonne compréhension des modes de galerie et des travaux présentés dans ce manuscrit. En particulier, nous avons introduit les méthodes d'excitation des modes de galerie mais aussi le facteur de qualité Q qui est l'un des paramètres les plus importants de ces résonateurs, particulièrement dans le cadre de nos travaux. En effet, les effets non-linéaires explorés dans ce manuscrit ont tous une puissance seuil inversement proportionnelle au carré, voire au cube du facteur de qualité. Une valeur élevée de ce dernier signifie une puissance seuil non-linéaire faible. Par conséquent, la quête de résonateurs à très hauts facteurs de qualité nous a conduit à adopter les cristaux fluorés comme matériau et le polissage comme processus de fabrication. Ce dernier ainsi que les résultats expérimentaux obtenus en terme de facteurs de qualité ont été présentés dans ce chapitre. En particulier, nous avons démontré à notre connaissance le premier résonateur à modes de galerie monofluoré (LiF) présentant un facteur de qualité Q supérieur à 10^8 mais aussi notre capacité à fabriquer de manière reproductible des résonateurs à modes de galerie difluorés (CaF_2 , MgF_2 , SrF_2 , BaF_2), avec des facteurs de qualité compris entre 10^9 et 3×10^9 . Il se pose alors la question de l'amélioration de ces valeurs. En effet, des

facteurs de qualité supérieurs à 10^{11} à 1550 nm ont été démontrés dans certains cristaux fluorés par combinaison de recuits et de polissages multiples. Cette piste est à explorer et à implémenter en vue d'améliorer les facteurs de qualité de nos résonateurs et de réduire de manière considérable les puissances seuils Kerr et Brillouin.

Le deuxième chapitre de ce manuscrit a porté sur les peignes de fréquences optiques de Kerr et leur utilisation pour la synthèse de micro-ondes ultra-stables. Le processus de formation d'un peigne de fréquences à travers un résonateur à modes de galerie via le mélange à quatre ondes a été présenté ainsi que les différents types de peignes de fréquences. Nous y avons également présenté les deux méthodes de stabilisation d'un peigne de fréquences utilisées dans le cadre de nos travaux. Il s'agit de la stabilisation par voie thermique et la stabilisation par la technique de Pound-Drever-Hall. Pour chacune d'elles, des peignes de Kerr expérimentaux ainsi que les performances de leurs spectres RF en termes de largeurs de raies et de bruits de phases ont été présentés. La stabilisation par voie thermique a conduit à des peignes dont les spectres RF ont des largeurs de raies comprises entre le kHz et le MHz. Ces performances ont été justifiées entre autres par l'existence de modes opto-mécaniques. La stabilisation par la technique du Pound-Drever-Hall a conduit à de meilleurs résultats avec des ondes RF ayant des largeurs de raies comprises entre 50 Hz et 300 Hz mais des performances en bruit de phase ne dépassant pas -90 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse. Au regard de ces résultats, de réels efforts présentés également dans ce chapitre ont été entrepris pour expliquer le bruit de fréquence d'un peigne de Kerr généré à travers un résonateur à modes de galerie. Une analyse détaillée des fluctuations thermo-optiques, thermo-élastiques, des modes opto-optomécaniques, du bruit du laser, du bruit de l'électronique, du bruit issu de la non-linéarité Kerr mais aussi la stabilisation par la technique du *self-injection-locking* sont des pistes qui sans aucun doute nous permettront dans des travaux futurs d'améliorer nos performances actuelles. Une partie de ce chapitre a été consacrée à la modélisation numérique des peignes de fréquences optiques. Après une présentation des différentes méthodes existantes, nous avons introduit le modèle spatio-temporel retenu dans le cadre de nos travaux. Des simulations numériques présentant un excellent accord avec les résultats expérimentaux ont été présentées. Une analyse brève de stabilité du modèle a aussi été présentée. La dernière section de ce chapitre a été consacrée à l'étude expérimentale et à la modélisation numérique d'instabilités oscillatoires périodiques à grande échelle apparues lors d'expériences de génération de peignes de Kerr dans un résonateur à base de fluorure de barium. Ces instabilités traduisent les décalages fréquentiels de la résonance causés par la combinaison de coefficients thermo-optique, thermo-élastique de signe opposé et la non-linéarité Kerr. Le modèle numérique que nous avons développé à ce propos reproduit avec une excellente fidélité les observations expérimentales. Il est à notre connaissance le premier du genre concernant un résonateur à modes de galerie millimétrique très haut facteur de qualité pompé par un laser émettant en continu.

Le dernier chapitre de ce manuscrit a été consacré aux interactions entre photons et phonons acoustiques. Dans ce cas précis, la génération des ondes RF se fait via l'effet Brillouin stimulé où une onde Stokes est générée suite à la diffusion de l'onde pompe par une onde acoustique. L'intérêt de ce phénomène non-linéaire dans les cristaux fluorés est que l'onde Stokes est décalée de l'onde pompe de quelques dizaines de GHz. La détection de ces deux ondes sur photodiode conduit donc à la génération d'une onde RF de quelques dizaines de GHz. Ce chapitre a permis de mettre en évidence l'importance de l'orientation d'un cristal sur la vitesse et la fréquence de l'onde acoustique, par consé-

quent sur la largeur de raie de l'onde Stokes. Les travaux que nous avons menés ont conduit au développement d'un modèle permettant de calculer la vitesse et la fréquence de l'onde acoustique en tout point de la périphérie de nos résonateurs qui sont des lames cristallines anisotropes. Des simulations numériques suivant plusieurs orientations et différents cristaux ont conduit à la sélection d'un cristal à base de fluorure de barium orienté [111] pour la génération d'ondes RF à faibles largeurs de raies via la diffusion Brillouin stimulée. Des travaux expérimentaux effectués sur un cristal en fluorure de lithium ont mis en évidence pour la première fois la diffusion Brillouin stimulée sur un cristal mono-fluoré. Les résultats obtenus sont en accord avec le modèle de calcul de fréquence acoustique développé. Un modèle numérique temporel permettant de suivre la dynamique de l'onde transmise et de celle retrodiffusée a également été développé. L'analyse de stabilité de ce modèle a conduit à une expression de puissance seuil Brillouin qui a été validée par nos simulations numériques. L'une des grandes contributions de ce chapitre est la mise en évidence de l'importance de l'orientation d'un cristal sur la largeur de raie de l'onde Stokes et l'introduction du fluorure de barium en orientation [111] comme étant le mieux indiqué pour exploiter la diffusion Brillouin stimulée à des fins de synthèses de micro-ondes. Un plan de travail a déjà été mis en place dans ce sens et une série d'analyses est actuellement en cours afin de mesurer la pureté et de vérifier l'exactitude de l'orientation de cristaux fluorés que nous avons acquis récemment. Les résultats de ces analyses seront suivis d'expériences de génération d'ondes RF via la diffusion Brillouin stimulée.

En conclusion, nous avons exploré dans les travaux de cette thèse les non-linéarités Kerr et Brillouin pour la synthèse de micro-ondes ultra-stables. Dans ce cadre, nous avons mené des investigations qui ont conduit à l'introduction d'une nouvelle gamme de cristaux jusqu'alors inexploitée dans la communauté des résonateurs à modes de galerie. A travers ces travaux, nous avons également mis en évidence des instabilités oscillatoires à large échelle qui ont conduit au développement d'un modèle numérique adapté aux résonateurs de taille millimétrique à très haut facteur de qualité. Au delà de la génération de micro-ondes ultra-stables, le potentiel des résonateurs à modes de galerie pour des applications telles que la spectroscopie, les télécommunications et autres est immense. Nous espérons que les résultats présentés dans ce manuscrit contribueront de manière significative à la recherche dans ces domaines et ouvriront la voie à de nouvelles applications.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VB Braginsky, ML Gorodetsky, and VS Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes. *Physics Letters A*, 137(7-8) :393–397, 1989.
- [2] Anatoliy A Savchenkov, Vladimir S Ilchenko, Andrey B Matsko, and Lute Maleki. Kilohertz optical resonances in dielectric crystal cavities. *Physical Review A*, 70(5) :051804, 2004.
- [3] Ivan S Grudinin, Vladimir S Ilchenko, and Lute Maleki. Ultrahigh optical q factors of crystalline resonators in the linear regime. *Physical Review A*, 74(6) :063806, 2006.
- [4] Theodor W Hänsch. Nobel lecture : passion for precision. *Reviews of Modern Physics*, 78(4) :1297, 2006.
- [5] John L Hall. Nobel lecture : Defining and measuring optical frequencies. *Reviews of Modern Physics*, 78(4) :1279, 2006.
- [6] TJ Kippenberg, SM Spillane, and KJ Vahala. Kerr-nonlinearity optical parametric oscillation in an ultrahigh-q toroid microcavity. *Physical Review Letters*, 93(8) :083904, 2004.
- [7] Vladimir S Ilchenko, Anatoliy A Savchenkov, Andrey B Matsko, and Lute Maleki. Nonlinear optics and crystalline whispering gallery mode cavities. *Physical review letters*, 92(4) :043903, 2004.
- [8] SP Smith, F Zarinetchi, and S Ezekiel. Narrow-linewidth stimulated brillouin fiber laser and applications. *Optics letters*, 16(6) :393–395, 1991.
- [9] Alexis Debut, Stéphane Randoux, and Jaouad Zemmouri. Experimental and theoretical study of linewidth narrowing in brillouin fiber ring lasers. *JOSA B*, 18(4) :556–567, 2001.
- [10] Zhonghua Ou, Xiaoyi Bao, Yang Li, Bhavaye Saxena, and Liang Chen. Ultranarrow linewidth brillouin fiber laser. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 26(20) :2058–2061, 2014.
- [11] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*, volume 2. Macmillan, 1896.
- [12] Gustav Mie. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der physik*, 330(3) :377–445, 1908.
- [13] Kenneth George Budden. *The wave-guide mode theory of wave propagation*. Logos Press, 1961.
- [14] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [15] Julius Adams Stratton and Jacques Hebenstreit. *Théorie de l'électromagnétisme*. Dunod, 1961.

- [16] François Treussard. *Etude experimentale de l'effet laser dans des microspheres de silice dopées avec des ions neodyme*. PhD thesis, Université Pierre et Marie-Curie (Paris 6), 1997.
- [17] CC Lam, Peter T Leung, and Kenneth Young. Explicit asymptotic formulas for the positions, widths, and strengths of resonances in mie scattering. *JOSA B*, 9(9) :1585–1592, 1992.
- [18] S Schiller. Asymptotic expansion of morphological resonance frequencies in mie scattering. *Applied optics*, 32(12) :2181–2185, 1993.
- [19] Laura Ghisa. *Couplage de micro-resonateurs : Applications aux fonctions optiques de traitement du signal*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2008.
- [20] Duane C Wallace. *Thermodynamics of crystals*. Courier Corporation, 1998.
- [21] Stephan Logunov and Sergey Kuchinsky. Experimental and theoretical study of bulk light scattering in CaF_2 monocrystals. *Journal of applied physics*, 98(5) :053501, 2005.
- [22] DW Vernooy, Vladimir S Ilchenko, H Mabuchi, EW Streed, and HJ Kimble. High-q measurements of fused-silica microspheres in the near infrared. *Optics Letters*, 23(4) :247–249, 1998.
- [23] Carole Arnaud. *Etude de fonctions actives et/ou passives a base de microresonateurs a modes de galerie*. PhD thesis, Université de Rennes I., 2004.
- [24] Aurélien Coillet, Rémi Henriët, Kien Phan Huy, Maxime Jacquot, Luca Furfaro, Irina Balakireva, Laurent Larger, and Yanne K Chembo. Microwave photonics systems based on whispering-gallery-mode resonators. *Journal of visualized experiments : JoVE*, (78), 2013.
- [25] P DelHaye, A Schliesser, O Arcizet, T Wilken, R Holzwarth, and TJ Kippenberg. Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator. *Nature*, 450(7173) :1214–1217, 2007.
- [26] Scott B Papp, Pascal DelHaye, and Scott A Diddams. Mechanical control of a microrod-resonator optical frequency comb. *Physical Review X*, 3(3) :031003, 2013.
- [27] SM Spillane, TJ Kippenberg, and KJ Vahala. Ultralow-threshold raman laser using a spherical dielectric microcavity. *Nature*, 415(6872) :621–623, 2002.
- [28] Lefevreseguin Collot, V Lefevre-Seguin, M Brune, JM Raimond, and S Haroche. Very high-q whispering-gallery mode resonances observed on fused silica microspheres. *EPL (Europhysics Letters)*, 23(5) :327, 1993.
- [29] TJ Kippenberg, SM Spillane, and KJ Vahala. Demonstration of ultra-high-q small mode volume toroid microcavities on a chip. *Applied Physics Letters*, 85(25) :6113–6115, 2004.
- [30] Adrea R Johnson, Yoshitomo Okawachi, Jacob S Levy, Jaime Cardenas, Kasturi Saha, Michal Lipson, and Alexander L Gaeta. Chip-based frequency combs with sub-100 ghz repetition rates. *Optics letters*, 37(5) :875–877, 2012.
- [31] Tong Chen, Hansuek Lee, and Kerry J Vahala. Design and characterization of whispering-gallery spiral waveguides. *Optics express*, 22(5) :5196–5208, 2014.
- [32] CGB Garrett, W Kaiser, and WL Bond. Stimulated emission into optical whispering modes of spheres. *Physical Review*, 124(6) :1807, 1961.

- [33] Hervé Tavernier, Patrice Salzenstein, Kirill Volyanskiy, Yanne Kouomou Chembo, and Laurent Larger. Magnesium fluoride whispering gallery mode disk-resonators for microwave photonics applications. *IEEE Photonics Technology Letters*, 22(22) :1629–1631, 2010.
- [34] Anatoliy A Savchenkov, Andrey B Matsko, Vladimir S Ilchenko, and Lute Maleki. Optical resonators with ten million finesse. *Optics Express*, 15(11) :6768–6773, 2007.
- [35] Hermann A Haus. *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall,, 1984.
- [36] Yong-Le Pan and Richard K Chang. Highly efficient prism coupling to whispering gallery modes of a square μ cavity. *Applied physics letters*, 82(4) :487–489, 2003.
- [37] Dror Sarid, Paul J Cressman, and Robert L Holman. High-efficiency prism coupler for optical waveguides. *Applied Physics Letters*, 33(6) :514–515, 1978.
- [38] Dror Sarid. High efficiency input–output prism waveguide coupler : an analysis. *Applied optics*, 18(17) :2921–2926, 1979.
- [39] Michael L Gorodetsky and Vladimir S Ilchenko. Optical microsphere resonators : optimal coupling to high-q whispering-gallery modes. *JOSA B*, 16(1) :147–154, 1999.
- [40] Guoping Lin, Souleymane Diallo, Rémi Henriët, Maxime Jacquot, and Yanne K Chembo. Barium fluoride whispering-gallery-mode disk-resonator with one billion quality-factor. *Optics letters*, 39(20) :6009–6012, 2014.
- [41] N Dubreuil, JC Knight, DK Leventhal, V Sandoghdar, J Hare, and V Lefevre. Eroded monomode optical fiber for whispering-gallery mode excitation in fused-silica microspheres. *Optics letters*, 20(8) :813–815, 1995.
- [42] Vladimir S Ilchenko, X Steve Yao, and Lute Maleki. Pigtailling the high-q microsphere cavity : ? a simple fiber coupler for optical whispering-gallery modes. *Optics Letters*, 24(11) :723–725, 1999.
- [43] Vladimir S Ilchenko, X Steve Yao, and Lute Maleki. Microsphere integration in active and passive photonics devices. In *Symposium on High-Power Lasers and Applications*, pages 154–162. International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [44] JC Knight, G Cheung, F Jacques, and TA Birks. Phase-matched excitation of whispering-gallery-mode resonances by a fiber taper. *Optics letters*, 22(15) :1129–1131, 1997.
- [45] SM Spillane, TJ Kippenberg, OJ Painter, and KJ Vahala. Ideality in a fiber-taper-coupled microresonator system for application to cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, 91(4) :043902, 2003.
- [46] Ming Cai and Kerry Vahala. Highly efficient optical power transfer to whispering-gallery modes by use of a symmetrical dual-coupling configuration. *Optics Letters*, 25(4) :260–262, 2000.
- [47] Ming Cai, Oskar Painter, and Kerry J Vahala. Observation of critical coupling in a fiber taper to a silica-microsphere whispering-gallery mode system. *Physical review letters*, 85(1) :74, 2000.
- [48] Paul E Barclay, Kartik Srinivasan, and Oskar Painter. Design of photonic crystal waveguides for evanescent coupling to optical fiber tapers and integration with high-q cavities. *JOSA B*, 20(11) :2274–2284, 2003.

- [49] Kartik Srinivasan, Paul E Barclay, Matthew Borselli, and Oskar Painter. Optical-fiber-based measurement of an ultrasmall volume high-q photonic crystal microcavity. *Physical Review B*, 70(8) :081306, 2004.
- [50] Ying Lu, Ji-You Wang, Xiao-Xuan Xu, Shi-Hong Pan, and Cun-Zhou Zhang. Optimal conditions of coupling between the propagating mode in a tapered fiber and the given wg mode in a high-q microsphere. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 112(3) :109–113, 2001.
- [51] Suzanne Lacroix, Roch Bourbonnais, François Gonthier, and Jacques Bures. Tapered monomode optical fibers : understanding large power transfer. *Applied optics*, 25(23) :4421–4425, 1986.
- [52] Brent E Little, J-P Laine, and Hermann A Haus. Analytic theory of coupling from tapered fibers and half-blocks into microsphere resonators. *Journal of Lightwave Technology*, 17(4) :704, 1999.
- [53] Steven G Johnson, Peter Bienstman, MA Skorobogatiy, Mihai Ibanescu, Eleftherios Lidorikis, and JD Joannopoulos. Adiabatic theorem and continuous coupled-mode theory for efficient taper transitions in photonic crystals. *Physical review E*, 66(6) :066608, 2002.
- [54] VB Braginsky, ML Gorodetsky, and VS Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes. *Physics Letters A*, 137(7) :393–397, 1989.
- [55] Ivan S Grudinin and Kerry J Vahala. Thermal instability of a compound resonator. *Optics express*, 17(16) :14088–14097, 2009.
- [56] Stephane Trebaol. *Etudes experimentales des proprietes dispersives de structures photoniques à base de micro-resonateurs pour la réalisation de fonctions optiques*. PhD thesis, Universite de Rennes 1, 2010.
- [57] Yannick Dumeige, Stéphane Trebaol, Laura Ghişa, Thi Kim Ngan Nguyen, Hervé Tavernier, and Patrice Féron. Determination of coupling regime of high-q resonators and optical gain of highly selective amplifiers. *JOSA B*, 25(12) :2073–2080, 2008.
- [58] W Liang, AA Savchenkov, AB Matsko, VS Ilchenko, D Seidel, and L Maleki. Generation of near-infrared frequency combs from a mgf 2 whispering gallery mode resonator. *Optics letters*, 36(12) :2290–2292, 2011.
- [59] Rémi Henriët, Guoping Lin, Aurélien Coillet, Maxime Jacquot, Luca Furfaro, Laurent Larger, and Yanne K Chembo. Kerr optical frequency comb generation in strontium fluoride whispering-gallery mode resonators with billion quality factor. *Optics letters*, 40(7) :1567–1570, 2015.
- [60] Souleymane Diallo, Guoping Lin, Romain Martinenghi, Luca Furfaro, Maxime Jacquot, and Yanne K Chembo. Brillouin lasing in ultra-high-lithium fluoride disk resonators. *IEEE Photonics Technology Letters*, 28(9) :955–958, 2016.
- [61] Andrey B Matsko and Vladimir S Ilchenko. Optical resonators with whispering gallery modes i : basics. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron*, 12(3) :3, 2006.
- [62] Vladimir S Ilchenko and Andrey B Matsko. Optical resonators with whispering-gallery modes-part ii : applications. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 12(1) :15–32, 2006.
- [63] Alessandro Chiasera, Yannick Dumeige, Patrice Féron, Maurizio Ferrari, Yoann Jestin, Gualtiero Nunzi Conti, Stefano Pelli, Silvia Soria, and Giancarlo C Righini.

- Spherical whispering-gallery-mode microresonators. *Laser & Photonics Reviews*, 4(3) :457–482, 2010.
- [64] TJ Kippenberg, SM Spillane, and KJ Vahala. Kerr-nonlinearity optical parametric oscillation in an ultrahigh-q toroid microcavity. *Physical review letters*, 93(8) :083904, 2004.
- [65] Anatoliy A Savchenkov, Andrey B Matsko, Dmitry Strekalov, Makan Mohageg, Vladimir S Ilchenko, and Lute Maleki. Low threshold optical oscillations in a whispering gallery mode c a f 2 resonator. *Physical review letters*, 93(24) :243905, 2004.
- [66] Pascal DelHaye, T Herr, E Gavartin, ML Gorodetsky, Ronald Holzwarth, and Tobias J Kippenberg. Octave spanning tunable frequency comb from a microresonator. *Physical Review Letters*, 107(6) :063901, 2011.
- [67] Imad H Agha, Yoshitomo Okawachi, and Alexander L Gaeta. Theoretical and experimental investigation of broadband cascaded four-wave mixing in high-q microspheres. *Optics express*, 17(18) :16209–16215, 2009.
- [68] Tobias J Kippenberg, Ronald Holzwarth, and SA Diddams. Microresonator-based optical frequency combs. *Science*, 332(6029) :555–559, 2011.
- [69] Yanne K Chembo. Kerr optical frequency combs : theory, applications and perspectives. *Nanophotonics*, *accepted for publication*, 2015.
- [70] Jiang Li, Hansuek Lee, Tong Chen, and Kerry J Vahala. Low-pump-power, low-phase-noise, and microwave to millimeter-wave repetition rate operation in microcombs. *Physical review letters*, 109(23) :233901, 2012.
- [71] AA Savchenkov, D Eliyahu, W Liang, VS Ilchenko, J Byrd, AB Matsko, D Seidel, and L Maleki. Stabilization of a kerr frequency comb oscillator. *Optics letters*, 38(15) :2636–2639, 2013.
- [72] W Liang, D Eliyahu, VS Ilchenko, AA Savchenkov, AB Matsko, D Seidel, and L Maleki. High spectral purity kerr frequency comb radio frequency photonic oscillator. *Nature communications*, 6, 2015.
- [73] Scott B Papp, Katja Beha, Pascal DelHaye, Franklyn Quinlan, Hansuek Lee, Kerry J Vahala, and Scott A Diddams. Microresonator frequency comb optical clock. *Optica*, 1(1) :10–14, 2014.
- [74] Pei-Hsun Wang, Fahmida Ferdous, Houxun Miao, Jian Wang, Daniel E Leaird, Kartik Srinivasan, Lei Chen, Vladimir Aksyuk, and Andrew M Weiner. Observation of correlation between route to formation, coherence, noise, and communication performance of kerr combs. *Optics express*, 20(28) :29284–29295, 2012.
- [75] Jacob S Levy, Kasturi Saha, Yoshitomo Okawachi, Mark A Foster, Alexander L Gaeta, and Michal Lipson. High-performance silicon-nitride-based multiple-wavelength source. *IEEE Photonics Technology Letters*, 24(16) :1375–1377, 2012.
- [76] Joerg Pfeifle, Aurélien Coillet, Rémi Henriët, Khaldoun Saleh, Philipp Schindler, Claudius Weimann, Wolfgang Freude, Irina V Balakireva, Laurent Larger, Christian Koos, et al. Optimally coherent kerr combs generated with crystalline whispering gallery mode resonators for ultrahigh capacity fiber communications. *Physical review letters*, 114(9) :093902, 2015.
- [77] Albert Schliesser, Nathalie Picqué, and Theodor W Hänsch. Mid-infrared frequency combs. *Nature Photonics*, 6(7) :440–449, 2012.

- [78] Anatoliy A Savchenkov, Vladimir S Ilchenko, Fabio Di Teodoro, Paul M Belden, William T Lotshaw, Andrey B Matsko, and Lute Maleki. Generation of kerr combs centered at $4.5\ \mu\text{m}$ in crystalline microresonators pumped with quantum-cascade lasers. *Optics letters*, 40(15) :3468–3471, 2015.
- [79] Christine Y Wang, Tobias Herr, Pascal DelHaye, Albert Schliesser, Johannes Hofer, Ronald Holzwarth, TW Hansch, Nathalie Picque, and Tobias J Kippenberg. Mid-infrared optical frequency combs at $2.5\ \mu\text{m}$ based on crystalline microresonators. *Nature communications*, 4 :1345, 2013.
- [80] Caroline Lecaplain, Clément Javerzac-Galy, Erwan Lucas, John D Jost, and Tobias J Kippenberg. Quantum cascade laser kerr frequency comb. *arXiv preprint arXiv :1506.00626*, 2015.
- [81] Yanne K Chembo and Nan Yu. On the generation of octave-spanning optical frequency combs using monolithic whispering-gallery-mode microresonators. *Optics letters*, 35(16) :2696–2698, 2010.
- [82] Yoshitomo Okawachi, Kasturi Saha, Jacob S Levy, Y Henry Wen, Michal Lipson, and Alexander L Gaeta. Octave-spanning frequency comb generation in a silicon nitride chip. *Optics letters*, 36(17) :3398–3400, 2011.
- [83] Ivan S Grudinin and Nan Yu. Dispersion engineering of crystalline resonators via microstructuring. *optica*, 2(3) :221–224, 2015.
- [84] Guoping Lin and Yanne K Chembo. On the dispersion management of fluorite whispering-gallery mode resonators for kerr optical frequency comb generation in the telecom and mid-infrared range. *Optics express*, 23(2) :1594–1604, 2015.
- [85] Anatoliy A Savchenkov, Andrey B Matsko, Vladimir S Ilchenko, and Lute Maleki. Optical resonators with ten million finesse. *Optics Express*, 15(11) :6768–6773, 2007.
- [86] Ivan S Grudinin, Andrey B Matsko, and Lute Maleki. Brillouin lasing with a caf 2 whispering gallery mode resonator. *Physical review letters*, 102(4) :043902, 2009.
- [87] Monica Agarwal and Iwao Teraoka. Mode latching and self tuning of whispering gallery modes in a stand-alone silica microsphere. *Applied Physics Letters*, 101(25) :251105, 2012.
- [88] Tal Carmon, Hossein Rokhsari, Lan Yang, Tobias J Kippenberg, and Kerry J Vahala. Temporal behavior of radiation-pressure-induced vibrations of an optical microcavity phonon mode. *Physical Review Letters*, 94(22) :223902, 2005.
- [89] Eric D Black. An introduction to pound–drever–hall laser frequency stabilization. *American Journal of Physics*, 69(1) :79–87, 2001.
- [90] Tobias Herr, Klaus Hartinger, Johann Riemensberger, Christine Wang, Emanuel Gavartin, Ronald Holzwarth, Michael L Gorodetsky, and Tobias Kippenberg. Universal dynamics of kerr-frequency comb formation in microresonators. In *Quantum Electronics and Laser Science Conference*, pages QF3G–7. Optical Society of America, 2012.
- [91] TJ Kippenberg, H Rokhsari, T Carmon, A Scherer, and KJ Vahala. Analysis of radiation-pressure induced mechanical oscillation of an optical microcavity. *Physical Review Letters*, 95(3) :033901, 2005.
- [92] Johannes Hofer, Albert Schliesser, and Tobias J Kippenberg. Cavity optomechanics with ultrahigh-q crystalline microresonators. *Physical Review A*, 82(3) :031804, 2010.

- [93] VB Braginsky, ML Gorodetsky, and SP Vyatchanin. Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A*, 264(1) :1–10, 1999.
- [94] VB Braginsky, ML Gorodetsky, and SP Vyatchanin. Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A*, 271(5) :303–307, 2000.
- [95] Michael L Gorodetsky and Ivan S Grudinin. Fundamental thermal fluctuations in microspheres. *JOSA B*, 21(4) :697–705, 2004.
- [96] Andrey B Matsko, Anatoliy A Savchenkov, Nan Yu, and Lute Maleki. Whispering-gallery-mode resonators as frequency references. i. fundamental limitations. *JOSA B*, 24(6) :1324–1335, 2007.
- [97] Imad H Agha, Yoshitomo Okawachi, and Alexander L Gaeta. Theoretical and experimental investigation of broadband cascaded four-wave mixing in high-q microspheres. *Optics express*, 17(18) :16209–16215, 2009.
- [98] Andrey B Matsko, Wei Liang, Anatoliy A Savchenkov, and Lute Maleki. Chaotic dynamics of frequency combs generated with continuously pumped nonlinear microresonators. *Optics letters*, 38(4) :525–527, 2013.
- [99] AB Matsko, AA Savchenkov, W Liang, VS Ilchenko, D Seidel, and L Maleki. Mode-locked kerr frequency combs. *Optics letters*, 36(15) :2845–2847, 2011.
- [100] Stéphane Coen, Hamish G Randle, Thibaut Sylvestre, and Miro Erkintalo. Modeling of octave-spanning kerr frequency combs using a generalized mean-field lugiato-lefever model. *Optics letters*, 38(1) :37–39, 2013.
- [101] Tjalling J Ypma. Historical development of the newton-raphson method. *SIAM review*, 37(4) :531–551, 1995.
- [102] Yanne K Chembo, Dmitry V Strekalov, and Nan Yu. Spectrum and dynamics of optical frequency combs generated with monolithic whispering gallery mode resonators. *Physical review letters*, 104(10) :103902, 2010.
- [103] Yanne K Chembo and Nan Yu. Modal expansion approach to optical-frequency-comb generation with monolithic whispering-gallery-mode resonators. *Physical Review A*, 82(3) :033801, 2010.
- [104] Yanne K Chembo and Curtis R Menyuk. Spatiotemporal lugiato-lefever formalism for kerr-comb generation in whispering-gallery-mode resonators. *Physical Review A*, 87(5) :053852, 2013.
- [105] T Hansson, D Modotto, and S Wabnitz. On the numerical simulation of kerr frequency combs using coupled mode equations. *Optics Communications*, 312 :134–136, 2014.
- [106] Luigi A Lugiato and René Lefever. Spatial dissipative structures in passive optical systems. *Physical review letters*, 58(21) :2209, 1987.
- [107] Cyril Godey, Irina V Balakireva, Aurélien Coillet, and Yanne K Chembo. Stability analysis of the spatiotemporal lugiato-lefever model for kerr optical frequency combs in the anomalous and normal dispersion regimes. *Physical Review A*, 89(6) :063814, 2014.
- [108] Aurelien Coillet, Irina Balakireva, Remi Henriët, Khaldoun Saleh, Laurent Larger, John M Dudley, Curtis R Menyuk, and Yanne K Chembo. Azimuthal turing patterns, bright and dark cavity solitons in kerr combs generated with whispering-gallery-mode resonators. *IEEE Photonics Journal*, 5(4) :6100409–6100409, 2013.

- [109] Frank Vollmer and Stephen Arnold. Whispering-gallery-mode biosensing : label-free detection down to single molecules. *Nature methods*, 5(7) :591–596, 2008.
- [110] Lina He, Yun-Feng Xiao, Jiangang Zhu, Sahin Kaya Ozdemir, and Lan Yang. Oscillatory thermal dynamics in high-q pdms-coated silica toroidal microresonators. *Optics express*, 17(12) :9571–9581, 2009.
- [111] Yang Deng, Fenfei Liu, Zayd C Leseman, and Mani Hossein-Zadeh. Thermo-optomechanical oscillator for sensing applications. *Optics express*, 21(4) :4653–4664, 2013.
- [112] Anatoliy A Savchenkov, Andrey B Matsko, Vladimir S Ilchenko, Nan Yu, and Lute Maleki. Whispering-gallery-mode resonators as frequency references. ii. stabilization. *JOSA B*, 24(12) :2988–2997, 2007.
- [113] Iwao Teraoka. Analysis of thermal stabilization of whispering gallery mode resonance. *Optics Communications*, 310 :212–216, 2014.
- [114] Florian Sedlmeir, Richard Zeltner, Gerd Leuchs, and Harald GL Schwefel. High-q mgf 2 whispering gallery mode resonators for refractometric sensing in aqueous environment. *Optics express*, 22(25) :30934–30942, 2014.
- [115] Tobias J Kippenberg, Ronald Holzwarth, and SA Diddams. Microresonator-based optical frequency combs. *Science*, 332(6029) :555–559, 2011.
- [116] Ivan Grudinin, Hansuek Lee, Tong Chen, and Kerry Vahala. Compensation of thermal nonlinearity effect in optical resonators. *Optics express*, 19(8) :7365–7372, 2011.
- [117] Thomas J Johnson, Matthew Borselli, and Oskar Painter. Self-induced optical modulation of the transmission through a high-q silicon microdisk resonator. *Optics express*, 14(2) :817–831, 2006.
- [118] Guoping Lin, Josef Fürst, Dmitry V Strekalov, Ivan S Grudinin, and Nan Yu. High-q uv whispering gallery mode resonators made of angle-cut bbo crystals. *Optics express*, 20(19) :21372–21378, 2012.
- [119] Antony Jameson, Wolfgang Schmidt, Eli Turkel, et al. Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time-stepping schemes. *AIAA paper*, 1259 :1981, 1981.
- [120] Erwin Fehlberg. Low-order classical runge-kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems. 1969.
- [121] Govind P Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic press, 2007.
- [122] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, 2003.
- [123] Marc Nikles. La diffusion brillouin dans les fibres optiques. 1997.
- [124] Jean-Charles Beugnot, Thibaut Sylvestre, Dario Alasia, Hervé Maillotte, Vincent Laude, A Monteville, Laurent Provino, Nicholas Traynor, S Foaleng Mafang, and L ThÜvenaz. Complete experimental characterization of stimulated brillouin scattering in photonic crystal fiber. *Optics Express*, 15(23) :15517–15522, 2007.
- [125] Jiang Li, Hansuek Lee, and Kerry J Vahala. Microwave synthesizer using an on-chip brillouin oscillator. *Nature communications*, 4, 2013.
- [126] Stéphane Randoux. *Étude expérimentale et théorique de la dynamique de lasers Brillouin à fibre optique*. PhD thesis, 1995.

- [127] Jihong Geng, Sean Staines, Zuolan Wang, Jie Zong, Mike Blake, and Shibin Jiang. Highly stable low-noise brillouin fiber laser with ultranarrow spectral linewidth. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 18(17) :1813–1815, 2006.
- [128] Andrey Kobaykov, Michael Sauer, and Dipak Chowdhury. Stimulated brillouin scattering in optical fibers. *Advances in optics and photonics*, 2(1) :1–59, 2010.
- [129] Eugene Dieulesaint and Daniel Royer. *Ondes elastiques dans les solides : application au traitement du signal*, volume 13. Masson, 1974.
- [130] Bertram Alexander Auld. *Acoustic fields and waves in solids*, volume 2. RE Krieger, 1990.
- [131] Charles Kittel. Introduction to solid state physics. 2005. ISBN 047141526X, 2005.
- [132] Bertram Alexander Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. 1973.
- [133] Michel Brissaud. *Matériaux piezoelectriques : caracterisation, modelisation et vibration*. PPUR presses polytechniques, 2007.
- [134] V Janovec, Th Hahn, H Klapper, and J Privratska. International tables for crystallography volume d : Physical properties of crystals, ed. A. Authier. *International Union of Crystallography and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London*, pages 377–505, 2003.
- [135] Walter L Bond. The mathematics of the physical properties of crystals. *Bell system technical journal*, 22(1) :1–72, 1943.
- [136] Alexis Debut, Stéphane Randoux, and Jaouad Zemmouri. Linewidth narrowing in brillouin lasers : Theoretical analysis. *Physical Review A*, 62(2) :023803, 2000.
- [137] Jihong Geng and Shibin Jiang. Pump-to-stokes transfer of relative intensity noise in brillouin fiber ring lasers. *Optics letters*, 32(1) :11–13, 2007.
- [138] Stéphanie Norcia, Sylvie Tonda-Goldstein, Daniel Dolfi, J-P Huignard, and Robert Frey. Efficient single-mode brillouin fiber laser for low-noise optical carrier reduction of microwave signals. *Optics letters*, 28(20) :1888–1890, 2003.
- [139] Kazi S Abedin. Observation of strong stimulated brillouin scattering in single-mode as₂se₃ chalcogenide fiber. *Optics Express*, 13(25) :10266–10271, 2005.
- [140] LF Stokes, M Chodorow, and HJ Shaw. All-fiber stimulated brillouin ring laser with submilliwatt pump threshold. *Optics Letters*, 7(10) :509–511, 1982.
- [141] Guoping Lin, Souleymane Diallo, Khaldoun Saleh, Romain Martinenghi, Jean-Charles Beugnot, Thibaut Sylvestre, and Yanne K Chembo. Cascaded brillouin lasing in monolithic barium fluoride whispering gallery mode resonators. *Applied Physics Letters*, 105(23) :231103, 2014.
- [142] Cyrus D Cantrell. Theory of nonlinear optics in dielectric spheres. iii. partial-wave-index dependence of the gain for stimulated brillouin scattering. *JOSA B*, 8(10) :2181–2189, 1991.
- [143] SC Ching, PT Leung, and K Young. Spontaneous brillouin scattering in a microdroplet. *Physical Review A*, 41(9) :5026, 1990.
- [144] AL Huston, H-B Lin, Jay D Eversole, and Anthony J Campillo. Nonlinear mie scattering : electrostrictive coupling of light to droplet acoustic modes. *Optics letters*, 15(21) :1176–1178, 1990.
- [145] HM Lai, PT Leung, CK Ng, and K Young. Nonlinear elastic scattering of light from a microdroplet : role of electrostrictively generated acoustic vibrations. *JOSA B*, 10(5) :924–932, 1993.

- [146] AA Savchenkov, AB Matsko, VS Ilchenko, D Seidel, and L Maleki. Surface acoustic wave opto-mechanical oscillator and frequency comb generator. *Optics letters*, 36(17) :3338–3340, 2011.
- [147] Heedeuk Shin, Wenjun Qiu, Robert Jarecki, Jonathan A Cox, Roy H Olsson III, Andrew Starbuck, Zheng Wang, and Peter T Rakich. Tailorable stimulated brillouin scattering in nanoscale silicon waveguides. *Nature communications*, 4, 2013.
- [148] DS Weiss, V Sandoghdar, J Hare, V Lefevre-Seguin, J-M Raimond, and S Haroche. Splitting of high-q mie modes induced by light backscattering in silica microspheres. *Optics letters*, 20(18) :1835–1837, 1995.
- [149] Hansuek Lee, Tong Chen, Jiang Li, Ki Youl Yang, Seokmin Jeon, Oskar Painter, and Kerry J Vahala. Chemically etched ultrahigh-q wedge-resonator on a silicon chip. *Nature Photonics*, 6(6) :369–373, 2012.
- [150] Jiang Li, Hansuek Lee, and Kerry J Vahala. Low-noise brillouin laser on a chip at 1064 nm. *Optics letters*, 39(2) :287–290, 2014.
- [151] William Loh, Joe Becker, Daniel C Cole, Aurelien Coillet, Fred N Baynes, Scott B Papp, and Scott A Diddams. A microrod-resonator brillouin laser with 240 hz absolute linewidth. *arXiv preprint arXiv :1509.08549*, 2015.
- [152] Marvin J Weber. *Handbook of optical materials*, volume 19. CRC press, 2002.

TABLE DES FIGURES

1.1	Figure illustrant la propagation d'un rayon lumineux par réflexion totale interne à l'intérieur d'un résonateur à modes de galerie de rayon a en définissant une figure géométrique inscrite dans un cercle ici en pontillé que nous appelons "caustique" de rayon r_1	7
1.2	Moment cinétique L associé à un mode de galerie et sa projection $L_z = M$ sur l'axe polaire.	8
1.3	Représentation du profil du potentiel d'une sphère isolée pour $n = 1$ et $x = 74.464$, d'après [16].	12
1.4	Ces deux figures sont deux exemples de distributions radiales du champ pour deux paramètres de taille x différents [16]. [(a)] $N = 1.45$, $n = 1$, $l = 100$, $x = 74.4064$, et [(b)] $N = 1.45$, $n = 5$, $l = 100$, $x = 90.0955$	13
1.5	Photographies de résonateurs à modes de galerie de formes différentes et faits avec différents matériaux. [(a)] Résonateur millimétrique en fluorure de magnésium, sous forme de disque ayant un facteur de qualité $Q > 10^9$ [24]. [(b)] Résonateur micrométrique de forme toroïdale, sur puce silicium avec un facteur de qualité $Q > 10^8$ [25]. [(c)] résonateur sous forme de micro-barre en quartz fondu avec un facteur de qualité $Q = 5 \times 10^8$ [26]. [(d)] Résonateur sphérique micrométrique extrait de [27].	17
1.6	Illustration et dimensions de nos résonateurs à modes de galerie en forme de disque.	21
1.7	Photographie du moteur <i>air-spindle</i> utilisé dans le cadre de cette thèse pour la fabrication de résonateurs à modes de galerie.	21
1.8	Photographie d'un résonateur à modes de galerie en phase de rodage par un support imbibé d'une solution pâteuse de carbure de silicium. Le disque est attaqué sous un angle compris entre 10 et 60 degrés afin de former des biseaux.	21
1.9	Photographie d'un résonateur à modes de galerie en phase de doucissage/polissage par un feutre synthétique imbibé d'un mélange de suspension diamantée et de pâte diamantée.	22
1.10	Figure illustrant un résonateur à modes de galerie couplé par une ligne d'accès. Le couplage de la lumière ne se fait dans le résonateur que si la distance d entre ce dernier et la ligne d'accès est inférieure à la longueur d'onde λ	23

1.11	Illustration de l'allure des résonances suivant le régime de couplage du résonateur. Le spectre en rouge correspond à un régime de sous-couplage, celui en vert à un régime de sur-couplage et celui en bleu à un régime de couplage critique.	24
1.12	Cette photographie représente une vue de dessus d'un couplage par prisme. Une première lentille fibrée focalise la lumière sur une des faces du prisme sous un certain angle afin de générer le champ évanescent nécessaire au couplage de la lumière dans le résonateur. La seconde lentille fibrée récupère la lumière transmise par le résonateur.	24
1.13	Illustration du principe du couplage par fibre prisme.	25
1.14	Photographie représentant notre banc de fabrication de <i>tapers</i> par étirage. Une fibre optique SMF – 28 maintenue par deux supports est plongée dans une flamme produite par un chalumeau à base de butane. Un moteur pas à pas piloté par un programme déclenche l'étirage.	27
1.15	Illustration de la transmission d'une fibre optique lors de la fabrication d'un <i>taper</i> par étirage.	27
1.16	Photographie d'un couplage par <i>taper</i> . Le résonateur est positionné vers la zone étirée du taper où réside le champ évanescent nécessaire à l'excitation des modes de galerie.	27
1.17	Illustration de la caractérisation d'un résonateur à modes de galerie par la technique du balayage lent en longueur d'onde. CP : Contrôleur de Polarisation, PD : Photodiode, GBF : Générateur Basse Fréquence.	28
1.18	Illustration de la caractérisation par mesure du temps de vie des photons sans balayage en longueur d'onde.	29
1.19	Figure illustrant la caractérisation d'un résonateur à modes de galerie par la technique du balayage rapide en longueur d'onde. CP : Contrôleur de Polarisation, PD : Photodiode, GBF : Générateur Basse Fréquence.	30
1.20	Spectres de transmission enregistrés lors de la caractérisation d'un résonateur en fluorure de lithium LiF et d'un résonateur en fluorure de calcium CaF ₂ par la technique du <i>cavity ring down</i> . Les résonateurs ont été fabriqués par nos soins par polissage. Les spectres en rouge correspondent aux résultats expérimentaux de caractérisation, et ceux en bleu correspondent aux fits théoriques obtenus grâce au modèle mathématique développé dans [56, 57]. Les facteurs de qualité sont les suivants : [(a)] LiF : $Q_o = 3.35 \times 10^8$, $Q_e = 2.58 \times 10^8$, $Q = 1.46 \times 10^8$; [(b)] CaF ₂ : $Q_o = 1.64 \times 10^9$, $Q_e = 3.8 \times 10^9$, $Q = 1.15 \times 10^9$	31

2.1	Figure illustrant le processus de formation d'un peigne de fréquences optiques dans un résonateur à modes de galerie. [(a)] Étape initiale à la dégénérescence avec formation d'un peigne de Kerr primaire aux composantes consécutives espacées de Δ . [(b)] Continuité du processus d'interactions entre photons avec formation d'un peigne de Kerr primaire et conservation de l'espacement Δ . [(c)] Formation d'un peigne secondaire où les nouvelles bandes secondaires réparties autour des composantes du peigne primaire sont espacées de δ . [(d)] Peigne de Kerr chaotique se formant suite à une cascade d'interactions entre les photons du peigne de Kerr secondaire.	39
2.2	Dispositif expérimental pour la génération de peignes de fréquences. PC : Contrôleur de Polarisation, EDFA : Amplificateur optique fibré dopé Erbium (<i>Erbium Doped Fiber Amplifier</i>), WGMR : Résonateur à modes de galerie, VOA : Atténuateur Optique Variable, FC _{3dB} : Coupleur optique fibré 3 dB, PD : Photodiode, ASO : Analyseur de Spectre Optique.	40
2.3	Schéma illustrant le principe du <i>thermal locking</i> . Pour une résonance à droite du laser (en haut à gauche), la diminution de la puissance laser décale la résonance vers la gauche et conduit au <i>thermal locking</i> (en haut à droite). Le cas contraire en bas à gauche) conduit à une situation où l'ensemble laser-résonateur n'est pas résonant (en bas à droite).	41
2.4	Représentation d'une résonance ou mode modulé à la fréquence f_{PDH} [(a)] et le signal d'erreur en sortie du mixeur [(b)] . Ce dernier passe ensuite par un contrôleur PID qui délivre le signal de correction nécessaire à la stabilisation du laser sur le mode.	42
2.5	Dispositif expérimental pour la mesure de spectres RF des peignes de fréquences optiques. PC : Contrôleur de Polarisation, EDFA : Amplificateur Optique (<i>Erbium Doped Fiber Amplifier</i>), WGMR : Résonateur à modes de galerie, VOA : Atténuateur Optique Variable, FC _{90/10} : Coupleur optique fibré 90/10, PD : Photodiode, ASO : Analyseur de Spectre Optique, PDR : Photodiode Rapide, ASE : Analyseur de Spectre Electrique	43
2.6	Peignes de Kerr obtenus en régime de <i>locking</i> thermique à des puissances lasers comprises entre 100 et 200 mW [(a), (d), (g), (j)] ainsi que leurs spectres RF respectifs pour différentes résolutions de l'analyseur de spectre RF [(b,c), (e,f), (h,i), (k,l)] . Ces spectres sont multimodes, faibles puissances et présentent des largeurs de raies de l'ordre du kHz pour les peignes de Kerr primaire et secondaire [(a), (d)] , et des largeurs de raies MHz pour les peignes de Kerr chaotiques [(g), (i)] . Ces performances, comparées à celles obtenues en régime de stabilisation par la technique du Pound-Drever-Hall ne sont pas de qualité métrologique.	44
2.7	Peignes de Kerr obtenus dans le cadre d'une stabilisation de l'ensemble laser-résonateur par la technique du Pound-Drever-Hall [(a),(d),(g)] . Les spectres RF respectifs obtenus pour différentes résolutions de l'analyseur de spectre électrique sont représentés sur les figures [(b,c), (e,f), (h,i)] . Ces spectres ont des largeurs de raies comprises entre 300 Hz et 50 Hz. Ces performances sont de loin meilleures à celles obtenues en régime de <i>thermal locking</i>	45

- 2.8 Peigne de Kerr primaire en régime de stabilisation PDH obtenu avec une puissance laser de 77.4 mW **[(a)]**. Ses bandes consécutives sont espacées de $\Delta = 30.4$ GHz. Le spectre de bruit de phase **[(b)]** du signal RF résultant à la fréquence de 30.4 GHz présente une performance de -88 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse. 47
- 2.9 Peigne de Kerr secondaire en régime de stabilisation PDH obtenu avec une puissance laser de 91.7 mW **[(e)]**. Il comporte des bandes primaires consécutives espacées de $\Delta = 30.4$ GHz autour desquelles figurent les bandes secondaires espacées de $\delta = 6.4$ GHz. Le spectre de bruit de phase du signal RF à 6.4 GHz **[(f)]** présente une performance de -60 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse. Celui à 30.4 GHz **[(g)]** présente une performance de -90 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse. 47
- 2.10 Les figures **[(a,c,e)]** en rouge sont des peignes de Kerr expérimentaux obtenus pour des puissances laser comprises entre 70 et 200 mW. Celles en bleu **[(b,d,f)]** sont les résultats de simulations numériques obtenues à partir de l'équation de Lugiato-Lefever. Les paramètres des simulations numériques sont $\alpha = 1.1, \beta = -0.387, F = 1.05$ pour **[(b)]** ; $\alpha = 1.1, \beta = -0.005, F = 1.05$ pour **[(d)]** ; $\alpha = 2, \beta = -0.04, F = 21$ pour **[(f)]**. 55
- 2.11 Figure illustrant la dispersion anormale **[(a)]** qui correspond au cas $\beta > 0, \zeta_2 < 0$ et la dispersion normale **[(b)]** qui correspond au cas $\beta > 0, \zeta_2 < 0$ d'après [107]. 57
- 2.12 Diagramme de bifurcation en régime de dispersion normale qui présente les couples (α, F^2) permettant d'obtenir des peignes primaires ou *Turing rolls*, des solitons sombres ou *dark solitons* ainsi que des *breathers* d'après [107] 57
- 2.13 Diagramme de bifurcation en régime de dispersion anormale qui présente les couples (α, F^2) permettant d'obtenir des peignes primaires ou rouleaux de Turing, du chaos, des solitons sombres, des solitons brillants d'après [107] 58
- 2.14 Simulation numérique d'un peigne de Kerr primaire en régime de dispersion anormale. Les paramètres sont $\alpha = 1, \beta = -0.04$ et $F = 1.3107$. **[(a)]** Dynamique transitoire, **[(b)]** Signal temporel dans la direction azimuthale, **[(c)]** Représentation 3D du peigne, **[(d)]** signal temporel correspondant, d'après [107] 58
- 2.15 Simulations numériques de peignes de Kerr chaotiques en régime de dispersion anormale. **[(a)]** Représentation 3D d'un peigne de Kerr chaotique pour $\alpha = 0, \beta = -0.04$ et $F = 7.0711$. **[(b)]** Peigne de fréquences correspondant. **[(c)]** Représentation 3D d'un peigne de Kerr chaotique pour $\alpha = 0, \beta = -0.04$ et $F = 15.8237$. **[(d)]** Peigne de fréquences correspondant. **[(e)]** Représentation 3D d'un peigne de Kerr chaotique pour $\alpha = 2, \beta = -0.04$ et $F = 15.2971$. **[(f)]** Peigne de fréquences correspondant. 59
- 2.16 Simulation numérique d'un soliton brillant en régime de dispersion anormale. Les paramètres de la simulation numérique sont $\alpha = 2, \beta = -0.004, F = 2.5548$. **[(a)]** Dynamique transitoire du soliton. **[(b)]** Peigne dans la direction azimuthale. **[(a)]** Représentation 3D du soliton. **[(d)]** Peigne de Kerr correspondant, d'après [107]. 60

- 2.17 Dispositif expérimental en vue de la caractérisation d'instabilités oscillatoires dans un résonateur à modes de galerie cristallin de taille millimétrique. CW laser : laser émettant en continu, PC : Contrôleur de Polarisation, VOA : Atténuateur Optique Variable, PD : Photodiode, $L_{1,2}$: Lentille Fibrée, R : rayon du résonateur, BaF_2 : Fluorure de Barium. 61
- 2.18 Schéma des oscillations thermiques. Dans la première étape (en haut à gauche), la longueur d'onde du laser est accordée à la cavité. Le mode chauffe et sa température T_1 augmente. De ce fait, la résonance est décalée vers le bleu car le coefficient thermo-optique du résonateur $\alpha_1 < 0$. Dans la seconde étape (en haut à droite), l'ensemble laser-résonateur n'est plus résonnant avec la cavité, la température du mode résonant T_1 diminue. La chaleur accumulée lors de la première étape se diffuse à travers le résonateur dont la température T_2 augmente. L'expansion thermique qui en résulte induit un décalage de la résonance vers le rouge car le coefficient thermo-élastique $\alpha_2 > 0$. Dans la troisième étape (en bas), la température du résonateur et du mode baisse car le laser n'est plus accordé à la cavité. Par conséquent, la résonance retrouve sa position initiale c'est à dire la première étape. Il est à nouveau accordé avec le laser et le cycle décrit précédemment recommence. 62
- 2.19 Traces temporelles expérimentales **[(a)-(c)]** et numériques **[(d)-(f)]** des oscillations thermiques. Les variations numériques des différences de fréquence entre le laser et la résonance *detuning* $\Delta\omega_{th}(t)/2\pi$ sont affichées **[(g)-(i)]**. Les périodes des oscillations sont : 181 ms **[(a), (d) et (g)]**, 290 ms **[(b), (e) et (h)]**, and 504 ms **[(c), (f) et (i)]**. Il est à noter que le minimum de transmission correspond au *detuning* nul (maximum de lumière couplé à l'intérieur du résonateur). 65
- 3.1 Schéma extrait de [124] illustrant la diffusion spontanée de la lumière par un milieu matériel autour d'une fréquence pompe ν_p 69
- 3.2 Diagramme énergétique décrivant la diffusion Brillouin Stokes et anti-Stokes. 70
- 3.3 Illustration de la diffusion Brillouin spontanée extrait de citebeugnot2007complete. Une onde incidente est diffusée par une onde acoustique, il se crée alors une onde diffusée que nous appelons onde Stokes. . 71
- 3.4 Processus d'électrostriction servant de moteur à la diffusion Brillouin stimulée extrait de citebeugnot2007complete. L'onde Stokes déjà présente en régime de diffusion Brillouin spontanée interfère avec l'onde pompe. Cette interférence donne naissance à un signal de battement dont les variations créent une onde de pression. Celle-ci diffuse l'onde incidente renforçant de ce fait l'onde Stokes. 72
- 3.5 Illustration du vecteur normal $\mathbf{n}$ et de l'angle ψ qui caractérise la direction de propagation de l'onde acoustique dans le plan de la lame cristalline. . . 73
- 3.6 Illustration de l'orientation d'un cristal en fonction de la direction de sa normale $\mathbf{n}$ en bleu. les figures **[(a), (b), (c)]** correspondent respectivement aux coupes simples *z-cut*, *y-cut*, *x-cut* et **[(d)]** correspond à l'orientation [111]. . 74

- 3.7 Illustration des couples [vitesses acoustiques longitudinales V_L /fréquences Ω_L] pour des directions particulières en accord avec les expressions des vitesses longitudinales données par la relation (3.19) pour une lame cristalline orientée [001] 77
- 3.8 Comparaison entre notre calcul de fréquence du mode acoustique longitudinal présenté en **[(a)]** et celui de Grudin et *al.* présenté en **[(b)]** par la courbe bleue extrait de [86] en tout point de la périphérie d'un disque de CaF_2 orienté [111] à la longueur d'onde de 1064 nm. Les deux calculs relèvent un mode acoustique longitudinal à une fréquence d'environ 17.7 GHz avec une variation de fréquence pic à pic sur la périphérie de 112 MHz. 80
- 3.9 Simulations numériques des fréquences acoustiques Brillouin à 1550 nm pour différents cristaux orientés [111] en suivant la démarche indiquée dans la sous-section 4.3.3. Les figures **[(a),(c),(e),(g)]** (en bleu) correspondent respectivement aux ondes acoustiques longitudinales pour un cristal de BaF_2 , CaF_2 , LiF , MgF_2 . Les figures **[(b),(d),(f),(h)]** représentent respectivement les ondes acoustiques transverses rapides (en vert) et lentes en rouge pour les cristaux cités précédemment. 81
- 3.10 Résonateur à modes de galerie et modes d'ordre élevés dans une configuration favorable à la diffusion Brillouin stimulée. Parmi les modes résonants en rouge, un d'entre eux coïncide avec le maximum de la courbe de gain Brillouin (en pointillé). Il va de ce fait supporter l'onde Stokes qui va être excitée. 83
- 3.11 Dispositif expérimental en vue de la caractérisation de la diffusion Brillouin stimulée. PC : Contrôleur de Polarisation fibrée, OC : Circulateur Optique fibré, VOA : Atténuateur Optique Variable, $C_{3\text{dB}}$: Coupleur fibré 3 dB, PD : Photodiode, OSA : analyseur de spectre optique. 86
- 3.12 Spectres expérimentaux des champs intracavité. La fréquence ν_B correspond au décalage Brillouin **[(a)]** sens de la transmission, **[(b)]** sens de la retrodiffusion. le signal Brillouin dans le spectre la transmission ainsi que celui de pompe dans le spectre retrodiffusé sont dus à la diffusion Rayleigh que nous qualifions de parasite. 87
- 3.13 Calcul de la fréquence de l'onde acoustique selon la procédure définie dans la section 3.3.3 pour un résonateur en LiF orienté *z-cut*. Le calcul relève une onde acoustique d'environ 13.2 GHz en accord avec les observations expérimentales avec une variation de fréquence pic à pic d'environ 1.5 GHz. 87
- 3.14 Traces temporelles du champ transmis $|\mathcal{F}(t)|$ et celui retrodiffusé $|\mathcal{B}(t)|$ pour une puissance de pompe en dessous du seuil : **[(a)]** $0.99 \times P_{\text{th}}$, au delà du seuil : **[(b)]** $1.01 \times P_{\text{th}}$, **[(c)]** $1.5 \times P_{\text{th}}$, **[(d)]** $2 \times P_{\text{th}}$, **[(e)]** $2.5 \times P_{\text{th}}$, **[(f)]** $3 \times P_{\text{th}}$. 89

LISTE DES TABLES

3.1	Tableau récapitulatif des paramètres de diffusion pour une fibre optique à la longueur d'onde de 1550 nm [126].	68
3.2	Tableau récapitulatif des fréquences Brillouins longitudinales f_L , transverses rapides f_{TR} et transverses lentes f_{TL} ainsi que leurs variations respectives $\Delta\nu_L$, $\Delta\nu_{TR}$, $\Delta\nu_{TL}$ pour Ψ allant de 0 à 2π pour les cristaux suivants en orientation [111] : BaF ₂ , CaF ₂ , LiF, MgF ₂	82
3.3	Tableau récapitulatif des paramètres nécessaires au calcul de la vitesse et de la fréquence de l'onde acoustique ainsi que la valeur de ces dernières. .	85



ANNEXES

A

PREMIER CHAPITRE DES ANNEXES

B

SECOND CHAPITRE DES ANNEXES

LISTES DES PUBLICATIONS, CONFÉRENCES, PRIX, ÉCOLES D'ÉTÉ ET D'HIVER

PUBLICATIONS DANS DES REVUES INTERNATIONALES

1. **Brillouin Lasing in Ultra-High Q Lithium Fluoride Disk-Resonators**
S. Diallo, G. Lin, R. Martinenghi, L. Furfaro, M. Jacquot, and Y. K. chembo
IEEE Phot. Tech. Lett. **28**, 955 (2016).
2. **Universal scattering in ultra-high Q whispering gallery mode resonators**
G. Lin, S. Diallo, J. M. dudley and Y. K. chembo
Optics Express **24**, 14880 (2016).
3. **Giant Thermo-Optical Relaxation Oscillaions in mm-size Whispering Gallery Mode Disk-Resonators**
S. Diallo, G. Lin, and Y. K. chembo
Opt. Lett **40**, 3834 (2015).
4. **Spectro-temporal dynamics of Kerr combs with parametric seeding**
G. Lin, R. Martinenghi, S. Diallo, K. Saleh, A. Coillet and Y. K. chembo
Appl. Opt. **54**, 2407 (2015).
5. **Cascaded Brillouin lasing in monolithic barium fluoride whispering gallery mode resonators**
G. Lin, S.Diallo, K. Saleh, R. Martinenghi, J. C. Beugnot, T. Sylvestre, and Y. K. Chembo
Appl. Phys. Lett. **105**, 231103 (2014).
6. **Barium fluoride whispering-gallery-mode disk-resonator with one billion quality-factor**
G. Lin, S. Diallo, R. Henriët, M. Jacquot, and Y. K. Chembo
Opt. Lett. **39**, 3009 (2014).
7. **Phase noise performance comparison between optoelectronic oscillators based on optical delay lines and whispering gallery mode resonators**
K. Saleh, R. Henriët, S. Diallo, G. Lin, R. Martinenghi, I. V. Balakireva, P. Salzenstein, A. Coillet and Y. K. Chembo
Optics Express **22**, 32158 (2014).
8. **Wide-range tunability, thermal locking, and mode-crossing effects in Kerr optical frequency combs**
G. Lin, K. Saleh, R. Henriët, S. Diallo, R. Martinenghi, A. Coillet, and Y. K. Chembo
Optical Engineering **53**, 122602 (2014).

COMMUNICATIONS ET PRIX

1. **Kerr and Brillouin Optical Frequency Combs using Whispering Gallery Mode Resonators for Microwave Generation**
S. Diallo, and Y. K. Chembo,
Ions Tucson 2016, Arizona (USA).
2. **Brillouin lasing in a LiF whispering-gallery mode resonator and application to microwave generation**
S. Diallo, G. Lin, J. P. Aubry and Y. K. Chembo,
2016 European Frequency and Time Forum (EFTF), York, United Kingdom.
Prix : European Frequency and Time Forum Student Poster Award

ÉCOLES D'ÉTÉ ET D'HIVER

1. **Winter College on Optics : Optical Frequency Combs - from multispecies gas sensing to high precision intrerrogation of atomic and molecular targets,**
15 - 26 février 2016, Trieste, Italy.
2. **Summer School in Nonlinear Dynamics : International Summer School on Nonlinear Dynamics,**
21 - 28 Août 2015, Peyresq, France.

Résumé :

Les résonateurs à modes de galerie sont des cavités diélectriques qui supportent des modes à très haut facteur de qualité et à faible volume qui demeurent confinés à l'interface air-diélectrique pour des durées pouvant atteindre voire dépasser la microseconde. L'intérêt de ce fort confinement des modes pour de longues durées est l'accentuation de l'interaction lumière-matière. Par conséquent, de nombreuses interactions non-linéaires telles que l'effet Kerr ou encore l'effet Brillouin à des puissances seuil inversement proportionnelles au carré voire au cube du facteur de qualité du résonateur ont lieu en son sein. Ces propriétés donnent accès à de nombreuses applications dans des domaines divers et variés tels que la spectroscopie, les télécommunications ou encore les micro-ondes. Les travaux de cette thèse ont pour but d'exploiter les non-linéarités Kerr et Brillouin dans les résonateurs à modes de galerie à la longueur d'onde de 1550 nm afin de générer des micro-ondes ultra-stables à des fréquences comprises entre 5 et 30 GHz. Le premier chapitre introduit la théorie, la fabrication, le couplage et la caractérisation de résonateurs à des modes de galerie. Le second chapitre concerne la génération de peignes de fréquences optiques dans ces résonateurs ainsi que leur application à la génération de micro-ondes. Nous y présentons nos résultats expérimentaux, la modélisation numérique de peignes de Kerr, ainsi que l'analyse d'instabilités oscillatoires d'origine thermique observées lors de nos travaux expérimentaux, puis nous concluons. Le dernier chapitre traite de l'interaction photons-phonons via le processus de diffusion Brillouin stimulée dans ces mêmes résonateurs et leur application à la synthèse de micro-ondes. Nous y présentons également nos résultats expérimentaux ainsi que le modèle temporel que nous avons développé pour suivre la dynamique de l'onde transmise et de celle rétrodiffusée. Le dernier chapitre conclue nos travaux. Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été financés par l'European Research Council dans le cadre du projet NextPhase.

Mots-clés : Résonateurs, Modes de galerie, Cristallographie, Polissage, Facteurs de qualité, Effets non-linéaires, Effet Kerr, Mélange à quatre ondes, Interactions photons-phonons, diffusion Brillouin stimulée, Instabilités oscillatoires, Stabilisation, Bruit de phase

Abstract:

Whispering gallery mode resonators are dielectric cavities that support modes with ultra-high quality factor and small volume that remain confined in their inner periphery for time durations that can be as long as few microseconds. The strong confinement of these modes for such long durations strongly enhances nonlinear effect such as Kerr effect or Brillouin effect. These resonators can therefore be used for several applications such as spectroscopy, telecommunications or microwave generation. The objective of this thesis is to use Kerr and Brillouin nonlinearities in these resonators at the laser wavelength of 1550 nm, in order to generate high spectral purity microwave signals with frequencies ranging from 5 to 30 GHz. The first chapter of the thesis introduces the theory, fabrication, coupling and characterisation of whispering gallery mode resonators. The second chapter is about the generation of Kerr optical frequency combs in these resonators and their application to the generation of microwave signals. We present our experimental results, the numerical modelling of Kerr combs, the analysis of oscillatory instabilities (due to thermal effect) observed during our experiments, and conclude. The third chapter concerns photon-phonon interactions via stimulated Brillouin scattering in these resonators and their application to the generation of microwave signals. We present our experimental results and the temporal model that we developed to track the dynamics of the forward and backscattered fields. The last chapter conclude the thesis. The research presented in this thesis has been funded by the European Research Council through the project Nextphase.

Keywords: Resonators, Whispering gallery modes, Crystallography, Polishing, Quality factors, Non-linear effects, Four waves mixing, Photons-phonons interactions, Stimulated Brillouin scattering, Oscillatory instabilities, Stabilisation, Phase noise