



SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
U N I V E R S I T É D E B O U R G O G N E

Contribution du bruit aux
phénomènes de résonance et à la
propagation de l'information dans
les réseaux électroniques non
linéaires



MAXIME BORDET

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
U N I V E R S I T É D E B O U R G O G N E

THÈSE présentée par

MAXIME BORDET

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Bourgogne

Spécialité : **Instrumentation et informatique de l'image**

Contribution du bruit aux phénomènes de résonance et à la propagation de l'information dans les réseaux électroniques non linéaires

Unité de Recherche :

Laboratoire Electronique, Informatique et Image (LE2I) - UMR 6306 CNRS

Soutenue publiquement le 21 mai 2015 devant le Jury composé de :

F. CHAPEAU-BLONDEAU	Rapporteur	Professeur à l'université d'Angers
D. ROUSSEAU	Rapporteur	Professeur à l'université Lyon 1
D. GINHAC	Examineur	Professeur à l'université de Bourgogne
K. TSE VE KOON	Examineur	Maître de conférences à l'université Lyon 1
S. MORFU	Directeur de thèse	Maître de conférences HDR à l'université de Bourgogne
P. MARQUIÉ	Co-directeur de thèse	Professeur à l'université de Bourgogne

"L'expérience ne se trompe jamais, c'est votre jugement seul qui s'égare en se promettant des résultats qui ne découlent pas directement de votre expérimentation."

Léonard de Vinci

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à exprimer ma gratitude envers mes encadrants, Savério MORFU et Patrick MARQUIE. Il est certain que cette thèse n'aurait pas pu aboutir sans eux. À Savério, c'est avec une profonde sincérité que je tiens à témoigner ma reconnaissance pour son engagement permanent, sa disponibilité, ses conseils et sa bienveillance. Travailler à ses côtés fut agréable et très formateur. C'est avec la même sincérité que je remercie Patrick, aussi bien pour son regard critique que pour ses qualités humaines.

Je remercie vivement Messieurs François CHAPEAU-BLONDEAU et David ROUSSEAU, qui me font l'honneur d'être les rapporteurs de mes travaux de thèse. Je remercie également Messieurs Dominique GINHAC et Kevin TSE VE KOON, qui ont accepté de prendre part à mon jury de thèse en tant qu'examinateurs.

J'adresse mes remerciements à Jean-Marie BILBAULT, pour le rôle important qu'il a joué durant mes études à l'université de Bourgogne. Son assistance me fut ô combien précieuse à plusieurs reprises.

Mes remerciements vont également à Matthieu ROSSE et Romain TROISGROS, pour leur aide et leurs conseils lors du développement et de la réalisation des différentes cartes élaborées pendant cette thèse.

Je remercie très sincèrement Céline BEAUJARD et Eric BUSVELLE pour la confiance qu'ils m'ont accordée et pour la chance unique qu'ils m'ont donnée d'enseigner durant ces trois années de thèse au sein du département Réseaux et Télécommunications de l'IUT d'Auxerre. Je tiens à remercier Séverine MARCEL, Alban MAZEROLLES et Jean-Baptiste VIOIX pour leur sympathie, leur disponibilité, ainsi que pour l'attention qu'ils m'ont accordée. J'ai une pensée toute particulière pour Séverine MARCEL et ses emplois du temps sur mesure. Je remercie également les autres membres du département Réseaux et Télécommunications, enseignants et personnels administratifs, pour leur accueil et leur gentillesse.

Je n'oublie pas non plus les doctorants que j'ai rencontrés tout au long de ma thèse. Avec leurs origines, leurs cultures et leurs personnalités respectives, ils ont donné au mot *université* tout son sens. Je souhaite une bonne continuation à ceux qui ne sont plus là et beaucoup de courage à ceux qui soutiendront après moi !

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en n'adressais pas aux personnes qui me sont chères. Merci à mes parents pour l'éducation qu'ils m'ont donnée. Merci à ma famille et mes proches pour leur soutien et leurs encouragements. Merci à mes amis pour leur vision toute particulière de la recherche et du métier de chercheur. Enfin, mes derniers remerciements s'adressent à Caroline. Merci de m'avoir épaulé et encouragé tout au long de cette thèse. Merci pour tous les sacrifices consentis. Je sais que je te dois beaucoup.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	vii
Table des matières	ix
1 Introduction	1
2 Modèle théorique de FitzHugh-Nagumo et dispositifs expérimentaux	5
2.1 Modèle normalisé de FitzHugh-Nagumo	6
2.2 Cellule électronique de FitzHugh-Nagumo	8
2.2.1 Contexte de développement et description de la cellule	8
2.2.2 Dynamique de la tension V	10
2.2.3 Dynamique de la tension W	11
2.3 Ligne électrique de FitzHugh-Nagumo constituée de 45 cellules couplées	13
2.3.1 Description de la ligne	13
2.3.2 Dynamique de la tension V_n	14
2.3.3 Dynamique de la tension W_n	15
2.4 Description des différentes excitations considérées	17
2.4.1 Définition de l'excitation $E(t)$ de la cellule élémentaire	17
2.4.2 Définition des excitations $E_n(t)$ des différentes cellules de la ligne .	18
2.4.3 Génération des différentes sources de bruit utilisées	19
2.4.3.1 Génération du bruit blanc $\eta_w(t)$	19
2.4.3.2 Génération du bruit coloré $\eta_c(t)$	21
3 Étude d'une cellule soumise à une excitation déterministe	25
3.1 Réponse du système à une tension constante	26
3.1.1 Différents régimes de fonctionnement	26
3.1.2 Étude analytique de la bifurcation d'Andronov-Hopf	29
3.1.3 Validations numérique et expérimentale des expressions analytiques de la bifurcation d'Andronov-Hopf	31

3.1.4	Analyse qualitative des signaux au voisinage de la bifurcation d'Andronov-Hopf	33
3.2	Réponse du système à une excitation monochromatique	37
3.2.1	Paramétrage du système par rapport à la bifurcation d'Andronov-Hopf	38
3.2.2	Analyse de l'encodage de l'excitation monochromatique	39
3.3	Réponse du système à une excitation bichromatique	43
3.3.1	Résonance vibrationnelle	43
3.3.1.1	État de l'art	43
3.3.1.2	Paramètres d'étude de la résonance vibrationnelle	47
3.3.1.3	Manifestation temporelle de la résonance vibrationnelle	48
3.3.1.4	Manifestation fréquentielle de la résonance vibrationnelle	50
3.3.2	Résonance fréquentielle	52
3.3.2.1	Introduction du phénomène	52
3.3.2.2	Analyse numérique de la résonance fréquentielle	52
3.3.2.3	Mise en évidence expérimentale de la résonance fréquentielle	54
3.3.3	Bi-résonance vibrationnelle	56
3.3.3.1	Introduction du phénomène	56
3.3.3.2	Mises en évidence numérique et expérimentale de la bi-résonance vibrationnelle	57
3.3.3.3	Prédictions numérique et expérimentale des différentes résonances	59
4	Étude d'une cellule soumise à une excitation stochastique	63
4.1	Réponse du système en présence exclusive de bruit : différentes formes de manifestation de la résonance cohérente	64
4.1.1	Introduction et contexte d'étude	64
4.1.2	Analyse temporelle des signaux	67
4.1.3	Évaluation quantitative des deux formes de résonance cohérente	69
4.2	Réponse du système à une excitation monochromatique bruitée : manifestation de la résonance stochastique	72
4.2.1	Contexte général	72
4.2.2	Paramétrage du système pour observer la résonance stochastique	73
4.2.3	Analyse spectrale de la résonance stochastique	74
4.3	Réponse du système à une excitation bichromatique bruitée	76

4.3.1	Analyse spectrale à la basse fréquence f_1	76
4.3.1.1	Bruit blanc d'amplitude RMS fixe : condition d'existence de la résonance vibrationnelle	76
4.3.1.2	Bruit blanc d'amplitude RMS variable : condition d'amélioration de la détection de la basse fréquence f_1	78
4.3.1.3	Bruit coloré de paramètres variables : condition d'amélioration de la détection de la basse fréquence f_1	80
4.3.2	Analyse à une fréquence absente de l'excitation : résonance stochastique fantôme	82
4.3.2.1	Introduction du phénomène de résonance stochastique fantôme	82
4.3.2.2	Choix des fréquences de l'excitation et prédiction théorique de la fréquence fantôme	85
4.3.2.3	Résonance stochastique fantôme dans le modèle de FitzHugh-Nagumo : cas harmonique	86
4.3.2.4	Résonance stochastique fantôme dans le modèle de FitzHugh-Nagumo : cas inharmonique	92
5	Étude de la propagation de l'information dans la ligne électrique	97
5.1	Propagation assistée par une perturbation haute fréquence déterministe	100
5.1.1	Étude spatio-temporelle du comportement de la ligne	100
5.1.2	Analyse spectrale de la propagation assistée par la composante haute fréquence : propagation vibrationnelle	103
5.2	Propagation assistée par le bruit	108
5.2.1	Bruit temporel	109
5.2.1.1	Paramétrage sous-optimal : propagation assistée par le bruit	109
5.2.1.2	Paramétrage quasi-optimal : propagation dégradée par le bruit	115
5.2.2	Bruit spatio-temporel	116
5.2.2.1	Paramétrage sous-optimal : propagation assistée par le bruit	117
5.2.2.2	Paramétrage quasi-optimal : propagation dégradée par le bruit	121
6	Conclusion et perspectives	123
6.1	Conclusion	123
6.2	Perspectives	130

Valorisation des résultats	133
Bibliographie	135
Table des figures	151
A Génération du courant non linéaire $I_{NL}(V)$	165
A.1 Principe de génération du courant non linéaire	165
A.2 Courant non linéaire expérimental	166
A.2.1 Fonction carrée de la forme $W1 = (V - a)(V - b)$	167
A.2.2 Fonction cubique de la forme $W2 = V(V - a)(V - b)$	167
A.2.3 Mise en forme de la fonction cubique pour obtenir le polynôme $P(V)$	168
B Schémas électriques de la cellule élémentaire et de la ligne	169
B.1 Cellule élémentaire	170
B.2 Ligne électrique	171
C Architecture électronique de la carte de mixage des excitations	173
C.1 Description de la carte de mixage des excitations	173
C.2 Plan de construction de la carte de mixage des excitations	177

INTRODUCTION

Les phénomènes non linéaires sont omniprésents dans le monde qui nous entoure. Il suffit d'observer la nature pour s'en convaincre : la dynamique de la surface des océans, l'ondulation des feuilles sous l'effet du vent, la feuille qui se détache de l'arbre et qui suit tout au long de sa chute une trajectoire sinueuse complexe, la verse des blés, l'architecture des branches d'un arbre ou encore les divers motifs des pelages de certains animaux, tels que les girafes, les zèbres ou les léopards en sont quelques exemples très visuels.

Cependant dès le XIX^{e} siècle, des chercheurs ont saisi que la non-linéarité n'était pas seulement visuelle. Ils ont alors consacré leurs travaux à la modélisation de divers phénomènes via des systèmes d'équations différentielles non linéaires, tantôt déterministes, tantôt stochastiques. Certains des exemples cités précédemment ont ainsi trouvé leurs équivalences mathématiques [1–3]. C'est dans ce contexte qu'une importante littérature a vu le jour dans des domaines largement pluridisciplinaires tels que la mécanique [4], la physique [5] ou les sciences du vivant [6, 7]. Les neurosciences ont également attiré très tôt de nombreux scientifiques qui se sont attachés à modéliser la dynamique non linéaire des neurones. Si certains ont établi des modèles mathématiques [8–14], d'autres ont proposé des circuits électroniques qui retranscrivent différentes propriétés de l'activité neuronale [15–21]. La flexibilité des structures électroniques a notamment permis de donner suite aux expériences pionnières d'Hodgkin-Huxley, réalisées sur l'axone géant d'un calamar. Ces démonstrateurs électroniques ont indubitablement participé à l'acquisition par la communauté scientifique d'une meilleure connaissance des mécanismes de transmission des influx nerveux.

Parallèlement, depuis le début des années 80, les possibles effets bénéfiques de perturbations stochastiques ont été mis en évidence dans les systèmes non linéaires. En effet, les phénomènes désormais bien connus de résonance cohérente et de résonance stochastique, ont respectivement permis d'établir qu'une quantité optimale de bruit pouvait améliorer la régularité de la réponse d'un système [22] ou maximiser la détection d'un signal périodique de faible amplitude [23, 24]. Depuis leurs découvertes, ces phénomènes ont déjà fait l'objet d'intenses recherches théoriques [25–29], numériques [30–34]

et expérimentales [35–38], dans divers domaines scientifiques et notamment dans les systèmes neuronaux [39–42].

Plus récemment, d'autres phénomènes non linéaires ont été révélés, que ce soit à partir de perturbations déterministes haute fréquence ou de bruit. Il a notamment été montré qu'une amplitude particulière d'une perturbation déterministe haute fréquence pouvait améliorer la détection d'une composante basse fréquence subliminale, via le phénomène de résonance vibrationnelle [43]. En régime stochastique, à partir du phénomène de résonance stochastique fantôme, des études ont permis de constater qu'une quantité optimale de bruit pouvait permettre l'émergence dans la réponse d'un système non linéaire, d'une composante fréquentielle absente de l'excitation [44]. Enfin, sur des structures couplées, en considérant les mêmes types de perturbation, il a été établi que la propagation d'une information basse fréquence pouvait être favorisée sous certaines conditions [45–48]. Cependant, ces phénomènes de résonance vibrationnelle et de résonance stochastique fantôme, bien que déjà étudiés numériquement dans des modèles neuronaux [49, 50], ou expérimentalement à partir de circuits électroniques ou de dispositifs optiques [51–54], n'ont jusqu'alors jamais fait l'objet d'études expérimentales réalisées sur des structures reproduisant une dynamique neuronale, telle que celle décrite par le modèle de FitzHugh-Nagumo. Les travaux présentés dans ce manuscrit visent alors à montrer les possibles effets bénéfiques de perturbations déterministes ou stochastiques sur la réponse de différents systèmes non linéaires traduisant une dynamique neuronale. À cet effet, des études numériques et expérimentales seront conjointement proposées sur deux structures distinctes : un oscillateur électronique élémentaire de type FitzHugh-Nagumo [55–57] et une ligne électrique constituée de 45 de ces oscillateurs couplés résistivement. Pour répondre à notre problématique, nous proposons dans ce manuscrit un découpage en six chapitres.

À l'issue de ce premier chapitre introductif, nous présenterons dans le chapitre 2 les modèles théoriques sur lesquels nous réaliserons nos simulations numériques. Les deux dispositifs expérimentaux correspondants seront également introduits dans ce chapitre. Pour chacun de ces circuits, les équations qui régissent la dynamique de leurs tensions seront déterminées et la correspondance avec le modèle normalisé sera établie. Pour clore ce chapitre, nous préciserons les différentes composantes pouvant entrer dans la constitution des stimuli qui exciteront nos deux circuits électroniques.

Dans le chapitre 3, nous proposerons une caractérisation de l'oscillateur élémentaire en régime déterministe. Afin de mieux appréhender la réponse du système lorsqu'il est soumis à une excitation bichromatique, c'est-à-dire constituée de deux fréquences, il sera d'abord nécessaire d'analyser la bifurcation d'Andronov-Hopf et l'encodage d'un stimulus sinusoïdal, en considérant respectivement une tension d'excitation continue et un signal sinusoïdal. Puis, en présence d'un signal excitateur bichromatique, notre attention se portera sur quelques phénomènes de résonance : la résonance vibrationnelle, la résonance fréquentielle et la bi-résonance vibrationnelle.

Le chapitre 4 sera quant à lui dédié aux effets du bruit sur la réponse de l'oscillateur élémentaire. Suite à de brèves mises en œuvre des phénomènes bien connus de résonance cohérente et de résonance stochastique, l'intérêt sera ensuite porté sur l'apport d'une source de fluctuations aléatoires dans le cas d'une excitation bichromatique. Dans un tel régime d'excitation, la riche dynamique du modèle de FitzHugh-Nagumo sera alors étudiée pour deux configurations distinctes des composantes sinusoïdales. En premier lieu, nous procéderons à l'analyse des effets du bruit sur l'existence de la résonance vibrationnelle et sur la détection de la composante basse fréquence. Dans un second temps, pour une toute autre configuration de l'excitation bichromatique, nous nous intéresserons à l'émergence d'une composante absente de l'excitation en mettant en œuvre le phénomène de résonance stochastique fantôme.

Dans le chapitre 5, nous aborderons l'étude de la structure couplée. L'objectif sera de déterminer si une perturbation déterministe haute fréquence ou une composante stochastique peuvent ou non favoriser la propagation d'une information basse fréquence dans une telle structure.

Enfin, ce manuscrit se terminera par une conclusion qui mettra l'accent sur les principaux résultats obtenus au cours de cette thèse et sur les perspectives qui se dégageront.

MODÈLE THÉORIQUE DE FITZHUGH-NAGUMO ET DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

Sommaire

2.1	Modèle normalisé de FitzHugh-Nagumo	6
2.2	Cellule électronique de FitzHugh-Nagumo	8
2.2.1	Contexte de développement et description de la cellule	8
2.2.2	Dynamique de la tension V	10
2.2.3	Dynamique de la tension W	11
2.3	Ligne électrique de FitzHugh-Nagumo constituée de 45 cellules couplées	13
2.3.1	Description de la ligne	13
2.3.2	Dynamique de la tension V_n	14
2.3.3	Dynamique de la tension W_n	15
2.4	Description des différentes excitations considérées	17
2.4.1	Définition de l'excitation $E(t)$ de la cellule élémentaire	17
2.4.2	Définition des excitations $E_n(t)$ des différentes cellules de la ligne	18
2.4.3	Génération des différentes sources de bruit utilisées	19
2.4.3.1	Génération du bruit blanc $\eta_w(t)$	19
2.4.3.2	Génération du bruit coloré $\eta_c(t)$	21

Afin de mener à bien nos études sur les possibles effets bénéfiques du bruit sur la réponse d'un oscillateur non linéaire, puis sur la propagation de l'information dans les réseaux électroniques non linéaires, nous avons eu recours à la conception de divers circuits électroniques. Deux démonstrateurs expérimentaux ont ainsi vu le jour : une cellule élémentaire, plus précisément un oscillateur de type FitzHugh-Nagumo, et une ligne électrique constituée de 45 de ces oscillateurs couplés résistivement. En premier lieu, la cellule élémentaire a été utilisée pour l'étude de divers phénomènes de résonance. La ligne électrique nous a ensuite permis de réaliser nos investigations sur la propagation de l'information, qu'elle soit assistée par un signal déterministe ou du bruit. Le développement d'une carte de mixage des excitations monochromatiques ou bichromatiques, tantôt

déterministes, tantôt stochastiques, a également été nécessaire afin de mettre au point nos différents protocoles expérimentaux. Dans un souci de clarté, ce dispositif de mixage des excitations sera présenté dans l'Annexe C de ce manuscrit. Dans ce chapitre, nous introduisons successivement le modèle théorique normalisé de FitzHugh-Nagumo, l'oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo et la ligne électrique. La dernière partie de ce chapitre sera quant à elle consacrée à la présentation des différentes excitations qui seront utilisées tout au long de cette thèse. Nous détaillerons notamment les moyens mis en œuvre pour obtenir expérimentalement les deux sources de bruit que nous utiliserons : une source de bruit blanc et une source de bruit coloré.

2.1/ MODÈLE NORMALISÉ DE FITZHUGH-NAGUMO

Au cours du xx^e siècle, afin de comprendre et mieux appréhender le monde qui nous entoure, des chercheurs venant de tous horizons ont consacré leurs travaux à la modélisation mathématique de notre quotidien via des systèmes d'équations différentielles non linéaires, déterministes ou stochastiques. C'est dans ce contexte qu'une importante littérature a pu se développer dans des domaines aussi variés que la physique, la chimie, la biologie ou la géologie par exemple. Les neurosciences ont également attiré très tôt l'attention de nombreux scientifiques dont les efforts ont notamment porté sur la modélisation de la communication neuronale [8]. En 1963, le prix Nobel de physiologie ou médecine récompense les travaux de Eccles J.C., Hodgkin A.L., et Huxley A.F. pour « *leurs découvertes concernant les mécanismes ioniques impliqués dans l'excitation et l'inhibition des portions périphérique et centrale de la membrane cellulaire des nerfs* ». Le premier modèle décrivant l'activité neuronale était né [9]. Des simplifications ont ensuite été apportées à ce modèle original d'Hodgkin-Huxley. Ainsi sont apparus chronologiquement les modèles de FitzHugh-Nagumo [10, 11], de Wilson-Cowan [12], de Morris-Lecar [13] et de Hindmarsh-Rose [14] pour ne citer qu'eux. De nombreux travaux de recherche ont été consacrés à l'étude du comportement du modèle de FitzHugh-Nagumo. En effet, malgré son apparente simplicité, celui-ci permet de reproduire qualitativement les phénomènes observés dans le modèle d'Hodgkin-Huxley et présente une excitabilité comparable. Sa forme normalisée est la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= f(V) - W + E(t) \\ \frac{dW}{dt} &= \varepsilon(V - \gamma W),\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $f(V) = -V(V - a)(V - b)$ est une fonction non linéaire cubique.

Dans ce modèle :

- V est appelée variable rapide. Son évolution au cours du temps prend la forme d'une onde de type potentiel d'action.
- La seconde variable, W , est qualifiée de variable lente et rend compte d'un point de vue neuronal des échanges des ions Potassium.
- a et b représentent deux des trois racines de la fonction cubique $f(V)$ qui modélise la non-linéarité du système, la troisième racine étant nulle.
- ε est une constante qui permet de régler l'écart d'échelles de temps entre les deux équations du système (2.1).
- γ est une constante qui permet d'ajuster le poids de la variable lente W par rapport à la variable rapide V dans le plan $[V, W]$ lors de la représentation du portrait de phase.
- $E(t)$ est le signal excitateur. C'est ce signal qui sera appliqué au système tout au long de cette thèse. Selon l'étude réalisée, il pourra prendre différentes formes : soit une tension constante, soit un signal mono- ou bi- chromatique avec ou sans composante continue. Des sources de bruit blanc ou coloré pourront également être ajoutées à $E(t)$ pour étudier la réponse du système en présence d'une perturbation aléatoire.

Suite à cette présentation des équations différentielles du modèle théorique de FitzHugh-Nagumo, dont l'une des particularités est de rendre compte de l'activité des neurones, nous allons introduire un circuit électronique dont l'évolution des tensions est régie par le même couple d'équations différentielles. Cette démarche de développement électronique bio-inspiré nous permettra, tout au long de cette thèse, de comparer les résultats issus d'un modèle réel analogique à des simulations numériques basées sur un modèle neuronal. De cette façon, nous pourrions confirmer l'existence de certains phénomènes et montrer que ceux-ci, visualisés au travers des circuits étudiés, sont conformes à la réalité.

2.2/ CELLULE ÉLECTRONIQUE DE FITZHUGH-NAGUMO

2.2.1/ CONTEXTE DE DÉVELOPPEMENT ET DESCRIPTION DE LA CELLULE

Tout d'abord, il est important de préciser que le développement de la cellule électronique de FitzHugh-Nagumo n'a pas commencé dans le cadre de cette thèse, mais s'inscrit dans un cheminement scientifique plus ancien. L'objectif initial était de proposer une alternative aux réalisations électroniques non linéaires existantes, tel que le circuit de Chua, et de concevoir un système électronique répondant parfaitement au modèle de FitzHugh-Nagumo [58]. Notons que cet oscillateur a ensuite servi de support aux investigations expérimentales de G. Lassere durant les travaux de sa thèse intitulée « *Implémentation électronique d'un oscillateur non linéaire soumis au bruit : application à la modélisation du codage neuronal de l'information* » [59]. Ce circuit, modélisant une dynamique neuronale, a d'abord été caractérisé en présence exclusive de bruit pour révéler le phénomène de résonance cohérente [60, 61], puis en présence d'un signal monochromatique bruité afin de mettre en évidence le phénomène de résonance stochastique. La confirmation expérimentale des résultats issus de simulations numériques lors de ces études devint alors possible [62, 63].

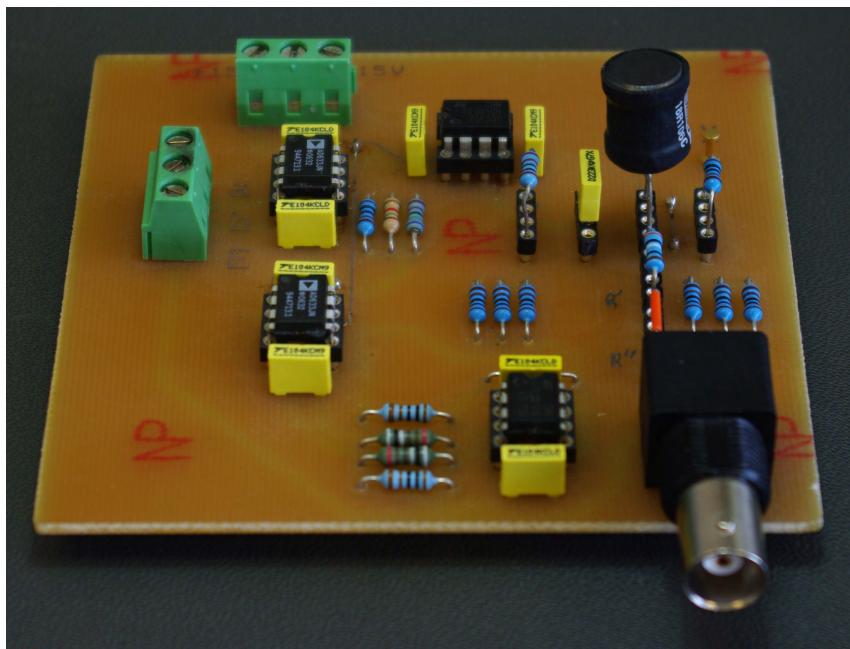


FIGURE 2.1 — Photographie de l'oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo construit au début de cette thèse.

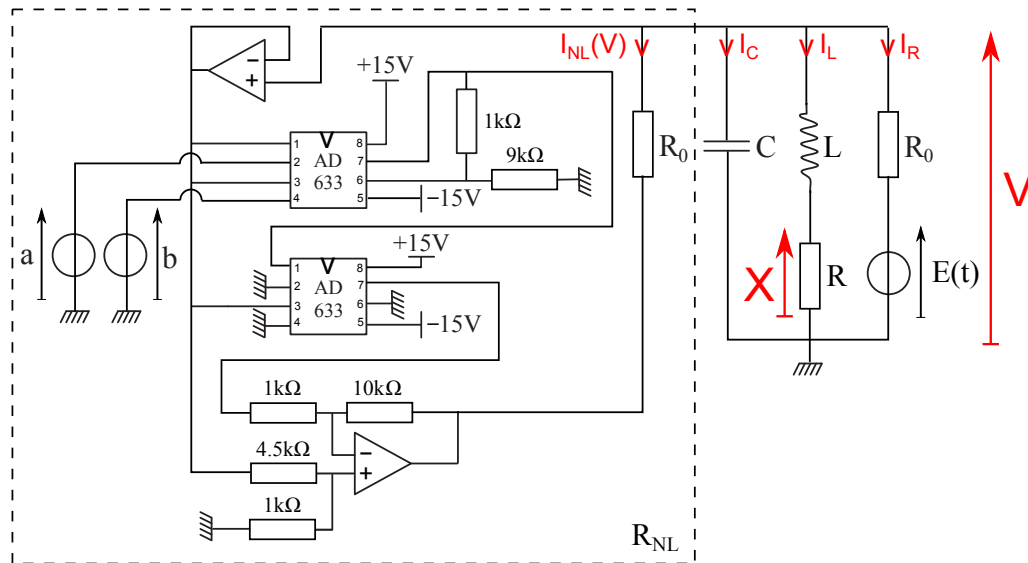


FIGURE 2.2 — Schéma électrique de l'oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo. Comme nous le verrons par la suite, les paramètres γ et ε du modèle théorique (2.1) sont ajustés avec les résistances R_0 et R , le condensateur C et l'inductance L . L'élément R_{NL} encadré en pointillés permet de produire le courant non linéaire $I_{NL}(V)$. Les sources de tension a et b fixent les racines de la non-linéarité cubique du modèle de FitzHugh-Nagumo, tandis que $E(t)$ constitue l'excitation du système dont on relève la réponse grâce aux tensions V et X .

Dans cette thèse, afin d'imaginer la construction d'une ligne électrique par duplication de l'oscillateur élémentaire, il nous a fallu retravailler la carte initialement développée [58], tout d'abord en figeant quelques paramètres ajustés jusqu'alors par le biais de composants variables, puis en repensant les entrées-sorties afin de les rendre à la fois plus accessibles et plus fonctionnelles par la suite. Ce travail d'ajustement réalisé, nous avons réalisé la carte présentée sur la FIGURE 2.1. À l'aide de ce dispositif, il nous a été possible de considérer des stimuli plus complexes que ceux traités jusqu'alors, comme des signaux bichromatiques par exemple, qui ont permis la mise en évidence des résonances fréquentielle, vibrationnelle et stochastique fantôme [55–57]. Ces trois phénomènes non linéaires sont différents de la résonance cohérente et de la résonance stochastique déjà révélées dans un tel système, et feront l'objet d'études qui seront développées dans ce manuscrit.

Le dispositif présenté sur la FIGURE 2.1 et représenté schématiquement sur la FIGURE 2.2 est composé de quatre branches parallèles où pourra être prélevée la tension V , dont l'évolution est régie par la première équation du modèle de FitzHugh-Nagumo. Les quatre branches qui constituent le circuit sont :

- Une résistance R_0 en série avec la source de tension $E(t)$ qui constituera l'excitation du circuit et qui sera présentée ultérieurement. L'ensemble est parcouru par un courant noté I_R .
- Une bobine d'inductance L qui est traversée par un courant I_L . Cette self-

inductance est placée en série avec une résistance R aux bornes de laquelle sera mesurée la tension X , qui correspondra, à un facteur d'échelle près, à la variable W définie par la seconde équation du modèle de FitzHugh-Nagumo.

- Un condensateur de capacité C parcouru par un courant noté I_C .
- Une résistance non linéaire notée R_{NL} , composée principalement d'amplificateurs opérationnels (TL081CN) et de multiplieurs analogiques (AD633JNZ), fournira la non-linéarité cubique nécessaire au modèle de FitzHugh-Nagumo. Cet élément non linéaire R_{NL} , encadré en pointillés sur la FIGURE 2.2, délivre un courant $I_{NL}(V)$ qui passe au travers d'une résistance R_0 . L'Annexe A fournit le détail de la conception de l'élément non linéaire R_{NL} et de la détermination de l'expression du courant $I_{NL}(V)$. Dans cette annexe, il est montré que le courant $I_{NL}(V)$ disponible au travers de la résistance R_0 du circuit de la FIGURE 2.2 suit la loi cubique suivante :

$$I_{NL}(V) = \frac{V(V-a)(V-b) - V}{R_0}. \quad (2.2)$$

2.2.2/ DYNAMIQUE DE LA TENSION V

Établissons les expressions régissant la dynamique de notre circuit en lui appliquant les lois de Kirchhoff. En premier lieu, nous travaillons uniquement sur la première équation du modèle théorique (2.1). La loi des nœuds fait apparaître l'égalité suivante :

$$I_R + I_L + I_C + I_{NL}(V) = 0. \quad (2.3)$$

Si l'on note t_{exp} le temps expérimental, et si l'on exprime les différents courants en fonction des éléments du circuit, la relation (2.3) devient :

$$\frac{V - E(t)}{R_0} + \frac{X}{R} + C \frac{dV}{dt_{exp}} + I_{NL}(V) = 0. \quad (2.4)$$

Une simple réorganisation des termes de l'équation (2.4) conduit alors à :

$$R_0 C \frac{dV}{dt_{exp}} = E(t) - V - \frac{R_0}{R} X - R_0 I_{NL}(V). \quad (2.5)$$

Afin de retrouver la première équation du système de FitzHugh-Nagumo (2.1), le changement de variables suivant s'impose :

$$W = \frac{R_0}{R} X \quad \text{et} \quad t = \frac{t_{exp}}{R_0 C}. \quad (2.6)$$

En appliquant le changement de variables (2.6), l'équation (2.5) devient :

$$\frac{dV}{dt} = -R_0 I_{NL}(V) - V + W + E(t). \quad (2.7)$$

Par identification avec la première équation du système (2.1), il apparaît alors que la non-linéarité cubique $f(V)$ du modèle normalisé de FitzHugh-Nagumo sera retranscrite dans notre système expérimental par le terme $-R_0.I_{NL}(V) - V$ de l'équation (2.7).

Par conséquent, en écrivant $f(V) = -R_0.I_{NL}(V) - V$, on déduit que pour implémenter la fonction cubique $f(V)$ nécessaire au modèle de FitzHugh-Nagumo (2.1), le courant non linéaire traversant la résistance R_0 de la FIGURE 2.2 doit obéir à :

$$\begin{aligned} I_{NL}(V) &= \frac{-f(V) - V}{R_0} \\ &= \frac{V(V-a)(V-b) - V}{R_0}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ainsi, en substituant ce courant non linéaire (2.8) à l'expression (2.7), nous obtenons bien la première équation du système de FitzHugh-Nagumo :

$$\frac{dV}{dt} = f(V) - W + E(t). \quad (2.9)$$

Au vu de la relation (2.9), notre dispositif expérimental nous permet donc de retranscrire fidèlement la première équation du système (2.1). Montrons maintenant que l'évolution de la tension X de notre circuit est régie, à un changement de variables près, par la seconde équation du système de FitzHugh-Nagumo (2.1).

2.2.3/ DYNAMIQUE DE LA TENSION W

La loi des mailles appliquée à la branche inductive du circuit de la FIGURE 2.2 amène :

$$L \frac{dI_L}{dt_{exp}} = V - X. \quad (2.10)$$

D'après la loi d'Ohm donnant le courant I_L traversant la résistance R , nous avons :

$$\frac{L}{R} \frac{dX}{dt_{exp}} = V - X. \quad (2.11)$$

En utilisant le changement de variables (2.6), portant sur W et la variable temporelle normalisée t , la relation (2.11) devient :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{R_0^2 C}{L} \left(V - \frac{R}{R_0} W \right). \quad (2.12)$$

Enfin, afin de faire apparaître les paramètres γ et ε du modèle de FitzHugh-Nagumo (2.1), nous appliquons le changement de variables suivant :

$$\gamma = \frac{R}{R_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{R_0^2 C}{L}, \quad (2.13)$$

ce qui nous permet de retrouver la seconde équation du système de FitzHugh-Nagumo (2.1) :

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon (V - \gamma W). \quad (2.14)$$

Au vu des relations (2.9) et (2.14), nous pouvons conclure que notre circuit électronique va permettre de retranscrire expérimentalement la dynamique du système de FitzHugh-Nagumo (2.1). Les paramètres γ et ε pourront être ajustés, via la relation (2.13), à l'aide des résistances R et R_0 , du condensateur C et de la self-inductance L . Cet oscillateur électronique constituera l'élément de base qui sera dupliqué à 45 reprises, sans la moindre modification, pour construire la ligne électrique présentée dans la sous-partie suivante. Les schémas saisis pour la réalisation pratique de la cellule et de la ligne sont proposés dans l'Annexe B de ce manuscrit.

2.3/ LIGNE ÉLECTRIQUE DE FITZHUGH-NAGUMO CONSTITUÉE DE 45 CELLULES COUPLÉES

2.3.1/ DESCRIPTION DE LA LIGNE

Pendant cette thèse, nous avons conçu une ligne électrique de type FitzHugh-Nagumo afin d'étudier des phénomènes de propagation non linéaire tels que la propagation vibrationnelle ou la propagation assistée par le bruit. À ce jour, différentes études basées sur le principe de la résonance stochastique ont montré que le bruit pouvait, sous certaines conditions, améliorer la détection et la propagation de signaux dans les systèmes couplés [45, 46, 64–66]. Cependant, aucune réalisation électronique de type FitzHugh-Nagumo n'a été considérée jusqu'alors. Pour pallier ce manque, nous avons couplé résistivement 45 cellules identiques à celle décrite dans la partie précédente selon le principe illustré sur la FIGURE 2.3. Le travail d'ajustement réalisé au préalable sur la cellule élémentaire (cf. sous-partie 2.2.1) a alors pris tout son sens et permis un développement rapide de la ligne électrique grâce à l'assistance technique de M. Rossé, assistant ingénieur au laboratoire LE2I. Il restait cependant à définir un cahier des charges strict quant à l'introduction des signaux nécessaires aux études envisagées. Il était en effet important d'anticiper dès l'étape de conception nos éventuels besoins futurs, ceci afin de faire de la ligne électrique de FitzHugh-Nagumo un outil d'investigations expérimentales efficace et fructueux sur le long terme.

La FIGURE 2.3, en plus d'illustrer le principe de construction utilisé, situe les grandeurs électriques significatives et utiles à l'établissement des équations de la dynamique de fonctionnement de la ligne électrique. La FIGURE 2.4 montre quant à elle l'une des trois

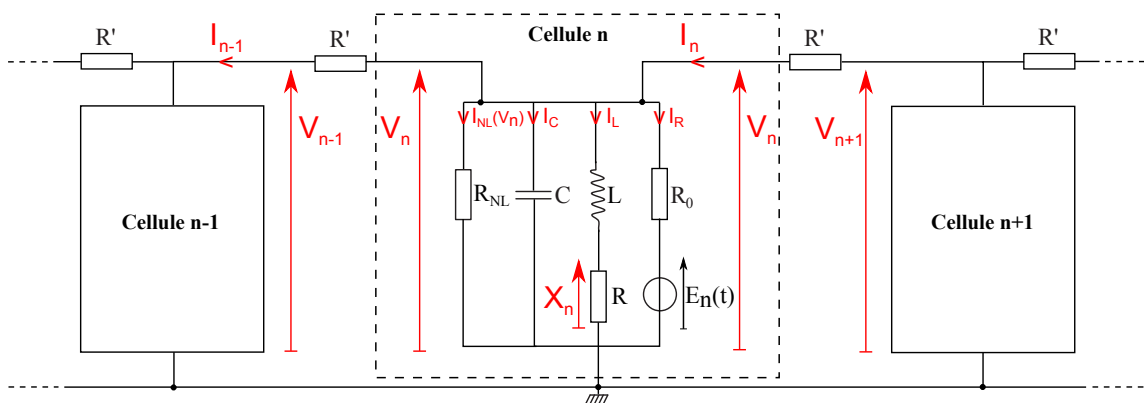


FIGURE 2.3 – Schéma synoptique de la ligne électrique de FitzHugh-Nagumo. Le circuit de la FIGURE 2.2 constitue la cellule élémentaire qui est dupliquée et couplée au moyen de résistances R' . Par souci de clarté, seule la cellule n , encadrée en pointillés, et ses deux cellules voisines $n + 1$ et $n - 1$ sont représentées sur cette figure. R_{NL} correspond à l'élément non linéaire décrit précédemment et encadré en pointillés sur la FIGURE 2.2.

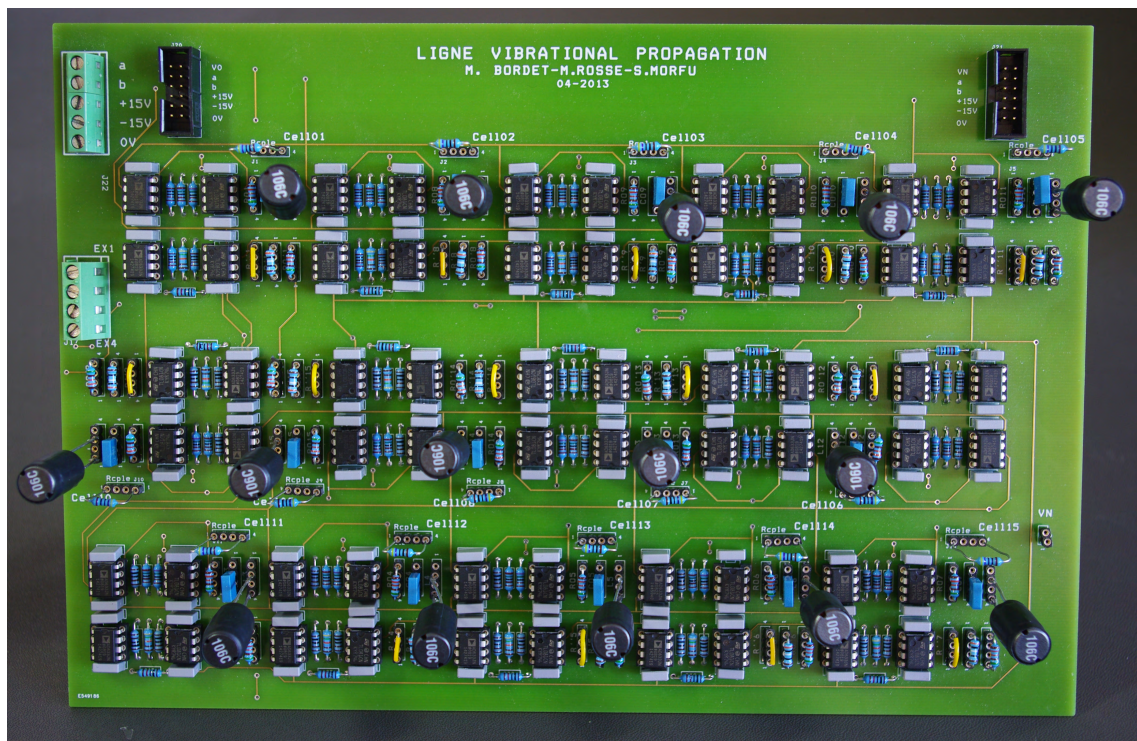


FIGURE 2.4 — Photographie de l'une des trois cartes constituant la ligne électrique de FitzHugh-Nagumo. La carte est obtenue en dupliquant à 15 reprises la cellule élémentaire de la FIGURE 2.2 et en introduisant un couplage inter-cellules résistif.

cartes de 15 cellules utilisées lors de nos investigations expérimentales.

2.3.2/ DYNAMIQUE DE LA TENSION V_n

En appliquant les lois de Kirchhoff sur le schéma synoptique de la ligne électrique de la FIGURE 2.3, de la même façon que nous avons déterminé les équations régissant l'évolution des tensions V et X de la cellule élémentaire, nous allons établir les équations gouvernant l'évolution des tensions V_n et X_n , correspondant respectivement aux potentiels V et X qui seront présents à la cellule n de la ligne. Commençons par déterminer la dynamique de la variable rapide V_n . La loi des noeuds nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$I_{n-1} - I_n + I_R + I_L + I_C + I_{NL}(V_n) = 0. \quad (2.15)$$

La loi d'Ohm nous permet d'exprimer les courants I_n et I_{n-1} qui traversent les résistances R' , couplant la cellule n aux cellules voisines $n + 1$ et $n - 1$:

$$I_n = \frac{V_{n+1} - V_n}{R'}, \quad (2.16)$$

et

$$I_{n-1} = \frac{V_n - V_{n-1}}{R'}. \quad (2.17)$$

Il suffit ensuite, pour la cellule n , d'exprimer les différents courants I_R , I_L et I_C , fléchés sur la FIGURE 2.3, en fonction des éléments du montage et des tensions V_n , X_n et $E_n(t)$:

$$I_R = \frac{V_n - E_n(t)}{R_0}, \quad (2.18)$$

$$I_L = \frac{X_n}{R}, \quad (2.19)$$

$$I_C = C \frac{dV_n}{dt_{exp}}. \quad (2.20)$$

Pour rappel, le courant $I_{NL}(V)$ traversant la résistance non linéaire R_{NL} de la cellule élémentaire obéit à la relation (2.2). Par conséquent, sur la FIGURE 2.3, à la cellule numéro n de la ligne électrique, ce courant s'écrit :

$$I_{NL}(V_n) = \frac{V_n(V_n - a)(V_n - b) - V_n}{R_0}. \quad (2.21)$$

En substituant dans l'égalité (2.15) les différents courants par leurs expressions respectives (2.16) à (2.21), nous pouvons écrire :

$$R_0 C \frac{dV_n}{dt_{exp}} = -V_n(V_n - a)(V_n - b) + \frac{R_0}{R'}(V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}) - \frac{R_0}{R}X_n + E_n(t). \quad (2.22)$$

Afin de normaliser ce système, nous introduisons un coefficient de couplage D et nous effectuons un changement de variables portant sur la variable lente et le temps :

$$D = \frac{R_0}{R'}, \quad W_n = \frac{R_0}{R}X_n \quad \text{et} \quad t = \frac{t_{exp}}{R_0 C}. \quad (2.23)$$

Le système (2.22) se met alors sous la forme normalisée :

$$\frac{dV_n}{dt} = -V_n(V_n - a)(V_n - b) + D(V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}) - W_n + E_n(t). \quad (2.24)$$

Cette expression retranscrit l'évolution de la variable rapide du modèle de FitzHugh-Nagumo lorsque celui-ci est considéré dans sa version couplée [11]. Exprimons maintenant la dynamique suivie par la variable lente W_n de ce système.

2.3.3/ DYNAMIQUE DE LA TENSION W_n

La loi des mailles appliquée sur la branche contenant l'inductance L et la résistance R implique :

$$V_n - X_n = L \frac{dI_L}{dt_{exp}}. \quad (2.25)$$

Or, le courant I_L traversant l'inductance L étant identique au courant passant à travers la résistance R , la loi d'Ohm nous donne $I_L = X_n/R$, d'où :

$$V_n - X_n = \frac{L}{R} \frac{dX_n}{dt_{exp}}. \quad (2.26)$$

En appliquant le changement de variables (2.23) portant sur le potentiel X_n et le temps expérimental t_{exp} , nous pouvons écrire :

$$\frac{dW_n}{dt} = \frac{R_0^2 C}{L} \left(V_n - \frac{R}{R_0} W_n \right). \quad (2.27)$$

En utilisant le changement de variables (2.13) utilisé lors de l'étude de la cellule élémentaire, nous faisons apparaître les paramètres γ et ε :

$$\frac{dW_n}{dt} = \varepsilon (V_n - \gamma W_n). \quad (2.28)$$

En reprenant les expressions (2.24) et (2.28) décrivant respectivement les évolutions des variables rapide V_n et lente W_n , nous obtenons le système couplé de FitzHugh-Nagumo suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dV_n}{dt} &= -V_n(V_n - a)(V_n - b) + D(V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}) - W_n + E_n(t) \\ \frac{dW_n}{dt} &= \varepsilon(V_n - \gamma W_n). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pour finir, une précision sur les conditions aux bords de la ligne est nécessaire. La première et la dernière cellule ($n = 1$ et $n = 45$) ne sont couplées qu'avec un seul voisin de par leur positionnement aux deux extrémités de la ligne, soit respectivement avec la cellule $n = 2$ et $n = 44$. Les conditions aux bords s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -V_1(V_1 - a)(V_1 - b) + D(V_2 - V_1) - W_1 + E_1(t) \\ \frac{dW_1}{dt} &= \varepsilon(V_1 - \gamma W_1). \end{aligned} \quad (2.30)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dV_{45}}{dt} &= -V_{45}(V_{45} - a)(V_{45} - b) + D(-V_{45} + V_{44}) - W_{45} + E_{45}(t) \\ \frac{dW_{45}}{dt} &= \varepsilon(V_{45} - \gamma W_{45}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

À la vue des équations du modèle (2.29), nous pouvons conclure que notre ligne électrique permet d'étudier expérimentalement la dynamique du système couplé de FitzHugh-Nagumo. Diverses excitations $E_n(t)$ pourront alors être considérées. Afin de contrôler de façon optimale ces signaux excitateurs et de développer des protocoles expérimentaux fiables et reproductibles, nous avons conçu une carte qui facilite le mixage des différentes sources pouvant entrer dans la composition des excitations $E_n(t)$ (tension continue, fonctions sinusoïdales, bruit blanc, bruit coloré. . .). Dans la prochaine partie de ce manuscrit, nous détaillons les enjeux liés à la conception de cette carte de mixage, ainsi que les différentes excitations que nous serons amenés à considérer.

2.4/ DESCRIPTION DES DIFFÉRENTES EXCITATIONS CONSIDÉRÉES

Dans cette partie, nous détaillerons dans un premier temps les différentes composantes des excitations $E(t)$ et $E_n(t)$ qui interviendront au cours des différentes études menées pendant cette thèse. Le stimulus $E(t)$ sera appliqué en entrée de la cellule élémentaire, tandis que les stimuli $E_n(t)$ seront appliqués aux différentes cellules de la ligne électrique. Dans un second temps, nous présenterons les deux sources de bruit utilisées pour introduire une composante stochastique dans ces excitations, à savoir des sources de bruit blanc et de bruit coloré.

Les systèmes non linéaires présentent une grande variété de réponses possibles selon l'excitation qui leur est appliquée. Contrairement aux systèmes linéaires, deux excitations très proches peuvent provoquer des réponses très différentes. Il est donc nécessaire de pleinement maîtriser l'introduction des excitations [67, 68], notamment dans le cas d'équations différentielles stochastiques [69]. Dans ces conditions, afin de réaliser nos expérimentations, il s'est avéré nécessaire de développer un dispositif nous permettant de maîtriser au mieux nos signaux excitateurs. L'architecture électronique de ce dispositif est détaillée dans l'Annexe C de ce manuscrit.

2.4.1/ DÉFINITION DE L'EXCITATION $E(t)$ DE LA CELLULE ÉLÉMENTAIRE

Pour les travaux portant sur une cellule unique, un seul signal exciteur $E(t)$ sera utilisé. Celui-ci sera amené à être modifié selon l'étude réalisée ou le protocole expérimental suivi. Dans un souci de cohérence, les notations détaillées dans ce paragraphe seront cependant toujours respectées. Dans sa version complète, le stimulus $E(t)$ s'écrit :

$$E(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t) + \beta[\eta_w(t)(1 - \alpha) + \eta_c(t)\alpha], \quad (2.32)$$

où α et β sont deux variables booléennes valant 0 ou 1. Les autres éléments entrant dans la composition de l'expression (2.32) sont les suivants :

- E_0 est une tension continue générée par une alimentation stabilisée. Comme nous le verrons par la suite, en l'absence d'autre excitation ($A = B = \beta = 0$), E_0 permet de choisir le mode de fonctionnement du modèle de FitzHugh-Nagumo (excitable, bistable ou oscillant). Au cours des différentes études présentées dans ce manuscrit, cette composante E_0 sera toujours non nulle.
- $A \cos(2\pi f_1 t)$ est un signal sinusoïdal dit *basse fréquence*, d'amplitude A et de fréquence f_1 , qui sera obtenu à partir d'un générateur de fonctions. Lorsque cette

composante sera considérée seule ($B = 0$), nous parlerons de signal monochromatique.

- $B \cos(2\pi f_2 t)$ est un second signal sinusoïdal, également fourni par un générateur de fonctions. Il sera qualifié de signal *haute fréquence*, d'amplitude B et de fréquence $f_2 > f_1$. Quand cette seconde composante fréquentielle sera ajoutée au signal *basse fréquence* $A \cos(2\pi f_1 t)$, nous parlerons alors de signal d'excitation bichromatique ou biharmonique.
- $\eta_w(t)$ est un bruit blanc gaussien.
- $\eta_c(t)$ est un bruit coloré, obtenu par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à partir d'un bruit blanc [70].

Les protocoles expérimentaux permettant d'obtenir les sources de bruit $\eta_w(t)$ et $\eta_c(t)$ seront détaillés à la fin de ce chapitre.

D'après la relation (2.32), une excitation purement déterministe sera obtenue lorsque $\beta = 0$, tandis qu'une excitation stochastique sera obtenue lorsque $\beta = 1$. Notons alors que si $\beta = 1$, les deux sources de bruit ne pourront toutefois pas être ajoutées en même temps à l'excitation $E(t)$. Si $\alpha = 0$, un bruit blanc $\eta_w(t)$ sera additionné aux composantes déterministes du signal $E(t)$, tandis que si $\alpha = 1$, ce sera alors un bruit coloré $\eta_c(t)$ qui entrera dans l'excitation $E(t)$.

2.4.2/ DÉFINITION DES EXCITATIONS $E_n(t)$ DES DIFFÉRENTES CELLULES DE LA LIGNE

Le signal $E(t)$ que nous venons de détailler suffit à l'excitation de la cellule élémentaire. En revanche, comme nous l'avons vu précédemment, la ligne est composée de 45 cellules et nécessitera donc, non plus une, mais 45 excitations $E_n(t)$ qui ne seront pas toutes identiques. En effet, de la même façon qu'Ullner E. *et al.* lors de leur simulation de la propagation d'une excitation dite basse fréquence à travers une chaîne d'oscillateurs couplés [47], nous appliquerons sur les i_{exc} premières cellules ($n \leq i_{exc}$) une excitation bichromatique et une excitation monochromatique sur les cellules suivantes ($n > i_{exc}$). En procédant ainsi, nous pourrions étudier expérimentalement à partir de la ligne électrique les phénomènes de propagation vibrationnelle [47] et de propagation assistée par le bruit [64]. Les excitations $E_n(t)$ se notent alors :

$$\begin{cases} E_n(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t) + \beta \eta_w(t), & \text{si } n \leq i_{exc}, \\ E_n(t) = E_0 + B \cos(2\pi f_2 t) + \beta \eta_w(t), & \text{si } n > i_{exc}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Comme précédemment, la variable booléenne β permet d'inclure, ou non, une composante stochastique aux excitations $E_n(t)$. Notons cependant que lors de l'étude de la structure couplée, dans le cas d'excitations stochastiques, nous présenterons unique-

ment des études mettant en œuvre des sources de bruit blanc. Les différentes composantes déterministes entrant dans la composition des excitations $E_n(t)$ sont strictement identiques à celles décrites pour l'excitation $E(t)$, l'indice i_{exc} nous permettant de délimiter simplement les cellules qui seront excitées par un signal bichromatique, de celles qui seront excitées par un signal monochromatique. Ainsi, nous choisirons la cellule $i_{exc} + 1$ à partir de laquelle nous pourrions observer la propagation du signal basse fréquence assistée par la composante haute fréquence et/ou la composante stochastique. Enfin, il est à noter que le bruit blanc pourra dépendre de l'indice n selon l'étude réalisée. Par conséquent, en plus du cas où la même source de bruit perturbera toutes les cellules, il nous sera possible d'étudier le cas où différents bruits blancs seront appliqués aux diverses cellules de la ligne.

2.4.3/ GÉNÉRATION DES DIFFÉRENTES SOURCES DE BRUIT UTILISÉES

2.4.3.1/ GÉNÉRATION DU BRUIT BLANC $\eta_w(t)$

Dans cette sous-partie, nous détaillons la façon dont est produit expérimentalement le bruit blanc qui sera considéré dans les excitations $E(t)$ et $E_n(t)$.

Par analogie avec le spectre de la lumière blanche qui contient toutes les fréquences lumineuses avec la même intensité, un bruit blanc est une fonction aléatoire qui a la même densité spectrale de puissance sur toutes les fréquences. Pratiquement, un tel bruit est impossible à générer. En effet, une puissance constante sur une bande de fréquences infinie entraînerait l'existence d'un signal à énergie infinie. En réalité, la densité spectrale de puissance n'est constante que dans une bande de fréquences considérée. Présentons l'approximation de source de bruit blanc que nous avons utilisée pendant cette thèse et examinons en deux temps le caractère blanc et gaussien de ce signal aléatoire. La source de bruit blanc utilisée lors de nos simulations suit la fonction d'autocorrélation suivante :

$$\langle \eta_w(t_{exp}), \eta_w(t'_{exp}) \rangle = \sigma^2 \delta(t_{exp} - t'_{exp}). \quad (2.34)$$

Dans cette autocorrélation, σ représente la valeur efficace ou *Root Mean Square (RMS)* du bruit.

Expérimentalement, notre générateur de bruit n'est autre qu'un ordinateur équipé d'une sortie audio sur lequel nous exécutons un script *MatLab* produisant les valeurs des échantillons numériques du bruit. Cette utilisation de la sortie de la carte son de l'ordinateur comme générateur de bruit a déjà été introduite lors de différentes études portant sur la résonance stochastique et la résonance stochastique fantôme par exemple [71–74].

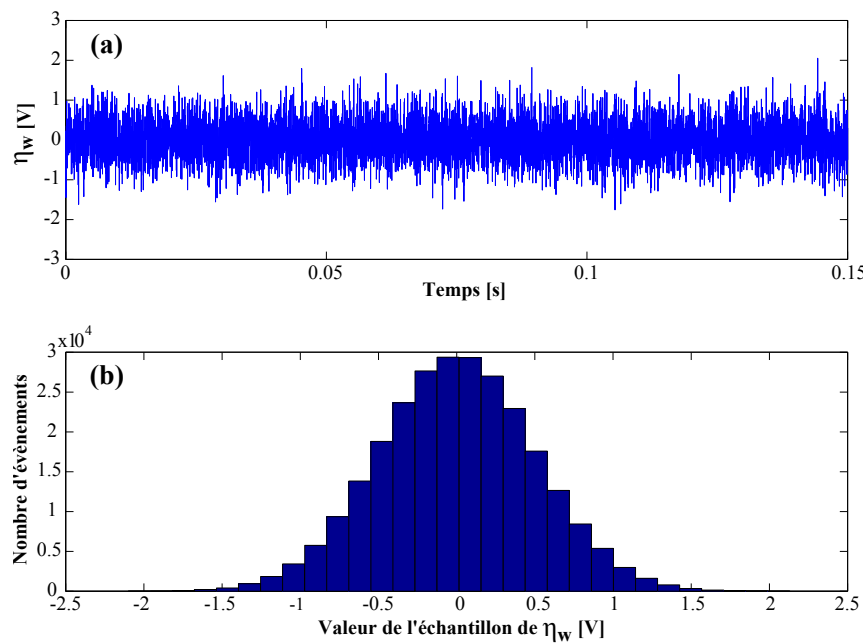


FIGURE 2.5 — Représentation temporelle (a) et histogramme (b) du bruit blanc gaussien η_w (pour $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$) obtenu à partir de la routine *MatLab* et relevé à l'oscilloscope via la sortie de la carte son de l'ordinateur.

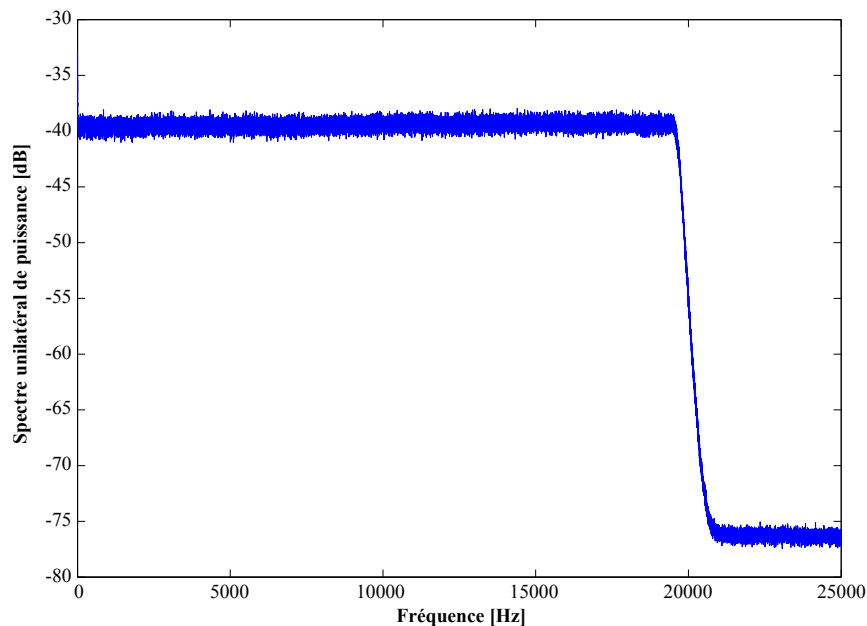


FIGURE 2.6 — Spectre unilatéral de puissance du bruit blanc gaussien η_w obtenu à partir de la routine *MatLab* et de valeur efficace $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Le spectre est calculé par un moyennage sur 200 réalisations à l'aide d'un oscilloscope numérique.

Sur la FIGURE 2.5 (a), nous avons tracé le signal mesuré à l'oscilloscope (LeCroy WaveRunner 6051) sur la sortie audio de l'ordinateur en fonction du temps sur un intervalle de 150 ms, avec une valeur efficace $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$. À partir de cette allure temporelle, nous vérifions que le bruit disponible en sortie de la carte son de l'ordinateur est centré, c'est-

à-dire de valeur moyenne nulle. De plus, sur la FIGURE 2.5 (b), en considérant l'histogramme du signal analogique prélevé sur la sortie audio de l'ordinateur, nous constatons que sa loi de probabilité suit une loi gaussienne dont l'écart-type σ correspond bien à la valeur *RMS* du bruit, soit $0.5 V_{\text{RMS}}$.

Enfin, pour déterminer la bande de fréquences où le bruit se comporte comme un bruit blanc, nous avons utilisé un oscilloscope en mode analyseur de spectre pour visualiser le spectre de puissance du signal audio disponible sur la sortie audio de l'ordinateur suite à l'exécution du script *MatLab*. La FIGURE 2.6 présente le spectre unilatéral de puissance obtenu après moyennage sur 200 réalisations. Nous constatons que dans la bande des fréquences audibles [0 - 20 kHz], le bruit mesuré en sortie de la carte son de l'ordinateur présente un niveau constant, tandis qu'au delà de cette bande, la puissance est nulle. Le bruit est donc blanc sur la bande [0 - 20 kHz]. Afin de considérer ce bruit « suffisamment blanc » lors de nos expériences, une fréquence maximum de 6.1 kHz sera utilisée pour les stimuli déterministes (f_1 et/ou f_2). Ainsi, un facteur supérieur à trois sera conservé entre la fréquence du signal déterministe et la limite de la bande de fréquences dans laquelle est défini notre générateur de bruit.

2.4.3.2/ GÉNÉRATION DU BRUIT COLORÉ $\eta_c(t)$

Contrairement au bruit blanc, un bruit coloré voit son spectre de puissance varier selon les fréquences. Pour les bruits caractéristiques, tels que le bruit rose ou le bruit brownien, l'évolution de la puissance en fonction de la fréquence varie selon une décroissance en $1/f^\beta$. Les bruits blanc, rose et brownien correspondent respectivement aux cas $\beta = 0$, $\beta = 1$ et $\beta = 2$.

Dans cette thèse, nous utiliserons un bruit coloré dont la fonction d'autocorrélation est définie comme suit :

$$\langle \eta_c(t_{exp}), \eta_c(t'_{exp}) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\tau} e^{-\frac{|t_{exp} - t'_{exp}|}{\tau}}, \quad (2.35)$$

où τ est le temps de corrélation du bruit coloré et où $\eta_c(t_{exp})$ suit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck suivant :

$$\frac{d\eta_c(t_{exp})}{dt_{exp}} = \frac{\psi(t_{exp})}{\tau} - \frac{\eta_c(t_{exp})}{\tau}. \quad (2.36)$$

Dans le processus (2.36), $\psi(t_{exp})$ est un bruit blanc identique à celui proposé dans la sous-partie précédente, c'est-à-dire d'autocorrélation :

$$\langle \psi(t_{exp}), \psi(t'_{exp}) \rangle = \sigma^2 \delta(t_{exp} - t'_{exp}). \quad (2.37)$$

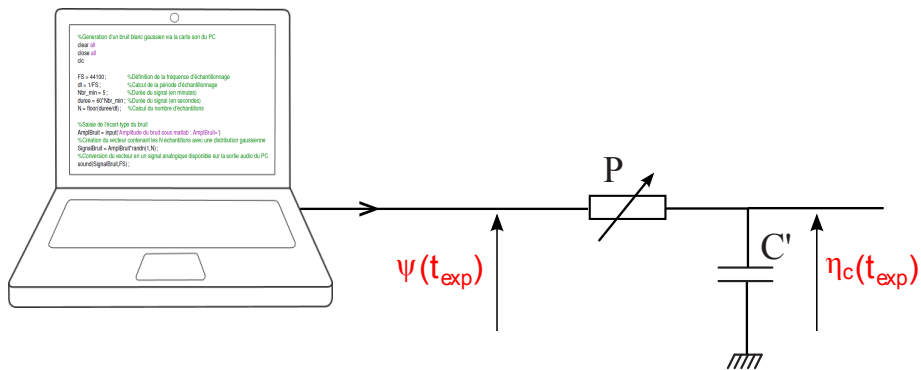


FIGURE 2.7 — Principe de génération expérimentale d'un bruit coloré de type Ornstein-Uhlenbeck. $\eta_c(t_{exp})$ est obtenu en filtrant un bruit blanc $\psi(t_{exp})$ avec un filtre passe-bas du premier ordre réalisé avec un potentiomètre P et un condensateur C' .

En pratique, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck correspond à un filtrage de type passe-bas (d'ordre 1) d'un bruit blanc. Il nous suffira alors de générer un bruit blanc avec le même protocole que celui décrit précédemment puis de le filtrer avec un passe-bas passif composé d'un élément résistif variable P et d'une capacité C' selon le principe de la FIGURE 2.7. En effet, si on exprime le courant traversant le potentiomètre P , qui est le même que celui qui traverse le condensateur C' , on obtient :

$$\frac{\psi(t_{exp}) - \eta_c(t_{exp})}{P} = \frac{dq}{dt_{exp}}, \quad (2.38)$$

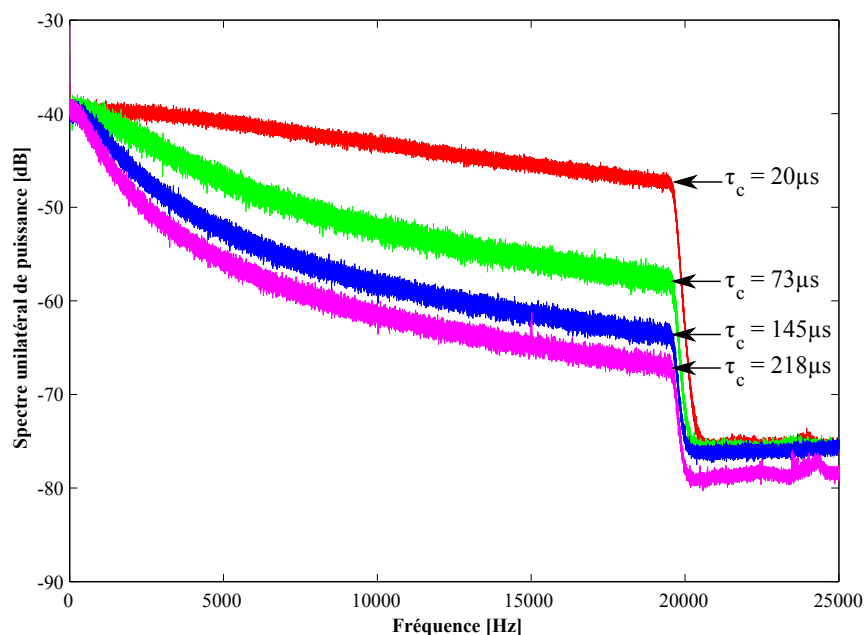


FIGURE 2.8 — Spectres unilatéraux de puissance des bruits colorés obtenus après filtrage du bruit blanc pour quatre temps de corrélation, à savoir $20 \mu s$, $73 \mu s$, $145 \mu s$ et $218 \mu s$. Comme précédemment, les spectres sont calculés par un moyennage sur 200 réalisations à l'aide d'un oscilloscope numérique.

où q représente la charge du condensateur. En remarquant que $q = C'\eta_c(t_{exp})$, on obtient :

$$\frac{d\eta_c(t_{exp})}{dt_{exp}} = \frac{\psi(t_{exp})}{PC'} - \frac{\eta_c(t_{exp})}{PC'}. \quad (2.39)$$

En identifiant les relations (2.36) et (2.39), on s'aperçoit que le temps de corrélation du bruit coloré est ajusté grâce au produit des valeurs respectives de P et C' , soit :

$$\tau = PC'. \quad (2.40)$$

Les spectres obtenus pour quatre temps de corrélation différents sont représentés sur la FIGURE 2.8. L'effet du filtrage est alors visible : plus le temps de corrélation est élevé, moins la puissance du bruit est importante. La limite du bruit blanc sera atteinte lorsque le temps de corrélation tendra vers zéro.

ÉTUDE D'UNE CELLULE SOUMISE À UNE EXCITATION DÉTERMINISTE

Sommaire

3.1 Réponse du système à une tension constante	26
3.1.1 Différents régimes de fonctionnement	26
3.1.2 Étude analytique de la bifurcation d'Andronov-Hopf	29
3.1.3 Validations numérique et expérimentale des expressions analytiques de la bifurcation d'Andronov-Hopf	31
3.1.4 Analyse qualitative des signaux au voisinage de la bifurcation d'Andronov-Hopf	33
3.2 Réponse du système à une excitation monochromatique	37
3.2.1 Paramétrage du système par rapport à la bifurcation d'Andronov-Hopf	38
3.2.2 Analyse de l'encodage de l'excitation monochromatique	39
3.3 Réponse du système à une excitation bichromatique	43
3.3.1 Résonance vibrationnelle	43
3.3.1.1 État de l'art	43
3.3.1.2 Paramètres d'étude de la résonance vibrationnelle	47
3.3.1.3 Manifestation temporelle de la résonance vibrationnelle	48
3.3.1.4 Manifestation fréquentielle de la résonance vibrationnelle	50
3.3.2 Résonance fréquentielle	52
3.3.2.1 Introduction du phénomène	52
3.3.2.2 Analyse numérique de la résonance fréquentielle	52
3.3.2.3 Mise en évidence expérimentale de la résonance fréquentielle	54
3.3.3 Bi-résonance vibrationnelle	56
3.3.3.1 Introduction du phénomène	56
3.3.3.2 Mises en évidence numérique et expérimentale de la bi-résonance vibrationnelle	57
3.3.3.3 Prédictions numérique et expérimentale des différentes résonances	59

Dans ce chapitre, nous étudions la réponse de la cellule élémentaire présentée dans le chapitre précédent lorsque celle-ci est soumise à différentes excitations déterministes. Nous allons successivement considérer une tension constante, une tension sinusoïdale

et un signal composé de la somme de deux sinusoïdes. En premier lieu, la tension continue nous permettra de montrer les différents modes de fonctionnement du système ainsi que l'existence de valeurs critiques entraînant le passage d'un mode de fonctionnement à un autre (manifestation des bifurcations inférieure et supérieure d'Andronov-Hopf). À partir de ces constatations, nous pourrions dans un second temps paramétrer notre système de façon adéquate pour les études en régime dynamique, dans le cas d'un signal exciteur monochromatique par exemple. La considération de tels stimuli, bien que leurs effets soient déjà connus dans le modèle de FitzHugh-Nagumo, apportera les éléments nécessaires à la compréhension des phénomènes non linéaires qui se déclenchent dans le cas biharmonique. Parmi ces comportements non linéaires qui ont fait l'objet d'intenses recherches depuis le début des années 2000, notre étude s'est d'abord concentrée sur le phénomène générique de résonance vibrationnelle, puis sur la résonance fréquentielle et la bi-résonance vibrationnelle ; des phénomènes dérivés de la résonance vibrationnelle.

3.1/ RÉPONSE DU SYSTÈME À UNE TENSION CONSTANTE

Dans cette partie, le signal exciteur sera uniquement composé d'une composante continue. La relation (2.32) détaillée dans le chapitre précédent exprimant l'excitation $E(t)$ se réduit simplement à :

$$E(t) = E_0. \quad (3.1)$$

3.1.1/ DIFFÉRENTS RÉGIMES DE FONCTIONNEMENT

Lorsqu'il est soumis à une telle excitation, le système de FitzHugh-Nagumo présente trois comportements bien distincts qui dépendent des intersections des nullclines du système décrit ci-après :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= f(V) - W + E_0 \\ \frac{dW}{dt} &= \varepsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les équations des nullclines correspondent à l'annulation des dérivées des variables V et W données par les équations du système (3.2). Ainsi, elles s'écrivent respectivement :

$$W = f(V) + E_0, \quad (3.3)$$

$$W = \frac{V}{\gamma}. \quad (3.4)$$

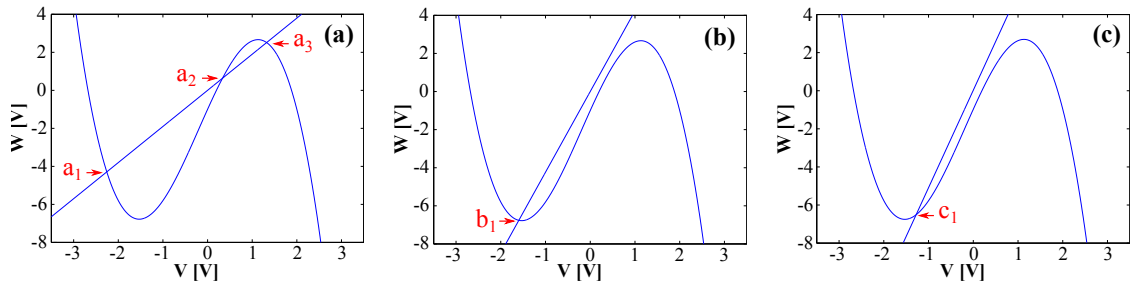


FIGURE 3.1 — Tracé des nullclines d'équations (3.3) et (3.4) du modèle de FitzHugh-Nagumo, illustrant les trois possibilités d'intersection propres à chaque régime de fonctionnement dans le cas où $a = 2$ V et $b = -2.6$ V. (a) : le régime bistable est obtenu pour $\gamma = 0.53$ et $E_0 = -1$ V. (b) : le régime excitable est obtenu pour $\gamma = 0.236$ et $E_0 = -1$ V. (c) : le régime oscillant est obtenu pour $\gamma = 0.195$ et $E_0 = -1$ V.

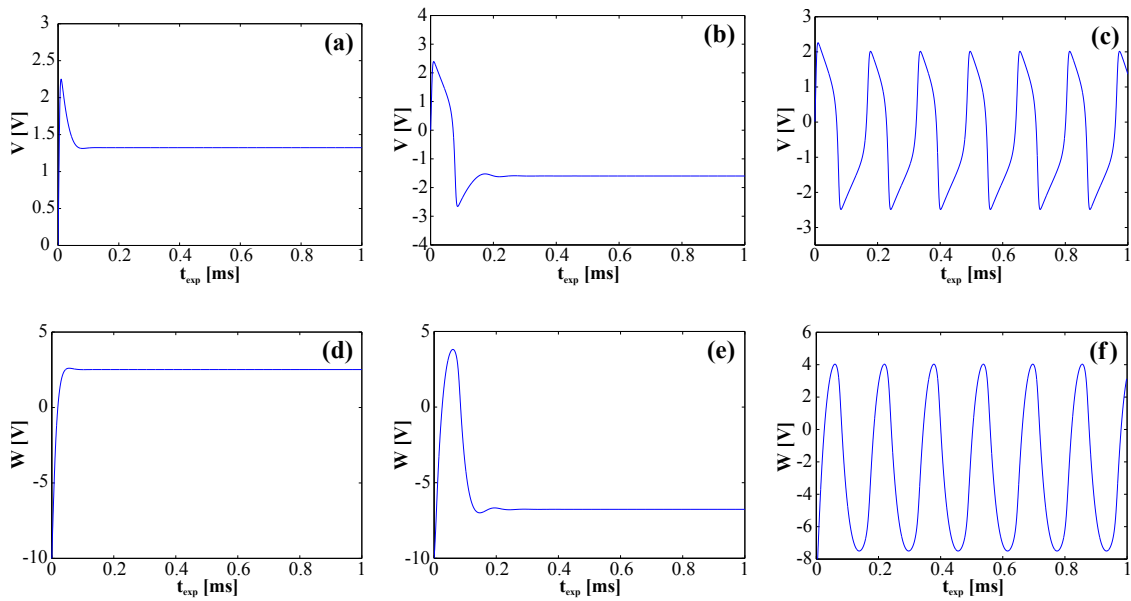


FIGURE 3.2 — Chronogrammes des variables V et W issus de simulations numériques du système de FitzHugh-Nagumo, illustrant les trois régimes de fonctionnement possibles dans le cas où $a = 2$ V, $b = -2.6$ V et $\varepsilon = 3.706$. Les conditions initiales $V(t_{exp})_{t_{exp}=0} = 0$ et $W(t_{exp})_{t_{exp}=0} = -10$ ont été prises pour montrer l'évolution temporelle du système. (a) et (d) : le régime bistable est obtenu pour $\gamma = 0.53$ et $E_0 = -1$ V. (b) et (e) : le régime excitable est obtenu pour $\gamma = 0.236$ et $E_0 = -1$ V. (c) et (f) : le régime oscillant est obtenu pour $\gamma = 0.195$ et $E_0 = -1$ V.

La nullcline d'équation (3.3) est appelée V-nullcline du fait que son expression provient de l'annulation de la dérivée de la variable rapide V ($dV/dt = 0$). Dans le plan $[V, W]$, elle correspond à la fonction cubique $f(V)$ translatée verticalement de la valeur de la tension E_0 . De la même façon, du fait que son expression provient de l'annulation de la dérivée de la variable lente W ($dW/dt = 0$), l'équation (3.4) est appelée W-nullcline. Dans le plan $[V, W]$, la fonction (3.4) prendra l'allure d'une droite de pente $1/\gamma$ et dont l'ordonnée à l'origine sera nulle.

Le régime de fonctionnement du modèle de FitzHugh-Nagumo est imposé par le nombre et la position des intersections des nullclines définies dans le plan $[V, W]$ par

les relations (3.3) et (3.4), c'est-à-dire par le choix des valeurs de E_0 et γ puisque nous figurons les valeurs des racines de la fonction cubique à $a = 2$ V et $b = -2.6$ V. La FIGURE 3.1 montre ainsi les trois différentes configurations d'intersection correspondant à chacun des trois modes de fonctionnement possibles : bistable, excitable ou oscillant. Pour chacun de ces régimes de fonctionnement, nous avons également reporté sur la FIGURE 3.2 les chronogrammes des tensions V et W qui ont été obtenus en simulant avec la même condition initiale $[V, W]_{t=0} = [0, -10]$ le système d'équations différentielles normalisé de FitzHugh-Nagumo (3.2). Il est à noter que nous avons fixé $\varepsilon = 3.706$, ce qui correspond, pour le modèle expérimental, aux valeurs de composants $R_0 = 1.33$ k Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. De plus, notons que nous avons adopté une échelle de temps expérimentale pour la présentation des chronogrammes via la dénormalisation $t_{exp} = R_0 C t$.

Sur la FIGURE 3.1 (a), pour $E_0 = -1$ V et $\gamma = 0.53$, soit en choisissant $R = 700$ Ω , trois intersections sont repérées a_1 , a_2 et a_3 , le fonctionnement est alors bistable. En effet, les points a_1 et a_3 sont situés en dehors de la zone localisée entre les deux extrêmes de la V-nullcline, ce sont les deux points stables vers lesquels le système convergera en fonction de la condition initiale appliquée. Nous pouvons vérifier ceci sur les sous-figures (a) et (d) de la FIGURE 3.2 où les niveaux atteints par V et W lorsque le système se stabilise correspondent aux coordonnées de l'un des deux points stables (ici a_3 avec $[V(t_{exp}), W(t_{exp})]_{t_{exp}=0} = [0, -10]$). Le point a_2 est quant à lui considéré comme un point instable de par son positionnement entre les deux extrema de la nullcline cubique.

Sur la FIGURE 3.1 (b), pour $E_0 = -1$ V et $\gamma = 0.236$, soit en choisissant $R = 314$ Ω , un seul point d'intersection apparaît lorsque les nullclines sont tracées simultanément dans le plan $[V, W]$. Ce point noté b_1 n'est pas situé entre les deux extrema de la nullcline cubique, il s'agit donc d'un point stable vers lequel le système évoluera depuis sa condition initiale en décrivant un potentiel d'action. Ce comportement est illustré par les sous-figures (b) et (e) de la FIGURE 3.2 où un potentiel d'action est décrit depuis la condition initiale $[V(t_{exp}), W(t_{exp})]_{t_{exp}=0} = [0, -10]$ avant que V et W atteignent respectivement des niveaux correspondant aux coordonnées du point b_1 . C'est le régime excitable.

Enfin, sur la FIGURE 3.1 (c), pour $E_0 = -1$ V et $\gamma = 0.195$, soit en choisissant $R = 260$ Ω , cette fois encore un seul point d'intersection apparaît entre la V-nullcline et la W-nullcline. Cependant, contrairement au cas excitable exposé précédemment, ce point noté c_1 se situe entre les deux extrema de la nullcline cubique, nous sommes donc en présence d'un point instable. Le système est alors en régime oscillant. L'évolution temporelle du système décrira alors des potentiels d'action de façon périodique quelle que soit la

condition initiale, comme le montrent les sous-figures (c) et (f) de la FIGURE 3.2 où $[V(t_{exp}), W(t_{exp})]_{t_{exp}=0} = [0, -10]$.

Nous venons de voir que la valeur des paramètres E_0 et γ , c'est-à-dire de la résistance R , permet d'imposer le régime de fonctionnement du système de FitzHugh-Nagumo ; la transition du mode excitable vers le mode oscillant s'appelle la bifurcation d'Andronov-Hopf. L'objet du prochain paragraphe est de déterminer théoriquement les valeurs des paramètres du système qui induisent cette bifurcation.

3.1.2/ ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA BIFURCATION D'ANDRONOV-HOPF

À partir de la méthode utilisée par Duan, F *et al.* [75] qui s'appuie sur la matrice de Jacobi pour étudier la dynamique du modèle de FitzHugh-Nagumo en l'absence de bruit, nous allons déterminer l'expression de la valeur critique $E_{c\ inf}$ de la tension continue E_0 qui mène à la bifurcation inférieure d'Andronov-Hopf, faisant passer le système du régime excitable au régime oscillant et inversement.

Dans un souci de clarté, nous définissons deux fonctions $F(V, W)$ et $G(V, W)$ qui correspondent respectivement à chacun des seconds membres des deux équations du modèle de FitzHugh-Nagumo (3.2). Le système de FitzHugh-Nagumo s'écrit alors sous la forme générique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= F(V, W), \\ \frac{dW}{dt} &= G(V, W), \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec :

$$\begin{aligned} F(V, W) &= f(V) - W + E_0, \\ G(V, W) &= \varepsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pour déterminer la valeur critique $E_{c\ inf}$ du paramètre E_0 pour laquelle le système passe du fonctionnement excitable au fonctionnement oscillant, il suffit de déterminer les coordonnées (V^*, W^*) de l'unique point d'intersection des nullclines qui constitue le point d'équilibre du système. Il faut donc résoudre le système d'équations :

$$\begin{aligned} F(V^*, W^*) &= 0, \\ G(V^*, W^*) &= 0, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} f(V^*) - W^* + E_0 &= 0, \\ W^* &= \frac{V^*}{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La stabilité de ce point d'équilibre est dictée par le comportement de la matrice de Jacobi [75], qui s'exprime sous la forme suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(V,W)}{\partial V} & \frac{\partial F(V,W)}{\partial W} \\ \frac{\partial G(V,W)}{\partial V} & \frac{\partial G(V,W)}{\partial W} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

En introduisant $f_v(V) = -3V^2 + 2V(a+b) - ab$, la dérivée de la fonction cubique par rapport à V , la matrice J se note :

$$J = \begin{pmatrix} f_v & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon\gamma \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Le paramètre E_0 est ainsi choisi au point de la bifurcation d'Andronov-Hopf défini par $\text{Tr}[J] = 0$ et $\det J > 0$, où Tr et $\det$ correspondent respectivement à la trace et au déterminant de la matrice J considérée. Il se trouve que cette condition $\det J = -\varepsilon\gamma f_v + \varepsilon > 0$ est assurée car $f_v < 0$ dans le cas où le système est dans le régime excitable.

Dans un premier temps, il convient donc d'exprimer la trace de J au point d'équilibre de coordonnées $V = V^*$ et $W = W^*$, lorsque E_0 atteint la valeur critique $E_{c \text{ inf}}$.

Avec $\text{Tr}[J] = 0$, on obtient $f_v(V^*) - \varepsilon\gamma = 0$, ce qui permet d'exprimer l'abscisse du point d'équilibre V^* . En effet, il suffit de résoudre l'équation du second degré en V^* :

$$V^{*2} - \frac{2}{3}V^*(a+b) + \frac{ab + \varepsilon\gamma}{3} = 0. \quad (3.10)$$

Comme nous recherchons la valeur inférieure $E_{c \text{ inf}}$ de E_0 conduisant à la bifurcation d'Andronov-Hopf, nous sommes amenés à ne conserver que la racine négative suivante :

$$V^* = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2 + b^2 - ab - 3\varepsilon\gamma}}{3} \quad (3.11)$$

Dans un second temps, en utilisant le système d'équations (3.7), on obtient l'expression de la valeur critique $E_{c \text{ inf}}$ du paramètre E_0 pour laquelle le système bifurque, soit :

$$E_0 = E_{c \text{ inf}} = \frac{V^*}{\gamma} - f(V^*). \quad (3.12)$$

Finalement, en remplaçant V^* par l'expression (3.11) dans (3.12), l'expression de la valeur critique $E_{c\ inf}$ peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$E_{c\ inf} = \frac{1}{27\gamma} \left[\gamma(a+b)(-2a^2 - 2b^2 + 5ab) + 9(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab - 3\gamma\varepsilon} (2a^2\gamma + 2b^2\gamma - 2\gamma ab + 3\gamma^2\varepsilon - 9) \right]. \quad (3.13)$$

Jusqu'à présent, nous avons focalisé notre attention sur la valeur inférieure $E_{c\ inf}$ de la tension E_0 qui mène à la bifurcation. Cependant, il est important de noter qu'il existe une seconde valeur critique de la tension continue E_0 qui produit un passage du régime oscillant au régime excitable ; nous la noterons $E_{c\ sup}$. Nous pouvons déterminer son expression théorique en fonction des paramètres a , b , γ et ε en procédant de la même façon que nous venons de le faire pour la bifurcation inférieure, mais en considérant cette fois la racine supérieure du polynôme (3.10) :

$$V^* = \frac{(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab - 3\varepsilon\gamma}}{3}. \quad (3.14)$$

En prenant en compte la racine exprimée par la relation (3.14), l'amplitude critique $E_{c\ sup}$ menant à la bifurcation s'écrit après calculs :

$$E_{c\ sup} = \frac{1}{27\gamma} \left[\gamma(a+b)(-2a^2 - 2b^2 + 5ab) + 9(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab - 3\gamma\varepsilon} (-2a^2\gamma - 2b^2\gamma + 2\gamma ab - 3\gamma^2\varepsilon + 9) \right]. \quad (3.15)$$

Les expressions (3.13) et (3.15) qui expriment respectivement les valeurs critiques inférieure et supérieure pour lesquelles le système passe d'un mode de fonctionnement à un autre seront tracées dans le paragraphe suivant. La validité de notre approche analytique sera alors établie en procédant à la comparaison des résultats obtenus à partir des relations théoriques (3.13) et (3.15), avec des données issues de simulations numériques du système de FitzHugh-Nagumo et avec des résultats expérimentaux obtenus avec l'oscillateur électronique élémentaire.

3.1.3/ VALIDATIONS NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES DE LA BIFURCATION D'ANDRONOV-HOPF

En utilisant un algorithme de résolution basé sur la méthode d'Euler, nous avons simulé le système de FitzHugh-Nagumo (3.2) pour différentes valeurs du paramètre γ . En

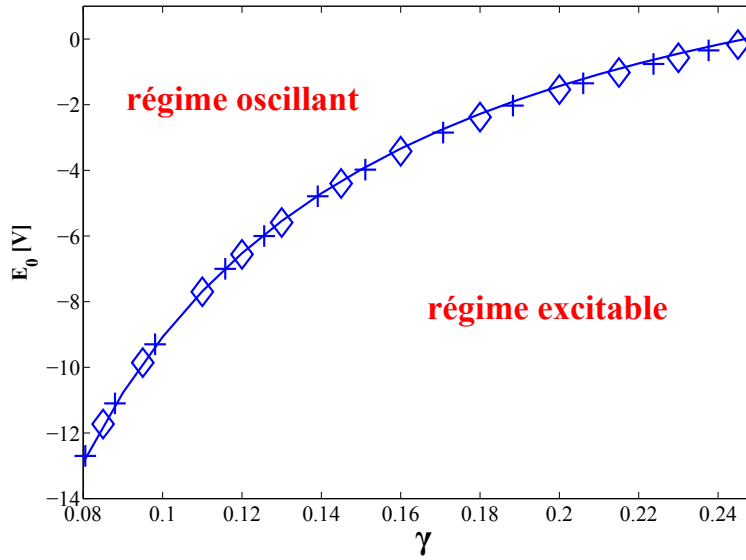


FIGURE 3.3 – Évolutions numérique ($\diamond$) et expérimentale (+) de la valeur critique $E_{c\ inf}$ de E_0 menant à la bifurcation inférieure d'Andronov-Hopf dans le modèle de FitzHugh-Nagumo. Pour faciliter la comparaison, les résultats obtenus sont superposés à l'évolution théorique (3.13) tracée en trait plein. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V et $\varepsilon = 3.706$. ε est obtenu en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

procédant par dichotomie, nous avons alors déterminé pour chacune des valeurs de γ les seuils $E_{c\ inf}$ et $E_{c\ sup}$ de la tension continue E_0 qui conduisent au passage du régime excitable à celui oscillant et vice-versa.

Expérimentalement, nous avons d'abord fixé $R_0 = 1.33$ k Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH pour fixer ε à 3.706, puis réglé les générateurs de tension qui fixent les racines de la non-linéarité à $a = 2$ V et $b = -2.6$ V. Nous avons ensuite ajusté le paramètre $\gamma = R_0/R$, dont nous avons fait varier la valeur grâce à la résistance R . Pour chacune des valeurs de R , en l'absence de toute autre source d'excitation, nous avons recherché, par faibles incréments successifs de la tension continue E_0 , les valeurs critiques $E_{c\ inf}$ et $E_{c\ sup}$ qui permettent l'apparition ou la disparition des oscillations des tensions V et X que nous avons visualisées à l'oscilloscope. Au cours de notre étude, les tensions d'alimentation (± 15 V) ont limité la borne inférieure de γ à 0.08. En effet, en dessous de cette valeur, la tension $E_{c\ inf}$ déterminée en simulation devient inférieure à -15 V et n'est donc plus accessible expérimentalement.

Sur les FIGURES 3.3 et 3.4, les résultats provenant des simulations numériques et des manipulations sont superposés aux prévisions théoriques (3.13) et (3.15). Un intervalle $\gamma = [0.08 ; 0.25]$ est considéré afin de respecter les limitations du circuit et l'ordre de gran-

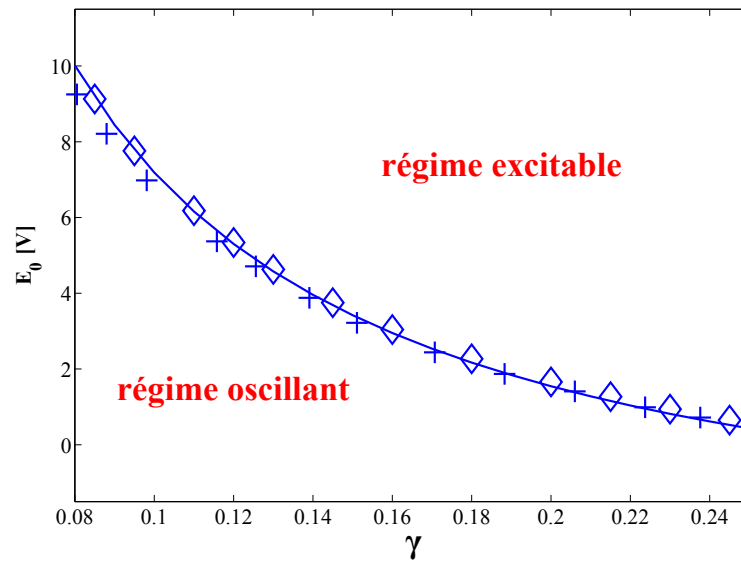


FIGURE 3.4 – Évolutions numérique ($\diamond$) et expérimentale (+) de la valeur critique $E_{c\ sup}$ de E_0 menant à la bifurcation supérieure d'Andronov-Hopf dans le modèle de FitzHugh-Nagumo. Pour faciliter la comparaison, les résultats obtenus sont superposés à l'évolution théorique (3.15) tracée en trait plein. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V et $\varepsilon = 3.706$. ε est obtenu en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

deur du paramètre γ qui sera utilisé par la suite. Deux frontières délimitant les changements de mode de fonctionnement du système apparaissent distinctement. La cohérence affichée par les résultats confirme la validité de notre étude analytique ainsi que la capacité de notre circuit à reproduire assez fidèlement les phénomènes observés dans le modèle théorique de FitzHugh-Nagumo.

3.1.4/ ANALYSE QUALITATIVE DES SIGNAUX AU VOISINAGE DE LA BIFURCATION D'ANDRONOV-HOPF

Nous pouvons étudier numériquement et expérimentalement le comportement des variables V et W au voisinage des valeurs critiques $E_{c\ inf}$ et $E_{c\ sup}$ de la tension E_0 qui mènent à la bifurcation pour les paramètres qui seront utilisés le plus souvent dans cette thèse, à savoir : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\varepsilon = 3.706$ et $\gamma = 0.236$.

En simulation, nous trouvons que si $E_0 \in [E_{c\ inf}; E_{c\ sup}] = [-0.40$ V; $+0.82$ V] alors le système fonctionne en régime oscillant. Les sous-figures (a), (b) et (c) de la FIGURE 3.5 montrent respectivement le portrait de phase et l'évolution temporelle des variables V et W obtenus à proximité de la bifurcation inférieure, pour $E_0 = E_{c\ inf} = -0.40$ V. La variable V prend la forme de potentiels d'action et le portrait de phase illustre des cycles limites

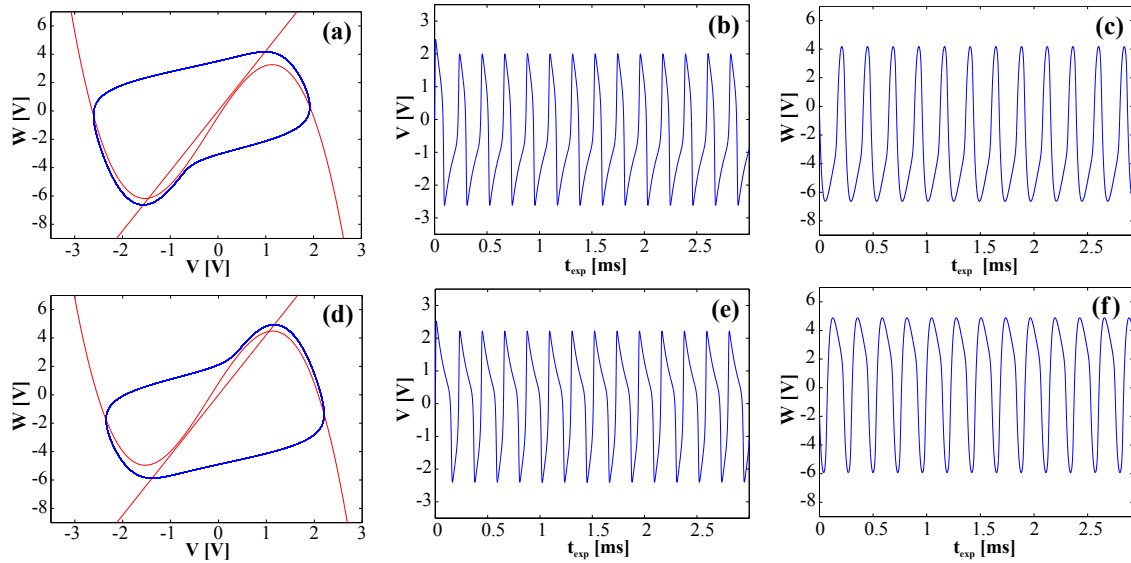


FIGURE 3.5 — Signaux obtenus en simulations numériques à la limite des bifurcations inférieure et supérieure d'Andronov-Hopf. (a), (b) et (c) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ inf} = -0.40$ V. (d), (e) et (f) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ sup} = +0.82$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$.

périodiques présentant une déformation caractéristique dans le coin inférieur gauche, au niveau du point instable situé à l'intersection des nullclines. Les sous-figures (d), (e) et (f) de la FIGURE 3.5 montrent quant à elles le portrait de phase et l'évolution temporelle des variables V et W , obtenus aux environs de la bifurcation supérieure pour $E_0 = E_{c\ sup} = +0.82$ V. La variable V prend alors la forme de potentiels d'action renversés. Tout comme dans le cas de la bifurcation inférieure, le portrait de phase montre une déformation caractéristique à l'intersection des nullclines, située cette fois dans le coin supérieur droit du plan $[V, W]$.

Expérimentalement, nous configurons le circuit afin d'atteindre des conditions identiques à celles utilisées lors des simulations numériques. Ainsi, nous faisons correspondre aux composants du circuit les valeurs nécessaires pour figer $\varepsilon = 3.706$ et $\gamma = 0.236$, c'est-à-dire $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. De plus, nous réglons les générateurs de tension continue pour fixer $a = 2$ V et $b = -2.6$ V. Nous faisons varier la tension constante E_0 afin de déterminer les valeurs critiques menant à la bifurcation d'Andronov-Hopf, le régime oscillant étant obtenu si $E_0 \in [E_{c\ inf}; E_{c\ sup}] = [-0.31$ V; $+0.80$ V]. Ces limites sont proches de celles obtenues précédemment par le biais des simulations numériques du modèle (3.2). Les sous-figures (a), (b) et (c) de la FIGURE 3.6 et les sous-figures (d), (e) et (f) de la FIGURE 3.6 montrent respectivement les résultats obtenus expérimentalement lorsque $E_0 = E_{c\ inf} = -0.31$ V et $E_0 = E_{c\ sup} = +0.80$ V.

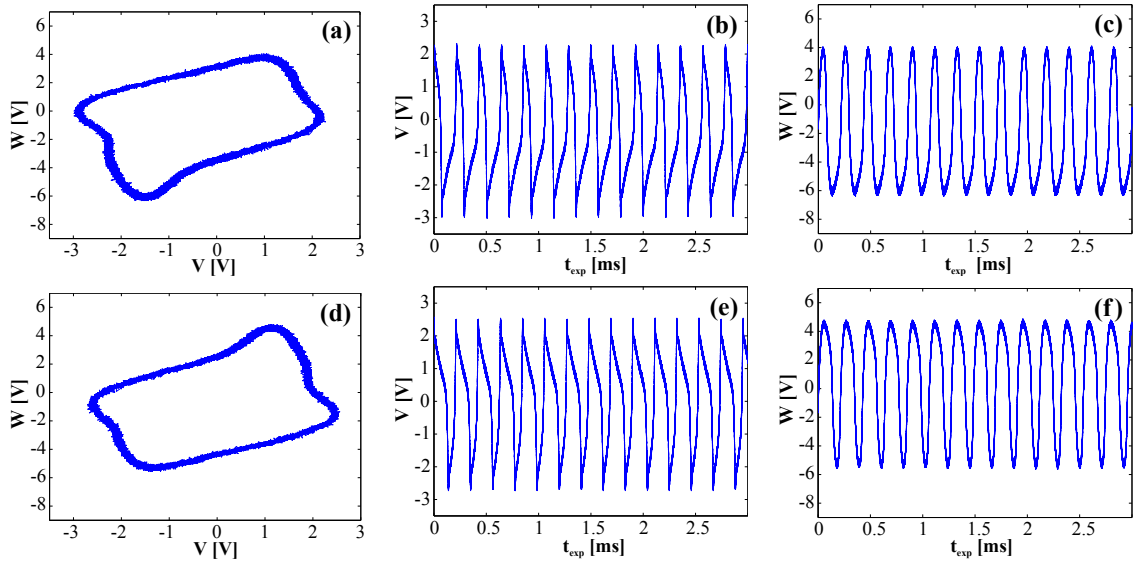


FIGURE 3.6 — Relevés expérimentaux à la limite des bifurcations inférieure et supérieure d'Andronov-Hopf. (a), (b) et (c) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ inf} = -0.31$ V. (d), (e) et (f) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ sup} = +0.80$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

La seule différence notable avec les résultats issus des simulations se situe dans la forme des potentiels d'action. En effet, expérimentalement nous constatons que les pointes de l'onde décrite par V sont plus prononcées que lors des simulations. Cela se traduit par de légères déformations des portraits de phase au niveau des valeurs maximale et minimale de la variable rapide V .

Dans la suite de cette thèse, nous allons étudier le système de FitzHugh-Nagumo pour différentes excitations en prenant toujours soin de nous placer à proximité de la bifurcation d'Andronov-Hopf. Cependant, nous venons de voir que, pour un jeu de paramètres figé, il existe deux valeurs de la tension continue E_0 qui mènent à la bifurcation. Il convient alors de restreindre notre étude à un seul voisinage de la bifurcation d'Andronov-Hopf. Utilisons les résultats issus des simulations numériques (cf. FIGURE 3.5) et les résultats provenant de mesures réalisées sur le circuit (cf. FIGURE 3.6) pour justifier notre choix. Premièrement, nous constatons que la même déformation des potentiels d'action expérimentaux se produit que l'on soit au voisinage de l'une ou l'autre des bifurcations : la conversion électronique du modèle théorique de FitzHugh-Nagumo n'est donc pas une contrainte quant au choix de la valeur critique qui sera conservée. Ensuite, quelle que soit la bifurcation considérée, nous constatons que l'amplitude et la fréquence des oscillations de V et W sont identiques et ne constituent donc pas un critère de sélection

de la valeur critique. Il nous reste alors à prendre en compte la forme des ondes de la variable rapide au voisinage des deux valeurs critiques. Comme nous l'avons évoqué précédemment, lorsque le paramètre E_0 est ajusté proche de la limite haute, l'onde V décrit des potentiels d'action renversés, contrairement au cas où E_0 est approché de la limite basse et où V décrit la forme classique de potentiels d'action. Pour cette raison, nous considérerons tout au long de ce manuscrit la valeur critique inférieure de la bifurcation d'Andronov-Hopf.

Dans cette partie, nous avons analysé le fonctionnement du modèle de FitzHugh-Nagumo en le soumettant à une tension constante E_0 . Caractérisons maintenant son comportement en régime dynamique.

3.2/ RÉPONSE DU SYSTÈME À UNE EXCITATION MONOCHROMATIQUE

En présence d'une excitation périodique, les modèles neuronaux révèlent une grande variété de dynamiques qui ne sont pas toujours bien comprises. C'est pourquoi, depuis le début des années 60, de nombreuses études théoriques, numériques et expérimentales visent à donner des éléments de réponse quant à l'évolution temporelle de la réponse de tels systèmes [76–79]. Suite aux travaux pionniers de Bullock T.H. montrant qu'à une période de l'excitation $1/f_1$ correspond une période $1/f_2$ de la sortie du système [80], Harmon L.D. introduit un ratio f_2/f_1 traduisant le nombre de périodes de l'excitation nécessaire à la génération d'un potentiel d'action, et montre l'apparition d'un phénomène qu'il qualifie d'« insolite et insuspecté » [76]. Au cours de son étude expérimentale mettant en œuvre un circuit électronique à base de transistors, il expose qu'en fonction de l'amplitude du signal exciteur, il existe des valeurs décimales du ratio f_2/f_1 entre les différentes valeurs entières attendues du ratio f_1/f_2 . Ce ratio définissant le nombre de potentiels d'action générés par période de l'excitation est désormais mieux connu sous le nom de *mode-locking* et a fait l'objet de diverses investigations : dans le modèle d'Hodgkin-Huxley d'abord, où des trains d'impulsions périodiques [76, 77, 81] et des signaux sinusoïdaux déterministes [82–84] ou bruités [85] ont successivement été considérés ; dans les modèles de FitzHugh-Nagumo et de Bonhoeffer-Van der Pol ensuite, où les mêmes excitations ont révélé des résultats comparables [86–91].

Pour notre part, nous nous proposons d'étudier le comportement du circuit lorsqu'il est excité par un signal sinusoïdal déterministe, et de montrer les différents modes obtenus en fonction des paramètres de l'excitation $E(t)$. Le signal exciteur que nous utiliserons, de valeur moyenne E_0 , d'amplitude A et de fréquence f_1 , s'écrit :

$$E(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t), \quad (3.16)$$

et le modèle normalisé (2.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= f(V) - W + E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) \\ \frac{dW}{dt} &= \varepsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \quad (3.17)$$

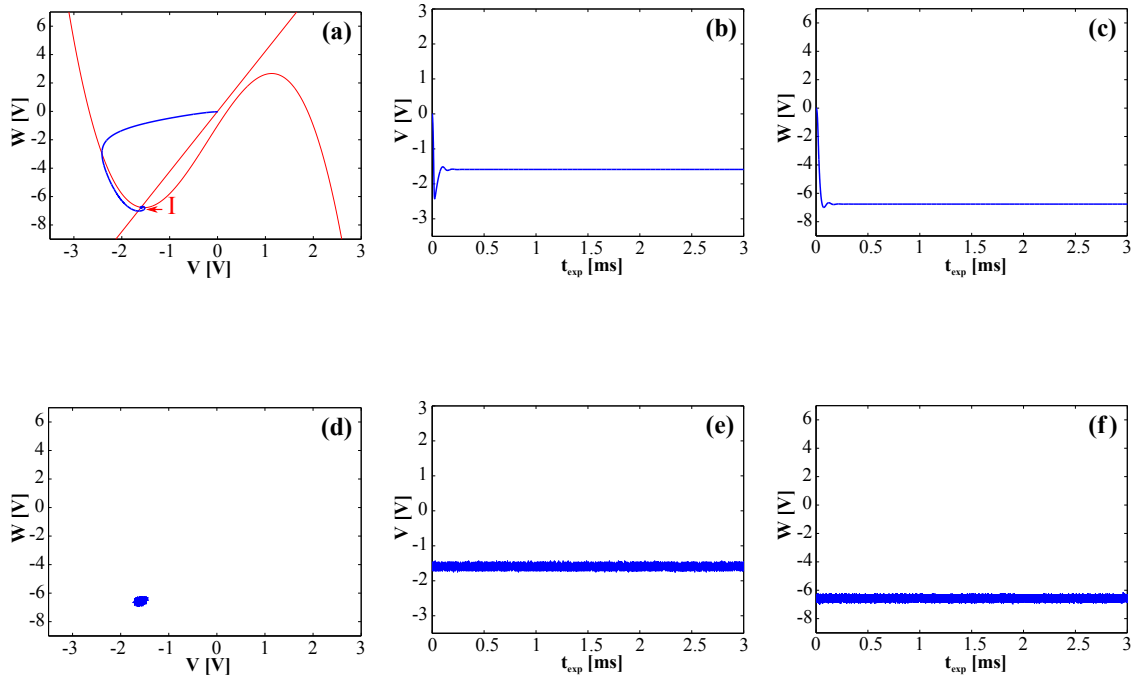


FIGURE 3.7 — Paramétrage du circuit en mode excitable. (a), (b) et (c) : portrait de phase et chronogrammes de V et W issus de simulations numériques du système de FitzHugh-Nagumo. (d), (e) et (f) : relevés expérimentaux du portrait de phase et des chronogrammes des tensions V et W . Les paramètres du système sont : $E_0 = -1$ V, $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $A = 0$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

3.2.1/ PARAMÉTRAGE DU SYSTÈME PAR RAPPORT À LA BIFURCATION D'ANDRONOV-HOPF

Avant de considérer l'excitation (3.16), il est nécessaire de choisir la tension continue E_0 qui polarisera le circuit. Pour réaliser notre étude, nous souhaitons que, sans l'apport de la fonction sinusoïdale ($A = 0$), le circuit n'oscille pas et fonctionne en régime excitable. Comme le montre la FIGURE 3.7, cette condition est respectée numériquement (sous-figures (a), (b) et (c)) et expérimentalement (sous-figures (d), (e) et (f)) pour $E_0 = -1$ V. En effet, nous observons que les nullclines tracées sur la sous-figure (a) se coupent en un seul point I situé en dehors des deux extrema de la nullcline cubique. Les niveaux indiqués par les coordonnées de ce point stable $I = [-1.6$ V; -6.76 V] sont atteints par les traces temporelles de V et W lorsque nous simulons le système (sous-figures (b) et (c)), ainsi que lorsque nous visualisons à l'oscilloscope les tensions correspondantes de notre circuit (sous-figures (e) et (f)). En conclusion, le stimulus sinusoïdal ajouté sera le seul élément permettant au système de déclencher des potentiels d'action.

3.2.2/ ANALYSE DE L'ENCODAGE DE L'EXCITATION MONOCHROMATIQUE

Afin d'identifier les influences conjointes de l'amplitude A et de la fréquence f_1 du signal excitateur $E(t)$ sur la réponse du système, nous simulons le modèle (3.17) au moyen d'une méthode d'Euler, pour les paramètres fixes suivants : $E_0 = -1$ V, $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. L'amplitude A variera de 0 à 3 V par pas de 50 mV, tandis que la fréquence f_1 évoluera dans un intervalle allant de 100 Hz à 35 kHz par incréments de 100 Hz. Pour chaque couple de valeurs (f_1, A) , nous avons simulé le système et analysé sa réponse en comptant le nombre M de potentiels d'action décrits par la variable rapide du système pendant N périodes du signal excitateur $E(t)$. Nous avons alors calculé le rapport D suivant :

$$D = \frac{M}{N}. \quad (3.18)$$

Quelques valeurs caractéristiques de ce rapport D peuvent alors être définies :

- $D = 1$ ($M = 1$; $N = 1$), soit un potentiel d'action par période du signal excitateur,
- $D = 0.5$ ($M = 1$; $N = 2$) et $D = 0.33$ ($M = 1$; $N = 3$), soit un potentiel d'action respectivement toutes les deux ou trois périodes du signal sinusoïdal appliqué en entrée,
- $D = 0$, aucun potentiel d'action n'est généré, l'excitation $E(t)$ est alors subliminale ou *subthreshold*.

Deux ensembles de valeurs plus génériques peuvent également être définis :

- $D > 1.5$ correspond à un comportement où la variable rapide décrit plus d'un potentiel d'action par période de l'excitation sinusoïdale. Par exemple $D = 3$ et $D = 2$, soit respectivement trois ($M = 3$) et deux ($M = 2$) potentiels d'action par période ($N = 1$) du signal $E(t)$.
- $D < 0.33$ indique le cas où quelques potentiels d'action sont générés en sortie du système sans toutefois établir de motifs clairement définis dans le domaine temporel.

L'évolution du rapport D est représentée en niveau de gris dans le plan $[f_1, A]$ sur la FIGURE 3.8 (a) qui constitue le diagramme d'encodage du stimulus sinusoïdal d'amplitude A et de fréquence f_1 . Grâce à nos simulations numériques, nous pouvons observer, selon différents niveaux de gris, les zones prédéfinies ($D = 1$, $D = 0.5$ et $D = 0.33$) qui correspondent au déclenchement d'un potentiel d'action toutes les une, deux ou trois périodes de l'excitation $E(t)$. De plus, la zone de paramètres représentée en blanc ($D = 0$) correspond quant à elle au cas où le système reste à l'état de repos. Notons également la

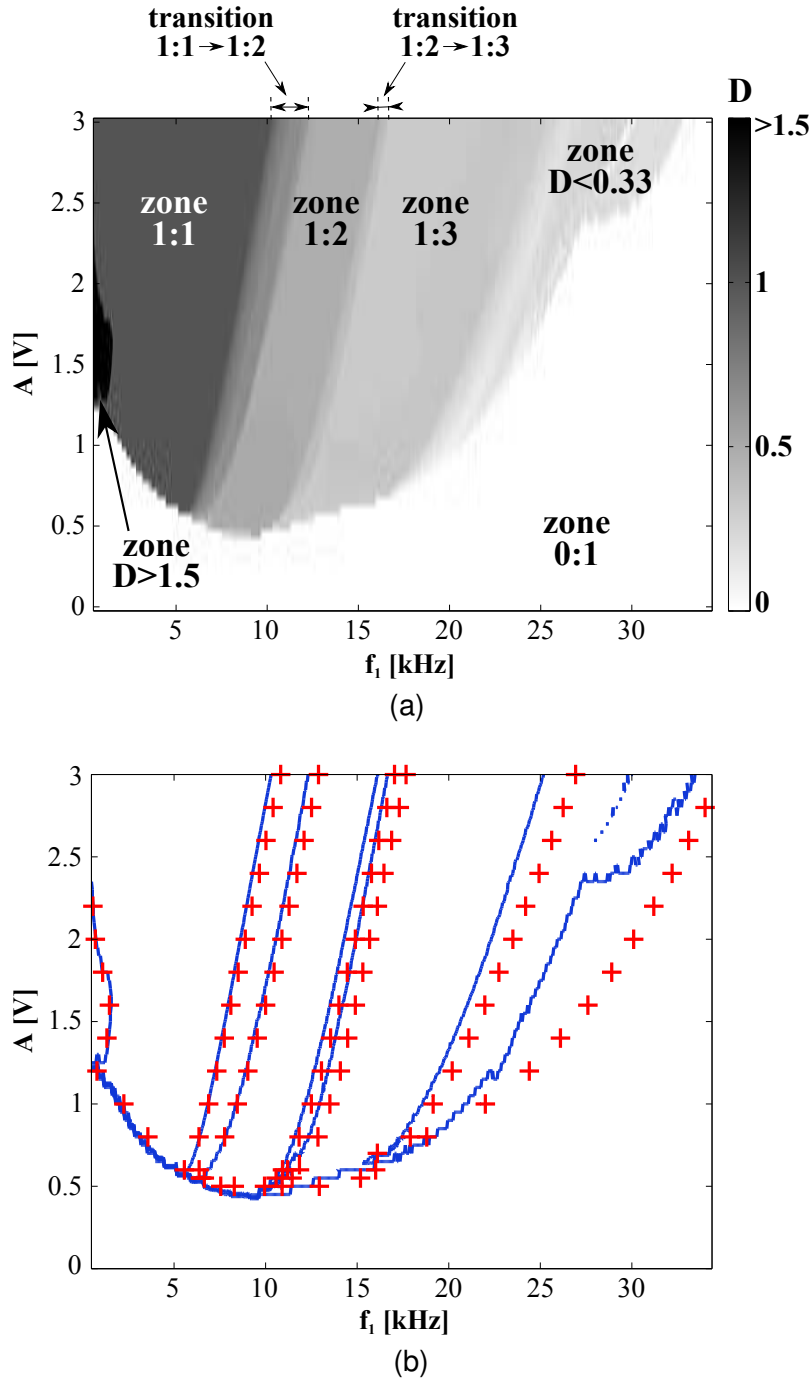


FIGURE 3.8 – (a) Diagramme d'encodage d'un stimulus sinusoïdal. Le rapport D défini par l'expression (3.18) est représenté en niveaux de gris dans le plan fréquence/amplitude de l'excitation monochromatique. (b) Frontières donnant les transitions entre les différentes zones d'encodage du stimulus sinusoïdal dans le plan fréquence/amplitude en simulation (trait plein) et expérimentalement (+). Les paramètres du système sont : $E_0 = -1$ V, $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

présence d'une zone de paramètres où le système déclenche plus d'un potentiel d'action par période ($D > 1.5$), représentée en noir sur la FIGURE 3.8 (a) et qui s'étend sur une très faible plage de fréquences f_1 . À l'opposé, la zone de paramètres représentée avec

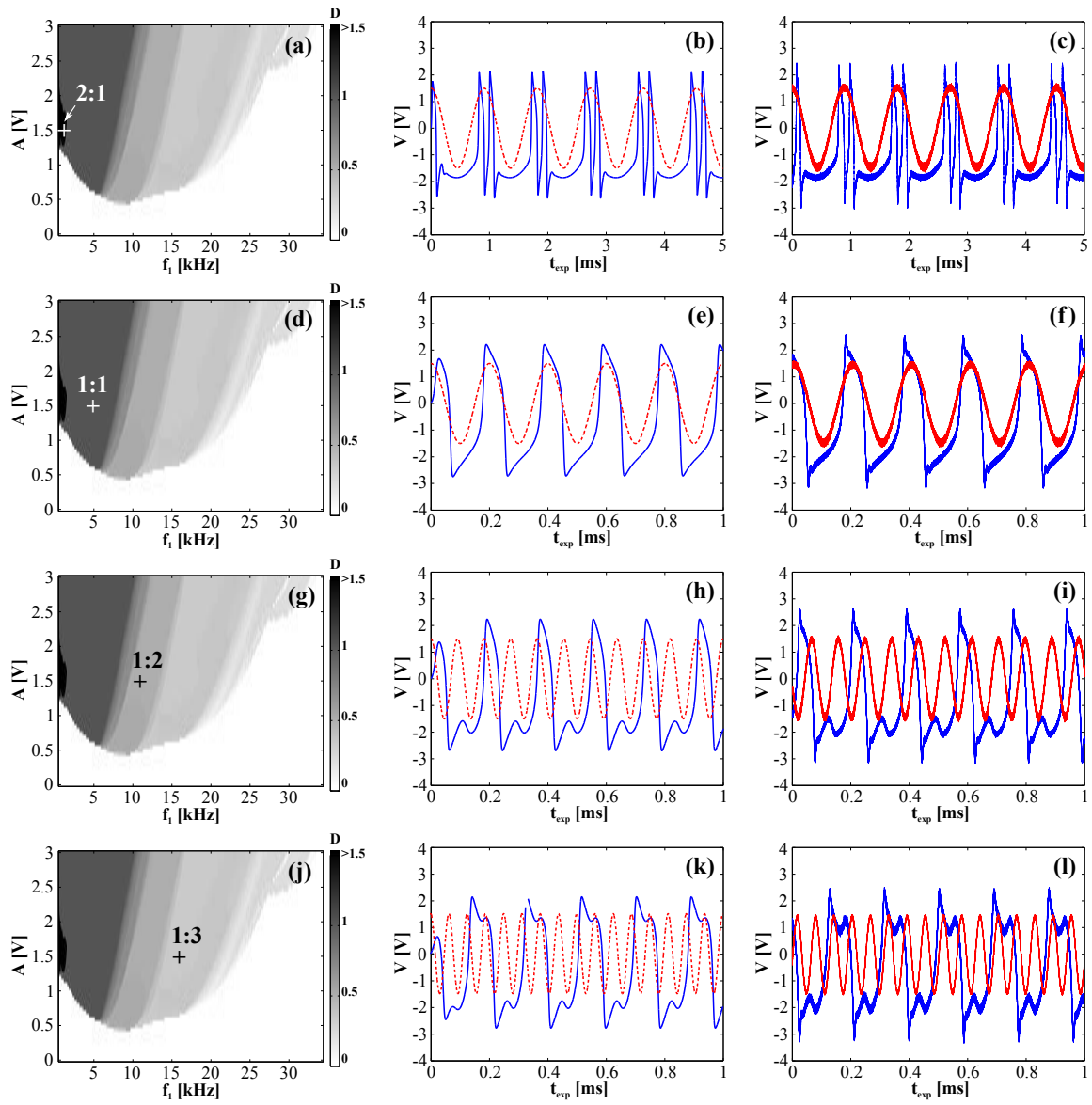


FIGURE 3.9 — Localisation de quatre couples (f_i, A) dans les diagrammes d'encodage et allures temporelles correspondantes de la variable rapide obtenue numériquement (b, e, h et k) et expérimentalement (c, f, i et l). (a), (b) et (c) : (1.1 kHz, 1.5 V). (d), (e) et (f) : (5 kHz, 1.5 V). (g), (h) et (i) : (11 kHz, 1.5 V). (j), (k) et (l) : (16 kHz, 1.5 V). Les paramètres du système sont : $E_0 = -1$ V, $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

le niveau de gris le plus clair retranscrit une activité où la période de réponse du système est au moins trois fois inférieure à la période de l'excitation, ce qui correspond à $D < 0.33$.

Entre les différentes régions d'encodage, nous remarquons qu'il existe des zones de transition plus ou moins larges que nous avons repérées en haut de la FIGURE 3.8 (a). Ces zones de transition obtenues numériquement sont représentées par des traits pleins sur la FIGURE 3.8 (b) et sont comparées aux frontières déterminées expérimentalement à partir du circuit. Les différentes frontières présentent une bonne concordance, exception

faite de celle séparant les zones $D < 0.33$ et $D = 0$. Cette disparité est essentiellement due au bruit interne du circuit.

Afin d'illustrer la richesse des différentes réponses possibles du système en fonction du ratio D , nous avons tracé l'évolution temporelle de la variable rapide sur laquelle nous avons superposé le signal sinusoïdal excitateur pour quatre couples de valeurs (f_1, A) . Sur la FIGURE 3.9, pour chaque couple de valeurs, nous avons tout d'abord situé le point de fonctionnement dans le plan $[f_1, A]$ sur les sous-figures (a), (d), (g) et (j), cela afin de repérer le mode de réponse temporelle attendu. Ensuite, nous avons tracé en simulation numérique les allures temporelles de V correspondantes sur les sous-figures (b), (e), (h) et (k), puis celles relevées à l'oscilloscope sur les sous-figures (c), (f), (i) et (l).

Lorsque nous considérons $A = 1.5$ V et $f_1 = 1.1$ kHz, d'après la sous-figure (a) de la FIGURE 3.9 le point de fonctionnement se situe dans la région $D > 1.5$. Nous constatons effectivement que dans le domaine temporel représenté sur les sous-figures (b) et (c), le système répond en délivrant deux potentiels d'action par période du signal excitateur.

Dans le second cas considéré, l'amplitude A est inchangée et la fréquence f_1 est égale à 5 kHz. Le point de fonctionnement se situe maintenant dans la zone $D = 1$ de la sous-figure (d) de la FIGURE 3.9. Ce qui est vérifié sur les sous-figures (e) et (f) où une période du signal d'entrée est équivalente à une période du signal de sortie.

Pour le troisième cas étudié, l'amplitude A reste inchangée et la fréquence f_1 est maintenant égale à 11 kHz. D'après la sous-figure (g) de la FIGURE 3.9, il apparaît que le point de fonctionnement se situe dans l'aire de réponse $D = 0.5$. Ceci est corroboré par les allures temporelles numérique et expérimentale de la variable rapide sur les sous-figures (h) et (i). En effet, nous remarquons que la réponse du système n'est pas aussi rapide que le signal sinusoïdal, il faut deux périodes de l'excitation pour égaler une période de la réponse du système de FitzHugh-Nagumo.

Enfin, pour le dernier cas traité, l'amplitude A est toujours la même et la fréquence f_1 vaut désormais 16 kHz. Nous trouvons le point de fonctionnement dans la zone $D = 0.33$ sur la sous-figure (j) de la FIGURE 3.9. Bien que les potentiels d'action soient déformés sur les sous-figures (k) et (l), la fréquence de réponse du système est bien trois fois inférieure à la fréquence d'excitation.

Ces résultats, révélés en présence d'une excitation monochromatique déterministe, participeront dans la suite de ce manuscrit à la compréhension d'un phénomène non linéaire qui se déclenchera quant à lui en régime d'excitation bichromatique.

3.3/ RÉPONSE DU SYSTÈME À UNE EXCITATION BICHROMATIQUE

L'importance des signaux bichromatiques ou biharmoniques n'est plus à démontrer. Ils sont très utilisés en télécommunications par exemple, où des signaux d'information modulent des porteuses via les techniques de modulation d'amplitude et de fréquence. Ils sont également très présents dans d'autres disciplines telles que la physique et la biologie : l'acoustique, l'optique, les neurosciences ou même encore l'étude de la propagation des ondes hautes fréquences dans l'ionosphère en sont quelques exemples [92–95].

Au cours des 20 dernières années, les signaux biharmoniques ont été à l'origine de divers phénomènes largement étudiés dans différents modèles non linéaires théoriques (pendule, équation de Duffing...) et expérimentaux (optique, mécanique, électronique...). Les modèles neuronaux n'ont pas fait figure d'exception et ont également été soumis à de telles excitations pour révéler des réponses non linéaires. C'est pourquoi nous allons compléter l'étude en régime dynamique et déterministe du modèle de FitzHugh-Nagumo en travaillant désormais en présence d'une excitation bichromatique. Pour ce faire, nous ajoutons à l'excitation monochromatique précédente une seconde fonction sinusoïdale d'amplitude B et de fréquence f_2 ; l'excitation $E(t)$ devient :

$$E(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t). \quad (3.19)$$

Le modèle normalisé (2.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= f(V) - W + E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t) \\ \frac{dW}{dt} &= \varepsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.3.1/ RÉSONANCE VIBRATIONNELLE

3.3.1.1/ ÉTAT DE L'ART

La résonance vibrationnelle est un phénomène physique très étudié depuis le début du ^{xxi}e siècle et la publication des travaux menés par Landa P.S. et McClintock P.V.E. [43]. Leurs travaux ont montré que la réponse d'un système soumis à l'excitation de deux signaux de fréquences différentes était améliorée pour une amplitude particulière du signal ayant la fréquence la plus élevée. Leur démarche est basée sur l'approche numérique d'un oscillateur bistable sur- ou sous-amorti. Ils montrent l'émergence d'une résonance vibrationnelle *classique* pour l'oscillateur sur-amorti et d'une bi-résonance pour

l'oscillateur sous-amorti. Cette bi-résonance est attribuée au mélange de deux processus d'oscillation, à savoir les oscillations à l'intérieur d'un seul puits du potentiel et les sauts entre deux puits du potentiel. Ce n'est que l'année suivante que Gitterman M. fournira les premiers éléments théoriques, via la méthode de séparation des échelles de temps, en trouvant la relation liant les fréquences et les amplitudes des deux signaux excitateurs pour satisfaire la condition nécessaire à l'occurrence de la résonance vibrationnelle [96].

Sont alors apparus, à la suite de ces investigations théoriques et numériques, les premières mises en évidence expérimentales de la résonance vibrationnelle. En 2002, Zai-kin A.A. *et al.* prennent en compte l'influence d'un bruit multiplicatif sur la résonance vibrationnelle au travers d'un dispositif électronique composé d'oscillateurs monostables couplés [97]. Les auteurs illustrent que même en présence de bruit, la résonance vibrationnelle continue d'exister : une augmentation de l'amplitude haute fréquence mène toujours à une variation non monotone de la réponse du système, avec un maximum clairement défini. À partir de ces travaux, bien que la résonance vibrationnelle n'ait pas besoin de composante stochastique pour se manifester, la prise en compte de l'influence du bruit devient quasi-systématique au cours des différentes études publiées.

En 2003, Baltanás J.P. *et al.* proposent une étude de la résonance vibrationnelle dans les systèmes bistables en alliant théorie, simulations et manipulations [98]. L'approche théorique (séparation des mouvements lent et rapide) est réalisée à partir d'un oscillateur sur-amorti bistable de Duffing et permet de confirmer la présence de la résonance vibrationnelle dans les systèmes bistables. La même année, Ullner E. *et al.* décrivent quant à eux la manifestation de la résonance vibrationnelle dans des systèmes excitables [47]. Expérimentalement et sans bruit d'abord, les auteurs mènent leur étude en utilisant pour support un circuit électronique basé sur le circuit de Chua, avant de simuler dans un second temps le système de FitzHugh-Nagumo sous l'influence d'un bruit additif. Enfin, le dernier point soulevé par les auteurs est la propagation du signal basse fréquence le long d'une chaîne d'oscillateurs excitables dont le comportement est régi par le modèle de Barkley [99]. Les résultats clés de leurs travaux sont les suivants : la résonance vibrationnelle se manifeste dans les systèmes excitables avec ou sans bruit. En présence de bruit, la résonance stochastique peut être contrôlée par le signal haute fréquence, celui-ci se substituant à une partie du bruit mis en jeu. Enfin, dans la chaîne d'oscillateurs excitables, la résonance vibrationnelle améliore la propagation du signal basse fréquence à travers le système, c'est la *vibrational propagation*. Pour finir, Chizhevsky V.N. *et al.*

révèlent la résonance vibrationnelle dans un système optique pour la première fois [100]. Cette inspection exclusivement expérimentale, prenant en compte l'influence du bruit et la symétrie du potentiel auquel est soumis le système, permet notamment de faire le parallèle entre la résonance stochastique et la résonance vibrationnelle. Une nouvelle méthode basée sur l'utilisation du rapport signal sur bruit est alors proposée pour quantifier le phénomène.

Ces études pionnières dans le domaine de la résonance vibrationnelle ont suscité un fort engouement de la communauté scientifique. Une quantité considérable de publications est alors venue garnir un état de l'art jusqu'alors peu développé. Ces articles permettent d'apporter de nouveaux éléments utiles à la compréhension du phénomène et des systèmes non linéaires selon les modèles et les paramètres utilisés.

L'optique est l'un des domaines où la résonance vibrationnelle a été amplement étudiée. Chizhevsky a notamment mené à bien diverses expertises du phénomène en utilisant une diode laser à cavité verticale émettant par la surface (VCSEL) [52, 101–107] et a successivement montré tout au long de ses recherches de manière théorique, numérique et expérimentale, la dégradation de la résonance vibrationnelle en présence d'un bruit blanc additif, l'amélioration du rapport signal sur bruit obtenu en résonance vibrationnelle par rapport à celui obtenu dans les mêmes conditions en résonance stochastique, la présence de la résonance vibrationnelle pour un potentiel asymétrique ou encore la possibilité d'utiliser la résonance vibrationnelle pour la détection de signaux apériodiques de faibles amplitudes. Wickenbrock A. *et al.* ont, quant à eux, introduit la résonance vibrationnelle dans une structure optique dissipative et montré que leur dispositif pouvait être vu comme un capteur capable de détecter des signaux de fréquences supérieures aux fréquences internes du capteur [108]. Enfin, il a été montré, à partir d'un oscillateur bistable sur- ou sous-amorti, qu'une forme de résonance vibrationnelle était possible au second harmonique de la fréquence de l'excitation bichromatique la plus faible ; une alternative particulièrement intéressante dans le domaine de l'optique non linéaire où il est commun de générer des sources à l'harmonique de rang deux par des moyens plus complexes [109].

D'autres domaines se sont prêtés à l'étude des procédés non linéaires. Les oscillateurs de Duffing et de Van der Pol, introduits au début du siècle dernier, sont deux des modèles qui permettent d'étudier la dynamique non linéaire. De nombreux systèmes correspondent à de telles modélisations, c'est pourquoi les phénomènes de résonance y

ont été largement analysés en fonction de nombreux paramètres. L'oscillateur bistable de Duffing, sous l'influence d'une excitation biharmonique, a ainsi révélé l'existence de résonances dans la réponse du système lorsque la basse fréquence varie pour une haute fréquence fixe et inversement. Les auteurs ont nommé ce phénomène comparable à la résonance vibrationnelle : *résonance conjuguée* [110]. L'influence de la profondeur et de l'espacement entre les puits du potentiel (asymétrie du potentiel), le coefficient d'amortissement (ordre fractionnel) et les délais de rétroaction simple et multiple ont également été étudiés à partir de l'oscillateur de Duffing [111–119]. Enfin, l'oscillateur de Duffing a dernièrement servi de support pour illustrer une nouvelle application de la résonance vibrationnelle dans le domaine de l'ingénierie. En considérant le signal haute fréquence comme provenant de l'énergie cinétique d'un dispositif, les auteurs montrent que la composante basse fréquence présente un caractère résonant en fonction de la quantité de mouvement [120].

D'autres types d'oscillateurs ont été considérés : ainsi des oscillateurs multistables simples [121], retardés [122] ou composés de deux oscillateurs anharmoniques couplés [123–126] ; des systèmes excitable [127], monostables [128] ou bistables [129–131] ; l'oscillateur de Morse [132] ; l'oscillateur quintique excité par un potentiel à simple puits [133] ou par des potentiels à deux ou trois puits [134, 135] ; les systèmes sur-amortis [136, 137] ; les systèmes discrets [138] et les systèmes anharmoniques d'ordre fractionnel [139] sont autant d'exemples de systèmes où la résonance vibrationnelle a pu être montrée.

Les études de ce phénomène non linéaire se sont aussi exportées au domaine de la biologie [140], et plus précisément sur les systèmes bio-inspirés permettant, par exemple, de retranscrire l'activité des cellules au niveau des gènes [141–143], l'excitabilité des tissus cardiaques ou la communication neuronale [144]. L'activité d'un neurone isolé a ainsi été étudiée pour différents modèles neuronaux discrets ou de type FitzHugh-Nagumo similaire à celui que nous considérons dans cette thèse [144–147]. Des variantes de ce modèle de FitzHugh-Nagumo ont également été analysées, comme par exemple des versions réduites à une seule équation [148], ou présentant un terme introduisant un retard [149, 150], avec des bruits additif et multiplicatif [151].

L'étude portant sur la résonance vibrationnelle que nous avons menée se situe à la croisée des chemins des travaux théoriques et numériques basés sur des modèles neuronaux [144–147], et des premiers travaux réalisés à partir de dispositifs électroniques

(circuit de Chua et oscillateur sur-amorti de Duffing) [47, 98]. En effet, dans cette thèse, nous proposons une étude expérimentale de la résonance vibrationnelle, basée sur un modèle neuronal et validée par le biais de simulations numériques. L'originalité de notre démarche, en plus de permettre une vérification expérimentale instantanée des phénomènes observés en simulation, réside dans l'importance des circuits électroniques pour le développement de nouvelles applications bio-inspirées [152–154].

Dans ce chapitre, nous considérerons exclusivement le cas sans bruit, l'influence de celui-ci étant traitée dans le chapitre suivant. Nous y verrons que le bruit pourra donner naissance à d'autres phénomènes plus riches d'application comme la résonance stochastique fantôme par exemple.

3.3.1.2/ PARAMÈTRES D'ÉTUDE DE LA RÉSONANCE VIBRATIONNELLE

Afin d'étudier la résonance vibrationnelle, le circuit est excité par deux signaux provenant de générateurs de fonctions utilisés à deux fréquences différentes, l'une basse fréquence $f_1 = 502$ Hz et l'autre haute fréquence $f_2 = 6.1$ kHz. Ces fréquences ont été choisies de telle sorte que lors des relevés des spectres à l'oscilloscope, la fréquence d'intérêt f_1 soit un multiple de la résolution fréquentielle de l'appareil.

Notre étude consiste à analyser le comportement du circuit quand l'amplitude B du signal haute fréquence varie et que l'amplitude du signal basse fréquence reste inchangée ($A = 0.8$ V). Les paramètres de notre modèle sont les suivants : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$.

Les paramètres normalisés γ et ε ont été légèrement modifiés par rapport aux études précédentes. En effet, nous avons changé la valeur de l'inductance L et de la résistance R située sur la même branche du circuit électronique de FitzHugh-Nagumo. Ainsi, dans cette partie, nous avons choisi $R = 320$ Ω et $L = 9.16$ mH tandis que les composants $R_0 = 1.33$ k Ω et $C = 22$ nF demeurent inchangés. Les comportements observés précédemment au niveau des nullclines et des bifurcations sont identiques, la seule différence se situant au niveau des valeurs critiques $E_{c\ inf}$ et $E_{c\ sup}$, qui ont sensiblement varié et valent désormais respectivement -0.24 V et 0.69 V numériquement et -0.14 V et 0.68 V expérimentalement.

3.3.1.3/ MANIFESTATION TEMPORELLE DE LA RÉSONANCE VIBRATIONNELLE

La FIGURE 3.10 montre les signaux obtenus en simulation numérique ainsi que ceux observés à l'oscilloscope lors des manipulations réalisées avec la structure électronique pour différentes valeurs de l'amplitude haute fréquence B . Précisons que nous avons choisi l'origine du temps $t_{exp} = 0$ de façon arbitraire afin de mettre en avant la forte correspondance entre les évolutions temporelles du modèle (3.20) simulé numériquement et les tensions visualisées à l'oscilloscope.

Nous constatons sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 3.10 que lorsque l'amplitude B de la seconde composante sinusoïdale est nulle, le système ne génère pas de potentiel d'action. C'est dans cette configuration que nous avons paramétré le système, seule l'amplitude B permettant ainsi le déclenchement de potentiels d'action. En augmentant légèrement l'amplitude B de la composante haute fréquence, des potentiels d'action présentant une faible régularité apparaissent à la sortie du système. En effet, comme le montrent les sous-figures (c) et (d) de la FIGURE 3.10, des potentiels d'action ne sont pas générés à chaque période de l'excitation basse fréquence. Au contraire, sur les sous-figures (e) et (f), pour une valeur intermédiaire de l'amplitude B , la fréquence f_1 devient visible sur les séries temporelles. Sur les sous-figures (g) et (h) obtenues pour une valeur spécifique de l'amplitude B , des potentiels d'action sont générés régulièrement pendant une demi-période de l'excitation basse fréquence tandis qu'aucun n'est produit pendant la seconde demi-période. Pour mieux illustrer cet effet, nous avons superposé une onde sinusoïdale de fréquence f_1 sur les sous-figures (g) et (h). Enfin, comme le montrent les sous-figures (i) et (j), lorsque l'amplitude de la composante haute fréquence devient trop importante, la sortie du système contient alors essentiellement la fréquence propre du système mesurée à 6 kHz, si bien que la composante basse fréquence f_1 tend à disparaître.

Au vu du comportement de l'évolution temporelle de la variable rapide V , il semble exister une valeur particulière de l'amplitude B du signal haute fréquence qui maximise la présence de la basse fréquence f_1 . Recherchons cette amplitude optimale B_{opt} de l'ondulation haute fréquence en analysant maintenant le comportement de la composante fréquentielle f_1 du spectre unilatéral d'amplitude de V .

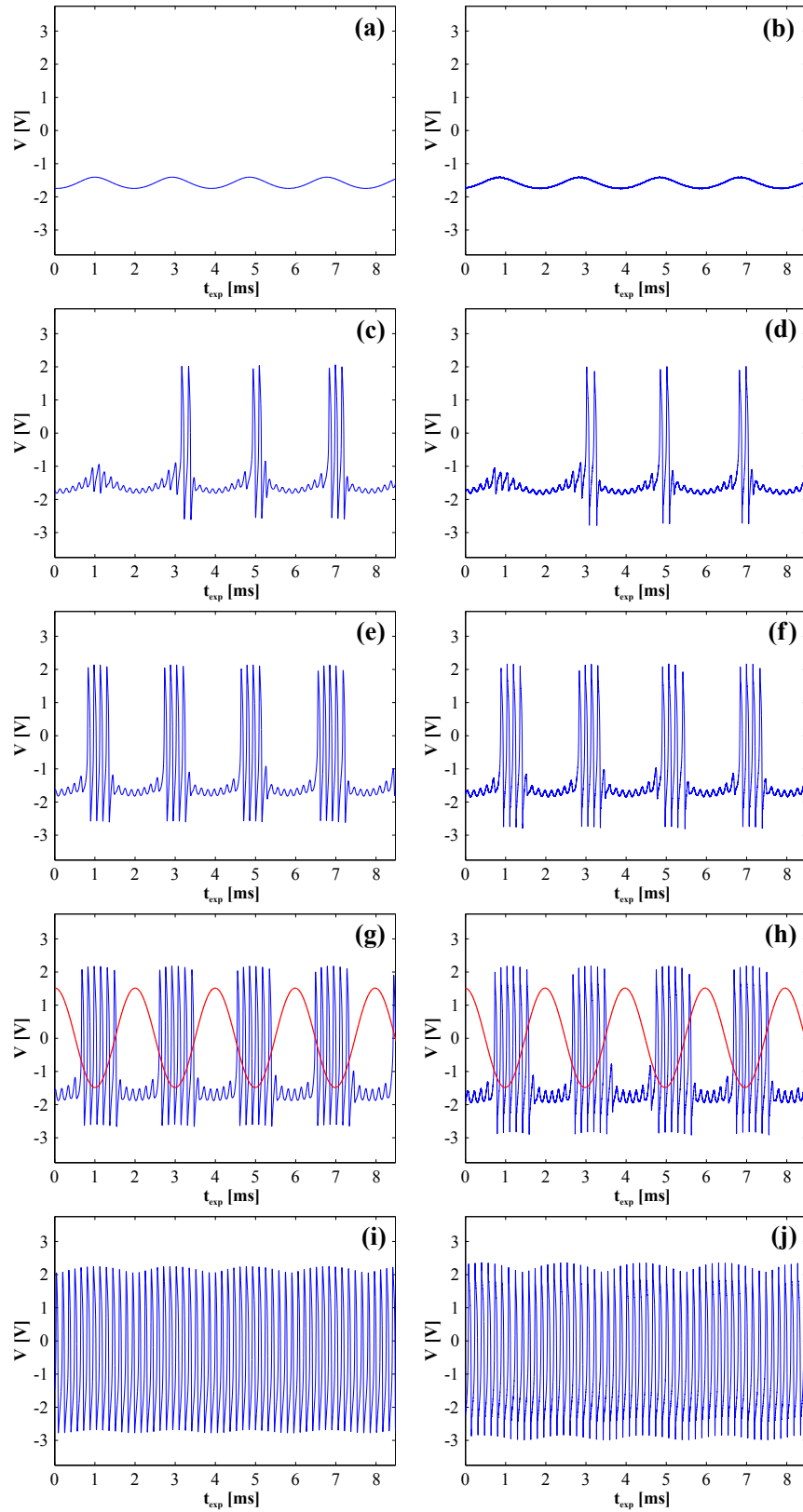


FIGURE 3.10 — Évolution temporelle de la variable rapide V en simulation numérique (gauche) et manipulation (droite) pour différentes valeurs de l'amplitude haute fréquence B . (a) et (b) : $B = 0$ V. (c) et (d) : $B = 0.27$ V. (e) et (f) : $B = 0.4$ V. (g) et (h) : $B = 0.66$ V. (i) et (j) : $B = 1.5$ V. Un signal sinusoïdal de fréquence f_1 est superposé sur les sous-figures (g) et (h). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

3.3.1.4/ MANIFESTATION FRÉQUENTIELLE DE LA RÉSONANCE VIBRATIONNELLE

Nous pouvons quantifier la résonance vibrationnelle à partir des signaux précédents, en calculant la réponse Q du système à la fréquence f_1 qui est définie par [47] :

$$Q = \sqrt{Q_{\sin}^2 + Q_{\cos}^2}, \quad (3.21)$$

avec

$$Q_{\sin} = \frac{\omega_1}{\pi n} \int_0^{2\pi n/\omega_1} V(t) \sin(\omega_1 t) dt, \quad (3.22)$$

$$Q_{\cos} = \frac{\omega_1}{\pi n} \int_0^{2\pi n/\omega_1} V(t) \cos(\omega_1 t) dt,$$

où $\omega_1 = 2\pi f_1$.

En somme, Q correspond à la valeur estimée à la fréquence f_1 du spectre unilatéral d'amplitude du signal $V(t_{exp})$. Sur la FIGURE 3.11, nous avons représenté les spectres obtenus en simulation numérique et ceux calculés avec l'oscilloscope en considérant successivement les cinq amplitudes B du signal haute fréquence de la FIGURE 3.10. Nous constatons alors que l'amplitude Q du spectre de la variable rapide V estimée à la fréquence f_1 évolue de façon non monotone selon l'amplitude B qui est appliquée. Dans le même temps, nous remarquons que cette amplitude Q semble atteindre un maximum pour une valeur optimale de B . En effet, en augmentant l'amplitude B progressivement, nous observons sur les sous-figures (a), (b) et (c) que l'amplitude de la raie à la fréquence

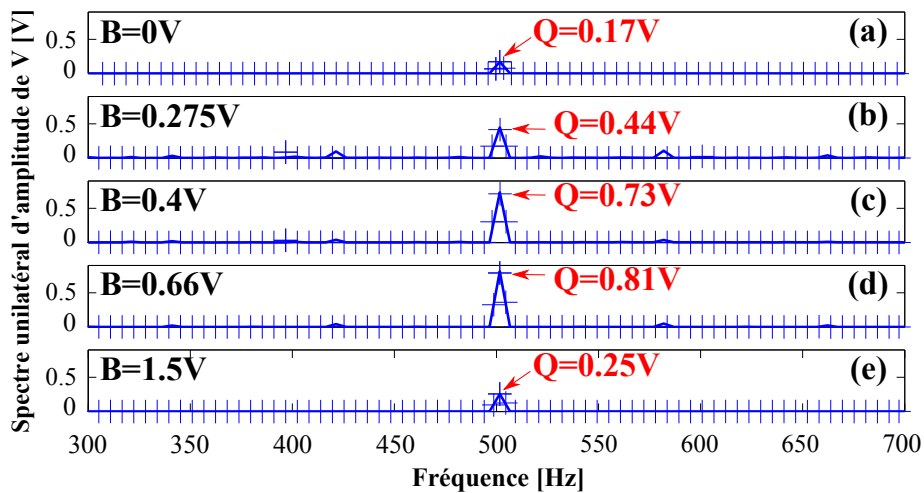


FIGURE 3.11 — Spectres unilatéraux d'amplitude de la variable rapide V issus de simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentaux (+) pour différentes valeurs de l'amplitude B . (a) : $B = 0$ V. (b) : $B = 0.27$ V. (c) : $B = 0.4$ V. (d) : $B = 0.66$ V. (e) : $B = 1.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

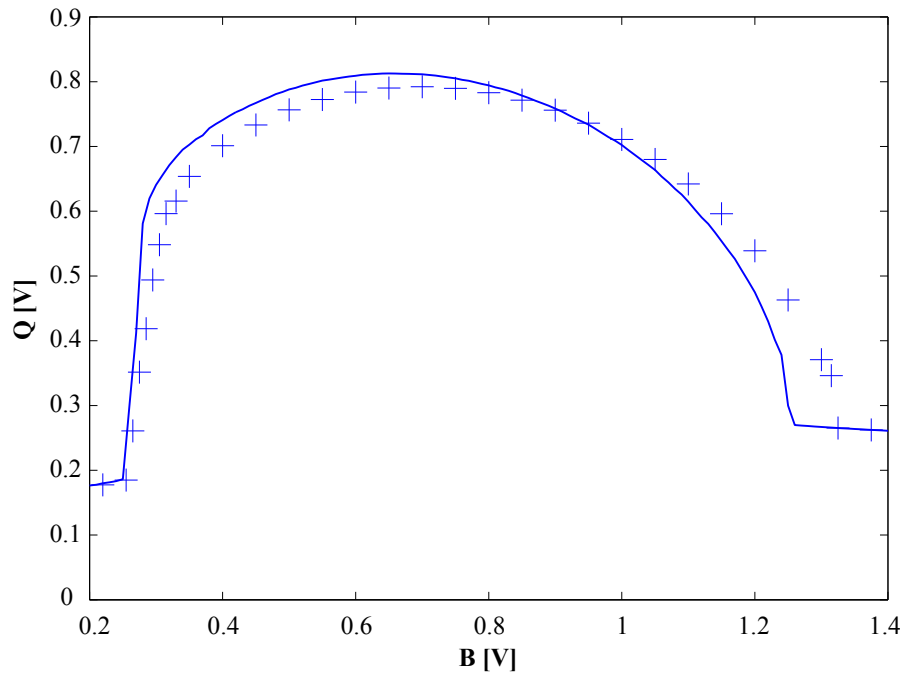


FIGURE 3.12 – Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude B de la composante haute fréquence de l'excitation bichromatique appliquée. Les résultats de la simulation numérique (trait plein) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (+). Les paramètres sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

$f_1 = 502$ Hz croît régulièrement, puis atteint un maximum sur la sous-figure (d) avant de décroître pour une valeur plus importante de l'amplitude B (sous-figure (e)). Il existe donc une valeur optimale B_{opt} de l'amplitude haute fréquence B qui maximise l'amplitude Q de la composante basse fréquence f_1 de la réponse du système.

Afin de déterminer cette amplitude optimale B_{opt} , nous avons tracé l'évolution de l'amplitude Q de la composante spectrale f_1 en fonction de l'amplitude haute fréquence B sur la FIGURE 3.12. Les résultats obtenus à partir du circuit confirment ceux obtenus en simulation numérique : il existe bien une résonance. En effet, il apparaît que lorsque l'amplitude B croît dans l'intervalle $[0.2 \text{ V}; 1.4 \text{ V}]$, Q augmente d'abord jusqu'à atteindre une valeur maximum, avant d'entamer une évolution monotone décroissante : nous sommes en présence du phénomène de résonance vibrationnelle. La valeur maximum atteinte par Q pour une amplitude $B = B_{opt}$ révélant la résonance vibrationnelle dans le cas déterministe sera notée dans la suite de cette thèse Q_{VR}^* . En simulation numérique, une valeur maximum $Q_{VR}^* = 0.81$ V est atteinte pour une amplitude haute fréquence $B_{opt} = 0.66$ V, tandis qu'expérimentalement la valeur maximale atteinte est $Q_{VR}^* = 0.78$ V pour une amplitude haute fréquence $B_{opt} = 0.7$ V. Ces valeurs Q_{VR}^* et B_{opt} que nous venons de détermi-

ner, nous seront notamment utiles par la suite au cours de l'étude en régime stochastique. En effet, celles-ci nous permettront d'interpréter les effets des différentes sources de bruit sur la résonance vibrationnelle.

Jusqu'à présent, nous avons considéré une fréquence f_1 bien inférieure à la fréquence f_2 qui était fixe. Affranchissons nous désormais de cette condition et étudions les effets simultanés des variations de B et f_2 sur la réponse du modèle de FitzHugh-Nagumo (3.20), ce qui nous permettra de mettre en évidence les phénomènes de résonance fréquentielle et de bi-résonance vibrationnelle.

3.3.2/ RÉSONANCE FRÉQUENTIELLE

3.3.2.1/ INTRODUCTION DU PHÉNOMÈNE

La résonance fréquentielle est un phénomène dérivé de la résonance vibrationnelle pour lequel le système est toujours soumis à l'excitation de deux signaux déterministes de fréquences différentes. L'originalité de ce phénomène réside dans le fait que la réponse du système peut être améliorée en fonction du couple de valeurs amplitude/fréquence de la seconde composante sinusoïdale d'expression $B \cos(2\pi f_2 t)$. Ce phénomène montre une amélioration de la résonance vibrationnelle lorsque la valeur de la fréquence haute est égale à la valeur de la fréquence basse ou à l'un de ses multiples ou sous-multiples [148].

Concernant la résonance fréquentielle, jusqu'à la publication de nos travaux [55], l'état de l'art faisait uniquement état de simulations numériques menées sur un système de type Nagumo, c'est-à-dire dans la version de FitzHugh-Nagumo ramenée à une seule équation [148]. Il est donc apparu comme naturel de prouver l'existence de ce phénomène dans le modèle complet de FitzHugh-Nagumo par le biais de simulations numériques dans un premier temps, puis expérimentalement à l'aide de l'oscillateur électronique de FitzHugh-Nagumo.

3.3.2.2/ ANALYSE NUMÉRIQUE DE LA RÉSONANCE FRÉQUENTIELLE

Afin de mettre en évidence la résonance fréquentielle, il nous faut analyser les effets simultanés de l'amplitude B et de la fréquence f_2 du signal haute fréquence sur la composante spectrale Q . La représentation en trois dimensions de la FIGURE 3.13, obtenue en simulation numérique, nous donne une vue d'ensemble de l'influence conjointe des para-

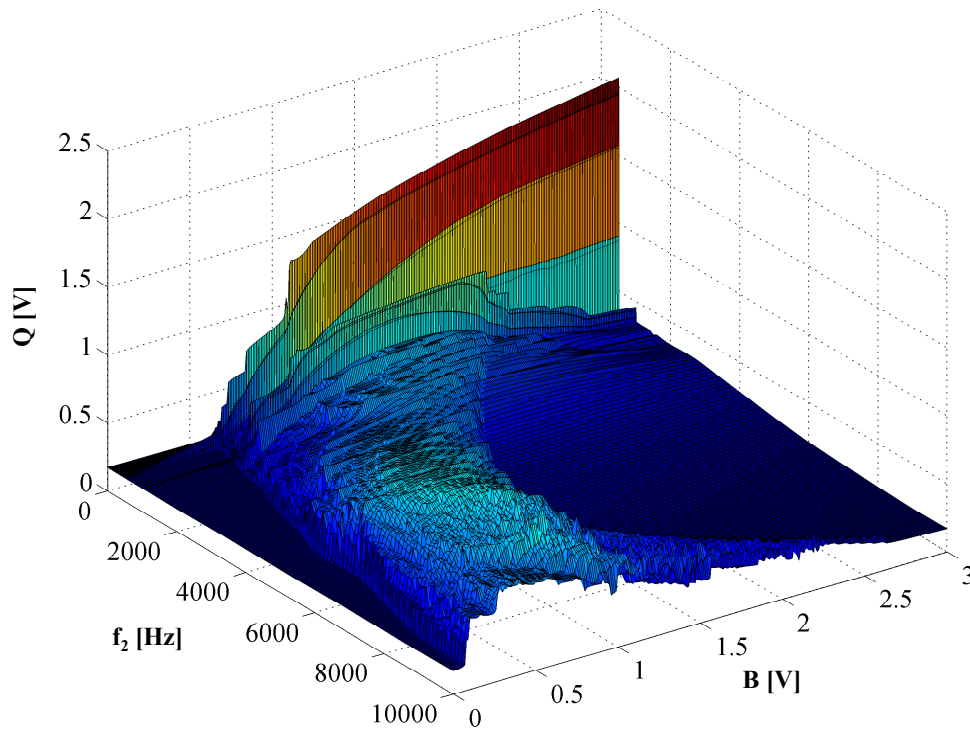


FIGURE 3.13 — Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système, en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 du signal haute fréquence appliquée au système. Les simulations numériques sont obtenues pour : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$.

mètres B et f_2 sur l'amplitude Q de la composante spectrale f_1 de la réponse du système. Il apparaît alors clairement que, pour une fréquence f_2 donnée du signal haute fréquence, il existe une valeur de l'amplitude B qui maximise la réponse Q qui, pour rappel, est estimée à la fréquence f_1 . Nous sommes alors en présence d'une résonance vibrationnelle *classique*. La FIGURE 3.14 montre plus en détail le comportement du système pour une gamme de fréquences f_2 réduite à l'intervalle $[0 ; 2.5$ kHz]. Ce zoom fait alors apparaître plus distinctement la caractéristique principale de la résonance fréquentielle : la résonance vibrationnelle est améliorée lorsque la fréquence f_2 est sous-multiple, multiple ou égale à la fréquence f_1 . En effet, à la surface deux-dimensions de la FIGURE 3.14 correspondant au fond continu, se superposent des raies présentes aux fréquences sous-multiples, multiples ou égale à la fréquence basse f_1 , soit $\{f_1/3 ; f_1/2 ; f_1 ; 2f_1 ; 3f_1\} = \{167 \text{ Hz} ; 251 \text{ Hz} ; 502 \text{ Hz} ; 1004 \text{ Hz} ; 1506 \text{ Hz}\}$. Il est à noter que le cas monochromatique, où $f_2 = f_1$, est particulier et conduit à une croissance monotone de Q lorsque l'amplitude B augmente. Pour comprendre ce comportement, il suffit de remarquer que Q

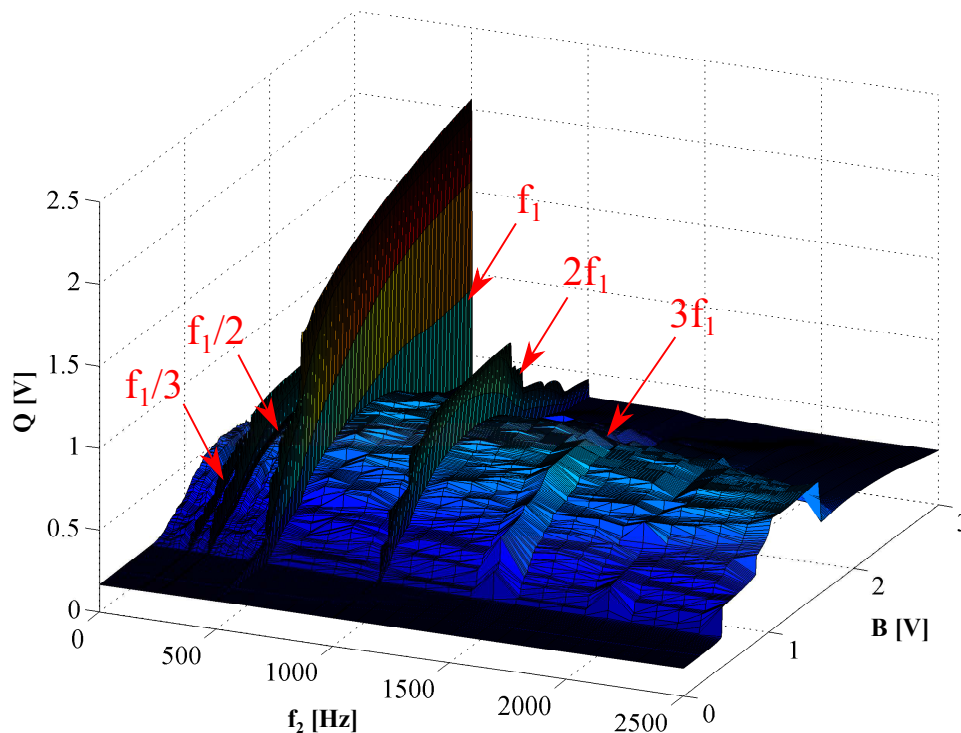


FIGURE 3.14 — Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 du signal haute fréquence. Les fréquences f_2 favorables à l'apparition de la résonance fréquentielle sont repérées au moyen d'indicateurs. Les simulations sont obtenues pour $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$.

constitue la valeur du spectre d'amplitude à la fréquence f_1 de la sortie du système. Par conséquent, augmenter l'amplitude B de l'excitation sinusoïdale d'entrée de fréquence f_2 , lorsque $f_2 = f_1$, ne peut qu'accroître la valeur de Q .

3.3.2.3/ MISE EN ÉVIDENCE EXPÉRIMENTALE DE LA RÉSONANCE FRÉQUENTIELLE

La réalisation d'une représentation selon trois dimensions à partir de données expérimentales étant trop fastidieuse, afin de montrer expérimentalement la résonance fréquentielle, nous avons opté pour une représentation selon deux dimensions que nous détaillons ci-après.

Pour chaque valeur de la fréquence f_2 dans l'intervalle $[0 ; 10 \text{ kHz}]$, nous avons relevé la valeur maximale atteinte par Q lorsque l'amplitude B varie. Nous avons notamment identifié ces valeurs maximales Q^* , respectivement observées pour des valeurs particulières de la fréquence f_2 . Les mesures expérimentales et les simulations numériques,

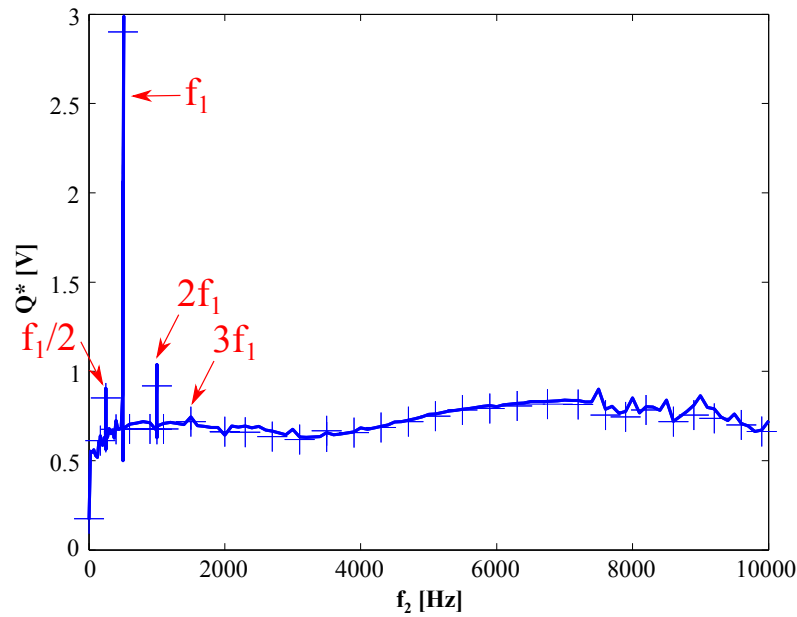


FIGURE 3.15 — Mise en évidence de la résonance fréquentielle en simulation numérique (trait plein) et en manipulation (+). Pour chaque valeur de la fréquence f_2 de l'excitation bichromatique $E(t)$, nous avons reporté Q^* , la valeur maximale de Q atteinte en faisant varier l'amplitude B . Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

rassemblées sur la FIGURE 3.15 montrent que Q^* évolue peu en fonction de f_2 . Cependant, comme attendu, à un fond continu (≈ 0.6 V) se superposent des raies localisées aux valeurs où la fréquence f_2 est sous-multiple, multiple ou égale à la fréquence f_1 . Comme pour l'étude purement numérique, nous avons rendu visibles ces fréquences favorables à l'apparition de la résonance fréquentielle en les pointant à l'aide de flèches sur la FIGURE 3.15. Pour la raison évoquée précédemment, le cas où la fréquence f_2 est égale à la fréquence f_1 permet d'atteindre la valeur de Q^* la plus élevée (théoriquement infinie) ; expérimentalement la saturation du circuit nous limite cependant, mais nous permet tout de même d'atteindre une valeur $Q^* \approx 2.9$ V. Par ailleurs, nous vérifions que la résonance fréquentielle permet une amélioration de la résonance vibrationnelle. En effet, lorsque la fréquence f_2 est égale à $f_1/2$ ou $2f_1$, nous relevons respectivement à partir des données expérimentales, les valeurs de Q^* suivantes : $Q^* = 0.85$ V et $Q^* = 0.92$ V. Ces valeurs sont strictement supérieures à la valeur Q_{VR}^* déterminée en manipulation lors de l'étude de la résonance vibrationnelle, qui pour rappel, était $Q_{VR}^* = 0.78$ V. Ce constat est confirmé par les résultats des simulations numériques puisque nous relevons, pour f_2 variant $f_1/2$ et $2f_1$, les valeurs $Q^* = 0.9$ V et $Q^* = 1.05$ V qui sont plus élevées que le niveau atteint lors des simulations numériques du phénomène de résonance vibrationnelle, soit $Q_{VR}^* = 0.81$ V.

Un autre phénomène non linéaire mettant en jeu l'influence conjointe des paramètres B et f_2 de la seconde composante sinusoïdale a montré qu'il était possible, en faisant varier l'amplitude B pour une fréquence f_2 figée, d'obtenir une seconde résonance du paramètre Q : il s'agit de la bi-résonance vibrationnelle [147]. Ce phénomène ne constitue pas une amélioration de la résonance vibrationnelle en soi puisque la seconde résonance révélée ici sera de moindre amplitude par rapport au niveau maximal Q_{VR}^* déterminé précédemment. En outre, contrairement à la résonance fréquentielle où nous avons utilisé deux fréquences multiples l'une de l'autre, la bi-résonance vibrationnelle est étudiée lorsque les fréquences qui constituent l'excitation biharmonique sont très différentes. Le cas où $f_2 \gg f_1$ fait donc l'objet de la prochaine sous-partie de ce manuscrit.

3.3.3/ BI-RÉSONANCE VIBRATIONNELLE

3.3.3.1/ INTRODUCTION DU PHÉNOMÈNE

La bi-résonance vibrationnelle est, après la résonance fréquentielle, un second phénomène non linéaire dérivé de la résonance vibrationnelle. Il se manifeste également dans les systèmes excitable en présence d'une excitation bichromatique. En considérant à nouveau l'amplitude Q du spectre de la réponse du système à la plus basse fréquence de l'excitation biharmonique, Yang J. *et al.* ont montré que celui-ci pouvait atteindre plusieurs maxima locaux selon le couple de valeurs amplitude/fréquence de la seconde composante sinusoïdale, d'où le terme bi-résonance vibrationnelle [147]. Ce phénomène se distingue de la résonance vibrationnelle et de la résonance fréquentielle par le fait que cette fois, les deux fréquences f_1 et f_2 de l'excitation bichromatique sont très éloignées l'une de l'autre, ce qui se traduit par $f_2 \gg f_1$. Les auteurs ont mis en avant que les maxima locaux de Q pouvaient être prédits à l'aide de la réponse du système à une excitation monochromatique. Leur étude, entièrement basée sur des simulations numériques du système de FitzHugh-Nagumo, nous a amené à effectuer une vérification expérimentale de ce phénomène. L'objet de cette partie, en plus de montrer le phénomène de bi-résonance expérimentalement, sera de confirmer qu'il est possible de le prédire conformément aux observations de Yang J. *et al.*.

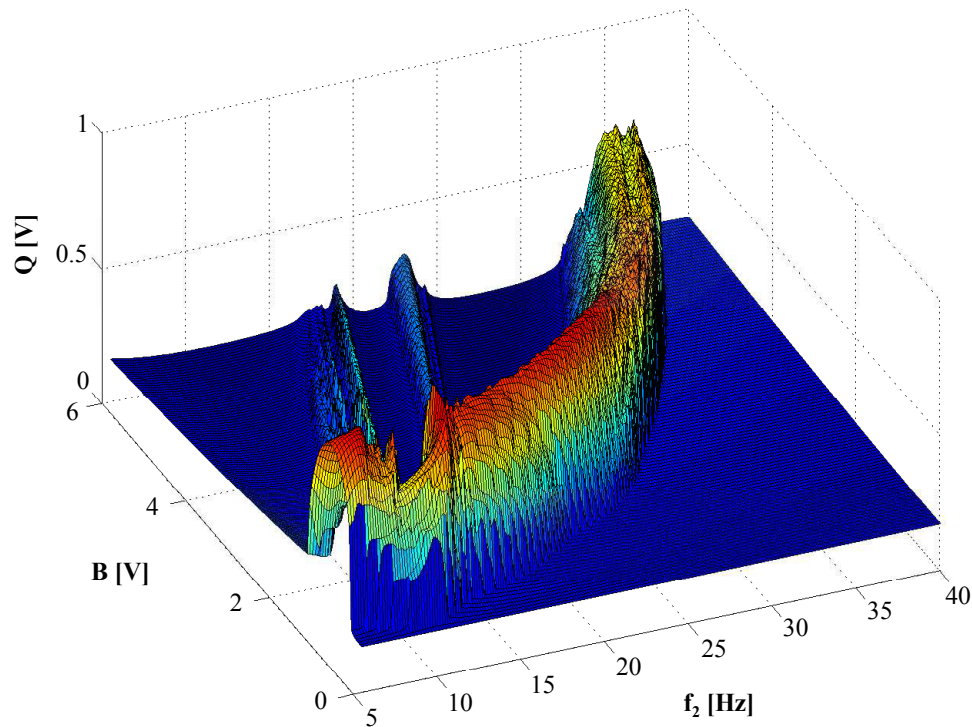


FIGURE 3.16 – Évolution de l'amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 de la composante haute fréquence appliquée au système. Les simulations numériques sont obtenues pour : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$.

3.3.3.2/ MISES EN ÉVIDENCE NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DE LA BI-RÉSONANCE VIBRATIONNELLE

La fréquence f_1 demeurant égale à 502 Hz, pour observer la multi-résonance, il suffit de tracer l'évolution de la composante spectrale Q sur une plus grande gamme de fréquences f_2 que celle que nous avons considérée jusqu'à alors, de telle sorte que la condition $f_2 \gg f_1$ soit remplie. Nous avons donc décidé de faire varier cette fréquence f_2 dans l'intervalle [5 kHz ; 40 kHz], l'amplitude B variant quant à elle dans un intervalle [0 V ; 6 V]. Ces plages de paramètres nous garantissent que le circuit électronique ne saturera pas et fonctionnera correctement lors de l'étude expérimentale. La FIGURE 3.16 montre ainsi l'évolution de Q dans le plan $[f_2, B]$ en simulation numérique. Il apparaît que si l'on fixe la fréquence f_2 et qu'on laisse varier l'amplitude B , l'amplitude Q de la composante spectrale f_1 peut présenter un ou plusieurs maxima locaux. C'est le cas exposé sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 3.17 obtenues respectivement en simulation et avec le circuit pour une fréquence fixe $f_2 = 40f_1 = 20.08$ kHz. La composante Q atteint

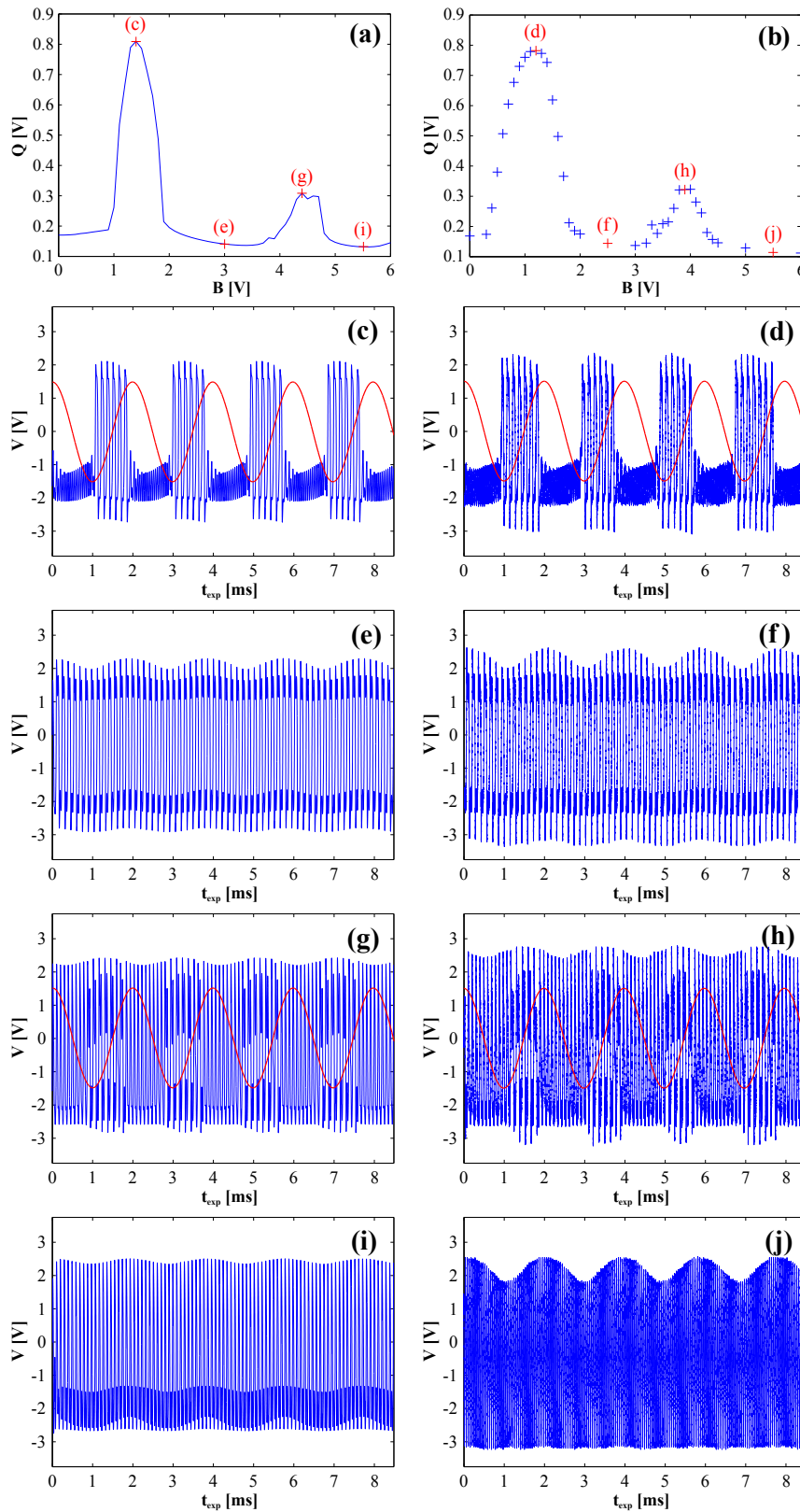


FIGURE 3.17 — (a) et (b) : Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système lorsque B varie en simulation numérique (gauche) et en manipulation (droite). Nous avons repéré les points d'intérêts qui correspondent aux chronogrammes présentés sur les sous-figures (c) à (g). Amplitudes B considérées pour les évolutions temporelles de la variable rapide V en simulation, (c) : $B = 1.4$ V, (e) : $B = 3$ V, (g) : $B = 4.4$ V et (i) : $B = 5.5$ V ; et en manipulation, (d) : $B = 1.2$ V, (f) : $B = 2.5$ V, (h) : $B = 3.9$ V et (j) : $B = 5.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 40$, $f_1 = 20.08$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

deux maxima locaux pour deux valeurs de l'amplitude B .

À titre d'exemple, nous avons analysé les séries temporelles de V aux points d'intérêt révélés sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 3.17, à savoir : aux sommets des deux résonances, entre les résonances et après la seconde résonance. Les résultats que nous avons obtenus en simulation numérique et à partir du circuit électronique pour $f_2 = 40f_1 = 20.08$ kHz sont respectivement présentés à gauche et à droite de la FIGURE 3.17. Sur les sous-figures (a) et (b), pour plus de clarté nous avons fait apparaître distinctement la correspondance entre les points d'intérêts et le nom des sous-figures associées, ainsi les sous-figures (c) et (d), (e) et (f), (g) et (h) et enfin (i) et (j) de la FIGURE 3.17 fonctionneront par paire. Bien qu'un léger décalage soit visible, les comportements observés en simulation et en pratique sont similaires.

Ainsi, si nous considérons la première amplitude B qui maximise l'amplitude Q de la composante spectrale f_1 , l'évolution temporelle de la variable rapide V présente un caractère périodique de fréquence fondamentale f_1 . Nous avons illustré cet effet sur les sous-figures (c) et (d) de la FIGURE 3.17 où nous avons superposé une onde sinusoïdale de fréquence f_1 à la trace de $V(t_{exp})$. Ensuite, en augmentant l'amplitude B , les sous-figures (e) et (f) de la FIGURE 3.17 montrent que la sortie du système n'est plus synchronisée avec la composante basse fréquence appliquée en entrée. La variable rapide oscille alors à la fréquence propre du système. Puis en considérant une amplitude de B qui permet d'atteindre la seconde résonance visible sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 3.17, nous constatons qu'à nouveau la réponse du système se synchronise à la fréquence f_1 . Comme pour la première résonance, nous avons illustré cet effet en superposant sur les sous-figures (g) et (h) de la FIGURE 3.17 une onde sinusoïdale de fréquence f_1 à l'évolution temporelle de la variable rapide V . Enfin, lorsque l'amplitude B devient trop importante, nous remarquons sur les sous-figures (i) et (j) de la FIGURE 3.17 que le système se remet à osciller à la fréquence propre du système et que la fréquence f_1 n'est plus aussi apparente.

3.3.3.3/ PRÉDICTIONS NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES DIFFÉRENTES RÉSONANCES

Regardons maintenant si, comme évoqué par Yang J. *et al.* [147], les différentes résonances du paramètre Q provoquées par l'excitation bichromatique peuvent être prédites en analysant le diagramme d'encodage d'un stimulus sinusoïdal. Pour rappel, nous

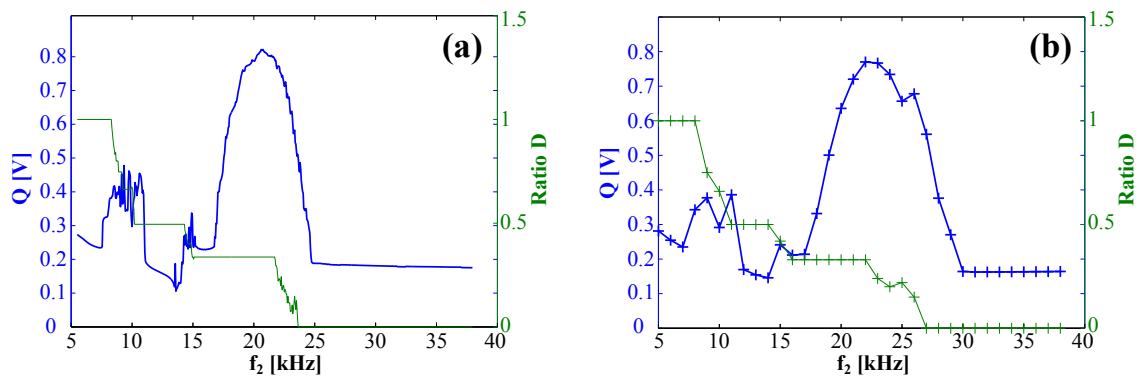


FIGURE 3.18 — Prédiction de la multi-résonance vibrationnelle en comparant les évolutions des grandeurs Q et D en fonction de la fréquence f_2 . (a) : résultats de simulations numériques. (b) : résultats expérimentaux. Dans chaque cas, la courbe en trait gras représente la grandeur Q obtenue pour une excitation bichromatique $A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz et $B = 1.5$ V. Les courbes en traits fins correspondent au rapport D obtenu pour une excitation monochromatique $B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $B = 1.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

avons présenté ce type d'encodage au début de ce chapitre, dans la sous-partie 3.2.2, en soumettant notre système à une excitation monochromatique. Nous avons d'abord montré qu'en fonction de l'amplitude A et de la fréquence f_1 d'un signal exciteur de type $A \cos(2\pi f_1 t)$, le système répondait selon des motifs (structures temporelles) prédéfinis. Nous avons ensuite introduit un ratio $D = M/N$ qui retranscrit numériquement les différentes structures observables, puis tracé l'évolution de ce paramètre D dans le plan fréquence/amplitude : des frontières se sont alors nettement dégagées. Montrons maintenant que ces frontières permettent de prédire les multiples résonances de la grandeur Q lorsque le système est soumis à un régime d'excitation bichromatique.

Sur la FIGURE 3.18, nous traçons le ratio D (trait fin) en fonction de la fréquence f_2 d'un signal exciteur monochromatique $B \cos(2\pi f_2 t)$, puis nous superposons l'amplitude spectrale Q (trait épais) déterminée à partir d'un signal exciteur bichromatique $A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$. La sous-figure 3.18 (a) présente les résultats provenant des simulations numériques tandis que la sous-figure 3.18 (b) montre les résultats expérimentaux. Des disparités entre les résultats numériques et expérimentaux apparaissent. Néanmoins, nous constatons que ces différences n'influent pas sur l'apparition du phénomène de résonances multiples. En effet, lorsque la fréquence f_2 varie en respectant $f_2 \gg f_1$, pour une amplitude B donnée, le paramètre Q montre plusieurs résonances. Ces dernières se situent systématiquement aux transitions du ratio D qui a été introduit pour expliquer le fonctionnement du système en régime d'excitation monochromatique.

Nous avons voulu confirmer numériquement et expérimentalement que le ratio D pou-

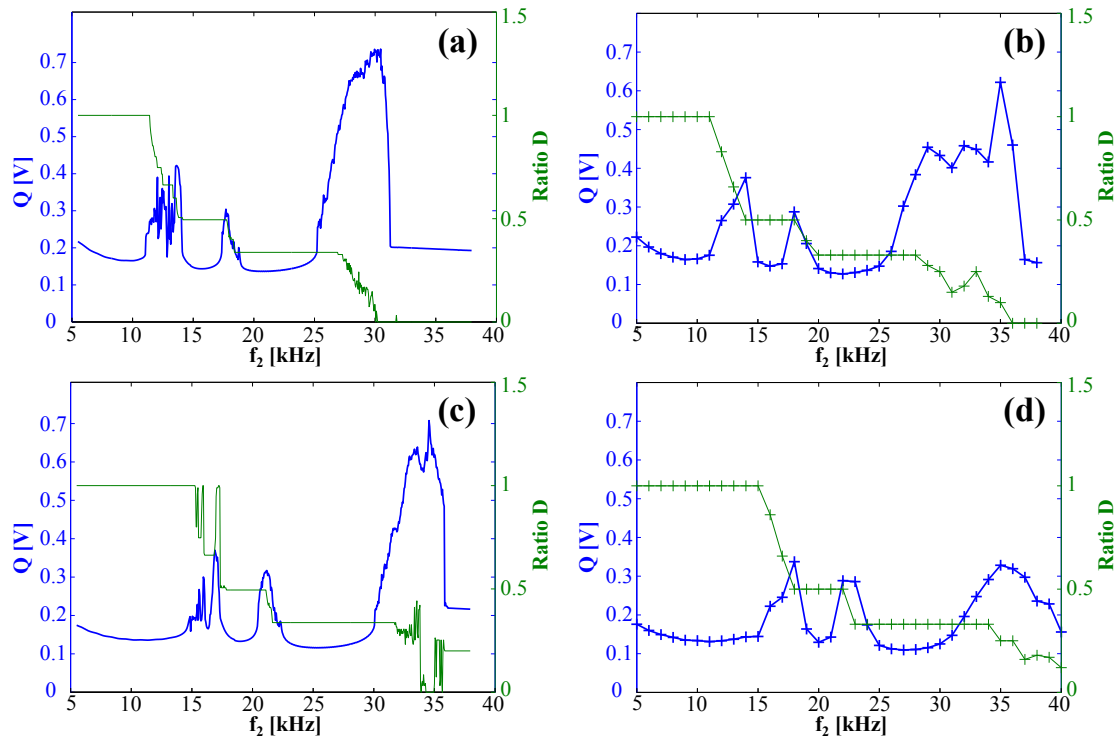


FIGURE 3.19 – Prédiction de la multi-résonance vibrationnelle en comparant les évolutions des grandeurs Q et D en fonction de la fréquence f_2 pour (a) et (b) : $B = 3.2$ V ; (c) et (d) : $B = 5$ V. Les résultats de simulations numériques sont présentés à gauche, tandis que les résultats expérimentaux sont présentés à droite. Dans chaque cas, la courbe en trait gras représente la grandeur Q obtenue pour une excitation bichromatique $A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz et $B = 1.5$ V. Les courbes en traits fins correspondent au rapport D obtenu pour une excitation monochromatique $B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $B = 1.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

vaît permettre la prédiction des multiples résonances de la grandeur Q pour d'autres valeurs de l'amplitude B de la composante sinusoïdale haute fréquence. La FIGURE 3.19 montre l'effet précédemment observé pour deux nouvelles valeurs de B , soit $B = 3.2$ V sur les sous-figures (a) et (b) et $B = 5$ V sur les sous-figures (c) et (d) : chacune des résonances de Q correspond effectivement à un changement de valeur du rapport D .

Encouragés par ces résultats, nous avons voulu avoir une vue plus globale de la multi-résonance vibrationnelle dans tout le plan $[f_2, B]$. Cependant, la représentation de données expérimentales par des graphiques selon trois dimensions étant trop fastidieuse, nous avons limité notre étude au cas numérique. Les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 3.20 montrent les évolutions dans le plan fréquence/amplitude des grandeurs Q (à gauche) et D (à droite). Au regard des allures observées, la corrélation des évolutions de ces deux grandeurs est indéniable. Dans tout le plan de paramètres $[f_2, B]$, il apparaît que les maxima locaux de l'amplitude spectrale Q à la fréquence f_1 de la réponse du système, sont localisés aux différents changements de motif décrits par la variable V dans

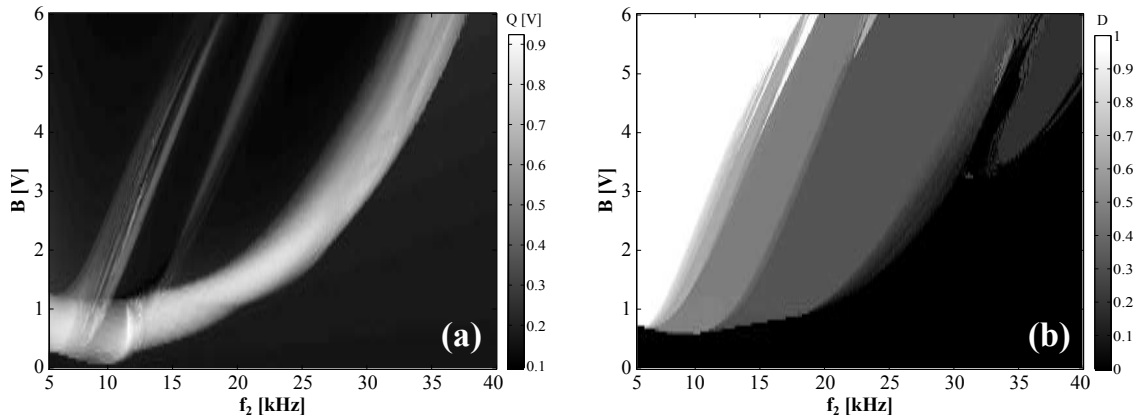


FIGURE 3.20 — Prédiction de la multi-résonance vibrationnelle en comparant les évolutions des grandeurs Q et D dans le plan $[f_2, B]$. (a) : amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système, en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 d'une excitation bichromatique $A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $A = 0.8$ V et $f_1 = 502$ Hz. (b) : évolution du rapport D en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 d'une excitation monochromatique $B \cos(2\pi f_2 t)$. Les simulations numériques sont obtenues pour : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$.

le domaine temporel.

Jusqu'à présent, nous avons considéré différentes excitations déterministes qui ont permis le déclenchement de divers phénomènes non linéaires. Nous avons montré successivement les effets sur le modèle de FitzHugh-Nagumo d'une tension continue, d'un signal purement sinusoïdal et d'un signal composé de la somme de deux composantes sinusoïdales. Ceci nous a permis d'étudier la bifurcation d'Andronov-Hopf, de décrire l'encodage d'un stimuli sinusoïdal, de montrer le phénomène générique de résonance vibrationnelle, de résonance fréquentielle et de multi-résonance vibrationnelle.

Les signaux déterministes ne sont pas les seuls à provoquer des réponses particulières dans les systèmes non linéaires, c'est également le cas des signaux chaotiques et du bruit [155, 156]. L'étude du système de FitzHugh-Nagumo lorsqu'il est soumis à des excitations similaires à celles utilisées dans ce chapitre et auxquelles nous avons ajouté une composante stochastique fait l'objet de notre prochain chapitre.

ÉTUDE D'UNE CELLULE SOUMISE À UNE EXCITATION STOCHASTIQUE

Sommaire

4.1 Réponse du système en présence exclusive de bruit : différentes formes de manifestation de la résonance cohérente	64
4.1.1 Introduction et contexte d'étude	64
4.1.2 Analyse temporelle des signaux	67
4.1.3 Évaluation quantitative des deux formes de résonance cohérente	69
4.2 Réponse du système à une excitation monochromatique bruitée : manifestation de la résonance stochastique	72
4.2.1 Contexte général	72
4.2.2 Paramétrage du système pour observer la résonance stochastique	73
4.2.3 Analyse spectrale de la résonance stochastique	74
4.3 Réponse du système à une excitation bichromatique bruitée	76
4.3.1 Analyse spectrale à la basse fréquence f_1	76
4.3.1.1 Bruit blanc d'amplitude RMS fixe : condition d'existence de la résonance vibrationnelle	76
4.3.1.2 Bruit blanc d'amplitude RMS variable : condition d'amélioration de la détection de la basse fréquence f_1	78
4.3.1.3 Bruit coloré de paramètres variables : condition d'amélioration de la détection de la basse fréquence f_1	80
4.3.2 Analyse à une fréquence absente de l'excitation : résonance stochastique fantôme	82
4.3.2.1 Introduction du phénomène de résonance stochastique fantôme	82
4.3.2.2 Choix des fréquences de l'excitation et prédiction théorique de la fréquence fantôme	85
4.3.2.3 Résonance stochastique fantôme dans le modèle de FitzHugh-Nagumo : cas harmonique	86
4.3.2.4 Résonance stochastique fantôme dans le modèle de FitzHugh-Nagumo : cas inharmonique	92

Étudions maintenant les effets du bruit sur la réponse de la cellule élémentaire. De façon contre-intuitive, il a été montré que le bruit pouvait, sous certaines conditions, être utile et améliorer la réponse de quelques systèmes physiques non linéaires. Les premiers

travaux faisant état d'une perturbation utile sont ceux de Benzi R. *et al.*, qui montrent que lorsqu'un système dynamique est soumis aux actions conjointes d'une force périodique et d'une perturbation aléatoire, son spectre de puissance montre une résonance qui est atteinte pour une valeur optimale de la perturbation [156]. Les auteurs révèlent alors le phénomène de résonance stochastique et ouvrent une nouvelle voie visant à considérer l'apport du bruit, d'ordinaire indésirable dans les systèmes. Cette démarche permet notamment de se rapprocher de la modélisation des systèmes naturels où les perturbations sont omniprésentes. La prise en compte du bruit lors des investigations de la réponse des systèmes non linéaires a permis de révéler des phénomènes différents de la résonance stochastique. La résonance cohérente [22] et la résonance stochastique fantôme en sont quelques exemples [157].

Dans ce chapitre, nous allons poursuivre la logique entreprise dans le chapitre précédent et étudier les effets du bruit dans le système de FitzHugh-Nagumo en le soumettant à différentes excitations stochastiques. Chronologiquement, nous analyserons dans un premier temps la réponse du système en présence exclusive de bruit, ceci afin de mettre en avant le phénomène de résonance cohérente. Nous considérerons ensuite un signal monochromatique auquel nous ajouterons un bruit blanc ou coloré pour vérifier l'existence du phénomène bien connu de résonance stochastique. Ce cheminement nous mènera logiquement à l'étude du cas bichromatique qui constituera le cœur de ce chapitre. Nous présenterons alors tour à tour les effets du bruit sur la résonance vibrationnelle étudiée dans le chapitre précédent et la résonance stochastique fantôme.

4.1/ RÉPONSE DU SYSTÈME EN PRÉSENCE EXCLUSIVE DE BRUIT : DIFFÉRENTES FORMES DE MANIFESTATION DE LA RÉSONANCE COHÉRENTE

4.1.1/ INTRODUCTION ET CONTEXTE D'ÉTUDE

La résonance cohérente est un phénomène non linéaire déclenché en présence exclusive de bruit qui consiste en l'existence d'un maximum de régularité dans la réponse du système pour une valeur optimale de bruit [22]. L'intérêt de la communauté scientifique pour ce phénomène fut éveillé lors de la mise en évidence de celui-ci pour rendre

compte de l'activité des neurones en l'absence de stimuli, ainsi que des mécanismes causant l'apnée en état de mort clinique [158, 159]. Se sont ensuite succédées de nombreuses études dans divers modèles neuronaux (Hodgkin-Huxley, FitzHugh-Nagumo, Morris-Lecar) [25, 30, 39] et sur différentes structures électroniques [37, 38, 160, 161] où la résonance cohérente a pu être montrée.

L'oscillateur électronique de FitzHugh-Nagumo que nous utilisons a confirmé l'apparition de la résonance cohérente lors de sa caractérisation en présence exclusive de bruit [60–62]. En effet, lorsque une excitation de type $E(t) = E_0 + \eta_w(t)$ a été appliquée, une valeur particulière de la perturbation $\eta_w(t)$ a permis de visualiser un maximum de régularité dans l'évolution de la réponse temporelle dans un premier temps, une régularité également observée à partir des portraits de phase dans un second temps. Le phénomène a ensuite été quantifié au moyen d'indicateurs courants dans la littérature, à savoir le temps de corrélation et le coefficient de variation que nous définirons dans la suite de ce chapitre.

Avant toute chose, replaçons cette étude dans son contexte en précisant que cette thèse a débuté par l'analyse du phénomène de résonance cohérente qui avait déjà fait l'objet de la thèse de G. Lassere [59, 60]. L'objectif était alors principalement de se familiariser avec le circuit électronique et les protocoles expérimentaux [62]. Avant de s'intéresser à des excitations bichromatiques plus complexes et de mener nos travaux sur des phénomènes plus riches d'applications tels que la résonance vibrationnelle et la résonance stochastique fantôme, il semble opportun de présenter l'étude des différentes formes de résonance cohérente réalisée pendant cette thèse. En particulier, nous proposons de comparer expérimentalement la forme classique de résonance cohérente étudiée par G. Lassere à une autre forme de résonance cohérente qui consiste à considérer la source de bruit comme agissant sur la non-linéarité du modèle de FitzHugh-Nagumo et non plus sur la tension continue E_0 [63].

Nous avons ainsi été amenés à modifier le modèle de FitzHugh-Nagumo en ajoutant

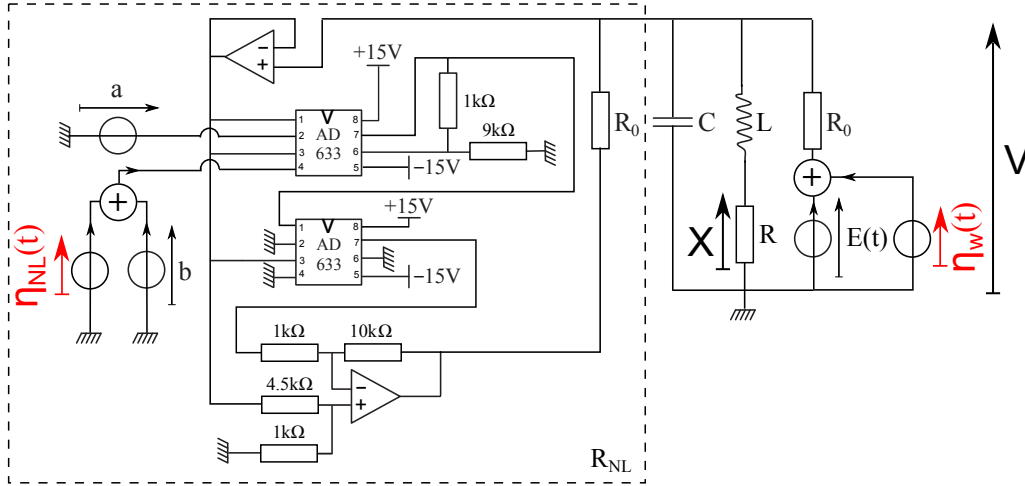


FIGURE 4.1 — Schéma électrique de l'oscillateur de type FitzHugh-Nagumo modifié pour l'étude de la résonance cohérente. Expérimentalement, pour considérer l'influence du paramètre α , il a suffi de ne jamais activer les sources $\eta_{NL}(t)$ et $\eta_w(t)$ simultanément.

une source de bruit $\eta_{NL}(t)$ qui agit sur la non-linéarité selon le principe ci-après :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -V(V-a)(V-b-\eta_{NL}(t)(1-\alpha)) - W + E_0 + \eta_w(t)\alpha \\ \frac{dW}{dt} &= \varepsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ainsi, lorsque α est égal à 1, la forme classique de résonance cohérente peut être étudiée, la source de bruit $\eta_w(t)$ étant active et perturbant la polarisation E_0 du modèle. En revanche, lorsque α est égal à 0, c'est la non-linéarité du modèle qui est perturbée par une source $\eta_{NL}(t)$ et une autre sorte de résonance cohérente pourra ainsi être mise en évidence.

Le circuit électronique correspondant au modèle (4.1) est représenté sur la FIGURE 4.1. L'unique différence par rapport au circuit électronique utilisé jusqu'alors se situe au niveau de la résistance non linéaire R_{NL} , où désormais une source de bruit blanc $\eta_{NL}(t)$ est sommée avec le générateur de tension continue b modélisant l'une des racines de la non-linéarité cubique. Les paramètres ε et γ utilisés pour réaliser notre étude portant sur la résonance cohérente seront sensiblement différents de ceux utilisés au chapitre précédent puisque, désormais, l'inductance L et la résistance R valent respectivement 10 mH et 320 Ω , ce qui implique $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.9$ d'après la relation (2.13).

Comme expliqué au chapitre 2 de ce manuscrit, γ et ε interviennent dans les expressions théoriques (3.13) et (3.15) qui donnent les deux valeurs critiques $E_{c\ inf}$ et $E_{c\ sup}$ de la tension E_0 pour lesquelles le circuit change de régime de fonctionnement en l'ab-

sence de toute autre excitation. Par conséquent, changer γ et ε modifie inévitablement les valeurs $E_{c\ inf}$ et $E_{c\ sup}$. Expérimentalement, en appliquant les nouveaux paramètres considérés, le système reste en régime oscillant si la tension E_0 est comprise dans l'intervalle $[E_{c\ inf}; E_{c\ sup}] = [-0.25\text{ V}; +0.6\text{ V}]$. Ces grandeurs sont du même ordre que celles déterminées à partir des relations théoriques (3.13) et (3.15) pour $a = 2\text{ V}$ et $b = -2.6\text{ V}$, soit $[E_{c\ inf}; E_{c\ sup}] = [-0.15\text{ V}; +0.6\text{ V}]$.

4.1.2/ ANALYSE TEMPORELLE DES SIGNAUX

Tout au long de notre étude, les sources de bruit $\eta_w(t)$ et $\eta_{NL}(t)$ d'intensité σ ne seront jamais appliquées simultanément. En revanche, nous présenterons les résultats obtenus pour chacune des sources considérée individuellement sur les mêmes figures afin de faciliter la comparaison des comportements observés. Enfin, rappelons que tous les résultats présentés dans cette partie sont exclusivement issus d'expérimentations réalisées à partir du circuit électronique.

Commençons par étudier le comportement temporel de la variable rapide V du modèle de FitzHugh-Nagumo en présence exclusive de bruit. Sur la FIGURE 4.2, pour trois amplitudes RMS des deux sources de bruit appliquées successivement, nous avons relevé à l'oscilloscope les évolutions temporelles de la variable rapide V et les portraits de phase correspondants. Sur les sous-figures (a), (b) et (c) de la FIGURE 4.2 apparaissent respectivement les résultats obtenus quand seule la source de bruit $\eta_w(t)$ est ajoutée à la tension continue E_0 pour trois valeurs caractéristiques de l'amplitude RMS de bruit σ , soit $\sigma = 0.35\text{ V}_{RMS}$, $\sigma = 0.7\text{ V}_{RMS}$ et $\sigma = 1.05\text{ V}_{RMS}$. De la même façon, sur les sous-figures (d), (e) et (f) de la FIGURE 4.2, nous avons représenté les chronogrammes et plans de phase de la réponse du système lorsque seule la source de bruit $\eta_{NL}(t)$ agit sur la non-linéarité avec des valeurs RMS valant respectivement $\sigma = 0.05\text{ V}_{RMS}$, $\sigma = 0.2\text{ V}_{RMS}$ et $\sigma = 0.66\text{ V}_{RMS}$.

Pour les faibles valeurs RMS de chacune des deux sources de bruit, comme le montrent les sous-figures (a) et (d) de la FIGURE 4.2, les potentiels d'action ne sont pas générés à des intervalles de temps réguliers. Par ailleurs, pour les plus fortes amplitudes RMS de chacune des deux sources de bruit, les sous-figures (c) et (f) de la FIGURE 4.2 montrent

que le déclenchement des potentiels d'action semble principalement gouverné par le bruit. En revanche, pour des valeurs efficaces de bruit intermédiaires comme celles utilisées pour obtenir les sous-figures (b) et (e) de la FIGURE 4.2, nous constatons que la régularité de la réponse du système est la meilleure. Un premier constat s'impose : un maximum de régularité de la réponse du système peut être atteint, que le bruit agisse

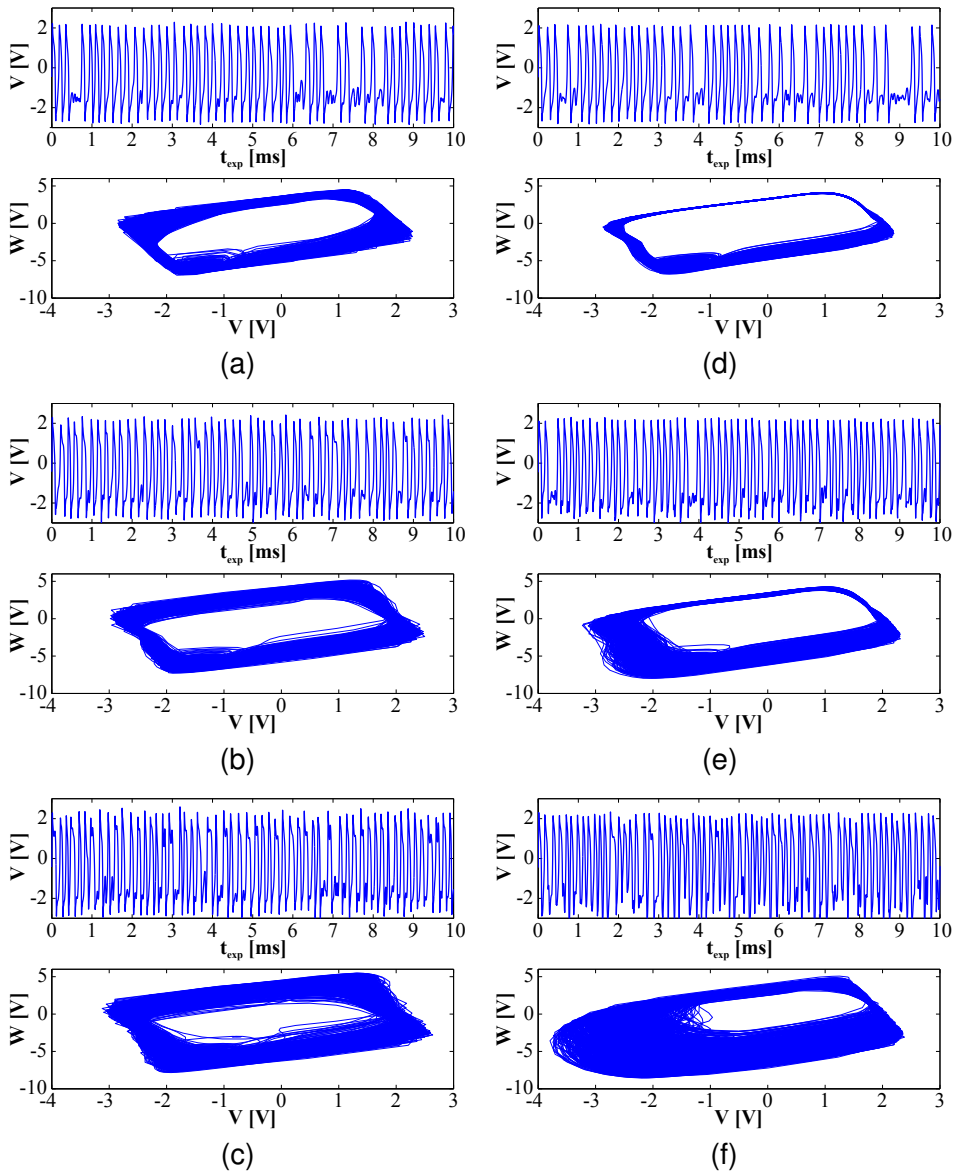


FIGURE 4.2 — Mise en évidence expérimentale de la résonance cohérente pour deux sources de bruit appliquées différemment. Les séries temporelles et les portraits de phase correspondants sont représentés pour trois valeurs de bruit distinctes. Sur les sous-figures (a), (b) et (c) un bruit $\eta_w(t)$ agit sur l'excitation $E(t)$ avec respectivement $\sigma = 0.35 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 1.05 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Sur les sous-figures (d), (e) et (f) un bruit $\eta_{NL}(t)$ agit sur la racine b de la non-linéarité du modèle de FitzHugh-Nagumo avec respectivement $\sigma = 0.05 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.2 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 0.66 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Les paramètres utilisés lors des manipulations sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -0.3 \text{ V}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.9$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \text{ }\Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10 \text{ mH}$.

sur l'excitation $E(t)$ ou sur la racine b de la non-linéarité, révélant ainsi, dans les deux cas, l'effet de résonance cohérente. Notons que l'amplitude de bruit nécessaire pour atteindre ce maximum de régularité est inférieure dans le cas d'un bruit agissant sur la non-linéarité. En effet, la résonance cohérente classique nécessite une valeur efficace de bruit optimale de $0.7 V_{\text{RMS}}$, contre $0.2 V_{\text{RMS}}$ pour une résonance cohérente obtenue avec un bruit sur la non-linéarité.

En ce qui concerne les portraits de phase, il ressort que le bruit agissant sur la non-linéarité mène à une trajectoire plus fine dans le coin supérieur droit que dans le coin inférieur gauche, ce qui signifie que ce type de perturbation aléatoire agit principalement lorsque le système est proche de son état de repos, soit juste avant qu'un potentiel d'action ne soit déclenché. De plus, l'analyse des sous-figures (b) et (e) de la FIGURE 4.2 montre que l'amplitude et la durée des potentiels d'action sont moins sujets à variation en présence du bruit $\eta_{NL}(t)$. Nous pouvons donc nous attendre à obtenir une meilleure régularité dans ce cas.

4.1.3/ ÉVALUATION QUANTITATIVE DES DEUX FORMES DE RÉSONANCE COHÉRENTE

Dans cette partie, nous évaluerons quantitativement les différentes formes de résonance cohérente observées précédemment afin de mieux les confronter. Sous l'influence d'une fluctuation aléatoire, l'intervalle de temps séparant deux potentiels d'action consécutifs nous renseigne sur la régularité du système et nous permet de définir le coefficient de variation R_p [22, 162] :

$$R_p = \frac{\sqrt{\text{var}(t_p)}}{\langle t_p \rangle}, \quad (4.2)$$

où l'intervalle de temps entre deux potentiels d'action consécutifs t_p est une variable aléatoire de moyenne $\langle t_p \rangle$ et d'écart-type $\sqrt{\text{var}(t_p)}$. Une faible valeur de R_p indique alors une bonne régularité du système. En effet, ce coefficient sera nul dans un cas parfaitement périodique, tandis qu'un comportement très irrégulier sera renseigné par une forte valeur de R_p . Enfin, pour déterminer les valeurs de t_p , notons que nous avons considéré l'existence d'un potentiel d'action à partir du dépassement par la variable rapide $V(t)$ du seuil $V_{th} = 0 \text{ V}$.

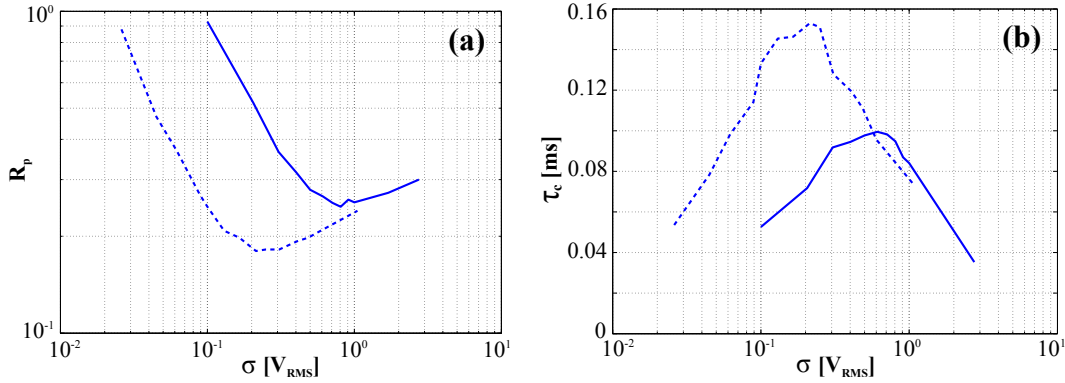


FIGURE 4.3 – Évaluation quantitative des deux formes de résonance cohérente à l'aide de l'évolution du coefficient de variation R_p sur la sous-figure (a), et du temps de corrélation τ_c sur la sous-figure (b) en fonction de la valeur *RMS* de bruit σ . Les courbes en pointillés sont obtenues en présence d'un bruit $\eta_{NL}(t)$ perturbant la non-linéarité, tandis que les courbes en trait plein ont été relevées en présence d'un bruit $\eta_w(t)$ agissant sur l'excitation $E(t)$. Les paramètres utilisés lors des manipulations sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -0.3$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.9$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10$ mH.

Sur la FIGURE 4.3 (a), nous avons représenté l'évolution du coefficient R_p en fonction de l'amplitude *RMS* du bruit σ : en trait plein lorsque la source $\eta_w(t)$ est active, en pointillés lorsque la source $\eta_{NL}(t)$ perturbe la non-linéarité. Il résulte, dans un premier temps, que pour les deux sources de bruit, il existe une valeur particulière de l'amplitude σ qui minimise R_p . Par ailleurs, nous remarquons que la valeur minimale atteinte par la courbe en pointillés est inférieure à celle atteinte par la courbe en trait plein, ce qui indique qu'une meilleure régularité est obtenue dans le cas où le bruit $\eta_{NL}(t)$ est pris en compte. Pour finir, il apparaît que l'amplitude de bruit nécessaire à la minimisation du coefficient de variation R_p est plus faible lorsque le bruit agit sur la non-linéarité plutôt que sur l'excitation $E(t)$. En effet, les valeurs des amplitudes *RMS* qui permettent d'atteindre un maximum de régularité valent 0.2 V_{RMS} dans le cas où le bruit agit sur la racine de la fonction cubique, contre 0.7 V_{RMS} lorsque le bruit agit sur l'excitation.

Du fait que les neurones encodent l'information à l'aide de l'intervalle de temps entre deux potentiels d'action consécutifs, le coefficient de variation est un indicateur approprié au contexte neuronal. Cependant, la détermination du coefficient de variation fait intervenir une opération de seuillage qui ne tient pas compte de la forme de l'onde produite par le système. Par conséquent, il peut sembler tout aussi pertinent de prendre en compte

l'autocorrélation normalisée définie comme suit :

$$C(\tau) = \frac{\langle \tilde{V}(t)\tilde{V}(t+\tau) \rangle}{\langle \tilde{V}(t)^2 \rangle}, \quad (4.3)$$

avec $\tilde{V}(t) = V(t) - \langle V(t) \rangle$, et où la notation $\langle . \rangle$ indique un moyennage.

Cette autocorrélation normalisée permet de définir le temps de corrélation de la façon suivante [22] :

$$\tau_C = \int_0^{+\infty} C^2(t) dt. \quad (4.4)$$

Sur la FIGURE 4.3 (b), nous distinguons que le temps de corrélation τ_c révèle un caractère résonant en fonction de l'évolution de l'amplitude *RMS* du bruit, et ce, quelle que soit la source de fluctuation considérée. À nouveau, le maximum de régularité est obtenu lorsque le bruit agit sur la non-linéarité. De plus, nous remarquons que les valeurs de σ qui maximisent le temps de corrélation τ_c sont sensiblement identiques à celles qui minimisent le coefficient de variation R_p . En effet, pour une amplitude $\sigma \simeq 0.2 V_{\text{RMS}}$ du bruit perturbant la non-linéarité, un niveau maximum du temps de corrélation égal à 0.152 ms est atteint, tandis que lorsque le bruit agit sur l'excitation $E(t)$, une amplitude $\sigma \simeq 0.7 V_{\text{RMS}}$ est nécessaire pour atteindre la valeur optimale de τ_c égale à 0.1 ms.

Dans cette partie, nous avons étudié la réponse de l'oscillateur électronique de FitzHugh-Nagumo en présence exclusive de bruit et mis en avant deux types de résonance cohérente. La première est la plus classique et se manifeste lorsque une source de fluctuation aléatoire est ajoutée à la première équation du modèle normalisé de FitzHugh-Nagumo, tandis que la seconde a montré que les effets bénéfiques du bruit pouvaient être supérieurs lorsque le bruit agit sur la non-linéarité du système. Dans les systèmes non linéaires, le bruit offre une dynamique qui peut être plus riche encore. Étudions ce point en prenant désormais en compte des excitations plus complexes qu'une source de tension constante, soit des signaux mono- ou bi-chromatiques.

4.2/ RÉPONSE DU SYSTÈME À UNE EXCITATION MONOCHROMATIQUE BRUITÉE : MANIFESTATION DE LA RÉSONANCE STOCHASTIQUE

4.2.1/ CONTEXTE GÉNÉRAL

L'investigation de la réponse des systèmes non linéaires en présence de bruit a révélé divers phénomènes, dont la résonance stochastique. Ce phénomène est mis en œuvre lorsqu'une fluctuation aléatoire, telle que du bruit, améliore la réponse d'un système non linéaire à un signal injecté cohérent et de faible amplitude [23, 33, 156, 163]. Cette signature non linéaire fut initialement introduite par Nicolis C. *et al.* [164] et Benzi R. *et al.* [165] au début des années 80 afin de décrire la dynamique des climats. Les auteurs démontrent que la récurrence des ères glaciaires est un phénomène périodique (≈ 100000 ans) qui provient de l'interaction non linéaire entre un signal cohérent, associé au mouvement de la Terre, et un signal aléatoire associé à des perturbations atmosphériques dont l'amplitude favorise l'arrivée d'une ère glaciaire. Suite à cette mise en évidence de la résonance stochastique dans le domaine de la climatologie, une multitude d'études montrant les applications de ce phénomène se sont succédées et se succèdent encore aujourd'hui. L'intense bibliographie qui en découle permet à l'heure actuelle de considérer la résonance stochastique comme une discipline à part entière. Au regard du plan suivi dans cette thèse, il paraît impossible de passer sous silence ce phénomène. Cependant, l'étude qui sera présentée ici ne saurait être perçue comme une étude exhaustive de la résonance stochastique, mais plutôt comme inhérente à l'étude du cas bichromatique qui constitue le cœur de ce manuscrit. L'introduction qui suit a donc pour but de présenter la résonance stochastique dans le contexte qui est le nôtre, à savoir la mise en œuvre expérimentale de phénomènes de résonance dans un oscillateur électronique dont l'évolution des tensions est régie par un modèle neuronal.

Dans le domaine des neurosciences, les premiers travaux théoriques faisant état de la résonance stochastique furent réalisés à partir de systèmes bistables modélisant de façon grossière le comportement des systèmes neuronaux [41, 42]. Le modèle de FitzHugh-Nagumo ne fut considéré que plus tardivement, en étant successivement exposé à des bruits blancs [166, 167] et colorés [88, 168–170]. Dans le même temps fut publiée la pre-

mière mise en évidence expérimentale de la résonance stochastique réalisée à partir d'un système biologique [171]. La conjecture présentée par les auteurs y était la suivante : les cellules mécano-réceptrices d'une écrevisse utilisent une source de fluctuations externe pour détecter de très faibles mouvements d'eau qu'elle ne pourrait percevoir en l'absence de bruit.

Enfin, en ce qui concerne la mise en évidence de la résonance stochastique à partir de dispositifs électroniques, diverses structures ont pu être utilisées [35, 36, 172–175]. Nous nous attacherons de notre côté à montrer cet effet dans un oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo. Par ailleurs, toutes sortes de mesures de performance ont pu être utilisées pour montrer ce phénomène. Pour notre part, nous conserverons celle utilisée précédemment pour montrer la résonance vibrationnelle, c'est-à-dire l'amplitude Q de la composante spectrale de la fréquence qui excite le système.

4.2.2/ PARAMÉTRAGE DU SYSTÈME POUR OBSERVER LA RÉSONANCE STOCHASTIQUE

Dans le contexte d'étude de la résonance stochastique, nous sommes amenés à analyser la réponse du système lorsque nous lui appliquons l'excitation sinusoïdale bruitée suivante :

$$E(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + \eta_w(t)(1 - \alpha) + \eta_c(t)\alpha, \quad (4.5)$$

avec $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Le bruit blanc $\eta_w(t)$ est ajouté lorsque α prend la valeur 0, tandis que le bruit coloré $\eta_c(t)$ est appliqué quand α est égal à 1.

Pour rappel, le bruit blanc $\eta_w(t)$ sera caractérisé par sa valeur efficace σ et son autocorrélation :

$$\langle \eta_w(t_{exp}), \eta_w(t'_{exp}) \rangle = \sigma^2 \delta(t_{exp} - t'_{exp}). \quad (4.6)$$

Quant au bruit coloré $\eta_c(t)$, conformément au processus d'Ornstein-Uhlenbeck, il sera obtenu à partir du filtrage passe-bas d'un bruit blanc identique à $\eta_w(t)$. Son autocorrélation sera ainsi notée :

$$\langle \eta_c(t_{exp}), \eta_c(t'_{exp}) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\tau} e^{-\frac{|t_{exp} - t'_{exp}|}{\tau}}, \quad (4.7)$$

où τ est le temps de corrélation du bruit coloré.

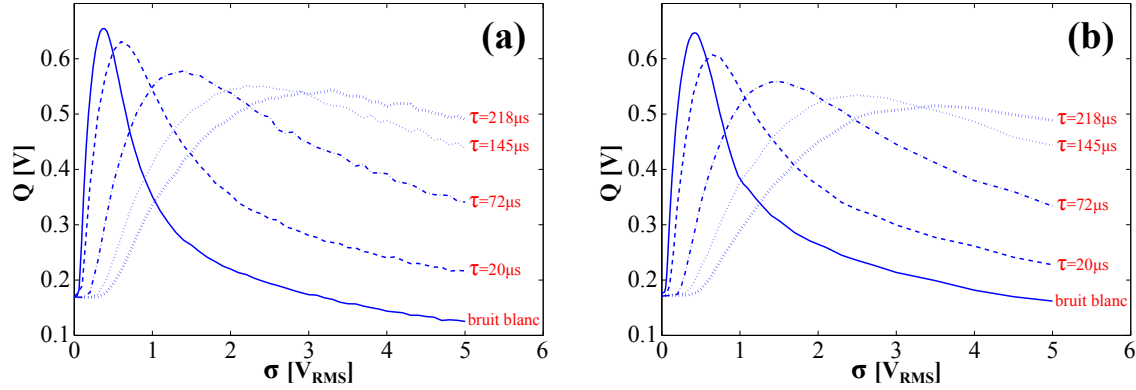


FIGURE 4.4 — Amplitude Q de la composante spectrale f_1 de la variable rapide V en fonction de la valeur efficace σ pour différents temps de corrélation : $\tau = 0 \mu\text{s}$ (bruit blanc), $\tau = 20 \mu\text{s}$, $\tau = 72 \mu\text{s}$, $\tau = 145 \mu\text{s}$ et $\tau = 218 \mu\text{s}$. Les sous-figures (a) et (b) présentent respectivement les simulations numériques et les résultats expérimentaux. Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = 0.8 \text{ V}$, $f_1 = 502 \text{ Hz}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 9.16 \text{ mH}$.

Pour réaliser nos investigations, nous configurons le système de telle sorte qu'en présence exclusive de la composante continue E_0 ($A = 0$, $\eta_w(t) = \eta_c(t) = 0$), le système soit en régime excitable. Pour la valeur de γ considérée durant cette étude, soit $\gamma = 0.24$, nous avons ainsi choisi $E_0 = -1 \text{ V}$. Nous ajoutons ensuite la composante sinusoïdale $A \cos(2\pi f_1 t)$ en prenant soin de choisir l'amplitude A et la fréquence f_1 de façon à ce que, en l'absence de bruit ($\eta_w(t) = \eta_c(t) = 0$), cette excitation purement déterministe soit insuffisante pour déclencher le moindre potentiel d'action en sortie du système. Ces conditions sont réunies en fixant l'amplitude A à 0.8 V et la fréquence f_1 à 502 Hz , paramètres pour lesquels l'excitation sinusoïdale est subliminale. Regardons si le bruit, qu'il soit blanc ou coloré, permet ainsi au système de répondre en déclenchant des potentiels d'action synchronisés à la fréquence d'excitation f_1 . Pour ce faire, nous étudierons l'évolution de l'amplitude de Q en fonction de l'amplitude de bruit σ .

4.2.3/ ANALYSE SPECTRALE DE LA RÉSONANCE STOCHASTIQUE

Sur la FIGURE 4.4, l'amplitude Q de la composante spectrale f_1 est fonction de la valeur efficace σ des différents bruits pris en compte : un bruit blanc et un bruit coloré pour lequel nous avons successivement considéré quatre temps de corrélation. Pour plus de lisibilité, les résultats provenant des simulations numériques et ceux issus de mesures réalisées sur le circuit sont présentés sur deux sous-figures distinctes. Ainsi, sur la sous-figure (a)

de la FIGURE 4.4 apparaissent les comportements révélés par une intégration numérique des équations différentielles décrivant le modèle de FitzHugh-Nagumo, tandis que sur la sous-figure (b) de la FIGURE 4.4, sont présentés les points de mesure expérimentaux. Premièrement, il apparaît que quel que soit le bruit ajouté à l'excitation $E(t)$, l'amplitude Q présente un caractère résonant en fonction de σ . Par ailleurs, il est manifeste que le bruit blanc permet d'obtenir la meilleure détection de la fréquence f_1 dans le spectre de la variable V . En effet, plus le temps de corrélation du bruit est élevé, moins la valeur maximale atteinte par l'amplitude Q est importante.

Par ailleurs, nous remarquons que l'optimisation de la réponse du système nécessite une valeur σ de plus en plus importante à mesure que le temps de corrélation du bruit augmente. Cette observation peut trouver une explication à l'aide de l'autocorrélation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck que nous avons rappelée par la relation (4.7). La puissance totale de bruit injectée dans le circuit est égale à $\sigma^2/(2\tau)$. Nous comprenons alors qu'en augmentant le temps de corrélation τ , pour une valeur efficace de bruit blanc σ fixe, la réduction de la puissance de bruit injectée est inévitable.

Nous avons présenté dans cette partie la réponse du système lorsqu'il est soumis à une excitation monochromatique bruitée. Que ce soit en présence d'une source de bruit blanc ou bien coloré, nous avons montré, via le phénomène de résonance stochastique, qu'il existe une amplitude *RMS* σ particulière qui permet de maximiser la détection de la fréquence de la composante sinusoïdale dans le spectre de la variable V . Ceci illustre parfaitement le fait que le bruit peut, sous certaines conditions, jouer un rôle bénéfique dans les systèmes non linéaires.

Après cette étude préliminaire du cas monochromatique, intéressons-nous à présent à l'influence de bruit en présence d'une excitation bichromatique et étudions la richesse de la dynamique que ces signaux révèlent dans le modèle de FitzHugh-Nagumo [56].

4.3/ RÉPONSE DU SYSTÈME À UNE EXCITATION BICHROMATIQUE BRUITÉE

4.3.1/ ANALYSE SPECTRALE À LA BASSE FRÉQUENCE f_1

Nous excitons désormais le système avec le signal bichromatique bruité suivant :

$$E(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t) + \eta_w(t)(1 - \alpha) + \eta_c(t)\alpha, \quad (4.8)$$

avec $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Le bruit blanc $\eta_w(t)$ est ajouté lorsque α prend la valeur 0, tandis que le bruit coloré $\eta_c(t)$ est appliqué quand α est égal à 1.

Les bruits blanc et coloré restent définis par les autocorrélations (4.6) et (4.7) rappelées au début de la partie précédente.

Afin de mettre en avant les effets du bruit sur la résonance vibrationnelle, nous configurons le système comme à la partie 3.3 de ce manuscrit qui était consacrée à l'étude de ce phénomène dans le cas purement déterministe. Plus précisément, le système est placé en régime excitable ($E_0 = -1$ V pour $\gamma = 0.24$) et la composante sinusoïdale basse fréquence $A \cos(2\pi f_1 t)$ est choisie de telle sorte qu'en l'absence de la seconde composante sinusoïdale et du bruit ($B = 0$, $\eta_w(t) = \eta_c(t) = 0$), l'excitation $E(t)$ soit subliminale. Cette condition est respectée en fixant $A = 0.8$ V et $f_1 = 502$ Hz.

L'amplitude B du signal déterministe haute fréquence $B \cos(2\pi f_2 t)$ ainsi que les amplitudes *RMS* des sources de bruit $\eta_w(t)$ et $\eta_c(t)$ seront, quant à elles, les éléments qui varieront selon l'étude réalisée. Notons que la fréquence f_2 restera figée à 6.1 kHz durant toute l'étude présentée dans cette partie dédiée aux effets du bruit sur la résonance vibrationnelle.

4.3.1.1/ BRUIT BLANC D'AMPLITUDE *RMS* FIXE : CONDITION D'EXISTENCE DE LA RÉSONANCE VIBRATIONNELLE

Dans un premier temps, vérifions si le phénomène de résonance vibrationnelle subsiste dans un environnement soumis à un bruit blanc, c'est-à-dire en imposant $\alpha = 0$ dans l'expression (4.8). Il s'agit donc de fixer la valeur efficace de bruit σ et d'étudier l'évolution de l'amplitude spectrale Q en fonction de l'amplitude B de la composante sinusoïdale haute fréquence.

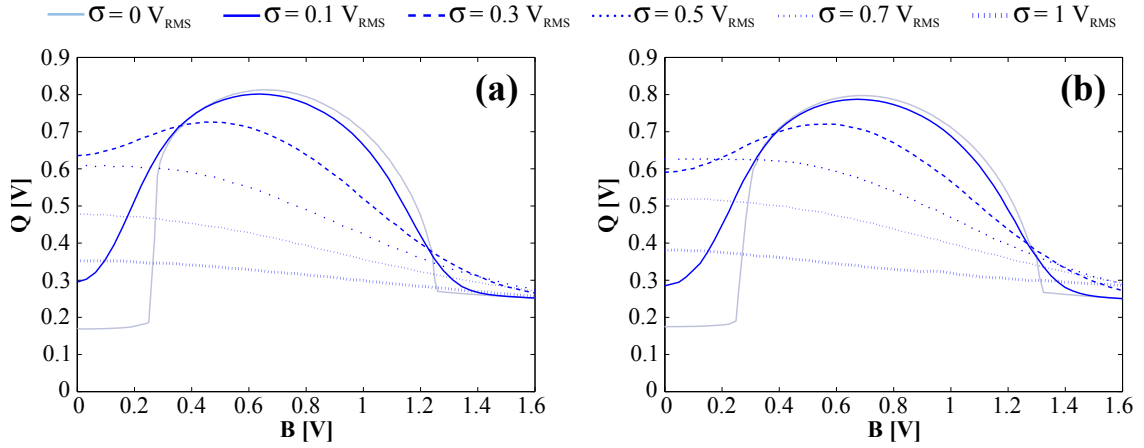


FIGURE 4.5 – Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude de la composante haute fréquence de l'excitation bichromatique bruitée appliquée. Les résultats des simulations numériques (a) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (b) pour différentes valeurs efficaces de bruit : $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.3 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 1 \text{ V}_{\text{RMS}}$. La courbe de résonance vibrationnelle obtenue au chapitre 3 en régime déterministe ($\sigma = 0 \text{ V}_{\text{RMS}}$) est superposée en gris. Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = 0.8 \text{ V}$, $f_1 = 502 \text{ Hz}$, $f_2 = 6.1 \text{ kHz}$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 9.16 \text{ mH}$.

Sur la FIGURE 4.5, nous avons tracé le réseau de courbes donnant le comportement de Q en fonction de B lorsque le niveau de bruit σ est constant. Les résultats issus de simulations numériques et les courbes relevées expérimentalement sont respectivement présentés sur les sous-figures (a) et (b). Que ce soit numériquement ou bien expérimentalement, nous avons considéré les mêmes valeurs efficaces de bruit, à savoir $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.3 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 1 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Afin de faciliter la comparaison avec l'étude déterministe du phénomène proposé dans le chapitre précédent, nous avons rappelé, sur la FIGURE 4.5, les résultats obtenus pour $\sigma = 0 \text{ V}_{\text{RMS}}$.

Premièrement, nous constatons que le bruit n'est pas un frein à l'apparition de ce phénomène non linéaire. En effet, pour $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$ ou $\sigma = 0.3 \text{ V}_{\text{RMS}}$, les courbes donnant l'évolution de Q en fonction de B montrent l'existence d'une résonance : il existe alors une valeur particulière de l'amplitude B qui maximise l'amplitude spectrale Q . Cependant, pour des amplitudes de bruit plus importantes telles que $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 1 \text{ V}_{\text{RMS}}$, nous remarquons que l'amplitude spectrale Q est une fonction monotone décroissante de l'amplitude B de la composante haute fréquence : le phénomène de résonance vibrationnelle disparaît alors totalement. Nous en déduisons qu'il existe une amplitude de bruit critique au delà de laquelle le phénomène de résonance vibration-

nelle ne peut plus apparaître. Par ailleurs, le réseau de courbes présenté sur la FIGURE 4.5 montre que la valeur maximale Q^* de Q atteinte en l'absence de bruit ($\sigma = 0 \text{ V}_{\text{RMS}}$) n'est jamais dépassée en présence de bruit, et ceci quelle que soit la valeur efficace de bruit considérée. Par conséquent, nous pouvons conclure que le bruit blanc ne permet pas d'améliorer la résonance vibrationnelle. Enfin, si l'on considère les valeurs efficaces de bruit autorisant l'apparition de la résonance vibrationnelle, soit $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 0.3 \text{ V}_{\text{RMS}}$, les courbes de la FIGURE 4.5 montrent que plus σ est élevé, moins l'amplitude B du signal haute fréquence devra être importante pour atteindre la résonance et maximiser Q . En réalité, l'apport du bruit peut être vu comme se substituant à la composante haute fréquence, d'où le comportement observé.

Cette dernière remarque nous mène naturellement à étudier le comportement du système en fonction de l'amplitude σ du bruit lorsque l'amplitude B est fixée. Nous étudions ce point dans le paragraphe suivant.

4.3.1.2/ BRUIT BLANC D'AMPLITUDE RMS VARIABLE : CONDITION D'AMÉLIORATION DE LA DÉTECTION DE LA BASSE FRÉQUENCE f_1

Dans ce paragraphe, nous établissons les conditions qui permettent au système de FitzHugh-Nagumo de tirer profit d'un bruit blanc pour améliorer la détection de la fréquence f_1 présente dans le signal excitateur bichromatique (4.8). Pour ce faire, nous proposons d'analyser l'évolution de l'amplitude spectrale Q en fonction de la valeur efficace de bruit σ , lorsque l'amplitude B de la composante haute fréquence est maintenue constante.

La FIGURE 4.6 regroupe les courbes donnant l'évolution de Q en fonction de σ pour différentes amplitudes B , à savoir $B = 0 \text{ V}$, $B = 0.22 \text{ V}$, $B = 0.3 \text{ V}$, $B = 0.33 \text{ V}$, $B = 0.7 \text{ V}$ et $B = 1 \text{ V}$. Notons que le cas où $B = 0 \text{ V}$ correspond au cas monochromatique étudié à la partie 4.2 de ce manuscrit, étude au cours de laquelle nous avons mis en évidence le phénomène de résonance stochastique.

Pour expliquer les différents comportements observés en simulation numérique sur la sous-figure (a) de la FIGURE 4.6 et expérimentalement sur la sous-figure (b) de la FIGURE 4.6, il convient, dans un premier temps, de rappeler la valeur B_{opt} de l'amplitude B de la

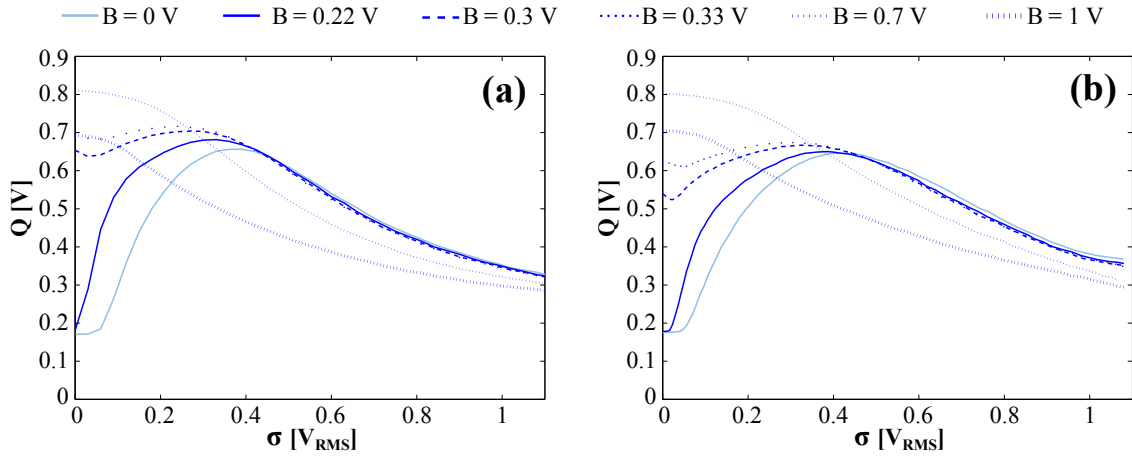


FIGURE 4.6 – Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de la valeur efficace σ du bruit blanc appliqué. Les résultats des simulations numériques (a) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (b) pour différentes amplitudes B : $B = 0.22$ V, $B = 0.3$ V, $B = 0.33$ V, $B = 0.7$ V et $B = 1$ V. Les résultats obtenus précédemment dans le cas monochromatique ($B = 0$ V) sont superposés. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\alpha = 0$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH.

composante haute fréquence qui maximisait le paramètre Q en l'absence de bruit via le phénomène de résonance vibrationnelle. Au chapitre 3, à configuration similaire, nous avons montré que cette valeur optimale B_{opt} permettant d'obtenir la plus haute valeur de Q valait 0.66 V numériquement et 0.7 V expérimentalement. Le réseau de courbes de la FIGURE 4.6 peut ainsi être interprété en fonction de la valeur de B par rapport à cette valeur optimale B_{opt} . Quatre types de réponses se dégagent :

- Lorsque l'amplitude B de la composante haute fréquence du signal bichromatique est nulle ($B = 0$ V), nous retrouvons la forme classique de la résonance stochastique : une quantité optimale de bruit maximise la réponse du système à la basse fréquence f_1 .
- Si l'amplitude B du signal haute fréquence est en dessous de la valeur optimale B_{opt} déterminée en régime déterministe ($B < B_{opt}$), le système est paramétré de façon sous optimale. Par conséquent, l'ajout de bruit pourra permettre une amélioration de la réponse du système. Cet effet est visible sur les courbes résonantes de la FIGURE 4.6 donnant l'évolution de Q en fonction de σ pour $B = 0.22$ V, $B = 0.3$ V et $B = 0.33$ V. Par ailleurs, notons que plus l'amplitude B est distante de B_{opt} , moins la valeur maximale atteinte par Q est importante et plus la valeur efficace de bruit σ nécessaire pour atteindre ce maximum est élevée. En conclusion,

l'amélioration des performances du système par ajout de bruit est d'autant moins prononcée que le système est contraint à la sous-optimalité.

- Lorsque le système est paramétré de façon optimale en l'absence de bruit ($B = B_{opt}$), aucune amélioration n'est désormais à attendre en ajoutant du bruit. En effet, d'après la FIGURE 4.6, pour $B = 0.7$ V, Q devient une fonction monotone décroissante, l'augmentation de σ dégrade progressivement la détection de la fréquence f_1 dans la réponse du système.
- Enfin, quand l'amplitude B excède la valeur optimale B_{opt} obtenue en régime déterministe, le bruit ne permet pas d'améliorer la réponse du système. En effet, pour $B = 1$ V, la FIGURE 4.6 montre que la dynamique de Q en fonction de σ suit une trajectoire monotone décroissante.

Toutes ces observations tendent à montrer que pour que le bruit ait un effet bénéfique, il faut que le système soit paramétré de telle sorte qu'il soit en condition de sous-optimalité en régime déterministe.

4.3.1.3/ BRUIT COLORÉ DE PARAMÈTRES VARIABLES : CONDITION D'AMÉLIORATION DE LA DÉTECTION DE LA BASSE FRÉQUENCE f_1

Dans ce paragraphe, afin de considérer l'influence d'un bruit coloré sur la résonance vibrationnelle, l'excitation $E(t)$ définie par la relation (4.8) est considérée en figeant désormais $\alpha = 1$. Conformément à nos constatations sur les effets d'un bruit blanc sur ce phénomène, nous allons successivement prendre deux amplitudes B de la composante haute fréquence. La première valeur, $B = 0.1$ V est inférieure à B_{opt} et place donc le système en condition de sous-optimalité en l'absence de bruit. La seconde valeur sera quant à elle choisie supérieure à B_{opt} et sera fixée à 1 V. Le bruit coloré étant caractérisé par son amplitude σ et son temps de corrélation τ , nous étudierons l'évolution de l'amplitude spectrale Q en fonction de σ pour différentes valeurs de τ . Les sous-figures (a) et (c) de la FIGURE 4.7 montrent les résultats obtenus lors de la réalisation des simulations numériques pour les deux amplitudes B étudiées, tandis que les sous-figures (b) et (d) de la FIGURE 4.7 permettent de comparer ces résultats à ceux provenant des expérimentations réalisées à partir du circuit électronique.

Cette étude fait ressortir que la coloration du bruit ne dénature pas les observations réalisées dans le paragraphe précédent en présence d'un bruit blanc. En effet, nous constatons qu'en fonction des variations de la valeur efficace du bruit σ et du placement de l'amplitude B par rapport à l'amplitude critique B_{opt} , le comportement de la réponse du système à la fréquence f_1 reste identique, à savoir :

- pour une valeur de l'amplitude B inférieure à B_{opt} , les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 4.7 révèlent qu'indépendamment du temps de corrélation, il est possible d'atteindre un maximum de l'amplitude spectrale Q pour une valeur de σ différente de zéro, maximum après lequel l'augmentation de l'amplitude du bruit σ ne fait plus que dégrader la réponse du système à la fréquence f_1 . En ce qui concerne la coloration du bruit à proprement parler, les constats sont identiques à ceux formulés lors de l'étude de la résonance stochastique en présence d'un bruit coloré. Le bruit blanc permet d'atteindre les valeurs les plus élevées de Q . En effet, plus le temps de corrélation est élevé, moins la valeur maximale atteinte par Q est importante. Enfin, il est une nouvelle fois confirmé que les propriétés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck impliquent que l'amplitude de bruit nécessaire à l'optimisation de l'amplitude Q est d'autant plus importante que le temps de corrélation est grand ;
- pour une valeur de l'amplitude B supérieure à B_{opt} , les courbes monotones décroissantes observées sur les sous-figures (c) et (d) de la FIGURE 4.7 indiquent, quant à elles, que, quel que soit le temps de corrélation considéré, la contribution du bruit ne permettra pas d'améliorer la réponse du système à la fréquence f_1 . En revanche, nous constatons que pour une amplitude de bruit donnée, plus le temps de corrélation est élevé, meilleur est le niveau atteint par l'amplitude Q .

Dans cette étude, en considérant un signal bichromatique, nous avons montré que la résonance vibrationnelle continue d'exister dans un environnement bruité. Pour une amplitude RMS de bruit constante, cela s'est notamment traduit par l'apparition d'une résonance de la réponse du système à la fréquence f_1 pour une amplitude B particulière. Les signaux bichromatiques sont également à l'origine d'un autre type de résonance, qui se manifeste à une fréquence absente de l'excitation lorsque les fréquences misent en jeu permettent une interférence constructive. Ce phénomène, couramment nommé

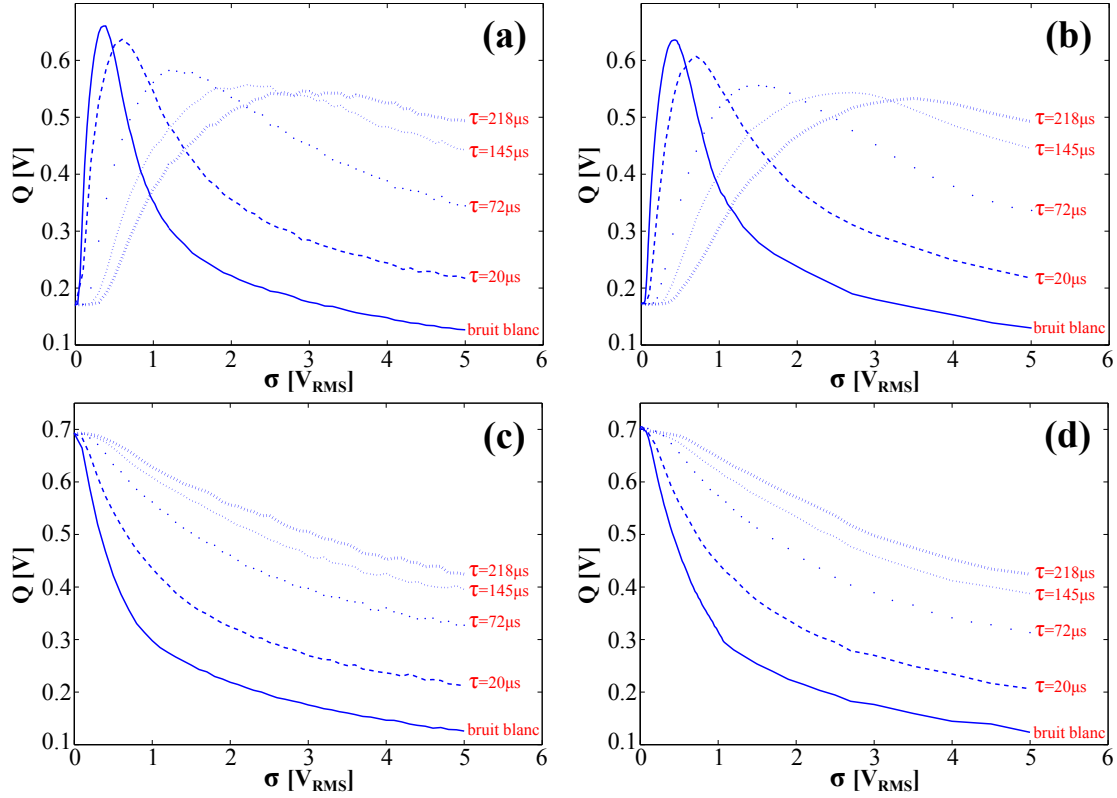


FIGURE 4.7 – Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude σ du bruit appliqué, en considérant successivement $\tau = 0 \mu\text{s}$ (bruit blanc), $\tau = 20 \mu\text{s}$, $\tau = 72 \mu\text{s}$, $\tau = 145 \mu\text{s}$ et $\tau = 218 \mu\text{s}$. Les résultats des simulations numériques (a) et (c) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (b) et (d) pour deux amplitudes B : (a) et (b) $B = 0.1 \text{ V}$, (c) et (d) $B = 1 \text{ V}$. Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = 0.8 \text{ V}$, $f_1 = 502 \text{ Hz}$, $f_2 = 6.1 \text{ kHz}$, $\alpha = 1$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 9.16 \text{ mH}$.

dans la littérature résonance stochastique fantôme [157], fait l'objet de l'étude présentée ci-après.

4.3.2/ ANALYSE À UNE FRÉQUENCE ABSENTE DE L'EXCITATION : RÉSONANCE STOCHASTIQUE FANTÔME

4.3.2.1/ INTRODUCTION DU PHÉNOMÈNE DE RÉSONANCE STOCHASTIQUE FANTÔME

En 2002, Chialvo D.R. *et al.* [157] considèrent l'interaction dans les systèmes non linéaires du bruit et de signaux périodiques composés de plusieurs composantes harmoniques. Ils mettent alors en évidence le phénomène de résonance fantôme. Ce phénomène, désormais mieux connu dans la littérature sous le nom de *ghost stochastic resonance* (résonance stochastique fantôme), a fait l'objet de nombreuses recherches dans de vastes domaines allant de la biologie à la géophysique.

Pour une valeur optimale de bruit, la résonance stochastique fantôme montre l'émergence, dans la réponse du système, d'une fréquence dite « fantôme » du fait que celle-ci est totalement absente des excitations appliquées en entrée. La mise en œuvre de la résonance stochastique fantôme repose sur la présence de deux ingrédients indispensables, à savoir : une interférence linéaire entre les excitations présentes à l'entrée du système, d'une part, et une détection non linéaire des interférences constructives nées des différentes fréquences introduites en entrée d'autre part. Cette détection pourra, par exemple, être réalisée au moyen d'un seuil franchi pour une quantité suffisante de bruit.

La résonance stochastique fantôme a été introduite afin d'expliquer comment les neurones du système sensoriel perçoivent la périodicité de sons complexes [44, 157, 176]. En effet, à partir d'un modèle de neurone simpliste (système seuillé) excité par une somme de signaux sinusoïdaux et du bruit, Chialvo D.R. a pu mettre en avant la correspondance entre la dynamique de la résonance stochastique fantôme et les expériences de Shouten [177, 178]. Celles-ci visent à montrer que la tonalité perçue par les auditeurs est liée à la différence des tons mis en jeu et non pas aux tons eux-mêmes. Ces expériences ont plus récemment motivé l'étude de la perception des sons au niveau de l'oreille interne à partir de la modélisation de la cochlée. À l'aide de cette modélisation, des travaux ont montré la mise en œuvre de la résonance stochastique fantôme dans le système auditif humain [179, 180], et ont ainsi ouvert la voie à de possibles applications bio-inspirées. Des phénomènes non linéaires comparables à la résonance stochastique fantôme ont par ailleurs été mis à jour en procédant à l'étude du système visuel, ou plus récemment encore, en considérant le principe de contraction des muscles [181, 182]. Quelques années après les travaux publiés par Chialvo D.R., Braun H. *et al.* ont introduit la résonance stochastique fantôme dans le domaine de la géophysique [183, 184]. Ils ont alors mis en correspondance la dynamique du phénomène et les événements de Dansgaard-Oeschger. Ces événements périodiques (période de 1470 ans) correspondent aux changements climatiques observés lors de la seconde moitié de la dernière ère glaciaire. La conjecture des auteurs est que ces changements climatiques peuvent être liés à d'autres événements dont les périodicités sont différentes, à savoir : 87 et 210 ans. Ces périodes, sous multiples *dix-sept* et *sept* de 1470 ans sont respectivement liées à des périodes de

cycles solaires de Gleissberg (87 ans) et de Suess ou De Vries (210 ans).

D'autres études portant sur la résonance stochastique fantôme ont par ailleurs vu le jour en électronique [54, 71, 185], en optique [53, 186, 187] et en neurosciences [50, 188–191]. Celles-ci ont permis de mieux comprendre son fonctionnement et d'expliquer des phénomènes naturels tels que ceux cités précédemment. Enfin, précisons que récemment, Rajamani *et al.* ont montré une variante de la résonance stochastique fantôme à partir d'un oscillateur de Duffing, en remplaçant le bruit nécessaire à l'apparition du phénomène par un signal déterministe de haute fréquence [192].

Les différentes études menées sur la résonance stochastique fantôme ont permis de mieux connaître les spécificités qui lui sont propres et les paramètres nécessaires à son observation. Le nombre de composantes sinusoïdales constituant l'excitation, le choix des valeurs des fréquences d'excitation, multiples ou non l'une de l'autre, ou encore l'absence de bruit lorsque l'excitation considérée est *suprathreshold* (au dessus du seuil d'activation) sont autant de cas de figure ayant attiré l'attention de la communauté scientifique.

Dans cette partie, nous montrerons et nous quantifierons l'effet de résonance stochastique fantôme dans le circuit électronique de FitzHugh-Nagumo. Bien que, pour quantifier ce phénomène, la solution la plus souvent retenue dans la littérature consiste à analyser l'histogramme donnant la répartition de l'intervalle des temps séparant deux potentiels d'action consécutifs, pour notre part, nous ne nous bornerons pas uniquement à cette méthode. En effet, nous proposerons également de mesurer l'amplitude spectrale à la fréquence fantôme dans la réponse du système. Par ailleurs, l'influence d'un bruit coloré sur l'apparition de ce phénomène sera également considérée. L'originalité de notre démarche se situe donc tant dans la mise en œuvre expérimentale du phénomène et de son estimation dans le domaine fréquentiel que dans la prise en compte de la coloration du bruit.

4.3.2.2/ CHOIX DES FRÉQUENCES DE L'EXCITATION ET PRÉDICTION THÉORIQUE DE LA FRÉQUENCE FANTÔME

Dans ce paragraphe, nous rappelons l'expression théorique établie par Chialvo D.R. *et al.* [157]. Celle-ci permet de prédire la valeur f_r de la fréquence fantôme attendue lorsqu'un système non linéaire est soumis à une excitation bichromatique de fréquences f_1 et f_2 perturbée par une fluctuation aléatoire. Nous considérons l'excitation bichromatique bruitée définie par la relation (4.8), mais dans laquelle les fréquences f_1 et f_2 seront très proches et choisies en fonction d'une fréquence f_0 et d'un décalage en fréquence Δf qui seront fixés, ainsi :

$$\begin{aligned} f_1 &= kf_0 + \Delta f \\ f_2 &= (k+1)f_0 + \Delta f, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où k est un entier strictement supérieur à 1. Le cas où le décalage en fréquence Δf sera nul constituera le cas harmonique, tandis que le cas où ce décalage en fréquence sera différent de zéro correspondra au cas inharmonique.

Afin d'établir la valeur de la fréquence fantôme f_r , Chialvo D.R. *et al.* ont considéré la partie déterministe de l'excitation bichromatique sous la forme du résultat de la modulation d'une onde porteuse par un signal d'information sinusoïdal. Les auteurs partent du postula simple que le bruit favorisera le plus vraisemblablement une réponse du système non linéaire aux instants correspondants aux deux maxima locaux les plus significatifs du signal modulé : la fréquence fantôme est alors égale à l'inverse du temps entre ces deux maxima locaux les plus significatifs.

Dans le cas où le décalage fréquentiel Δf appartient à l'intervalle $[0; f_0]$, cette méthode permet d'écrire la fréquence fantôme sous la forme [157] :

$$f_r = f_0 + \frac{\Delta f}{k + \frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Il est à noter que, dans le cas harmonique ($\Delta f = 0$), la fréquence fantôme f_r correspond à la fréquence f_0 , c'est-à-dire, d'après la relation (4.9), à la différence des deux fréquences d'excitation $f_2 - f_1$.

Dans le cas inharmonique ($\Delta f \neq 0$), la fréquence fantôme ne correspond plus à la

différence $f_2 - f_1$, mais à la valeur donnée par la relation (4.10). Dans le cas où le décalage fréquentiel Δf n'est plus compris dans l'intervalle $[0; f_0]$, il suffit de réécrire les fréquences f_1 et f_2 sous la forme :

$$\begin{aligned} f_1 &= kf_0 + \Delta f = (k+n)f_0 + \Delta f' \\ f_2 &= (k+1)f_0 + \Delta f = (k+1+n)f_0 + \Delta f', \end{aligned} \quad (4.11)$$

où n est le plus proche entier du rapport $\Delta f/f_0$ et où $\Delta f'$ appartient à l'intervalle $[0; f_0]$, puisque $\Delta f = n f_0 + \Delta f'$. On obtient alors l'expression générique d'estimation de la fréquence fantôme :

$$f_r = f_0 + \frac{\Delta f - n f_0}{k + n + 0.5}, \quad \text{où } n \text{ est le plus proche entier du rapport } \Delta f/f_0. \quad (4.12)$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous proposons de vérifier expérimentalement et numériquement que, dans le modèle de FitzHugh-Nagumo, le bruit, qu'il soit blanc ou coloré, permet l'apparition d'une fréquence fantôme dans les cas d'une excitation harmonique ($\Delta f = 0$) ou d'une excitation inharmonique ($\Delta f \neq 0$). De plus, nous vérifierons que cette fréquence de résonance est correctement prédite par la relation générique (4.12) établie par Chialvo D.R. *et al.* [157].

4.3.2.3/ RÉSONANCE STOCHASTIQUE FANTÔME DANS LE MODÈLE DE FITZHUGH-NAGUMO : CAS HARMONIQUE

Dans le cas harmonique, le décalage en fréquence Δf est nul, et les fréquences f_1 et f_2 de l'excitation bichromatique se réduisent alors à :

$$f_1 = k f_0 \quad \text{et} \quad f_2 = (k+1) f_0, \quad (4.13)$$

la fréquence fantôme étant $f_r = f_0$. Nous avons choisi de traiter le cas $k = 2$ et $f_0 = 300$ Hz, ce qui conduit aux fréquences :

$$f_1 = 2 f_0 = 600 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_2 = 3 f_0 = 900 \text{ Hz}. \quad (4.14)$$

Le système est toujours excité avec le signal $E(t)$ défini par la relation (4.8), c'est-à-dire avec une composante continue E_0 qui impose le régime de fonctionnement, un signal bichromatique et un bruit d'amplitude σ . Ce bruit pourra être blanc pour $\alpha = 0$,

ou coloré par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de temps de corrélation τ , pour $\alpha = 1$. Comme précédemment, l'excitation $E(t)$ doit être subliminale en l'absence de toute autre excitation. Par conséquent, le système est paramétré en régime excitable, ce qui est réalisé en imposant $E_0 = -1$ V pour un paramètre γ du modèle de FitzHugh-Nagumo fixé à $\gamma = 0.24$. De plus, les amplitudes A et B des composantes sinusoïdales constituant le signal bichromatique sont choisies égales et telles que, en l'absence de bruit, l'excitation $E(t)$ ne permette pas le déclenchement de potentiels d'action en sortie du système. Nous fixons ainsi $A = B = 0.3$ V pour garantir que l'excitation $E(t)$ soit subliminale en l'absence de bruit.

Notre système paramétré dans ces conditions, nous étudions en premier lieu le comportement de la variable rapide V dans le domaine fréquentiel, en fonction de l'amplitude σ d'un bruit qui pourra être blanc ou coloré. Nous notons Q_0 , Q_1 et Q_2 les niveaux relevés dans le spectre unilatéral d'amplitude, respectivement aux fréquences f_0 , f_1 et f_2 . Sur la FIGURE 4.8, nous présentons les évolutions de ces trois grandeurs en simulation et en manipulation en fonction de l'amplitude σ d'un bruit blanc et de quatre bruits colorés de temps de corrélation différents. Premièrement, il apparaît aussi bien numériquement qu'expérimentalement, et quel que soit le temps de corrélation considéré, que des résonances aux fréquences f_1 et f_2 de l'excitation bichromatique se révèlent sur les sous-figures (a), (b), (c) et (d) de la FIGURE 4.8. De façon plus surprenante, comme nous pouvons le voir sur les sous-figures (e) et (f) de la FIGURE 4.8, une résonance plus étroite et moins prononcée que les deux premières se manifeste également à la fréquence f_0 , pourtant absente du signal exciteur. Ce comportement résonant du spectre à cette fréquence reflète alors l'existence d'une quantité optimale de bruit permettant une meilleure révélation de la fréquence fantôme f_0 . Par ailleurs, si l'on compare les différentes courbes de résonance présentées sur la FIGURE 4.8, nous concluons que le bruit blanc permet de révéler les plus fortes résonances de Q_0 , Q_1 et Q_2 . À nouveau, nous remarquons que l'amplitude de bruit nécessaire pour optimiser la réponse du système est d'autant plus grande que le temps de corrélation du bruit coloré est important.

Jusqu'à présent, nous avons utilisé un critère spectral pour montrer l'existence de la fréquence f_0 . Cependant, la plupart des travaux consacrés à la résonance stochastique

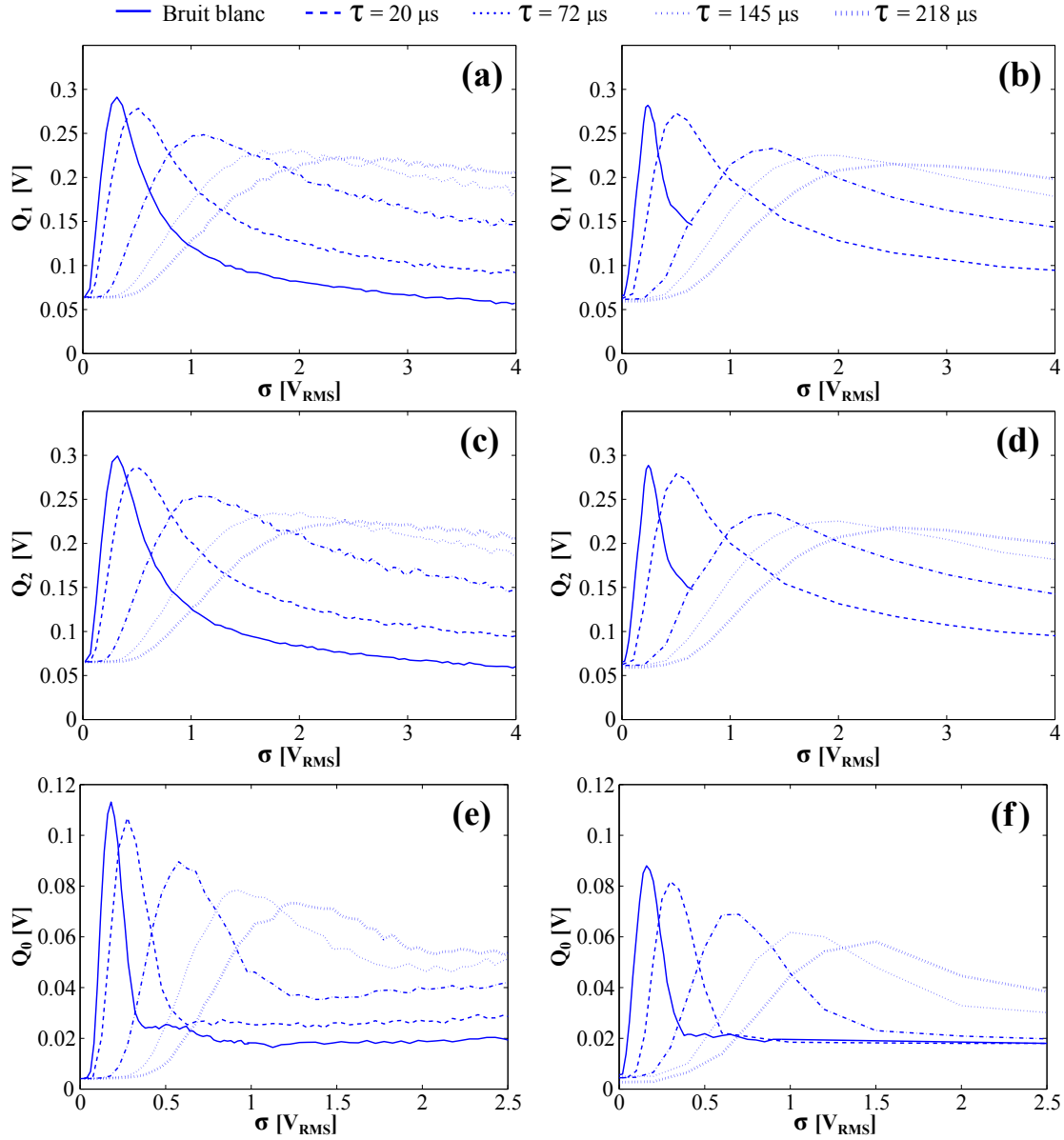


FIGURE 4.8 — Évolution des amplitudes Q_1 , Q_2 et Q_0 du spectre de la variable rapide V respectivement relevées aux fréquences f_1 , f_2 et f_0 en simulations numériques (gauche), et mesurées expérimentalement (droite), en fonction de l'amplitude σ du bruit, pour différents temps de corrélation : $\tau = 0 \mu s$ (bruit blanc), $\tau = 20 \mu s$, $\tau = 72 \mu s$, $\tau = 145 \mu s$ et $\tau = 218 \mu s$. (a) et (b) : amplitude Q_1 du spectre à la fréquence f_1 . (c) et (d) : amplitude Q_2 du spectre à la fréquence f_2 . (e) et (f) : amplitude Q_0 du spectre à la fréquence fantôme f_0 . Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = B = 0.3$ V, $f_1 = 2f_0 = 600$ Hz, $f_2 = 3f_0 = 900$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

fantôme ont plutôt recours à un critère basé sur l'analyse statistique des séries temporelles de la sortie du système non linéaire étudié. Dans le système de FitzHugh-Nagumo, cette méthode plus traditionnelle consiste alors à considérer l'évolution temporelle de la variable rapide V et à analyser la distribution statistique de l'inverse des intervalles de temps séparant deux potentiels d'action successifs. Pour obtenir les instants de pro-

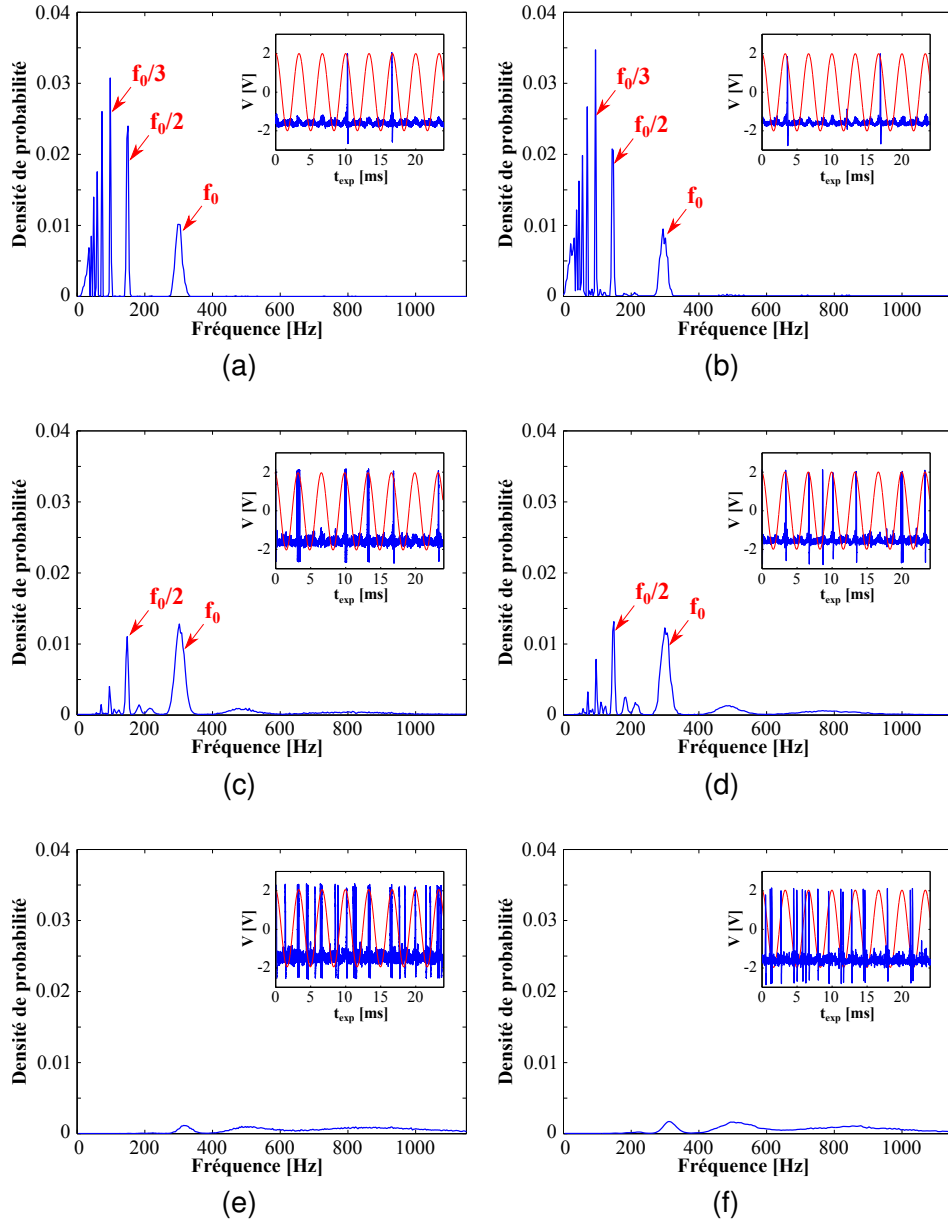


FIGURE 4.9 – Différentes densités de probabilité montrant comment se répartit la fréquence de production des potentiels d'action. Les résultats issus des simulations numériques sont présentés à gauche et comparés à droite aux relevés expérimentaux pour les valeurs efficaces de bruit suivantes : (a) et (b) : $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$. (c) et (d) : $\sigma = 0.15 \text{ V}_{\text{RMS}}$. (e) et (f) : $\sigma = 0.22 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Pour chaque loi de probabilité, nous avons inséré le chronogramme correspondant de la variable V , tout en superposant sur celui-ci un sinus de fréquence f_0 . Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = B = 0.3 \text{ V}$, $f_1 = 2f_0 = 600 \text{ Hz}$, $f_2 = 3f_0 = 900 \text{ Hz}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10.5 \text{ mH}$.

duction des potentiels d'action, nous définissons qu'un potentiel d'action est produit à chaque fois que la variable rapide $V(t)$ dépasse un seuil V_{th} que nous fixons à 0 V . Comme nous avons établi que le bruit blanc permettait d'obtenir une meilleure détection de la fréquence fantôme, conservons dans un premier temps cette source de bruit

$\eta_w(t)$. L'inverse de l'intervalle de temps entre deux potentiels d'action consécutifs constitue alors une variable aléatoire qui peut être interprétée comme une fréquence à laquelle sont produits les potentiels d'action. La loi de probabilité de cette variable aléatoire est présentée à la FIGURE 4.9 pour trois différentes valeurs efficaces du bruit blanc. Les sous-figures à gauche sont issues de simulations numériques, tandis que les résultats expérimentaux correspondants sont présentés à droite. Sur chacune des sous-figures, nous avons inséré le chronogramme de la variable rapide V ainsi qu'une onde sinusoïdale de fréquence f_0 . Ceci nous permettra de mieux visualiser la synchronisation de la variable rapide $V(t)$ avec la fréquence fantôme f_0 .

Pour la plus faible valeur efficace σ de bruit blanc considérée, nous remarquons sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 4.9 que la génération des potentiels d'action n'est pas principalement synchronisée à la fréquence fantôme f_0 . En effet, bien que les distributions obtenues à partir de simulations numériques et expérimentalement soient non nulles au voisinage de la fréquence f_0 , d'importantes raies localisées aux fréquences $f_0/2$, $f_0/3$ et autres sous-multiples sont visibles. En augmentant la valeur efficace du bruit, nous constatons sur les sous-figures (c) et (d) de la FIGURE 4.9 que les distributions sont plus denses que précédemment à proximité de la fréquence fantôme f_0 , et nettement moins aux différentes fréquences sous-multiples de f_0 . Cela se traduit au niveau des chronogrammes de la variable rapide V par la génération de potentiels d'action toutes les une ou deux périodes de l'onde sinusoïdale de fréquence f_0 . Enfin, pour la plus forte valeur efficace de bruit considérée, les sous-figures (e) et (f) de la FIGURE 4.9 montrent que la dynamique de V est principalement régie par le bruit. Cela implique que les distributions sont étalées sur une gamme de fréquences plus importante, et non plus concentrées à proximité de la fréquence fantôme f_0 ou de l'une de ses sous-multiples. Il existe donc une valeur efficace de bruit qui maximise la synchronisation de la production de potentiels d'action au rythme de la fréquence fantôme, révélant ainsi le phénomène de résonance stochastique fantôme.

Nous pouvons quantifier cet effet en définissant trois grandeurs P_0 , P_1 et P_2 qui correspondent aux probabilités respectives d'observer que des potentiels d'action sont produits à des fréquences de l'ordre de $\pm 5\%$ de la fréquence fantôme, soit $f_0 \pm 5\%$; $\pm 5\%$ de la

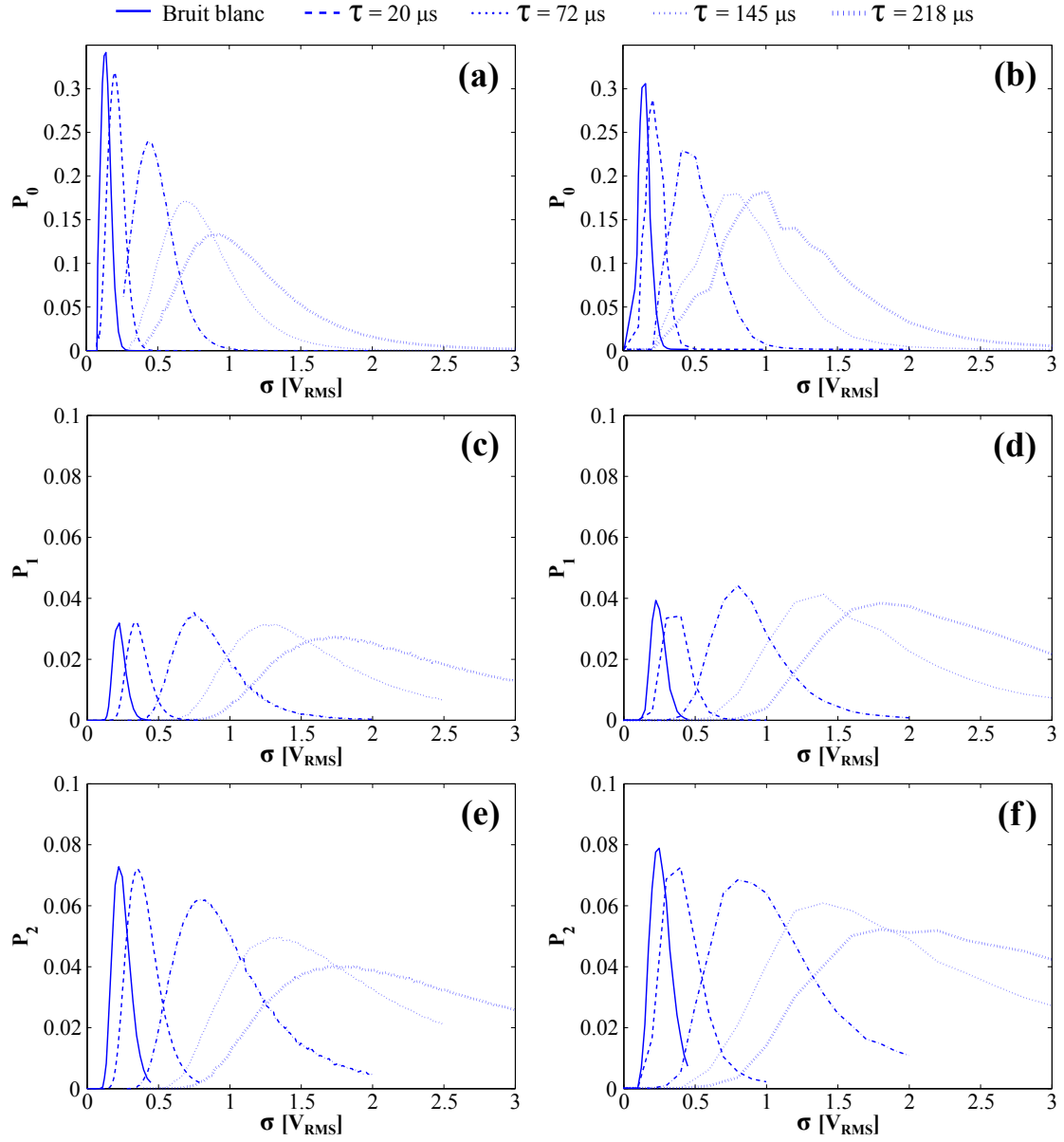


FIGURE 4.10 – Évolution, en fonction de l'amplitude σ du bruit, des probabilités P_0 , P_1 et P_2 de déclencher des potentiels d'action à des fréquences respectivement de l'ordre de : (a) et (b) : $f_0 \pm 5\%$; (c) et (d) : $f_1 \pm 5\%$; (e) et (f) : $f_2 \pm 5\%$ en simulations numériques (gauche), et mesurées expérimentalement (droite) pour différents temps de corrélation $\tau = 0 \mu\text{s}$ (bruit blanc), $\tau = 20 \mu\text{s}$, $\tau = 72 \mu\text{s}$, $\tau = 145 \mu\text{s}$ et $\tau = 218 \mu\text{s}$. Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = B = 0.3 \text{ V}$, $f_1 = 2f_0 = 600 \text{ Hz}$, $f_2 = 3f_0 = 900 \text{ Hz}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10.5 \text{ mH}$.

fréquence de la composante basse fréquence, soit $f_1 \pm 5\%$; et $\pm 5\%$ de la fréquence de la composante haute fréquence, soit $f_2 \pm 5\%$. La FIGURE 4.10 présente les résultats issus de simulations numériques (à gauche) et de relevés expérimentaux (à droite) en présence d'un bruit blanc, puis d'un bruit coloré pour lequel le temps de corrélation a successivement pris quatre valeurs. Tout comme lors de l'étude du comportement du spectre de la

variable V , les probabilités P_0 , P_1 et P_2 montrent une évolution non monotone en fonction de l'amplitude de bruit : il existe une quantité de bruit optimale qui permet une meilleure détection des fréquences f_0 , f_1 et f_2 , et ce, quel que soit le temps de corrélation considéré. Notons également que lorsque la probabilité P_0 est maximale, les niveaux atteints par les probabilités P_1 et P_2 sont très faibles, ce qui signifie que la probabilité que le système réponde à une fréquence présente dans l'excitation est quasiment nulle, d'où l'effet de résonance stochastique fantôme. Enfin, l'impact de la coloration du bruit sur les probabilités P_0 , P_1 et P_2 est identique à celui observé lors de l'étude des spectres de la variable V . En effet, même si des comportements résonants peuvent être observés aux trois fréquences d'intérêt, nous constatons que leurs détections sont supérieures dans le cas d'un bruit blanc et que leurs maxima respectifs sont atteints pour des valeurs de σ de plus en plus importantes à mesure que τ augmente.

4.3.2.4/ RÉSONANCE STOCHASTIQUE FANTÔME DANS LE MODÈLE DE FITZHUGH-NAGUMO : CAS INHARMONIQUE

Dans le cas inharmoine, le décalage fréquentiel Δf est désormais différent de zéro. Il en résulte que les deux fréquences de l'excitation bichromatique s'écrivent alors :

$$f_1 = kf_0 + \Delta f \quad \text{et} \quad f_2 = (k+1)f_0 + \Delta f \quad \text{en conservant} \quad k = 2 \text{ et } f_0 = 300 \text{ Hz.} \quad (4.15)$$

Pour montrer expérimentalement et numériquement comment évolue la valeur de la fréquence fantôme f_r en fonction du décalage fréquentiel Δf , nous procédons de la même façon que Chialvo D.R. *et al.* [157]. Ainsi, l'amplitude σ du bruit est choisie fixe, de telle sorte qu'elle maximise la probabilité P_0 d'observer la fréquence fantôme dans le cas harmonique ($\Delta f = 0$). D'après l'étude présentée sur la FIGURE 4.10 du paragraphe précédent, nous sommes donc amenés à fixer l'amplitude σ du bruit selon le temps de corrélation τ du bruit considéré. Il faudra donc choisir $\sigma = 0.14 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour le bruit blanc, $\sigma = 0.2 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour un bruit coloré de temps de corrélation $\tau = 20 \text{ } \mu\text{s}$ et $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour un bruit coloré de temps de corrélation $\tau = 145 \text{ } \mu\text{s}$.

Pour chacune de ces trois sources de bruit, nous avons étudié, en fonction du décalage fréquentiel Δf , la façon dont se comporte la probabilité d'observer la génération de potentiels d'action à une fréquence donnée. À cet effet, nous avons adopté une représentation

en niveau de gris de la loi de probabilité dans le plan $[\Delta f, \text{fréquence de génération des potentiels d'action}]$. Cette représentation nous permettra de valider nos résultats numériques et expérimentaux, puisqu'il sera possible de tracer dans ce même plan, l'évolution de la fréquence fantôme prédite par la relation théorique (4.12) établie par Chialvo D.R. et rappelée ci-dessous :

$$f_r = f_0 + \frac{\Delta f - n f_0}{k + n + 0.5}, \quad \text{où } n \text{ est le plus proche entier du rapport } \Delta f / f_0. \quad (4.16)$$

La FIGURE 4.11 présente les diagrammes en niveau de gris des lois de probabilité dans le plan $[\Delta f, \text{fréquence de génération des potentiels d'action}]$. Les diagrammes obtenus par le biais de simulations numériques sont présentés à gauche, alors que ceux calculés suite à l'acquisition de signaux expérimentaux sur le circuit électronique sont présentés à droite. Un bruit blanc d'amplitude $\sigma = 0.14 \text{ V}_{\text{RMS}}$ a été ajouté à l'excitation $E(t)$ pour révéler les résultats présentés sur les sous-figures (a) et (b), tandis que des bruits colorés de temps de corrélation $\tau = 20 \text{ } \mu\text{s}$ et $\tau = 145 \text{ } \mu\text{s}$, et d'amplitudes respectives $\sigma = 0.2 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$, ont été ajoutés à l'excitation $E(t)$ pour parvenir à ceux proposés sur les sous-figures (c) à (f). Comme on peut le voir, les lignes pointillées qui modélisent, pour différentes valeurs de n , les prédictions théoriques des fréquences de résonance estimées à partir de la relation (4.16) correspondent bien à une partie des fréquences présentes dans les lois de probabilité numériques et expérimentales, représentées sur leurs diagrammes respectifs par le niveau de gris le plus clair. Cette correspondance valide notre étude aussi bien pour un bruit blanc que pour un bruit coloré.

Dans le cas d'un bruit blanc, quel que soit le décalage en fréquence Δf , nous remarquons sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 4.11 que les fréquences les plus probables de génération de potentiels d'action sont uniquement localisées aux fréquences f_r , $f_r/2$ et $f_r/3$. Par ailleurs, en présence d'un bruit coloré, il apparaît sur les sous-figures (c)-(f) de la FIGURE 4.11, qu'à mesure que le temps de corrélation augmente, les probabilités suivant les relations théoriques sont représentées par des zones de plus en plus étroites, et des nuances de gris de plus en plus sombres, traduisant ainsi des niveaux de probabilité de plus en plus faibles. D'autre part, il apparaît également que la région des fréquences sous-multiples de la fréquence de résonance devient, quant à elle, de plus en plus dense. En effet, sur les sous-figures (c) et (d), pour $\tau = 20 \text{ } \mu\text{s}$, outre l'aug-

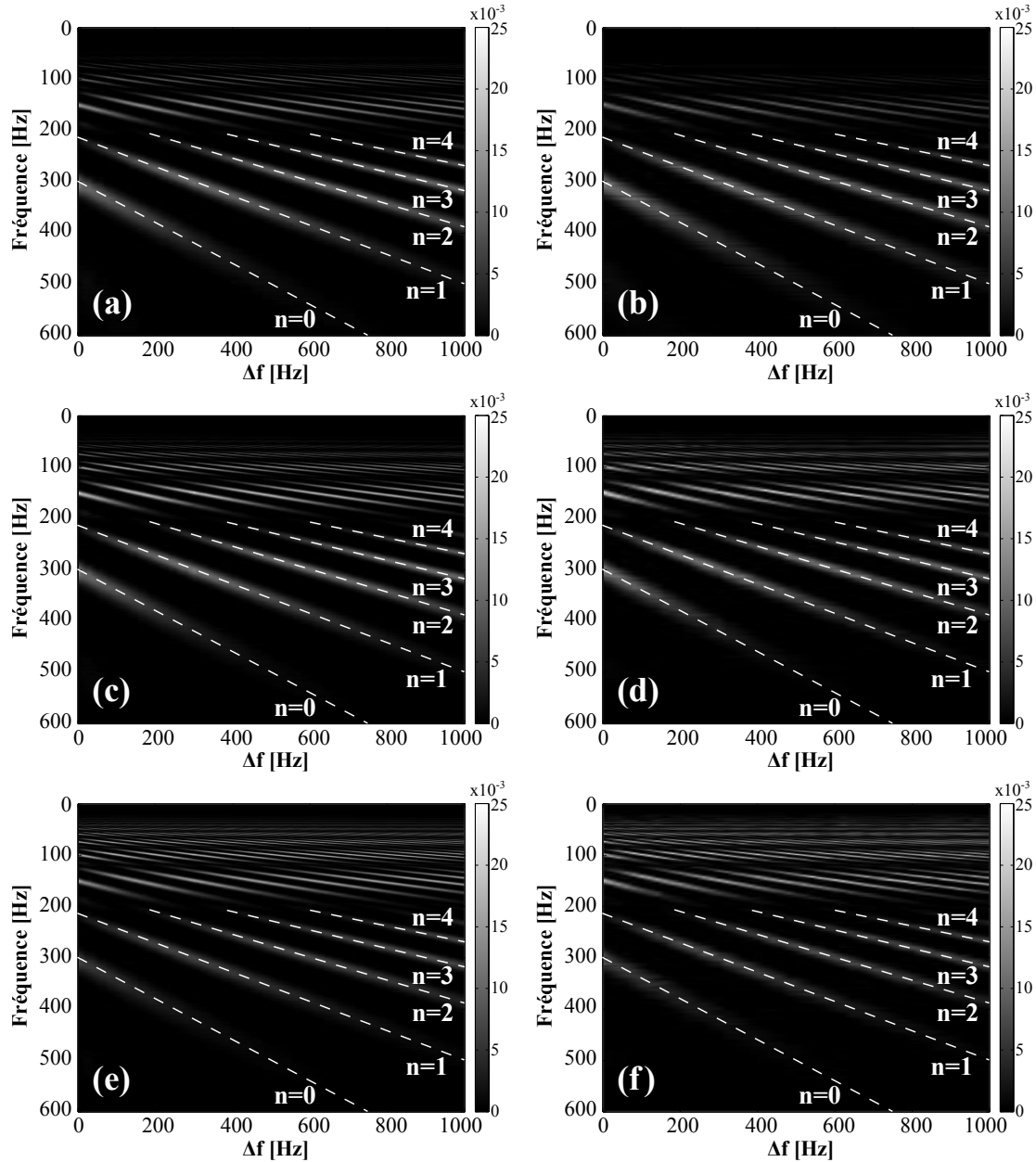


FIGURE 4.11 – Diagramme représentant en niveau de gris la probabilité d'observer la génération de potentiels d'action à une fréquence donnée en fonction du décalage fréquentiel Δf . Les sous-figures (a) et (b) présentent respectivement les résultats de simulation et les résultats expérimentaux en présence d'un bruit blanc. De façon analogue, les résultats obtenus en présence d'un bruit coloré de temps de corrélation $\tau = 20 \mu\text{s}$ ou $\tau = 145 \mu\text{s}$, sont respectivement présentés sur les sous-figures (c)-(f). Les lignes pointillées de chaque diagramme correspondent aux prédictions théoriques de la fréquence fantôme f_r calculées par la relation (4.16). Dans chacun des cas, l'amplitude de bruit est fixée à la valeur permettant la meilleure détection de la fréquence f_0 sur la FIGURE 4.10, soit $\sigma = 0.14 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour le bruit blanc, $\sigma = 0.2 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour le bruit coloré avec $\tau = 20 \mu\text{s}$ et $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour le bruit coloré avec $\tau = 145 \mu\text{s}$. Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = B = 0.3 \text{ V}$, $f_1 = 2f_0 = 600 \text{ Hz}$, $f_2 = 3f_0 = 900 \text{ Hz}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10.5 \text{ mH}$.

mentation de la densité autour des fréquences $f_r/2$ et $f_r/3$, nous remarquons également l'apparition de probabilités non nulles autour des fréquences $f_r/4$ et $f_r/5$. Enfin, sur les

sous-figures (e) et (f), pour $\tau = 145 \mu\text{s}$, nous remarquons que les probabilités autour de la fréquence de résonance f_r sont désormais très faibles, et que celles-ci se concentrent alors principalement aux fréquences d'ordre inférieur ou égale à $f_r/2$.

Au cours des chapitres 3 et 4 de ce manuscrit, nous avons étudié la dynamique d'un oscillateur élémentaire de type FitzHugh-Nagumo en présence de toutes sortes d'excitations déterministes puis stochastiques. Outre les études préliminaires nous ayant permis de caractériser la bifurcation d'Andronov-Hopf traduisant la transition de l'état de repos à l'état d'activation, puis l'analyse de l'encodage d'un stimulus sinusoïdal purement déterministe, nous nous sommes attachés à montrer par le biais de simulations numériques et expérimentalement les diverses possibilités d'améliorer l'un des paramètres de la réponse du système. Pour ce faire, nous avons, par exemple, considéré l'influence d'une seconde composante sinusoïdale dite *haute fréquence* dans le cas déterministe, ou bien les effets de différentes sources de fluctuation en régime stochastique. Dans le prochain chapitre de ce manuscrit, nous proposons d'analyser l'action de telles excitations en ne considérant non plus une cellule élémentaire mais une ligne électrique constituée de 45 cellules couplées résistivement. L'objet de notre étude sera alors de déterminer s'il est possible d'optimiser la propagation de potentiels d'action tout au long d'une chaîne d'oscillateurs, que ce soit avec ou sans bruit.

ÉTUDE DE LA PROPAGATION DE L'INFORMATION DANS LA LIGNE ÉLECTRIQUE

Sommaire

5.1 Propagation assistée par une perturbation haute fréquence déterministe	100
5.1.1 Étude spatio-temporelle du comportement de la ligne	100
5.1.2 Analyse spectrale de la propagation assistée par la composante haute fréquence : propagation vibrationnelle	103
5.2 Propagation assistée par le bruit	108
5.2.1 Bruit temporel	109
5.2.1.1 Paramétrage sous-optimal : propagation assistée par le bruit	109
5.2.1.2 Paramétrage quasi-optimal : propagation dégradée par le bruit	115
5.2.2 Bruit spatio-temporel	116
5.2.2.1 Paramétrage sous-optimal : propagation assistée par le bruit	117
5.2.2.2 Paramétrage quasi-optimal : propagation dégradée par le bruit	121

Récemment, des études portant sur la résonance vibrationnelle ont été réalisées à partir de structures de neurones couplés. À cet effet, des réseaux présentant des topologies plus ou moins complexes ont été utilisés. On peut par exemple citer le *small-world network* [193–195], le *random network* [193], le *modular network* [194], le *feedforward network* [196], ou encore le *scale-free network* [197]. Au cours de ces travaux, l'intérêt des auteurs s'est essentiellement porté sur les effets des paramètres des différentes topologies sur la réponse du système. Ainsi, la taille du réseau [193–195], le nombre de voisins connectés [193, 194], le nombre et la structure des sous-ensembles constituant

un réseau [194], la probabilité de connectivité d'une cellule avec une autre [193–196], ainsi que le type ou la force de couplage [194, 195, 197, 198] sont autant d'éléments qui ont été analysés. Jusqu'à présent, ces études portant sur la résonance vibrationnelle dans des structures de neurones interconnectés sont principalement menées à partir de simulations numériques.

L'objet du présent chapitre est de conduire une étude expérimentale, validée par des simulations numériques, sur les possibles apports de la résonance vibrationnelle dans un système couplé. À l'image des travaux de simulation numérique menés sur le modèle Barkley par Ullner *et al.* [47], nous choisissons d'étudier expérimentalement la propagation d'une information au travers d'une chaîne d'oscillateurs de type FitzHugh-Nagumo couplés et en partie soumis à une excitation bichromatique. En complément de cette étude déterministe, nous proposerons également d'analyser les effets de deux types de bruit sur la propagation de l'information dans cette chaîne d'oscillateurs ; des bruits *temporel* ou *spatio-temporel*, c'est-à-dire des sources respectivement identiques ou indépendantes d'un site à l'autre de la ligne. Notons dès à présent que les effets de la coloration du bruit ne seront pas traités dans ce chapitre.

Au cours du chapitre 2, nous avons établi les équations qui régissent la dynamique des tensions V_n de notre structure expérimentale, nous les rappelons ci-après :

$$\begin{aligned} \frac{dV_n}{dt} &= f(V_n) + D(V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}) - W_n + E_n(t) \\ \frac{dW_n}{dt} &= \varepsilon(V_n - \gamma W_n), \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec $f(V_n) = -V_n(V_n - a)(V_n - b)$.

Pour mémoire, les paramètres normalisés D , γ et ε sont ajustables par l'intermédiaire des valeurs des composants, selon le changement de variables suivant :

$$D = \frac{R_0}{R'} \quad , \quad \gamma = \frac{R}{R_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{R_0^2 C}{L}. \quad (5.2)$$

Les cellules qui composent notre dispositif expérimental sont couplées avec la même valeur de résistance R' , et donc le même couplage D . Notons qu'au cours de notre étude,

nous serons amenés à ponctuellement considérer différentes valeurs de couplage D . Par ailleurs, les paramètres $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$ sont également communs aux différentes cellules qui constituent la ligne électrique. Ceux-ci sont ajustés en utilisant des composants R_0 , R , C et L de mêmes valeurs d'un site à l'autre, soit $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \text{ }\Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10.5 \text{ mH}$. D'autre part, les cellules sont homogènes au niveau de leur non-linéarité. À cet effet, nous avons fixé pour chacune d'entre elles les mêmes racines a et b de la fonction non linéaire $f(V_n)$. Comme lors des chapitres précédents, ces racines sont respectivement réglées au moyen d'alimentations stabilisées à $a = 2 \text{ V}$ et $b = -2.6 \text{ V}$. Enfin, les i_{exc} premières cellules de la ligne ne sont pas excitées de la même façon que les suivantes. La distribution des excitations est la suivante :

$$\begin{cases} E_n(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t) + \beta \eta_w(t), & \text{si } n \leq i_{exc}, \\ E_n(t) = E_0 + B \cos(2\pi f_2 t) + \beta \eta_w(t), & \text{si } n > i_{exc}, \end{cases} \quad (5.3)$$

où β est une variable booléenne permettant l'ajout du bruit $\eta_w(t)$.

Au regard de la relation (5.3), toutes les cellules sont soumises à une tension constante E_0 . Pour les paramètres a , b , γ et ε considérés et en l'absence de toute autre excitation ($A = B = \beta = 0$), cette composante continue E_0 , fixée ici à -1.3 V , placera les cellules en régime excitable dans le cas de cellules isolées ($D = 0$). En revanche, seules les i_{exc} premières cellules seront soumises à la composante sinusoïdale basse fréquence $A \cos(2\pi f_1 t)$, dont la fréquence f_1 et l'amplitude A ne permettront pas le déclenchement de potentiels d'action en l'absence de la composante haute fréquence ou du bruit. Tout au long de notre étude, la composante basse fréquence constituera le signal d'information que nous tenterons de propager au travers des différentes cellules de la ligne électrique. Dans cette intention, nous présenterons dans ce chapitre deux types de perturbation favorisant la propagation, l'une déterministe ($\beta = 0$), l'autre stochastique ($\beta = 1$). En régime déterministe dans un premier temps, par le biais du phénomène de propagation vibrationnelle [47], nous tenterons de propager la composante de fréquence f_1 , en utilisant l'apport d'une seconde composante, de fréquence f_2 fixe et d'amplitude B variable. Dans un second temps, nous ajouterons une composante stochastique aux excitations $E_n(t)$,

et tenterons via le phénomène de propagation assistée par le bruit [64], de propager cette composante de fréquence f_1 .

5.1/ PROPAGATION ASSISTÉE PAR UNE PERTURBATION HAUTE FRÉQUENCE DÉTERMINISTE

Dans cette partie, les cellules de la ligne sont excitées sans bruit, en imposant $\beta = 0$ dans la distribution spatiale des excitations que nous avons définie via la relation (5.3). Le paramétrage de la ligne électrique détaillé en introduction de ce chapitre place l'ensemble des cellules de la ligne en régime excitable et soumet les i_{exc} premières cellules à une excitation $A \cos(2\pi f_1 t)$ subliminale. Nous nous proposons ici d'étudier comment se comporte la ligne en fonction de l'amplitude B de la seconde composante sinusoïdale.

5.1.1/ ÉTUDE SPATIO-TEMPORELLE DU COMPORTEMENT DE LA LIGNE

Dans un premier temps, nous avons analysé les évolutions spatiale et temporelle de la ligne en relevant les tensions $V_n(t)$ aux différents nœuds n de la ligne, en fonction de l'amplitude B de la composante haute fréquence. Expérimentalement, pour prélever la tension $V_n(t)$ en chaque nœud n de la ligne, nous avons eu recours à un module *Natio-*

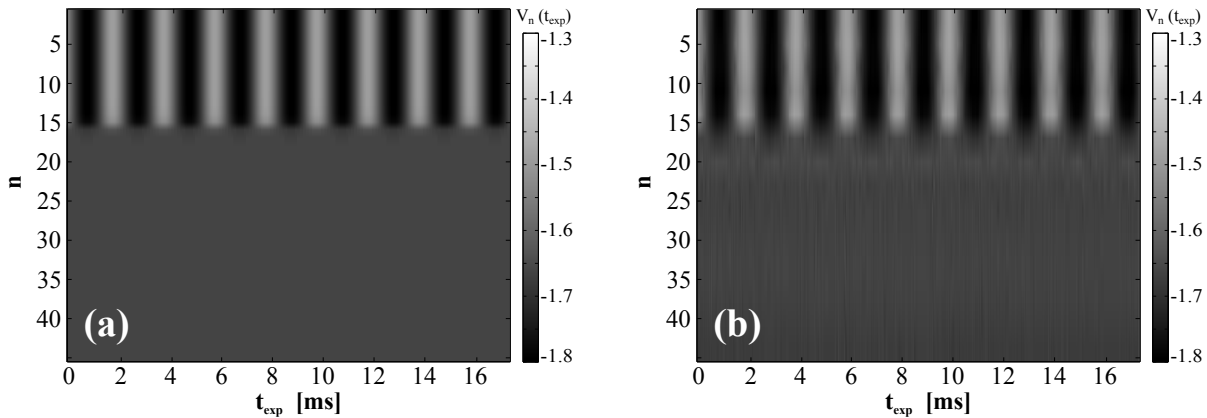


FIGURE 5.1 — Évolution spatio-temporelle de l'état de la ligne, paramétrée en condition de non-propagation de la composante basse fréquence initiée sur les i_{exc} premières cellules. (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0$ V, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

nal Instrument interfacé avec le logiciel *MatLab*. Il est à noter que, comme la fréquence d'échantillonnage du module *National Instrument* diminue lorsque le nombre d'entrées mises en service augmente, nous avons été contraint de relever les tensions $V_n(t)$ toutes les quatre cellules, et non toutes les cellules. L'acquisition de ces tensions V_n durant un intervalle de temps donné nous a permis de reconstruire l'évolution spatio-temporelle de l'état de la ligne. Pour ce faire, nous avons représenté le niveau de la tension V_n en fonction du temps et du numéro de cellule n à l'aide d'une échelle de gris. La FIGURE 5.1 montre les diagrammes spatio-temporels ainsi obtenus en simulation numérique (a) et expérimentalement (b) pour $B = 0$ V, c'est-à-dire sans la composante haute fréquence. En l'absence de celle-ci, aucun potentiel d'action n'est généré sur les i_{exc} premières cellules, ni sur les suivantes qui restent à l'état de repos : la fréquence basse de l'excitation, pourtant perceptible sur les i_{exc} premières cellules, ne se propage pas.

Étudions alors qualitativement l'influence de l'amplitude B du signal haute fréquence sur la propagation de la composante basse fréquence dans la ligne. Sur la FIGURE 5.2, pour quatre valeurs de l'amplitude B , les évolutions spatio-temporelles de la ligne obtenues à partir de simulations numériques et expérimentalement sont respectivement présentées à gauche et à droite. Pour ces représentations spatio-temporelles, nous utilisons désormais une échelle de gris plus large que celle utilisée sur la FIGURE 5.1. À présent le noir et le blanc correspondent respectivement à des tensions de -3 V et $+2.5$ V. Ainsi, l'intervalle de niveau de gris $[-3$ V ; $+2.5$ V] sera parfaitement adapté pour la représentation des potentiels d'action qui seront déclenchés dans le système. Les allures observées numériquement et expérimentalement sont similaires. En premier lieu, il apparaît sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 5.2, que pour une faible valeur de l'amplitude B ($B = 0.2$ V), aucun potentiel d'action n'est déclenché sur les i_{exc} premières cellules. On retrouve le comportement que nous avons observé à la FIGURE 5.1, lorsque la composante haute fréquence était absente : la composante basse fréquence ne se propage pas. Pour une amplitude B désormais égale à 0.35 V, les sous-figures (c) et (d) de la FIGURE 5.2 montrent que des couples de potentiels d'action sont générés sur les i_{exc} premières

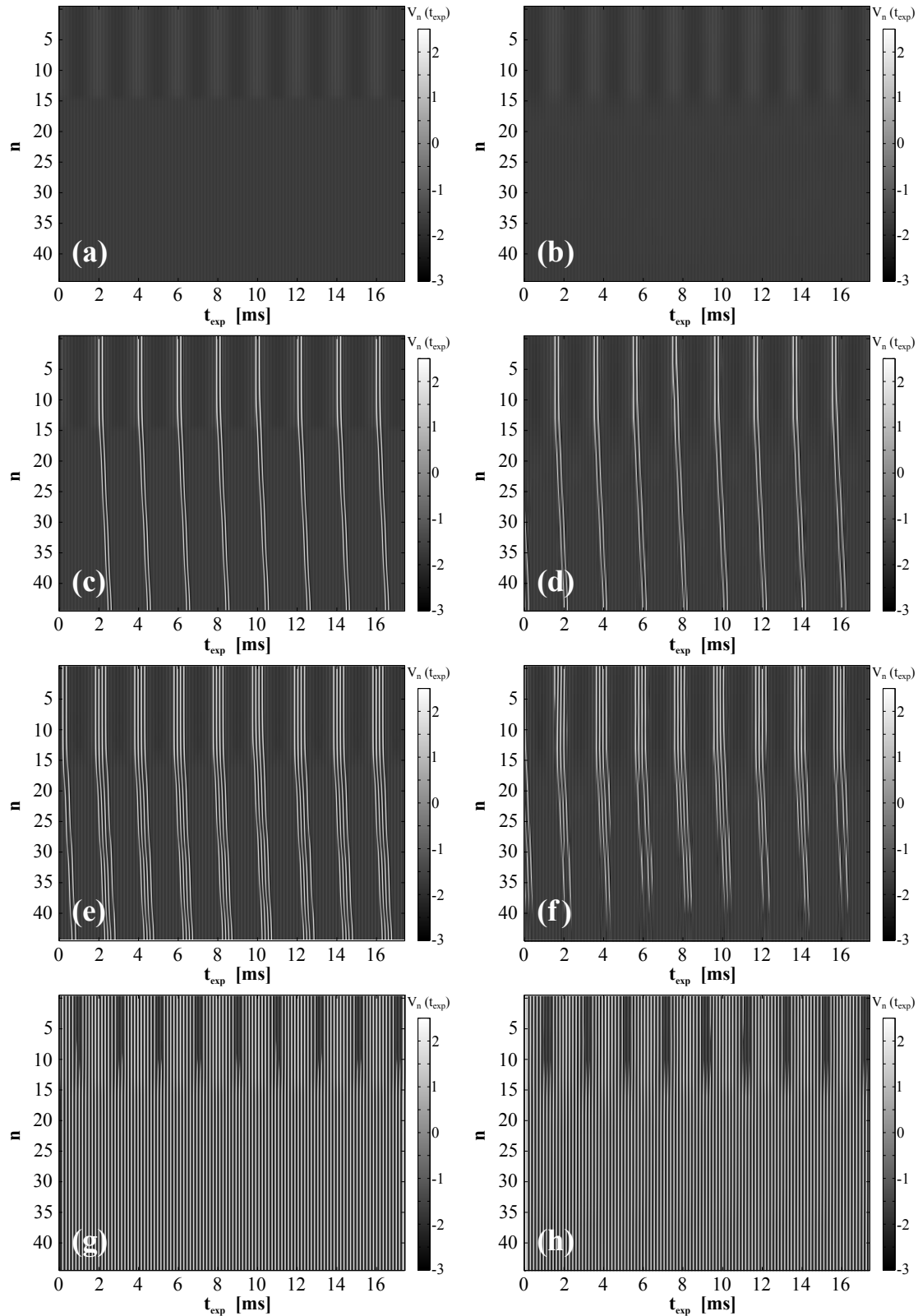


FIGURE 5.2 — Évolutions spatio-temporelles de l'état de la ligne pour différentes amplitudes B de la composante haute fréquence. Les simulations numériques sont présentées à gauche, tandis que les relevés expérimentaux correspondants sont présentés à droite. (a) et (b) : $B = 0.2$ V ; (c) et (d) : $B = 0.35$ V ; (e) et (f) : $B = 0.5$ V ; (g) et (h) : $B = 1.25$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

cellules avec une périodicité de 2 ms, correspondant à la période de la composante basse fréquence $f_1 = 502$ Hz. Nous remarquons que les ondes produites se propagent jusqu'au bout de la ligne à une vitesse constante. Pour une amplitude intermédiaire de valeur $B = 0.5$ V, les diagrammes des sous-figures (e) et (f) de la FIGURE 5.2 montrent que les i_{exc} premières cellules déclenchent des potentiels d'action pendant une demi-période de l'excitation basse fréquence. Cependant, notons que contrairement à la simulation numérique, expérimentalement, l'onde produite sur les i_{exc} premières cellules ne se propage pas jusqu'à la dernière cellule du dispositif. Enfin, pour la valeur de l'amplitude B la plus importante, soit $B = 1.25$ V, la fréquence f_1 disparaît des diagrammes spatio-temporels des sous-figures (g) et (h) de la FIGURE 5.2. La fréquence propre du système se retrouve dans les oscillations des cellules situées au delà de la cellule numéro i_{exc} .

Au vu des comportements spatio-temporels observés, il semble qu'il existe une valeur optimale de l'amplitude B de la composante haute fréquence qui favorisera la propagation de la composante basse fréquence dans le réseau. Le paragraphe qui suit est consacré à la quantification de cet effet de propagation assistée par la perturbation haute fréquence, phénomène encore appelé propagation vibrationnelle.

5.1.2/ ANALYSE SPECTRALE DE LA PROPAGATION ASSISTÉE PAR LA COMPOSANTE HAUTE FRÉQUENCE : PROPAGATION VIBRATIONNELLE

Afin de quantifier la présence de la basse fréquence dans le réseau, il paraît naturel d'analyser le spectre unilatéral d'amplitude de la tension V_n , défini par :

$$Q_n(f) = 2 U(f) | TF[V_n(t_{exp})] |, \quad (5.4)$$

où $U(f)$ est une fonction de Heaviside et où $| TF[V_n(t_{exp})] |$ représente la transformée de Fourier de la tension $V_n(t_{exp})$.

Au cours de notre étude, nous relèverons la valeur $Q_n(f_1)$ du spectre unilatéral d'amplitude à la basse fréquence f_1 et analyserons son évolution en fonction de l'amplitude B de la perturbation haute fréquence.

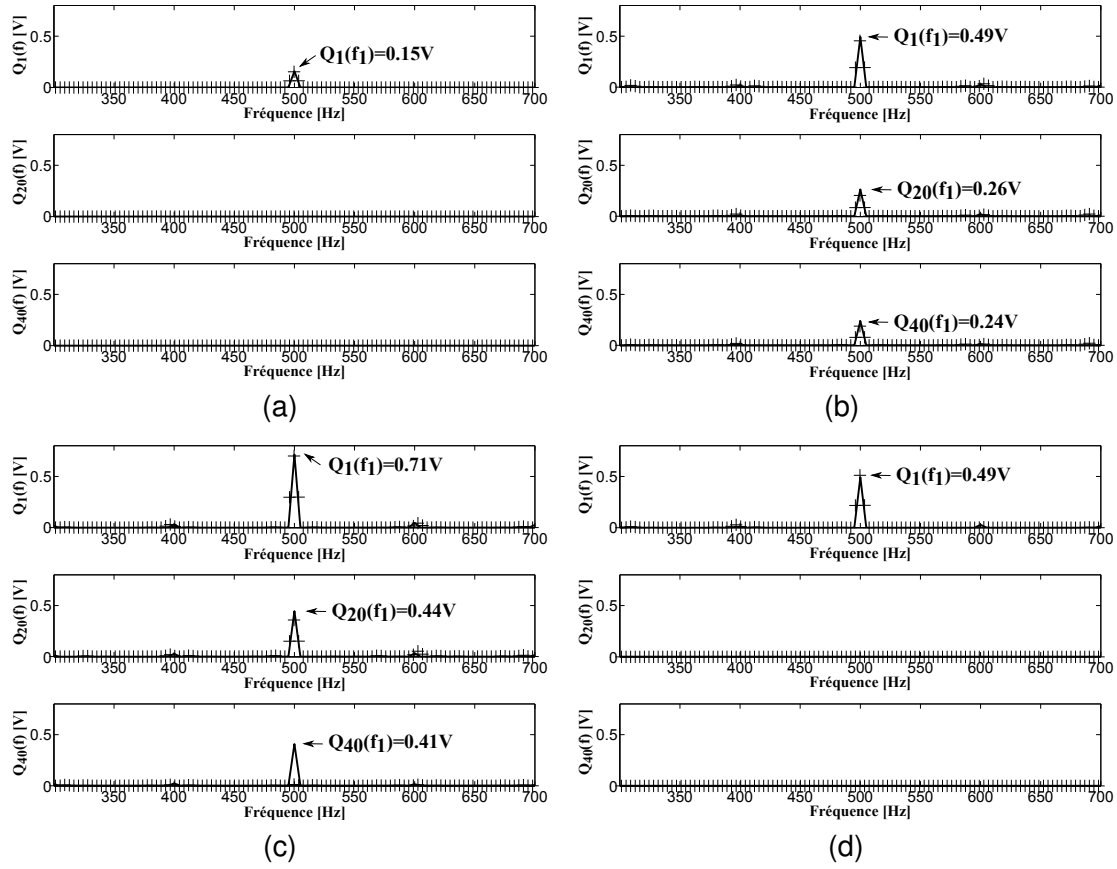


FIGURE 5.3 — Spectres unilatéraux d'amplitude des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ observés en simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentalement (+) pour différentes amplitudes B de la composante haute fréquence. (a) : $B = 0.2$ V ; (b) : $B = 0.35$ V ; (c) : $B = 0.5$ V et (d) : $B = 1.25$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

Sur la FIGURE 5.3, en considérant successivement les différentes amplitudes B utilisées pour produire les diagrammes spatio-temporels exposés sur la FIGURE 5.2, nous présentons les spectres d'amplitude obtenus aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$. Les spectres qui proviennent de simulations numériques sont tracés au moyen de traits pleins, tandis que ceux qui ont été relevés à l'aide de l'oscilloscope lors des manipulations sont représentés avec des croix. Aussi bien numériquement qu'expérimentalement, les comportements révélés par les spectres sont conformes aux allures observées lors de l'analyse des diagrammes spatio-temporels de la FIGURE 5.2. En effet, pour les différentes amplitudes B traitées, les spectres d'amplitude relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ reflètent bien la présence ou l'absence de la fréquence f_1 . Ainsi, les sous-figures (a) et (d) de la FIGURE 5.3 illustrent, respectivement pour $B = 0.2$ V et $B = 1.25$ V, que la fréquence

f_1 n'est perceptible que sur les premières cellules de la ligne lorsque l'amplitude de la composante haute fréquence est trop faible ou trop importante. Pour ces valeurs de l'amplitude B , l'information ne se propage pas au delà de la cellule numéro i_{exc} . En revanche, d'après les sous-figures (b) et (c) de la FIGURE 5.3 obtenues pour les valeurs intermédiaires de l'amplitude de la composante haute fréquence, c'est-à-dire pour $B = 0.35$ V et $B = 0.5$ V, nous remarquons la présence d'une raie à la fréquence f_1 dans le spectre des cellules numéro 20 et 40. Cela traduit que, pour une amplitude B de la composante haute fréquence adéquate, l'information de fréquence f_1 peut se propager jusqu'à des cellules qui ne sont pas soumises à une telle fréquence d'excitation. Conformément à nos constatations précédentes, dans le cas où $B = 0.5$ V, bien que l'information se propage jusqu'au bout de la ligne en simulation numérique, il apparaît sur la sous-figure (c) de la FIGURE 5.3, que celle-ci ne se propage pas jusqu'à la quarantième cellule dans le dispositif expérimental.

Sur la FIGURE 5.4, nous montrons l'évolution de l'amplitude du spectre à la fréquence f_1 pour les différentes cellules du réseau, en fonction de l'amplitude B du signal haute fréquence. Bien que les allures observées numériquement et expérimentalement soient comparables, nous remarquons cependant que nos résultats expérimentaux présentent une résonance plus étroite et moins prononcée qu'en simulation. En effet, à partir des simulations numériques, nous constatons que la composante de fréquence f_1 se propage jusqu'en bout de ligne si l'amplitude B est comprise dans l'intervalle $[0.3 \text{ V} ; 0.55 \text{ V}]$, tandis qu'expérimentalement, cet intervalle se réduit à $[0.3 \text{ V} ; 0.45 \text{ V}]$. Cette différence de largeur de l'intervalle de l'amplitude B favorisant la propagation de l'information explique les disparités constatées lors des analyses des diagrammes spatio-temporels et des spectres obtenus pour la valeur d'amplitude $B = 0.5$ V. Enfin, au vu des résultats présentés sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 5.4, nous pouvons conclure qu'il existe une valeur B_{opt} de l'amplitude de la perturbation déterministe haute fréquence qui optimise la propagation de l'information dans le réseau. En effet, numériquement et expérimentalement, c'est pour $B_{opt} = 0.45$ V que l'information se propage jusqu'au bout de

la ligne, en maximisant la valeur du spectre $Q_n(f_1)$. Par la suite, cette amplitude B_{opt} nous servira de repère pour paramétrer le système en régime stochastique.

Nous avons également étudié la façon dont le couplage D affecte ce phénomène de propagation assistée par une perturbation haute fréquence. Sur la FIGURE 5.5, pour deux nouvelles valeurs de couplage, à savoir $D = 0.604$ et $D = 2.83$, les simulations numériques et les expérimentations associées illustrent les cas où un couplage faible ou fort, empêche ou favorise la propagation de l'information basse fréquence dans la ligne électrique. En effet, dans le cas d'un couplage faible entre les cellules, nous remarquons sur les sous-figures (a) et (b) de la FIGURE 5.5, que la présence de la fréquence f_1 est uniquement significative sur les i_{exc} premières cellules qui sont excitées par le signal bichromatique. Concernant les cellules situées au delà de la cellule i_{exc} , nous remarquons que l'apport de la seule composante haute fréquence ne permet pas la propagation de la composante basse fréquence. En revanche, il apparaît sur les sous-figures (c) et (d) de la FIGURE 5.5, qu'en présence d'un fort couplage entre cellules voisines, la composante de fréquence f_1 se propage jusqu'aux cellules excédant i_{exc} grâce à l'apport de la perturbation haute fréquence. À titre de comparaison avec le couplage $D = 1.33$ considéré sur la FIGURE 5.4, une gamme plus importante de l'amplitude B permet désormais la propagation de cette composante jusqu'en bout de ligne, puisque $Q_n(f_1) \neq 0$ pour $B \in [0.3 \text{ V} ; 0.7 \text{ V}]$.

Jusqu'à présent, nous avons considéré des excitations $E_n(t)$ purement déterministes. Pour un couplage adéquat, nous avons montré qu'une amplitude appropriée d'une perturbation sinusoïdale haute fréquence pouvait assister la propagation d'une information basse fréquence initiée sur les premières cellules d'un réseau de neurones de type FitzHugh-Nagumo. Dans la partie qui suit, nous nous proposons d'étudier si le bruit peut également autoriser la propagation de cette information basse fréquence en complément de la perturbation déterministe haute fréquence.

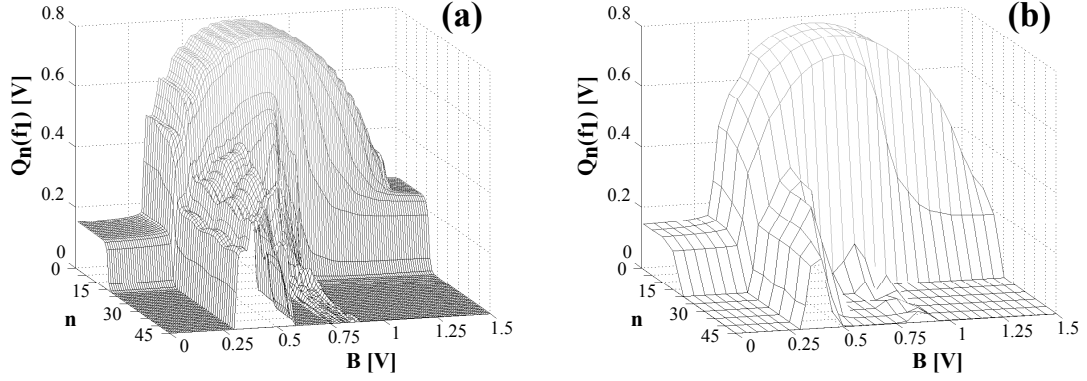


FIGURE 5.4 – Propagation de la composante basse fréquence assistée par la perturbation haute fréquence d'amplitude B pour un couplage $D = 1.33$. (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

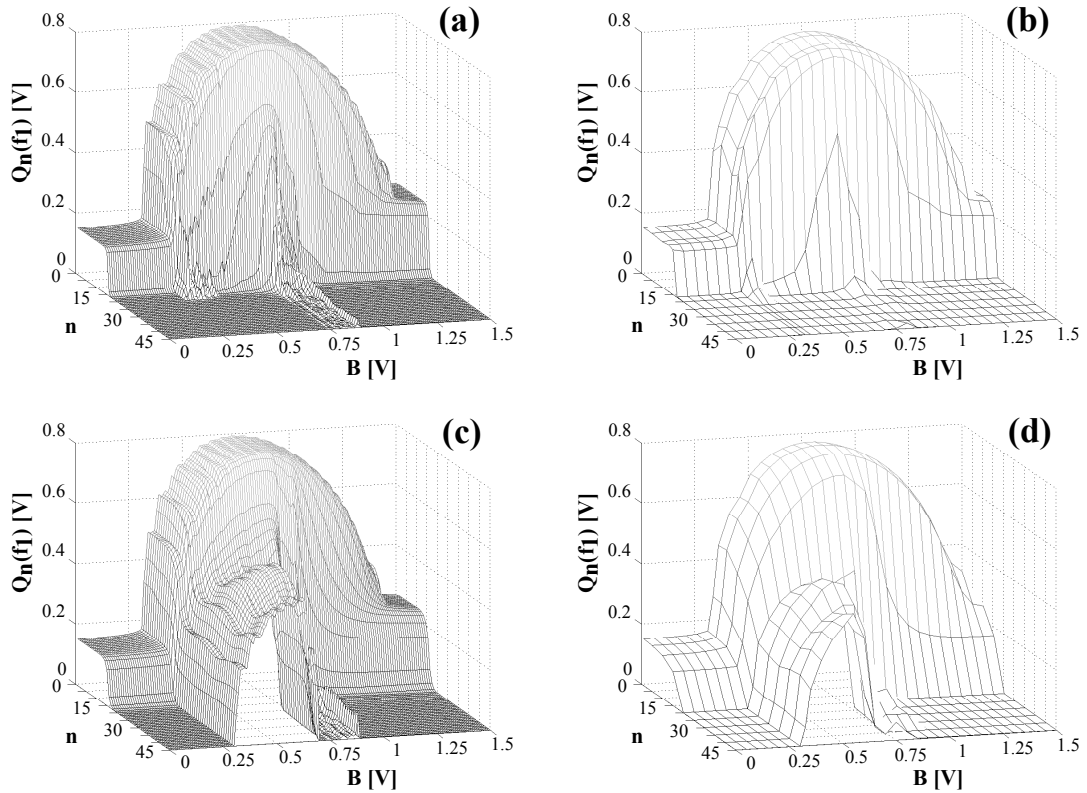


FIGURE 5.5 – Influence du couplage sur le phénomène de propagation assistée par la perturbation haute fréquence d'amplitude B . Les résultats des simulations numériques sont tracés à gauche, tandis que ceux qui sont issus d'expérimentations sont représentés à droite. (a) et (b) : $D = 0.604$; (c) et (d) : $D = 2.83$. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. Les constantes γ et ε sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.

5.2/ PROPAGATION ASSISTÉE PAR LE BRUIT

Afin d'étudier si le bruit peut participer à la propagation de l'information basse fréquence en complément de la perturbation haute fréquence, nous fixons la variable β à 1 dans l'expression de la distribution des excitations (5.3), qui devient alors :

$$\begin{cases} E_n(t) = E_0 + A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t) + \eta_w(t), & \text{si } n \leq i_{exc}, \\ E_n(t) = E_0 + B \cos(2\pi f_2 t) + \eta_w(t), & \text{si } n > i_{exc}, \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\eta_w(t)$ est une source de bruit blanc gaussien, de fonction d'autocorrélation :

$$\langle \eta_w(t_{exp}), \eta_w(t'_{exp}) \rangle = \sigma^2 \delta(t_{exp} - t'_{exp}). \quad (5.6)$$

Tout d'abord, nous considérerons que la même source $\eta_w(t)$ sera appliquée sur l'ensemble des cellules qui constituent la ligne. Cette composante stochastique ne dépendant que du temps, nous la qualifierons donc de bruit *temporel*. Ensuite, le bruit sera considéré comme *spatio-temporel*. En simulation numérique, il sera obtenu en considérant des sources de bruit indépendantes d'un site à l'autre, tandis qu'expérimentalement nous l'approximerons par quatre sources distinctes respectivement appliquées toutes les quatre cellules [72].

La ligne restera paramétrée de la même façon que lors de l'étude déterministe que nous avons menée dans la partie 5.1 de ce manuscrit et nous conserverons la valeur de couplage entre les différentes cellules $D = 1.33$. Nous considérerons successivement deux valeurs spécifiques de l'amplitude B de la composante haute fréquence :

- Le premier cas de figure, obtenu pour $B = 0.15$ V, sera qualifié de sous-optimal. En effet, comme le montrent les diagrammes spatio-temporels de la FIGURE 5.6, dans de telles conditions d'excitation, la propagation de l'information basse fréquence dans le réseau en l'absence de bruit est inexistante.
- Le second cas de figure, obtenu pour $B = 0.4$ V, sera quant à lui qualifié de quasi-optimal. En l'absence de bruit, comme indiqué par la FIGURE 5.7, la composante haute fréquence permet à la composante basse fréquence de se propager le long de la ligne électrique via le déclenchement de potentiels d'action.

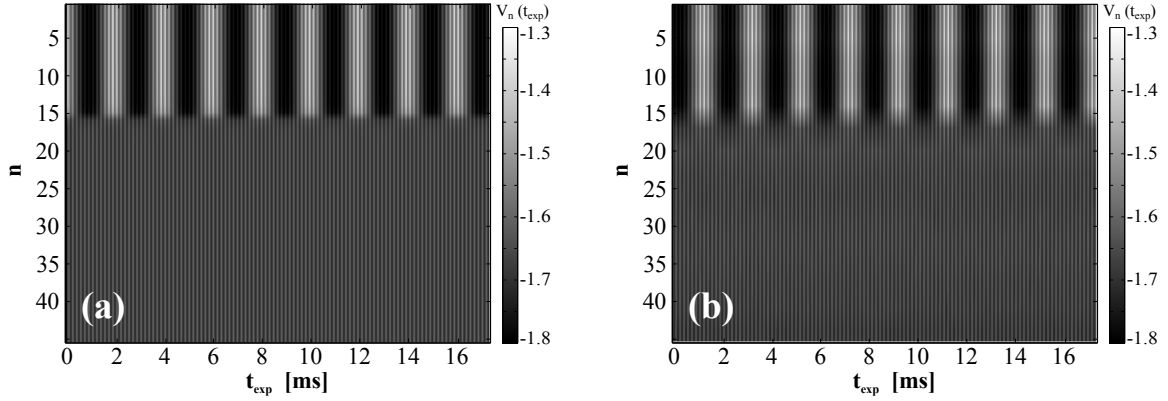


FIGURE 5.6 — Diagramme spatio-temporel de la ligne montrant la non-propagation de la composante basse fréquence pour un milieu paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\sigma = 0$ V_{RMS}, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

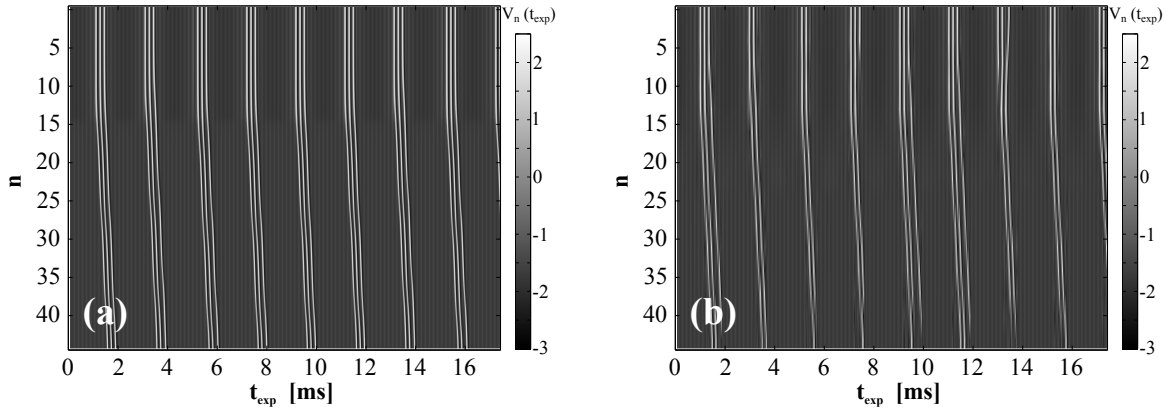


FIGURE 5.7 — Diagramme spatio-temporel de la ligne montrant la propagation de la composante basse fréquence pour un milieu paramétré de façon quasi-optimale ($B = 0.4$ V). (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.4$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\sigma = 0$ V_{RMS}, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

5.2.1/ BRUIT TEMPOREL

5.2.1.1/ PARAMÉTRAGE SOUS-OPTIMAL : PROPAGATION ASSISTÉE PAR LE BRUIT

La perturbation haute fréquence ne permettant pas à elle seule la propagation de l'information basse fréquence, nous nous proposons d'analyser si un bruit *temporel* peut en partie se substituer à la perturbation haute fréquence et autoriser la propagation. À cet effet, nous avons étudié le comportement spatio-temporel de la ligne pour quatre valeurs efficaces du bruit σ caractéristiques.

La FIGURE 5.8 regroupe les diagrammes spatio-temporels de l'état de la ligne obtenus à partir de simulations numériques et relevés expérimentalement en prenant successivement $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.25 \text{ V}_{\text{RMS}}$, $\sigma = 0.4 \text{ V}_{\text{RMS}}$ et $\sigma = 0.8 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Les résultats issus des simulations sont présentés à gauche, tandis que les expérimentations correspondantes sont proposées à droite. Sur les FIGURES 5.8 (a) et (b), en ajoutant un bruit d'amplitude $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$, nous remarquons que seulement quelques potentiels d'action sont générés sur les i_{exc} premières cellules et se propagent jusqu'en bout de ligne. Dans cet environnement peu bruyé, il apparaît que les potentiels d'action déclenchés sur les i_{exc} premières cellules ne sont qu'occasionnellement synchronisés avec la fréquence basse d'excitation f_1 . En augmentant la valeur efficace σ du bruit à $0.25 \text{ V}_{\text{RMS}}$, nous remarquons sur les i_{exc} premières cellules des FIGURES 5.8 (c) et (d) que la génération de potentiels d'action s'effectue désormais au rythme de la basse fréquence, c'est-à-dire avec une périodicité de 2 ms . Bien que l'ensemble des potentiels d'action produits ne se propagent pas jusqu'au bout de la ligne, nous distinguons cependant que les cellules situées en bout de ligne semblent synchroniser leur réponse avec la basse fréquence f_1 . De plus, il est à noter que de nouveaux potentiels d'action, non initiés sur les i_{exc} premières cellules, peuvent également naître dans le réseau et se propager jusqu'au bout de la ligne. Pour une valeur efficace σ du bruit s'élevant à $\sigma = 0.4 \text{ V}_{\text{RMS}}$, les FIGURES 5.8 (e) et (f) montrent qu'en dépit d'une synchronisation manifeste de la réponse des i_{exc} premières cellules avec la basse fréquence f_1 , celle-ci n'est pas conservée jusqu'en bout de ligne. Enfin, pour une valeur efficace du bruit trop importante, soit $\sigma = 0.8 \text{ V}_{\text{RMS}}$, nous remarquons sur les FIGURES 5.8 (g) et (h) que le déclenchement des potentiels d'action est principalement gouverné par le bruit.

Afin de quantifier cet effet de propagation assistée par le bruit, nous avons également analysé le comportement spectral de la ligne. La FIGURE 5.9 regroupe les spectres unilatéraux de puissance $PS_n(f)$ des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ obtenus numériquement et expérimentalement pour les quatre valeurs efficaces de bruit qui ont été précédemment considérées pour construire les diagrammes spatio-temporels de la FIGURE 5.8. À

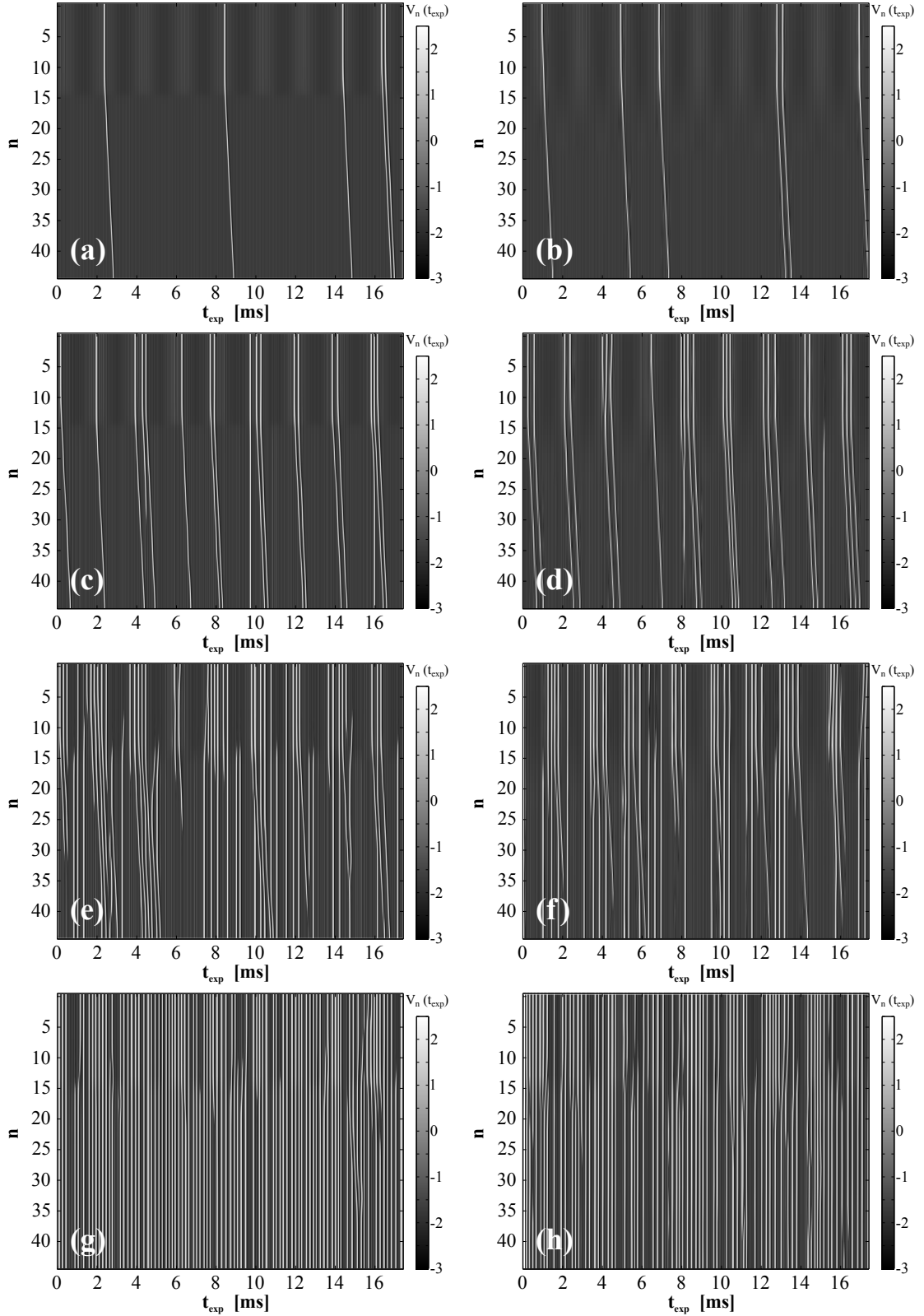


FIGURE 5.8 — Évolutions spatio-temporelles de l'état de la ligne pour différentes valeurs efficaces σ du bruit temporel, dans le cas d'un milieu paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). Les simulations numériques sont présentées à gauche, tandis que les relevés expérimentaux correspondants sont présentés à droite. (a) et (b) : $\sigma = 0.1$ V_{RMS} ; (c) et (d) : $\sigma = 0.25$ V_{RMS} ; (e) et (f) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} ; (g) et (h) : $\sigma = 0.8$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

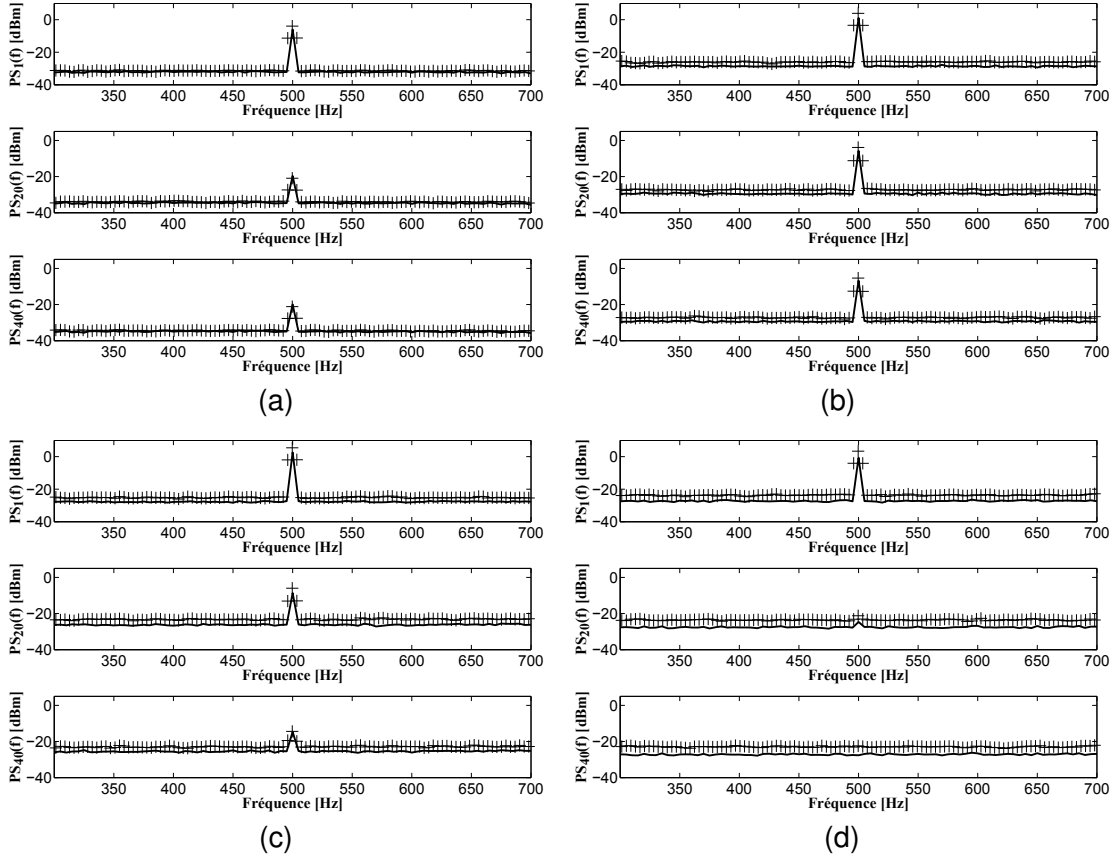


FIGURE 5.9 – Spectres unilatéraux de puissance des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ observés en simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentalement (+) pour différentes amplitudes σ du bruit temporel. Le milieu est paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). (a) : $\sigma = 0.1$ V_{RMS} ; (b) : $\sigma = 0.25$ V_{RMS} ; (c) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} et (d) : $\sigma = 0.8$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

nouveau, les résultats issus des simulations sont représentés par des traits pleins, tandis que les expérimentations associées sont superposées avec des croix. La présence de la basse fréquence dans le réseau se manifeste par l'existence d'une raie à la fréquence f_1 dans le spectre. Il apparaît que son amplitude est d'autant plus grande que la synchronisation était visible dans les diagrammes spatio-temporels de la FIGURE 5.8. Cependant, nous remarquons que plus la valeur efficace σ du bruit est élevée, plus le niveau du fond de bruit du spectre augmente. Ainsi, comme dans la plupart des études consacrées à la propagation assistée par le bruit, [45, 46, 64–66], nous allons tenir compte de ce phénomène en mesurant le rapport signal sur bruit à la fréquence d'intérêt. La FIGURE 5.10 illustre, à partir du spectre de puissance de la cellule $n = 20$ obtenu pour $\sigma = 0.25$ V_{RMS},

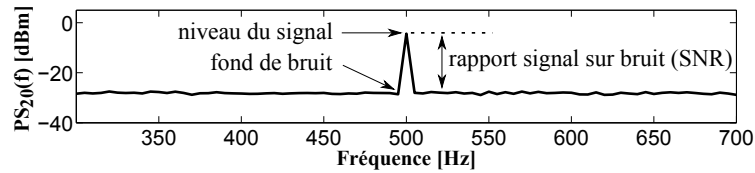


FIGURE 5.10 – Principe d'estimation du rapport signal sur bruit.

la méthode selon laquelle nous estimons le rapport signal sur bruit, parfois noté *SNR*. Le spectre de puissance étant exprimé en dBm, le rapport signal sur bruit peut être simplement calculé, en dBm ou en dB, en réalisant la différence entre l'amplitude de la raie présente à la fréquence f_1 et le niveau du fond de bruit constant d'où émerge cette raie.

Sur la FIGURE 5.11 (a), suite à la simulation du modèle théorique, nous présentons l'évolution du rapport signal sur bruit estimé à la fréquence f_1 , en fonction de la valeur efficace du bruit σ , sur l'ensemble des cellules de la ligne. En revanche, la fastidiosité des manipulations en régime stochastique nous a contraint à restreindre l'étude expérimentale à seulement trois cellules caractéristiques. Ainsi, seuls les rapports signal sur bruit des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ sont respectivement proposés aux FIGURES 5.11 (b), (c) et (d) en fonction de l'intensité de bruit σ . Afin de faciliter l'exploitation de ces résultats, nous avons superposé les simulations correspondantes au moyen de traits pleins sur chacune des sous-figures. Les comportements observés à partir des simulations numériques et des expérimentations sont similaires. Ils sont de deux types :

- Pour les i_{exc} premières cellules excitées avec les deux composantes spectrales f_1 et f_2 , du fait que la fréquence f_1 est déjà présente, l'ajout de bruit n'apporte pas d'amélioration particulière. En effet, d'après la FIGURE 5.11 (b) proposant le comportement de la première cellule, le rapport signal sur bruit décroît rapidement pour les faibles valeurs efficaces de bruit et semble ensuite se stabiliser et tendre vers une valeur. Cela traduit que le *SNR* sur la première cellule est relativement peu sensible au niveau de bruit pour la gamme de bruit comprise dans l'intervalle $[0.2 V_{RMS} ; 1 V_{RMS}]$.
- Le comportement est tout autre pour le quasi-restant de la ligne, uniquement sou-

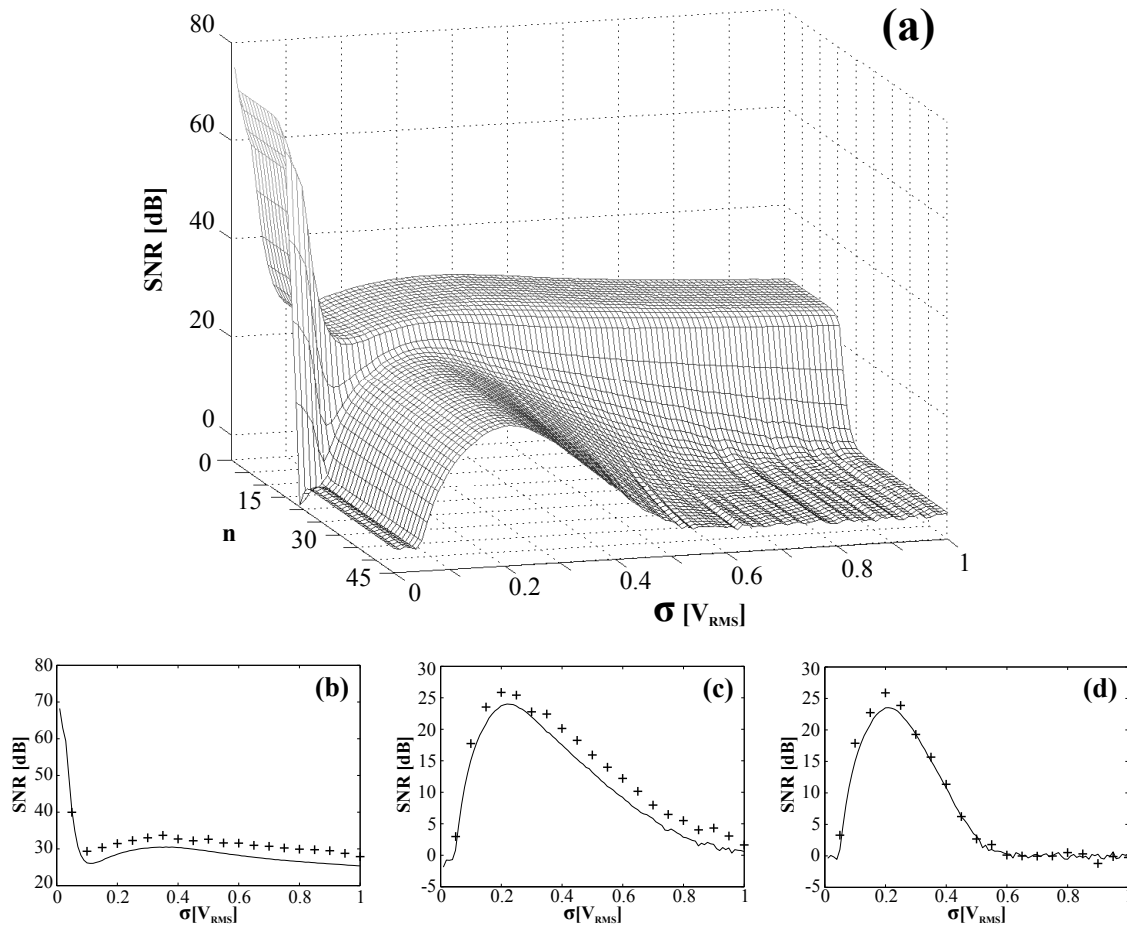


FIGURE 5.11 — Propagation assistée par un bruit temporel dans le cas d'un paramétrage sous-optimal de la ligne électrique ($B = 0.15$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs (+). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

mis à l'excitation du bruit et de la composante haute fréquence : en complément de la composante haute fréquence, le bruit permettra à la composante basse fréquence de se propager dans le réseau. En effet, pour les cellules non soumises à l'excitation basse fréquence et suffisamment éloignées de la frontière virtuelle que représente i_{exc} , le SNR évolue de façon non monotone en fonction de l'amplitude σ du bruit. Ainsi, les rapports signal sur bruit des cellules $n = 20$ et $n = 40$ présentés sur les FIGURES 5.11 (c) et (d) révèlent une résonance qui se traduit par une maximisation pour une valeur optimale de l'amplitude de bruit estimée à 0.2 V_{RMS}.

Ce dernier point est confirmé par l'évolution du rapport signal sur bruit présenté pour l'intégralité de la ligne sur la FIGURE 5.11 (a). En effet, nous constatons que le rapport signal sur bruit de toutes les cellules situées au delà de i_{exc} est maximisé pour $\sigma = 0.2 V_{RMS}$. Cela confirme l'existence d'une valeur particulière de bruit qui améliore la propagation de la composante basse fréquence dans la ligne.

5.2.1.2/ PARAMÉTRAGE QUASI-OPTIMAL : PROPAGATION DÉGRADÉE PAR LE BRUIT

Dans la partie précédente, l'amplitude B de la perturbation haute fréquence n'était pas ajustée de façon optimale. Cela a permis au bruit de participer utilement à la propagation de la composante basse fréquence dans le réseau. Désormais, nous allons analyser comment le bruit altère cette propagation lorsque l'amplitude B est choisie au voisinage de l'amplitude B_{opt} . Pour rappel, cette amplitude $B_{opt} = 0.45 V$ qui favorise la propagation de la composante basse fréquence en l'absence de bruit a été déterminée dans la sous-partie 5.1.2.

La FIGURE 5.12 présente, pour ce paramétrage quasi-optimal de la perturbation haute fréquence, l'évolution du rapport signal sur bruit dans la ligne en fonction de la valeur efficace de bruit σ . La simulation de la FIGURE 5.12 (a) montre que, quelle que soit la cellule considérée, le rapport signal sur bruit revêt une allure strictement décroissante lorsqu'il est tracé en fonction de la valeur efficace du bruit. Cependant, notons que les i_{exc} premières cellules, soumises à l'excitation de la basse fréquence f_1 , suivent une décroissance moins prononcée de leur rapport signal sur bruit, que les cellules situées au delà et qui ne sont pas sujettes à cette fréquence d'excitation. Les résultats expérimentaux relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ sont respectivement présentés sur les sous-figures (b), (c) et (d) de la FIGURE 5.12. Ceux-ci confirment le comportement observé numériquement sur l'ensemble de la ligne : le bruit dégrade la propagation de la composante basse fréquence si l'amplitude de la perturbation haute fréquence n'est pas paramétrée de façon sous-optimale.

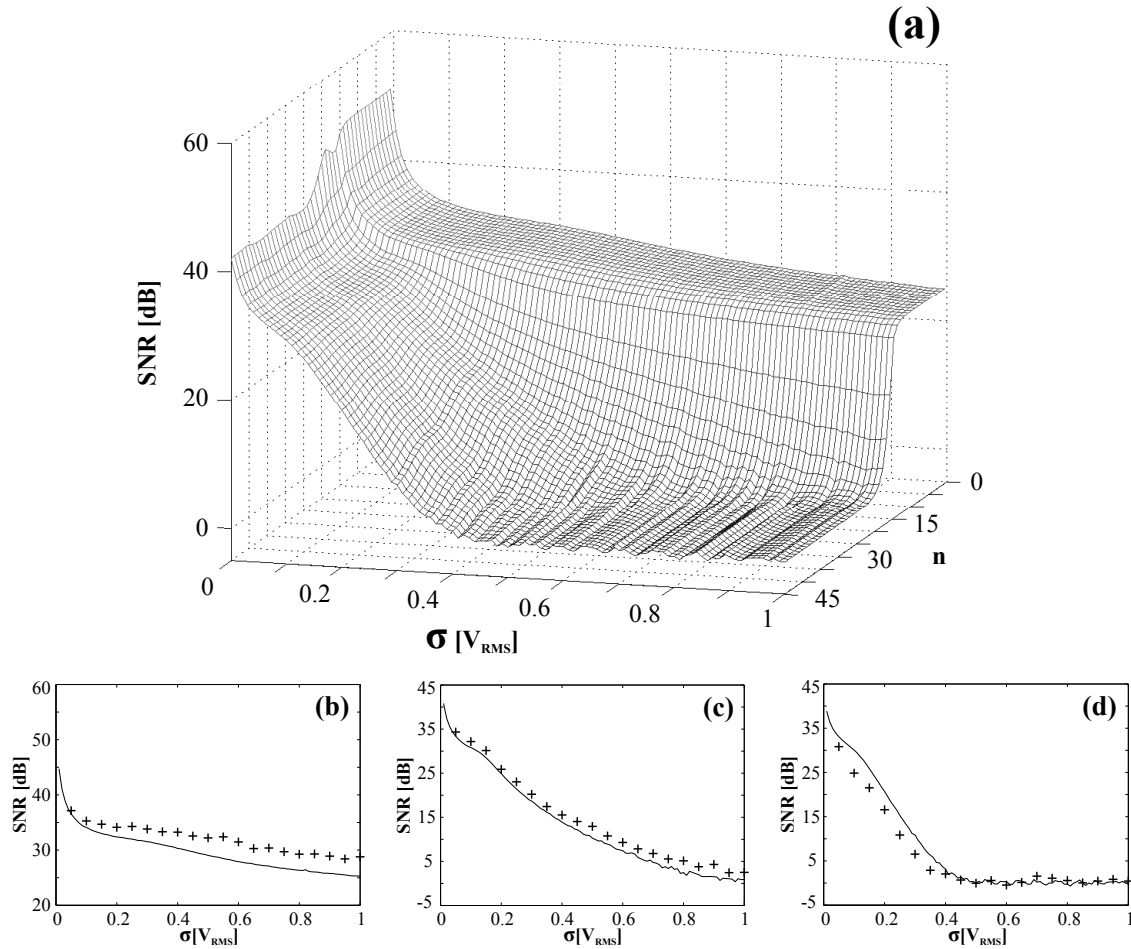


FIGURE 5.12 — Propagation dégradée par un bruit temporel dans le cas d'un paramétrage quasi-optimal de la ligne électrique ($B = 0.4$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs (+). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.4$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

5.2.2/ BRUIT SPATIO-TEMPOREL

Nous avons établi dans les parties précédentes qu'en ajoutant la même source de bruit aux différentes excitations $E_n(t)$ appliquées à l'ensemble des cellules de la ligne, la propagation de l'information pouvait être rendue possible selon le paramétrage déterministe initial. Pour cela, nous avons distingué dans deux parties bien distinctes le cas d'un paramétrage sous-optimal de la perturbation haute fréquence du cas quasi-optimal. L'objet de cette partie consiste à étudier l'impact d'un bruit que nous considérons désormais

spatio-temporel sur la propagation de l'information.

5.2.2.1/ PARAMÉTRAGE SOUS-OPTIMAL : PROPAGATION ASSISTÉE PAR LE BRUIT

Dans le cas d'un paramétrage sous-optimal ($B = 0.15$ V), comme le montraient les diagrammes spatio-temporels de la FIGURE 5.6, aucun potentiel d'action n'était généré sur les i_{exc} premières cellules. Dans cette configuration, nous avons relevé les comportements spatio-temporels observés pour quatre valeurs efficaces d'un bruit *spatio-temporel*. Pour la plus faible valeur de σ prise en compte, à savoir $\sigma = 0.15$ V_{RMS}, sur les FIGURES 5.13 (a) et (b), bien que la composante aléatoire soit suffisante pour permettre le déclenchement de potentiels d'action sur les i_{exc} premières cellules, ceux-ci sont peu fréquents et la synchronisation de la réponse des différentes cellules avec la fréquence f_1 est par conséquent très faible. Pour la seconde valeur efficace de bruit considérée aux FIGURES 5.13 (c) et (d), soit $\sigma = 0.4$ V_{RMS}, nous remarquons que des trains de potentiels d'actions sont générés sur les i_{exc} premières cellules au rythme de la fréquence basse d'excitation f_1 . Ceux-ci se propagent ensuite jusqu'en bout de ligne en conservant cette synchronisation avec la fréquence f_1 . Enfin, pour les valeurs efficaces de bruit les plus importantes, il apparaît sur les sous-figures (e) à (h) de la FIGURE 5.13 que la synchronisation des i_{exc} premières cellules avec la fréquence f_1 reste perceptible. Cependant, nous constatons que cette synchronisation tend à disparaître au cours de la propagation et à mesure que le niveau de bruit σ augmente. Au regard de ces résultats, la valeur efficace 0.4 V_{RMS} semble donc être la quantité optimale du bruit *spatio-temporel* qui permet à la composante basse fréquence de se propager dans le réseau.

À présent, vérifions si les observations tirées des diagrammes spatio-temporels de la ligne se confirment par une analyse spectrale. Pour les mêmes valeurs efficaces de bruit que celles utilisées pour produire les diagrammes spatio-temporels de la FIGURE 5.13, nous avons calculé les spectres de puissance unilatéraux des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$. La FIGURE 5.14 présente au moyen de traits pleins les résultats obtenus à partir de simulations numériques, tandis que les mesures expérimentales sont superposées

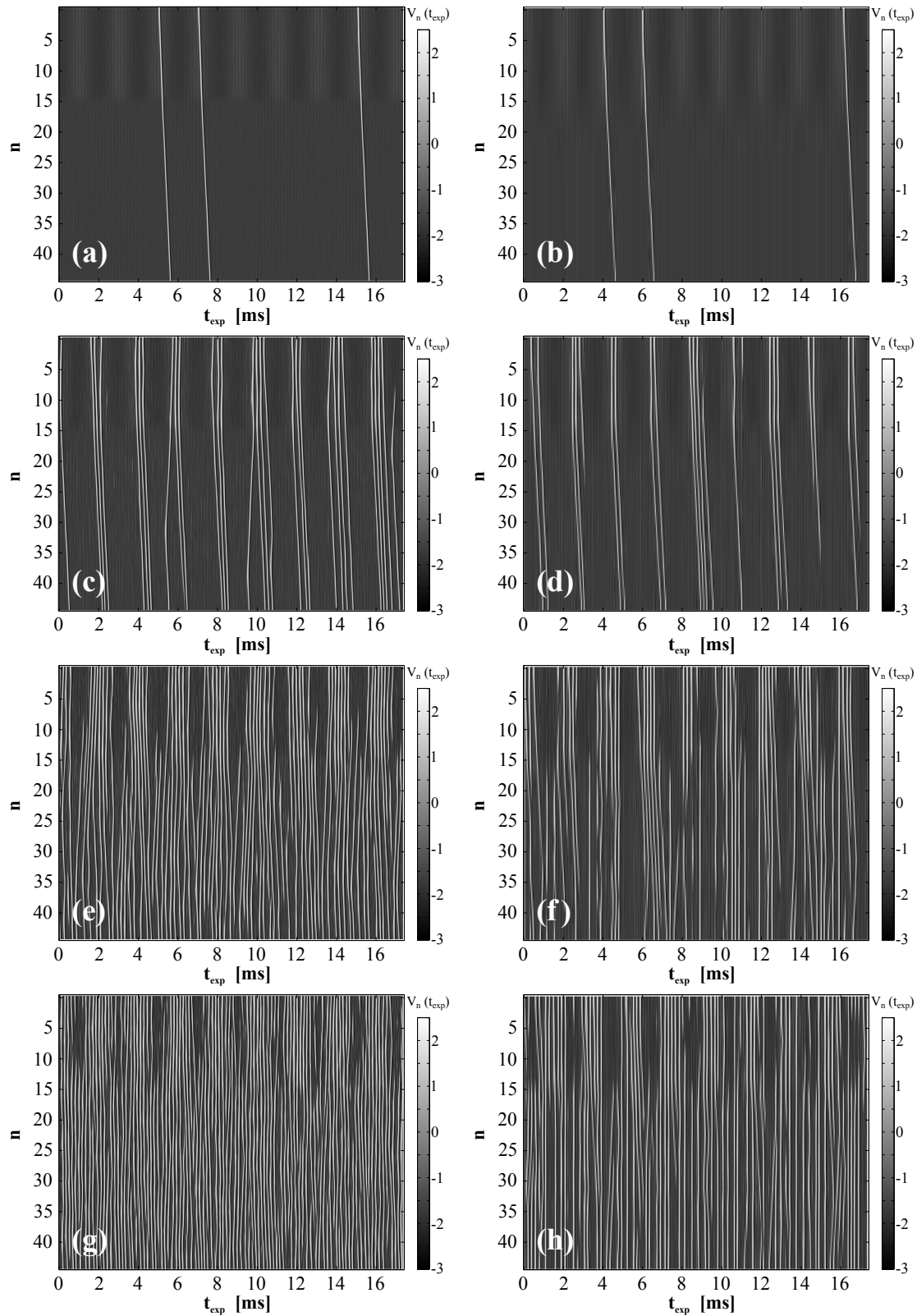


FIGURE 5.13 — Évolutions spatio-temporelles de l'état de la ligne pour différentes valeurs efficaces σ du bruit spatio-temporel, dans le cas d'un milieu paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). Les simulations numériques sont présentées à gauche, tandis que les relevés expérimentaux correspondants sont présentés à droite. (a) et (b) : $\sigma = 0.15$ V_{RMS} ; (c) et (d) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} ; (e) et (f) : $\sigma = 0.7$ V_{RMS} ; (g) et (h) : $\sigma = 1$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

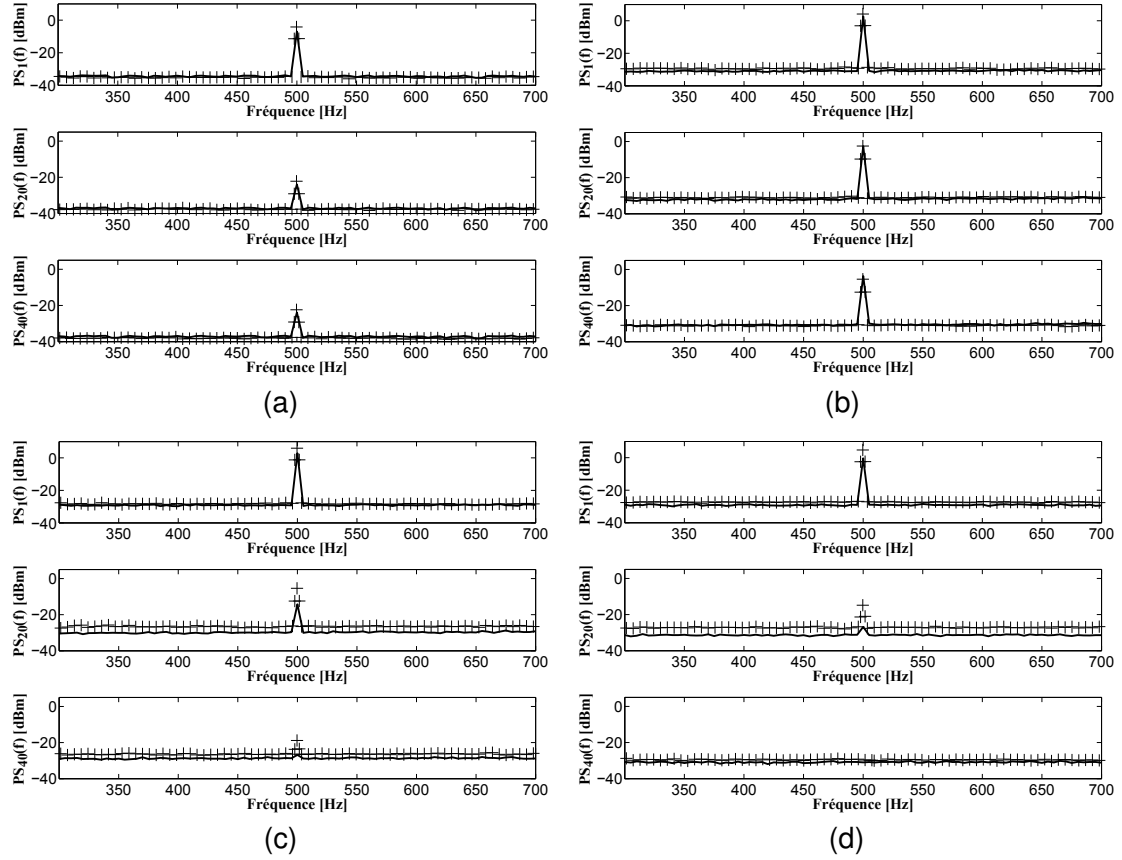


FIGURE 5.14 — Spectres unilatéraux de puissance des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ observés en simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentalement (+) pour différentes amplitudes σ du bruit spatio-temporel. Le milieu est paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). (a) : $\sigma = 0.15$ V_{RMS} ; (b) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} ; (c) : $\sigma = 0.7$ V_{RMS} et (d) : $\sigma = 1$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

avec des croix. Comme dans le cas du bruit *temporel*, la cohérence entre les spectres relevés et les allures spatio-temporelles de l'état de la ligne sont indéniables. Au vu de la FIGURE 5.14, nous remarquons en premier lieu, qu'une valeur intermédiaire de bruit de l'ordre de 0.4 V_{RMS} permet de maximiser la réponse à la fréquence f_1 des cellules situées au delà de la cellule numéro i_{exc} , c'est-à-dire des cellules non excitées par cette composante basse fréquence. Dans un second temps, nous constatons sur la FIGURE 5.14 que la différence entre les niveaux atteints par les raies à la fréquence f_1 et le fond de bruit d'où elles émergent sont globalement plus importantes que celles relevées sur la FIGURE 5.9, pour le même paramétrage sous-optimal, mais en présence du bruit *temporel*. Il semble donc que le bruit *spatio-temporel* produise une meilleure amélioration

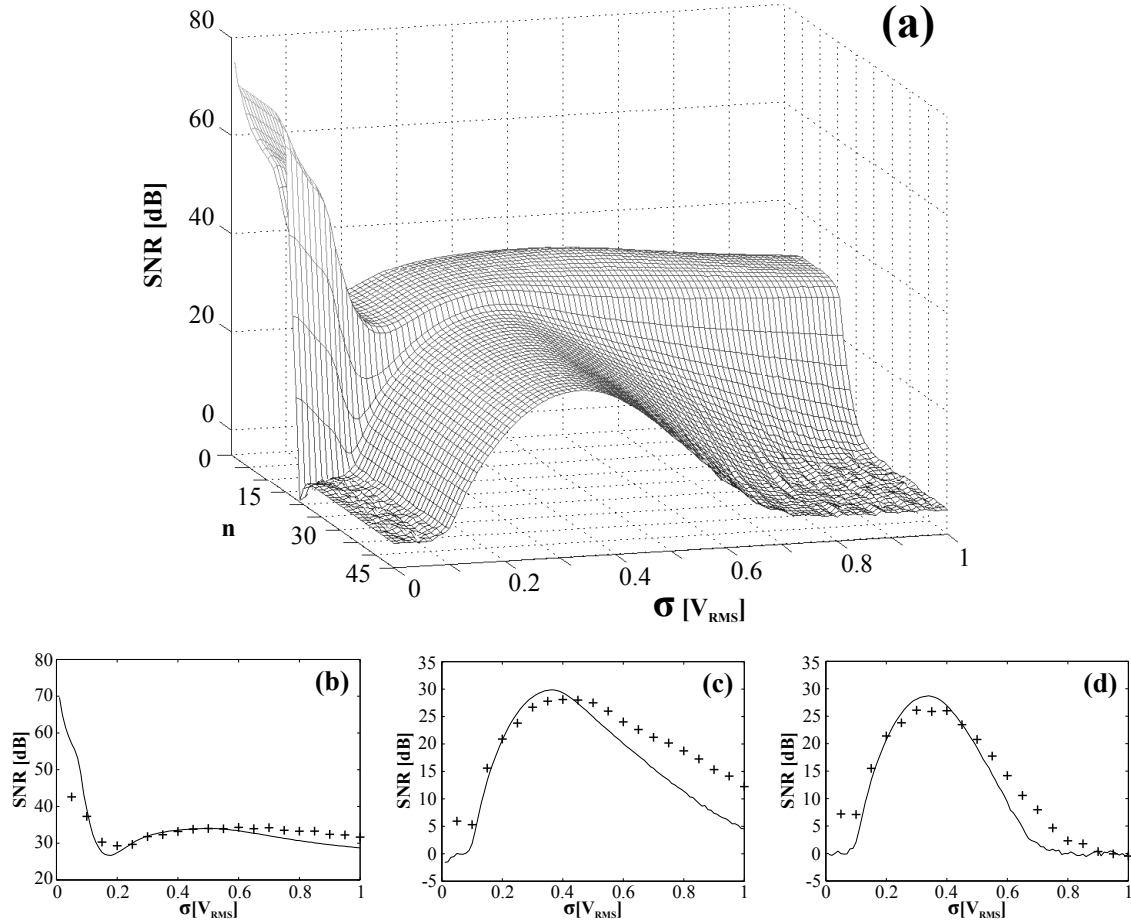


FIGURE 5.15 – Propagation assistée par un bruit spatio-temporel dans le cas d'un paramétrage sous-optimal de la ligne électrique ($B = 0.15$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

de la propagation de la composante basse fréquence que le bruit *temporel*.

Vérifions les constatations formulées à partir des spectres de puissance, en traçant à la FIGURE 5.15 l'évolution des rapports signal sur bruit de l'ensemble des cellules, en fonction de la valeur efficace du bruit σ . Si l'on compare les courbes des rapports signal sur bruit obtenues avec un bruit *spatio-temporel* à celles présentées à la FIGURE 5.11 pour un bruit *temporel*, deux principales différences se manifestent. Premièrement, comme nous l'avons évoqué à la vue des spectres de puissance, le bruit *spatio-temporel* permet d'obtenir des rapports signal sur bruit sensiblement plus élevés sur l'ensemble

des cellules pour une valeur σ donnée. Enfin, nous remarquons que la largeur de l'intervalle du niveau de bruit σ permettant la propagation de l'information jusqu'au bout de la ligne est plus large que celui obtenu en présence du bruit *temporel*. En effet, sur la FIGURE 5.15 (a), en bout de ligne, le rapport signal sur bruit est non nul pour $\sigma \in [0.1 V_{\text{RMS}} ; 0.7 V_{\text{RMS}}]$, alors qu'en présence d'un bruit *temporel* cet intervalle se réduisait à $\sigma \in [0.075 V_{\text{RMS}} ; 0.55 V_{\text{RMS}}]$.

5.2.2.2/ PARAMÉTRAGE QUASI-OPTIMAL : PROPAGATION DÉGRADÉE PAR LE BRUIT

Reprenons le paramétrage quasi-optimal ($B = 0.4 V$), c'est-à-dire lorsque l'amplitude B de la perturbation haute fréquence est choisie au voisinage de la valeur qui optimise la propagation de la composante basse fréquence en l'absence de bruit σ . Pour rappel, cette configuration initiale a été illustrée à la FIGURE 5.7. Ici, nous focalisons notre étude sur l'évolution des rapports signal sur bruit, calculés sur l'ensemble des cellules en fonction de la valeur efficace du bruit. Une nouvelle fois, nous reconnaissons une allure que nous avons déjà rencontrée à la FIGURE 5.12 en présence d'un bruit *temporel*. En effet, la réponse de l'ensemble des cellules à la fréquence f_1 est optimale en l'absence de bruit ($\sigma = 0$), puis à mesure que la valeur efficace du bruit augmente, nous observons une décroissance monotone du rapport signal sur bruit, indiquant que le bruit, même de type *spatio-temporel*, n'améliore pas la propagation de la composante basse fréquence dans le réseau.

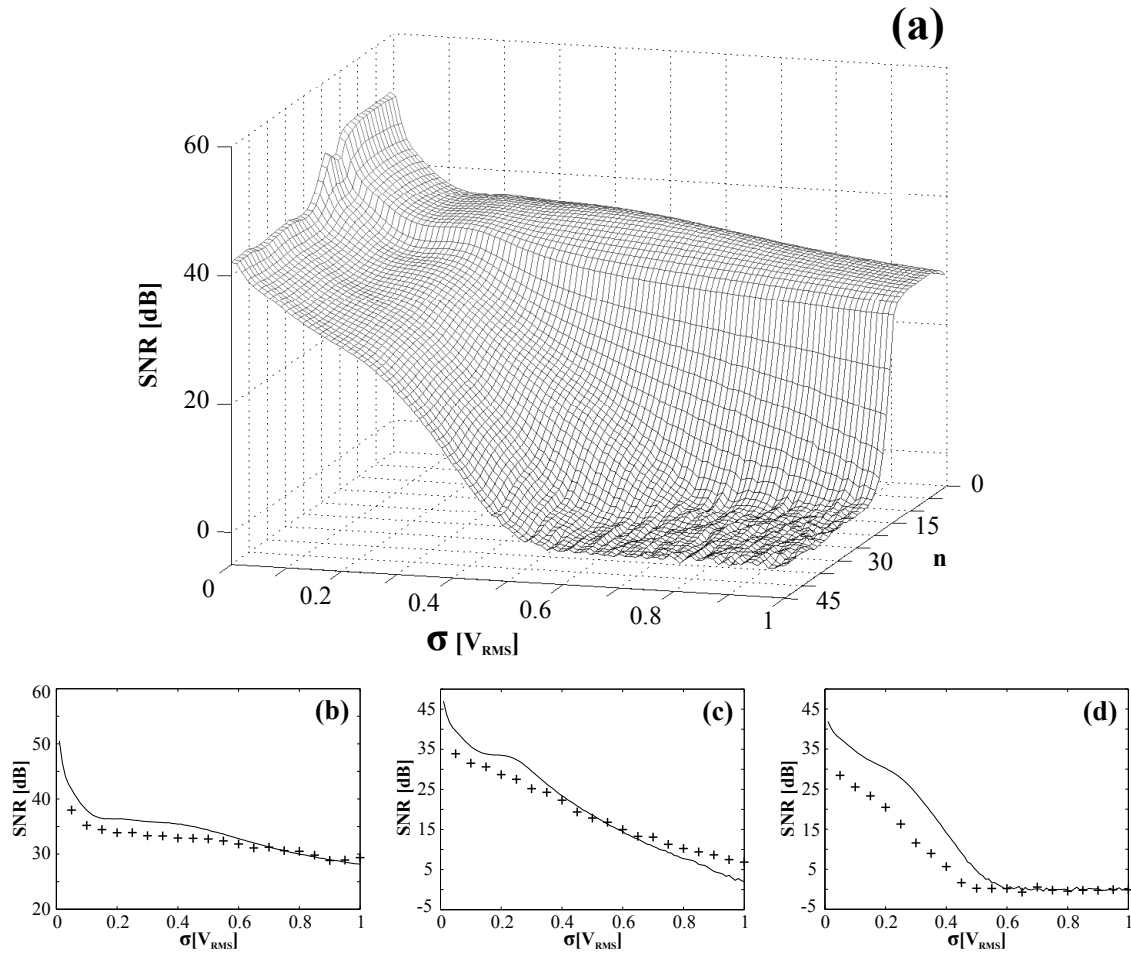


FIGURE 5.16 – Propagation dégradée par un bruit spatio-temporel dans le cas d'un paramétrage quasi-optimal de la ligne électrique ($B = 0.4$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs (+). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.4$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω .

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

6.1/ CONCLUSION

Au commencement de cette thèse, le double objectif qui m'a été confié consistait à étudier expérimentalement les effets de différents stimuli, qu'ils soient déterministes ou stochastiques, sur les réponses de deux structures électroniques distinctes. La première d'entre elles, un oscillateur non linéaire de type FitzHugh-Nagumo, a également servi d'élément de base à la conception de la seconde, obtenue quant à elle en couplant 45 de ces cellules élémentaires. À l'aide de ces dispositifs électroniques, mon projet consistait alors à valider expérimentalement l'existence de divers phénomènes non linéaires, apparaissant notamment dans différents modèles neuronaux. Concernant le modèle de FitzHugh-Nagumo, rappelons que ces phénomènes étaient jusqu'alors essentiellement décrits dans la littérature par le biais d'études théoriques et numériques.

Dans le chapitre 2 de ce manuscrit, suite à l'introduction du modèle théorique de FitzHugh-Nagumo, nous avons établi la correspondance entre celui-ci et les équations différentielles qui régissent la dynamique des tensions d'intérêts de chacun de nos circuits. Cette approche de développement électronique bio-inspiré nous a notamment permis de proposer une démarche où nous avons systématiquement vérifié que les résultats obtenus lors de nos expérimentations étaient comparables à ceux issus de simulations numériques. Tout au long de cette thèse, nous avons ainsi pu prouver que les phénomènes observés expérimentalement à partir de dispositifs électroniques étaient conformes à la réalité.

En régime déterministe, la première manifestation non linéaire qui a retenu notre attention fut la résonance vibrationnelle [43]. En effet, avant cette thèse, l'essentiel des confirmations expérimentales concernant ce phénomène étaient obtenues à partir d'un système optique : une diode laser à cavité verticale émettant par la surface [52, 100–104]. En dépit d'un état de l'art pourtant fourni et rapportant des études numériques accomplies sur le modèle de FitzHugh-Nagumo, aucun dispositif expérimental fidèle à ce modèle théorique n'était mentionné jusqu'alors. Seulement deux réalisations électroniques étaient répertoriées : un dispositif non linéaire basé sur le circuit de Chua [47] et un circuit retranscrivant la dynamique d'un oscillateur de Duffing suramorti [98]. Nos lectures nous ont ensuite naturellement mené à considérer de nouveaux paramètres de fonctionnement, cela afin de mettre en avant des phénomènes non linéaires dérivés de la résonance vibrationnelle, à savoir : la résonance fréquentielle [148] et la bi-résonance vibrationnelle [147]. Cependant, dans le but d'étudier et de comprendre ces phénomènes de résonance ayant pour point commun de se manifester en présence d'une excitation bichromatique, nous avons d'abord été amenés à caractériser notre dispositif en présence d'excitations moins complexes : une tension continue et un signal sinusoïdal. En effet, la considération de tels stimuli, bien que leurs effets sur le modèle de FitzHugh-Nagumo soient déjà connus, fut nécessaire pour mieux appréhender la réponse du système lorsque celui-ci est soumis à une excitation bichromatique.

Ainsi, en ouverture du chapitre 3 de ce manuscrit, en présence d'une tension continue, nous avons rappelé et illustré les différents régimes de fonctionnement du modèle de FitzHugh-Nagumo : bistable, excitable et oscillant. Dans la continuité, nous nous sommes ensuite intéressés à la bifurcation d'Andronov-Hopf menant du mode excitable vers le mode oscillant, et inversement. En nous appuyant sur des travaux théoriques réalisés sur un système sensiblement différent du nôtre [75], nous avons déterminé les expressions des valeurs critiques inférieures et supérieures de cette bifurcation en fonction des paramètres de notre modèle. Les expressions théoriques ainsi établies ont ensuite été validées au moyen de simulations numériques et d'expérimentations.

Dans la suite du chapitre 3, nous avons ajouté à la tension continue précédente une

première composante sinusoïdale. Pour ce régime dynamique, nous avons commencé par étudier l'encodage d'un tel stimulus. Nous avons notamment déterminé la zone où les influences conjointes de la composante continue et des caractéristiques de l'onde sinusoïdale (amplitude, fréquence) ne permettent pas le déclenchement de potentiels d'action en sortie du système. Ce type d'excitation, dite subliminale, nous a ensuite été utile pour le paramétrage du dispositif lors de nos études mettant en œuvre un signal exciteur bichromatique. D'autre part, nous avons analysé les allures temporelles de la tension de sortie du système en fonction des paramètres de l'excitation sinusoïdale. Nous avons alors retrouvé les résultats déjà bien connus concernant la synchronisation du déclenchement des potentiels d'action, phénomène connu sous le nom de *mode-locking* [76]. Ces résultats ont pris toute leur importance lors d'une étude visant à prédire les multiples résonances du système pouvant apparaître en régime d'excitation bichromatique.

Enfin, l'ajout de la seconde composante sinusoïdale nous a ramené à l'une des études prépondérantes de ce manuscrit : la caractérisation de la réponse du modèle de FitzHugh-Nagumo lorsqu'il est soumis à une excitation bichromatique déterministe. Comme énoncé précédemment, la résonance vibrationnelle est le premier phénomène sur lequel nous avons concentré notre attention. Celui-ci se manifeste lorsque la réponse d'un système soumis à l'excitation de deux signaux de fréquences différentes est améliorée pour une amplitude particulière du signal ayant la fréquence la plus élevée. Initialement révélé par Landa P.S. et McClintock P.V.E. [43], la résonance vibrationnelle fait encore à l'heure actuelle l'objet d'intenses recherches. Cependant, à ce jour, nos travaux constituent la seule considération expérimentale basée sur le modèle de FitzHugh-Nagumo [56, 199]. En premier lieu, nous avons vérifié qu'une valeur particulière de l'amplitude de la composante ayant la fréquence la plus élevée, permettait une génération de potentiels d'action synchronisés avec la fréquence d'excitation la plus basse. Suite à cette confirmation, nous avons cherché si cette amplitude particulière de la composante haute fréquence maximisait la présence de la basse fréquence dans le spectre du signal de sortie de notre circuit. Nous avons alors constaté que le niveau atteint à la basse fréquence de la réponse du système variait non linéairement selon l'amplitude de

la composante haute fréquence qui était appliquée. En effet, une amplitude optimale de la composante haute fréquence maximisait la présence de la composante basse fréquence dans la réponse du système.

En ne considérant désormais plus la fréquence de la seconde composante sinusoïdale fixe, un nouveau phénomène non linéaire est apparu : la résonance fréquentielle. L'originalité de ce phénomène réside essentiellement dans le fait que la résonance vibrationnelle peut être améliorée si la fréquence haute d'excitation est égale à l'un des multiples ou sous-multiples de la fréquence basse d'excitation. Lorsque nous avons initié nos travaux sur ce phénomène, la littérature faisait simplement état de simulations numériques réalisées sur un modèle d'oscillateur suramorti bistable [148]. De ce fait, nous avons proposé d'étudier numériquement et expérimentalement ce phénomène au travers du modèle de FitzHugh-Nagumo [55, 200]. En analysant l'évolution de la réponse à la basse fréquence d'excitation dans le spectre du signal de sortie du système en fonction des effets simultanés de l'amplitude et de la fréquence de la seconde composante sinusoïdale, nous avons notamment montré que pour chaque fréquence considérée, il existe une amplitude qui maximise cette composante spectrale. Par ailleurs, il est apparu que pour quelques valeurs spécifiques de la fréquence de la seconde composante sinusoïdale, lorsque celle-ci est sous-multiple, égale ou multiple de la fréquence basse d'excitation, la résonance vibrationnelle pouvait être nettement améliorée.

La dernière étude que nous avons menée en régime déterministe sur l'oscillateur élémentaire porte sur la bi-résonance vibrationnelle. Cet effet se manifeste en présence d'une excitation bichromatique, lorsque plusieurs maxima locaux sont atteints à la basse fréquence d'excitation dans la réponse du système, selon la fréquence et l'amplitude de la seconde composante sinusoïdale. Tout comme la résonance fréquentielle, la bi-résonance vibrationnelle peut être vue comme un phénomène dérivé de la résonance vibrationnelle. Cependant, la bi-résonance vibrationnelle se distingue des autres phénomènes par le fait que les deux fréquences d'excitation sont désormais très éloignées l'une de l'autre. Suite à une étude purement numérique où Yang L. *et al.* montraient, à partir d'un modèle de FitzHugh-Nagumo seuillé, que les résonances de la réponse d'un

système excitable pouvaient être prédites par les changements de *mode-locking* [147], nous avons pu confirmer expérimentalement que le fonctionnement du système en régime d'excitation monochromatique permettait bien de prédire la multi-résonance vibrationnelle observée à partir d'un signal exciteur bichromatique.

Dans le chapitre 4 de ce manuscrit, nous avons montré que le bruit pouvait aussi provoquer des réponses particulières dans les systèmes non linéaires. Comme dans le chapitre 3, nous avons commencé par considérer l'excitation stochastique la plus simple possible, puis nous l'avons progressivement complexifiée en lui ajoutant, une à une, chacune des composantes sinusoïdales. Pour chacun des stimuli ainsi obtenus, nous nous sommes attachés à montrer les phénomènes se déclenchant dans de telles conditions d'excitation. Ainsi, nous avons successivement évoqué la résonance cohérente, la résonance stochastique, les effets du bruit sur la résonance vibrationnelle et enfin la résonance stochastique fantôme. Le nombre considérable de contributions faisant état de simulations de systèmes neuronaux ou d'expérimentations réalisées à partir de circuits électroniques dans le cadre des deux premiers phénomènes cités nous a mené à concentrer notre attention sur les deux suivants. La considération d'une excitation bichromatique bruitée nous a notamment donné l'occasion d'étudier des phénomènes illustrant la riche dynamique du modèle de FitzHugh-Nagumo.

Tout d'abord, nous avons proposé une étude complémentaire sur la résonance vibrationnelle en nous intéressant aux effets du bruit sur la réponse du système à la fréquence basse du stimulus d'excitation. Afin d'établir les conditions d'existence du phénomène de résonance vibrationnelle dans un milieu bruité, nous avons successivement considéré différentes amplitudes d'un bruit blanc lorsque l'amplitude du signal haute fréquence varie, puis nous avons étudié le comportement du spectre d'amplitude du signal de sortie du système à la fréquence basse d'excitation. Au vu des allures résonantes obtenues pour les faibles valeurs de bruit, nous avons conclu que le bruit n'était pas un frein à la manifestation de la résonance vibrationnelle. Cependant, nous avons constaté que plus les valeurs de l'amplitude de bruit étaient importantes, plus les niveaux atteints par la réponse du système à la basse fréquence d'excitation diminuaient. De ce fait, c'est en

régime déterministe que nous avons observé la meilleure résonance vibrationnelle. En revanche, il est apparu que dans un milieu fortement bruité, le phénomène disparaissait totalement. Plus précisément, nous avons déterminé la valeur critique de l'amplitude de bruit pour laquelle la résonance vibrationnelle ne pouvait plus se manifester. Par la suite, en figeant successivement différentes amplitudes de la composante haute fréquence, nous avons constaté que l'amélioration par le bruit de la détection de la composante basse fréquence n'était possible qu'en cas de paramétrage déterministe sous-optimal. Dans ce cas, le bruit a pu être d'autant plus bénéfique, que l'amplitude de la composante haute fréquence était éloignée de celle qui maximisait la réponse du système en régime déterministe. Enfin, nous avons tiré les mêmes conclusions, que ce soit en présence d'un bruit coloré ou d'un bruit blanc. Par ailleurs, les effets de la coloration du bruit à proprement parler ont révélé que les niveaux atteints par la réponse du système à la basse fréquence d'excitation étaient d'autant plus faibles que le temps de corrélation du bruit était important.

Pour une toute autre configuration de l'excitation bichromatique, nous nous sommes ensuite intéressés à l'émergence dans la réponse du système d'une fréquence absente du signal excitateur pour une quantité optimale de bruit : c'est le phénomène de résonance stochastique fantôme. En 2002, Chialvo D.R. *et al.* ont établi une relation théorique permettant d'estimer la valeur théorique de la fréquence de résonance, que les fréquences d'entrée soient harmoniques ou inharmoniques [157]. Le modèle de FitzHugh-Nagumo n'ayant pas encore été considéré expérimentalement, nous nous sommes donc proposés de caractériser cet effet dans notre dispositif expérimental, en présence d'un bruit blanc ou coloré [57, 201].

Dans le cas de fréquences d'excitation harmoniques, en considérant des sources de bruit blanc puis coloré, nous avons montré qu'une quantité optimale de bruit permettait de maximiser la présence de la fréquence fantôme dans le spectre du signal de sortie du système. Puis, de façon plus conventionnelle pour ce phénomène, nous nous sommes intéressés à l'analyse statistique du signal de sortie de notre système. À nouveau, nous avons observé qu'une valeur adéquate d'un bruit blanc ou coloré permettait d'augmenter

la probabilité d'observer un déclenchement de potentiels d'action synchronisés avec la fréquence fantôme.

Enfin, dans le cas de fréquences d'excitation inharmoniques, c'est-à-dire présentant un décalage fréquentiel, nous avons montré par une analyse statistique que le déclenchement des potentiels d'action était conforme à la prédiction des fréquences de résonance théoriques énoncée par Chialvo D.R. *et al.* [157].

Le chapitre 5 du présent manuscrit était consacré à l'étude de la structure couplée développée au cours de cette thèse. Nous nous sommes attachés à étudier la propagation d'une information basse fréquence dans la ligne électrique, en considérant successivement l'apport d'une perturbation déterministe haute fréquence, puis d'une perturbation stochastique.

En soumettant les premières cellules de la ligne à une information basse fréquence subliminale, nous avons établi que la composante haute fréquence permettait de propager cette information jusqu'à des cellules où elle n'était pas appliquée. Ce phénomène est connu dans la littérature sous le nom de propagation vibrationnelle [47]. Que ce soit dans le domaine temporel ou fréquentiel, nous avons montré qu'une amplitude particulière de la composante haute fréquence maximisait la présence de la composante basse fréquence en bout de ligne. Sur les cellules où l'information n'était pas appliquée, cela s'est traduit dans le domaine temporel par la génération de potentiels d'action synchronisés avec la composante basse fréquence, tandis que dans le domaine fréquentiel, cela s'est manifesté par l'émergence, dans les spectres, d'une raie à cette fréquence. Suite à l'obtention de ces résultats, nous nous sommes attachés à analyser les effets du couplage sur la propagation de l'information. Nous avons établi qu'un couplage respectivement faible ou fort entre deux cellules voisines, empêchait ou favorisait la propagation de l'information dans la ligne.

Concernant la perturbation stochastique, nous avons successivement considéré des bruits *temporel* et *spatio-temporel*. Pour chacune de ces sources de bruit, nous avons discerné deux cas, l'un correspondant à un paramétrage déterministe sous-optimal de la

ligne électrique, l'autre correspondant quant à lui à une configuration quasi-optimale de la ligne électrique. Pour une configuration sous-optimale, les deux sources de bruit nous ont permis de montrer qu'une source de fluctuations aléatoires pouvait se substituer, en partie, à la perturbation déterministe haute fréquence et ainsi favoriser la propagation de l'information en bout de ligne. En revanche, pour un milieu paramétré de façon quasi-optimale, nous avons constaté qu'aucun bénéfice n'était à attendre du bruit. À mesure que celui-ci augmente, la propagation de la composante basse fréquence est dégradée. Enfin, pour une configuration initiale donnée, la comparaison des résultats obtenus à partir de sources de bruit *temporel* et *spatio-temporel* a permis de tirer deux conclusions. Premièrement, le bruit *spatio-temporel* permet d'obtenir des rapports signal sur bruit en bout de ligne supérieurs à ceux obtenus avec un bruit temporel. Deuxièmement, une plus large gamme d'amplitude du bruit *spatio-temporel* favorise la propagation de l'information en bout de ligne.

6.2/ PERSPECTIVES

À ce jour, les perspectives envisageables en prolongement de nos recherches sont de deux types. Certaines viendront compléter les analyses initiées pendant cette thèse tandis que d'autres pointeront sur de nouveaux phénomènes.

Concernant le premier axe de développement, conformément aux études envisagées dès la conception de la structure couplée [58], il sera intéressant d'étudier les effets de l'inhomogénéité du couplage dans la ligne sur la propagation de l'information. Dans un second temps, à l'image de nombreux travaux qui montrent l'occurrence de la résonance vibrationnelle dans des structures de neurones couplés, nous pensons qu'il nous sera possible de proposer une étude expérimentale réalisée sur diverses topologies de réseau [193].

Dans le cadre d'une cellule élémentaire, des études complémentaires pourront être proposées sur le phénomène de résonance stochastique fantôme, notamment en proposant des expérimentations avec un signal excitateur comprenant plus de deux compo-

santes. Par ailleurs, il serait également intéressant de mettre en œuvre une résonance fantôme déterministe, obtenue à partir d'un paramétrage initial *suprathreshold* [185].

Enfin, une autre piste nous mène à un nouveau phénomène peu étudié jusqu'alors, la *diversity-induced resonance* [202]. Ce phénomène tend à montrer qu'une disparité intermédiaire entre les différents éléments d'une structure couplée permet d'améliorer la réponse du système à une excitation subliminale. Ce phénomène permet notamment un rapprochement avec la réalité, où les systèmes naturels qui composent un ensemble présentent des disparités.

VALORISATION DES RÉSULTATS

Liste des publications ayant vues le jour pendant cette thèse :

REVUES AVEC COMITÉ DE LECTURE

- [P1]** M. Bordet, S. Morfu and P. Marquié. Ghost stochastic resonance in FitzHugh-Nagumo circuit. *Electron. Lett.*, 50 : 861-862, 2014. DOI : 10.1049/el.2014.0638.
- [P2]** M. Bordet and S. Morfu. Experimental and numerical study of noise effects in a FitzHugh-Nagumo system driven by a biharmonic signal. *Chaos, Solitons & Fractals*, 54 : 82-89, 2013. DOI : 10.1016/j.chaos.2013.05.020.
- [P3]** M. Bordet and S. Morfu. Experimental and numerical enhancement of vibrational resonance in neural circuit. *Electron. Lett.*, 48 : 903-905, 2012. DOI : 10.1049/el.2012.1343.

CONFÉRENCES INTERNATIONALES AVEC ACTES

- [Ci1]** M. Bordet, S. Morfu and P. Marquié. Resonance phenomena in a nonlinear neuronal circuit. In *8th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS2015), Paris (France)*, 2015. Proceeding à paraître.
- [Ci2]** M. Bordet, S. Morfu and M. Rossé. Colored noise effects on ghost stochastic resonance. In *4th International Conference on Complex Systems and Applications, Le Havre (France)*, 2014. Proceeding en ligne <http://iccsa2014.univ-lehavre.fr/iccsa2014proceedings.pdf>, p. 163-168.
- [Ci3]** S. Morfu, P. Marquié, G. Lassere and M. Bordet. A comparative study of noise effects in a FitzHugh-Nagumo circuit. In *4th International Conference on Complex Systems and Applications, Le Havre (France)*, 2014. Proceeding en ligne <http://iccsa2014.univ-lehavre.fr/iccsa2014proceedings.pdf>, p. 169-173.
- [Ci4]** M. Bordet and S. Morfu. Noise effect in a FitzHugh-Nagumo circuit driven by a bi-chromatic signal. In *22nd IEEE International Conference on Noise and Fluctuations, Montpellier (France)*, 2013. DOI : 10.1109/ICNF.2013.6578919.
- [Ci5]** S. Morfu, M. Bordet, G. Lassere and P. Marquié. A nonlinear electronic circuit mimicking the neuronal activity in presence of noise. In *22nd IEEE International Conference on Noise and Fluctuations, Montpellier (France)*, 2013. DOI : 10.1109/ICNF.2013.6578961.

CONFÉRENCE NATIONALE AVEC ACTES

- [Cn1]** M. Bordet, S. Morfu and P. Marquié. Effet d'une perturbation haute fréquence sur la réponse du système de FitzHugh-Nagumo soumis à une excitation basse fréquence subliminale : simulation et expérimentation. À la *18^e Rencontre du Non Linéaire, Paris (France)*, 2015. Publié p.31 à 36 des comptes rendu de la 18e Rencontre du Non Linéaire. ISBN 978-2-9538596-4-5 (EAN 9782953859645). Non-linéaire publications Saint-Etienne du Rouvray.

FOCUS

- [F1]** À la demande de l'éditeur, la publication sur le phénomène de ghost stochastic resonance [P1] parue dans *Electronics Letters* a fait l'objet d'un supplément détaillant le projet 2TNL (*Traitement et Transmission Non Linéaire de l'information*) du laboratoire LE2I, dans lequel s'inscrit ma thèse. Ce supplément d'une page, intitulé "Ghost in the machine" est paru dans *Electron. Lett.*, 50 : 844, 2014. DOI : 10.1049/el.2014.1867.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 237 :37–72, 1952.
- [2] C. Py, E. De Langre, and B. Moulia. A frequency lock-in mechanism in the interaction between wind and crop canopies. *Journal of Fluid Mechanics*, 568 :425–449, 2006.
- [3] M. Rodriguez, E. De Langre, and B. Moulia. A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization. *American Journal of Botany*, 95 :1523–1537, 2008.
- [4] H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Paris, Gauthier-Villars*, 1, 1892.
- [5] H.D.I. Abarbanel, M.I. Rabinovich, and M.M. Sushchik. *Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists*. 1993.
- [6] B. Van der Pol and M.J. Van der Mark. Le battement du cœur considéré comme oscillation de relaxation et un modèle électrique du cœur. *Onde Electrique*, 7 :365–392, 1928.
- [7] V. Volterra. Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. *Paris, Gauthier-Villars*, 1, 1931.
- [8] B. Ibarz, J.M. Casado, and M.A.F. Sanjuán. Map-based models in neuronal dynamics. *Physics Reports*, 501 :1–74, 2011.
- [9] A.L. Hodgkin and A.F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117 :500–544, 1952.
- [10] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1 :445–466, 1961.
- [11] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 50 :2061–2070, 1962.
- [12] H.R. Wilson and J.D. Cowan. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical Journal*, 12 :1–24, 1972.
- [13] C. Morris and H. Lecar. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical Journal*, 35 :193–213, 1981.

- [14] J.L. Hindmarsh and R.M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 221 :87–102, 1984.
- [15] B.D. Burns. The mechanism of after-bursts in cerebral cortex. *The Journal of Physiology*, 127 :168–188, 1955.
- [16] L.D. Harmon. Artificial neuron. *Science*, 129 :962–963, 1959.
- [17] V.K. Küpfmüller and F. Jenik. Über die Naehrichtenverarbeitung in der Nervenzelle. *Kybernetik*, 1 :1–6, 1961.
- [18] M.F. Simoni, G.S. Cymbalyuk, M.E. Sorensen, R.L. Calabrese, and S.P. DeWeerth. A multiconductance silicon neuron with biologically matched dynamics. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 51 :342–354, 2004.
- [19] P. Marquié, J.C. Comte, and S. Morfu. Analog simulation of neural information propagation using an electrical FitzHugh-Nagumo lattice. *Chaos, Solitons & Fractals*, 19 :27–30, 2004.
- [20] A. Basu. Small-signal neural models and their applications. *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, 6 :64–75, 2012.
- [21] R. Behdad, S. Binczak, A.S. Dmitrichev, V.I. Nekorkin, and J.M. Bilbault. Artificial electrical Morris-Lecar neuron. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014.
- [22] A.S. Pikovsky and J. Kurths. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Physical Review Letters*, 78 :775–778, 1997.
- [23] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 70 :223–287, 1998.
- [24] M. McDonnell, N. Stocks, C. Pearce, and D. Abbott. *Stochastic Resonance : from Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization*. Cambridge University Press, 2008.
- [25] B. Lindner and L. Schimansky-Geier. Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance. *Physical Review E*, 60 :7270, 1999.
- [26] B. Lindner and L. Schimansky-Geier. Coherence and stochastic resonance in a two-state system. *Physical Review E*, 61 :6103, 2000.
- [27] B. McNamara and K. Wiesenfeld. Theory of stochastic resonance. *Physical Review A*, 39 :4854, 1989.
- [28] D. Rousseau, J. Rojas-Varela, and F. Chapeau-Blondeau. Stochastic resonance for nonlinear sensors with saturation. *Physical Review E*, 67 :021102, 2003.

- [29] F. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott. Double-maximum enhancement of signal-to-noise ratio gain via stochastic resonance and vibrational resonance. *Physical Review E*, 90 :022134, 2014.
- [30] S.K. Han, T.G. Yim, D.E. Postnov, and O.V. Sosnovtseva. Interacting coherence resonance oscillators. *Physical Review Letters*, 83 :1771, 1999.
- [31] V. Pérez-Muñuzuri, R. Deza, K. Fraedrich, T. Kunz, and F. Lunkeit. Coherence resonance in an atmospheric global circulation model. *Physical Review E*, 71 :065602(R), 2005.
- [32] T. Zhou and F. Moss. Analog simulations of stochastic resonance. *Physical Review A*, 41 :4255, 1990.
- [33] D. Rousseau and F. Chapeau-Blondeau. Constructive role of noise in signal detection from parallel arrays of quantizers. *Signal Processing*, 85 :571–580, 2005.
- [34] S. Arathi and S. Rajasekar. Stochastic resonance in a single-well anharmonic oscillator with coexisting attractors. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 :4049–4056, 2014.
- [35] X. Godivier and F. Chapeau-Blondeau. Noise-assisted signal transmission in a nonlinear electronic comparator : Experiment and theory. *Signal Processing*, 56 :293–303, 1997.
- [36] D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, and N.G. Stocks. Stochastic resonance in electrical circuits - I : Conventional stochastic resonance. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 46 :1205–1214, 1999.
- [37] S. Brugioni, D.-U. Hwang, R. Meucci, and S. Boccaletti. Coherence resonance in excitable electronic circuits in the presence of colored noise. *Physical Review E*, 71 :062101, 2005.
- [38] M. Misono, T. Todo, and K. Miyakawa. Coherence resonance in a Schmitt-trigger inverter with delayed feedback. *Journal of the Physical Society of Japan*, 78 :014802, 2008.
- [39] S.G. Lee, A. Neiman, and S. Kim. Coherence resonance in Hodgkin-Huxley neuron. *Physical Review E*, 57 :3292, 1998.
- [40] S. Wu, W. Ren, K. He, and Z. Huang. Burst and coherence resonance in Rose-Hindmarsh model induced by additive noise. *Physics Letters A*, 279 :347–354, 2001.
- [41] A.R. Bulsara, E.W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, and L. Kiss. Stochastic resonance in a single neuron model : Theory and analog simulation. *Journal of Theoretical Biology*, 152 :531–535, 1991.

- [42] A. Longtin, A.R. Bulsara, and F. Moss. Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Physical Review Letters*, 67 :656, 1991.
- [43] P.S. Landa and P.V.E. McClintock. Vibrational resonance. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 33 :L433–L438, 2000.
- [44] D.R. Chialvo. Illusions and ghost resonances : How we could see what isn't there. In *UPON2002 - Unsolved Problems of Noise and Fluctuations : Third International Conference on*, 2003.
- [45] F. Chapeau-Blondeau and J. Rojas-Varela. Nonlinear signal propagation enhanced by noise via stochastic resonance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10 :1951–1959, 2000.
- [46] S. Morfu, J.C. Comte, J.M. Bilbault, and P. Marquié. Noise-enhanced propagation in a dissipative chain of triggers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12 :629–633, 2002.
- [47] E. Ullner, A. Zaikin, J. García-Ojalvo, R. Báscones, and J. Kurths. Vibrational resonance and vibrational propagation in excitable systems. *Physics Letters A*, 312 :348–354, 2003.
- [48] S.B. Yamgoué, S. Morfu, and P. Marquié. Noise effects on gap wave propagation in a nonlinear discrete LC transmission line. *Physical Review E*, 75 :036211, 2007.
- [49] I. Ratas and K. Pyragas. Effect of high-frequency stimulation on nerve pulse propagation in the FitzHugh-Nagumo model. *Nonlinear Dynamics*, 67 :2899–2908, 2012.
- [50] P. Balenzuela and J. García-Ojalvo. Neural mechanism for binaural pitch perception via ghost stochastic resonance. *Chaos*, 15 :023903, 2005.
- [51] R. Jothimurugan, K. Thamilmaran, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Experimental evidence for vibrational resonance and enhanced signal transmission in Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23 :1350189, 2013.
- [52] V.N. Chizhevsky, E. Smeu, and G. Giacomelli. Experimental evidence of "vibrational resonance" in VCSELs. *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin, Series A : Applied Mathematics and Physics*, 70 :31–40, 2008.
- [53] J.M. Buldú, D.R. Chialvo, C.R. Mirasso, M.C. Torrent, and J. García-Ojalvo. Ghost resonance in a semiconductor laser with optical feedback. *Europhysics Letters*, 64 :178–184, 2003.
- [54] A. Lopera, J.M. Buldú, M.C. Torrent, D.R. Chialvo, and J. García-Ojalvo. Ghost stochastic resonance with distributed inputs in pulse-coupled electronic neurons. *Physical Review E*, 73 :021101, 2006.

- [55] M. Bordet and S. Morfu. Experimental and numerical enhancement of vibrational resonance in neural circuit. *Electronics Letters*, 48 :903–905, 2012.
- [56] M. Bordet and S. Morfu. Experimental and numerical study of noise effects in a FitzHugh-Nagumo system driven by a biharmonic signal. *Chaos, Solitons & Fractals*, 54 :82–89, 2013.
- [57] M. Bordet, S. Morfu, and P. Marquié. Ghost stochastic resonance in FitzHugh-Nagumo circuit. *Electronics Letters*, 50 :861–862, 2014.
- [58] S. Morfu. *Systèmes électroniques non linéaires : implémentation de dispositifs de transmission et de traitement du signal et de l'information*. Habilitation à diriger des recherches - Université de Bourgogne - Laboratoire LE2I UMR CNRS 5158, 2010.
- [59] G. Lassere. *Implémentation électronique d'un oscillateur non linéaire soumis au bruit : application à la modélisation du codage neuronal de l'information*. PhD thesis, Université de Bourgogne - Laboratoire LE2I UMR CNRS 5158, 2011.
- [60] G. Lassere, S. Morfu, and P. Marquié. Coherence resonance in Bonhoeffer-Van der Pol circuit. *Electronics Letters*, 45 :669–670, 2009.
- [61] G. Lassere, S. Morfu, and P. Marquié. A nonlinear electronic circuit exhibiting coherence resonance. In *NDES2009 - 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, from 21st to 24th June 2009.
- [62] S. Morfu, M. Bordet, G. Lassere, and P. Marquié. A nonlinear electronic circuit mimicking the neuronal activity in presence of noise. In *ICNF2013 - 22nd IEEE International Conference on Noise and Fluctuations*, from 24th to 28th June 2013.
- [63] S. Morfu, P. Marquié, G. Lassere, and M. Bordet. A comparative study of noise effects in a FitzHugh-Nagumo circuit. In *ICCSA2014 - 4th International Conference on Complex Systems and Applications*, from 23rd to 26th June 2014.
- [64] J.F. Lindner, S. Chandramouli, A.R. Bulsara, M. Löcher, and W.L. Ditto. Noise enhanced propagation. *Physical Review Letters*, 81 :5048–5051, 1998.
- [65] F. Chapeau-Blondeau. Noise-assisted propagation over a nonlinear line of threshold elements. *Electronics Letters*, 35(13) :1055–1056, June 1999.
- [66] F. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott. Noise-enhanced SNR gain in parallel array of bistable oscillators. *Electronics Letters*, 42 :1008–1009, 2006.
- [67] T. Homma and A. Saltelli. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models. *Reliability Engineering & System Safety*, 52 :1–17, 1996.
- [68] A. Daza, A. Wagemakers, and M.A.F. Sanjuán. Strong sensitivity of the vibrational resonance induced by fractal structures. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23 :1350129, 2013.

- [69] M. Koda. Sensitivity analysis of stochastic dynamical systems. *International Journal of Systems Science*, 23 :2187–2195, 1992.
- [70] G.E. Uhlenbeck and L.S. Ornstein. On the theory of the Brownian motion. *Physical Review*, 36 :823–841, 1930.
- [71] O. Calvo and D.R. Chialvo. Ghost stochastic resonance in an electronic circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16 :731–735, 2006.
- [72] S. Morfu. *Étude des défauts et perturbations dans les réseaux électroniques dissipatifs non linéaires : applications à la transmission et au traitement du signal*. PhD thesis, Université de Bourgogne - Laboratoire LE2I UMR CNRS 5158, 2002.
- [73] J.C. Comte and S. Morfu. Stochastic resonance : another way to retrieve subthreshold digital data. *Physics Letters A*, 309 :39–43, 2003.
- [74] S. Morfu, J.M. Bilbault, and J.C. Comte. Digital information receiver based on stochastic resonance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13 :233–236, 2003.
- [75] F. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott. Enhancing array stochastic resonance in ensembles of excitable systems. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, page P08017, 2009.
- [76] L.D. Harmon. Studies with artificial neurons, I : Properties and functions of an artificial neuron. *Kybernetik*, 1 :89–101, 1961.
- [77] J. Nagumo and S. Sato. On a response characteristic of a mathematical neuron model. *Kybernetik*, 10 :155–164, 1972.
- [78] D.T. Kaplan, J.R. Clay, T. Manning, L. Glass, M.R. Guevara, and A. Shrier. Subthreshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons. *Physical Review Letters*, 76 :4074–4077, 1996.
- [79] L.S. Borkowski. Response of a Hodgkin-Huxley neuron to a high-frequency input. *Physical Review E*, 80 :051914, 2009.
- [80] T.H. Bullock. A preparation for the physiological study of the unit synapse. *Nature*, 158 :955–956, 1946.
- [81] L.S. Borkowski. Bistability and resonance in the periodically stimulated Hodgkin-Huxley model with noise. *Physical Review E*, 83 :051901, 2011.
- [82] K. Aihara, G. Matsumoto, and Y. Ikegaya. Periodic and non-periodic responses of a periodically forced Hodgkin-Huxley oscillator. *Journal of Theoretical Biology*, 109 :249–269, 1984.
- [83] S.G. Lee and S. Kim. Bifurcation analysis of mode-locking structure in a Hodgkin-Huxley neuron under sinusoidal current. *Physical Review E*, 73 :041924, 2006.

- [84] H. Gangal and G. Dar. Mode locking, chaos and bifurcations in Hodgkin-Huxley neuron forced by sinusoidal current. In *7th CHAOS Conference proceedings*, from 7th to 10th June 2014.
- [85] E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin, and E. Mosekilde. Resonant activation in a stochastic Hodgkin-Huxley model : Interplay between noise and suprathreshold driving effects. *The European Physical Journal B : Condensed Matter and Complex Systems*, 45 :391–397, 2005.
- [86] S. Rajasekar and M. Lakshmanan. Period-doubling bifurcations, chaos, phase-locking and devil's staircase in a Bonh  ffer-Van der Pol oscillator. *Physica D*, 32 :146–152, 1988.
- [87] M. Feingold, D.L. Gonzalez, O. Piro, and H. Viturro. Phase locking, period doubling, and chaotic phenomena in externally driven excitable systems. *Physical Review A*, 37 :4060, 1988.
- [88] A. Longtin and D.R. Chialvo. Stochastic and deterministic resonances for excitable systems. *Physical Review Letters*, 81 :4012–4015, 1998.
- [89] K. Yoshino, T. Nomura, K. Pakdaman, and S. Sato. Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models. *Physical Review E*, 59 :956, 1999.
- [90] A. di Garbo, M. Barbi, and S. Chillemi. Dynamical behavior of the linearized version of the FitzHugh-Nagumo neural model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11 :2549–2558, 2001.
- [91] E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin, and B. Spagnolo. Suppression of noise in FitzHugh-Nagumo model driven by a strong periodic signal. *Physics Letters A*, 344 :43–50, 2005.
- [92] A.O. Maksimov. On the subharmonic emission of gas bubbles under two-frequency excitation. *Ultrasonics*, 35 :79–86, 1997.
- [93] D.C. Su, M.H. Chiu, and C.D. Chen. Simple two-frequency laser. *Precision Engineering*, 18 :161–163, 1996.
- [94] J.D. Victor and M.M. Conte. Two-frequency analysis of interactions elicited by Vernier stimuli. *Visual Neuroscience*, 17 :959–973, 2000.
- [95] V.E. Gherm, N.N. Zernov, B. Lundborg, and A. V  stberg. The two-frequency coherence function for the fluctuating ionosphere : narrowband pulse propagation. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 59 :1831–1841, 1997.
- [96] M. Gitterman. Bistable oscillator driven by two periodic fields. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 34 :L355–L357, 2001.

- [97] A.A. Zaikin, L. López, J.P. Baltanás, J. Kurths, and M.A.F. Sanjuán. Vibrational resonance in a noise-induced structure. *Physical Review E*, 66 :011106, 2002.
- [98] J.P. Baltanás, L. López, I.I. Blechman, P.S. Landa, A. Zaikin, J. Kurths, and M.A.F. Sanjuán. Experimental evidence, numerics, and theory of vibrational resonance in bistable systems. *Physical Review E*, 67 :066119, 2003.
- [99] D. Barkley, M. Kness, and L.S. Tuckerman. Spiral-wave dynamics in a simple model of excitable media : The transition from simple to compound rotation. *Physical Review A*, 42 :2489, 1990.
- [100] V.N. Chizhevsky, E. Smeu, and G. Giacomelli. Experimental evidence of “vibrational resonance” in an optical system. *Physical Review Letters*, 91 :220602, 2003.
- [101] V.N. Chizhevsky and G. Giacomelli. Experimental and theoretical study of the noise-induced gain degradation in vibrational resonance. *Physical Review E*, 70 :062101, 2004.
- [102] V.N. Chizhevsky and G. Giacomelli. Improvement of signal-to-noise ratio in a bistable optical system : Comparison between vibrational and stochastic resonance. *Physical Review A*, 71 :011801(R), 2005.
- [103] V.N. Chizhevsky and G. Giacomelli. Experimental and theoretical study of vibrational resonance in a bistable system with asymmetry. *Physical Review E*, 73 :022103, 2006.
- [104] V.N. Chizhevsky and G. Giacomelli. Vibrational resonance and the detection of aperiodic binary signals. *Physical Review E*, 77 :051126, 2008.
- [105] V.N. Chizhevsky. Analytical study of vibrational resonance in an overdamped bistable oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18 :1767–1773, 2008.
- [106] V.N. Chizhevsky. Enhancement of response of a bistable VCSEL to modulated orthogonal optical feedback by vibrational resonance. *Optics Letters*, 37 :4386–4388, 2012.
- [107] V.N. Chizhevsky. Experimental evidence of vibrational resonance in a multistable system. *Physical Review E*, 89 :062914, 2014.
- [108] A. Wickenbrock, P.C. Holz, N.A. Abdul Wahab, P. Phoonthong, D. Cubero, and F. Renzoni. Vibrational mechanics in an optical lattice : Controlling transport via potential renormalization. *Physical Review Letters*, 108 :020603, 2012.
- [109] S. Ghosh and D.S. Ray. Nonlinear vibrational resonance. *Physical Review E*, 88 :042904, 2013.

- [110] I.I. Blekhman and P.S. Landa. Conjugate resonances and bifurcations in nonlinear systems under biharmonic excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39 :421–426, 2004.
- [111] S. Rajasekar, S. Jeyakumari, V. Chinnathambi, and M.A.F. Sanjuán. Role of depth and location of minima of a double-well potential on vibrational resonance. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 43 :465101, 2010.
- [112] S. Jeyakumari, V. Chinnathambi, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Vibrational resonance in an asymmetric Duffing oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21 :275–286, 2011.
- [113] C. Jeevarathinam, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Theory and numerics of vibrational resonance in Duffing oscillators with time-delayed feedback. *Physical Review E*, 83 :066205, 2011.
- [114] J.H. Yang and H. Zhu. Vibrational resonance in Duffing systems with fractional-order damping. *Chaos*, 22 :013112, 2012.
- [115] C. Jeevarathinam, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Effect of multiple time-delay on vibrational resonance. *Chaos*, 23 :013136, 2013.
- [116] J.H. Yang and H. Zhu. Bifurcation and resonance induced by fractional-order damping and time delay feedback in a Duffing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18 :1316–1326, 2013.
- [117] J.H. Yang, M.A.F. Sanjuán, W. Xiang, and H. Zhu. Pitchfork bifurcation and vibrational resonance in a fractional-order Duffing oscillator. *Pramana - Journal of Physics*, 81 :943–957, 2013.
- [118] J.H. Yang, M.A.F. Sanjuán, C.J. Wang, and H. Zhu. Vibrational resonance in a Duffing system with a generalized delayed feedback. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2 :397–408, 2013.
- [119] S. Rajasekar and M.A.F. Sanjuán. *Nonlinear Dynamics and Complexity, Vol. 8*. Springer International Publishing, 2013.
- [120] M. Cocco, G. Litak, J.M. Seoane, and M.A.F. Sanjuán. Energy harvesting enhancement by vibrational resonance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24 :1430019, 2014.
- [121] S. Rajasekar, K. Abirami, and M.A.F. Sanjuán. Novel vibrational resonance in multistable systems. *Chaos*, 21 :033106, 2011.
- [122] J.H. Yang and X.B. Liu. Controlling vibrational resonance in a delayed multistable system driven by an amplitude-modulated signal. *Physica Scripta*, 82 :025006, 2010.

- [123] V.M. Gandhimathi, S. Rajasekar, and J. Kurths. Vibrational and stochastic resonances in two coupled overdamped anharmonic oscillators. *Physics Letters A*, 360 :279–286, 2006.
- [124] V.M. Gandhimathi and S. Rajasekar. Vibrational and stochastic resonances in two coupled overdamped anharmonic oscillators driven by an amplitude modulated force. *Physica Scripta*, 76 :693–698, 2007.
- [125] J.H. Yang and X.B. Liu. Controlling vibrational resonance in a multistable system by time delay. *Chaos*, 20 :033124, 2010.
- [126] C.J. Fang and X.B. Liu. Theoretical analysis on the vibrational resonance in two coupled overdamped anharmonic oscillators. *Chinese Physics Letters*, 29 :050504, 2012.
- [127] C. Stan, C.P. Cristescu, D. Alexandroaei, and M. Agop. Stochastic resonance and vibrational resonance in an excitable system : The golden mean barrier. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41 :727–734, 2009.
- [128] F. Guo. Multiplicative noise-induced vibrational resonance in a monostable system with one high-frequency and two low-frequency forces. *Physica Scripta*, 83 :025008, 2011.
- [129] J. Casado-Pascual and J.P. Baltanás. Effects of additive noise on vibrational resonance in a bistable system. *Physical Review E*, 69 :046108, 2004.
- [130] J.H. Yang and X.B. Liu. Delay induces quasi-periodic vibrational resonance. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 43 :122001, 2010.
- [131] M. Gosak, M. Perc, and S. Kralj. The impact of static disorder on vibrational resonance in a ferroelectric liquid crystal. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 553 :13–20, 2012.
- [132] K. Abirami, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Vibrational resonance in the Morse oscillator. *Pramana - Journal of Physics*, 81 :127–141, 2013.
- [133] S. Jeyakumari, V. Chinnathambi, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Single and multiple vibrational resonance in a quintic oscillator with monostable potentials. *Physical Review E*, 80 :046608, 2009.
- [134] S. Jeyakumari, V. Chinnathambi, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Analysis of vibrational resonance in a quintic oscillator. *Chaos*, 19 :043128, 2009.
- [135] L. Ravisankar, S. Guruparan, S. Jeyakumari, and V. Chinnathambi. Effect of depth and location of minima of a double-well potential on vibrational resonance in a quintic oscillator. *The International Journal of Engineering*, 1 :81–92, 2012.
- [136] C.J. Wang. Vibrational resonance in an overdamped system with a sextic double-well potential. *Chinese Physics Letters*, 28 :090504, 2011.

- [137] A. Ichiki, Y. Tadokoro, and M. Takanashi. Linear response analysis of vibrational resonance in over-damped systems. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 45 :385101, 2012.
- [138] K.P. Harikrishnan and G. Ambika. Resonance phenomena in discrete systems with bichromatic input signal. *The European Physical Journal B : Condensed Matter and Complex Systems*, 61 :343–353, 2008.
- [139] J.H. Yang. Vibrational resonance in fractional-order anharmonic oscillators. *Chinese Physics Letters*, 29 :104501, 2012.
- [140] C. Jeevarathinam, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Vibrational resonance in groundwater-dependent plant ecosystems. *Ecological Complexity*, 15 :33–42, 2013.
- [141] J. Shi, C. Huang, T. Dong, and X. Zhang. High-frequency and low-frequency effects on vibrational resonance in a synthetic gene network. *Physical Biology*, 7 :036006, 2010.
- [142] C.J. Wang and K. Yang. Vibrational resonance in bistable gene transcriptional regulatory system. *Chinese Journal of Physics*, 50 :607–618, 2012.
- [143] A. Daza, A. Wagemakers, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Vibrational resonance in a time-delayed genetic toggle switch. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18 :411–416, 2013.
- [144] D. Cubero, J.P. Baltanás, and J. Casado-Pascual. High-frequency effects in the FitzHugh-Nagumo neuron model. *Physical Review E*, 73 :061102, 2006.
- [145] B. Deng, J. Wang, X. Wei, H. Yu, and H. Li. Theoretical analysis of vibrational resonance in a neuron model near a bifurcation point. *Physical Review E*, 89 :062916, 2014.
- [146] C.J. Wang, K. Yang, and S. Qu. Vibrational resonance in a discrete neuronal model with time delay. *International Journal of Modern Physics B*, 28 :1450103, 2014.
- [147] L. Yang, W. Liu, M. Yi, C.J. Wang, Q. Zhu, X. Zhan, and Y. Jia. Vibrational resonance induced by transition of phase-locking modes in excitable systems. *Physical Review E*, 86 :016209, 2012.
- [148] C. Yao, Y. Liu, and M. Zhan. Frequency-resonance-enhanced vibrational resonance in bistable systems. *Physical Review E*, 83 :061122, 2011.
- [149] D.L. Hu, J.H. Yang, and X.B. Liu. Delay-induced vibrational multiresonance in FitzHugh-Nagumo system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 :1031–1035, 2012.

- [150] D.L. Hu, J.H. Yang, and X.B. Liu. Vibrational resonance in the FitzHugh-Nagumo system with time-varying delay feedback. *Computers in Biology and Medicine*, 45 :80–86, 2014.
- [151] Z.Y. He and Y.R. Zhou. Vibrational and stochastic resonance in the FitzHugh-Nagumo neural model with multiplicative and additive noise. *Chinese Physics Letters*, 28 :110505, 2011.
- [152] P. Hasler, P.D. Smith, R. Ellis, D. Graham, and D. Anderson. Biologically inspired auditory sensing system interfaces on a chip. *Sensors, 2002. Proceedings of IEEE*, 1 :669–674, 2002.
- [153] C. Posch. Bio-inspired vision. *Journal of Instrumentation*, 7 :C01054, 2012.
- [154] S. Morfu, P. Marquié, B. Nofiele, and D. Ginjac. Nonlinear systems for image processing. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 152 :79–151, 2008.
- [155] E. Ippen, J. Lindner, and W.L. Ditto. Chaotic resonance : A simulation. *Journal of Statistical Physics*, 70 :437–450, 1993.
- [156] R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 14 :L453–L457, 1981.
- [157] D.R. Chialvo, O. Calvo, D.L. Gonzalez, O. Piro, and G.V. Savino. Subharmonic stochastic synchronization and resonance in neuronal systems. *Physical Review E*, 65 :050902(R), 2002.
- [158] G. Schmid, I. Goychuk, and P. Hänggi. Channel noise and synchronization in excitable membranes. *Physica A*, 325 :165–175, 2003.
- [159] D. Paydarfar and D.M. Buerkel. Dysrhythmias of the respiratory oscillator. *Chaos*, 5 :18–29, 1995.
- [160] D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, S.K. Han, and W.S. Kim. Noise-induced multimode behavior in excitable systems. *Physical Review E*, 66 :016203, 2002.
- [161] Md. Nurujjaman, P.S. Bhattacharya, A.N. Sekar Iyengar, and Sandip Sarkar. Coherence resonance in a unijunction transistor relaxation oscillator. *Physical Review E*, 80 :015201(R), 2009.
- [162] B. Lindner, J. García-Ojalvo, A. Neiman, and L. Schimansky-Geier. Effects of noise in excitable systems. *Physics Reports*, 392 :321–424, 2004.
- [163] P. Jung. Periodically driven stochastic systems. *Physics Reports*, 234 :175–295, 1993.
- [164] C. Nicolis and G. Nicolis. Stochastic aspects of climatic transitions - Additive fluctuations. *Tellus*, 33 :225–234, 1981.

- [165] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani. Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*, 34 :10–16, 1982.
- [166] X. Pei, K. Bachmann, and F. Moss. The detection threshold, noise and stochastic resonance in the FitzHugh-Nagumo neuron model. *Physics Letters A*, 206 :61–65, 1995.
- [167] T. Kanamaru, T. Horita, and Y. Okabe. Theoretical analysis of array-enhanced stochastic resonance in the diffusively coupled FitzHugh-Nagumo equation. *Physical Review E*, 64 :031908, 2001.
- [168] A. Longtin. Stochastic resonance in neuron models. *Journal of Statistical Physics*, 70 :309–327, 1993.
- [169] D. Nozaki and Y. Yamamoto. Enhancement of stochastic resonance in a FitzHugh-Nagumo neuronal model driven by colored noise. *Physics Letters A*, 243 :281–287, 1998.
- [170] D. Nozaki, D.J. Mar, P. Grigg, and J.J. Collins. Effects of colored noise on stochastic resonance in sensory neurons. *Physical Review Letters*, 82 :2402–2405, 1999.
- [171] J.K. Douglass, L. Wilkens, Pantazelou E., and F. Moss. Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance. *Nature*, 365 :337–340, 1993.
- [172] S. Fauve and F. Heslot. Stochastic resonance in a bistable system. *Physics Letters A*, 97 :5–7, 1983.
- [173] X. Godivier, J. Rojas-Varela, and F. Chapeau-Blondeau. Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity. *Electronics Letters*, 33 :1666–1668, 1997.
- [174] G.P. Harmer and D. Abbott. Simulation of circuits demonstrating stochastic resonance. *Microelectronics Journal*, 31 :553–559, 2000.
- [175] D. Rousseau, J. Rojas-Varela, F. Duan, and F. Chapeau-Blondeau. Evaluation of a nonlinear bistable filter for binary signal detection. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15 :667–679, 2005.
- [176] D.R. Chialvo. How we hear what is not there : A neural mechanism for the missing fundamental illusion. *Chaos*, 13 :1226–1230, 2003.
- [177] J.F. Schouten, R.J. Ritsma, and B.L. Cardozo. Pitch of the residue. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34 :1418–1424, 1962.
- [178] J.H.E. Cartwright, D.L. González, and O. Piro. Nonlinear dynamics of the perceived pitch of complex sounds. *Physical Review Letters*, 82 :5389–5392, 1999.
- [179] S. Martignoli and R. Stoop. Local cochlear correlations of perceived pitch. *Physical Review Letters*, 105 :048101, 2010.

- [180] S Martignoli, F Gomez, and R. Stoop. Pitch sensation involves stochastic resonance. *Scientific Reports*, 3 :2676, 2013.
- [181] K. Fujii, S. Kita, T. Matsushima, and Y. Ando. The missing fundamental phenomenon in temporal vision. *Psychological Research*, 64 :149–154, 2000.
- [182] E. Manjarrez, P. Balenzuela, J. García-Ojalvo, E.E. Vásquez, L. Martínez, A. Flores, and C.R. Mirasso. Phantom reflexes : Muscle contractions at a frequency not physically present in the input stimuli. *BioSystems*, 90 :379–388, 2007.
- [183] H. Braun, A. Ganopolski, M. Christl, and D.R. Chialvo. A simple conceptual model of abrupt glacial climate events. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 14 :709–721, 2007.
- [184] H. Braun, P. Ditlevsen, and J. Kurths. New measures of multimodality for the detection of a ghost stochastic resonance. *Chaos*, 19 :043132, 2009.
- [185] I. Gomes, M.V.D. Vermelho, and M.L. Lyra. Ghost resonance in the chaotic Chua's circuit. *Physical Review E*, 85 :056201, 2012.
- [186] G. Van der Sande, G. Verschaffelt, J. Danckaert, and C.R. Mirasso. Ghost stochastic resonance in vertical-cavity surface-emitting lasers : Experiment and theory. *Physical Review E*, 72 :016113, 2005.
- [187] J.M. Buldú, C.M. González, J. Trull, M.C. Torrent, and J. García-Ojalvo. Coupling-mediated ghost resonance in mutually injected lasers. *Chaos*, 15 :013103, 2005.
- [188] M.T. Giraudo and L. Sacerdote. Ghost stochastic resonance for a stochastic single neuron model. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 19 :723–736, 2006.
- [189] P. Balenzuela, J. García-Ojalvo, E. Manjarrez, L. Martínez, and C.R. Mirasso. Ghost resonance in a pool of heterogeneous neurons. *BioSystems*, 89 :166–172, 2007.
- [190] T. Noguchi and H. Torikai. Ghost stochastic resonance from an asynchronous cellular automaton neuron model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 60 :111–115, 2013.
- [191] I.G. Silva, O.A. Rosso, M.V.D. Vermelho, and M.L. Lyra. Ghost stochastic resonance induced by a power-law distributed noise in the FitzHugh-Nagumo neuron model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22 :641–649, 2015.
- [192] S. Rajamani, S. Rajasekar, and M.A.F. Sanjuán. Ghost-vibrational resonance. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 :4003–4012, 2014.
- [193] B. Deng, J. Wang, X. Wei, K.M. Tsang, and W.L. Chan. Vibrational resonance in neuron populations. *Chaos*, 20 :013113, 2010.
- [194] H. Yu, J. Wang, C. Liu, B. Deng, and X. Wei. Vibrational resonance in excitable neuronal systems. *Chaos*, 21 :043101, 2011.

- [195] H. Yu, J. Wang, J. Sun, and H. Yu. Effects of hybrid synapses on the vibrational resonance in small-world neuronal networks. *Chaos*, 22 :033105, 2012.
- [196] Y. Qin, J. Wang, C. Men, B. Deng, and X. Wei. Vibrational resonance in feedforward network. *Chaos*, 21 :023133, 2011.
- [197] M. Uzuntarla, E. Yilmaz, A. Wagemakers, and M. Ozer. Vibrational resonance in heterogeneous scale free network of neurons. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22 :367–374, 2015.
- [198] B. Deng, J. Wang, and X. Wei. Effect of chemical synapse on vibrational resonance in coupled neurons. *Chaos*, 19 :013117, 2009.
- [199] M. Bordet and S. Morfu. Noise effect in a FitzHugh-Nagumo circuit driven by a bichromatic signal. In *ICNF2013 - 22nd IEEE International Conference on Noise and Fluctuations*, from 24th to 28th June 2013.
- [200] M. Bordet, S. Morfu, and P. Marquié. Resonance phenomena in a nonlinear neuronal circuit. In *CHAOS2015 - 8th Chaos Modelling and Simulation International Conference*, from 26th to 29th May 2015.
- [201] M. Bordet, S. Morfu, and M. Rossé. Colored noise effects on ghost stochastic resonance. In *ICCSA2014 - 4th International Conference on Complex Systems and Applications*, from 23rd to 26th June 2014.
- [202] C.J. Tessone, C.R. Mirasso, R. Toral, and J.D. Gunton. Diversity-induced resonance. *Physical Review Letters*, 97 :194101, 2006.
- [203] Analog Devices. Low cost analog multiplier. *AD633 datasheet*, 2000.
- [204] J.C. Comte and P. Marquié. Generation of nonlinear current-voltage characteristics : A general method. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12 :447–449, 2002.

TABLE DES FIGURES

2.1	Photographie de l'oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo construit au début de cette thèse.	8
2.2	Schéma électrique de l'oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo. Comme nous le verrons par la suite, les paramètres γ et ε du modèle théorique (2.1) sont ajustés avec les résistances R_0 et R , le condensateur C et l'inductance L . L'élément R_{NL} encadré en pointillés permet de produire le courant non linéaire $I_{NL}(V)$. Les sources de tension a et b fixent les racines de la non-linéarité cubique du modèle de FitzHugh-Nagumo, tandis que $E(t)$ constitue l'excitation du système dont on relève la réponse grâce aux tensions V et X	9
2.3	Schéma synoptique de la ligne électrique de FitzHugh-Nagumo. Le circuit de la FIGURE 2.2 constitue la cellule élémentaire qui est dupliquée et couplée au moyen de résistances R' . Par souci de clarté, seule la cellule n , encadrée en pointillés, et ses deux cellules voisines $n + 1$ et $n - 1$ sont représentées sur cette figure. R_{NL} correspond à l'élément non linéaire décrit précédemment et encadré en pointillés sur la FIGURE 2.2.	13
2.4	Photographie de l'une des trois cartes constituant la ligne électrique de FitzHugh-Nagumo. La carte est obtenue en dupliquant à 15 reprises la cellule élémentaire de la FIGURE 2.2 et en introduisant un couplage inter-cellules résistif.	14
2.5	Représentation temporelle (a) et histogramme (b) du bruit blanc gaussien η_w (pour $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$) obtenu à partir de la routine <i>MatLab</i> et relevé à l'oscilloscope via la sortie de la carte son de l'ordinateur.	20
2.6	Spectre unilatéral de puissance du bruit blanc gaussien η_w obtenu à partir de la routine <i>MatLab</i> et de valeur efficace $\sigma = 0.5 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Le spectre est calculé par un moyennage sur 200 réalisations à l'aide d'un oscilloscope numérique.	20

2.7	Principe de génération expérimentale d'un bruit coloré de type Ornstein-Uhlenbeck. $\eta_c(t_{exp})$ est obtenu en filtrant un bruit blanc $\psi(t_{exp})$ avec un filtre passe-bas du premier ordre réalisé avec un potentiomètre P et un condensateur C'	22
2.8	Spectres unilatéraux de puissance des bruits colorés obtenus après filtrage du bruit blanc pour quatre temps de corrélation, à savoir 20 μ s, 73 μ s, 145 μ s et 218 μ s. Comme précédemment, les spectres sont calculés par un moyennage sur 200 réalisations à l'aide d'un oscilloscope numérique. . . .	22
3.1	Tracé des nullclines d'équations (3.3) et (3.4) du modèle de FitzHugh-Nagumo, illustrant les trois possibilités d'intersection propres à chaque régime de fonctionnement dans le cas où $a = 2$ V et $b = -2.6$ V. (a) : le régime bistable est obtenu pour $\gamma = 0.53$ et $E_0 = -1$ V. (b) : le régime excitable est obtenu pour $\gamma = 0.236$ et $E_0 = -1$ V. (c) : le régime oscillant est obtenu pour $\gamma = 0.195$ et $E_0 = -1$ V.	27
3.2	Chronogrammes des variables V et W issus de simulations numériques du système de FitzHugh-Nagumo, illustrant les trois régimes de fonctionnement possibles dans le cas où $a = 2$ V, $b = -2.6$ V et $\varepsilon = 3.706$. Les conditions initiales $V(t_{exp})_{t_{exp}=0} = 0$ et $W(t_{exp})_{t_{exp}=0} = -10$ ont été prises pour montrer l'évolution temporelle du système. (a) et (d) : le régime bistable est obtenu pour $\gamma = 0.53$ et $E_0 = -1$ V. (b) et (e) : le régime excitable est obtenu pour $\gamma = 0.236$ et $E_0 = -1$ V. (c) et (f) : le régime oscillant est obtenu pour $\gamma = 0.195$ et $E_0 = -1$ V.	27
3.3	Évolutions numérique ($\diamond$) et expérimentale (+) de la valeur critique $E_{c\ inf}$ de E_0 menant à la bifurcation inférieure d'Andronov-Hopf dans le modèle de FitzHugh-Nagumo. Pour faciliter la comparaison, les résultats obtenus sont superposés à l'évolution théorique (3.13) tracée en trait plein. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V et $\varepsilon = 3.706$. ε est obtenu en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.	32
3.4	Évolutions numérique ($\diamond$) et expérimentale (+) de la valeur critique $E_{c\ sup}$ de E_0 menant à la bifurcation supérieure d'Andronov-Hopf dans le modèle de FitzHugh-Nagumo. Pour faciliter la comparaison, les résultats obtenus sont superposés à l'évolution théorique (3.15) tracée en trait plein. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V et $\varepsilon = 3.706$. ε est obtenu en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH.	33

- 3.5 Signaux obtenus en simulations numériques à la limite des bifurcations inférieure et supérieure d'Andronov-Hopf. (a), (b) et (c) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ inf} = -0.40$ V. (d), (e) et (f) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ sup} = +0.82$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$ 34
- 3.6 Relevés expérimentaux à la limite des bifurcations inférieure et supérieure d'Andronov-Hopf. (a), (b) et (c) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ inf} = -0.31$ V. (d), (e) et (f) : portrait de phase et allures temporelles de V et W obtenus lorsque $E_0 = E_{c\ sup} = +0.80$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. 35
- 3.7 Paramétrage du circuit en mode excitable. (a), (b) et (c) : portrait de phase et chronogrammes de V et W issus de simulations numériques du système de FitzHugh-Nagumo. (d), (e) et (f) : relevés expérimentaux du portrait de phase et des chronogrammes des tensions V et W . Les paramètres du système sont : $E_0 = -1$ V, $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $A = 0$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. 38
- 3.8 (a) Diagramme d'encodage d'un stimulus sinusoïdal. Le rapport D défini par l'expression (3.18) est représenté en niveaux de gris dans le plan fréquence/amplitude de l'excitation monochromatique. (b) Frontières donnant les transitions entre les différentes zones d'encodage du stimulus sinusoïdal dans le plan fréquence/amplitude en simulation (trait plein) et expérimentalement (+). Les paramètres du système sont : $E_0 = -1$ V, $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. 40
- 3.9 Localisation de quatre couples (f_1, A) dans les diagrammes d'encodage et allures temporelles correspondantes de la variable rapide obtenue numériquement (b, e, h et k) et expérimentalement (c, f, i et l). (a), (b) et (c) : (1.1 kHz, 1.5 V). (d), (e) et (f) : (5 kHz, 1.5 V). (g), (h) et (i) : (11 kHz, 1.5 V). (j), (k) et (l) : (16 kHz, 1.5 V). Les paramètres du système sont : $E_0 = -1$ V, $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $\gamma = 0.236$ et $\varepsilon = 3.706$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 314$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. 41

- 3.10 Évolution temporelle de la variable rapide V en simulation numérique (gauche) et manipulation (droite) pour différentes valeurs de l'amplitude haute fréquence B . (a) et (b) : $B = 0$ V. (c) et (d) : $B = 0.27$ V. (e) et (f) : $B = 0.4$ V. (g) et (h) : $B = 0.66$ V. (i) et (j) : $B = 1.5$ V. Un signal sinusoïdal de fréquence f_1 est superposé sur les sous-figures (g) et (h). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 49
- 3.11 Spectres unilatéraux d'amplitude de la variable rapide V issus de simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentaux (+) pour différentes valeurs de l'amplitude B . (a) : $B = 0$ V. (b) : $B = 0.27$ V. (c) : $B = 0.4$ V. (d) : $B = 0.66$ V. (e) : $B = 1.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 50
- 3.12 Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude B de la composante haute fréquence de l'excitation bichromatique appliquée. Les résultats de la simulation numérique (trait plein) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (+). Les paramètres sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 51
- 3.13 Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système, en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 du signal haute fréquence appliquée au système. Les simulations numériques sont obtenues pour : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$ 53
- 3.14 Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 du signal haute fréquence. Les fréquences f_2 favorables à l'apparition de la résonance fréquentielle sont repérées au moyen d'indicateurs. Les simulations sont obtenues pour $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$ 54

- 3.15 Mise en évidence de la résonance fréquentielle en simulation numérique (trait plein) et en manipulation (+). Pour chaque valeur de la fréquence f_2 de l'excitation bichromatique $E(t)$, nous avons reporté Q^* , la valeur maximale de Q atteinte en faisant varier l'amplitude B . Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 55
- 3.16 Évolution de l'amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 de la composante haute fréquence appliquée au système. Les simulations numériques sont obtenues pour : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$ 57
- 3.17 (a) et (b) : Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système lorsque B varie en simulation numérique (gauche) et en manipulation (droite). Nous avons repéré les points d'intérêts qui correspondent aux chronogrammes présentés sur les sous-figures (c) à (g). Amplitudes B considérées pour les évolutions temporelles de la variable rapide V en simulation, (c) : $B = 1.4$ V, (e) : $B = 3$ V, (g) : $B = 4.4$ V et (i) : $B = 5.5$ V ; et en manipulation, (d) : $B = 1.2$ V, (f) : $B = 2.5$ V, (h) : $B = 3.9$ V et (j) : $B = 5.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 40$, $f_1 = 20.08$ kHz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 58
- 3.18 Prédiction de la multi-résonance vibrationnelle en comparant les évolutions des grandeurs Q et D en fonction de la fréquence f_2 . (a) : résultats de simulations numériques. (b) : résultats expérimentaux. Dans chaque cas, la courbe en trait gras représente la grandeur Q obtenue pour une excitation bichromatique $A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz et $B = 1.5$ V. Les courbes en traits fins correspondent au rapport D obtenu pour une excitation monochromatique $B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $B = 1.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 60

- 3.19 Prédiction de la multi-résonance vibrationnelle en comparant les évolutions des grandeurs Q et D en fonction de la fréquence f_2 pour (a) et (b) : $B = 3.2$ V ; (c) et (d) : $B = 5$ V. Les résultats de simulations numériques sont présentés à gauche, tandis que les résultats expérimentaux sont présentés à droite. Dans chaque cas, la courbe en trait gras représente la grandeur Q obtenue pour une excitation bichromatique $A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz et $B = 1.5$ V. Les courbes en traits fins correspondent au rapport D obtenu pour une excitation monochromatique $B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $B = 1.5$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 61
- 3.20 Prédiction de la multi-résonance vibrationnelle en comparant les évolutions des grandeurs Q et D dans le plan $[f_2, B]$. (a) : amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système, en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 d'une excitation bichromatique $A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$, avec $A = 0.8$ V et $f_1 = 502$ Hz. (b) : évolution du rapport D en fonction de l'amplitude B et de la fréquence f_2 d'une excitation monochromatique $B \cos(2\pi f_2 t)$. Les simulations numériques sont obtenues pour : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$ 62
- 4.1 Schéma électrique de l'oscillateur de type FitzHugh-Nagumo modifié pour l'étude de la résonance cohérente. Expérimentalement, pour considérer l'influence du paramètre α , il a suffi de ne jamais activer les sources $\eta_{NL}(t)$ et $\eta_w(t)$ simultanément. 66
- 4.2 Mise en évidence expérimentale de la résonance cohérente pour deux sources de bruit appliquées différemment. Les séries temporelles et les portraits de phase correspondants sont représentés pour trois valeurs de bruit distinctes. Sur les sous-figures (a), (b) et (c) un bruit $\eta_w(t)$ agit sur l'excitation $E(t)$ avec respectivement $\sigma = 0.35$ V_{RMS}, $\sigma = 0.7$ V_{RMS} et $\sigma = 1.05$ V_{RMS}. Sur les sous-figures (d), (e) et (f) un bruit $\eta_{NL}(t)$ agit sur la racine b de la non-linéarité du modèle de FitzHugh-Nagumo avec respectivement $\sigma = 0.05$ V_{RMS}, $\sigma = 0.2$ V_{RMS} et $\sigma = 0.66$ V_{RMS}. Les paramètres utilisés lors des manipulations sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -0.3$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.9$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10$ mH. 68

- 4.3 Évaluation quantitative des deux formes de résonance cohérente à l'aide de l'évolution du coefficient de variation R_p sur la sous-figure (a), et du temps de corrélation τ_c sur la sous-figure (b) en fonction de la valeur *RMS* de bruit σ . Les courbes en pointillés sont obtenues en présence d'un bruit $\eta_{NL}(t)$ perturbant la non-linéarité, tandis que les courbes en trait plein ont été relevées en présence d'un bruit $\eta_w(t)$ agissant sur l'excitation $E(t)$. Les paramètres utilisés lors des manipulations sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -0.3$ V, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.9$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10$ mH. . . 70
- 4.4 Amplitude Q de la composante spectrale f_1 de la variable rapide V en fonction de la valeur efficace σ pour différents temps de corrélation : $\tau = 0$ μ s (bruit blanc), $\tau = 20$ μ s, $\tau = 72$ μ s, $\tau = 145$ μ s et $\tau = 218$ μ s. Les sous-figures (a) et (b) présentent respectivement les simulations numériques et les résultats expérimentaux. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 74
- 4.5 Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude de la composante haute fréquence de l'excitation bichromatique bruitée appliquée. Les résultats des simulations numériques (a) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (b) pour différentes valeurs efficaces de bruit : $\sigma = 0.1$ V_{RMS}, $\sigma = 0.3$ V_{RMS}, $\sigma = 0.5$ V_{RMS}, $\sigma = 0.7$ V_{RMS} et $\sigma = 1$ V_{RMS}. La courbe de résonance vibrationnelle obtenue au chapitre 3 en régime déterministe ($\sigma = 0$ V_{RMS}) est superposée en gris. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\alpha = 0$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 77

- 4.6 Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de la valeur efficace σ du bruit blanc appliqué. Les résultats des simulations numériques (a) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (b) pour différentes amplitudes B : $B = 0.22$ V, $B = 0.3$ V, $B = 0.33$ V, $B = 0.7$ V et $B = 1$ V. Les résultats obtenus précédemment dans le cas monochromatique ($B = 0$ V) sont superposés. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\alpha = 0$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 79
- 4.7 Amplitude Q de la composante spectrale basse fréquence f_1 de la réponse du système en fonction de l'amplitude σ du bruit appliqué, en considérant successivement $\tau = 0$ μ s (bruit blanc), $\tau = 20$ μ s, $\tau = 72$ μ s, $\tau = 145$ μ s et $\tau = 218$ μ s. Les résultats des simulations numériques (a) et (c) sont comparés aux points de mesure expérimentaux (b) et (d) pour deux amplitudes B : (a) et (b) $B = 0.1$ V, (c) et (d) $B = 1$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $\alpha = 1$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 4.249$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 9.16$ mH. 82
- 4.8 Évolution des amplitudes Q_1 , Q_2 et Q_0 du spectre de la variable rapide V respectivement relevées aux fréquences f_1 , f_2 et f_0 en simulations numériques (gauche), et mesurées expérimentalement (droite), en fonction de l'amplitude σ du bruit, pour différents temps de corrélation : $\tau = 0$ μ s (bruit blanc), $\tau = 20$ μ s, $\tau = 72$ μ s, $\tau = 145$ μ s et $\tau = 218$ μ s. (a) et (b) : amplitude Q_1 du spectre à la fréquence f_1 . (c) et (d) : amplitude Q_2 du spectre à la fréquence f_2 . (e) et (f) : amplitude Q_0 du spectre à la fréquence fantôme f_0 . Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1$ V, $A = B = 0.3$ V, $f_1 = 2f_0 = 600$ Hz, $f_2 = 3f_0 = 900$ Hz, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. 88

- 4.9 Différentes densités de probabilité montrant comment se répartit la fréquence de production des potentiels d'action. Les résultats issus des simulations numériques sont présentés à gauche et comparés à droite aux relevés expérimentaux pour les valeurs efficaces de bruit suivantes : (a) et (b) : $\sigma = 0.1 \text{ V}_{\text{RMS}}$. (c) et (d) : $\sigma = 0.15 \text{ V}_{\text{RMS}}$. (e) et (f) : $\sigma = 0.22 \text{ V}_{\text{RMS}}$. Pour chaque loi de probabilité, nous avons inséré le chronogramme correspondant de la variable V , tout en superposant sur celui-ci un sinus de fréquence f_0 . Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = B = 0.3 \text{ V}$, $f_1 = 2f_0 = 600 \text{ Hz}$, $f_2 = 3f_0 = 900 \text{ Hz}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \text{ }\Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10.5 \text{ mH}$ 89
- 4.10 Évolution, en fonction de l'amplitude σ du bruit, des probabilités P_0 , P_1 et P_2 de déclencher des potentiels d'action à des fréquences respectivement de l'ordre de : (a) et (b) : $f_0 \pm 5\%$; (c) et (d) : $f_1 \pm 5\%$; (e) et (f) : $f_2 \pm 5\%$ en simulations numériques (gauche), et mesurées expérimentalement (droite) pour différents temps de corrélation $\tau = 0 \text{ }\mu\text{s}$ (bruit blanc), $\tau = 20 \text{ }\mu\text{s}$, $\tau = 72 \text{ }\mu\text{s}$, $\tau = 145 \text{ }\mu\text{s}$ et $\tau = 218 \text{ }\mu\text{s}$. Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = B = 0.3 \text{ V}$, $f_1 = 2f_0 = 600 \text{ Hz}$, $f_2 = 3f_0 = 900 \text{ Hz}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \text{ }\Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10.5 \text{ mH}$ 91
- 4.11 Diagramme représentant en niveau de gris la probabilité d'observer la génération de potentiels d'action à une fréquence donnée en fonction du décalage fréquentiel Δf . Les sous-figures (a) et (b) présentent respectivement les résultats de simulation et les résultats expérimentaux en présence d'un bruit blanc. De façon analogue, les résultats obtenus en présence d'un bruit coloré de temps de corrélation $\tau = 20 \text{ }\mu\text{s}$ ou $\tau = 145 \text{ }\mu\text{s}$, sont respectivement présentés sur les sous-figures (c)-(f). Les lignes pointillées de chaque diagramme correspondent aux prédictions théoriques de la fréquence fantôme f_r calculées par la relation (4.16). Dans chacun des cas, l'amplitude de bruit est fixée à la valeur permettant la meilleure détection de la fréquence f_0 sur la FIGURE 4.10, soit $\sigma = 0.14 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour le bruit blanc, $\sigma = 0.2 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour le bruit coloré avec $\tau = 20 \text{ }\mu\text{s}$ et $\sigma = 0.7 \text{ V}_{\text{RMS}}$ pour le bruit coloré avec $\tau = 145 \text{ }\mu\text{s}$. Les paramètres du système sont : $a = 2 \text{ V}$, $b = -2.6 \text{ V}$, $E_0 = -1 \text{ V}$, $A = B = 0.3 \text{ V}$, $f_1 = 2f_0 = 600 \text{ Hz}$, $f_2 = 3f_0 = 900 \text{ Hz}$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. γ et ε sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$, $R = 320 \text{ }\Omega$, $C = 22 \text{ nF}$ et $L = 10.5 \text{ mH}$ 94

- 5.1 Évolution spatio-temporelle de l'état de la ligne, paramétrée en condition de non-propagation de la composante basse fréquence initiée sur les i_{exc} premières cellules. (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0$ V, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω . . . 100
- 5.2 Évolutions spatio-temporelles de l'état de la ligne pour différentes amplitudes B de la composante haute fréquence. Les simulations numériques sont présentées à gauche, tandis que les relevés expérimentaux correspondants sont présentés à droite. (a) et (b) : $B = 0.2$ V ; (c) et (d) : $B = 0.35$ V ; (e) et (f) : $B = 0.5$ V ; (g) et (h) : $B = 1.25$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 102
- 5.3 Spectres unilatéraux d'amplitude des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ observés en simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentalement (+) pour différentes amplitudes B de la composante haute fréquence. (a) : $B = 0.2$ V ; (b) : $B = 0.35$ V ; (c) : $B = 0.5$ V et (d) : $B = 1.25$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 104
- 5.4 Propagation de la composante basse fréquence assistée par la perturbation haute fréquence d'amplitude B pour un couplage $D = 1.33$. (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 107

- 5.5 Influence du couplage sur le phénomène de propagation assistée par la perturbation haute fréquence d'amplitude B . Les résultats des simulations numériques sont tracés à gauche, tandis que ceux qui sont issus d'expérimentations sont représentés à droite. (a) et (b) : $D = 0.604$; (c) et (d) : $D = 2.83$. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$ et $\varepsilon = 3.71$. Les constantes γ et ε sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF et $L = 10.5$ mH. 107
- 5.6 Diagramme spatio-temporel de la ligne montrant la non-propagation de la composante basse fréquence pour un milieu paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\sigma = 0$ V_{RMS}, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 109
- 5.7 Diagramme spatio-temporel de la ligne montrant la propagation de la composante basse fréquence pour un milieu paramétré de façon quasi-optimale ($B = 0.4$ V). (a) : simulation numérique ; (b) : relevé expérimental. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.4$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\sigma = 0$ V_{RMS}, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 109
- 5.8 Évolutions spatio-temporelles de l'état de la ligne pour différentes valeurs efficaces σ du bruit temporel, dans le cas d'un milieu paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). Les simulations numériques sont présentées à gauche, tandis que les relevés expérimentaux correspondants sont présentés à droite. (a) et (b) : $\sigma = 0.1$ V_{RMS} ; (c) et (d) : $\sigma = 0.25$ V_{RMS} ; (e) et (f) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} ; (g) et (h) : $\sigma = 0.8$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 111

- 5.9 Spectres unilatéraux de puissance des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ observés en simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentalement (+) pour différentes amplitudes σ du bruit temporel. Le milieu est paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). (a) : $\sigma = 0.1$ V_{RMS} ; (b) : $\sigma = 0.25$ V_{RMS} ; (c) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} et (d) : $\sigma = 0.8$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω . . . 112
- 5.10 Principe d'estimation du rapport signal sur bruit. 113
- 5.11 Propagation assistée par un bruit temporel dans le cas d'un paramétrage sous-optimal de la ligne électrique ($B = 0.15$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs (+). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 114
- 5.12 Propagation dégradée par un bruit temporel dans le cas d'un paramétrage quasi-optimal de la ligne électrique ($B = 0.4$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs (+). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.4$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 116

- 5.13 Évolutions spatio-temporelles de l'état de la ligne pour différentes valeurs efficaces σ du bruit spatio-temporel, dans le cas d'un milieu paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). Les simulations numériques sont présentées à gauche, tandis que les relevés expérimentaux correspondants sont présentés à droite. (a) et (b) : $\sigma = 0.15$ V_{RMS} ; (c) et (d) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} ; (e) et (f) : $\sigma = 0.7$ V_{RMS} ; (g) et (h) : $\sigma = 1$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenus en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 118
- 5.14 Spectres unilatéraux de puissance des cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ observés en simulations numériques (trait plein) et relevés expérimentalement (+) pour différentes amplitudes σ du bruit spatio-temporel. Le milieu est paramétré de façon sous-optimale ($B = 0.15$ V). (a) : $\sigma = 0.15$ V_{RMS} ; (b) : $\sigma = 0.4$ V_{RMS} ; (c) : $\sigma = 0.7$ V_{RMS} et (d) : $\sigma = 1$ V_{RMS}. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω . . . 119
- 5.15 Propagation assistée par un bruit spatio-temporel dans le cas d'un paramétrage sous-optimal de la ligne électrique ($B = 0.15$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.15$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω 120

5.16	Propagation dégradée par un bruit spatio-temporel dans le cas d'un paramétrage quasi-optimal de la ligne électrique ($B = 0.4$ V). (a) : évolution du rapport signal sur bruit calculé en simulation numérique pour l'ensemble des cellules en fonction de σ . (b), (c) et (d) : rapports signal sur bruit respectivement relevés aux cellules $n = 1$, $n = 20$ et $n = 40$ en fonction de σ . Les résultats des simulations numériques sont représentés par des traits pleins tandis que les manipulations associées sont superposées avec des marqueurs (+). Les paramètres du système sont : $a = 2$ V, $b = -2.6$ V, $E_0 = -1.3$ V, $A = 0.8$ V, $f_1 = 502$ Hz, $B = 0.4$ V, $f_2 = 6.1$ kHz, $i_{exc} = 15$, $\gamma = 0.24$, $\varepsilon = 3.71$ et $D = 1.33$. Les constantes γ , ε et D sont obtenues en fixant les valeurs des composants du circuit à $R_0 = 1.33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10.5$ mH et $R' = 1$ k Ω	122
A.1	Modélisation de l'élément non linéaire R_{NL} de l'oscillateur de FitzHugh-Nagumo, permettant de déterminer la fonction polynômiale nécessaire à l'obtention du courant non linéaire $I_{NL}(V)$	165
A.2	Élément non linéaire R_{NL} de l'oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo permettant d'obtenir le courant $I_{NL}(V)$ décrit par la relation (A.2).	166
A.3	Connexions du multiplieur analogique AD633JN pour réaliser un montage <i>variable scale factor</i> (facteur d'échelle variable) selon la documentation du constructeur [203].	167
A.4	Connexions basiques du multiplieur analogique AD633JN pour réaliser une multiplication selon la documentation du constructeur [203].	167
A.5	Amplificateur de différence pour la mise en forme du polynôme $P(V)$	168
A.6	Caractéristique courant-tension de la résistance non linéaire R_{NL} avec $a = 2.03$ V, $b = -2.53$ V et $R_0 = 1.33$ k Ω	168
C.1	Schéma électrique de la carte de mixage des excitations. L'excitation $E(t)$ nécessaire à la cellule élémentaire est générée à partir du circuit encadré en pointillés. Les excitations $E_n(t)$ nécessaires aux cellules de la ligne électrique seront disponibles sur les huit sorties de cette carte.	174
C.2	Photographie de la carte de mixage des excitations.	175

GÉNÉRATION DU COURANT NON LINÉAIRE $I_{NL}(V)$

De nombreux travaux ont porté sur la réalisation de circuits électroniques non linéaires. Pour ces circuits, la principale difficulté repose sur le développement d'éléments présentant des caractéristiques courant-tension non linéaires. Parmi les solutions existantes, l'une des techniques de conception consiste à utiliser des multiplieurs analogiques pour fournir la caractéristique polynomiale désirée [36,37,98,204]. Dans cette thèse, la caractéristique courant-tension nécessaire à la construction de l'oscillateur de type FitzHugh-Nagumo présenté au chapitre 2 obéit à $I_{NL}(V) = [V(V-a)(V-b) - V]/R_0$. Nous détaillons dans cette annexe la façon dont est obtenu ce courant à l'aide de multiplieurs analogiques.

A.1/ PRINCIPE DE GÉNÉRATION DU COURANT NON LINÉAIRE

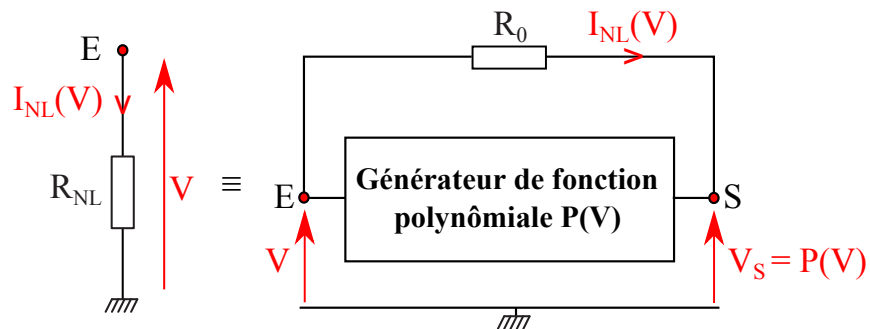


FIGURE A.1 — Modélisation de l'élément non linéaire R_{NL} de l'oscillateur de FitzHugh-Nagumo, permettant de déterminer la fonction polynômiale nécessaire à l'obtention du courant non linéaire $I_{NL}(V)$.

Selon le principe illustré sur la FIGURE A.1 [204], il s'agit de reboucler la sortie $P(V)$ d'un générateur de fonction polynomiale à son entrée V , par l'intermédiaire d'un élément résistif R_0 . D'après la loi des mailles, nous obtenons la relation :

$$P(V) = V - R_0 I_{NL}(V). \quad (\text{A.1})$$

En ce qui nous concerne, afin de retranscrire la non-linéarité du modèle théorique de FitzHugh-Nagumo, il nous a fallu obtenir un courant $I_{NL}(V)$ obéissant à :

$$I_{NL}(V) = \frac{V(V-a)(V-b) - V}{R_0}. \quad (\text{A.2})$$

En substituant le courant (A.2) dans l'expression (A.1), le polynôme $P(V)$ à produire devait être de la forme :

$$P(V) = 2V - V(V-a)(V-b). \quad (\text{A.3})$$

Pour reproduire expérimentalement l'expression théorique (A.3) du polynôme $P(V)$, un montage à base d'amplificateurs opérationnels et de multiplieurs analogiques a été mis en œuvre. La suite de cette annexe est consacrée au détail de la structure proposée.

A.2/ COURANT NON LINÉAIRE EXPÉRIMENTAL

Comme le montre la FIGURE A.2, la structure qui compose l'élément non linéaire R_{NL} peut être scindée en trois blocs distincts :

- bloc I : création d'une fonction carrée de la forme $W1 = (V-a)(V-b)$,
- bloc II : création d'une fonction cubique de la forme $W2 = V(V-a)(V-b)$,
- bloc III : mise en forme de la fonction cubique pour obtenir le polynôme $P(V)$ décrit par la relation (A.3).

Les sorties des blocs I, II et III sont respectivement notées $W1$, $W2$ et $P(V)$. Les fonctionnements de ces blocs sont détaillés ci-après.

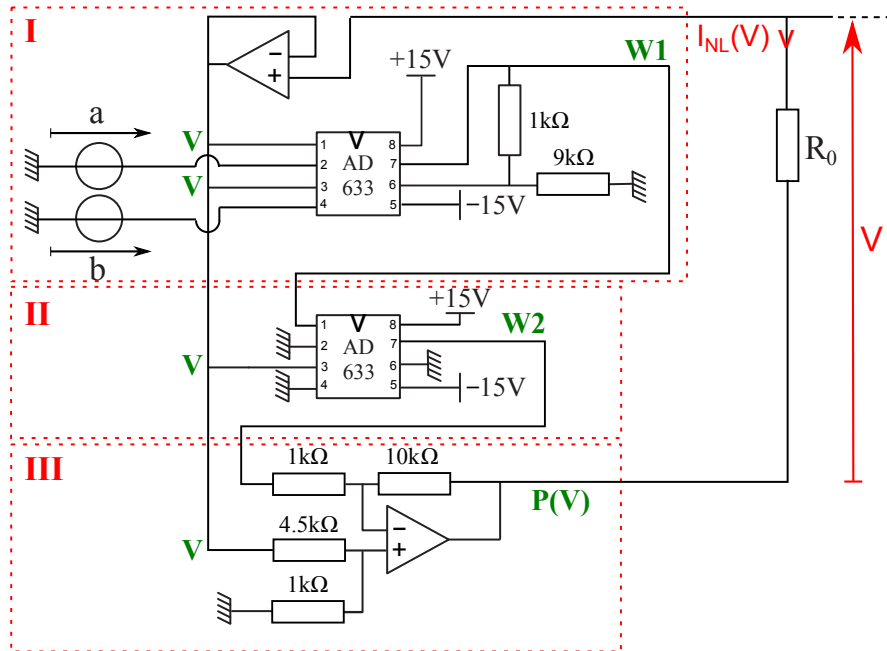


FIGURE A.2 — Élément non linéaire R_{NL} de l'oscillateur électronique de type FitzHugh-Nagumo permettant d'obtenir le courant $I_{NL}(V)$ décrit par la relation (A.2).

A.2.1/ FONCTION CARRÉE DE LA FORME $W1 = (V - a)(V - b)$

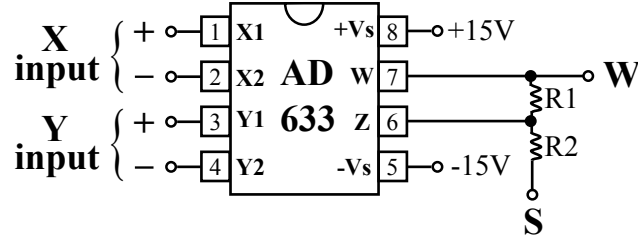


FIGURE A.3 – Connexions du multiplieur analogique AD633JN pour réaliser un montage *variable scale factor* (facteur d'échelle variable) selon la documentation du constructeur [203].

La documentation constructeur de l'AD633JN nous indique qu'avec un montage tel que celui présenté sur la FIGURE A.3, la fonction de transfert du multiplieur analogique comporte un facteur d'échelle $1/10 \text{ V}^{-1}$ et obéit à :

$$W = \frac{(X1 - X2)(Y1 - Y2)}{10V} \cdot \frac{R1 + R2}{R1} + S, \quad (\text{A.4})$$

avec $R1 \leq 1 \text{ k}\Omega$ et $R2 \leq 100 \text{ k}\Omega$.

En imposant $S = 0 \text{ V}$, $R1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R2 = 9 \text{ k}\Omega$, le facteur d'échelle $1/10 \text{ V}^{-1}$ des multiplieurs analogiques est compensé et la sortie W se réduit alors à $W = (X1 - X2)(Y1 - Y2)$. En procédant de la sorte, concernant le multiplieur analogique présent dans le bloc I de la FIGURE A.2, la sortie $W1$ s'exprime en fonction des entrées :

$$W1 = (V - a)(V - b). \quad (\text{A.5})$$

A.2.2/ FONCTION CUBIQUE DE LA FORME $W2 = V(V - a)(V - b)$

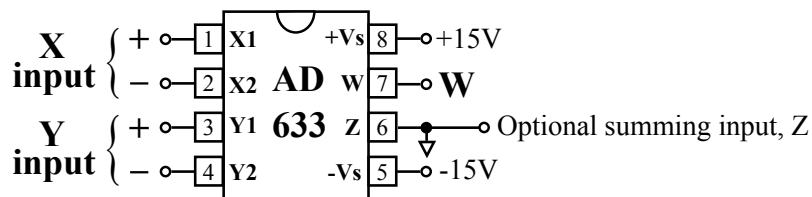


FIGURE A.4 – Connexions basiques du multiplieur analogique AD633JN pour réaliser une multiplication selon la documentation du constructeur [203].

La documentation constructeur de l'AD633JN [203] nous indique qu'avec une configuration telle que celle présentée sur la FIGURE A.4, la fonction de transfert du multiplieur analogique est la suivante :

$$W = \frac{(X1 - X2)(Y1 - Y2)}{10V} + Z \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, en reliant à la masse les broches 2, 4 et 6 correspondant respectivement aux entrées $X1$, $X2$ et Z , la sortie $W2$ du bloc II de la FIGURE A.2 est égale à :

$$W2 = \frac{V(V - a)(V - b)}{10}. \quad (\text{A.7})$$

A.2.3/ MISE EN FORME DE LA FONCTION CUBIQUE POUR OBTENIR LE POLYNÔME $P(V)$

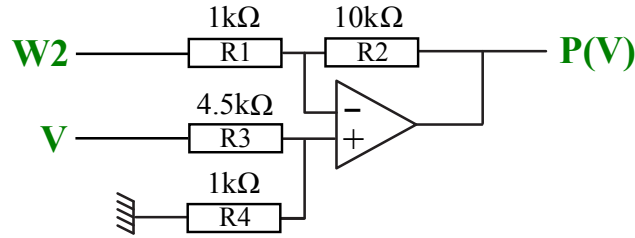


FIGURE A.5 – Amplificateur de différence pour la mise en forme du polynôme $P(V)$.

Le bloc III de la FIGURE A.2 est un montage amplificateur de différence réalisé à partir d'un simple amplificateur opérationnel de type TL081CN. Sur ce montage, repris sur la FIGURE A.5 ci-dessus, du fait de la contre-réaction négative, la sortie $P(V)$ peut être obtenue très simplement sous la forme suivante :

$$P(V) = \frac{R1 + R2}{R1} \frac{R4}{R3 + R4} V - \frac{R2}{R1} W2. \quad (A.8)$$

En considérant $R1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R3 = 4.5 \text{ k}\Omega$, $R4 = 1 \text{ k}\Omega$ et en remplaçant $W2$ par son expression (A.7), l'expression de $P(V)$ devient :

$$P(V) = 2V - V(V - a)(V - b). \quad (A.9)$$

L'expression expérimentale du polynôme $P(V)$, décrite par l'équation (A.9), correspond alors à la relation théorique (A.3) définie précédemment. Cette correspondance peut être vérifiée sur la caractéristique courant-tension présentée sur la FIGURE A.6. En effet, il apparaît que les points issus de mesures expérimentales (croix) sont superposés à la prédiction théorique tracée en trait plein. La structure électronique proposée pour construire l'élément R_{NL} permet donc une modélisation fidèle de la non linéarité nécessaire au modèle normalisé de FitzHugh-Nagumo.

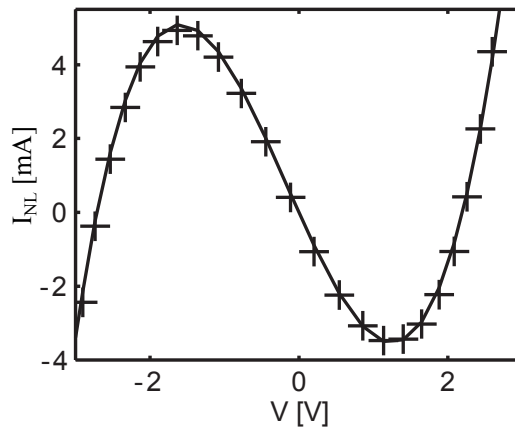


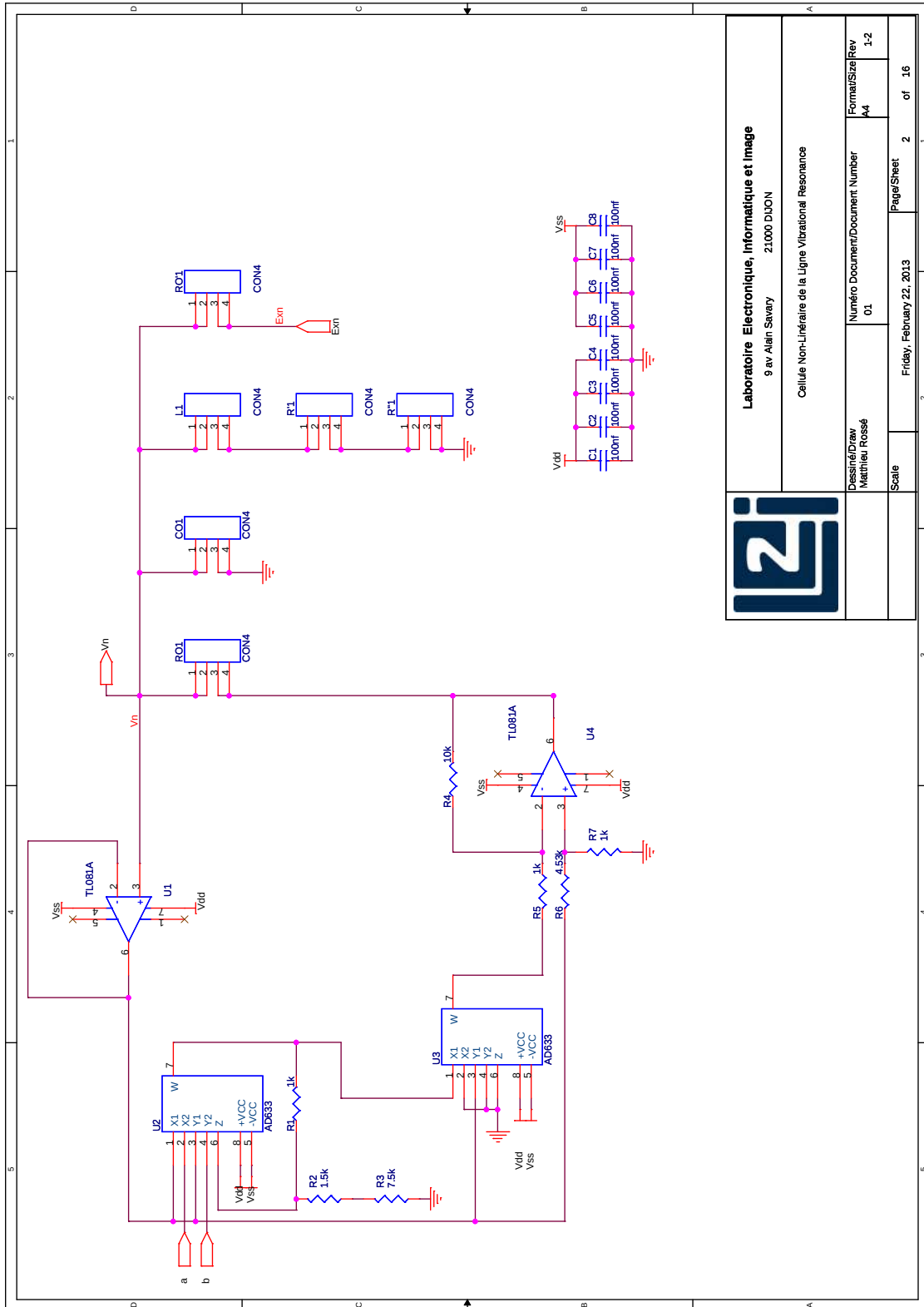
FIGURE A.6 – Caractéristique courant-tension de la résistance non linéaire R_{NL} avec $a = 2.03 \text{ V}$, $b = -2.53 \text{ V}$ et $R_0 = 1.33 \text{ k}\Omega$.

B

SCHÉMAS ÉLECTRIQUES DE LA CELLULE ÉLÉMENTAIRE ET DE LA LIGNE

Dans cette annexe, nous introduisons les schémas électriques ayant servis à la conception des dispositifs électroniques développés pendant cette thèse. Ainsi, dans les parties B.1 et B.2, nous présentons respectivement les schémas saisis par Matthieu Rossé, assistant ingénieur au laboratoire LE2I, pour la conception de l'oscillateur élémentaire de type FitzHugh-Nagumo et de la ligne électrique.

B.1/ CELLULE ÉLÉMENTAIRE



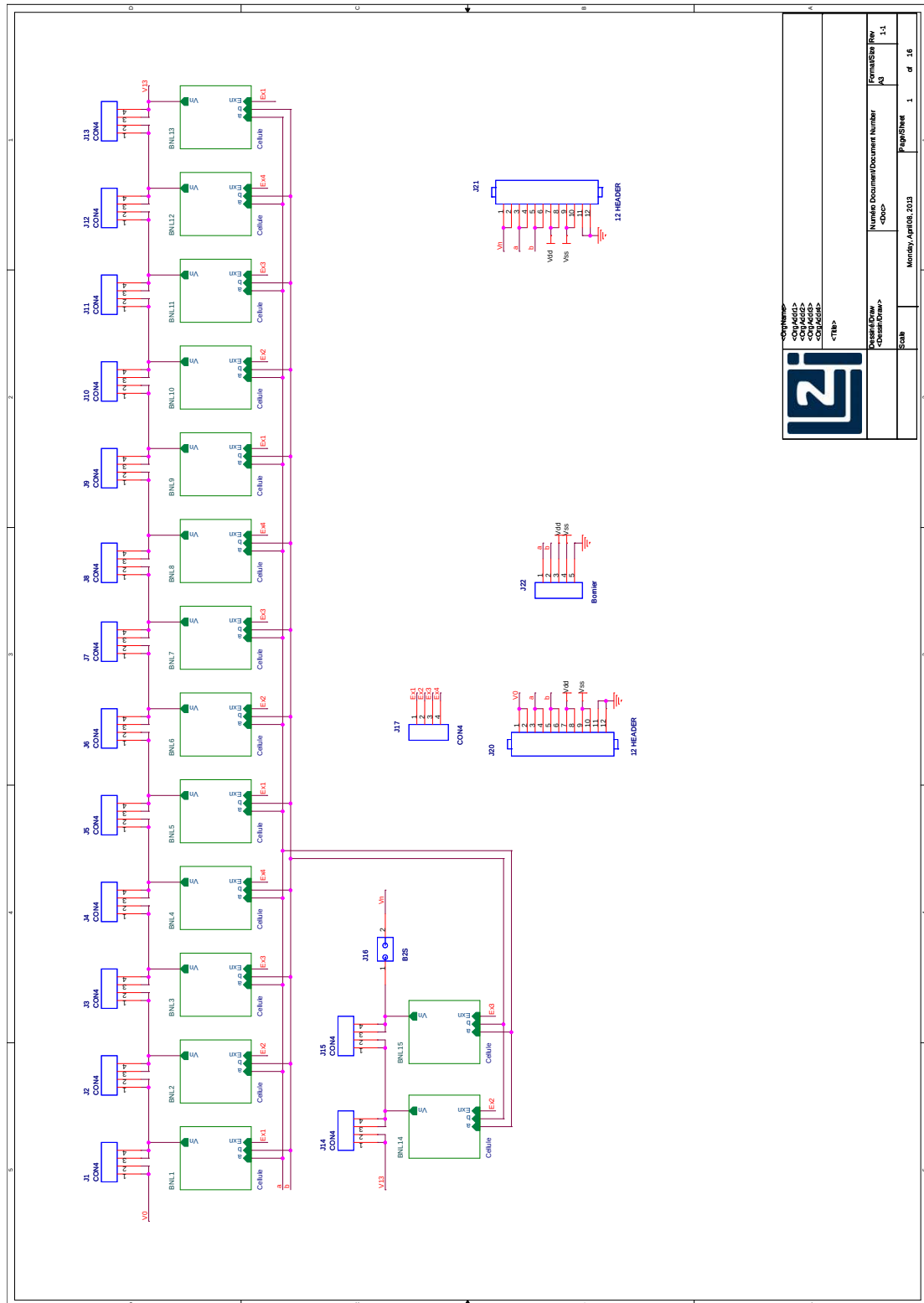
Laboratoire Electronique, Informatique et Image

9 av. Alain Savary 21000 DIJON

Cellule Non-Linéaire de la Ligne Vibrational Resonance

Dessiné/Draw Matthieu Rossé	Número Document/Document Number 01	Format/Size A4	Rev 1-2
Scale	Friday, February 22, 2013	Page/Sheet 2	of 16

B.2/ LIGNE ÉLECTRIQUE



ARCHITECTURE ÉLECTRONIQUE DE LA CARTE DE MIXAGE DES EXCITATIONS

C.1/ DESCRIPTION DE LA CARTE DE MIXAGE DES EXCITATIONS

Dans cette annexe, nous présentons l'architecture électronique proposée pour produire les différentes excitations utilisées tout au long de la thèse, que ce soit pour l'oscillateur élémentaire ou la ligne constituée d'oscillateurs couplés. En ce qui concerne le signal $E(t)$ excitant l'oscillateur élémentaire de type FitzHugh-Nagumo, il pourra être obtenu simplement à partir du montage sommateur encadré en pointillés sur la FIGURE C.1, tandis que l'ensemble des signaux excitateurs $E_n(t)$ nécessaires aux études du comportement de la ligne électrique sera généré à partir de la totalité des blocs constituant la carte de mixage des excitations de la FIGURE C.1. La composition du circuit est la suivante :

- Trois entrées notées d_1 , d_2 et d_3 reçoivent les composantes déterministes des excitations $E(t)$ et $E_n(t)$ que nous souhaitons générer. Pour rappel, dans leurs versions déterministes respectives, ces excitations peuvent être composées de la combinaison d'une tension continue (d_1) et d'un ou deux signaux sinusoïdaux (d_2 et d_3) de fréquences différentes. L'entrée d_4 permettant l'ajout d'une composante supplémentaire ne sera pas utilisée au cours de cette thèse.
- Ces entrées (d_1 , d_2 , d_3 et d_4) sont immédiatement suivies d'interrupteurs indépendants, notés K_1 , K_2 , K_3 et K_4 . Ceux-ci permettent de créer n'importe quelle combinaison en appliquant, ou non, les différentes composantes déterministes sur les entrées des montages sommateurs.
- Quatre entrées notées η_1 , η_2 , η_3 et η_4 reçoivent quant à elles les composantes stochastiques des excitations $E(t)$ et $E_n(t)$ que nous souhaitons générer. Deux raisons nous ont amené à utiliser quatre entrées : premièrement, lorsqu'un même bruit est appliqué sur les différentes cellules de la ligne électrique, nous évitons les problèmes liés à la consommation de courant en utilisant les sorties de plusieurs

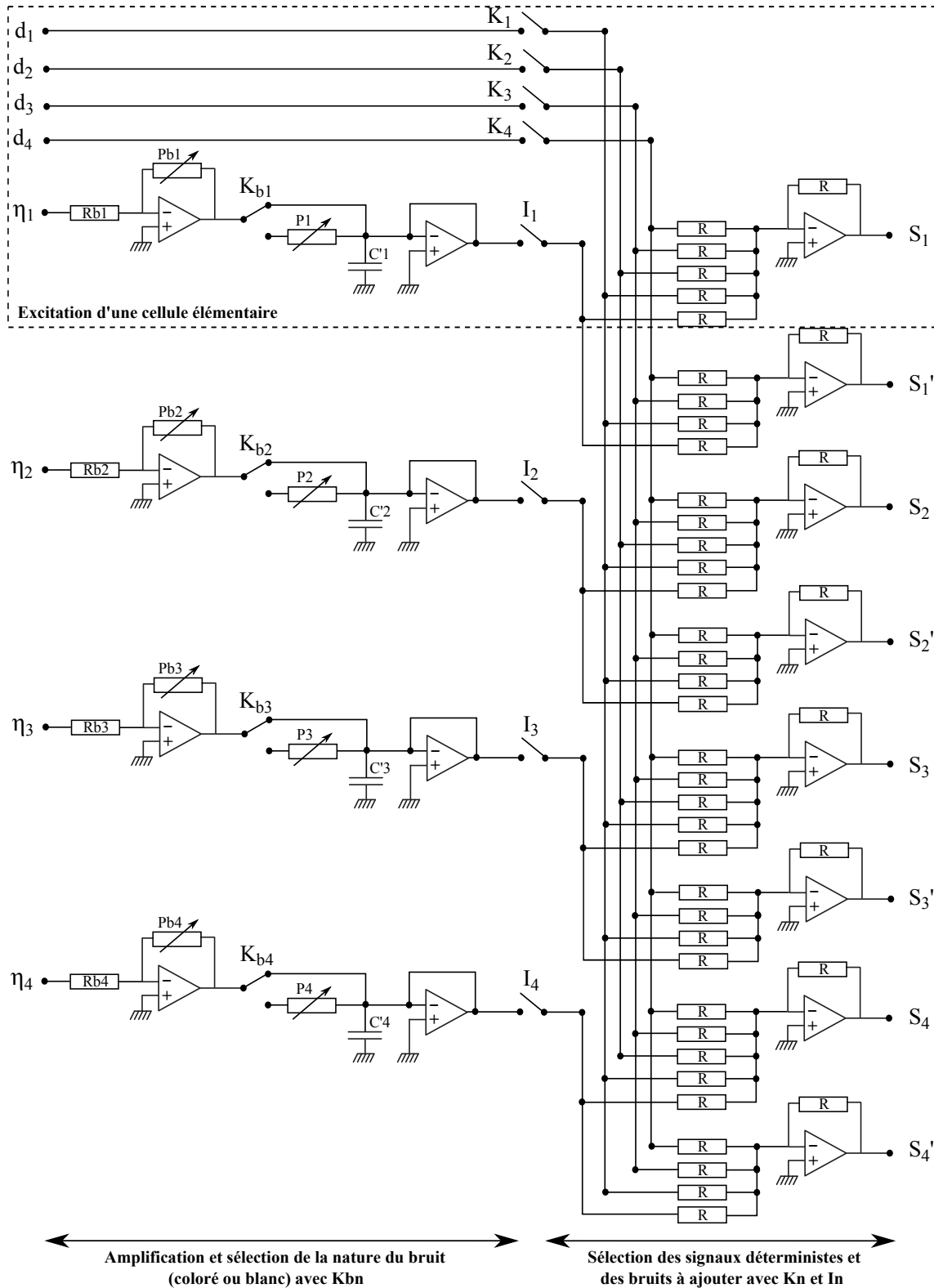


FIGURE C.1 – Schéma électrique de la carte de mixage des excitations. L'excitation $E(t)$ nécessaire à la cellule élémentaire est générée à partir du circuit encadré en pointillés. Les excitations $E_n(t)$ nécessaires aux cellules de la ligne électrique seront disponibles sur les huit sorties de cette carte.

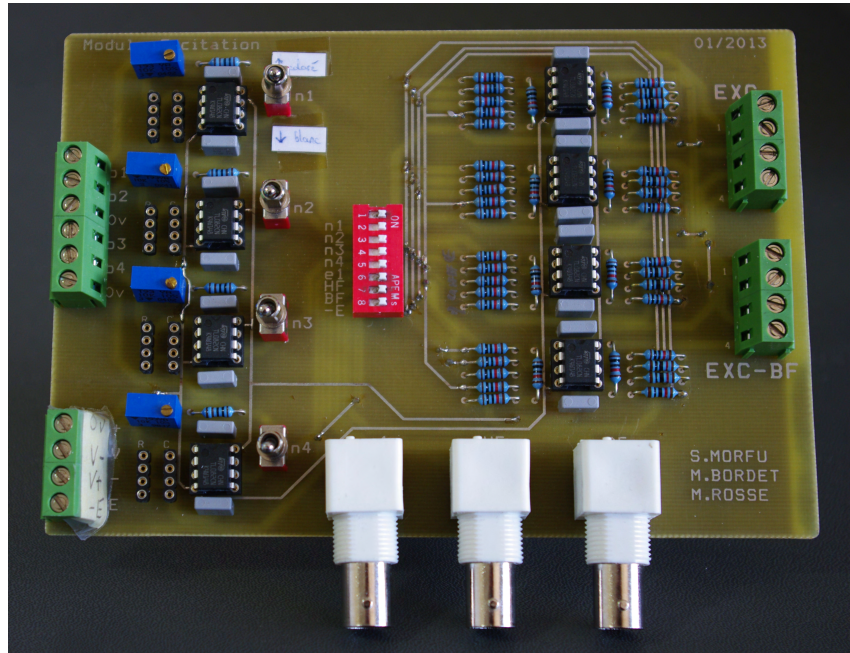


FIGURE C.2 – Photographie de la carte de mixage des excitations.

amplificateurs opérationnels ; deuxièmement, cela nous offre la possibilité d'appliquer des bruits qui ne sont pas identiques sur les différentes cellules ; la source de bruit est alors appelée *spatio-temporelle*.

- Pour un bruit η_k avec $k=1, 2, 3$ ou 4 , deux étages apparaissent successivement : un étage d'amplification faisant intervenir une résistance R_{bk} et un potentiomètre P_{bk} , suivi d'un étage de coloration du bruit lorsque l'interrupteur K_{bk} est orienté vers le bas ; le bruit reste blanc sinon. La coloration du bruit est réalisée au moyen d'un filtre passe-bas passif faisant intervenir un potentiomètre P_k et une capacité C'_k .
- Après une adaptation d'impédance réalisée par un montage suiveur, les entrées η_1, η_2, η_3 et η_4 , éventuellement amplifiées et/ou filtrées, sont suivies d'interrupteurs notés I_1, I_2, I_3 et I_4 qui permettent d'appliquer, ou non, les différentes composantes stochastiques sur les entrées des montages sommateurs. Bien qu'ils ne soient pas structurellement liés, en pratique, nous considérerons toujours que les interrupteurs K_{b1}, K_{b2}, K_{b3} et K_{b4} fonctionnent ensemble.

À partir des quatre signaux déterministes d_1, d_2, d_3 et d_4 disponibles après les interrupteurs K_1, K_2, K_3 et K_4 et des quatre fluctuations aléatoires disponibles après les interrupteurs I_1, I_2, I_3 et I_4 , la carte de mixage des excitations, dont la réalisation pratique est présentée sur la FIGURE C.2, produit les différents signaux excitateurs nécessaires à nos études sur la structure couplée :

- Quatre signaux de sortie sont repérés S_1, S_2, S_3 et S_4 . D'après la FIGURE C.1,

selon les états des différents interrupteurs K_n et K_{bk} (0 si ouvert et 1 si fermé), les sorties S_k prennent la forme suivante :

$$S_k = - \sum_{n=1}^{n=4} K_n d_n + [\eta_{wk} K_{bk} + \eta_{ck} (1 - K_{bk})] \cdot I_k, \quad (C.1)$$

avec $k=1, 2, 3$ ou 4 , et où I_k représente l'état de l'interrupteur qui permet d'ajouter, ou non, les différentes sources de bruit, offrant ainsi la possibilité de produire des excitations purement déterministes. Comme énoncé précédemment, le bruit introduit sera blanc (η_{wk}) ou coloré (η_{ck}) selon la position de l'interrupteur préliminaire K_{bk} .

Nous constatons alors que les composantes déterministes de chacun des signaux S_k seront identiques, seules les composantes stochastiques des signaux S_k changeront lorsque k variera. Ainsi, nous retrouverons η_1 dans la sortie S_1 , η_2 dans la sortie S_2 , etc.

- Quatre signaux de sortie sont repérés S'_1, S'_2, S'_3 et S'_4 . Ils seront les mêmes que les excitations S_k , à l'exception que le signal sinusoïdal déterministe (basse fréquence) appliqué sur l'entrée d_2 ne sera pas ajouté. L'expression (C.1) devient alors :

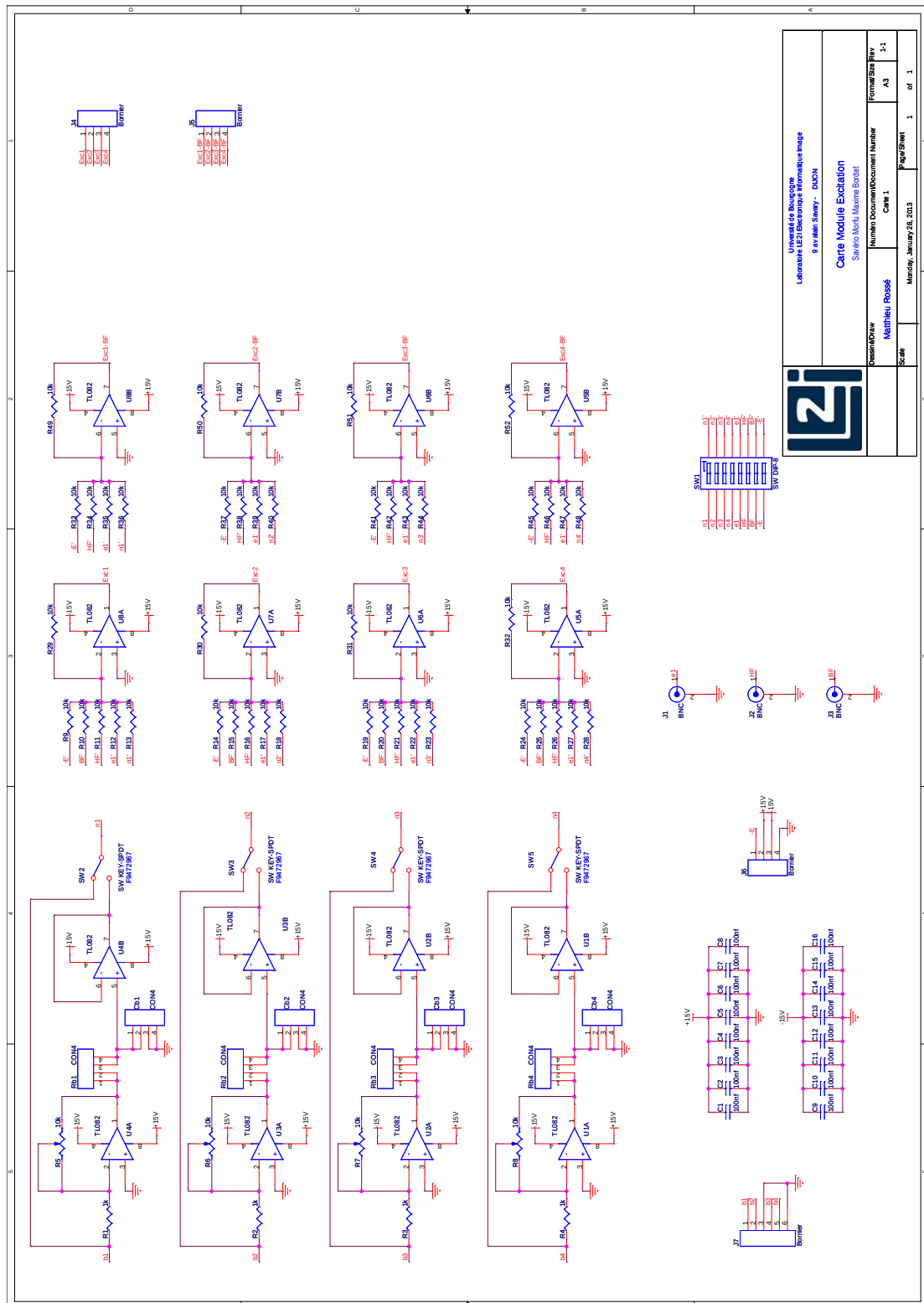
$$S'_k = - \sum_{n \in \{1,3,4\}} K_n d_n + [\eta_{wk} K_{bk} + \eta_{ck} (1 - K_{bk})] \cdot I_k, \quad (C.2)$$

avec $k=1, 2, 3$ ou 4 .

À partir de la structure proposée sur la FIGURE C.1, nous obtenons alors les excitations bichromatiques (S_k) et les excitations monochromatiques (S'_k) que nous appliquerons respectivement sur les premières cellules ($n \leq I_{exc}$) et les suivantes ($n > I_{exc}$). Pour pallier l'infériorité du nombre de signaux fournis par la carte de mixage des excitations par rapport au nombre de cellules à exciter, chaque signal sera appliqué avec une périodicité de quatre cellules.

Dans la partie C.2 suivante, nous présentons le schéma électrique saisi par Matthieu Rossé, assistant ingénieur au laboratoire LE2I, pour la conception de cette carte de mixage des excitations.

C.2/ PLAN DE CONSTRUCTION DE LA CARTE DE MIXAGE DES EXCITATIONS



Résumé :

Ce manuscrit présente des travaux de recherche visant à montrer les possibles effets bénéfiques de perturbations déterministes ou stochastiques sur la réponse de différents systèmes non linéaires. À cet effet, des études numériques et expérimentales sont conjointement proposées sur deux structures distinctes : un oscillateur électronique élémentaire de type FitzHugh-Nagumo et une ligne électrique constituée de 45 de ces oscillateurs couplés résistivement.

Dans un premier temps, la caractérisation de l'oscillateur élémentaire est réalisée en régime déterministe. En présence d'une excitation bichromatique, c'est-à-dire constituée de deux fréquences, il est notamment montré que lorsque la composante de fréquence la plus faible est subliminale, sa détection en sortie du système peut être maximisée pour une amplitude particulière de la seconde composante, qui agit alors comme une perturbation haute fréquence. Par la suite, il est établi que ce phénomène de résonance vibrationnelle peut être amélioré pour quelques fréquences spécifiques de cette perturbation déterministe ; on parle alors de résonance fréquentielle. Par ailleurs, en introduisant une composante stochastique dans l'excitation, les effets induits par des sources de bruit blanc et coloré sur la résonance vibrationnelle sont d'abord exposés. Puis, pour une toute autre configuration de l'excitation bichromatique, l'attention est ensuite portée sur le phénomène de résonance stochastique fantôme. Contrairement aux autres phénomènes de résonance introduits dans ce manuscrit, celui-ci se distingue par le fait que la fréquence d'intérêt en sortie du système ne fait désormais plus partie du stimulus d'excitation.

Enfin, la dernière partie de ce manuscrit est consacrée à l'étude de la structure couplée. Il est montré que la propagation d'une information à travers les cellules de la ligne peut être améliorée via les phénomènes de propagation vibrationnelle et de propagation assistée par le bruit. Ceux-ci se produisent sous certaines conditions, lorsque le système est respectivement sous l'influence d'une perturbation déterministe haute fréquence ou d'une source de bruit.

Mots-clés : dynamique non linéaire, FitzHugh-Nagumo, circuit électronique, perturbation déterministe, bruit blanc, bruit coloré, processus d'Ornstein-Uhlenbeck, résonance vibrationnelle, résonance fréquentielle, résonance stochastique fantôme, propagation vibrationnelle, propagation assistée par le bruit.

Abstract:

This manuscript presents research aiming to show possible positive effects of deterministic and stochastic perturbations on the responses of different nonlinear systems. To that end, both numerical and experimental studies were carried out on two kinds of structures : an elementary electronic FitzHugh-Nagumo oscillator and an electrical line developed by resistively coupling 45 elementary cells.

In the first section, the elementary cell characterization was undertaken in a deterministic regime. In the presence of a bichromatic stimulus, it is shown that when the low frequency component is subthreshold, its detection can be maximized for an optimal magnitude of the second component thanks to vibrational resonance. Next, it is established that this resonance may be enhanced for specific frequencies of the second component ; this phenomenon is referred to as frequency resonance. Furthermore, white and colored noise sources effects on vibrational resonance are reported. Then, for any other bichromatic excitation configuration, attention was focused on ghost stochastic resonance. Contrary to the other phenomena introduced in this manuscript, this one differs in the fact that the frequency of interest in the system output is here not applied on the input.

Finally, the last part of the manuscript is devoted to the study of the coupled structure. It is shown that information propagation through line cells can be enhanced by vibrational propagation and noise assisted propagation phenomena. These nonlinear effects respectively occur when the system is under a high frequency deterministic perturbation or a random noise source.

Keywords: nonlinear dynamics, FitzHugh-Nagumo, electronic circuit, deterministic perturbation, white noise, colored noise, Ornstein-Uhlenbeck process, vibrational resonance, frequency resonance, ghost stochastic resonance, vibrational propagation, noise assisted propagation.

The logo for the SPIM (École doctorale SPIM) features the letters 'SPIM' in a large, white, sans-serif font. To the left of the letters is a stylized orange graphic element consisting of a horizontal bar and a curved line.