



UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE–ARDENNE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE–ARDENNE

Discipline : **MECANIQUE DES SOLIDES, GENIE MECANIQUE, PRODUCTIQUE,
TRANSPORT ET GENIE CIVIL**

Spécialité : **MECANIQUE**

Présentée et soutenue publiquement

Par

Minh Phuc HOANG

le 3 Juillet 2015

**Homogénéisation analytique de structures en nid
d'abeilles pour des plaques composites sandwich**

JURY

Président :	Pr. Jean-Louis BATOZ	Université de Technologie de Compiègne
Rapporteurs :	Pr. Pascal LAFON	Université de Technologie de Troyes
	Pr. Hamid ZAHROUNI	Université de Lorraine
Directeurs de thèse:	Pr. Ying-Qiao GUO	Université de Reims Champagne-Ardenne
	Dr. HDR Boussad ABBES	Université de Reims Champagne-Ardenne
Encadrant :	Dr. HDR Yuming LI	Université de Reims Champagne-Ardenne

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, au sein de l'équipe Matériaux, Procédés et Systèmes d'Emballage du Groupe de Recherche en Sciences Pour l'Ingénieur (MPSE/GRESPI), sous la direction du Pr. Ying-Qiao GUO et du Dr. HDR Boussad ABBÈS.

Tout d'abord, J'exprime ma sincère reconnaissance au Pr. Ying Qiao GUO et au Dr. HDR Boussad ABBÈS, directeurs de thèse. Je les remercie pour m'avoir fait confiance et m'avoir accueilli dans leur laboratoire pendant ces 4 dernières années, ainsi que pour m'avoir donné les moyens nécessaires à la réalisation de mes travaux de recherche dans de bonnes conditions. Je les remercie de m'avoir guidé et soutenu tout au long de ma thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude au Dr. HDR Yuming LI pour son suivi rigoureux et méthodique de l'avancement de mes travaux de recherche et pour son dévouement et les précieux conseils qu'il m'a prodigué.

Je tiens également à remercier le gouvernement Vietnamien pour la bourse d'étude qui m'a été octroyée pour mes quatre années de recherche.

Je remercie vivement les Professeurs Pascal LAFON et Hamid ZAHROUNI d'avoir accepté de rapporter mon manuscrit de thèse. Je remercie vivement également le Professeur Jean-Louis BATOZ de me faire l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier le Dr. Pham Tuong Minh DUONG de m'avoir beaucoup aidé pendant son séjour au laboratoire MPSE/GRESPI.

J'ai l'honneur de dédier ce manuscrit de thèse à ma grand-mère, ma mère, ma femme, mon fils, mes beaux-parents, ma sœur et tous les membres de ma grande famille qui m'ont toujours soutenu tout au long de mes études et m'ont toujours encouragé à aller plus loin.

Je souhaite également remercier mes collègues, mes cousins et mes amis pour leurs aides et les moments agréables passés ensemble.

Je remercie enfin l'ensemble de mes collègues ainsi que tout le personnel du GRESPI qui m'ont aidé à mener à bien mes travaux de thèse par leur bonne humeur, leurs encouragements et leur soutien durant toutes ces années.

Table des matières

Remerciements	2
Table des matières	3
Résumé	6
Abstract	7
Notations	8
Chapitre I	11
Introduction générale	11
I.1. Contexte	11
I.2. Présentation Générale des Matériaux Composites Sandwich	13
I.3. Présentation des structures composites sandwiches en nid d'abeilles	15
I.3.1 Définition d'une plaque sandwich en nid d'abeilles	15
I.3.2 Historique du nid d'abeilles	16
I.3.3 Fabrication du nid d'abeilles	17
I.3.4 Domaines d'application.....	19
I.3.5 Géométrie d'une cellule de nid d'abeilles.....	20
I.4. Etat de l'art des travaux sur les méthodes d'homogénéisation des nids d'abeilles	21
I.5. Objectifs de la thèse et structure du manuscrit.....	25
Chapitre II	28
Modèle d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles en traction et Flexion	28
II.1. Rappel des théories d'élasticité et de plaque.....	28
II.1.1. Rappel de la théorie de l'élasticité	28
II.1.2. Rappel des théories de plaque.....	30
II.2. Formulation de l'homogénéisation de la rigidité de traction	34
II.2.1. Choix d'un volume élémentaire représentatif pour l'homogénéisation	34
II.2.2. Méthodologie pour déterminer les modules du solide orthotrope homogénéisé équivalent à une cellule de nid d'abeilles en traction	35
II.2.3. Détermination des bornes supérieure et inférieure de traction par la théorie de membrane.....	36
II.2.4. Formulation du modèle d'homogénéisation pour l'âme nid d'abeilles en traction .	45
II.2.5. Concordance des bornes supérieure et inférieure entre la théorie de membrane et la formulation en série de fonctions trigonométriques.....	51
II.3. Formulation de l'homogénéisation pour les modules de flexion	52
II.3.1. Méthodologie pour déterminer les modules de flexion de l'âme homogénéisée	53
II.3.2. Bornes supérieure et inférieure de l'énergie de déformation de l'âme en flexion	53

II.3.3.	<i>Formulation d'homogénéisation de l'âme en nid d'abeilles en flexion</i>	56
II.3.4.	<i>Concordance de la formulation d'homogénéisation et les bornes supérieure et inférieure</i>	59
II.4.	Modules d'élasticité pour le problème de traction-flexion couplés	59
II.5.	Module d'Young suivant la hauteur de l'âme	61
II.6.	Validation numérique des modèles d'homogénéisation	62
II.6.1.	<i>Validation du modèle d'homogénéisation de traction</i>	62
II.6.2.	<i>Validation numérique du modèle d'homogénéisation en flexion</i>	68
II.7.	Conclusion du chapitre II	70
Chapitre III		72
Modèle d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles en cisaillement et torsion		72
III.1.	Introduction du chapitre III	72
III.2.	Méthodologie pour déterminer les modules de cisaillement et de torsion	73
III.3.	Modèle d'homogénéisation du nid d'abeilles pour le cisaillement dans le plan	76
III.3.1.	<i>Bornes supérieure et inférieure du module de cisaillement dans le plan G_{XY}^{C*}</i>	76
III.3.2.	<i>Formulation en séries de fonctions trigonométriques pour le cisaillement dans le plan de l'âme en nid d'abeilles</i>	79
III.3.3.	<i>Programmation en Fortran pour le calcul du module de cisaillement G_{XY}^{C*}</i>	87
III.4.	Modèle d'homogénéisation du nid d'abeilles en torsion.....	88
III.4.1.	<i>Bornes supérieure et inférieure du module de torsion G_{XY}^{T*}</i>	88
III.4.2.	<i>Formulation de l'homogénéisation du nid d'abeilles en torsion</i>	91
III.4.3.	<i>Programmation en Fortran pour calculer le module de torsion G_{XY}^{T*}</i>	97
III.5.	Validation numérique des modèles d'homogénéisation en cisaillement et torsion	98
III.5.1.	<i>Calcul numérique d'une plaque sandwich en nid d'abeilles en cisaillement</i>	98
III.5.2.	<i>Calcul numérique d'une plaque sandwich en nid d'abeilles en torsion</i>	101
III.5.3.	<i>Validation des H-modèles de cisaillement et de torsion avec Abaqus</i>	103
III.6.	Conclusion du chapitre III.....	105
Chapitre IV		107
Modèles d'homogénéisation analytiques de l'âme en nid d'abeilles en cisaillement transverse		107
IV.1.	Introduction du chapitre IV	107
IV.2.	Homogénéisation analytique pour le module de cisaillement transverse G_{XZ}^*	107
IV.3.	Formulation de l'homogénéisation analytique pour le module de cisaillement G_{YZ}^*	109
IV.3.1.	<i>Méthode classique de Gibson pour les bornes supérieure et inférieure de G_{YZ}^*</i> ...	109

IV.3.2. Formulation de l'homogénéisation avec les effets des peaux et de la hauteur pour G_{YZ}^*	110
IV.4. Validation numérique pour les H-modèles en cisaillement transverse	115
IV.4.1. Validation numérique du module de cisaillement transverse G_{YZ}^*	115
IV.4.2. Validation numérique pour le module de cisaillement transverse G_{XZ}^*	118
IV.5. Conclusion du chapitre IV	120
Chapitre V	121
Simulation numérique de plaques sandwich en nid d'abeilles	121
V.1. Présentation des plaques sandwich en nid d'abeilles	121
V.2. Matériaux de la plaque composite sandwich	121
V.2.1. Caractéristiques des peaux	121
V.2.2. Caractéristiques du papier carton du nid d'abeilles	122
V.2.3. Homogénéisation d'une cellule de nid d'abeilles	122
V.3. Simulation des plaques sandwichs avec H-modèles et éléments finis de coque	123
V.3.1. Plaque sandwich en flexion (Position 1)	123
V.3.2. Plaque sandwich en flexion avec appuis différents (Position 2)	127
V.4. Conclusion du chapitre V	131
Conclusions et perspectives	133
Liste des figures	135
Liste des tableaux	137
Bibliographie	138
Résumé	140
Abstract	140

Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer des modèles d'homogénéisation analytiques de panneaux sandwichs en nid d'abeilles. A la différence des méthodes classiques, l'effet des peaux est pris en compte, conduisant à des propriétés mécaniques très différentes. Dans les cas des tractions, flexions, cisaillement dans le plan, cisaillements transversaux et torsion, différentes séries de fonctions analytiques sont proposées pour prendre en compte la redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles. Nous avons étudié l'influence de la hauteur du nid d'abeilles sur les propriétés élastiques. Les courbes des modules obtenues avec le modèle proposé sont bien bornées par les valeurs obtenues avec la théorie des poutres. Les contraintes d'interface sont également étudiées afin de comparer avec les modèles existant pour le problème de traction.

De nombreux calculs numériques ont été réalisés avec nos H-modèles pour les problèmes de tractions, de flexions, de traction-flexion couplés, de cisaillement dans le plan, de cisaillement transversal et de torsion. De très bon accords ont été obtenus entre les résultats issus des H-modèles et ceux issus des calculs par éléments finis de coques en maillant complètement les panneaux sandwichs. Nos H-modèles ont été appliquées aux calculs de grandes plaques sandwichs industrielles en nid d'abeilles. La comparaison des résultats entre les H-modèles et les calculs en éléments finis de coques du logiciel Abaqus sont en très bon accord.

Mots clés: Homogénéisation analytique, Plaque sandwich en nid d'abeilles, Matériau cellulaire, Structure en nid d'abeilles, Effet de peau et de hauteur.

Abstract

The aim of this thesis is to develop an analytical homogenization model for the honeycomb core sandwich panels. Unlike conventional methods, the skin effects are taken into account, leading to a very different mechanical properties. In the cases of extensions, bendings, in-plane shear, transverse shears and torsion, different analytical function series are proposed to consider the stress redistribution between the honeycomb walls. We have studied the influence of the height of the core on its homogenized properties. The moduli curves obtained by the present H-models are well bounded by the moduli values obtained by the beam theory. The interface stresses are also studied to compare with existing models for stretching problem.

Many numerical computations with our H-models have been done for the problems of stretching, bending, in-plan and transverse shearing, as well as torsion. Very good agreement has been achieved between the results of the H-models and the results obtained by finite element simulations by completely meshing the sandwich panel with shell elements. Our H-models have been applied to the computations of industrial large sandwich panels with honeycomb core. The comparison of the results between the H-models and the simulations with Abaqus shell elements are in very good agreement.

Keywords: Analytical homogenization, Honeycomb sandwich plate, Cellular material, Honeycomb structure, Skin and height effects

Notations

VER	Volume Elémentaire Représentatif
θ	Angle de la cellule
Φ	Diamètre de la cellule
l	Longueur de la paroi inclinée
h	Longueur de la paroi verticale
t	Epaisseur de la paroi inclinée
t'	Epaisseur de la paroi verticale
b	Hauteur du nid d'abeilles
L_X	Longueur de la plaque suivant X
L_Y	Longueur de la plaque suivant Y
l_X	Longueur du cœur suivant X
l_Y	Longueur du cœur suivant Y
OXY	Système de coordonnées global
oxy	Système de coordonnées local
E	Module d'Young des parois du nid d'abeilles
E_X	Module d'Young du nid d'abeilles suivant l'axe X
E_Y	Module d'Young du nid d'abeilles suivant l'axe Y
E_Z	Module d'Young du nid d'abeilles suivant l'axe Z
E_{XY}	Module d'élasticité du nid d'abeilles dans le plan XY
Π_{int}	Énergie interne de déformation
$\Pi_{\text{int}}^{\text{sup}}$	Borne supérieure de l'énergie interne de déformation
$\Pi_{\text{int}}^{\text{inf}}$	Borne inférieure de l'énergie interne de déformation
Π_{int}^*	Énergie interne de déformation d'un solide homogène équivalent
u_h	Déplacement suivant l'axe x d'une paroi verticale

v_h	Déplacement suivant l'axe y d'une paroi verticale
u_l	Déplacement suivant l'axe x d'une paroi inclinée
v_l	Déplacement suivant l'axe y d'une paroi inclinée
ε_{xh}	Déformation suivant l'axe x d'une paroi verticale
ε_{yh}	Déformation suivant l'axe y d'une paroi verticale
ε_{xl}	Déformation suivant l'axe x d'une paroi inclinée
ε_{yl}	Déformation suivant l'axe y d'une paroi inclinée
β_x	Angle de rotation de la normale de z vers x
β_y	Angle de rotation de la normale de z vers y
γ_{xyh}	Déformation angulaire d'une paroi inclinée
γ_{xyl}	Déformation angulaire d'une paroi inclinée
Q_X^*	Module élastique suivant l'axe X
Q_Y^*	Module élastique suivant l'axe Y
Q_{XY}^*	Module élastique dans le plan XY
$Q_X^{*\text{inf}}$	Borne inférieure du module élastique suivant l'axe X
$Q_Y^{*\text{inf}}$	Borne inférieure du module élastique suivant l'axe Y
$Q_{XY}^{*\text{inf}}$	Borne inférieure du module élastique dans le plan XY
$Q_X^{*\text{sup}}$	Borne supérieure du module élastique suivant l'axe X
$Q_Y^{*\text{sup}}$	Borne supérieure du module élastique suivant l'axe Y
$Q_{XY}^{*\text{sup}}$	Borne supérieure du module élastique dans le plan XY
G_{XY}^{C*}	Module de cisaillement dans le plan
$G_{XY}^{C*-\text{inf}}$	Borne inférieure du module de cisaillement dans le plan
$G_{XY}^{C*-\text{sup}}$	Borne supérieure du module de cisaillement dans le plan

G_{XY}^{T*} Module de cisaillement en torsion

G_{XY}^{T*-inf} Borne inférieure du module de cisaillement en torsion

G_{XY}^{T*-inf} Borne inférieure du module de cisaillement en torsion

G_{XY}^{T*-sup} Borne supérieure du module de cisaillement en torsion

G_{XZ}^* , G_{YZ}^* Modules de cisaillement transverses

G_{XZ}^{*-inf} , G_{YZ}^{*-inf} Bornes inférieures des modules de cisaillement transverses

G_{XZ}^{*-sup} , G_{YZ}^{*-sup} Bornes supérieures des modules de cisaillement transverses

H - modèle Modèle d'homogénéisation du nid d'abeilles

Chapitre I

Introduction générale

I.1. Contexte

Pour diminuer la consommation de l'énergie et les émissions de CO₂, les ingénieurs font des efforts constants pour concevoir des matériaux ayant une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Ils désirent que, dans un grand nombre de situations, le rapport performance sur masse soit le plus élevé possible. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences. Ils sont largement utilisés aussi bien dans le domaine du transport (aéronautique, aérospatiale, automobile, maritime, ferroviaire...) que dans le domaine des loisirs et du sport, car ils permettent d'atteindre des performances que les matériaux classiques ne peuvent fournir.

Le matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles et de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [1]. Généralement, on distingue deux sortes de matériaux composites structuraux : les stratifiés et les sandwichs. Les stratifiés sont formés de plusieurs couches élémentaires appelées monocouches. En effet, les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite, et sont formées d'une matière plastique (résine, matrice) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). Les divers types de monocouches sont définis par la forme du renfort : à fibres longues, à fibres tissées, ou à fibres courtes. La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir une structure composite stratifiée. Une structure sandwich est formée généralement de trois composants possédant des propriétés différentes, mais complémentaires : les peaux, l'âme et l'adhésif.

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwichs. Les structures sandwichs à âme creuse sont un bon compromis entre résistance et légèreté. De ce fait, les domaines d'application très variés font qu'il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques. Ces matériaux sandwichs sont composés de plusieurs parties interagissant entre elles. Il sera donc possible d'associer judicieusement les propriétés des peaux ou semelles et celles des matériaux de cœur ou âme. L'assemblage de ces deux

parties se réalise par collage, soudage ou brasage en mettant en jeu un autre composant de comportement différent.

De nos jours, il est nécessaire de recourir à la modélisation numérique afin de raccourcir sensiblement les délais de conception de nouvelles structures sandwichs. Cependant, la modélisation de structures en nid d'abeilles est trop longue et fastidieuse. L'homogénéisation du nid d'abeilles (Nida) permet d'obtenir un solide homogène équivalent et ses modules d'élasticité afin de réaliser des simulations très efficaces : diminuer largement le temps de préparation des géométries et des maillages, ainsi que le temps CPU.

Les modèles classiques d'homogénéisation du nid d'abeilles ont été systématiquement décrits par Gibson et al. [2]. Dans ces modèles, l'écarteur en nid d'abeilles se déforme indépendamment sans effets de peaux et les parois du nid d'abeilles sont supposées se déformer en flexion. Ces modèles donnent des modules d'élasticité du solide homogénéisé très petits par rapport à ceux mesurés expérimentalement. Dans cette étude, nous allons proposer des modèles d'homogénéisation analytique de nid d'abeilles en tenant compte de l'effet des peaux. Cet effet conditionne les déformations des parois minces du Nida, qui se comportent essentiellement en traction ou en compression ce qui donne les rigidités beaucoup plus grandes que celles obtenues par les modèles de flexion. Ces modèles sont formulés mathématiquement, puis validés numériquement par la méthode des éléments finis ; ensuite, ils sont appliqués pour la simulation du comportement de panneaux sandwichs industriels.

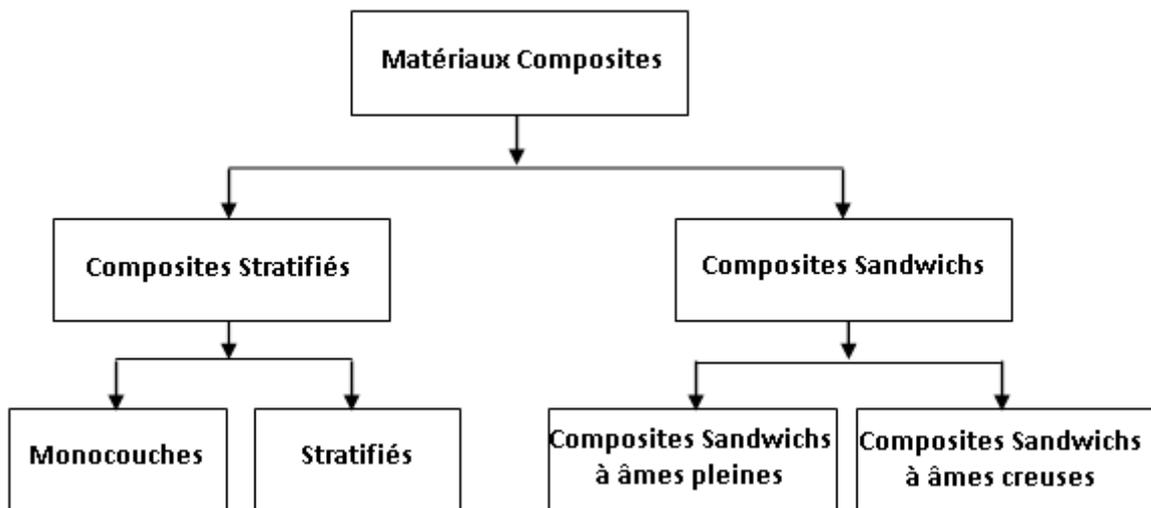


Figure 1.1. Classification des matériaux composites selon leur structure.

I.2. Présentation Générale des Matériaux Composites Sandwich

Les matériaux sandwichs se caractérisent des matériaux classiques par une intégration étroite des connaissances, reliées aux procédés de fabrication et aux performances mécaniques des pièces obtenues. Une structure sandwich est constituée par collage ou soudure d'une âme de faible rigidité et de deux peaux relativement rigides. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité. Selon Daniel Gay [3], le rapport des épaisseurs de l'âme e_c et des peaux e_p doit être compris entre 10 et 100 ($10 \leq e_c/e_p \leq 100$). Généralement, le choix des matériaux des plaques composites sandwich est fait afin de minimiser la masse en tenant compte des conditions d'utilisation (rigidité, humidité, température, corrosion, prix, etc.).

a) L'âme

L'âme, l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Elle a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite au mouvement de glissement des peaux sous charge, et de maintenir leur écartement. Les matériaux d'âme les plus utilisés se présentent principalement sous deux formes [1]:

- Âmes pleines (Figure 1.2)
 - le balsa ou bois cellulaire;
 - diverses mousses cellulaires;
 - des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques;
 - etc.;
- Âmes creuses (Figure 1.3), essentiellement nid d'abeilles et profilés:
 - des alliages métalliques légers;
 - du papier kraft (enduit ou non de résine);
 - du papier polyamide, type papier Nomex;
 - etc.;

b) Les peaux

Pour une plaque sandwich en flexion, les peaux sont essentiellement soumises à la traction ou à la compression. Le choix des peaux s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées. Mais généralement, une rigidité élevée et une excellente résistance à la traction-compression sont les principales qualités recherchées.

Les peaux sont souvent des stratifiés à renfort fibreux (carbone/époxyde, kevlar/époxyde, bore/époxyde, verre ...); ou en matériaux métalliques (Aluminium, Acier, Inox...); ou en bois (contreplaqué) ou encore en plaques thermoplastiques.

c) L'adhésif

L'élément final, dont l'importance est jugée également cruciale, est le film adhésif. Ce film forme la liaison entre l'âme et les peaux. Cette liaison doit être continue sans porosité et d'épaisseur constante. Par ailleurs, une capacité suffisante pour s'opposer à la déformation est nécessaire afin de transmettre des sollicitations mécaniques. Mais, aussi elle doit être suffisamment élastique pour absorber et atténuer les impacts. En pratique, l'épaisseur de l'adhésif est limitée entre 0.025 et 0.2 mm [3].

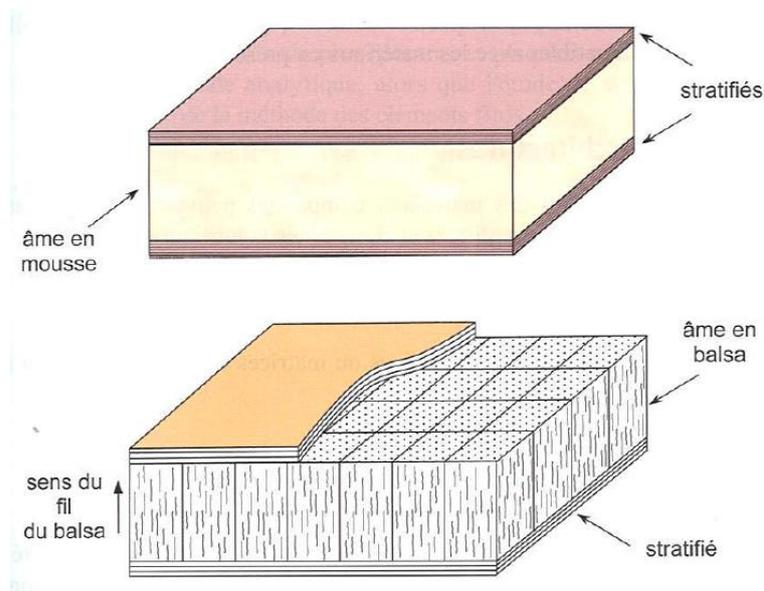


Figure 1.2. Plaques sandwiches à âmes pleines [1].

Les panneaux sandwichs sont caractérisés par leur :

- extrême légèreté ;
- très grande rigidité en flexion ;
- excellentes caractéristiques d'isolation thermiques et acoustique ;
- planéité.

En revanche, certains panneaux sandwichs n'amortissent pas bien, leur tenue au feu n'est pas bonne et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

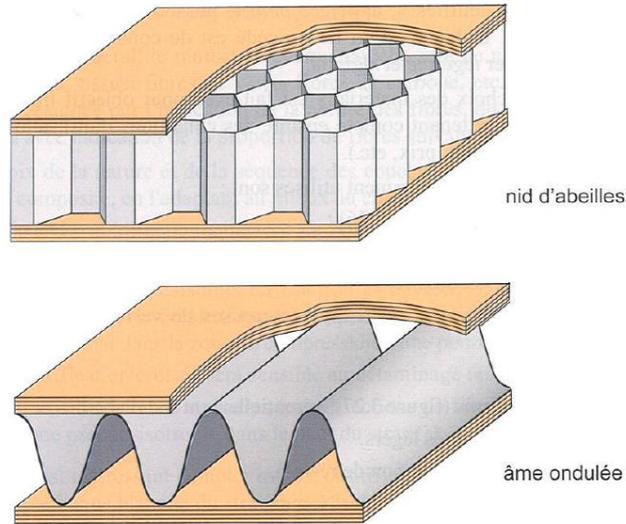


Figure 1.3. Plaques sandwiches à âmes creuses [1].

I.3. Présentation des structures composites sandwiches en nid d'abeilles

I.3.1 Définition d'une plaque sandwich en nid d'abeilles

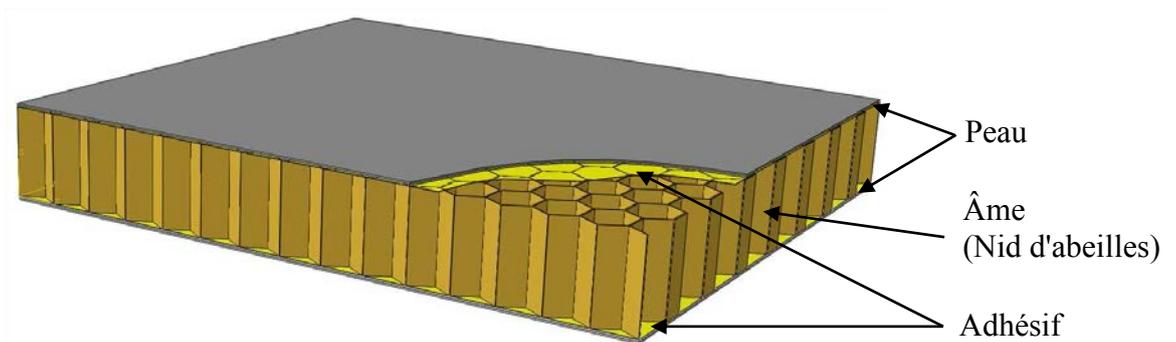


Figure 1.4. Constitution d'un panneau sandwich en nid d'abeilles.

Le nid d'abeilles, avec sa rangée régulière de cellules hexagonales ou prismatiques, représente un solide cellulaire dans deux dimensions [2]. On utilise le mot "nid d'abeilles" dans un sens plus large pour désigner toutes les matrices de cellules prismatiques identiques qui s'emboîtent pour remplir l'espace entre les deux peaux. Les cellules sont

généralement de section hexagonale, mais elles peuvent aussi être de section triangulaire ou carrée ou en losange. Le nid d'abeilles utilisé dans cette étude est un nid d'abeilles hexagonal régulier.

1.3.2 Historique du nid d'abeilles

Dans cette section, nous allons présenter l'historique du nid d'abeilles d'après Tom Bitzer [4]. Le premier brevet d'âme en nid d'abeilles, couvrant un procédé de fabrication pour la production de papier kraft en nid d'abeilles, est probablement le celui de Budwig délivré en 1905 en Allemagne. L'une des premières structures sandwichs artificielles était un pont tubulaire de chemin de fer au pays de Galles construit en 1845. Il se composait d'un grand tube rectangulaire, dont le plancher soutient une voie ferrée, et à travers lequel circulent les trains.

En 1919, le premier panneau sandwich a été fabriqué en utilisant des parements minces en acajou liés à une âme de bois de balsa. Il a été utilisé comme structure primaire des pontons d'un hydravion. Plus tard, entre la première guerre mondiale et la seconde guerre mondiale, les peaux en contreplaqué collées à un noyau en bois de balsa ont été utilisées comme structure primaire des hydravions italiens.

La fabrication de nids d'abeilles structurelles modernes a probablement commencé à la fin des années 1930, lorsque J.D. Lincoln a fabriqué le papier Kraft en nid d'abeilles pour une utilisation dans le mobilier construit par Lincoln Industries à Marion (Virginie, Etats Unis d'Amérique). Les panneaux sandwichs se composaient de parements minces de bois liés à une tranche relativement épaisse de nid d'abeilles en papier.

Durant la seconde guerre mondiale, le papier en nid d'abeilles a été utilisé par la Société Martin pour l'emballage des antennes de radar; mais l'âme formée de papier absorbait de l'humidité. Plus tard, Martin a développé un nid d'abeilles en tissu de toile de coton et produit ensuite les âmes alvéolaires en tissu de coton, en tissu de verre et en papier d'aluminium.

Toujours à cette époque, la Société Havilland Airplane a conçu et construit le bombardier Mosquito, qui a utilisé des panneaux sandwichs dans certaines parties. L'excellente performance affichée par cet avion a conduit à l'acceptation de nombreux concepteurs d'aéronefs, notamment en Angleterre, de la supériorité de base de la structure en sandwich comme un moyen de fabrication d'un avion performant plus efficace et plus

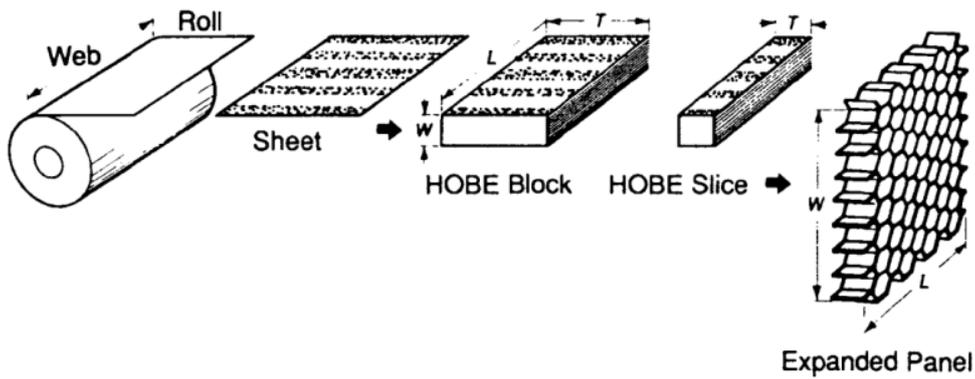
avancé. En conséquence, beaucoup de groupes de conception d'avions ont commencé à rechercher la meilleure façon de faire des structures sandwiches et les meilleurs matériaux pour faire les âmes et les parements.

Ce n'est qu'en 1945 que le premier panneau sandwich tout en aluminium a été produit. La véritable percée est venue avec le développement de meilleurs adhésifs pour la fixation des revêtements aux âmes. Certains adhésifs ont été mis au point pour avoir de bonnes propriétés rhéologiques pour l'utilisation sur les nids d'abeilles.

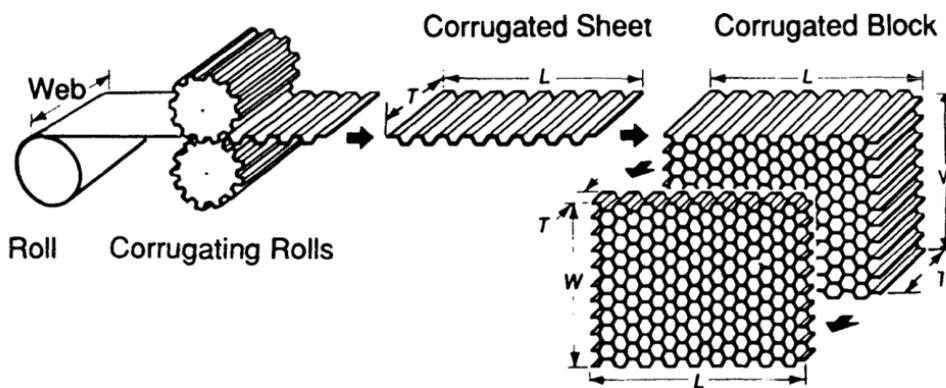
1.3.3 Fabrication du nid d'abeilles

Des structures comme le nid d'abeilles de la Fig.1.4 peuvent être réalisées de quatre façons [4] : le collage, le soudage par résistance, le brasage, le soudage par diffusion et la fusion thermique. Ces méthodes sont basées sur la façon dont les nœuds sont attachés. La plus évidente est d'appuyer sur un matériau en feuille dans un profil demi-hexagonal et coller les plaques ondulées ensemble. De loin, le procédé de fabrication le plus commun est la liaison adhésive : jusqu'à 95% des âmes en nid d'abeilles sont fabriquées de cette façon. Le soudage par résistance, le brasage ou le collage par diffusion ne sont utilisés que sur des âmes qui peuvent voir des températures élevées ou des conditions environnementales extrêmes. Il existe deux techniques de base utilisées pour transformer la matière en feuille en nid d'abeilles : le processus d'expansion et le processus d'ondulation (Fig. 1.5).

Le processus d'expansion est schématisé sur la Fig. 1.5a. En général, la colle est posée en bandes parallèles sur des feuilles plates, et les feuilles sont empilées de sorte à les coller ensemble le long des bandes. L'empilage de feuilles est découpé à la dimension désirée et est ensuite étiré pour donner le nid d'abeilles. Pour les âmes métalliques, un revêtement résistant à la corrosion est appliqué sur les feuilles métalliques, et les lignes adhésives sont imprimées. Les feuilles sont coupées et empilées, et l'adhésif est durci sous pression à une température élevée. Ensuite, les tranches sont coupées à l'épaisseur requise puis étirées.



(a) Fabrication par le processus d'expansion



(b) Fabrication par le processus d'ondulation

Figure 1.5. Procédé de fabrication de l'âme en nid d'abeilles.

Le processus d'ondulation, illustrée par la Fig. 1.5b, est la technique d'origine utilisée pour fabriquer les âmes en nid d'abeilles. Cette méthode est encore utilisée pour la fabrication des âmes métalliques et certaines âmes non métalliques. Dans le procédé d'ondulation, les feuilles sont d'abord ondulées, ensuite un adhésif est appliqué sur les nœuds et les feuilles sont empilées puis durcis dans un four.

Les nids d'abeilles peuvent également être coulés dans un moule (nid d'abeilles en silicone), ou par extrusion (nids d'abeilles en céramique utilisés pour supporter des catalyseurs de gaz d'échappement automobiles) [3].

Le nid d'abeilles peut être réalisé avec tout matériau plat et mince, ainsi plus de 500 types différents de nid d'abeilles ont été fabriqués [4]. Les matériaux en nid d'abeilles les plus couramment utilisés sont [3]:

- Les nids d'abeilles métalliques (alliage léger, acier ...) sont moins onéreux et plus résistants.
- Les nids d'abeilles non métalliques (carton imprégné de résine phénolique, papier Nomex, feuille de polyamide, tissus de verre imprégnés ...) sont insensibles à la corrosion et sont de bons isolants thermiques et acoustiques.

Le tableau 1.1 [3] résume les caractéristiques géométriques et mécaniques de quelques nids d'abeilles couramment utilisés.

Paramètres	Feuilles de Polyamide Encollées: Nomex	Alliage léger AG3	Alliage léger AU4 GI (2024)
Ø cercle inscrit (mm)	6; 8; 12	4	6
Epaisseur e (mm)		0.05	0.04
Masse volumique (kg/m ³)	64	80	46
Résistance à la rupture en cisaillement $\tau_{xz \text{ rupt}}$ (MPa)	1.7	3.2	1.5
Module de glissement G_{xz} (MPa)	58	520	280
Résistance à la rupture en Cisaillement $\tau_{yz \text{ rupt}}$ (MPa)	0.85	2	0.9
Module de glissement G_{yz} (MPa)	24	250	140
Résistance à la rupture en compression $\sigma_z \text{ rupt}$ (MPa)	2.8	4.4	2

Tableau 1.1. Caractéristique mécaniques et géométriques de différents nids d'abeilles.

1.3.4 Domaines d'application

Les panneaux sandwich en nid d'abeilles sont largement utilisés dans différents domaines industriels :

- Industries aéronautique et aérospatiale : panneaux intérieurs d'avions (planchers, parois latérales, plafonds, cuisines et toilettes), panneaux extérieurs

d'avions (bords avant et arrière, volets, ailerons, radômes, carénages, pales d'hélicoptère, panneaux et portes d'accès; capots des moteurs ...)

- Industries automobile et ferroviaire : panneaux sandwichs en nid d'abeilles pour la construction de camions, d'autobus, métro et tramways
- Industries des sports et loisirs : planches de surf, zones d'accostage de séparation, cabines et coques de bateaux de haute performance et navires.
- Industrie de la construction : panneaux sandwich pour les murs, planchers, plafonds, portes, cloisons, façades, surfaces pour machines automatiques et pour toutes les structures qui nécessitent d'atteindre un rapport rigidité/poids optimal ...

1.3.5 Géométrie d'une cellule de nid d'abeilles

La géométrie d'une cellule de nid d'abeilles est illustrée dans les Fig. 1.6 et 1.7. Cette géométrie est définie par différents paramètres : longueurs des parois verticale et inclinée (h et l), épaisseurs de ces parois (t' et t), angle d'inclinaison des parois inclinées (θ). Ces paramètres sont résumés dans le tableau 1.2.

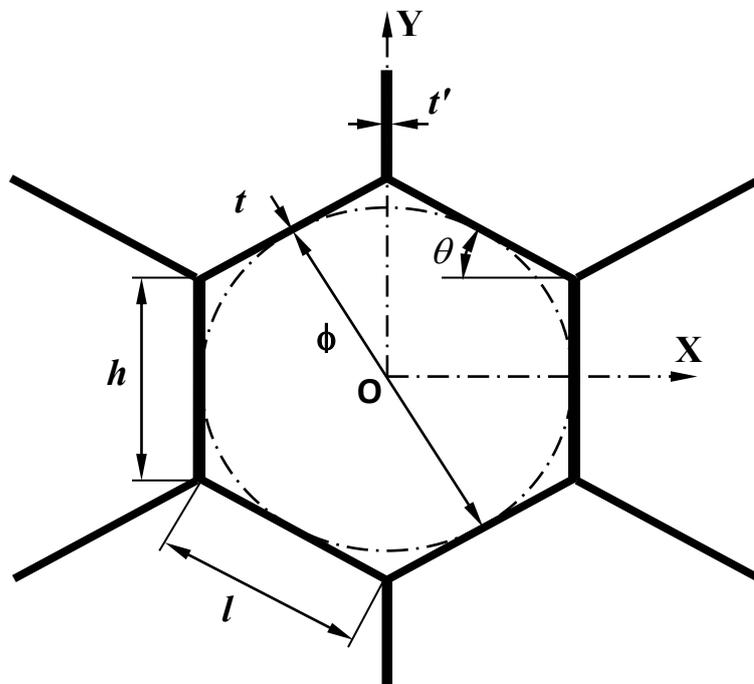


Figure 1. 6. Géométrie d'une cellule en nid d'abeilles.

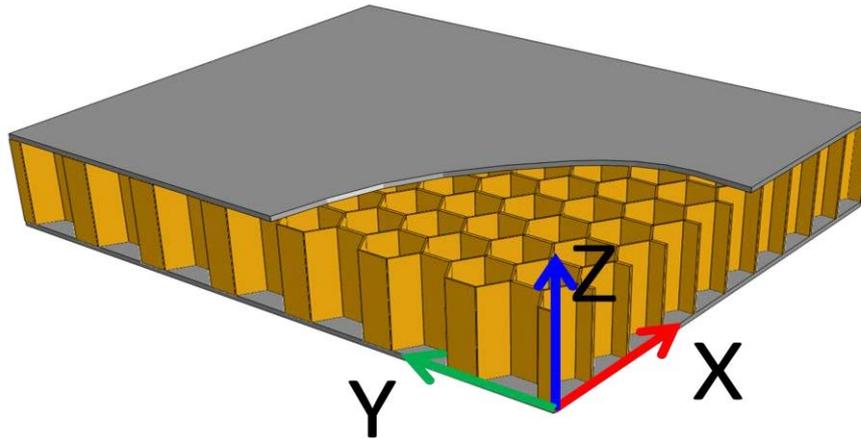


Figure 1.7. Systèmes de coordonnées d'un nid d'abeilles.

Paramètres	Définition
θ	Angle d'inclinaison des parois inclinées
Φ	Diamètre de la cellule (si hexagone régulier)
l	Longueur de la paroi inclinée
h	Longueur de la paroi verticale
t	Epaisseur de la paroi inclinée
t'	Epaisseur de la paroi verticale (souvent $t'=2 t$)
b	Hauteur de l'écarteur en nid d'abeilles

Tableau 1.2. Paramètres géométriques d'une cellule en nid d'abeilles.

I.4. Etat de l'art des travaux sur les méthodes d'homogénéisation des nids d'abeilles

Les plaques sandwiches en nid d'abeilles permettent d'avoir un très bon compromis entre résistance et légèreté. La simulation et l'optimisation de ce type de plaques sont de première importance pour la légèreté et la sécurité des structures. Cependant, la modélisation numérique de structures en nid d'abeilles est trop longue et fastidieuse en raison de la complexité géométrique du nid d'abeilles. Certains travaux expérimentaux et numériques ont été réalisés pour déterminer les propriétés élastiques équivalentes du nid d'abeilles [5], [6]. Puisque la géométrie et les conditions aux limites des structures en nid d'abeilles sont très complexes, l'homogénéisation analytique des nids d'abeilles s'avère très utile et efficace.

Gibson et Ashby [2] ont proposé des modèles d'homogénéisation où le nid d'abeilles se déforme indépendamment sans tenir compte de l'effet des peaux. Les rigidités de l'écarteur dépendent essentiellement du comportement en flexion de ses parois et les propriétés élastiques du nid d'abeilles ont été obtenues avec la théorie des poutres en flexion (Fig. 1.8 et 1.9). Cependant, dans une plaque sandwich, l'écarteur se déforme avec les peaux, les parois sont contraintes par les peaux rigides et sont soumises essentiellement à la traction ou à la compression. En conséquence, les rigidités obtenues par le modèle de flexion (proportionnelles à t^3/l^3) sont beaucoup plus grandes que celles obtenues par le modèle en traction (proportionnelles à t/l).

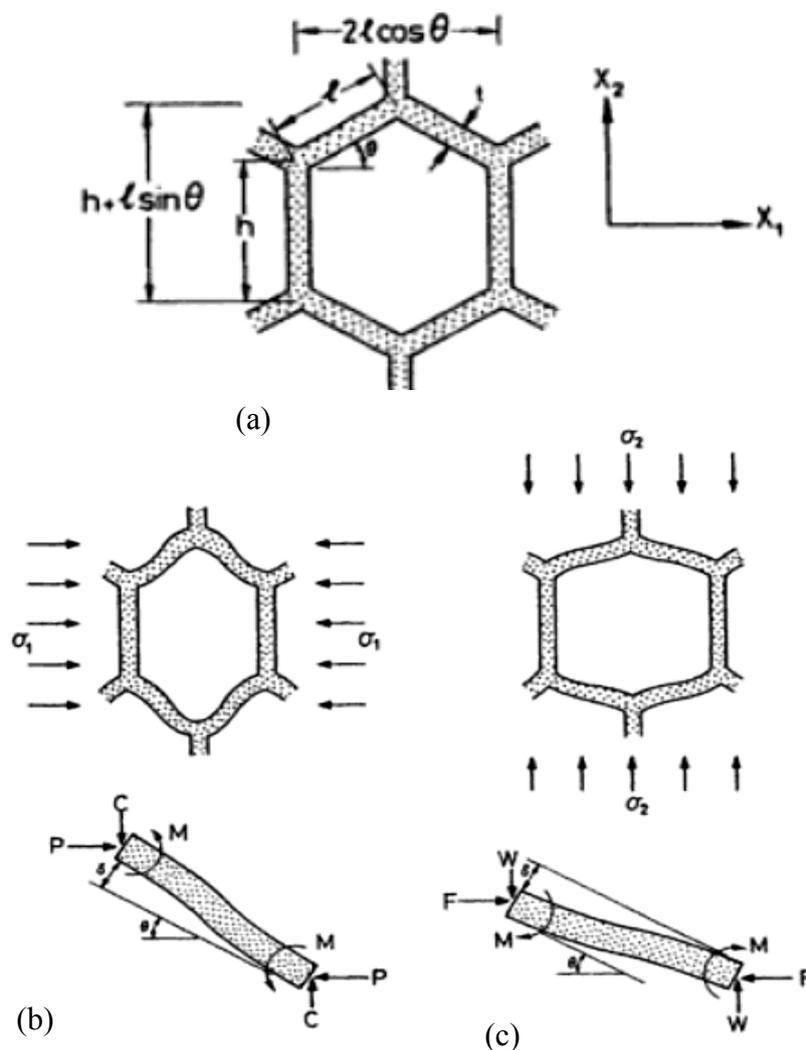


Figure 1. 8. Modèle de Gibson basé sur la flexion de poutre pour une cellule de nid d'abeilles sous compression : (a) nid d'abeilles non déformé; (b, c) flexion provoquée par σ_1 et σ_2 [2].

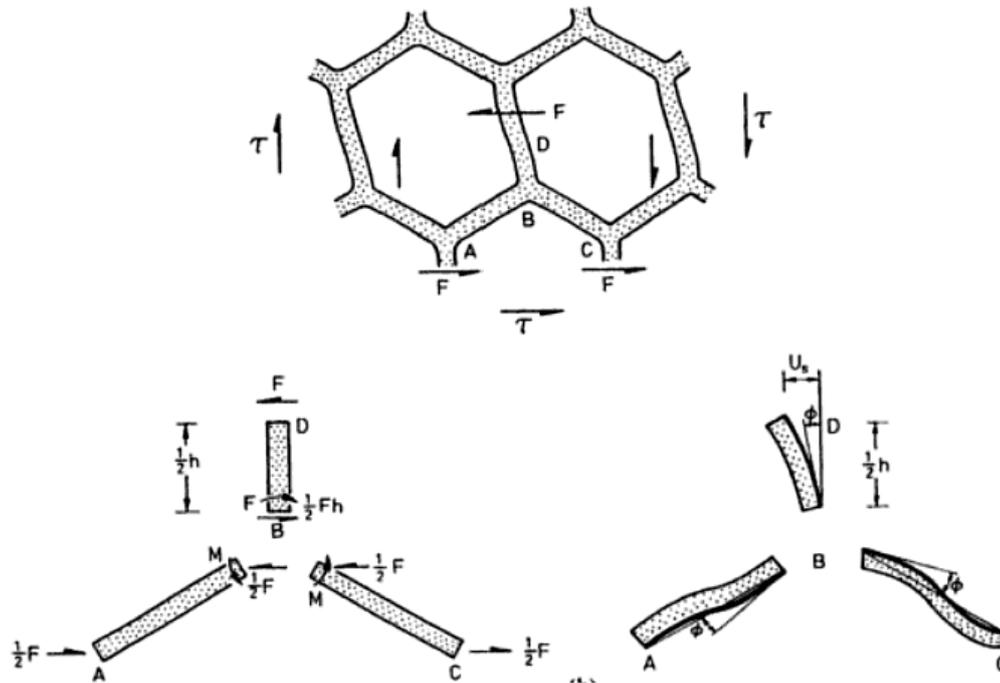


Figure 1. 9. Modèle de Gibson basé sur la flexion de poutre pour une cellule de nid d'abeilles sous cisaillement : charges, moments, déplacements et rotations [2].

Le tableau 1.3 résume les formules analytiques de Gibson pour déterminer les propriétés élastiques du nid d'abeilles [2].

D'autres améliorations ont été proposées par Masters et Evans [7]. Trois mécanismes de déformation ont été identifiés dans un nid d'abeilles, à savoir : la flexion, l'articulation et l'étirement. Le modèle de flexion est similaire à celui de Gibson et Ashby [2]. Le modèle d'étirement suppose que les parois cellulaires ne peuvent se déformer que par étirement le long de leur axe, sans changement d'angle. Le modèle d'articulation suppose que les parois des cellules sont rigides dans les directions axiale et transversale ; et que les charnières élastiques aux articulations permettent aux cellules de se déformer. En superposant ces trois mécanismes, les propriétés mécaniques du nid d'abeilles ont été obtenues. Cependant, tous ces modèles mathématiques sur l'âme en nid d'abeilles étaient basés sur la structure cellulaire seule sans tenir compte de l'effet de renforcement des peaux. Dans la théorie classique des sandwichs [8], l'interaction entre l'âme et les peaux est identifiée comme le résultat de l'hypothèse de l'âme anti-plan.

Modules	Formules analytiques de Gibson
Module d'Young suivant X (ou direction 1)	$E_1 = E_s \left(\frac{t}{l} \right)^3 \frac{\cos \theta}{(h/l + \sin \theta) \sin^2 \theta}$
Module d'Young suivant Y (ou direction 2)	$E_2 = E_s \left(\frac{t}{l} \right)^3 \frac{h/l + \sin \theta}{\cos^3 \theta}$
Module de cisaillement dans le plan XY	$G_{12} = E_s \left(\frac{t}{l} \right)^3 \frac{h/l + \sin \theta}{(h/l)^2 (1 + 2h/l) \cos \theta}$
Modules de cisaillement transverse	$G_{13} = G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{\cos \theta}{h/l + \sin \theta}$
	$G_{23} \geq G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{h/l + \sin \theta}{\cos \theta (1 + h/l)} \quad (\text{limite inf.})$ $G_{23} \leq G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{h/l + \sin \theta^2}{\cos \theta (h/l + \sin \theta)} \quad (\text{limite sup.})$
Coefficient de Poisson ν_{21}	$\nu_{21} = \frac{(h/l + \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta}$
Coefficient de Poisson ν_{12}	$\nu_{12} = \frac{\cos^2 \theta}{(h/l + \sin \theta) \sin \theta}$
Coefficient de Poisson ν_{23}	$\nu_{23} = \frac{E_2}{E_3} \nu_{32}$
Coefficient de Poisson ν_{13}	$\nu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31}$
Coefficients de Poisson ν_{31}, ν_{32}	$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu$
Module d'Young suivant Z	$E_3 = E_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{(h/l + 2)}{2(h/l + \sin \theta) \cos \theta}$

Tableau 1.3. Propriétés élastiques du nid d'abeilles de Gibson

(E_s : module d'Young des parois).

Une autre approche intéressante a été proposée par Xu et al. [9], [10] pour homogénéiser une cellule de nid d'abeilles avec l'effet des peaux. D'abord, l'homogénéisation a été réalisée respectivement sur les parois inclinée et verticale pour obtenir deux solides homogènes; ensuite une seconde homogénéisation a été réalisée sur

les deux solides pour obtenir un seul solide homogène. Sur la base des développements asymptotiques et périodiques, les fonctions de déplacements entre les deux parties des solides ont été formulées et résolues analytiquement. Cependant, les interactions entre les deux solides homogénéisés n'étaient pas équivalentes à celles entre les parois verticale et inclinée. En plus, les coefficients de Poisson dans les deux solides n'ont pas été traités avec les modules d'Young, conduisant à des erreurs importantes. Chen et al. [11] ont développé un autre modèle analytique pour calculer les modules et les contraintes d'interface pour des problèmes de traction. En s'inspirant de la solution des équations d'équilibre sous conditions aux limites simplifiées, des séries de fonctions trigonométriques et hyperboliques ont été proposées pour l'homogénéisation du nid d'abeilles. Cependant, les fonctions hyperboliques dans les champs de déplacements provoquent des problèmes numériques lorsque de nombreuses fonctions hyperboliques sont utilisées. Chen [12] a proposé une méthode pour calculer la rigidité de flexion du nid d'abeilles basée sur la flexion et la torsion des parois du nid d'abeilles ; la théorie de plaque mince a été utilisée pour établir des relations entre le chargement et les déplacements, mais les effets de la peau n'ont pas été étudiés.

Puisque les deux peaux conditionnent de façon significative le mécanisme de déformation locale de l'âme, les propriétés homogénéisées deviennent sensibles à l'épaisseur de l'âme par rapport à la taille de la cellule unitaire, qui est appelé effet d'épaisseur par Becker [13], [14]. Becker a étudié le comportement de l'âme en nid d'abeilles dans deux cas extrêmes : 1) tous les points de l'âme sont entièrement entraînés par les peaux comme les points à l'interface de l'âme et des peaux ; 2) tous les points de l'âme sont entièrement libres sans effet de peaux comme les points de l'âme très éloignés des peaux. Ensuite, il a proposé une fonction d'interpolation entre ces deux cas extrêmes afin d'obtenir une solution en fonction de la hauteur du nid d'abeilles. Dans ce modèle, la fonction d'interpolation et les paramètres associés doivent être choisis délicatement ; en outre, il ne permet pas de calculer les déformations et les contraintes dans le nid d'abeilles.

I.5. Objectifs de la thèse et structure du manuscrit

La simulation numérique est largement utilisée dans de nombreux secteurs pour remplacer partiellement les essais expérimentaux longs et coûteux. La méthode d'homogénéisation consiste à remplacer un matériau réel non homogène par un matériau fictif homogène avec des propriétés macroscopiques équivalentes. Les procédures

d'homogénéisation peuvent être appliquées pour déterminer des propriétés mécaniques d'une structure. La plaque sandwich composée de l'âme en nid d'abeilles et de deux peaux peut être modélisée comme une structure 3D, mais cela exige beaucoup de temps de préparation des maillages et de temps calcul.

Les objectifs de cette thèse sont :

- 1) développer un modèle d'homogénéisation analytique basé sur une méthode énergétique pour modéliser le nid d'abeilles par une plaque homogénéisée de manière très simple et efficace;
- 2) étudier l'influence de la hauteur du nid d'abeilles sur les propriétés élastiques et déterminer les bornes supérieure et inférieure des modules d'élasticité équivalents du nid d'abeilles;
- 3) appliquer les modèles d'homogénéisation développées aux calculs industriels de structures composées de plaques sandwich en nid d'abeilles utilisées dans l'industrie automobile.

Ce manuscrit est structuré de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, nous avons présenté une introduction générale rappelant le contexte de la thèse, les plaques composites sandwiches, les plaques composites sandwiches en nid d'abeilles. Nous avons abordé la définition, l'histoire, les méthodes de fabrication, les domaines d'application, les géométries et notations du nid d'abeilles. Ensuite, nous avons présenté une étude bibliographique sur les travaux de recherche en structures de nid d'abeilles et en homogénéisation du nid d'abeilles.
- Le deuxième chapitre sera consacré aux modèles d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles sous chargement de traction et de flexion. Ces modèles ont pour but de calculer les modules équivalents à partir des propriétés mécaniques du matériau des parois du nid d'abeilles en considérant l'effet des peaux. En utilisant une méthode énergétique et des séries de fonctions trigonométriques, les modèles sont formulés pour étudier la redistribution des contraintes dans les parois du nid d'abeilles et l'influence de la hauteur du nid d'abeilles sur les modules d'élasticité équivalents. Les bornes supérieure et inférieure des modules d'élasticité sont également obtenues par la théorie de poutre et la théorie de membrane. Les contraintes d'interface ont été également étudiées afin de les comparer avec les résultats existants pour un problème de traction. Différentes théories impliquées sont rappelées, nos adaptations et nos développements

sur des solutions analytiques sont présentés. A la fin du chapitre, les H-modèles développés sont validés par de nombreux cas tests en utilisant des simulations 3D sur Abaqus pour différentes hauteurs du nid d'abeilles.

- Dans le troisième chapitre, nous présenterons les modèles d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles en cisaillement dans le plan et en torsion. Dans ce chapitre, l'effet des peaux est également pris en considération, mais la redistribution des contraintes et les champs de déplacements additionnels sont plus complexes. La formulation basée sur la méthode énergétique et sur des séries de fonctions trigonométriques est également présentée. Les courbes des modules de cisaillement en fonction de la hauteur de l'âme en nid d'abeilles sont données ; les bornes et les allures de ces courbes sont comparées entre le problème de cisaillement dans le plan et celui de torsion. Des validations des H-modèles par des simulations de coque 3D sur Abaqus sont réalisées.
- Dans le quatrième chapitre, nous présentons les modèles d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles en cisaillement transverse. Dans le cas du cisaillement transverse relatif à G_{XZ} , il n'existe pas de redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles, conduisant à un module G_{XZ} constant. Dans le cas du cisaillement transverse relatif à G_{YZ} , l'effet des peaux est considéré comme dans les deux chapitres précédents. En fin du chapitre, les H-modèles sont validés numériquement par des simulations sur Abaqus 3D.
- Le cinquième chapitre est consacré à l'application de nos H-modèles analytiques à des panneaux sandwichs composites en nid d'abeilles utilisés dans le domaine automobile. L'âme en nid d'abeilles est modélisée par plusieurs couches solides avec les propriétés mécaniques obtenues par les H-modèles. Plusieurs types de plaques sandwiches en nid d'abeilles en bords ouverts ou fermés sont étudiés. Les résultats de ces cas tests sont comparés avec les simulations numériques complètes des éléments de coque 3D sur Abaqus.
- Finalement, la thèse s'achève par une conclusion générale qui rappelle les travaux accomplis et les remarques pertinentes, et donne les perspectives envisagées à la suite de cette thèse.

Chapitre II

Modèle d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles en traction et Flexion

II.1. Rappel des théories d'élasticité et de plaque

II.1.1. Rappel de la théorie de l'élasticité

Le comportement élastique d'un matériau orthotrope est décrit soit par les constantes de rigidité C_{ij} , soit par les constantes de souplesse S_{ij} [1]. La loi de Hooke généralisée s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

et la matrice de souplesse s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Ces deux matrices sont symétriques et définies positives. La relation (2.2) peut être exprimée explicitement par les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

où E_1 , E_2 et E_3 sont les trois modules d'Young ; G_{12} , G_{13} et G_{23} sont les trois modules de cisaillements ; ν_{12} , ν_{13} et ν_{23} sont trois coefficients de Poisson. Les trois autres coefficients de Poisson sont déterminés à l'aide des relations suivantes :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Les constantes de rigidité peuvent être également exprimées par ces modules et coefficients de Poisson :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec:

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}.$$

L'énergie stockée dans un corps en raison de la déformation est appelée : énergie interne de déformation. L'énergie de déformation par unité de volume est appelée la densité d'énergie de déformation. La méthode énergétique est un outil très performant permettant

de traiter la géométrie et les conditions aux limites très complexes du nid d'abeilles dans la procédure d'homogénéisation. Dans cette étude, nous ne considérons que l'énergie stockée dans un solide élastique isotrope ou orthotrope. L'énergie interne de déformation exprimée en contraintes et déformations s'écrit comme suit :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dV \quad (2.6)$$

II.1.2. Rappel des théories de plaque

1) Théorie de plaque mince de Kirchhoff

La transformation du nid d'abeilles en un solide 3D homogénéisé implique beaucoup de paramètres couplés et augmente ainsi considérablement les difficultés de formulation de l'homogénéisation. Puisque la plaque sandwich en nid d'abeilles est soumise essentiellement à des flexions-torsion, il est plus simple et naturel de modéliser l'âme en nid d'abeilles par une plaque homogène orthotrope.

Une plaque est appelée mince si la longueur et la largeur de la plaque sont au moins 10 fois supérieures à son épaisseur. Pour une plaque mince, la théorie de plaque de Kirchhoff est souvent utilisée où :

- un segment droit et perpendiculaire à la surface moyenne reste droit et perpendiculaire à la surface moyenne après la déformation, cela revient à négliger les cisaillements transverses ;
- l'épaisseur est faible et les contraintes suivant l'épaisseur sont négligeables.

Sur la surface moyenne d'une plaque, on définit les axes x et y et l'axe z perpendiculaire à cette surface (Figure 2.1). On obtient alors les champs de déplacements et de déformations associés à la théorie de Kirchhoff comme suit :

$$\begin{cases} u_q = u - zW_{,x} \\ v_q = v - zW_{,y} \\ w_q = w \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{q,x} = u_{,x} - zW_{,xx} = u_{,x} - z\kappa_x \\ \varepsilon_y = v_{q,y} = v_{,y} - zW_{,yy} = v_{,y} - z\kappa_y \\ \gamma_{xy} = u_{q,y} + v_{q,x} = u_{,y} + v_{,x} - 2zW_{,xy} = u_{,y} + v_{,x} - z\kappa_{xy} \end{cases} \quad (2.8)$$

où u, v, w sont les déplacements d'un point p sur la surface moyenne ($x, y ; z=0$), u_q, v_q, w_q sont les déplacements d'un point q correspondant à p mais hors de la surface moyenne ($x, y ; z \neq 0$), κ_x, κ_y et κ_{xy} sont les courbures associées aux deux flexions et à la torsion.

La loi de Hooke pour une plaque mince sous les hypothèses de matériau isotrope et de contraintes planes s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} z \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Les efforts résultants sont définis par l'intégration des contraintes à travers l'épaisseur :

$$N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz ,$$

$$M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz , \quad (2.10)$$

$$T = \begin{Bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz$$

2) Théorie de plaque épaisse de Mindlin

Pour une plaque épaisse ou une plaque composite, les cisaillements transverses ne peuvent plus être négligés donc la théorie de Kirchhoff n'est plus valable. C'est la théorie de plaque épaisse de Mindlin qui doit être utilisée. Elle suppose qu'un segment droit et perpendiculaire à la surface moyenne reste toujours rectiligne mais n'est plus perpendiculaire à la surface moyenne après déformation. Cette hypothèse permet de prendre en compte les déformations de cisaillement transverse.

La théorie de Mindlin donne le champ de déplacements suivant :

$$\begin{cases} u_q = u + z\beta_x \\ v_q = v + z\beta_y \\ w_q = w \end{cases} \quad (2.11)$$

où β_x est l'angle de rotation de la normale de z vers x (ou l'angle de rotation autour de y : $\beta_x = \theta_y$), β_y est l'angle de rotation de la normale de z vers y (ou l'angle de rotation autour de $-x$: $\beta_y = -\theta_x$). Ainsi on obtient le champ de déformations suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{q,x} = u_{,x} + z\beta_{x,x} \\ \varepsilon_y = v_{q,y} = v_{,y} + z\beta_{y,y} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = u_{q,x} + v_{q,y} = u_{,y} + v_{,x} + z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = u_{q,z} + w_{q,x} = w_{,x} + \beta_x \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = v_{q,z} + w_{q,y} = w_{,y} + \beta_y \\ \varepsilon_z = w_{q,z} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où les trois premières expressions sont les déformations planes et les 4^{ème} et 5^{ème} expressions sont les déformations de cisaillement transverse.

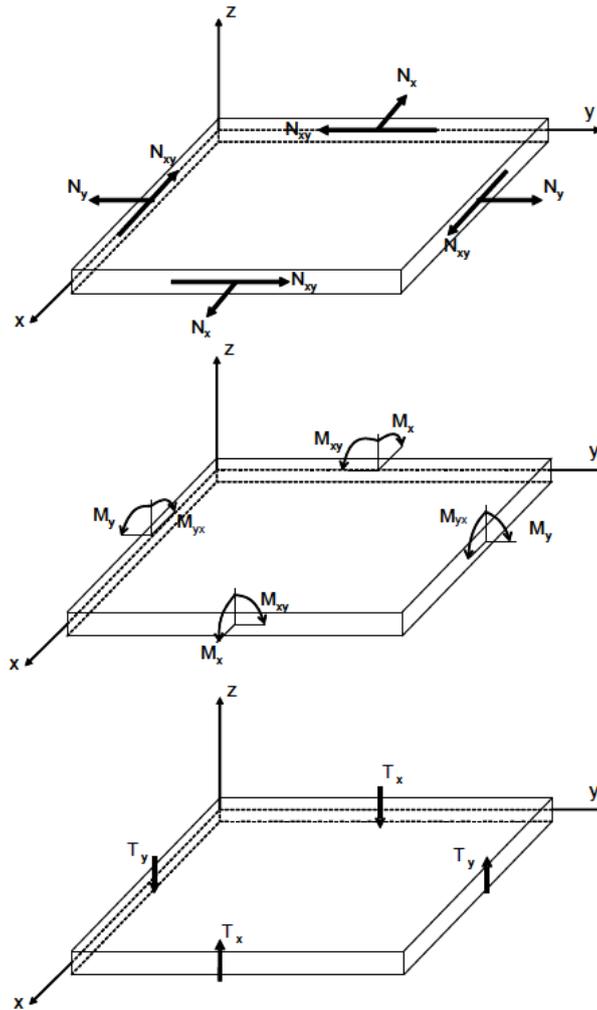


Figure 2.1. Définition des efforts de membrane, moments de flexions - torsion et efforts de cisaillement transverse.

Les trois déformations planes peuvent être décomposées en parties de membrane et de flexion :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_m\} + z\{\kappa\} \quad (2.13)$$

où $\{\kappa\}$ est le vecteur des courbures.

Les lois de comportement pour les contraintes dans le plan et hors du plan d'une plaque orthotrope sont données par :

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} = [Q] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_x & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{matrix} \right\} = [C] \left\{ \begin{matrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} \quad (2.15)$$

où la matrice $[Q]$ est symétrique.

Les efforts de membrane, les moments de flexion et de torsion et les efforts de cisaillement transverse sont obtenus par une intégration des contraintes suivant l'épaisseur (voir Eq 2.10 et Figure 2.1).

Pour l'homogénéisation du nid d'abeilles, nous utiliserons la théorie de Mindlin avec un matériau orthotrope.

II.2. Formulation de l'homogénéisation de la rigidité de traction

II.2.1. Choix d'un volume élémentaire représentatif pour l'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation consiste à remplacer un matériau réel non homogène par un matériau fictif homogène avec des propriétés macroscopique équivalentes. Pour effectuer l'homogénéisation, on doit définir un Volume Élémentaire Représentatif (VER) du matériau. Ainsi, le résultat de l'homogénéisation sur ce volume représentera le comportement de tout le matériau.

Le VER doit satisfaire plusieurs conditions :

- il est suffisamment grand par rapport à la taille des hétérogénéités pour être représentatif du matériau et être statistiquement équivalent d'une zone à l'autre;

- il est suffisamment petit par rapport aux dimensions de la structure considérée pour qu'il puisse être considéré en état de sollicitations ou de déformations uniformes.

Dans le cas d'une structure en nid d'abeilles, le VER peut être choisi comme dans la Figure 2.2.

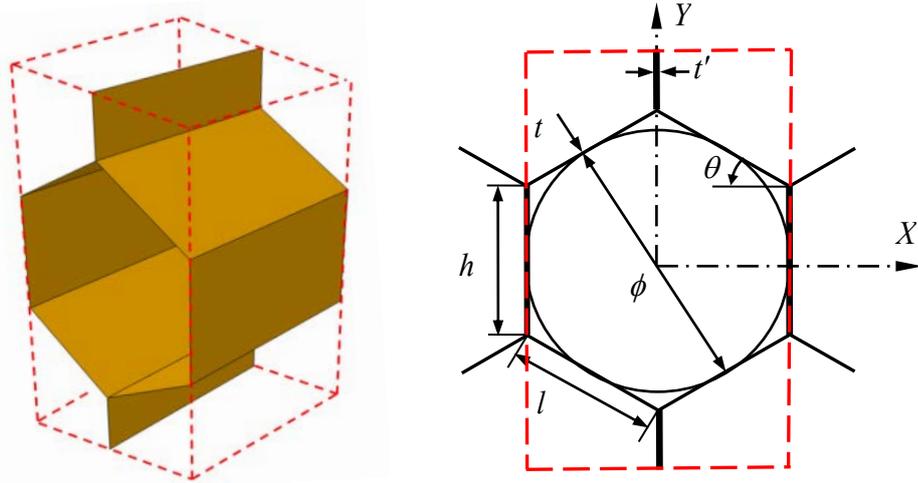


Figure 2. 2. Volume élémentaire représentatif du nid d'abeilles.

Dans la théorie classique de l'homogénéisation [2], les propriétés de traction sont déterminées sur une cellule seule sans l'effet des peaux et les propriétés ne dépendent que du comportement de flexion des parois minces du nid d'abeilles. Dans la présente étude, les peaux sont supposées très rigides par rapport aux parois du nid d'abeilles, donc les déformations des parois du nid d'abeilles sont définies par celles des peaux. Ainsi, l'effet de traction ou compression des parois minces est dominant par rapport à leur effet de flexion. En conséquence, pour un nid d'abeilles hexagonal régulier ($t' = 2t$ et $h = l$, Fig. 2.2), les modules d'Young de traction sont plutôt proportionnelle à $\frac{t}{l}$ (parois en traction) au lieu de

$\left(\frac{t}{l}\right)^3$ (parois en flexion, dans [2]). Si on prend par exemple $t = 0,19$ mm et $l = 4$ mm, les modules de traction avec l'effet des peaux sont 443 fois plus grands que ceux sans effet de peaux !

II.2.2. Méthodologie pour déterminer les modules du solide orthotrope homogénéisé équivalent à une cellule de nid d'abeilles en traction

La loi de comportement orthotrope du solide en traction est exprimée comme suit (les quantités homogénéisées sont repérées par *) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X^* \\ \sigma_Y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_X^* & Q_{XY}^* \\ Q_{XY}^* & Q_Y^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Dans la matrice d'élasticité $[Q^*]$, les coefficients de Poisson sont déjà inclus dans les trois modules à déterminer (Q_X^* , Q_Y^* , et Q_{XY}^* , voir Eq. 2.14). On note que dans la plupart

des études d'homogénéisation du nid d'abeilles, les trois modules E_X^* , E_Y^* , et E_{XY}^* sont déterminés séparément sans tenir compte du couplage avec les coefficients de Poisson.

L'énergie interne de déformation du solide homogénéisé Π_{int}^* peut être obtenue en utilisant l'équation (2.17) qui doit être égale à celle du nid d'abeilles Π_{int} :

$$\Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} \int_{\bar{V}} \langle \varepsilon \rangle [Q^*] \{ \varepsilon \} d\bar{V} = \Pi_{\text{int}} \quad (2.17)$$

En raison de la symétrie, on ne prend que 1/8 du VER (Fig. 2.2), les équations (2.16) et (2.17) donnent :

$$\varepsilon_X^2 Q_X^* + 2\varepsilon_X \varepsilon_Y Q_{XY}^* + \varepsilon_Y^2 Q_Y^* = \frac{2\Pi_{\text{int}}}{\bar{V}} \quad (2.18)$$

où $\bar{V} = Ab/2$ est le 1/8 du volume du VER, $A = l \cos \theta (h + l \sin \theta)$ est la surface d'un quart du VER d'un nid d'abeilles, b est la hauteur (ou l'épaisseur) de l'âme, ε_X et ε_Y représentent le champ de déformation imposé par les peaux.

Afin d'obtenir les trois modules dans l'équation (2.18), nous imposons trois champs de déformations différents (ε_X , ε_Y) et nous calculons les énergies internes de déformation Π_{int} correspondantes. Ensuite, la résolution linéaire du système des trois équations obtenues avec Eq. (2.18) permet de déterminer les trois modules : Q_X^* , Q_Y^* , Q_{XY}^* . Par exemple, nous pouvons prendre les trois vecteurs de déformations suivants : $\langle \varepsilon_X \ \varepsilon_Y \rangle^T = \langle 0.01 \ 0 \rangle^T$, $\langle 0 \ 0.01 \rangle^T$ et $\langle 0.01 \ 0.01 \rangle^T$. Il est à noter que les modules obtenus sont indépendants du choix des trois vecteurs de déformations.

En utilisant les Q_X^* , Q_Y^* , Q_{XY}^* obtenus, on peut calculer les modules d'Young et les coefficients de Poisson comme suit:

$$\nu_{YX}^* = \frac{Q_{XY}^*}{Q_X^*} ; \quad \nu_{XY}^* = \frac{Q_{XY}^*}{Q_Y^*} ; \quad E_X^* = Q_X^* (1 - \nu_{XY}^* \nu_{YX}^*) ; \quad E_Y^* = Q_Y^* (1 - \nu_{XY}^* \nu_{YX}^*) \quad (2.19)$$

II.2.3. Détermination des bornes supérieure et inférieure de traction par la théorie de membrane

Tous les points matériels sur l'interface entre les peaux et l'âme sont entraînés par les peaux, donnant les mêmes déformations que celles des peaux. Lorsque la hauteur du nid

d'abeilles (Nida) tend vers zéro, tous les points matériels des parois du Nida se comportent comme les points de l'interface ; ainsi nous pouvons obtenir la valeur maximale de l'énergie interne de déformation, conduisant aux bornes supérieures des modules de traction. Q_X^* et Q_Y^* atteignent leurs valeurs maximales, mais Q_{XY}^* atteint sa valeur minimale qui est quand-même appelée borne supérieure dans le sens de l'énergie globale maximale.

Lorsque la hauteur de l'âme tend vers l'infini, il n'y a pratiquement plus l'effet de peaux sur les parois du nid d'abeilles, conduisant à la valeur minimale de l'énergie interne de déformation en raison de la redistribution des contraintes entre les parois du Nida, donnant ainsi les bornes inférieures des modules de traction. Q_X^* et Q_Y^* atteignent leurs valeurs minimales, mais Q_{XY}^* atteint sa valeur maximale qui est quand-même appelée borne inférieure dans le sens de l'énergie globale minimale.

1) Borne supérieure pour les petites hauteurs de l'âme du Nida

Si la hauteur du nid d'abeilles est très petite, tous les points matériels sur les parois en nid d'abeilles sont supposés se comporter comme les points sur les peaux ; ils ont donc les mêmes déformations. Pour un champ de déformations uniforme des peaux $\langle \varepsilon_X \ \varepsilon_Y \rangle^T$, la théorie de membrane est adoptée en raison de la traction dominante dans les parois du Nida.

- Traction suivant Y :

On impose un déplacement \bar{v} suivant Y sur la partie supérieure du Nida (Fig. 2.3), cela donne les déformations des peaux suivantes :

$$\varepsilon_Y = \frac{\bar{v}}{h+l \sin \theta}, \quad \varepsilon_X = -\nu \frac{\bar{v}}{h+l \sin \theta} \quad (2.20)$$

où ν est le coefficient de Poisson des peaux. Les déplacements du point F par rapport au point D sont calculés comme suit :

$$v_{DF} = \frac{\bar{v} l \sin \theta}{h+l \sin \theta}, \quad u_{DF} = -\frac{\nu \bar{v} l \cos \theta}{h+l \sin \theta} \quad (2.21)$$

Ainsi, la déformation normale sur la paroi inclinée est définie par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_l &= \frac{1}{l}(u_{DF} \cos \theta + v_{DF} \sin \theta) = -\frac{\bar{v}}{h+l \sin \theta} \cos^2 \theta + \frac{\bar{v} \sin^2 \theta}{h+l \sin \theta} \\ &= \frac{\bar{v}}{h+l \sin \theta} (\sin^2 \theta - \nu \cos^2 \theta) = \varepsilon_Y (\sin^2 \theta - \nu \cos^2 \theta)\end{aligned}\quad (2.22)$$

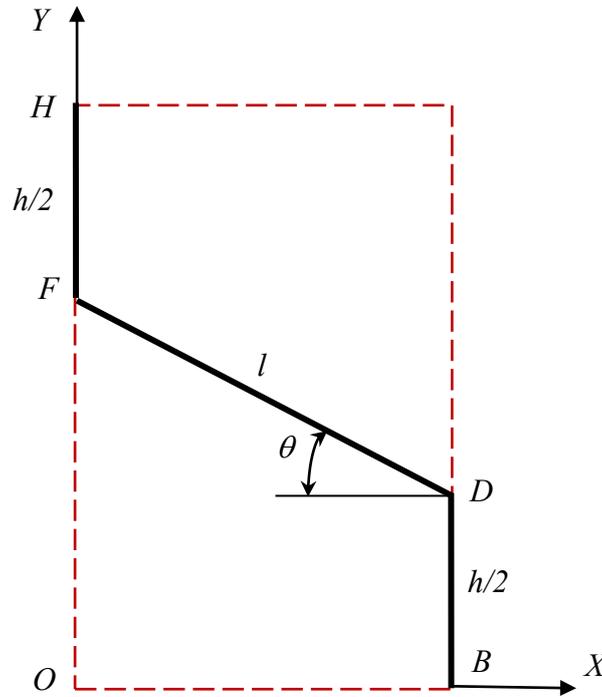


Figure 2. 3. Traction suivant Y : déformation sur la paroi inclinée ;

- Traction suivant X :

On impose un déplacement \bar{u} suivant X sur la partie droite du Nida, ainsi on obtient la déformation suivant X :

$$\varepsilon_X = \frac{\bar{u}}{l \cos \theta} \quad (2.23)$$

Avec l'effet de Poisson, on a :

$$\varepsilon_Y = -\nu \varepsilon_X \quad \text{ou encore} \quad \frac{\bar{v}}{l \sin \theta} = -\nu \frac{\bar{u}}{l \cos \theta} \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \bar{v} = -\nu \bar{u} \tan \theta$$

Le déplacement suivant la paroi inclinée est donné par :

$$s_l = \bar{u} \cos \theta + \bar{v} \sin \theta \quad (2.25)$$

Ainsi, la déformation suivant l est calculée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{\bar{u} \cos \theta + \bar{v} \sin \theta}{l} = \frac{\bar{u}}{l} (\cos \theta - \nu \tan \theta \sin \theta) \\ &= \frac{\bar{u}}{l \cos \theta} (\cos \theta - \nu \tan \theta \sin \theta) = \varepsilon_x (\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (2.26)$$

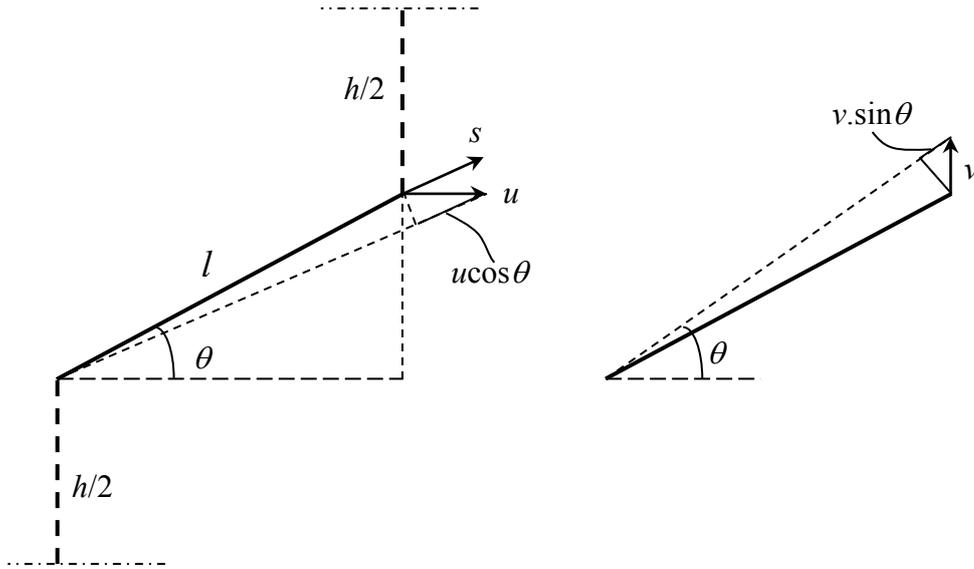


Figure 2.4. Traction suivant X : déformation sur la paroi inclinée.

- Tractions suivant X et Y :

Dans le cas général, on impose un état de déformations $\langle \varepsilon_x \ \varepsilon_y \rangle^T$ sur les peaux sans se soucier de l'effet de Poisson (ou l'effet de Poisson est déjà inclus donnant $\nu=0$), ceci conduit à la déformation normale suivante le long de la paroi inclinée :

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta \quad (2.27)$$

L'énergie interne de déformation dans le 1/8 VER est composée de l'énergie sur les parois verticales et celle sur la paroi inclinée (Fig. 2.3) :

$$\Pi_{\text{int}}^{\text{sup}} = \frac{b}{4} \frac{E}{1-\nu^2} \left[t_1 h (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y) + t_2 l (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_l^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_l) \right] \quad (2.28)$$

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson des parois du nid d'abeilles, les épaisseurs des parois sont $t_1 = t'/2$, $t_2 = t$, les parois verticales sont suivant Y donnant $\varepsilon_y = \varepsilon_Y$, la déformation normale ε_x suivant la hauteur de l'âme est identique dans les parois verticales et dans les parois inclinées à cause de la contrainte imposée par les peaux très rigides.

La déformation normale inconnue ε_x peut être obtenue en minimisant l'énergie interne de déformation. La borne supérieure de l'énergie interne de déformation de la structure dans l'équation (2.28) peut être calculée avec ε_x et ε_Y imposées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}^{\text{sup}}}{\partial \varepsilon_x} = 0 &\Rightarrow \frac{Eb}{4(1-\nu^2)} \left[t_1 h (2\varepsilon_x + 2\nu\varepsilon_y) + t_2 l (2\varepsilon_x + 2\nu\varepsilon_l) \right] = 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_x &= -\nu \frac{t_1 h \varepsilon_Y + t_2 l \varepsilon_l}{t_1 h + t_2 l} \end{aligned} \quad (2.29)$$

En substituant Eq. (2.29) dans (2.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^{\text{sup}} &= \frac{Eb}{4(1-\nu^2)} \left[t_1 h (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x \varepsilon_y) + t_2 l (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_l^2 + 2\nu\varepsilon_x \varepsilon_l) \right] \\ &= \frac{Eb}{4(1-\nu^2)} \left[(t_1 h + t_2 l) \varepsilon_x^2 + 2\nu(t_1 h \varepsilon_y + t_2 l \varepsilon_l) \varepsilon_x + t_1 h \varepsilon_y^2 + t_2 l \varepsilon_l^2 \right] \\ &= \frac{Eb}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu^2 (t_1 h \varepsilon_y + t_2 l \varepsilon_l)^2}{t_1 h + t_2 l} - \frac{2\nu^2 (t_1 h \varepsilon_y + t_2 l \varepsilon_l)^2}{t_1 h + t_2 l} + t_1 h \varepsilon_y^2 + t_2 l \varepsilon_l^2 \right] \\ \Rightarrow \Pi_{\text{int}}^{\text{sup}} &= \frac{Eb}{4(1-\nu^2)} \frac{(t_1 h \varepsilon_y^2 + t_2 l \varepsilon_l^2)(t_1 h + t_2 l) - \nu^2 (t_1 h \varepsilon_y + t_2 l \varepsilon_l)^2}{t_1 h + t_2 l} \end{aligned} \quad (2.30)$$

En substituant Eq. (2.30) dans (2.18), l'équation suivante est obtenue :

$$\varepsilon_x^2 Q_X^* + 2\varepsilon_x \varepsilon_Y Q_{XY}^* + \varepsilon_Y^2 Q_Y^* = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{(t_1 h \varepsilon_y^2 + t_2 l \varepsilon_l^2)(t_1 h + t_2 l) - \nu^2 (t_1 h \varepsilon_y + t_2 l \varepsilon_l)^2}{A(t_1 h + t_2 l)} \quad (2.31)$$

Les trois modules élastiques Q_X^* , Q_{XY}^* , Q_Y^* sont déterminés en comparant les coefficients de ε_x^2 , $2\varepsilon_x \varepsilon_Y$ et ε_Y^2 sur les deux côtés de l'équation (2.31) en utilisant l'équation (2.27). Ainsi, les bornes supérieures des trois modules du solide homogénéisé sont obtenues comme suit :

$$\begin{cases} Q_Y^* = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{(t_1 h + t_2 l \sin^4 \theta)(t_1 h + t_2 l) - \nu^2 (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta)^2}{A(t_1 h + t_2 l)} \\ Q_X^* = \frac{E}{1-\nu^2} t_2 l \cos^4 \theta \frac{(t_1 h + t_2 l) - \nu^2 t_2 l}{A(t_1 h + t_2 l)} \\ Q_{XY}^* = \frac{E}{1-\nu^2} t_2 l \cos^2 \theta \frac{(t_1 h + t_2 l) \sin^2 \theta - \nu^2 (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta)}{A(t_1 h + t_2 l)} \end{cases} \quad (2.32)$$

Prenant un nid d'abeilles de forme hexagonal régulier avec $t_1 = t_2 = t$ et $h = l$, l'équation (2.32) devient :

$$\varepsilon_X^2 Q_X^* + 2\varepsilon_X \varepsilon_Y Q_{XY}^* + \varepsilon_Y^2 Q_Y^* = \frac{2}{V} \Pi_{\text{int}}^{\text{sup}} = \frac{t}{l} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{2(\varepsilon_Y^2 + \varepsilon_X^2) - \nu^2 (\varepsilon_Y + \varepsilon_X)^2}{2 \cos \theta (1 + \sin \theta)} \quad (2.33)$$

On a les bornes supérieures des trois modules pour un nid d'abeilles hexagonal régulier comme suit :

$$\begin{cases} Q_Y^* = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l}\right) \frac{2(1 + \sin^4 \theta) - \nu^2 (1 + \sin^2 \theta)^2}{2 \cos \theta (1 + \sin \theta)} \\ Q_X^* = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l}\right) \frac{\cos^4 \theta + (2 - \nu^2)}{2 \cos \theta (1 + \sin \theta)} \\ Q_{XY}^* = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l}\right) \frac{\cos^2 \theta [2 \sin^2 \theta - \nu^2 (1 + \sin^2 \theta)]}{2 \cos \theta (1 + \sin \theta)} \end{cases} \quad (2.34)$$

Les équations ci-dessus montrent que les trois modules élastiques sont proportionnels au module d'Young E et au rapport de l'épaisseur sur la longueur des parois $\frac{t}{l}$, et que les trois bornes supérieures sont indépendantes de la hauteur du nid d'abeilles b .

2) Borne inférieure pour les très grandes hauteurs de l'âme

Lorsque la hauteur de l'âme du Nida tend vers l'infini, les peaux contraignent uniquement les déplacements des points du Nida sur les bordures du VER (lignes pointillées dans Fig.2.6) et sur l'interface avec les peaux. La plupart des points matériels sur les parois se comportent sans la contrainte des peaux, conduisant à une redistribution des déformations et des contraintes entre les parois verticales et les parois inclinées, donnant ainsi la borne inférieure de l'énergie interne de déformation. Pour étudier la

redistribution des contraintes entre les parois, les deux demi-parois verticales sont regroupées pour la simplicité (Fig. 2.5), un champ de déformations (ε_x et ε_y) imposé par les peaux conduit aux déplacements suivants :

$$\begin{cases} V_0 = \varepsilon_y (h + l \sin \theta) \\ U_0 = \varepsilon_x l \cos \theta \end{cases} \quad (2.35)$$

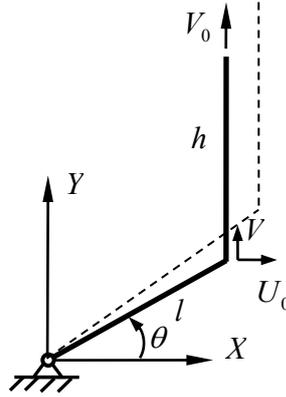


Figure 2.5. Déplacements et redistribution des contraintes entre parois verticale et inclinée.

On suppose que la redistribution des contraintes donne un déplacement vertical V à l'intersection des deux parois (Fig. 2.5). Ainsi, les déformations dans les parois verticale et inclinée sont données par :

$$\varepsilon_{yh} = \varepsilon_y - \frac{V}{h}; \quad \varepsilon_{yl} = \varepsilon_l + \frac{V \sin \theta}{l} \quad (2.36)$$

Dans le cas d'une âme très épaisse, une expression similaire à l'équation (2.28) est utilisée pour l'énergie interne de déformation dans le 1/8 VER:

$$\Pi_{\text{int}}^{\text{inf}} = \frac{Eb}{4(1-\nu^2)} \left[t_1 h (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{yh}^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_{yh}) + t_2 l (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{yl}^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_{yl}) \right] \quad (2.37)$$

En substituant Eq. (2.36) dans (2.37), l'énergie interne de déformation peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^{\text{inf}} = \frac{Eb}{4(1-\nu^2)} & \left\{ t_1 h \left[\varepsilon_x^2 + (\varepsilon_y - V/h)^2 + 2\nu \varepsilon_x (\varepsilon_y - V/h) \right] \right. \\ & \left. + t_2 l \left[\varepsilon_x^2 + (\varepsilon_l + V \sin \theta / l)^2 + 2\nu \varepsilon_x (\varepsilon_l + V \sin \theta / l) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Les deux variables inconnues ε_x et V dans l'équation (2.38) sont obtenues par la minimisation de l'énergie interne de déformation :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}^{\text{inf}}}{\partial \varepsilon_x} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}^{\text{inf}}}{\partial V} = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\frac{V}{\varphi_L} \left[(t_1 h \varepsilon_Y + t_2 l \varepsilon_l) \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) - (t_1 \varepsilon_Y - t_2 \sin \theta \varepsilon_l) (t_1 - t_2 \sin \theta) \right] \\ V = \frac{1}{\varphi_L} \left[(t_1 h + t_2 l) (t_1 \varepsilon_Y - t_2 \sin \theta \varepsilon_l) - v^2 (t_1 - t_2 \sin \theta) (t_1 h \varepsilon_Y + t_2 l \varepsilon_l) \right] \end{cases} \quad (2.40)$$

avec $\varphi_L = (t_1 h + t_2 l) \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) - v^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2$

En substituant l'équation (2.40) dans (2.38), on obtient l'énergie interne de déformation. En utilisant l'équation (2.18) et la même méthodologie que celle pour les bornes supérieures des modules, les bornes inférieures de Q_X^* , Q_{XY}^* , et Q_Y^* peuvent être calculées :

$$\begin{aligned} Q_X^* = \frac{1}{A} \frac{E}{1-v^2} & \left[4(t_1 h + t_2 l) \xi_{10}^2 + (t_2 l \cos^4 \theta) + 2\eta_{10} (t_2 \cos^2 \theta \sin \theta) \right. \\ & \left. + \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) \eta_{10}^2 + 4v \xi_{10} (t_2 l \cos^2 \theta) - 4v \xi_{10} \eta_{10} (t_1 - t_2 \sin \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.41a)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= -\frac{v}{2} t_2 \cos^2 \theta \frac{l\varphi + (t_1 - t_2 \sin \theta) \sin \theta}{(t_1 h + t_2 l) \varphi - v^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2} \\ \eta_{10} &= -t_2 \cos^2 \theta \frac{v^2 (t_1 - t_2 \sin \theta) l + \sin \theta (t_1 h + t_2 l)}{(t_1 h + t_2 l) \varphi - v^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_Y^* = \frac{1}{A} \frac{E}{1-v^2} & \left[4(t_1 h + t_2 l) \xi_{01}^2 + (t_1 h + t_2 l \sin^4 \theta) - 2\eta_{01} (t_1 \varepsilon_Y - t_2 \sin^2 \theta \sin \theta) \right. \\ & \left. + \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) \eta_{01}^2 + 4v \xi_{01} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) - 4v \xi_{01} \eta_{01} (t_1 - t_2 \sin \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.41b)$$

avec

$$\xi_{01} = \frac{\nu - (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) \varphi + (t_1 - t_2 \sin \theta)(t_1 - t_2 \sin^3 \theta)}{2 (t_1 h + t_2 l) \varphi - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2}$$

$$\eta_{01} = \frac{-\nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)(t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) + (t_1 - t_2 \sin^3 \theta)(t_1 h + t_2 l)}{(t_1 h + t_2 l) \varphi - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2}$$

et

$$\begin{aligned} Q_{XY}^* = \frac{1}{2A} \frac{E}{1-\nu^2} & \left[4(t_1 h + t_2 l) \xi_{11}^2 + (t_1 h + t_2 l) - 2\eta_{11} (t_1 - t_2 \sin \theta) \right. \\ & \left. + \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) \eta_{11}^2 + 4\nu \xi_{11} (t_1 h + t_2 l) - 4\nu \xi_{11} \eta_{11} (t_1 - t_2 \sin \theta) \right] - \frac{Q_X^* + Q_Y^*}{2} \end{aligned} \quad (2.41c)$$

avec

$$\xi_{11} = \frac{\nu - (t_1 h + t_2 l) \varphi + (t_1 - t_2 \sin \theta)^2}{2 (t_1 h + t_2 l) \varphi - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2}$$

$$\eta_{11} = \frac{(1 - \nu^2)(t_1 - t_2 \sin \theta)(t_1 h + t_2 l)}{(t_1 h + t_2 l) \varphi - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2}$$

Les expressions des modules pour un nid d'abeilles hexagonal régulier sont comme suit :

$$\begin{aligned} Q_X^* = \frac{1}{A} \frac{E}{1-\nu^2} & \left[8tl \xi_{10}^2 + tl \cos^4 \theta + 2t\eta_{10} \cos^2 \theta \sin \theta \right. \\ & \left. + \frac{t}{l} (1 + \sin^2 \theta) \eta_{10}^2 + 4tl\nu \xi_{10} \cos^2 \theta - 4t\nu \xi_{10} \eta_{10} (1 - \sin \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.42a)$$

avec

$$\xi_{10} = -\frac{\nu}{2} \cos^2 \theta \frac{l\varphi + t(1 - \sin \theta) \sin \theta}{2lt\varphi - t\nu^2 (1 - \sin \theta)^2}$$

$$\eta_{10} = -tl \cos^2 \theta \frac{\nu^2 (1 - \sin \theta) l + 2 \sin \theta}{2l\varphi - t\nu^2 (1 - \sin \theta)^2}$$

et

$$\begin{aligned} Q_Y^* = \frac{1}{A} \frac{E}{1-\nu^2} & \left[8tl \xi_{01}^2 + tl (1 + \sin^4 \theta) - 2\eta_{01} (\varepsilon_Y - \sin^3 \theta) \right. \\ & \left. + \frac{t}{l} (1 + \sin^2 \theta) \eta_{01}^2 + 4tl\nu \xi_{01} (1 + \sin^2 \theta) - 4t\nu \xi_{01} \eta_{01} (1 - \sin \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.42b)$$

avec

$$\xi_{01} = \frac{\nu - l(1 + \sin^2 \theta)\varphi + t(1 - \sin \theta)(1 - \sin^3 \theta)}{2(2l\varphi - tv^2(1 - \sin \theta)^2)}$$

$$\eta_{01} = \frac{-lv^2(1 - \sin \theta)(1 + \sin^2 \theta) + 2tl(1 - \sin^3 \theta)}{2l\varphi - tv^2(1 - \sin \theta)^2}$$

et

$$\begin{aligned} Q_{XY}^* = \frac{1}{2A} \frac{E}{1 - \nu^2} & \left[8tl\xi_{11}^2 + 2tl - 2t\eta_{11}(1 - \sin \theta) \right. \\ & \left. + \frac{t}{l}(1 + \sin^2 \theta)\eta_{11}^2 + 8tl\nu\xi_{11} - 4t\nu\xi_{11}\eta_{11}(1 - \sin \theta) \right] - \frac{Q_X^* + Q_Y^*}{2} \end{aligned} \quad (2.42c)$$

avec

$$\xi_{11} = \frac{\nu - 2l\varphi + t(1 - \sin \theta)^2}{4(l\varphi - tv^2(1 - \sin \theta)^2)}$$

$$\eta_{11} = \frac{2lt(1 - \nu^2)(1 - \sin \theta)}{2l\varphi - tv^2(t_1 - t_2 \sin \theta)^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{h} + \frac{1}{l} \sin^2 \theta$$

Il est plus pratique de calculer numériquement les trois modules. En imposant trois champs de déformations non colinéaires, les trois énergies internes de déformation peuvent être calculées. A l'aide de l'équation (2.18), on peut établir un système de trois équations dont la résolution permet d'obtenir les trois modules d'élasticité qui sont indépendants des trois champs de déformations utilisés.

II.2.4. Formulation du modèle d'homogénéisation pour l'âme nid d'abeilles en traction

Dans la section II.2.3, la hauteur du nid d'abeilles est supposée soit très petite soit très grande pour déterminer les bornes supérieures et inférieures des modules de traction. Nous allons étudier comment ces modules varient en fonction de la hauteur de l'âme et comment modéliser la redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles.

1) Observation du champ de déplacements sur les résultats numériques

Un modèle numérique est réalisé sur 1/8 VER du nid d'abeilles. Les parois du nid d'abeilles sont discrétisées en éléments de coque 'S4' d'Abaqus. Les conditions aux limites

sont imposées strictement comme dans une plaque sandwich avec deux peaux très rigides ayant un champ de déformations ε_x et ε_y :

- sur les plans XZ et YZ (Fig. 2.6), les conditions de symétrie sont imposées;
- sur le plan $ABDC$, le déplacement horizontal est imposé par les peaux : $U = \varepsilon_x l \cos \theta$;
- sur le segment supérieur de GH , le déplacement vertical est imposé par les peaux : $V = \varepsilon_y (h + l \sin \theta)$;
- sur le segment $BDFH$ ($Z = -b/2$), un champ de déplacements est imposé par les peaux : $U = \varepsilon_x X$ et $V = \varepsilon_y Y$.

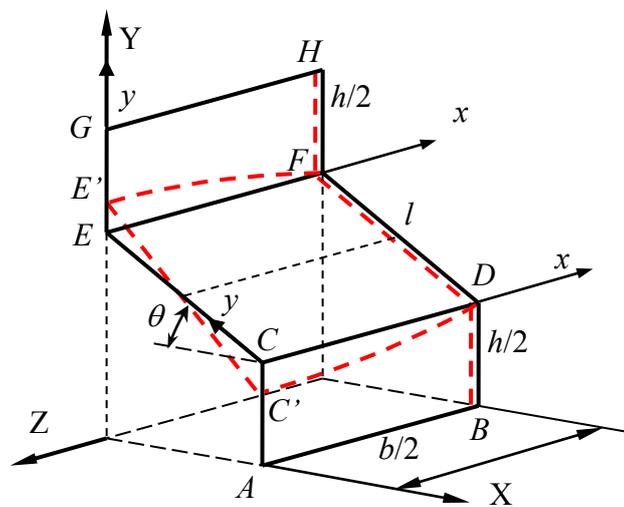


Figure 2.6. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes en traction.

La figure 2.7 présente la distribution du déplacement vertical U_2 sur 1/4 de VER et la courbe du déplacement U_2 le long du segment $2 \times CD$ (Fig. 2.6). On observe un champ de déplacements additionnels dû à la redistribution des contraintes entre les parois verticales et inclinée. Ce champ de déplacements additionnels peut être décrit par une série de fonctions trigonométriques satisfaisant les conditions aux limites. La distribution du déplacement U_3 suivant Z est illustrée dans la Fig. 2.8. La courbe de U_3 le long du segment $2 \times CD$ (Fig. 2.6) montre qu'une fonction linéaire est suffisante pour décrire la variation de U_3 le long de la hauteur de l'âme.

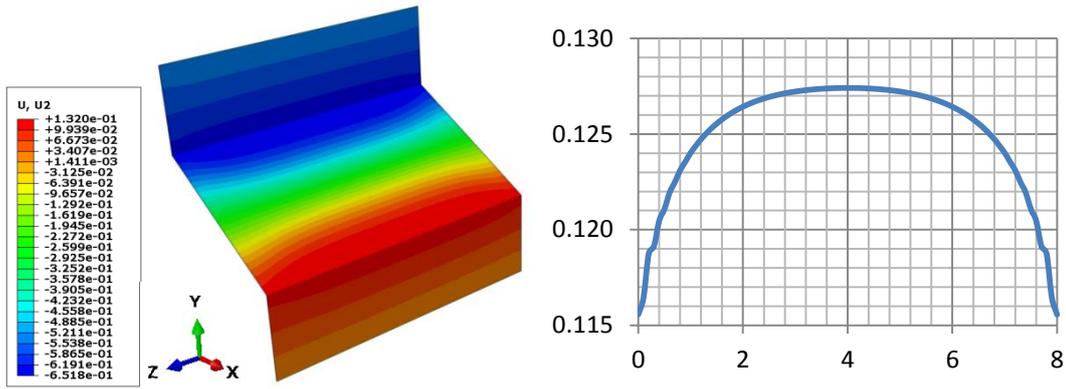


Figure 2.7. Distribution du déplacement suivant Y le long de la hauteur de l'âme.

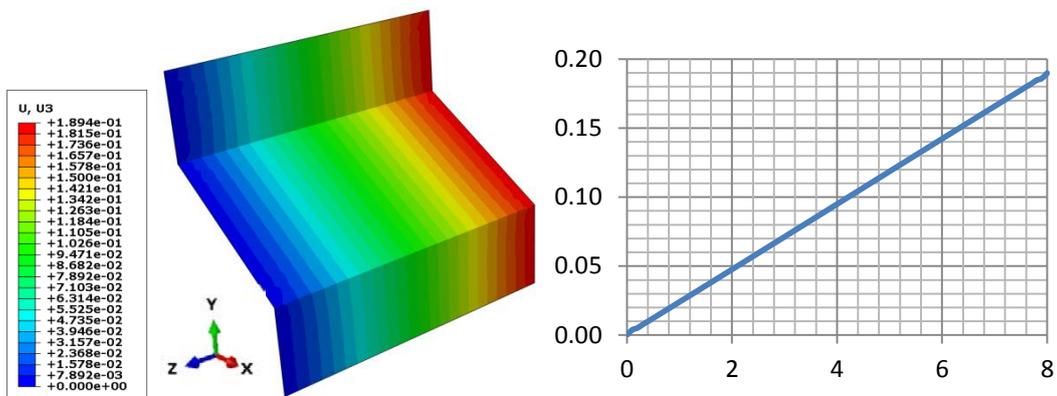


Figure 2.8. Distribution du déplacement suivant Z le long de la hauteur de l'âme.

2) Champs de déplacements additionnels et champ de déformations

- *Champs de déplacements et de déformations dans la paroi verticale supérieure*

Selon les observations ci-dessus et les conditions aux limites des parois du nid d'abeilles, le champ de déplacements additionnels (en plus du champ de déplacements basiques imposé par les peaux) dans les repères locaux xy (Fig. 2.6) est proposé comme suit :

$$\begin{cases} u_h = a_1 \frac{2x}{b} \\ v_h = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \cos \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{h} \quad (m = 2i-1 ; n = 2j-1 ; k = N(i-1) + j+1) \end{cases} \quad (2.43)$$

Dans l'expression ci-dessus pour v_h , le nombre de termes suivant x et y peuvent être différents. Nos expériences numériques ont montré qu'une dizaine de termes suivant

chaque direction sont suffisants pour obtenir une bonne précision. En incluant les déformations basiques imposées par les peaux, les déformations totales dans le repère local xy sont obtenues comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xh} = \frac{\partial u_h}{\partial x} = \frac{2}{b} a_1 \\ \varepsilon_{yh} = \varepsilon_Y + \frac{\partial v_h}{\partial y} = \varepsilon_Y - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{n\pi}{h} \cos \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{h} \\ \gamma_{xyh} = \frac{\partial u_h}{\partial y} + \frac{\partial v_h}{\partial x} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{m\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{h} \end{cases} \quad (2.44)$$

- *Champs de déplacements et de déformations dans la moitié de la paroi inclinée*

Les déplacements additionnels sur CD ont les mêmes valeurs, mais avec un sens opposée par rapport aux déplacements additionnels sur EF ($\overline{CC'} = -\overline{EE'}$, Fig. 2.6), et doivent être projetés sur le repère local de la paroi inclinée. Le déplacement u et la déformation ε_x suivant la hauteur de l'âme sont les mêmes que ceux des parois verticales. Ainsi, le champ de déplacements additionnels et le champ de déformations peuvent être définis comme suit :

- Le champ de déplacements additionnels :

$$\begin{cases} u_l = a_1 \frac{2x}{b} & (m = 2i - 1 ; n = 2j - 1 ; k = N(i - 1) + j + 1) \\ v_l = -\sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \cos \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{h} \end{cases} \quad (2.45)$$

- Le champ de déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xl} = \frac{\partial u_l}{\partial x} = \frac{2}{b} a_1 \\ \varepsilon_{yl} = \varepsilon_l + \frac{\partial v_l}{\partial y} = \varepsilon_l + \sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{n\pi}{l} \cos \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{l} \\ \gamma_{xyl} = \frac{\partial u_l}{\partial y} + \frac{\partial v_l}{\partial x} = \sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{m\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{l} \end{cases} \quad (2.46)$$

avec $\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta$

3) Energie interne de déformation sur 1/8 VER du nid d'abeilles

L'énergie interne de déformation dans les deux parois verticales et la paroi inclinée du 1/8 VER du nid d'abeilles peut être calculée en utilisant les équations (2.44) et (2.46) :

- L'énergie interne de déformation dans la paroi verticale supérieure :

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{int-h}} &= \frac{1}{2} t_1 \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + G\gamma_{xy}^2 \right] dydx \\ &= \frac{1}{2} t_1 \frac{E}{1-\nu^2} (A_1 + B_1 + 2\nu C_1) + t_1 G D_1\end{aligned}\quad (2.47)$$

avec

$$A_1 = \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \varepsilon_x^2 dydx = \frac{h}{b} a_1^2$$

$$B_1 = \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \varepsilon_y^2 dydx = \frac{bh}{4} \varepsilon_y^2 + 2\varepsilon_y \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{b}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{16} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k^2 \frac{n^2 \pi^2 b}{h}$$

$$C_1 = \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \varepsilon_x \varepsilon_y dydx = \frac{h}{2} a_1 \varepsilon_y - 2a_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$D_1 = \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \gamma_{xy}^2 dydx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k^2 \frac{m^2 \pi^2 h}{16b}$$

- L'énergie interne de déformation dans la moitié de la paroi inclinée :

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{int-l}} &= \frac{1}{2} t_2 \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + G\gamma_{xy}^2 \right] dydx \\ &= \frac{1}{2} t_2 \frac{E}{1-\nu^2} (A_2 + B_2 + 2\nu C_2) + t_2 G D_2\end{aligned}\quad (2.48)$$

avec

$$A_2 = \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \varepsilon_x^2 dydx = \frac{l}{b} a_1^2$$

$$B_2 = \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \varepsilon_y^2 dydx = \frac{bl}{4} \varepsilon_l^2 - 2\varepsilon_l \sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{b}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{16} \sin^2 \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k^2 \frac{n^2 \pi^2 b}{l}$$

$$C_2 = \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \varepsilon_x \varepsilon_y dydx = \frac{l}{2} a_1 \varepsilon_l + 2a_1 \sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$D_2 = \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \gamma_{xy}^2 dydx = \sin^2 \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k^2 \frac{m^2 \pi^2 l}{16b}$$

Ainsi l'énergie interne de déformation totale du 1/8 VER du nid d'abeilles est donnée par :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= 2\Pi_{\text{int}-h} + 2\Pi_{\text{int}-l} \\ &= t_1 \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + G\gamma_{xy}^2 \right] dydx \\ &\quad + t_2 \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + G\gamma_{xy}^2 \right] dydx \\ &= \frac{Et_1}{2(1-\nu^2)} (A_1 + B_1 + 2\nu C_1) + t_1 G D_1 + \frac{Et_2}{2(1-\nu^2)} (A_2 + B_2 + 2\nu C_2) + t_2 G D_2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

En utilisant les expressions $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= \\ &\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{b} (t_1 h + t_2 l) a_1^2 + \frac{b}{4} (t_1 h + t_2 l) \varepsilon_Y^2 - 2b (t_1 \varepsilon_Y - t_2 \varepsilon_l \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} a_k \right. \\ &\quad + \frac{b\pi^2}{16} \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n^2 a_k^2 + \nu (t_1 h \varepsilon_Y + t_2 l \varepsilon_l) a_1 \\ &\quad \left. - 4\nu (t_1 - t_2 \sin \theta) a_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} a_k + \frac{(1-\nu)\pi^2}{32b} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^2 a_k^2 \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pour ce problème de déformations imposées, le travail des forces extérieures est nul lors de la redistribution des contraintes. La minimisation de l'énergie interne de déformation du 1/8 VER conduit à un système d'équations linéaires permettant de calculer les paramètres inconnus a_1 et a_k :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_k} = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{b}(t_1 h + t_2 l) a_1 - 4\nu(t_1 - t_2 \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} a_k = -\nu(t_1 h \varepsilon_Y + t_2 l \varepsilon_l) \\ -\frac{4\nu}{m\pi}(t_1 - t_2 \sin \theta) \sin \frac{m\pi}{2} a_1 + \frac{\pi^2}{8} \left[b \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) n^2 + \frac{1-\nu}{2b} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) m^2 \right] a_k \\ = \frac{2b}{m\pi} (t_1 \varepsilon_Y - t_2 \varepsilon_l \sin \theta) \sin \frac{m\pi}{2} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Ce système linéaire peut être résolu numériquement ou analytiquement. La solution analytique du système (2.52) est obtenue comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \xi b \\ a_k = \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \eta \end{array} \right. \quad (2.53)$$

avec

$$\xi = \frac{\nu}{2} \frac{-(t_1 h \varepsilon_Y + t_2 l \varepsilon_l) + (t_1 - t_2 \sin \theta)(t_1 \varepsilon_Y - t_2 \varepsilon_l \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{8}{m^2 \pi^2} \frac{1}{\varphi_k}}{(t_1 h + t_2 l) - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{8}{m^2 \pi^2} \frac{1}{\varphi_k}}$$

$$\eta = \frac{\nu(t_1 - t_2 \sin \theta) \xi + \frac{1}{2}(t_1 \varepsilon_Y - t_2 \varepsilon_l \sin \theta)}{\varphi_k}$$

$$\varphi_k = \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) \frac{n^2 \pi^2}{8} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{b^2} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) \frac{m^2 \pi^2}{8}$$

Une fois que les paramètres inconnus a_1 et a_k sont obtenus, l'énergie interne de déformation minimisée Π_{int} peut être calculée. La formulation ci-dessus est utilisée pour trois champs de déformations donnés afin de calculer les trois énergies correspondantes et puis les trois modules d'élasticité (voir la procédure dans le paragraphe II.2.2).

II.2.5. Concordance des bornes supérieure et inférieure entre la théorie de membrane et la formulation en série de fonctions trigonométriques

La formulation en série de fonctions trigonométriques permet également d'obtenir les bornes supérieure et inférieure de l'énergie interne de déformation en prenant $b \rightarrow 0$ et $b \rightarrow \infty$ respectivement.

1) En utilisant $N \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0$ et les expressions de a_1 , a_k , Π_{int} (Eqs. (2.53) et (2.48)), l'expression de l'énergie interne de déformation obtenue par la formulation en série de fonctions trigonométriques est identique à la borne supérieure par la théorie de membrane (Eq. (2.30)). Ainsi les bornes supérieures des modules Q_X^* , Q_{XY}^* , et Q_Y^* sont également identiques à celles dans l'équation (2.18).

2) En utilisant $N \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow \infty$, et les expressions de a_1 , a_k , Π_{int} (Eqs. (2.53) et (2.48)), l'expression de l'énergie interne de déformation est trouvée identique à la borne inférieure de l'énergie obtenue par la théorie de membrane (Eq. (2.38)). Les expressions des bornes inférieures ne sont pas présentées en raison de la longueur de leur expression.

Il est à noter également que les bornes inférieures des trois modules deviennent identiques pour les cellules hexagonales régulières : $Q_X^* = Q_{XY}^* = Q_Y^*$. Les propriétés dans le plan deviennent isotropes comme ce qui a été montré par Gibson [2] et Becker [13], [14].

II.3. Formulation de l'homogénéisation pour les modules de flexion

Pour une âme en nid d'abeilles sollicitée par un moment de flexion M_Y (Fig. 2.9, 1/8 VER du nid d'abeilles), le côté droit ($BDFH$) est en compression, le côté gauche ($ACEG$) est sur la surface moyenne de l'âme et donc n'est soumis à aucune traction ou compression. En plus des déplacements imposés par les peaux, il existe des déplacements additionnels (indiqués par les lignes pointillées dans la Fig. 2.9) dus à la redistribution des contraintes.

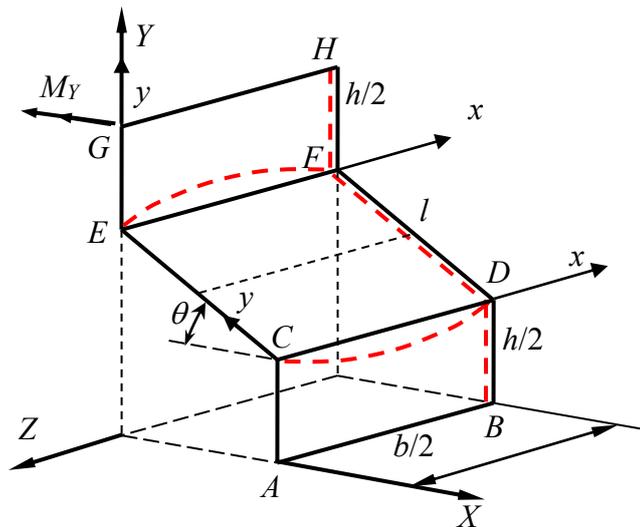


Figure 2.9. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes en flexion.

II.3.1. Méthodologie pour déterminer les modules de flexion de l'âme homogénéisée

La méthode d'homogénéisation est similaire à celle dans le cas de la traction (II.2.2). La loi de comportement orthotrope de l'âme homogénéisée est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X^* \\ \sigma_Y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_X^* & Q_Y^* \\ Q_X^* & Q_Y^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_X^* & Q_Y^* \\ Q_X^* & Q_Y^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z\kappa_X \\ Z\kappa_Y \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

où $\kappa_X = \beta_{X,X}$ et $\kappa_Y = \beta_{Y,Y}$ sont les courbures de flexion.

L'énergie interne de déformation de la plaque homogénéisée Π_{int}^* sur 1/8 VER est définie comme suit qui doit être égale à l'énergie de l'âme en nid d'abeilles Π_{int} :

$$\Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [Q^*] \{ \varepsilon \} d\bar{V} = \Pi_{\text{int}} \quad (2.55)$$

$$\text{ainsi } \frac{Ab^3}{48} (\kappa_X^2 Q_X^* + 2\kappa_X \kappa_Y Q_{XY}^* + \kappa_Y^2 Q_Y^*) = \Pi_{\text{int}} \quad (2.56)$$

La méthodologie utilisée pour le problème de traction est adoptée pour calculer les modules de flexion en imposant trois vecteurs de courbure $\langle \kappa_X \ \kappa_Y \rangle$.

II.3.2. Bornes supérieure et inférieure de l'énergie de déformation de l'âme en flexion

La méthodologie utilisée pour le problème de traction est aussi utilisée pour le problème de flexion. Pour un vecteur de courbures $\langle \kappa_X \ \kappa_Y \rangle$ imposé par les peaux, les déformations normales sont données par :

$$\varepsilon_Y = -\kappa_Y x \quad ; \quad \varepsilon_X = -\kappa_X x \quad ; \quad \varepsilon_l = -\kappa_l x \quad \text{avec} \quad x = -Z \quad (2.57)$$

où la courbure le long de la paroi inclinée est donnée par :

$$\kappa_l = \kappa_Y \sin^2 \theta + \kappa_X \cos^2 \theta \quad (2.58)$$

1) Borne supérieure de l'énergie interne de déformation en flexion

La borne supérieure de l'énergie interne de déformation est obtenue lorsque la hauteur du nid d'abeilles est très petite, donc il n'y a pas de redistribution des contraintes. La déformation ε_x suivant la hauteur de l'âme est due à l'effet de Poisson. Puisque les déformations ε_{yh} et ε_{yl} varient linéairement le long de x et ε_x varie linéairement le long

de x également. En outre, ε_x sur les parois verticales et inclinée doit être identique en raison de la forte contrainte des peaux. Ainsi, on obtient les déformations suivantes :

$$\varepsilon_x = -\gamma x \quad (2.59)$$

où γ est une constante inconnue à déterminer.

En utilisant les équations (2.58) et (2.59), l'énergie interne de déformation de flexion (1/8 VER du nid d'abeilles) peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= t_1 \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) dydx + t_2 \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_l^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_l) dydx \\ &= \frac{Eb^3}{48(1-\nu^2)} \left[t_1 h (\gamma^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\gamma\kappa_y) + t_2 l (\gamma^2 + \kappa_l^2 + 2\nu\gamma\kappa_l) \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

La constante inconnue γ peut être déterminée en minimisant l'énergie interne de déformation :

$$\frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial \gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = -\nu \frac{t_1 h \kappa_y + t_2 l \kappa_l}{t_1 h + t_2 l} \quad (2.61)$$

En utilisant les équations (2.60) et (2.61), l'énergie interne de déformation peut être réécrite comme suit :

$$\Pi_{\text{int}}^{\text{sup}} = \frac{Eb^3}{48(1-\nu^2)} \left[t_1 h \kappa_y^2 + t_2 l \kappa_l^2 - \nu^2 \frac{(t_1 h \kappa_y + t_2 l \kappa_l)^2}{t_1 h + t_2 l} \right] \quad (2.62)$$

La comparaison des coefficients de κ_x^2 , $2\kappa_x\kappa_y$ et κ_y^2 entre Eqs. (2.56) et (2.62) permet d'obtenir les trois modules d'élasticité qui sont identiques à ceux donnés par l'équation (2.34) pour le problème de traction.

2) Borne inférieure de l'énergie interne de déformation en flexion

La borne inférieure de l'énergie de déformation est obtenue lorsque la hauteur de l'âme tend vers l'infini. Ceci induit la redistribution des contraintes entre les parois verticales et inclinée. En utilisant une méthode similaire à celle décrite dans le problème de traction, les déformations dans les parois verticales et inclinée sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_{xh} = \varepsilon_{xl} = -\gamma x \\ \varepsilon_{yh} = -\kappa_Y x - \frac{2V}{bh} x \\ \varepsilon_{yl} = -\kappa_l x + \frac{2V \sin \theta}{bl} x \end{cases} \quad (2.63)$$

La variable inconnue V est le déplacement additionnel en raison de la redistribution des contraintes sur la ligne entre la paroi verticale et la paroi inclinée, suivant la direction y .

Ainsi l'énergie interne de déformation (1/8 VER du nid d'abeilles) est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= \frac{t_1 E}{1-\nu^2} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} [(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{yh}^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_{yh})] dy dx + \frac{t_2 E}{1-\nu^2} \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} [(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{yl}^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_{yl})] dy dx \\ &= \frac{Eb^3}{48(1-\nu^2)} \left\{ t_1 h \left[\gamma^2 + \left(-\kappa_Y + \frac{2V}{bh} \right)^2 + 2\nu \gamma \left(-\kappa_Y + \frac{2V}{bh} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + t_2 l \left[\gamma^2 + \left(-\kappa_l - \sin \theta \frac{2V}{bl} \right)^2 + 2\nu \gamma \left(-\kappa_l - \sin \theta \frac{2V}{bl} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

La minimisation de l'énergie interne de déformation donne les inconnus γ et V :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial \kappa_x} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial V} = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\begin{cases} \gamma = \nu \frac{(t_1 h \kappa_Y + t_2 l \kappa_l) \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) - (t_1 \kappa_Y - t_2 \kappa_l \sin \theta) (t_1 - t_2 \sin \theta)}{(t_1 h + t_2 l) \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2} \\ V = \frac{b}{2} \frac{(t_1 h + t_2 l) (t_1 \kappa_Y - t_2 \kappa_l \sin \theta) - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta) (t_1 h \kappa_Y + t_2 l \kappa_l)}{(t_1 h + t_2 l) \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) - \nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2} \end{cases} \quad (2.66)$$

Un calcul similaire à celui utilisé pour la borne supérieure de l'énergie de déformation est adopté pour trouver les trois modules d'élasticité qui sont identiques à ceux du cas de la traction.

II.3.3. Formulation d'homogénéisation de l'âme en nid d'abeilles en flexion

Dans la pratique, la hauteur de l'âme en nid d'abeilles n'est ni très petite, ni très grande. L'augmentation de la hauteur a une grande influence sur la redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles induisant une diminution notable des modules élastiques.

1) Champs de déplacements additionnels et de déformations sur la paroi verticale

Outre le champ de déplacements dû aux courbures imposées, il existe un champ de déplacements additionnels dû à la redistribution des contraintes (Fig. 2.8). Le champ de déplacements additionnels suivant est proposé pour satisfaire les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u_h = a_1 \frac{2x}{b} + a_2 \frac{4x^2}{b^2} \\ v_h = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \sin \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{h} \quad (m = 2i, n = 2j - 1, k = (i-1)N + j + 2) \end{cases} \quad (2.67)$$

En incluant la déformation basique imposée par les peaux $\varepsilon_y = -\kappa_y x$, les déformations dans le repère local xy peuvent être définies comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xh} = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 \frac{2}{b} + a_2 \frac{8x}{b^2} \\ \varepsilon_{yh} = \varepsilon_y + \frac{\partial v_h}{\partial y} = -\kappa_y x - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{n\pi}{h} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{h} \\ \gamma_{xyh} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v_h}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N a_k \frac{m\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{h} \end{cases} \quad (2.68)$$

2) Champ de déplacements et champ de déformations additionnels sur la paroi inclinée

Sur la paroi inclinée, le champ de déplacements additionnels et le champ de déformations sont définis dans le repère local de la façon suivante (u_l et ε_{xl} sont les mêmes que ceux dans la paroi verticale) :

$$\begin{cases} u_l = a_1 \frac{2x}{b} + a_2 \frac{4x^2}{b^2} \\ v_l = -\sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \sin \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{l} \quad (m = 2i, n = 2j - 1, k = (i-1)N + j + 2) \end{cases} \quad (2.69)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xl} = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 \frac{2}{b} + a_2 \frac{8x}{b^2} \\ \varepsilon_{yl} = \varepsilon_l + \frac{\partial v_l}{\partial y} = -\kappa_l x + \sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_k \frac{n\pi}{l} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{l} \\ \gamma_{xyl} = \frac{\partial u_l}{\partial y} + \frac{\partial v_l}{\partial x} = -\sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N a_k \frac{m\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{l} \end{cases} \quad (2.70)$$

L'énergie interne de déformation dans le 1/8 VER du nid d'abeilles est ensuite calculée par :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} = t_1 \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{yh}^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_{yh}) + G\gamma_{xyh}^2 \right] dydx \\ + t_2 \int_0^{b/2} \int_0^{l/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{yl}^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_{yl}) + G\gamma_{xyl}^2 \right] dydx \end{aligned} \quad (2.71)$$

Les équations (2.68), (2.70) et (2.71) donnent :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{t_1 h + t_2 l}{b} \left(a_1^2 + 2a_1 a_2 + \frac{4}{3} a_2^2 \right) + b^3 \frac{t_1 h \kappa_y^2 + t_2 l \kappa_l^2}{48} \right. \\ - (t_1 \kappa_y - \kappa_l t_2 \sin \theta) b^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} a_k + b \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{n^2 \pi^2}{16} a_k^2 \\ - 2\nu b \frac{t_1 h \kappa_y + t_2 l \kappa_l}{8} a_1 - 2\nu b \frac{t_1 h \kappa_y + t_2 l \kappa_l}{6} a_2 + \frac{1-\nu}{2} \frac{t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta}{b} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m^2 \pi^2}{16} a_k^2 \\ \left. - \nu (t_1 - t_2 \sin \theta) \left[a_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{4}{m\pi} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right) - a_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{8}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} \right] a_k \right\} \end{aligned} \quad (2.72)$$

La minimisation de l'énergie interne de déformation conduit à un système d'équations linéaires pour calculer les paramètres inconnus a_1 , a_2 et a_k :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_2} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_k} = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Les équations ci-dessus donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{t_1 h + t_2 l}{b} (a_1 + a_2) - \frac{2\nu}{\pi} (t_1 - t_2 \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right) a_k = \frac{\nu b}{8} (t_1 h \kappa_Y + t_2 l \kappa_l) \\
\frac{t_1 h + t_2 l}{b} \left(a_1 + \frac{4}{3} a_2 \right) + \frac{4\nu}{\pi} (t_1 - t_2 \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m} \cos \frac{m\pi}{2} a_k = \frac{\nu b}{6} (t_1 h \kappa_Y + t_2 l \kappa_l) \\
-\frac{4\nu}{b} (t_1 - t_2 \sin \theta) \left[a_1 \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right) - 2a_2 \cos \frac{m\pi}{2} \right] \\
+ \frac{n\pi^3}{8} \left[\left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) n^2 + \frac{1-\nu}{2b^2} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) m^2 \right] a_k = (t_1 \kappa_Y - \kappa_l t_2 \sin \theta) b \cos \frac{m\pi}{2}
\end{array} \right. \quad (2.74)$$

Les paramètres inconnus a_1 , a_2 et a_k peuvent être obtenus en résolvant le système ci-dessus numériquement. On peut aussi obtenir a_1 , a_2 et a_k dans l'équation (2.74) semi-analytiquement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_1 = \frac{A_{22}B_1 - A_{12}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \\
a_2 = \frac{A_{11}B_2 - A_{21}B_1}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \\
a_k = \frac{C_1 + C_2 a_1 + C_3 a_2}{D}
\end{array} \right. \quad (2.75)$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{12} &= A_{11} = (t_1 h + t_2 l) - 4\nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{2}{m^2 \pi^2} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{\varphi_k} \\
B_1 &= \nu \frac{t_1 h \kappa_Y + t_2 l \kappa_l}{8} b^2 + \nu (t_1 - t_2 \sin \theta) (t_1 \kappa_Y - t_2 \kappa_l \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{2}{m^2 \pi^2} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{2} \frac{1}{\varphi_k} b^2 \\
A_{21} &= (t_1 h + t_2 l) + 4\nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{4}{m^2 \pi^2} \cos \frac{m\pi}{2} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right) \frac{1}{\varphi_k} \\
A_{22} &= \frac{4}{3} (t_1 h + t_2 l) - 8\nu^2 (t_1 - t_2 \sin \theta)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{4}{m^2 \pi^2} \frac{1}{\varphi_k} \\
B_2 &= \nu \frac{t_1 h \kappa_Y + t_2 l \kappa_l}{6} b^2 - \nu (t_1 - t_2 \sin \theta) (t_1 \kappa_Y - t_2 \kappa_l \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{4}{m^2 \pi^2} \frac{1}{\varphi_k} b^2 \\
\varphi_k &= \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) \frac{n^2 \pi^2}{8} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{b^2} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) \frac{m^2 \pi^2}{8}
\end{aligned}$$

$$C_1 = (t_1 \kappa_Y - \kappa_l t_2 \sin \theta) b \cos \frac{m\pi}{2}$$

$$C_2 = \frac{4\nu}{b} (t_1 - t_2 \sin \theta) \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right)$$

$$C_3 = -\frac{8\nu}{b} \cos \frac{m\pi}{2} (t_1 - t_2 \sin \theta)$$

$$D = \frac{n\pi^3}{8} \left[\left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \sin^2 \theta \right) n^2 + \frac{1-\nu}{2b^2} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) m^2 \right]$$

Ensuite, l'énergie interne de déformation peut être calculée. La formulation ci-dessus est utilisée pour trois champs de courbures donnés afin d'obtenir les trois modules d'élasticité (voir la procédure dans le paragraphe II.2.1).

II.3.4. Concordance de la formulation d'homogénéisation et les bornes supérieure et inférieure

La méthode avec des séries de fonctions trigonométriques ci-dessus permet d'obtenir les bornes supérieures et inférieures de l'énergie de déformation en prenant $b \rightarrow 0$ et $b \rightarrow \infty$ respectivement.

- 1) En utilisant $b \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ et les expressions de a_1 , a_2 , a_k ainsi que l'équation (2.72), l'énergie de déformation obtenue est identique à celle trouvée dans l'équation (2.62), ce qui conduit aux trois modules identiques aux bornes supérieures des trois modules obtenus pour le problème de traction.
- 2) En utilisant $b \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, et les expressions de a_1 , a_2 , a_k ainsi que l'équation (2.72), l'énergie de déformation obtenue est identique à celle trouvée dans l'équation (2.64), ce qui conduit aux trois modules identiques aux bornes inférieures des trois modules obtenus pour le problème de traction.
- 3) Il est à noter que les bornes des modules sont identiques pour la traction et la flexion, mais les modules de flexion diminuent beaucoup moins vite en fonction de l'augmentation de la hauteur de l'âme. En fait, les formulations de traction et de flexion sont différentes en raison des différents modes de redistribution des contraintes, conduisant à différentes évolutions des trois modules en fonction de la variation de la hauteur du nid d'abeilles.

II.4. Modules d'élasticité pour le problème de traction-flexion couplés

On observe que les formulations d'homogénéisation de l'âme en nid d'abeilles ci-dessus donnent les modules différents entre les problèmes de traction et de flexion (voir Fig. 2.19), ceci est dû aux modes de redistribution des contraintes différents dans les deux cas. On note que les modules de traction ne peuvent pas être utilisés pour calculer ceux de flexion, ni inversement. Pour faire face aux problèmes de traction-flexion couplés, l'âme est divisée en trois couches de matériaux différents pour obtenir les propriétés convenables aux problèmes de traction et flexion séparées ou couplées.

1) Rigidités de traction

En utilisant les modules de traction (Q_{XT}^* , Q_{XYT}^* , Q_{YT}^*) et une seule couche, les rigidités de tractions sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{XT}^* & Q_{XYT}^* \\ Q_{XYT}^* & Q_{YT}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \end{Bmatrix} = b \begin{bmatrix} Q_{XT}^* & Q_{YT}^* \\ Q_{XT}^* & Q_{YT}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

où b est l'épaisseur de l'âme.

Si l'âme est composée de trois couches (a-c-a) ayant la même épaisseur $b/3$ (les trois couches peuvent être différentes), on obtient les rigidités de traction suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \end{Bmatrix} = \frac{b}{3} \begin{bmatrix} 2Q_{Xa}^* + Q_{Xc}^* & 2Q_{XYa}^* + Q_{XYc}^* \\ 2Q_{XYa}^* + Q_{XYc}^* & 2Q_{Ya}^* + Q_{Yc}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

où Q_{Xc}^* est le module d'Young de la couche intermédiaire, Q_{Xa}^* est le module des deux autres couches. N_X et N_Y sont les efforts de traction.

L'âme en une couche ou en trois couches doit avoir les mêmes rigidités de traction. La comparaison des équations (2.77) et (2.78) donne :

$$2Q_{Xa}^* + Q_{Xc}^* = 3Q_{XT}^* \quad (2.79)$$

2) Rigidités de flexion

Pour l'âme en une seule couche, les rigidités de flexion peuvent être définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{XF}^* & Q_{XYF}^* \\ Q_{XYF}^* & Q_{YF}^* \end{bmatrix} Z \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \end{Bmatrix} = \frac{b^3}{12} \begin{bmatrix} Q_{XF}^* & Q_{XYF}^* \\ Q_{XYF}^* & Q_{YF}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \end{Bmatrix} \quad (2.80)$$

où Q_{XF}^* , Q_{XYF}^* , Q_{YF}^* sont les modules d'élasticité de flexion, M_X et M_Y sont les moments de flexion, κ_X et κ_Y sont les courbures.

L'âme en trois couches ($b/3$) donne les rigidités de flexion suivantes :

$$\begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \end{Bmatrix} = \frac{b^3}{12 \times 27} \begin{bmatrix} 26Q_{Xa}^* + Q_{Xc}^* & 26Q_{XYa}^* + Q_{XYc}^* \\ 26Q_{XYa}^* + Q_{XYc}^* & 26Q_{Ya}^* + Q_{Yc}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

La comparaison des équations (2.80) et (2.81) donne la relation suivante :

$$26Q_{Xa}^* + Q_{Xc}^* = 27Q_{XF}^* \quad (2.82)$$

Les équations (2.81) et (2.84) permettent d'obtenir les modules équivalents des trois couches :

$$Q_{Xa}^* = \frac{1}{8}(9Q_{XF}^* - Q_{XT}^*) \quad ; \quad Q_{Xc}^* = \frac{1}{4}(13Q_{XT}^* - 9Q_{XF}^*) \quad (2.83)$$

Les autres modules équivalents des trois couches (Q_{Ya}^* , Q_{Yc}^* , Q_{XYa}^* , Q_{XYc}^*) peuvent être calculés de la même manière.

II.5. Module d'Young suivant la hauteur de l'âme

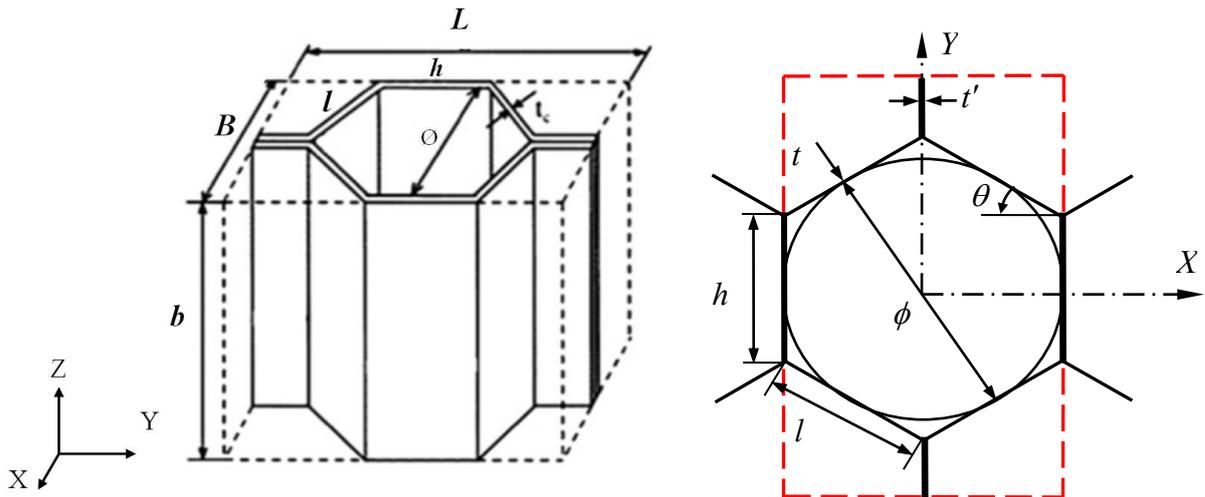


Figure 2.10. Géométrie d'un VER du nid d'abeilles.

L'épaisseur des parois du nid d'abeilles doit résister au flambage lors d'une compression suivant la hauteur de l'âme (Z). Sans tenir compte du flambage des parois,

toutes les parois sont soumises uniformément à la compression. Ainsi, la rigidité de compression du nid d'abeilles doit être égale à celle du solide homogénéisé :

$$E_z^* S^* = E S_{nida}$$

En utilisant la Figure 2.10 et $t' = 2t$, on obtient :

$$S^* = (2l \cos \theta)(2h + 2l \sin \theta) = 4l \cos \theta (h + l \sin \theta)$$

$$S_{nida} = 2t' h + 4lt = 4t(h + l)$$

$$E_z^* = E \frac{4t(l+h)}{4l \cos \theta (h + l \sin \theta)} = E \left(\frac{t}{l} \right) \frac{1 + \frac{h}{l}}{\cos \theta \left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right)} \quad (2.84)$$

L'équation (2.84) est différente de la formule de Gibson (Tableau 1.3), car elle prend en compte la double épaisseur pour les parois verticales du nid d'abeilles.

II.6. Validation numérique des modèles d'homogénéisation

L'objectif est de valider nos modèles d'homogénéisation analytiques avec les calculs numériques par la méthode des éléments finis.

II.6.1. Validation du modèle d'homogénéisation de traction

Notre H-modèle analytique est validé par des simulations avec l'élément de coque mince 'S4' d'Abaqus. L'exemple traité par Becker [14], Hohe et Becker [15] et Chen et Davalos [11] est pris comme cas test. Les données matérielles et géométriques sont présentées dans le tableau 2.1:

Définition	Paramètres	Valeur
Module d'Young de la peau	E_p	250 GPa
Coefficient de Poisson de la peau	ν_p	0,34
Epaisseur de la peau	t_p	0,2 mm
Module d'Young du nid d'abeilles	E	72,2 GPa
Coefficient de Poisson du nid d'abeilles	ν	0,34
Longueur de la paroi verticale	h	4 mm

Longueur de la paroi inclinée	l	4 mm
Epaisseur de la paroi verticale	t'	0.1 mm
Epaisseur de la paroi inclinée	t	0.05 mm
Angle de la cellule	θ	30°
Hauteur du nid d'abeilles	b	0,5 ÷ 120 mm

Tableau 2.1. Paramètres géométriques et matérielles du nid d'abeilles pour la validation H-modèle en traction et en flexion.

Pour chaque hauteur de l'âme ($b = 0,5$ à 120 mm), trois simulations numériques sont effectuées pour calculer les modules d'élasticité ($\varepsilon_X = 0,01$, $\nu_p = 0,34$; $\varepsilon_Y = 0,01$, $\nu_p = 0,34$; $\varepsilon_X = 0,01$, $\varepsilon_Y = 0,01$, $\nu_p = 0$).

Les modules de traction Q_X^* , Q_{XY}^* , Q_Y^* en fonction de la hauteur du nid d'abeilles sont présentés dans la Fig. 2.11. On observe que les courbes analytiques des trois modules sont très proches des résultats de Becker [14], Hohe et Becker [15] et Chen et Davalos [11], ainsi que des résultats numériques d'ABAQUS. Ces courbes sont bien situées entre les bornes supérieure et inférieure obtenues à l'aide de la théorie de membrane (Fig. 2.12):

$$Q_X^{\text{sup}} = 416,3\text{MPa}, Q_Y^{\text{sup}} = 763,7\text{MPa}, Q_{XY}^{\text{sup}} = 104,7\text{MPa}$$

$$\text{et } Q_X^{\text{inf}} = Q_Y^{\text{inf}} = Q_{XY}^{\text{inf}} = 316,3\text{MPa}.$$

Il est à noter que, lorsque la hauteur du nid d'abeilles augmente, les trois constantes Q_X^* , Q_{XY}^* , Q_Y^* tendent vers la même valeur et le solide homogénéisé est isotrope.

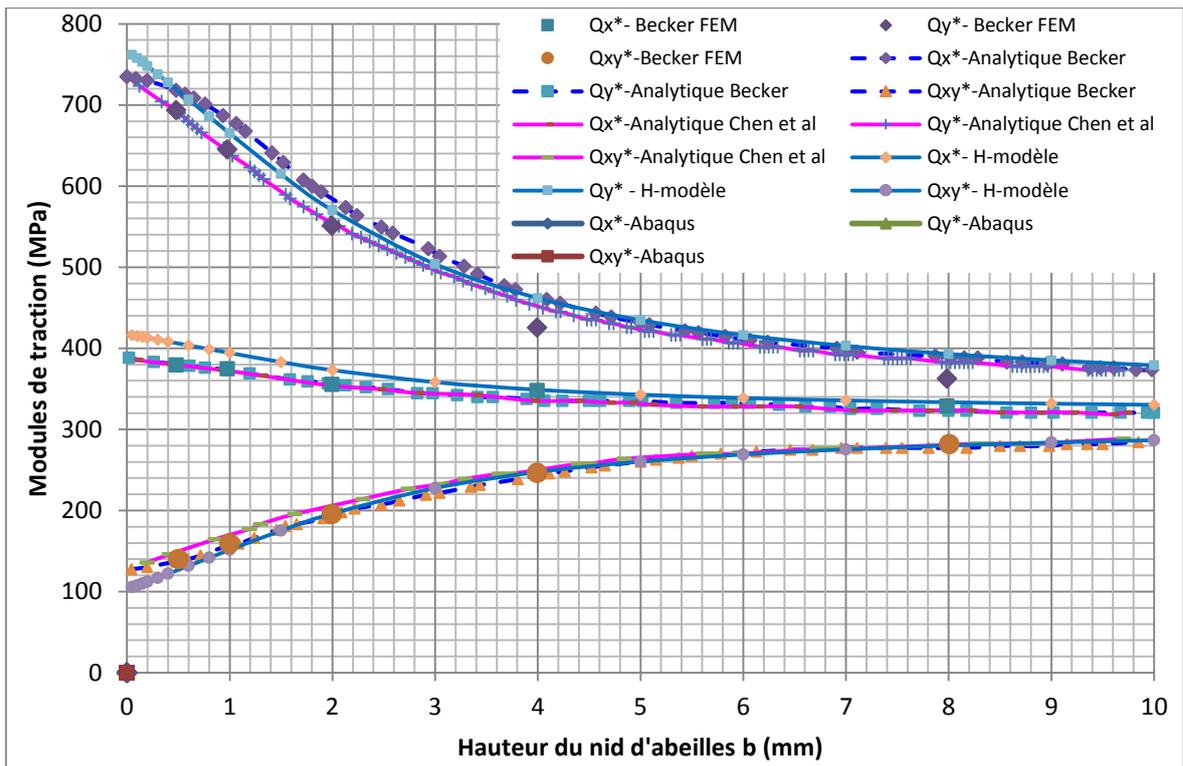


Figure 2.11. Modules de traction Q_x^* , Q_{xy}^* , Q_y^* en fonction de la hauteur de l'âme ($b=0,05-10$ mm).

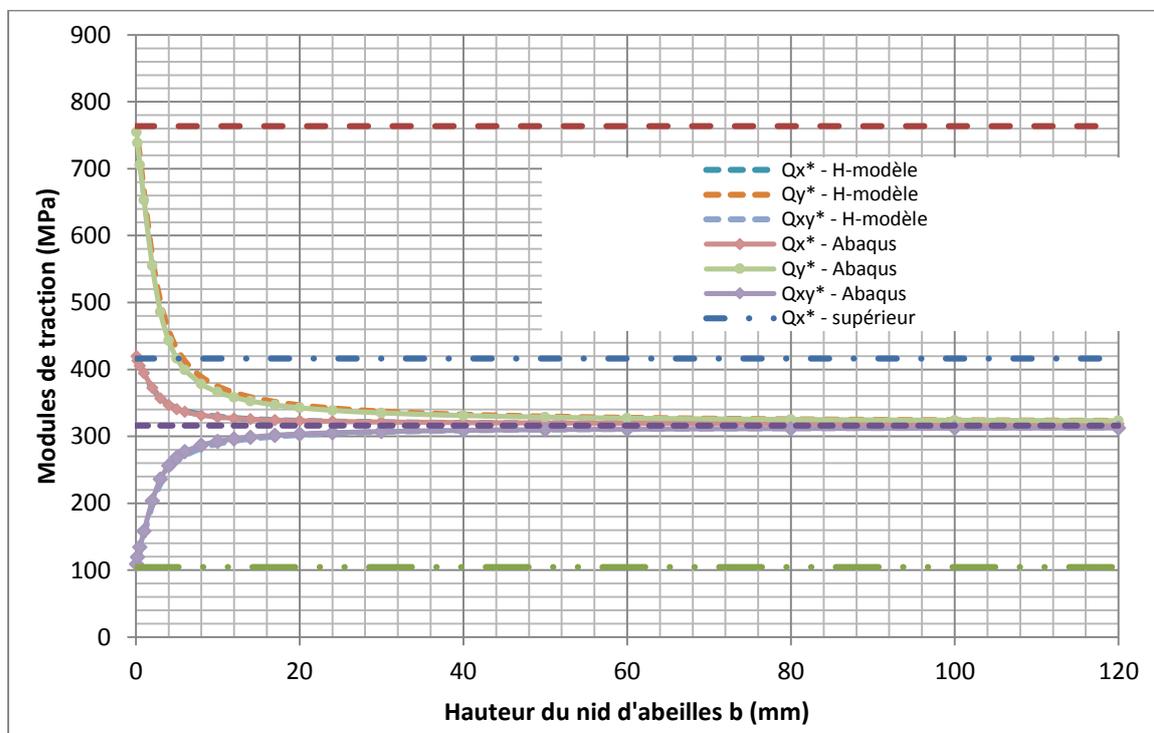


Figure 2.12. Modules de traction avec les bornes supérieure et inférieure.

Les figures 2.13 et 2.14 montrent également un très bon accord pour les modules d'Young (E_X^* , E_Y^*) et les coefficients de Poisson (ν_{XY}^* , ν_{YX}^*) entre le H-modèle et Abaqus. Il est également intéressant de noter que lorsque la hauteur du nid d'abeilles augmente, les modules d'Young diminuent et tendent vers zéro (Fig. 2.13), les coefficients de Poisson augmente et tendent vers 1. Bien que les modules d'Young deviennent très petits, les valeurs des constantes de rigidité sont toujours bien définies (316,3 MPa), parce que les coefficients de Poisson ont tendance à tendre vers 1, ce qui donne une valeur très faible pour le dénominateur $Q_X^* = E_X^* / (1 - \nu_{XY}^* \nu_{YX}^*)$. Cela signifie qu'il y a de fortes interactions entre les deux directions : une extension le long d'une direction peut induire des contraintes considérables dans une autre direction sur les parois du nid d'abeilles. Les différences les plus notables sont avec les résultats obtenus par Xu et Qiao [9], parce que le nid d'abeilles n'a pas été traité comme une structure 3D entière et les modules E_X^* , E_Y^* , ν_{XY}^* , ν_{YX}^* ont été calculés séparément sans tenir compte des effets de couplage.

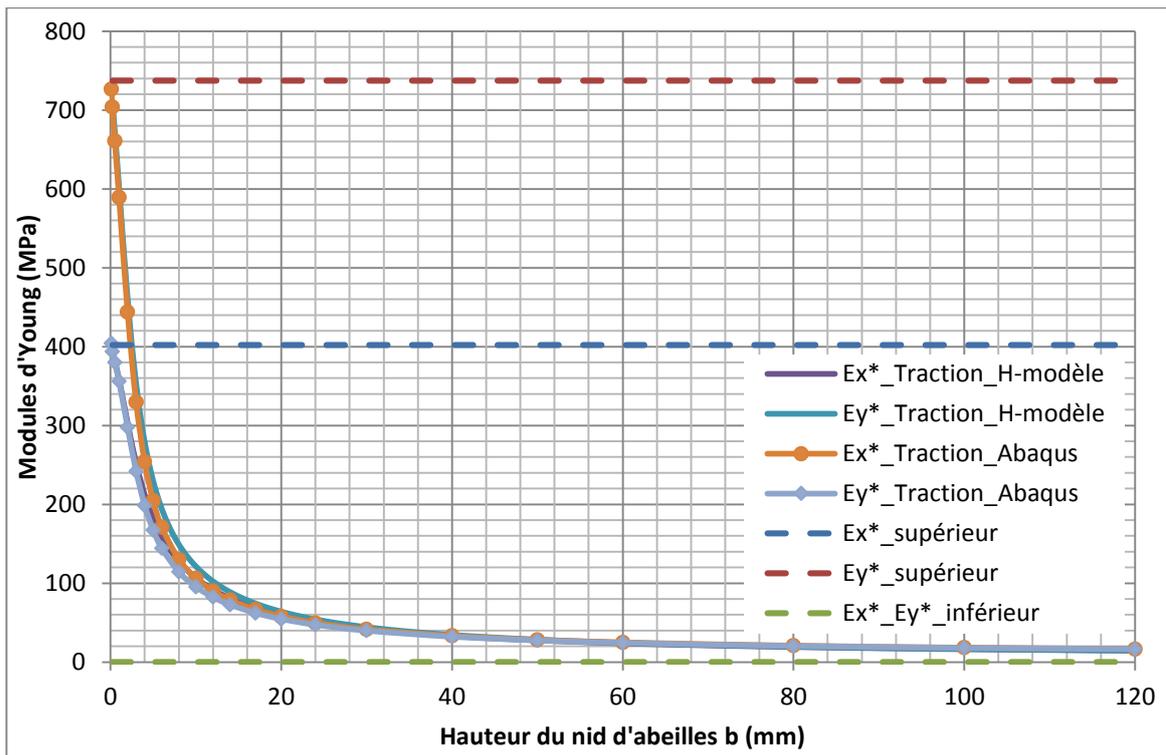


Figure 2.13. Modules d'Young en fonction de la hauteur du nid d'abeilles ($b=0-120$ mm).

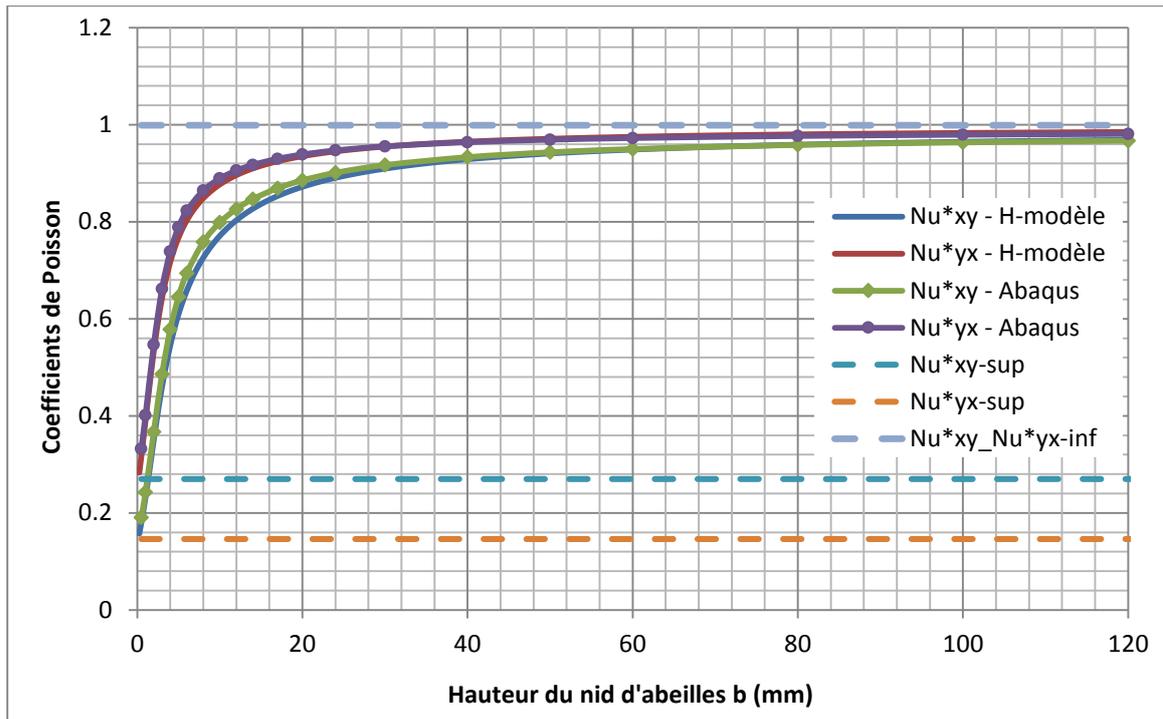
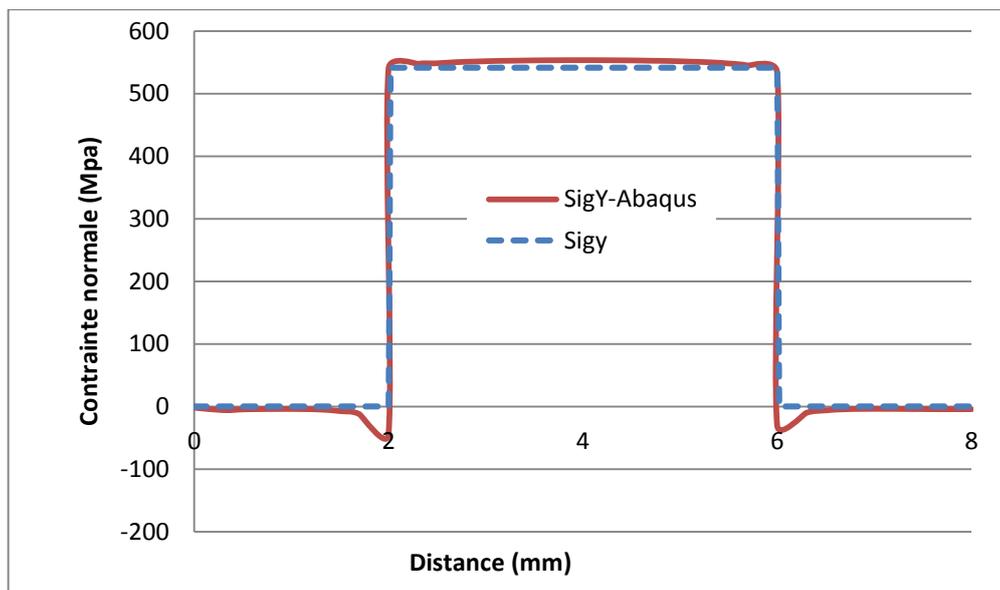
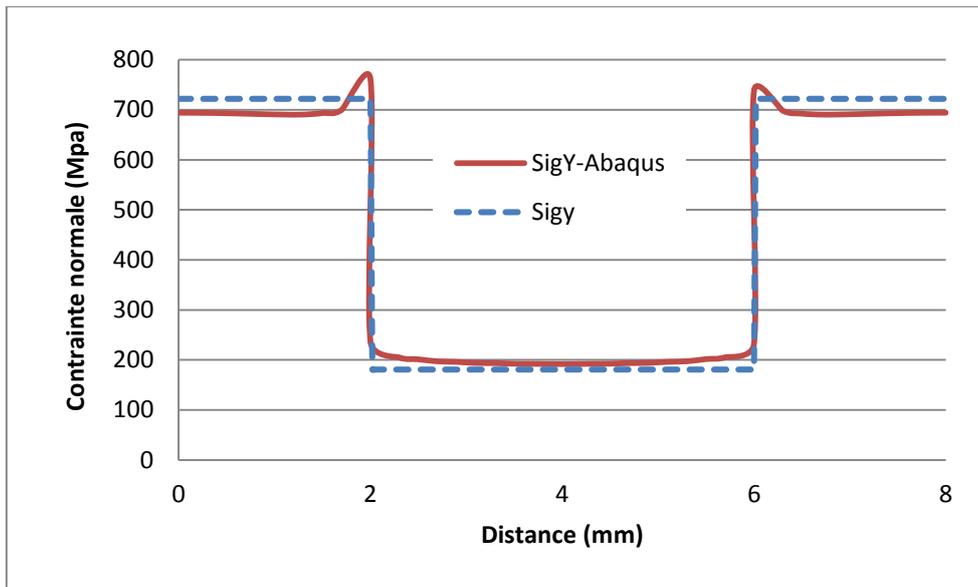


Figure 2.14. Coefficient de Poisson en fonction de la hauteur du nid d'abeilles.

Le H-modèle et la modélisation EF sont également utilisés pour étudier les contraintes à l'interface entre l'âme et les peaux. Les figures 2.15 et 2.16 représentent les distributions des contraintes normale et tangentielle le long des segments *BDFH* (Fig. 2.6) dans le cas de $b = 4$ mm, $\varepsilon_x = 0,01$ et $\varepsilon_y = 0,01$. Les coordonnées curvilignes des points *B*, *D*, *F* et *H* sont de 0, 2, 6 et 8 mm respectivement.

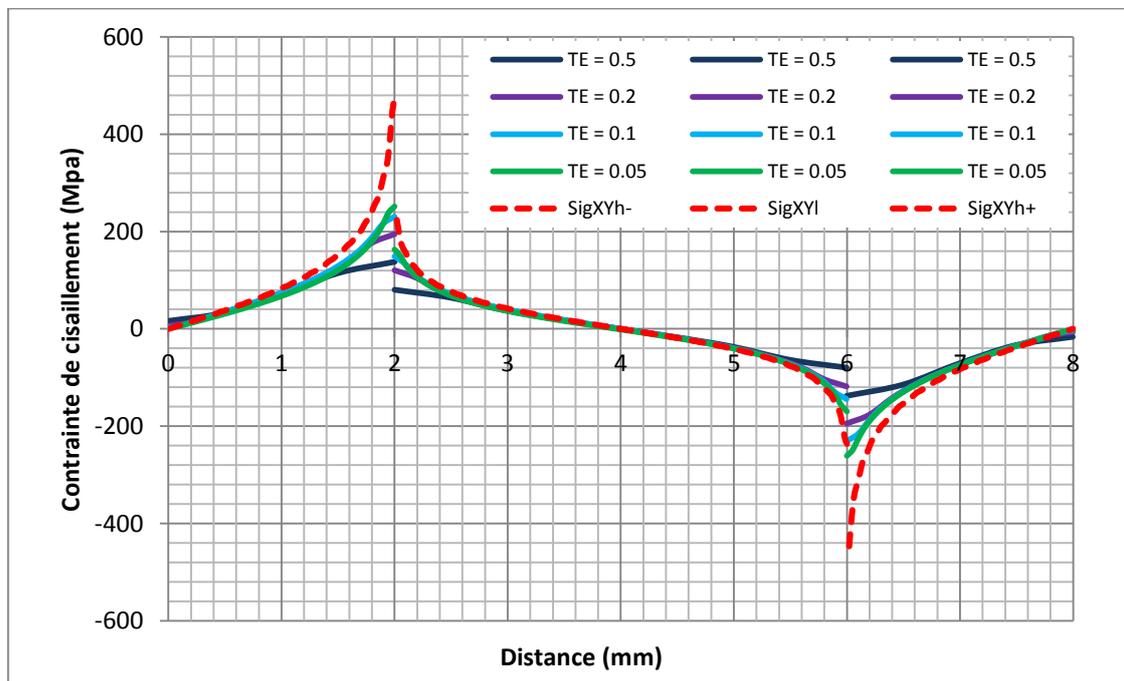


a) Contrainte normale à l'interface entre l'âme et une peau ($\epsilon_x = 0,01$)

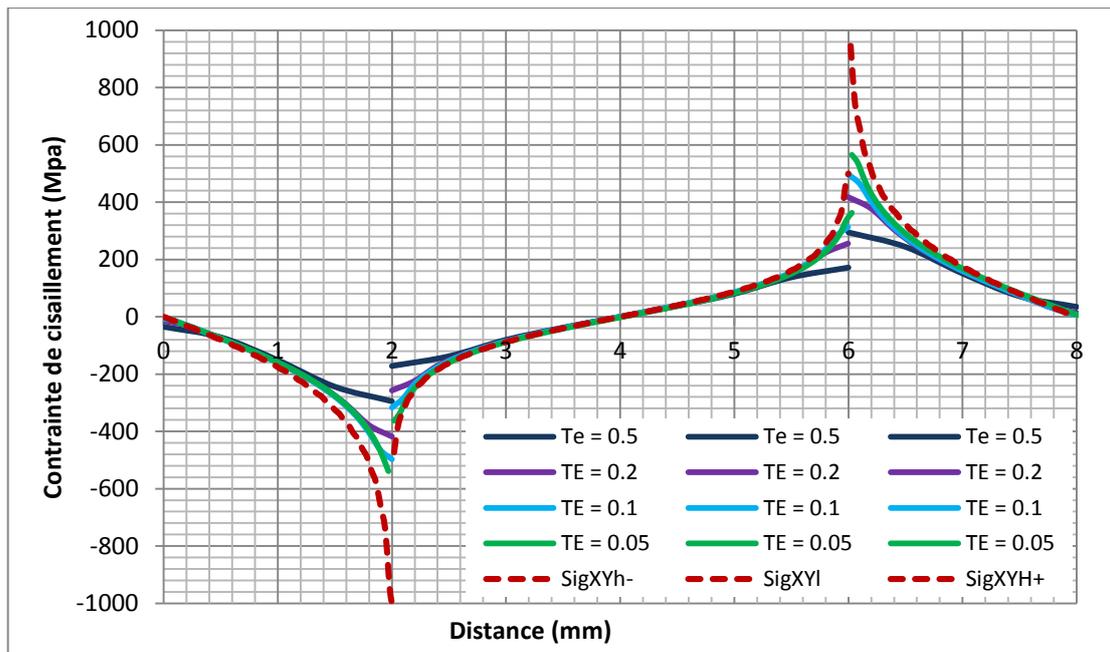


b) Contrainte normale à l'interface entre l'âme et une peau ($\epsilon_y = 0,01$)

Figure 2.15. Distribution de la contrainte normale à l'interface entre l'âme et une peau.



a) Contrainte tangentielle à l'interface entre l'âme et une peau ($\epsilon_x = 0,01$)



a) Contrainte tangentielle à l'interface entre l'âme et une peau ($\varepsilon_X = 0,01$)

Figure 2.16. Distribution de la contrainte tangentielle à l'interface entre l'âme et une peau.

Dans la figure 2.15, nous constatons que les valeurs de la contrainte normale le long de *BDFH* obtenues par H-modèle correspondent bien aux déformations imposées par les peaux. Nous observons également que dans la Fig. 2.16 les contraintes tangentielles obtenues par H-modèle et par le calcul EF ont une valeur singulière à l'intersection entre les parois verticales et inclinée, et que la valeur du côté d'une paroi verticale est environ le double de celle du côté de la paroi l'incliné, ceci est dû à la projection du déplacement vertical sur la paroi inclinée ($\nu_l = \nu_h \sin 30^\circ$).

La contrainte tangentielle obtenue par H-modèle est supérieure à celle obtenue par la modélisation EF, car le maillage EF n'est pas assez fin pour bien prévoir la singularité de la contrainte à cause de l'effet de lissage. Il est observé que quand les éléments sont petits, les résultats numériques sont plus proches des résultats analytiques.

II.6.2. Validation numérique du modèle d'homogénéisation en flexion

L'exemple de traction ci-dessus est également utilisé pour la validation du modèle d'homogénéisation de flexion. Les modules de flexion Q_X^*, Q_{XY}^*, Q_Y^* en fonction de la

hauteur de l'âme sont présentés dans la figure 2.17. On observe que les courbes analytiques de ces modules sont très proches de celles obtenues par Abaqus. Ces courbes sont bien situées entre les bornes supérieure et inférieure qui sont les mêmes que celles du problème de traction (Fig. 2.18).

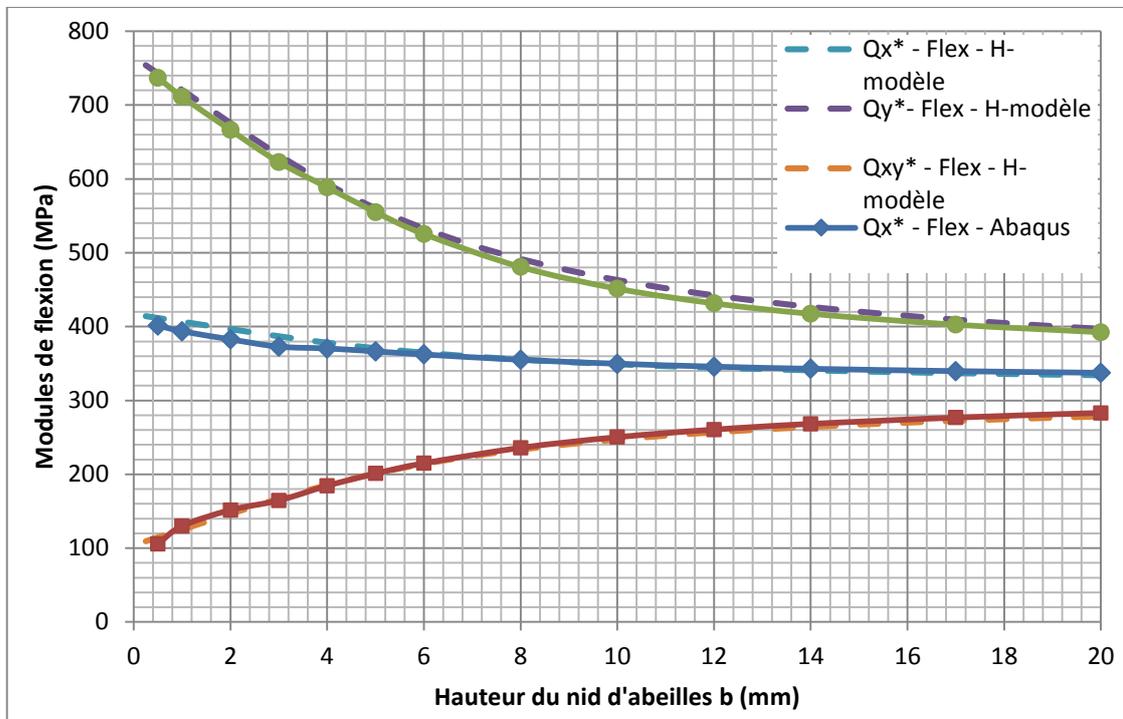


Figure 2. 17. Modules de flexion en fonction de la hauteur de l'âme ($b=0,25-20$ mm).

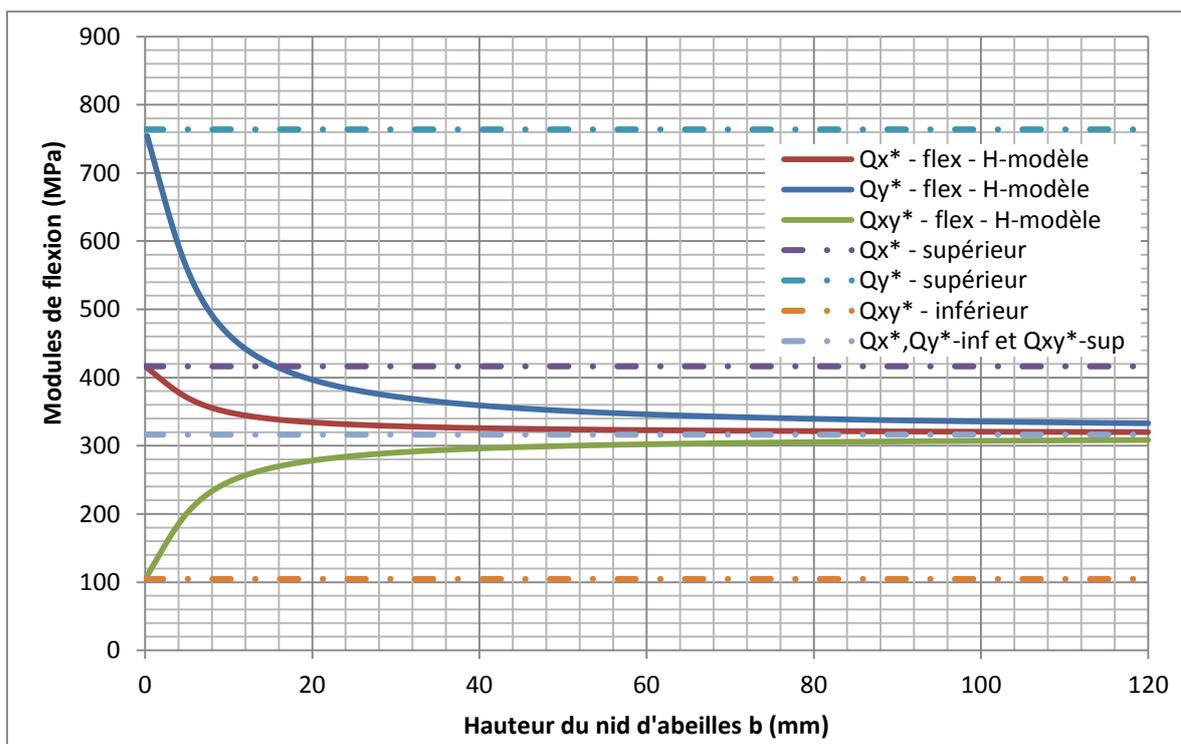


Figure 2.18. Modules de flexion entre les bornes supérieure et inférieure.

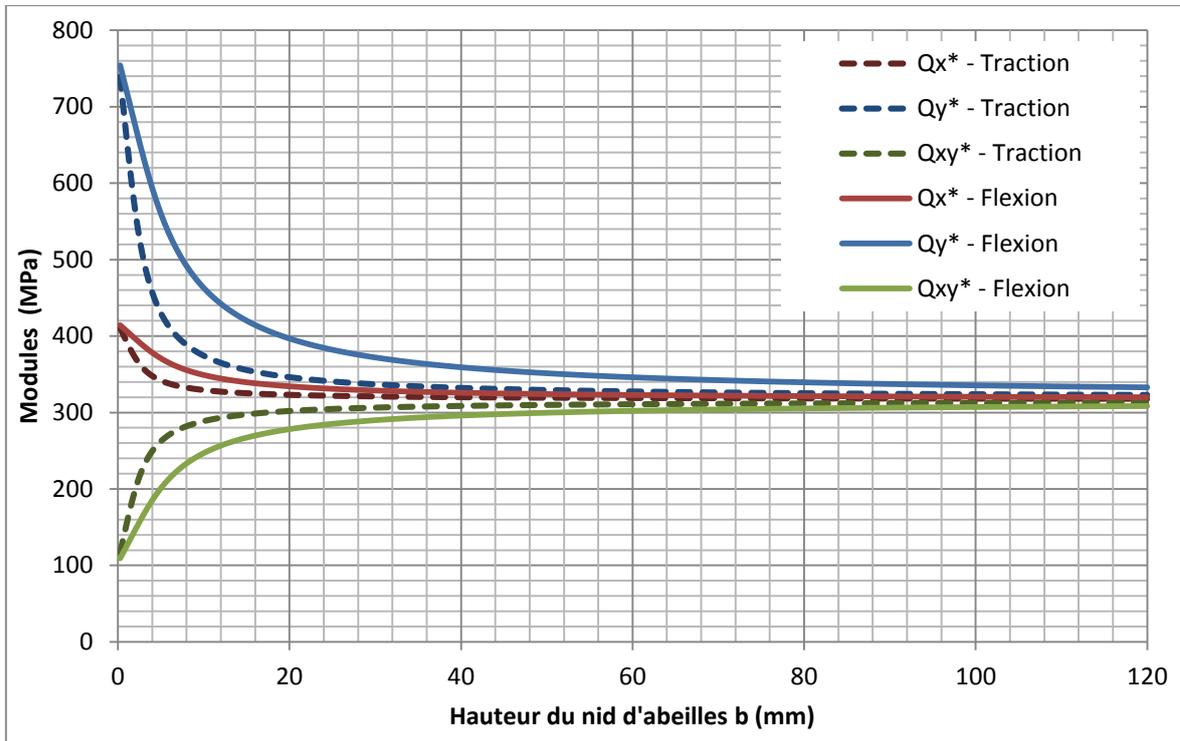


Figure 2.19. Comparaison des modules de traction et flexion ($b=0 - 120$ mm).

La figure 2.19 montre les deux modules de traction et flexion obtenus par H-modèles. On observe que les modules de traction et de flexion ont les mêmes bornes supérieures et inférieures, mais leurs évolutions en fonction de la hauteur de l'âme sont bien différentes. Dans le cas de la flexion, les modules Q_x^* et Q_y^* diminuent moins vite et le module Q_{xy}^* augmente moins vite en fonction de la hauteur que dans le cas de la traction. Ceci peut être expliqué par le fait que les modes de redistribution des contraintes sont bien différents dans les deux cas (voir Fig. 2.6 et 2.9).

II.7. Conclusion du chapitre II

Les modèles d'homogénéisation analytiques pour l'âme en nid d'abeilles de plaques sandwich ont été élaborés avec la méthode énergétique. Les formulations d'homogénéisation avec l'effet de peaux et l'effet de la hauteur de l'âme ont été développées pour calculer les modules d'élasticité de traction et de flexion. L'étude sur la redistribution des contraintes nous a emmené à proposer des fonctions trigonométriques

satisfaisant les conditions aux limites pour décrire les champs de déplacements additionnels. Ces H-modèles ont permis d'aboutir à une grande amélioration par rapport aux modèles classiques d'homogénéisation. Les modules homogénéisés de traction et de flexion sont en très bon accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes d'homogénéisation analytiques et par des simulations EF d'Abaqus, et ils sont bien situés entre les bornes supérieure et inférieure obtenues par la théorie de membrane.

Les contraintes normales et tangentielles aux interfaces des parois du Nida et des peaux ont également été étudiées. Un bon accord a été trouvé entre les résultats analytiques et numériques. La singularité de la contrainte tangentielle au point d'intersection des parois verticale et inclinée avec une peau a été bien détectée par nos H-modèles.

Le problème de traction-flexion couplés a été également traité et un bon accord entre les résultats analytiques et numériques a été trouvé.

Les présents H-modèles sont assez faciles à utiliser et permettent de réduire largement la préparation de la géométrie et du maillage EF, la mémoire de stockage et le temps de calcul.

Chapitre III

Modèle d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles en cisaillement et torsion

III.1. Introduction du chapitre III

Dans le chapitre précédant, les modèles d'homogénéisation analytique du nid d'abeilles en traction et flexion ont été présentés. Dans ce chapitre, les modèles d'homogénéisation en cisaillement dans le plan et en torsion sont présentés. L'effet des peaux est également pris en compte, du fait que les deux peaux sont beaucoup plus rigides que l'âme en nid d'abeilles. Une formulation de l'homogénéisation utilisant des séries de fonction trigonométriques est développée pour étudier l'influence de la hauteur de l'âme sur les modules de cisaillement, et les bornes supérieure et inférieure de ces modules sont analysées. Les H-modèles sont implémentés numériquement pour les problèmes de cisaillement dans le plan et de torsion.

Quelques travaux expérimentaux et numériques ont été réalisés pour déterminer les propriétés élastiques globales de structures en nid d'abeilles [5]. Beaucoup d'études ont été réalisées sur l'homogénéisation analytique des structures en nid d'abeilles [16], [17] et Gibson et Ashby [2] ont présenté une formule pour calculer le module de cisaillement. Des améliorations ont été réalisées par Masters et Evans [7]. Cependant, tous ces modèles mathématiques sont basés sur l'analyse de structures cellulaires pures sans effets des peaux ni de la hauteur de l'âme. Etant donné que les contraintes des deux peaux modifient significativement le mécanisme de déformation locale du nid d'abeilles, les propriétés mécaniques deviennent sensibles à la hauteur de l'âme en nid d'abeilles [13]. Une approche intéressante en deux étapes a été proposée par Xu et Qiao [9], [10] pour homogénéiser une cellule de nid d'abeilles avec l'effet des peaux. Des séries de fonctions basées sur la solution des équations d'équilibre ont été proposées sous conditions aux limites et de sollicitations simplifiées.

Nous avons proposé une formulation d'homogénéisation analytique pour calculer les modules de flexion et de traction de l'âme en nid d'abeilles dans une plaque sandwich avec les effets de peaux et de la hauteur [18], [19]. Nous avons également présenté les

formulations analytiques pour calculer les modules de cisaillement dans le plan et de torsion [20].

Dans ce chapitre, nous nous limitons aux problèmes de cisaillement dans le plan et de torsion dans lesquels les deux peaux sont beaucoup plus rigides que les parois du nid d'abeilles. Ainsi, la déformation de l'âme en nid d'abeilles est fortement contrainte par les deux peaux. La méthode d'homogénéisation énergétique est utilisée pour déterminer les modules de cisaillement dans le plan et de torsion. Pour étudier l'influence de la hauteur de l'âme sur les modules, les formulations en séries de fonctions trigonométriques sont proposées en tenant compte de la redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles. La minimisation de l'énergie interne de déformation permet d'obtenir les paramètres des séries de fonctions, puis l'énergie interne de déformation et finalement les modules de cisaillement et de torsion. En outre, la présente méthode permet d'obtenir les bornes supérieure et inférieure des modules lorsque la hauteur de l'âme tend vers zéro ou vers l'infini, respectivement.

III.2. Méthodologie pour déterminer les modules de cisaillement et de torsion

L'homogénéisation consiste à remplacer l'âme en nid d'abeilles par une plaque homogénéisée équivalente. Une méthode énergétique est utilisée dans notre étude pour déterminer les modules de cisaillement dans le plan et de torsion. Dans un VER (Fig. 3.1.), l'énergie interne de déformation Π_{int}^* de la plaque homogénéisée (repérée par *) doit être égale à celle de l'âme en nid d'abeilles Π_{int} :

$$\Pi_{\text{int}}^* = \Pi_{\text{int}} \quad (3.1)$$

$$\text{avec } \Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon^* \rangle [Q^*] \{ \varepsilon^* \} dV \quad (3.2)$$

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [Q] \{ \varepsilon \} dV \quad (3.3)$$

L'équation (3.1) est utilisée pour calculer les modules équivalents $[Q^*]$. Dans ce chapitre, les modules de cisaillement dans le plan et de torsion sont déterminés avec cette méthode.

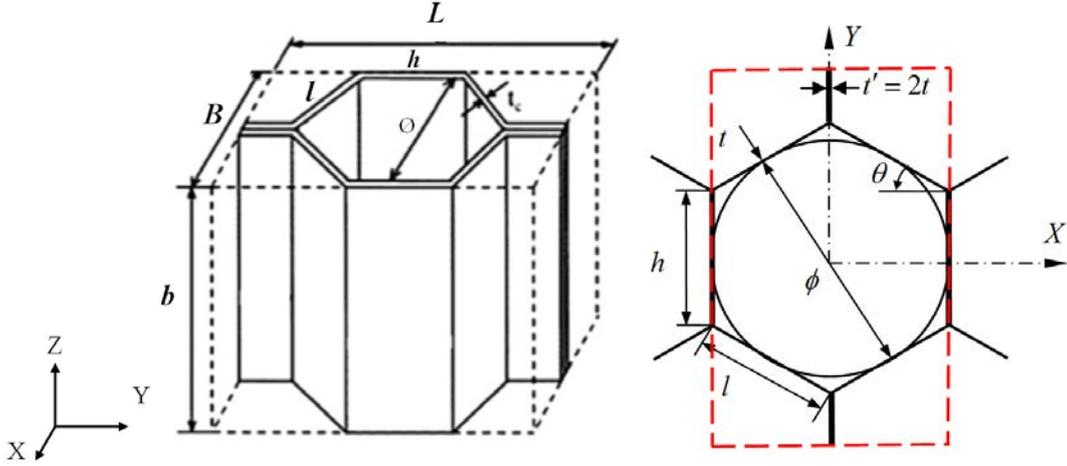


Figure 3.1. VER du nid d'abeilles pour l'homogénéisation en cisaillement et en torsion.

Une cellule de nid d'abeilles est considérée comme VER (Fig. 3.1). En raison de la symétrie triple, seulement 1/8 VER (Fig. 3.2) est considéré : la paroi verticale supérieure ($h/2$), la paroi inclinée (l) et la paroi verticale inférieure ($h/2$). Puisque les peaux sont supposées très rigides, la déformation des parois minces du nid d'abeilles est contrainte par les peaux, impliquant essentiellement des déformations de membranes des parois. Ceci conduit à une augmentation considérable des modules de cisaillement et de torsion. Cependant, les parois du nid d'abeilles sont contraintes uniquement aux interfaces avec les peaux, une redistribution de contraintes entre ces parois diminue les rigidités du nid d'abeilles en fonction de la hauteur de l'âme, appelée "effet de hauteur". L'objectif de ce chapitre est d'établir les modèles d'homogénéisation en tenant compte des effets de peaux et de la hauteur de l'âme afin de déterminer les modules de cisaillement dans le plan et de torsion.

L'énergie interne de déformation des trois parois (numérotées par k) peut être définie par l'expression suivante dans leurs repères locaux (Fig. 3.2) :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^k &= \frac{1}{2} \frac{Et_p}{1-\nu^2} \int_0^{b/2} \int_0^{L_k} \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dydx \\ &+ \frac{1}{2} D_k \int_0^{b/2} \int_0^{L_k} \left[w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\nu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\nu)w_{xy}^2 \right] dydx \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $L_k = \frac{h}{2}$, l ou $\frac{h}{2}$

La rigidité de flexion de la paroi inclinée est donnée par :

$$D_2 = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.5)$$

avec $L_2 = l$

La rigidité de flexion des parois verticales doit être la moitié de celle de la paroi à double épaisseur :

$$D_1 = D_3 = \frac{1}{2} \frac{Et'^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Et^3}{3(1-\nu^2)} \quad ; \quad (3.6)$$

avec $L_1 = L_3 = \frac{h}{2}$ et $t_1 = \frac{t'}{2}$

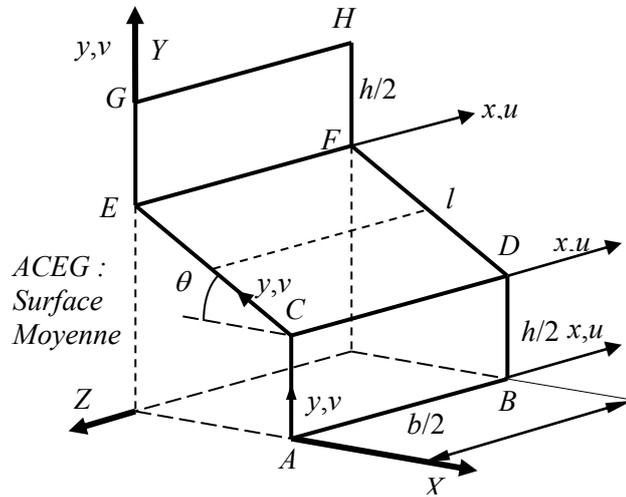


Figure 3.2. Repères locaux sur les parois verticales et inclinée.

Des séries de fonctions trigonométriques satisfaisant les conditions aux limites sont proposées pour les champs de déplacement additionnels dus à la redistribution des contraintes. Ainsi, l'énergie interne de déformation est définie en utilisant l'équation (3.4). La minimisation de l'énergie interne de déformation permet d'obtenir les paramètres dans les séries et ensuite l'énergie de déformation. Enfin, les modules de cisaillement G_{XY}^{C*} et de torsion G_{XY}^{T*} peuvent être obtenus en utilisant l'équation (3.1).

III.3. Modèle d'homogénéisation du nid d'abeilles pour le cisaillement dans le plan

III.3.1. Bornes supérieure et inférieure du module de cisaillement dans le plan G_{XY}^{C*}

1) Borne supérieure du module de cisaillement G_{XY}^{C*-sup}

La borne supérieure du module G_{XY}^{C*} est obtenue lorsque la hauteur de l'âme tend vers zéro. Dans ce cas, les déformations des parois sont entièrement entraînées par les peaux sans redistribution des contraintes. On impose une déformation de cisaillement γ sur 1/2 VER, cela implique une traction sur la paroi inclinée à gauche et une compression sur la paroi à droite (Fig. 3.3). Les déplacements horizontaux aux deux extrémités de la paroi inclinée droite sont alors donnés par :

$$U_{02} = \left(\frac{1}{2}h + l \sin \theta \right) \gamma \quad ; \quad U_{03} = \frac{1}{2}h\gamma \quad (3.7)$$

Ainsi, la déformation de compression dans la paroi inclinée est donnée par :

$$\varepsilon_s = \frac{(U_{03} - U_{02}) \cos \theta}{l} = -\frac{l \sin \theta \cdot \gamma \cdot \cos \theta}{l} = -\sin \theta \cdot \gamma \cdot \cos \theta \quad (3.8)$$

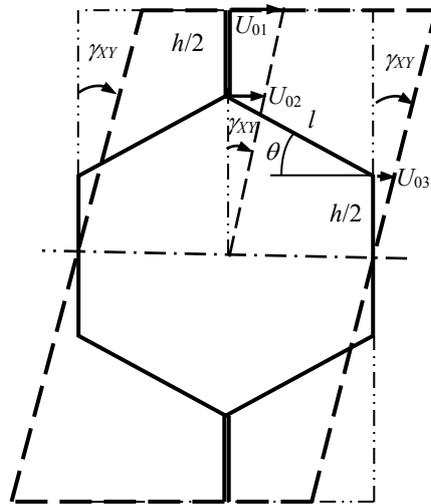


Figure 3.3. Cisaillement imposé par les peaux.

L'énergie interne de déformation dans le 1/8 du VER (Fig. 3.2) peut être calculée dans les deux repères locaux comme suit :

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{int}} &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) dx dy + \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_s^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_s) dx dy \right] \\ &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_x^2 \frac{bh}{4} + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_s^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_s) \frac{bl}{4} \right]\end{aligned}\quad (3.9)$$

La minimisation de l'énergie de déformation permet d'obtenir la déformation ε_x suivant la hauteur de l'âme (les axes x sont dans les repères locaux) :

$$\frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_x} = 0 \Rightarrow 2\varepsilon_x h + (2\varepsilon_x + 2\nu\varepsilon_s)l = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{\nu l \varepsilon_s}{h+l}\quad (3.10)$$

Ceci permet de calculer l'énergie interne de déformation :

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{int}} &= \frac{Ebt}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu^2 \varepsilon_s^2 l^2}{(h+l)^2} (h+l) + \varepsilon_s^2 l + 2\nu \left(-\frac{\nu l \varepsilon_s}{h+l} \right) l \varepsilon_s \right] \\ &= \frac{Ebt}{4(1-\nu^2)} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \gamma^2 \frac{lh+l^2-\nu^2 l^2}{h+l}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Cette énergie doit être égale à l'énergie du solide homogénéisé en cisaillement. Ainsi, on obtient le module de cisaillement équivalent :

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} G_{XY}^{C^*-\text{sup}} \gamma^2 l \cdot \cos \theta \cdot \frac{b}{2} (h+l \cdot \sin \theta)\quad (3.13)$$

$$G_{XY}^{C^*-\text{sup}} = \frac{Et}{l(1-\nu^2)} \cdot \frac{\sin^2 \theta \cdot \cos \theta (lh+l^2-\nu^2 l^2)}{(h+l \cdot \sin \theta)(h+l)}\quad (3.14)$$

2) Borne inférieure du module de cisaillement dans le plan $G_{XY}^{C^*-\text{inf}}$

La borne inférieure du module $G_{XY}^{C^*}$ est obtenue lorsque la hauteur de l'âme tend vers l'infini, ainsi l'effet des peaux s'applique uniquement aux frontières du VER (lignes pointillés de la Fig. 3.1) et aux interfaces entre les peaux et les parois du nid d'abeilles. Dans la plupart de zones des parois, la redistribution des contraintes entre les parois est peu influencée par les peaux.

On fixe le 1/8 du VER en bas ($Y=0$) et on impose un déplacement horizontal \bar{u} en haut pour appliquer le cisaillement (Fig. 3.2). On considère les parois du nid d'abeilles comme des barres et on regroupe les deux parois verticales pour simplifier le calcul sans changer le problème physique (Fig. 3.4). Le cisaillement donné par \bar{u} implique un déplacement horizontal en B dû à l'effet des peaux :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\bar{u}}{h+l.\sin\theta} \\ u = \frac{\bar{u}}{h+l.\sin\theta} l \sin\theta \end{cases} \quad (3.15)$$

Soit v le déplacement vertical du point B dû à la redistribution des contraintes, alors les déformations dans les parois verticale et inclinée sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_h = -\frac{v}{h} \\ \varepsilon_s = \frac{1}{l}(-u.\cos\theta + v.\sin\theta) \end{cases} \quad (3.16)$$

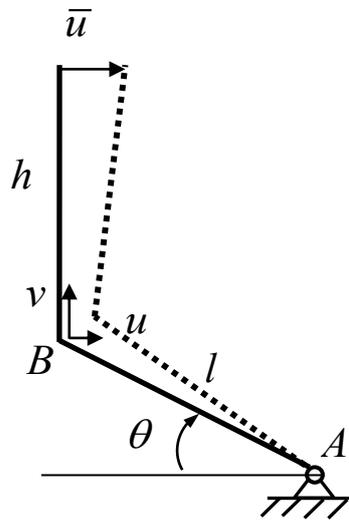


Figure 3.4. Déformation du 1/4 VER due à la redistribution des contraintes.

Ainsi l'énergie interne de déformation s'écrit :

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{Ebt}{2} (\varepsilon_h^2 h + \varepsilon_s^2 l) = \frac{Ebt}{2} \left(\frac{v^2}{h^2} h + \frac{1}{l^2} (-u.\cos\theta + v.\sin\theta)^2 l \right) \quad (3.17)$$

Les deux parois sont considérées comme des barres en traction en négligeant la contribution de ε_x . Cette hypothèse est assez réaliste lorsque la hauteur b de l'âme est très grande.

La minimisation de l'énergie interne de déformation permet d'obtenir le déplacement vertical du point B , satisfaisant l'équilibre des 2 parois :

$$\frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial v} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{hu.\sin\theta.\cos\theta}{h.\sin^2\theta + l} \quad (3.18)$$

En substituant l'équation (3.18) dans (3.17), on peut calculer l'énergie interne de déformation:

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{int}} &= \frac{Ebt}{2} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{hu \sin \theta \cos \theta}{h \sin^2 \theta + l} \right)^2 + \frac{1}{l} \left(-u \cos \theta + \frac{hu \cos \theta \sin^2 \theta}{h \sin^2 \theta + l} \right)^2 \right] \\ &= \frac{Ebt}{2} \frac{h(\sin \theta \cos \theta)^2 + l \cos^2 \theta}{(h \sin^2 \theta + l)^2} u^2 = \frac{Ebt}{2} \frac{\cos^2 \theta}{h \sin^2 \theta + l} u^2\end{aligned}\quad (3.19)$$

Cette énergie doit être égale à l'énergie du solide homogénéisé en cisaillement dans le plan. Ainsi, on obtient le module équivalent de cisaillement dans le plan :

$$\Pi_{\text{int}} = \Pi_{\text{int}}^* \Rightarrow \frac{Ebt}{2} \frac{\cos^2 \theta}{h \sin^2 \theta + l} u^2 = \frac{1}{2} G_{XY}^{C^*-\text{inf}} l \cos \theta b (h + l \sin \theta) \frac{u^2}{l^2 \sin^2 \theta} \quad (3.20)$$

$$G_{xy}^{C^*-\text{inf}} = Et \frac{l \cos \theta \sin^2 \theta}{(h \sin^2 \theta + l)(h + l \sin \theta)} \quad (3.21)$$

III.3.2. Formulation en séries de fonctions trigonométriques pour le cisaillement dans le plan de l'âme en nid d'abeilles

1) Déformations de base du nid d'abeilles dues au cisaillement dans le plan

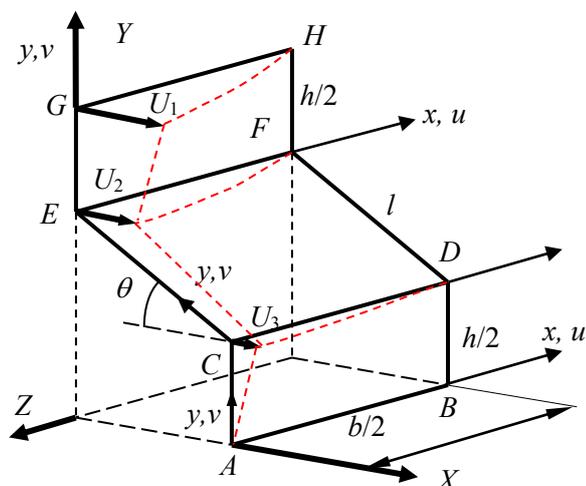
Le champ de déplacements de base dans une âme en nid d'abeilles est donné par le cisaillement imposé par les peaux (Fig. 3.3). Les déplacements horizontaux (U_1, U_2, U_3) ne donnent pas la déformation de traction dans les parois verticales; par contre, ces déplacements sont différents aux deux extrémités de la paroi inclinée, conduisant à une déformation normale dans cette paroi :

$$\varepsilon_s = \frac{(U_{03} - U_{02}) \cos \theta}{l} = \gamma_{XY} \left(\frac{h}{2} - l \sin \theta - \frac{h}{2} \right) \frac{\cos \theta}{l} = -\sin \theta \cos \theta \gamma_{XY} = -\alpha \gamma_{XY} \quad (3.22)$$

où $\alpha = \sin \theta \cos \theta$.

Aux interfaces entre le nid d'abeilles et les peaux, les parois du nid d'abeilles ne sont soumises qu'aux déplacements de base imposés par les peaux. Cependant, dans les autres zones des parois, les déplacements de base ne peuvent pas satisfaire la condition d'équilibre entre la paroi inclinée et les parois verticales. Il y a une redistribution des contraintes entre ces parois, donnant un champ de déplacements additionnels (Fig. 3.5). Cette redistribution

des contraintes réduit beaucoup la rigidité de cisaillement, dépendant fortement de la hauteur du nid d'abeilles.

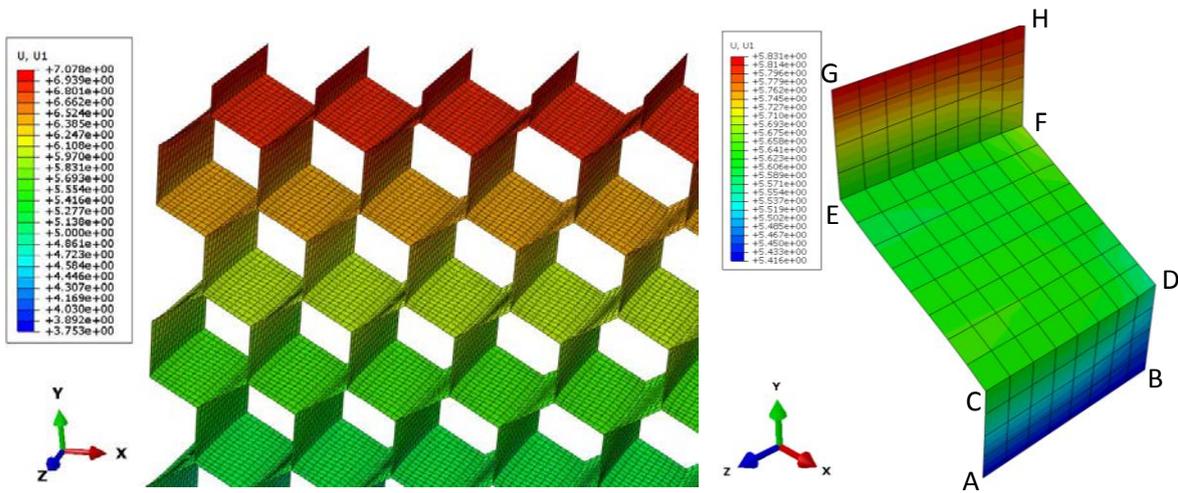


(ACEG: surface moyenne de l'âme)

Figure 3.5. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes.

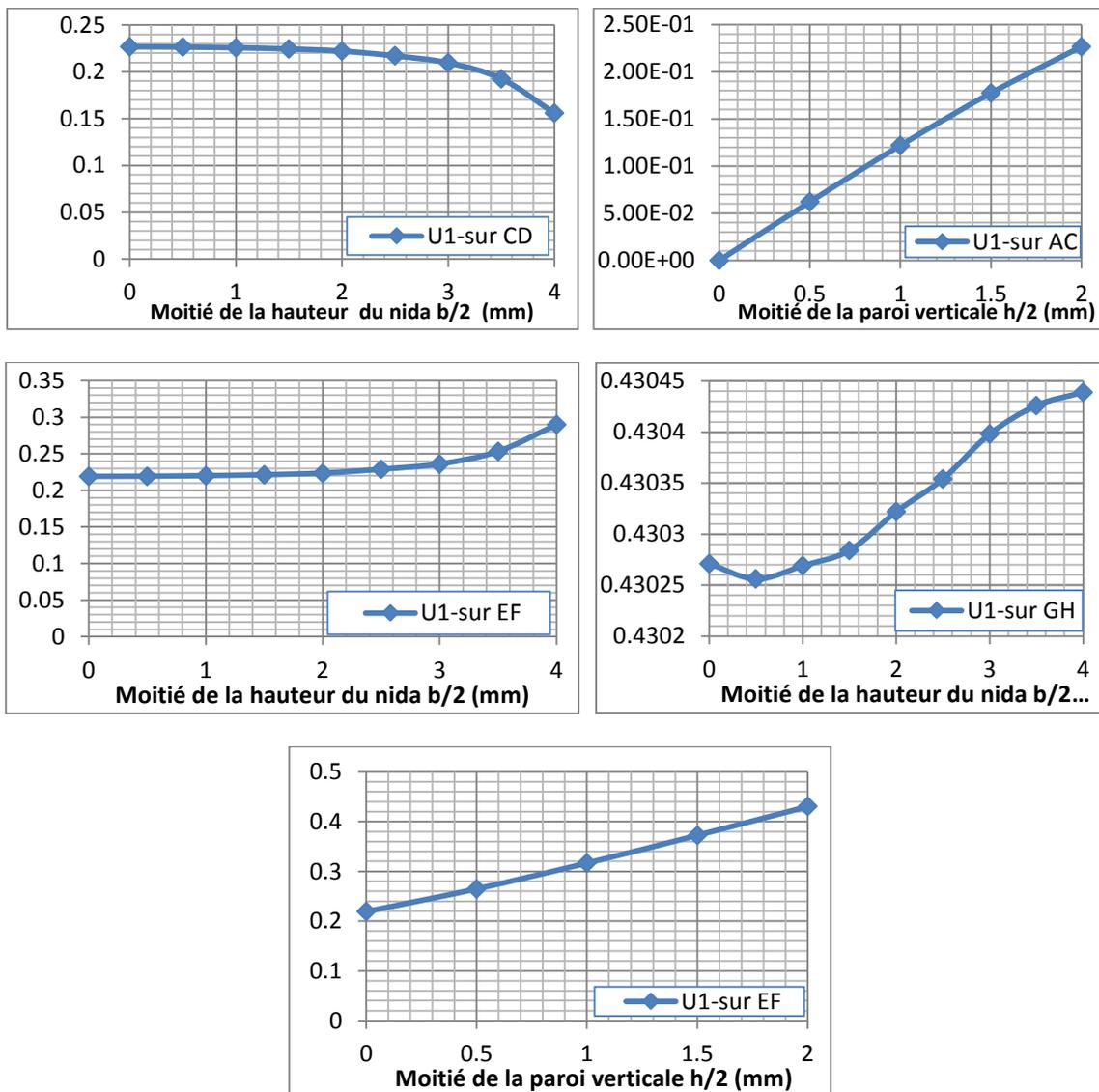
2) Champ de déplacements additionnels dû à la redistribution des contraintes

Dans plusieurs études, la solution analytique des équations différentielles 2D de l'équilibre a été utilisée pour décrire le champ de déplacements ([9], [10], [17]). Toutefois, ce type de solutions ne peut être obtenu que pour des cas de chargement et de conditions aux limites simples. Dans notre étude, des simulations numériques sont effectuées sur une grande plaque sandwich en nid d'abeilles pour obtenir les déplacements dans le nid d'abeilles. Dans la Fig. 3.6, on observe que les déplacements additionnels sur les parois verticales ne sont que dans la direction horizontale, ceci peut être expliqué par la condition de la continuité avec les cellules adjacentes. Ces déplacements additionnels peuvent être représentés par la Fig. 3.5. Ainsi, les variations de ces déplacements peuvent être décrites par des fonctions linéaires le long de la direction locale y et par des fonctions cosinus le long de la direction locale x . Evidemment, ces fonctions doivent satisfaire les conditions aux limites. Dans Fig. 3.7, on observe que les déplacements verticaux ne se trouvent que sur la paroi inclinée et leur distribution est sinusoïdale suivant x et y du repère local. Cela implique la flexion hors du plan de la paroi mince ayant une influence beaucoup plus faible que l'effet de membrane.



a) Ame en cisaillement suivant X

b) Déplacement suivant X sur 1/8 VER



b) Déplacements suivant X sur les segments CD , EF , GH , AC , CE , EG (Fig. 3.5)

Figure 3.6. Distribution des déplacements suivant X .

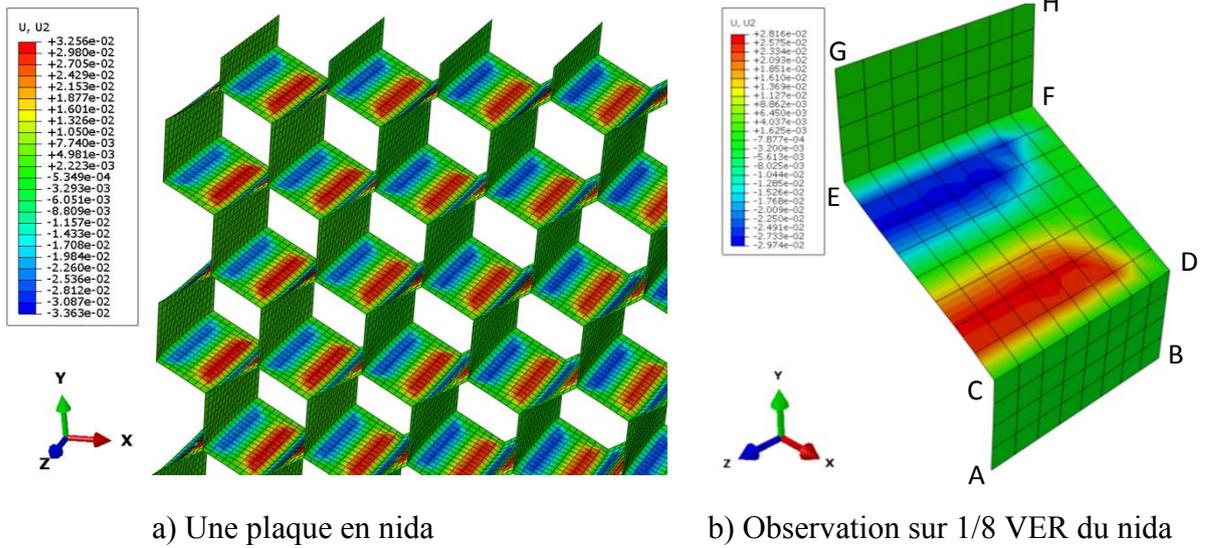


Figure 3.7. Distribution des déplacements suivant Y.

a) Champs de déplacements et de déformation sur la paroi verticale supérieure

Selon les distributions des déplacements ci-dessus et les conditions aux limites dans la paroi verticale supérieure, le champ de déplacements additionnels dans le repère local xy est proposé comme suit :

$$\begin{cases} u = a_0 \frac{2}{b} x \\ v = 0 \\ w = \sum_{i=1}^N \left[a_i \frac{2y}{h} + b_i \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{b} \end{cases} ; \quad m = 2i - 1 \quad (3.23)$$

où le déplacement u suivant x est dû à l'effet de Poisson, a_0 , a_i et b_i sont les paramètres à déterminer.

Les déplacements u et v dans le plan xy donnent les déformations de membrane. Le déplacement transversal w donne les déformations de flexion :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} = a_0 \frac{2}{b} \\ \varepsilon_y = v_{,y} = 0 \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{,xx} = -\frac{m^2\pi^2}{b^2} \sum_{i=1}^N \left[a_i \frac{2y}{h} + b_i \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{b} \\ w_{,yy} = 0 \\ w_{,xy} = -\frac{2}{hb} \sum_{i=1}^N m\pi (a_i - b_i) \sin \frac{m\pi x}{b} \end{cases} \quad (3.24)$$

En utilisant les déformations ci-dessus, on obtient l'énergie interne de déformation dans la paroi verticale supérieure :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^1 &= \frac{Et_1}{2(1-\nu^2)} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \varepsilon_x^2 dy dx + \frac{D_1}{2} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \left[w_{,xx}^2 + 2(1-\nu)w_{,xy}^2 \right] dy dx \\ &= \frac{Eht_1}{2b(1-\nu^2)} a_0^2 + \frac{D_1}{2} \left[\frac{h}{24b^3} \sum_{i=1}^N (a_i^2 + a_i b_i + b_i^2) m^4 \pi^4 + \frac{1-\nu}{bh} \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (a_i - b_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec $D_1 = \frac{Et_1^3}{3(1-\nu^2)}$

b) Champs de déplacements sur la paroi inclinée

La paroi inclinée est soumise essentiellement à la traction ou compression, mais aussi au cisaillement, à la flexion et la torsion. Dans le repère local de la paroi inclinée, la même expression de u dans Eq. (3.23) est utilisée en raison de la limitation des peaux très rigides. Les déplacements horizontaux additionnels sont projetés suivant les directions y et z :

$$\begin{cases} u = a_0 \frac{2}{b} x \\ v = -\cos \theta \sum_{i=1}^N \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{b} \\ w = \sin \theta \sum_{i=1}^N \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{b} \end{cases} \quad (3.26)$$

où a_0 , a_i , b_i et c_i sont les paramètres à déterminer.

En incluant les déformations de base ε_s (Eq. 3.5), les déformations de membrane et de flexion sont obtenues :

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = u_{,x} = a_0 \frac{2}{b} \\
\varepsilon_y = \varepsilon_s + v_{,y} = \varepsilon_s - \frac{\cos \theta}{l} \sum_{i=1}^N (b_i - c_i) \cos \frac{m\pi x}{b} \\
\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \cos \theta \sum_{i=1}^N \frac{m\pi}{b} \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] \\
\\
\begin{cases}
w_{,xx} = -\sin \theta \sum_{i=1}^N \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{b} \\
w_{,yy} = 0 \\
w_{,xy} = -\sin \theta \frac{1}{lb} \sum_{i=1}^N m\pi (b_i - c_i) \sin \frac{m\pi x}{b}
\end{cases}
\end{cases} \quad (3.27)$$

En utilisant les déformations ci-dessus, l'énergie interne dans la paroi inclinée est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
\Pi_{\text{int}}^2 &= \frac{Et_2}{2(1-\nu^2)} \int_0^{b/2} \int_0^l \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dydx \\
&\quad + \frac{1}{2} D_2 \int_0^{b/2} \int_0^l \left[w_{,xx}^2 + 2(1-\nu)w_{,xy}^2 \right] dydx \\
&= \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{l}{b} a_0^2 + \frac{bl}{2} \varepsilon_s^2 - 2\varepsilon_s \cos \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i) \frac{b}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \right. \\
&\quad + \frac{b}{4l} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 - 2\nu l a_0 \varepsilon_s - 4\nu a_0 \cos \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i) \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \\
&\quad \left. + \frac{(1-\nu)l}{24b} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} D_2 \left[\frac{l}{12b^3} \sum_{i=1}^N (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) m^4 \pi^4 + \frac{1-\nu}{2bl} \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 m^2 \pi^2 \right] \sin^2 \theta
\end{aligned} \quad (3.28)$$

c) Champs de déplacement sur la paroi verticale inférieure

De la même façon, dans le repère local de la paroi verticale inférieure, les déplacements supplémentaires sont définis par :

$$\begin{cases} u = a_0 \frac{2}{b} x \\ v = 0 \\ w = \sum_{i=1}^N c_i \frac{2y}{h} \cos \frac{m\pi x}{b} \end{cases} \quad (3.29)$$

Les déformations de membrane et de flexion sont alors obtenues :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} = \frac{2}{b} a_0 \\ \varepsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = 0 \\ w_{,xx} = - \sum_{i=1}^N c_i \frac{2y}{h} \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \cos \frac{m\pi x}{b} \\ w_{,yy} = 0 \\ w_{,xy} = - \frac{2}{bh} \sum_{i=1}^N c_i m\pi \cos \frac{m\pi x}{b} \end{cases} \quad (3.30)$$

Ainsi, l'énergie interne dans la paroi verticale inférieure est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^3 &= \frac{Et_1}{2(1-\nu^2)} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \varepsilon_x^2 dy dx + \frac{D_3}{2} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \left[w_{,xx}^2 + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right] dy dx \\ &= \frac{Eht_1}{2b(1-\nu^2)} a_0^2 + \frac{D_3}{2} \left[\frac{h}{24b^3} \sum_{i=1}^N c_i^2 m^4 \pi^4 + \frac{1-\nu}{bh} \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 c_i^2 \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

3) Minimisation de l'énergie interne de déformation totale dans 1/8 VER du nid d'abeilles

Une fois que l'énergie interne dans chaque paroi est calculée, l'énergie interne totale dans 1/8 VER du nid d'abeilles est obtenue :

$$\begin{aligned}
\Pi_{\text{int}} &= \Pi_{\text{int}}^1 + \Pi_{\text{int}}^2 + \Pi_{\text{int}}^3 \\
&= \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{2(h+l)}{b} a_0^2 - 2\nu l a_0 \varepsilon_s - 4\nu a_0 \cos \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i) \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{bl}{2} \varepsilon_s^2 \right. \\
&\quad - 2\varepsilon_s \cos \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i) \frac{b}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{b}{4l} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 \\
&\quad \left. + \frac{(1-\nu)l}{24b} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) \right] \\
&\quad + \frac{D_1}{2} \left[\frac{h}{24b^3} \sum_{i=1}^N (a_i^2 + a_i b_i + b_i^2) m^4 \pi^4 + \frac{1-\nu}{bh} \sum_{i=1}^N (a_i - b_i)^2 m^2 \pi^2 \right] \\
&\quad + \frac{D_2}{2} \left[\frac{l}{12b^3} \sum_{i=1}^N (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) m^4 \pi^4 + \frac{1-\nu}{2bl} \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 m^2 \pi^2 \right] \sin^2 \theta \\
&\quad + \frac{D_3}{2} \left[\frac{h}{24b^3} \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 c_i^2 + \frac{1-\nu}{bh} \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 c_i^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Une fois que le cisaillement est imposé par les peaux, le travail des forces extérieures est nul au cours de la redistribution des contraintes. La minimisation de l'énergie interne de déformation du 1/8 VER conduit à un système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_i} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial b_i} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial c_i} = 0 \end{array} \right. \tag{3.33}$$

La résolution du système d'équation ci-dessus permet d'obtenir les paramètres inconnus a_0 , a_i , b_i et c_i . Ensuite, l'énergie interne de déformation Π_{int} en fonction de la hauteur de l'âme b peut être calculée. Cette énergie du nid d'abeilles doit être égale à l'énergie interne de déformation du solide homogénéisé, enfin le module de cisaillement équivalent du nid d'abeilles $G_{XY}^{C^*}$ est obtenu :

$$\frac{1}{2} G_{XY}^{C^*} \gamma_{XY}^2 \frac{b}{2} l \cos \theta (h + l \sin \theta) = \Pi_{\text{int}} \Rightarrow G_{XY}^{C^*} \tag{3.34}$$

Il est à noter que $G_{XY}^{C^*}$ est indépendant du choix de γ_{XY} , parce que le facteur γ_{XY}^2 existe également du côté droit de l'équation (3.34).

4) Concordance des bornes supérieure et inférieure de la rigidité de cisaillement

La formulation en séries de fonctions trigonométriques ci-dessus permet d'obtenir la borne supérieure de l'énergie de déformation minimisée en prenant $b \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ et d'obtenir la borne inférieure en prenant $b \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$. Ainsi les paramètres a_0 , a_i , b_i et c_i peuvent être obtenus, et ensuite les bornes supérieure et inférieure du module de cisaillement peuvent être calculées en utilisant les équations (3.32) et (3.34) :

a) Pour la borne supérieure, $N \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{-vt_2l}{2(t_1h + t_2l)} b\beta\lambda_{XY} \\ a_i = b_i = c_i = 0 \end{cases} \Rightarrow G_{XY}^{C^*-\text{sup}} = \frac{Et_2}{1-\nu^2} \frac{\beta^2}{\cos\theta(h + l \sin\theta)} \left(1 - \frac{\nu^2 t_2 l}{t_1 h + t_2 l}\right) \quad (3.35)$$

b) Pour la borne inférieure, $N \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_i - c_i = \frac{4l\varepsilon_{sl}}{\cos\theta} \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow G_{XY}^{C^*-\text{inf}} = 0 \quad (3.36)$$

La validation numérique dans la section III.5 montre que ces bornes supérieure et inférieure donnent de bonnes limitations aux courbes des modules de cisaillement obtenues par les H-modèles et la simulation par éléments finis de coque d'Abaqus.

III.3.3. Programmation en Fortran pour le calcul du module de cisaillement $G_{XY}^{C^*}$

Le système d'équations établi ci-dessus est résolu numériquement par un programme en Fortran. L'organigramme est décrit ci-dessous :

- **Données:** $\gamma_{xy} = 0.1$; $\varepsilon_s = -\gamma_{xy} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$; $\varepsilon_y = 0$

- **Système d'équations linéaires:**

$$A_{11} = \frac{h+l}{b} \quad ; \quad B_1 = 0.5 \nu l \varepsilon_s$$

do $i = 2, n$

$$j = 2i-3$$

$$A_{1i} = \frac{2\nu}{j\pi} (\sin\theta - 1) \sin \frac{j\pi}{2}$$

$$A_{i1} = A_{1i}$$

$$A_{vi} = 0.5 \left(\frac{b}{h} + \frac{b}{l} \sin^2 \theta \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{(j\pi)^2}{24} \left(\frac{h}{b} + \frac{l}{b} \sin^2 \theta \right)$$

$$B_i = \frac{b}{j\pi} \varepsilon_s \sin \theta \cdot \sin \frac{j\pi}{2}$$

end do

- Résolution : $[A]\{a\} = \{B\} \rightarrow \{a\}$

- Calcul du module de cisaillement: $G_{XY}^* = \frac{4(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)}{\gamma^2 l \cos \theta \cdot b \cdot (h + l \cdot \sin \theta)}$

III.4. Modèle d'homogénéisation du nid d'abeilles en torsion

III.4.1. Bornes supérieure et inférieure du module de torsion G_{XY}^{T*}

1) Borne supérieure de G_{XY}^{T*}

La borne supérieure du module de torsion G_{XY}^{T*-sup} est obtenue dans le cas où la hauteur de l'âme en nid d'abeilles tend vers zéro. Ainsi, on peut considérer que les déplacements suivant X et Y en tout point sont identiques à ceux des peaux sans la redistribution des contraintes entre les parois. La variation des déplacements suivant Z due à l'effet de Poisson est supposée linéaire le long de Z (ou x local) :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha \kappa x \\ \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_s = -\beta \kappa x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta = \sin \theta \cdot \cos \theta ; \quad \kappa = \beta_{xy} \quad (3.37)$$

où $\kappa = \beta_{xy}$ est la moitié de la courbure de torsion.

Ainsi, on peut définir l'énergie interne de déformation et la minimisation de cette énergie permet de déterminer le paramètre α :

$$\begin{aligned} \Pi_{int} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_s^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_s) dx dy \\ &= \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} \alpha^2 \kappa^2 x^2 dx dy + \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} (\alpha^2 \kappa^2 x^2 + \beta^2 \kappa^2 x^2 - 2\alpha \kappa x \cdot \beta \kappa x) dx dy \\ &= \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \frac{\kappa^2 b^3}{48} [\alpha^2 (h+l) + \beta^2 l - 2\nu \alpha \beta l] \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha(h+l) - 2\nu\beta l = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\nu\beta l}{h+l} \quad (3.39)$$

En substituant α dans l'équation (3.38), on obtient l'énergie interne de déformation Π_{int} sur les parois $h/2$ et $l/2$. $2\Pi_{\text{int}}$ doit être égale à l'énergie interne du solide homogénéisé en torsion. Finalement, la borne supérieure du module de torsion est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} 2\Pi_{\text{int}} &= \frac{Et\kappa^2 b^3}{48(1-\nu^2)} \left[\frac{(\nu\beta l)^2}{(h+l)^2} (h+l) + \beta^2 l - 2\nu\beta l \frac{\nu\beta l}{h+l} \right] \\ &= \frac{Et\kappa^2 b^3}{48(1-\nu^2)} \frac{\beta^2 l (h+l - \nu^2 l)}{h+l} = \frac{1}{2} G_{XY}^{T^*-\text{sup}} \frac{l \cos \theta b^3}{12 \times 2} (h+l \sin \theta) \kappa^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$G_{XY}^{T^*-\text{sup}} = \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{\beta^2 l (h+l - \nu^2 l)}{\cos \theta (h+l \sin \theta) (h+l)} \quad (3.41)$$

2) Borne inférieure de $G_{XY}^{T^*}$

La borne inférieure du module de torsion $G_{XY}^{T^*-\text{inf}}$ est obtenue lorsque la hauteur de l'âme du Nida tend vers infini. Ainsi, on peut supposer que l'effet des peaux s'applique uniquement aux interfaces entre le nid d'abeilles et les peaux et aux frontières du VER considéré. En conséquence, une redistribution des contraintes se produit entre les parois du nid d'abeilles.

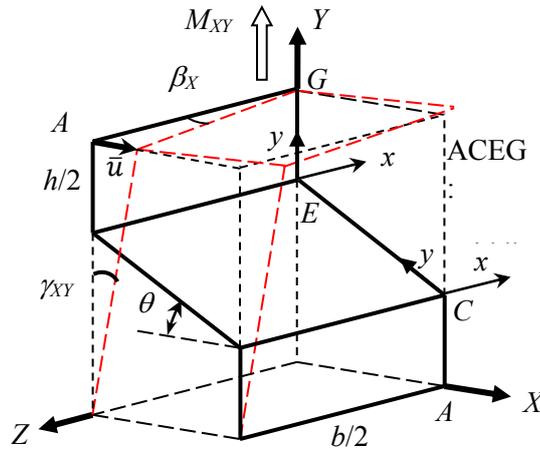


Figure 3.8. Déformation de base due au moment de torsion M_{XY} dans 1/8 VER.

On fixe 1/8 du VER en bas ($Y=0$) et on impose un déplacement horizontal \bar{u} en A pour avoir une torsion (Fig. 3.8). On modélise le Nida en $Z=b/2$ comme un problème de barres en traction et compression (Fig. 3.3). Les 2 parois verticales sont regroupées pour simplifier le calcul sans changer le problème physique. Le cisaillement dû au déplacement imposé \bar{u} implique un déplacement horizontal en B proportionnel à la hauteur :

$$u = \frac{\bar{u} \cdot l \sin \theta}{h + l \cdot \sin \theta} \quad (3.42)$$

Soit v le déplacement vertical du point B, les déformations dans les parois verticale et inclinée sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_h = -\frac{v}{h} \\ \varepsilon_s = \frac{1}{l}(-u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) \end{cases} \quad (3.43)$$

Ainsi, l'énergie interne de déformation s'écrit :

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{Ebt}{2} (\varepsilon_h^2 h + \varepsilon_s^2 l) = \frac{Ebt}{2} \left(\frac{v^2}{h^2} h + \frac{1}{l^2} (-u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta)^2 l \right) \quad (3.44)$$

La minimisation de l'énergie interne de déformation permet d'obtenir le déplacement vertical du point B, satisfaisant l'équilibre des 2 parois :

$$\frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{h} 2v + \frac{1}{l} 2(-u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) \sin \theta = 0 \quad (3.45)$$

$$v = \frac{hu \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{h \cdot \sin^2 \theta + l} \quad (3.46)$$

Ces déplacements impliquent les déformations normales dans les parois verticale et inclinée. Ces déformations varient linéairement en fonction de x (ou $-Z$) : elles sont égales à zéro sur la surface moyenne en $x = 0$ et atteignent leurs valeurs maximales en $x = b/2$:

$$\begin{cases} \varepsilon_h(x) = -\frac{v}{h} \cdot \frac{2}{b} x = -\frac{2v}{h} \cdot \frac{x}{b} = C_1 \frac{x}{b} \\ \varepsilon_l(x) = \frac{1}{l} (-u \cos \theta + v \sin \theta) \cdot \frac{2}{b} x = C_2 \frac{x}{b} \end{cases} \quad (3.47)$$

Ainsi, on peut calculer l'énergie interne de déformation sur les parois h et l :

$$\begin{aligned}
\Pi_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^h Et \varepsilon_h^2(x) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^l Et \varepsilon_l^2(x) dx dy \\
&= \frac{Et}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} C_1^2 \frac{x^2}{b^2} dx \cdot h + \frac{Et}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} C_2^2 \frac{x^2}{b^2} h dx \cdot l = \frac{Etb}{48} [C_1^2 h + C_2^2 l]
\end{aligned} \tag{3.48}$$

La minimisation de l'énergie interne de déformation permet d'obtenir C_1 et C_2 , et ensuite de calculer cette énergie :

$$\frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial C_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial C_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_{\text{int}} \tag{3.49}$$

Cette énergie interne doit être égale à celle du solide homogénéisé, ainsi on obtient le module de cisaillement en torsion :

$$\Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} G_{XY}^{T^*-\text{inf}} \frac{l \cos \theta b^3}{12 \times 2} (h + l \cdot \sin \theta) \kappa^2 \tag{3.50}$$

avec la courbure de torsion : $\kappa = \beta_{X'Y} = \frac{2\bar{u}}{b(h + l \cdot \sin \theta)}$

$$\Rightarrow G_{XY}^{T^*-\text{inf}} = \frac{48 \Pi_{\text{int}}}{l \cdot \cos \theta (h + l \cdot \sin \theta) \kappa^2 b^3} \tag{3.51}$$

où $\kappa = \beta_{X'Y}$ est la moitié de la courbure de torsion imposée. Puisque κ^2 existe aussi dans le numérateur Π_{int} , le module de torsion est donc indépendant de la valeur de κ .

III.4.2. Formulation de l'homogénéisation du nid d'abeilles en torsion

1) Déformations de base du nid d'abeilles en torsion

La procédure pour le problème de cisaillement est également adoptée pour le problème de torsion. D'abord, nous considérons les déformations de base du nid d'abeilles dues à un moment de torsion M_{XY} (Fig. 3.9) et ensuite les déformations additionnelles. Ce moment de torsion donne un angle de rotation β_X et un déplacement \bar{u} (imposées par les peaux). En utilisant l'équation (3.20), la déformation normale ε_s à l'interface de la paroi inclinée et des peaux peut être obtenue :

$$\gamma_{XY} = \frac{\beta_X b/2}{h + l \sin \theta} = \beta_{X'Y} \frac{b}{2};$$

$$\varepsilon_s = -\alpha \gamma_{XY} = -\alpha \beta_{X'Y} \frac{b}{2}$$
(3.52)

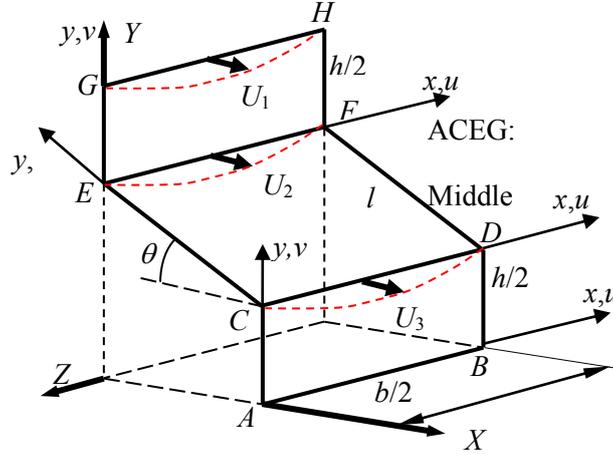


Figure 3.9. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes en torsion.

Dans le repère local de la paroi inclinée (Fig. 3.9), la déformation normale varie linéairement le long de la direction de la hauteur de l'âme x :

$$\varepsilon_s(x) = -\alpha \beta_{X'Y} \frac{b}{2} \frac{2}{b} x = -\alpha \kappa x$$
(3.53)

où $\beta_{X'Y} = \beta_{Y'X}$ représentent la moitié de la courbure de torsion, on ne considère donc que $\beta_{X'Y}$ dans la formulation.

2) Champ de déplacements additionnels dû à la redistribution des contraintes en torsion

En utilisant la même procédure pour le problème de cisaillement et la déformation de base $\varepsilon_s(x)$ (Eq. 3.45), et le champ de déplacements additionnels pour le problème de torsion, l'énergie interne de déformation dans 1/8 VER du nid d'abeilles peut être calculée.

En observant les résultats de la simulation numérique avec les éléments de coque, les déplacements additionnels sur les segments CD , EF , GH dus à la redistribution des contraintes sous un moment de torsion sont proposés. En raison des conditions de continuité avec les cellules adjacentes, ces déplacements sont uniquement orientés dans la direction horizontale X . Ils ont des formes sinusoïdales.

a) *Paroi verticale supérieure :*

Le champ de déplacements additionnels est proposé comme suit :

$$\begin{cases} u = \frac{a_0}{b} x^2 \\ v = 0 \\ w = \sum_{i=1}^N \left[a_i \frac{2y}{h} + b_i \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{b} \quad ; \quad m=2j \end{cases} \quad (3.54)$$

Ainsi, les déformations de membrane et de flexion sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} = a_0 \frac{2}{b} x \\ \varepsilon_y = v_{,y} = 0 \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{,xx} = - \sum_{i=1}^N \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \left[a_i \frac{2y}{h} + b_i \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{b} \\ w_{,yy} = 0 \\ w_{,xy} = \sum_{i=1}^N \frac{2m\pi}{hb} (a_i - b_i) \cos \frac{m\pi x}{b} \end{cases} \quad (3.55)$$

Enfin, l'énergie interne de déformation est obtenue :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^1 &= \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \varepsilon_x^2 dy dx + \frac{D_1}{2} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \left[w_{,xx}^2 + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right] dy dx \\ &= \frac{Et}{24(1-\nu^2)} h b a_0^2 + \frac{D_1 h^2}{16b^3} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{3} (a_i - b_i)^2 + \frac{1}{2} b_i (a_i - b_i) + \frac{b_i^2}{2} \right] m^4 \pi^4 \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu) \sum_{i=1}^N \frac{m^2 \pi^2}{hb} (a_i - b_i)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

b) *Paroi inclinée :*

Le champ de déplacements est proposé comme suit :

$$\begin{cases} u = a_0 \frac{2}{b} x + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{i,j} \sin \frac{2i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{l} \\ v = \sum_{i=1}^N \left\{ -\cos \theta \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] + \sum_{j=1}^N (-\cos \theta e_{i,j} + \sin \theta f_{i,j}) \sin \frac{2j\pi y}{l} \right\} \cos \frac{m\pi x}{b} \\ w = \sum_{i=1}^N \left\{ \sin \theta \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] + \sum_{j=1}^N (\sin \theta e_{i,j} + \cos \theta f_{i,j}) \sin \frac{2j\pi y}{l} \right\} \cos \frac{m\pi x}{b} \end{cases} \quad (3.57)$$

La déformation de base $\varepsilon_s(x)$ imposée par les peaux doit être ajoutée aux déformations de membrane et de flexion dues aux déplacements additionnels tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = u_{,x} = \frac{2}{b} a_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{i,j} \frac{2i\pi}{b} \cos \frac{2i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{l} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_s + v_{,y} = \varepsilon_s + \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{l} \cos \theta (b_i - c_i) + \sum_{j=1}^N \frac{2j\pi}{l} (-\cos \theta e_{i,j} + \sin \theta f_{i,j}) \cos \frac{2j\pi y}{l} \right\} \cos \frac{m\pi x}{b} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{i,j} \frac{j\pi}{l} \sin \frac{2i\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{l} \\ - \sum_{i=1}^N \frac{m\pi}{b} \left\{ -\cos \theta \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] + \sum_{j=1}^N (-\cos \theta e_{i,j} + \sin \theta f_{i,j}) \sin \frac{2j\pi y}{l} \right\} \sin \frac{m\pi x}{b} \\ w_{,xx} = - \sum_{i=1}^N \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \left\{ \sin \theta \left[b_i \frac{y}{l} + c_i \left(1 - \frac{y}{l} \right) \right] + \sum_{j=1}^N (\sin \theta e_{i,j} + \cos \theta f_{i,j}) \sin \frac{2j\pi y}{l} \right\} \cos \frac{m\pi x}{b} \\ w_{,xy} = - \sum_{i=1}^N \frac{m\pi}{b} \left\{ \frac{1}{l} \sin \theta (b_i - c_i) + \sum_{j=1}^N \frac{2j\pi}{l} (\sin \theta e_{i,j} + \cos \theta f_{i,j}) \cos \frac{2j\pi y}{l} \right\} \sin \frac{m\pi x}{b} \\ w_{,yy} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{4j^2 \pi^2}{l^2} (\sin \theta e_{i,j} + \cos \theta f_{i,j}) \sin \frac{2j\pi y}{l} \cos \frac{m\pi x}{b} \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Ainsi, l'énergie interne dans la paroi inclinée est obtenue :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^2 &= \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu^2} \int_0^{b/2} \int_0^l \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dy dx \\ &+ \frac{1}{2} D_2 \int_0^{b/2} \int_0^l \left[w_{,xx}^2 + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right] dy dx \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\text{où } D_2 = \frac{t_2^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{t_2^2}{12} \frac{Et_2}{1-\nu^2}$$

c) *Paroi verticale inférieure :*

Le champ de déplacements est proposé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{a_0}{b} x^2 \\ v = 0 \\ w = \sum_{i=1}^N c_i \frac{2y}{h} \sin \frac{m\pi x}{b} \end{array} \right. ; \quad m = 2i \quad (3.60)$$

Les déformations sont alors données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} = a_0 \frac{2}{b} x \\ \varepsilon_y = v_{,y} = 0 \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{,xx} = -\sum_{i=1}^N c_i \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \frac{2y}{h} \sin \frac{m\pi x}{b} \\ w_{,yy} = 0 \\ w_{,xy} = \sum_{i=1}^N c_i \frac{2m\pi}{hb} \cos \frac{m\pi x}{b} \end{cases} \quad (3.61)$$

Ainsi, l'énergie interne de déformation est obtenue :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^3 &= \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu^2} \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} \varepsilon_x^2 dy dx + \frac{1}{2} D_3 \int_0^{b/2} \int_0^{h/2} [w_{,xx}^2 + 2(1-\nu)w_{,xy}^2] dy dx \\ &= \frac{1}{24} \frac{Et}{1-\nu^2} hba_0^2 + \frac{1}{2} D_3 \left[\sum_{i=1}^N c_i^2 \frac{h^2 m^4 \pi^4}{24b^3} + (1-\nu) \sum_{i=1}^N c_i^2 \frac{hm^2 \pi^2}{b} \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

3) Énergie interne de déformation totale dans 1/8 VER du nid d'abeilles en torsion

L'énergie interne de déformation totale dans 1/8 VER du nid d'abeilles est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_{\text{int}} &= \pi_{\text{int}}^1 + \pi_{\text{int}}^2 + \pi_{\text{int}}^3 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Et_1}{1-\nu^2} \frac{h}{b} a_0^2 + \frac{1}{2} D_1 \left[\frac{1}{24} \frac{h}{b^3} \sum_{i=1}^N (a_i^2 + a_i b_i + b_i^2) m^4 \pi^4 + (1-\nu) \frac{1}{bh} \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (a_i - b_i)^2 \right] \\ &+ \frac{Et_2}{1-\nu^2} \frac{l}{4b} \left(4a_0^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{i,j}^2 i^2 \pi^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Et_2}{1-\nu^2} \left[\frac{bl}{2} \varepsilon_s^2 - 2\varepsilon_s \cos \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i) \frac{b}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \right. \\ &+ \left. \frac{b}{4l} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 + \frac{b}{2l} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N j^2 \pi^2 (-\cos \theta e_{i,j} + \sin \theta f_{i,j})^2 \right] \\ &+ \frac{Et_2}{1-\nu^2} \nu \left\{ la_0 \varepsilon_s - 2a_0 \cos \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i) \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \right. \\ &- \left. \cos \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{i}{j} (1 - \cos j\pi) (b_k - c_k) d_{i,j} \left[\frac{\sin \frac{(2i-2k+1)\pi}{2}}{(2i-2k+1)\pi} + \frac{\sin \frac{(2i+2k-1)\pi}{2}}{(2i+2k-1)\pi} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos\theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{i}{j} (1 - \cos j\pi) (b_k - c_k) d_{i,j} \left[\frac{\sin \frac{(2i-2k+1)\pi}{2}}{(2i-2k+1)\pi} + \frac{\sin \frac{(2i+2k-1)\pi}{2}}{(2i+2k-1)\pi} \right] \\
& + \left. \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{2ijn}{j^2 - 4n^2} (1 - \cos j\pi) (-\cos\theta e_{k,n} + \sin\theta f_{k,n}) d_{i,j} \left[\frac{\sin \frac{(2i-2k+1)\pi}{2}}{(2i-2k+1)\pi} + \frac{\sin \frac{(2i+2k-1)\pi}{2}}{(2i+2k-1)\pi} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{2} \frac{Et_2}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{b}{8l} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{i,j}^2 j^2 \pi^2 + \frac{l}{12b} \cos^2\theta \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) \right. \\
& + \frac{l}{4b} \cos\theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^2 \pi^2 (-\cos\theta e_{i,j} + \sin\theta f_{i,j}) (b_i - c_i) \frac{1}{j\pi} \\
& \left. + \frac{l}{8b} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^2 \pi^2 (-\cos\theta e_{i,j} + \sin\theta f_{i,j})^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} D_2 \left[\frac{l}{12b^3} \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 \sin^2\theta (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) - \frac{l}{4b^3} \sin\theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^4 \pi^3 \frac{1}{j} (\sin\theta e_{i,j} + \cos\theta f_{i,j}) (b_i - c_i) \right. \\
& \left. + \frac{l}{8b^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^4 \pi^4 (\sin\theta e_{i,j} + \cos\theta f_{i,j})^2 \right] \\
& + D_2 \frac{b}{l^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\sin\theta e_{i,j} + \cos\theta f_{i,j})^2 j^4 \pi^4 \\
& + D_2 \nu \frac{1}{2bl} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[-m^2 j \pi^3 \sin\theta (\sin\theta e_{i,j} + \cos\theta f_{i,j}) (b_i - c_i) + m^2 j^2 \pi^4 (\sin\theta e_{i,j} + \cos\theta f_{i,j})^2 \right] \\
& + D_2 (1-\nu) \frac{1}{4bl} \left[\sin^2\theta \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (b_i - c_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^2 j^2 \pi^4 (\sin\theta e_{i,j} + \cos\theta f_{i,j})^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{Et_1}{1-\nu^2} \frac{h}{b} a_0^2 + \frac{1}{2} D_1 \left[\frac{h}{24b^3} \sum_{i=1}^N c_i^2 m^4 \pi^4 + (1-\nu) \frac{1}{bh} \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 c_i^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Les paramètres inconnus a_0 , a_i , b_i et c_i peuvent être obtenus par la minimisation de l'énergie interne de déformation. Ensuite, cette énergie peut être calculée. Enfin, l'équivalence entre l'énergie interne du nid d'abeilles et celle du solide homogénéisé permet d'obtenir le module de torsion équivalent G_{XY}^{*T} .

$$\Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} G_{XY}^{T*} \frac{1}{2} \frac{b^3}{12} l \cos\theta (h + l \sin\theta) \kappa^2 = \Pi_{\text{int}} \Rightarrow G_{XY}^{*T} \tag{3.64}$$

On note que G_{XY}^{T*} ainsi obtenu est indépendant de κ car le facteur κ^2 existe dans Π_{int} du côté droit de l'équation. (3.64).

4) Bornes supérieure et inférieure des modules de cisaillement et de torsion

Les bornes supérieure et inférieure de l'énergie interne de déformation sont obtenues en prenant $b \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ respectivement. Les formulations ci-dessus donnent les mêmes bornes supérieure et inférieure pour le module de cisaillement dans le plan et le module de torsion. Toutefois, le module de torsion diminue en fonction de la hauteur de l'âme plus lentement que le module de cisaillement dans le plan. Cela peut être expliqué par différents modes de déplacements additionnels : le cisaillement donne le déplacement additionnel maximal à la surface moyenne de l'âme (Fig. 3.5) ; tandis que la torsion donne un déplacement nul à la surface moyenne et le déplacement maximal en $x=b/4$ dont l'amplitude est bien réduite (Fig. 3.9). De plus, de déplacement additionnel implique plus de redistribution des contraintes et ainsi diminue le module tangentiel.

III.4.3. Programmation en Fortran pour calculer le module de torsion G_{XY}^{T*}

Le système d'équations établi ci-dessus est résolu par un programme en Fortran. L'organigramme est décrit ci-dessous:

- **Données :** $\kappa = \beta_{X,Y} = 0.1$; $\beta = \sin\theta \cdot \cos\theta$

- **Système d'équations linéaires :**

$$A_{11} = \frac{2}{b}(h+l) \quad ; \quad B_1 = \frac{\kappa}{4} v b \beta l$$

do $i = 2, n$

$j = 2i - 2$

$$A_{ii} = -\frac{4v}{j\pi} \left(1 - \cos \frac{j\pi}{2} \right) (1 - \sin \theta) \quad ; \quad A_{i1} = A_{ii}$$

$$A_{ii} = \frac{b}{h} + \frac{b}{l} \sin^2 \theta + \frac{1-v}{24} (j\pi)^2 \left(\frac{h}{b} + \frac{l}{b} \sin^2 \theta \right)$$

$$B_i = -\frac{\kappa b^2}{j\pi} \cos \frac{j\pi}{2} \beta \sin \theta$$

end do

- **Résolution :** $[A]\{a\} = \{B\} \rightarrow \{a\}$

- Calcul de l'énergie interne de déformation : $\Pi_{\text{int}} = 2(\Pi_1 + \Pi_2)$

- Calcul du module de cisaillement en torsion : $G_{XY}^* = \frac{48\Pi_{\text{int}}}{\kappa^2 l \cos \theta . b^3 (h + l . \sin \theta)}$

III.5. Validation numérique des modèles d'homogénéisation en cisaillement et torsion

III.5.1. Calcul numérique d'une plaque sandwich en nid d'abeilles en cisaillement

Le H-modèle développé pour le cisaillement dans le plan est validé par des simulations EF avec l'élément de coque mince 'S4R' d'Abaqus. Le problème d'une plaque sandwich en nid d'abeilles en traction ([13] et [17]) est repris pour le problème de cisaillement dans le plan. Les données matérielles et géométriques du nid d'abeilles et les conditions aux limites sont données ci-dessous :

1) Données matérielles et géométriques du nid d'abeilles

Paramètres	Notations	Valeurs
Module d'Young	E	72200 MPa
Coefficient de Poisson	ν	0,34
Longueur de la paroi verticale	h	4 mm
Longueur de la paroi inclinée	l	4 mm
Epaisseur de la paroi verticale	t'	0,1 mm
Epaisseur de la paroi inclinée	t	0,05 mm
Angle d'inclinaison	θ	30°
Hauteur de l'âme	b	0,5 ÷ 10 mm
Longueur de la plaque suivant X	L_X	166,28 mm
Longueur de la plaque suivant Y	L_Y	144 mm

Tableau 3.1. Paramètres géométriques et matérielles de l'âme en nid d'abeilles.

2) Conditions aux limites:

Pour calculer le module de cisaillement dans le plan sans effet de bord, une grande plaque sandwich en nid d'abeilles est étudiée. La longueur et la largeur de la plaque sont L_X

mm et L_Y avec 24×12 VER. Les conditions aux limites suivantes sont utilisées pour obtenir un cisaillement pur (Fig. 3.11) :

- Pour la surface $ABNM$, on bloque les déplacements suivant X et Y ($U_1 = U_2 = 0$) sur tous les nœuds.
- Pour la surface $DCPQ$, on impose un déplacement suivant X ($U_1 = 10$ mm) et on bloque le déplacement suivant Y ($U_2 = 0$) sur tous les nœuds.
- Pour les surfaces $ADQM$ et $BCPN$, on bloque le déplacement suivant Y ($U_2 = 0$) sur tous les nœuds.
- Pour les point A et B , on bloque le déplacement suivant Z ($U_3 = 0$).

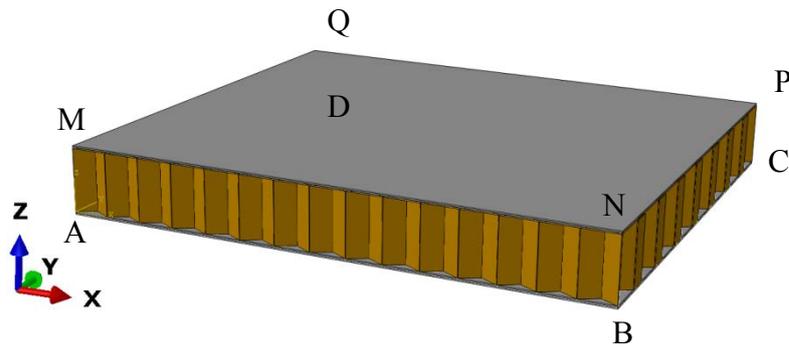


Figure 3.10. Conditions aux limites pour le problème de cisaillement.

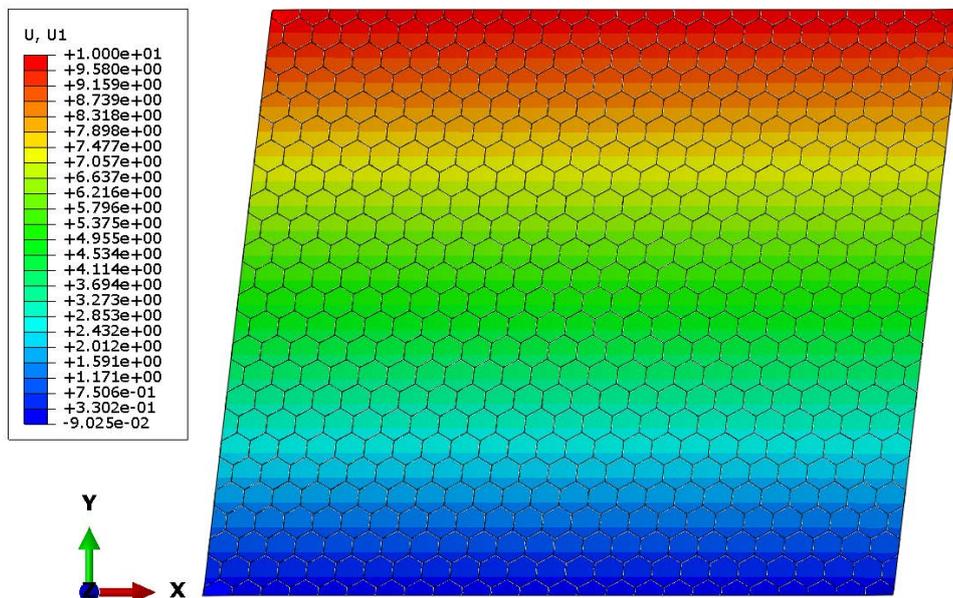


Figure 3.11. Iso-valeurs du déplacement horizontal en cisaillement.

3) Calcul du module de cisaillement G_{XY}^{C*} avec l'énergie interne obtenue numériquement

Pour chaque valeur de la hauteur de l'âme et la déformation de cisaillement imposé ($\gamma_{XY} = U_I/L_Y = 10/144 = 0,0694$), nous réalisons une simulation numérique EF pour obtenir la valeur de l'énergie interne de déformation Π_{int} . Le module de cisaillement du solide homogénéisé dans le plan est alors calculé par :

$$\Pi_{int}^* = \frac{1}{2} G_{XY}^{C*} \gamma_{XY}^2 V = \Pi_{int} \quad \Rightarrow \quad G_{XY}^{C*} = \frac{2\Pi_{int}}{\gamma_{XY}^2 V} \quad (3.65)$$

où : V est le volume total de l'âme de la plaque.

4) Résultats numériques du module de cisaillement G_{XY}^{C*} obtenus par Abaqus

Hauteur de l'âme b (mm)	Energie interne Π_{int} (mJ)	Module de cisaillement d'Abaqus G_{XY}^{C*} (MPa)	Nombre d'éléments	Temps CPU (s)
0.5	3876,42	134,312	365808	181,30
1	6645,62	115,130	365808	183,70
2	9839,24	85,228	247488	135,30
3	10342,9	59,727	275328	161,50
4	10118,2	43,822	303168	185,30
6	9655,38	27,879	358848	236,50
8	9503,18	20,579	414528	299,90
10	9489,49	16,439	470208	380,70
12	9516,23	13,738	525888	458,90
14	9552,03	11,820	581568	574,10
17	9606,74	9,790	665088	735,90
20	9659,46	8,367	748608	1289,0

Tableau 3.2. Modules de cisaillement G_{XY}^{C*} obtenus avec les éléments de coque d'Abaqus.

III.5.2. Calcul numérique d'une plaque sandwich en nid d'abeilles en torsion

Pour éviter l'effet de bords, la grande plaque sandwich en nid d'abeilles pour le cisaillement est reprise pour la torsion. Mais, seule une petite zone de 3×2 VER ($20,39 \times 24$ mm²) au milieu de la plaque est choisie pour obtenir l'énergie de déformation et calculer le module de torsion G_{XY}^{T*} (Fig. 3.12).

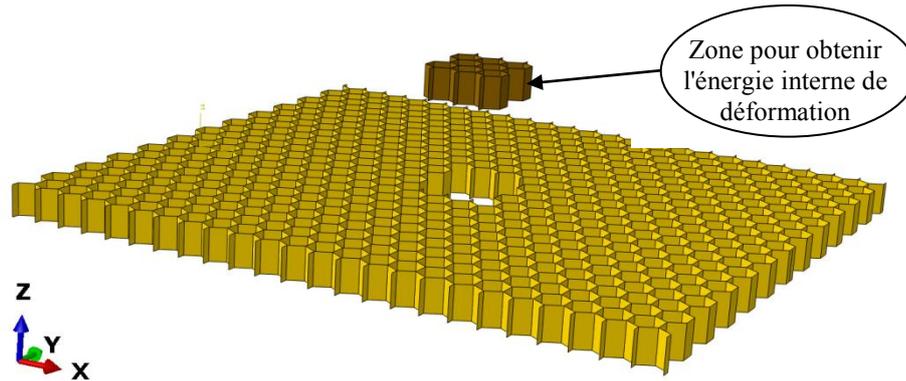


Figure 3.12. Zone utilisée pour obtenir l'énergie interne de déformation en torsion.

1) Données matérielles et géométriques du nid d'abeilles

Les paramètres matériels et géométriques sont les mêmes que ceux du problème de cisaillement (Tableau 3.1). Les dimensions de la petite zone pour obtenir l'énergie interne de déformation sont : $l_X = 20,39$ mm et $l_Y = 24$ mm.

2) Conditions aux limites

Les conditions aux limites suivantes sont utilisées pour ce problème de torsion (Fig. 3.11) :

- Pour la surface $ADQM$, on bloque le déplacement suivant Z ($U_3 = 0$) sur tous les nœuds.
- Pour un point au milieu de la surface $ADQM$, on bloque les déplacements suivant X et Y ($U_1 = U_2 = 0$).
- Pour un point de la surface $BCPN$, on bloque le déplacement suivant Y ($U_2 = 0$).
- Pour la surface $BCPN$, on impose un angle autour de l'axe X ($\beta_Y = -0,05$ rad) sur tous les nœuds.

3) Calcul du module de torsion G_{XY}^{T*} avec l'énergie interne obtenue numériquement

Pour chaque valeur de la hauteur de l'âme et la déformation de cisaillement imposée ($\kappa = \beta_Y / L_X = -0,05/166,28 = 0,0003$), nous réalisons une simulation numérique EF pour obtenir une valeur de l'énergie interne de déformation Π_{int} . Le module de torsion du solide homogénéisé dans le plan est alors calculé par :

$$\Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} \frac{G_{XY}^{T*} b^3}{12} \kappa^2 V = \Pi_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad G_{XY}^{T*} = \frac{24 \Pi_{\text{int}}}{b^3 \kappa^2 V} \quad (3.66)$$

où V est le volume du nid d'abeilles, κ est la courbure de torsion.

4) Résultats numériques du module de torsion G_{XY}^{T*} obtenus par Abaqus

Hauteur de l'âme b (mm)	Energie interne Π_{int} (mJ)	Module de cisaillement d'Abaqus G_{XY}^{T*} (MPa)	Nombre d'éléments	Temps CPU (s)
1	0,00096324	137,219	1615200	2825,0
2	0,0066	121,358	1100928	1470,0
3	0,0190	106,213	1100928	1534,6
4	0,0390	94,092	690624	887,60
5	0,0653	82,220	526232	483,10
6	0,0988	73,325	359232	295,30
7	0,138	65,411	288452	258,40
8	0,180	58,127	235440	201,60
9	0,230	52,925	190284	163,80
10	0,282	48,145	173828	142,50
12	0,413	41,873	116298	91,300
14	0,561	36,658	96540	79,200
17	0,821	30,924	86902	66,900
20	1,108	26,363	78039	55,300

Tableau 3.3. Module de torsion G_{XY}^{T*} obtenu avec les éléments de coque d'Abaqus.

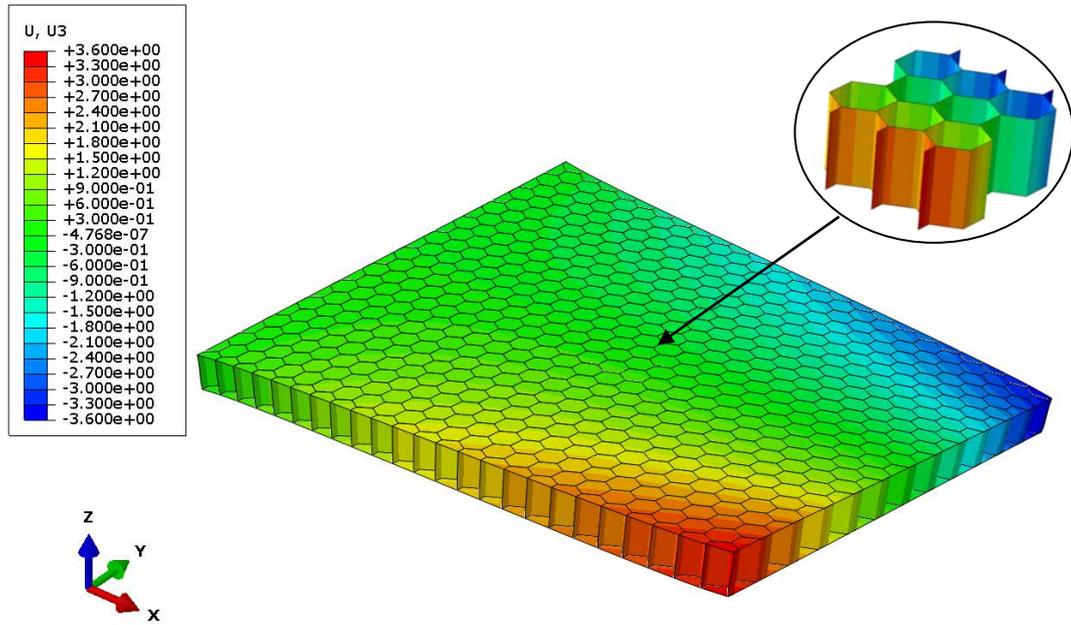


Figure 3.13. Iso-valeurs du déplacement vertical en torsion.

III.5.3. Validation des H-modèles de cisaillement et de torsion avec Abaqus

Les Fig. 3.14 et 3.15 montrent les résultats obtenus par simulations numériques à l'aide d'Abaqus et par nos H-modèles pour le cisaillement dans le plan et la torsion. Nous observons une bonne concordance des résultats entre nos modèles analytiques et les calculs numériques d'Abaqus. Nous constatons également que les courbes de $G_{XY}^{C^*}(b)$ et $G_{XY}^{T^*}(b)$ sont bien situées entre les bornes supérieure et inférieure communes : $G_{XY}^{C^*-\text{sup}} = G_{XY}^{T^*-\text{sup}} = 138,78 \text{ (MPa)}$ et $G_{XY}^{C^*-\text{inf}} = G_{XY}^{T^*-\text{inf}} = 0$. Il est intéressant de noter que le module de torsion diminue en fonction de la hauteur de l'âme plus lentement que celui de cisaillement. Cela est dû à différents modes de redistribution des contraintes en cisaillement et en torsion. Généralement, il existe un seul module tangent pour le cisaillement et la torsion dans un solide homogène, or les résultats de la Fig. 3.16 montrent une grande différence entre les modules de cisaillement et de torsion. Cela représente un avantage important par rapport à certains modèles d'homogénéisation [15]. Dans le cas de cisaillement et torsion couplés, il faut combiner les deux modules en utilisant la méthode de trois couches (voir chapitre II, section II.4).

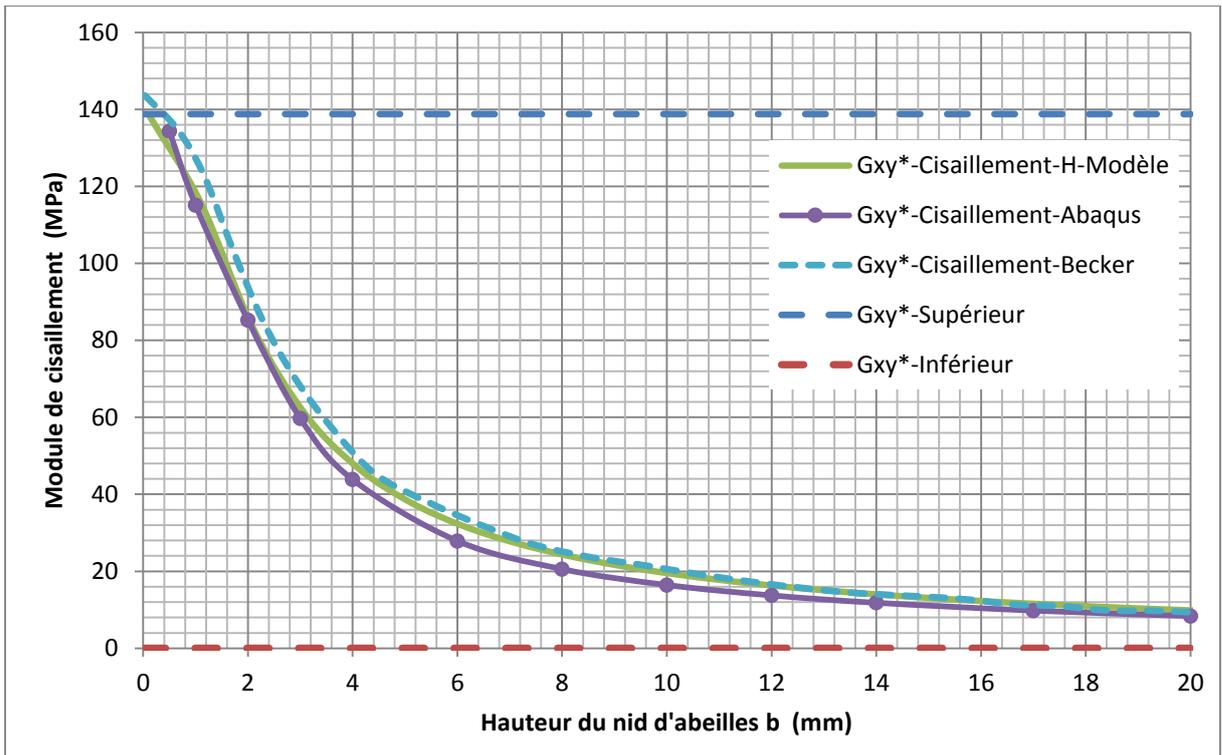


Figure 3.14. Module de cisaillement en fonction de la hauteur du nid d'abeilles.

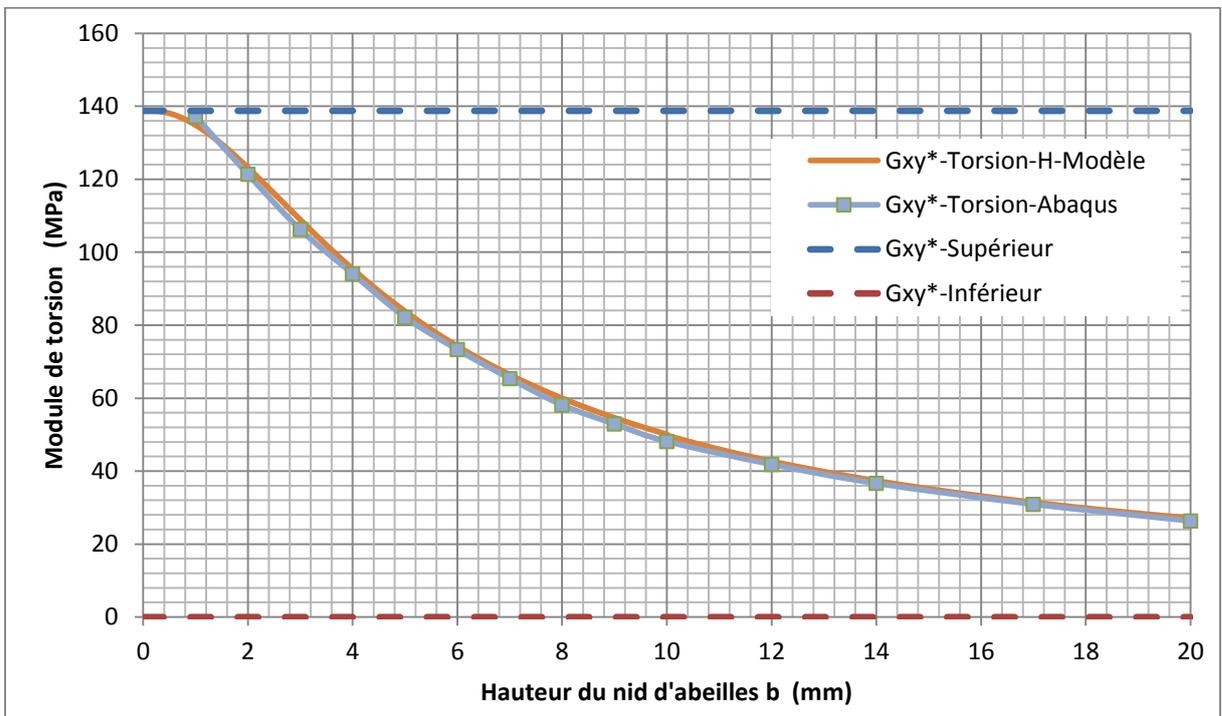


Figure 3.15. Module de torsion en fonction de la hauteur du nid d'abeilles.

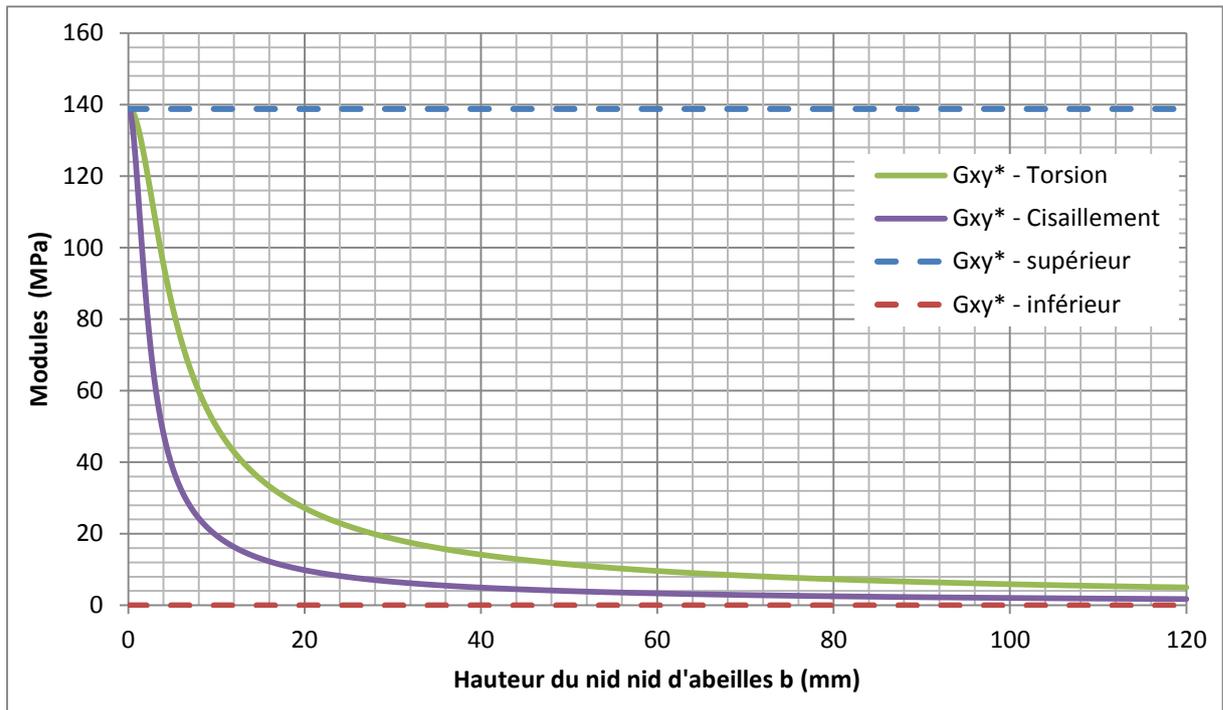


Figure 3.16. Comparaison des modules de cisaillement et de torsion.

III.6. Conclusion du chapitre III

Les modèles d'homogénéisation pour déterminer les modules de cisaillement et de torsion de l'âme en nid d'abeilles dans une plaque sandwich ont été présentés dans ce chapitre. Les effets des peaux et de la hauteur de l'âme sur les rigidités de cisaillement et de torsion ont été étudiés.

Les bornes inférieure et supérieure des modules de cisaillement et de torsion sont obtenues par la théorie de barre et de membrane. La démonstration mathématique montre que ces bornes sont identiques pour les modules de cisaillement et de torsion. Des formulations en séries de fonctions trigonométriques sont proposées pour bien décrire les champs de déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes entre les parois verticales et inclinées du nid d'abeilles. La méthode énergétique est ensuite utilisée pour déterminer les modules de cisaillement et de torsion en fonction de la hauteur de l'âme en nid d'abeilles. La comparaison des résultats obtenus par nos H-modèles et Abaqus montre une très bonne concordance entre les deux méthodes. Nous notons aussi que les modules de cisaillement et de torsion sont bien situés entre les bornes supérieure et inférieure ; mais le module de cisaillement diminue plus rapidement lorsque la hauteur de l'âme augmente.

Les H-modèles proposés sont assez faciles à utiliser et permettent de réduire largement le temps de préparation des géométries et des maillages, la mémoire nécessaire au stockage et le temps de calcul.

Chapitre IV

Modèles d'homogénéisation analytiques de l'âme en nid d'abeilles en cisaillement transverse

IV.1. Introduction du chapitre IV

L'étude d'une plaque sandwich en nid d'abeilles soumise à un cisaillement transverse est un problème complexe. La distribution des contraintes tangentielles dans une cellule de nid d'abeilles n'est pas simple. En effet, chaque paroi de la cellule subit une déformation non uniforme en raison des contraintes imposées par ses voisines, et l'âme en nid d'abeilles ne reste plus dans un plan. Les bornes supérieure et inférieure pour les modules de cisaillement transverse peuvent être formulées assez facilement en utilisant la méthode simplifiée proposée par Kelsey et al. [21]. La structure périodique en nid d'abeilles a été exploitée pour estimer ces modules en fonction de la géométrie celui-ci. Il faut noter que lorsque les peaux inférieure et supérieure du nid d'abeilles sont soumises à un déplacement relatif suivant une direction quelconque perpendiculaire à Z , le champ de cisaillement est généralement hétérogène au sein des parois [2]. Ceci s'explique par le fait que les parties inférieure et supérieure de chaque paroi ont tendance de tourner et ce mouvement est contrarié par la présence des peaux.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les formules de Gibson pour déterminer le module de cisaillement transverse G_{XZ}^* et les bornes supérieure et inférieure du module de cisaillement transverse G_{YZ}^* ; pour étudier l'influence de la hauteur de l'âme du nid d'abeilles sur le module G_{YZ}^* , une formulation en séries de fonctions trigonométriques et basée sur la méthode énergétique est proposée. Enfin, des simulations à l'aide d'Abaqus sont effectuées pour valider les H-modèles.

IV.2. Homogénéisation analytique pour le module de cisaillement transverse G_{XZ}^*

Gibson et Ashby [2] ont présenté la méthode de Kelsey et al. [21] pour les problèmes de cisaillement transverse. En utilisant le théorème de l'énergie, ils ont proposé des bornes supérieure et inférieure pour les modules de cisaillement transverse. Cela se fait par le calcul de l'énergie de déformation associée : la compatibilité des déformations entre parois

permet d'obtenir la borne supérieure et l'équilibre des contraintes entre les parois permet d'obtenir la borne inférieure.

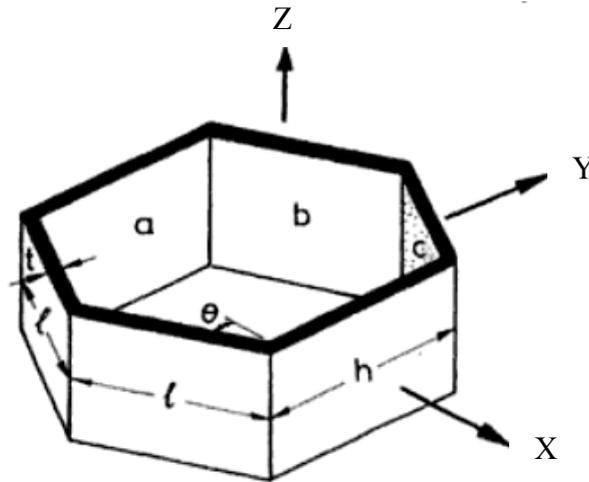


Figure 4.1. Une cellule du nid d'abeilles pour le cisaillement transverse [2].

Pour ce faire, ils ont utilisé les théorèmes du potentiel minimum et de l'énergie complémentaire minimum. Le premier théorème donne une borne supérieure. Il indique que l'énergie de déformation calculée à partir d'un ensemble de déplacements qui sont compatibles avec les conditions aux limites doit être le minimum.

Lorsqu'une cellule de nid d'abeilles (Fig. 4.1) est soumise à un effort tranchant T_x , presque toute l'énergie de déformation élastique est donnée par les déformations de cisaillement dans les parois cellulaires; les rigidités de flexion et l'énergie associée dans les parois sont beaucoup plus petites. Les déformations de cisaillement dans les parois a , b , c sont données par :

$$\begin{cases} \gamma_a = 0 \\ \gamma_b = \gamma_{xz} \cos \theta \\ \gamma_c = \gamma_{xz} \cos \theta \end{cases} \quad (4.1)$$

- Théorème de la borne supérieure :

Ce théorème peut être exprimé sous forme d'inégalité. Pour un cisaillement γ_{xz} , le théorème s'écrit :

$$\frac{1}{2} G_{xz}^* \gamma_{xz}^2 V \leq \frac{1}{2} \sum_i (G_i \gamma_i^2 V_i) \quad (4.2)$$

où $i = 1, 2$ et 3 représentent le nombre de parois, G_i est le module de cisaillement de chaque paroi, V est le volume de la cellule, γ_i est la déformation de cisaillement de chaque paroi. En prenant G_s comme le module de cisaillement des trois parois, on obtient :

$$G_{XZ}^* \leq G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{\cos \theta}{h/l + \sin \theta} \quad (4.3)$$

- Théorème de la borne inférieure :

Parmi tous les champs de contraintes satisfaisant l'équilibre à chaque point et avec les charges extérieures, l'énergie interne doit être minimale. Ce théorème s'écrit sous forme de l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{XZ}^2}{G_{XZ}^*} V \leq \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\tau_i^2}{G_s} V_i \right) \quad (4.4)$$

Avec l'inégalité (4.4) et les équations d'équilibre entre les parois, le module de cisaillement transverse est obtenu comme suit :

$$G_{XZ}^* \geq G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{\cos \theta}{h/l + \sin \theta} \quad (4.5)$$

Puisque les bornes supérieure et inférieure sont identiques Eqs. (4.3) et (4.5), le module de cisaillement transverse G_{XZ}^* est obtenu comme suit :

$$G_{XZ}^* = G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{\cos \theta}{h/l + \sin \theta} \quad (4.6)$$

Les résultats numériques obtenus par les éléments de coque d'Abaqus montrent un bon accord avec la formule ci-dessus; il n'y a pas de redistribution des contraintes entre les parois, donc ce module de cisaillement n'est pas influencé par la hauteur de l'âme du nid d'abeilles.

IV.3. Formulation de l'homogénéisation analytique pour le module de cisaillement

$$G_{YZ}^*$$

IV.3.1. Méthode classique de Gibson pour les bornes supérieure et inférieure de G_{YZ}^*

1) Borne supérieure de G_{YZ}^*

En utilisant la même méthode, une déformation de cisaillement γ_{YZ} implique les déformations suivantes dans les trois parois :

$$\begin{cases} \gamma_a = 0 \\ \gamma_b = \gamma_{YZ} \sin \theta \\ \gamma_c = \gamma_{YZ} \sin \theta \end{cases} \quad (4.7)$$

Ainsi, on obtient la borne supérieure :

$$G_{YZ}^* \leq G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{h/l + \sin^2 \theta}{\cos \theta (h/l + \sin \theta)} = G_{YZ}^{*\text{-sup}} \quad (4.8)$$

2) Borne inférieure de G_{YZ}^*

Comme dans le cas de la borne inférieure de G_{XZ}^* ci-dessus, le théorème de l'énergie donne la borne inférieure du module de cisaillement transverse :

$$G_{YZ}^* \geq G_s \left(\frac{t}{l} \right) \frac{h/l + \sin \theta}{\cos \theta (1 + h/l)} = G_{YZ}^{*\text{-inf}} \quad (4.9)$$

IV.3.2. Formulation de l'homogénéisation avec les effets des peaux et de la hauteur pour G_{YZ}^*

1) Déformation de base du nid d'abeilles soumis au cisaillement transverse T_Y

Le cisaillement transverse sous un effort tranchant T_Y est souvent couplé avec l'effet de flexion, il est donc très difficile d'obtenir un état de cisaillement pur. Une méthode alternative consiste à utiliser le théorème de réciprocity : on remplace le cisaillement transverse sous T_Y par le cisaillement sur l'épaisseur. On fixe alors la peau inférieure et on applique une force F_Y sur la peau supérieure afin d'obtenir un cisaillement pur sans effet de flexion de l'âme. Les distributions des déplacements U_1 , U_2 et U_3 sont représentées dans la Fig. 4.2. La déformation de base est la déformation de cisaillement. Le déplacement U_2 varie quasi linéairement le long de la hauteur de l'âme (direction Z), donnant une déformation de cisaillement quasi-constante γ_0 dans les deux parois verticales et $\gamma_0 \sin \theta$ dans la paroi inclinée.

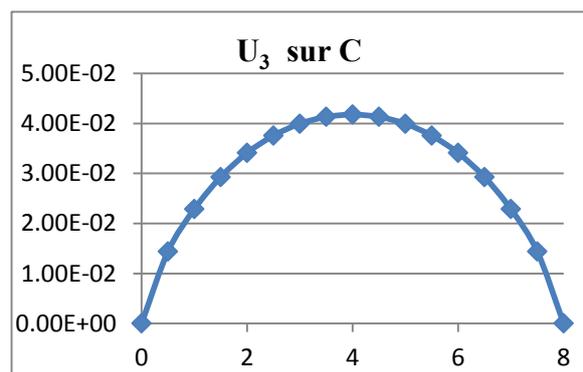
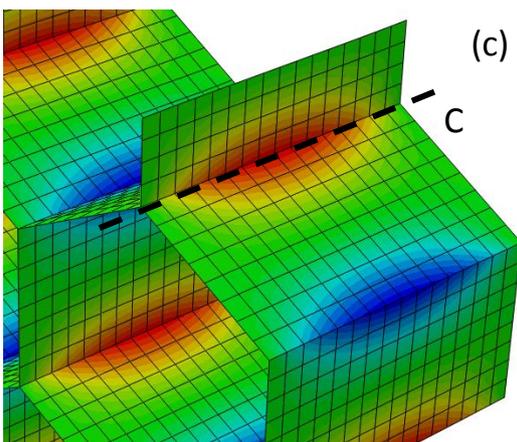
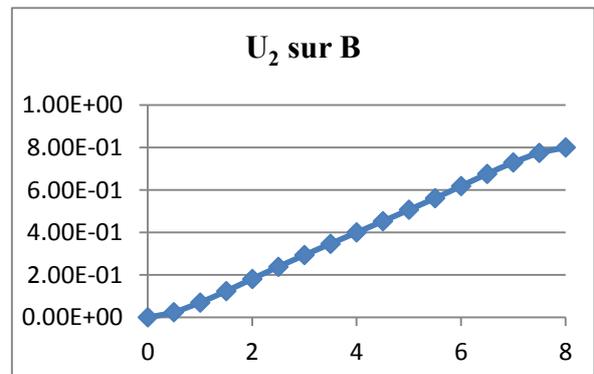
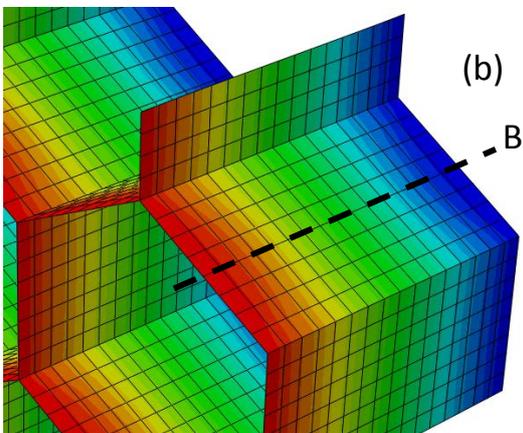
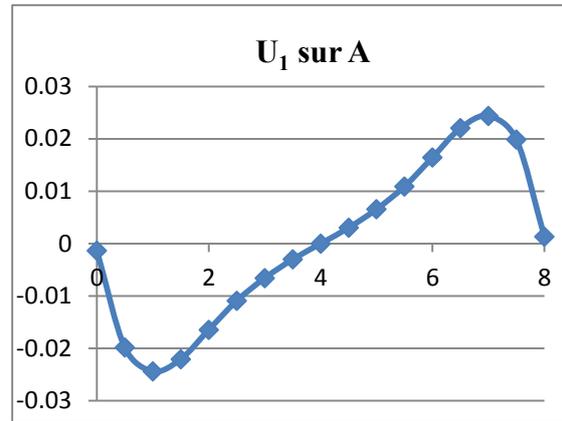
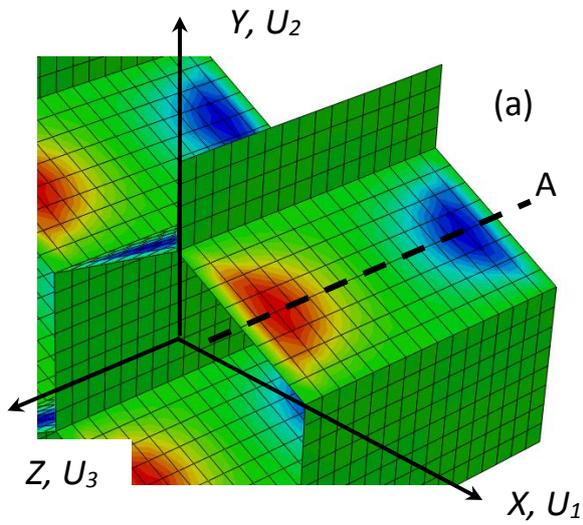


Figure 4.2. Distributions des déplacements U_1 , U_2 et U_3 sous une force de cisaillement F_y .

2) Formulation de l'homogénéisation en série de fonctions trigonométriques

Les déplacements de base imposés par les peaux sont illustrés dans la Fig. 4.2b, et les déplacements additionnels sont illustrés dans les Fig. 4.2a et 4.2c. Sur les parois verticales supérieure et inférieure, le champ de déplacement suivant satisfaisant les conditions aux limites est proposé :

$$\begin{cases} u = -\sum_{i=1}^N \sin \frac{p\pi x}{b} \left[a_p \left(1 - \frac{2y}{h} \right) + b_p \left(1 - \frac{2y}{h} \right)^2 \right] \\ v = 0 \end{cases}, \quad p = 2i - 1 \quad (4.10)$$

Ainsi, les déformations de membrane peuvent être obtenues par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\sum_{i=1}^N \frac{p\pi}{b} \cos \frac{p\pi x}{b} \left[a_p \left(1 - \frac{2y}{h} \right) + b_p \left(1 - \frac{2y}{h} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xy} = \gamma_0 + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_0 + \frac{2}{h} \sum_{i=1}^N \sin \frac{p\pi x}{b} \left[a_p + 2b_p \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \right] \end{cases} \quad (4.11)$$

Le déplacement U_1 sur la paroi inclinée doit être projeté dans le repère local, conduisant à un déplacement dans le plan v et un déplacement hors du plan w :

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^N \sin \frac{p\pi x}{b} \left[a_p \left(1 - \frac{2y}{l} \right) + b_p \left(1 - \frac{2y}{l} \right)^2 \right] \\ v = -U_1 \cos \theta = -\cos \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{l} \\ w = U_1 \sin \theta = \sin \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{l} \end{cases} \quad (m = 2i_1, n = 2j_1 - 1) \quad (4.12)$$

Ainsi, les déformations sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \gamma_0 \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \frac{p\pi}{b} \cos \frac{p\pi x}{b} \left[a_p \left(1 - \frac{2y}{l} \right) + b_p \left(1 - \frac{2y}{l} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{n\pi}{l} c_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{l} \\ \gamma_{xy} = \gamma_0 \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_0 \sin \theta \\ -\frac{2}{l} \sum_{i=1}^N \sin \frac{p\pi x}{b} \left[a_p + 2b_p \left(1 - \frac{2y}{l} \right) \right] - \cos \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m\pi}{b} c_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{l} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Enfin, l'énergie interne de déformation dans les trois parois du 1/8 VER du nid d'abeilles peut être calculée en utilisant l'équation (3.2) :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} = & \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{p^2 \pi^2}{24b} (t_1 h + t_2 l) + \frac{b(1-\nu)}{4} \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \right) \right] a_p^2 \right. \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\frac{p^2 \pi^2}{40b} (t_1 h + t_2 l) + \frac{b(1-\nu)}{3} \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \right) \right] b_p^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\frac{p^2 \pi^2}{16b} (t_1 h + t_2 l) + \frac{b(1-\nu)}{2} \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \right) \right] a_p b_p + (1-\nu) \gamma_0 (t_1 - t_2 \sin \theta) \sum_{i=1}^N \frac{b}{p\pi} (a_p + b_p) \\ & + \frac{b(1-\nu)}{8} (t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) \gamma_0^2 + \frac{t_2 b}{16l} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n^2 \pi^2 c_{m,n}^2 + \frac{t_2 l (1-\nu)}{32b} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^2 \pi^2 c_{m,n}^2 \\ & + 2t_2 (1+\nu) \cos \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{mp}{p^2 - m^2} \frac{1}{n\pi} a_p c_{m,n} \\ & \left. + 4t_2 (1+\nu) \cos \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{mp}{p^2 - m^2} \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) b_p c_{m,n} \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

La minimisation de l'énergie interne ci-dessus conduit à un système d'équations linéaires permettant de calculer les paramètres inconnus a_p , b_p et $c_{m,n}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial a_p} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial b_p} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{\text{int}}}{\partial c_{m,n}} = 0 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Une fois les paramètres des séries obtenus, l'énergie interne de déformation Π_{int} peut être calculée en utilisant l'équation (4.14). Pour le problème de cisaillement transverse, l'énergie interne de déformation du solide homogénéisé peut être définie et doit être égale à

l'énergie de déformation réelle du nid d'abeilles, ce qui conduit à l'obtention du module homogénéisé G_{YZ}^* :

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} G_{YZ}^* \gamma_0^2 l \cos \theta (h + l \sin \theta) \frac{b}{2} \Rightarrow G_{YZ}^* \quad (4.16)$$

3) Bornes supérieure et inférieure du module de cisaillement transverse

En prenant $N \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow 0$, la borne supérieure du module de cisaillement est obtenue :

$$a_p = 0, b_p = 0, c_{m,n} = 0 \Rightarrow G_{YZ}^{*\text{sup}} = G_s \frac{t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta}{l \cos \theta (h + l \sin \theta)} \quad (4.17)$$

En prenant $N \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow \infty$, la borne inférieure du module de cisaillement est obtenue :

$$a_p = -2 \frac{(t_1 - t_2 \sin \theta)}{p\pi \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \right)} \gamma_0, b_p = 0, c_{m,n} = 0$$

$$\Rightarrow G_{YZ}^{*\text{inf}} = G_s \frac{(t_1 h + t_2 l \sin^2 \theta) \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \right) - (t_1 - t_2 \sin \theta)^2}{l \cos \theta (h + l \sin \theta) \left(\frac{t_1}{h} + \frac{t_2}{l} \right)} \quad (4.18)$$

4) Comparaison de ces bornes avec celles de Gibson

En utilisant les équations (4.8), (4.9), (4.17), (4.18) et les données du problème dans [15] : $\nu = 0,34$; $E = 72200$ MPa $\Rightarrow G_s = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26940,30$ MPa ; $t_1 = t_2 = 0,05$ mm ; $h = l = 4$ mm ; $\theta = 30^\circ$. Nous avons obtenu les résultats résumés dans le tableau 4.1.

Paramètres	H-modèle	Modèle de Gibson	Erreur %
Gyz*-supérieur (MPa)	324,041	324,041	0,00
Gyz*-inférieur (MPa)	291,637	291,637	0,00

Tableau 4.1. Bornes du module de cisaillement transverse G_{YZ}^* .

IV.4. Validation numérique pour les H-modèles en cisaillement transverse

IV.4.1. Validation numérique du module de cisaillement transverse G_{YZ}^*

Pour valider le module de cisaillement transverse G_{YZ}^* , nous avons également réalisé des simulations sur une grande plaque sandwich en nid d'abeilles comme la plaque en torsion (Chapitre 3, III.4.1). Pour éviter l'effet de bords, nous avons également pris une petite zone de $20,39 \times 24 \text{ mm}^2$ (3×2 cellules) au milieu de la plaque pour calculer le module G_{YZ}^* (Fig. 3.13).

1) Données matérielles et géométriques du nid d'abeilles

Nous avons pris les mêmes paramètres matériels et géométriques dans le tableau 3.1 pour valider le module de cisaillement transverse G_{YZ}^* .

2) Conditions aux limites

Pour calculer le module de cisaillement transverse G_{YZ}^* , nous appliquons un cisaillement sur la hauteur de l'âme : nous fixons la peau inférieure et nous imposons un déplacement suivant Y sur la peau supérieure. Les conditions aux limites suivantes sont utilisées (Fig. 3.11) :

- Pour la surface $ABCD$, on bloque les déplacements suivant Y et Z ($U_2 = U_3 = 0$) sur tous les nœuds.
- Pour la surface $ADQM$, on bloque le déplacement suivant X ($U_1 = 0$).
- Pour la surface $MNPQ$, on impose le déplacement suivant Y ($U_2 = 0,1b \text{ mm}$) et on bloque le déplacement suivant Z ($U_3 = 0$) sur tous les nœuds.

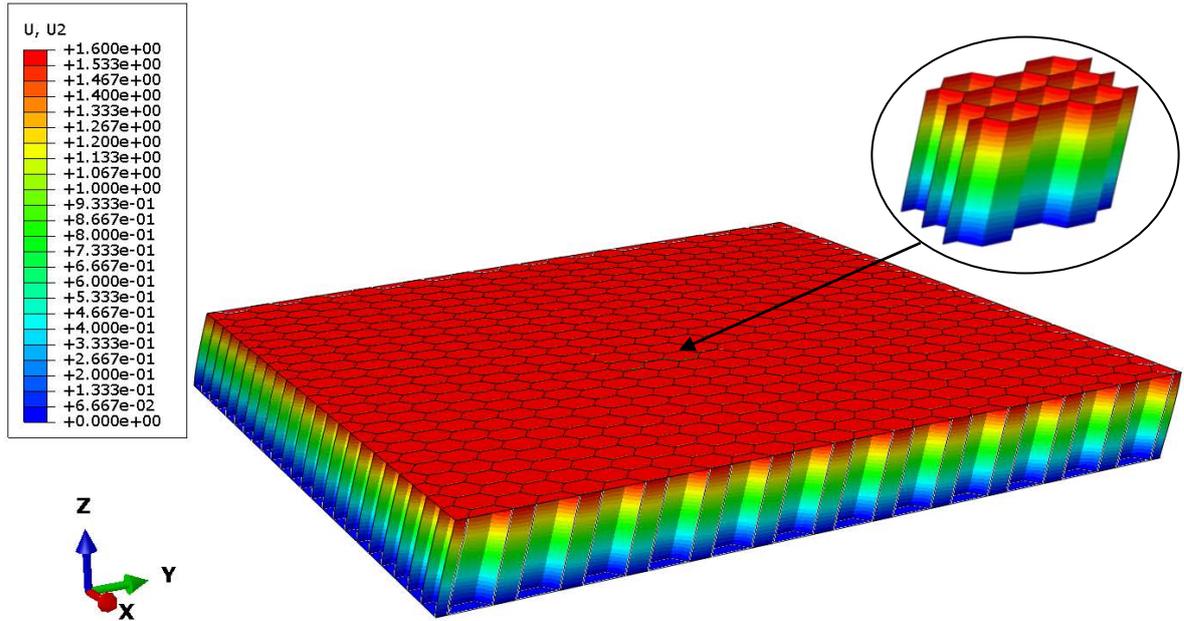


Figure 4.3. Iso-valeurs des déplacements suivant Y entraînés par le déplacement imposé sur la peau supérieure ($U_2 = 0,1b$ mm).

3) Calcul du module de cisaillement G_{YZ}^* avec l'énergie calculée numériquement

Pour chaque valeur de la hauteur de l'âme, nous réalisons une simulation en cisaillement sur la hauteur de l'âme (équivalent au cisaillement transverse) et nous obtenons la valeur de l'énergie interne de déformation. Le module de cisaillement transverse est alors calculé comme suit :

$$\Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} G_{YZ}^* \gamma_{YZ}^2 V = \Pi_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad G_{YZ}^* = \frac{2 \Pi_{\text{int}}}{\gamma_{YZ}^2 V} \quad (4.19)$$

4) Module de cisaillement G_{YZ}^* calculé par Abaqus

Les modules de cisaillement transverse en fonction de la hauteur de l'âme obtenus à l'aide d'Abaqus sont présentés dans le tableau 4.2. Dans la Fig. 4.4, on observe que la courbe analytique du module de cisaillement transverse est très proche de celle obtenue à l'aide d'Abaqus. L'erreur maximale est de 0,3%. Les deux courbes sont bien situées entre les bornes supérieure et inférieure, qui sont calculées par les formules de Gibson et Ashby [2] (Eqs. 4.9 et 4.11) :

$$G_{YZ}^{*\text{sup}} = 324,04 \quad (\text{MPa}) \quad ; \quad G_{YZ}^{*\text{inf}} = 291,64 \quad (\text{MPa})$$

Hauteur de l'âme b (mm)	Energie interne Π_{int} (mJ)	Module de cisaillement d'Abaqus G_{YZ}^* (MPa)	Nombre d'éléments	Temps CPU (s)
0.5	403,97	323,94	578560	437,20
1	802,18	321,62	439040	375,70
2	1586,95	318,13	439040	367,40
3	2360,05	315,41	758870	1119,0
4	3121,19	312,85	473920	408,90
6	4610,28	308,07	359232	290,40
8	6074,43	304,43	415040	356,20
10	7539,31	302,28	470848	453,80
12	8985,53	300,22	526656	556,10
14	10439,80	298,98	582464	659,00
16	11894,10	298,05	638272	771,60
20	14803,00	296,75	749888	1326,5
40	29351,90	294,21	1307968	3255,4
60	43969,8	293,82	466368	1008,6
80	58607,70	293,73	605888	1861,0

Tableau 4.2. Module de cisaillement transverse G_{YZ}^* obtenus par Abaqus.

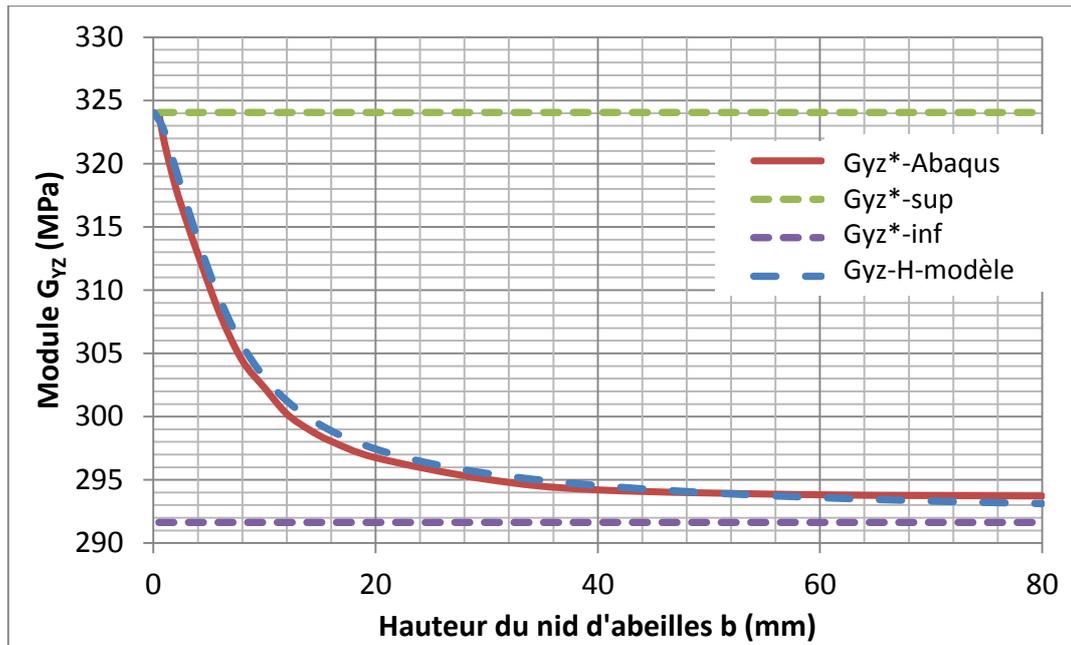


Figure 4.4. Module de cisaillement transverse en fonction de la hauteur de l'âme.

IV.4.2. Validation numérique pour le module de cisaillement transverse G_{xz}^*

Pour valider le module de cisaillement transverse G_{xz}^* , nous prenons les mêmes données matérielles et géométriques de l'âme en nid d'abeilles utilisées précédemment.

1) Conditions aux limites:

Comme précédemment, les calculs s'effectuent sur une grande plaque sandwich en nid d'abeilles pour chaque hauteur de l'âme ; une petite zone au milieu de la plaque est prise pour obtenir l'énergie interne de déformation sans effet de bords. Les conditions aux limites utilisées sont les suivantes (Fig. 3.10) :

- Pour la surface $ABCD$, on bloque les déplacements suivant X et Z ($U_1 = U_3 = 0$) sur tous les nœuds.
- Pour la surface $DCPQ$, on bloque le déplacement suivant Y ($U_2 = 0$).
- Pour la surface $MNPQ$, on impose le déplacement suivant X ($U_1 = 0,1b$ mm) et on bloque le déplacement suivant Z ($U_3 = 0$) sur tous les nœuds.

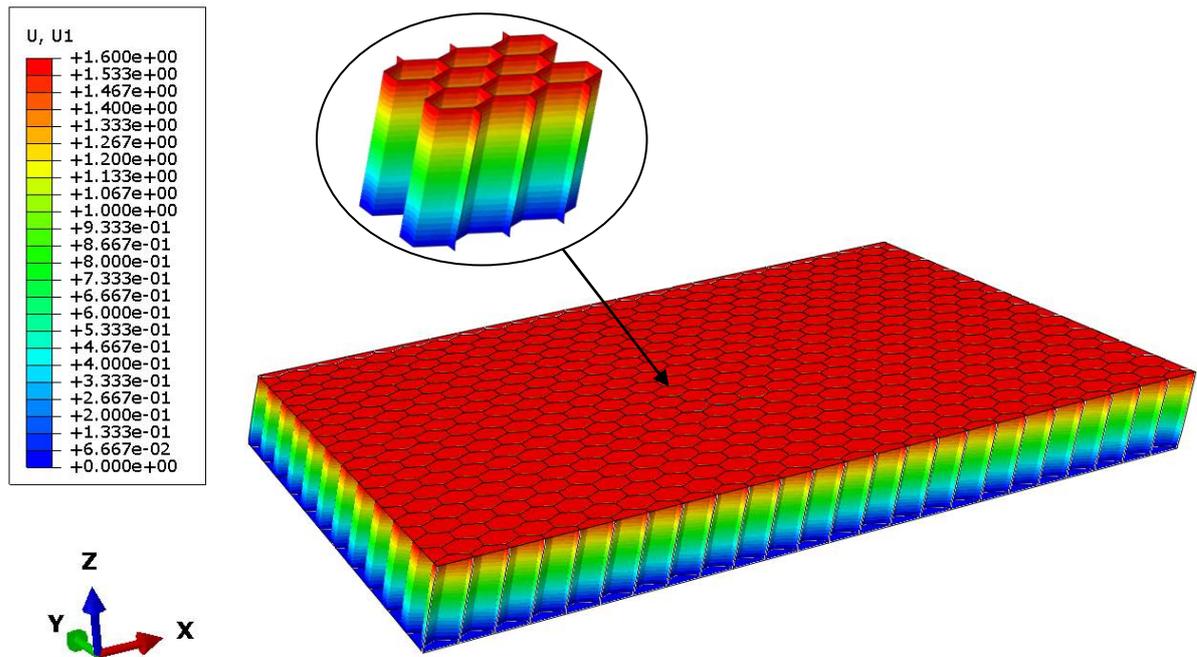


Figure 4.5. Iso-valeurs des déplacements suivant X entraînés par le déplacement imposé sur la peau supérieure ($U_1 = 0,1b$ mm).

2) Calcul du module de cisaillement G_{XZ}^* avec l'énergie calculée numériquement

Pour chaque valeur de la hauteur du nid d'abeilles, nous réalisons une simulation en cisaillement transverse et nous obtenons une valeur de l'énergie interne de déformation. Le module de cisaillement transverse est calculé par l'équation suivante :

$$\Pi_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} G_{XZ}^* \gamma_{XZ}^2 V = \Pi_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad G_{XZ}^* = \frac{2 \Pi_{\text{int}}^*}{\gamma_{XZ}^2 V} \quad (4.20)$$

3) Module de cisaillement G_{XZ}^* calculé par Abaqus

Dans le tableau 4.3, on observe que le module G_{XZ}^* obtenu par Abaqus et par la formule de Gibson et Ashby [2] sont très proches ; et que ce module reste toujours constant sans être influencé par la variation de la hauteur de l'âme. Ces phénomènes peuvent être expliqués par le fait qu'il n'y a pas la redistribution des contraintes entre les parois dans ce problème.

Hauteur de l'âme b (mm)	Energie interne Π_{int} (mJ)	Module G_{xz}^* d'Abaqus (MPa)	Module G_{xz}^* de Gibson (MPa)	Erreur (%)
2	976,27	195,71	194,42	0,662
3	1459,48	195,05	194,42	0,323
4	1943,64	194,82	194,42	0,203
6	2912,95	194,65	194,42	0,120
8	3882,70	194,59	194,42	0,085
10	4852,54	194,56	194,42	0,068
12	5822,40	194,53	194,42	0,057
14	6792,26	194,52	194,42	0,049
16	7762,13	194,51	194,42	0,043
20	9701,86	194,49	194,42	0,035

Tableau 4.3. Modules de cisaillement transverse G_{xz}^* obtenus par Abaqus et Gibson et Ashby.

IV.5. Conclusion du chapitre IV

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le modèle de Gibson et Ashby pour les problèmes de cisaillement transverse suivant X et Y . Les modules de cisaillement transverse G_{xz}^* obtenus par Abaqus sont en très bon accord avec ceux obtenus par la formule de Gibson et Ashby. Le module G_{xz}^* reste constant et indépendant de la hauteur de l'âme de nid d'abeilles car il n'y a pas de redistribution des contraintes.

Par contre, le module de cisaillement transverse G_{yz}^* varie en fonction de la hauteur de l'âme, ceci est dû à la redistribution des contraintes entre les parois.

La formulation de l'homogénéisation basée sur la méthode énergétique a été également développée. Des séries de fonctions trigonométriques satisfaisant les conditions aux limites sont proposées pour prendre en compte les effets des peaux et de la hauteur de l'âme. On observe que la courbe analytique du module G_{yz}^* est très proche de la courbe numérique d'Abaqus. Les deux courbes sont bien situées entre les bornes supérieure et inférieure de Gibson et Ashby.

Chapitre V

Simulation numérique de plaques sandwich en nid d'abeilles

V.1. Présentation des plaques sandwich en nid d'abeilles

Les matériaux composites sont largement utilisés dans de nombreux secteurs industriels. Dans le domaine du sport et des loisirs, les composites à base de fibres de lin sont utilisés pour alléger les raquettes, les cadres de vélo, les skis, planches de surf ...et améliorer leurs propriétés d'amortissement. Dans les domaines des industries automobile, naval, ferroviaire, aéronautique et aérospatial, les composites à base de lin sont utilisés de plus en plus pour diminuer le poids et ainsi la consommation d'énergie. Nous nous sommes intéressés à l'étude d'un type de plaques composites sandwich constituées de deux peaux fabriquées avec des fibres longues de lin et la résine Acrodur®, l'âme en nid d'abeilles est fabriquée en papier carton, conduisant à une plaque composite très résistante et légère. La plaque composite est destinée à être utilisée pour les planchers de voitures.

Dans ce chapitre, nous utilisons nos H-modèles pour déterminer les propriétés de l'âme en nid d'abeilles, et nous modélisons l'âme par un solide homogénéisé équivalent et les deux peaux par les plaques composite multicouches en utilisant la méthode des éléments finis. Les calculs avec nos H-modèles sont comparés avec les calculs en éléments de coque d'Abaqus pour montrer la précision et l'efficacité de nos H-modèles.

V.2. Matériaux de la plaque composite sandwich

Les caractéristiques de la plaque composite ont été mesurées expérimentalement dans notre laboratoire. En raison de la confidentialité, les données et les résultats présentés ici ne correspondent pas aux données et résultats réellement utilisés dans le domaine industriel.

V.2.1. Caractéristiques des peaux

Un pli composite est formé de fibres de lin unidirectionnelles non tissées et de la résine Acrodur®. Les propriétés mécaniques d'un pli sont présentées dans le tableau 5.1. Une peau de la plaque sandwich est composée de trois plis orientés à 0°, 90° et 0°. L'épaisseur totale d'une peau est égale à 0,6 mm.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ν_{12}	G_{12} (MPa)	G_{13} (MPa)	G_{23} (MPa)	Epaisseur (mm)
20000	600	0,40	800	60	60	0,2

Tableau 5.1. Propriétés d'un pli unidirectionnel pour les peaux.

V.2.2. Caractéristiques du papier carton du nid d'abeilles

Les propriétés mécaniques du papier carton sont présentées dans le tableau 5.2.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ν_{12}	G_{12} (MPa)	G_{13} (MPa)	G_{23} (MPa)	Epaisseur (mm)
3400	1800	0,4	800	40	40	0,19

Tableau 5.2. Propriétés du papier carton pour le nid d'abeilles.

V.2.3. Homogénéisation d'une cellule de nid d'abeilles

A partir de la géométrie d'une cellule de nid d'abeilles (Fig. 5.1 et Tableau 5.3) et des propriétés mécaniques du papier carton, nous utilisons nos modèles d'homogénéisation pour calculer les propriétés du solide homogénéisé équivalent (Tableau 5.4).

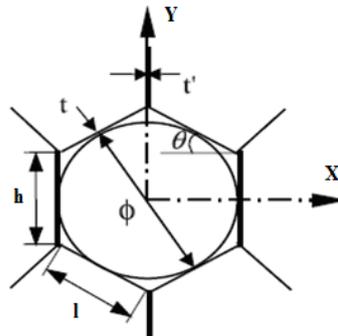


Figure 5.1. Géométrie d'une cellule de nid d'abeilles en papier carton.

ϕ (mm)	θ (°)	$l=h$ (mm)	t (mm)	t' (mm)	B (mm)
8	30	4,62	0,19	0,38	18,8

Tableau 5.3. Paramètres géométriques d'une cellule de nid d'abeilles en papier carton.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	E_3 (MPa)	G_{12} (MPa)	G_{13} (MPa)	G_{23} (MPa)
14,42	17,58	226,61	1,09	19,99	24,71
ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}
0,6474	0,0255	0,0310	0,789	0,4	0,4

Tableau 5. 4. Propriétés du solide homogénéisé équivalent au nid d'abeilles.

V.3. Simulation des plaques sandwichs avec H-modèles et éléments finis de coque

Pour évaluer la précision et l'efficacité de nos H-modèles, nous effectuons trois types de calculs : 1) modélisation de l'âme en nid d'abeilles par des éléments de coque d'Abaqus avec un maillage très fin pour décrire la géométrie complexe du nid d'abeilles en détail; 2) modélisation de l'âme par des éléments de solide d'Abaqus avec les propriétés du solide homogénéisé obtenues par nos H-modèles; 3) même modélisation comme 2) mais avec un maillage grossier. Dans les trois cas, les peaux sont modélisées avec des éléments de coque composite multicouches d'Abaqus.

V.3.1. Plaque sandwich en flexion (Position 1)

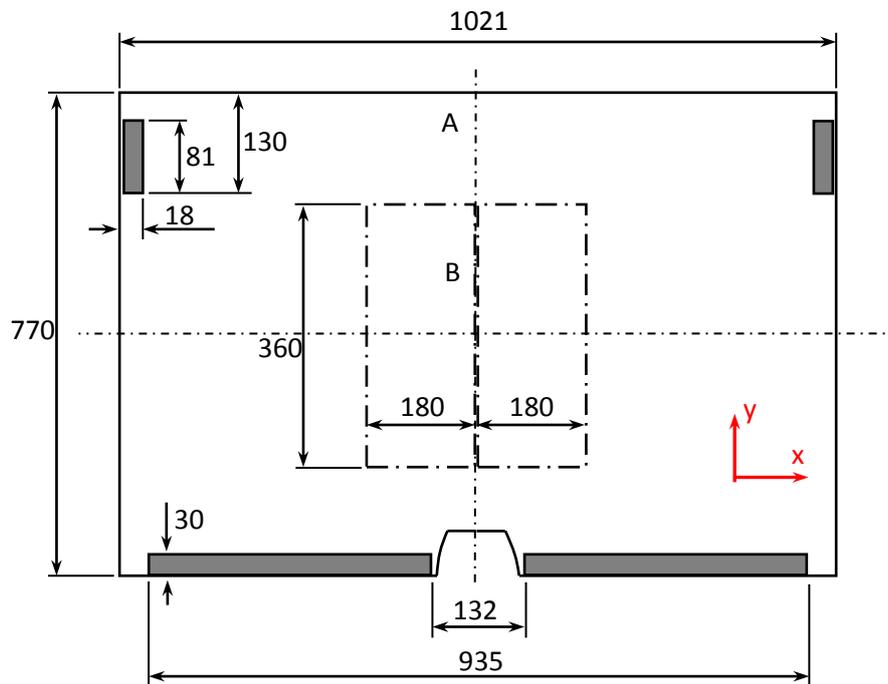


Figure 5. 2. Géométrie de la plaque sandwich de nid d'abeilles en flexion.

Les dimensions et les conditions d'appuis sont illustrées dans la Fig. 5.2. Deux plaques rigides sont placées au-dessus et au milieu de la plaque. Le contact entre les plaques rigides

et la plaque sandwich est « Normal behavior » et « Tangential behavior » avec le coefficient de frottement supposé égal à 0.1.

En raison de la symétrie, nous ne modélisons que la moitié de la plaque comme indiqué dans la Figure 5.3. Les conditions aux limites sont les suivantes :

- sur la peau inférieure, le déplacement vertical est imposé à zéro ($U_3=0$) sur les deux supports.
- le déplacement U_2 est imposé à zéro au point A.
- au point de référence de la plaque rigide, les 3 rotations, U_1 et U_2 sont nuls et une force verticale $F_3=-500\text{N}$ est appliquée.
- Les conditions de symétrie sont imposées sur le côté de symétrie.

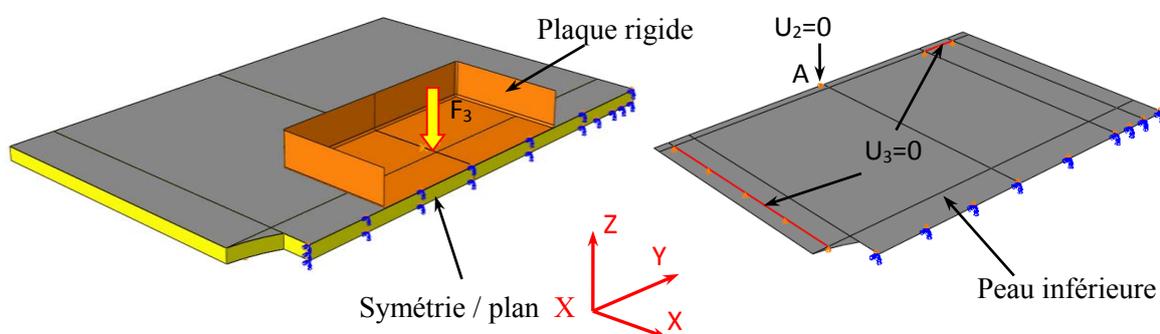
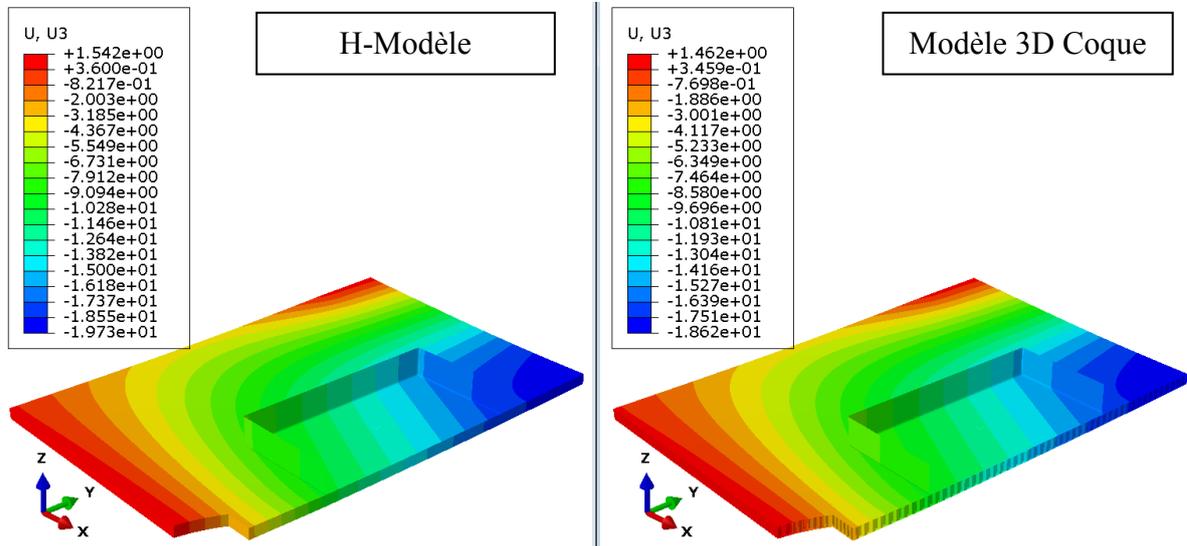


Figure 5.3. Conditions aux limites pour la plaque sandwich en flexion (Position 1).

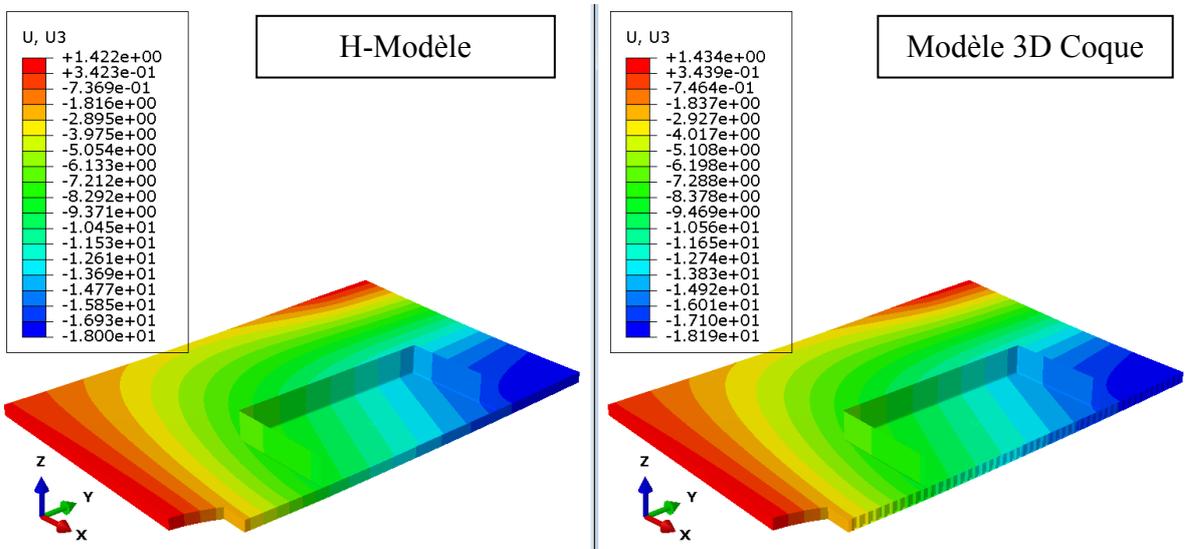
Une peau est discrétisée en 15862 éléments ‘S4R’ et 16120 nœuds ; l’âme en nid d’abeilles est discrétisé en 386910 éléments de coque ‘S4R’ et 359430 nœuds, ou en 157080 éléments de solide ‘C3D8R’ et 175615 nœuds.

Les résultats sont présentés dans les Figures 5.4 et 5.5, on voit que les simulations avec le modèle de solide homogénéisé et le modèle de coque sur le nid d’abeilles donnent des déformations très proches : les flèches maximales sont de 18,19 mm et 18,00 mm respectivement (erreur de -1,06 %). On constate aussi que la flèche maximale se trouve au bord de la plaque (~18 mm au point A dans la Figure 5.3), elle est bien supérieure à celle au centre de la plaque (~11 mm au centre dans la Figure 5.3). Le Tableau 5.5 montre les valeurs de la flèche de la plaque sous la charge de 100 daN en utilisant les deux modèles. On remarque que l’entaille a peu d’influence sur la flèche pour les deux modèles, les conditions aux bords (fermés ou ouverts) ont peu d’influence sur la flèche dans le cas du modèle de coque, mais elles ont un peu plus d’influence dans le cas du H-modèle. Dans le cas des bords fermés, les résultats des deux modèles sont très proches. Le temps CPU est

de 11894 s pour le modèle de coque 3D, tandis que celui-ci n'est que de 6324.4 s pour le H-modèle 3D. On note que le solide homogénéisé peut être maillé beaucoup plus grossièrement pour gagner en temps de calcul. Le tableau 5.6 montre une comparaison entre les maillages fin et grossier, les erreurs sont très faibles.

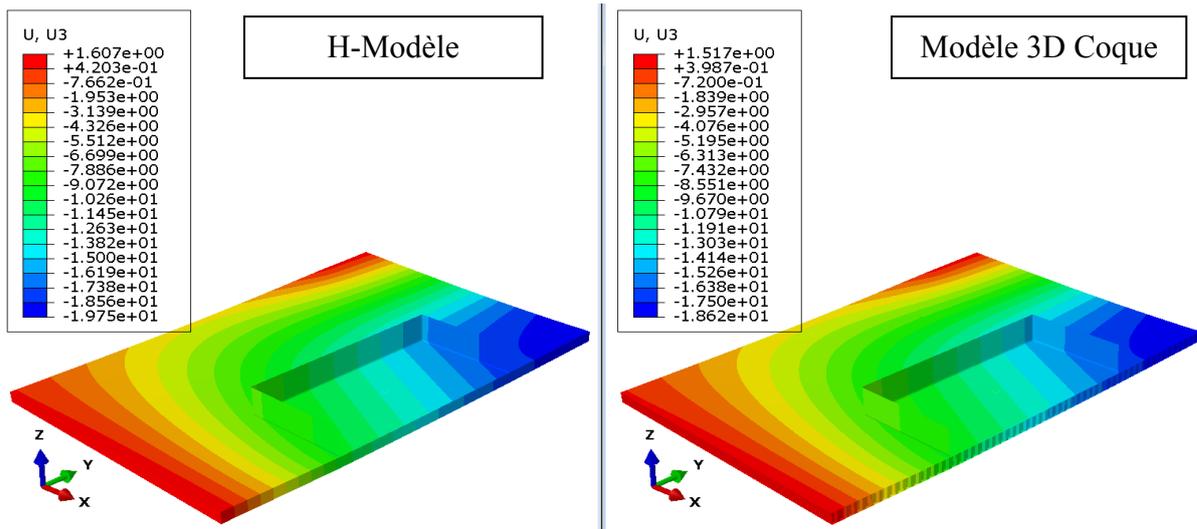


(a) Bord ouvert.

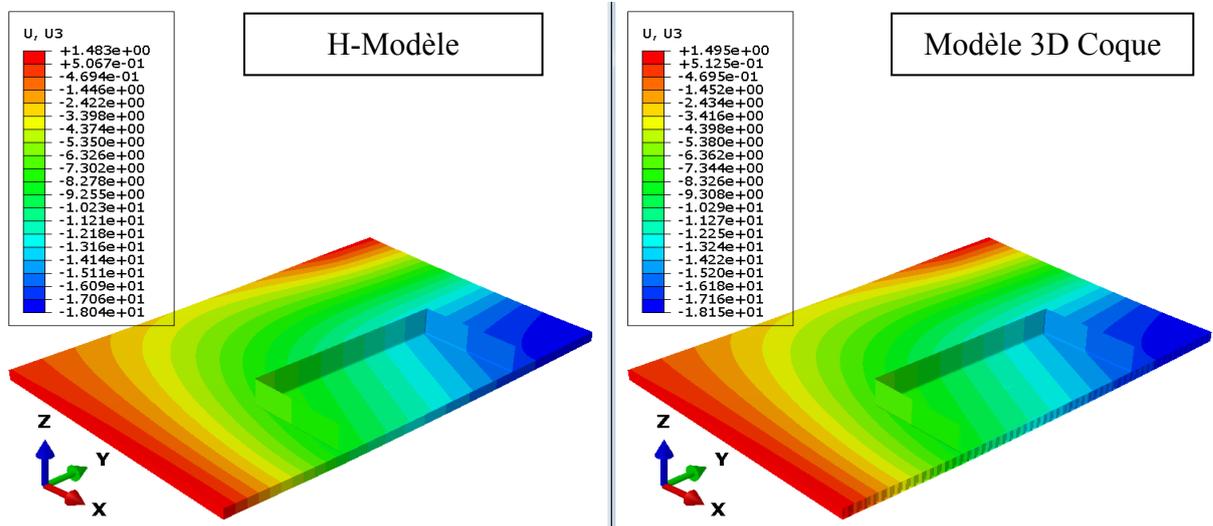


(b) Bord fermé.

Figure 5.4. Iso-valeurs du déplacement vertical pour la plaque avec entaille.



(a) Bord ouvert.



(b) Bord fermé.

Figure 5.5. Iso-valeurs du déplacement vertical de la plaque sans entaille.

Flèche de la plaque en flexion		U ₃ max (mm)			U ₃ au centre (mm)		
		Modèle de coque	Modèle Homo	Erreur (%)	Modèle de coque	Modèle Homo	Erreur (%)
Avec entaille ()	Ouvert	18,62	19,73	5,63	12,58	12,88	10,06
	Fermé	18,19	18,00	-1,06	11,42	11,44	0,15
Sans entaille	Ouvert	18,26	19,75	7,54	11,53	12,86	10,34
	Fermé	18,15	18,04	-0,61	11,35	11,29	-0,50

Tableau 5.5. Valeurs de la flèche de la plaque sous une charge de 100 daN en position 1.

Type de la plaque solide	U3-max			U3-au centre		
	Maillage fin	Maillage grossier	Erreur (%)	Maillage fin	Maillage grossier	Erreur (%)
Avec entaille, peau ouverte	19,73	19,73	0,00	12,88	13,03	1,14
Avec entaille, peau fermée	18,03	18,00	-0,17	11,31	11,44	1,15
Sans entaille, peau ouverte	19,75	19,75	0,00	12,86	13,00	1,11
Sans entaille, peau fermée	18,04	18,07	0,17	11,29	11,25	-0,35

Tableau 5.6. Comparaison entre les maillages fin et grossier (position 1).

V.3.2. Plaque sandwich en flexion avec appuis différents (Position 2)

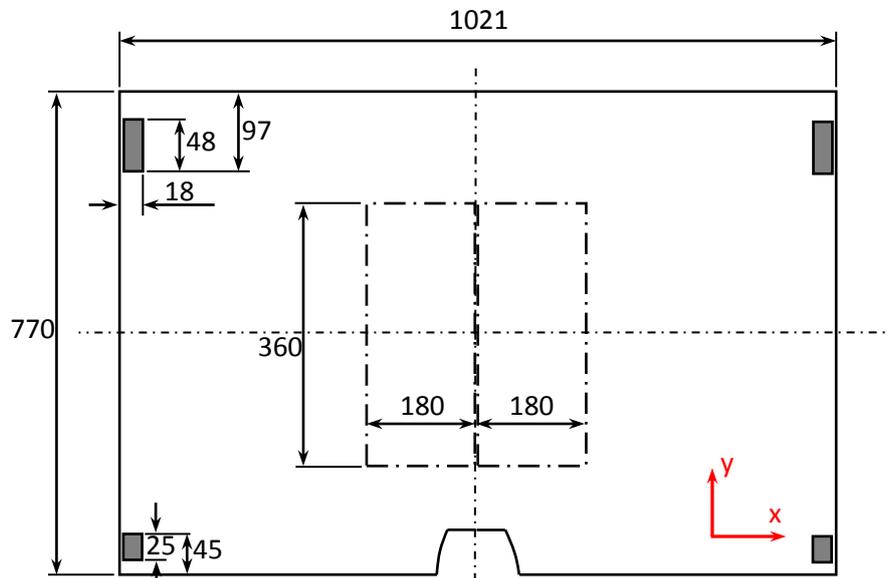


Figure 5.6. Géométrie et appuis de la plaque en nid d'abeilles (Position 2).

Les dimensions de la plaque sandwich sont illustrées dans Fig. 5.6. La hauteur de l'âme en nid d'abeilles est de 18,8 cm. Deux plaques rigides sont placées au-dessus de la plaque pour appliquer une force répartie comme dans les essais expérimentaux. Le contact entre la plaque composite et les deux plaques rigides est « Normal behavior » et « Tangential behavior » avec le coefficient de frottement supposé égal à 0.1.

En raison de la symétrie, nous ne modélisons que la moitié de la plaque (Figure 5.7). Les conditions aux limites sont les suivantes :

- sur la peau inférieure, les déplacements verticaux U_3 sont nuls aux deux supports.

- le déplacement U_2 au point A est imposé nul.
- au point de référence de la plaque rigide, les rotations, U_1 et U_2 sont imposés nuls et une force verticale $F_3 = -250\text{N}$ est appliquée.
- Les conditions de symétrie sont appliquées sur le côté de symétrie.

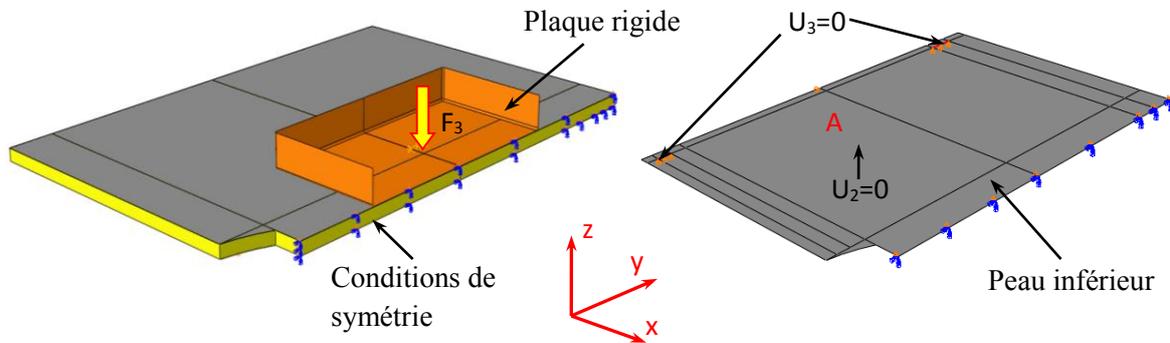
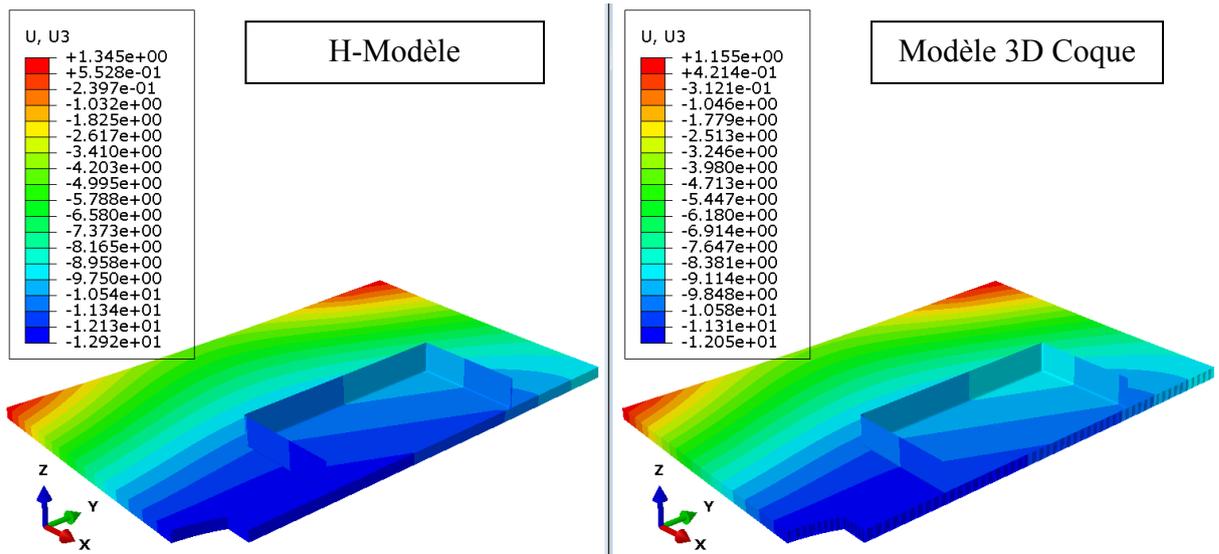


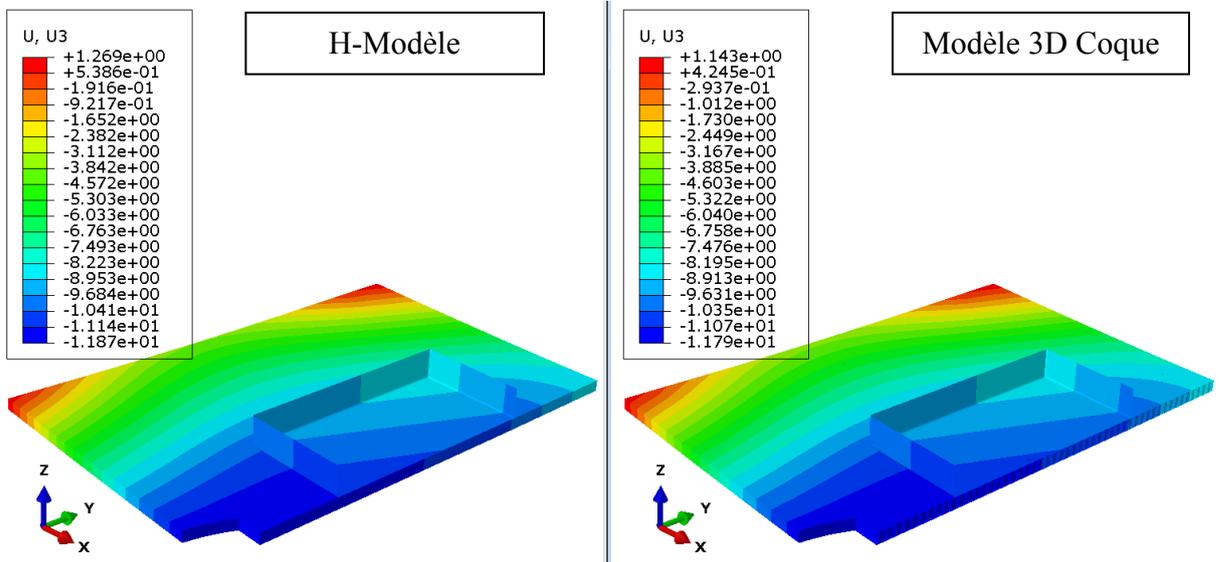
Figure 5.7. Conditions aux limites pour la flexion de la plaque en position 2

Le maillage pour une peau comporte 15862 éléments de coque 'S4R' et 16120 nœuds ; celui du nid d'abeilles comporte 386910 éléments 'S4R' et 359430 nœuds ; le solide homogénéisé équivalent au nid d'abeilles comporte 157080 éléments volumique 'C3D8R' et 175615 nœuds.

Les résultats sont présentés dans les Figures 5.8 et 5.9, on remarque que les simulations avec le modèle de solide homogénéisé et le modèle de coque 3D donnent des résultats proches et que la flèche maximale de la plaque en flexion (500 N) est égale à 12 mm environ. Cette valeur est assez proche de celle au centre de la plaque (~10mm). Le tableau 5.7 montre les valeurs de la flèche maximale et la flèche au centre de la plaque pour 4 types de plaques : avec ou sans entaille, fermées ou ouvertes aux bords. On trouve qu'il n'y a pas beaucoup de différence entre ces 4 types de plaques. Pour les plaques fermées aux bords, les résultats entre deux modèles sont très proches. On constate encore que dans le cas de la position 2 les 4 appuis sont bien répartis ; tandis que dans le cas de la position 1 les appuis longs sur un côté conduisent à un déséquilibre des supports et à une grande flèche au bord opposé. On peut mailler le solide homogénéisé beaucoup plus grossièrement pour gagner en temps de calcul. Le tableau 5.8 montre une comparaison entre le maillage fin et grossier pour les simulations de position 2, les erreurs sont très petites.

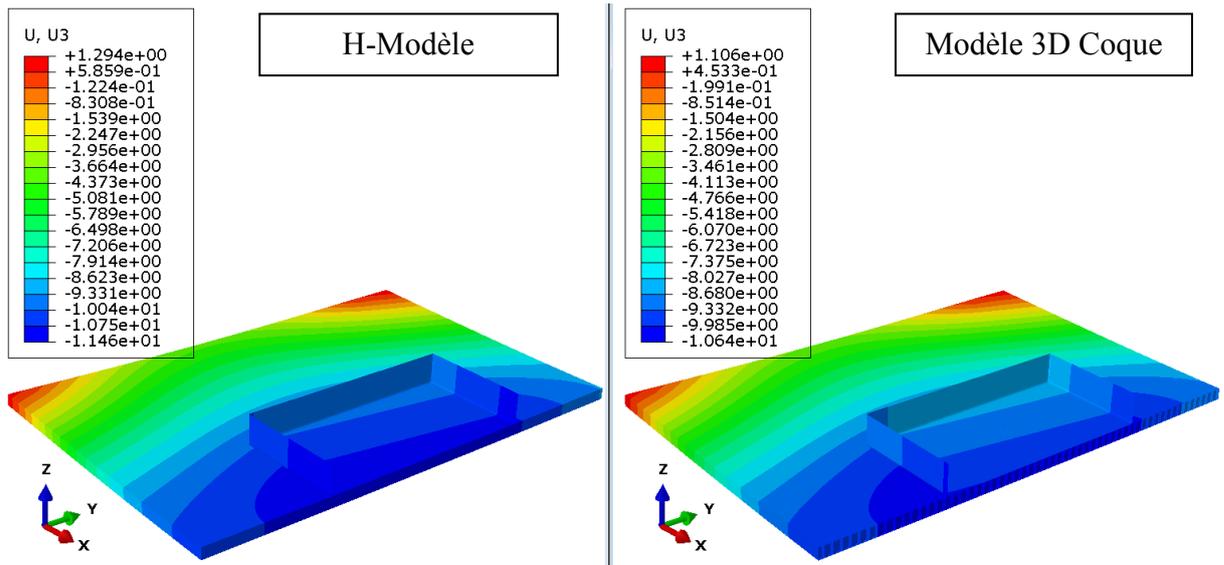


(a) Bord ouvert.

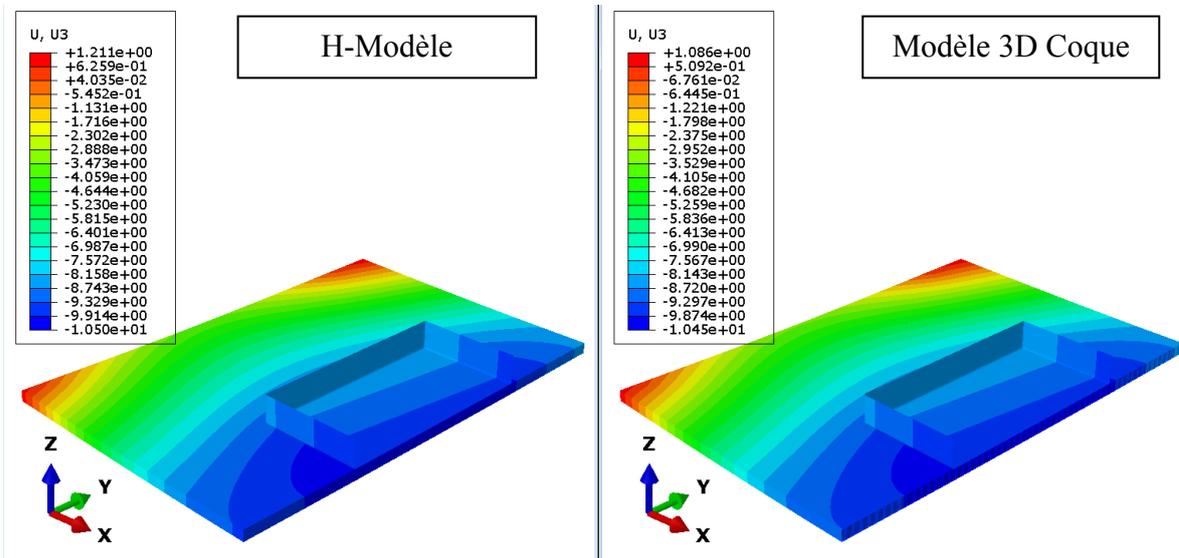


(b) Bord fermé.

Figure 5.8. Déplacement vertical de la plaque avec entaille (position 2).



(a) Bord ouvert.



(b) Bord fermé.

Figure 5.9. Déplacement vertical de la plaque sans entaille (position 2).

Le temps CPU est de 11132 s pour la simulation en éléments de coque 3D, tandis que le temps CPU n'est que de 6124,1 s pour la simulation avec le solide homogénéisé. On note que le maillage pour le modèle de solide homogénéisé pouvait être beaucoup plus grossier, permettant de largement réduire le temps de calcul. Le tableau 5.8 montre une comparaison entre le maillage fin et grossier, les erreurs sont très petites pour la position 2.

En fait, les maillages pour faire les simulations ci-dessus étaient trop fins. Nous avons refait les calculs avec le H-modèle pour le cas de la plaque avec bords ouverts et sans

entaille en position 2, en utilisant les maillages suivants : 1053 nœuds et 988 éléments de coque 'S4R' pour une peau; 19677 nœuds et 3952 éléments volumiques 'C3D20R' pour le solide homogénéisé. On constate que le temps CPU est largement diminué (40.17 s au lieu de 6324.4 s) avec peu de changement des flèches (11.46 mm au lieu de 11.41 mm au point A dans la Fig. 5.3, et 10.55 mm au lieu de 10.48 mm au centre de la plaque). Ce calcul montre que le calcul avec nos H-modèles est beaucoup plus rapide que l'utilisation du modèle de coque 3D (~296.1 fois).

Flexion de la plaque de nid d'abeilles		U ₃ max (mm)			U ₃ au centre (mm)		
		Modèle de coque	Modèle Homo	Erreur (%)	Modèle de coque	Modèle Homo	Erreur (%)
Avec entaille ()	Ouverte	12,05	12,92	6,73	9,94	11,33	12,27
	Fermée	11,79	11,87	0,67	9,74	9,79	0,52
Sans entaille	Ouverte	10,64	11,41	6,75	9,20	10,48	12,16
	Fermée	10,45	10,50	0,48	9,04	9,07	0,38

Tableau 5.7. Valeurs des flèches de la plaque sous une charge de 50 daN en position 2.

Type de la plaque solide	U3-max			U3-au centre		
	Maillage fin	Maillage grossier	Erreur (%)	Maillage fin	Maillage grossier	Erreur (%)
Avec entaille, peau ouverte	12,92	12,92	0,00	11,26	11,33	0,60
Avec entaille, peau fermée	11,87	11,80	-0,59	9,79	9,78	-0,17
Sans entaille, peau ouverte	11,41	11,46	0,44	10,48	10,55	0,71
Sans entaille, peau fermée	9,12	9,09	-0,30	7,79	7,77	-0,29

Tableau 5.8. Comparaison entre les maillages fin et grossier (Position 2).

V.4. Conclusion du chapitre V

Dans ce chapitre, nous avons d'abord présenté les caractéristiques des plaques sandwich en nid d'abeilles obtenues expérimentalement au laboratoire. Une peau est composée de trois plis de composite formés par des fibres de lin longues et la résine Acrodur®. En utilisation notre méthode d'homogénéisation pour l'âme en nid d'abeilles, nous avons obtenu les propriétés du solide homogénéisé équivalent au nid d'abeilles.

Nous avons réalisé les simulations sur des plaques sandwich en flexion. Les résultats ont montré que nos H-modèles permettent non seulement d'obtenir une bonne précision par rapport aux calculs avec les éléments de coque d'Abaqus, mais aussi de diminuer largement le temps de préparation des géométries, des maillages et le temps de calcul.

Conclusions et perspectives

De gros efforts sont constamment fournis pour concevoir des matériaux avec une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences. Parmi les matériaux composites les plus utilisés, les panneaux sandwichs à âme creuse sont un bon compromis entre la résistance et la légèreté ; en particulier, les panneaux de sandwich en nid d'abeilles.

La simulation et l'optimisation de ce type de panneaux sont de première importance pour la légèreté et la sécurité des structures. Cependant, la modélisation numérique de structures en nid d'abeilles est trop longue et fastidieuse en raison de la complexité de la structure. L'homogénéisation de ces structures permet d'obtenir un solide homogène équivalent et de réaliser des simulations beaucoup plus efficaces.

A la différence des modèles classiques d'homogénéisation du nid d'abeilles, nous avons introduit les effets des peaux en considérant la redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles. Cette redistribution des contraintes implique des déplacements additionnels dans les parois du nid d'abeilles. Nous avons proposé plusieurs modèles d'homogénéisation basés sur la méthode énergétique pour calculer analytiquement les propriétés mécaniques d'un solide homogénéisé équivalent du nid d'abeilles sous différents chargements : traction/compression et cisaillement dans le plan, flexions et torsion, cisaillements transverses.

Les déformations dans le nid d'abeilles sont de deux types : les déformations basiques entraînées par les peaux et les déformations additionnelles dues à la redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles. A partir de l'observation des déplacements dans une cellule du nid d'abeilles, nous avons proposé des séries de fonctions trigonométriques satisfaisant les conditions aux limites pour décrire les déplacements additionnels. Nous avons ensuite défini les déformations additionnelles et l'énergie interne de déformation. La minimisation de cette énergie interne de déformation permet de déterminer les paramètres des séries trigonométriques et d'obtenir l'énergie de déformation qui doit être égale à l'énergie interne de déformation du solide homogénéisé équivalent, conduisant à l'obtention des modules d'élasticité équivalents. Cette méthode énergétique est très efficace et performante, permettant de traiter toutes les géométries, conditions aux limites et chargements complexes du nid d'abeilles et de faciliter la

comparaison des résultats entre nos H-modèles et les calculs numériques avec les éléments de coque d'Abaqus.

Les modules d'Young équivalents de l'âme en nid d'abeilles dans les deux cas extrêmes ont été étudiés : la hauteur de l'âme tendant vers zéro ou vers l'infini. La théorie de poutre a permis d'obtenir les bornes supérieures et inférieures de ces modules. Ces bornes correspondent bien aux bornes obtenues par les formulations basées sur les séries de fonctions trigonométriques. Nous avons également étudié l'influence de la hauteur de l'âme sur leurs propriétés mécaniques. Lorsque la hauteur augmente, les modules diminuent. Nous avons constaté que les modules d'Young de traction et de flexion avaient les mêmes bornes supérieures et inférieures, mais les courbes des modules de flexion diminuaient plus rapidement que celles de traction à cause des différents modes de redistribution des contraintes. Les mêmes phénomènes ont été observés pour les modules entre le cisaillement dans le plan et la torsion.

Nous avons également effectué des simulations numériques avec les éléments de coque d'Abaqus pour valider nos modèles d'homogénéisation analytique dans les cas des tractions, flexions, cisaillement dans le plan, torsion, cisaillements transverses. Un très bon accord a été trouvé entre nos H-modèles et les calculs avec les éléments de coque. Nos H-modèles ont été appliqués à la modélisation de plaques sandwichs en nid d'abeilles industrielles. La comparaison des résultats a montré que les calculs avec nos H-modèles étaient aussi précis que les calculs en éléments finis de coque d'Abaqus et beaucoup plus rapides.

Comme perspectives, nous envisageons d'appliquer nos modèles d'homogénéisation analytique à d'autres cas de chargements en dynamique comme les vibrations, chocs.... Il serait également intéressant de déterminer la distribution des contraintes dans le solide homogénéisé afin d'étudier les problèmes de collage, de délaminage et de rupture au interfaces peaux-âme.

Liste des figures

Figure 1.1. Classification des matériaux composites selon leur structure.....	12
Figure 1.2. Plaques sandwiches à âmes pleines [1].....	14
Figure 1.3. Plaques sandwiches à âmes creuses [1].	15
Figure 1.4. Constitution d'un panneau sandwich en nid d'abeilles.....	15
Figure 1.5. Procédé de fabrication de l'âme en nid d'abeilles.....	18
Figure 1. 6. Géométrie d'une cellule en nid d'abeilles.....	20
Figure 1.7. Systèmes de cordonnées d'un nid d'abeilles.....	21
Figure 1. 8. Modèle de Gibson basé sur la flexion de poutre pour une cellule de nid d'abeilles sous compression : (a) nid d'abeilles non déformé; (b, c) flexion provoquée par σ_1 et σ_2 [2].....	22
Figure 1. 9. Modèle de Gibson basé sur la flexion de poutre pour une cellule de nid d'abeilles sous cisaillement : charges, moments, déplacements et rotations [2].	23
Figure 2.1. Définition des efforts de membrane, moments de flexions - torsion et efforts de cisaillement transverse.....	33
Figure 2. 2. Volume élémentaire représentatif du nid d'abeilles.	35
Figure 2. 3. Traction suivant Y : déformation sur la paroi inclinée ;	38
Figure 2.4. Traction suivant X : déformation sur la paroi inclinée.....	39
Figure 2.5. Déplacements et redistribution des contraintes entre parois verticale et inclinée.	42
Figure 2.6. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes en traction. 46	
Figure 2.7. Distribution du déplacement suivant Y le long de la hauteur de l'âme.....	47
Figure 2.8. Distribution du déplacement suivant Z le long de la hauteur de l'âme.....	47
Figure 2.9. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes en flexion..	52
Figure 2.10. Géométrie d'un VER du nid d'abeilles.....	61
Figure 2.11. Modules de traction Q_x^* , Q_{xy}^* , Q_y^* en fonction de la hauteur de l'âme (b=0,05-10 mm).....	64
Figure 2.12. Modules de traction avec les bornes supérieure et inférieure.	64
Figure 2.13. Modules d'Young en fonction de la hauteur du nid d'abeilles (b=0-120 mm).65	
Figure 2.14. Coefficient de Poisson en fonction de la hauteur du nid d'abeilles.....	66
Figure 2.15. Distribution de la contrainte normale à l'interface entre l'âme et une peau. ..	67
Figure 2.16. Distribution de la contrainte tangentielle à l'interface entre l'âme et une peau.	68
Figure 2. 17. Modules de flexion en fonction de la hauteur de l'âme (b=0,25-20 mm).	69
Figure 2.18. Modules de flexion entre les bornes supérieure et inférieure.	70
Figure 2.19. Comparaison des modules de traction et flexion (b=0 – 120 mm).	70
Figure 3.1. VER du nid d'abeilles pour l'homogénéisation en cisaillement et en torsion. ..	74
Figure 3.2. Repères locaux sur les parois verticales et inclinée.	75

Figure 3.3. Cisaillement imposé par les peaux.....	76
Figure 3.4. Déformation du 1/4 VER due à la redistribution des contraintes.	78
Figure 3.5. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes.....	80
Figure 3.6. Distribution des déplacements suivant X.....	81
Figure 3.7. Distribution des déplacements suivant Y.....	82
Figure 3.8. Déformation de base due au moment de torsion M_{XY} dans 1/8 VER.....	89
Figure 3.9. Déplacements additionnels dus à la redistribution des contraintes en torsion. .	92
Figure 3.10. Conditions aux limites pour le problème de cisaillement.	99
Figure 3.11. Iso-valeurs du déplacement horizontal en cisaillement.	99
Figure 3.12. Zone utilisée pour obtenir l'énergie interne de déformation en torsion.	101
Figure 3.13. Iso-valeurs du déplacement vertical en torsion.....	103
Figure 3.14. Module de cisaillement en fonction de la hauteur du nid d'abeilles.	104
Figure 3.15. Module de torsion en fonction de la hauteur du nid d'abeilles.....	104
Figure 3.16. Comparaison des modules de cisaillement et de torsion.....	105
Figure 4.1. Une cellule du nid d'abeilles pour le cisaillement transverse.....	108
Figure 4.2. Distributions des déplacements U_1 , U_2 et U_3 sous une force de cisaillement F_y	111
Figure 4.3. Iso-valeurs des déplacements suivant Y entraînés par le déplacement imposé sur la peau supérieure ($U_2 = 0,1b$ mm).	116
Figure 4.4. Module de cisaillement transverse en fonction de la hauteur de l'âme.	118
Figure 4.5. Iso-valeurs des déplacements suivant X entraînés par le déplacement imposé sur la peau supérieure ($U_1 = 0,1b$ mm).	119
Figure 5.1. Géométrie d'une cellule de nid d'abeilles en papier carton.....	122
Figure 5. 2. Géométrie de la plaque sandwich de nid d'abeilles en flexion.....	123
Figure 5.3. Conditions aux limites pour la plaque sandwich en flexion (Position 1).....	124
Figure 5.4. Iso-valeurs du déplacement vertical pour la plaque avec entaille.....	125
Figure 5.5. Iso-valeurs du déplacement vertical de la plaque sans entaille.....	126
Figure 5.6. Géométrie et appuis de la plaque en nid d'abeilles (Position 2).	127
Figure 5.7. Conditions aux limites pour la flexion de la plaque en position 2.....	128
Figure 5.8. Déplacement vertical de la plaque avec entaille (position 2).....	129
Figure 5.9. Déplacement vertical de la plaque sans entaille (position 2).	130

Liste des tableaux

Tableau 1.1. Caractéristique mécaniques et géométriques de différents nids d'abeilles.	19
Tableau 1.2. Paramètres géométriques d'une cellule en nid d'abeilles.	21
Tableau 1.3. Propriétés élastiques du nid d'abeilles de Gibson.....	24
Tableau 2.1. Paramètres géométriques et matérielles du nid d'abeilles pour la validation H-modèle en traction et en flexion.	63
Tableau 3.1. Paramètres géométriques et matérielles de l'âme en nid d'abeilles.	98
Tableau 3.2. Modules de cisaillement G_{XY}^{C*} obtenus avec les éléments de coque d'Abaqus.	100
Tableau 3.3. Module de torsion G_{XY}^{T*} obtenu avec les éléments de coque d'Abaqus.	102
Tableau 4.1. Bornes du module de cisaillement transverse G_{YZ}^*	114
Tableau 4.2. Module de cisaillement transverse G_{YZ}^* obtenus par Abaqus.....	117
Tableau 4.3. Modules de cisaillement transverse G_{XZ}^* obtenus par Abaqus et Gibson et Ashby.....	120
Tableau 5.1. Propriétés d'un pli unidirectionnel pour les peaux.....	122
Tableau 5.2. Propriétés du papier carton pour le nid d'abeilles.	122
Tableau 5.3. Paramètres géométriques d'une cellule de nid d'abeilles en papier carton. .	122
Tableau 5. 4. Propriétés du solide homogénéisé équivalent au nid d'abeilles.	123
Tableau 5.5. Valeurs de la flèche de la plaque sous une charge de 100 daN en position 1.	126
Tableau 5.6. Comparaison entre les maillages fin et grossier (position 1).....	127
Tableau 5.7. Valeurs des flèches de la plaque sous une charge de 50 daN en position 2. .	131
Tableau 5.8. Comparaison entre les maillages fin et grossier (Position 2).	131

Bibliographie

- [1] J. Berthelot, *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*, 5e éd., Paris: Lavoisier, 2012.
- [2] L. Gibson et M. Ashby, *Cellular Solids: Structure and Properties*, 2nd éd., Cambridge: Cambridge Solid State Science Series, 1999.
- [3] D. Gay, *Matériaux composites*, 5e éd., Paris: Lavoisier, 2005.
- [4] T. Bitzer, *Honeycomb Technology: Materials, Design, Manufacturing, Applications and Testing*, Springer, 1997.
- [5] A. Abbadi, Y. Koutsawa, A. Carmasol, S. Belouettar et Z. Azari, «Experimental and numerical characterization of honeycomb sandwich composite panels,» *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 17, n° 110, pp. 1533-1547, 2009.
- [6] Z. Chen et N. Yan, «Investigation of elastic moduli of Kraft paper honeycomb core sandwich panels,» *Composites: Part B*, vol. 43, p. 2107–2114, 2012.
- [7] I. Masters et K. Evans, «Models for the elastic deformation of honeycombs,» *Composite Structures*, vol. 35, p. 403–422, 1996.
- [8] H. Allen, *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Oxford: Pergamon Press, 1969.
- [9] X. F. Xu et P. Qiao, «Homogenized elastic properties of honeycomb sandwich with skin effect,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, p. 2153–2188, 2002.
- [10] P. Qiao et X. X. F., «Refined Analysis of Torsion and In-plane Shear of Honeycomb Sandwich Structures,» *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 7, pp. 289-305, 2005.
- [11] A. Chen et J. Davalos, «A solution including skin effect for stiffness and stress field of sandwich honeycomb core,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, p. 2711–2739, 2005.
- [12] D. Chen, «Bending deformation of honeycomb consisting of regular hexagonal cells,» *Composite Structures*, vol. 93, p. 1910–1917, 2011.
- [13] W. Becker, «The in-plane stiffness of a honeycomb core including the thickness

- effect,» *Archives of Applied Mechanics*, vol. 68, p. 334–341, 1998.
- [14] W. Becker, «Closed-form analysis of the thickness effect of regular honeycomb core material,» *Composite Structures*, vol. 48, pp. 67-70, 2000.
- [15] J. Hohe et W. Becker, «A refined analysis of the effective elasticity tensor for general cellular sandwich cores,» *Solids and Structures*, vol. 38, pp. 3689-3717, 2001.
- [16] S. Balawi et J. Abot, «A refined model for the effective in-plane elastic moduli of hexagonal honeycombs,» *Composite Structures*, vol. 84, p. 147–158, 2008.
- [17] D. Chen et S. Ozaki, «Analysis of in-plane elastic modulus for a hexagonal honeycomb core: effect of core height and proposed analytical method,» *Composite Structures*, vol. 88, p. 17–25, 2009.
- [18] M. Hoang, Y. A. B. Li, F. Abbès et Y. Guo, «Analytical homogenization of honeycomb with skin and height effects in sandwich plates,» chez *16th European conference on composite materials (ECCM16)*, Seville, 2014.
- [19] Y. Li, M. P. Hoang, B. A. F. Abbès et Y. Guo, «Analytical Homogenization for Stretch and Bending of Honeycomb Sandwich Plates with Skin and Height Effects,» *Composite Structures*, vol. 120, pp. 406-416, 2015.
- [20] Y. Li, M. A. B. Hoang, F. Abbès et Y. Guo, «Analytical Homogenization for in-Plane Shear and Torsion of Honeycomb Sandwich Plates with Skin and Height Effects,» chez *International Conference on Advanced Engineering and Technology (ICAET)*, Incheon (South Korea), 2014.
- [21] S. Kelsey, G. R.A. et B. Clark, «The shear modulus of foil honeycomb cores,» *Aircraft Engineering*, vol. 30, pp. 294-302, 1958.

Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer des modèles d'homogénéisation analytiques de panneaux sandwichs en nid d'abeilles. A la différence des méthodes classiques, l'effet des peaux est pris en compte, conduisant à des propriétés mécaniques très différentes. Dans les cas des tractions, flexions, cisaillement dans le plan, cisaillements transversaux et torsion, différentes séries de fonctions analytiques sont proposées pour prendre en compte la redistribution des contraintes entre les parois du nid d'abeilles. Nous avons étudié l'influence de la hauteur du nid d'abeilles sur les propriétés élastiques. Les courbes des modules obtenues avec le modèle proposé sont bien bornées par les valeurs obtenues avec la théorie des poutres. Les contraintes d'interface sont également étudiées afin de comparer avec les modèles existant pour le problème de traction.

De nombreux calculs numériques ont été réalisés avec nos H-modèles pour les problèmes de tractions, de flexions, de traction-flexion couplés, de cisaillement dans le plan, de cisaillement transversal et de torsion. De très bon accords ont été obtenus entre les résultats issus des H-modèles et ceux issus des calculs en éléments finis de coques en maillant complètement les panneaux sandwichs. Nos H-modèles ont été appliquées aux calculs de grandes plaques sandwichs industrielles en nid d'abeilles. La comparaison des résultats entre les H-modèles et les calculs par éléments finis de coques du logiciel Abaqus sont en très bon accord.

Mots clés: Homogénéisation analytique, Plaque sandwich en nid d'abeilles, Matériau cellulaire, Structure en nid d'abeilles, Effet de peau et de hauteur.

Abstract

Analytical homogenization of honeycomb sandwich structures for sandwich composite plates

The aim of this thesis is to develop an analytical homogenization model for the honeycomb core sandwich panels. Unlike conventional methods, the skin effects are taken into account, leading to a very different mechanical properties. In the cases of extensions, bendings, in-plane shear, transverse shears and torsion, different analytical function series are proposed to consider the stress redistribution between the honeycomb walls. We have studied the influence of the height of the core on its homogenized properties. The moduli curves obtained by the present H-models are well bounded by the moduli values obtained by the beam theory. The interface stresses are also studied to compare with existing models for stretching problem.

Many numerical computations with our H-models have been done for the problems of stretching, bending, in-plan and transverse shearing, as well as torsion. Very good agreement has been achieved between the results of the H-models and the results obtained by finite element simulations by completely meshing the sandwich panel with shell elements. Our H-models have been applied to the computations of industrial large sandwich panels with honeycomb core. The comparison of the results between the H-models and the simulations with Abaqus shell elements are in very good agreement.

Keywords: Analytical homogenization, Honeycomb sandwich plate, Cellular material, Honeycomb structure, Skin and height effects