THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers)
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par :
Charbel Wehbe

Étude asymptotique de modèles en transition de phase

Directeur(s) de Thèse :
Alain Miranville

Soutenue le 05 décembre 2014 devant le jury

Jury :

Président	**Jean-Paul Chehab**	Professeur des Universités, Université de Picardie Jules Verne
Rapporteur	**Cédric Galusinski**	Professeur des Universités, Université de Toulon
Rapporteur	**Costica Morosanu**	Profesor, Universitar din Iași
Membre	**Alain Miranville**	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	**Laurence Cherfils**	Maître de conférences, Université de La Rochelle
Membre	**Julien Dambrine**	Maître de conférences, Université de Poitiers

Pour citer cette thèse :
Charbel Wehbe. *Étude asymptotique de modèles en transition de phase* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2014. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

THÈSE
pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques (S2IM)

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs Interactions

Présentée par :

Charbel WEHBE

Etude asymptotique de modèles en transition de phase

Directeur de thèse : **Alain MIRANVILLE**

Soutenue le 5 décembre 2014
devant la commission d'examen

JURY

C. MOROSANU	Professeur, Université de Iasi	Rapporteur
C. GALUSINSKI	Professeur, Université de Toulon	Rapporteur
L. CHERFILS	Maître de conférences, Université de la Rochelle	Examinateur
J.P CHEHAB	Professeur, Université de Picardie Jules Vernes	Examinateur
J. DAMBRINE	Maître de conférences, Université de Poitiers	Examinateur
A. MIRANVILLE	Professeur, Université de Poitiers	Directeur

Dédicace

Je dédie ce travail à ma famille :

Mon père Georges WEHBE,
Ma mère Hend WEHBE,
Ma soeur Claudine,
Mon frère Elie.

Remerciements

J'exprime en premier ma profonde gratitude à mon pays le Liban pour m'avoir accordé une bourse d'étude en vue de poursuivre mes études en France. Grand merci à Pierre Torasso pour m'avoir accepté en doctorat en sa qualité de directeur de l'école doctorale à l'époque.

Je tiens à remercier sincèrement, Alain Miranville, qui en tant que directeur de thèse, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de cette thèse, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui cette thèse n'avait jamais vu le jour.

Je tiens à remercier Cédric Galusinski et Costica Morosanu en leur qualité de rapporteurs, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en lisant soigneusement ce manuscrit et en lui accordant leur caution scientifique. Je remercie également Laurence Cherfils, Jean-paul Chehab et Julien Dambrine pour avoir accepté de siéger à mon jury de soutenance.

Je pense également à Pol Vanhaecke, directeur du laboratoire de mathématiques et applications (L.M.A) et à Philippe Rogeon, responsable des séminaires (EDPA).

Mes remerciements vont également à l'endroit du personnel ita/iatos du département et du laboratoire de Mathématique : Brigitte Brault au secrétariat, Nathalie Mongin à la comptabilité, Nathalie Marlet à la bibliothèque, Jocelyne Attab à la bibliothèque et à la reprographie et Bénoît Métrot au service informatique, pour leur sympathie et leur professionnalisme.

J'ai une pensée pour mes chers collègues, à savoir Jules, Hussein, Anis, Haydi, Houssam, Guilnard, Brice, Ahmad, Nada, Frédéric.

Pour finir, je vais remercier les personnes dont les noms suivent avec le risque d'en oublier certains. Cela dit, je tiens à exprimer ma gratitude à :

Batoul Saoud, Cherin Mitlej, Najib Wehbe, Marwan fares, Miled Rizk, Tony Wehbe, Elie Wehbe, Abir Kabak Wehbe, Walid Saad, Elie Mattar, Layla Alemeh, Rabih Yassine, Joseph Khoryati, Ghassan Wehbe, Awada Haidar, Zeinab Ezzeddine, Joseph Bassil...

Table des matières

Notations principales

$\mathbb{R}^n$	: Espace euclidien de dimension n.
$\mathbb{R}^+$	: $= [0, +\infty[$.
Ω	: Domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega$	: Frontière du domaine Ω.
$\bar{\Omega}$	: Adhérence de Ω.
$\lvert\Omega\rvert$	: Mesure du domaine Ω.
$\rightarrow$	: Convergence forte.
$\rightharpoonup$	: Convergence faible.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	: Convergence faible étoile.
$\hookrightarrow$	: Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: Injection compacte.
$L^p(\Omega)$	: Espace de Lebesgue.
$C^1(X, \mathbb{R})$	: Fonctions C^1-différentiables de X dans $\mathbb{R}$.
$L^2(\Omega)$	: Espace de Lebesgue pour $p = 2$.
$C^\infty(X, \mathbb{R})$	: Fonctions C^∞-différentiables de X dans $\mathbb{R}$..
$\mathcal{D}'(\Omega)$	: Espace des distributions.
δ_{ij}	: Symbole de Kronecker.
B_R	: Boule ouverte de centre 0 et de rayon R.
X'	: Espace dual de X.
$< ., . >$	: Crochet de dualité.
$\lVert . \rVert$	: Norme sur l'espace $L^2(\Omega)$.
$((., .))$	: Produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega)$.
Γ	: Interface entre la phase solide et la phase liquide.
l	: chaleur latente (par unité de masse).
σ	: La tension de surface.
K	: la diffusivité thermique.
ρ	: La densité.
c_m	: La chaleur spécifique par unité de masse.
T_E	: La température de fusion à l'équilibre.
υ	: La vitesse normale de l'interface.

Chapitre 1

Introduction

Le thème général de cette thèse est l'étude théorique de systèmes de champ de phase, plus précisement celui de Caginalp qui a été proposé par Gunduz Caginalp (voir [2]) pour modéliser les phénomènes de transitions de phase dans certaines classes de matériaux. Ces travaux sont motivés par leurs immenses applications dans de nombreux domaines physiques, sciences naturelles, génie, procédés industriels,... Nous faisons tout d'abord un historique de quelques modèles mathématiques en transition de phase, puis on s'intéresse à la dérivation du modèle de champ de phase de Caginalp (voir [3] et les références citées pour plus de détails). Enfin nous donnerons en résumé la structure générale du document.

1 historique

En 1831, G. Lamé et B.P. Clapeyron ont étudié le phénomène de congélation du sol (voir [64]), cette étude a ouvert des grandes perspectives. En 1889, le problème introduit par G. Lamé et B.P. Clapeyron est reformulé par J. Stefan ; ce dernier introduit des équations connues sous le nom de problème de Stefan (voir [65]), qui peuvent être écrites sous la forme suivante :

Trouver la température $T = T(t,x)$ et l'interface $\Gamma = \Gamma(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^\star$, telles que

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} = K\Delta T, c_m, K, \rho > 0, \tag{1.1}$$

$$\rho l v = K\nu.[\nabla T], \quad \text{sur} \quad \Gamma(t), l > 0, \tag{1.2}$$

$$T - T_E = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma(t), T_E > 0, \tag{1.3}$$

où $\nu, v, [\nabla T], K, \rho, c_m, T_E$ et l représentent le vecteur normal unitaire à l'intérface, la vitesse normale de l'intérface, la différence des gradients de température entre les phases solides et liquide, la conductivité, la densité, la chaleur spécifique par unité de masse, la température de fonte à l'équilibre et la chaleur latente, respectivement.

Remarque 1.1. *1. Une des caractéristiques de ce modèle est que la phase est fonction du signe de $T - T_E$, à savoir $T - T_E > 0$ correspond à la phase liquide, alors que $T - T_E < 0$ correspond à celle solide. D'un point de vue mathématique, résoudre le problème de Stefan tel que formulé ci-dessus est très difficile, particulièrement en* *dimension supérieure ou égale à 2. En 1947, L. Rubinstein a établi l'existence d'une solution en dimension 1 (voir [66]), mais il a fallu attendre 1980, pour étendre ce résultat d'existence à des espaces de dimensions supérieures ; on le doit notamment à A.M. Meirmanov (voir [67]).*

2. En réalité, le problème ci-dessus est connu sous le nom de problème classique de Stefan ; cette formulation est basée sur le fait que les phases sont séparées par une interface régulière inconnue, qui évolue de façon régulière. Contrairement, la formulation faible du problème de Stefan ne fait aucunement mention d'une interface qui pourrait exister ou non, ce qui permet par exemple de considérer la situation où les phases solide et liquide sont séparées par un ensemble de mesure non nulle dans lequel les deux phases co-existent (par exemple, de la boue) et est ainsi plus générale, bien qu'elle exclut les états métastables.

Toutefois, le problème de Stefan ainsi énoncé ne tient pas compte de tous les aspects physiques des phénomènes de transitions de phase. A cet effet, on peut mentionner J.W. Gibbs, qui suggère dans ses travaux sur la pression et les liquides que la température à l'équilibre d'une interface curviligne diffère de T_E par un terme proportionnel à la somme des courbures principales, κ, et la tension de surface σ (voir [68]) ; des expérimentations en science des matériaux suggèrent également la présence d'un terme additionnel proportionnel à la vitesse normale à l'interface (voir [69]), ce qui nous amène à considérer une condition sur l'interface de la forme

$$T - T_E = -\frac{\sigma}{[s]}\kappa - \beta v, \quad \text{sur} \quad \Gamma(t), \quad \beta \geq 0, \tag{1.4}$$

où $[s]$ est la différence d'entropie entre les phases à l'équilibre et β est une constante qui dépend du matériau.

Dans le problème généralisé de Stefan correspondant à (1.1), (1.2) et (1.4), les phases du matériau ne sont plus déterminées par le signe de $T - T_E$; par conséquent, il faut parcourir l'interface d'une certaine façon pour déterminer la phase en chaque point, d'où une différence fondamentale avec le problème classique de Stefan. D'un point de vue mathématiques, le problème généralisé est très compliqué à étudier (voir [70]). Afin de surmonter cette difficulté, O.A. Oleinik a proposé une approche (voir [71]) consistant à combiner l'équation de la chaleur (1.1) et l'équation de la chaleur latente (1.2) en une seule équation,

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{l}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = K \Delta T, \tag{1.5}$$

où ϕ est une fonction de Heaviside prenant les valeurs -1 dans la phase solide et 1 dans la phase liquide (il faut en fait penser à une formulation faible de (1.1) et (1.2)). Maintenant une question naturelle est celle de savoir si on peut définir une véritable variable ϕ (l'idée étant de remplacer ϕ par φ dans l'équation (1.5)) représentant la phase et remplaçant l'argument utilisé pour obtenir (1.4), d'autant plus que les phases ne sont plus fonction du signe de $T - T_E$.

Une possibilté a été de considérer la théorie de la matière condensée en Physique et en Mécanique statistique, plus précisement, la théorie de champ moyen introduite par P. Weiss et L.D. Landau (voir [1]). Cette dernière est basée sur l'idée de moyenne, au lieu du changement rapide des variables de spin, permettant ainsi une simplification du problème de base de la somme sur tous les états possibles.

L.D. Landau a appliqué la théorie de champ moyen aux phénomènes critiques afin de calculer les exposants pour lesquels les quantités thermodynamiques divergent au point critique (par exemple, la température à laquelle la distinction entre l'état liquide et l'état gazeux disparaît). Cela correspond à une troncature des modes supérieurs de Fourier. En particulier, la théorie de champ moyen conduit, dans les phénomènes critiques, à des calculs d'exposants avec le bon ordre de grandeur, mais ne permet pas d'avoir les valeurs numériques correctes.

On est alors en droit de se demander si le champ moyen (encore appelé paramètre d'ordre) dans les phénomènes critiques peut être utilisé pour résoudre les problèmes dynamiques loin du point critique, comme c'est le cas pour une transition de phase ordinaire (c'est en particulier le cas pour une transition solide-liquide). Une réponse satisfaisante à cette question a été donnée par G. Caginalp qui a montré que la raison pour laquelle on néglige les modes supérieurs de fourier vient du fait que la longueur de transition dans le paramètre d'ordre est très petite comparée aux échelles macroscopiques pertinentes (voir [4]).

G. Caginalp a ainsi proposé, en considérant la théorie de transition de phase de Ginzburg-Landau (voir [1]), le modèle de champ de phase suivant (voir [2] et [4]) :

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{l}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K \Delta T, \tag{1.6}$$

$$\epsilon^2 \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta \varphi - f'(\varphi) + \epsilon [s] \sigma^{-1} g'(\varphi)(T - T_E), \quad \epsilon, \xi > 0, \tag{1.7}$$

où, typiquement,

$$f(s) = \frac{1}{8}(s^2 - 1)^2, \quad g(s) = s - \frac{s^3}{3}.$$

Ici, l'interface $\Gamma_\epsilon(t)$ est définie par

$$\Gamma_\epsilon(t) = \{x \in \Omega, \quad \varphi(t, x) = 0\}.$$

2 Dérivation du modèle de Caginalp

On rappelle le problème classique de Stefan

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T, \quad \text{dans} \quad \Omega - \Gamma(t), \tag{1.8}$$

$$\rho l v = K \nu . [\nabla T], \quad \text{sur} \quad \Gamma(t), \tag{1.9}$$

$$T - T_E = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma(t). \tag{1.10}$$

On pose ensuite $u = T - T_E$ (u est ainsi la température relative), d'où

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega, \quad u(t, x) = 0\}.$$

De plus, $u < 0$ correspond à la phase solide, tandis que $u > 0$ correspond à la phase liquide. On a vu aussi que pour résoudre le problème de Stefan, on peut introduire la fonction

$$H(u) = \rho c_m u + \rho \frac{l}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

où

$$\begin{cases} \varphi = 1 & \text{si} \quad u > 0, \\ \varphi = -1 & \text{si} \quad u < 0. \end{cases}$$

Par suite, l'équation de la chaleur (1.8) et celle de la chaleur latente (1.9) sont équivalentes (dans un sens faible) à l'équation de la chaleur généralisée

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \Delta u.$$

On suppose maintenant qu'on a la relation plus précise de l'interface (au lieu de $u = 0$)

$$u = -\frac{\sigma}{[s]} \kappa - \beta \upsilon \quad \text{sur} \quad \Gamma(t), \quad \beta \geq 0. \tag{1.11}$$

Remarque 2.1. *La relation de Gibbs-Thomson définie par (1.11) est basée sur l'épaisseur finie de l'interface, c'est-à-dire sur une interface diffuse, à savoir que la transition de la phase solide vers la phase liquide se fait de façon continue.*

On considère ainsi la fonction enthalpie H,

$$H(u, \phi) = \rho c_m u + \rho \frac{l}{2} \phi, \tag{1.12}$$

où ϕ n'est plus une fonction étagée, et on suppose que l'on a encore l'équation de la chaleur généralisée

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \Delta u. \tag{1.13}$$

Nous allons maintenant déterminer l'équation constitutive du paramètre d'ordre ϕ en se basant sur la théorie de Ginzburg-Landau et, plus précisement, en considérant l'énergie totale libre de Ginzburg-Landau suivante :

$$\psi_{GL}(\phi, \nabla \phi, u) = \int_\Omega (\frac{\epsilon^2}{2} |\nabla \phi|^2 + f(\phi) - \epsilon [s] \sigma^{-1} g(\phi) u) dx, \quad \epsilon > 0. \tag{1.14}$$

Ici, f est le potentiel double puits habituel (dont chaque puits correspond aux phases pures) ; typiquement, on prend

$$f(s) = \frac{1}{8}(s^2 - 1)^2, \tag{1.15}$$

mais on peut également considérer le potentiel logarithmique suivant :

$$f(s) = k(1 + s) \ln(1 + s) + k(1 - s) \ln(1 - s) - \frac{\lambda}{2} s^2, \quad 0 < \lambda < k, \tag{1.16}$$

potentiel qui est pertinent en thermodynamique.

De plus, un choix typique pour g est

$$g(s) = s - \frac{s^3}{3}, \tag{1.17}$$

bien que l'on puisse également considérer une fonction g linéaire, à savoir,

$$g(s) = \lambda s, \quad \lambda > 0. \tag{1.18}$$

A l'équilibre (c'est-à-dire, dans le cas stationnaire), la fonction ϕ est celle qui minimise l'énergie libre ψ_{GL}, ce qui donne l'équation d'Euler-Lagrange

$$\epsilon^2 \Delta\phi - f^{'}(\phi) + \epsilon[s]\sigma^{-1} g^{'}(\phi)u = 0, \tag{1.19}$$

associée à l'équation stationnaire de la chaleur

$$\Delta u = 0. \tag{1.20}$$

Lorsque le système n'est pas à l'équilibre, la fonction ϕ ne minimise plus l'énergie libre et on admet plutôt une relaxation dynamique de la forme

$$\tau \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta \psi_{GL}}{\delta \phi}, \tag{1.21}$$

où $\tau > 0$ est un paramètre de relaxation et $\frac{\delta}{\delta\phi}$ représente une dérivée variationnelle. En posant $\tau = \epsilon^2 \xi, \quad \xi > 0$ (ce qui est l'échelle correcte si l'on tient à avoir une interface limite précise lorsque $\epsilon \to 0$, voir [32], [33] et [34]), on obtient le système ci-dessous :

$$\epsilon^2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta\phi - f^{'}(\phi) + \epsilon[s]\sigma^{-1} g^{'}(\phi)u, \tag{1.22}$$

$$\rho c_m \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{l}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = K\Delta u. \tag{1.23}$$

Maintenant, on peut voir que l'équation de la chaleur généralisée (1.13) est obtenue en considérant la loi classique de Fourier de la conduction de chaleur. Plus précisement, on a

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -divq, \tag{1.24}$$

où q est le vecteur flux thermique, et, en supposant la loi de Fourier, à savoir,

$$q = -K\nabla u, \tag{1.25}$$

on trouve (1.13).

2.1 Généralisations du système de Caginalp

La loi de Fourier présente un inconvénient majeur, à savoir elle prédit que les signaux thermiques se propagent à une vitesse infinie, ce qui viole le principe de causalité (le fameux "paradoxe de la conduction de la chaleur", voir [35]).

Une possibilité pour corriger ce défaut est de considérer, au lieu de la loi de Fourier, celle de Maxwell-Cattaneo, à savoir,

$$(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t})q = -K\nabla u, \quad \eta > 0. \tag{1.26}$$

En écrivant

$$(1+\eta\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial H}{\partial t} = -div((1+\eta\frac{\partial}{\partial t})q),$$

on a alors

$$\eta\rho c_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho c_m\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\eta\rho\frac{l}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho\frac{l}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{1.27}$$

ce qui est une équation de type équation des ondes.

On peut également considérer la généralisation de la loi de Maxwell-Cattaneo suivante (voir [36]) :

$$(1+\eta\frac{\partial}{\partial t})q = -K\nabla u - K^\star\nabla\frac{\partial u}{\partial t}, \quad K^\star > 0. \tag{1.28}$$

Dans ce cas, l'équation pour la température relative u s'écrit

$$\eta\rho c_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho c_m\frac{\partial u}{\partial t} - K^\star\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - K\Delta u = -\eta\rho\frac{l}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho\frac{l}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{1.29}$$

Une autre possibilité (voir [8]) est de se baser sur un traitement alternatif pour une théorie thermo-mécanique de milieu déformable proposée par A.E. Green et P.M. Naghdi (voir [37]) ; cette théorie est basée sur une loi d'équilibre pour l'entropie plutôt que sur l'inégalité d'entropie habituelle. Ces derniers ont proposé trois différentes théories, en ce qui concerne la conduction de la chaleur, qu'ils ont appelées type I, type II et type III, respectivement. En particulier, lorsque le type I est linéarisé, on recouvre la théorie classique basée sur la loi de Fourier. Les versions linéarisées des deux autres théories donnent les équations constitutives suivantes :

$$q = -K\nabla\alpha, \quad K > 0 \quad (\text{type} \quad II) \tag{1.30}$$

et

$$q = -K\nabla\alpha - K^\star\nabla u, \quad K, K^\star > 0 \quad (\text{type} \quad III), \tag{1.31}$$

où

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau + \alpha_0, \tag{1.32}$$

est appelé la variable déplacement thermique (donc $u = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$). On obtient, en notant que $H = \rho c_m\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \rho\frac{l}{2}\phi$ dans ce cas, les équations suivantes pour α :

$$\rho c_m\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - K\Delta\alpha = -\rho\frac{l}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{1.33}$$

pour le type II et

$$\rho c_m\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - K^\star\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} - K\Delta\alpha = -\rho\frac{l}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{1.34}$$

pour le type III. En outre, on réécrit l'équation pour le paramètre d'ordre sous la forme

$$\epsilon^2\xi\frac{\partial\phi}{\partial t} = \epsilon^2\Delta\phi - f'(\phi) + \epsilon[s]\sigma^{-1}g'(\phi)\frac{\partial\alpha}{\partial t}. \tag{1.35}$$

3 Présentation de la thèse

Cette thèse est constituée de deux parties :

1. Une généralisation du système de champ de phase de Caginalp basée sur la loi de Maxwell-Cattaneo.

2. Une généralisation du système de champ de phase de caginalp **conservée** basée sur la loi de Maxwell-Cattaneo.

La première partie se compose de quatres chapitres, à savoir :

-**Chapitre 3** : Système de champ de phase de type Caginalp avec un potentiel polynomial ;

-**Chapitre 4** : Système de champ de phase de type Caginalp avec un terme non linéaire logarithmique ;

-**Chapitre 5** : Problème de champ de phase de type Caginalp avec un terme polynomial ;

-**Chapitre 6** : Attracteurs pour un modèle de champ de phase de type Caginalp avec un terme non linéaire logarithmique.

La seconde partie se compose également de deux chapitres,

-**Chapitre 7** : Modèle de champ de phase conservatif avec un terme polynomial ;

-**Chapitre 8** : Modèle de champ de phase conservatif avec un terme non linéaire logarithmique.

4 Présentation des résultats

Dans un premier temps, on a considéré le modèle de champ de phase suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{1.37}$$

où Ω est le domaine occupé par le matériau (domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$, n entier), Δ est le laplacien. Les fonctions inconnues u et α sont le paramètre d'ordre et la variable de déplacement thermique, respectivement.

(a) Pour g_N régulier, typiquement le polynôme de degré impair $2N+1$:

$$g_N(s) = -2\kappa_0 s + 2\kappa_1 \sum_{k=0}^{N} \frac{s^{2k+1}}{2k+1}, \quad 0 < \kappa_1 < \kappa_0,$$

on a établi des résultats d'existence et d'unicité des solutions à l'aide des méthodes classiques. De plus on a étudié la dissipativité du système en termes d'existence de bornés absorbants :

1. avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogènes

2. avec des conditions aux bords de type Neumann homogènes

(b) Pour g singulier, typiquement logarithmique, à savoir $g(s) = -2\kappa_0 s + \kappa_1 \ln(\dfrac{1+s}{1-s})$, avec $s \in (-1, 1)$ et $0 < \kappa_1 < \kappa_0$, on a utilisé la méthode d'approximation de ce terme g par le polynôme g_N ensuite on a passé à la limite dans les équations lorsque $N \to +\infty$, pour obtenir le caractère bien posé du problème. Notons que celà était valable pour $n \leq 3$. Pour l'étude asymptotique des solutions une des difficultés a été de prouver que le paramètre d'ordre u reste dans l'intervalle $(-1, 1)$. En dimension une et deux, on a obtenu l'existence d'un attracteur global de dimension finie :

1. avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogènes

2. avec des conditions aux bords de type Neumann homogènes.

Dans un second temps, on s'est intéressé à la version conservative du problème précédent, à savoir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta g(u) = -\Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{1.38}$$
$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{1.39}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$, n entier, Δ est le laplacien. Les fonctions inconnues u et α sont le paramètre d'ordre et la variable de déplacement thérmique, respectivement.

Ces équations sont connues comme le modèle conservé de champ de phase, dans le sens où, quand munies de conditions aux limites de Neumann, la moyenne spatiale du paramètre d'ordre est une quantité conservée.

On associe à (1.38)-(1.39) des conditions aux bords de Dirichlet homogènes.

(a) Pour g_N polynôme, nous avons également eu des résultats théoriques (existence et unicité, régularité, dissipativité) pour $n = 2, 3$.

(b) Pour g logarithmique, on a démontré l'existence des solutions en dimension inférieure ou égale à trois, ainsi qu'une propriété de séparation stricte en dimension une et deux afin d'étudier le comportement asymptotique des solutions.

5 Plan de la thèse

Le deuxième chapitre a pour objectif d'introduire des notions de base d'analyse fonctionnelle et des systèmes dynamiques dissipatifs. On rappelle des résultats classiques sans en donner les démonstrations, ces résultats seront appliqués tout au long de ce document.

L'objet des quatres chapitres qui constituent la première partie est une généralisation du système de champ de phase de Caginalp basée sur une loi de Maxwell-Cattaneo.

Tout d'abord, on donnera une introduction qui explique les motivations physiques de notre modèle.

Par suite on se propose dans le troisième chapitre, de considérer un potentiel régulier plus précisement un polynôme de degré impair afin d'établir une étude théorique.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du modèle associé à un potentiel singulier, typiquement un potentiel logarithmique. On énoncera des résultas d'existence et d'unicité ainsi que le comportement asymptotique des solutions.

Les cinquième et sixième chapitres sont dédiés à l'étude du problème précédent avec conditions aux bords de type Neumann homogènes.

Les septième et huitième chapitres composant la seconde partie, sont consacrés à une généralisation du problème de champ de phase **conservé** basée aussi sur la loi de Maxwell-Cattaneo.

On commence par un propos introductif, donnant la dérivation du modèle.

Le septième chapitre étudie un modèle de champ de phase conservé avec un potentiel régulier. On propose une étude théorique (existence et unicité, dissipativité et régularité) du modèle.

Le dernier chapitre reprend le chapitre 7 avec un potentiel singulier, nous sommes en mesure de prouver une propriété de séparation stricte en dimension une et deux. On prouve que le problème est bien posé et on analyse aussi le comportement asymptotique des solutions.

Chapitre 2

Quelques notions et résultats utiles

Ce chapitre a pour but de rappeler quelques notions et résultats utiles pour la suite.

1 Espaces de base et propriétés

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\| \,.\, \|_X$.

Définition 1.1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, l'espace noté $L^p(a, b; X), 1 \leq p < +\infty$ désigne l'espace de classes de fonctions $f : (a, b) \to X$ mesurables telles que*

$$\int_a^b \| f(t) \|_X^p \, dt < +\infty,$$

et $L^\infty(a, b; X)$ celui des fonctions bornées presque sûrement sur (a, b). Autrement dit, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\| f(t) \|_X \leq M, p.p.t \in (a, b).$$

Propriété 1.2. *Si $p < \infty$, alors*

$$f \mapsto \Big(\int_a^b \| f(s) \|_X^p \, ds \Big)^{\frac{1}{p}} = \| f \|_{L^p(a,b;X)};$$

sinon

$$f \mapsto \sup_{s \in (a,b)} \| f(s) \|_X = \| f \|_{L^\infty(a,b;X)},$$

est une norme sur $L^p(a, b; X)(1 < p \leq +\infty)$ qui est un espace de Banach.

Propriété 1.3. *Soit X et Y deux espaces de Banach tel que X s'injecte de façon dense dans Y. Alors $L^p(a, b; X)$ est dense dans $L^p(a, b; Y)$ pour $1 \leq p < +\infty$.*

Remarque 1.4. *La propriété 1.3 n'est pas vraie pour $p = +\infty$.*

Propriété 1.5. *Soit $1 < p < +\infty$. Si l'espace X est réflexif, alors $L^p(a, b; X)$ l'est également.*

Corollaire 1.6. *A partir d'une suite bornée, on peut extraire une sous suite faiblement convergente.*

1.1 Espaces duaux

Théorème 1.7. *Soit* $(X, \|\ .\ \|_X)$ *un espace de Banach et* X' *son espace dual. Soit* q *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *avec* $1 < p, q < +\infty$. *On considère l'application* T *définie par :*

$$\begin{array}{rcl} L^q(a, b; X') & \to & L^p(a, b; X) \\ f & \mapsto & T(f)v = \int_a^b < f(t), v(t) >_{X',X} dt. \end{array}$$

Alors T *est un isomorphisme (une isométrie surjective) à valeur dans le dual de* $L^p(a, b; X)$, *noté* $(L^p(a, b; X))'$.

Corollaire 1.8. *Par le Théorème 1.7, on peut identifier* $(L^p(a, b; X))'$ *à* $L^q(a, b; X')$.

2 Quelques résultats

Nous rappelons ici quelques lemmes et théorèmes qui interviendront dans notre travail. Leurs démonstrations peuvent être consultées dans les références indiquées.

Lemme 2.1. *[13] Soit* $\mathcal{O}$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t, g_\mu$ *et* g *des fonctions de* $L^q(\mathcal{O}), 1 < q < \infty$, *telles que*

$$\| g_m \|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C, \quad g_m \to g \quad p.p. \quad dans \quad \mathcal{O},$$

alors $g_m \to g$ *dans* L^q *faible .*

Théorème 2.2. *(Théorème de J.P. Aubin-J. L. Lions). On note par* E *l'ensemble suivant*

$$E = \{u \in L^p(0, \tau; X); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, \tau; Y)\}. \tag{2.1}$$

On munit E *de la norme* $\| u \|_E = \| u \|_{L^p(0,\tau;X)} + \| \dfrac{\partial u}{\partial t} \|_{L^q(0,\tau,Y)}$ *qui est en fait un espace de Banach, où* $1 \leq p \leq \infty$, $1 < q \leq \infty$ *et* X, Y *sont deux espaces de Banach tels que* $X \hookrightarrow Z \hookrightarrow Y$ *avec injections continues et* $X \hookrightarrow Z$ *avec injection compacte. Alors,*

$$E \hookrightarrow C([0, T]; Z), \quad \text{avec injection compacte.} \tag{2.2}$$

De plus, si $p < \infty$ *alors,*

$$E \hookrightarrow L^p(0, \tau, Z), \quad \text{avec injection compacte.} \tag{2.3}$$

Théorème 2.3. *(Théorème de Strauss). Soit* X *et* Y *deux espaces de Banach tels que* $X \subset Y$ *avec injection continue et* Y *est réflexif. Alors*

$$C([0, T]; Y) \cap L^\infty([0, T]; X) \subset C_W([0, T]; X), \tag{2.4}$$

où $C_W([0, T]; X)$ *est l'ensemble des fonctions faiblement continues de* $[0, T]$ *à valeur dans* X.

Lemme 2.4. *[13] Si* $f \in L^p(0, T; X)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, *alors* f *est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0, T)$, *continue de* $[0, T] \to X$.

3 Injections et Inégalités

3.1 Injections de Sobolev

Théorème 3.1. *(voir [11], [60] et [61]) - Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert de classe* C^1. *Soit* $d \geq 1$ *un entier et* $p \in [0, +\infty[$ *un réel. Alors*

1. *si* $1 \leq p \leq \frac{n}{d}$, *on a* $W^{d,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, \overline{p}], \quad \overline{p} = \frac{np}{n - dp}$;
2. *si* $p = \frac{n}{d}$, *on a* $W^{d,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q \leq +\infty$;
3. *si* $p > \frac{n}{d}$, *on a* $W^{d,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, *avec* $0 \leq k \leq d - \frac{n}{d}$.

En particulier, $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ *si* $n \leq 3$. *Les inclusions ci-dessus sont toutes compactes pour* $n = 1$.

Remarque 3.2. *Sans l'hypothèse de régularité sur* Ω, *les injections restent valables localement. Elles restent globalement vraies si on remplace* $W^{d,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{d,p}(\Omega)$.

3.2 Inégalités de Young

Théorème 3.3. *Soit* $1 < p < +\infty$. *Soit* q *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Soit* $a, b \in (0, +\infty)$. *Alors*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

On a également l'inégalité de Young avec ϵ *(valide pout tout* $\epsilon > 0$*) :*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}.$$

3.3 Inégalités de Hölder

Théorème 3.4. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert quelconque,* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Soit* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$, *avec* $1 \leq p \leq +\infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

Corollaire 3.5. *(voir [11], [12] et [62]). (Inégalités d'interpolations) Si* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *avec* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *alors* $f \in L^r(\Omega)$ *pour tout* $p \leq r \leq q$ *et on a l'inégalité suivante :*

$$\| f \|_{L^r} \leq \| f \|_{L^p}^\theta \| f \|_{L^q}^{1-\theta},$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1 - \theta}{q}$.

3.4 Inégalités de Poincaré

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens de distibutions est également dans $L^2(\Omega)$. Sa norme naturelle est

$$\| u \|_{H^1} = (\| u \|^2 + \| \nabla u \|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est définit comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$. Lorsque Ω est suffisamment régulier, on peut montrer que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ s'annulant sur $\partial\Omega$.

Théorème 3.6. *(voir [11]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans une seule direction ou de mesure finie. Alors il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω telle que :*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq c \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où $1 \leq p < +\infty$.

Cette inégalité peut être généralisée. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Notons $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont la norme suivante est finie :

$$\| u \|_{W^{1,p}} = (\| u \|_{L^p}^p + \| \nabla u \|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

On définit maintenant l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant l'adhérence des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 3.7. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ borné, par exemple $\{(x_1, x_2, ..., x_n), |x_1| \leq a\}, a > 0$. Alors il eiste une constante C dépendant de Ω et p telle que*

$$\| u \|_{L^p} \leq C \| \nabla u \|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 3.8. *Une autre généralisation est l'inégalité de Poincarré-Wirtinger. Elle a l'avantage d'être valable pour toutes les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$, et pas simplement celles qui s'annulent au bord.*

Théorème 3.9. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et de mesure finie, et soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors il existe une constante C telle que*

$$\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \|_{L^p} \leq C \| \nabla u \|_{L^p} .$$

En particulier, pour $p = 2$, on a le résultat suivant :

Théorème 3.10. *(voir [20]) Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que :*

1.

$$\| u(x) - < u(x) > \| \leq c \| \nabla u(x) \|, \quad \forall u \in H^1(\Omega);$$

2.

$$\| u(x) - < u(x) > \|_{H^1(\Omega)} \leq c \| \nabla u(x) \|, \quad \forall u \in H^1(\Omega);$$

3. De plus, si Ω est connexe ou si $\partial\Omega$ est suffisamment régulier, disons par exemple, C^2, on a

$$\| u(x)- < u(x) >\|_{H^2(\Omega)} \leq c \parallel \Delta u(x) \parallel, \quad \forall u \in H^2(\Omega),$$

où

$$< u >:= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx.$$

4 Lemmes de Gronwall

Lemme 4.1. *(forme différentielle, voir [51]). Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait l'inégalité différentielle*

$$\frac{d}{dt} x \leq g(t)x + h(t),$$

alors

$$x(t) \leq x(0) \exp\left(G(t)\right) + \int_0^t \exp\left[G(t) - G(s)\right] h(s) ds,$$

où $G(t) = \int_0^t g(r) dr$.

En particulier, si a et b sont deux constantes et

$$\frac{d}{dt} x \leq ax + b,$$

alors

$$x(t) \leq (x_0 + \frac{b}{a}) \exp\left(at\right) - \frac{b}{a}.$$

Lemme 4.2. *(forme intégrale). Soit φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\tau) d\tau\right) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Lemme 4.3. *(de Gronwall uniforme (voir [20])). Soit g, h et y trois fonctions positives localement intégrables sur $(t_0, +\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, telles que y' est localement intégrable sur $(t_0, +\infty)$, où y' est la dérivée de y par rapport à t. On suppose que*

$$y' \leq gy + h, \quad \forall t \geq t_0, \tag{2.5}$$

et que

$$\int_t^{t+r} g(s) ds \leq a_1(r), \quad \int_t^{t+r} h(s) ds \leq a_2(r),$$

$$\int_t^{t+r} y(s) ds \leq a_3(r), \quad \forall t \geq t_0,$$

où $r > 0$ est un nombre donné. Alors,

$$y(t + r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2) \exp\left(a_1\right), \forall t \geq t_0. \tag{2.6}$$

5 Attracteurs et systèmes dynamiques

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \, . \, \|_E$. On considère un semi-groupe $S(t), \quad t \geq 0$, défini de E dans lui-même,

$$S(t) : E \to E, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.7}$$

$$S(0) = Id, \tag{2.8}$$

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s), \quad \forall t, s \geq 0, \tag{2.9}$$

où Id est l'opérateur identité. Nous aurons besoin que le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, soit continu. C'est pour cela, on prend $S(t)$ continu de E dans lui-même, $\forall t \geq 0$.

Définition 5.1. *Un ensemble $X \subset E$ est invariant pour le semi-groupe $S(t)$ si*

$$S(t)X = X, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $S(t)X \subset X, \quad \forall t \geq 0$ (respectivement $X \subset S(t)X, \forall t \geq 0$), on dit que X est positivement invariant (respectivement X est négativement invariant).

Définition 5.2. *Soit $u_0 \in E$. L'ensemble oméga-limite de u_0 est l'ensemble*

$$\omega(u_0) := \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{t \geq s} S(t) u_0},$$

où l'adhérence est prise dans E. De la même façon, pour tout ensemble borné B de E, l'ensemble oméga-limite de B est l'ensemble

$$\omega(B) := \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{t \geq s} S(t) B}.$$

Remarque 5.3. *L'ensemble $\omega(B)$ est caractérisé par :*

$$x \in \omega(B) \Leftrightarrow \exists \quad \textit{une suite} \quad \{x_k, k \in \mathbb{N}\}, x_k \in B, \forall k \in \mathbb{N},$$

et

$$t_k \to +\infty \quad \textit{lorsque} \quad k \to +\infty \quad \textit{tels que} \quad S(t_k)x_k \to x \quad \textit{lorsque} \quad k \to +\infty.$$

Proposition 5.4. *(voir [20] et [30]). On suppose que $B \subset E, B \neq \oslash$, et qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $\cup_{t \geq t_0} S(t)B$ est relativement compact dans E. Alors $\omega(B)$ est non vide, compact et invariant.*

Définition 5.5. *Un ensemble X satisfait la propriété d'attraction si, pour tout $B \subset E$ borné,*

$$dist_E(S(t)B, X) \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad t \to +\infty,$$

où $dist_E$ est la semi-distance de Hausdorff entre les ensembles, définie par

$$dist_E(A, B) := sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \| a - b \|_E .$$

Définition 5.6. *1. Un ensemble borné $\mathcal{B}_0 \subset E$ est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, si pour tout borné B de E, il existe $t_0 = t_0(B)$ tel que $t \geq t_0$ implique que $S(t)B \subset \mathcal{B}_0$.*

2. Un ensemble $K \subset E$ est attractif si, pour tout borné B de E

$$\lim_{t \to +\infty} dist_E(S(t)B, K) = 0$$

où $dist_E$ est la semi-distance de Hausdorff entre les ensembles, définie comme ci-dessus.

Définition 5.7. *Le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, est dissipatif dans E s'il possède un ensemble borné absorbant $B \subset E$. En pratique, cette propriété est habituellement vérifiée en prouvant une estimation dissipative (au sens mathématique du terme) de la forme*

$$\| S(t)u_0 \|_E \leq Q(\| u_0 \|_E) \exp(-\alpha t) + C_\star, \forall t \geq 0,$$

où Q est une fonction monotone et les constantes positives α et $C_\star$ sont indépendantes de $u_0 \in E$.

Définition 5.8. *Soit B un sous ensemble borné de E. La mesure de non compacité de Kuratowski de B est la quantité*

$$\begin{aligned} \kappa(B) := \inf\{d \quad , \quad & B \quad \textit{a un recouvrement fini de boules de} \quad E \\ & \textit{dont les diamètres sont plus petits que} \quad d\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Définition 5.9. *On dit que le semi-groupe $S(t), t \geq 0$ est asymptotiquement compact si, pour tout ensemble borné $B \subset E$, la mesure de non compacité de Kuratowski de l'image $S(t)B$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, c'est-à-dire*

$$\lim_{t \to +\infty} \kappa(S(t)B) = 0, \quad \forall B \quad \textit{borné dans} \quad E.$$

Définition 5.10. *Un ensemble $\mathcal{A} \subset E$ est un attracteur global pour le semi-groupe $S(t)$ sur E si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *c'est un sous-ensemble compact de E;*

2. *il est invariant, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$;*

3. *c'est un ensemble attractif pour $S(t)$ sur E.*

Remarque 5.11. *La propriété d'invariance satisfaite par l'attracteur global $\mathcal{A}$ nous assure son unicité (s'il existe). De plus, $\mathcal{A}$ est le plus petit (pour l'inclusion) ensemble fermé qui satisfait la propriété d'attraction et apparaît ainsi comme un objet qui permet d'étudier le comportement asymptotique du système.*

Théorème 5.12. *(voir [30]). On suppose que le semi-groupe $S(t)$ est continu, dissipatif (c-à-d, il possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_0$), et asymptotiquement compacte (au sens de la définition 5.9). Alors, il possède l'attracteur global connexe $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}_0)$.*

6 Dimension de l'attracteur global

La dimension de l'attracteur global est une propriété géométrique intéressante dans la mesure où elle nous donne des informations sur le nombre de paramètres physiques ou de degrés de liberté définissant le système dynamique considéré. Nous nous intéressons ici aux dimensions de recouvrement telles que la dimension de Hausdorff et la dimension fractale.

Définition 6.1. *Soit $X \subset E$ un espace relativement compact. Pour $\epsilon > 0$, soit $N_\epsilon(X)$ le nombre minimal de boules de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir X. Alors la dimension fractale de X est la quantité*

$$dim_F(X) := \limsup_{\epsilon \to 0^+} \frac{\ln N_\epsilon(X)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})},$$

(noter que $dim_F(X) \in [0, +\infty]$). En outre, la quantité $\mathcal{H}_\epsilon(X) := \ln N_\epsilon(X)$ est appelée $\epsilon-$ entropie de Kolmogorov de X.

Une façon de démontrer que l'attracteur global $\mathcal{A}$ existe et est de dimension fractale finie est de prouver par exemple l'existence d'un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$. La notion d'attracteur exponentiel, encore appelé ensemble inertiel, a été introduite par Eden, Foias, Nicolaenko, et Temam dans [63], dans le but de corriger certains défauts de l'attracteur global, notamment la vitesse d'attraction et la robustesse.

Définition 6.2. *Un ensemble compact $\mathcal{M}$ est un attracteur exponentiel pour le semi-groupe $S(t)$ si :*

(i) il est de dimension fractale finie, $dim_F(\mathcal{M}) < +\infty$;

(ii) il est positivement invariant, $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \quad \forall t \geq 0$;

(iii) il attire de façon exponentielle les sous-ensembles bornés de E au sens suivant :

$$\forall B \subset E \quad \textit{borné}, \quad dist_E(S(t)B, \mathcal{M}) \leq Q(\| B \|_E) \exp(-ct), \quad t \geq 0,$$

où la constante positive c et la fonction monotone Q sont indépendantes de B, et $dist_E$ est donnée par la définition 5.5.

Remarque 6.3. *(a) Un attracteur exponentiel lorsqu'il existe n'est pas unique, cela est dû à la propriété d'invariance positive de celui-ci. Ainsi, l'existence d'un attracteur exponentiel implique en fait l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels.*

(b) La dimension finie de l'attracteur global signifie que la dynamique du système peut être décrite par un nombre fini de degrés de liberté, et ce en dépit du fait que l'espace es phases initial est de dimenion infinie.

(c) Il est à noter que l'attracteur global peut être extrêmement sensible aux perturbations aussi minimes soient elles. Cela est liée à la vitesse d'attraction de trajectoires de l'attracteur global qui peut être lente, contrairement à l'attracteur exponentiel qui lui, est robuste face aux perturbations (voir [30] pour plus de détails).

Première partie

Généralisation du modèle de champ de phase de Caginalp basée sur la loi de Maxwell-Cattaneo

Introduction

Cette partie comportant quatres chapitres a pour but l'étude d'une généralisation du système de champ de phase de type Caginalp qui modélise quelques phénomènes de transition de phase. On obtient cette généralisation grâce à la loi de Maxwell-Cattaneo.

Au premier chapitre, on analyse tout d'abord le modèle sur un domaine borné de dimension 2 ou 3 avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes et un terme polynômiale de degré $2N + 1$ (N fixé).

Au chapitre 4, on considère un potentiel non régulier, typiquement logarithmique. L'existence, l'unicité et la régularité de solutions sont établies, mais également l'existence de l'attracteur global de dimension finie.

Ensuite, aux chapitres 5 et 6, le modèle est analysé avec des conditions aux bords de Neumann homogènes. On prouve également l'existence, l'unicité de solutions puis l'existence des attracteurs en dimension une et deux.

Dérivation du modèle

On s'intéresse dans cette partie au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad \text{dans} \quad \Omega, && (2.11) \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \quad \text{dans} \quad \Omega, && (2.12) \end{aligned}$$

où u est le paramètre d'ordre et α est la variable de déplacement thérmique. Par ailleurs toutes les constantes physiques sont posées égale à un. Le système défini par (2.11)-(2.12) provient de la théorie de transition de phase de Ginzburg-Landau (voir [2], [49], [50] et [7]) et peut être dérivé comme suit.

On considère l'énergie libre totale de Ginzburg-Landau donnée par :

$$\Psi(u, \theta) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + g(u) - u\theta - \frac{1}{2}\theta^2) dx, \tag{2.13}$$

où $\theta := \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ est la température relative et Ω est le domaine occupé par la matière qui subit la transition de phase. On introduit l'enthalpie H défini par :

$$H = -\partial_\theta \Psi, \tag{2.14}$$

où ∂ désigne une dérivée variationnelle, ce qui donne

$$H = u + \theta \tag{2.15}$$

Les équations constitutives de u et θ sont données respectivement par (voir [2]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\partial_u \Psi, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \div q = 0, \tag{2.17}$$

où q désigne le vecteur flux thermique.

En considérant la loi de Fourier classique

$$q = -\nabla\theta, \tag{2.18}$$

on trouve le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = \theta, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = -\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.20}$$

Mais la loi de Fourier présente un inconvénient majeur, c'est qu'elle prédit que les signaux thermiques se propagent à une vitesse infinie, ce qui viole le principe de causalité (paradoxe de la conduction de la chaleur).

Une modification possible pour corriger cette caractéristique irréelle (voir [35]), est de considérer au lieu de la loi de Fourier, celle de Maxwell-Cattaneo, à savoir

$$(1 + \eta\frac{\partial}{\partial t})q = -\nabla\theta, \quad \eta > 0, \tag{2.21}$$

où η est le paramètre de relaxation. Pour simplifier, on prend $\eta = 1$, on obtient par (2.17) :

$$(1 + \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta\theta = 0,$$

donc l'équation suivante d'ordre 2 en temps pour la température relative :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.22}$$

Ce modèle peut être aussi dérivé en considérant comme par exemple dans [49] et [50], le modèle de champ de phase de Caginalp avec ce qu'on appelle la loi de Gurtin-Pipkin :

$$q(t) = -\int_0^{+\infty} k(s)\nabla\theta(t-s)ds, \tag{2.23}$$

avec k un noyau de mémoire qui décroit exponentiellement donné par :

$$k(s) = \exp(-s).$$

En effet, si on différencie (2.23) par rapport au temps et on intègre par parties, on obtient la loi de Maxwell-Cattaneo (2.21) (avec $\eta = 1$).

Mais de point de vue mathématique, il est plus convénient pour traiter le problème d'introduire les nouvelles variables suivantes :

$$\alpha = \int_0^t \theta(s)ds, \quad \theta = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{2.24}$$

et en intégrant (2.22) par rapport à $s \in [0, T]$, on aura

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u + g \tag{2.25}$$

où $g = \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(0) + \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(0) - \Delta \alpha(0) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) + u(0)$. En prenant $g = 0$ dans (2.25), on obtient l'équation (2.12), et par (2.19) et (2.24) on aura l'équation (2.11).

Chapitre 3

Système de champ de phase de type Caginalp avec un potentiel polynomial

On considère dans ce chapitre la loi de Maxwell-Cattaneo du modèle de champ de phase de Caginalp (cf. [7] et [8]). On s'intéresse au caractère bien posé du problème c'est-à-dire nous montrons l'existence et l'unicité de la solution, de plus on étudiera la dissipativité c'est-à-dire l'existence de bornés absorbants.

Plus précisement on considère le problème de Dirichlet suivant (N est fixé),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g_N(u) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, && (3.1)\\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -\frac{\partial u}{\partial t} - u, && (3.2)\\ u = \alpha &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, && (3.3)\\ u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad &, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, && (3.4) \end{aligned}$$

où u est le paramètre d'ordre ou champ de phase, α représente la variable de déplacement thermique, c'est-à-dire une primitive de la température relative notée θ ($\alpha(t) := \int_0^t \theta(\tau)d\tau + \alpha_0$), $\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (n = 2 \quad \text{ou} \quad 3)$ est un domaine borné régulier, $\partial\Omega$ désigne le bord régulier.

1 Cadre abstrait pour la résolution

On introduit les espaces de Hilbert ci-dessous :

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H_0^1(\Omega), \quad W = H^2(\Omega),$$

On note $((.,.))$ et $(.,.)$ les produits scalaires de H et V et $\| \, . \, \|$ et $\| \, . \, \|_V$ désignent les normes associées. Le symbole $< .,. >$ désigne le produit de dualité entre V' et V. On identifie H et H'(via le théorème de Riesz) où H' est l'espace dual de H. On a alors :

$$V \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

avec les injections continues et denses. De plus d'après le théorème de Rellich-Kondrachoff la première injection est compacte.
Dans le cadre de notre problème, on considère les espaces suivants :

$$E = V \times V \times H \quad \text{et} \quad E_1 = (W \cap V)^2 \times V,$$

munis de leurs normes usuelles.

Le polynôme g_N est défini comme suit :

$$g_N(s) = -2\kappa_0 s + 2\kappa_1 \sum_{k=0}^{N} \frac{s^{2k+1}}{2k+1}, \tag{3.5}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $0 < \kappa_1 < \kappa_0$. On a alors

$$g_N^{'}(s) = 2(\kappa_1 - \kappa_0) + 2\kappa_1 \sum_{k=1}^{N} s^{2k}. \tag{3.6}$$

De plus, g_N vérifie

$$g_N(0) = 0, \quad g_N \in C^1, \tag{3.7}$$
$$-c_0 \leq G_N(s), \quad G_N(s) \leq g_N(s)s + c_0, \quad c_0 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$
$$g_N^{'}(s) \geq -c_1, \quad c_1 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

où $G_N(s) = \int_0^s g_N(\tau)d\tau, \quad s \in \mathbb{R}$.

1.1 Formulation faible

Pour tout $v \in V$, en prenant le produit scalaire dans H des équations (3.1)-(3.2) avec v, on obtient :

$$< \frac{\partial u}{\partial t}, v > +(u, v) + ((g_N(u), v)) =< \frac{\partial \alpha}{\partial t}, v >, \tag{3.10}$$
$$< \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, v > + < \frac{\partial \alpha}{\partial t}, v > +(\alpha, v) = -((u, v)) - < \frac{\partial u}{\partial t}, v > . \tag{3.11}$$

On associe à (3.10)-(3.11) les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcll} u(0) & = & u_0 & \text{dans} \quad V, \\ \alpha(0) & = & \alpha_0 & \text{dans} \quad V, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(0) & = & \alpha_1 & \text{dans} \quad H. \end{array} \tag{3.12}$$

Définition 1.1. *Pour tout* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in E$. *Un triplet* $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ *est dit solution faible de (3.1)-(3.4) s'il satisfait la formulation faible (3.10)-(3.12) de (3.1)-(3.4) et* $u \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T, V)$, $\quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, H)$, $\quad \alpha \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ *et* $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; H)$.

On notera dans la suite $c, c^{'}$ et $c^{''}$ des constantes positives qui pourront varier d'une ligne à l'autre et quelques fois dans la même ligne.

2 Solutions et Semi-groupe

Cette section est consacrée à l'existence et à l'unicité de solutions du problème (3.1)-(3.4). On a le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.1. *Soit* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in E$ *et* $\int_\Omega G_N(u_0)dx < +\infty$. *Alors le problème (3.1)-(3.4) admet au moins une solution* $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})/u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+, V) \cap L^2(0, T, W)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \alpha \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ *et* $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\Omega)), \quad \forall T > 0.$

DÉMONSTRATION: Nous appliquerons la méthode de Faedo-Galerkin en donnant les grandes lignes.
Problème approché : -L'opérateur $A = -\Delta$ associé aux conditions aux bords de Dirichlet homogènes de domaine $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est borné, autoadjoint et stictement positif ; il possède un inverse compact. On peut alors considérer une famille $\{w_j, j \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ qui forme une base orthonormée dans H et orthogonale dans V. En posant

$$V_m = vect\{w_1, ...w_m\}$$

et

$$\beta_m = \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(\quad \text{respectivement} \quad \beta = \frac{\partial \alpha}{\partial t}),$$

on considère le problème approché suivant, écrit sous forme fonctionnelle :

$$\frac{du_m}{dt} + Au_m + g_N(u_m) = \beta_m, \tag{3.13}$$

$$\frac{d\beta_m}{dt} + \beta_m + A\alpha_m = -\frac{du_m}{dt} - u_m, \tag{3.14}$$

$$u_m(0) = P_m u_0, \quad \alpha_m(0) = P_m \alpha_0, \quad \beta_m(0) = P_m \alpha_1, \tag{3.15}$$

où P_m est la projection orthogonale de H sur V_m pour le produit scalaire dans H, ce qui équivaut à

$$((\frac{\partial u_m}{\partial t}, v)) + (u_m, v) + ((g_N(u_m), v)) = ((\beta_m, v)), \quad \forall v \in V_m, \tag{3.16}$$

$$((\frac{\partial \beta_m}{\partial t}, v)) + ((\beta_m, v)) + (\alpha_m, v) = - ((\frac{\partial u_m}{\partial t}, v)) - ((u_m, v)), \quad \forall v \in V_m, \tag{3.17}$$

associé aux conditions (3.15).

Solution locale en temps : -On cherche des fonctions u_m, α_m et β_m sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

$$\alpha_m(t) = \sum_{j=1}^m f_{jm}(t) w_j$$

et

$$\beta_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)w_j,$$

où les coefficients $g_{jm}(t), f_{jm}(t)$ et $\beta_{jm}(t)$ appartiennent à $C^1(\mathbb{R}^+)$ et vérifient, lorsque $m\to+\infty$:

$$\begin{array}{lll}
P_m u_0=u_m(0)=u_{0m}=\sum_{i=1}^m g_{im}(0)w_i\longrightarrow u_0 & \text{dans} & V,\\
P_m\alpha_0=\alpha_m(0)=\alpha_{0m}=\sum_{i=1}^m f_{im}(0)w_i\longrightarrow \alpha_0 & \text{dans} & V,\\
P_m\alpha_1=\beta_m(0)=\alpha_{1m}=\sum_{i=1}^m \beta_{im}(0)w_i\longrightarrow \alpha_1 & \text{dans} & L^2(\Omega).
\end{array}$$

Ainsi résoudre (3.13)-(3.15) revient à trouver les coefficients g_{jm}, f_{jm} et β_{jm} tels que u_m, α_m et β_m vérifient (3.13)-(3.15). Pour ce faire, on pose

$$v=w_i,\quad i=1,...,m\quad \text{dans}\quad (3.16)-(3.17)\quad \text{et on a :}$$

$$\begin{aligned}
((\frac{\partial u_m}{\partial t},w_i))+(u_m,w_i)+((g_N(u_m),w_i)) &= ((\beta_m,w_i)), &(3.18)\\
((\frac{\partial \beta_m}{\partial t},w_i))+((\beta_m,w_i))+(\alpha_m,w_i) &= -((\frac{\partial u_m}{\partial t},w_i))-((u_m,w_i)). &(3.19)
\end{aligned}$$

En notant que

$$((\frac{\partial u_m}{\partial t},w_i))=g'_{im}(t),\tag{3.20}$$

et que

$$\begin{aligned}
(u_m,w_i) &= ((-\Delta u_m,w_i))\\
&= \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)((-\Delta w_j,w_i))\\
&= \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)((\lambda_j w_j,w_i))\\
&= \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{jm}(t)((w_j,w_i))\\
&= \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{jm}(t)\delta_{ij}\\
&= \lambda_i g_{im}(t),
\end{aligned}\tag{3.21}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini comme suit :

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\;, & \text{si}\quad i=j,\\ 0\;, & \text{sinon.}\end{cases}\tag{3.22}$$

De plus

$$((\beta_m,w_i))=\beta_{im}(t),\tag{3.23}$$

$$((\frac{\partial \beta_m}{\partial t},w_i))=\beta'_{im}(t).\tag{3.24}$$

Et par analogie avec (3.21), on a que

$$(\alpha_m,w_i)=\lambda_i f_{im}(t).\tag{3.25}$$

Alors (3.18) − (3.19) s'écrit

$$(E.D.O)\begin{cases}
g'_{im}(t)+\lambda_i g_{im}(t)+((g_N(u_m),w_i)) = \beta_{im}(t),\quad i=1,...,m,\\
\beta'_{im}(t)+\beta_{im}(t)+\lambda_i f_{im}(t) = -g_{im}(t)-g'_{im}(t),\quad i=1,...,m,\\
f'_{im}(t)=\beta_{im}(t),\quad i=1,...,m.
\end{cases}\tag{3.26}$$

On s'est ramené à un système de $3m$ équations différentielles ordinaires que l'on peut écrire sous la forme :

$$y^{'} = \varphi(y).$$

D'après le théorème de Cauchy-lipschitz, il existe une solution (u_m, α_m) sur un intervalle $(0, T_m)$, pour un certain $T_m > 0$.

Solution globale en temps : -On considère maintenant une solution maximale définie sur $[0, T_m[$; nous allons prouver que $T_m = T$. En d'autres termes, la solution locale en temps obtenue précédemment est globale en temps. Pour cela, on cherche des estimations à priori uniformes.

On multiplie (3.18) par g_{im} et on somme sur $i = 1, ..., m$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u_m \parallel^2 + \parallel \nabla u_m \parallel^2 + \int_\Omega g_N(u_m)u_m dx =< \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, u_m > . \tag{3.27}$$

On multiplie (3.18) par $g_{im}^{'}$ et on somme sur $i = 1, ..., m$. On a

$$\parallel \frac{\partial u_m}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\parallel \nabla u_m \parallel^2 + 2\int_\Omega G_N(u_m)dx) = ((\beta_m, \frac{\partial u_m}{\partial t})). \tag{3.28}$$

On multiplie (3.19) par f_{im} et on somme sur $i = 1, ..., m$. On a

$$\frac{d}{dt}((\beta_m, \alpha_m)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \alpha_m \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha_m \parallel^2 \; = -((\frac{\partial u_m}{\partial t}, \alpha_m)) - ((u_m, \alpha_m)) + \parallel \beta_m \parallel^2 . \tag{3.29}$$

On multiplie maintenant (3.19) par $f_{im}^{'}$ et on somme sur $i = 1, ..., m$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\parallel \beta_m \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha_m \parallel^2] + \parallel \beta_m \parallel^2 = -((\frac{\partial u_m}{\partial t} + u_m, \beta_m)). \tag{3.30}$$

Par l'hypothèse (3.8), on a :

$$G_N(u_m) - c_0 \leq g_N(u_m)u_m. \tag{3.31}$$

On rappelle que $\beta_m = \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial t}$. On obtient en sommant (3.27),(3.28) et (3.30) et par (3.31),

$$\frac{dE_{1m}}{dt} + 2(\parallel \nabla u_m \parallel^2 + \int_\Omega G_N(u_m)dx + \parallel \frac{\partial u_m}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \parallel^2) \leq 2c_0|\Omega|, \tag{3.32}$$

avec

$$E_{1m} = \parallel u_m \parallel^2 + \parallel \nabla u_m \parallel^2 + 2\int_\Omega G_N(u_m)dx + \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha_m \parallel^2 . \tag{3.33}$$

En additionnant (3.32) et ϵ(3.29), avec $\epsilon > 0$ à préciser, on obtient

$$\frac{dE_{2m}}{dt} + 2(\parallel \nabla u_m \parallel^2 + \int_\Omega G_N(u_m)dx + \parallel \frac{\partial u_m}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \parallel^2) + \epsilon \parallel \nabla \alpha_m \parallel^2$$

$$= -\epsilon((\frac{\partial u_m}{\partial t}, \alpha_m)) - \epsilon((\alpha_m, u_m)) + \epsilon \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \parallel^2 + 2c_0|\Omega|, \tag{3.34}$$

où

$$E_{2m} = E_{1m} + \epsilon((\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, \alpha_m)) + \frac{\epsilon}{2} \parallel \alpha_m \parallel^2, \tag{3.35}$$

satisfait, en choisissant $\epsilon > 0$ tel que

$$2 - \epsilon > 0, \tag{3.36}$$

et

$$\begin{aligned} \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t) \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha_m(t) \parallel^2 \quad &+ \quad \epsilon < \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t), \alpha_m(t) > + \frac{\epsilon}{2} \parallel \alpha_m(t) \parallel^2 \\ &\geq \quad c\{\parallel \alpha_m(t) \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha_m(t) \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t) \parallel^2\}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} c(\parallel u_m(t) \parallel_V^2 + \parallel \alpha_m(t) \parallel_V^2 + \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t) \parallel^2) \quad &\leq \quad E_{2m}(t) \\ \leq c^{'}(\parallel u_m(t) \parallel_V^2 \quad &+ \quad \parallel \alpha_m(t) \parallel_V^2 + \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t) \parallel^2), \end{aligned} \tag{3.38}$$

avec $c, c^{'} > 0$.

On en déduit, grâce à l'inégalité de Hölder, au lemme de Poincaré et la condition (3.36), une inégalité de la forme :

$$\frac{dE_{2m}}{dt} + c_2 E_{2m} + c_3 \parallel \frac{\partial u_m}{\partial t} \parallel^2 \leq c^{'}, \qquad c_2, c_3 > 0 \quad \text{et} \quad c^{'} \geq 0. \tag{3.39}$$

En particulier, on écrit

$$\frac{dE_{2m}}{dt} + c_2 E_{2m} \leq c^{'}. \tag{3.40}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.40) donne

$$E_{2m}(t) \leq E_{2m}(0) \exp(-c_2 t) + \frac{c^{'}}{c_2}, \tag{3.41}$$

ce qui implique en particulier que

$$E_{2m}(t) \leq E_{2m}(0) + \frac{c^{'}}{c_2}. \tag{3.42}$$

Ainsi par (3.38) on aura

$$\sup_{t \in [0,T]} \{\parallel u_m(t) \parallel^2_{H^1_0(\Omega)} + \parallel \alpha_m(t) \parallel^2_{H^1_0(\Omega)} + \parallel \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t) \parallel^2\} \leq c^{'}, \tag{3.43}$$

où $c^{'}$ ne dépend pas de m, par suite la solution est globale en temps et $T_m = T$.

Le passage à la limite : -Cette étape consiste à obtenir un problème limite en faisant tendre m vers l'infini. Quitte à considérer une sous suite, on a, par l'estimation (3.43) que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0, T, V), \tag{3.44}$$

$$\alpha_m \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0, T, V), \tag{3.45}$$

et
$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H). \tag{3.46}$$
On intègre (3.39) entre 0 et t, on a
$$E_{2m}(t) + \int_0^t \| \frac{\partial u_m}{\partial t}(s) \|^2 \, ds \leq c, \quad \forall t \in [0,T], \quad c \geq 0, \tag{3.47}$$
la constante c est bien sûr indépendante de m. Il en découle que
$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T,H). \tag{3.48}$$
Nous allons maintenant nous intéresser à la convergence du terme non linéaire $g_N(u_m)$.

On multiplie (3.13) par $g_N(u_m)$ et on intègre sur Ω, par (3.9) on a
$$\| g_N(u_m) \|^2 \leq c(\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \|^2 + \| \nabla u_m \|^2). \tag{3.49}$$
On intègre (3.49) entre 0 et t , par (3.44),(3.46) et (3.48) on a
$$\| g_N(u_m) \|_{L^2(0,T,H)} \leq c, \tag{3.50}$$
où c est indépendante de m.

Par (3.50) on a pour une suite extraite
$$g_N(u_m) \rightharpoonup w \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q), \tag{3.51}$$
avec $Q := \Omega \times (0,T)$. On a, grâce à un théorème de compacité de type Aubin-Lions,
$$u_m \to u \quad p.p. \quad \text{(pour une suite extraite)},$$
d'où
$$g_N(u_m) \longrightarrow g_N(u) \quad p.p. \quad \text{dans} \quad Q. \tag{3.52}$$
Pour prouver que $w = g_N(u)$ on utilise le lemme 2.1 du chapitre 2 : On appliquera ce lemme avec : $O = Q, \quad g_m = g_N(u_m) \quad q = 2$, et

par (3.52) on a $g_m \longrightarrow g = g_N(u)$ p.p. dans Q, avec (3.50) on aura
$$g_m \longrightarrow g \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q),$$
de plus par (3.51) on a $g_m \longrightarrow w$ faiblement dans $L^2(Q)$. D'où
$$g = w = g_N(u).$$
Des convergences (3.44),(3.45),(3.46) et (3.48), on a écrit
$$u \in L^\infty(0,T,V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,H),$$

$$\alpha \in L^{\infty}(0,T,V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^{\infty}(0,T,H).$$

On conclut par le Théorème de Lions que

$$u, \alpha \in C([0,T],H).$$

Retour au problème initial : -Soit i fixé et $\mu > i$ $(m = \mu$ dans $(3.18) - (3.19))$. D'après la partie précédente (la convergence des sous suites) on a les convergences faibles suivantes dans $L^2(0,T)$ lorsque $\mu \to +\infty$:

$$a(u_\mu, w_i) \rightharpoonup a(u, w_i), \qquad a(\alpha_\mu, w_i) \rightharpoonup a(\alpha, w_i),$$

$$((u'_\mu, w_i)) \rightharpoonup ((u', w_i)), \qquad ((\alpha'_\mu, w_i)) \rightharpoonup ((\alpha', w_i)),$$

$$((u_\mu, w_i)) \rightharpoonup ((u, w_i)), \qquad ((g_N(u_\mu), w_i)) \rightharpoonup ((g_N(u), w_i)),$$

avec $a(v,w) = (v,w) = ((\nabla v, \nabla w))$.

De plus on a

$$((\alpha''_\mu, w_i)) = \frac{d}{dt}((\alpha'_\mu, w_i)) \longrightarrow ((\alpha'', w_i)) \quad \text{dans} \quad D'(0,T).$$

On déduit donc des équations (3.18) et (3.19)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}((u,w_i)) + a(u,w_i) + ((g_N(u),w_i)) &= \dfrac{d}{dt}((\alpha, w_i)), \\ \dfrac{d^2}{dt^2}((\alpha,w_i)) + \dfrac{d}{dt}((\alpha,w_i)) + a(\alpha,w_i) &= -\dfrac{d}{dt}((u,w_i)) - ((u,w_i)), \end{cases}$$

et cela pour i fixé quelconque. Donc l'on en déduit, d'après la propriété de densité de $(w_1, ..., w_m)$ que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}((u,v)) + a(u,v) + ((g_N(u),v)) &= \dfrac{d}{dt}((\alpha, v)), \qquad \forall v \in V, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}((\alpha,w)) + \dfrac{d}{dt}((\alpha,w)) + a(\alpha,w) &= -\dfrac{d}{dt}((u,w)) - ((u,w)), \qquad \forall w \in V. \end{cases}$$

D'où résulte que (u, α) satisfait aux équations (3.1) et (3.2).

On multiplie (3.1) par $-\Delta u$ et on intègre sur Ω. Par (3.9) on a

$$\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \Delta u \parallel^2 \leq c \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 . \tag{3.53}$$

En intégrant (3.53) entre 0 et t, on déduit

$$u \in L^2(0,T,H^2(\Omega)).$$

De plus on a $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$ dans $L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$, donc $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \in C([0,T],H^{-1}(\Omega))$ (voir [13], lemme 1.2. p.7). Par suite, d'après le Théorème de Strauss (voir le Théorème 2.3 du chapitre 2) on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in C_W([0,T],H).$$

Démontrons finalement les conditions initiales.

lorsque $\mu \to +\infty$ on a :

$u_\mu(0) \longrightarrow u_0$ dans V or $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$ (injection compacte) donc $u_\mu(0) \longrightarrow u_0$ fort dans H.

Soit $F = \{u_m \in L^\infty(0,T;V); \dfrac{\partial u_m}{\partial t} \in L^2(0,T;V^{'})\}$, d'après le théorème d'Aubin-Lions (Théorème 2.2) on a $F \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T],H)$, donc en particulier $u_\mu(0) \to u(0)$ dans H fortement , d'où on aura $u(0) = u_0$.

De même on montre que $\alpha(0) = \alpha_0$.

On a $\dfrac{\partial \alpha_m}{\partial t} \in L^\infty(0,T,H)$ donc $\dfrac{\partial \alpha_m}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$,
et $\dfrac{\partial \beta_m}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$ (car $\dfrac{\partial \beta_m}{\partial t} = -\dfrac{\partial \alpha_m}{\partial t} + \Delta\alpha_m - \dfrac{\partial u_m}{\partial t} - u_m \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)))$
par suite

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \in C\Big([0,T];H^{-1}(\Omega)\Big).$$

D'après le théorème de Strauss on aura

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \in C_W\Big([0,T];L^2(\Omega)\Big),$$

donc il existe une sous suite $\dfrac{\partial \alpha_\mu}{\partial t} \in C_W([0,T],H)$ telle qu'en particulier :

$$\text{lorsque} \quad \mu \to +\infty \quad \text{on a} \quad \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial t}(0) \to \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) \quad \text{dans H faiblement,} \tag{3.54}$$

Or on a $\dfrac{\partial \alpha_\mu}{\partial t}(0) \to \alpha_1$ dans $L^2(\Omega)$, par (3.54) on déduit $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1$,

d'où le théorème. □

Le résultat suivant nous donne l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.4).

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, le problème (3.1)-(3.4) admet une et une seule solution avec la régularité ci-dessus.*

Démonstration: On sait déjà qu'il existe au moins une solution pour notre problème d'après le Théorème 2.1. Il reste à prouver l'unicité de celle-ci. Pour cela, on prend deux solutions $(u^{(1)}, \alpha^{(1)})$ et $(u^{(2)}, \alpha^{(2)})$ de mêmes données initiales et on pose

$$(u, \alpha) = (u^{(1)}, \alpha^{(1)}) - (u^{(2)}, \alpha^{(2)}).$$

Alors (u, α) vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g_N(u^{(1)}) - g_N(u^{(2)}) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.56}$$

$$u = \alpha = 0, \tag{3.57}$$

$$u(0) = \alpha(0) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = 0. \tag{3.58}$$

On multiplie (3.55) par u et on intègre sur Ω, par (3.9) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u \|^2 + \| \nabla u \|^2 \leq c_1 \| u \|^2 + ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u)),$$

en utilisant l'inégalité $|((v, w))| \leq c \| v \|_{H_0^1(\Omega)} . \| w \|_{H^{-1}(\Omega)}$ on obtient

$$\frac{d}{dt} \| u \|^2 + \| \nabla u \|^2 \leq c(\| u \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^{-1}(\Omega)}). \tag{3.59}$$

On intègre (3.56) entre 0 et t on aura

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha - \Delta \int_0^t \alpha(s) ds = -\int_0^t u(s) ds - u. \tag{3.60}$$

On multiplie (3.60) par $(-\Delta)^{-1}\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \alpha \|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^{-1}(\Omega)} + ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \int_0^t \alpha ds))$$

$$= -((\int_0^t u ds, (-\Delta)^{-1}\frac{\partial \alpha}{\partial t})) - ((u, (-\Delta)^{-1}\frac{\partial \alpha}{\partial t})).$$

Or $\dfrac{d}{dt}((\alpha, \displaystyle\int_0^t \alpha(s) ds)) = ((\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, \displaystyle\int_0^t \alpha(s) ds)) + \| \alpha \|^2$ donc

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big[\| \alpha \|^2_{H^{-1}(\Omega)} + 2((\alpha, \int_0^t \alpha ds))\Big] \quad + \quad \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq c_T(\| \alpha \|^2 + \| u \|^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} \quad + \quad \| u \|^2), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{3.61}$$

On multiplie (3.60) par α et on intègre sur Ω on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \alpha \|^2 + \| \alpha \|^2 + ((\nabla \int_0^t \alpha(s) ds, \nabla \alpha)) = -((\int_0^t u(s) ds, \alpha)) - ((u, \alpha)),$$

Or $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt} \| \nabla \displaystyle\int_0^t \alpha(s) ds \|^2 = ((\int_0^t \nabla \alpha(s) ds, \nabla \alpha))$ donc

$$\frac{d}{dt}\Big[\| \alpha \|^2 + \| \nabla \int_0^t \alpha(s) ds \|^2 \Big] + \| \alpha \|^2 \leq c_t(\| u \|^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} + \| u \|^2). \tag{3.62}$$

On additionne (3.62) et δ(3.61) avec $\delta > 0$ assez petit on aura

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha(s)ds \parallel^2 + \delta \parallel \alpha \parallel^2_{H^{-1}(\Omega)} + 2\delta((\alpha, \int_0^t \alpha(s)ds))\Big]$$

$$+ c(\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2_{H^{-1}(\Omega)} + \parallel \alpha \parallel^2) \leq c_T(\parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} + \parallel u \parallel^2). \quad (3.63)$$

En particulier

$$\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha(s)ds \parallel^2 + 2\delta((\alpha, \int_0^t \alpha(s)ds)) \geq c(\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \int_0^t \alpha(s)ds \parallel^2_{H_0^1(\Omega)}). \quad (3.64)$$

On additionne (3.63) et δ'(3.59) avec $\delta' > 0$ assez petit on aura

$$\frac{dE_3}{dt} \leq c_T(E_3 + \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}), \quad t \in [0, T], \quad (3.65)$$

avec

$$E_3(t) = \parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha(s)ds \parallel^2 + \delta \parallel \alpha \parallel^2_{H^{-1}(\Omega)} + 2\delta((\alpha, \int_0^t \alpha(s)ds)) + \delta' \parallel u \parallel^2 . \quad (3.66)$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.65) donne

$$E_3(t) \leq \exp(c_T t) E_3(0) + c_T' \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))},$$

or $E_3(0) = 0$ donc $E_3(t) \leq c_T' \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \qquad t \in [0, T],$

en particulier

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq c_T' \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \qquad t \in [0, T]. \quad (3.67)$$

On applique de nouveau le lemme de Gronwall à (3.67) on aura

$$\parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} = 0, \qquad t \in [0, T], \quad (3.68)$$

par conséquent

$$E_3(t) \leq 0, \qquad t \in [0, T]. \quad (3.69)$$

Par (3.64),(3.66) et (3.69) on a $\parallel u \parallel^2 = \parallel \alpha \parallel^2 = 0$, d'où

$$u^{(1)} = u^{(2)} \quad \text{et} \quad \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)},$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Les Théorèmes 2.1 et 2.2, nous amènent à considérer un semi-groupe $S(t)$ pour tout $t \geq 0$, qui est défini sur E de la façon suivante

$$S(t) : E \to E, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \quad (3.70)$$

où $(u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (3.1)-(3.4).

3 Dissipativité et Régularité

Dans cette section, on prouve tout d'abord l'existence d'ensembles bornés absorbants pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, associé au problème (3.1)-(3.4) sur l'espace E, et un borné absorbant pour le terme non linéaire $g_N(u)$. Ensuite on énoncera un théorème de régularité supplémentaire qui va nous permettre de définir $S(t)$ sur l'espace E_1 et donc donner la dissipativité dans cet espace. Notons que toutes les estimations ci-dessous peuvent être justifiées par la méthode de Galerkin. On commence à donner le

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, le semi-groupe* $S(t), t \geq 0$, *est dissipatif sur* E*. Autrement dit ,le semi-groupe* $S(t), t \geq 0$, *possède un ensemble borné absorbant* $\mathcal{B}_0$ *dans* E*.*

DÉMONSTRATION: On prend les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ dans un borné de E. Disons que , pour tout $R_0 > 0$, on a $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in B_{R_0}, B_{R_0}$ étant la boule de E de centre 0 et rayon R_0.

On multiplie (3.1) par u. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \int_\Omega g_N(u)udx = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u)). \tag{3.71}$$

On multiplie (3.1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$. On a

$$\parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\parallel \nabla u \parallel^2 + 2\int_\Omega G_N(u)dx) = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t})). \tag{3.72}$$

On multiplie ensuite (3.2) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2) + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 = -((\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t})) - ((u, \frac{\partial \alpha}{\partial t})). \tag{3.73}$$

En additionnant les trois équations , à savoir (3.71),(3.72) et (3.73), on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + 2\int_\Omega G_N(u)dx \quad + \quad \parallel \nabla \alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2\} \\ + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 \quad + \quad \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 = -\int_\Omega g_N(u)udx.\end{aligned} \tag{3.74}$$

L'hypothèse (3.8) nous assure que

$$-g_N(u)u \leq -G_N(u) + c_0,$$

par conséquent, on écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + 2\int_\Omega G_N(u)dx \quad + \quad \parallel \nabla \alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2\} \\ + \int_\Omega G_N(u)dx + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 \quad + \quad \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 \leq c_0|\Omega|.\end{aligned} \tag{3.75}$$

On multiplie maintenant (3.2) par α. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2 < \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \alpha > + \| \alpha \|^2) + \| \nabla \alpha \|^2 = - < \frac{\partial u}{\partial t}, \alpha > -((u,\alpha)) + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 . \quad (3.76)$$

Soit $\epsilon > 0$ assez petit. On somme maintenant (3.75) et ϵ(3.76). On obtient

$$\frac{d}{dt}\{\| u \|^2 + \| \nabla u \|^2 + 2\int_\Omega G_N(u)dx + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + 2\epsilon < \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \alpha > + \epsilon \| \alpha \|^2\}$$

$$+2(\epsilon \| \nabla \alpha \|^2 + \int_\Omega G_N(u)dx + \| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2)$$

$$\leq 2c_0|\Omega| - 2\epsilon < \frac{\partial u}{\partial t}, \alpha > -2\epsilon((u,\alpha)) + 2\epsilon \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 . \quad (3.77)$$

On a, d'après les inégalités de Hölder et Poincaré

$$\begin{array}{rcl} -\epsilon((u,\alpha)) & \leq & \epsilon|((u,\alpha))| \\ & \leq & \epsilon \| u \| \| \alpha \| \\ & \leq & \frac{\epsilon}{2} \| u \|^2 + \frac{\epsilon}{2} \| \alpha \|^2 \\ & \leq & \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \| \nabla u \|^2 + \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \| \nabla \alpha \|^2 \end{array} \quad (3.78)$$

et

$$\begin{array}{rcl} -\epsilon < \frac{\partial u}{\partial t}, \alpha > & \leq & \epsilon| < \frac{\partial u}{\partial t}, \alpha > | \\ & \leq & \epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \| \| \alpha \| \\ & \leq & \frac{\epsilon}{2} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \frac{\epsilon}{2} \| \alpha \|^2 \\ & \leq & \frac{\epsilon}{2} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \| \nabla \alpha \|^2, \end{array} \quad (3.79)$$

où λ_1 désigne la première valeur propre associée à l'opérateur moins Laplacien avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes (cf. la preuve du Théorème 2.1).

On choisit $\epsilon > 0$ de sorte que :

$$\epsilon < 1 \quad \text{et} \quad \epsilon < 2\lambda_1 \quad (3.80)$$

et

$$c(\| \alpha \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) \leq \epsilon \| \alpha \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + 2\epsilon < \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \alpha > . \quad (3.81)$$

En prenant en compte (3.77)-(3.81), on aboutit alors à une inégalité de la forme

$$\frac{dE_2}{dt} + c_2E_2 + c_3 \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq c', \quad (3.82)$$

où

$$\begin{array}{rcl} E_2(t) & = & \| u(t) \|^2 + \| \nabla u(t) \|^2 + 2\int_\Omega G_N(u(t))dx + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2 + \| \nabla \alpha(t) \|^2 \\ & + & 2\epsilon < \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t), \alpha(t) > + \epsilon \| \alpha(t) \|^2, \end{array} \quad (3.83)$$

satisfait

$$c(\| u(t) \|_V^2 + \| \alpha(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2) + \int_\Omega G_N(u)dx \leq E_2(t)$$
$$\leq c^{'}(\| u(t) \|_V^2 + \| \alpha(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2) + \int_\Omega G_N(u)dx, \quad c, c^{'} > 0. \tag{3.84}$$

En particulier, on écrit

$$\frac{dE_2}{dt} + c_2 E_2 \leq c^{'}, \tag{3.85}$$

le lemme de Gronwall appliqué à (3.85) donne

$$E_2(t) \leq \exp(-c_2 t)E_2(0) + c, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.86}$$

Par (3.81) et le fait que les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ sont dans un borné, l'estimation (3.86) devient

$$E_2(t) \leq \mu_0 \exp(-c_2 t) + c, \tag{3.87}$$

avec $\mu_0 = \mu_0(R_0) > 0$.

Soit maintenant $D_0 > 0$ assez grand pour que

$$\mu_0 \exp(-c_2 t) + c \leq D_0.$$

On a alors que la boule de centre 0 et de rayon D_0 est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$. En d'autres termes,

$$\| u(t) \|_V^2 + \| \alpha(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2 \leq D_0, \quad \forall t \geq t_0, \tag{3.88}$$

avec $t_0 = t_0(R_0) := \max\{0, -\frac{1}{c_2}\log(\frac{D_0 - c}{\mu_0})\}$, d'où le théorème. □

Lemme 3.2. *Il existe une constante D_1 et un temps t_1 tel que :*

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2 \leq D_1, \quad \forall t \geq t_1, \tag{3.89}$$

avec $t_1 = t_0 + r$.

Preuve: On différencie (3.1) par rapport au temps et par (3.2) on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t}) - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} + g_N^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Delta \alpha - u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3.90}$$

On multiplie (3.90) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, l'inégalité de Hölder et (3.9) entraînent

$$\frac{d}{dt} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq c\Big(\| u \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \Big). \tag{3.91}$$

On a, d'après le Théorème 3.1,

$$\int_t^{t+r} \Big(\| u(s) \|^2 + \| \nabla \alpha(s) \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s) \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2 \Big) ds \leq c, \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.92}$$

On déduit de (3.91),(3.92) et du lemme de Gronwall uniforme la relation (3.89). □

Le Théorème suivant donne l'existence d'un borné absorbant pour le terme non linéaire $g_N(u)$ dans le problème (3.1)-(3.4).

Théorème 3.3. *Il existe une constante D_2 telle que*

$$\| g_N(u(t)) \|^2 \leq D_2, \quad \forall t \geq t_1. \tag{3.93}$$

DÉMONSTRATION: On multiplie (3.1) par $g_N(u)$, et par (3.9) on aura

$$\| g_N(u) \|^2 \leq c(\| u \|_V^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2), \tag{3.94}$$

par (3.88) et (3.89), la relation (3.94) donne (3.93). □

On énonce dans la suite un théorème de régularités supplémentaires pour les solutions du problème (3.1)-(3.4).

Théorème 3.4. *Si les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ appartiennent à E_1, le problème (3.1)-(3.4) admet une unique solution telle que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V)$, $\forall T > 0$.*

DÉMONSTRATION: L'existence et l'unicité étant vérifiées, il reste à établir la régularité de la solution .

En intégrant (3.91) entre 0 et t, et compte tenu du Théorème 2.1, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T, H) \cap L^2(0, T, V), \quad \forall T > 0. \tag{3.95}$$

On multiplie maintenant (3.2) par $-\Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}$, les inégalités de Hölder et de Young donnent

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \alpha \|^2) + 2 \| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq \frac{1}{\epsilon}(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) + 2\epsilon \| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2,$$

en choisissant $\epsilon > 0$ assez petit tel que $1 - \epsilon > 0$, on déduit

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \alpha \|^2) + c \| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq c'(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2), \quad c > 0. \tag{3.96}$$

Ainsi

$$\alpha \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \forall T > 0, \tag{3.97}$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0, T, V), \quad \forall T > 0. \tag{3.98}$$

En effet, en intégrant (3.96) entre 0 et t, et par (3.95) et le Théorème 2.1 on obtient (3.97) et (3.98).

On multiplie (3.1) par $-\Delta u$, l'inégalité de Hölder et (3.9) donnent

$$\| \Delta u \|^2 \leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2). \tag{3.99}$$

Par (3.95),(3.98) et le Théorème 2.1, la relation (3.99) donne

$$u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \forall T > 0, \tag{3.100}$$

d'où le théorème. □

Le Théorème 3.4 nous amène à définir le semi-groupe $S(t)(t \geq 0)$ sur l'espace E_1. On a alors :

$$S(t) : E_1 \to E_1, \quad (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \mapsto (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \tag{3.101}$$

où $(u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (3.1)-(3.4).

On términe cette section par énoncer un théorème qui donne l'existence de bornés absorabants pour les solutions de (3.1)-(3.4) dans l'espace E_1.

Théorème 3.5. *Sous les hypothèses du Théorème 3.4, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, est dissipatif sur E_1. Autrement dit, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_1$ dans E_1.*

Démonstration: On prend les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ dans un borné de E_1. Disons que , pour tout $R_1 > 0$, on a $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in B_{R_1}, B_{R_1}$ étant la boule de E_1 de centre 0 et rayon R_1.

On multiplie (3.2) par $-\Delta\alpha$, les inégalités de Hölder et Young donnent

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\| \nabla\alpha \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))] \ + \ 2 \| \Delta\alpha \|^2 \\ &\leq 2 \| \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{\epsilon}(\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \ + \ \| u \|^2) + 2\epsilon \| \Delta\alpha \|^2 . \end{aligned} \tag{3.102}$$

En additionnant (3.96) et ϵ(3.102) où $\epsilon > 0$ choisit tel que $1 - 2\epsilon > 0$ on déduit une inégalité de la forme

$$\frac{dE_4}{dt} + cE_4 \leq c'(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \tag{3.103}$$

où

$$E_4(t) = \| \Delta\alpha(t) \|^2 + \| \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2 + 2\epsilon((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t), \nabla\alpha(t))) + \epsilon \| \nabla\alpha(t) \|^2, \tag{3.104}$$

et

$$\begin{aligned} c(\| \nabla\alpha(t) \|^2 + \| \Delta\alpha(t) \|^2 \ + \ \| \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2) &\leq E_4(t) \\ \leq c'(\| \nabla\alpha(t) \|^2 \ + \ \| \Delta\alpha(t) \|^2 + \| \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2). \end{aligned} \tag{3.105}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.103) donne

$$E_4(t) \leq E_4(0) \exp(-ct) + c' \int_0^t \exp(c(s-t))(\| \nabla u(s) \|^2 + \| \nabla\frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2)ds. \tag{3.106}$$

Estimons le terme $\int_0^t \exp(c(s-t))(\| \nabla u(s) \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2) ds$. Pour cela on pose

$$h(s) = \| \nabla u(s) \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2, \quad h \geq 0.$$

On a, d'après le Théorème 3.1 et le Lemme 3.2,

$$\int_t^{t+1} h(s) ds \leq c_4, \quad \forall t \geq t_1. \tag{3.107}$$

On a alors

$$\int_0^t \exp(c(s-t)) h(s) ds = \int_0^{t_1} \exp(c(s-t)) h(s) ds + \int_{t_1}^t \exp(c(s-t)) h(s) ds$$

$\leq \exp(c(t_1 - t)) \int_0^{t_1} h(s) ds + \int_{t_1}^{t_1+1} \exp(c(s-t)) h(s) ds + \int_{t_1+1}^{t_1+2} \exp(c(s-t)) h(s) ds$

$+ ... + \int_{[t]-1}^{[t]} \exp(c(s-t)) h(s) ds + \int_{[t]}^{[t]+1} \exp(c(s-t)) h(s) ds$

$\leq$ (d'après les Théorèmes 2.1 et 3.4)

$\leq c' \exp(-ct) + \int_{t_1}^{t_1+1} \exp(c(s-t)) h(s) ds + \int_{t_1+1}^{t_1+2} \exp(c(s-t)) h(s) ds$

$+ ... + \int_{[t]-1}^{[t]} \exp(c(s-t)) h(s) ds + \int_{[t]}^{[t]+1} \exp(c(s-t)) h(s) ds$

$\leq$ (par (3.107))

$\leq c' \exp(-ct) + c_4 \exp(-ct)[\exp(c(t_1+1)) + \exp(c(t_1+2)) + ... + \exp(c([t]+1))]$

$$\leq c' \exp(-ct) + c''' \exp(-ct) \frac{\exp(c([t]+2)) - 1}{\exp c - 1}$$

$$\leq c' \exp(-ct) + c'', \tag{3.108}$$

où c' est une constante qui dépend des données initiales .

En insérant (3.108) dans (3.106) on obtient

$$E_4(t) \leq \exp(-ct) E_4(0) + c'. \tag{3.109}$$

Par (3.105) et le fait que les données initiales sont dans un borné, l'estimation (3.109) devient

$$E_4(t) \leq \mu_1 \exp(-ct) + c', \tag{3.110}$$

avec $\mu_1 = \mu_1(R_1) > 0$.

Soit maintenant $D_3 > 0$ assez grand pour que

$$\mu_1 \exp(-ct) + c' \leq D_3.$$

On a alors

$$\| \alpha(t) \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_V^2 \leq D_3, \quad \forall t \geq t_2, \tag{3.111}$$

avec $t_2 = t_2(R_1) := \max\{0, -\frac{1}{c}\log(\frac{D_3 - c^{'}}{\mu_1})\}$.

Par (3.88),(3.89) et (3.111) et pour $t^{'} = \max(t_1, t_2)$, on déduit de (3.99)

$$\| u(t) \|_W^2 \leq D_4, \qquad \forall t \geq t^{'}, \tag{3.112}$$

d'où le théorème. □

Par (3.112), on a

$$u \in L^\infty(t^{'}, +\infty, W \cap V), \tag{3.113}$$

en associant (3.100) et (3.113), on a alors que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, W \cap V). \tag{3.114}$$

De façon analogue, on montre que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H); \qquad \alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+, W \cap V)$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V).$$

Chapitre 4

Système de champ de phase de type Caginalp avec un terme non linéaire logarithmique

On considère comme au chapitre précédent une généralisation du système de champ de phase de Caginalp. Cette fois-ci, le potentiel que nous considérons est de type logarithmique (voir, par exemple, [27], [14], [29], [21], [42] et [53]). Nous examinons l'existence et l'unicité de solutions par deux méthodes. La première c'est une méthode de régularisation applicable en dimension une, deux et trois qui consiste à approcher les équations par des équations "meilleures" déjà résolues ensuite passer à la limite. Tandis que la deuxième applicable seulement en dimension une et deux et est basée sur une propriété de séparation stricte qui va nous permettre de plus d'étudier le comportement asymptotique du problème. On prouve ainsi en dimension une et deux l'existence d'attracteurs du système.

On considère le problème (P) suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, && (4.1)\\
\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -\frac{\partial u}{\partial t} - u, && (4.2)\\
u = \alpha &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, && (4.3)\\
u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \qquad & \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, && (4.4)
\end{aligned}$$

où, comme précédemment, u est le paramètre d'ordre ou champ de phase, α représente une primitive de la température relative θ (voir le chapitre précédent), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine borné régulier (à préciser la dimension dans la suite) et $\partial\Omega$ désigne le bord régulier, disons de classe C^1, de Ω.

Le potentiel g est défini comme suit :

$$g(s) = -2\kappa_0 s + \kappa_1 \ln(\frac{1+s}{1-s}), \quad s \in (-1;+1), 0 < \kappa_1 < \kappa_0. \tag{4.5}$$

On a alors

$$g^{'}(s) = \frac{2\kappa_1}{1-s^2} - 2\kappa_0. \tag{4.6}$$

On voit que g vérifie

$$g \quad \text{est de classe} \quad C^{\infty} \quad \text{et} \quad g(0)=0, \tag{4.7}$$

$$-c_0 \leq G(s) \leq g(s)s + c_0, \quad c_0 \geq 0, \quad s \in (-1,+1), \tag{4.8}$$

où $G(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau$, et

$$g^{'}(s) \geq -2\kappa_0, \quad s \in (-1,+1). \tag{4.9}$$

On notera dans la suite $c, c^{'}$ et $c^{''}$ des constantes positives qui pourront varier d'une ligne à l'autre et quelques fois dans la même ligne.

La première section traite le problème (4.1)-(4.4) avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2$ et 3.

1 Semi-groupe et dissipativité en dimension inférieure ou égale à trois

Pour prouver le caractère bien posé de notre problème, on introduit l'espace suivant

$$K = \{\varphi \in L^2(\Omega), -1 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega\}.$$

Suivant une idée de Debussche et Dettori (voir [9] et [14]), on considère l'approximation de cette fonction g par g_N où g_N est un polynôme de degré impair $2N+1$, à coefficient dominant strictement positif. En remplaçant g dans (P) par g_N on obtient alors le problème (P_N) suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_N}{\partial t} - \Delta u_N + g_N(u_N) &= \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}, && (4.10)\\
\frac{\partial^2 \alpha_N}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} - \Delta \alpha_N &= -\frac{\partial u_N}{\partial t} - u_N, && (4.11)\\
u_N = \alpha_N &= 0, && (4.12)\\
u_N(0) = u_0, \quad \alpha_N(0) = \alpha_0 \quad &, \quad \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(0) = \alpha_1. && (4.13)
\end{aligned}$$

Rappelons, d'après le chapitre précédent, le résultat suivant conçernant le problème (P_N).

Théorème 1.1. *Pour $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in E$, le problème (P_N) admet une unique solution $(u_N, \alpha_N, \frac{\partial \alpha_N}{\partial t})$ avec $u_N \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^+, V) \cap L^2(0,T,W)$, $\frac{\partial u_N}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $\alpha_N \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ et $\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+, H)$, $\forall T > 0$.*

On note de plus que G est bornée et pour $\varphi \in K$ on a $G_N(\varphi) \leq G(\varphi)$. Donc toutes les estimations figurant dans cette section sont uniformes par rapport à N.

1.1 Existence et unicité.

On construit la solution du problème (P) comme étant la limite lorsque $N \to +\infty$ de la solution du problème (P_N). On prend aussi $u_0 \in K$, plus précisement on démontre le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Soit $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in E_K = (K \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, alors le problème (4.1)-(4.4) admet au moins une solution $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ avec*

$$(u, \alpha) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)^2) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)),$$

$$(u, \alpha) \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)^2), \quad (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in L^2(0, T, L^2(\Omega)^2), \quad \forall T > 0.$$

De plus $\forall t > 0, \| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, l'ensemble $\{x \in \Omega, |u(x,t)| \geq 1\}$ est de mesure nulle.

Démonstration: En remplaçant (u, α) par (u_N, α_N) dans (3.82), on écrit :

$$\frac{dE_{2N}}{dt} + c_2 E_{2N} + c_3 \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 \leq c', \tag{4.14}$$

où

$$\begin{aligned} E_{2N}(t) &= \| u_N(t) \|^2 + \| \nabla u_N(t) \|^2 + 2 \int_\Omega G_N(u_N(t)) dx + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2 \\ &+ \| \nabla \alpha_N(t) \|^2 + 2\epsilon < \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t), \alpha_N(t) > + \epsilon \| \alpha_N(t) \|^2, \end{aligned} \tag{4.15}$$

satisfait

$$\begin{aligned} c(\| u_N(t) \|_V^2 + \| \alpha_N(t) \|_V^2 &+ \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2) + \int_\Omega G_N(u_N) dx \leq E_{2N}(t) \\ \leq c'(\| u_N(t) \|_V^2 &+ \| \alpha_N(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2) + \int_\Omega G_N(u_N) dx. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On applique le lemme de Gronwall à (4.14), on a

$$E_{2N}(t) \leq E_{2N}(0) \exp(-c_2 t) + c, \tag{4.17}$$

la relation (4.17) implique en particulier que

$$E_{2N}(t) \leq E_{2N}(0) + c. \tag{4.18}$$

Ainsi par (4.16) on aura

$$\sup_{t \in [0,T]} \{ \| u_N(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \| \alpha_N(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2 \} \leq c' \tag{4.19}$$

où c' est une constante qui ne dépend pas de N.

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en considérant une sous suite, on a par l'estimation (4.19) :

$$u_N \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0, T, V), \tag{4.20}$$

$$\alpha_N \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T,V), \tag{4.21}$$

et

$$\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H). \tag{4.22}$$

On intègre (4.14) entre 0 et t, on a

$$E_{2N}(t) + \int_0^t \parallel \frac{\partial u_N}{\partial t}(s) \parallel^2 ds \leq c, \quad \forall t \in [0,T], \quad c \geq 0, \tag{4.23}$$

la constante c est bien sûr indépendante de N. Il en découle que

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T,H). \tag{4.24}$$

On multiplie (4.10) par $-\Delta u_N$. En utilisant l'inégalité de Hölder et (3.9), on aura

$$\frac{d}{dt} \parallel \nabla u_N \parallel^2 + \parallel \Delta u_N \parallel^2 \leq \parallel \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \parallel^2 + c \parallel \nabla u_N \parallel^2 . \tag{4.25}$$

On intègre (4.25) entre 0 et t, par (4.20) et (4.22) on a

$$\parallel \nabla u_N(t) \parallel^2 + \int_0^t \parallel \Delta u_N \parallel^2 ds \leq c, \quad \forall t \in [0,T], \tag{4.26}$$

où c est indépendante de N. Il en résulte que

$$\Delta u_N \rightharpoonup \Delta u \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{4.27}$$

De plus, on a

$$\parallel g_N(u_N) \parallel^2 \leq c(\parallel u_N \parallel_V^2 + \parallel \frac{\partial u_N}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \parallel^2). \tag{4.28}$$

On intègre (4.28) entre 0 et t, par (4.20),(4.22) et (4.24), on a

$$\parallel g_N(u_N) \parallel_{L^2(Q)}^2 \leq c, \tag{4.29}$$

où c est indépendante de N.

Par (4.29) on a pour une suite extraite

$$g_N(u_N) \rightharpoonup g^* \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{4.30}$$

Donc lorsque $N \longrightarrow +\infty$ dans (4.10), on déduit de (4.22),(4.24),(4.27) et (4.30) que $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g^* = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{dans} \quad L^2(Q). \tag{4.31}$$

De (4.11) on déduit :

$$< \frac{\partial \beta_N}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}, \chi > + < \nabla \alpha_N, \nabla \chi > = - < \frac{\partial u_N}{\partial t} + u_N, \chi >, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}((0,T) \times \Omega),$$

où <. , .> désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$ et $\mathcal{D}((0,T)\times\Omega)$.

Donc lorsque $N \longrightarrow +\infty$ on déduit de (4.20),(4.21),(4.22) et (4.24) :

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\Delta\alpha=-\frac{\partial u}{\partial t}-u \quad \text{dans} \quad L^2(Q). \tag{4.32}$$

De plus d'après SIMON (voir [19]), (4.20),(4.24) d'une part et les relations (4.21),(4.22) d'autre part impliquent lorsque $N \longrightarrow +\infty$:

$$u_N \longrightarrow u \qquad \text{dans} \qquad C([0,T],L^2(\Omega)), \tag{4.33}$$

$$\alpha_N \longrightarrow \alpha \qquad \text{dans} \qquad C([0,T],L^2(\Omega)). \tag{4.34}$$

Donc en particulier on aura $u(x,0)=u_0$ et $\alpha(x,0)=\alpha_0$ dans Ω.

Démontrons finalement que $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}(x,0)=\alpha_1$:

On déduit de (4.22) que $\dfrac{\partial\alpha_N}{\partial t}\in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$, d'autre part on a $\dfrac{\partial\beta_N}{\partial t}\in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$, par suite

$$\frac{\partial\alpha_N}{\partial t}\in C([0,T];H^{-1}(\Omega)),$$

donc d'après le Théorème de Strauss on aura $\dfrac{\partial\alpha_N}{\partial t}\in C_W([0,T];L^2(\Omega))$ par suite il existe une sous suite $\dfrac{\partial\alpha_\mu}{\partial t}\in C_W([0,T];L^2(\Omega))$ telle qu'en particulier lorsque $\mu\to+\infty$ on a

$$\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial t}(0)\rightharpoonup\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega).$$

Or $\dfrac{\partial\alpha_\mu}{\partial t}(0)\to\alpha_1$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit alors le résultat.

Des convergences (4.20),(4.21),(4.22) et (4.24), on a écrit

$$u\in L^\infty(0,T,V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T,H),$$

$$\alpha\in L^\infty(0,T,V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}\in L^\infty(0,T,H).$$

On conclut par le Théorème de Lions que

$$u,\alpha\in C([0,T],H).$$

Alors $(u,\alpha,\dfrac{\partial\alpha}{\partial t})$ verifie

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+g^* = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \quad \text{dans} \quad L^2(Q), \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\Delta\alpha = -\frac{\partial u}{\partial t}-u \quad \text{dans} \quad L^2(Q), \tag{4.36}$$

$$u=\alpha = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\times(0,T), \tag{4.37}$$

$$u(0)=u_0, \qquad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0)=\alpha_1 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{4.38}$$

On va demontrer maintenant que l'ensemble $\{x \in \Omega, |u(x,t)| = 1\}$ a une mesure nulle. Pour cela on va utiliser la méthode utilisée par Debussche et Dettori (voir [9] et [14]).

On choisit un η petit arbitraire qui appartient à $(0,1)$ et $\forall t \in (0,T)$ on pose

$$E_\eta^N(t) = \{x \in \Omega / |u_N(x,t)| > 1-\eta\}.$$

Soit $|E_\eta^N(t)|$ la mesure de E_η^N, on a $|E_\eta^N(t)| = mes(E_\eta^N(t)) = \int_{E_\eta^N(t)} dx$ et $\chi_\eta^N(t)$ sa fonction caractéristique définie par :

$$\chi_\eta^N(x,t) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{si} \quad x \in E_\eta^N(t), \\ 0 \quad , & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On intègre (4.14) entre t et $t+r$, on a

$$E_{2N}(t+r) + \int_t^{t+r} (E_{2N}(s) + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2) ds \leq c^{'}(r) + E_{2N}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall r > 0. \tag{4.39}$$

Pour continuer la démonstration du théorème on énonce les deux lemmes suivants.

Lemme 1.3. *Il existe une constante positive c telle que pour tout $r > 0$ on a*

$$\| \frac{\partial u_N}{\partial t}(t) \|^2 \leq c(\frac{1}{r}+1)(E_{2N}(0)+1), \quad \forall t \geq r > 0. \tag{4.40}$$

Preuve: On a l'estimation suivante :

$$\frac{d}{dt} \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 \leq c\Big(\| u_N \|^2 + \| \nabla \alpha_N \|^2 + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 \Big). \tag{4.41}$$

Par (4.16),(4.17) et (4.39), on applique le lemme de Gronwall uniforme à (4.41) et donc on déduit que $\forall s > 0$ on a

$$\| \frac{\partial u_N}{\partial t}(t+s) \|^2 \leq c(\frac{1}{s}+1)(E_{2N}(0)+1), \quad \forall t \geq 0, \tag{4.42}$$

ce qui complète la preuve de (4.40). □

Lemme 1.4. *Il existe une constante c telle que pour tout $r > 0$ on a*

$$\| g_N(u_N(t)) \|^2 \leq c(\frac{1}{r}+1)(E_{2N}(0)+1), \quad \forall t \geq r > 0. \tag{4.43}$$

Preuve: Par (4.16), on conclut de (4.17) que

$$\| u_N(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2 \leq E_{2N}(0) + c, \quad \forall t \geq r > 0. \tag{4.44}$$

Par (4.40) et (4.44), on obtient de (4.28) la relation (4.43). □

Par (4.43) on écrit,

$$\| g_N(u_N) \|^2 \leq \frac{c}{t}(1+t)(E_{2N}(0)+1),$$

implique

$$t \parallel g_N(u_N) \parallel^2 \leq c(1+t)(E_{2N}(0)+1),$$

donc

$$t \parallel g_N(u_N(t)) \parallel^2 \leq c(T+1), \quad \forall t \in (0,T). \tag{4.45}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned}
\Big\{ \int_{E_\eta^N(t)} g_N^2(u_N)dx \Big\}^{\frac{1}{2}} &\geq |E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}}.\Big\{ Inf_{x\in E_\eta^N(t)} \Big(\textstyle\sum_{k=0}^N \dfrac{(u_N(x))^{2k+1}}{2k+1} \Big)^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\geq |E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}}.Inf_{x\in E_\eta^N(t)} \textstyle\sum_{k=0}^N \dfrac{|u_N(x)|^{2k+1}}{2k+1} \\
&\geq |E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}}.\textstyle\sum_{k=0}^N \dfrac{(1-\eta)^{2k+1}}{2k+1},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}\sum_{k=0}^N \dfrac{(1-\eta)^{2k+1}}{2k+1}}. \tag{4.46}$$

Lorsque $N \longrightarrow +\infty$, on déduit de (4.33),(4.46) et du lemme de Fatou que

$$\begin{aligned}
|E_\eta(t)| = \int_\Omega \chi_\eta(t)dx \leq \int_\Omega \liminf_{N\to+\infty} \chi_\eta^N(t)dx &\leq \liminf_{N\to+\infty} \int_\Omega \chi_\eta^N(t)dx \\
&\leq \liminf |E_\eta^N(t)| \\
&\leq \frac{4C}{t\ln^2\Big(\dfrac{2-\eta}{\eta}\Big)},
\end{aligned}$$

avec $|E_\eta(t)|$ et $\chi_\eta(t)$ désignent respectivement la mesure de l'ensemble $\{x \in \Omega, |u(x,t)| > 1-\eta\}$ et sa fonction caractéristique.

Lorsque $\eta \to 0$ on obtient $\forall t \in (0,T)$,

$$mes\{x \in \Omega, |u(x,t)| \geq 1\} = 0. \tag{4.47}$$

De plus par (4.33),(4.47) on a, lorsque $N \to +\infty$ que $\forall t \in (0,T)$:

$$g_N(u_N(t)) \longrightarrow g(u(t)) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega. \tag{4.48}$$

Par (4.29),(4.48) et Lions ([13], lemme 1.3, p.12), on a

$$g_N(u_N) \rightharpoonup g(u) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{4.49}$$

Finalement par (4.30) et (4.49) on obtient que

$$g^* = g(u),$$

d'où le théorème. □

Le résultat qui suit nous donne l'unicité de la solution du problème (4.1)-(4.4).

Théorème 1.5. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, avec (4.9), le problème (4.1)-(4.4) admet une et une seule solution avec la régularité ci-dessus.*

Démonstration: On sait déjà qu'il existe au moins une solution pour le problème (P) d'après le Théorème 1.2. Il reste à prouver l'unicité de celle-ci. Pour cela, on prend deux solutions $(u^{(1)},\alpha^{(1)})$ et $(u^{(2)},\alpha^{(2)})$ de mêmes données initiales et on pose

$$(u,\alpha)=(u^{(1)},\alpha^{(1)})-(u^{(2)},\alpha^{(2)}).$$

Alors (u,α) vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+g(u^{(1)})-g(u^{(2)})=\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{4.50}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}+\frac{\partial \alpha}{\partial t}-\Delta\alpha=-u-\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{4.51}$$

$$u=\alpha=0, \tag{4.52}$$

$$u(0)=\alpha(0)=\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0)=0. \tag{4.53}$$

On multiplie (4.50) par u et on intègre sur Ω, par (4.9) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel u\parallel^2+\parallel \nabla u\parallel^2\leq 2\kappa_0\parallel u\parallel^2+((\frac{\partial \alpha}{\partial t},u)),$$

en utilisant l'inégalité $|((v,w))|\leq c\parallel v\parallel_{H_0^1(\Omega)}\cdot\parallel w\parallel_{H^{-1}(\Omega)}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\parallel u\parallel^2+\parallel \nabla u\parallel^2\leq c(\parallel u\parallel^2+\parallel\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2_{H^{-1}(\Omega)}). \tag{4.54}$$

On intègre (4.51) entre 0 et t on aura

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)+\alpha(t)-\Delta\int_0^t\alpha(s)ds=-\int_0^t u(s)ds-u(t). \tag{4.55}$$

On multiplie (4.55) par $(-\Delta)^{-1}\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω on aura

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\parallel\alpha\parallel^2_{H^{-1}(\Omega)}+2((\alpha,\int_0^t\alpha ds))\Big] &+ \parallel\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2_{H^{-1}(\Omega)}\\ \leq c_T(\parallel\alpha\parallel^2+\parallel u\parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} &+ \parallel u\parallel^2),\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{4.56}$$

On multiplie (4.55) par α et on intègre sur Ω on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\nabla\int_0^t\alpha ds\parallel^2\Big]+\parallel\alpha\parallel^2\leq c_T(\parallel u\parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}+\parallel u\parallel^2),\quad t\in[0,T]. \tag{4.57}$$

On additionne (4.57) et δ(4.56) avec $\delta>0$ assez petit on aura

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\nabla\int_0^t\alpha ds\parallel^2+\delta\parallel\alpha\parallel^2_{H^{-1}(\Omega)}+2\delta((\alpha,\int_0^t\alpha ds))\Big]\\ &\qquad+c(\parallel\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2_{H^{-1}(\Omega)}+\parallel\alpha\parallel^2)\leq c_T(\parallel u\parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}+\parallel u\parallel^2).\end{aligned} \tag{4.58}$$

En particulier

$$\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\nabla\int_0^t\alpha ds\parallel^2+2\delta((\alpha,\int_0^t\alpha ds))\geq c(\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\int_0^t\alpha ds\parallel^2_{H_0^1(\Omega)}),\quad c>0. \tag{4.59}$$

On additionne (4.58) et $\delta^{'}(4.54)$ avec $\delta^{'} > 0$ assez petit on aura

$$\frac{dE_5}{dt} \leq c_T(E_5 + \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}), \quad t \in [0,T], \tag{4.60}$$

avec

$$E_5(t) = \parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha ds \parallel^2 + \delta \parallel \alpha \parallel^2_{H^{-1}(\Omega)} + 2\delta((\alpha, \int_0^t \alpha ds)) + \delta^{'} \parallel u \parallel^2 . \tag{4.61}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (4.60) donne

$$E_5(t) \leq \exp{(c_T t)} E_5(0) + c_T^{'} \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))},$$

or $E_5(0) = 0$ donc $E_5(t) \leq c_T^{'} \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \quad t \in [0,T],$

en particulier

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq c_T^{'} \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \quad t \in [0,T], \tag{4.62}$$

on applique de nouveau le lemme de Gronwall à (4.62) on aura

$$\parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{4.63}$$

par conséquent

$$E_5(t) \leq 0, \quad t \in [0,T], \tag{4.64}$$

on déduit alors l'unicité. □

Les Théorèmes 1.2 et 1.5, nous amènent à considérer un semi-groupe $S(t)$ pour tout $t \geq 0$, qui est défini sur E_K de la façon suivante :

$$S(t) : E_K \to E_K, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \tag{4.65}$$

où $(u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (4.1)-(4.4).

1.2 Dissipativité et Régularité

Dans cette sous-section, on prouve tout d'abord l'existence d'ensembles bornés absorbants pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, associé au problème (P), dans l'espace E_K. Ensuite on énonce un théorème de régularités supplémentaires pour les solutions, qui va nous permettre d'étudier la dissipativité dans l'espace $E_K^{'}$.

On commence à énoncer le

Théorème 1.6. *Sous les hypothèses du Théorème 1.5, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, est dissipatif sur E_K. En d'autres termes, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_2$ dans E_K.*

Démonstration: On prend les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ dans un borné de E. Disons que, pour tout $R_2 > 0$, on a $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in B_{R_2}, B_{R_2}$ étant la boule de E de centre 0 et de rayon R_2.

On multiplie (4.1) par u. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \int_\Omega g(u)udx = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u)). \tag{4.66}$$

On multiplie (4.1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$. On a

$$\parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\parallel \nabla u \parallel^2 + 2\int_\Omega G(u)dx) = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t})). \tag{4.67}$$

On multiplie ensuite (4.2) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2) + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 = -((\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t})) - ((u, \frac{\partial \alpha}{\partial t})). \tag{4.68}$$

En additionnant les trois équations , à savoir (4.66),(4.67) et (4.68), on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + 2\int_\Omega G(u)dx \quad &+ \quad \parallel \nabla \alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2\} \\ + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 \quad &+ \quad \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 = -\int_\Omega g(u)udx. \end{aligned} \tag{4.69}$$

L'hypothèse (4.8) nous assure que

$$-g(u)u \leq -G(u) + c_0,$$

par conséquent, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + 2\int_\Omega G(u)dx \quad &+ \quad \parallel \nabla \alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2\} \\ + \textstyle\int_\Omega G(u)dx + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 \quad &+ \quad \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 \leq c_0|\Omega|. \end{aligned} \tag{4.70}$$

On multiplie maintenant (4.2) par α. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2 < \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \alpha > + \parallel \alpha \parallel^2) + \parallel \nabla \alpha \parallel^2 = - < \frac{\partial u}{\partial t}, \alpha > -((u, \alpha)) + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 . \tag{4.71}$$

Soit $\epsilon > 0$ assez petit. On somme maintenant (4.70) et ϵ(4.71). On déduit une inégalité de la forme

$$\frac{dE_2}{dt} + c_2 E_2 + c_3 \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 \leq c', \qquad c_2, c_3 > 0, \quad c' \geq 0, \tag{4.72}$$

où

$$\begin{aligned} E_2(t) \quad &= \quad \parallel u(t) \parallel^2 + \parallel \nabla u(t) \parallel^2 + 2\textstyle\int_\Omega G(u(t))dx + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha(t) \parallel^2 \\ &+ \quad 2\epsilon < \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t), \alpha(t) > + \epsilon \parallel \alpha(t) \parallel^2, \end{aligned} \tag{4.73}$$

satisfait

$$\begin{aligned} c(\| u(t) \|_V^2 + \| \alpha(t) \|_V^2 \ &+ \ \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2) \leq E_2(t) \\ \leq c^{'}(\| u(t) \|_V^2 \ &+ \ \| \alpha(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2). \end{aligned} \tag{4.74}$$

En particulier, on écrit

$$\frac{dE_2}{dt} + c_2 E_2 \leq c^{'}, \tag{4.75}$$

le lemme de Gronwall appliqué à (4.75) donne

$$E_2(t) \leq \exp(-c_2 t) E_2(0) + c, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.76}$$

Par (4.74) et le fait que les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ sont dans un borné, l'estimation (4.76) devient

$$E_2(t) \leq \mu_2 \exp(-c_2 t) + c, \tag{4.77}$$

avec $\mu_2 = \mu_2(R_2) > 0$.

Soit maintenant $D_5 > 0$ assez grand pour que

$$\mu_2 \exp(-c_2 t) + c \leq D_5.$$

On a alors que la boule de centre 0 et de rayon D_5 est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$. En d'autres termes,

$$\| u(t) \|_V^2 + \| \alpha(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2 \leq D_5, \quad \forall t \geq t_3, \tag{4.78}$$

avec $t_3 = t_3(R_2) := \max\{0, -\frac{1}{c_2} \log(\frac{D_5 - c}{\mu_2})\}$. □

Lemme 1.7. *Il existe une constante D_6 et un temps t_4 tel que :*

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2 \leq D_6, \quad \forall t \geq t_4 = t_3 + r. \tag{4.79}$$

Preuve: On différencie (4.1) par rapport au temps et par (4.2) on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t}) - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} + g^{'}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Delta \alpha - u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.80}$$

On multiplie (4.80) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, l'inégalité de Hölder et (4.9) entraînent

$$\frac{d}{dt} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq c\Big(\| u \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \Big). \tag{4.81}$$

On a, d'après le Théorème 1.6,

$$\int_t^{t+r} \Big(\| u(s) \|^2 + \| \nabla \alpha(s) \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s) \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2 \Big) ds \leq c, \quad \forall t \geq t_3. \tag{4.82}$$

On déduit de (4.81),(4.82) et du lemme de Gronwall uniforme la relation (4.79). □

On donne dans la suite un théorème de régularités supplémentaires pour les solutions du problème (P).

Théorème 1.8. *Si les données initiales* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ *appartiennent à* $E'_K = K \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *et* $g(u_0) \in L^2(\Omega)$, *le problème* (P) *admet une unique solution telle que* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *et* $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$, $\forall T > 0$.

Démonstration: L'existence et l'unicité étant vérifiées, il reste à établir la régularité de la solution.

On additionne (4.67) et (4.68), l'inégalité de Hölder donne

$$\frac{d}{dt}[\| \nabla u \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + 2\int_\Omega G(u)dx] + 2 \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq \| u \|^2 . \tag{4.83}$$

On intègre (4.83) entre 0 et t, compte tenu du Théorème 1.2 et de (4.8), on obtient

$$u \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{4.84}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, L^2(\Omega)), \tag{4.85}$$
$$\alpha \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{4.86}$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{4.87}$$

En intégrant (4.81) entre 0 et t, et compte tenu du Théorème 1.2 on a (notons que $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = \Delta u_0 - g(u_0) + \alpha_1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega)). \tag{4.88}$$

Multiplions maintenant (4.1) par $-\Delta u$ et on intègre sur Ω, par (4.9) on aura

$$\frac{d}{dt} \| \nabla u \|^2 + \| \Delta u \|^2 \leq \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + c \| \nabla u \|^2 . \tag{4.89}$$

On intègre (4.89) entre 0 et t, et compte tenu du Théorème 1.2, on a

$$u \in L^2(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \tag{4.90}$$

On multiplie finalement (4.2) par $-\Delta \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$, les inégalités de Hölder et de Young donnent

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \alpha \|^2) + 2 \| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq \frac{1}{\epsilon}(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) + 2\epsilon \| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 .$$

En choisissant $\epsilon > 0$ assez petit tel que $1 - \epsilon > 0$, on déduit

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \alpha \|^2) + c \| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq c'(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2), \quad c > 0. \tag{4.91}$$

On intègre (4.91) entre 0 et t, compte tenu du Théorème 1.2 et (4.88) on aura

$$\begin{aligned}\alpha &\in L^{\infty}(0,T,H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), &(4.92)\\ \frac{\partial\alpha}{\partial t} &\in L^{\infty}(0,T,H_0^1(\Omega)), &(4.93)\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Le Théorème 1.8 nous amène à définir le semi-groupe $S(t), t\geq 0$ sur l'espace $E_K^{'}$. On a alors

$$S(t): E_K^{'}\rightarrow E_K^{'}, S(t)(u_0,\alpha_0,\alpha_1)=(u(t),\alpha(t),\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)), \tag{4.94}$$

où $(u(t),\alpha(t),\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (P).

Théorème 1.9. *Sous les hypothèses du Théorème 1.8, le semi-groupe est dissipatif sur $E_K^{'}$. En d'autres termes, le semi-groupe $S(t), t\geq 0$, possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_3$ dans $E_K^{'}$.*

Démonstration: On prend les données initiales (u_0,α_0,α_1) dans un borné de E_1. Disons que pour tout $R_3>0$, on a $(u_0,\alpha_0,\alpha_1)\in B_{R_3}, B_{R_3}$ étant la boule de E_1 de centre 0 et de rayon R_3.

On multiplie (4.2) par $-\Delta\alpha$, les inégalités de Hölder et Young donnent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\|\nabla\alpha\|^2+2((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t},\nabla\alpha))] &+ 2\|\Delta\alpha\|^2\\ \leq 2\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2+\frac{1}{\epsilon}(\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 &+ \|u\|^2)+2\epsilon\|\Delta\alpha\|^2 .\end{aligned} \tag{4.95}$$

En additionnant (4.91) et ϵ(4.95) où $\epsilon>0$ assez petit tel que $1-2\epsilon>0$, on déduit une inégalité de la forme

$$\frac{dE_4}{dt}+cE_4(t)\leq c^{'}(\|\nabla u\|^2+\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\|^2),\quad c>0, \tag{4.96}$$

où

$$E_4(t)=\|\Delta\alpha(t)\|^2+\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\|^2+2\epsilon((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t),\nabla\alpha(t)))+\epsilon\|\nabla\alpha(t)\|^2, \tag{4.97}$$

et

$$\begin{aligned}c(\|\nabla\alpha(t)\|^2+\|\Delta\alpha(t)\|^2 &+ \|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\|^2)\leq E_4(t)\\ \leq c^{'}(\|\nabla\alpha(t)\|^2 &+ \|\Delta\alpha(t)\|^2+\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\|^2).\end{aligned} \tag{4.98}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (4.96) donne

$$E_4(t)\leq E_4(0)\exp(-ct)+c^{'}\int_0^t\exp(c(s-t))(\|\nabla u(s)\|^2+\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}(s)\|^2)ds. \tag{4.99}$$

Estimons le terme $\int_0^t \exp(c(s-t))(\| \nabla u(s) \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2)ds$. Pour cela on pose

$$q(s) = \| \nabla u(s) \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2, \quad q \geq 0.$$

On a, d'après le Théorème 1.6 et le lemme 1.7,

$$\int_t^{t+1} q(s)ds \leq \lambda, \quad \forall t \geq t_4. \tag{4.100}$$

On a alors

$$\int_0^t \exp(c(s-t))q(s)ds = \int_0^{t_4} \exp(c(s-t))q(s)ds + \int_{t_4}^t \exp(c(s-t))q(s)ds$$

$\leq \exp(c(t_4 - t)) \int_0^{t_4} q(s)ds + \int_{t_4}^{t_4+1} \exp(c(s-t))q(s)ds + \int_{t_4+1}^{t_4+2} \exp(c(s-t))q(s)ds$

$+ ... + \int_{[t]-1}^{[t]} \exp(c(s-t))q(s)ds + \int_{[t]}^{[t]+1} \exp(c(s-t))q(s)ds$

$\leq$ (d'après le Théorème 1.8)

$\leq c^{'} \exp(-ct) + \int_{t_4}^{t_4+1} \exp(c(s-t))q(s)ds + \int_{t_4+1}^{t_4+2} \exp(c(s-t))q(s)ds$

$+ ... + \int_{[t]-1}^{[t]} \exp(c(s-t))q(s)ds + \int_{[t]}^{[t]+1} \exp(c(s-t))q(s)ds$

$\leq$ (par (4.100))

$\leq c^{'} \exp(-ct) + \lambda \exp(-ct)[\exp(c(t_4+1)) + \exp(c(t_4+2)) + ... + \exp(c([t]+1))]$

$$\leq c^{'} \exp(-ct) + c^{'''} \exp(-ct) \frac{\exp(c([t]+2)) - 1}{\exp c - 1}$$

$$\leq c^{'} \exp(-ct) + c^{''}, \tag{4.101}$$

où $c^{'}$ est une constante qui dépend des données initiales.

En insérant (4.101) dans (4.99) on obtient

$$E_4(t) \leq \exp(-ct)E_4(0) + c^{'}. \tag{4.102}$$

Par (4.98) et le fait que les données initiales sont dans un borné, l'estimation (4.102) devient

$$E_4(t) \leq \mu_3 \exp(-ct) + c^{'}, \tag{4.103}$$

avec $\mu_3 = \mu_3(R_3) > 0$.

Soit maintenant $D_7 > 0$ assez grand pour que

$$\mu_3 \exp(-ct) + c^{'} \leq D_7.$$

On a alors

$$\| \alpha(t) \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2 \leq D_7, \quad \forall t \geq t_5, \tag{4.104}$$

avec $t_5 = t_5(R_3) := \max\{0, -\frac{1}{c}\log(\frac{D_7 - c^{'}}{\mu_3})\}$.

On multiplie (4.1) par $-\Delta u$, l'inégalité de Hölder et (4.9) donnent

$$\| \Delta u \|^2 \leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2). \tag{4.105}$$

Par (4.78),(4.79) et (4.104) et pour $t^{''} = \max(t_4, t_5)$, on déduit de (4.105)

$$\| u(t) \|_W^2 \leq D_8, \quad \forall t \geq t^{''}, \tag{4.106}$$

d'où le théorème. □

Par conséquent, par (4.106), on a

$$u \in L^\infty(t^{''}, +\infty, W \cap V). \tag{4.107}$$

De plus, par (4.84),(4.88) et (4.93), la relation (4.105) donne

$$u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \forall T > 0. \tag{4.108}$$

En associant (4.107) et (4.108), on a alors que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, W \cap V).$$

De même, on montre que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H); \qquad \alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+, W \cap V),$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V).$$

La section suivante traite le problème (4.1)-(4.4) avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$, en se basant sur une propriété de séparation.

2 Caractère bien posé basé sur une propriété de séparation

On démontre ici l'existence et l'unicité des solutions du problèmes (P) basées sur une propriété de séparation stricte, en dimension une et deux, qui va nous permettre de plus de prouver la dissipativité.

Par ailleurs on suppose que

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega), \quad \alpha_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega), \quad \alpha_1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{4.109}$$
$$\| u_0 \|_{L^\infty(\Omega)} < 1, \tag{4.110}$$
$$\Delta u_0 = \Delta \alpha_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{4.111}$$

2.1 Existence et unicité en dimension une et deux

Vu qu'on ne considère pas ici l'ensemble K utilisé dans la section précédente, une des difficultés est de s'assurer que le paramètre d'ordre u reste dans l'intervalle physique $(-1,+1)$, pour donner un sens aux équations considérées. On note que les valeurs -1 et $+1$ correspondent aux phases pures. Pour prouver le caractère bien posé de notre problème il suffit d'obtenir une estimation de $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ dans $L^\infty((t,t+1)\times\Omega)$(voir [3] et [27]).

On démontre la propriété de séparation stricte et on a le,

Théorème 2.1. *Le champ de phase u satisfait la propriété de séparation stricte, c'est-à-dire*

$$\| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1-\delta, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.112}$$

où $\delta > 0$ à préciser.

DÉMONSTRATION: Puisque les équations du problème (P) n'ont un sens que si

$$-1 < u(x,t) < 1, \quad p.p. \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{4.113}$$

on pose alors

$$D(v) = \frac{1}{1- \| v \|_{L^\infty}}, \quad v \in L^\infty(\Omega), \quad \| v \|_{L^\infty} \neq 1. \tag{4.114}$$

On multiplie (4.72) par $\exp(cs)$ $(c = c_2)$, on a

$$\frac{d}{ds}[\exp(cs) E_2(s)] + \exp(cs) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq c^{'} \exp(cs). \tag{4.115}$$

On intègre (4.115) entre 0 et t on aura

$$\exp(ct) E_2(t) + \int_0^t \exp(cs) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \, ds \leq \frac{c^{'}}{c}[\exp(ct) - 1] + E_2(0). \tag{4.116}$$

On multiplie (4.116) par $\exp(-ct)$, par (4.74) on aura

$$\| u(t) \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \| \alpha(t) \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2 + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t}(s) \|^2 \, ds$$

$$\leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \| \alpha_0 \|^2_{H^1_0(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2) \exp(-ct) + c^{'}, \quad c > 0. \tag{4.117}$$

On note qu'on a $\| \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) \| = \| \Delta u_0 + g(u_0) + \alpha_1 \|$, donc

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \|^2 \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2). \tag{4.118}$$

On multiplie (4.81) par $\exp(cs)$, on obtient

$$\frac{d}{ds}[\exp(cs) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2] \quad + \quad \exp(cs) \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2$$

$$\leq c \exp(cs)(\| u \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \quad + \quad \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2). \tag{4.119}$$

On intègre (4.119) entre 0 et t, on a

$$\exp(ct) \parallel \frac{\partial u}{\partial t}(t) \parallel^2 + \int_0^t \exp(cs) \parallel \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s) \parallel^2 ds$$

$$\leq c \int_0^t \exp(cs)(\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla\alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2) ds + \parallel \frac{\partial u}{\partial t}(0) \parallel^2 . \quad (4.120)$$

On multiplie (4.120) par $\exp(-ct)$, on a

$$\parallel \frac{\partial u}{\partial t}(t) \parallel^2 + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \parallel \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s) \parallel^2 ds$$

$$\leq c \int_0^t \exp(-c(t-s))[\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla\alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2] ds + \exp(-ct) \parallel \frac{\partial u}{\partial t}(0) \parallel^2 . \quad (4.121)$$

Par (4.117) et (4.118) la relation (4.121) donne

$$\parallel \frac{\partial u}{\partial t}(t) \parallel^2 + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \parallel \frac{\partial u}{\partial t}(s) \parallel^2_{H^1_0(\Omega)} ds$$

$$\leq Q(D(u_0) + \parallel u_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^1_0(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \quad (4.122)$$

On réécrit (4.1) sous la forme d'une équation élliptique pour $t \geq 0$ fixé,

$$-\Delta u + g(u) = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (4.123)$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \quad (4.124)$$

On multiplie (4.123) par $-\Delta u$, les inégalités de Hölder et Young, avec $\epsilon > 0$ assez petit choisit tel que $1 - \epsilon > 0$ donne

$$\parallel \Delta u \parallel^2 \leq c(\parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2). \quad (4.125)$$

Par (4.117) et (4.122), la relation (4.125) donne

$$\parallel u(t) \parallel^2_{H^2(\Omega)} \leq Q(D(u_0) + \parallel u_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^1_0(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2) \exp(-ct) + c'. \quad (4.126)$$

On multiplie (4.96) par $\exp(cs)$, on a

$$\frac{d}{ds}[\exp(cs) E_4(s)] \leq c' \exp(cs)(\parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2). \quad (4.127)$$

On intègre (4.127) entre 0 et t, on aura

$$\exp(ct) E_4(t) \leq c' \int_0^t \exp(cs)(\parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2) ds + E_4(0). \quad (4.128)$$

On multiplie (4.128) par $\exp(-ct)$, on a

$$E_4(t) \leq c' \int_0^t \exp(-c(t-s))[\parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2] ds + E_4(0) \exp(-ct). \quad (4.129)$$

Par (4.117),(4.122) et (4.98) la relation (4.129) donne

$$\| \alpha \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2 \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_W^2 + \| \alpha_0 \|_W^2 + \| \alpha_1 \|_V^2) \exp(-ct) + c'. \tag{4.130}$$

En combinant (4.122),(4.126) et (4.130) on aura finalement :

$$\| u \|_W^2 + \| \alpha \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_V^2 \, ds$$

$$\leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_{H_0^1(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c'. \tag{4.131}$$

En dimension une : -On pose $f = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on écrit (4.1) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = f.$$

Par l'injection continue $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, et (4.131), f satisfait :

$$\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_{L^\infty}^2 \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_{H_0^1(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c'. \tag{4.132}$$

Soient $y_\pm(t)$ les solutions des EDO : $y'_\pm + g(y_\pm) = h_\pm(t); \quad y_\pm(0) = \pm \| u_0 \|_{L^\infty}$

où $h_\pm(t) = \pm \| f(t) \|_{L^\infty}$.

On démontre que (voir [28] et [43]) :

$$|y_\pm(t)| \leq 1 - \delta(D(u_0) + \| h_\pm \|_{L^\infty([0,1])}), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{4.133}$$

$$|y_\pm(t+1)| \leq 1 - \delta(\| h_\pm \|_{L^\infty(t,t+1)}), \quad t \geq 0. \tag{4.134}$$

D'après le principe de comparaison on a $y_-(t) \leq u(x,t) \leq y_+(t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$.

Par (4.132),(4.133) et (4.134) on obtient

$$D(u(t)) \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_{H_0^1(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \tag{4.135}$$

En combinant (4.131) et (4.135) on aura

$$D(u(t)) + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \, ds + \| u \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

$$+ \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_{H_0^1(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c'. \tag{4.136}$$

En particulier

$$\| u(t) \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.137}$$

avec $\delta > 0$ dépend de $D(u_0), \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}, \| \alpha_0 \|_{H^2(\Omega)}$ et $\| \alpha_1 \|_{H_0^1(\Omega)}$.

En dimension deux : -On multiplie (4.2) par $\Delta^2\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, en utilisant le caractère autoadjoint du laplacien et les inégalités de Hölder et Young, on aura

$$\frac{d}{dt}[\| \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha \|^2] + 2 \| \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 \leq \frac{1}{\epsilon}(\| \Delta u \|^2 + \| \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \|^2) + 2\epsilon \| \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 . \tag{4.138}$$

On multiplie ensuite (4.2) par $\Delta^2\alpha$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[2((\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \Delta\alpha)) + \| \Delta\alpha \|^2] \quad &+ \quad 2 \| \nabla\Delta\alpha \|^2 \\ \leq \frac{1}{\epsilon}(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \|^2) + 2 \| \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 \quad &+ \quad 2\epsilon \| \nabla\Delta\alpha \|^2 .\end{aligned} \tag{4.139}$$

En additionnant (4.138) et ϵ(4.139), où $\epsilon > 0$ assez petit tel que $1 - 2\epsilon > 0$ et $1 - \epsilon > 0$, on a

$$\frac{dE_6(t)}{dt} + cE_6(t) \leq c^{'}(\| \Delta u \|^2 + \| \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \|^2), \tag{4.140}$$

avec

$$E_6(t) = \| \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha \|^2 + \epsilon[2((\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \Delta\alpha)) + \| \Delta\alpha \|^2],$$

et

$$c(\| \Delta\alpha \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha \|^2 + \| \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2) \leq E_6 \leq c^{'}(\| \Delta\alpha \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha \|^2 + \| \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2). \tag{4.141}$$

On multiplie (4.140) par $\exp{(cs)}$, on a

$$\frac{d}{ds}[\exp{(cs)}E_6(s)] \leq c^{'}\exp{(cs)}(\| \Delta u \|^2 + \| \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \|^2), \quad c > 0. \tag{4.142}$$

On intègre (4.142) entre 0 et t, on a

$$\exp{(ct)}E_6(t) \leq c^{'}\int_0^t \exp{(cs)}(\| \Delta u \|^2 + \| \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \|^2)ds + E_6(0). \tag{4.143}$$

On multiplie (4.143) par $\exp{(-ct)}$ on aura

$$E_6(t) \leq c^{'}\int_0^t \exp{(-c(t-s))}[\| \Delta u \|^2 + \| \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \|^2]ds + E_6(0)\exp{(-ct)}. \tag{4.144}$$

Or par (4.131), on a

$$\begin{aligned}&\int_0^t \exp{(-c(t-s))} \| \Delta u \|^2 \, ds \\ &\leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_W^2 + \| \alpha_0 \|_W^2 + \| \alpha_1 \|_V^2)\exp{(-ct)} + c^{'}.\end{aligned} \tag{4.145}$$

Estimons le terme $\int_0^t \exp{(-c(t-s))} \| \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \, ds$. Pour se faire, on réécrit (4.1) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \frac{\partial\alpha}{\partial t} - g(u),$$

après une dérivation par rapport au temps on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t}) - \Delta\frac{\partial u}{\partial t} = h, \tag{4.146}$$

où
$$h=-\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\Delta\alpha-u-\frac{\partial u}{\partial t}-g^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.147}$$

On multiplie (4.146) par $-\Delta\frac{\partial u}{\partial t}$, les inégalités de Hölder et Young donnent

$$\frac{d}{dt}\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2\leq\parallel h\parallel^2. \tag{4.148}$$

On multiplie (4.148) par $\exp(cs)$, on a

$$\frac{d}{ds}[\exp(cs)\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2]+\exp(cs)\parallel\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2\leq\exp(cs)\parallel h\parallel^2+c\exp(cs)\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2. \tag{4.149}$$

On intègre (4.149) entre 0 et t, on aura

$$\begin{aligned}\exp(ct)\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}(t)\parallel^2 \quad &+ \quad \int_0^t\exp(cs)\parallel\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2 ds\\ \leq c^{'}\int_0^t\exp(cs)[\parallel h(s)\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2]ds \quad &+ \quad \parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}(0)\parallel^2.\end{aligned} \tag{4.150}$$

On multiplie (4.150) par $\exp(-ct)$, on a

$$\begin{aligned}&\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2_{H^1_0(\Omega)}+\int_0^t\exp(-c(t-s))\parallel\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2 ds\\ &\quad\leq c^{'}\int_0^t\exp(-c(t-s))[\parallel h\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2]ds+\exp(-ct)\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}(0)\parallel^2.\end{aligned} \tag{4.151}$$

Donc il reste à estimer le terme $\int_0^t\exp(-c(t-s))\parallel h\parallel^2 ds$, pour cela on énonce tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.2. $\forall M>0$, *on a :*

$$\begin{aligned}&\int_{(t,t+1)\times\Omega}\exp(M|g(u(x,t))|)dxdt\\ &\qquad\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^2(\Omega)} \quad + \quad \parallel\alpha_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel\alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)})\exp(-ct)\end{aligned} \tag{4.152}$$

où $c^{'}$ est une constante qui dépend de M.

Preuve: On reécrit (4.1) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+g(u)=f. \tag{4.153}$$

Par (4.131) on a

$$\parallel f(t)\parallel^2_{H^1_0(\Omega)}\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel\alpha_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel\alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)})\exp(-ct)+c^{'}. \tag{4.154}$$

On suppose sans perte de généralité que :

$$g^{'}(s)\geq 0, \quad s\in(-1,+1), \tag{4.155}$$

(celà implique que dans le terme g on prend $\kappa_0 = 0$ donc $g + 2\kappa_0 I$ satisfait (4.155) et $u \in L^\infty(t, t+1, V)$).

On fixe M>0 et on multiplie (4.153) par $g(u)\exp(M|g(u)|)$ on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega G_M(u)dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 g^{'}(u)(1 + M|g(u)|)\exp(M|g(u)|)dx$$

$$+ \int_\Omega |g(u)|^2 \exp(M|g(u)|)dx = \int_\Omega f.g(u)\exp(M|g(u)|)dx, \tag{4.156}$$

où $G_M(s) = \int_0^s \tau\exp(M|\tau|)d\tau$.

On intègre (4.156) entre t et $t+1$ on obtient :

$$\int_\Omega G_M(u(t+1))dx + \int_{(t,t+1)\times\Omega} |\nabla u|^2 g^{'}(u)(1 + M|g(u)|)\exp(M|g(u)|)dxdt$$

$$+ \int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(M|g(u)|)dxdt$$

$$= \int_\Omega G_M(u(t))dx + \int_{(t,t+1)\times\Omega} f.g(u)\exp(M|g(u)|)dxdt. \tag{4.157}$$

Or on a :

$$\| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1_0(\Omega)})\exp(-ct) + c^{'}. \tag{4.158}$$

Par (4.155) et (4.158) la relation (4.157) donne

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(M|g(u)|)dxdt$$

$$\leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|^2_W + \| \alpha_0 \|^2_W + \| \alpha_1 \|^2_V)\exp(-ct) + c^{'}$$

$$+ \int_{(t,t+1)\times\Omega} |f|.|g(u)|\exp(M|g(u)|)dxdt. \tag{4.159}$$

Pour estimer le second terme dans le membre droite de (4.159) on utilise l'inégalité de Young suivante :

$$ab \leq \phi(a) + \psi(b), \qquad a, b \geq 0, \tag{4.160}$$

où

$$\phi(s) = \exp(s) - s - 1, \qquad \psi(s) = (1+s)\ln(1+s) - s, \quad s \geq 0. \tag{4.161}$$

En prenant dans (4.160) : $a = N.|f|$ et $b = N^{-1}|g(u)|\exp(M|g(u)|)$ où $N > 0$ une constante à fixer ultérieurement, on obtient :

$$|f|.|g(u)|\exp(M|g(u)|)$$

$$\leq \exp(N|f|) + \Big(1 + N^{-1}|g(u)|\exp(M|g(u)|)\Big)\ln\Big(1 + N^{-1}|g(u)|\exp(M|g(u)|)\Big).$$

Si $|g(u)| \leq 1$ donc :

$$|f|.|g(u)|\exp(M|g(u)|) \leq \exp(N|f|) + \Big(1+N^{-1}\exp(M)\Big)\ln\Big(1+N^{-1}\exp(M)\Big).$$

Si $|g(u)| \geq 1$ donc $|g(u)|\exp(M|g(u)|) \geq 1$ et

$$\begin{aligned} &|f|.|g(u)|\exp(M|g(u)|) \\ &\leq \exp(N|f|) + \Big(1+N^{-1}|g(u)|\exp(M|g(u)|)\Big)\ln\Big((1+N^{-1})|g(u)|\exp(M|g(u)|)\Big) \\ &= \exp(N|f|) + MN^{-1}|g(u)|^2\exp(M|g(u)|) + N^{-1}\ln(1+N^{-1})|g(u)|\exp(M|g(u)|) \\ &\quad + N^{-1}|g(u)|\ln(|g(u)|)\exp(M|g(u)|) + M|g(u)| + \ln(|g(u)|) + \ln(1+N^{-1}) \\ &\leq \exp(N|f|) + N^{-1}\Big(M+1+\ln(1+N^{-1})\Big)|g(u)|^2\exp(M|g(u)|) + (1+M)|g(u)| \\ &\quad + \ln(1+N^{-1}) \leq \exp(N|f|) + N^{-1}\Big(M+1+\ln(1+N^{-1})\Big)|g(u)|^2\exp(M|g(u)|) \\ &\quad + \frac{1}{4}|g(u)|^2\exp(M|g(u)|) + c, \end{aligned}$$

car $(1+M)|g(u)| \leq \frac{1}{4}|g(u)|^2 + (1+M)^2 \leq \frac{1}{4}|g(u)|^2\exp(M|g(u)|) + (1+M)^2$,

où c est une constante qui dépend de N et M.

On choisit $N = N(M)$ assez grand et on trouve dans les deux cas :

$$|f|.|g(u)|\exp(M|g(u)|) \leq \exp(N|f|) + \frac{1}{2}|g(u)|^2\exp(M|g(u)|) + c, \tag{4.162}$$

où c est constante qui dépend de M seulement.

On déduit alors de (4.159) et de (4.162) l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2\exp(M|g(u)|)dxdt \\ &\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^1_0(\Omega)})\exp(-ct) + c' \\ &\quad + 2\int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp(N|f|)dxdt, \end{aligned} \tag{4.163}$$

où c' est une constante qui dépend de M seulement.

Pour conclure on va utiliser l'inégalité d'Orlicz suivante :

$$\int_\Omega \exp(N|v|)dx \leq \exp\Big(c(\parallel v \parallel^2_{H^1(\Omega)} + 1)\Big), \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{4.164}$$

où c est une constante qui dépend de Ω et de N.

Par (4.164) et (4.154), on a

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp(N|f|)dxdt$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \parallel u_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^1_0(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}. \quad (4.165)$$

En insérant (4.165) dans (4.163), on a

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2 \exp{(M|g(u)|)} dxdt$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \parallel u_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^1_0(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}. \quad (4.166)$$

On note finalement que

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp{(M|g(u)|)}dx \leq \int_{|g(u)|\leq 1} \exp{(M|g(u)|)}dx + \int_{|g(u)|\geq 1} \exp{(M|g(u)|)}dx$$

$$\leq c + \int_{|g(u)|\geq 1} |g(u)|^2 \exp{(M|gu)|)}dx \leq c + \int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2 \exp{(M|g(u)|)}dx, \quad (4.167)$$

où c est une constante qui dépend de M.

En insérant (4.166) dans (4.167), on aura (4.152). □

On remarque que le terme logarithmique g satisfait :

$$|g^{'}(s)| \leq \exp{(c|g(s)| + c')}, \quad s \in (-1, +1), \quad c, c^{'} > 0, \quad (4.168)$$

donc

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g'(s)|^p dxdt \leq \int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp{(cp|g(u)| + c^{'}p)} dxdt. \quad (4.169)$$

Par (4.152) on déduit de (4.169) que

$$\parallel g^{'}(u) \parallel_{L^p((t,t+1)\times\Omega)}$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \parallel u_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^1_0(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}. \quad (4.170)$$

Donc la fonction h de (4.147) vérifie, par (4.170) (pour $p = 4$) et les estimations précédentes qui impliquent que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(t, t+1, L^2(\Omega)) \cap L^2(t, t+1, H^1_0(\Omega)) \subset L^4(t, t+1, H^{\frac{1}{2}}(\Omega)) \subset L^4((t, t+1)\times\Omega)$$

la relation suivante

$$\parallel h \parallel_{L^2((t,t+1)\times\Omega)} \leq Q(D(u_0)+ \parallel u_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^2(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^1_0(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}. \quad (4.171)$$

On pose $p(s) = \parallel h \parallel^2, \quad p \geq 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} \int_0^t e^{c(s-t)}p(s)ds & = & \int_0^{t^{''}} e^{c(s-t)}p(s)ds + \int_{t''}^t e^{c(s-t)}p(s)ds \\ & \leq & e^{c(t^{''}-t)} \int_0^{t^{''}} p(s)ds + \int_{t''}^t e^{c(s-t)}p(s)ds. \end{array} \quad (4.172)$$

Par (4.171), on écrit

$$\begin{aligned}\int_0^{t''} p(s)ds &= \int_0^1 p(s)ds+\int_1^2 p(s)ds+...+\int_{t''-1}^{t''} p(s)ds\\ &\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel \alpha_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}\\ &+ \parallel \alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)})[1+e^{-c}+e^{-2c}+...+e^{-c(t''-1)}]+c'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^2(\Omega)} &+ \parallel \alpha_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel \alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)})\frac{e^{-ct''}-1}{e^{-c}-1}+c'\\ \leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^2(\Omega)} &+ \parallel \alpha_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel \alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)})+c'. \qquad (4.173)\end{aligned}$$

De plus, par (4.171), on a

$$\int_t^{t+1} p(s)ds\leq\omega,\quad \forall t\geq t'', \qquad (4.174)$$

donc

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{t''}^t e^{c(s-t)}p(s)ds &\leq \textstyle\int_{t''}^{t''+1} e^{c(s-t)}p(s)ds+\int_{t''+1}^{t''+2} e^{c(s-t)}p(s)ds\\ &+ \textstyle ...+\int_{[t]-1}^{[t]} e^{c(s-t)}p(s)ds+\int_{[t]}^{[t]+1} e^{c(s-t)}p(s)ds\\ &\leq \text{(par } \ (4.174))\\ &\leq \omega\exp(-ct)[e^{c(t''+1)}+e^{c(t''+2)}+...+e^{c([t]+1)}]\\ &\leq c''\exp(-ct)\frac{e^{c([t]+2)}-1}{e^c-1}\\ &\leq c'\exp(-ct).\end{aligned} \qquad (4.175)$$

En insérant (4.173) et (4.175) dans (4.172) on aura

$$\int_0^t e^{c(s-t)}p(s)ds\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel \alpha_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel \alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)})\exp(-ct)+c'. \qquad (4.176)$$

On a de plus $\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}(0)\parallel=\parallel\nabla\Delta u_0+g'(u_0)\nabla u_0+\nabla\alpha_1\parallel$, donc

$$\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}(0)\parallel^2\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^3(\Omega)}+\parallel \alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)}). \qquad (4.177)$$

En insérant (4.176) dans (4.151) et par (4.177) et (4.131) on aura

$$\int_0^t \exp(-c(t-s))\parallel\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2 ds$$

$$\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^3(\Omega)}+\parallel \alpha_0\parallel^2_{H^2(\Omega)}+\parallel \alpha_1\parallel^2_{H^1_0(\Omega)})\exp(-ct)+c'. \qquad (4.178)$$

En insérant (4.145) et (4.178) dans (4.144) et par (4.141) on déduit

$$\parallel\alpha\parallel^2_{H^3(\Omega)}+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2_{H^2}$$

$$\leq Q(D(u_0)+\parallel u_0\parallel^2_{H^3(\Omega)}+\parallel \alpha_0\parallel^2_{H^3(\Omega)}+\parallel \alpha_1\parallel^2_{H^2(\Omega)})\exp(-ct)+c'. \qquad (4.179)$$

Or $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ injection continue en dimension deux, donc

$$\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_{L^\infty}^2 \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_{H^2(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c'. \tag{4.180}$$

On déduit alors la propriété de séparation comme dans le cas de dimension une, et on aura

$$\begin{aligned} D(u(t))+ \| u \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \alpha \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_W^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_V^2 \\ + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_W^2 \, ds \\ \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_W^2) \exp(-ct) + c', \end{aligned} \tag{4.181}$$

et

$$\| u(t) \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.182}$$

avec $\delta > 0$ dépend de $D(u_0), \| u_0 \|_{H^3(\Omega)}, \| \alpha_0 \|_{H^3(\Omega)}$ et $\| \alpha_1 \|_{H^2(\Omega)}$,

d'où le théorème. □

Ainsi le paramètre d'ordre u est strictement séparé des valeurs singulières de g, et on a le

Théorème 2.3. *(i) En dimension une, on suppose que*

$$D(u_0)+ \| u_0 \|_W^2 + \| \alpha_0 \|_W^2 + \| \alpha_1 \|_V^2 < +\infty, D(u_0) > 0. \tag{4.183}$$

Donc le problème (4.1)-(4.4) possède une unique solution telle que

$$\begin{aligned} D(u(t))+ \| u(t) \|_W^2 + \| \alpha(t) \|_W^2 &+ \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_V^2 \\ + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 &+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_V^2 \, ds \\ \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 &+ \| \alpha_1 \|_{H_0^1(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c'. \end{aligned} \tag{4.184}$$

(ii) En dimension deux, on suppose que

$$D(u_0)+ \| u_0 \|_{H^3}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^3}^2 + \| \alpha_1 \|_W^2 < +\infty, D(u_0) > 0. \tag{4.185}$$

Donc le problème (4.1)-(4.4) possède une unique solution telle que

$$\begin{aligned} D(u(t))+ \| u(t) \|_{H^3}^2 + \| \alpha(t) \|_{H^3}^2 &+ \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_W^2 \\ + \| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|_V^2 &+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_W^2 \, ds \\ \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \alpha_0 \|_{H^3(\Omega)}^2 &+ \| \alpha_1 \|_{H^2(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c'. \end{aligned} \tag{4.186}$$

Démonstration: **Existence.** Pour l'existence d'une solution du problème (4.1)-(4.4), on régularise tout d'abord la fonction g par une fonction g_δ de classe C^1 définie par :

$$g_\delta(s) = \begin{cases} g(-\delta) + g^{'}(-\delta)(s+\delta) \quad , & s \in (-\infty, -\delta[, \\ g(s) \quad , & s \in [-\delta, \delta], \\ g(\delta) + g^{'}(\delta)(s-\delta) \quad , & s \in]\delta, +\infty), \end{cases}$$

où δ est la constante qui apparait ci-dessus. On peut choisir δ suffisement proche de 1, telle que

$$g(\delta) \geq 0 \quad \text{et} \quad g^{'}(\delta) \geq 0.$$

On considère alors le même problème défini par (4.1)-(4.4) avec g_δ à la place de g et u_δ au lieu de u, à savoir

$$(P_\delta) \begin{cases} \dfrac{\partial u_\delta}{\partial t} - \Delta u_\delta + g_\delta(u_\delta) &= \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -\dfrac{\partial u_\delta}{\partial t} - u_\delta, \\ u_\delta = \alpha &= 0, \\ u_\delta(0) = u_0^\delta, \quad \alpha(0) = \alpha_0, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1. \end{cases}$$

On a que g_δ vérifie les conditions vérifiées par g_N donc d'après le chapitre précédent on a l'existence d'une solution régulière $(u_\delta, \alpha_\delta, \dfrac{\partial \alpha_\delta}{\partial t})$ pour le problème (P_δ). De plus, on sait que le problème (P) admet une solution si les fonctions g_δ et G_δ satisfont les mêmes propriétés que g et G (voir [21]). Pour cela on énonce le lemme suivant.

Lemme 2.4. *On pose*

$$G_\delta = \int_0^s g_\delta(\tau) d\tau.$$

Les fonctions g_δ et G_δ possèdent les propriétés suivantes :

$$g_\delta^{'}(s) \geq -2\kappa_0 \quad \text{et} \quad -c_0 \leq G_\delta(s), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

où c_0 et κ_0 sont les constantes positives qui apparaissent dans (4.8) et (4.9) (à condition de prendre δ plus petit si besoin).

Preuve: On considère le cas $s \in]\delta, +\infty)$ (les autres cas se traitent d'une façon similaire), et on a

$$g_\delta(s) = g(\delta) + g^{'}(\delta)(s-\delta).$$

Donc, il est clair que

$$g_\delta^{'}(s) = g^{'}(\delta) \geq -2\kappa_0, \quad \forall s \in]\delta, +\infty).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} G_\delta(s) &= \int_0^s g_\delta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\delta g_\delta(\tau) d\tau + \int_\delta^s g_\delta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\delta g(\tau) d\tau + \int_\delta^s g_\delta(\tau) d\tau \\ &= G(\delta) + \int_\delta^s g_\delta(\tau) d\tau \\ &\geq -c_0 (\text{car} \quad \int_\delta^s g_\delta(\tau) d\tau \geq 0). \end{aligned}$$

□

Donc les estimations établies ci-dessus sont vraies ici. En particulier,

$$\| u_\delta(t) \|_{L^\infty} \leq 1-\delta, \quad \forall t \geq 0,$$

par suite,

$$g_\delta(u_\delta) = g(u_\delta),$$

et u_δ est également solution de (4.1)-(4.4).

On multiplie finalement (4.1) par $\Delta^2 \frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, le caractère auto-adjoint du laplacien donne

$$\| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla \Delta u \|^2 = -((g(u), \Delta^2 \frac{\partial u}{\partial t})) + ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \Delta^2 \frac{\partial u}{\partial t})). \tag{4.187}$$

Or on a

$$\begin{aligned} |((g(u), \Delta^2 \frac{\partial u}{\partial t}))| &\leq \text{(par} \quad (4.112)) \\ &\leq c \| \Delta u \|^2 + \frac{1}{4} \| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2, \end{aligned} \tag{4.188}$$

et

$$|((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \Delta^2 \frac{\partial u}{\partial t}))| \leq c \| \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{4} \| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 . \tag{4.189}$$

Par (4.188) et (4.189), la relation (4.187) donne

$$\| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \frac{d}{dt} \| \nabla \Delta u \|^2 \leq c(\| \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta u \|^2). \tag{4.190}$$

En intégrant (4.190) entre 0 et t, on déduit l'estimation sur u dans $H^3(\Omega)$.

Unicité. Soit $\left(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}\right)$ et $\left(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\right)$ deux solutions du problème (P), avec $\left(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\right)$ et $\left(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\right)$ leurs données initiales respectivement. On pose :

$$\left(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) = \left(u^{(1)} - u^{(2)}, \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\right)$$

et

$$\left(u_0, \alpha_0, \alpha_1\right) = \left(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}, \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}\right).$$

Alors $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u^{(1)}) - g(u^{(2)}) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{4.191}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{4.192}$$

$$u = \alpha = 0, \tag{4.193}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{4.194}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + l(t)u = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{4.195}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{4.196}$$

$$u = \alpha = 0, \tag{4.197}$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{4.198}$$

où $l(t) = \int_0^1 g^{'}(su^{(1)}(t) + (1-s)u^{(2)}(t))ds$. La non linéarité g étant de classe C^1, et les $u^{(i)}$ strictement séparés de $\pm 1, \quad i = 1, 2$, on a

$$\| \, l(t) \, \|_{L^\infty} \leq c, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.199}$$

où la constante c dépend de $\delta_i, \quad i = 1, 2$.

On multiplie (4.195) par u et on intègre sur Ω et par parties, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \, u \, \|^2 + \| \, \nabla u \, \|^2 + ((l(t)u, u)) = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u)). \tag{4.200}$$

On multiplie (4.195) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω et par parties, on obtient

$$\| \, \frac{\partial u}{\partial t} \, \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \, \nabla u \, \|^2 + ((l(t)u, \frac{\partial u}{\partial t})) = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t})). \tag{4.201}$$

Multiplions maintenant (4.196) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et intégrons sur Ω et par parties, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \, \|^2 + \| \, \nabla \alpha \, \|^2] + \| \, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \, \|^2 = -((u, \frac{\partial \alpha}{\partial t})) - ((\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t})). \tag{4.202}$$

On additionne (4.200),(4.201) et (4.202) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\, \| \, u \, \|^2 + \| \, \nabla u \, \|^2 + \| \, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \, \|^2 + \| \, \nabla \alpha \, \|^2 \, \Big] + \| \, \nabla u \, \|^2 + \| \, \frac{\partial u}{\partial t} \, \|^2 + \| \, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \, \|^2 \\ = -((l(t)u, u)) - ((l(t)u, \frac{\partial u}{\partial t})), \end{aligned} \tag{4.203}$$

or on a

$$\begin{aligned} -((l(t)u, u)) &\leq (l(t) \geq -2\kappa_0) \\ &\leq 2\kappa_0 \, \| \, u \, \|^2 \end{aligned} \tag{4.204}$$

et

$$\begin{aligned} \Big| ((l(t)u, \frac{\partial u}{\partial t})) \Big| &\leq (\text{par} \quad (4.199)) \\ &\leq c \, \| \, u \, \|^2 + \frac{1}{2} \, \| \, \frac{\partial u}{\partial t} \, \|^2, \end{aligned} \tag{4.205}$$

où c est une constante qui dépend de $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Par (4.204) et (4.205) la relation (4.203) donne

$$\frac{d}{dt}\Big[\, \| \, u \, \|^2 + \| \, \nabla u \, \|^2 + \| \, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \, \|^2 + \| \, \nabla \alpha \, \|^2 \, \Big]$$

$$+ \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 \leq c \parallel u \parallel^2, \tag{4.206}$$

où c dépend de δ_0. On a en particulier

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2 \Big]$$

$$\leq c(\parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2). \tag{4.207}$$

Le lemme de Gronwall nous donne

$$\parallel u(t) \parallel_V^2 + \parallel \alpha(t) \parallel_V^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \parallel^2 \leq \exp(ct)(\parallel u_0 \parallel_V^2 + \parallel \alpha_0 \parallel_V^2 + \parallel \alpha_1 \parallel^2). \tag{4.208}$$

D'où la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales, de plus pour $u_0^{(1)} = u_0^{(2)}, \quad \alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)} \quad$ et $\quad \alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)}$ on a l'unicité de la solution,

ce qui complète la preuve du théorème. □

2.2 Notations et Dissipativité

D'après le Théorème 2.3 (i), on peut définir le semi-groupe continu $S(t)$ pour le problème (4.1)-(4.4) sur l'espace X, où

$$X = \{(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in E_1, \parallel u \parallel_{L^\infty} < 1\}.$$

En prenant

$$D(u_0) + \parallel u_0 \parallel_W^2 + \parallel \alpha_0 \parallel_W^2 + \parallel \alpha_1 \parallel_V^2 \leq R, \quad R > 0,$$

on obtient que B_R^1 est un ensemble borné absorbant pour $S(t)$, avec

$$B_R^1 = \{(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in E_1, D(u(t)) + \parallel u \parallel_W^2 + \parallel \alpha \parallel_W^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel_V^2 \leq R\},$$

en effet, par (4.184) on a

$$D(u(t)) + \parallel u(t) \parallel_W^2 + \parallel \alpha(t) \parallel_W^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \parallel_V^2 \leq R, \quad \forall t \geq t''. \tag{4.209}$$

En ce qui conçerne la dimension deux, on peut définir de même d'après le Théorème 2.3 (ii) le semi-groupe continu $S(t)$ pour le problème (4.1)-(4.4) sur l'espace X', où

$$X' = \{(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in E_2, \parallel u(t) \parallel_{L^\infty} < 1\}.$$

En prenant

$$D(u_0) + \parallel u_0 \parallel_{H^3}^2 + \parallel \alpha_0 \parallel_{H^3}^2 + \parallel \alpha_1 \parallel_W^2 \leq R,$$

on obtient que B_R^2 est un ensemble borné absorbant pour $S(t)$, avec

$$B_R^2 = \{(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in E_2, D(u(t)) + \parallel u \parallel_{H^3}^2 + \parallel \alpha \parallel_{H^3}^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel_W^2 \leq R\},$$

en effet, par (4.186) on a

$$D(u(t))+ \parallel u(t) \parallel_{H^3}^2 + \parallel \alpha(t) \parallel_{H^3}^2 + \parallel \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t) \parallel_{W}^2 \leq R, \quad \forall t \geq t_9. \tag{4.210}$$

On a ainsi démontré le théorème suivant

Théorème 2.5. *(i) En dimension une, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, est dissipatif sur X. En d'autres termes, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant B_R^1 dans X.*

(ii) En dimension deux, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, est dissipatif sur X'. En d'autres termes, le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant B_R^2 dans X'.

Nous allons maintenant prouver l'existence de l'attracteur global.

On distinguera deux cas, le cas de la dimension une où dans (4.112), δ dépend des données initiales dans E_1, on considère alors la $E_1 - E_2-$régularisation, et le cas de la dimension deux où dans (4.112), δ dépend des données initiales dans E_2, on considère alors la $E_2 - E_3-$régularisation.

3 Existence de l'attracteur global

L'attracteur global est, par définition, le plus petit ensemble (pour l'inclusion) compact de l'espace des phases qui est invariant par le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, et attire tous les ensembles bornés des données initiales lorsque le temps t va à l'infini ; il apparaît ainsi comme un bon objet en vue de la description du comportement asymptotique de notre système dynamique. Pour plus de détails sur le sujet, on peut voir par exemple [30], [20] et [51], mais également les nombreuses références qui y figurent.

On commence à énoncer en dimension une le

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.5 (i), le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, défini de B_R^1 dans lui-même possède l'attracteur global connexe noté $\mathcal{A}_1$.*

Avant de donner la preuve du Théorème 3.1, on donne les remarques suivantes.

Remarque 3.2. *L'absence d'effet régularisant des données initiales due au terme $\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$ va nous amener à décomposer le semi-groupe en une somme de deux familles d'opérateurs, la première famille tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini et la deuxième famille étant asymptotiquement compacte au sens de la mesure de non compacité de Kuratowski.*

En d'autres termes :

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t),$$

où les opérateurs $S_1(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et les opérateurs $S_2(t)$ sont asymptotiquement compacts.

Remarque 3.3. *D'après la section précédente, on sait que le semi-groupe possède un ensemble borné absorbant B^1_R dans X. Pour prouver l'existence de l'attracteur global $\mathcal{A}_1$, il suffit de démontrer que le semi-groupe est asymptotiquement compact au sens de la mesure de non compacité de Kuratowski (voir [20] et [30]).*

Démonstration: En vue de la remarque 3.2, on considère la décomposition suivante :

$$(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) = (v, a, \frac{\partial a}{\partial t}) + (w, b, \frac{\partial b}{\partial t}),$$

où $(v, a, \frac{\partial a}{\partial t})$ est solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{4.211}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \frac{\partial a}{\partial t} - \Delta a = -\frac{\partial v}{\partial t} - v, \tag{4.212}$$

$$v = a = 0, \tag{4.213}$$

$$v(0) = u_0, \qquad a(0) = \alpha_0 \quad , \quad \frac{\partial a}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{4.214}$$

et $(w, b, \frac{\partial b}{\partial t})$ est solution de

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + g(u) = \frac{\partial b}{\partial t}, \tag{4.215}$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + \frac{\partial b}{\partial t} - \Delta b = -\frac{\partial w}{\partial t} - w, \tag{4.216}$$

$$w = b = 0, \tag{4.217}$$

$$w(0) = 0, \qquad b(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial t}(0) = 0, \tag{4.218}$$

avec les données initiales dans le borné absorbant B^1_R. On va maintenant faire un certain nombre d'estimations à priori. On multiplie (4.211) par $-\Delta v$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla v \|^2 + \| \Delta v \|^2 = ((\nabla \frac{\partial a}{\partial t}, \nabla v)). \tag{4.219}$$

On multiplie (4.211) par $-\Delta \frac{\partial v}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\| \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta v \|^2 = ((\nabla \frac{\partial v}{\partial t}, \nabla \frac{\partial a}{\partial t})). \tag{4.220}$$

On multiplie (4.212) par $-\Delta \frac{\partial a}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta a \|^2 = -((\nabla \frac{\partial a}{\partial t}, \nabla \frac{\partial v}{\partial t})) - ((\nabla \frac{\partial a}{\partial t}, \nabla v)). \tag{4.221}$$

On additionne (4.219),(4.220) et (4.221) on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \nabla v \|^2 + \| \Delta v \|^2 + \| \Delta a \|^2 + \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2]$$

$$+ \| \Delta v \|^2 + \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \|^2 = 0. \tag{4.222}$$

On multiplie (4.212) par $-\Delta a$ et on intègre sur Ω, on aura

$$\frac{d}{dt}((\nabla \frac{\partial a}{\partial t}, \nabla a)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla a \|^2 + \| \Delta a \|^2 = -((\nabla \frac{\partial v}{\partial t}, \nabla a)) - ((\nabla a, \nabla v)) + \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2 . \tag{4.223}$$

On additionne (4.222) et ϵ(4.223), où $\epsilon > 0$ est suffisemment petit. On a

$$\frac{1}{2}\frac{dE_7(t)}{dt} + \| \Delta v \|^2 + \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \|^2 + \epsilon \| \Delta a \|^2$$

$$= -\epsilon((\nabla \frac{\partial v}{\partial t}, \nabla a)) - \epsilon((\nabla v, \nabla a)) + \epsilon \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2, \tag{4.224}$$

où

$$E_7(t) = \| \nabla v \|^2 + \| \Delta v \|^2 + \| \Delta a \|^2 + \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2 + \epsilon \| \nabla a \|^2 + 2\epsilon((\nabla \frac{\partial a}{\partial t}, \nabla a)), \tag{4.225}$$

satisfait pour $\epsilon > 0$ pris tel que

$$\epsilon \| \nabla a \|^2 + \| \Delta a \|^2 + \| \nabla \frac{\partial a}{\partial t} \|^2 + 2\epsilon((\nabla \frac{\partial a}{\partial t}, \nabla a)) \geq c(\| a \|_W^2 + \| \frac{\partial a}{\partial t} \|_V^2),$$

et

$$1 - \epsilon > 0,$$

l'estimation :

$$E_7(t) \geq c(\| a \|_W^2 + \| v \|_W^2 + \| \frac{\partial a}{\partial t} \|_V^2). \tag{4.226}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne (en notant que $g \equiv 0$ dans ce cas) une inégalité de la forme

$$\frac{dE_7(t)}{dt} + cE_7(t) + \| \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \|^2 \leq 0, \tag{4.227}$$

en particulier

$$\frac{dE_7(t)}{dt} + cE_7(t) \leq 0, \tag{4.228}$$

le lemme de Gronwall implique alors que

$$E_7(t) \leq \exp(-ct)E_7(0). \tag{4.229}$$

Grâce à (4.226), on écrit

$$\| v(t) \|_W^2 + \| a(t) \|_W^2 + \| \frac{\partial a}{\partial t}(t) \|_V^2 \leq \exp(-ct)(\| u_0 \|_W^2 + \| \alpha_0 \|_W^2 + \| \alpha_1 \|_V^2). \tag{4.230}$$

En posant

$$S_1(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (v(t), a(t), \frac{\partial a}{\partial t}(t)),$$

on voit que les opérateurs $S_1(t)$ tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

On considère maintenant le problème (4.215)-(4.218). On multiplie (4.215) par $\Delta^2 w$, on intègre sur Ω et en utilisant le caractère autoadjoint du laplacien, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \Delta w \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta w \parallel^2 +((\Delta g(u), \Delta w)) = ((\Delta \frac{\partial b}{\partial t}, \Delta w)). \tag{4.231}$$

On multiplie (4.215) par $\Delta^2 \frac{\partial w}{\partial t}$, on intègre sur Ω. On a

$$\parallel \Delta \frac{\partial w}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\Delta w \parallel^2 +((\Delta g(u), \Delta \frac{\partial w}{\partial t})) = ((\Delta \frac{\partial b}{\partial t}, \Delta \frac{\partial w}{\partial t})). \tag{4.232}$$

On multiplie maintenant (4.216) par $\Delta^2 \frac{\partial b}{\partial t}$, on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\parallel \Delta \frac{\partial b}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta b \parallel^2] + \parallel \Delta \frac{\partial b}{\partial t} \parallel^2 = -((\Delta \frac{\partial w}{\partial t}, \Delta \frac{\partial b}{\partial t})) - ((\Delta w, \Delta \frac{\partial b}{\partial t})). \tag{4.233}$$

En sommant (4.231),(4.232) et (4.233), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\parallel \nabla\Delta w \parallel^2 + \parallel \Delta w \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta b \parallel^2 &+ \parallel \Delta \frac{\partial b}{\partial t} \parallel^2] + \parallel \Delta \frac{\partial w}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial b}{\partial t} \parallel^2 \\ + \parallel \nabla\Delta w \parallel^2 &= -((\Delta g(u), \Delta \frac{\partial w}{\partial t})) - ((\Delta g(u), \Delta w)).\end{aligned} \tag{4.234}$$

Or on a

$$\begin{aligned}|((\Delta g(u), \Delta \frac{\partial w}{\partial t}))| &\leq \text{(d'après les inégalités de Hölder et Young)} \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \parallel \Delta g(u) \parallel^2 + \frac{\epsilon}{2} \parallel \Delta \frac{\partial w}{\partial t} \parallel^2\end{aligned} \tag{4.235}$$

et

$$\begin{aligned}|((\Delta g(u), \Delta w))| &\leq \text{(d'après les inégalités de Hölder et Young)} \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \parallel \Delta g(u) \parallel^2 + \frac{\epsilon}{2} \parallel \Delta w \parallel^2 \\ &\leq (H^3(\Omega) \subset H^2(\Omega) \quad \text{injection continue}) \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \parallel \Delta g(u) \parallel^2 + c\epsilon \parallel \nabla\Delta w \parallel^2 .\end{aligned} \tag{4.236}$$

En insérant (4.235) et (4.236) dans (4.234), et en choisissant $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\parallel \nabla\Delta w \parallel^2 + \parallel \Delta w \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta b \parallel^2 &+ \parallel \Delta \frac{\partial b}{\partial t} \parallel^2] \\ +c(\parallel \Delta \frac{\partial w}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial b}{\partial t} \parallel^2 &+ \parallel \nabla\Delta w \parallel^2) \leq c' \parallel \Delta g(u) \parallel^2,\end{aligned} \tag{4.237}$$

avec $c, c' > 0$.

On intègre (4.237) entre 0 et t et par (4.218) on aura

$$\parallel \nabla\Delta w(t) \parallel^2 + \parallel \Delta w(t) \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta b(t) \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial b}{\partial t}(t) \parallel^2 \leq c' \int_0^t \parallel \Delta g(u) \parallel^2 ds. \tag{4.238}$$

Il reste à estimer le terme $\int_0^t \parallel \Delta g(u) \parallel^2 ds$. Or on a

$$\Delta g(u) = g^{''}(u)|\nabla u|^2 + g^{'}(u)\Delta u,$$

donc

$$\begin{array}{lll} \int_0^t \parallel \Delta g(u) \parallel^2 ds & \leq & c\int_0^t(\parallel g^{''}(u)|\nabla u|^2 \parallel^2 + \parallel g^{'}(u)\Delta u \parallel^2)ds \\ & \leq & (\text{par} \quad (4.184)) \\ & \leq & C_{T,\|(u_0,\alpha_0,\alpha_1)\|_{E_1},B_R^1}. \end{array} \tag{4.239}$$

En insérant (4.239) dans (4.238) on déduit

$$\parallel (w(t), b(t), \frac{\partial b}{\partial t}(t)) \parallel_{E_2}^2 \leq C_{T,\|(u_0,\alpha_0,\alpha_1)\|_{E_1},B_R^1}. \tag{4.240}$$

En prenant

$$S_2(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (w(t), b(t), \frac{\partial b}{\partial t}(t)),$$

on a par (4.240) que les opérateurs $S_2(t)$ sont asymptotiquement compacts au sens de la mesure de non compacité de Kuratowski (voir [30]). On conclut l'existence d'un ensemble compact attractif, ce qui termine la preuve du théorème. □

On énoncera dans la suite un théorème d'existence de l'attracteur global en dimension deux, on a le

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.5 (ii), le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, défini de B_R^2 dans lui-même possède l'attracteur global noté $\mathcal{A}_2$.*

Démonstration: On prend ici les données initiales dans B_R^2 où B_R^2 est l'ensemble borné absorbant de $S(t), t \geq 0$, dans $X^{'}$.

On multiplie (4.211) par $\Delta^2 v$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 = ((\Delta\frac{\partial a}{\partial t}, \Delta v)). \tag{4.241}$$

On multiplie (4.211) par $\Delta^2\frac{\partial v}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\parallel \Delta\frac{\partial v}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 = ((\Delta\frac{\partial v}{\partial t}, \Delta\frac{\partial a}{\partial t})). \tag{4.242}$$

On multiplie (4.212) par $\Delta^2\frac{\partial a}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\Delta a \parallel^2 = -((\Delta\frac{\partial a}{\partial t}, \Delta\frac{\partial v}{\partial t})) - ((\Delta\frac{\partial a}{\partial t}, \Delta v)). \tag{4.243}$$

On additionne (4.241),(4.242) et (4.243) on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\parallel \Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta a \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2]$$

$$+ \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial v}{\partial t} \parallel^2 = 0. \tag{4.244}$$

On multiplie (4.212) par $\Delta^2 a$ et on intègre sur Ω, on aura

$$\frac{d}{dt}((\Delta\frac{\partial a}{\partial t}, \Delta a)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \Delta a \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta a \parallel^2 = -((\Delta\frac{\partial v}{\partial t}, \Delta a)) - ((\Delta a, \Delta v)) + \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2 . \tag{4.245}$$

On additionne (4.244) et ϵ(4.245), où $\epsilon > 0$ est suffisemment petit. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{dE_8(t)}{dt} + \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2 &+ \parallel \Delta\frac{\partial v}{\partial t} \parallel^2 + \epsilon \parallel \nabla\Delta a \parallel^2 \\ &= -\epsilon((\Delta\frac{\partial v}{\partial t}, \Delta a)) - \epsilon((\Delta v, \Delta a)) + \epsilon \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2, \end{aligned} \tag{4.246}$$

où

$$E_8(t) = \parallel \Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta a \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2 + \epsilon \parallel \Delta a \parallel^2 + 2\epsilon((\Delta\frac{\partial a}{\partial t}, \Delta a)), \tag{4.247}$$

satisfait pour $\epsilon > 0$ pris tel que

$$\parallel \nabla\Delta a \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2 + \epsilon \parallel \Delta a \parallel^2 + 2\epsilon((\Delta\frac{\partial a}{\partial t}, \Delta a)) \geq c(\parallel a \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel \frac{\partial a}{\partial t} \parallel^2_{H^2(\Omega)}),$$

et

$$1 - \epsilon > 0,$$

l'estimation :

$$E_8(t) \geq c(\parallel a \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel v \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel \frac{\partial v}{\partial t} \parallel^2_{H^2(\Omega)}). \tag{4.248}$$

On déduit alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz une estimation de la forme

$$\frac{dE_8(t)}{dt} + cE_8(t) + \parallel \Delta\frac{\partial v}{\partial t} \parallel^2 \leq 0, \quad c > 0, \tag{4.249}$$

en particulier

$$\frac{dE_8(t)}{dt} + cE_8(t) \leq 0. \tag{4.250}$$

On applique le lemme de Gronwall à (4.250), on aura

$$E_8(t) \leq E_8(0) \exp(-ct),$$

par (4.248) on obtient

$$\begin{aligned} &\parallel v(t) \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel a(t) \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel \frac{\partial a}{\partial t}(t) \parallel^2_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \exp(-ct)(\parallel u_0 \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{4.251}$$

On voit bien que les opérateurs $S_1(t)$ tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

On multiplie (4.215) par $\Delta^3 w$, on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\Delta w \parallel^2 + \parallel \Delta^2 w \parallel^2 - ((g(u), \Delta^3 w)) = -((\Delta\frac{\partial b}{\partial t}, \Delta^2 w)). \tag{4.252}$$

On multiplie (4.215) par $\Delta^3\dfrac{\partial w}{\partial t}$, on intègre sur Ω. On a

$$\| \nabla\Delta\frac{\partial w}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta^2 w \|^2 - ((g(u), \Delta^3\frac{\partial w}{\partial t})) = -((\Delta\frac{\partial b}{\partial t}, \Delta^2\frac{\partial w}{\partial t})). \tag{4.253}$$

On multiplie (4.216) par $\Delta^3\dfrac{\partial b}{\partial t}$, on intègre sur Ω. On aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \nabla\Delta\frac{\partial b}{\partial t} \|^2 + \| \Delta^2 b \|^2] + \| \nabla\Delta\frac{\partial b}{\partial t} \|^2 = ((\Delta\frac{\partial w}{\partial t}, \Delta^2\frac{\partial b}{\partial t})) + ((\Delta w, \Delta^2\frac{\partial b}{\partial t})). \tag{4.254}$$

On additionne (4.252),(4.253) et (4.254) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \nabla\Delta w \|^2 + \| \Delta^2 w \|^2 + \| \Delta^2 b \|^2 &+ \| \nabla\Delta\frac{\partial b}{\partial t} \|^2] \\ + \| \nabla\Delta\frac{\partial w}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\Delta\frac{\partial b}{\partial t} \|^2 &+ \| \Delta^2 w \|^2 \\ = -((\nabla\Delta g(u), \nabla\Delta\frac{\partial w}{\partial t})) &- ((\nabla\Delta g(u), \nabla\Delta w)). \end{aligned} \tag{4.255}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \Big|((\nabla\Delta g(u), \nabla\Delta w))\Big| &\leq \text{(d'après les inégalités de Hölder et Young)} \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \| \nabla\Delta g(u) \|^2 + \frac{\epsilon}{2} \| \nabla\Delta w \|^2 \\ &\leq (H^4(\Omega) \subset H^3(\Omega) \quad \text{injection continue}) \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \| \nabla\Delta g(u) \|^2 + c\epsilon \| \Delta^2 w \|^2 \end{aligned} \tag{4.256}$$

et

$$\begin{aligned} \Big|((\nabla\Delta g(u), \nabla\Delta\frac{\partial w}{\partial t}))\Big| &\leq \text{(Hölder et Young)} \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \| \nabla\Delta g(u) \|^2 + \frac{\epsilon}{2} \| \nabla\Delta\frac{\partial w}{\partial t} \|^2 . \end{aligned} \tag{4.257}$$

En insérant (4.256) et (4.257) dans (4.255) et en choisissant $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\| \nabla\Delta w \|^2 &+ \| \Delta^2 w \|^2 + \| \Delta^2 b \|^2 + \| \nabla\Delta\frac{\partial b}{\partial t} \|^2] \\ +c(\| \nabla\Delta\frac{\partial w}{\partial t} \|^2 &+ \| \nabla\Delta\frac{\partial b}{\partial t} \|^2 + \| \Delta^2 w \|^2) \leq c' \| \nabla\Delta g(u) \|^2, \end{aligned} \tag{4.258}$$

avec $c, c' > 0$.

On intègre (4.258) entre 0 et t et par (4.218) on aura

$$\| \nabla\Delta w(t) \|^2 + \| \Delta^2 w(t) \|^2 + \| \nabla\Delta\frac{\partial b}{\partial t}(t) \|^2 + \| \Delta^2 b(t) \|^2 \leq c' \int_0^t \| \nabla\Delta g(u) \|^2 \, ds, \tag{4.259}$$

mais

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^t \| \nabla\Delta g(u) \|^2 \, ds &\leq c\textstyle\int_0^t (\| g^{(3)}(u)|\nabla u|^3 \|^2 + \| g''(u)\nabla u\Delta u \|^2 + \| g'(u)\nabla\Delta u \|^2) \\ &\leq \text{(par} \quad \text{(4.186))} \\ &\leq C_{T,\|(u_0,\alpha_0,\alpha_1)\|_{E_2},B_R^2}. \end{aligned} \tag{4.260}$$

En inserant (4.260) dans (4.259) on déduit

$$\| (w(t), b(t), \frac{\partial b}{\partial t}(t)) \|_{E_3}^2 \leq C_{T, \|(u_0, \alpha_0, \alpha_1)\|_{E_2}, B_R^2}. \tag{4.261}$$

On conclut l'existence de l'attracteur global en dimension deux. □

4 Dimension de l'attracteur global

Dans cette section, on prouve que l'attracteur global de notre problème est de dimension fractale finie, en établissant l'existence d'attracteurs exponentiels, ce qui nous donnera une borne supérieure de la dimension de l'attracteur global. Pour cela, on montre que le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, associé à notre problème est lipschitz continu et, possède la propriété de régularisation et qu'il vérifie également une condition de Hölder en temps (voir [22], [16] et [20]). La présence du terme $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$, donne une difficulté supplémentaire nous empêchant ainsi l'application des méthodes classiques. Pour surmonter cette difficulté on va décomposer la différence de deux trajectoires du problème en deux parties, la première partie tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini, et la deuxième est une partie compactifiante pour tout t positif (voir [39] et [52]).

On commence par énoncer un théorème qui sera utile dans la suite (voir [30]).

Théorème 4.1. *Soient Υ et Υ_1 deux espaces de Banach tels que Υ_1 s'injecte dans Υ avec injection compacte et $S(t) : Y \longrightarrow Y$ un semi-groupe agissant sur Y (un fermé de Υ). On suppose que :*

(i)

$$\forall x_1, x_2 \in Y, \forall t \geq 0, \quad S(t)x_1 - S(t)x_2 = S_1(t, x_1, x_2) + S_2(t, x_1, x_2)$$

où

$$\| S_1(t, x_1, x_2) \|_{\Upsilon} \leq d(t) \| x_1 - x_2 \|_{\Upsilon},$$

d est continue, $t \geq 0, d(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, et

$$\| S_2(t, x_1, x_2) \|_{\Upsilon_1} \leq h(t) \| x_1 - x_2 \|_{\Upsilon}, \quad t > 0, \quad h \text{ est continue}$$

(ii) L'application $(t, x) \longmapsto S(t)x$ est lipschitz en espace et Hölder en temps sur $[0, T] \times B, \forall T > 0, \forall B \subset Y$ borné.

Alors $S(t)$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$ sur Y.

On traite tout d'abord le cas de la dimension une. Pour cela, on introduit l'ensemble invariant suivant :

$$\mathcal{X}_1 = \overline{\cup_{t \geq t''} S(t) B_R^1},$$

où B_R^1 est l'ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, dans X. On sait d'après le Théorème 2.3 (i) que $\mathcal{X}_1$ est borné dans X. On restreint dans toute la suite le semi-groupe $S(t)$ à $\mathcal{X}_1$.

Théorème 4.2. *Le semigroupe $S(t)$ défini de $\mathcal{X}_1$ dans lui-même satisfait une décomposition analogue à celle donnée dans le Théorème 4.1.*

Démonstration: On considère deux trajectoires pour notre problème (4.1)-(4.4), $\left(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}\right)$ et $\left(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\right)$ avec $\left(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\right)$ et $\left(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\right)$ leurs données initiales respectives appartenant à $\mathcal{X}_1$. On pose :

$$\left(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = \left(u^{(1)} - u^{(2)}, \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \frac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\right)$$

et

$$\left(u_0, \alpha_0, \alpha_1\right) = \left(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}, \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}\right).$$

Par suite $(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t})$ est solution de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + l(t)u &= \frac{\partial\alpha}{\partial t}, && (4.262)\\
\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} - \Delta\alpha &= -\frac{\partial u}{\partial t} - u, && (4.263)\\
u = \alpha &= 0, && (4.264)\\
u(0) = u_0, \qquad \alpha(0) &= \alpha_0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1. && (4.265)
\end{aligned}$$

On considère maintenant la décomposition suivante :

$$(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) = (u_1, \alpha_1, \frac{\partial\alpha_1}{\partial t}) + (u_2, \alpha_2, \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}),$$

où

$$(u_1, \alpha_1, \frac{\partial\alpha_1}{\partial t}) \quad \text{et} \quad (u_2, \alpha_2, \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}),$$

sont solutions de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 &= \frac{\partial\alpha_1}{\partial t}, && (4.266)\\
\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial t} - \Delta\alpha_1 &= -\frac{\partial u_1}{\partial t} - u_1, && (4.267)\\
u_1 = \alpha_1 &= 0, && (4.268)\\
u_1(0) = u_0, \qquad \alpha_1(0) &= \alpha_0, \quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial t}(0) = \alpha_1, && (4.269)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 + l(t)u &= \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}, && (4.270)\\
\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial t} - \Delta\alpha_2 &= -\frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2, && (4.271)\\
u_2 = \alpha_2 &= 0, && (4.272)\\
u_2(0) = 0, \qquad \alpha_2(0) &= 0, \quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}(0) = 0, && (4.273)
\end{aligned}$$

respectivement. Nous allons maintenant établir quelques estimations à priori. Soit le problème (4.266)-(4.269). En répétant les estimations qui ont donné (4.227) on écrit :

$$\frac{dE_9(t)}{dt} + cE_9(t) + \| \nabla \frac{\partial u_1}{\partial t} \|^2 \leq 0, \quad c > 0, \tag{4.274}$$

avec

$$E_9 = 2\epsilon((\nabla \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \nabla \alpha_1)) + \epsilon \| \nabla \alpha_1 \|^2 + \| \nabla u_1 \|^2 + \| \Delta u_1 \|^2 + \| \Delta \alpha_1 \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \|^2,$$

et

$$c^{'}(\| u_1 \|_W^2 + \| \alpha_1 \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \|_V^2) \leq E_9(t) \leq c^{''}(\| u_1 \|_W^2 + \| \alpha_1 \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \|_V^2). \tag{4.275}$$

La relation (4.274) donne en particulier :

$$\frac{dE_9(t)}{dt} + cE_9(t) \leq 0. \tag{4.276}$$

On applique le lemme de Gronwall à (4.276) on obtient

$$E_9(t) \leq \exp(-ct) E_9(0). \tag{4.277}$$

Par suite, grâce à (4.275), on écrit

$$\| (u_1(t), \alpha_1(t), \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(t)) \|_{E_1}^2 \leq d(t) \| (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \|_{E_1}^2, \tag{4.278}$$

où $d(t) = c^{'} \exp(-ct) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et $c > 0$.

On considère cette fois le problème (4.270)-(4.273). On multiplie (4.270) par $\Delta^2 u_2$ et on intègre sur Ω, en utilisant le caractère autoadjoint du laplacien, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta u_2 \|^2 + \| \nabla \Delta u_2 \|^2 + ((\Delta(l(t)u), \Delta u_2)) = ((\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \Delta u_2)). \tag{4.279}$$

On multiplie (4.270) par $\Delta^2 \frac{\partial u_2}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\| \Delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla \Delta u_2 \|^2 + ((\Delta(l(t)u), \Delta \frac{\partial u_2}{\partial t})) = ((\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \Delta \frac{\partial u_2}{\partial t})). \tag{4.280}$$

On multiplie (4.271) par $\Delta^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \Delta \alpha_2 \|^2] + \| \Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2 = -((\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \Delta \frac{\partial u_2}{\partial t})) - ((\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \Delta u_2)). \tag{4.281}$$

En additionnant (4.279),(4.280) et (4.281), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \Delta u_2 \|^2 + \| \nabla \Delta u_2 \|^2 + \| \nabla \Delta \alpha_2 \|^2 \quad + \quad \| \Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2] + \| \nabla \Delta u_2 \|^2 + \| \Delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \|^2 \\ + \| \Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2 = ((\nabla(l(t)u), \nabla \Delta u_2)) \quad - \quad ((\Delta(l(t)u), \Delta \frac{\partial u_2}{\partial t})). \end{aligned} \tag{4.282}$$

Or on a

$$\begin{array}{rcl}\Big|((\nabla(l(t)u),\nabla\Delta u_2))\Big| & \leq & \parallel \nabla(l(t)u) \parallel\parallel \nabla\Delta u_2 \parallel \\ & \leq & \parallel l(t)\nabla u \parallel\parallel \nabla\Delta u_2 \parallel \\ +\parallel u \int_0^1 g''(u^{(1)} & + & s(u^{(2)}-u^{(1)}))(\nabla u^{(1)}+s(\nabla u^{(2)}-\nabla u^{(1)}))ds \parallel\parallel \nabla\Delta u_2 \parallel \\ & \leq & (\text{par} \quad (4.199),(4.182)) \\ & \leq & c(\parallel \nabla u \parallel + \parallel |u||\nabla u^{(1)}| \parallel + \parallel |u||\nabla u^{(2)}| \parallel) \parallel \nabla\Delta u_2 \parallel \\ & \leq & c \parallel u \parallel_{H_0^1(\Omega)} \parallel \nabla\Delta u_2 \parallel \\ & \leq & \dfrac{c}{2\epsilon} \parallel \Delta u \parallel^2 + \dfrac{c\epsilon}{2} \parallel \nabla\Delta u_2 \parallel^2 .\end{array} \tag{4.283}$$

Par (4.131) et l'injection continue $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, on a

$$\parallel l(t) \parallel_{H^2(\Omega)} \leq Q(\parallel (u_0^{(1)},\alpha_0^{(1)},\alpha_1^{(1)}) \parallel_X + \parallel (u_0^{(2)},\alpha_0^{(2)},\alpha_1^{(2)}) \parallel_X) \leq c, \tag{4.284}$$

donc

$$\begin{array}{rcl}\Big|((\Delta(l(t)u),\Delta\dfrac{\partial u_2}{\partial t}))\Big| & \leq & \parallel \Delta(l(t)u) \parallel . \parallel \Delta\dfrac{\partial u_2}{\partial t} \parallel \\ & \leq & \Big(\parallel l(t).\Delta u \parallel + \parallel \Delta l(t).u \parallel + 2 \parallel \nabla u.\nabla l(t) \parallel \Big). \parallel \Delta\dfrac{\partial u_2}{\partial t} \parallel \\ & \leq & (\text{par} \quad (4.199);(4.284)) \\ & \leq & c \parallel \Delta\dfrac{\partial u_2}{\partial t} \parallel (\parallel \Delta u \parallel + \parallel u \parallel + \parallel \nabla u \parallel) \\ & \leq & c \parallel \Delta\dfrac{\partial u_2}{\partial t} \parallel\parallel \Delta u \parallel \\ & \leq & \dfrac{c\epsilon}{2} \parallel \Delta\dfrac{\partial u_2}{\partial t} \parallel^2 + \dfrac{c}{2\epsilon} \parallel \Delta u \parallel^2 .\end{array} \tag{4.285}$$

On choisit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$, par (4.283) et (4.285), on déduit de (4.282) l'estimation suivante

$$\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}[\parallel \Delta u_2 \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u_2 \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\alpha_2 \parallel^2 \quad + \quad \parallel \Delta\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial t} \parallel^2] \\ \qquad\qquad + c(\parallel \nabla\Delta u_2 \parallel^2 + \parallel \Delta\dfrac{\partial u_2}{\partial t} \parallel^2 \quad + \quad \parallel \Delta\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial t} \parallel^2) \leq c' \parallel \Delta u \parallel^2, \quad c > 0.\end{array} \tag{4.286}$$

On intègre (4.286) entre 0 et t et par (4.273) on aura

$$\parallel \Delta u_2(t) \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u_2(t) \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\alpha_2(t) \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}(t) \parallel^2 \leq c' \int_0^t \parallel \Delta u \parallel^2 ds. \tag{4.287}$$

Estimons dans la suite le terme $\int_0^t \parallel \Delta u \parallel^2 ds$. Pour ce faire, on multiplie (4.262) par $-\Delta u$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \Delta u \parallel^2 + ((\nabla(l(t)u),\nabla u)) = ((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t},\nabla u)). \tag{4.288}$$

On multiplie (4.262) par $-\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \Delta u \parallel^2 + ((\nabla(l(t)u),\nabla\frac{\partial u}{\partial t})) = ((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t},\nabla\frac{\partial u}{\partial t})). \tag{4.289}$$

On multiplie maintenant (4.263) par $-\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\Delta\alpha\parallel^2=-((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t},\nabla\frac{\partial u}{\partial t}))-((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t},\nabla u)). \tag{4.290}$$

En additionnant (4.288),(4.289) et (4.290) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\parallel\nabla u\parallel^2+\parallel\Delta u\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2 &+ \parallel\Delta\alpha\parallel^2]+\parallel\Delta u\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2\\ +\parallel\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2 &= -((\nabla(l(t)u),\nabla u))-((\nabla(l(t)u),\nabla\frac{\partial u}{\partial t})).\end{aligned} \tag{4.291}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\Big|((\nabla(l(t)u),\nabla u))\Big| &\leq \parallel\nabla(l(t)u)\parallel\parallel\nabla u\parallel\\ &\leq \parallel l(t)\nabla u\parallel\parallel\nabla u\parallel\\ +\parallel u\int_0^1 g''(u^{(1)} &+ s(u^{(2)}-u^{(1)}))(\nabla u^{(1)}+s(\nabla u^{(2)}-\nabla u^{(1)}))ds\parallel\parallel\nabla u\parallel\\ &\leq (\text{par}\quad(4.199),(4.184))\\ &\leq c(\parallel\nabla u\parallel+\parallel|u||\nabla u^{(1)}|\parallel+\parallel|u||\nabla u^{(2)}|\parallel)\parallel\nabla u\parallel\\ &\leq c\parallel u\parallel^2_{H^1_0(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.292}$$

De même on a

$$\Big|((\nabla(l(t)u),\nabla\frac{\partial u}{\partial t}))\Big|\leq c\parallel u\parallel_{H^1_0(\Omega)}.\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel\leq\frac{c}{2\epsilon}\parallel u\parallel^2_{H^1_0(\Omega)}+\frac{c\epsilon}{2}\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2. \tag{4.293}$$

On choisit $\epsilon>0$ assez petit tel que $2-c\epsilon>0$ et par (4.292) et (4.293) la relation (4.291) donne

$$\frac{dE_{10}(t)}{dt}+c^{'}(\parallel\Delta u\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2)\leq c\parallel u\parallel^2_{H^1_0(\Omega)},\quad c^{'}>0, \tag{4.294}$$

avec

$$E_{10}(t)=\parallel\nabla u\parallel^2+\parallel\Delta u\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2+\parallel\Delta\alpha\parallel^2. \tag{4.295}$$

Par (4.294), on écrit

$$\frac{dE_{10}(t)}{dt}+c^{'}(\parallel\Delta u\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2)\leq cE_{10}(t),\quad c^{'}>0, \tag{4.296}$$

qui donne en particulier

$$\frac{dE_{10}(t)}{dt}\leq cE_{10}(t),$$

le lemme de Gronwall donne

$$E_{10}(t)\leq E_{10}(0)\exp{(ct)},$$

donc

$$\parallel(u,\alpha,\frac{\partial\alpha}{\partial t})\parallel^2_{E_1}\leq c^{'}\exp{(ct)}\parallel(u_0,\alpha_0,\alpha_1)\parallel^2_{E_1}. \tag{4.297}$$

On intègre (4.296) entre 0 et t, par (4.297) on obtient

$$\int_0^t \| \Delta u \|^2 \, ds \leq c^{'} \exp{(ct)} \| (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \|_{E_1}^2 . \tag{4.298}$$

Par (4.298) la relation (4.287) donne

$$\begin{aligned} &\| u_2(t) \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \alpha_2(t) \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}(t) \|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c^{'} \exp{(ct)}(\| u_0 \|_W^2 + \| \alpha_0 \|_W^2 + \| \alpha_1 \|_V^2), \end{aligned} \tag{4.299}$$

avec $h(t) = c^{'} \exp{(ct)}$.

La fonction h est bien continue. On conclut par l'application du Théorème 4.1 que le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, associé à notre problème et défini sur $\mathcal{X}_1$ satisfait la propriété de régularisation. □

Remarque 4.3. *Le caractère Lipschtzien en espace du semi-groupe $S(t)$ est une conséquence de l'unicité donnée dans la preuve du Théorème 2.3.*

Le résultat ci-dessous donne une condition de Hölder en temps du semi-groupe.

Théorème 4.4. *Soit $B \subset X$ un ensemble borné. Le semi-groupe $S(t)$ engendré par les équations (4.1)-(4.4) est Hölder continu sur $[0, T] \times B$.*

Démonstration: Soit deux instants distincts t_1 et t_2. Pour toute donnée initiale $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ appartenant à B, on a alors qu'il existe un $R > 0$ tel que $\| (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \|_E \leq R$. On écrit alors, grâce à (4.88),(4.93) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\| S(t_1)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) - S(t_2)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \|_E \\ &= \| (u(t_1), \alpha(t_1), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_1)) - (u(t_2), \alpha(t_2), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_2)) \|_E \\ &= \| (u(t_1) - u(t_2), \alpha(t_1) - \alpha(t_2), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_1) - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_2)) \|_E \\ &= \| u(t_1) - u(t_2) \|_V + \| \alpha(t_1) - \alpha(t_2) \|_V + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_1) - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_2) \| \\ &= \| \textstyle\int_{t_2}^{t_1} \displaystyle\frac{\partial u}{\partial t}(\tau) d\tau \|_V + \| \int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\tau) d\tau \|_V + \| \int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(\tau) d\tau \| \\ &\leq \textstyle\int_{t_2}^{t_1} \displaystyle\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \|_V \, d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\tau) \|_V \, d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(\tau) \| \, d\tau \\ &\leq c|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} + (\textstyle\int_{t_2}^{t_1} \displaystyle\| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(\tau) \|^2 \, d\tau)^{\frac{1}{2}} |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où c dépend de T. Nous allons maintenant estimer le terme $\int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(\tau) \|^2 \, d\tau$.

Pour cela, on multiplie l'équation (4.2) par $\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$, on intègre sur Ω et par parties. On arrive alors, grâce à l'inégalité de Hölder, à

$$\frac{d}{dt}\{\| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + 2(\alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t})\} + c \| \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} \|^2 \leq c^{'}(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2). \quad (4.300)$$

En intégrant (4.300) entre t_2 et 0 puis entre 0 et t_1, on déduit grâce aux estimations précédentes que

$$\int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}(\tau) \|^2 \, d\tau \leq c, \quad (4.301)$$

où c est une constante positive qui dépend de T et R. Finalement on conclut que

$$\| S(t_1)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) - S(t_2)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \|_E \leq C|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}, \quad (4.302)$$

avec C dépend de T et R, ce qui achève la preuve. □

On a ainsi démontré le

Théorème 4.5. *Le semi-groupe $S(t)$ possède, en dimension une, un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_1$ sur $\mathcal{X}_1$.*

Remarque 4.6. *L'attracteur exponentiel contenant l'attracteur global, on voit que l'attracteur global est aussi de dimension fractale finie. Par conséquent la dynamique du système peut être décrite par un nombre fini de degrés de liberté.*

Pour traiter maintenant le cas de la dimension deux, on introduit l'ensemble invariant suivant :

$$\mathcal{X}_2 = \overline{\cup_{t\geq t_9} S(t)B_R^2},$$

où B_R^2 est l'ensemble borné absorbant pour $S(t), t \geq 0$, dans $X^{'}$. On sait d'après le Théorème 2.3 (ii) que $\mathcal{X}_2$ est borné dans $X^{'}$. On restreint dans toute la suite $S(t)$ à $\mathcal{X}_2$.

Théorème 4.7. *Le semi-groupe $S(t)$ défini de $\mathcal{X}_2$ dans lui-même satisfait une décomposition analogue à celle donnée dans le Théorème 4.1.*

Démonstration: On considère la même décomposition (4.266)-(4.273) mais avec les données initiales appartenant à $\mathcal{X}_2$.

Considérons tout d'abord le problème (4.266)-(4.269). En répétant les estimations qui ont donné (4.249), on écrit

$$\frac{dE_{11}(t)}{dt} + cE_{11}(t) + \| \Delta\frac{\partial u_1}{\partial t} \|^2 \leq 0, \quad c > 0, \quad (4.303)$$

avec

$$E_{11}(t) = 2\epsilon((\Delta\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}, \Delta\alpha_1)) + \epsilon \| \Delta\alpha_1 \|^2 + \| \Delta u_1 \|^2$$
$$+ \| \nabla\Delta u_1 \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha_1 \|^2 + \| \Delta\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} \|^2,$$

et

$$\begin{aligned} c^{'}(\| u_1 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \|^2_W) &\leq E_{11} \\ &\leq c^{''}(\| u_1 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \|^2_W). \end{aligned} \tag{4.304}$$

La relation (4.303) donne en particulier :

$$\frac{dE_{11}(t)}{dt} + cE_{11}(t) \leq 0. \tag{4.305}$$

On applique le lemme de Gronwall à (4.305) on obtient

$$E_{11}(t) \leq \exp(-ct)E_{11}(0). \tag{4.306}$$

Par (4.304) on aura

$$\begin{aligned} &\| u_1(t) \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1(t) \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(t) \|^2_W \\ &\leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_W). \end{aligned} \tag{4.307}$$

On considère maintenant le problème (4.270)-(4.273). On multiplie (4.270) par $\Delta^3 u_2$ et on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla\Delta u_2 \|^2 + \| \Delta^2 u_2 \|^2 -((l(t)u, \Delta^3 u_2)) = -((\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \Delta^3 u_2)). \tag{4.308}$$

On multiplie (4.270) par $\Delta^3 \frac{\partial u_2}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\| \nabla\Delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta^2 u_2 \|^2 -((l(t)u, \Delta^3 \frac{\partial u_2}{\partial t})) = -((\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \Delta^3 \frac{\partial u_2}{\partial t})). \tag{4.309}$$

On multiplie (4.271) par $\Delta^3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \nabla\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2 + \| \Delta^2 \alpha_2 \|^2] + \| \nabla\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2 = ((\Delta^3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t})) + ((\Delta^3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, u_2)). \tag{4.310}$$

En additionnant (4.308),(4.309) et (4.310) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \nabla\Delta u_2 \|^2 + \| \Delta^2 u_2 \|^2 &+ \| \Delta^2 \alpha_2 \|^2 + \| \nabla\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2] + \| \Delta^2 u_2 \|^2 \\ + \| \nabla\Delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\Delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \|^2 &= ((\Delta(l(t)u), \Delta^2 u_2)) - ((\nabla\Delta(l(t)u), \nabla\Delta \frac{\partial u_2}{\partial t})). \end{aligned} \tag{4.311}$$

En répétant exactement le calcul qui a donné (4.285), on écrit

$$\Big|((\Delta(l(t)u), \Delta^2 u_2))\Big| \leq \frac{c\epsilon}{2} \| \Delta^2 u_2 \|^2 + \frac{c}{2\epsilon} \| \Delta u \|^2, \tag{4.312}$$

et par (4.181) et l'injection continue $H^3(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ on a :

$$\| l(t) \|_{H^3(\Omega)} \leq Q(\| (u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}) \|_{X'} + \| (u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}) \|_{X'}) \leq c, \tag{4.313}$$

donc

$$\begin{aligned}
\Big|((\nabla\Delta(l(t)u),\nabla\Delta\frac{\partial u_2}{\partial t}))\Big| &\leq \parallel \nabla\Delta(l(t)u)\parallel\parallel \nabla\Delta\frac{\partial u_2}{\partial t}\parallel\\
&\leq \Big(\parallel l(t)\nabla\Delta u\parallel + \parallel \nabla\Delta l(t)u\parallel\\
&\quad +3\parallel \nabla u\Delta l(t)\parallel +3\parallel \nabla l(t)\Delta u\parallel\Big)\parallel \nabla\Delta\frac{\partial u_2}{\partial t}\parallel\\
&\leq (\text{par}\quad (4.199);(4.313))\\
&\leq c\parallel \nabla\Delta\frac{\partial u_2}{\partial t}\parallel(\parallel \Delta u\parallel + \parallel u\parallel + \parallel \nabla u\parallel + \parallel \nabla\Delta u\parallel)\\
&\leq c\parallel \nabla\Delta\frac{\partial u_2}{\partial t}\parallel\parallel \nabla\Delta u\parallel\\
&\leq \frac{c\epsilon}{2}\parallel \nabla\Delta\frac{\partial u_2}{\partial t}\parallel^2 + \frac{c}{2\epsilon}\parallel \nabla\Delta u\parallel^2 .
\end{aligned}\tag{4.314}$$

On choisit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$ et par (4.312) et (4.314) on déduit de (4.311) l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\parallel \nabla\Delta u_2\parallel^2 + \parallel \Delta^2 u_2\parallel^2 &+ \parallel \Delta^2\alpha_2\parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\parallel^2]\\
+c(\parallel \Delta^2 u_2\parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial u_2}{\partial t}\parallel^2 &+ \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\parallel^2) \leq c^{'}\parallel \nabla\Delta u\parallel^2 .
\end{aligned}\tag{4.315}$$

On intègre (4.315) entre 0 et t et par (4.273) on a

$$\parallel \nabla\Delta u_2(t)\parallel^2 + \parallel \Delta^2 u_2(t)\parallel^2 + \parallel \Delta^2\alpha_2(t)\parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}(t)\parallel^2 \leq c^{'}\int_0^t \parallel \nabla\Delta u\parallel^2 ds. \tag{4.316}$$

Il reste à estimer le terme $\int_0^t \parallel \nabla\Delta u\parallel^2 ds$. Pour cela, on multiplie (4.262) par $\Delta^2 u$ et on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \Delta u\parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u\parallel^2 +((l(t)u,\Delta^2 u)) = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t},\Delta^2 u)). \tag{4.317}$$

On multiplie (4.262) par $\Delta^2\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\parallel \Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla\Delta u\parallel^2 +((l(t)u,\Delta^2\frac{\partial u}{\partial t})) = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t},\Delta^2\frac{\partial u}{\partial t})). \tag{4.318}$$

On multiplie maintenant (4.263) par $\Delta^2\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla\Delta\alpha\parallel^2 = -((\Delta^2\frac{\partial \alpha}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t})) - ((\Delta^2\frac{\partial \alpha}{\partial t},u)). \tag{4.319}$$

En additionnant (4.317),(4.318) et (4.319) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\parallel \Delta u\parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u\parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\alpha\parallel^2] &+ \parallel \nabla\Delta u\parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2\\
+\parallel \Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2 = -((\Delta(l(t)u),\Delta u)) &- ((\Delta(l(t)u),\Delta\frac{\partial u}{\partial t})).
\end{aligned}\tag{4.320}$$

En répétant exactement le calcul de (4.285), on écrit

$$\Big|((\Delta(l(t)u),\Delta u))\Big| \leq c \parallel \Delta u \parallel^2 \tag{4.321}$$

et

$$\Big|((\Delta(l(t)u),\Delta \frac{\partial u}{\partial t}))\Big| \leq \frac{c\epsilon}{2} \parallel \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \frac{c}{2\epsilon} \parallel \Delta u \parallel^2 . \tag{4.322}$$

On choisit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$ et par (4.321) et (4.322) la relation (4.320) donne

$$\frac{dE_{12}(t)}{dt} + c^{'}(\parallel \nabla\Delta u \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2) \leq c \parallel \Delta u \parallel^2, \quad c^{'} > 0, \tag{4.323}$$

avec

$$E_{12}(t) = \parallel \Delta u \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta \alpha \parallel^2 . \tag{4.324}$$

Par (4.323), on écrit

$$\frac{dE_{12}(t)}{dt} + c^{'}(\parallel \nabla\Delta u \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2) \leq cE_{12}(t), \quad c^{'} > 0, \tag{4.325}$$

qui donne en particulier

$$\frac{dE_{12}(t)}{dt} \leq cE_{12}(t). \tag{4.326}$$

On applique le lemme de Gronwall à (4.326) on aura

$$E_{12}(t) \leq E_{12}(0) \exp{(ct)}.$$

Par (4.324) on aura

$$\parallel (u,\alpha,\frac{\partial \alpha}{\partial t}) \parallel^2_{E_2} \leq c^{'} \exp{(ct)} \parallel (u_0,\alpha_0,\alpha_1) \parallel^2_{E_2} . \tag{4.327}$$

On intègre (4.323) entre 0 et t et par (4.327) on obtient

$$\int_0^t \parallel \nabla\Delta u \parallel^2 ds \leq c^{'} \exp{(ct)} \parallel (u_0,\alpha_0,\alpha_1) \parallel^2_{E_2} . \tag{4.328}$$

Par (4.328) la relation (4.316) donne

$$\begin{aligned}\parallel u_2(t) \parallel^2_{H^4(\Omega)} + \parallel \alpha_2(t) \parallel^2_{H^4(\Omega)} \quad &+ \quad \parallel \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}(t) \parallel^2_{H^3(\Omega)} \\ \leq c^{'} \exp{(ct)} \quad &(\quad \parallel u_0 \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^3(\Omega)} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^2(\Omega)}),\end{aligned} \tag{4.329}$$

avec $h(t) = c^{'} \exp{(ct)}$, qui est bien une fonction continue et $S(t)$ défini sur $\mathcal{X}_2$ satisfait la propriété de régularisation. □

Remarque 4.8. *Le caractère Lipschtzien en espace du semi-groupe $S(t)$, en dimension deux, est aussi une conséquence du Théorème 2.3. Pour la condiction de Hölder en temps on imite exactement la démonstration du Théorème 4.4, on obtient que la constante C dans (4.302) dépend de T et $B^{'}$ où $B^{'}$ est un borné de $X^{'}$.*

On a ainsi démontré le

Théorème 4.9. *Le semi-groupe $S(t)$ possède, en dimension deux, un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_2$ sur $\mathcal{X}_2$.*

Chapitre 5

Problème de champ de phase de type Caginalp avec un potentiel polynomial

Ce chapitre est consacré à l'étude du modèle de champ de phase avec un terme polynôme considéré dans le chapitre 3, cette fois associé aux conditions aux limites de type Neumann homogènes (voir [55]). Nous sommes donc concernés par le problème aux limites suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g_N(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0, \tag{5.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{5.4}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2 \quad \text{ou} \quad 3$, est un domaine borné, régulier. Ici u et α représentent comme dans le chapitre 3, le paramètre d'ordre et la variable de déplacement thérmique, respectivement.

Dans le cadre de notre problème, on considère les espaces suivants :

$$F = H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad F_1 = H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega).$$

Notons que

$$\varphi \longmapsto (\| \overline{\varphi} \|^2 + <\varphi>^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi \longmapsto (\| \nabla\varphi \|^2 + <\varphi>^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\varphi \longmapsto (\| \Delta\varphi \|^2 + <\varphi>^2)^{\frac{1}{2}},$$

sont des normes dans $L^2(\Omega), H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ respectivement, qui sont équivalentes aux normes usuelles, avec $<\varphi>$ est la moyenne spatiale de φ donnée par

$$<\varphi> = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varphi dx,$$

et $\overline{\varphi} = \varphi - < \varphi >$.

De plus on pose $H_N^{-1}(\Omega) := [H^1(\Omega)]'$, muni de la norme

$$\| \phi \|^2_{H_N^{-1}(\Omega)} = \| (-\Delta)_N^{-1/2} \overline{\phi} \|^2 + < \phi >^2,$$

où $(-\Delta)_N^{-1} : L_0^2(\Omega) \to L_0^2(\Omega)$ est l'inverse du Laplacien avec conditions aux bords Neumann, défini sur l'espace des fonctions à moyenne nulle.

Le polynôme g_N est défini comme suit :

$$g_N(s) = -2\kappa_0 s + 2\kappa_1 \sum_{k=0}^{N} \frac{s^{2k+1}}{2k+1}, \tag{5.5}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $0 < \kappa_1 < \kappa_0$. On a alors

$$g_N'(s) = 2(\kappa_1 - \kappa_0) + 2\kappa_1 \sum_{k=1}^{N} s^{2k}. \tag{5.6}$$

De plus, g_N vérifie

$$g_N(0) = 0, \quad g_N \in C^1, \tag{5.7}$$
$$-c_0 \leq G_N(s), \quad G_N(s) + cs^2 \leq g_N(s)s + c', \quad c_0 \geq 0, \quad c > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$
$$g_N'(s) \geq -c_1, \quad c_1 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{5.9}$$

où $G_N(s) = \int_0^s g_N(\tau)d\tau, \quad s \in \mathbb{R}$.

On notera dans la suite c, c' et c'' des constantes positives qui pourront varier d'une ligne à l'autre et quelques fois dans la même ligne.

1 Caractère bien posé du problème.

On commence par énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in F$ *et* $\int_\Omega G_N(u_0)dx < +\infty$. *Alors le problème (5.1)-(5.4) admet au moins une solution* $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ *avec* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega \times (0, T)), \int_\Omega G_N(u)dx < +\infty, \overline{\alpha} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)), \alpha \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ *et* $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0$.

Démonstration: La preuve s'appuie de nouveau sur la méthode de Galerkin. L'opérateur $-\Delta$ avec les conditions aux bords de Neumann homogènes a une suite de valeurs propres $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$ et soit $w_j, j = 1, 2, ..., k, ...$, les vecteurs propres associés qui forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on cherche une solution approchée (u_m, α_m, β_m) de la forme (avec $\beta_m = \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}$) :

$$u_m = \sum_{j=1}^m u_{jm} w_j, \quad \alpha_m = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j \quad \text{et} \quad \beta_m = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_j,$$

vérifiant, en notons que les fonctions $w_i, i = 1, ..., m$, sont très régulières,

$$
\begin{aligned}
((\frac{\partial u_m}{\partial t}, w_i)) + ((\nabla u_m, \nabla w_i)) + ((g_N(u_m), w_i)) &= ((\beta_m, w_i)), && (5.10)\\
((\frac{\partial \beta_m}{\partial t}, w_i)) + ((\beta_m, w_i)) + ((\nabla \alpha_m, \nabla w_i)) &= -((\frac{\partial u_m}{\partial t}, w_i)) - ((u_m, w_i)), && (5.11)
\end{aligned}
$$

pour $i = 1, ..., m$, et

$$
\begin{array}{llll}
u_m(0) = u_{0m} \to u_0 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) & \text{lorsque} & m \to +\infty, \\
\alpha_m(0) = \alpha_{0m} \to \alpha_0 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) & \text{lorsque} & m \to +\infty, \\
\beta_m(0) = \alpha_{1m} \to \alpha_1 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) & \text{lorsque} & m \to +\infty.
\end{array} \tag{5.12}
$$

On s'est ramené à la résolution d'un système de $3m$ équations différentielles ordinaires pour lequel on sait prouver l'existence d'une solution locale en temps (u_m, α_m, β_m) sur $(0, T_m)$, pour un $T_m > 0$. On verra, grâce aux estimations à priori, qu'en réalité $T_m = T$, c'est-à-dire que (u_m, α_m, β_m) est une solution globale en temps.

On multiplie (5.10) par $u_{im} + \dfrac{\partial u_{im}}{\partial t}$ et on somme sur $i = 1, ..., m$. On obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| u_m \|^2 + \| \nabla u_m \|^2 + 2\int_\Omega G_N(u_m)dx) \\
&+ \| \nabla u_m \|^2 + \int_\Omega g_N(u_m)u_m dx + \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2 = ((u_m + \frac{\partial u_m}{\partial t}, \beta_m)).
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

On multiplie (5.11) par β_{im} et on somme sur $i = 1, ..., m$. On a

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \beta_m \|^2 + \| \nabla \alpha_m \|^2) + \| \beta_m \|^2 = -((u_m + \frac{\partial u_m}{\partial t}, \beta_m)). \tag{5.14}
$$

En additionnant (5.13) et (5.14) et par (5.8), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\| u_m \|^2 + \| \nabla u_m \|^2 + 2\int_\Omega G_N(u_m)dx + \| \beta_m \|^2 + \| \nabla \alpha_m \|^2) \\
&+c(\| u_m \|^2 + \| \nabla u_m \|^2 + 2\int_\Omega G_N(u_m)dx + \| \beta_m \|^2 + \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2) \leq c', \quad c > 0.
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

En prenant $i = 0$ dans (5.11) et en notant que w_0 est constante, on obtient

$$
\int_\Omega (\frac{\partial H_m}{\partial t} + H_m)dx = 0, \tag{5.16}
$$

où $H_m = u_m + \beta_m$.

On multiplie (5.16) par $\dfrac{1}{|\Omega|}$. On a

$$
\frac{d < H_m >}{dt} + < H_m >= 0. \tag{5.17}
$$

On multiplie (5.17) par e^t, on a

$$
\frac{d}{dt}[e^t < H_m >] = 0, \tag{5.18}
$$

on intègre (5.18) entre 0 et t, on a

$$< H_m(t) >= e^{-t} < H_m(0) >, \tag{5.19}$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} H_m(t) = 0. \tag{5.20}$$

De plus, si $< H_m(0) >= 0$, c'est-à-dire $< u_{0m} + \alpha_{1m} >= 0$, on a conservation de l'enthalpie

$$< H_m(t) >= 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.21}$$

Considérons maintenant l'équation approchée de (5.2), on écrit

$$\frac{\partial \beta_m}{\partial t} + \beta_m - \Delta\alpha_m = -\frac{\partial u_m}{\partial t} - u_m,$$

donc on déduit

$$\frac{\partial H_m}{\partial t} + H_m - \Delta\alpha_m = 0, \tag{5.22}$$

on a alors

$$\frac{\partial \overline{H_m}}{\partial t} + \overline{H_m} - \Delta\overline{\alpha_m} = 0. \tag{5.23}$$

On multiplie (5.23) par $\overline{\beta_m}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\overline{\alpha_m} \|^2) + \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 = -((\overline{u_m} + \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial t}, \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t})). \tag{5.24}$$

L'inégalité de Young permet d'écrire

$$|((\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial t}, \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t}))| \leq c \| \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{4} \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 \tag{5.25}$$

et

$$|((\overline{u_m}, \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t}))| \leq c \| \overline{u_m} \|^2 + \frac{1}{4} \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 . \tag{5.26}$$

En injectant (5.25) et (5.26) dans (5.24), on a

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla\alpha_m \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2) + \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 \leq c(\| \overline{u_m} \|^2 + \| \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial t} \|^2), \tag{5.27}$$

or on a

$$\| \overline{\varphi} \|^2 = \| \varphi \|^2 - |\Omega| < \varphi >^2, \tag{5.28}$$

par (5.28) on déduit de (5.27) l'estimation suivante

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla\alpha_m \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2) + \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 \leq c(\| u_m \|^2 + \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2). \tag{5.29}$$

On multiplie aussi (5.23) par $\overline{\alpha_m}$ et on intègre sur Ω. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \overline{\alpha_m} \|^2 + 2((\frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t}, \overline{\alpha_m}))) + \| \nabla\alpha_m \|^2 = -((\overline{u_m}, \overline{\alpha_m})) - ((\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial t}, \overline{\alpha_m})) + \| \frac{\partial \overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 . \tag{5.30}$$

Par le lemme de Poincarré (cf. chapitre 2 le Théorème 3.10), il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que

$$\| \overline{\varphi} \| \leq C(\Omega) \| \nabla\varphi \|, \quad \varphi \in H^1(\Omega). \tag{5.31}$$

De plus, par les inégalités de Hölder et Young, on a

$$\begin{array}{rcl} |((\overline{u_m}, \overline{\alpha_m}))| & \leq & (\text{par} \quad (5.28) \quad \text{et} \quad (5.31)) \\ & \leq & c \| u_m \| . \| \nabla\alpha_m \| \\ & \leq & \dfrac{c}{2\epsilon} \| u_m \|^2 + \dfrac{c\epsilon}{2} \| \nabla\alpha_m \|^2, \end{array} \tag{5.32}$$

et de même

$$|((\frac{\partial\overline{u_m}}{\partial t}, \overline{\alpha_m}))| \leq \frac{c}{2\epsilon} \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2 + \frac{c\epsilon}{2} \| \nabla\alpha_m \|^2 . \tag{5.33}$$

En insérant (5.32) et (5.33) dans (5.30) et en prenant $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $1 - c\epsilon > 0$, on en déduit

$$\frac{d}{dt}(\| \overline{\alpha_m} \|^2 + 2((\frac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t}, \overline{\alpha_m}))) + \| \nabla\alpha_m \|^2 \leq c(\| u_m \|^2 + \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2). \tag{5.34}$$

On somme ensuite (5.29) et δ_1(5.34), on obtient

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}(\| \nabla\alpha_m \|^2 + \| \dfrac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 & + & \delta_1 \| \overline{\alpha_m} \|^2 + 2\delta_1((\dfrac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t}, \overline{\alpha_m}))) \\ +c(\| \dfrac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha_m \|^2) & \leq & c'(\| u_m \|^2 + \| \dfrac{\partial u_m}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \end{array} \tag{5.35}$$

où $\delta_1 > 0$ assez petit tel qu'en particulier on a

$$\| \frac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 + \delta_1 \| \overline{\alpha_m} \|^2 + 2\delta_1((\frac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t}, \overline{\alpha_m})) \geq c(\| \overline{\alpha_m} \|^2 + \| \frac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \tag{5.36}$$

on somme ensuite (5.15) et δ_2(5.35) où $\delta_2 > 0$ assez petit pour avoir

$$\frac{dE_{1m}}{dt} + c(E_{1m} + \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2) \leq c', \quad c > 0, \tag{5.37}$$

où

$$\begin{array}{rl} E_{1m} = \| u_m \|^2 + \| \nabla u_m \|^2 & + \quad 2\int_\Omega G_N(u_m)dx + \| \nabla\alpha_m \|^2 + \| \dfrac{\partial\alpha_m}{\partial t} \|^2 \\ +\delta_2\Big(\| \nabla\alpha_m \|^2 & + \quad \| \dfrac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t} \|^2 + \delta_1 \| \overline{\alpha_m} \|^2 + 2\delta_1((\dfrac{\partial\overline{\alpha_m}}{\partial t}, \overline{\alpha_m}))\Big). \end{array} \tag{5.38}$$

On multiplie (5.10) par $\lambda_{im}u_{im}$ et on somme sur $i = 1, ..., m$. Par (5.9), on a

$$\frac{d}{dt} \| \nabla u_m \|^2 + \| \Delta u_m \|^2 \leq c(\| \nabla u_m \|^2 + \| \frac{\partial\alpha_m}{\partial t} \|^2). \tag{5.39}$$

On somme (5.37) et δ_3(5.39) où $\delta_3 > 0$ assez petit on obtient finalement

$$\frac{dE_{2m}}{dt} + c(E_{2m} + \| \Delta u_m \|^2 + \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|^2) \leq c', \quad c > 0, \tag{5.40}$$

où

$$E_{2m} = E_{1m} + \delta_3 \parallel \nabla u_m \parallel^2, \tag{5.41}$$

satisfait

$$\begin{aligned} c(\parallel u_m \parallel^2_{H^1(\Omega)} + \textstyle\int_\Omega G_N(u_m)dx + \parallel \overline{\alpha_m} \parallel^2_{H^1(\Omega)} \quad + \quad \parallel \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial t} \parallel^2) - c^{'} \leq E_{2m} \\ \leq c^{''}(\parallel u_m \parallel^2_{H^1(\Omega)} + \textstyle\int_\Omega G_N(u_m)dx + \parallel \overline{\alpha_m} \parallel^2_{H^1(\Omega)} \quad + \quad \parallel \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial t} \parallel^2) + c^{'''}, \end{aligned} \tag{5.42}$$

avec $c, c^{''} > 0, c^{'}, c^{'''} \geq 0$. Le lemme de Gronwall appliqué à (5.40) donne

$$E_{2m}(t) \leq E_{2m}(0) \exp(-ct) + c^{'}, \quad c > 0, \tag{5.43}$$

où c et $c^{'}$ sont deux constantes indépendantes des données initiales.

Par (5.42) la relation (5.43) donne en particulier

$$\parallel u_m(t) \parallel^2 \leq E_{2m}(0) \exp(-ct) + c^{'}, \quad c > 0, \tag{5.44}$$

donc

$$< u_m >^2 \leq E_{2m}(0) \exp(-ct) + c^{'}, \quad c > 0. \tag{5.45}$$

De plus (5.19) peut s'ecrire sous la forme

$$\frac{d < \alpha_m >}{dt}(t) = \exp(-t) < H_m(0) > - < u_m(t) >, \tag{5.46}$$

en effet, on a

$$< H_m(t) > - < u_m(t) >= \exp(-t) < H_m(0) > - < u_m(t) >,$$

donc

$$< \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t) >= \exp(-t) < H_m(0) > - < u_m(t) >,$$

d'où (5.46).

On intègre (5.46) entre 0 et t, on a

$$< \alpha_m(t) >=< \alpha_{0m} > + < H_m(0) > (1 - \exp(-t)) - \int_0^t < u_m(s) > ds, \tag{5.47}$$

donc par (5.21),(5.45) et l'inégalité de Hölder on déduit de (5.47) :

$$< \alpha_m(t) >^2 \leq c(E_{2m}(0) + \parallel \alpha_{0m} \parallel^2) + c^{'} t^2. \tag{5.48}$$

Ici les constantes c et $c^{'}$ sont indépendantes des données initiales, mais la relation (5.48) ne donne pas que α_m est dissipative mais $\overline{\alpha_m}$ est dissipative.

En intégrant l'estimation (5.40) entre 0 et T, on obtient que les normes

$$\parallel (u_m, \alpha_m, \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}) \parallel_{L^\infty(0,T,F)}, \parallel u_m \parallel_{L^2(0,T,W)} \quad \text{et} \quad \parallel \frac{\partial u_m}{\partial t} \parallel_{L^2(0,T,H)}$$

sont bornées indépendemment de m.

De plus, en utilisant la norme équivalente à la norme usuelle dans $H^1(\Omega)$, et par (5.48) on a $\| \overline{\alpha_m} \|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))}$, est bornée independemment de m. On peut donc extraire une sous-suite que l'on renomme $(u_m, \alpha_m, \frac{\partial \alpha_m}{\partial t})$ telle que $(u_m, \alpha_m, \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ faiblement étoile dans $L^\infty(0,T,F)$ et $(u_m, \frac{\partial u_m}{\partial t}) \rightharpoonup (u, \frac{\partial u}{\partial t})$ faiblement dans $L^2(0,T,H^2(\Omega)\times L^2(\Omega))$. D'autre part on peut aussi extraire une sous suite renommée $\overline{\alpha_m}$, telle que $\overline{\alpha_m} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\alpha}$ dans $L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$. Nous allons maintenant traiter le terme non linéaire $g_N(u_m)$. On a que $\| g_N(u_m) \|_{L^2(Q)}$ est bornée indépendemment de m donc pour une suite extraite, on a

$$g_N(u_m) \rightharpoonup \chi \quad \text{dans} \quad L^2(Q).$$

Par passage à la limite dans (5.10)-(5.12), on a

$$\frac{d}{dt}((u,w)) + ((\nabla u, \nabla w)) + ((\chi, w)) = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, w)), \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad (5.49)$$

$$\frac{d}{dt}((\beta, v)) + ((\beta, v)) + ((\nabla \alpha, \nabla v)) = -((\frac{\partial u}{\partial t}, v)) - ((u,v)), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.50)$$

D'après le Théorème de Lions, on a u et α appartiennent à $C([0,T],H)$ donc $u(0)$ et $\alpha(0)$ ont un sens et $u(0) = u_0$ et $\alpha(0) = \alpha_0$. De plus d'après le théorème de Strauss on a $\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \in C_W([0,T],H)$ donc pour une sous-suite extraite on a $\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(0) \rightharpoonup \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0)$, par (5.12) on déduit $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1$. Il reste à vérifier que $\chi = g_N(u)$. On sait que $u_m \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(Q)$. L'injection $H^1(Q) \subset L^2(Q)$ étant compacte, on a alors que $u_m \to u$ fort dans $L^2(Q)$, d'où

$$g_N(u_m) \to g_N(u) \quad \text{p.p. dans} \quad Q,$$

et $g_N(u_m)$ est bornée, par conséquent,

$$g_N(u_m) \to g_N(u) \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{pour une suite extraite.}$$

□

En ce qui concerne l'unicité de solutions, on a le

Théorème 1.2. *Sous les conditions du Théorème 1.1, le problème (5.1)-(5.4) a une solution unique, avec la régularité ci-dessus.*

Démonstration: On suppose l'existence de deux solutions $(u^{(1)}, \alpha^{(1)})$ et $(u^{(2)}, \alpha^{(2)})$ du problème (5.1)-(5.4) avec les mêmes conditions initiales et même moyenne, on pose

$$(u, \alpha) = (u^{(1)}, \alpha^{(1)}) - (u^{(2)}, \alpha^{(2)}).$$

Alors (u,α) vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+g_N(u^{(1)})-g_N(u^{(2)})=\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{5.51}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}+\frac{\partial \alpha}{\partial t}-\Delta\alpha=-u-\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}=0, \tag{5.53}$$

$$u(0)=\alpha(0)=\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0)=0. \tag{5.54}$$

On multiplie (5.51) par u et on intègre sur Ω, par (5.9) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel u\parallel^2+\parallel \nabla u\parallel^2\leq c_1\parallel u\parallel^2+((\frac{\partial\alpha}{\partial t},u)),$$

en utilisant l'inégalité $|((v,w))|\leq c\parallel v\parallel_{H^1(\Omega)}.\parallel w\parallel_{H_N^{-1}(\Omega)}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\parallel u\parallel^2+\parallel \nabla u\parallel^2\leq c(\parallel u\parallel^2+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)}). \tag{5.55}$$

On intègre (5.52) entre 0 et t, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha-\Delta\int_0^t\alpha(s)ds=-\int_0^t u(s)ds-u. \tag{5.56}$$

On multiplie (5.56) par $(-\Delta)_N^{-1}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω on aura

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel\alpha\parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)}+2((\alpha,\int_0^t\alpha ds))\Big]+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)}$$

$$\leq c_T(\parallel\alpha\parallel^2+\parallel u\parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}+\parallel u\parallel^2),\quad t\in[0,T]. \tag{5.57}$$

On multiplie (5.56) par α et on intègre sur Ω on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\nabla\int_0^t\alpha ds\parallel^2\Big]+\parallel\alpha\parallel^2\leq c_T(\parallel u\parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}+\parallel u\parallel^2),\quad t\in[0,T]. \tag{5.58}$$

On additionne (5.58) et δ(5.57) avec $\delta>0$ assez petit on aura :

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\nabla\int_0^t\alpha ds\parallel^2+\delta\parallel\alpha\parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)}+2\delta((\alpha,\int_0^t\alpha ds))\Big]$$

$$+c(\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)}+\parallel\alpha\parallel^2)\leq c_T(\parallel u\parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}+\parallel u\parallel^2),\quad c>0,\quad t\in[0,T]. \tag{5.59}$$

En particulier

$$\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\nabla\int_0^t\alpha ds\parallel^2+2\delta((\alpha,\int_0^t\alpha ds))\geq c(\parallel\alpha\parallel^2+\parallel\nabla\int_0^t\alpha ds\parallel^2),\quad c>0. \tag{5.60}$$

On additionne (5.59) et $\delta^{'}$(5.55) avec $\delta^{'} > 0$ assez petit, on a

$$\frac{dE_3}{dt} \leq c_T(E_3 + \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}), \quad t \in [0,T], \tag{5.61}$$

avec

$$E_3(t) = \parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha ds \parallel^2 + \delta \parallel \alpha \parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)} + 2\delta((\alpha, \int_0^t \alpha ds)) + \delta^{'} \parallel u \parallel^2 . \tag{5.62}$$

On applique le lemme de Gronwall à (5.61), on a

$$E_3(t) \leq \exp(c_T t)E_3(0) + c_T^{'} \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))},$$

or $E_3(0) = 0$ donc $E_3(t) \leq c_T^{'} \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \quad t \in [0,T]$,

en particulier

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq c_T^{'} \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \quad t \in [0,T]. \tag{5.63}$$

On applique de nouveau le lemme de Gronwall à (5.63) on aura

$$\parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{5.64}$$

par conséquent

$$E_3(t) \leq 0, \quad t \in [0,T]. \tag{5.65}$$

Par (5.60),(5.62) et (5.65) on a $\parallel u \parallel^2 = \parallel \alpha \parallel^2 = 0$, d'où

$$u^{(1)} = u^{(2)} \quad \text{et} \quad \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}.$$

□

On pose $Z = \{\varphi \in H^1(\Omega), \int_\Omega G_N(\varphi)dx < +\infty\}$ et $\Phi = Z \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Donc les théorèmes 1.1 et 1.2 nous amènent à considérer un semi-groupe $S(t)$ pour tout $t \geq 0$, qui est définie sur Φ de la façon suivante

$$S(t) : \Phi \to \Phi, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \tag{5.66}$$

où $(u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (5.1)-(5.4).

Pour plus de régularité sur la solution, on a le résultat qui suit

Théorème 1.3. *On suppose de plus que* $\Delta u_0 - g_N(u_0) \in L^2(\Omega), \alpha_0 \in H^2(\Omega)$ *et* $\alpha_1 \in H^1(\Omega)$. *Donc la solution donnée par le Théorème 1.2 satisfait aussi* $u \in L^\infty(0,T,H^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega)), \alpha \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \overline{\alpha} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega))$ *et* $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)), \quad \forall T > 0.$

Démonstration: L'existence et l'unicité étant vérifiées, il reste à établir la régularité. Notons qu'on procède formellement et les calculs ci-dessous peuvent être justifiés par un schéma de Faedo-Galerkin.

On différencie (5.1) par rapport au temps, et par (5.2) on aura

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta\frac{\partial u}{\partial t} + g_N'(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} - u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5.67}$$

On multiplie (5.67) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, par (5.9) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2$$

$$\leq c_1 \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 -((\nabla\alpha, \nabla\frac{\partial u}{\partial t})) - ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t})) - ((u, \frac{\partial u}{\partial t}))- \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2,$$

en utilisant les inégalités de Young et Hölder on obtient

$$\frac{d}{dt} \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 \leq c(\parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\alpha \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel u \parallel^2) \tag{5.68}$$

(notons qu'on a $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = \Delta u_0 - g_N(u_0) + \alpha_1$),

donc on déduit une estimation sur $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ et dans $L^2(0, T, H^1(\Omega))$.

On multiplie ensuite (5.2) par $-\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta\alpha \parallel^2) + \parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 = -((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla\frac{\partial u}{\partial t})) - ((\nabla u, \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t})). \tag{5.69}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Young, on a

$$|((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla\frac{\partial u}{\partial t}))| \leq c \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \frac{1}{4} \parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2, \tag{5.70}$$

et

$$|((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla u))| \leq c \parallel \nabla u \parallel^2 + \frac{1}{4} \parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2, \tag{5.71}$$

En injectant (5.70) et (5.71) dans (5.69) on obtient

$$\frac{d}{dt}(\parallel \Delta\alpha \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2) + \parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 \leq c(\parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2). \tag{5.72}$$

On multiplie finalement (5.2) par $-\Delta\alpha$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\parallel \nabla\alpha \parallel^2 + 2((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))) + \parallel \Delta\alpha \parallel^2 = ((u, \Delta\alpha)) + ((\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta\alpha)) + \parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2,$$

qui donne, de même,

$$\frac{d}{dt}(\parallel \nabla\alpha \parallel^2 + 2((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))) + \parallel \Delta\alpha \parallel^2 \leq c(\parallel u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2). \tag{5.73}$$

On somme (5.69) et δ_4(5.73) où $\delta_4 > 0$ assez petit de telle sorte qu'on obtient en particulier :

$$\| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \delta_4[\| \nabla\alpha \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))] \geq c(\| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2), \quad c > 0, \tag{5.74}$$

on obtient alors :

$$\frac{dE_4}{dt} + c(\| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta\alpha \|^2) \leq c^{'}(\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1(\Omega)}), \quad c > 0, \tag{5.75}$$

où

$$E_4 = \| \Delta\alpha \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \delta_4(\| \nabla\alpha \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))). \tag{5.76}$$

On somme ensuite (5.68) et δ_5(5.75) où $\delta_5 > 0$ assez petit pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\frac{dE_5}{dt} + c(\| \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta\alpha \|^2) \\ &\leq c^{'}(\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2 + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2), \end{aligned} \tag{5.77}$$

où

$$E_5 = \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \delta_5 E_4. \tag{5.78}$$

On multiplie (5.1) par $u + \frac{\partial u}{\partial t}$, (5.2) par $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, en intégrant sur Ω et en sommant les deux équations résultantes, par (5.8) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\| u \|^2 + \| \nabla u \|^2 \quad &+ \quad 2\int_\Omega G_N(u)dx + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2) \\ +c(\| u \|^2 + \| \nabla u \|^2 + 2\int_\Omega G_N(u)dx \quad &+ \quad \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c^{'}, \quad c > 0. \end{aligned} \tag{5.79}$$

On réécrit (5.2) sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H - \Delta\alpha = 0, \tag{5.80}$$

Où

$$H = u + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

On intègre (5.80) sur Ω. On obtient

$$\frac{d < H >}{dt} + < H >= 0. \tag{5.81}$$

En particulier, on déduit de (5.81) que

$$< H(t) >= \exp{(-t)} < H(0) >, \tag{5.82}$$

donc

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} H(t) = 0. \tag{5.83}$$

De plus, si $< H(0) >= 0$ c'est-à-dire $< u_0 + \alpha_1 >= 0$, on a conservation de l'enthalpie,

$$< H(t) >= 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.84}$$

On a alors

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \overline{H} - \Delta \overline{\alpha} = 0. \tag{5.85}$$

On multiplie (5.85) par $\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}(\| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2) + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 \leq c(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2). \tag{5.86}$$

On multiplie (5.85) par $\overline{\alpha}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}(\| \overline{\alpha} \|^2 + 2((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha}))) + \| \nabla \alpha \|^2 \leq c(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2). \tag{5.87}$$

On multiplie (5.87) par ϵ_1 et on additionne le résultat avec (5.86) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 &+ \epsilon_1 \| \overline{\alpha} \|^2 + 2\epsilon_1((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha}))) + c(\| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2) \\ &\leq c^{'}(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \end{aligned} \tag{5.88}$$

où $\epsilon_1 > 0$ assez petit de telle façon qu'on obtient en particulier

$$\| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 + \epsilon_1 \| \overline{\alpha} \|^2 + 2\epsilon_1((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha})) \geq c(\| \overline{\alpha} \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2), \quad c > 0. \tag{5.89}$$

On multiplie ensuite (5.88) par ϵ_2 et on additionne le resultat avec (5.79) où $\epsilon_2 > 0$ assez petit pour obtenir

$$\frac{dE_1}{dt} + c(E_1 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c^{'}, \quad c > 0, \tag{5.90}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 = \| u \|^2 + \| \nabla u \|^2 &+ 2\int_\Omega G_N(u)dx + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \\ +\epsilon_2(\| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 &+ \epsilon_1 \| \overline{\alpha} \|^2 + 2\epsilon_1((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha}))). \end{aligned} \tag{5.91}$$

On multiplie maintenant (5.1) par $-\Delta u$, en utilisant (5.9), on aura

$$\frac{d}{dt} \| \nabla u \|^2 + \| \Delta u \|^2 \leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2). \tag{5.92}$$

Multiplions (5.92) par ϵ_3 assez petit et additionnons le résultat avec (5.90) on obtient

$$\frac{dE_2}{dt} + c(E_2 + \| \Delta u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c^{'}, \quad c > 0, \tag{5.93}$$

où

$$E_2 = E_1 + \epsilon_3 \| \nabla u \|^2, \tag{5.94}$$

satisfait

$$
\begin{array}{rcl}
c(\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_\Omega G_N(u)dx + \| \overline{\alpha} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) - c^{'} & \leq & E_2 \\
\leq c^{''}(\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_\Omega G_N(u)dx + \| \overline{\alpha} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) & + & c^{'''} \\
c, c^{''} > 0 & \text{et} & c^{'}, c^{'''} \geq 0.
\end{array}
\tag{5.95}
$$

On somme finalement (5.93) et δ_6(5.77) où $\delta_6 > 0$ assez petit et on obtient

$$\frac{dE_6}{dt} + c(E_6 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c^{'}, \quad c > 0, \tag{5.96}$$

où

$$E_6 = E_2 + \delta_6 E_5. \tag{5.97}$$

satisfait

$$
\begin{array}{rl}
c(\| \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \Delta \alpha \|^2 & + \ \ \| \dfrac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \displaystyle\int_\Omega G_N(u)dx \\
+ \| \overline{\alpha} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \dfrac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2) - c^{'} \leq E_6 & \leq \ \ c^{''}(\| \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \Delta \overline{\alpha} \|^2 \\
+ \| \dfrac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 & + \ \ \int_\Omega G_N(u)dx + \| \overline{\alpha} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \dfrac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2) + c^{'''}.
\end{array}
\tag{5.98}
$$

On déduit de (5.96),(5.98) et du lemme de Gronwall une estimation sur α dans $L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$ et sur $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$.

On multiplie (5.1) par $-\Delta u$, l'inégalité de Hölder et (5.9) donnent

$$\| \Delta u \|^2 \leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2). \tag{5.99}$$

D'après les estimations précédentes et le Théorème 1.1, on déduit de (5.99) que

$$u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega)), \quad \forall T > 0, \tag{5.100}$$

d'où le théorème. □

On pose $Y = \{\phi \in H^2(\Omega), \int_\Omega G_N(\phi)dx < +\infty\}$ et $\Psi = Y \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Le Théorème 1.3 nous amène à considérer le semi-groupe $S(t)(t \geq 0)$ définie sur l'espace Ψ de la façon suivante :

$$S(t) : \Psi \to \Psi, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \tag{5.101}$$

où $(u(t), \alpha(t), \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (5.1)-(5.4).

2 Dissipativité

Dans cette section on va étudier l'existence de bornés absorbants des solutions du problème (5.1)-(5.4), mais avant on donne les notations et les remarques suivantes.

Remarque 2.1. *Contrairement au cas de conditions aux bords Dirichlet dans le chapitre 3, nous ne pouvons pas attendre d'avoir dissipativité pour la variable de déplacement thermique α. En effet, en considérant les inconnues u et θ, il est facile de voir que, $\forall c \in \mathbb{R}$, le couple (u_c, c) est une solution stationnaire, où u_c satisfait*

$$g_N(u_c) = c,$$

(on suppose que l'équation ci-dessus possède au moins une solution). Donc, en considérant maintenant les inconnues u et α, on voit que $(u_c, ct+\alpha_0)$ est une solution pour le problème. En prenant $c \neq 0$, on déduit qu'on ne peut pas avoir de la dissipativité sur α. Mais on verra que $\overline{\alpha}$ est dissipative.

En vue de la remarque 2.1, $S(t)$ n'est pas dissipative. On pose alors :

$$\overline{H}^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega), <\phi>=0\}, \quad \overline{\Phi} = Z \times \overline{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

et

$$\overline{H}^2(\Omega) = \{\phi \in H^2(\Omega), <\phi>=0\}, \quad \overline{\Psi} = Y \times \overline{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega).$$

Donc la famille d'opérateurs $\overline{S}(t)$ défini comme suit :

$$\overline{S}(t) : \overline{\Phi} \to \overline{\Phi}, (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \mapsto (u(t), \overline{\alpha}(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)),$$

est dissipative. Et

$$\overline{S}(t) : \overline{\Psi} \to \overline{\Psi}, (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \mapsto (u(t), \overline{\alpha}(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)),$$

est aussi dissipative.

Remarque 2.2. *Il résulte de (5.81) et (5.82) que la famille d'opérateurs $\overline{S}(t)$ est formellement associée aux équations suivantes (qui correspondent à $(u, \overline{\alpha}, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g_N(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{5.102}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\alpha}}{\partial t^2} + \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} - \Delta \overline{\alpha} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u + \frac{d<u>}{dt} + <u>, \tag{5.103}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} - <u> + \exp(-t)(<u_0 + \alpha_1>). \tag{5.104}$$

Mais ce système est nonautonome et donc la famille d'opérateurs $\overline{S}(t)$ ne forment pas une famille de semi-groupes. On se restreint alors à l'hyperplan :

$$\overline{\Phi_0} = \{\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \overline{\Phi}, <\varphi_1 + \varphi_3>=0\}.$$

Donc on a conservation de l'enthalpie et $\overline{S}(t)$ est une famille de semi-groupes, (5.104) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} - <u> . \tag{5.105}$$

On commence à donner le

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, le semi-groupe $\overline{S}(t), t \geq 0$, est dissipatif sur $\overline{\Phi_0}$. Autrement dit, le semi-groupe $\overline{S}(t), t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_0^{'}$ dans $\overline{\Phi_0}$.*

DÉMONSTRATION: On prend les données initiales $(u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1)$ dans un borné de F. Disons que, pour tout $R_0 > 0$, on a $(u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \in B_{R_0}, B_{R_0}$ étant la boule de F de centre 0 et de rayon R_0.

La relation (5.93) donne en particulier :

$$\frac{dE_2}{dt} + cE_2 \leq c^{'}. \tag{5.106}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (5.106) donne

$$E_2(t) \leq E_2(0) \exp(-ct) + c^{''}, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.107}$$

Par (5.95) et le fait que les données initiales sont dans un borné, l'estimation (5.107) devient

$$E_2(t) \leq \mu_0 \exp(-ct) + c^{''}, \tag{5.108}$$

avec $\mu_0 = \mu_0(R_0) > 0$.

Soit maintenant $C_0 > 0$ assez grand pour que

$$\mu_0 \exp(-ct) + c^{''} \leq C_0.$$

On a alors que la boule de centre 0 et de rayon C_0 est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $\overline{S}(t)(t \geq 0)$. En d'autres termes,

$$\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \overline{\alpha} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq C_0, \quad \forall t \geq t_0, \tag{5.109}$$

avec $t_0 = t_0(R_0) := \max\{0, -\frac{1}{c}\log(\frac{C_0 - c}{\mu_0})\}$. □

Conçernant la dissipativité de $\overline{S}(t)$ dans $\overline{\Psi_0}$, on a le résultat suivant,

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3, le semi-groupe $\overline{S}(t)$ est dissipatif sur $\overline{\Psi_0}$. Autrement dit, $\overline{S}(t), t \geq 0$ possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_1^{'}$ dans $\overline{\Psi_0}$.*

DÉMONSTRATION: On prend les données initiales dans un borné de F_1. Disons que pour tout $R_1 > 0$, on a $(u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \in B_{R_1}, B_{R_1}$ étant la boule de F_1 de centre 0 et de rayon R_1. La relation (5.96) donne en particulier

$$\frac{dE_6}{dt} + cE_6(t) \leq c^{'}, \tag{5.110}$$

le lemme de Gronwall et le fait que les données initiales sont dans un borné, donnent

$$E_6(t) \leq \mu_1 \exp(-ct) + c^{''}. \tag{5.111}$$

Soit $C_1 > 0$ assez grand pour que

$$\mu_1 \exp(-ct) + c'' \leq C_1.$$

On a alors

$$\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \overline{\alpha} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_1, \quad \forall t \geq t_1, \tag{5.112}$$

avec $t_1 = \max\{0, -\frac{1}{c}\ln(\frac{C_1 - c''}{\mu_1})\}$.

Par (5.109) et (5.112), en posant $t_2 = \max(t_0, t_1)$, on déduit de (5.99) que

$$\| u(t) \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_2, \quad \forall t \geq t_2, \tag{5.113}$$

d'où le théorème. □

Le théorème suivant donne l'existence d'un borné absorbant pour le terme non linéaire $g_N(u)$ dans le problème (5.1)-(5.4).

Théorème 2.5. *Il existe une constante C_3 telle que*

$$\| g_N(u(t)) \|^2 \leq C_3, \qquad \forall t \geq t_2. \tag{5.114}$$

DÉMONSTRATION: On multiplie (5.1) par $g_N(u)$, et par (5.9) on aura

$$\| g_N(u) \|^2 \leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2). \tag{5.115}$$

Par (5.109),(5.112), la relation (5.115) donne (5.114). □

Par (5.113), on a

$$u \in L^\infty(t_2, +\infty, H^2(\Omega)), \tag{5.116}$$

en associant (5.100) et (5.116), on a alors que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega)). \tag{5.117}$$

De la même manière, on démontre que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)), \qquad \overline{\alpha} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega))$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)).$$

Chapitre 6

Attracteurs pour un modèle de champ de phase de type Caginalp avec un terme logarithmique

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de champ de phase avec un terme logarithmique vu dans le chapitre 4, mais considéré ici avec conditions aux limites de type Neumann homogènes. Nous considérons alors le problème $(P^{'})$ suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0, \tag{6.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{6.4}$$

où, comme précédemment, u est le paramètre d'ordre, α est la variable de déplacement thermique, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine borné régulier (à préciser la dimension dans la suite) et $\partial\Omega$ désigne le bord régulier.

Le potentiel g est défini comme suit :

$$g(s) = -2\kappa_0 s + \kappa_1 \ln(\frac{1+s}{1-s}), \quad s \in (-1,+1), 0 < \kappa_1 < \kappa_0. \tag{6.5}$$

On voit que g vérifie

$$g \quad \text{est de classe} \quad C^\infty \quad \text{et} \quad g(0) = 0, \tag{6.6}$$

$$-c_0 \leq G(s) \leq g(s)s + c_0, \quad c_0 \geq 0, \quad s \in (-1,+1), \tag{6.7}$$

où $G(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau$ et

$$g^{'}(s) \geq -\lambda, \quad s \in (-1,+1), \quad \lambda > 0. \tag{6.8}$$

On considère de plus, dans le cadre de notre problème, les espaces suivants :

$$F_2 = H^3(\Omega)^2 \times H^2(\Omega) \quad \text{et} \quad F_3 = H^4(\Omega)^2 \times H^3(\Omega).$$

Notons que

$$\varphi \longmapsto (\| \nabla\Delta\varphi \|^2 + <\varphi>^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\varphi \longmapsto (\| \Delta^2\varphi \|^2 + <\varphi>^2)^{\frac{1}{2}}$$

sont des normes dans $H^3(\Omega)$ et $H^4(\Omega)$ respectivement, qui sont équivalentes aux normes usuelles.

On notera dans la suite $c, c^{'}$ et $c^{''}$ des constantes positives qui pourront varier d'une ligne à l'autre et quelques fois dans la même ligne.

La première section traite le problème (6.1)-(6.4) avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2$ et 3.

1 Semi-groupe et dissipativité

Rappelons l'espace K définit au chapitre 4, comme suit

$$K = \{\varphi \in L^2(\Omega), -1 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega\},$$

et de même on approche le logarithmique g par g_N où g_N est un polynôme de degré impair défini par (5.5), on obtient alors le problème $(P_N^{'})$ suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_N}{\partial t} - \Delta u_N + g_N(u_N) &= \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}, & (6.9)\\
\frac{\partial^2 \alpha_N}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} - \Delta \alpha_N &= -\frac{\partial u_N}{\partial t} - u_N, & (6.10)\\
\frac{\partial u_N}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha_N}{\partial \nu} &= 0, & (6.11)\\
u_N(0) = u_0, \quad \alpha_N(0) &= \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(0) = \alpha_1. & (6.12)
\end{aligned}$$

D'après le chapitre précédent, on rappelle le Théorème suivant conçernant le problème $(P_N^{'})$.

Théorème 1.1. *Pour $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in F$, le problème (6.9)-(6.12) admet une unique solution $(u_N, \alpha_N, \frac{\partial \alpha_N}{\partial t})$ avec $u_N \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega))$, $\frac{\partial u_N}{\partial t} \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $\overline{\alpha_N} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$, $\alpha_N \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ et $\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, $\forall T > 0$.*

Rappelons que pour $\varphi \in K$ on a $G_N(\varphi) \leq G(\varphi)$, on prend donc dans toute la suite $u_0 \in K$.

1.1 Existence et unicité.

On construit la solution du problème $(P^{'})$ comme étant la limite lorsque $N \to +\infty$ de la solution du problème $(P_N^{'})$. Plus précisement on démontre le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Soit* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in F_K = (K \cap H^1(\Omega)) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *alors le problème (6.1)-(6.4) admet au moins une solution* $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ *avec*

$$(u, \overline{\alpha}) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)^2), (u, \frac{\partial u}{\partial t}) \in L^2(0, T, H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)),$$

$$\alpha \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

De plus $\forall t > 0, \| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, *l'ensemble* $\{x \in \Omega / |u(x,t)| = 1\}$ *est de mesure nulle.*

Démonstration: En remplaçant (u, α) par (u_N, α_N) dans (5.93)-(5.95), on écrit :

$$\frac{dE_{2N}}{dt} + c(E_{2N} + \| \Delta u_N \|^2 + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2) \leq c', \quad c > 0, \tag{6.13}$$

où

$$\begin{aligned} E_{2N} = & \| u_N \|^2 + \| \nabla u_N \|^2 + 2 \int_\Omega G_N(u_N) dx + \| \nabla \alpha_N \|^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 \\ & + \epsilon_2 (\| \nabla \alpha_N \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha_N}}{\partial t} \|^2 + \epsilon_1 \| \overline{\alpha_N} \|^2 + 2\epsilon_1 ((\frac{\partial \overline{\alpha_N}}{\partial t}, \overline{\alpha_N}))) + \epsilon_3 \| \nabla u_N \|^2, \end{aligned} \tag{6.14}$$

satisfait

$$\begin{aligned} & c(\| u_N \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega G_N(u_N) dx + \| \overline{\alpha_N} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2) - c' \leq E_{2N} \\ & \leq c''(\| u_N \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega G_N(u_N) dx + \| \overline{\alpha_N} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2) + c''' \\ & \qquad c, c'' > 0 \quad \text{et} \quad c', c''' \geq 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

On applique le lemme de Gronwall à (6.13), on a

$$E_{2N}(t) \leq E_{2N}(0) \exp(-ct) + c', \tag{6.16}$$

la relation (6.16) implique en particulier que

$$E_{2N}(t) \leq E_{2N}(0) + c'. \tag{6.17}$$

Ainsi par (6.15) on aura

$$\sup_{t \in [0,T]} \{ \| u_N(t) \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \overline{\alpha_N}(t) \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2 \} \leq c, \tag{6.18}$$

où c est une constante qui ne dépend pas de N.

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en considérant une sous suite, on a par l'estimation (6.18)

$$u_N \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0, T, H^1(\Omega)), \tag{6.19}$$

$$\overline{\alpha_N} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\alpha} \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0, T, H^1(\Omega)), \tag{6.20}$$

et

$$\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{6.21}$$

On intègre (6.13) entre 0 et t, on a

$$E_{2N}(t) + \int_0^t (\| \Delta u_N \|^2 + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2) ds \leq c, \quad \forall t \in [0,T], \quad c \geq 0, \tag{6.22}$$

la constante c est bien sûr indépendante de N. Il en découle que

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T,L^2(\Omega)), \tag{6.23}$$

$$\Delta u_N \rightharpoonup \Delta u \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T,L^2(\Omega)). \tag{6.24}$$

La relation (6.16) donne en particulier

$$\| u_N(t) \|^2 \leq E_{2N}(0) \exp(-ct) + c', \quad c > 0, \tag{6.25}$$

donc

$$< u_N >^2 \leq E_{2N}(0) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \tag{6.26}$$

En remplaçant H par H_N dans (5.82), on écrit

$$< H_N(t) > = \exp(-t) < H_N(0) >, \tag{6.27}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d < \alpha_N >}{dt}(t) = \exp(-t) < H_N(0) > - < u_N(t) > . \tag{6.28}$$

On intègre (6.28) entre 0 et t, on a

$$< \alpha_N(t) > = < \alpha_0 > + < H_N(0) > (1 - \exp(-t)) - \int_0^t < u_N(s) > ds, \tag{6.29}$$

donc par (6.25), on déduit

$$< \alpha_N(t) >^2 \leq c(E_{2N}(0) + \| \alpha_0 \|^2) + c' t^2. \tag{6.30}$$

En utilisant la norme équivalente dans $H^1(\Omega)$ on aura

$$\sup_{t\in[0,T]} \| \alpha_N \|^2_{H^1(\Omega)} \leq c, \tag{6.31}$$

où c est une constante indépendante de N. Donc on a

$$\alpha_N \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H^1(\Omega)). \tag{6.32}$$

Par (5.115), on écrit

$$\| g_N(u_N) \|^2 \leq c(\| \nabla u_N \|^2 + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2). \tag{6.33}$$

On intègre (6.33) entre 0 et t, par (6.19),(6.21) et (6.23) on aura :

$$\| g_N(u_N) \|^2_{L^2(Q)} \leq c, \tag{6.34}$$

où c est indépendante de N.

Par (6.34), on a pour une suite extraite

$$g_N(u_N) \rightharpoonup g^* \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{6.35}$$

Donc lorsque $N \longrightarrow +\infty$ dans (6.9), on déduit de (6.23),(6.24),(6.35) et (6.21) que $(u, \alpha, \dfrac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g^* = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{dans} \quad L^2(Q). \tag{6.36}$$

De (6.10) on déduit (on pose $\beta_N = \dfrac{\partial \alpha_N}{\partial t}$) :

$$< \frac{\partial \beta_N}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}, \chi > + < \nabla \alpha_N, \nabla \chi >= - < \frac{\partial u_N}{\partial t} + u_N, \chi >, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}((0,T) \times \Omega),$$

où $<. , .>$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ et $\mathcal{D}((0,T) \times \Omega)$.

Donc lorsque $N \longrightarrow +\infty$ on déduit de (6.19),(6.21),(6.23) et (6.32) :

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = - \frac{\partial u}{\partial t} - u \quad \text{dans} \quad L^2(Q). \tag{6.37}$$

De plus d'après SIMON (voir [19]), (6.19),(6.23) d'une part et les relations (6.21),(6.32) d'autre part impliquent lorsque $N \longrightarrow +\infty$:

$$u_N \longrightarrow u \qquad \text{dans} \qquad C([0,T], L^2(\Omega)), \tag{6.38}$$

$$\alpha_N \longrightarrow \alpha \qquad \text{dans} \qquad C([0,T], L^2(\Omega)). \tag{6.39}$$

Donc en particulier on aura $u(x,0) = u_0$ et $\alpha(x,0) = \alpha_0$ dans Ω.

Démontrons finalement que $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(x,0) = \alpha_1$:

On déduit de (6.21) que $\dfrac{\partial \alpha_N}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, d'autre part on a $\dfrac{\partial \beta_N}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, par suite

$$\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \in C([0,T], H^{-1}(\Omega)),$$

donc d'après le théorème de Strauss on aura $\dfrac{\partial \alpha_N}{\partial t} \in C_W([0,T], L^2(\Omega))$ par suite il existe une sous suite $\dfrac{\partial \alpha_\mu}{\partial t} \in C_W([0,T], L^2(\Omega))$ telle qu'en particulier lorsque $\mu \to +\infty$ on a

$$\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial t}(0) \rightharpoonup \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega).$$

Or $\dfrac{\partial \alpha_\mu}{\partial t}(0) \to \alpha_1$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit alors le résultat.

Des convergences (6.19),(6.20),(6.21),(6.23) et (6.32), on a écrit

$$u \in L^\infty(0,T,H^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,L^2(\Omega)),$$

$$\alpha \in L^{\infty}(0,T,H^1(\Omega)), \overline{\alpha} \in L^{\infty}(0,T,H^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega)).$$

On conclut par le Théorème de Lions que

$$u, \alpha \in C([0,T], L^2(\Omega)).$$

Alors $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g^* = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{dans} \quad L^2(Q), \tag{6.40}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \quad \text{dans} \quad L^2(Q), \tag{6.41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{6.42}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{6.43}$$

On va demontrer maintenant que l'ensemble $\{x \in \Omega, |u(x,t)| = 1\}$ a une mesure nulle. Pour cela on va utiliser la méthode utilisée par Debussche et Dettori (voir [9], [14] et [15]).

On choisit un η petit arbitraire qui appartient à $(0,1)$ et $\forall t \in (0,T)$ on pose

$$E_\eta^N(t) = \{x \in \Omega / |u_N(x,t)| > 1 - \eta\}.$$

Soit $|E_\eta^N(t)|$ la mesure de E_η^N, on a $|E_\eta^N(t)| = mes(E_\eta^N(t)) = \int_{E_\eta^N(t)} dx$ et $\chi_\eta^N(t)$ sa fonction caractéristique définie par :

$$\chi_\eta^N(x,t) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{si} \quad x \in E_\eta^N(t), \\ 0 \quad , & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On intègre (6.13) entre t et $t+r$, on a

$$E_{2N}(t+r) + \int_t^{t+r} (E_{2N} + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2) ds \leq c'(r) + E_{2N}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall r > 0. \tag{6.44}$$

Pour continuer la démonstration du théorème on énonce les deux lemmes suivants.

Lemme 1.3. *Il existe une constante positive c telle que pour tout $r > 0$ on a*

$$\| \frac{\partial u_N}{\partial t}(t) \|^2 \leq c(\frac{1}{r} + 1)(E_{2N}(0) + 1), \quad \forall t \geq r > 0. \tag{6.45}$$

PREUVE: En remplaçant dans (5.68), (u, α) par (u_N, α_N), on écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 &\leq c\Big(\| u_N \|^2 + \| \nabla \alpha_N \|^2 + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 \Big) \\ &\leq c\Big(\| u_N \|^2 + \| \overline{\alpha_N} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 \Big). \end{aligned} \tag{6.46}$$

Par (6.15),(6.16) et (6.44), on applique le lemme de Gronwall uniforme à (6.46) et donc on déduit que $\forall s > 0$ on a

$$\| \frac{\partial u_N}{\partial t}(t+s) \|^2 \leq c(\frac{1}{s} + 1)(E_{2N}(0) + 1), \quad \forall t \geq 0, \tag{6.47}$$

ce qui complète la preuve de (6.45). □

Lemme 1.4. *Il existe une constante c telle que pour tout $r > 0$ on a*

$$\| g_N(u_N(t)) \|^2 \leq c(\frac{1}{r} + 1)(E_{2N}(0) + 1), \quad \forall t \geq r > 0. \tag{6.48}$$

PREUVE: Par (6.15), on conclut de (6.17) que

$$\| \nabla u_N(t) \|^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2 \leq E_{2N}(0) + c', \quad \forall t \geq r > 0. \tag{6.49}$$

Par (6.45) et (6.49), on obtient de (6.33) la relation (6.48). □

Par (6.48) on écrit,

$$\| g_N(u_N) \|^2 \leq \frac{c}{t}(1 + t)(E_{2N}(0) + 1),$$

implique

$$t \| g_N(u_N) \|^2 \leq c(1 + t)(E_{2N}(0) + 1),$$

donc

$$t \| g_N(u_N(t)) \|^2 \leq c(T + 1), \quad \forall t \in (0, T). \tag{6.50}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} \Big\{ \int_{E_\eta^N(t)} g_N^2(u_N)dx \Big\}^{\frac{1}{2}} &\geq |E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}}.\Big\{ Inf_{x\in E_\eta^N(t)} \Big(\sum_{k=0}^N \frac{(u_N(x))^{2k+1}}{2k+1} \Big)^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geq |E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}}.Inf_{x\in E_\eta^N(t)} \sum_{k=0}^N \frac{|u_N(x)|^{2k+1}}{2k+1} \\ &\geq |E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}}. \sum_{k=0}^N \frac{(1-\eta)^{2k+1}}{2k+1}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{t} \sum_{k=0}^N \frac{(1-\eta)^{2k+1}}{2k+1}}. \tag{6.51}$$

Lorsque $N \longrightarrow +\infty$, on déduit de (6.38),(6.51) et du lemme de Fatou que

$$\begin{aligned} |E_\eta(t)| = \int_\Omega \chi_\eta(t)dx \leq \int_\Omega \liminf_{N\to+\infty} \chi_\eta^N(t)dx &\leq \liminf_{N\to+\infty} \int_\Omega \chi_\eta^N(t)dx \\ &\leq \liminf |E_\eta^N(t)| \\ &\leq \frac{4C}{t \ln^2 \Big(\frac{2-\eta}{\eta} \Big)}, \end{aligned}$$

avec $|E_\eta(t)|$ et $\chi_\eta(t)$ désignent respectivement la mesure de l'ensemble $\{x \in \Omega, |u(x,t)| > 1 - \eta\}$ et sa fonction caractéristique.

Lorsque $\eta \to 0$ on obtient $\forall t \in (0, T)$,

$$mes\{x \in \Omega, |u(x,t)| \geq 1\} = 0. \tag{6.52}$$

De plus par (6.38),(6.52) on a, lorsque $N \to +\infty$ que $\forall t \in (0, T)$:

$$g_N(u_N(t)) \longrightarrow g(u(t)) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega. \tag{6.53}$$

Par (6.34),(6.53) et Lions ([13], lemme 1.3, p.12), on a

$$g_N(u_N) \rightharpoonup g(u) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{6.54}$$

Finalement par (6.35) et (6.54) on obtient que

$$g^* = g(u),$$

d'où le théorème. $\square$

Conçernant l'unicité de la solution du problème $(P^{'})$, on énonce le théorème suivant

Théorème 1.5. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, avec (6.8), le problème (6.1)-(6.4) admet une solution unique avec la régularité ci-dessus.*

Démonstration: On prend deux solutions $(u^{(1)}, \alpha^{(1)})$ et $(u^{(2)}, \alpha^{(2)})$ du problème $(P^{'})$ de mêmes conditions initiales et de même moyenne spatiale. On pose

$$(u, \alpha) = (u^{(1)}, \alpha^{(1)}) - (u^{(2)}, \alpha^{(2)}).$$

Alors (u, α) vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u^{(1)}) - g(u^{(2)}) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.56}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0, \tag{6.57}$$

$$u(0) = \alpha(0) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = 0. \tag{6.58}$$

On multiplie (6.55) par u et on intègre sur Ω, par (6.8) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 \leq \lambda \parallel u \parallel^2 + ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u)),$$

en utilisant l'inégalité $|((v, w))| \leq c \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} . \parallel w \parallel_{H_N^{-1}(\Omega)}$ on obtient

$$\frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 \leq c(\parallel u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)}). \tag{6.59}$$

On intègre (6.56) entre 0 et t on aura

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) + \alpha(t) - \Delta \int_0^t \alpha(s) ds = -\int_0^t u(s) ds - u(t). \tag{6.60}$$

On multiplie (6.60) par $(-\Delta)_N^{-1} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ (notons que $< \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} >= 0$) et on intègre sur Ω on aura

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big[\parallel \alpha \parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)} + 2((\alpha, \int_0^t \alpha ds))\Big] + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)} \\ &\leq c_T(\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} + \parallel u \parallel^2), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{6.61}$$

On multiplie (6.60) par α et on intègre sur Ω on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha ds \parallel^2\Big] + \parallel \alpha \parallel^2 \leq c_T(\parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} + \parallel u \parallel^2), \quad t \in [0,T]. \tag{6.62}$$

On additionne (6.62) et δ_1(6.61) avec $\delta_1 > 0$ assez petit on aura

$$\frac{d}{dt}\Big[\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha ds \parallel^2 + \delta_1 \parallel \alpha \parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)} + 2\delta_1((\alpha, \int_0^t \alpha ds))\Big]$$

$$+ c(\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)} + \parallel \alpha \parallel^2) \leq c_T(\parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} + \parallel u \parallel^2). \tag{6.63}$$

En particulier

$$\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha ds \parallel^2 + 2\delta_1((\alpha, \int_0^t \alpha ds)) \geq c(\parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha ds \parallel^2), \quad c > 0. \tag{6.64}$$

On additionne (6.63) et δ_2(6.59) avec $\delta_2 > 0$ assez petit on aura

$$\frac{dE}{dt} \leq c_T(E + \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}), \quad t \in [0,T], \tag{6.65}$$

avec

$$E(t) = \parallel \alpha \parallel^2 + \parallel \nabla \int_0^t \alpha ds \parallel^2 + \delta_1 \parallel \alpha \parallel^2_{H_N^{-1}(\Omega)} + 2\delta_1((\alpha, \int_0^t \alpha ds)) + \delta_2 \parallel u \parallel^2 . \tag{6.66}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (6.65) donne

$$E(t) \leq \exp(c_T t)E(0) + c_T' \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))},$$

or $E(0) = 0$ donc $E(t) \leq c_T' \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \quad t \in [0,T]$,

en particulier

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq c_T' \parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))}, \quad t \in [0,T], \tag{6.67}$$

on applique de nouveau le lemme de Gronwall à (6.67) on aura

$$\parallel u \parallel^2_{L^2(0,t,L^2(\Omega))} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{6.68}$$

par conséquent

$$E(t) \leq 0, \quad t \in [0,T], \tag{6.69}$$

on déduit alors l'unicité. □

Les théorèmes 1.2 et 1.5, nous amènent à considérer un semi-groupe $S(t)$ pour tout $t \geq 0$, qui est défini sur F_K de la façon suivante :

$$S(t) : F_K \to F_K, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \tag{6.70}$$

où $(u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (6.1)-(6.4).

1.2 Estimations supplémentaires.

D'après le Théorème 1.2, on a obtenu l'existence d'une solution unique du problème $(P^{'})$, on établit dans cette section des estimations supplémentaires sur cette solution. Pour ce faire, on pose

$$Bu := -\Delta u + u, \quad \text{avec} \quad D(B) = H^2_N(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}.$$

Par ailleurs , on pose $\| u \|_1 = ((B^{\frac{1}{2}}u, B^{\frac{1}{2}}u))^{\frac{1}{2}}$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et on note que cette norme est équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.

On réécrit (6.1) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Bu + f(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{6.71}$$

avec $f(s) = g(s) - s$, on a que f et g satisfaient les mêmes propriétés. On pose $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$.

On multiplie (6.1) par $u + \frac{\partial u}{\partial t}$, (6.2) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, en intégrant sur Ω et en sommant les deux équations résultantes, par (6.7) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\| u \|^2 + \| u \|_1^2 \quad &+ \quad 2\int_\Omega F(u)dx + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2) \\ +c(\| u \|_1^2 + 2\int_\Omega F(u)dx \quad &+ \quad \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c^{'}, \quad c > 0. \end{aligned} \tag{6.72}$$

On réécrit (6.2) sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H - \Delta\alpha = 0, \tag{6.73}$$

où

$$H = u + \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

On intègre (6.73) sur Ω. On obtient

$$\frac{d < H >}{dt} + < H >= 0. \tag{6.74}$$

En particulier, on déduit de (6.74) que

$$< H(t) >= \exp{(-t)} < H(0) >, \tag{6.75}$$

donc

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} H(t) = 0. \tag{6.76}$$

De plus, si $< H(0) >= 0$ c'est-à-dire $< u_0 + \alpha_1 >= 0$, on a conservation de l'enthalpie,

$$< H(t) >= 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{6.77}$$

On a alors

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \overline{H} - \Delta\overline{\alpha} = 0. \tag{6.78}$$

On multiplie (6.78) par $\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}(\| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2) + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 \leq c(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2). \tag{6.79}$$

On multiplie (6.78) par $\overline{\alpha}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}(\| \overline{\alpha} \|^2 + 2((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha}))) + \| \nabla \alpha \|^2 \leq c(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2). \tag{6.80}$$

On multiplie (6.80) par δ_3 et on additionne le résultat avec (6.79) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 &+ \delta_3 \| \overline{\alpha} \|^2 + 2\delta_3((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha}))) + c(\| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2) \\ &\leq c'(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \end{aligned} \tag{6.81}$$

où $\delta_3 > 0$ assez petit de telle façon qu'on obtient en particulier

$$\| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 + \delta_3 \| \overline{\alpha} \|^2 + 2\delta_3((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha})) \geq c(\| \overline{\alpha} \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \tag{6.82}$$

on multiplie ensuite (6.81) par δ_4 et on additionne le resultat avec (6.72) où $\delta_4 > 0$ assez petit pour obtenir

$$\frac{dE_1}{dt} + c(E_1 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c', \quad c > 0, \tag{6.83}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 = \| u \|^2 + \| u \|_1^2 &+ 2\int_\Omega F(u)dx + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \\ +\delta_4(\| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t} \|^2 &+ \delta_3 \| \overline{\alpha} \|^2 + 2\delta_3((\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \overline{\alpha}))). \end{aligned} \tag{6.84}$$

On multiplie maintenant (6.1) par $-\Delta u$, en utilisant (6.8), on aura

$$\frac{d}{dt} \| \nabla u \|^2 + \| \Delta u \|^2 \leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2). \tag{6.85}$$

Multiplions (6.85) par δ_5 assez petit et additionnons le résultat avec (6.83) on obtient

$$\frac{dE_2}{dt} + c(E_2 + \| \Delta u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c', \quad c > 0, \tag{6.86}$$

où

$$E_2 = E_1 + \delta_5 \| \nabla u \|^2, \tag{6.87}$$

satisfait

$$\begin{aligned} c(\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_\Omega F(u)dx + \| \overline{\alpha} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) - c' &\leq E_2 \\ \leq c''(\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_\Omega F(u)dx + \| \overline{\alpha} \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) &+ c''' \\ c, c'' > 0 \quad \text{et} \quad c', c''' \geq 0. \end{aligned} \tag{6.88}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (6.86) donne

$$E_2(t) \leq E_2(0)\exp(-ct) + c^{'}, \quad c > 0, \tag{6.89}$$

où c et $c^{'}$ sont indépendantes des données initiales.

En particulier, (6.89) donne

$$\| u(t) \|^2 \leq E_2(0)\exp(-ct) + c^{'}, \quad c > 0. \tag{6.90}$$

On peut réécrire (6.75) sous la forme

$$\frac{d < \alpha >}{dt}(t) = \exp(-t) < H(0) > - < u(t) >, \tag{6.91}$$

qui donne

$$< \alpha(t) > = < \alpha_0 > + < H(0) > (1 - \exp(-t)) - \int_0^t < u(s) > ds, \tag{6.92}$$

donc par (6.90), on aura

$$< \alpha(t) >^2 \leq c(E_2(0) + \| \alpha_0 \|^2) + c^{'} t^2. \tag{6.93}$$

La relation (6.93) montre que α n'est pas dissipative mais $\overline{\alpha}$ est dissipative (voir chapitre précédent). Pour étudier la dissipativité on introduit les espaces suivants :

$$F_K^{'} = (K \cap H^2(\Omega)) \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega),$$

$$\overline{F_K} = (K \cap H^1(\Omega)) \times \overline{H^1(\Omega)} \times L^2(\Omega), \quad \overline{F_K^{'}} = (K \cap H^2(\Omega)) \times \overline{H^2(\Omega)} \times H^1(\Omega),$$

$$\overline{F_{0K}} = \{\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \overline{F_K}, < \varphi_1 + \varphi_3 > = 0\},$$

de même on définit l'espace $\overline{F_{0K}^{'}}$.

1.3 Ensembles absorbants et Régularité.

Dans cette section, on prouve tout d'abord l'existence d'ensembles bornés absorbants pour le semi-groupe $\overline{S}(t), t \geq 0$, associé au problème $(P^{'})$, dans l'espace $\overline{F_{0K}}$. Ensuite on énonce un théorème de régularités supplémentaires pour les solutions, qui va nous permettre d'étudier la dissipativité sur $\overline{F_{0K}^{'}}$.

On commence à énoncer le

Théorème 1.6. *Sous les hypothèses du Théorème 1.5, le semi-groupe $\overline{S}(t), t \geq 0$, est dissipatif sur $\overline{F_{0K}}$. En d'autres termes, le semi-groupe $\overline{S}(t), t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_2^{'}$ dans $\overline{F_{0K}}$.*

DÉMONSTRATION: On prend les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ dans un borné de F. Càd, pour tout $R_2 > 0$, on a $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in B_{R_2}, B_{R_2}$ étant la boule de F de centre 0 et de rayon R_2. La relation (6.86) donne en particulier

$$\frac{dE_2}{dt} + cE_2 \leq c^{'}, \tag{6.94}$$

on applique le lemme de Gronwall à (6.94), on a

$$E_2(t) \leq \exp(-ct)E_2(0) + c', \quad \forall t \geq 0. \tag{6.95}$$

Par (6.88) et le fait que les données initiales sont dans un borné, l'estimation (6.95) devient

$$E_2(t) \leq \nu_0 \exp(-ct) + c', \tag{6.96}$$

avec $\nu_0 = \nu_0(R_2) > 0$. Soit $C_0 > 0$ assez grand pour que

$$\nu_0 \exp(-ct) + c' \leq C_0.$$

On a alors

$$\| u(t) \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq C_0, \quad \forall t \geq t_0, \tag{6.97}$$

avec $t_0 = t_0(R_2) := \max\{0, -\frac{1}{c}\log(\frac{C_0 - c'}{\nu_0})\}$. $\square$

On énonce dans la suite un théorème de régularités supplémentaires pour la solution du problème (P').

Théorème 1.7. *On suppose vraie (6.8). Alors si les données initiales appartiennent à F'_K et $g(u_0) \in L^2(\Omega)$, le problème (P') admet une unique solution telle que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega)), \alpha \in L^\infty(0,T,H^2(\Omega)), \overline{\alpha} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega))$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)), \quad \forall T > 0$.*

Démonstration: On note que $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = \Delta u_0 - g(u_0) + \alpha_1$.

On différencie (6.1) par rapport au temps et par (6.2) on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t}) - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} + g'(u)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Delta\alpha - u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{6.98}$$

On multiplie (6.98) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, l'inégalité de Hölder et (6.8) entraînent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 &\leq c\Big(\| u \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \Big) \\ &\leq c'\Big(\| u \|^2 + \| \overline{\alpha} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \Big). \end{aligned} \tag{6.99}$$

On multiplie (6.2) par $-\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\| \Delta\alpha \|^2 + \| \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) + \| \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 \leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2). \tag{6.100}$$

On multiplie finalement (6.2) par $-\Delta\alpha$ et on intègre sur Ω, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \nabla\alpha \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))) + \| \Delta\alpha \|^2 = ((u, \Delta\alpha)) + ((\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta\alpha)) + \| \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla\alpha \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))) + \| \Delta\alpha \|^2 \leq c(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2). \tag{6.101}$$

On somme (6.100) et ϵ_4(6.102) où $\epsilon_4 > 0$ assez petit de telle sorte qu'on obtient en particulier :

$$\| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \epsilon_4(\| \nabla\alpha \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))) \geq c(\| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2), \quad c > 0, \tag{6.102}$$

on obtient alors

$$\frac{dE_3}{dt} + c(\| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta\alpha \|^2) \leq c^{'}(\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1(\Omega)}), \quad c > 0, \tag{6.103}$$

où

$$E_3 = \| \Delta\alpha \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \epsilon_4(\| \nabla\alpha \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \nabla\alpha))). \tag{6.104}$$

On somme ensuite (6.99) et ϵ_5(6.103) où $\epsilon_5 > 0$ assez petit pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\frac{dE_4}{dt} + c(\| \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta\alpha \|^2) \\ &\leq c^{'}(\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2 + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \end{aligned} \tag{6.105}$$

où

$$E_4 = \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \epsilon_5 E_3. \tag{6.106}$$

On somme finalement (6.86) et ϵ_6(6.105) où $\epsilon_6 > 0$ assez petit et on obtient :

$$\frac{dE_5}{dt} + c(E_5 + \| \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c^{'}, \quad c > 0, \tag{6.107}$$

avec

$$E_5 = E_2 + \epsilon_6 E_4, \tag{6.108}$$

satisfait

$$\begin{aligned} c(\| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \Delta\alpha \|^2 \quad &+ \quad \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega G(u)dx \\ + \| \overline{\alpha} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial t} \|^2) - c^{'} \leq E_5 \quad &\leq \quad c^{''}(\| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \Delta\alpha \|^2 \\ + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| u \|^2_{H^1(\Omega)} \quad &+ \quad \int_\Omega G(u)dx + \| \overline{\alpha} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial t} \|^2) + c^{'''} \end{aligned} \tag{6.109}$$

On multiplie maintenant (6.1) par $-\Delta u$, l'inégalité de Hölder et (6.8) donnent

$$\begin{aligned} \| \Delta u \|^2 \quad &\leq \quad c(\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2) \\ &\leq \quad c(\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2_{H^1(\Omega)}), \end{aligned} \tag{6.110}$$

on déduit alors les régularités demandées. □

Le Théorème 1.7 nous amène à définir le semi-groupe $S(t), t \geq 0$ sur l'espace $F_K^{'}$. On a alors

$$S(t) : F_K^{'} \to F_K^{'}, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \tag{6.111}$$

où $(u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (6.1)-(6.4).

Théorème 1.8. *Sous les hypothèses du Théorème 1.7, le semi-groupe* $\overline{S}(t), t \geq 0$ *est dissipatif sur* $\overline{F_{0K}^{'}}$. *En d'autres termes,* $\overline{S}(t)$ *possède un ensemble borné absorbant* $\mathcal{B}_3^{'}$ *dans* $\overline{F_{0K}^{'}}$.

Démonstration: On prend les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ dans un borné de F_1, c'est-à-dire, pour tout $R_3 > 0$, on a $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in B_{R_3}, B_{R_3}$ étant la boule de F_1 de centre 0 et de rayon R_3. La relation (6.107) donne en particulier

$$\frac{dE_5}{dt} + cE_5 \leq c^{'}, \quad c > 0, \tag{6.112}$$

le lemme de Gronwall appliqué à (6.112) donne

$$E_5(t) \leq E_5(0) \exp{(-ct)} + c^{'}. \tag{6.113}$$

Par (6.109), l'estimation (6.113) devient

$$E_5(t) \leq \nu_1 \exp{(-ct)} + c^{'}, \tag{6.114}$$

avec $\nu_1 = \nu_1(R_3) > 0$. Soit maintenant $C_1 > 0$ assez grand pour que

$$\nu_1 \exp{(-ct)} + c^{'} \leq C_1.$$

On a alors

$$\| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq C_1, \quad \forall t \geq t_1, \tag{6.115}$$

avec $t_1 = t_1(R_3) := \max\{0, -\frac{1}{c} \log(\frac{C_1 - c^{'}}{\nu_1})\}$.

Finalement, par (6.97) et (6.115) et pour $t_2 = \max(t_0, t_1)$, on déduit de (6.110)

$$\| u(t) \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_2, \quad \forall t \geq t_2, \tag{6.116}$$

d'où le théorème. □

La section suivante traite le problème (6.1)-(6.4) avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2$, en se basant sur une propriété de séparation vérifiée par u.

2 Solutions et semi-groupes en dimension une et deux.

On démontre ici l'existence et l'unicité des solutions du problème $(P^{'})$ basées sur une propriété de séparation stricte, en dimension une et deux, qui va nous permettre de plus de prouver la dissipativité.

2.1 Existence et unicité.

Vu qu'on ne considère pas ici l'ensemble K utilisé dans la section précédente, on démontrera une propriété de séparation sticte afin de prouver le caractère bien posé de notre problème. On a le

Théorème 2.1. *Le champ de phase u satisfait la propriété de séparation stricte, c'est-à-dire*

$$\| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0, \tag{6.117}$$

où $\delta > 0$ (à préciser selon la dimension).

DÉMONSTRATION: On suppose à priori que $\| u_0 \|_{L^\infty} < 1$ et $\| u \|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)} < 1$.

On multiplie (6.86) par $\exp(cs)$, on a

$$\frac{d}{ds}(\exp(cs)E_2(s)) + \exp(cs)(\| \Delta u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) \leq c' \exp(cs). \tag{6.118}$$

On intègre (6.118) entre 0 et t, on aura

$$\exp(ct)E_2(t) + \int_0^t \exp(cs)(\| \Delta u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2)ds \leq c' \exp(ct) + E_2(0). \tag{6.119}$$

On multiplie (6.119) par $\exp(-ct)$, par (6.88) on aura

$$\begin{aligned} \| u(t) \|_{H^1}^2 + \| \overline{\alpha}(t) \|_{H^1}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2 &+ \int_0^t \exp(-c(t-s))(\| \Delta u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2)ds \\ \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^1}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^1}^2 &+ \| \alpha_1 \|^2) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \end{aligned} \tag{6.120}$$

On multiplie (6.99) par $\exp(cs)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(\exp(cs) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) + \exp(cs) \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \\ &\leq c' \exp(cs)(\| \overline{\alpha} \|_{H^1}^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| u \|^2). \end{aligned} \tag{6.121}$$

On intègre (6.121) entre 0 et t, on a

$$\begin{aligned} \exp(ct) \| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2 &+ \int_0^t \exp(cs) \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 ds \\ \leq c' \int_0^t \exp(cs)(\| \overline{\alpha} \|_{H^1}^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 &+ \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| u \|^2)ds + \| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \|^2 . \end{aligned} \tag{6.122}$$

On multiplie (6.122) par $\exp(-ct)$, on a

$$\begin{aligned} \| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2 &+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 ds \\ \leq c' \int_0^t \exp(-c(t-s))(\| \overline{\alpha} \|_{H^1}^2 &+ \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| u \|^2)ds \\ &+ \exp(-ct) \| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \|^2 . \end{aligned} \tag{6.123}$$

Notons que

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \|^2 \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2}^2 + \| \alpha_1 \|^2). \tag{6.124}$$

Par (6.120) et (6.124), la relation (6.123) donne

$$\begin{aligned} \| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2 &+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{H^1}^2 \, ds \\ \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2}^2 &+ \| \overline{\alpha_0} \|_{H^1}^2 + \| \alpha_1 \|^2) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \end{aligned} \tag{6.125}$$

On réécrit (6.1) sous la forme d'une équation élliptique pour $t \geq 0$ fixé,

$$-\Delta u + g(u) = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{6.126}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \tag{6.127}$$

On multiplie (6.126) par $-\Delta u$, (6.8) et les inégalités de Hölder et Young, avec $\epsilon > 0$ assez petit tel que $1 - \epsilon > 0$ donne

$$\| \Delta u \|^2 \leq c' (\| \nabla u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2). \tag{6.128}$$

Par (6.120) et (6.123) la relation (6.128) donne :

$$\| u(t) \|_{H^2}^2 \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^1}^2 + \| \alpha_1 \|^2) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \tag{6.129}$$

La relation (6.107) donne en particulier

$$\frac{dE_5}{dt} + cE_5 \leq c', \quad c > 0. \tag{6.130}$$

On multiplie (6.130) par $\exp(cs)$, on a

$$\frac{d}{ds}(\exp(cs) E_5(s)) \leq c' \exp(cs), \tag{6.131}$$

on intègre (6.131) entre 0 et t, on a

$$\exp(ct) E_5(t)) \leq c' \exp(ct) + E_5(0), \tag{6.132}$$

on multiplie (6.132) par $\exp(-ct)$, par (6.109), on aura

$$\begin{aligned} &\| \overline{\alpha}(t) \|_{H^2}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_{H^1}^2 \\ &\leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2}^2 + \| \alpha_1 \|_{H^1}^2) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \end{aligned} \tag{6.133}$$

Par (6.125),(6.129) et (6.133) on écrit

$$\begin{aligned} \| u(t) \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha}(t) \|_{H^2}^2 &+ \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_{H^1}^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2 \\ &+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{H^1}^2 \, ds \\ \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2}^2 &+ \| \alpha_1 \|_{H^1}^2) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \end{aligned} \tag{6.134}$$

En dimension une :- On réécrit (6.1) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = f$$

Par l'injection continue $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, et (6.134), f satisfait :

$$\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{L^\infty} \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c', \quad c > 0. \tag{6.135}$$

On déduit l'estimation suivante (voir chapitre 4) :

$$\begin{aligned} D(u(t))+ \| u(t) \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^2} &+ \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^1} \\ + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 &+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1} ds \\ \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} &+ \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c'. \end{aligned} \tag{6.136}$$

En particulier

$$\| u(t) \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0, \tag{6.137}$$

avec $\delta > 0$ dépend de $D(u_0), \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}, \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2(\Omega)}$ et $\| \alpha_1 \|_{H^1(\Omega)}$.

En dimension deux :- En répétant exactement pour le problème (6.1)-(6.4), les estimations qui ont donné (4.144), on écrit

$$E_6(t) \leq c' \int_0^t \exp(-c(t-s))(\| \Delta u \|^2 + \| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) ds + E_6(0) \exp(-ct). \tag{6.138}$$

avec E_6 satisfait

$$c(\| \Delta \alpha \|^2 + \| \nabla \Delta \alpha \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) \leq E_6 \leq c'(\| \Delta \alpha \|^2 + \| \nabla \Delta \alpha \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2). \tag{6.139}$$

Or par (6.134), on a

$$\begin{aligned} &\int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \Delta u \|^2 ds \\ &\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c'. \end{aligned} \tag{6.140}$$

On dérive (6.1) par rapport au temps et on écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t}) - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} = h, \tag{6.141}$$

où

$$h = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Delta \alpha - u - \frac{\partial u}{\partial t} - g'(u) \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{6.142}$$

En répétant les estimations qui ont donné (4.151), on a

$$\begin{aligned} \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 &+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 ds \\ \leq c' \int_0^t \exp(-c(t-s))(\| h \|^2 &+ \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) ds + \exp(-ct) \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(0) \|^2 . \end{aligned} \tag{6.143}$$

Lemme 2.2. $\forall M > 0$:

$$\begin{aligned} &\int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp(M|g(u(x,t))|) dx dt \\ &\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c' \end{aligned} \tag{6.144}$$

où c' est une constante qui dépend de M.

PREUVE: On reécrit (6.1) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = f. \tag{6.145}$$

Par (6.134) on a

$$\| f(t) \|_{H^1}^2 \leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_{H^1(\Omega)}^2) \exp(-ct) + c^{'}. \tag{6.146}$$

On suppose (4.155) vérifiée et on fixe $M > 0$. On multiplie ensuite (6.145) par $g(u)\exp(M|g(u)|)$ on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega G_M(u)dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 g^{'}(u)(1 + M|g(u)|)\exp(M|g(u)|)dx$$
$$+ \int_\Omega |g(u)|^2 \exp(M|g(u)|)dx = \int_\Omega f.g(u)\exp(M|g(u)|)dx, \tag{6.147}$$

où $G_M(s) = \int_0^s \tau \exp(M|\tau|)d\tau$.

On intègre (6.147) entre t et $t+1$, on déduit alors

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(M|g(u)|)dxdt$$
$$\leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2}^2 + \| \alpha_1 \|_{H^1}^2)\exp(-ct) + c^{'}$$
$$+ \int_{(t,t+1)\times\Omega} |f|.|g(u)|\exp(M|g(u)|)dxdt. \tag{6.148}$$

En utilisant l'inégalité de Young et en choisissant $N = N(M)$ assez grand (voir chapitre 4), on trouve

$$|f|.|g(u)|\exp(M|g(u)|) \leq \exp(N|f|) + \frac{1}{2}|g(u)|^2\exp(M|g(u)|) + c, \tag{6.149}$$

où c est constante qui dépend de M seulement .

On déduit alors de (6.148) et de (6.149) l'inégalité suivante :

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(M|g(u)|)dxdt$$
$$\leq Q(D(u_0) + \| u_0 \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| \alpha_1 \|_{H^1(\Omega)}^2)\exp(-ct) + c^{'}$$
$$+ 2\int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp(N|f|)dxdt, \tag{6.150}$$

où $c^{'}$ est une constante qui dépend de M seulement.

En utilisant l'inégalité d'Orlicz (voir (4.164)) et par (6.146), on a

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp(N|f|)dxdt$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c^{'}. \tag{6.151}$$

En insérant (6.151) dans (6.150), on a

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(M|g(u)|) dxdt$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c^{'}, \tag{6.152}$$

on déduit alors le résultat. □

Or on a

$$\int_{(t,t+1)\times\Omega} |g'(s)|^p dxdt \leq \int_{(t,t+1)\times\Omega} \exp(cp|g(u)| + c^{'}p) dxdt. \tag{6.153}$$

Par (6.144), on déduit de (6.153) que

$$\| g^{'}(u) \|_{L^p((t,t+1)\times\Omega)}$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c^{'}. \tag{6.154}$$

Donc h vérifie

$$\| h \|_{L^2((t,t+1)\times\Omega)} \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c^{'}, \tag{6.155}$$

et on a

$$\begin{array}{rcl} \int_0^t e^{c(s-t)} \| h \|^2 ds & \leq & (\text{par} \quad (6.155)) \\ \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} & + & \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c^{'}. \end{array} \tag{6.156}$$

On a de plus

$$\| \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(0) \|^2 \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}). \tag{6.157}$$

En insérant (6.156) et (6.157) dans (6.143) et par (6.136), on déduit

$$\begin{array}{rcl} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1} & + & \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^2} ds \\ \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} & + & \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp(-ct) + c^{'}. \end{array} \tag{6.158}$$

Par (6.136),(6.139),(6.140) et (6.158), on déduit de (6.138) :

$$\| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^2}$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2(\Omega)}) \exp(-ct) + c'. \tag{6.159}$$

En regroupant les résultats précédents , on aura finalement

$$D(u(t))+ \| u \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha} \|^2_{H^3} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1}$$

$$+ \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^2} ds$$

$$\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}, \quad c > 0. \tag{6.160}$$

Or $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ injection continue en dimension deux, donc

$$\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{L^\infty} \leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}. \tag{6.161}$$

On déduit alors la propriété de séparation comme dans le cas de dimension une, et on aura

$$\| u(t) \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0, \tag{6.162}$$

avec $\delta > 0$ dépend de $D(u_0), \| u_0 \|_{H^3(\Omega)}, \| \overline{\alpha_0} \|_{H^3(\Omega)}$ et $\| \alpha_1 \|_{H^2(\Omega)}$,

d'où le Théorème. □

Ainsi, le paramètre d'ordre u est strictement séparé des phases pures ± 1, et on a le,

Théorème 2.3. *(i) En dimension une, on suppose que*

$$D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1} < +\infty, D(u_0) > 0. \tag{6.163}$$

Donc le problème (6.1)-(6.4) possède une unique solution telle que

$$D(u(t))+ \| u(t) \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^1} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2$$
$$+ \int_0^t \exp{(-c(t-s))} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1} \, ds$$
$$\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}, c > 0, t \geq 0. \tag{6.164}$$

(ii) En dimension deux, on suppose que

$$D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2} < +\infty, D(u_0) > 0. \tag{6.165}$$

Donc le problème (6.1)-(6.4) possède une unique solution telle que

$$D(u(t))+ \| u(t) \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^3} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2_{H^1}$$
$$+ \int_0^t \exp{(-c(t-s))} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^2} \, ds$$
$$\leq Q(D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2(\Omega)}) \exp{(-ct)} + c^{'}, c > 0, t \geq 0. \tag{6.166}$$

DÉMONSTRATION: **Existence.** Pour l'existence d'une solution du problème (6.1)-(6.4), on régularise tout d'abord la fonction g par une fonction g_δ de classe C^1 définie par :

$$g_\delta(s) = \begin{cases} g(-\delta) + g^{'}(-\delta)(s+\delta) & , \quad s \in (-\infty, -\delta[, \\ g(s) & , \quad s \in [-\delta, \delta], \\ g(\delta) + g^{'}(\delta)(s-\delta) & , \quad s \in]\delta, +\infty), \end{cases}$$

où δ est la constante qui apparaît dans (6.117). On peut choisir $-\delta$ suffisemment proche de -1, telle que

$$g(-\delta) \leq 0 \quad \text{et} \quad g^{'}(-\delta) \leq 0.$$

On considère alors le même problème défini par (6.1)-(6.4) avec g_δ à la place de g et u_δ au lieu de u, à savoir

$$(P_\delta^{'}) \begin{cases} \dfrac{\partial u_\delta}{\partial t} - \Delta u_\delta + g_\delta(u_\delta) &= \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -\dfrac{\partial u_\delta}{\partial t} - u_\delta, \\ \dfrac{\partial u_\delta}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial \nu} &= 0, \\ u_\delta(0) = u_0^\delta, \quad \alpha(0) = \alpha_0, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1. \end{cases}$$

On a que g_δ vérifie les conditions vérifiées par g_N donc d'après le chapitre 5, on a l'existence d'une solution régulière $(u_\delta, \alpha_\delta, \dfrac{\partial \alpha_\delta}{\partial t})$ pour le problème $(P_\delta^{'})$. De plus, on sait que le problème $(P^{'})$ admet une solution si les fonctions g_δ et G_δ satisfont les mêmes propriétés que g et G (voir [21]). Pour cela on énonce le lemme suivant.

Lemme 2.4. *On pose*

$$G_\delta = \int_0^s g_\delta(\tau) d\tau.$$

Les fonctions g_δ et G_δ possèdent les propriétés suivantes :

$$g_\delta^{'}(s) \geq -\lambda \quad et \quad -c_0 \leq G_\delta(s), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

où c_0 et λ sont les constantes positives qui apparaissent dans (6.7) et (6.8).

PREUVE: On considère le cas $s \in (-\infty, -\delta[$ (les autres cas se traitent d'une façon similaire), et on a

$$g_\delta(s) = g(-\delta) + g^{'}(-\delta)(s+\delta).$$

Donc il est clair que

$$g_\delta^{'}(s) = g^{'}(-\delta) \geq -\lambda, \quad \forall s \in (-\infty, -\delta[.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} G_\delta(s) &= \int_0^s g_\delta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{-\delta} g_\delta(\tau) d\tau + \int_{-\delta}^s g_\delta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{-\delta} g(\tau) d\tau + \int_{-\delta}^s g_\delta(\tau) d\tau \\ &= G(-\delta) - \int_s^{-\delta} g_\delta(\tau) d\tau \\ &\geq -c_0 (\text{car} \quad \int_s^{-\delta} g_\delta(\tau) d\tau \leq 0). \end{aligned}$$

□

Donc les estimations établies ci-dessus sont vraies ici. En particulier,

$$\| u_\delta(t) \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0,$$

par suite,

$$g_\delta(u_\delta) = g(u_\delta),$$

et u_δ est également solution de (6.1)-(6.4).

Unicité. Soit $\left(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}\right)$ et $\left(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\right)$ deux solutions du problème (P'), avec $\left(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\right)$ et $\left(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\right)$ leurs données initiales respectivement. On pose :

$$\left(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) = \left(u^{(1)} - u^{(2)}, \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\right)$$

et

$$\left(u_0, \alpha_0, \alpha_1\right) = \left(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}, \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}\right)$$

Alors $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u^{(1)}) - g(u^{(2)}) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{6.167}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{6.168}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0, \tag{6.169}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{6.170}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + l(t)u = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{6.171}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{6.172}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0, \tag{6.173}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{6.174}$$

où $l(t) = \int_0^1 g'(su^{(1)}(t) + (1-s)u^{(2)}(t))ds$.

Or en dimension une, on a par (6.137) et pour tout $t \geq 0$,

$$\| u^{(i)}(t) \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta_i, \quad \delta_i = \delta_i(D(u_0^{(i)}), \| u_0^{(i)} \|_{H^2}, \| \overline{\alpha_0^{(i)}} \|_{H^2}, \| \alpha_1^{(i)} \|_{H^1}), \quad i = 1, 2.$$

On prend $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$, on déduit

$$\| su^{(1)}(t) + (1-s)u^{(2)}(t) \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta_0, \quad \forall \quad 0 \leq s \leq 1,$$

donc

$$\| l(t) \|_{L^\infty} \leq C(= C(\delta_0)). \tag{6.175}$$

Remarque 2.5. *En dimension deux, on a*

$$\delta_i = \delta_i(D(u_0^{(i)}), \| u_0^{(i)} \|_{H^3}, \| \overline{\alpha_0^{(i)}} \|_{H^3}, \| \alpha_1^{(i)} \|_{H^2}), \quad i = 1, 2.$$

En répétant exactement les estimations qui ont donné (4.207)(voir chapitre 4), c'est-à-dire en multipliant (6.171) par $u+\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et (6.172) par $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$, en intégrant ensuite sur Ω, et en additionnant les équations résultantes, on obtient par (6.8) et (6.175) l'estimation suivante

$$\frac{dE_7}{dt} \leq cE_7, \tag{6.176}$$

où

$$E_7 = \parallel u \parallel^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2 . \tag{6.177}$$

On applique le lemme de Gronwall à (6.176), on a

$$E_7(t) \leq \exp{(ct)} E_7(0). \tag{6.178}$$

Par (6.177), la relation (6.178) donne en particulier

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq c' E_7(0), \tag{6.179}$$

où c' dépend de T et de δ_0.

On intègre (6.172) sur Ω et en procédant comme dans le paragraphe 6.1.2, on aura

$$< H(t) >= \exp{(-t)} < H(0) >, \tag{6.180}$$

toujours avec $H = u + \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$. Donc

$$\frac{d < \alpha >}{dt}(t) = \exp{(-t)} < H(0) > - < u(t) > . \tag{6.181}$$

On intègre (6.181) entre 0 et t, par (6.77) on a

$$< \alpha(t) >=< \alpha_0 > - \int_0^t < u(s) > ds, \tag{6.182}$$

Par (6.179) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation (6.182) donne

$$< \alpha(t) >^2 \leq c_T(\parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} + E_7(0) + \parallel \alpha_0 \parallel^2), \quad t \in [0,T]. \tag{6.183}$$

Par (6.177), la relation (6.178) donne

$$\begin{aligned} \parallel u(t) \parallel^2_{H^1} + \parallel \nabla\alpha(t) \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \parallel^2 \;&\leq\; \exp{(ct)}(\parallel u_0 \parallel^2_{H^1} + \parallel \nabla\alpha_0 \parallel^2 + \parallel \alpha_1 \parallel^2) \\ &\leq\; c'(\parallel u_0 \parallel^2_{H^1} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^1} + \parallel \alpha_1 \parallel^2), \end{aligned} \tag{6.184}$$

où c' dépend de T et de δ_0.

On intègre (6.184) entre 0 et T, on aura en particulier

$$\parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leq c_T(\parallel u_0 \parallel^2_{H^1} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^1} + \parallel \alpha_1 \parallel^2), \quad t \in [0,T]. \tag{6.185}$$

En insérant (6.185) dans (6.183) on obtient

$$< \alpha(t) >^2 \leq c(\parallel u_0 \parallel^2_{H^1} + \parallel \alpha_0 \parallel^2_{H^1} + \parallel \alpha_1 \parallel^2), \quad t \in [0,T]. \tag{6.186}$$

En combinant (6.184) et (6.186) on a

$$\| u(t) \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \alpha(t) \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t) \|^2 \leq c(\| u_0 \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \alpha_0 \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2), \tag{6.187}$$

où c dépend de T et de δ_0.

Donc on déduit l'unicité ainsi que la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales. □

2.2 Notations.

Soit les espaces suivants

$$\Phi = \{(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) \in F_1, \| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} < 1\},$$
$$\Psi = \{(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) \in F_2, \| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} < 1\},.$$

D'après le Théorème 2.3 (i), on construit le semi-groupe continu

$$S(t) : \Phi \longrightarrow \Phi, (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \to (u(t), \alpha(t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

D'après le Théorème 2.3 (ii), on construit le semi-groupe continu

$$S(t) : \Psi \longrightarrow \Psi, (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \to (u(t), \alpha(t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

où $(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t})$ est l'unique solution de (P').

En vue de la remarque 2.1, $S(t)$ n'est pas dissipative ni dans Φ ni dans Ψ, on pose alors

$$\overline{F_1} = H^2(\Omega) \times \overline{H^2}(\Omega) \times H^1(\Omega),$$
$$\overline{\Phi} = \{(u, \overline{\alpha}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) \in \overline{F_1} / \| u \|_{L^\infty} < 1\},$$
$$\overline{H^3}(\Omega) = \{\varphi \in H^3(\Omega), <\varphi>= 0\},$$
$$\overline{F_2} = H^3(\Omega) \times \overline{H^3}(\Omega) \times H^2(\Omega),$$
$$\overline{\Psi} = \{(u, \overline{\alpha}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) \in \overline{F_2} / \| u \|_{L^\infty} < 1\}.$$

Donc on aura que la famille d'opérateurs $\overline{S}(t)$ défini par :

$$\overline{S}(t) : \quad (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \to (u(t), \overline{\alpha}(t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

est dissipative respectivement sur $\overline{\Phi}$ et $\overline{\Psi}$. En vue de la remarque 2.2, on introduit de plus les espaces suivants :

$$\overline{\Phi_0} = \{(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) \in \overline{\Phi}, < u + \frac{\partial\alpha}{\partial t} >= 0\},$$

et

$$\overline{\Psi_0} = \{(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) \in \overline{\Psi}, < u + \frac{\partial\alpha}{\partial t} >= 0\}.$$

Donc $\overline{S}(t)$ est un semi-groupe dissipatif sur $\overline{\Phi_0}$ et $\overline{\Psi_0}$ respectivement.

2.3 Dissipativité

Théorème 2.6. *le semi-groupe* $\overline{S}(t), t \geq 0$, *est dissipatif sur* $\overline{\Phi_0}$. *En d'autres termes, le semi-groupe* $\overline{S}(t), t \geq 0$, *possède un ensemble borné absorbant* $\mathcal{B}_R^1$ *dans* $\overline{\Phi_0}$.

DÉMONSTRATION: En prenant

$$D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1(\Omega)} \leq R, \quad R > 0, \tag{6.188}$$

on obtient que $\mathcal{B}_R^1$ est un ensemble borné absorbant pour $\overline{S}(t)$, où

$$\mathcal{B}_R^1 = \{(u, \overline{\alpha}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in \overline{F_1}, D(u(t))+ \| u \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha} \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^1} \leq R\}.$$

En effet, par (6.164) on a

$$D(u(t))+ \| u(t) \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^1} \leq R, \quad \forall t \geq t_2. \tag{6.189}$$

où $t_2 := \max\{0, -\frac{1}{c}\log(\frac{R - c'}{c(R)})\}$.

□

Théorème 2.7. *le semi-groupe* $\overline{S}(t), t \geq 0$, *est dissipatif sur* $\overline{\Psi_0}$. *En d'autres termes, le semi-groupe* $\overline{S}(t), t \geq 0$, *possède un ensemble borné absorbant* $\mathcal{B}_R^2$ *dans* $\overline{\Psi_0}$.

DÉMONSTRATION: En prenant

$$D(u_0)+ \| u_0 \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2(\Omega)} \leq R, \quad R > 0, \tag{6.190}$$

on obtient que $\mathcal{B}_R^2$ est un ensemble borné absorbant pour $\overline{S}(t)$, où

$$\mathcal{B}_R^2 = \{(u, \overline{\alpha}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in \overline{F_2}, D(u(t))+ \| u \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha} \|^2_{H^3} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^2} \leq R\}.$$

En effet, par (6.166), on a

$$D(u(t))+ \| u(t) \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha}(t) \|^2_{H^3} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^2} \leq R, \quad \forall t \geq t_3. \tag{6.191}$$

où $t_3 := \max\{0, -\frac{1}{c}\log(\frac{R - c'}{c(R)})\}$.

□

3 Attracteur global.

On commence à énoncer en dimension une, le

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.6, le semi-groupe* $\overline{S}(t), t \geq 0$, *défini de* $\overline{\Phi_0}$ *dans lui-même possède l'attracteur global connexe noté* $\overline{\mathcal{A}}_1$ *dans* $\overline{\Phi_0}$.

Démonstration: En vue de la remarque 3.2 donnée au chapitre 4, on décompose la solution du problème $(P^{'})$ de la façon suivante

$$(u,\alpha,\frac{\partial\alpha}{\partial t})=(u^d,\alpha^d,\frac{\partial\alpha^d}{\partial t})+(u^c,\alpha^c,\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}),$$

où $(u^d,\alpha^d,\frac{\partial\alpha^d}{\partial t})$ est solution de

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^d}{\partial t}+u^d-\Delta u^d &= \frac{\partial\alpha^d}{\partial t}, &(6.192)\\ \frac{\partial^2\alpha^d}{\partial t^2}+\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}-\Delta\alpha^d &= -\frac{\partial u^d}{\partial t}-u^d, &(6.193)\\ \frac{\partial u^d}{\partial\nu}=\frac{\partial\alpha^d}{\partial\nu} &= 0, &(6.194)\end{aligned}$$

$$u^d(0)=u_0,\qquad \alpha^d(0)=\alpha_0\quad,\quad \frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(0)=\alpha_1, \tag{6.195}$$

et $(u^c,\alpha^c,\frac{\partial\alpha^c}{\partial t})$ est solution de

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^c}{\partial t}+u^c-\Delta u^c+f(u) &= \frac{\partial\alpha^c}{\partial t}, &(6.196)\\ \frac{\partial^2\alpha^c}{\partial t^2}+\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}-\Delta\alpha^c &= -\frac{\partial u^c}{\partial t}-u^c, &(6.197)\\ \frac{\partial u^c}{\partial\nu}=\frac{\partial\alpha^c}{\partial\nu}=0, &&(6.198)\end{aligned}$$

$$u^c(0)=0,\quad \alpha^c(0)=0\quad,\quad \frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(0)=0, \tag{6.199}$$

où $f(s)=g(s)-s$ (f et g satisfaient les mêmes propriétés). On prend les données initiales dans $\mathcal{B}^1_R$. On multiplie (6.192) par $-\Delta u^d$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\nabla u^d\parallel^2+\parallel\nabla u^d\parallel^2+\parallel\Delta u^d\parallel^2=((\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t},\nabla u^d)). \tag{6.200}$$

On multiplie (6.192) par $-\Delta\frac{\partial u^d}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\nabla u^d\parallel^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\Delta u^d\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial u^d}{\partial t}\parallel^2=((\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t},\nabla\frac{\partial u^d}{\partial t})). \tag{6.201}$$

On multiplie (6.193) par $-\Delta\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}\parallel^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\Delta\alpha^d\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}\parallel^2=-((\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t},\nabla\frac{\partial u^d}{\partial t}))-((\nabla u^d,\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t})). \tag{6.202}$$

On additionne (6.200),(6.201) et (6.202) on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2\parallel\nabla u^d\parallel^2+\parallel\Delta u^d\parallel^2 &+ \parallel\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}\parallel^2+\parallel\Delta\alpha^d\parallel^2)\\ +\parallel\nabla u^d\parallel^2+\parallel\Delta u^d\parallel^2 &+ \parallel\nabla\frac{\partial u^d}{\partial t}\parallel^2+\parallel\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}\parallel^2=0.\end{aligned} \tag{6.203}$$

On pose $H_1 = u^d + \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}$, par analogie avec la relation (6.78), on écrit

$$\frac{\partial \overline{H_1}}{\partial t} + \overline{H_1} - \Delta \overline{\alpha^d} = 0. \tag{6.204}$$

On multiplie (6.204) par $-\Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, en utilisant les inégalités de Hölder et Young, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \Delta \alpha^d \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2) + \| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2$$

$$\leq \frac{1}{2\epsilon_7}(\| \nabla u^d \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2) + \epsilon_7 \| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 . \tag{6.205}$$

On multiplie (6.204) par $-\Delta \alpha^d$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \nabla \alpha^d \|^2 + 2((\nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \nabla \alpha^d))) + \| \Delta \alpha^d \|^2$$

$$= -((\nabla u^d, \nabla \alpha^d)) - ((\nabla \frac{\partial u^d}{\partial t}, \nabla \alpha^d)) + \| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2,$$

en utilisant l'inégalité

$$\| \overline{\varphi} \|^2_{H^2(\Omega)} \leq c \| \Delta \varphi \|^2, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega), \quad c > 0, \tag{6.206}$$

avec les inégalités de Hölder et Young, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \nabla \alpha^d \|^2 + 2((\nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \nabla \alpha^d))) + \| \Delta \alpha^d \|^2$$

$$\leq \frac{1}{2\epsilon_7}(\| \nabla u^d \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2) + c\epsilon_7 \| \Delta \alpha^d \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 . \tag{6.207}$$

On additionne (6.205) et ϵ_7(6.207) et on choisit $\epsilon_7 > 0$ assez petit tel que $1 - 2\epsilon_7 > 0$ et $2 - c\epsilon_7 > 0$, on déduit alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\| \Delta \alpha^d \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 + \epsilon_7 \| \nabla \alpha^d \|^2 \quad &+ \quad 2\epsilon_7((\nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \nabla \alpha^d))) \\ + c(\| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \alpha^d \|^2) \quad &\leq \quad c'(\| \nabla u^d \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \end{aligned} \tag{6.208}$$

et on a en particulier

$$\| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 + \epsilon_7 \| \nabla \alpha^d \|^2 + 2\epsilon_7((\nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \nabla \alpha^d)) \geq c(\| \nabla \alpha^d \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2), \quad c > 0. \tag{6.209}$$

Ensuite on additionne (6.203) et ϵ_8(6.208) où $\epsilon_8 > 0$ assez petit tel que $2 - c'\epsilon_8 > 0$ pour obtenir

$$\frac{dE_8}{dt} + c(E_8 + \| \nabla \frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2) \leq 0, \quad c > 0, \tag{6.210}$$

où

$$\begin{aligned} E_8 = 2 \parallel \nabla u^d \parallel^2 + \parallel \Delta u^d \parallel^2 &+ \parallel \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta \alpha^d \parallel^2 \\ + \epsilon_8 (\parallel \Delta \alpha^d \parallel^2 + \parallel \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \parallel^2 &+ \epsilon_7 \parallel \nabla \alpha^d \parallel^2 + 2\epsilon_7 ((\nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \nabla \alpha^d))). \end{aligned} \tag{6.211}$$

La relation (6.210) donne en particulier

$$\frac{dE_8}{dt} + cE_8 \leq 0, \tag{6.212}$$

on applique le lemme de Gronwall à (6.212), on a

$$E_8(t) \leq \exp(-ct) E_8(0), \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{6.213}$$

Par (6.209) et (6.211), la relation (6.213) donne

$$\parallel \Delta u^d \parallel^2 + \parallel \overline{\alpha^d} \parallel^2_{H^2} + \parallel \nabla \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \parallel^2 \leq c' \exp(-ct)(\parallel u_0 \parallel^2_{H^2} + \parallel \overline{\alpha_0} \parallel^2_{H^2} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^1}). \tag{6.214}$$

On multiplie (6.192) par $u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t}$ et (6.193) par $\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}$ et on somme les équations résultantes, on aura

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(2 \parallel u^d \parallel^2 + \parallel \nabla u^d \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha^d \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \parallel^2) \\ &+ 2(\parallel u^d \parallel^2 + \parallel \nabla u^d \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u^d}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \parallel^2) = 0. \end{aligned} \tag{6.215}$$

Considérons (6.204) et en répétant exactement les estimations qui ont donné (6.83) on obtient une inégalité de la forme

$$\frac{dE_9}{dt} + c(E_9 + \parallel \frac{\partial u^d}{\partial t} \parallel^2) \leq 0, \quad c > 0, \tag{6.216}$$

où

$$\begin{aligned} E_9 = 2 \parallel u^d \parallel^2 + \parallel \nabla u^d \parallel^2 &+ \parallel \nabla \alpha^d \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \parallel^2 \\ + \epsilon_{10} \Big(\parallel \frac{\partial \overline{\alpha^d}}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha^d \parallel^2 &+ \epsilon_9 (\parallel \overline{\alpha^d} \parallel^2 + 2((\frac{\partial \overline{\alpha^d}}{\partial t}, \overline{\alpha^d}))) \Big), \end{aligned} \tag{6.217}$$

ici, $\epsilon_9 > 0$ et $\epsilon_{10} > 0$ sont assez petits tels qu'en particulier

$$\parallel \frac{\partial \overline{\alpha^d}}{\partial t} \parallel^2 + \epsilon_9 (\parallel \overline{\alpha^d} \parallel^2 + 2((\frac{\partial \overline{\alpha^d}}{\partial t}, \overline{\alpha^d}))) \geq c(\parallel \overline{\alpha^d} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \overline{\alpha^d}}{\partial t} \parallel^2), \quad c > 0. \tag{6.218}$$

La relation (6.216) donne en particulier

$$\frac{dE_9}{dt} + cE_9 \leq 0, \tag{6.219}$$

on applique le lemme de Gronwall à (6.219), on aura

$$E_9(t) \leq \exp(-ct) E_9(0), \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{6.220}$$

Par (6.217) et (6.218) la relation (6.220) donne

$$\| u^d \|_{H^1}^2 + \| \overline{\alpha^d} \|_{H^1}^2 + \| \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 \leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2}^2 + \| \alpha_1 \|_{H^1}^2). \tag{6.221}$$

En combinant (6.214) et (6.221) on aura

$$\begin{aligned} &\| u^d(t) \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha^d}(t) \|_{H^2}^2 + \| \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}(t) \|_{H^1}^2 \\ &\leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|_{H^2}^2 + \| \overline{\alpha_0} \|_{H^2}^2 + \| \alpha_1 \|_{H^1}^2). \end{aligned} \tag{6.222}$$

On voit bien que les opérateurs $S_1(t)$ tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

On multiplie (6.196) par $-\Delta u^c$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla u^c \|^2 + \| \nabla u^c \|^2 + \| \Delta u^c \|^2 - ((f(u), \Delta u^c)) = ((\nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \nabla u^c)). \tag{6.223}$$

On multiplie (6.196) par $-\Delta \frac{\partial u^c}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\| \nabla \frac{\partial u^c}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla u^c \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta u^c \|^2 - ((f(u), \Delta \frac{\partial u^c}{\partial t})) = ((\nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \nabla \frac{\partial u^c}{\partial t})). \tag{6.224}$$

On multiplie (6.197) par $-\Delta \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}$ et on intègre sur Ω on a

$$\| \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta \alpha^c \|^2 = -((\nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \nabla \frac{\partial u^c}{\partial t})) - ((\nabla u^c, \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t})). \tag{6.225}$$

On additionne (6.223),(6.224) et (6.225) on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(2 \| \nabla u^c \|^2 + \| \Delta u^c \|^2 + \| \Delta \alpha^c \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2) \\ &+ c(\| \nabla u^c \|^2 + \| \Delta u^c \|^2 + \| \nabla \frac{\partial u^c}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2) \leq c^{'} \| f^{'}(u) \nabla u \|^2, \quad c > 0. \end{aligned} \tag{6.226}$$

On multiplie (6.196) par $\Delta^2 \frac{\partial u^c}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, en utilisant les inégalités de Young et Hölder, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\| \Delta u^c \|^2 + \| \nabla \Delta u^c \|^2) + \| \Delta \frac{\partial u^c}{\partial t} \|^2 \leq \| \Delta f(u) \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 . \tag{6.227}$$

On multiplie (6.197) par $\Delta^2 \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\| \Delta \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \Delta \alpha^c \|^2) + \| \Delta \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 \leq c(\| \Delta u^c \|^2 + \| \Delta \frac{\partial u^c}{\partial t} \|^2). \tag{6.228}$$

On additionne (6.226),(6.227) et δ_6(6.228) où $\delta_6 > 0$ est assez petit, on trouve

$$\frac{d\psi_1}{dt} \leq c(\psi_1 + \| \Delta f(u) \|^2 + \| f^{'}(u) \nabla u \|^2), \tag{6.229}$$

où

$$\psi_1 = 2 \parallel \Delta u^c \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u^c \parallel^2 + 2 \parallel \nabla u^c \parallel^2 + \parallel \Delta\alpha^c \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2$$
$$+ \delta_6(\parallel \nabla\Delta\alpha^c \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2). \tag{6.230}$$

Par (6.164) on a

$$\parallel \Delta f(u) \parallel^2 + \parallel f^{'}(u)\nabla u \parallel^2 \leq c^{'}, \quad \forall t \geq 0, \tag{6.231}$$

où c dépend de $D(u_0), \parallel u_0 \parallel_{H^2}, \parallel \overline{\alpha_0} \parallel_{H^2}$ et $\parallel \alpha_1 \parallel_{H^1}$.

Par (6.231), la relation (6.229) donne

$$\frac{d\psi_1}{dt} \leq c\psi_1 + c^{'}. \tag{6.232}$$

On applique le lemme de Gronwall à (6.232) et en notant que $\psi_1(0) = 0$, on obtient

$$\psi_1(t) \leq C_{T,\|u_0\|_{H^2},\|\overline{\alpha_0}\|_{H^2},\|\alpha_1\|_{H^1},\mathcal{B}^1_R}. \tag{6.233}$$

Par (6.230), la relation (6.233) donne

$$\parallel \nabla\Delta u^c \parallel^2 + \parallel \overline{\alpha^c} \parallel^2_{H^3} + \parallel \Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2 \leq C_{T,\|(u_0,\overline{\alpha_0},\alpha_1)\|_{F_1},\mathcal{B}^1_R}. \tag{6.234}$$

On multiplie (6.196) par $u^c + \frac{\partial u^c}{\partial t}$ et (6.197) par $\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}$ et on additionne les équations résultantes on aura

$$\frac{d}{dt}(2 \parallel u^c \parallel^2 + \parallel \nabla u^c \parallel^2 + \parallel \nabla\alpha^c \parallel^2 + \parallel \frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2)$$
$$+ c(\parallel u^c \parallel^2 + \parallel \nabla u^c \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u^c}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2) \leq c^{'} \parallel f(u) \parallel^2 . \tag{6.235}$$

On additionne (6.235),(6.224) et δ_7(6.225), où $\delta_7 > 0$ assez petit, et en utilisant les inégalités de Hölder et Young, on déduit

$$\frac{d\psi_2}{dt} \leq c(\psi_2 + \parallel f(u) \parallel^2 + \parallel f^{'}(u)\nabla u \parallel^2), \tag{6.236}$$

où

$$\psi_2 = 2 \parallel u^c \parallel^2 + 2 \parallel \nabla u^c \parallel^2 + \parallel \nabla\alpha^c \parallel^2 + \parallel \frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta u^c \parallel^2$$
$$+ \delta_7(\parallel \Delta\alpha^c \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2). \tag{6.237}$$

De même par (6.164) et le lemme de Gronwall, on déduit

$$\psi_2(t) \leq C_{T,\|u_0\|_{H^2},\|\overline{\alpha_0}\|_{H^2},\|\alpha_1\|_{H^1},\mathcal{B}^1_R}. \tag{6.238}$$

Donc par (6.237) et (6.238) on aura

$$\parallel u^c \parallel^2_{H^2} + \parallel \Delta\alpha^c \parallel^2 + \parallel \frac{\partial\alpha^c}{\partial t} \parallel^2_{H^1} \leq C_{T,\|u_0\|_{H^2},\|\overline{\alpha_0}\|_{H^2},\|\alpha_1\|_{H^1},\mathcal{B}^1_R}. \tag{6.239}$$

En combinant (6.234) et (6.239), on obtient

$$\| u^c(t) \|_{H^3}^2 + \| \overline{\alpha^c}(t) \|_{H^3}^2 + \| \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|_{H^2}^2 \leq C_{T,\|u_0\|_{H^2},\|\overline{\alpha_0}\|_{H^2},\|\alpha_1\|_{H^1},\mathcal{B}_R^1}, \tag{6.240}$$

d'où le théorème. □

Conçernant la dimension deux, on énonce le théorème suivant

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.7, le semi-groupe* $\overline{S}(t), t \geq 0$, *défini de* $\overline{\Psi_0}$ *dans lui-même possède l'attracteur global connexe noté* $\overline{\mathcal{A}}_2$ *dans* $\overline{\Psi_0}$.

DÉMONSTRATION: Dans ce cas, on prend les données initiales dans $\mathcal{B}_R^2$, où $\mathcal{B}_R^2$ est le borné absorbant de $\overline{S}(t)$ dans $\overline{\Psi_0}$.

On multiplie (6.192) par $\Delta^2 u^d + \Delta^2 \frac{\partial u^d}{\partial t}$ et (6.193) par $\Delta^2 \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}$. On additionne les équations résultantes, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2 \| \Delta u^d \|^2 + \| \nabla \Delta u^d \|^2 \quad &+ \quad \| \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \Delta \alpha^d \|^2) \\ + \| \Delta u^d \|^2 + \| \nabla \Delta u^d \|^2 \quad &+ \quad \| \Delta \frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 = 0. \end{aligned} \tag{6.241}$$

On multiplie (6.204) par $\Delta^2 \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla \Delta \alpha^d \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2) + \| \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 \leq c(\| \Delta u^d \|^2 + \| \Delta \frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2). \tag{6.242}$$

On multiplie (6.204) par $\Delta^2 \alpha^d$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \Delta \alpha^d \|^2 + 2((\Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \Delta \alpha^d))) + \| \nabla \Delta \alpha^d \|^2$$

$$= -((\Delta u^d, \Delta \alpha^d)) - ((\Delta \frac{\partial u^d}{\partial t}, \Delta \alpha^d)) + \| \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2,$$

en utilisant l'inégalité

$$\| \overline{\varphi} \|_{H^3(\Omega)}^2 \leq c \| \nabla \Delta \varphi \|^2, \quad \forall \varphi \in H^3(\Omega), \quad c > 0, \tag{6.243}$$

avec les inégalités de Hölder et Young, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \Delta \alpha^d \|^2 + 2((\Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \Delta \alpha^d))) + \| \nabla \Delta \alpha^d \|^2$$

$$\leq \frac{1}{2\epsilon}(\| \Delta u^d \|^2 + \| \Delta \frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2) + c\epsilon \| \nabla \Delta \alpha^d \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 . \tag{6.244}$$

On additionne (6.242) et ϵ(6.244) et on choisit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $1 - 2\epsilon > 0$ et $2 - c\epsilon > 0$, on déduit alors

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla \Delta \alpha^d \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 + \epsilon \| \Delta \alpha^d \|^2 + 2\epsilon((\Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \Delta \alpha^d)))$$

$$+ c(\| \Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha^d \|^2) \leq c^{'}(\| \Delta u^d \|^2 + \| \Delta\frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2), \tag{6.245}$$

et on a en particulier

$$\| \Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 +\epsilon \| \Delta\alpha^d \|^2 +2\epsilon((\Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \Delta\alpha^d)) \geq c(\| \Delta\alpha^d \|^2 + \| \Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2), \quad c > 0. \tag{6.246}$$

Ensuite on additionne (6.241) et $\epsilon^{'}$(6.245) où $\epsilon^{'} > 0$ assez petit tel que $2 - c^{'}\epsilon^{'} > 0$ pour obtenir

$$\frac{d\psi_3}{dt} + c(\psi_3 + \| \Delta\frac{\partial u^d}{\partial t} \|^2) \leq 0, \quad c > 0, \tag{6.247}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_3 = 2 \| \Delta u^d \|^2 + \| \nabla\Delta u^d \|^2 &+ \| \Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha^d \|^2 \\ +\epsilon^{'}(\| \nabla\Delta\alpha^d \|^2 + \| \Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 &+ \epsilon \| \Delta\alpha^d \|^2 +2\epsilon((\Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \Delta\alpha^d))). \end{aligned} \tag{6.248}$$

La relation (6.247) donne en particulier

$$\frac{d\psi_3}{dt} + c\psi_3 \leq 0, \tag{6.249}$$

on applique le lemme de Gronwall à (6.249), on a

$$\psi_3(t) \leq \exp(-ct)\psi_3(0), \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{6.250}$$

Par (6.246) et (6.248), la relation (6.250) donne

$$\| \nabla\Delta u^d \|^2 + \| \overline{\alpha^d} \|^2_{H^3} + \| \Delta\frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2 \leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2}). \tag{6.251}$$

Par (6.222) et l'injection continue $F_2 \subset F_1$, on a

$$\| u^d \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha^d} \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2_{H^1} \leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2}). \tag{6.252}$$

On déduit de (6.251) et (6.252) la relation suivante

$$\| u^d \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha^d} \|^2_{H^3} + \| \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} \|^2_{H^2} \leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|^2_{H^3} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^3} + \| \alpha_1 \|^2_{H^2}). \tag{6.253}$$

On considère maintenant le problème (6.196)-(6.199), et on multiplie (6.196) par $\Delta^2 u^c$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \Delta u^c \|^2 + \| \Delta u^c \|^2 + \| \nabla\Delta u^c \|^2 +((\Delta f(u), \Delta u^c)) = ((\Delta\frac{\partial b}{\partial t}, \Delta u^c)). \tag{6.254}$$

On additionne (6.227),(6.228) et (6.254) on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(2 \| \Delta u^c \|^2 + \| \nabla\Delta u^c \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha^c \|^2 + \| \Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2) \\ &+c(\| \Delta u^c \|^2 + \| \nabla\Delta u^c \|^2 + \| \Delta\frac{\partial u^c}{\partial t} \|^2 + \| \Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2) \leq c^{'} \| \Delta f(u) \|^2, \quad c > 0. \end{aligned} \tag{6.255}$$

On multiplie (6.196) par $\Delta^3\frac{\partial u^c}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla\Delta u^c \|^2 + \| \Delta^2 u^c \|^2) + \| \nabla\Delta\frac{\partial u^c}{\partial t} \|^2 \leq \| \nabla\Delta f(u) \|^2 + \| \nabla\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 . \quad (6.256)$$

On multiplie (6.197) par $\Delta^3\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}$ et on intègre sur Ω on a

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 + \| \Delta^2 \alpha^c \|^2) + \| \nabla\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 \leq c(\| \nabla\Delta u^c \|^2 + \| \nabla\Delta\frac{\partial u^c}{\partial t} \|^2). \quad (6.257)$$

On additionne (6.255),(6.256) et δ_8(6.257) où $\delta_8 > 0$ est assez petit, on trouve

$$\frac{d\psi_4}{dt} \leq c(\psi_4 + \| \nabla\Delta f(u) \|^2 + \| \Delta f(u) \|^2), \quad (6.258)$$

où

$$\psi_4 = 2 \| \nabla\Delta u^c \|^2 + \| \Delta^2 u^c \|^2 + 2 \| \Delta u^c \|^2 + \| \nabla\Delta\alpha^c \|^2 + \| \Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2$$
$$+ \delta_8(\| \Delta^2\alpha^c \|^2 + \| \nabla\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2). \quad (6.259)$$

Or on a

$$\begin{array}{rcl} \| \Delta f(u) \| & = & \| f''(u)|\nabla u|^2 + f'(u)\Delta u \| \\ & \leq & (\text{par} \quad (6.166)) \\ & \leq & C_{D(u_0),\|u_0\|_{H^3},\|\overline{\alpha_0}\|_{H^3},\|\alpha_1\|_{H^2}}, \quad \forall t \geq 0. \end{array} \quad (6.260)$$

et

$$\begin{array}{rcl} \| \nabla\Delta f(u) \| & = & \| f'''(u)|\nabla u|^3 + f''(u)\nabla u\Delta u + f'(u)\nabla\Delta u \| \\ & \leq & (\text{par} \quad (6.166)) \\ & \leq & C_{D(u_0),\|u_0\|_{H^3},\|\overline{\alpha_0}\|_{H^3},\|\alpha_1\|_{H^2}}. \end{array} \quad (6.261)$$

En insérant (6.260) et (6.261) dans (6.258) et en appliquant le lemme de Gronwall, on déduit par (6.259),

$$\| \Delta^2 u^c \|^2 + \| \Delta^2\alpha^c \|^2 + \| \nabla\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} \|^2 \leq C_{T,\|(u_0,\overline{\alpha_0},\alpha_1)\|_{F_2},\mathcal{B}^2_R}. \quad (6.262)$$

En combinant (6.240) et (6.262) on aura

$$\| (u^c, \overline{\alpha^c}, \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}) \|^2_{F_3} \leq C_{T,\|(u_0,\overline{\alpha_0},\alpha_1)\|_{F_2},\mathcal{B}^2_R}. \quad (6.263)$$

On déduit que $\overline{S}(t)$ est asymptotiquement compacte dans $\overline{\Psi_0}$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

4 Existence d'attracteurs exponentiels

Cette partie discute la dimension de l'attracteur global exhibé dans la section précédente. Pour cette raison, on prouve l'existence d'un attracteur exponentiel qui, par définition, est de dimension fractale finie et contient l'attracteur global, ce qui permet de conclure que ce dernier est de dimension fractale finie. Le manque d'effets régularisant des données initiales rend l'analyse plus délicate et les méthodes utilisées dans [22], [23], [24] et [16] pour établir l'existence d'un attracteur exponentiel ne sont plus valides dans ce cas. Pour y parvenir, nous procéderons comme dans [39], [52] et les références citées (voir aussi le chapitre 4 de ce document).

Nous allons appliquer le Théorème 4.1 énoncé au chapitre 4, avec, en dimension une, $\Upsilon = \overline{\Phi_0}, \Upsilon_1 = \overline{\Psi_0}$ et $Y = \overline{X_1} = \overline{\cup_{t\geq t_2}\overline{S}(t)\mathcal{B}_R^1}$, où $\mathcal{B}_R^1$ est l'ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $\overline{S}(t)$ dans $\overline{\Phi_0}$.

Etape I : On montre que le semi-groupe $\overline{S}(t)$ satisfait une décomposition comme dans le point (i) du Théorème 4.1 du chapitre 4.

On considère deux solutions du problème (6.1)-(6.4), $(u_1, \alpha_1, \frac{\partial \alpha_1}{\partial t})$ et $(u_2, \alpha_2, \frac{\partial \alpha_2}{\partial t})$, avec les conditions initiales respectives $(u_{01}, \alpha_{01}, \alpha_{11})$ et $(u_{02}, \alpha_{02}, \alpha_{12})$ dans $\mathcal{B}_R^1$. En posant $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) = (u_1 - u_2, \alpha_1 - \alpha_2, \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t})$ et $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u_{01} - u_{02}, \alpha_{01} - \alpha_{02}, \alpha_{11} - \alpha_{12})$, on a le système d'équations suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \kappa(t)u + u = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{6.264}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{6.265}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0, \tag{6.266}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{6.267}$$

avec $\kappa(t) = \int_0^1 f'(su_1(t) + (1-s)u_2(t))ds$. Notons que $\kappa(t)$ et $l(t)$ vérifient les mêmes propriétés, c'est-à-dire

$$\| \kappa(t) \|_{L^\infty} \leq c \quad (= c(\mathcal{B}_R^1)). \tag{6.268}$$

On décompose à présent $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ solution du problème (6.264)-(6.267) de la manière suivante :

$$(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) = (\vartheta, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}) + (\upsilon, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial t}),$$

où $(\vartheta, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial t})$ est solution de

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta \vartheta + \vartheta = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \tag{6.269}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \Delta \eta = -\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \vartheta, \tag{6.270}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = 0, \tag{6.271}$$

$$\vartheta(0) = u_0, \quad \eta(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{6.272}$$

et $(\upsilon, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial t})$ celle de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \Delta\upsilon + \kappa(t)u + \upsilon &= \frac{\partial \xi}{\partial t}, && (6.273)\\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta\xi &= -\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \upsilon, && (6.274)\\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} &= 0, && (6.275)\\ \upsilon(0) = 0, \quad \xi(0) &= 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(0) = 0. && (6.276) \end{aligned}$$

En répétant les estimations qui nous ont conduit à (6.210) et (6.216) pour le système (6.269)-(6.272), en remarquant que $f \equiv 0$ dans ce cas, on écrit

$$\frac{d\psi_5}{dt} + c(\psi_5 + \| \nabla\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \|^2) \leq 0, \quad c > 0, \tag{6.277}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_5 = 2 \| \nabla\vartheta \|^2 + \| \Delta\vartheta \|^2 &+ \| \nabla\frac{\partial \eta}{\partial t} \|^2 + \| \Delta\eta \|^2 \\ +\delta_{10}\Big(\| \Delta\eta \|^2 + \| \nabla\frac{\partial \eta}{\partial t} \|^2 &+ \delta_9(\| \nabla\eta \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla\eta)))\Big), \end{aligned} \tag{6.278}$$

et

$$\frac{d\psi_6}{dt} + c(\psi_6 + \| \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \|^2) \leq 0, \quad c > 0, \tag{6.279}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_6 = 2 \| \vartheta \|^2 + \| \nabla\vartheta \|^2 &+ \| \nabla\eta \|^2 + \| \frac{\partial \eta}{\partial t} \|^2 \\ +\epsilon_{12}\Big(\| \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\eta \|^2 &+ \epsilon_{11}(\| \overline{\eta} \|^2 + 2((\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t}, \overline{\eta})))\Big), \end{aligned} \tag{6.280}$$

ici $\delta_9 > 0$ et $\epsilon_{11} > 0$ sont assez petits tels qu'en particulier

$$\| \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t} \|^2 + \epsilon_{11}(\| \overline{\eta} \|^2 + 2((\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t}, \overline{\eta}))) \geq c(\| \overline{\eta} \|^2 + \| \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \tag{6.281}$$

et

$$\| \nabla\frac{\partial \eta}{\partial t} \|^2 + \delta_9(\| \nabla\eta \|^2 + 2((\nabla\frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla\eta))) \geq c'(\| \nabla\eta \|^2 + \| \nabla\frac{\partial \eta}{\partial t} \|^2), \quad c' > 0. \tag{6.282}$$

On applique le lemme de Gronwall à (6.277) et par (6.278) et (6.282) on aura

$$\| \Delta\vartheta \|^2 + \| \overline{\eta} \|^2_{H^2} + \| \nabla\frac{\partial \eta}{\partial t} \|^2 \leq c' \exp(-ct)(\| u_0 \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1}). \tag{6.283}$$

D'autre part, le lemme de Gronwall appliqué à (6.279) donne par (6.280) et (6.281) la relation suivante

$$\| \vartheta \|^2_{H^1} + \| \overline{\eta} \|^2_{H^1} + \| \frac{\partial \eta}{\partial t} \|^2 \leq c' \exp(-ct)(\| u_0 \|^2_{H^2} + \| \overline{\alpha_0} \|^2_{H^2} + \| \alpha_1 \|^2_{H^1}). \tag{6.284}$$

En combinant (6.283) et (6.284), on aura

$$\| (\vartheta, \overline{\eta}, \frac{\partial \eta}{\partial t}) \|_{F_1}^2 \leq d(t) \| (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|_{F_1}^2, \tag{6.285}$$

où $d(t) = c^{'} \exp(-ct), t \geq 0$ et $d(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Considérons maintenant le système (6.273)-(6.276). On multiplie (6.273) par $\Delta^2 \upsilon + \Delta^2 \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$ puis (6.274) par $\Delta^2 \frac{\partial \xi}{\partial t}$ et on additionne les équations résultantes. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2 \| \Delta \upsilon \|^2 + \| \nabla \Delta \upsilon \|^2 + \| \nabla \Delta \xi \|^2 &+ \| \Delta \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2) + \| \Delta \upsilon \|^2 + \| \nabla \Delta \upsilon \|^2 \\ + \| \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2 = ((\nabla(\kappa(t)u), \nabla \Delta \upsilon)) &- ((\Delta(\kappa(t)u), \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t})) \end{aligned} \tag{6.286}$$

Or on a

$$\begin{array}{rcl} \Big| ((\nabla(\kappa(t)u), \nabla \Delta \upsilon)) \Big| & \leq & \| \nabla(\kappa(t)u) \| . \| \nabla \Delta \upsilon \| \\ & \leq & \| \kappa(t) \nabla u \| \| \nabla \Delta \upsilon \| \\ + \| u \int_0^1 f''(u_1 & + & s(u_2 - u_1))(\nabla u_1 + s(\nabla u_2 - \nabla u_1)) ds \| \| \nabla \Delta \upsilon \| \\ & \leq & (\text{par} \quad (6.268)) \\ & \leq & c(\| \nabla u \| + \| |u| |\nabla u_1| \| + \| |u| |\nabla u_2| \|) \| \nabla \Delta \upsilon \| \\ & \leq & c \| u \|_{H^1} . \| \nabla \Delta \upsilon \| \\ & \leq & \frac{c}{2\epsilon} \| u \|_{H^2}^2 + \frac{c\epsilon}{2} \| \nabla \Delta \upsilon \|^2 . \end{array} \tag{6.287}$$

où c dépend seulement de $\mathcal{B}_R^1$.

Par (6.136) et l'injection continue $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, on a

$$\begin{array}{rcl} \| \kappa(t) \|_{H^2} & \leq & Q(\| (u_{01}, \overline{\alpha_{01}}, \alpha_{11}) \|_{\overline{\Phi_0}} + \| (u_{02}, \overline{\alpha_{02}}, \alpha_{11}) \|_{\overline{\Phi_0}}) \\ & \leq & c, \end{array} \tag{6.288}$$

où c dépend de $\mathcal{B}_R^1$, donc

$$\begin{array}{rcl} \Big| ((\Delta(\kappa(t)u), \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t})) \Big| & \leq & \| \Delta(\kappa(t)u) \| . \| \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \| \\ & \leq & \Big(\| \kappa(t) \Delta u \| + \| \Delta \kappa(t) . u \| + 2 \| \nabla u \nabla \kappa(t) \| \Big) \| \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \| \\ & \leq & (\text{par} \quad (6.288)) \\ & \leq & c \| \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \| (\| \Delta u \| + \| u \| + \| \nabla u \|) \\ & \leq & c \| \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \| . \| u \|_{H^2} \\ & \leq & \frac{c\epsilon}{2} \| \Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \|^2 + \frac{c}{2\epsilon} \| u \|_{H^2}^2, \end{array} \tag{6.289}$$

où c dépend de $\mathcal{B}_R^1$.

On choisit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$ et par (6.287) et (6.289), on déduit de (6.286) l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2 \parallel \Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\xi \parallel^2 &+ \parallel \Delta\frac{\partial\xi}{\partial t} \parallel^2) \\ +c(\parallel \Delta v \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta v \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial v}{\partial t} \parallel^2 &+ \parallel \Delta\frac{\partial\xi}{\partial t} \parallel^2) \leq c' \parallel u \parallel^2_{H^2}, \quad c > 0,\end{aligned} \tag{6.290}$$

où c et c' dépendent de $\mathcal{B}^1_R$.

On intègre (6.290) entre 0 et t et par (6.276) on aura

$$\parallel \Delta v(t) \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta v(t) \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\xi(t) \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}(t) \parallel^2 \leq c' \int_0^t \parallel u \parallel^2_{H^2} ds. \tag{6.291}$$

Estimons le terme $\int_0^t \parallel u(s) \parallel^2_{H^2} ds$.

On intègre (6.184) entre 0 et t, on a

$$\int_0^t \parallel u(s) \parallel^2_{H^1} ds \leq c' \exp(ct)(\parallel u_0 \parallel^2_{H^2} + \parallel \overline{\alpha_0} \parallel^2_{H^2} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^1}). \tag{6.292}$$

où c et c' dépendent de $\mathcal{B}^1_R$.

On multiplie (6.264) par $-\Delta u - \Delta\frac{\partial u}{\partial t}$ et (6.265) par $-\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}$. On additionne les équations résultantes, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2 \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \Delta u \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \parallel^2 &+ \parallel \Delta\alpha \parallel^2) + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \Delta u \parallel^2 \\ + \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \parallel^2 &= -((\nabla(\kappa(t)u), \nabla u)) - ((\nabla(\kappa(t)u), \nabla\frac{\partial u}{\partial t})).\end{aligned} \tag{6.293}$$

Par analogie avec la relation (6.287), on écrit

$$\Big|((\nabla(\kappa(t)u), \nabla u))\Big| \leq c \parallel u \parallel^2_{H^1}, \tag{6.294}$$

et

$$\Big|((\nabla(\kappa(t)u), \nabla\frac{\partial u}{\partial t}))\Big| \leq c \parallel u \parallel_{H^1} . \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel \leq \frac{c}{2\epsilon} \parallel u \parallel^2_{H^1} + \frac{c\epsilon}{2} \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2, \tag{6.295}$$

où c dépend de $\mathcal{B}^1_R$.

On choisit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$ et par (6.294) et (6.295), la relation (6.293) donne

$$\frac{d\psi_7(t)}{dt} + c(\parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \Delta u \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \parallel^2) \leq c' \parallel u \parallel^2_{H^1}, \quad c > 0, \tag{6.296}$$

où c et c' dépendent de $\mathcal{B}^1_R$ et

$$\psi_7(t) = 2 \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \Delta u \parallel^2 + \parallel \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta\alpha \parallel^2 . \tag{6.297}$$

On intègre (6.296) entre 0 et t et par (6.292) on deduit

$$\int_0^t \| u \|_{H^2}^2 \, ds \leq c^{'} \exp{(ct)} \| (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|_{F_1}^2 . \tag{6.298}$$

En utilisant l'inégalité (6.243) et par (6.298), la relation (6.291) donne

$$\| \Delta \upsilon(t) \|^2 + \| \nabla \Delta \upsilon(t) \|^2 + \| \overline{\xi}(t) \|_{H^3}^2 + \| \Delta \frac{\partial \xi}{\partial t}(t) \|^2 \leq c^{'} \exp{(ct)} \| (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|_{F_1}^2 . \tag{6.299}$$

On multiplie (6.273) par $-\Delta \upsilon$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla \upsilon \|^2 + \| \Delta \upsilon \|^2 + ((\nabla(\kappa(t) u), \nabla \upsilon)) + \| \nabla \upsilon \|^2 = ((\nabla \frac{\partial \xi}{\partial t}, \nabla \upsilon)) \tag{6.300}$$

Multiplions (6.273) par $-\Delta \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$\| \nabla \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \Delta \upsilon \|^2 + ((\nabla(\kappa(t) u), \nabla \frac{\partial \upsilon}{\partial t})) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla \upsilon \|^2 = ((\nabla \frac{\partial \xi}{\partial t}, \nabla \frac{\partial \upsilon}{\partial t})). \tag{6.301}$$

Multiplions (6.274) par $-\Delta \frac{\partial \xi}{\partial t}$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\| \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2 + \| \Delta \xi \|^2) + \| \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2 = -((\nabla \upsilon, \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t})) - ((\nabla \frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t})). \tag{6.302}$$

On additionne (6.300),(6.301) et (6.302), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (2 \| \nabla \upsilon \|^2 + \| \Delta \upsilon \|^2 + \| \Delta \xi \|^2 &+ \| \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2) + \| \nabla \upsilon \|^2 + \| \Delta \upsilon \|^2 \\ + \| \nabla \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2 &= -((\nabla(\kappa(t) u), \nabla \upsilon)) - ((\nabla(\kappa(t) u), \nabla \frac{\partial \upsilon}{\partial t})). \end{aligned} \tag{6.303}$$

D'après les inégalités de Hölder et Young, et par (6.268), on déduit l'inégalité suivante

$$\frac{d\psi_8(t)}{dt} + c(\| \nabla \upsilon \|^2 + \| \Delta \upsilon \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2) \leq c^{'} \| \nabla u \|^2, \quad c > 0, \tag{6.304}$$

où

$$\psi_8 = 2 \| \nabla \upsilon \|^2 + \| \Delta \upsilon \|^2 + \| \Delta \xi \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} \|^2 . \tag{6.305}$$

et c et $c^{'}$ dépendent de $\mathcal{B}_R^1$.

La relation (6.304) donne en particulier

$$\frac{d\psi_8(t)}{dt} \leq c \psi_8(t) + c^{'} \| \nabla u \|^2, \tag{6.306}$$

on applique le lemme de Gronwall à (6.306) et par (6.276) et (6.292), on a

$$\psi_8(t) \leq c^{'} \exp{(ct)} \| (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|_{F_1}^2 . \tag{6.307}$$

Par (6.305), la relation (6.307) donne

$$\| \nabla v(t) \|^2 + \| \Delta\xi(t) \|^2 + \| \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t}(t) \|^2 \leq c^{'} \exp{(ct)} \| (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|^2_{F_1} . \quad (6.308)$$

Finalement en multipliant (6.273) par $v + \dfrac{\partial v}{\partial t}$ et (6.274) par $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$, et en raisonnant comme précédemment on déduit l'estimation suivante

$$\| v(t) \|^2_{H^1} + \| \nabla\xi(t) \|^2 + \| \frac{\partial \xi}{\partial t}(t) \|^2 \leq c^{'} \exp{(ct)} \| (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|^2_{F_1} . \quad (6.309)$$

En combinant (6.299),(6.308) et (6.309), on aura

$$\| v(t) \|^2_{H^3} + \| \overline{\xi}(t) \|^2_{H^3} + \| \frac{\partial \xi}{\partial t}(t) \|^2_{H^2} \leq h(t) \| (u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|^2_{F_1}, \quad (6.310)$$

où $h(t) = c^{'} \exp{(ct)}$, avec c et $c^{'}$ dépendent de $\mathcal{B}^1_R$,

d'où le résultat.

Etape II : On prouve que le semi-groupe $\overline{S}(t)$ est lipschitz en espace et Hölder continu en temps sur $[0,T] \times B$, $\quad \forall T > 0, \quad \forall B$ borné de $\overline{\Phi_0}$.

On a que $\overline{S}(t)$ est lipschitz en espace, d'après (6.187), il nous reste à prouver la continuité Höldérienne par rapport au temps du semi-groupe $\overline{S}(t)$. D'après le Théorème 1.7 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\| u(t_1) - u(t_2) \|_{H^1} + \| \alpha(t_1) - \alpha(t_2) \|_{H^1} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_1) - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_2) \|$$

$$\leq \int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \|_{H^1} \, d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\tau) \|_{H^1} \, d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(\tau) \| \, d\tau$$

$$\leq c|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} + (\int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(\tau) \|^2 \, d\tau)^{\frac{1}{2}} |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

De plus en intégrant (4.300) entre t_2 et 0 puis entre 0 et t_1, on déduit d'après les estimations précédentes que

$$\int_{t_2}^{t_1} \| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(\tau) \|^2 \, d\tau \leq c, \quad (6.311)$$

où c dépend de $\mathcal{B}^1_R$ et T.

On déduit alors

$$\| \overline{S}(t_1)(u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) - \overline{S}(t_2)(u_0, \overline{\alpha_0}, \alpha_1) \|_F \leq c|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}, \quad (6.312)$$

où c dépend de $\mathcal{B}^1_R$ et T, $\quad \forall t_1, t_2 \in [0,T]$.

On a démontré le

Théorème 4.1. *Le semi-groupe $\overline{S}(t)$ possède, en dimension une, un attracteur exponentiel $\overline{\mathcal{M}}_1$ dans $\overline{X_1}$.*

On passe à la dimension deux et on introduit l'ensemble invariant suivant :

$$\overline{X_2} = \overline{\cup_{t\geq t_3}\overline{S}(t)\mathcal{B}_R^2},$$

où $\mathcal{B}_R^2$ est l'ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $\overline{S}(t)$ dans $\overline{\Psi_0}$, et on prend dans ce cas les données initiales dans ce borné.

En répétant pour (6.269)-(6.272) les estimations qui ont donné (6.247), on écrit

$$\frac{d\psi_9}{dt} + c(\psi_9 + \parallel \Delta\frac{\partial\vartheta}{\partial t} \parallel^2 \leq 0, \quad c > 0, \tag{6.313}$$

où

$$\begin{aligned}\psi_9 = 2 \parallel \Delta\vartheta \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\vartheta \parallel^2 \ &+ \ \parallel \Delta\frac{\partial\eta}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\eta \parallel^2 \\ +\epsilon^{'}(\parallel \nabla\Delta\eta \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial\eta}{\partial t} \parallel^2 \ &+ \ \epsilon(\parallel \Delta\eta \parallel^2 + 2((\Delta\frac{\partial\eta}{\partial t}, \Delta\eta)))),\end{aligned} \tag{6.314}$$

où $\epsilon > 0$ assez petit tel qu'en particulier

$$\parallel \Delta\frac{\partial\eta}{\partial t} \parallel^2 + \epsilon(\parallel \Delta\eta \parallel^2 + 2((\Delta\frac{\partial\eta}{\partial t}, \Delta\eta))) \geq c(\parallel \Delta\eta \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial\eta}{\partial t} \parallel^2), \quad c > 0. \tag{6.315}$$

La relation (6.313) donne en particulier

$$\frac{d\psi_9}{dt} + c\psi_9 \leq 0. \tag{6.316}$$

On applique le lemme de Gronwall à (6.316), on obtient

$$\psi_9(t) \leq \exp(-ct)\psi_9(0), \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{6.317}$$

Par (6.314) et (6.315), la relation (6.317) donne

$$\parallel \nabla\Delta\vartheta \parallel^2 + \parallel \overline{\eta} \parallel_{H^3}^2 + \parallel \Delta\frac{\partial\eta}{\partial t}(t) \parallel^2 \leq c^{'}\exp(-ct)(\parallel u_0 \parallel_{H^3}^2 + \parallel \overline{\alpha_0} \parallel_{H^3}^2 + \parallel \alpha_1 \parallel_{H^2}^2). \tag{6.318}$$

De plus par (6.285) et l'injection continue $F_2 \subset F_1$, on a

$$\parallel \vartheta \parallel_{H^2}^2 + \parallel \overline{\eta}(t) \parallel_{H^2}^2 + \parallel \frac{\partial\eta}{\partial t}(t) \parallel_{H^1}^2 \leq c^{'}\exp(-ct)(\parallel u_0 \parallel_{H^3}^2 + \parallel \overline{\alpha_0} \parallel_{H^3}^2 + \parallel \alpha_1 \parallel_{H^2}^2). \tag{6.319}$$

Par (6.318) et (6.319) on aura

$$\parallel \vartheta \parallel_{H^3}^2 + \parallel \overline{\eta}(t) \parallel_{H^3}^2 + \parallel \frac{\partial\eta}{\partial t}(t) \parallel_{H^2}^2 \leq c^{'}\exp(-ct)(\parallel u_0 \parallel_{H^3}^2 + \parallel \overline{\alpha_0} \parallel_{H^3}^2 + \parallel \alpha_1 \parallel_{H^2}^2). \tag{6.320}$$

où c et $c^{'}$ dépendent de $\mathcal{B}_R^2$.

On considère maintenant le problème (6.273)-(6.276). On multiplie (6.273) par $\Delta^3 \upsilon + \Delta^3 \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$ et (6.274) par $\Delta^3 \frac{\partial \xi}{\partial t}$. On additionne les équations résultantes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2 \parallel \nabla\Delta\upsilon \parallel^2 + \parallel \Delta^2\upsilon \parallel^2 + \parallel \Delta^2\xi \parallel^2 \quad &+ \quad \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \xi}{\partial t} \parallel^2) + \parallel \nabla\Delta\upsilon \parallel^2 + \parallel \Delta^2\upsilon \parallel^2 \\ + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \upsilon}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \xi}{\partial t} \parallel^2 = ((\Delta(\kappa(t)u) \quad &, \quad \Delta^2\upsilon)) - ((\nabla\Delta(\kappa(t)u), \nabla\Delta\frac{\partial \upsilon}{\partial t})). \end{aligned} \tag{6.321}$$

En raisonnant d'une façon analogue, on a

$$\left|((\Delta(\kappa(t)u), \Delta^2\upsilon))\right| \leq \frac{c\epsilon}{2} \parallel \Delta^2\upsilon \parallel^2 + \frac{c}{2\epsilon} \parallel u \parallel^2_{H^2}, \tag{6.322}$$

où c dépend de $\mathcal{B}^2_R$.

De plus par (6.166) et l'injection continue $H^3(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, on a

$$\parallel \kappa(t) \parallel_{H^3} \leq Q(\parallel (u_{01}, \overline{\alpha_{01}}, \alpha_{11}) \parallel_{\overline{\Psi_0}} + \parallel (u_{02}, \overline{\alpha_{02}}, \alpha_{12}) \parallel_{\overline{\Psi_0}}) \leq c, \tag{6.323}$$

où c dépend de $\mathcal{B}^2_R$. Donc

$$\left|((\nabla\Delta(\kappa(t)u), \nabla\Delta\frac{\partial \upsilon}{\partial t}))\right| \leq \frac{c\epsilon}{2} \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \upsilon}{\partial t} \parallel^2 + \frac{c}{2\epsilon} \parallel u \parallel^2_{H^3}, \tag{6.324}$$

où c dépend de $\mathcal{B}^2_R$. On choisit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $2 - c\epsilon > 0$ et par (6.322) et (6.324), la relation (6.321) donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(2 \parallel \nabla\Delta\upsilon \parallel^2 + \parallel \Delta^2\upsilon \parallel^2 \quad &+ \quad \parallel \Delta^2\xi \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \xi}{\partial t} \parallel^2) \\ +c(\parallel \nabla\Delta\upsilon \parallel^2 + \parallel \Delta^2\upsilon \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \upsilon}{\partial t} \parallel^2 \quad &+ \quad \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \xi}{\partial t} \parallel^2) \leq c' \parallel u \parallel^2_{H^3}, \quad c > 0, \end{aligned} \tag{6.325}$$

On intègre (6.325) entre 0 et t et par (6.276) on aura

$$2 \parallel \nabla\Delta\upsilon(t) \parallel^2 + \parallel \Delta^2\upsilon(t) \parallel^2 + \parallel \Delta^2\xi(t) \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta\frac{\partial \xi}{\partial t}(t) \parallel^2 \leq c' \int_0^t \parallel u(s) \parallel^2_{H^3} ds. \tag{6.326}$$

Par (6.298), on a

$$\int_0^t \parallel u(s) \parallel^2_{H^2} ds \leq c' \exp{(ct)}(\parallel u_0 \parallel^2_{H^3} + \parallel \overline{\alpha_0} \parallel^2_{H^3} + \parallel \alpha_1 \parallel^2_{H^2}). \tag{6.327}$$

On multiplie (6.264) par $\Delta^2 u + \Delta^2 \frac{\partial u}{\partial t}$ et (6.265) par $\Delta^2 \frac{\partial \alpha}{\partial t}$. On additionne les équations résultantes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2 \parallel \Delta u \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 \quad &+ \quad \parallel \nabla\Delta\alpha \parallel^2) + \parallel \Delta u \parallel^2 + \parallel \nabla\Delta u \parallel^2 \\ + \parallel \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 \quad &= \quad -((\kappa(t)u, \Delta^2 u)) - ((\kappa(t)u, \Delta^2\frac{\partial u}{\partial t})). \end{aligned} \tag{6.328}$$

D'une façon analogue, on a

$$\left|((\nabla(\kappa(t)u), \nabla\Delta u))\right| \leq \frac{c\epsilon}{2} \parallel \nabla\Delta u \parallel^2 + \frac{c}{2\epsilon} \parallel u \parallel^2_{H^1}, \tag{6.329}$$

et

$$\Big|((\Delta(\kappa(t)u),\Delta\frac{\partial u}{\partial t}))\Big|\leq\frac{c\epsilon}{2}\parallel\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\frac{c}{2\epsilon}\parallel u\parallel_{H^2}^2. \tag{6.330}$$

on choisit $\epsilon>0$ assez petit tel que $2-c\epsilon>0$ et par (6.329) et (6.330), la relation (6.328) donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2\parallel\Delta u\parallel^2+\parallel\nabla\Delta u\parallel^2 &+ \parallel\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2+\parallel\nabla\Delta\alpha\parallel^2)\\ +c(\parallel\Delta u\parallel^2+\parallel\nabla\Delta u\parallel^2+\parallel\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2 &+ \parallel\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2)\leq c^{'}\parallel u\parallel_{H^2}^2,\quad c>0.\end{aligned} \tag{6.331}$$

On intègre (6.331) entre 0 et t et par (6.327) on aura

$$\int_0^t\parallel\nabla\Delta u(s)\parallel^2 ds\leq c^{'}\exp(ct)(\parallel u_0\parallel_{H^3}^2+\parallel\overline{\alpha_0}\parallel_{H^3}^2+\parallel\alpha_1\parallel_{H^2}^2). \tag{6.332}$$

En combinant (6.327) et (6.332), on aura

$$\int_0^t\parallel u(s)\parallel_{H^3}^2 ds\leq c^{'}\exp(ct)(\parallel u_0\parallel_{H^3}^2+\parallel\overline{\alpha_0}\parallel_{H^3}^2+\parallel\alpha_1\parallel_{H^2}^2). \tag{6.333}$$

En insérant (6.333) dans (6.326) on aura

$$\begin{aligned}&\parallel\nabla\Delta\upsilon(t)\parallel^2+\parallel\Delta^2\upsilon(t)\parallel^2+\parallel\Delta^2\xi(t)\parallel^2+\parallel\nabla\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}(t)\parallel^2\\ &\qquad\leq c^{'}\exp(ct)\parallel(u_0,\overline{\alpha_0},\alpha_1)\parallel_{F_2}^2.\end{aligned} \tag{6.334}$$

En notant que $<\overline{\xi}>=0$, on déduit de (6.334)

$$\begin{aligned}&\parallel\nabla\Delta\upsilon(t)\parallel^2+\parallel\Delta^2\upsilon(t)\parallel^2+\parallel\overline{\xi}(t)\parallel_{H^4}^2+\parallel\nabla\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}(t)\parallel^2\\ &\qquad\leq c^{'}\exp(ct)\parallel(u_0,\overline{\alpha_0},\alpha_1)\parallel_{F_2}^2.\end{aligned} \tag{6.335}$$

En combinant (6.310) et (6.335) on obtient

$$\parallel\upsilon(t)\parallel_{H^4}^2+\parallel\overline{\xi}(t)\parallel_{H^4}^2+\parallel\frac{\partial\xi}{\partial t}(t)\parallel_{H^3}^2\leq c^{'}\exp(ct)(\parallel u_0\parallel_{H^3}^2+\parallel\overline{\alpha_0}\parallel_{H^3}^2+\parallel\alpha_1\parallel_{H^2}^2). \tag{6.336}$$

où c et $c^{'}$ dépendent de $\mathcal{B}_R^2$.

Remarque 4.2. *La preuve de la continuité de $\overline{S}(t)$ est exactement que celle faite en dimension une mais dans (6.312), la constante c dépend de T et de $\mathcal{B}_R^2$.*

Donc on a démontré le théorème suivant

Théorème 4.3. *Le semi-groupe $\overline{S}(t), t\geq 0$ possède, en dimension deux, un attracteur exponentiel $\overline{\mathcal{M}_2}$ dans $\overline{X_2}$.*

Deuxième partie

Généralisation du modèle de champ de phase de Caginalp *conservé* basée sur la loi de Maxwell-Cattaneo

Introduction

Dans cette partie, on traite la version conservative du problème de champ de phase généralisé considéré dans la première partie. On se propose d'étudier ce modèle sous deux approches :

Dans le chapitre 7, on considère un potentiel régulier, plus précisement un terme polynomial de degré impair, avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogènes. L'existence, l'unicité ainsi que la dissipativité sont analysées.

Finalement dans le chapitre 8, le problème est considéré avec un potentiel singulier plus précisement un terme logarithmique. En dimension une et deux on démontre également une proriété de séparation stricte qui va nous permettre d'étudier le caractère bien posé du problème ainsi que le comportement asymptotique des solutions.

Motivations physiques

On considère dans cette partie le système de champ de phase suivant introduit par G.Caginalp (voir [5] et [6]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta g(u) = -\Delta\theta, \tag{6.337}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.338}$$

où u est le paramètre d'ordre et θ est la température relative. Ces équations modélisent des processus de transition de phase comme par exemple le processus de fusion-solidification, et ont été étudié dans, par exemple, [56]. Les équations (6.337)-(6.338) consistent un couplage entre l'équation de Cahn-Hilliard introduite dans [31], [38] et l'équation de la chaleur, et sont connues comme étant le problème de champ de phase de Caginalp conservé, dans un sens où, munies des conditions aux bords de type Neumann, on a que la moyenne spatiale du paramètre d'ordre est une quantité conservée (voir chapitre 7).

En ce qui conçerne la dérivation du modèle, on se réfère à [10] et [2].

Notons que ce système a une vitesse de propagation infinie due à la nature parabolique de (6.337). Un modèle entièrement hyperbolique, c'est-à-dire en considérant une relaxation hyperbolique de l'équation du paramètre d'ordre, est considéré dans [50] dans le cas non conservé.

Chapitre 7

Modèle de champ de phase conservatif avec un terme non linéaire polynomial

1 Cadre fonctionnel

On introduit dans ce chapitre la loi de Maxwell-Cattaneo du système de champ de phase de Caginalp (cf. [5] et [6]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta g_N(u) = -\Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{7.2}$$

où u est le paramètre d'ordre, α représente la variable de déplacement thermique (voir [31] et [38]).

Ces équations sont connues comme le modèle conservé de champ de phase, dans le sens où, quand munies de conditions aux limites de Neumann, la moyenne spatiale du paramètre d'ordre est une quantité conservée (voir la remarque à la fin de ce chapitre).

On associe à (7.1)-(7.2) des conditions aux bords de Dirichlet homogènes

$$u = \Delta u = \alpha = 0, \tag{7.3}$$

dans un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3$ et les données initiales

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1. \tag{7.4}$$

Le polynôme g_N est défini comme suit (ici N est fixé) :

$$g_N(s) = -2\kappa_0 s + 2\kappa_1 \sum_{k=0}^{N} \frac{s^{2k+1}}{2k+1}, \tag{7.5}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $0 < \kappa_1 < \kappa_0$.

De plus, g_N vérifie

$$g_N(0) = 0, \quad g_N \in C^2, \tag{7.6}$$

$$-c_0 \leq G_N(s), \quad G_N(s) \leq g_N(s)s + c_1, \quad c_0, c_1 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{7.7}$$

$$g_N^{'}(s) \geq -c_2, \quad c_2 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{7.8}$$

où $G_N(s) = \int_0^s g_N(\tau) d\tau, \quad s \in \mathbb{R}$.

1.1 Notations

On introduit les espaces de Hilbert :

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H_0^1(\Omega), \quad W = H^2(\Omega)$$

et on note $V^{'}$ l'espace dual de V. On considère le produit d'espaces de Hilbert

$$E_1 = (W \cap V)^2 \times V,$$

qui correspond à l'espace des phases de notre problème. Le symbole $< .,. >$ représente le produit de dualité entre V et $V^{'}$. On note par $\| \, . \, \|$ la norme usuelle de $L^2(\Omega)$ (avec $((.,.))$ le produit scalaire associé) et on pose $\| \, . \, \|_{-1} = \| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} . \, \|$, où $A = -\Delta$ est l'opérateur associé aux conditions aux bords de Dirichlet homogènes. Plus généralement, $\| \, . \, \|_X$ est la norme dans l'espace de Banach X.

On notera dans la suite $c, c^{'}$ et $c^{''}$ des constantes positives qui pourront varier d'une ligne à l'autre et quelques fois dans la même ligne.

2 Estimations à priori

On réécrit (7.1) sous la forme équivalente

$$(-\Delta)^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g_N(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \tag{7.9}$$

On multiplie (7.9) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|^2 + \frac{d}{dt} \int_\Omega G_N(u) dx = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t})). \tag{7.10}$$

On multiplie (7.2) par $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla \alpha \|^2 = -((u, \frac{\partial \alpha}{\partial t})) - ((\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t})). \tag{7.11}$$

Ensuite on multiplie (7.9) par u et on intègre sur Ω, par (7.7) on aura

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u \|_{-1}^2 + \| \nabla u \|^2 + \int_\Omega G_N(u) dx \leq ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u)) + c_0 |\Omega|. \tag{7.12}$$

On additionne (7.10),(7.11) et (7.12), on obtient

$$\frac{dE_1}{dt}+2(\parallel \frac{\partial u}{\partial t}\parallel_{-1}^2+\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2+\parallel \nabla u\parallel^2+\int_\Omega G_N(u)dx)\leq 2c_0|\Omega|, \tag{7.13}$$

avec

$$E_1=\parallel \nabla u\parallel^2+2\int_\Omega G_N(u)dx+\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2+\parallel \nabla\alpha\parallel^2+\parallel u\parallel_{-1}^2 . \tag{7.14}$$

On multiplie (7.2) par α et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}((\frac{\partial \alpha}{\partial t},\alpha))+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \alpha\parallel^2+\parallel \nabla\alpha\parallel^2=-((\frac{\partial u}{\partial t},\alpha))-((u,\alpha))+\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2 . \tag{7.15}$$

En additionnant (7.13) et ϵ_1(7.15), on obtient

$$\frac{dE_2}{dt}+2(\parallel \nabla u\parallel^2+\int_\Omega G_N(u)dx+\parallel \frac{\partial u}{\partial t}\parallel_{-1}^2+\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2)+\epsilon_1\parallel \nabla\alpha\parallel^2$$

$$=-\epsilon_1((\frac{\partial u}{\partial t},\alpha))-\epsilon_1((\alpha,u))+\epsilon_1\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2+2c_0|\Omega|, \tag{7.16}$$

où

$$E_2=E_1+\epsilon_1((\frac{\partial \alpha}{\partial t},\alpha))+\frac{\epsilon_1}{2}\parallel \alpha\parallel^2, \tag{7.17}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young et l'inégalité $|((v,w))|\leq c\parallel \nabla v\parallel . \parallel w\parallel_{-1}$, et en choisissant $\epsilon_1>0$ assez petit tel que $2-\epsilon_1>0$ on déduit l'estimation suivante

$$\frac{dE_2}{dt}+c(E_2+\parallel \frac{\partial u}{\partial t}\parallel_{-1}^2)\leq c', \quad c>0, \tag{7.18}$$

et E_2 satisfait

$$c(\parallel u\parallel_V^2+\parallel \alpha\parallel_V^2+\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2+\int_\Omega G_N(u)dx)+c'\leq E_2(t)$$

$$\leq c''(\parallel u\parallel_V^2+\parallel \alpha\parallel_V^2+\parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2+\int_\Omega G_N(u)dx)+c''', \tag{7.19}$$

avec $c,c''>0$.

On multiplie (7.1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \Delta u\parallel^2+\parallel \frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2=((\Delta g_N(u),\frac{\partial u}{\partial t}))-((\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t})),$$

par (7.6) et l'injection continue $H^2(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$, on a

$$\frac{d}{dt}\parallel \Delta u\parallel^2+\parallel \frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2\leq Q(\parallel u\parallel_{H^2(\Omega)})-2((\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t})). \tag{7.20}$$

On multiplie (7.2) par $-\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}\Big(\parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2+\parallel \Delta\alpha\parallel^2\Big)+\parallel \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\parallel^2\leq\parallel \nabla u\parallel^2+2((\frac{\partial u}{\partial t},\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t})). \tag{7.21}$$

On additionne (7.20) et (7.21), on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big(\| \Delta u \|^2 + \| \Delta\alpha \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 \Big) + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2$$

$$\leq Q(\| u \|_{H^2(\Omega)}) + \| \nabla u \|^2, \tag{7.22}$$

en particulier, en posant $y = \| \Delta u \|^2 + \| \Delta\alpha \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2$, on déduit de (7.22) une inéquation de la forme

$$y^{'} \leq Q(y).$$

Soit z la solution de l'E.D.O : $z^{'} = Q(z)$ avec $z(0) = y(0)$.

D'après le principe de comparaison, il existe un $T_0 = T_0\Big(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H_0^1} \Big)$ qui appartient par exemple à l'intrevalle $(0, \frac{1}{2})$ tel que $y(t) \leq z(t), \quad \forall t \in [0, T_0]$, donc

$$\| u(t) \|_{H^2} + \| \alpha(t) \|_{H^2} + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t) \|_{H_0^1} \leq Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H_0^1}), \quad t \leq T_0. \tag{7.23}$$

On différencie maintenant (7.9) par rapport au temps et par (7.2), on aura

$$A^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta\frac{\partial u}{\partial t} + g_N^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \Delta\alpha - u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{7.24}$$

On multiplie ensuite (7.24) par $t\frac{\partial u}{\partial t}$ et en utilisant $\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq c \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1} \| \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \|$, on a

$$\frac{d}{dt}(t \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2) + t \| \nabla\frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq ct(\| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2 + \| u \|^2) + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 . \tag{7.25}$$

D'autre part, la relation (7.18) donne en particulier

$$\frac{dE_2}{dt} + cE_2 \leq c^{'}, \tag{7.26}$$

on applique le lemme de Gronwall à (7.26), par (7.19) on aura

$$E_2(t) \leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha_0 \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha_1 \|^2 + \int_\Omega G_N(u_0)dx) + c^{''}, c > 0, t \geq 0. \tag{7.27}$$

On intègre (7.18) entre t et $t+1$, par (7.27) on a

$$\int_t^{t+1} (\| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| u \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha \|_{H_0^1}^2 + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2)ds$$

$$\leq c^{'} \exp(-ct)(\| u_0 \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha_0 \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha_1 \|^2 + \int_\Omega G_N(u_0)dx) + c^{''}, \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{7.28}$$

Plus généralement, pour tout $r > 0$ on a

$$\int_t^{t+r} (\| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| u \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha \|_{H_0^1}^2 + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2)ds$$

$$\leq c^{'} \exp{(-ct)}(\| u_0 \|^2_{H^1_0} + \| \alpha_0 \|^2_{H^1_0} + \| \alpha_1 \|^2 + \int_\Omega G_N(u_0)dx) + c^{''}(r), c > 0, t \geq 0. \tag{7.29}$$

On applique le lemme de Gronwall à (7.25), on a

$$t \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{-1} \leq c^{'} \int_0^{T_0} s \exp{(c(t-s))}(\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{-1})ds. \tag{7.30}$$

Par (7.23) et (7.28), on déduit de (7.30),

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2_{-1} \leq \frac{1}{t} Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}), \quad t \in (0, T_0]. \tag{7.31}$$

On multiplie (7.24) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on procède comme avant, on aura

$$\frac{d}{dt} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{-1} + \| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq c(\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{-1} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| u \|^2). \tag{7.32}$$

On applique le lemme de Gronwall à (7.32), par (7.28) on a

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2_{-1} \leq \exp{(ct)} Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}) \| \frac{\partial u}{\partial t}(T_0) \|^2_{-1}, \quad t \geq T_0,$$

donc par (7.31) on aura

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \|^2_{-1} \leq \exp{(ct)} Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}), \quad t \geq T_0. \tag{7.33}$$

On réécrit (7.9) sous la forme

$$-\Delta u + g_N(u) = h_u(t), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{7.34}$$

pour $t \geq T_0$(fixé), avec

$$h_u(t) = -(-\Delta)^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \tag{7.35}$$

Par (7.27) et (7.33) on a

$$\| h_u(t) \| \leq \exp{(ct)} Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}), \quad t \geq T_0. \tag{7.36}$$

On multiplie (7.34) par u et on intègre sur Ω, par (7.7) on a

$$\| \nabla u \|^2 \leq c \| h_u(t) \|^2 + c^{'}. \tag{7.37}$$

On multiplie ensuite (7.34) par $-\Delta u$ et on intègre sur Ω, par (7.8) on a

$$\| \Delta u \|^2 \leq c(\| h_u(t) \|^2 + \| \nabla u \|^2), \tag{7.38}$$

par (7.36) et (7.37), on déduit de (7.38) que

$$\| u(t) \|_{H^2} \leq \exp{(ct)} Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}), \quad t \geq T_0. \tag{7.39}$$

En combinant (7.23) et (7.39), on conclut

$$\| u(t) \|_{H^2} \leq \exp{(ct)} Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}), \quad t \geq 0. \tag{7.40}$$

La relation (7.21) implique

$$\frac{d}{dt}(\| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 + \| \Delta\alpha \|^2)+ \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2_{H^1_0}\leq\| u \|^2_{H^1_0} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1_0} . \tag{7.41}$$

On intègre (7.32) entre T_0 et t, par (7.28) et (7.33) on a

$$\int_{T_0}^{t} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1_0} ds$$

$$\leq \exp{(ct)}Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}), \quad t \geq T_0. \tag{7.42}$$

On intègre (7.41) entre T_0 et t, on a

$$\| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^1_0} + \| \alpha(t) \|^2_{H^2}$$

$$\leq \int_{T_0}^{t}(\| u \|^2_{H^1_0} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^1_0})ds+ \| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(T_0) \|^2_{H^1_0} + \| \alpha(T_0) \|^2_{H^2} . \tag{7.43}$$

Par (7.23),(7.28) et (7.42), la relation (7.43) donne

$$\| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t) \|^2_{H^1_0} + \| \alpha(t) \|^2_{H^2}\leq \exp{(ct)}Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1}), \quad t \geq T_0. \tag{7.44}$$

En combinant (7.23),(7.40) et (7.44), on écrit

$$\| u(t) \|_{H^2} + \| \alpha(t) \|_{H^2} + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t) \|_{H^1_0}$$

$$\leq \exp{(ct)}Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}), \quad t \geq 0. \tag{7.45}$$

On multiplie (7.1) par u et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt} \| u \|^2 + \| \Delta u \|^2\leq c(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2). \tag{7.46}$$

On intègre (7.46) entre 0 et 1, par (7.23) et (7.28) on aura

$$\int_0^1 \| u(s) \|^2_{H^2} ds \leq Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}) + c^{'}, \tag{7.47}$$

donc il existe un $T \in (0, 1)$ tel que

$$\| u(T) \|^2_{H^2} + \| \alpha(T) \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(T) \|^2_{H^1_0}\leq Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H^1_0}) + c^{'}.$$

En répétant les estimations précédentes et en utilisant (7.45) commencant par $t = T$ au lieu de $t = 0$ on aura la propriété suivante

$$\| u(1) \|^2_{H^2} + \| \alpha(1) \|^2_{H^2} + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(1) \|^2_{H^1_0}$$

$$\leq Q(\| u_0 \|^2_{H^1_0} + \| \alpha_0 \|^2_{H^1_0} + \| \alpha_1 \|^2 + \int_\Omega G_N(u_0)dx) + c^{'}. \tag{7.48}$$

En répétant les estimations qui ont donné (7.48), on a pour $t \geq 1$,

$$\| u(t) \|_{H^2}^2 + \| \alpha(t) \|_{H^2}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_{H_0^1}^2$$

$$\leq Q(\| u(t-1) \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha(t-1) \|_{H_0^1}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t-1) \|^2 + \int_\Omega G_N(u(t-1))dx) + c', \tag{7.49}$$

(notons que toutes les constantes et fonctions ne dépendent pas de t) qui implique par (7.27) :

$$\| u \|_{H^2}^2 + \| \alpha \|_{H^2}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_{H_0^1}^2$$

$$\leq \exp(-ct) Q(\| u_0 \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha_0 \|_{H_0^1}^2 + \| \alpha_1 \|^2 + \int_\Omega G_N(u_0)dx) + c', \quad c > 0, \quad t \geq 1. \tag{7.50}$$

En combinant (7.50) et (7.45) pour $0 \leq t \leq 1$, on obtient l'estimation dissipative suivante

$$\| u(t) \|_{H^2} + \| \alpha(t) \|_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_{H_0^1}$$

$$\leq \exp(-ct) Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H_0^1}) + c', \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{7.51}$$

3 Existence et unicité de solutions

Dans cette section, on prouve que le problème considéré est bien posé, c'est-à-dire qu'il possède une solution unique qui soit continue par rapport aux données initiales, ce qui permettra de définir un semi-groupe continu. On énonce notre premier résultat :

Théorème 3.1. *Soit $T > 0$ donné. On suppose que $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in E_1$ et $G_N(u_0)dx < +\infty$. Alors le problème (7.1)-(7.4) admet au moins une solution $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ telle que $u \in L^\infty(0, +\infty, W \cap V), \alpha \in L^\infty(0, +\infty, W \cap V), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0, +\infty, V)$.*

Démonstration: La preuve de ce théorème est basée sur la méthode de Galerkin et les estimations (7.18) et (7.51). L'opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est autoadjoint, borné et positif. Il possède un inverse compact. Par conséquent, on peut considérer une famille $\{w_j, j \geq 1\}$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ qui forme une base orthonormale dans H et orthogonale dans V. En posant $V_m = vect\{w_1, ..., w_m\}$, on considère le problème approché suivant, écrit sous forme fonctionnelle,

$$A^{-1} \frac{du_m}{dt} + Au_m + P_m g_N(u_m) = \frac{d\alpha_m}{dt}, \tag{7.52}$$

$$\frac{d^2 \alpha_m}{dt^2} + \frac{d\alpha_m}{dt} + A\alpha_m = -\frac{du_m}{dt} - u_m, \tag{7.53}$$

$$\alpha_m(0) = P_m \alpha_0, \quad u_m(0) = P_m u_0, \quad \frac{d\alpha_m}{dt}(0) = P_m \alpha_1, \tag{7.54}$$

où P_m est la projection orthogonale de H sur V_m (pour le produit scalaire dans H), ce qui équivaut à

$$\frac{d}{dt}((A^{-1}u_m, v)) + < Au_m, v > \quad + \quad < P_m g_N(u_m), v > = ((\beta_m, v)) \tag{7.55}$$

$$\frac{d}{dt}((\beta_m, w)) + ((\beta_m, w)) + < A\alpha_m, w > \quad = \quad -\frac{d}{dt}((u_m, w)) - ((u_m, w)), \tag{7.56}$$

associé aux conditions (7.54).

La preuve de l'existence d'une solution locale en temps du problème approché est standard ; en effet, on cherche u_m, α_m et β_m sous la forme :

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} u_{jm} w_j, \quad \alpha_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \quad \text{et} \quad \beta_m = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_j.$$

Ainsi résoudre (7.52)-(7.54) revient à trouver les u_{jm}, α_{jm} et β_{jm} tels que u_m, α_m et β_m vérifient (7.52)-(7.54). Pour cela, en remplaçant v et w par $w_i, i = 1, ..., m$ dans le problème (7.55)-(7.56), on obtient un système d'équations différentielles ordinaires, que l'on résoud grâce au théorème Cauchy-Lipschitz. De plus on aboutit à des estimations équivalentes à (7.18) et (7.51), avec à la place de u et α, u_m et α_m, respectivement, à savoir

$$\frac{dE_{2m}}{dt} + c(E_{2m} + \| \frac{\partial u_m}{\partial t} \|_{-1}^2) \leq c', \quad c > 0, \tag{7.57}$$

où E_{2m} satisfait

$$c(\| u_m \|_V^2 + \| \alpha_m \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \|^2 + \int_\Omega G_N(u_m)dx) + c' \leq E_{2m}(t)$$

$$\leq c''(\| u_m \|_V^2 + \| \alpha_m \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \|^2 + \int_\Omega G_N(u_m)dx) + c''', \tag{7.58}$$

et

$$\| u_m(t) \|_{H^2} + \| \alpha_m(t) \|_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(t) \|_{H_0^1}$$

$$\leq \exp(-ct) Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H_0^1}) + c', \quad c > 0, t \geq 0, \tag{7.59}$$

ce qui permet de justifier les estimations obtenues de façon formelle dans la section précédente, mais aussi que la solution est globale. En ce qui conçerne le passage à la limite, on intègre (7.57) entre 0 et t, par (7.58) on déduit que $\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}$ dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$. De plus, en utilisant le Théorème 2.2 on aura $u_m \to u$ dans $L^2(Q)$ fort et p.p. lorsque $m \to +\infty$. On omet le reste da la preuve, qui se démontre sans difficulté (voir par exemple [58] et [59], cf. aussi le chapitre 3). □

Le résultat qui suit traite de l'unicité de la solution

Théorème 3.2. *Sous les conditions du Théorème 3.1, la solution du problème (7.1)-(7.4) est unique avec la régularité ci-dessus.*

DÉMONSTRATION: Soient $\Big(u^{(1)},\alpha^{(1)},\dfrac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}\Big)$ et $\Big(u^{(2)},\alpha^{(2)},\dfrac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\Big)$ deux solutions du problème (7.1)-(7.4) avec $(u_0^{(1)},\alpha_0^{(1)},\alpha_1^{(1)})$ et $(u_0^{(2)},\alpha_0^{(2)},\alpha_1^{(2)})$ les données initiales respectivement. On pose :

$$\Big(u,\alpha,\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big)=\Big(u^{(1)}-u^{(2)},\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)},\frac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}-\frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}\Big)$$

et

$$\Big(u_0,\alpha_0,\alpha_1\Big)=\Big(u_0^{(1)}-u_0^{(2)},\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)},\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}\Big),$$

Alors le problème verifié par (u,α) est

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta^2u-\Delta(g_N(u^{(1)})-g_N(u^{(2)}))&=-\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}, &(7.60)\\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\Delta\alpha&=-\frac{\partial u}{\partial t}-u, &(7.61)\\ u=\Delta u&=\alpha=0\quad\text{sur}\quad\partial\Omega, &(7.62)\\ \alpha(0)=\alpha_0,\quad u(0)&=u_0,\quad\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0)=\alpha_1. &(7.63)\end{aligned}$$

On multiplie (7.60) par $(-\Delta)^{-1}\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2+((g_N(u^{(1)})-g_N(u^{(2)}),\frac{\partial u}{\partial t}))=((\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t})). \tag{7.64}$$

On multiplie (7.61) par $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\alpha\|^2=-((u,\frac{\partial\alpha}{\partial t}))-((\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t})). \tag{7.65}$$

On additionne (7.64) et (7.65), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2+\|\nabla\alpha\|^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2)+\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2\\ &=-((g_N(u^{(1)})-g_N(u^{(2)}),\frac{\partial u}{\partial t}))-((u,\frac{\partial\alpha}{\partial t})).\end{aligned} \tag{7.66}$$

En utilisant les inégalités $\|\phi\|\le C(\Omega)\|\nabla\phi\|$ et $|((v,w))|\le c\|\nabla v\|.\|w\|_{-1}$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2+\|\nabla\alpha\|^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2)&+2(\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2)\\ \le\|\nabla(g_N(u^{(1)})-g_N(u^{(2)}))\|^2&+\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\frac{C(\Omega)}{\epsilon_2}\|\nabla u\|^2+\epsilon_2\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2.\end{aligned} \tag{7.67}$$

En choisissant $\epsilon_2>0$ assez petit tel que $2-\epsilon_2>0$, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2+\|\nabla\alpha\|^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2)+c(\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2)\\ &\le\|\nabla(g_N(u^{(1)})-g_N(u^{(2)}))\|^2+c'\|\nabla u\|^2.\end{aligned} \tag{7.68}$$

Par ailleurs, par (7.51) on a

$$\begin{aligned}
\| \nabla(g_N(u^{(1)}) - g_N(u^{(2)})) \| &= \| \nabla(\int_0^1 g_N^{'}(u^{(1)} + s(u^{(2)} - u^{(1)}))dsu) \| \\
&\leq \| \int_0^1 g_N^{'}(u^{(1)} + s(u^{(2)} - u^{(1)}))ds\nabla u \| \\
&+ \| u \int_0^1 g_N^{''}(u^{(1)} + s(u^{(2)} - u^{(1)}))(\nabla u^{(1)} + s\nabla(u^{(2)} - u^{(1)}))ds \| \\
&\leq Q(\| u_0^{(1)} \|_W, \| u_0^{(2)} \|_W, \| \alpha_0^{(1)} \|_W, \| \alpha_0^{(2)} \|_W, \| \alpha_1^{(1)} \|_V, \| \alpha_1^{(2)} \|_V) \\
&\quad \times(\| \nabla u \| + \| |u||\nabla u^{(1)}| \| + \| |u||\nabla u^{(2)}| \|) \\
&\leq Q(\| u_0^{(1)} \|_{H^2}, \| u_0^{(2)} \|_{H^2}, \| \alpha_0^{(1)} \|_{H^2}, \| \alpha_0^{(2)} \|_{H^2}, \| \alpha_1^{(1)} \|_{H_0^1}, \| \alpha_1^{(2)} \|_{H_0^1}) \| \nabla u \| .
\end{aligned} \tag{7.69}$$

Par (7.69), on déduit de (7.68) l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\| \nabla u \|^2 + \| \nabla \alpha \|^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) + c(\| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) \\
&\leq Q(\| u_0^{(1)} \|_{H^2}, \| u_0^{(2)} \|_{H^2}, \| \alpha_0^{(1)} \|_{H^2}, \| \alpha_0^{(2)} \|_{H^2}, \| \alpha_1^{(1)} \|_{H_0^1}, \| \alpha_1^{(2)} \|_{H_0^1}) \| \nabla u \|^2 .
\end{aligned} \tag{7.70}$$

Ce qui donne aussi bien l'unicité (pour $u_0^{(1)} = u_0^{(2)}, \alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)}$ et $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)}$) que la continuité par rapport aux données initiales. □

On définit ainsi, sous les conditions du Théorème 3.2, un semi-groupe continu (par rapport à la E-norme) $S(t)$ comme suit

$$S(t) : E_1 \to E_1, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)),$$

où $(u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t))$ est l'unique solution de (7.1)-(7.4).

4 Borné absorbant

Notre objectif ici, est d'établir que le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, défini précédemment, possède un ensemble borné absorbant dans l'espace des phases E_1. On a le

Théorème 4.1. *Le semi-groupe $S(t)$ associé au problème (7.1)-(7.4) possède un ensemble borné absorbant β_1 dans E_1.*

Démonstration: On prouve ce théorème grâce à l'estimation (7.51) qu'on la réécrit ici :

$$\begin{aligned}
&\| u(t) \|_{H^2} + \| \alpha(t) \|_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_{H_0^1} \\
&\leq \exp(-ct)Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H_0^1}) + c^{'}, \quad c > 0, \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{7.71}$$

et donc pour que

$$\| u(t) \|_{H^2} + \| \alpha(t) \|_{H^2} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_{H_0^1} \leq R, \quad R > 0, \tag{7.72}$$

il suffit que

$$\exp(-ct)Q(\| u_0 \|_{H^2}, \| \alpha_0 \|_{H^2}, \| \alpha_1 \|_{H_0^1}) + c' \leq R. \tag{7.73}$$

En prenant les données initiales u_0, α_0 et α_1 dans un borné B de E_1, on a

$$\| u(t) \|_W^2 + \| \alpha(t) \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \|_V^2 \leq R, \quad \forall t \geq t_0, \tag{7.74}$$

où $t_0 := \max\{0, -\frac{1}{c}\log(\frac{R-c'}{c''(B)})\}$. La preuve est ainsi complète. □

On donne finalement une remarque conçernant le système (7.1)-(7.2) associé aux conditions aux bords de Neumann homogènes.

Remarque 4.2. *Comme déjà mentionné au début de ce chapitre, on a que la moyenne spatiale du paramètre d'ordre u est une quantité consérvée quand le système (7.1)-(7.2) est munie de conditions aux bords de type Neumann. En effet, dans ce cas, on intègre (7.1) sur* Ω, *on a*

$$< u(t) > = < u_0 >, \quad t \geq 0 \tag{7.75}$$

où $< . > = \frac{1}{vol(\Omega)} \int_\Omega .dx$, *est la moyenne spatiale.*

On pose $H = u + \frac{\partial \alpha}{\partial t}$, *donc (7.2) devient*

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H - \Delta \alpha = 0. \tag{7.76}$$

On intègre ensuite (7.76) sur Ω, *on aura*

$$\frac{d}{dt} < H > + < H > = 0. \tag{7.77}$$

En particulier, on déduit de (7.77) que

$$< H(t) > = \exp(-t) < H(0) >, \tag{7.78}$$

Par ailleurs, si $< H(0) > = 0$, *i.e.* $< u_0 + \alpha_1 > = 0$, *on a conservation de l'enthalpie,*

$$< H(t) > = 0, \quad t \geq 0, \tag{7.79}$$

donc

$$< \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) > = - < u(t) > = - < u_0 >, \quad t \geq 0. \tag{7.80}$$

Ensuite on réécrit (7.78) sous la forme

$$\frac{d < \alpha >}{dt}(t) = \exp(-t) < u_0 + \alpha_1 > - < u_0 >, \tag{7.81}$$

qui donne

$$< \alpha(t) > = < \alpha_0 > + (1 - \exp(-t)) < \alpha_1 > + (1 - \exp(-t) - t) < u_0 >, \quad t \geq 0. \tag{7.82}$$

Donc on peut avoir les mêmes résultats obtenus dans ce chapitre pour les conditions de type Neumann, à savoir

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \tag{7.83}$$

où ν *désigne l'unité extérieure normale à* $\partial\Omega$*. Pour ce faire, par (7.75), (7.76) et (7.79), on réécrit (7.1) et (7.2) sous la forme*

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \Delta^2 \overline{u} - \Delta(g_N(u) - < g_N(u) >) = -\Delta \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial t}, \tag{7.84}$$

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \overline{H} - \Delta \overline{\alpha} = 0, \tag{7.85}$$

où $\overline{v} = v - < v >, \quad | < u_0 > | \leq M_1, \quad | < u_0 + \alpha_1 > | \leq M_2$*, pour* M_1 *et* M_2 *deux constantes positives fixées.*

Ensuite, on note que

$$v \mapsto (\| \overline{v} \|_{-1}^2 + < v >^2)^{\frac{1}{2}},$$

où $\| \, . \, \|_{-1} = \| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} . \, \|, \quad (-\Delta)^{-1}$ *est l'opérateur inverse de Laplace avec les conditions Neumann et qui s'applique sur des fonctions à moyenne nulle, est une norme dans* $H^{-1}(\Omega) = H^1(\Omega)'$ *qui est équivalente à la norme usuelle de* $H^{-1}(\Omega)$*, et on a* $< . >= \frac{1}{|\Omega|} < ., 1 >_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)}$,

$$\varphi \longmapsto (\| \overline{\varphi} \|^2 + < \varphi >^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi \longmapsto (\| \nabla\varphi \|^2 + < \varphi >^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\varphi \longmapsto (\| \Delta\varphi \|^2 + < \varphi >^2)^{\frac{1}{2}},$$

sont des normes dans $H^{-1}(\Omega), L^2(\Omega), H^1(\Omega)$ *et* $H^2(\Omega)$ *respectivement, qui sont équivalentes aux normes usuelles.*

Chapitre 8

Modèle de champ de phase conservatif de type Caginalp avec un terme logarithmique

Dans ce dernier chapitre de cette thèse, on considère le problème traité au chapitre précédent, mais cette fois avec un potentiel singulier, particulièrement un terme non linéaire logarithmique (voir, par exemple, [38], [43] et [72]). Nous examinons tout d'abord l'existence des solutions dans le cas $n \leq 3$, ensuite on démontre en dimension une et deux, une propriété de séparation stricte vérifiée par le paramètre d'ordre u, qui nous permettera d'étudier le comportement asymptotique des solutions. On considère le problème (C) suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta g(u) = -\Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{8.2}$$

$$u = \Delta u = \alpha = 0, \tag{8.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{8.4}$$

où u est le paramètre d'ordre et α est la variable de déplacement thermique, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine borné régulier (on précisera la dimension dans les sections suivantes) et $\partial\Omega$ désigne le bord régulier de Ω. Le potentiel g est défini comme suit :

$$g(s) = -2\kappa_0 s + \kappa_1 \ln(\frac{1+s}{1-s}), \quad s \in (-1; +1), 0 < \kappa_1 < \kappa_0. \tag{8.5}$$

On voit que g vérifie

$$g \quad \text{est de classe} \quad C^\infty \quad \text{et} \quad g(0) = 0, \tag{8.6}$$

$$-c_0 \leq G(s) \leq g(s)s + c_0, \quad c_0 \geq 0, \quad s \in (-1, +1), \tag{8.7}$$

où $G(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau$, et

$$g^{'}(s) \geq -2\kappa_0, \quad s \in (-1, +1). \tag{8.8}$$

On notera dans la suite $c, c^{'}$ et $c^{''}$ des constantes positives qui pourront varier d'une ligne à l'autre et quelques fois dans la même ligne.

1 Existence de solutions dans le cas $n \leq 3$.

Comme au chapitre 4, on considère l'ensemble K et on approche g par g_N le polynoôme considéré au chapitre 7 (voir [9]), on obtient alors le problème (C_N) suivant :

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} + \Delta^2 u_N - \Delta g_N(u_N) = -\Delta \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}, \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_N}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} - \Delta \alpha_N = -u_N - \frac{\partial u_N}{\partial t}, \tag{8.10}$$

$$u_N = \Delta u_N = \alpha_N = 0, \tag{8.11}$$

$$u_N(0) = u_0, \quad \alpha_N(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(0) = \alpha_1. \tag{8.12}$$

Rappelons, d'après le chapitre 7, le résultat d'existence conçernant le problème (C_N).

Théorème 1.1. *Soit $T > 0$ donné. On suppose que $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$ et $G_N(u_0)dx < +\infty$. Alors le problème (C_N) admet au moins une solution $(u_N, \alpha_N, \frac{\partial \alpha_N}{\partial t})$ telle que $u_N \in L^\infty(0, +\infty, H_0^1(\Omega))$, $\alpha_N \in L^\infty(0, +\infty, H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u_N}{\partial t} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ et $\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \in L^\infty(0, +\infty, L^2(\Omega))$.*

Rappelons aussi que pour $u_0 \in K$ on a que $G_N(u_0)$ est borné indépendemment de N.

On construit la solution du problème (C) comme étant la limite de la solution du problème (C_N) quand $N \to +\infty$. On prend $u_0 \in K$ et on démontre le théorème suivant

Théorème 1.2. *Soit $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in E_K$, alors le problème (8.1)-(8.4) admet au moins une solution $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ avec $(u, \alpha) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)^2)$, $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, $(u, \alpha) \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)^2)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$, $\quad \forall T > 0$.*

De plus $\forall t > 0, \| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, l'ensemble $\{x \in \Omega, |u(x,t)| \geq 1\}$ est de mesure nulle.

Démonstration: En remplaçant (u, α) par (u_N, α_N) dans (7.18), on écrit

$$\frac{dE_{2N}}{dt} + c(E_{2N} + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|_{-1}^2) \leq c', \quad c > 0, \tag{8.13}$$

où

$$E_{2N} = \| \nabla u_N \|^2 + 2 \int_\Omega G_N(u_N)dx + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2$$

$$+ \| \nabla \alpha_N \|^2 + \| u_N \|_{-1}^2 + \epsilon_1((\frac{\partial \alpha_N}{\partial t}, \alpha_N)) + \frac{\epsilon_1}{2} \| \alpha_N \|^2,$$

satisfait

$$c(\| u_N \|_V^2 + \| \alpha_N \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 + \int_\Omega G_N(u_N)dx) + c' \leq E_{2N}(t)$$

$$\leq c''(\| u_N \|_V^2 + \| \alpha_N \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 + \int_\Omega G_N(u_N)dx) + c''', \tag{8.14}$$

avec $c, c'' > 0$.

On applique le lemme de Gronwall à (8.13), on a

$$E_{2N}(t) \leq E_{2N}(0)\exp(-ct) + c', \tag{8.15}$$

la relation (8.15) implique en particulier que

$$E_{2N}(t) \leq E_{2N}(0) + c'. \tag{8.16}$$

Ainsi par (8.14) on aura

$$\sup_{t\in[0,T]} \{\| u_N(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| \alpha_N(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2\} \leq c' \tag{8.17}$$

où c' est une constante qui ne dépend pas de N.

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en considérant une sous suite, on a par l'estimation (8.17) :

$$u_N \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T,V), \tag{8.18}$$

$$\alpha_N \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T,V), \tag{8.19}$$

et

$$\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H). \tag{8.20}$$

On intègre (8.13) entre 0 et t, on a

$$E_{2N}(t) + c\int_0^t \| \frac{\partial u_N}{\partial t}(s) \|^2_{-1} ds \leq c, \quad \forall t \in [0,T], \quad c \geq 0, \tag{8.21}$$

la constante c est bien sûr indépendante de N. Il en découle que

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)). \tag{8.22}$$

On réécrit (8.9) sous la forme

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial u_N}{\partial t} - \Delta u_N + g_N(u_N) = \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}. \tag{8.23}$$

On multiplie (8.23) par $-\Delta u_N$. En utilisant l'inégalité de Hölder et la monotonie de g_N, on aura

$$\frac{d}{dt} \| u_N \|^2 + \| \Delta u_N \|^2 \leq c(\| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 + \| \nabla u_N \|^2). \tag{8.24}$$

On intègre (8.24) entre 0 et t, on déduit

$$\| u_N(t) \|^2 + \int_0^t \| \Delta u_N \|^2 \, ds \leq c, \quad \forall t \in [0,T], \tag{8.25}$$

où c est indépendante de N. Il en résulte que

$$\Delta u_N \rightharpoonup \Delta u \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{8.26}$$

On multiplie (8.23) par $g_N(u_N)$ et on intègre sur Ω, en utilisant la monotonie de g_N, on obtient

$$\| g_N(u_N) \|^2 \leq c(\| u_N \|_V^2 + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2). \tag{8.27}$$

On intègre (8.27) entre 0 et t, par (8.18),(8.20) et (8.22), on a

$$\| g_N(u_N) \|_{L^2(Q)}^2 \leq c, \tag{8.28}$$

où c est indépendante de N. On déduit alors pour une suite extraite que

$$g_N(u_N) \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{8.29}$$

Donc lorsque $N \longrightarrow +\infty$ dans (8.23), on déduit de (8.22),(8.26),(8.29) et (8.20) que $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie :

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \chi = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{dans} \quad L^2(Q). \tag{8.30}$$

De (8.10) on déduit :

$$< \frac{\partial \beta_N}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}, \phi > + < \nabla \alpha_N, \nabla \phi >= - < \frac{\partial u_N}{\partial t} + u_N, \phi >, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}((0,T) \times \Omega),$$

où $<. \, , .>$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ et $\mathcal{D}((0,T) \times \Omega)$.

Donc lorsque $N \longrightarrow +\infty$ on déduit de (8.19),(8.20),(8.18) et (8.22) :

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{8.31}$$

De plus d'après le lemme 2.4 avec (8.19) et (8.20) on a lorsque $N \to +\infty$:

$$\alpha_N \longrightarrow \alpha \quad \text{dans} \quad C([0,T], L^2(\Omega)), \tag{8.32}$$

d'autre part, d'après le Théorème 2.2 avec (8.18) et (8.22), on déduit

$$u_N \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad C([0,T], L^2(\Omega)), \tag{8.33}$$

donc en particulier on aura $u(x,0) = u_0$ et $\alpha(x,0) = \alpha_0$ dans Ω. Voir le chapitre 4 pour démontrer que $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,0) = \alpha_1$. Alors $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \chi = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{dans} \quad L^2(Q), \tag{8.34}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \quad \text{dans} \quad L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)), \tag{8.35}$$

$$u = \alpha = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{8.36}$$

$$u(0) = u_0, \qquad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{8.37}$$

Lemme 1.3. *Il existe une constante positive c telle que pour tout $r > 0$ on a*

$$\| \frac{\partial u_N}{\partial t}(t) \|_{-1}^2 \leq c(\frac{1}{r} + 1)(E_{2N}(0) + 1), \quad \forall t \geq r > 0. \tag{8.38}$$

Preuve: On intègre (8.13) entre t et $t + r$, on a

$$E_{2N}(t + r) + c \int_t^{t+r} (E_{2N}(s) + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|_{-1}^2) ds \leq c^{'}(r) + E_{2N}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall r > 0. \tag{8.39}$$

En remplaçant (u, α) par (u_N, α_N) dans (7.32), on écrit

$$\frac{d}{dt} \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \nabla \frac{\partial u_N}{\partial t} \|^2 \leq c\Big(\| u_N \|^2 + \| \nabla \alpha_N \|^2 + \| \frac{\partial u_N}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t} \|^2 \Big). \tag{8.40}$$

Par (8.14),(8.15) et (8.39), on applique le lemme de Gronwall uniforme à (8.40) et donc on déduit que $\forall s > 0$ on a

$$\| \frac{\partial u_N}{\partial t}(t + s) \|_{-1}^2 \leq c(\frac{1}{s} + 1)(E_{2N}(0) + 1), \quad \forall t \geq 0, \tag{8.41}$$

ce qui complète la preuve de (8.38). □

Lemme 1.4. *Il existe une constante c telle que pour tout $r > 0$ on a*

$$\| g_N(u_N(t)) \|^2 \leq c(\frac{1}{r} + 1)(E_{2N}(0) + 1), \quad \forall t \geq r > 0. \tag{8.42}$$

Preuve: Par (8.14), on conclut de (8.16) que

$$\| u_N(t) \|_V^2 + \| \frac{\partial \alpha_N}{\partial t}(t) \|^2 \leq E_{2N}(0) + c, \quad \forall t \geq r > 0. \tag{8.43}$$

Par (8.38) et (8.43), on obtient de (8.27) la relation (8.42). □

Par (8.42) on déduit

$$t \| g_N(u_N(t)) \|^2 \leq c(T + 1), \quad \forall t \in (0, T), \tag{8.44}$$

ce qui implique que (cf. chapitre 4)

$$|E_\eta^N(t)|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{t} \sum_{k=0}^N \frac{(1-\eta)^{2k+1}}{2k+1}}. \tag{8.45}$$

Lorsque $N \longrightarrow +\infty$, on déduit de (8.42),(8.45) et du lemme de Fatou que

$$\begin{aligned} |E_\eta(t)| = \textstyle\int_\Omega \chi_\eta(t) dx \leq \int_\Omega \liminf_{N\to+\infty} \chi_\eta^N(t) dx &\leq \liminf_{N\to+\infty} \textstyle\int_\Omega \chi_\eta^N(t) dx \\ &\leq \liminf |E_\eta^N(t)| \\ &\leq \frac{4C}{t \ln^2\left(\frac{2-\eta}{\eta}\right)}, \end{aligned}$$

avec $|E_\eta(t)|$ et $\chi_\eta(t)$ désignent respectivement la mesure de l'ensemble $\{x \in \Omega, |u(x,t)| > 1-\eta\}$ et sa fonction caractéristique.

Lorsque $\eta \to 0$ on obtient $\forall t \in (0,T)$,

$$mes\{x \in \Omega, |u(x,t)| \geq 1\} = 0. \tag{8.46}$$

De plus par (8.33),(8.46) on a, lorsque $N \to +\infty$ que $\forall t \in (0,T)$:

$$g_N(u_N(t)) \longrightarrow g(u(t)) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega. \tag{8.47}$$

Par (8.28),(8.47) et Lions ([13], lemme 1.3, p.12), on a

$$g_N(u_N) \rightharpoonup g(u) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{8.48}$$

Finalement par (8.29) et (8.48) on obtient que

$$\chi = g(u),$$

d'où le théorème. □

Remarque 1.5. *On ne s'attend pas à avoir l'unicité de la solution du problème (C) en dimension trois, par contre en démontrant une propriété de séparation stricte en dimension une et deux, on peut facilement démontrer le résultat, celà va être l'objet de la section suivante.*

2 Etude basée sur une propriété de séparation

Pour pouvoir démontrer la propriété de séparation pour le problème (C), on considère le problème perturbé (C^ϵ) suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(\Delta u - g(u) + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \epsilon\frac{\partial u}{\partial t}), \tag{8.49}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{8.50}$$

$$u = \Delta u = \alpha = 0, \tag{8.51}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{8.52}$$

qu'on l'écrit sous la forme :

$$\epsilon\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - g(u) + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad \epsilon \geq 0, \tag{8.53}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{8.54}$$

$$u = \alpha = 0, \tag{8.55}$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1. \tag{8.56}$$

On pose $z = (u, \alpha, \dfrac{\partial\alpha}{\partial t})$ avec $z_0 = (u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ la donnée initiale correspondante et on définit les deux espaces de phase suivants :

En dimension une :

$$\mathbb{D}^1_\epsilon = \{z \in E_1, \| u \|_{L^\infty} < 1, g(u) \in L^2(\Omega), \epsilon^{\frac{1}{2}}(u+\phi) \in H, \phi \in H^{-1}(\Omega)$$

$$\text{avec} \quad \phi := (\epsilon + (-\Delta)^{-1})^{-1}[\Delta u - g(u) + \frac{\partial\alpha}{\partial t}]\} \tag{8.57}$$

et la "norme" dans l'espace $\mathbb{D}^1_\epsilon$ est définie de la façon suivante :

$$\| z \|^2_{\mathbb{D}^1_\epsilon} = \| z \|^2_{E_1} + \| g(u) \|^2 + \epsilon(\| \phi \|^2 + \| u \|^2) + \| \phi \|^2_{-1} . \tag{8.58}$$

En dimension deux :

$$\mathbb{D}^2_\epsilon = \{z \in E_2, \| u \|_{L^\infty} < 1, g(u) \in L^2(\Omega), \epsilon^{\frac{1}{2}} u \in H, \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi \in V, \phi \in H$$

$$\text{avec} \quad \phi := (\epsilon + (-\Delta)^{-1})^{-1}[\Delta u - g(u) + \frac{\partial\alpha}{\partial t}]\} \tag{8.59}$$

et la "norme" dans l'espace $\mathbb{D}^2_\epsilon$ est définie de la façon suivante :

$$\| z \|^2_{\mathbb{D}^2_\epsilon} = \| z \|^2_{E_2} + \| g(u) \|^2 + \epsilon(\| \phi \|^2_V + \| u \|^2) + \| \phi \|^2 . \tag{8.60}$$

On commence à établir des estimations à priori pour le problème (8.53)-(8.56), pour ce faire on suppose à priori que

$$\| u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} < 1. \tag{8.61}$$

On désigne par Q une fonction monotone et par c, c', c'' et c''' des constantes qui varient d'une ligne à l'autre et parfois dans la même ligne et qui sont indépendantes de ϵ sauf mention contraire.

On multiplie (8.53) par $u + \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et (8.54) par $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$, on additionne les équations résultantes, par (8.7) on aura

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\epsilon \| u \|^2 + \| u \|^2_{-1} + \| \nabla u \|^2 + 2\int_\Omega G(u)dx + \| \nabla\alpha \|^2 + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2] \\ &+ \| \nabla u \|^2 + \int_\Omega G(u)dx + \epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{-1} + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 \leq c. \end{aligned} \tag{8.62}$$

On multiplie (8.54) par α et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \alpha \|^2 + 2((\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \alpha))) + \| \nabla\alpha \|^2 = -((\frac{\partial u}{\partial t}, \alpha)) - ((u, \alpha)) + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 . \tag{8.63}$$

On additionne (8.62) et δ_1(8.63), où $\delta_1 > 0$ assez petit tel que

$$\delta_1 \| \alpha \|^2 + \| \nabla\alpha \|^2 + 2\delta_1((\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \alpha)) + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2 \geq c(\| \alpha \|^2_V + \| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \|^2), \quad c > 0, \tag{8.64}$$

on obtient
$$\frac{dE_3}{dt}+c(E_3+\epsilon\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2_{-1})\leq c^{'},\quad c>0,\tag{8.65}$$
avec
$$E_3=\epsilon\parallel u\parallel^2+\parallel u\parallel^2_{-1}+\parallel\nabla u\parallel^2+2\int_\Omega G(u)dx+\parallel\nabla\alpha\parallel^2+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2$$
$$+\delta_1\parallel\alpha\parallel^2+2\delta_1((\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha)),$$
satisfait
$$c(\epsilon\parallel u\parallel^2+\parallel u\parallel^2_V+\parallel\alpha\parallel^2_V+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2)-c^{'}\leq E_3(t)$$
$$\leq c^{''}(\epsilon\parallel u\parallel^2+\parallel u\parallel^2_V+\parallel\alpha\parallel^2_V+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2)+c^{'''},\tag{8.66}$$
avec $c,c^{''}>0$ et pour $\epsilon>0$.

On applique le lemme de Gronwall à (8.65) et par (8.66) on aura
$$\epsilon\parallel u\parallel^2+\parallel u\parallel^2_V+\parallel\alpha\parallel^2_V+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2$$
$$+\int_0^t\exp{(-c(t-s))}(\epsilon\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2_{-1})ds$$
$$\leq Q(\epsilon\parallel u_0\parallel^2+\parallel z_0\parallel^2_E)\exp{(-ct)}+c^{'}.\tag{8.67}$$
On dérive (8.53) par rapport au temps, on a :
$$\epsilon\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+(-\Delta)^{-1}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\Delta\frac{\partial u}{\partial t}+g^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\Delta\alpha-\frac{\partial u}{\partial t}-u.\tag{8.68}$$
On multiplie (8.68) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, l'inégalité de Poincarré et $\parallel\varphi\parallel^2\leq c\parallel\nabla\varphi\parallel.\parallel\varphi\parallel_{-1}$ donne l'estimation suivante
$$\frac{d}{dt}(\epsilon\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2_{-1})+\parallel\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2$$
$$\leq c(\epsilon\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2_{-1}+\parallel u\parallel^2+\parallel\nabla\alpha\parallel^2+\parallel\frac{\partial\alpha}{\partial t}\parallel^2),\tag{8.69}$$
On applique le lemme de Gronwall à (8.69) et par (8.67) on a ($\phi=\frac{\partial u}{\partial t}$)
$$\begin{aligned}&\epsilon\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2+\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2_{-1}\quad+\quad\int_0^t\exp{(-c(t-s))}\parallel\frac{\partial u}{\partial t}\parallel^2_V\,ds\\&\leq Q(\epsilon\parallel u_0\parallel^2+\parallel z_0\parallel^2_E\quad+\quad\epsilon\parallel\phi(0)\parallel^2+\parallel\phi(0)\parallel^2_{-1})\exp{(-ct)}+c^{'}.\end{aligned}\tag{8.70}$$
On écrit (8.53) sous la forme :
$$-\Delta u+g(u)=-\epsilon\frac{\partial u}{\partial t}-(-\Delta)^{-1}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\tag{8.71}$$

On multiplie (8.71) par $-\Delta u$ et on intègre sur Ω, par (8.8) on aura

$$\begin{array}{rcl} \| \Delta u \|^2 & \leq & c(\| \nabla u \|^2 + \epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2) \\ & \leq & (\text{par} \quad (8.67), (8.70)) \\ \| u \|_{H^2}^2 & \leq & Q(\epsilon \| u_0 \|^2 + \| z_0 \|_E^2 + \epsilon \| \phi(0) \|^2 + \| \phi(0) \|_{-1}^2) \exp(-ct) + c'. \end{array} \tag{8.72}$$

En considérant (4.129) et par (8.67),(8.70) et (4.98), on déduit

$$\| \alpha \|_{H^2}^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2 \leq Q(\epsilon \| u_0 \|^2 + \| z_0 \|_{E_1}^2 + \epsilon \| \phi(0) \|^2 + \| \phi(0) \|_{-1}^2) \exp(-ct) + c'. \tag{8.73}$$

On réécrit (8.53) sous la forme :

$$g(u) = \Delta u + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} - (-\Delta)^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{8.74}$$

Par (8.67),(8.70) et (8.72) on déduit de (8.74) :

$$\| g(u) \|^2 \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}) \exp(-ct) + c'. \tag{8.75}$$

En combinant, on aura finalement

$$\begin{array}{l} \| u \|_W^2 + \| \alpha \|_W^2 + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2 \quad + \quad \epsilon(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 \\ + \int_0^t \exp(-c(t-s))(\epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \quad + \quad \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_V^2) ds \\ \quad \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}) \exp(-ct) \quad + \quad c'. \end{array} \tag{8.76}$$

Théorème 2.1. *Soit $\epsilon > 0$, donc le champ de phase u^ϵ satisfait la propriété de séparation stricte, c'est-à-dire*

$$\| u^\epsilon(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 - \delta_\epsilon, \quad \forall t \geq 0, \tag{8.77}$$

où $\delta_\epsilon > 0$ dépend de ϵ.

DÉMONSTRATION: **En dimension une :** On écrit (8.53) sous la forme :

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = \tilde{h} := \frac{\partial \alpha}{\partial t} - (-\Delta)^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{8.78}$$

Par (8.76) on a :

$$\| \tilde{h} \|_{L^\infty(\Omega)} \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}) \exp(-ct) + c'. \tag{8.79}$$

On pose $h_\pm(t) := \pm \| \tilde{h}(t) \|_{L^\infty(\Omega)}$ et on considère les EDO auxiliaires suivantes :

$$\epsilon y_\pm' + g(y_\pm) = h_\pm; \quad y_\pm(0) = \pm \| u_0 \|_{L^\infty}. \tag{8.80}$$

D'après le principe de comparaison on a :

$$y_-(t) \leq u(t,x) \leq y_+(t), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \Omega.$$

On déduit par (8.79) (voir [28], [43] et le chap.4) :

$$D(u(t)) \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}) \exp(-ct) + c'. \tag{8.81}$$

En combinant les résultats précédents, on aura

$$
\begin{aligned}
D(u(t))+ \| u \|_W^2 + \| \alpha \|_W^2 \quad &+ \quad \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2 + \epsilon(\| u \|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2) + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 \\
+ \int_0^t \exp(-c(t-s))(\epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \quad &+ \quad \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{-1}^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_V^2) ds \\
\leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}) \exp(-ct) \quad &+ \quad c'.
\end{aligned}
\tag{8.82}
$$

En particulier, on a la propriété (8.77) avec δ_ϵ dépend de $\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}$.

En dimension deux : Considérons l'estimation (4.144), on a par (8.76) :

$$
\int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \Delta u \|^2 \, ds \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}) \exp(-ct) + c'. \tag{8.83}
$$

On réécrit (8.68) sous la forme :

$$
\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-\Delta)^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} = q, \tag{8.84}
$$

où

$$
q = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Delta \alpha - u - \frac{\partial u}{\partial t} - g'(u) \frac{\partial u}{\partial t}.
$$

On multiplie (8.84) par $-\Delta \frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω on a

$$
\frac{d}{dt}[\epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_V^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2] + \| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \leq \| q \|^2 \tag{8.85}
$$

On applique le lemme de Gronwall à (8.85), on obtient l'estimation suivante

$$
\begin{aligned}
\epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_V^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \, ds \\
\leq c \int_0^t \exp(-c(t-s))[\| q \|^2 + \epsilon \| \phi \|_V^2 + \| \phi \|^2] ds \\
+ \exp(-ct)(\epsilon \| \phi(0) \|_V^2 + \| \phi(0) \|^2).
\end{aligned}
\tag{8.86}
$$

Estimons le terme $\int_0^t \exp(-c(t-s))[\epsilon \| \phi \|_V^2 + \| \phi \|^2] ds$.

On multiplie (8.53) par $-\Delta \frac{\partial u}{\partial t}$, en utilisant l'inégalité de Hölder on aura

$$
\frac{d}{dt} \| \Delta u \|^2 + \epsilon \| \phi \|_V^2 + \| \phi \|^2 \leq c(\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_V^2 + \| g(u) \|^2 + \| \phi \|_W^2), \tag{8.87}
$$

le lemme de Gronwall appliqué à (8.87) avec (8.75) et (8.76) impliquent

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \exp(-c(t-s))(\epsilon \| \phi \|_V^2 + \| \phi \|^2) ds \\
\leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}_\epsilon^1}) \exp(-ct) + c' + \int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \, ds.
\end{aligned}
\tag{8.88}
$$

Afin d'estimer le terme $\int_0^t \exp(-c(t-s)) \| q \|^2 \, ds$, on énonce tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.2. $\forall L > 0$ *on a :*

$$\int_{[t,t+1]\times\Omega} \exp(L|g(u(x,t))|)dxdt \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^1_\epsilon}) \exp(-ct) + c', \tag{8.89}$$

où c' *dépend de* $L > 0$.

PREUVE: Considérons l'équation (8.78), on a par (8.76) :

$$\| \tilde{h} \|_V \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^1_\epsilon}) \exp(-ct) + c'. \tag{8.90}$$

On fixe $L > 0$. On multiplie (8.78) par $g(u)\exp(L|g(u)|)$ et on intègre sur $[t, t+1]\times\Omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon \int_\Omega G_L(u(t+1))dx + \int_{[t,t+1]\times\Omega} |\nabla u|^2 g'(u)(1 + L|g(u)|)\exp(L|g(u)|)dxdt \\ + \int_{[t,t+1]\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(L|g(u)|)dxdt \\ = \epsilon \int_\Omega G_L(u(t))dx + \int_{[t,t+1]\times\Omega} \tilde{h}.g(u)\exp(L|g(u)|)dxdt, \end{aligned} \tag{8.91}$$

où $G_L(s) = \int_0^s \tau \exp(L|\tau|)d\tau$.

Par (4.155) et (8.72), la relation (8.91) donne

$$\begin{aligned} & \int_{[t,t+1]\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(L|g(u)|)dxdt \\ \leq Q(\epsilon \| u_0 \|^2 + \| z_0 \|_E^2 & + \epsilon \| \phi(0) \|^2 + \| \phi(0) \|_{-1}^2)\exp(-ct) + c' \\ & + \int_{[t,t+1]\times\Omega} |\tilde{h}|.|g(u)|\exp(L|g(u)|)dxdt. \end{aligned} \tag{8.92}$$

Pour estimer le terme $\int_{[t,t+1]\times\Omega} |\tilde{h}|.|g(u)|\exp(L|g(u)|)dxdt$, on considère les estimations (4.160) et (4.161) avec

$$a := M|\tilde{h}(t)|, \quad b := M^{-1}|g(u)|\exp(L|g(u)|),$$

où $M = M(L)$ est suffisemment grand, on a (voir [27] et [43]) :

$$|\tilde{h}|.|g(u)|\exp(L|g(u)|) \leq \exp(M|\tilde{h}|) + \frac{1}{2}|g(u)|^2 \exp(L|g(u)|) + c, \tag{8.93}$$

En insérant (8.93) dans (8.92), on aura

$$\begin{aligned} \int_{[t,t+1]\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(L|g(u)|)dxdt & \leq 2\int_{[t,t+1]\times\Omega} \exp(M|\tilde{h}|)dxdt \\ +Q(\epsilon \| u_0 \|^2 + \| z_0 \|_E^2 & + \epsilon \| \phi(0) \|^2 + \| \phi(0) \|_{-1}^2)\exp(-ct) + c'. \end{aligned} \tag{8.94}$$

Les estimations (8.90), (4.164) et (8.94) impliquent que :

$$\int_{[t,t+1]\times\Omega} |g(u)|^2 \exp(L|g(u)|)dxdt \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^1_\epsilon}) \exp(-ct) + c'. \tag{8.95}$$

On déduit de (8.95) l'estimation (8.89) (voir chap.4). □

En remarquant que le terme logarithmique g satisfait (4.168) et en utilisant (8.89) on déduit :

$$\| g^{'}(u) \|_{L^p([t,t+1]\times\Omega)} \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^1_\epsilon}) \exp(-ct) + c^{'}, \tag{8.96}$$

donc

$$\| q \|_{L^2([t,t+1]\times\Omega)} \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^1_\epsilon}) \exp(-ct) + c^{'}. \tag{8.97}$$

En imitant (4.172)-(4.176), on déduit

$$\int_0^t e^{-c(t-s)} \| q \|^2 \, ds \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^1_\epsilon}) \exp(-ct) + c^{'}. \tag{8.98}$$

Par (8.88) et (8.98), on déduit de (8.86) :

$$\int_0^t \exp(-c(t-s)) \| \Delta\frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \, ds \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^2_\epsilon}) \exp(-ct) + c^{'}. \tag{8.99}$$

En insérant (8.83) et (8.99) dans (4.144) on aura

$$\| \alpha \|^2_{H^3} + \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_{H^2} \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^2_\epsilon}) \exp(-ct) + c^{'}. \tag{8.100}$$

Or en dimension deux on a $H^2 \subset C(\bar{\Omega})$ donc par (8.100) on aura

$$\| \tilde{h} \|_{L^\infty} \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^2_\epsilon}) \exp(-ct) + c^{'}, \tag{8.101}$$

on déduit alors la propriété de séparation comme dans le cas de la dimension une et on a

$$\begin{aligned} D(u(t)) + \| u \|^2_{H^3} + \| \alpha \|^2_{H^3} &+ \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|^2_W + \epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_V + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 \\ + \int_0^t \exp(-c(t-s))(\epsilon \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2 &+ \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{-1} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_W) ds \\ \leq Q(\| z_0 \|_{\mathbb{D}^2_\epsilon}) \exp(-ct) &+ c^{'}, \end{aligned} \tag{8.102}$$

d'où le théorème. □

Corollaire 2.3. *Pour $0 \leq \epsilon \leq 1$, le champ de phase u^ϵ satisfait*

$$\| u^\epsilon(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0, \tag{8.103}$$

où $\delta > 0$ ne dépend pas de $\epsilon \in [0, 1]$.

2.1 Caractère bien posé du problème (C^ϵ)

On commence à donner la définition d'une solution du problème (8.53)-(8.56).

Définition 2.4. *Une fonction $z(t)$ est une solution du problème (8.53)-(8.56) avec $z_0 \in \mathbb{D}^2_\epsilon$ si*

$$z \in L^\infty([0, T], \mathbb{D}^2_\epsilon) \quad et \quad u \in C([0, T], H^{-1}(\Omega)), \quad \forall T > 0 \tag{8.104}$$

et les équations (8.53)-(8.56) sont satisfaites au sens des distributions.

Remarque 2.5. *On note que pour $u(t)$ régulière ($u(t) \in H^4(\Omega)$ et $\| u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^+\times\Omega)} < 1$), les deux problèmes (8.49)-(8.52) et (8.53)-(8.56) sont équivalents. Si $z(t)$ appartient seulement à $\mathbb{D}^2_\epsilon$ (comme dans la définition 2.4), les équations (8.53)-(8.56) sont vues comme une définition de solutions pour le problème (8.49)-(8.52).*

Théorème 2.6. *Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $z_0 \in \mathbb{D}^2_\epsilon$, il existe une unique solution $z(t)$ pour le problème (8.53)-(8.56) qui vérifient les estimations (8.77) et (8.102).*

DÉMONSTRATION: **Existence.** On vérifie l'existence d'une solution dans la classe (8.104) pour $\epsilon > 0$. Grâce à la propriété de séparation stricte il n'est pas difficile de démontrer l'existence, en effet, on remplace g par la fonction de classe C^1 suivante :

$$g^{\delta_\epsilon}(s) = \begin{cases} g(-\delta_\epsilon) + g^{'}(-\delta_\epsilon)(s+\delta_\epsilon) & , \quad s \in (-\infty, -\delta_\epsilon[, \\ g(s) & , \quad s \in [-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon], \\ g(\delta_\epsilon) + g^{'}(\delta_\epsilon)(s-\delta_\epsilon) & , \quad s \in]\delta_\epsilon, +\infty), \end{cases}$$

où δ_ϵ est le même que dans (8.77). On obtient alors le problème (C^{δ_ϵ}) dont l'existence d'une solution est connue à savoir $(u^{\delta_\epsilon}, \alpha^{\delta_\epsilon}, \dfrac{\partial \alpha^{\delta_\epsilon}}{\partial t})$. De plus on démontre que g et g^{δ_ϵ} vérifient les mêmes propriétés (voir les chap.4-6 et [21]), donc

$$\| u^{\delta_\epsilon} \|_{L^\infty} \leq 1 - \delta_\epsilon, \quad \forall t \geq 0 \tag{8.105}$$

parsuite $g^{\delta_\epsilon}(u^{\delta_\epsilon}) = g(u^{\delta_\epsilon})$ et $(u^{\delta_\epsilon}, \alpha^{\delta_\epsilon}, \dfrac{\partial \alpha^{\delta_\epsilon}}{\partial t})$ est une solution du problème (C^ϵ).

Unicité. Soit $\Big(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}\Big)$ et $\Big(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\Big)$ deux solutions du problème (8.53)-(8.56), avec $\Big(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\Big)$ et $\Big(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\Big)$ leurs données initiales respectivement. On pose :

$$\Big(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\Big) = \Big(u^{(1)} - u^{(2)}, \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}\Big)$$

et

$$\Big(u_0, \alpha_0, \alpha_1\Big) = \Big(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}, \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}\Big)$$

Alors $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - l(t) u + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{8.106}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u, \tag{8.107}$$

$$u = \alpha = 0, \tag{8.108}$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{8.109}$$

Puisque les $u^{(i)}, \quad i = 1, 2$ sont strictement séparées de ± 1, on a que

$$\| l(t) \|_{L^\infty} \leq c, \quad \forall t \geq 0 \tag{8.110}$$

où c dépend de δ mais indépendante de $\epsilon \in [0, 1]$.

On multiplie (8.106) par $u+\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et (8.107) par $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on additionne les équations résultantes, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\epsilon \parallel u \parallel^2 + \parallel u \parallel_{-1}^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2\}$$

$$+ \parallel \nabla u \parallel^2 + \epsilon \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel_{-1}^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 = -((l(t)u,u)) - ((l(t)u,\frac{\partial u}{\partial t})). \tag{8.111}$$

En utilisant l'inégalité $|((v,w))| \leq c \parallel \nabla v \parallel . \parallel w \parallel_{-1}$ et (8.110) on déduit

$$\frac{d}{dt}\{\epsilon \parallel u \parallel^2 + \parallel u \parallel_{-1}^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2\}$$

$$+ c(\parallel \nabla u \parallel^2 + \epsilon \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel_{-1}^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2) \leq c' \parallel u \parallel^2, \quad c>0 \tag{8.112}$$

avec c et c' dépendent de $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$.

On applique le lemme de Gronwall à (8.112) on aura :

$$\epsilon \parallel u \parallel^2 + \parallel u \parallel_{-1}^2 + \parallel \nabla u \parallel^2 + \parallel \frac{\partial \alpha}{\partial t} \parallel^2 + \parallel \nabla \alpha \parallel^2$$

$$c' \exp(ct)(\epsilon \parallel u_0 \parallel^2 + \parallel u_0 \parallel_{-1}^2 + \parallel u_0 \parallel_V^2 + \parallel \alpha_1 \parallel^2 + \parallel \alpha_0 \parallel_V^2), \quad \forall t \geq 0 \tag{8.113}$$

c et c' sont indépendantes de $\epsilon \in [0,1]$. On déduit de (8.113) l'unicité des solutions du problème (8.53)-(8.56). □

2.2 Existence des solutions de (C^ϵ) dans le cas limite $\epsilon = 0$.

Théorème 2.7. *Pour tout $z_0 \in \mathbb{D}_0^2$, il existe une unique solution $z(t)$ pour le problème (8.1)-(8.4) qui vérifie l'estimation suivante :*

$$\parallel z(t) \parallel_{\mathbb{D}_0^2}^2 + \int_0^t \exp(-c(t-s))(\parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel_{-1}^2 + \parallel \frac{\partial u}{\partial t} \parallel_W^2)ds \leq Q(\parallel z_0 \parallel_{\mathbb{D}_0^2})\exp(-ct) + c'. \tag{8.114}$$

Démonstration: On considère une suite $\epsilon_n > 0, \quad \epsilon_n \to 0$, et la suite correspondante de solutions $(u^{\epsilon_n}(t), \alpha^{\epsilon_n}(t), \dfrac{\partial \alpha^{\epsilon_n}}{\partial t}(t))$ pour le problème (C^ϵ) avec $\epsilon = \epsilon_n$, dont l'existence a été démontré dans le Théorème 2.6.

On prend $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{D}_0^2$, donc c'est évident que $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{D}_\epsilon^2, \quad \epsilon > 0$, et

$$\parallel (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \parallel_{\mathbb{D}_\epsilon^2} \leq c \parallel (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \parallel_{\mathbb{D}_0^2}, \tag{8.115}$$

où c est indépendante de $\epsilon \to 0$.

Par (8.115), les estimations (8.82) et (8.102) sont satisfaites uniformément par rapport à ϵ_n. La solution désirée $(u, \alpha, \dfrac{\partial \alpha}{\partial t})$ du problème (C) peut être obtenue en passant à la limite $\epsilon_n \to 0$, en effet : Par (8.102), on a que la suite $(u^{\epsilon_n}, \alpha^{\epsilon_n}, \frac{\partial \alpha^{\epsilon_n}}{\partial t})$ est uniformément bornée dans $L^\infty([0,T], E_2)$ pour tout T fixé. Donc il existe une sous suite notée aussi $(u^{\epsilon_n}, \alpha^{\epsilon_n}, \frac{\partial \alpha^{\epsilon_n}}{\partial t})$ qui converge vers $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ dans cet espace faiblement étoile lorsque $\epsilon_n \to 0$.

De plus en raisonnant d'une manière analogue (voir [9], [73], [74] et le chap.4), on montre que

$$g(u^{\epsilon_n}(t)) \overset{*}{\rightharpoonup} g(u(t)) \quad \text{dans} \quad L^\infty([0,T], L^2(\Omega)).$$

En passant à la limite $\epsilon_n \to 0$ dans les équations (8.53)-(8.54) pour $(u^{\epsilon_n}, \alpha^{\epsilon_n}, \frac{\partial \alpha^{\epsilon_n}}{\partial t})$, on vérifie d'une façon standard que la fonction limite $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ verifie les équations (8.53)-(8.54) avec $\epsilon = 0$.

Donc en particulier on déduit la propriété de séparation stricte vérifiée par u, à savoir

$$\| u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 - \delta, \quad \forall t \geq 0. \tag{8.116}$$

□

2.3 Semi-groupe et Dissipativité

D'après le Théorème 2.7, on définit le semi-groupe $S(t)$ associé au problème (8.1)-(8.4) de la façon suivante :

$$S(t) : \mathbb{D}_0^2 \longrightarrow \mathbb{D}_0^2, z_0 \to S(t)z_0 = z(t). \tag{8.117}$$

Théorème 2.8. *Le semi-groupe $S(t)$ engendré par le système d'équations (8.1)-(8.4) possède un ensemble borné absorbant que l'on note β_0 dans l'espace $\mathbb{D}_0^2$, c'est-à-dire,*

$$\forall B \subset \mathbb{D}_0^2 \quad \textit{borné}, \quad \exists t_0 = t_0(B) \quad \textit{tel que} \quad t \geq t_0 \quad \textit{implique} \quad S(t)B \subset \beta_0.$$

Démonstration: En prenant $\| z_0 \|_{\mathbb{D}_0^2} \leq R$, par (8.114) on aura

$$\| z(t) \|_{\mathbb{D}_0^2} \leq c, \quad \forall t \geq t_0.$$

□

Remarque 2.9. *En utilisant la propriété de séparation stricte (8.116) on a que g et toutes ses dérivées sont bornées, alors il n'est pas difficile de prouver, par des arguments de décomposition standards (voir les chapitres 4 et 6) que le semi-groupe $S(t)$ possède l'attracteur global $\mathcal{A}_c$.*

Conclusion et perspectives

L'idée principale de cette thèse est d'étudier des systèmes d'équations qui modélisent des phénomènes de transition de phase. Ces systèmes sont des généralisations du système de champ de phase de Caginalp, introduit par Gunduz Caginalp (voir [2]) en vu de modéliser les phénomènes de transition de phase dans certaines classes de matériaux, par exemple, les phénomènes de fusion-solidification.

La première partie de ce rapport est consacrée à l'analyse mathématique du modèle de champ de phase de Caginalp obtenu d'après la loi de Maxwell-Cattaneo de la conduction de chaleur. En particulier, nous avons étudié les propriétés suivantes : l'existence et l'unicité, la continuité par rapport aux données initiales et l'existence de l'attracteur global de solutions pour le problème considéré dans les situations suivantes :

- Cas d'un potentiel polynomial (avec des conditions aux limites de type Dirichlet et de type Neumann homogènes)

- Cas d'un potentiel singulier (plus précisement, un terme logarithmique, avec les conditions aux limites citées ci-dessus).

Dans le cas d'un potentiel singulier, nous avons démontré, en dimension une et deux, une propriété de séparation stricte qui nous a facilité l'étude de l'existence d'attracteurs exponentiels de notre problème (puisque dans ce cas le potentiel singulier et toutes ses dérivées sont bornées).

La seconde partie concerne l'étude théorique du même modèle mais dans sa version conservative, dans le sens que, quand il est muni de conditions aux limites de type Neumann, la moyenne spatiale du paramètre d'ordre est conservée en temps.

Nous avons traité le problème avec des conditions aux limites de type Dirichlet et avec les deux types de potentiel (polynomial et singulier). En particulier, nous avons établi le caractère bien posé ainsi l'existence de l'attracteur global de dimension fractale finie.

Rappelons que nous avons utilisé dans notre étude des résultats de la théorie de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des systèmes dynamiques dissipatifs.

Enfin, nous donnerons d'autres perspectives de travail qui pourraient être envisagées.

Tout d'abord, dans les chapitres 4, 6 et 8, nous avons établi que l'attracteur global est de dimension fractale finie. D'un point de vue physique, cela signifie que les systèmes dans ces trois cas pourraient être décrits par un nombre fini de paramètres. Il est donc naturel d'envisager une analyse numérique et également des simulations de ces modèles.

Finalement, pour les chapitres 3, 5 et 7, nous pourrons analyser le comportement spatial de solutions dans un cylindre semi-infini, cette étude est motivée par la possibilité d'étendre l'analyse du comportement asymptotique des solutions à des domaines non bornés. Nous pourrions également considérer les problèmes stationnaires crrespondants à nos modèles afin d'étudier, par exemple, la convergence vers des états d'équilibre, notamment, pour les systèmes de champ de phase conservatif des chapitres 7 et 8.

Bibliographie

[1] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. Statistical Physics (Part 1). Third edition. New York, 1980.

[2] G. Caginalp. An analysis of a phase-field model of a free boundry. Arch. Rational Mech. Anal., 92(3) : 205-245, 1986.

[3] A. Miranville. Some mathematical models in phase transition. Lecture Notes. Ravello, September, 2009.

[4] G. Caginalp. The role of macroscopic anitropy in the macroscopic behavior of a phase boundry. Ann. Physics. 172(1) : 136-155, 1986.

[5] G. Caginalp. Conserved-phase field system : Implications for kinetic undercooling, Phys. Rev. B 38 (1988), 789-791.

[6] G. Caginalp. The dynamics of a conserved phase-field system : Stefan-like, Hele-Shaw and Cahn- Hilliard models as asymptotic limits, IMA J. Appl. Math. 44 (1990), 77-94.

[7] A. Miranville and R. Quintanilla. Some generalizations of the Caginalp phase-field system . Appl. Anal., 88 (6) : 897-894, 2009.

[8] A. Miranville and R. Quintanilla. A generalization of the Caginalp phase-field system based on the Maxwell-Cattaneo law. Nonlinear Anal., 71 (5-6) : 2278-2298, 2009.

[9] A. Debussche and L. Dettori. On the Cahn-Hilliard equation with a logarithmic free energy, Nonlinear Analysis TMA 1995 ; 24 : 1491-1514.

[10] A. Miranville and R. Quintanilla. A conserved phase-field system based on the Maxwell-Cattaneo law. Nonlinear Analysis, Real world Applications, volume 14, Issue 3, June 2013, Pages 1680-1692.

[11] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Théorie et Applications. [Collection of Applied Mathematics for the Master's degree. Theory and Applications]. Masson, Paris, 1983.

[12] E. Magenes and J.L. Lions. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Travaux et recherches mathématiques. Dunod,1968.

[13] J.L. Lions. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux limites non linéaires. Dunod.

[14] C. Dupaix. A singularly perturbed phase field model with a logarithmic nonlinearity. Nonlinear Anal. 41 (2000), no 5-6, Ser A : Theory Methods, 725-744.

[15] C. Dupaix. A singularly perturbed phase field model with a logarithmic nonlinearity : upper-semicontinuity of the attractor. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Volume 41, Issues 5-6, August 2000, Pages 725-744.

[16] D. Brochet, X. Chen and D. Hilhorst. Finite dimensional exponential attractor for the phase field model. Appl. Anal. 49(1993), 197-212.

[17] C. Dupaix, D. Hilhorst and Ph. Laurençot. Upper-semicontinuity of the attractor for a singular perturbation of the viscous Cahn-Hilliard and Cahn-Hilliard equations. Adv. Math. Sci. Appl. 8 (1998), no. 1, 115-143.

[18] C.M. Elliot and S. Luckhaus. A generalised diffusion equation for phase separation of a multi-component mixture with interfacial free energy. Issue 195 of Preprint, Sonderforschungsbereich Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen (Bonn).

[19] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Ann. Mat. Pura ed Applicata IV, CXLVI (1987) 65-96.

[20] R. Temam. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, volume 68 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[21] L. Cherfils and A. Miranville. On the Caginalp system with dynamics boundary conditions and singular potentials. Appl. Math., 54(2) : 89-115, 2009.

[22] P.W. Bates and S.M. Zheng. Inertial manifolds and inetial sets for the phase-field equations. J. Dynam. Differential equations, 4(2) : 375-398, 1992.

[23] D. Brochet, D. Hilhorst and A. Novick-Cohen. Finite-dimensional exponential attractor for a model for order-desorder and phase separation. Appl. Math. Lett., 7(3) : 83-87, 1992.

[24] D. Brochet and D. Hilhorst. Universal attractor and inertial sets for the phase-field model. Appl. Math. Lett., 4(6) : 59-63, 1991.

[25] C.I. Christov and P.M. Jordan. Heat conduction paradox involving second sound propagation in moving media. Phys. Rev. Lett., 94 : 154-301, 2005.

[26] E. Morton, P. Gurtin and J. Chen. On a theory of heat conduction involving two temperatures. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 19 : 614-627, 1968.

[27] A. Miranville. On a phase-field model with a logarithmic nonlinearity. Applications of Mathematics, Vol. 57 (2012), No. 3, 215-229.

[28] M. Grasselli, A. Miranville, V. Pata and S. Zelik. Well-posedness and long time behavior of a parabolic-hyperbolic phase-field system with singular potentials. Math. Nachr., 280(13-14) : 1475-1509, 2007.

[29] L. Cherfils and A. Miranville. Some results on the asymptotic behavior of the Caginalp system with singular potentials. Adv. Math. Sci. Appl., 17(1) : 107-129, 2007.

[30] A. Miranville and S. Zelik. Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains. In Handbook of differential equations : evolutionary equations. Vol. IV, Handb. Diff. Equ., pages 103-200. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[31] J.W. Cahn. On spinodal decomposition. Acta Metall. 9 (1961), 795-801.

[32] G. Caginalp. Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotic limits of the phase-field equations. Phys. Review A, 39 : 5887-5896, 1989.

[33] G. Caginalp and X. Chen. Phase field equations in the singular limit sharp interface problems. In On the evolution of phase boundaries, IMA Vol. Math. Appl. 43 M. Gurtin ed., pages 1-27. Springer, New York, 1992.

[34] G. Caginalp and X. Chen. Convergence of the phase-field model to its sharp interface limits. European J. Appli. Math., 9 : 417-445, 1998.

[35] C.I. Christov and P.M. Jordan. Heat conduction paradox involving secondsound propagation in moving media. Phys. Rev. Lett., 94 : 154301, 2005.

[36] S.I. Serdyukov, N.M. Voskresenskii, V.K. Bel'nov and I.I. Karpov. Extended irreversible thermodynamics and generalization of the dual-phase-lag model in the heat transfer. 28 : 1-13, 2003.

[37] A.E. Green and P.M. Naghdi. A re-examination of hte basic postulates of thermomechanics. 432 : 171-194, 1991.

[38] J.W. Cahn and J.E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy, J. Chem. Phys. 28 (1958), 258-267.

[39] A. Miranville. Exponential attractors for a class of evolutionary equation by a decomposition method. C.R.Acad.Sci.Paris Sér. I Math.,328(2) : 145-150, 1999.

[40] P. Fabrie and C. Galusinski. Exponential attractors for partially dissipative reaction system. Asymptotic Anal., 12(4) : 329-354,1996.

[41] A. Babin and B. Nicolaenko. Exponential attractors for reaction-di ffusion systems in an unbounded domain. J. Dynam. Diff. Equ.,7(5) : 567-590, 1995.

[42] M. Conti, S. Gatti and A. Miranville. Asymptotic behavior of the Caginalp phase-field system with coupled dynamic boundary conditions.Discrete Contin. Dyn. Sys. Ser. S, 5(3) : 485-505, 2012.

[43] A. Miranville, S. Zelik. Robust exponential attractors for Cahn-Hilliard type equations with singular potentials. Math.Methods Appl.Sci.27(2004), 545-582.

[44] A. Miranville, S. Zelik. The Cahn-Hilliard equation with singular potentials and dynamic boundry conditions. Discrete Contin. Dyn. Systems. 28(2010), 275-310.

[45] A. Miranville, S. Zelik. Robust exponential attractors for singularly perturbed phase-field type equations.Electronic J. Diff. eqns.(2002), 1-28.

[46] S. Gatti, A. Miranville. Asymptotic behavior of a phase-field system with dynamic boundry conditions, in Differential equations inverse and direct problems (proceedings of the workshop "Evolution Equations : Inverse and Direct Problems", Cortona, June 21-25,2004), A series of Lecture notes in pure and applied mathematics, Vol.251, A. Favini and A.Lorenzi eds., Chapman and Hall, 149-170, 2006.

[47] Efendiev, M., Miranville, A., Zelik, S., Exponential attractors for a singularly perturbed Cahn-Hilliard system, Math.Mach.272(2004), 11-31.

[48] Gatti, S., Grasselli, M.,Miranville, A., Pata, V., Aconstruction of a Robust family of exponential attractors, Proc. Amer. Math. Soc. 134(2006), 117-127.

[49] J. Jiang.Convergence to equilibrium for a parabolic-hyperbolic phase-field model with Cattaneo heat flux law, J. Math. Anal. Appl. 341(2008) 149-169.

[50] J. Jiang.Convergence to equilibrium for a fully hyperbolic phase-field model with Cattaneo heat flux law, Math.Methods Appl. Sci. 32 (2009) 1156-1182.

[51] J.C. Robinson. Infinite-dimensional dynamical systems. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors.

[52] A. Miranville. Exponential attractors for a class of evolutionary equation by a decomposition method. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II, 1999.

[53] A. Miranville, R. Quintanilla. A type III phase-field system with a logarithmic potential. Appl. Math. Lett., 24(6) : 1003-1008, 2011.

[54] A. Miranville, R. Quintanilla. A phase-field model based on a three-phase-lag heat conduction, Appl. Math. Optim., to appear.

[55] A. Miranville, R. Quintanilla. On a phase-field system based on the Cattaneo law. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications 03/2012 ; 75(4) : 2552-2565.

[56] D. Brochet. Maximal attractor and inertial sets for some second and fourth order phase field models.

[57] D. Brochet, D. Hilhorst and A. Novick-Cohen. Maximal attractor and inertial sets for a conserved phase field model. Adv. Differential Equations Volume 1, Number 4 (1996), 547-578.

[58] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Uralceva. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translattions of Mathematical Monographs, volume 23. American Mathematical Society, 1968.

[59] M. Marion. Attractors for reaction-diffusion equations : existence and estimate of their dimension. Appl. Anal., 25(1-2) : 101-147, 1987.

[60] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. Real interpolation of Sobolev spaces on subdomains of $\mathbb{R}^n$. *Canad. J. Math., 30(1) : 190-214, 1978.*

[61] J.E. Rakotoson and J.M. Rakotoson. Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1999.

[62] Inégalités : petit recueil.

[63] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam. Exponential attractors for dissipative evolution equations, volume 37 of RAM : Research in Applied Mathematics. Masson, Paris, 1994.

[64] G. Lamé and B.P. Clapeyron. Mémoire sur la solidification par refroissiement d'un globe solide. Ann. Chem. Phys., 47 : 250-256, 1831.

[65] J. Stefan. Uber einige probleme der theorie der warmeleitung. Wien Akad. Mat. Natur., S.-B. : 173-484, 1889.

[66] L. Rubinstein. On the solution of Stefan's problem (in russian). Izvestia Akad. Nauk SSSR, 11 : 37-54, 1947.

[67] A.M. Meirmanov. The classical solution of a multidimensional Stefan problem for quasilinear parabolic equations (in russian). Mat. Sb. (N.S.), 112 : 170-192, 1980.

[68] J.W. Gibbs. Collected works. Yale University Press, New Haven, 1948.

[69] B. Chalmers. Principles of solidification. R.E. Krieger publishing, Huntington, New York, 1977.

[70] A. Visintin. Introduction to Stefan-type problems. In Handbook of Differential Equations, Evolutionary Partial Differential Equations, C.M. Dafermos and M. Pokorny eds., pages 377-484. Elsevier, Amsterdam, 2008.

[71] O.A. Oleinik. A method of solution of the general Stefan problem. Soviet. math. Dokl, 1 : 1350-1353, 1960.

[72] G.Gilardi. On a conserved phase field model with irregular potentials and dynamic boundry conditions, Istit. Lombardo Acad. Sci. Lett. Rend. A 141 (2007) 129-161.

[73] Elliott CM, Garcke H. On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility. SIAM journal on Mathematical Analysis 1996 ; 27 (2) : 404-423.

[74] Elliott CM, Luckhaus S. A generalized diffusion equation for phase separation of a multi-component mixture with interfacial energy. SFB 256 Preprint 195. University of Bonn, 1991.

Etude asymptotique de modèles en transition de phase

Résumé Ce rapport de thèse est consacré à l'étude de modèles de champ de phase de type Caginalp. Nous considérons ici, deux parties : la première étant une généralisation du modèle de champ de phase de Caginalp basée sur la loi de Maxwell-Cattaneo et la seconde traite le même modèle dans sa version conservative. L'étude dans les deux parties est faite dans un domaine borné. De plus, dans la première partie on distingue les cas de conditions aux bords de type Dirichlet ainsi que Neumann, tandis que dans la deuxième partie le modèle est étudié uniquement avec les conditions Dirichlet (avec un potentiel régulier puis un potentiel singulier). Tout d'abord, l'existence, l'unicité, et la régularité des solutions sont analysées aux moyens d'arguments classiques. Ensuite, l'existence d'ensembles bornés absorbants est établie. Enfin, dans certains cas, l'existence de l'attracteur global et d'attracteurs exponentiels sont analysés.
Mots clés : Système de Caginalp, Loi de Maxwell-Cattaneo, potentiel régulier, potentiel singulier, caractère bien posé, dissipativité, comportement asymptotique des solutions, attracteur global, attracteur exponentiel.

Asymptotic study of phase transition models

Abstract This thesis report is devoted to the study of Caginalp type phase-field Models. Here, we consider two parts : the first is a generalization of the Caginalp type phase-field model based on a generalization of the Maxwell-Cattaneo law and the second with the same model in its conservative version. The study in the two parts is made in a bounded domain. In addition, in the first part we distinguish cases of boundary conditions of Dirichlet and Neumann, while in the second part the model is studied only with Dirichlet conditions (with a regular potential and a singular potential). First, the existence, uniqueness, and regularity of solutions are analyzed by means of classical arguments. Then, the existence of bounded absorbing sets is established. Finally, in some cases, the existence of the global attractor and exponential attractors are analyzed.
Keywords : Caginalp system, Maxwell-Cattaneo law, regular potential, singular potential, well posedness, dissipativity, long time behavior of solutions, global attractor, exponential attractor.