

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE MEGA
MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

par

Kevin SOOBBARAYEN

**DYNAMIQUE NON LINÉAIRE ET RAYONNEMENT ACOUSTIQUE
DE STRUCTURES COMPORTANT DES INTERFACES FROTTANTES**

Soutenue publiquement le 4 novembre 2014 devant le jury composé de :

Daniel Juvé	Professeur, École Centrale de Lyon-LMFA	Président
Jean-François Deü	Professeur, CNAM-LMSSC, Paris	Rapporteur
Gaël Chevallier	Professeur, Université de Franche-Comté FEMTO-ST, Besançon	Rapporteur
Jean-Jacques Sinou	Professeur, École Centrale de Lyon-LTDS	Directeur de thèse
Sébastien Besset	MCf, École Centrale de Lyon-LTDS	Co-encadrant

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier le professeur Jean-Jacques Sinou et le maître de conférence Sébastien Besset de m'avoir proposé ce passionnant sujet de recherche. Je veux leur exprimer toute ma reconnaissance pour la qualité de l'encadrement dont j'ai bénéficié durant ces trois années et qui m'a permis d'atteindre des objectifs très ambitieux sur une problématique complexe. Je souhaite également les remercier pour leur implication, leur disponibilité, et pour toutes nos interactions qui ont largement contribué à faire de cette thèse une expérience très enrichissante sur les plans scientifique et personnel.

J'adresse mes plus profonds remerciements à tous les membres de l'équipe pédagogique du département Mécanique des Solides-Génie Mécanique-Génie Civil pour m'avoir accordé leur confiance. Les enseignements que j'ai dispensés à l'École Centrale de Lyon ont été un excellent complément à mon travail de recherche et m'ont montré une formidable facette du métier d'enseignant-chercheur.

Au-delà de l'aspect professionnel, je tiens à remercier tous les techniciens, maîtres de conférences, personnels administratifs, post-doctorants et doctorants de l'équipe vibration pour m'avoir offert cette ambiance de travail si particulière durant ces trois années.

Je remercie également, tous mes amis du LTDS avec qui j'ai partagé des moments inoubliables : les matchs de foot du vendredi, nos voyages en conférences (Giens, Porto, etc), les footings au bois de Serres, nos soirées au K...s, les dégustations de gaufres à 90 cents (le meilleur rapport quantité/prix), les échanges de "trucs et astuces" sous latex ou matlab, les festins au RU, ou tout simplement nos pauses dans l'aquarium, au E6 ou au G8. J'ai adoré passer ces moments avec eux et c'est pourquoi j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à Pierre G., Patricio A., Olivier D., Clara O., Jérôme L., Jérôme D., Laura V., Alice G., Flavien G., Jérémy D., Stéphane F., Colas J., Denis B., Colin L., Lionel S., Stéphane L., Mélodie M., Chang-wei Z., Xingrong H., Antoine G., Gabriel H., Xavier L., David L. ainsi que Marie-Océane P..

Je tiens de plus à remercier tous mes amis et mes proches qui se sont déplacés pour assister à ma soutenance et qui m'ont beaucoup apporté durant ces trois ans.

Je ne saurais poursuivre ces remerciements sans exprimer toute ma reconnaissance à mon père Nadesh Soobbarayen ainsi qu'à ma mère Logambal Soobbarayen pour leur soutien et surtout pour tous les sacrifices qu'ils ont dû faire pour me permettre d'arriver jusqu'au doctorat. Je remercie également mes sœurs, Rouby Jackson et Isabelle Soobbarayen, pour leurs encouragements et pour m'avoir toujours montré la voie à suivre.

Enfin, je ne pourrais conclure ces remerciements sans remercier du fond du cœur Coline Corbeau pour son soutien sans faille, sa patience, son optimisme à toute épreuve et tout simplement sa présence à mes côtés.

Résumé

Le crissement des freins à disque se caractérise par des émissions sonores nuisibles pouvant atteindre 110 dB à des fréquences allant de 1 kHz à 20 kHz. Le contact frottant induit des mécanismes d'instabilité qui engendrent des vibrations non linéaires caractérisées par une grande richesse fréquentielle. Ces vibrations auto-entretenues sont responsables des émissions des bruits de crissement.

Les objectifs principaux de ces travaux de recherche sont d'une part, de mettre en place une méthodologie globale permettant d'estimer les émissions sonores induites par frottement. Cette démarche s'accompagne du développement d'outils numériques spécifiques à l'étude du rayonnement acoustique induit par frottement. D'autre part, on cherche à développer des méthodes simplifiées permettant l'estimation rapide et contrôlée des niveaux sonores. On souhaite également employer ces méthodes pour l'étude de l'influence de certains paramètres sur le comportement dynamique et le rayonnement acoustique.

Dans un premier temps, un modèle simplifié de frein à disque capable de reproduire des instabilités par couplage de modes est construit. Ensuite, les vibrations non linéaires et auto-entretenues induites par frottement sec sont calculées par intégration temporelle pour des cas d'instabilités à un et deux modes instables. Puis, la méthode acoustique multi-fréquentielle proposée est utilisée pour caractériser le rayonnement acoustique. Cette méthode permet d'étudier l'influence du trajet de chargement de la pression de freinage ainsi que du coefficient de frottement. Les résultats montrent que ces deux paramètres influent significativement sur les comportements dynamique et acoustique. Enfin, une méthode de sélection des fréquences prépondérantes de crissement couplée à une méthode d'approximation de la pression acoustique rayonnée est développée. Cette approche permet d'estimer rapidement les niveaux sonores avec une erreur contrôlée. Son efficacité est prouvée à l'aide d'une comparaison avec des résultats numériques issus de la méthode des éléments finis de frontière.

Abstract

Brake squeal phenomenon is characterized by high noise levels up to 110 dB in a frequency range from 1 kHz to 20 kHz. Frictional contact induces instabilities which generate non linear vibrations associated with a complex spectrum. These self-excited vibrations are responsible for squeal noise.

The first main objective of this work is to develop a global approach for the calculation of squeal noise emissions. This approach involves the development of specific numerical tools dedicated to friction-induced noises. The second aim is the development of numerical tools which allow us to quickly well estimate squeal noise levels. These approaches are used to investigate the influence of parameters on dynamic and acoustic behaviors of a simplified brake.

Firstly, a simplified disc-pad model with friction is proposed. It is capable of reproducing classical cases of instability by mode coupling. Then, the friction-induced non linear self-excited vibrations are calculated by temporal integration for cases with one and two unstable modes. Secondly, the multi-frequency acoustic calculation method is developed and used to calculate the radiations. Thirdly, these approaches allow us to investigate the influence of the path of loading followed by the braking pressure and the friction coefficient. Numerical results show that these two parameters significantly modify the dynamics and the radiations of the brake during squeal events. Finally, a method which allows to detect the predominant squeal frequencies is proposed. An approximation of the radiated sound power is also developed. These two approaches allow to quickly well estimate the squeal noise with a controlled error.

Table des matières

Introduction	9
1 Phénoménologie des vibrations et du bruit induits par frottement	13
1.1 Bruits et vibrations induits par frottement	14
1.1.1 Généralités	14
1.1.2 Technologies des systèmes de freins	15
1.1.3 Vibrations et bruits des systèmes de freins à disque	16
1.2 Vibrations et bruits lors d'un évènement de crissement	19
1.2.1 Caractérisation expérimentale	19
1.2.2 Différents aspects du crissement	21
1.2.3 Tendances générales	27
1.3 Contexte de l'étude	27
2 Modélisation non linéaire des systèmes frottants	29
2.1 Modélisation du contact et du frottement	30
2.1.1 Formulation continue du problème de contact	30
2.1.2 Mécanismes des instabilités induites par frottement	34
2.2 Analyse non linéaire de stabilité	38
2.2.1 Notions de stabilité des points fixes au sens de Lyapunov	38
2.2.2 Bifurcation de Hopf	41
2.2.3 Stabilité des orbites périodiques	41
2.3 Méthodes numériques pour le calcul du crissement	42
2.3.1 Modélisation des systèmes de freins	42
2.3.2 Prédiction et calcul des vibrations de crissement	46
2.3.3 Calcul numérique des émissions sonores de crissement	51
2.3.3.1 Méthode des éléments finis pour la vibro-acoustique	51
2.3.3.2 Méthode des éléments finis de frontière	53
2.3.4 Émissions de crissement : résultats de la littérature	54
2.4 Contexte général	56
3 Vibrations auto-entretenues d'un système frottant	57
3.1 Démarche globale d'analyse des vibrations de crissement	58
3.2 Modèle simplifié de frein à disque	58
3.2.1 Construction du modèle éléments finis	58
3.2.2 Modélisation de l'interface : gestion du contact frottant	61
3.2.3 Réduction du modèle par la méthode de Craig et Bampton	63
3.2.4 Équation non linéaire du mouvement	64
3.2.5 Construction de la matrice d'amortissement	64
3.3 Analyse de stabilité du système de frein	66
3.4 Calcul des vibrations non linéaires induites par frottement	70

3.4.1	Liste des cas étudiés	70
3.4.2	Formulation du problème dynamique et résolution numérique	71
3.4.3	Analyses des réponses dynamiques	73
3.5	Conclusion	74
4	Rayonnement acoustique d'un système frottant	83
4.1	Formulation du problème acoustique	84
4.1.1	Cas d'une structure continue	84
4.1.2	Méthode des éléments finis de frontière	87
4.2	Méthode de calcul acoustique multi-fréquentielle	88
4.2.1	Décomposition du champ de vitesse en série de Fourier	89
4.2.2	Calcul de la pression acoustique par composante fréquentielle	89
4.2.3	Estimation de la pression acoustique globale par superposition pondérée	90
4.2.4	Démarche globale de calcul des émissions sonores lors du crissement	91
4.3	Application au système de frein	91
4.3.1	Construction et validité du maillage	91
4.3.2	Rayonnement acoustique des cas à un et deux modes instables	95
4.3.3	Étude de convergence de la pression acoustique	102
4.4	Conclusion	103
5	Influence des paramètres sur les vibrations et le rayonnement acoustique	104
5.1	Contexte et cas d'études	105
5.1.1	Position du problème	105
5.1.2	Coefficients de frottement et chargements envisagés	106
5.2	Vibrations non linéaires sous chargement temporel	109
5.2.1	Déstabilisation d'un cas stable par le chargement temporel	109
5.2.2	Influence du chargement temporel sur le cas à un mode instable	109
5.2.3	Influence du chargement temporel sur le cas à deux modes instables	110
5.2.4	Analyse de la position moyenne	113
5.3	Rayonnement acoustique sous chargement temporel	113
5.3.1	Cas 1_{rapide} stable déstabilisé par la rampe	114
5.3.2	Cas 2_{statique} à un mode instable	114
5.3.3	Cas 3_{statique} à deux modes instables	117
5.4	Analyse de la convergence de la pression acoustique	118
5.5	Conclusion	122
6	Méthode d'approximation du rayonnement acoustique induit par frottement	123
6.1	Méthode de sélection des composantes fréquentielles	124
6.1.1	Analyse de la convergence de la vitesse normale quadratique moyenne	124
6.1.2	Construction d'une base de Fourier optimisée	125
6.1.3	Pertinence de la base de Fourier optimisée	126
6.2	Méthode d'approximation des niveaux de bruits	128
6.2.1	Calcul de la directivité : généralités	128
6.2.2	Méthode de calcul de la directivité	129
6.2.3	Indicateurs de convergence de la directivité	130
6.2.4	Reconstruction des niveaux de puissance acoustique	135
6.2.5	Estimateurs d'erreur de la solution approchée : BEM "partielle"	136
6.3	Estimation du bruit rayonné par le système de frein	137
6.3.1	Construction des bases de Fourier optimisées	137
	Cas 2_{statique} à un mode instable	137

TABLE DES MATIÈRES

	Cas 3 _{statique} à deux modes instables	137
6.3.2	Estimation des niveaux sonores	140
	Calcul de la directivité	141
	Reconstruction des niveaux de puissance acoustique	141
	Contrôle de la qualité de la solution approchée	141
6.3.3	Analyse de l'efficacité de la méthode proposée	155
6.4	Conclusion	156
	Conclusions générales	157
	Perspectives	158

Introduction

Le phénomène de crissement se caractérise par des émissions sonores pouvant atteindre 110 dB à des fréquences allant de 1 kHz à 20 kHz. Il apparaît sur un grand nombre de structures comportant des interfaces frottantes sur lesquelles agissent des effets non linéaires de contact ainsi que des forces non conservatives de frottement. Lors du processus de freinage, le conducteur actionne la pédale de frein et une pression hydraulique est appliquée au dos des garnitures via un piston. Les garnitures et le disque en rotation entrent alors en contact. Ainsi, le système global adopte une configuration d'équilibre glissant quasi-statique. Cette configuration peut être instable du fait du frottement et la moindre perturbation provoque la divergence de cet équilibre : le système s'écarte alors de l'équilibre glissant en oscillant. Ceci conduit à des vibrations non linéaires et auto-entretenues responsables des émissions sonores de crissement appelées "squeal noise". L'amélioration constante du confort acoustique des véhicules ainsi que d'importants coûts de garantie font de la réduction du bruit de crissement un des enjeux majeurs de l'industrie automobile. D'autre part, les normes européennes relatives aux niveaux de bruits admissibles impose au secteur ferroviaire de se concentrer sur le crissement des freins des trains et notamment du TGV. En ce qui concerne le secteur aéronautique, la réduction des nuisances sonores n'est pas une priorité mais les vibrations de crissement peuvent engendrer des dommages sur les trains d'atterrissage.

Les interfaces de frottement concentrent une grande variété de phénomènes de différentes natures comme le contact frottant ou encore les effets thermo-mécaniques. Ces phénomènes sont pour la plupart fortement non linéaires, intimement liés et semblent avoir une influence sur l'apparition du crissement. La littérature concernant le crissement est extrêmement abondante mais malgré la quantité de travaux de recherche, le crissement est un phénomène dont la compréhension demeure incomplète. Cette lacune est principalement due au fait que les résultats expérimentaux pour un système donné ne sont pas généralisables. De plus, le crissement affiche une grande sensibilité à de nombreux paramètres tels que les conditions de fonctionnement, l'amortissement ou encore le coefficient de frottement.

La modélisation des systèmes de frein est une tâche qui s'avère complexe. En effet, les phénomènes qui prennent naissance aux interfaces ne peuvent être intégralement pris en compte. Par exemple, et nous le verrons dans la suite, le contact frottant est fortement multi-échelle, multi-physique et agit à différentes échelles de temps. De ce fait, des choix de modélisation doivent être faits afin de restreindre le cadre des études numériques. De nombreux travaux concernant des modèles minimaux qui se concentrent uniquement sur les pièces frottantes ont permis d'importantes avancées. Ces modèles ont notamment permis de clairement identifier certains mécanismes d'instabilité d'origine tribologique et géométrique impliqués dans le crissement. On peut citer par exemple les mécanismes de "stick-slip" et de "mode lock-in" que nous verrons dans la suite. Il est à noter qu'il n'existe pas de théorie unique permettant de décrire l'ensemble des différents mécanismes d'instabilités qui engendrent le crissement.

L'étude numérique du crissement s'effectue en plusieurs étapes. Dans un premier temps, le système de frein est modélisé et une attention particulière doit être portée à l'interface

de frottement. Sur cette dernière, le contact frottant est en général introduit en appliquant différentes lois (i.e. contact unilatéral ou régularisé et frottement de Coulomb). Ensuite, les paramètres menant à des configurations d'équilibre glissant potentiellement instables sont déterminés. Pour cela, une analyse de stabilité de ces équilibres vis-à-vis d'un ou plusieurs paramètres est conduite. La détection des instabilités s'effectue, entre autres, par la méthode d'analyse des valeurs propres complexes du système dynamique linéarisé dans un voisinage de l'équilibre glissant considéré. Enfin, pour les équilibres potentiellement instables, les réponses vibratoires sont estimées à l'aide d'une analyse temporelle par intégration des équations du mouvement ou bien par des méthodes d'équilibrage harmonique.

L'analyse de stabilité précédemment mentionnée s'avère être relativement efficace pour la prédiction des occurrences de crissement. Le calcul des vibrations pouvant être coûteux, le choix des valeurs des paramètres permettant de réduire le crissement est souvent dicté par l'analyse de stabilité. Cependant, cette dernière ne fournit pas d'informations sur les amplitudes vibratoires, ni sur le contenu fréquentiel et les niveaux sonores. Dans la littérature, très peu de travaux étendent leurs analyses jusqu'au rayonnement acoustique. La plupart se limitent à l'analyse de stabilité ou au calcul des vibrations. Le premier objectif de cette thèse est le développement d'outils numériques d'aide à la conception de composants de freinage peu crissants. L'intérêt étant de proposer une méthodologie permettant d'aller des vibrations non linéaires jusqu'au bruit rayonné. Un aperçu de la méthodologie développée dans cette thèse est proposée sur la Figure 1. Les différentes étapes allant de la modélisation non linéaire jusqu'à l'estimation du bruit rayonné lors des événements de crissement sont successivement abordées dans ces travaux.

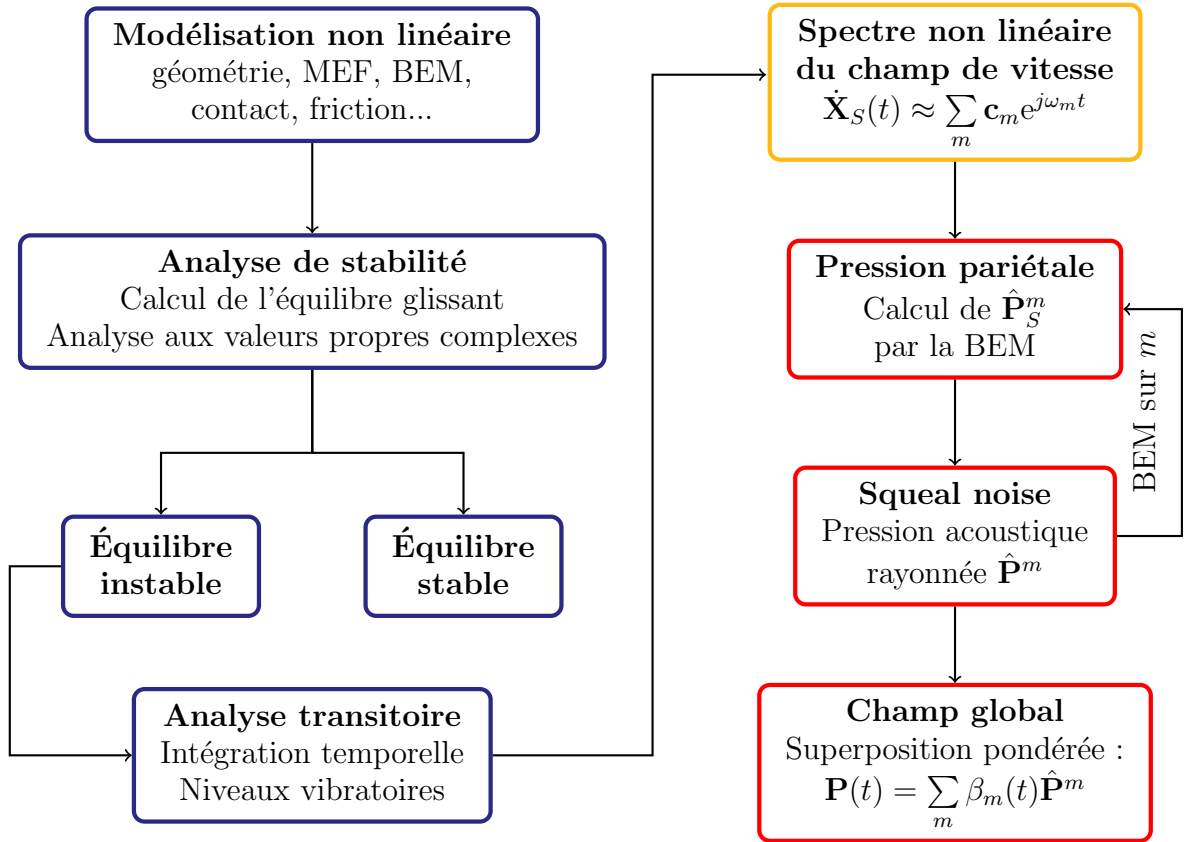


Figure 1 – Démarche globale d'analyse du crissement (calcul des vibrations et du bruit rayonné).

D'autre part, il faut noter que les conclusions de l'analyse de stabilité sont locales. Ainsi, sa prédictivité est remise en cause dès lors que le calcul des vibrations est initialisé "loin" de l'équilibre glissant. En général, l'intégration temporelle est initialisée sur l'équilibre glissant perturbé. C'est-à-dire que le système est soumis à la charge statique de freinage et le disque et les garnitures sont en situation de glissement. Or, les conditions de fonctionnement d'un frein à disque sont très différentes avec notamment l'application d'une pression de freinage qui évolue dans le temps. Il est reconnu que les chargements temporels ne peuvent être pris en considération par l'analyse aux valeurs propres complexes. Le caractère non conservatif du frottement est potentiellement en mesure de modifier la réponse vibratoire suivant le trajet de chargement. Ainsi, l'influence du trajet de chargement et des paramètres sur le comportement non linéaire et les émissions acoustiques doit être analysée.

En ce qui concerne le calcul du rayonnement acoustique, il existe différentes méthodes numériques permettant d'obtenir la pression acoustique rayonnée. Cependant, ces méthodes s'avèrent être coûteuses dans le cas du crissement. En effet, lors d'un événement de crissement, le contenu fréquentiel des vibrations peut être très riche. Les équations de l'acoustique linéaire étant dépendantes de la fréquence, cette complexité fréquentielle augmente les temps de calculs de la pression acoustique rayonnée. C'est pourquoi nous souhaitons développer des critères permettant de détecter et sélectionner les fréquences pertinentes et mettre en place des méthodes d'approximation de la pression acoustique rayonnée en champ libre.

Les objectifs de la thèse sont donc les suivants :

1. développer un modèle simplifié de frein à disque capable de reproduire des instabilités de crissement ;
2. mettre en place une méthodologie globale permettant d'estimer les émissions sonores induites par frottement ;
3. utiliser la méthode développée pour caractériser l'influence du trajet de chargement et du coefficient de frottement sur les comportements dynamique et acoustique ;
4. et développer des outils numériques permettant d'estimer rapidement les niveaux de bruit lors d'un événement de crissement.

Le manuscrit se compose de six chapitres organisés de la façon suivante.

Le premier chapitre propose un aperçu de la phénoménologie du crissement par un état de l'art s'appuyant principalement sur des résultats expérimentaux. L'objectif de ce chapitre est d'illustrer la complexité des vibrations et du bruit induits par frottement.

Le second chapitre se concentre plus particulièrement sur l'état de l'art concernant la modélisation et les méthodes numériques de calcul des vibrations et des bruits de crissement.

Dans le troisième chapitre, le modèle simplifié de frein à disque utilisé dans cette étude est détaillé. On présente notamment les différentes phases de modélisation du contact frottant. De plus, les réponses vibratoires sont calculées pour des cas de crissement par coalescence de modes à un et deux modes instables et les résultats classiques de la littérature sont retrouvés.

Dans le quatrième chapitre, la méthodologie de calcul des émissions sonores développée durant cette thèse est détaillée. Elle est ensuite appliquée pour calculer le rayonnement acoustique d'événements de crissement à un et deux modes instables.

Le cinquième chapitre se focalise sur l'influence du trajet de chargement (i.e. le profil de pression de freinage) sur le comportement dynamique et le rayonnement acoustique. Les objectifs de ce chapitre sont d'une part d'estimer l'impact d'une rampe de chargement sur les vibrations et le bruit rayonné, d'autre part de déterminer si le chargement constitue un mécanisme déstabilisant.

Enfin, le sixième chapitre présente les méthodes de détection des fréquences prépondérantes de crissement et d'approximation des niveaux de bruits développées durant cette

thèse. D'autre part, ces approches sont appliquées et validées sur nos cas d'étude à un et deux modes instables.

Chapitre 1

Phénoménologie des vibrations et du bruit induits par frottement

Sommaire

1.1	Bruits et vibrations induits par frottement	14
1.1.1	Généralités	14
1.1.2	Technologies des systèmes de freins	15
1.1.3	Vibrations et bruits des systèmes de freins à disque	16
1.2	Vibrations et bruits lors d'un évènement de crissement	19
1.2.1	Caractérisation expérimentale	19
1.2.2	Différents aspects du crissement	21
1.2.3	Tendances générales	27
1.3	Contexte de l'étude	27

Les vibrations induites par frottement sont générées dans un très grand nombre de situations. Les manifestations de ce type de vibrations sont en général des émissions de bruits : les vibrations de la surface d'un objet peuvent se propager dans le fluide dans lequel il est immergé. Ces vibrations peuvent être observées lors d'évènements de la vie courante tels que le grincement d'une porte qui s'ouvre, le crissement d'une craie sur un tableau, le son d'une corde de violon frottée par un archet ou encore le crissement des systèmes de freinage. Dans certains cas, ces vibrations sont recherchées, comme dans le cas du violon, mais pour le crissement de frein, les émissions sonores sont considérées comme nuisibles et potentiellement dangereuses lorsque les niveaux sonores sont trop importants. La compréhension des phénomènes vibratoires et acoustiques induits par frottement est essentielle pour les atténuer ou bien pour les amplifier.

Dans ce chapitre, on se propose de présenter la phénoménologie des vibrations et du bruit induits par frottement en s'intéressant spécifiquement aux systèmes de freinage. Dans la première section, nous présentons un aperçu des vibrations et du bruit induits par frottement dans les systèmes de frein. Puis, la seconde section se focalise plus particulièrement sur la phénoménologie des vibrations et du bruit de crissement des freins à disque. Enfin, la troisième partie décrit le contexte général de la modélisation qui sera adoptée avec une présentation des phénomènes physiques dont on souhaite tenir compte.

1.1 Bruits et vibrations induits par frottement

1.1.1 Généralités

Les émissions acoustiques générées par frottement apparaissent dans de très nombreux cas et sont le résultat de vibrations générées par divers mécanismes d'excitations. Lorsque deux structures sont mises en contact, puis qu'un mouvement relatif est initié, alors des émissions sonores peuvent être générées. Si l'on frotte deux feuilles de papier entre elles, alors on perçoit un son qualifié de bruit de surface ou bruit de rugosité. Lors du glissement relatif de ces surfaces, les rugosités s'entrechoquent générant ainsi des vibrations de surface qui se propagent dans l'air sous forme d'ondes acoustiques. L'état de surface est donc un paramètre qui agit directement sur le son perçu et les topographies aléatoires rendent ces sons totalement désordonnés. L'exemple du crissement de frein est quant à lui très différent de part les niveaux sonores importants et la nature du son émis. Les vibrations à l'origine de ce type d'émission acoustique sont à rapprocher des phénomènes de résonance et ce point sera détaillé au chapitre suivant. Les émissions sont stridentes, brèves et affichent des fréquences bien marquées.

Ces phénomènes acoustiques sont une problématique qui est étudiée depuis près d'un siècle et une étude bibliographique complète est proposée par Akay [1]. On y trouve une description détaillée de plusieurs types d'émissions sonores induites par frottement allant du bruit émis par certains insectes jusqu'au crissement des freins à disque. Cette étude montre que dans la plupart des cas, le rayonnement acoustique induit par frottement est fugitif. D'autre part, des résultats expérimentaux concernant une poutre frottant sur un disque en rotation montrent que le rayonnement acoustique peut être complexe avec la présence de nombreuses fréquences. Le contact est évidemment un paramètre très important puisqu'il conditionne, en plus du frottement, le couplage entre les structures. Il apparait que le comportement vibratoire est extrêmement sensible à la nature du contact, c'est-à-dire à son orientation ainsi qu'à l'intensité des efforts de contact. Prenons l'exemple de la craie blanche et du tableau noir : lorsque la craie est en contact avec le tableau et qu'elle glisse en frottant sur ce dernier, le son strident du crissement peut parfois être émis. On remarque également que ce son n'est pas toujours émis et dépend de l'orientation de la craie ainsi que de l'intensité

de l'effort avec lequel on plaque la craie contre le tableau durant le glissement.

1.1.2 Technologies des systèmes de freins

Lorsqu'un véhicule se déplace, il possède une certaine quantité d'énergie cinétique liée à sa vitesse. Afin de le ralentir, voire de l'arrêter complètement, cette énergie doit être consommée : c'est le rôle des systèmes de freinage. L'énergie cinétique est, entre autres, dissipée en énergie thermique au niveau des interfaces de frottement. En d'autres termes, lorsque les éléments frottants agissent, le véhicule ralentit (perte d'énergie cinétique) et un flux de chaleur est généré (création d'énergie thermique).

De nos jours, les freins à disque équipent la plupart des véhicules automobiles, les rames de trains ainsi que les trains d'atterrissage des avions. Ces trois secteurs industriels regroupent la majorité des technologies de freinage telles que les freins magnétiques, les freins électriques, les freins à tambour qui sont le premier type de frein automobile et les freins à disque. Dans cette étude on se concentre plus particulièrement sur les systèmes exploitant le frottement.

Les premières automobiles produites en série étaient équipées de freins à tambour. Le mécanisme est relativement simple puisqu'il s'agit de dissiper l'énergie cinétique par le frottement des patins sur le tambour solidaire de la roue (Figure 1.1 (a)). Lorsque le frein est actionné, le piston repousse les mâchoires activant ainsi le contact entre les patins et le tambour en rotation. À l'issue du freinage, les ressorts de rappel permettent de rompre le contact. Ces freins ont rapidement été abandonnés du fait de leurs faibles performances de freinage. De plus, les véhicules équipés de quatre freins à tambour étaient régulièrement sujets au blocage de roues créant ainsi des pertes d'adhérence du pneu sur la route. Au début des années 1950, les freins à disque équipent les véhicules haut de gamme avant d'être installés sur la plupart des gammes à partir de 1960. Lors du freinage, les pistons exercent une pression au dos des garnitures situées dans l'étrier, activant ainsi le contact frottant avec le disque en rotation. Ce dernier, solidaire de l'arbre en rotation, est ralenti par l'action du frottement (Figure 1.1 (b)). L'utilisation des freins à disque couplé au système d'assistance de freinage (ABS) interdisant le blocage des roues a considérablement amélioré les performances de freinage des véhicules. Il est à noter que les freins à tambour sont toujours utilisés sur les roues arrière de la plupart des automobiles mais que les freins à disque sont utilisés sur les roues avant.

Le freinage des avions à l'atterrissage nécessite d'arrêter une masse importante en un temps très court avec un système de freinage le plus léger possible. C'est pour cette raison que l'industrie aéronautique fait partie des pionniers en matière d'innovation et d'utilisation des freins à disque à hautes performances. Un frein de train d'atterrissage d'avion est illustré sur la Figure 1.1 (c). On peut voir que la structure du frein est différente de celle des automobiles puisqu'il se compose d'un empilement de disques et de garnitures. L'idée est d'avoir une "grande" surface de frottement pour dissiper plus rapidement l'énergie cinétique de l'avion. Lors de la phase d'atterrissage d'un avion de ligne, les freins doivent être en mesure de diminuer la vitesse de l'appareil d'environ 250 km/h à une vitesse presque nulle, sur une distance de 5000 m en moyenne, sachant que la masse d'un avion de ligne peut aller jusqu'à plusieurs centaines de tonnes.

Le secteur ferroviaire présente le même type d'enjeu en matière de performance de freinage, c'est pourquoi les freins à disque sont également très largement utilisés sur la plupart des rames. On note également l'utilisation de freins magnétiques sur certaines rames qui sont employés uniquement pour le freinage d'urgence, en complément des freins à disque.

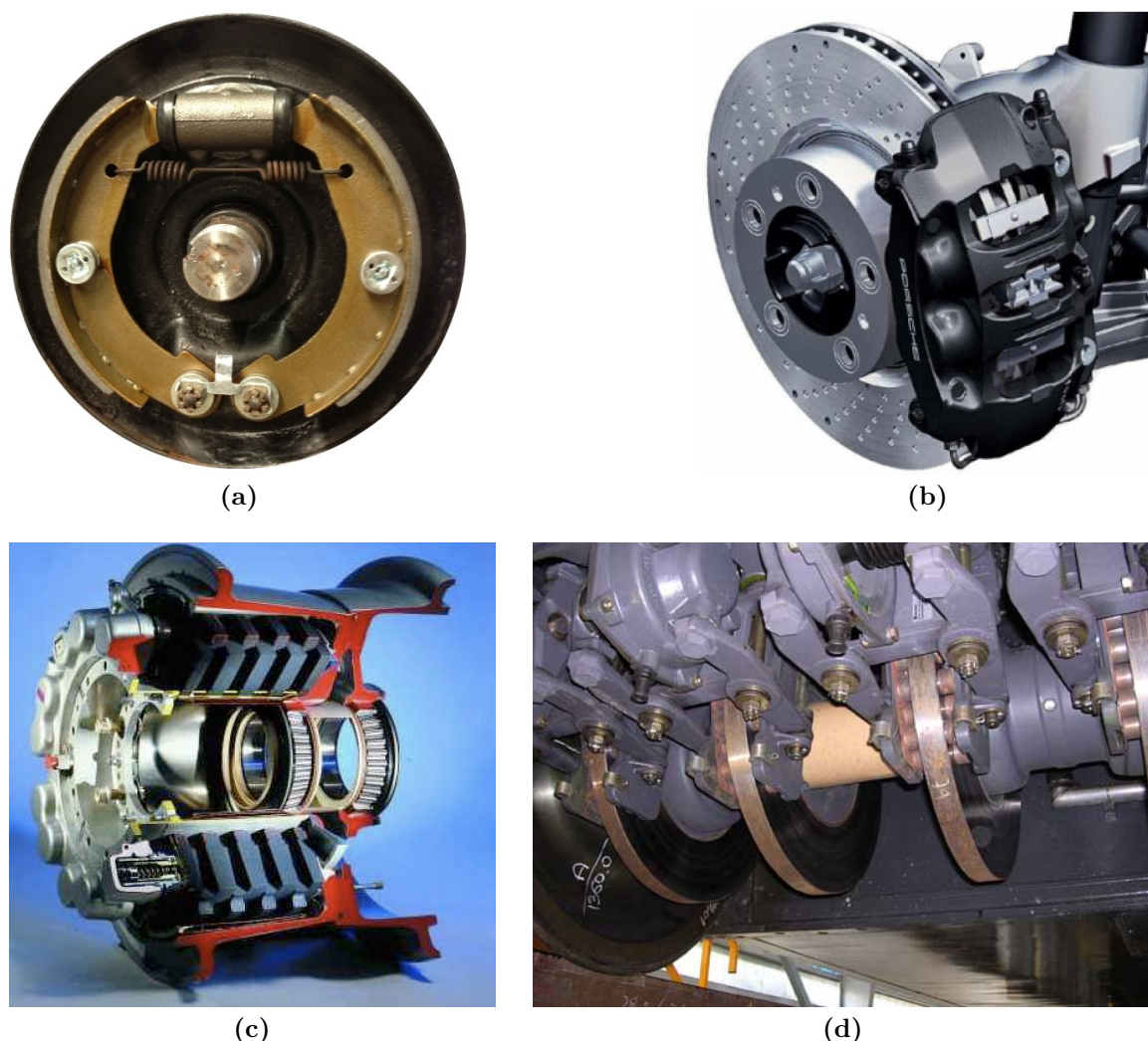


Figure 1.1 – Illustration des différentes technologies de freinage. (a) Frein à tambour, (b) frein à disque, (c) frein aéronautique et (d) frein de TGV.

1.1.3 Vibrations et bruits des systèmes de freins à disque

Comme expliqué précédemment, les freins à disque sont largement employés sur un très grand nombre de véhicules de différents secteurs. Le fait d'exploiter la friction comme mécanisme de dissipation d'énergie cinétique a considérablement amélioré les performances de freinage mais a fait apparaître des problématiques liées aux vibrations et aux bruits durant le freinage. En effet, l'utilisation massive des freins à disque a ainsi fait apparaître de nouvelles problématiques telles que le développement de matériaux ayant de très hautes performances de frottement, d'usure et de dissipation de chaleur, ainsi que la réduction et l'élimination des vibrations et des bruits de freinage. Dans cette section, l'objectif est de proposer une classification des différents types de vibrations observées lors du freinage et de faire le lien avec les différentes émissions sonores associées.

Dans [1], on peut lire que les émissions sonores générées par le freinage sont classées parmi les dix nuisances urbaines les plus importantes par les habitants de New York et cela dès les années 1930. Les problématiques associées aux aspects vibro-acoustiques du freinage n'ont cessé de prendre de l'ampleur avec l'amélioration significative du confort acoustique des moyens de transport. Ce type de problématique se retrouve dans le secteur ferroviaire

avec le bruit émis par les trains entrant en gare qui peuvent parfois générer des niveaux sonores dépassant les seuils admissibles par les normes européennes. Le secteur aéronautique est également touché par le bruit de freinage mais ces émissions sont couvertes par le bruit de l'appareil. En revanche, dans ce secteur, nous verrons dans la suite que les vibrations induites par frottement peuvent endommager le système de freinage. Le secteur automobile est aussi affecté par le bruit de freinage. D'une part, l'amélioration du confort acoustique est une priorité pour les constructeurs et d'autre part, les émissions sonores lors du freinage génèrent des coûts importants : dans [1] le chiffre d'un milliard de dollars par an est avancé pour l'ensemble de la branche *Noise, Vibration and Harshness* (incluant les bruits de freinage) du secteur automobile d'Amérique du Nord uniquement. Même si ces émissions n'altèrent pas les performances de freinages, elles sont très souvent associées à des défauts de fabrication ou bien à une usure prématurée. Ces idées reçues sont en partie responsables d'importants coûts de garantie.

Il existe différents bruits audibles générés lors d'une séquence de freinage. L'occurrence de ces émissions dépend fortement des conditions de fonctionnement telles que les efforts de contact, la vitesse de rotation du disque ou encore le type de matériau utilisé. La classification du bruit s'effectue principalement selon la gamme de fréquence du son généré ainsi que sur la nature des vibrations. Une liste complète de ces types de bruits de freinage est proposée dans [1, 2]. Afin d'illustrer une partie de la diversité des bruits de freinage, nous décrivons les plus présents dans la littérature : les trépidations, le broutement, le bourdonnement et le crissement. Ces émissions sonores sont associées à des cinématiques particulières qui génèrent des vibrations que nous tenterons de modéliser dans la suite de cette étude. Le cadre est le suivant : lors d'une séquence de freinage, le disque est en rotation et sous l'action de la pédale de frein, le piston pousse les plaquettes contre le disque et ce dernier, solidaire de la roue, est ralenti.

Trépidations (judder)

L'épaisseur du disque peut être variable du fait de déformations liées au flux de chaleur généré ou bien de mauvais procédés de fabrication. Lors du freinage, ces variations d'épaisseurs sont à l'origine d'efforts de contact qui varient et qui génèrent des vibrations de trépidation. En d'autres termes, lorsque des variations d'efforts de contact sont vues de manière périodique par les plaquettes, alors des vibrations de trépidation caractérisées par des fréquences de l'ordre de 10 Hz à 100 Hz avec des amplitudes importantes sont générées. Les trépidations font partie de la classe des vibrations forcées et les niveaux sonores associés sont relativement faibles.

Les trois phénomènes suivants font partie de la classe des vibrations auto-entretenues. Cette particularité vient du fait que les vibrations ne sont pas générées par une excitation forcée, les vibrations sont entretenues par un mécanisme interne au système. Ce type de vibration provient d'une instabilité du système dynamique dont l'origine peut être de différente nature. La stabilité d'un système dynamique est une notion mathématique complexe qui sera abordée au chapitre suivant. Nous nous contentons ici de décrire la phénoménologie des différents types d'instabilités.

Bourdonnement (hum)

Les vibrations de bourdonnement sont caractérisées par des amplitudes pouvant être élevées ainsi que des fréquences allant de 100 Hz à 500 Hz. Ces vibrations sont le résultat d'un couplage entre des vibrations normales et tangentielles de l'étrier qui crée une rotation rigide de ce dernier. Le couplage est assuré par un contact qualifié de non franc entre les garnitures

et le disque. Ce phénomène est appelé “whirl” et peut nuire à la sécurité du freinage. Il apparaît sur les freins automobiles mais également sur les trains d’atterrissage d’avions. Nous verrons dans la suite que le whirl est la conséquence d’une instabilité géométrique appelée “sprag/slip” (arc-boutement/glisement) qui génère des vibrations auto-entretenues [3].

Broutement (groan)

Dans ce cas, les vibrations sont caractérisées par des basses fréquences inférieures à 100 Hz. Elles proviennent d’une dépendance du coefficient de frottement à la vitesse relative de glissement entre les garnitures fixes et le disque en rotation. Cette dépendance est visible lorsque la vitesse de rotation du disque est faible et que le coefficient de frottement décroît lorsque la vitesse de glissement augmente. Ce phénomène est également une instabilité appelée “stick/slip” (adhérence/glisement) dont la cinématique se compose d’une alternance de phases où les garnitures adhèrent au disque et de phases où ces dernières glissent [2].

Crissement (squeal)

Le crissement fait partie de la classe des vibrations auto-entretenues à hautes fréquences supérieures à 1 kHz. L’instabilité associée est le “mode lock-in” (couplage de modes). Il existe des modes propres de la structure globale ayant des déformées relativement proches. Le contact frottant génère un couplage qui peut faire coïncider les modes ayant des affinités géométriques créant ainsi des vibrations dont les fréquences dépendent en partie des modes engagés. Les vibrations de crissement génèrent également des émissions sonores extrêmement nuisibles (jusque 120 dB) mais n’altèrent pas l’efficacité du freinage [4]. D’autre part, les spectres des vibrations et du bruit rayonné sont caractérisés par un spectre de raies pouvant présenter une grande richesse fréquentielle.

Comme expliqué précédemment, nous présentons uniquement ces quatre types de bruits de freinage mais l’ensemble de ces derniers est résumé sur la Figure 1.2. On distingue clairement la zone des émissions sonores à basses fréquences (i.e. inférieure à 1 kHz) de la zone des émissions sonores à hautes fréquences. Dans notre étude, on se focalise uniquement sur les instabilités vibratoires générant un rayonnement acoustique à haute fréquence. On s’intéresse tout particulièrement au phénomène de crissement à haute fréquence (“HF squeal” sur la Figure 1.2).

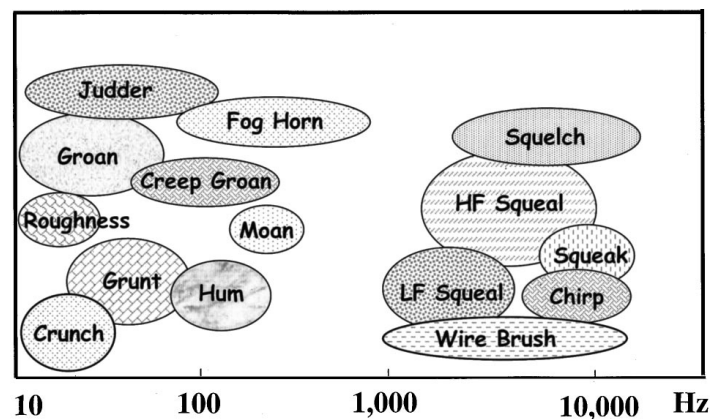


Figure 1.2 – Classification des bruits de freinages par contenu fréquentiel [1].

1.2 Vibrations et bruits lors d'un évènement de crissement

Notre étude se focalise sur les vibrations et le rayonnement acoustique associés au crissement des freins à disque. Dans cette section, on se propose de donner un aperçu de la complexité du crissement en présentant notamment les aspects multi-échelles et multi-physiques liés au contact frottant. Afin de bien cerner la problématique du crissement, nous commençons par quelques résultats expérimentaux issus de la littérature. Puis, les différents phénomènes physiques impliqués dans le crissement sont présentés.

1.2.1 Caractérisation expérimentale

Dans la littérature, il existe un grand nombre d'études expérimentales ayant pour objectif la caractérisation du crissement. Dans la majorité des études, l'influence de différents paramètres est évaluée et on peut citer la géométrie, les conditions de contact et de frottement ainsi que les paramètres de fonctionnement du frein comme la pression de freinage. Ces paramètres sont ensuite fixés afin de garantir l'occurrence du crissement puis, des mesures vibratoires et acoustiques sont menées.

Les premières campagnes de tests ont commencé en 1938 et ont été conduites par Mills [5]. Puis d'autres études furent publiées, notamment les travaux de Fosberry et Holubecki en 1961 [6]. Ces recherches sont les premières à mettre en évidence le lien entre les occurrences de crissement et la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. Ces résultats concernent les freins à disque ainsi que les freins à tambour du secteur automobile.

Au début des années 1960, d'autres études menées par Spurr [3] puis par Jarvis et Mills [7] montrent que les caractéristiques du contact et notamment sa position peuvent augmenter ou diminuer la propension à crisser. L'expansion des techniques d'interférométrie laser a largement contribué au grand nombre d'études menées dans le courant des années 1980. Ces techniques de mesures s'appuient sur la visualisation des motifs d'interférence sur la structure vibrante. Elles ont permis de visualiser les vibrations lors d'un évènement de crissement. En 1978, Felske propose l'une des premières études utilisant l'interférométrie [8]. D'autres études de référence ont suivi avec notamment Murakami [9] et Ohta [10]. Ces études de visualisation des vibrations ont permis de montrer que le crissement est principalement associé à des modes de vibrations de flexion des garnitures et du disque en rotation. Les travaux les plus célèbres en matière d'interférométrie sont sans doute ceux de Fieldhouse et Newcomb dans les années 1990 [11, 12]. Sur la Figure 1.3, on peut voir une illustration du montage expérimental composé d'un disque tournant, des garnitures et d'un étrier. On peut également visualiser la déformée opérationnelle lors du crissement.

En ce qui concerne les aspects acoustiques, les mesures de niveaux sonores sont effectuées à l'aide de microphones. L'étude menée par von Wagner en 2003 [13] propose une comparaison entre un modèle semi analytique et des résultats expérimentaux associés à un système de frein à disque automobile. La campagne de test effectuée a permis de mesurer les vibrations ainsi que le bruit rayonné à l'aide d'accéléromètres et d'un microphone placé à environ un mètre du frein. Les résultats obtenus montrent que lors du crissement, le spectre des vibrations est marqué par des raies correspondant à certaines fréquences propres du système ainsi que quelques harmoniques. Ce type de spectre témoigne de la présence de phénomènes non linéaires à l'interface de frottement. Les amplitudes vibratoires sont de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. Le spectre du champ de pression acoustique rayonnée présente les mêmes raies et les niveaux sont de l'ordre de 98 dB. Il existe également des moyens de mesures du champ acoustique rayonné plus sophistiqués tels que l'holographie acoustique. Cette technique consiste à déployer une grille de microphones pour reconstruire le champ de pression acoustique [14]. Une illustration de ce type de montage est proposée sur la Figure 1.4.

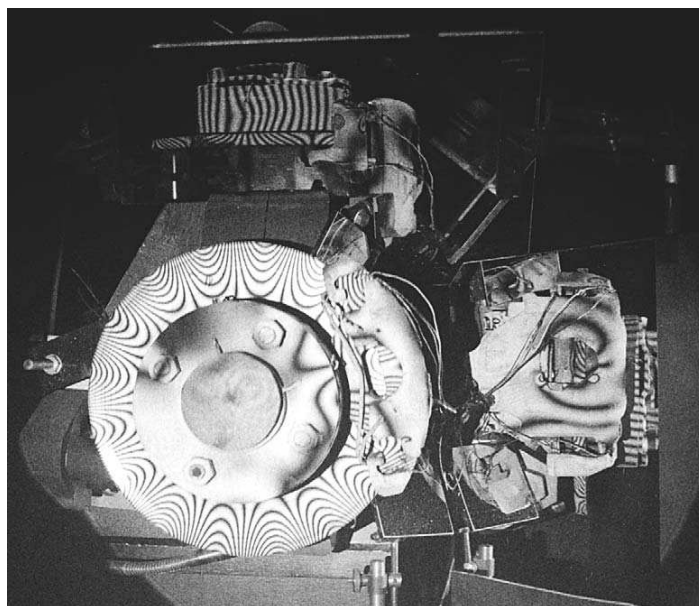


Figure 1.3 – Visualisation d’une déformée opérationnelle par interférométrie holographique [11,12].

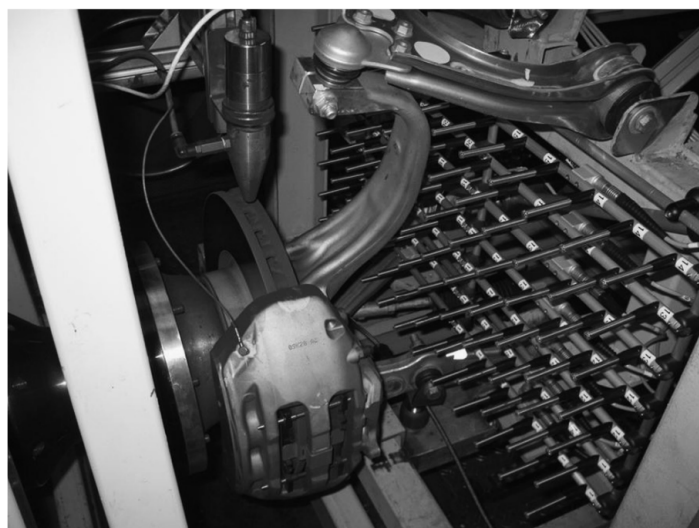


Figure 1.4 – Illustration d’une grille de microphones pour l’holographie acoustique [15].

En ce qui concerne le secteur ferroviaire, les campagnes d’essais en laboratoire ainsi que les relevés en gare font état de niveaux pouvant être supérieurs à 100 dB [16].

Outre les systèmes disque-garniture présentés précédemment, il existe d’autres types de montage permettant l’observation du crissement. On distingue les systèmes pion-disque et poutre-disque. Le premier se compose d’un pion conique dont la pointe frotte sur un disque en rotation. Le second comporte une poutre déformable de section circulaire ou carrée qui frotte sur un disque. Le choix du système est un moyen de faire varier la nature macroscopique du contact qui sera considéré comme ponctuel pour le cas du système pion-disque et surfacique pour les autres. De plus, le niveau de description est variable suivant les études et va des systèmes qualifiés de simplifiés ou minimaux contenant uniquement le disque et les parties frottantes, jusqu’au bras de suspension automobile complet. Dans les industries ferroviaire et aéronautique, les essais sont souvent effectués sur des systèmes réels complets tels qu’un essieu de TGV [16]. Les systèmes minimaux sont en général employés afin d’étudier l’influence

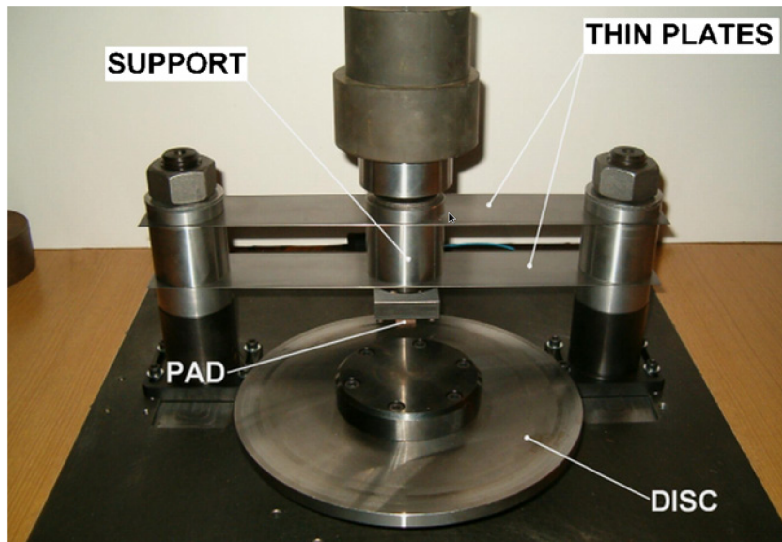


Figure 1.5 – Montage expérimental d'un système poutre-disque [17].

de certains paramètres sur les occurrences de crissement. C'est notamment le cas de l'étude proposée par Massi et al. [17] dans laquelle une confrontation entre les prédictions numériques des occurrences de crissement et des résultats expérimentaux est proposée. Le système étudié se compose d'un disque et d'une poutre déformable à section carrée (Figure 1.5). Renaud et al. [18], proposent l'étude expérimentale des déformées opérationnelles des garnitures lors du crissement d'un système composé d'un disque ventilé et de garnitures placées dans un étrier.

Il est à noter que les prédictions des occurrences s'effectuent en appliquant la théorie de l'analyse de stabilité qui sera développée au chapitre suivant. Nous rappelons également que ce chapitre n'a pas pour objectif de présenter les différentes théories associées au crissement mais uniquement les différents phénomènes impliqués.

1.2.2 Différents aspects du crissement

Les conclusions des études expérimentales présentées dans la section précédente montrent que le crissement est un phénomène extrêmement sensible à une multitude de paramètres (pression hydraulique de freinage, coefficient de frottement, géométrie, etc) et les résultats obtenus ne sont en général valables que pour le système testé. Ceci est dû au fait que le contact frottant est fortement non linéaire, multi-échelle et implique des phénomènes multi-physique complexes et intimement liés que nous décrivons ici.

Multi-échelle

Les systèmes de freinages décrits précédemment exploitent la friction comme mécanisme de dissipation afin de ralentir le disque en rotation. La dissipation de l'énergie cinétique induite par frottement peut être de différentes natures. L'énergie cinétique est transformée selon des mécanismes complexes et hiérarchisés [1,2] et on peut citer par exemple la création d'un flux de chaleur, les déformations plastiques et élastiques, les vibrations, les émissions sonores, l'usure, etc. L'origine de ces différents mécanismes de dissipation vient du fait que le contact frottant agit à différentes échelles allant du niveau atomique au niveau macroscopique. À l'échelle atomique, le contact frottant génère des oscillations des atomes à l'origine

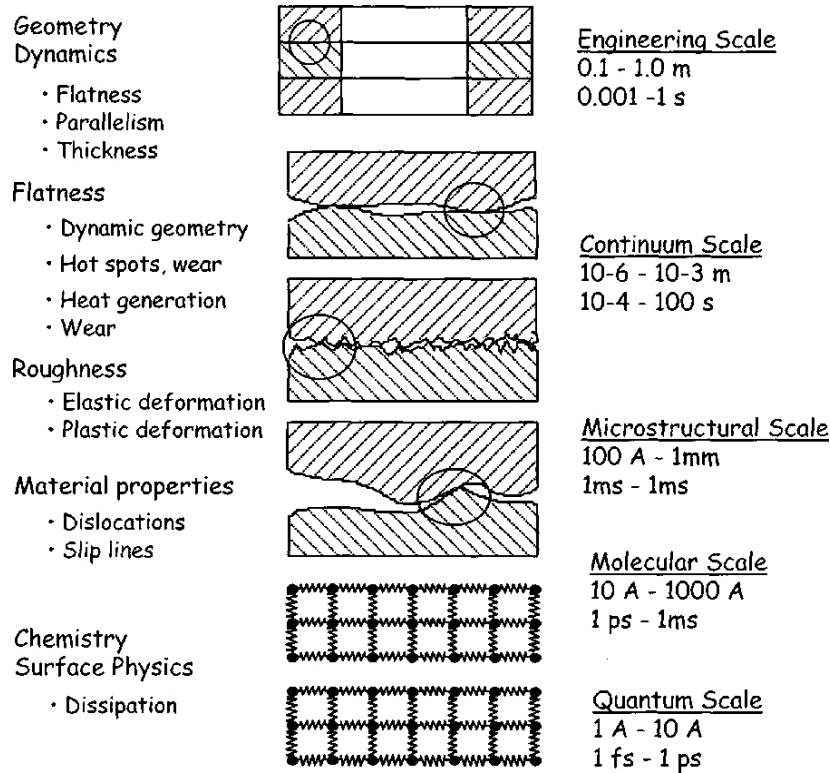


Figure 1.6 – Les différentes échelles du contact frottant [1].

de l'agitation thermique ce qui crée une augmentation de température. Ce phénomène est également visible à l'échelle moléculaire. L'échelle des milieux continus laisse apparaître les états de surfaces et principalement les rugosités. Lors du contact frottant, les aspérités s'entrechoquent, se déforment et se fracturent générant ainsi de l'usure, un flux de chaleur ainsi que des vibrations et du bruit. À cette échelle, les surfaces ne sont plus planes. À l'échelle macroscopique de l'ingénieur, les surfaces peuvent être planes et le contact frottant agit en interdisant l'interpénétration des surfaces et en s'opposant au mouvement relatif. Une vue globale des différentes échelles du contact est proposée sur la Figure 1.6. Ces différentes échelles sont visibles sur un système de frein à disque et plus particulièrement au niveau de l'interface de frottement : le disque et les garnitures présentent des rugosités et de l'agitation thermique aux échelles les plus fines et sont planes à l'échelle de l'ingénieur. Les différents mécanismes mis en jeu aux différentes échelles font du crissement un phénomène multi-échelle.

Tribologie

Le compréhension du crissement nécessite de s'attarder sur la vision tribologique du contact frottant. D'un point de vue macroscopique, le coefficient de frottement caractérise la capacité d'une surface à exercer des efforts de frottement s'opposant au mouvement relatif. Cependant, cette "résistance" est la résultante de phénomènes complexes présents aux échelles inférieures. On observe que plus le coefficient de frottement est grand, plus les efforts de frottement sont intenses.

Deux phases sont à distinguer : l'adhérence et le glissement. Avant le glissement, le coefficient de frottement statique génère des efforts de frottement permettant l'adhérence entre les deux surfaces. Puis, lors du glissement, le coefficient de frottement dynamique impose les efforts nécessaires au glissement. La transition entre ces deux coefficients est

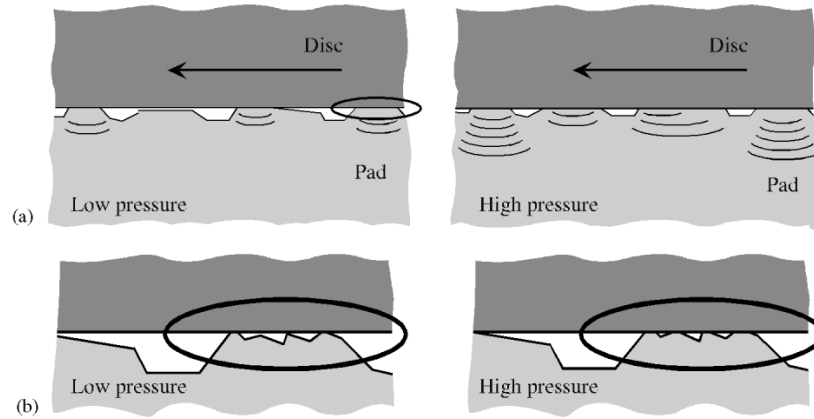


Figure 1.7 – Illustration du mécanisme de variation de la surface apparente [20].

due à des effets tribologiques impliquant une variation de la surface apparente de contact dont l'origine est de différentes natures. La construction des lois de frottement nécessite des campagnes expérimentales et l'utilisation de lois réalistes améliore considérablement la représentativité des modèles numériques [19].

Sur la Figure 1.7, on peut voir une illustration de l'influence de la pression de freinage et de la vitesse de glissement. À l'échelle macroscopique, l'application de la pression de freinage provoque une compression élastique de la garniture contre le disque en rotation et les efforts de frottement agissent. À l'échelle des milieux continus, on peut voir l'état de surface non plan de la garniture et la surface apparente est plus faible que la surface totale. D'autre part, sous l'action de la pression de freinage et de la vitesse de glissement, on peut voir que les rugosités se déforment et la surface apparente de contact augmente. À l'échelle inférieure, ce phénomène est également visible. La taille de la surface apparente de contact est directement liée au frottement : plus cette dernière est importante, plus les efforts de frottement sont importants. La formation de débris est également une notion fondamentale dans la considération des aspects tribologiques avec notamment la prise en compte des hétérogénéités de surfaces. Ces dernières génèrent également des variations de surface apparente et influent fortement sur le contact. La formation de débris lors du contact frottant entre deux surfaces est appelée problème à trois corps : les deux premiers corps sont les structures en contact (ici le disque et les garnitures) et le troisième désigne les débris [21]. La majeure partie des débris est constituée des garnitures consommables qui sont composées de fibres d'acier emprisonnées dans une matrice. Lors du contact frottant, les débris circulent selon un circuit tribologique précis [22, 23]. Les débris générés par l'usure des premiers corps, circulent dans le contact, s'accumulent et se compactent en formant des plaques de troisième corps. Ces plaques, appelées plateaux, influent fortement sur la surface apparente de contact et transmettent les efforts de contact entre les premiers corps. Elles peuvent ensuite se refragmenter en débris pour reformer le troisième corps et ainsi alimenter le circuit tribologique, ou encore être éjectées du circuit sous l'action de la rotation du disque. Une illustration de la complexité de l'état de surface liée à la formation de plateaux de troisième est proposée sur la Figure 1.8. Plusieurs études expérimentales mettent en évidence la présence de troisième corps lors du freinage et montrent que ce dernier influe largement sur les occurrences de crissement. On peut citer notamment les travaux de Eriksson et Jacobson [24], Eriksson et al. [20] ainsi que Hetzler [25]. De plus, Hetzler et Willner [26] montrent que la tribologie du contact a une grande influence sur le glissement. Ils avancent l'argument que le contact frottant remplit les "vallées" et lisse les "pics" qui constituent l'état de surface à l'échelle microscopique.

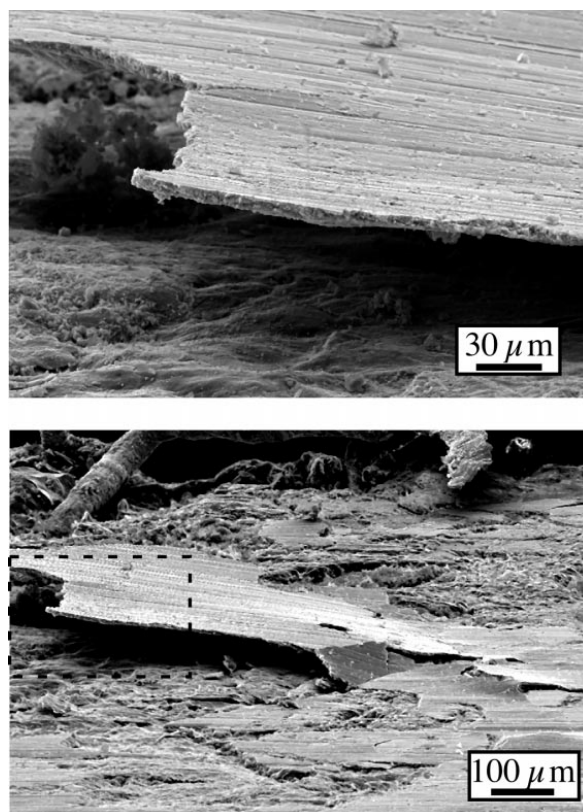


Figure 1.8 – Plateaux de troisième corps à l’interface de contact d’un disque et d’une garniture [24].

Les différentes études expérimentales s’accordent à dire que les variations du coefficient de frottement présentent deux phases : une phase où les variations sont importantes pour les faibles vitesses de glissement puis, à partir d’une vitesse suffisamment importante, le coefficient de frottement se stabilise autour d’une valeur constante. Il est à noter que la cinématique d’adhérence/glissement ne peut être observée que lorsque le coefficient de frottement est variable afin de pouvoir décrire la phase d’adhérence. Pour les vitesses les plus importantes, l’adhérence ne semble pas se produire et les garnitures semblent être en glissement permanent.

Un autre point important concerne l’effet des vibrations sur la surface apparente. Le contact frottant induit différents types de vibrations et notamment des micro-vibrations. Ces dernières induisent des contacts et des pertes de contact entre les rugosités. Ces configurations ont pour effet de diminuer la surface apparente de contact et font varier le coefficient de frottement dynamique. On entrevoit alors toute la complexité du frottement puisque les rugosités peuvent être sujettes au contact, à la perte de contact, à la plasticité, aux effets thermo-mécaniques ainsi qu’à l’arrachement qui engendre la formation de débris et ces derniers modifient à leur tour la surface de contact.

Température

Lors du frottement des garnitures sur le disque, l’énergie cinétique est majoritairement convertie en énergie thermique aux interfaces. Cette conversion génère de fortes températures pouvant atteindre plusieurs centaines de degrés et d’importants gradients. Sous les effets thermo-mécaniques, les structures se dilatent et peuvent se déformer de façon irréversible lors d’un freinage de longue durée par exemple. Pour limiter ce phénomène, le flux de chaleur doit être évacué le plus rapidement possible afin de garantir l’intégrité du système.

C'est pourquoi la plupart des disques présentent un réseau de canaux dans l'épaisseur permettant une circulation de l'air extérieur sous l'effet de la rotation (disques ventilés). Les effets thermiques sont difficilement mesurables expérimentalement mais il semble évident qu'ils influent de façon non négligeable sur le crissement.

En 2003, Kinkaid et al. [27] proposent une revue très détaillée sur le crissement des freins automobiles. Ces travaux font état des difficultés à prendre en compte les effets thermiques dans les modèles numériques et ceci est principalement dû au caractère fortement anisotrope des garnitures. D'autre part, ils montrent analytiquement que la surface apparente, les efforts de contact et de frottement, ainsi que la vitesse de glissement dépendent fortement des effets thermo-mécaniques.

Les hautes températures engendrent également la création de points chauds qui génèrent des instabilités de type thermo-élastique capables de générer des vibrations de trépidations ou "hot judder" [28, 29]. Selon Barber [30], les effets thermiques provoquent des distorsions très localisées soumises à d'importantes pressions de contact. Ainsi, ces zones sont beaucoup plus sujettes à l'usure et à la formation de débris. Dans le cas des freinages longs, une forte température peut générer des ondulations du disque et ainsi engendrer des vibrations de trépidation (judder).

D'autres études numériques ont également permis de classer les différents types de gradient de température générés lors d'une séquence de freinage : les travaux de Dufrenoy [31] recensent cinq types de phénomènes thermiques sur un système de freinage ferroviaire.

Amortissement

En dynamique, l'amortissement dans les structures est un facteur important pour la réduction des amplitudes vibratoires. Lorsque l'on cherche à isoler une structure d'un environnement vibrant, ou inversement, des amortisseurs sont souvent utilisés. Les effets amortissants sont de différentes natures : les liaisons mécaniques entre sous-structures, l'ajout de matériaux amortissants (e.g. des élastomères), ou bien l'amortissement structurel interne au matériau et lié au glissement des plans cristallographiques.

En ce qui concerne le crissement, la réduction des amplitudes vibratoires n'est pas toujours obtenue en ajoutant de l'amortissement. En effet, et nous détaillerons ce point dans la suite, l'ajout d'amortissement peut dans certains cas augmenter la propension à crisser. La découverte de ce phénomène, communément appelé paradoxe déstabilisant de l'amortissement, est relativement récente et date du début des années 2000. Les premières observations de ce paradoxe sont issues d'études numériques avec notamment les travaux de Duffour et Woodhouse [32], Hoffmann et Gaul [33], Sinou et Jézéquel [34] ainsi que Fritz et al. [35]. Puis, en 2011 Cantone et Massi [36] parviennent à illustrer clairement ce paradoxe par des mesures expérimentales effectuées sur un système poutre-disque (Figure 1.5).

De nos jours, les constructeurs automobiles utilisent l'ajout d'amortissement afin de réduire la propension à crisser de certains systèmes de freins. Des sandwichs visco-élastiques, appelés "shims", peuvent être fixés au dos des plaquettes pour modifier l'amortissement de manière contrôlée. Les shims sont composés d'un sandwich de plaques de différents matériaux qui sont collées au dos des garnitures. L'utilisation de la colle ainsi que la structure en couches confèrent aux shims leur caractère visco-élastique.

Cette méthode est efficace [37–39] mais ne permet pas de supprimer totalement le crissement mais uniquement de cibler certains modes potentiellement crissants. Comme expliqué précédemment, le crissement à haute fréquence peut être dû à la coalescence de modes propres couplés par le contact frottant. Les objectifs des shims sont d'une part d'éliminer ce couplage, et d'autre part de réduire la propension à crisser. En 2012, Festjens et al. [40] proposent une étude sur l'efficacité des shims visco-élastiques multi-couches. Ils présentent également l'un des premiers outils numériques permettant de choisir les caractéristiques des shims afin de



Figure 1.9 – Illustration d'un shim fixé au dos d'une garniture.

réduire la propension de certains modes à crisser. D'autres études sont également disponibles dans la littérature avec notamment les travaux de Kang [41] qui propose une étude numérique de l'influence des shims sur les modes d'un modèle numérique de frein à disque.

Autres phénomènes

La liste des phénomènes précédents n'est pas exhaustive et il en existe bien d'autres qui ont un impact sur le crissement. On peut citer par exemple les effets gyroscopiques liés à la conservation du moment cinétique lors de la rotation du disque qui peuvent être considérés comme un mécanisme déstabilisant. Du point de vue de la modélisation, les effets gyroscopiques peuvent être vus comme un ajout d'amortissement négatif capable d'augmenter la propension à crisser. Plusieurs études numériques témoignent de ce comportement [42–45].

Le phénomène de crissement est fugitif et possède des variabilités très importantes. De plus, les conditions de fonctionnement, les paramètres de l'environnement (i.e. température, humidité, .etc) ainsi que les variations de l'état d'usure des composants font que le crissement est difficilement reproductible et surtout répétable. L'ensemble de ces considérations amène à considérer des aspects stochastiques pour renforcer les prédictions des occurrences de crissement. En 2010, Butlin et Woodhouse [46] font partie des premiers à considérer les variabilités associées au crissement et posent ainsi les bases des méthodes permettant d'améliorer les prédictions. En 2014, Tison et al. [15] montrent que la prise en compte des incertitudes permet de fortement améliorer les prédictions des occurrences de crissement et ce résultat est confirmé par des résultats expérimentaux.

Le crissement implique encore d'autres aspects et on peut citer les aspects statistiques [47], les mouvements chaotiques [48] ainsi que les techniques d'interfaces texturées réduisant le bruit de crissement [49, 50]. La complexité est également augmentée par la présence de fortes non-linéarités aux interfaces (i.e. écrasement des aspérités, contact/perte de contact, etc). Le crissement est donc fortement multi-échelle, multi-physique et agit également selon différentes échelles de temps. Une illustration de la hiérarchisation de ses différents caractères est proposée par Eriksson et al. [20] (Figure 1.10). Les auteurs identifient des processus rapides, globaux et locaux ainsi que des processus lents aux échelles macroscopique et microscopique.

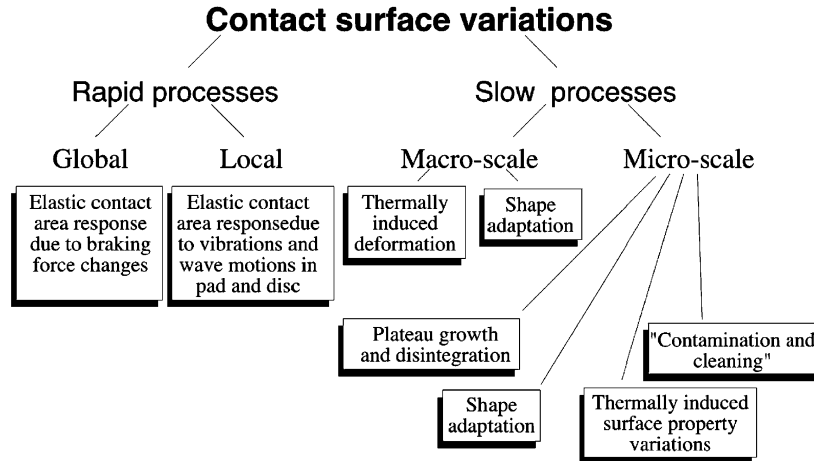


Figure 1.10 – Aperçu des différents mécanismes de variation de la surface apparente de contact [20].

1.2.3 Tendances générales

L'impossibilité d'instrumenter l'interface ainsi que les difficultés pour instrumenter le disque en rotation rendent les études expérimentales incomplètes. De plus, les résultats associés à un système sont difficilement transposables à un autre. Toutefois, les résultats de la littérature se recoupent et présentent quelques tendances générales [2].

1. Un système de frein peut crisser selon un certain nombre de fréquences distinctes.
2. Les vibrations de crissement sont proches des modes propres du système. Les ondes ne sont pas toutes stationnaires mais se propagent [12]. La connaissance des modes propres est donc insuffisante pour la prédiction du crissement.
3. Les fréquences de crissement semblent être différentes des fréquences propres.
4. Augmenter le coefficient de frottement entre le disque et les garnitures augmente la propension à crisser.
5. Il n'y a pas de résultats clairs permettant d'identifier le composant qui contribue le plus au crissement. Les contributions sont variables et fortement dépendantes des fréquences de crissement.
6. Augmenter la pression de freinage (dans un intervalle donné) augmente les niveaux sonores et les fréquences de crissement [51].
7. Les variations du coefficient de frottement (i.e. liées aux variations de surface de contact apparente) et de la pression de freinage ont plus d'impact sur les occurrences de crissement que la vitesse de glissement [52].
8. Lorsque le crissement est établi, les niveaux sonores augmentent lorsque la vitesse diminue et restent audibles jusqu'à l'arrêt complet. Ceci s'explique par le fait que le coefficient de frottement augmente lorsque la vitesse de glissement diminue.
9. L'amortissement joue un rôle complexe sur les occurrences de crissement.

1.3 Contexte de l'étude

Les aspects de modélisation du crissement n'ont pas été abordés et ce point sera présenté au chapitre suivant. Cependant, il semble évident que l'intégralité des phénomènes présentés dans la section précédente ne peut être pris en compte dans les modèles. La plupart des études numériques ne s'intéressent qu'à un nombre très restreint de phénomènes. Par

exemple, l'une des principales difficultés est la gestion du caractère multi-échelle. Nous verrons dans la suite que les modèles éléments finis sont très largement employés dans l'étude du crissement. Le processus de discrétisation géométrique rend difficile la prise en compte des effets intervenant au niveau microscopique et macroscopique. D'autre part, les lois de contact et de frottement employées ne sont que très rarement issues d'un processus d'identification expérimentale. Dans la majorité des cas, des lois de contact et de frottement idéalisées, que nous présenterons au chapitre suivant, sont employées. Nous devons donc sélectionner les modélisations adéquates afin de cibler les phénomènes physiques qui nous intéressent dans cette étude.

Au vu des résultats expérimentaux, il est nécessaire d'avoir au moins une interface frottante. Ainsi, l'étude d'un bras de suspension complet est écartée et nous nous concentrons sur un système disque-garniture uniquement. Nous avons vu précédemment que ce type de système dit "simplifié" est capable de générer des émissions sonores de crissement. En ce qui concerne l'interface de frottement, nous positionnons notre étude au niveau macroscopique. Cependant, nous avons précédemment mis en évidence l'origine microscopique du contact frottant. Afin de faire "remonter" l'information microscopique au niveau macroscopique, nous tenons compte des plateaux de contact. La notion de plateau de contact semble la plus simple à modéliser et facilite grandement la gestion du contact. En effet, nous pouvons faire l'hypothèse que le contact s'effectue uniquement sur ces plateaux. Cette représentation est totalement déterministe du point de vue de la localisation des contacts et exclut totalement la vision probabiliste de l'interface présentée dans la section précédente. Nous verrons dans la suite que cette considération n'est que peu réaliste mais permet de reproduire les principales caractéristiques du crissement. Il faut cependant souligner que cette hypothèse sur la nature du contact est très forte mais ne discrédite pas les méthodes développées dans cette thèse.

Les effets tribologiques avec notamment la formation de troisième corps sont exclus et l'usure n'est pas prise en compte.

De plus, le crissement peut intervenir à des régimes de vitesse où le coefficient de frottement est quasiment constant. Nous nous plaçons donc à un régime de vitesse suffisamment élevé pour s'affranchir de la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse de glissement. Ceci permet également de contourner l'identification d'une loi de frottement.

Les effets thermo-mécaniques sont également exclus et les ventilations du disque ne sont pas prises en compte. En revanche, nous souhaitons prendre en compte l'amortissement structurel.

Aussi, le travail proposé concerne le développement de méthodes numériques dédiées au calcul du rayonnement acoustique lors du crissement. Nous rappelons également que les objectifs de la thèse sont principalement le développement d'outils numériques d'aide à la conception de garnitures peu crissantes et d'utiliser ces outils pour améliorer la compréhension du phénomène de crissement. En particulier, l'étude de l'évolution des signatures vibratoires et du bruit rayonné en fonction de certains paramètres seront abordés. Dans notre étude, nous proposons la mise en place d'outils numériques permettant de décrire l'ensemble de la démarche méthodologique qui va de la modélisation du phénomène de crissement (i.e. structure et contact frottant) jusqu'à l'estimation de l'apparition de ce dernier (i.e. étude de stabilité, vibrations et bruit rayonné). L'une des originalités et l'intérêt de ce travail sont d'aller jusqu'à l'estimation du bruit rayonné lors du crissement alors que les études sur le sujet s'arrêtent généralement à l'étude de stabilité ou des vibrations auto-entretenues.

Chapitre 2

Modélisation non linéaire des systèmes frottants

Sommaire

2.1	Modélisation du contact et du frottement	30
2.1.1	Formulation continue du problème de contact	30
2.1.2	Mécanismes des instabilités induites par frottement	34
2.2	Analyse non linéaire de stabilité	38
2.2.1	Notions de stabilité des points fixes au sens de Lyapunov	38
2.2.2	Bifurcation de Hopf	41
2.2.3	Stabilité des orbites périodiques	41
2.3	Méthodes numériques pour le calcul du crissement	42
2.3.1	Modélisation des systèmes de freins	42
2.3.2	Prédiction et calcul des vibrations de crissement	46
2.3.3	Calcul numérique des émissions sonores de crissement	51
2.3.3.1	Méthode des éléments finis pour la vibro-acoustique	51
2.3.3.2	Méthode des éléments finis de frontière	53
2.3.4	Émissions de crissement : résultats de la littérature	54
2.4	Contexte général	56

L'objectif du premier chapitre était de donner un aperçu de la complexité des vibrations et du bruit induits par frottement sec en proposant un état de l'art des études expérimentales. Nous avons également décrit le cadre de l'étude que l'on souhaite mener en choisissant les différents phénomènes à prendre en compte. De plus, nous avons mis en lumière le fait que les vibrations induites par frottement sont la conséquence de phénomènes d'instabilités dont les origines peuvent être de différentes natures. Leur compréhension est primordiale pour l'étape de modélisation des systèmes frottants, la prédiction des vibrations ainsi que le calcul des réponses vibratoires et acoustiques. Cependant, malgré la quantité des travaux de modélisation disponibles dans la littérature, il n'existe pas de théorie unifiée permettant de justifier et de décrire ces instabilités. Toutefois, comme le décrivent Ibrahim [53, 54], ainsi que Oden et Martins [55], quatre mécanismes ont été principalement identifiés comme pouvant être à l'origine de ces instabilités : le stick-slip, le sprag-slip, la variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement et le couplage de modes.

L'objectif de ce second chapitre est de décrire les outils de modélisation et de calcul permettant de prédire efficacement les occurrences de crissement et d'estimer numériquement les niveaux vibratoires et sonores. Dans un premier temps, nous présentons les différents mécanismes d'instabilités en détaillant principalement les différentes formulations du contact et du frottement. Dans la second partie, la théorie de l'analyse non linéaire de stabilité permettant de prédire les occurrences de crissement est présentée. La troisième partie propose un aperçu des méthodes numériques de calcul des vibrations et du bruit de crissement ainsi qu'une sélection de résultats numériques de référence.

2.1 Modélisation du contact et du frottement

2.1.1 Formulation continue du problème de contact

Nous nous intéressons à présent au problème mécanique de contact unilatéral. Ainsi, on cherche à formaliser le fait que deux structures ne peuvent s'interpénétrer. Cette considération se traduit par des relations d'inégalité concernant les variables cinématiques de chacune des structures que nous décrivons ici.

Soient deux solides élastiques Ω_1 et Ω_2 dont l'ensemble est noté $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et partageant la zone de contact désignée par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Figure 2.1). Ces solides sont soumis à :

- des déplacements imposés $\mathbf{u}_d$ sur la portion $S_u = S_{u_1} \cup S_{u_2}$,
- des efforts imposés $\mathbf{F}_d$ sur la portion $S_F = S_{F_1} \cup S_{F_2}$,

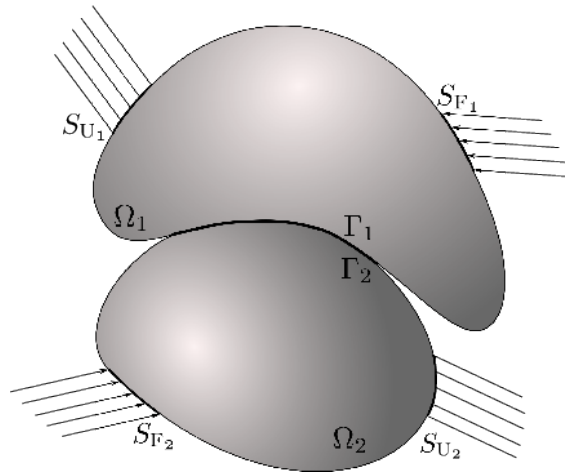


Figure 2.1 – Problème de contact unilatéral.

- des forces volumiques notées $\mathbf{f}_d$ sur Ω .

Les équations classiques du problème d'élasto-dynamique s'écrivent de la façon suivante :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = \rho \ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \text{ sur } S_F \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } S_u \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.4)$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale unitaire sortante de l'un des solides. L'équation (2.1) est l'équation fondamentale de la dynamique des milieux continus élastiques, l'équation (2.2) correspond aux conditions aux limites en effort, l'équation (2.3) donne les conditions aux limites en déplacement et l'équation (2.4) représente la relation de comportement. Dans un souci de clarté, nous omettons l'écriture des équations relatives aux conditions initiales ainsi que l'équation de compatibilité liant les déplacements aux déformations.

Le champ de déplacement solution $\mathbf{u}$ est partitionné en $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sur Ω_1 et Ω_2 respectivement, de même que les autres grandeurs. Lorsque les deux solides sont en contact, les normales sont colinéaires de sens opposés et on notera $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ (Figure 2.2). On définit alors les efforts normaux associés au problème de contact :

$$F_{n_1} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 \quad (2.5)$$

$$F_{n_2} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 \quad (2.6)$$

et les efforts tangentiels associés au problème de frottement :

$$\mathbf{F}_{t_1} = \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 - F_{n_1} \mathbf{n} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F}_{t_2} = \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 - F_{n_2} \mathbf{n} \quad (2.8)$$

Lorsque deux structures sont en contact, deux relations fondamentales sont à considérer pour modéliser les actions générées. La première concerne la relation de contact unilatéral qui exprime le fait que les corps ne peuvent s'interpénétrer. La seconde est la relation de frottement qui régit les variations d'efforts tangentiels sur la zone de contact.

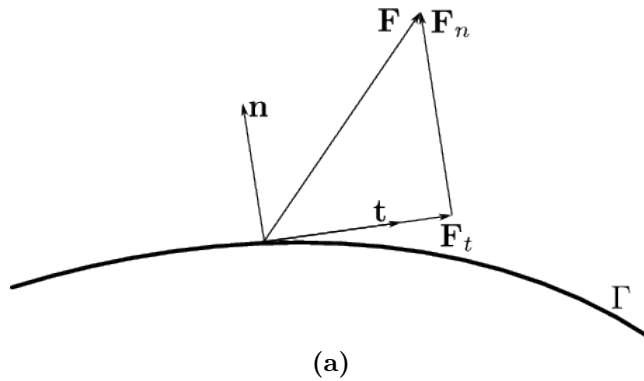


Figure 2.2 – Efforts de contact.

Contact unilatéral sans frottement

La première condition à écrire concerne la condition géométrique de non pénétrabilité ou encore condition de Signorini-Hertz. Cette condition traduit le fait que le déplacement relatif normal entre les deux solides ne peut être négatif. Cette condition s'écrit de la façon suivante :

$$(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{contact} \\ (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} > 0 & \text{décollement} \end{cases} \quad (2.9)$$

La seconde condition est d'ordre mécanique et est communément appelée condition d'intensibilité de Signorini-Hertz. Elle traduit le fait que les efforts normaux de contact ne peuvent être associés qu'à de la compression. On peut écrire la condition d'intensibilité de la façon suivante :

$$F_{n,i} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F_{n,i} < 0 & \text{contact par compression} \\ F_{n,i} = 0 & \text{décollement} \end{cases} \quad (2.10)$$

Cette formulation sous-entend un décollement à effort nul qui a lieu pour un contact sans adhésion. Dans les problèmes de lubrification, il existe des efforts qui s'opposent au décollement.

Il existe également une condition de type énergétique ou condition de complémentarité de Moreau. Cette dernière prend la forme suivante :

$$(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} F_{n,i} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{contact} \\ \text{ou} \\ F_{n,i} = 0 & \text{décollement} \end{cases} \quad (2.11)$$

Graphiquement, ces trois conditions sont représentées sur la Figure 2.3 (a-c) et les domaines admissibles sont hachurés. La loi de contact unilatéral peut être vue comme la combinaison des trois conditions précédentes. La superposition de ces domaines conduit alors à la loi de Signorini de la Figure 2.3 (d). Plusieurs difficultés émanant de ce profil se présentent alors :

- le déplacement relatif normal $(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}$ et l'effort normal de contact présentent une relation non univoque,
- la loi obtenue est continue mais non différentiable à l'origine.

La principale difficulté concerne évidemment le caractère non différentiable qui vient de la complexité à décrire la transition entre les configurations collées et décollées.

Cette formulation du contact est intuitive mais les inconvénients précédents ont conduits au développement d'autres modèles de contact. On pourra citer par exemple le modèle de contact de Hertz relatif à une échelle moins fine. Cette formulation du contact permet, entre autres, d'obtenir la forme géométrique de la zone de contact ainsi que la répartition des contraintes de contact.

Des approches utilisant des formes régularisées de la loi de contact unilatéral de Signorini sont également employées. L'objectif de ces lois consiste à déterminer des paramètres régularisants permettant d'obtenir une relation bi-univoque entre déplacement relatif et pression de contact ainsi que de régulariser la loi de contact à l'origine. On peut voir un exemple de régularisation sur la Figure 2.3 (d) en pointillés noirs. On remarque que la régularisation autorise la pénétration qui est justifiée par la prise en compte de l'écrasement des aspérités à l'échelle des milieux continus. La principale difficulté dans l'utilisation des lois régularisées est l'identification des paramètres de régularisation. Ces derniers correspondent aux raideurs de contact des aspérités et doivent faire l'objet de campagnes de tests [56]. Il existe différents moyens expérimentaux pour déterminer ces raideurs mais la technique la plus utilisée reste

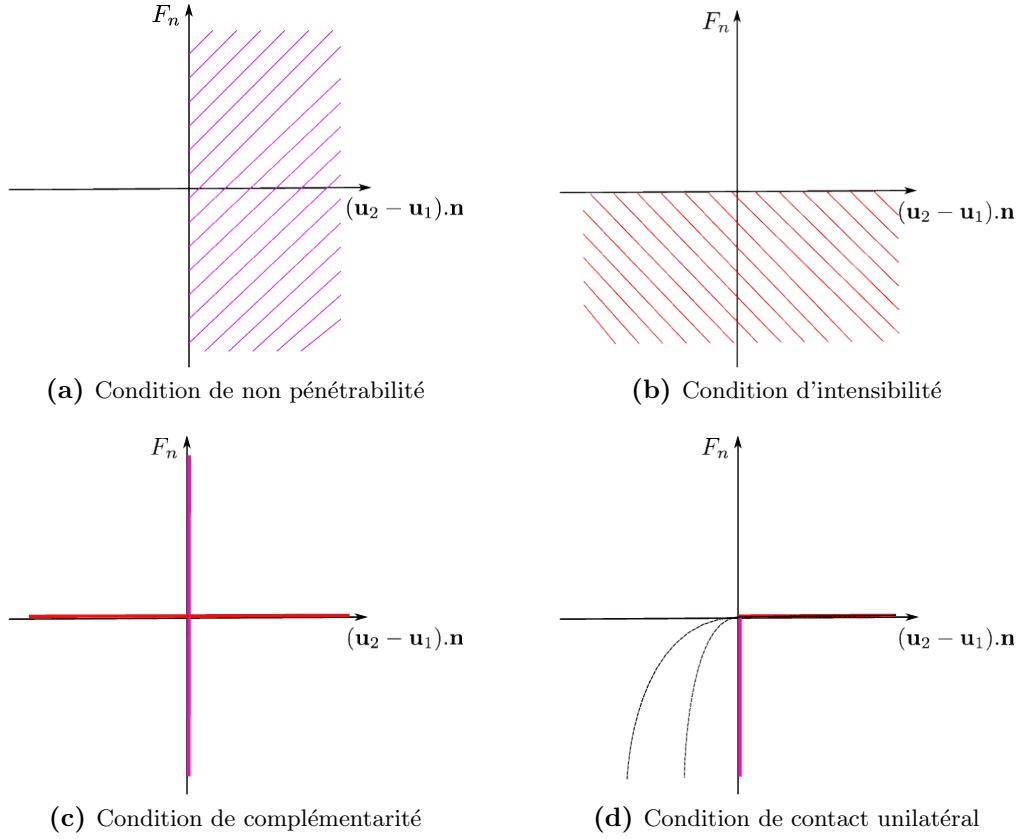


Figure 2.3 – Conditions de contact de Hertz-Signorini-Moreau.

le tracé de diagramme force-déplacement associé à un essai de compression entre une garniture et un disque par exemple. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'étude menée par Trichès Jùnior et al. [57] où une revue détaillée de ces différentes méthodes d'identification expérimentale est proposée.

Gestion du frottement

Les premières tentatives de modélisation du frottement sont attribuées à Leonard de Vinci en 1508 dont les résultats montrent que la force de frottement est proportionnelle à l'effort maintenant les deux solides en contact. De plus, il établit que la force de frottement est indépendante de l'aire de la surface de contact. Ces travaux ont été complétés par Amontons en 1699 puis par Coulomb. Cette loi traduit la relation entre les efforts normaux et les efforts tangents de contact en introduisant le coefficient de frottement μ . Elle s'écrit de la façon suivante :

$$F_t \leq \mu F_n \Leftrightarrow \begin{cases} F_t = \mu F_n & \text{glissement} \\ F_t < \mu F_n & \text{adhérence} \end{cases} \quad (2.12)$$

Le graphe de la loi de frottement de Coulomb est représenté sur la Figure 2.4. On remarque que cette loi est non linéaire, non différentiable en zéro et non univoque. On remarque également que le frottement lie la vitesse relative entre deux surfaces et non le déplacement. Par analogie avec la loi de Signorini, il existe des possibilités de régularisation (Figure 2.4 courbe en pointillés) et les plus utilisées sont les fonctions du type Norton-Hoff, arc tangente ou bien linéaire.

Le modèle de frottement de Coulomb est le modèle le plus simple permettant de décrire le frottement à l'échelle macroscopique. Pour obtenir des modèles plus réalistes, il faut tenir

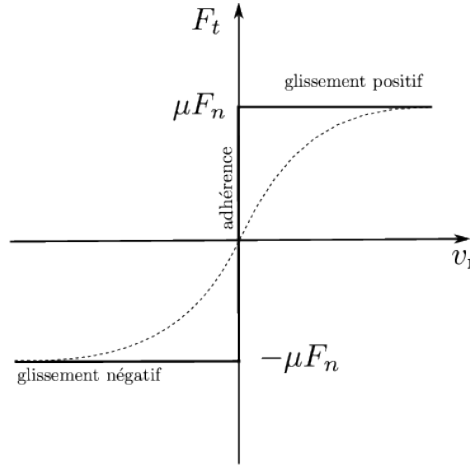


Figure 2.4 – Loi de frottement de Coulomb (trait plein) et forme régularisée de type Norton-Hoff (pointillés).

compte des phénomènes décrits dans le chapitre précédent (section 1.2.2 du chapitre 1). Tous les effets liés à la variation de la surface de contact apparente influent sur la valeur du coefficient de frottement. Ainsi, différentes lois d'évolution du coefficient de frottement peuvent être envisagées mais les plus utilisées restent les fonctions de la vitesse de glissement et de la température.

Remarque : on trouve dans la littérature des formulations du problème de frottement par analogie avec la plasticité et le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de Curnier [58].

2.1.2 Mécanismes des instabilités induites par frottement

Nous tentons à présent de décrire les différents mécanismes permettant d'aboutir à des instabilités menant à des vibrations auto-entretenues. Dans la littérature, on distingue les mécanismes d'origine tribologique de ceux dont l'origine est plutôt géométrique, le stick-slip et les variations du coefficient de frottement ainsi que le couplage de modes et le sprag-slip respectivement.

Stick-slip et variations du coefficient de frottement

Les aspects tribologiques présentés au chapitre 1 sont responsables des variations du coefficient de frottement qui génèrent des phases d'adhérence et de glissement appelées stick-

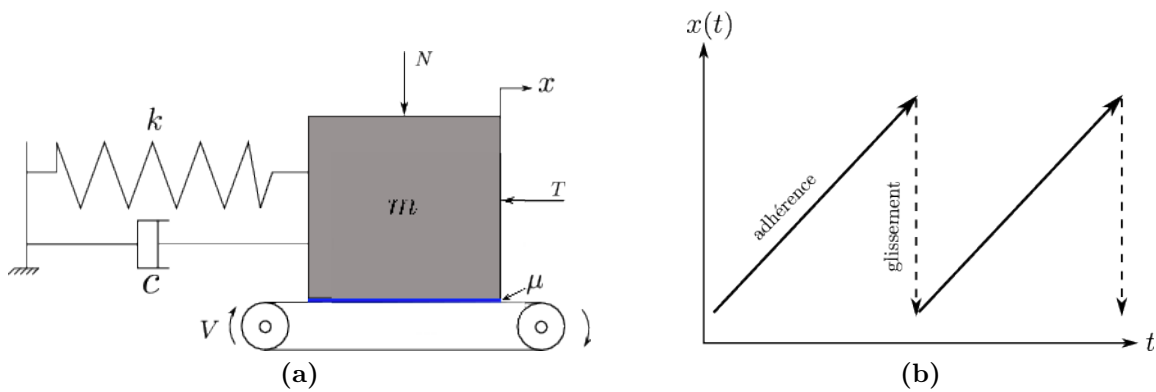


Figure 2.5 – Modèle de stick-slip à un degré de liberté.

slip. Les premiers travaux concernant ce phénomène remontent au milieu des années 1950 avec les travaux de Sinclair et Manville [59]. Depuis, le phénomène de stick-slip a largement été expliqué [53, 55, 60] et de très nombreuses études ont été menées sur le sujet [61–64]. On distingue notamment la présence d’un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient dynamique ou encore un coefficient de frottement qui dépend continument de la vitesse de glissement [65]. Une illustration de ces deux types de lois est proposée sur la Figure 2.6. Il est à noter qu’il existe d’autres types de loi continue telle que la loi exponentielle. Les origines des variations du coefficient de frottement sont de deux natures : les caractéristiques matériaux (i.e. les états de surface) et les micro-vibrations de l’interface.

La modélisation la plus simple permettant d’observer des vibrations de stick-slip est un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté maintenu en contact par un effort normal N contre un tapis animé d’une vitesse constante v (Figure 2.5 (a)). Le contact est supposé ponctuel et un coefficient de frottement est appliqué entre la masse et le tapis. Un effort de frottement T est donc généré sur la zone bleue selon la loi de Coulomb. L’équation d’équilibre de la masse s’écrit de la façon suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = T(v_r) \quad (2.13)$$

où v_r désigne la vitesse relative $v - \dot{x}$. Le choix de la loi de frottement va donc modifier l’expression des efforts de frottement. Par exemple, lorsque la loi de frottement est discontinue (i.e. avec un coefficient de frottement statique μ_s supérieur au coefficient de frottement dynamique μ_d , Figure 2.6 (a)), l’effort tangentiel de frottement T s’écrit :

$$\begin{cases} T(v_r) < \mu_s N & \text{lorsque } v_r = 0 \text{ adhérence} \\ T(v_r) = \mu_d N & \text{lorsque } v_r > 0 \text{ glissement positif} \\ T(v_r) = -\mu_d N & \text{lorsque } v_r < 0 \text{ glissement négatif} \end{cases} \quad (2.14)$$

Lorsque la loi de frottement dépend continument de la vitesse de glissement, les efforts de frottement sont modifiés. Par exemple, en supposant une loi linéaire du type $\mu_d(v_r) = \mu_s(1 - \alpha(v - \dot{x}))$, où α caractérise la pente, l’équation du mouvement devient :

$$m\ddot{x} + (c - \alpha\mu_s N)\dot{x} + kx = N\mu_s(1 - \alpha v) \quad (2.15)$$

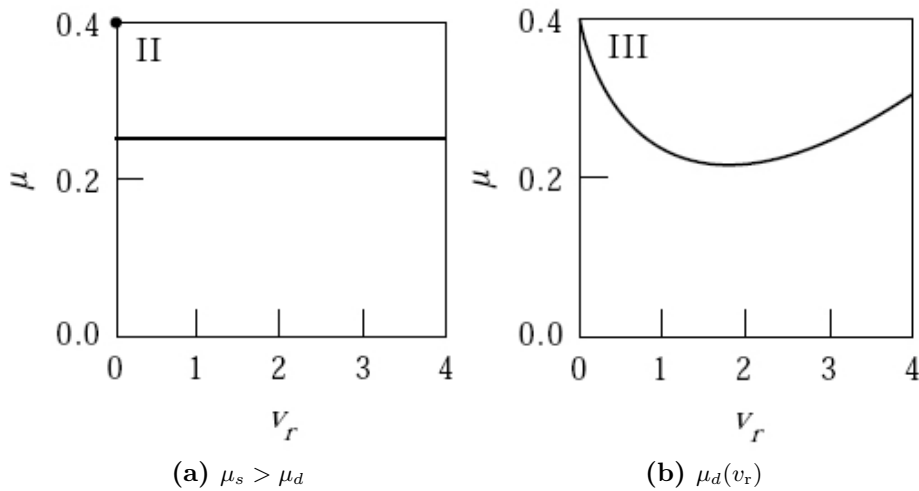


Figure 2.6 – Variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement [65]. (a) Loi discontinue avec un coefficient statique supérieur au coefficient dynamique et (b) loi de frottement continue.

On remarque alors que la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement revient à introduire un amortissement négatif : de l'énergie est ainsi injectée dans le système. Une comparaison des formulations du frottement continu et discontinu est proposée par Hetzler [66]. Il montre que l'amortissement négatif lié au frottement continu affecte principalement les régimes de vibrations à faibles amplitudes et les régimes vibratoires plus amples sont préservés.

Sur la Figure 2.5 (b), les vibrations de stick-slip sont représentées de façon qualitative. Ces vibrations sont auto-entretenues puisqu'elles sont générées sans l'aide d'une excitation temporelle extérieure : le mécanisme d'auto-génération est interne au système. Pour les deux formulations, le déclenchement des vibrations provient d'une perturbation de l'état d'équilibre. En effet, et nous le verrons dans la suite, il existe une configuration où la masse est en glissement permanent et la vitesse relative est exactement celle du tapis : c'est la notion d'équilibre glissant pour laquelle la vitesse du solide est nulle. Puis, une légère perturbation de cet équilibre engendre une variation des efforts de frottement qui déclenche le mécanisme de stick-slip. Cette notion de stabilité des équilibres glissants est fondamentale dans l'étude du crissement et sera largement détaillée dans la suite de ce chapitre.

Le stick-slip et les variations du coefficient de frottement ont longtemps été l'explication la plus plausible de l'apparition des vibrations de crissement [6, 54]. Cependant, de nombreux travaux ont montré que ce mécanisme n'est pas suffisant pour modéliser le crissement. Intuitivement, il semble peu probable que des phases d'adhérence prolongées se produisent lors d'une séquence de freinage pour "d'importantes" vitesses. En effet, les propriétés tribologiques liées à la discontinuité du coefficient de frottement et à ses variations continues ne permettent pas d'expliquer la totalité des vibrations de crissement induites par frottement sec. De nombreuses études expérimentales ont montré que le crissement pouvait se produire avec un coefficient de frottement stabilisé autour d'une valeur constante [7, 67, 68].

Sprag-slip

Comme décrit précédemment, le modèle de stick-slip est insuffisant pour décrire le crissement. Ceci est dû en partie au fait que l'effort normal est constant. D'autre part, plusieurs études expérimentales confirment le fait que le crissement se produit également lorsque le coefficient de frottement est constant. En 1961, Spurr synthétise ces deux aspects en proposant le premier modèle de sprag-slip [3]. Ce modèle, illustré sur la Figure 2.7, se compose d'un tapis roulant à vitesse constante sur lequel une barre flexible inclinée est maintenue en contact par l'effort N . Un coefficient de frottement constant est introduit au contact générant ainsi un effort tangentiel de frottement T dont l'expression est la suivante :

$$T = \frac{\mu N}{1 - \mu \tan \theta} \quad (2.16)$$

On remarque que l'effort de frottement devient infiniment grand au point de contact lorsque l'angle θ s'approche de la valeur $\arctan(1/\mu)$. Cette valeur bloque le mouvement relatif et provoque l'arc-boutement de la barre flexible. L'énergie de déformation emmagasinée est ensuite libérée et la barre reprend sa position initiale en glissant. Par analogie avec le stick-slip, ces phases d'arc-boutement et de glissement se répètent et génèrent des vibrations auto-entretenues. L'aspect géométrique de cette instabilité est trivial puisque la condition permettant d'initier le sprag-slip repose sur la valeur de l'angle θ . Les travaux expérimentaux de Jarvis et Mills ont mis en lumière ce comportement [7]. Avec un coefficient de frottement constant, ils montrent que l'inclinaison de la poutre (i.e. angle de sprag) permet de générer des vibrations.

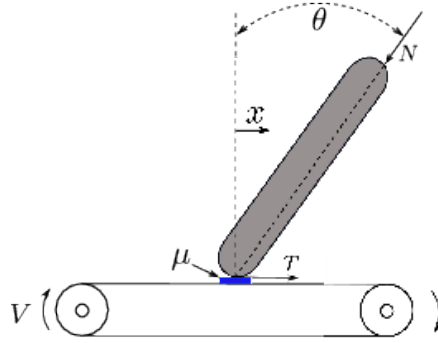


Figure 2.7 – Modèle de sprag-slip à un degré de liberté.

Couplage de modes

Les travaux de Spurr ont ensuite initié un très grand nombre de travaux intégrant la théorie du sprag-slip. De nombreux auteurs se sont inspirés de la théorie de Spurr pour modéliser des systèmes de pions frottants sur un disque comportant plusieurs degrés de liberté. On peut citer par exemple les travaux de Earles [69].

L'origine géométrique des instabilités de sprag-slip ainsi que le couplage entre les degrés de liberté tangentiel et normal ont ainsi donné naissance à la théorie du couplage de modes. Le sprag-slip s'explique alors physiquement comme la coalescence de modes de vibration couplés par le contact frottant. En 1972, North [4] développe le premier modèle analytique linéaire à 8 degrés de liberté exploitant le couplage géométrique des déplacements normaux et tangentiels. Dans cette étude, les frottements génèrent des forces suiveuses qui sont clairement identifiées comme mécanisme déstabilisant. On peut citer également les travaux de Millner [70] qui propose un modèle à 6 degrés de liberté et montre que les instabilités par couplage de modes dépendent fortement de la valeur du coefficient de frottement, des masses mais également des raideurs associées aux différents composants. D'autres modèles dits minimaux ont permis de nettement améliorer la compréhension de la phénoménologie des instabilités par couplage de modes et les modèles les plus connus sont sûrement ceux de Hoffmann [71], Flint et Hulten [72], Bengisu et Akay [73] ou encore Earles et Chambers [74]. En 2007, von Wagner propose une revue très détaillée des modèles minimaux les plus pertinents [75].

Afin d'illustrer le couplage de modes, nous présentons le modèle de Hoffmann et al. [71]. Ce dernier est classiquement employé pour illustrer les vibrations auto-entretenues par coalescence de modes. Il contient un degré de liberté normal et un tangentiel qui sont couplés par un coefficient de frottement constant (Figure 2.8 (a)). Tous les paramètres de ce modèle sont ajustables, à savoir la masse, les raideurs ainsi que le coefficient de frottement. L'idée est de calculer les valeurs propres du système en faisant varier le coefficient de frottement. Ces valeurs propres sont complexes puisque le frottement dissymétrise la matrice de rigidité. Les résultats de Hoffmann et al. sont représentés sur la Figure 2.8 (b). Sur le graphe de gauche, le départ de l'instabilité est matérialisé par la coalescence des deux fréquences du système pour un coefficient de frottement d'environ 0.5. D'autre part, ce couplage s'accompagne de l'apparition d'une partie réelle positive significative de l'apparition de vibrations d'amplitudes croissantes : c'est le critère de stabilité associé aux modes complexes que nous détaillons dans la section suivante. L'interprétation de ces résultats est la suivante : lorsque le coefficient de frottement est inférieur à 0.5, toute perturbation de l'équilibre glissant donne naissance à des vibrations évanescences, lorsque le coefficient de frottement est supérieur à 0.5, toute perturbation génère des vibrations qui s'amplifient exponentiellement.

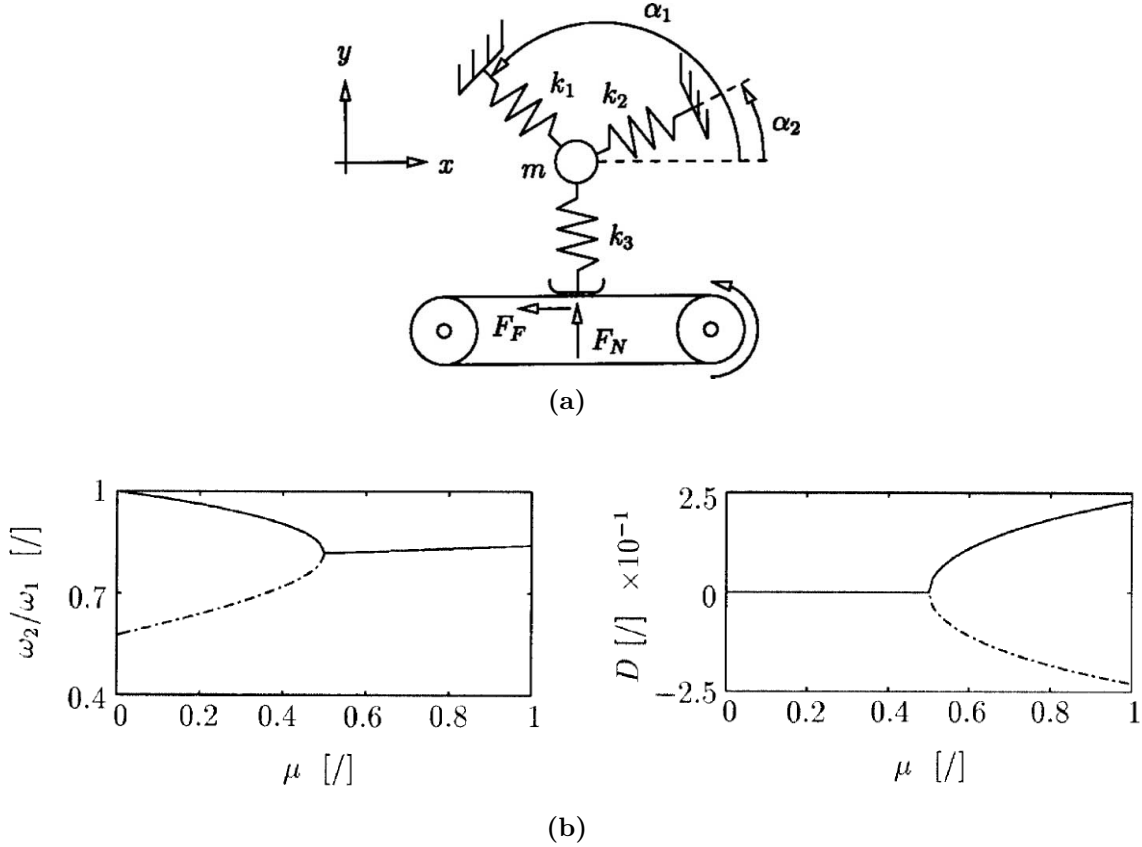


Figure 2.8 – Modèle à 2 ddls de Hoffmann et al. [71].

Remarque : le modèle de Hoffmann et al. est purement linéaire et ceci explique le fait que les amplitudes augmentent exponentiellement. Dans la réalité, et nous le verrons dans la suite, les effets non linéaires permettent de conserver des vibrations d'amplitude finie.

2.2 Analyse non linéaire de stabilité

Nous abordons à présent l'analyse de stabilité d'un système dynamique autonome et non linéaire. Ce type de système dynamique peut présenter des solutions d'équilibre instable qui provoquent l'apparition de vibrations non linéaires et auto-entretenues. C'est pourquoi la prédiction des occurrences de crissement s'effectue par une analyse de stabilité ayant pour objectif de calculer les équilibres en fonction d'un ou plusieurs paramètres et d'évaluer si ces positions sont stables ou non. Dans cette partie, on cherche à définir la stabilité d'une solution d'équilibre associée à une équation différentielle. On se concentre sur la stabilité au sens de Lyapunov qui est adaptée aux systèmes autonomes et non linéaires.

2.2.1 Notions de stabilité des points fixes au sens de Lyapunov

Soit l'Équation Différentielle Ordinaire (EDO) autonome et non linéaire du premier ordre :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

où $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application associée à l'équation différentielle étudiée. On se concentrera uniquement sur les EDO du premier ordre car toute EDO d'ordre supérieur peut se ramener à une EDO du premier ordre par un changement de variable

adéquat (i.e. en introduisant une variable d'état). L'équation (2.17) admet des solutions qui peuvent être de différentes natures : les solutions périodiques, quasi-périodiques, chaotiques ou encore les solutions de type point fixe. Dans cette étude, on ne s'intéressera qu'aux solutions de type point fixe. En effet, ces dernières sont associées aux solutions statiques, quasi-statiques ou stationnaires ce qui correspond aux configurations d'équilibre glissant recherchées. Les solutions de type point fixe, ou équilibre, sont définies de la façon suivante.

Définition 1 (Solution de type point fixe). $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ est un point fixe de l'équation $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si et seulement si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$

On définit alors la stabilité d'un point fixe de l'équation (2.17) de la façon suivante.

Définition 2 (Stabilité d'un point fixe au sens de Lyapunov). Soit $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ un point fixe de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. $\mathbf{x}_e$ est stable si et seulement si on a : $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0$ tel que $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \alpha \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \epsilon$.

Pour une configuration stable, si la condition initiale se trouve dans un voisinage de l'équilibre alors la solution temporelle restera également dans un voisinage de l'équilibre. On définit également la notion de stabilité asymptotique qui nous sera utile par la suite.

Définition 3 (Stabilité asymptotique). $\mathbf{x}_e$ est asymptotiquement stable si et seulement si on a : $\exists p > 0$ tel que $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0$ tel que $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \alpha \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \epsilon e^{-pt}$.

La notion de stabilité asymptotique est plus forte que la stabilité puisque que si la condition initiale est dans un voisinage d'un équilibre asymptotiquement stable, alors la solution temporelle atteint exactement l'équilibre en un temps très court du fait de l'exponentielle décroissante. Cette notion est très importante pour l'application du théorème de Lyapunov qui est utilisé en pratique pour statuer de la stabilité d'un équilibre.

Définition 4 (Point fixe instable). $\mathbf{x}_e$ est instable si et seulement si $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = +\infty$

Théorème 1 (de Lyapunov). Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{f}$ localement lipschitzienne au point fixe $\mathbf{x}_e$. On a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$. On définit alors la matrice $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{f}_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x}_e)$ qui correspond au jacobien de l'application $\mathbf{f}$. Si toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont à parties réelles négatives alors $\mathbf{x}_e$ est asymptotiquement stable. Si au moins une des valeurs propres est à partie réelle positive alors l'équilibre est instable. De plus, si l'équilibre est jugé asymptotiquement stable pour les équations linéarisées, alors il en est de même pour les équations non linéaires.

On comprend alors tout l'intérêt de ce théorème qui nous permet d'évaluer la stabilité d'un équilibre associé à une EDO non linéaire. Cependant, le parallèle entre la stabilité des systèmes linéaire et non linéaire n'est valable que pour les équilibres asymptotiquement stables.

L'application pratique de ce théorème consiste à linéariser le système en introduisant une perturbation infinitésimale $\delta\mathbf{x}$ autour de l'équilibre $\mathbf{x}_e$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}$. Le système linéarisé s'obtient alors par un développement de Taylor au premier ordre :

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} \quad (2.18)$$

Le système obtenu après la phase de linéarisation est une EDO linéaire du premier ordre dont la solution passant par la condition initiale $\mathbf{x}_0$ est classiquement donnée par :

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{x}_0 \Phi e^{\boldsymbol{\lambda}t} \Phi^{-1} \quad (2.19)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres et Φ la matrice des vecteurs propres associés à la matrice $\mathbf{A}$. Il faut cependant remarquer que l'exponentielle de matrice est valable uniquement pour les matrices diagonalisables. Dans le cas général, on a $\lambda_k = b_k + i\omega_k$ avec b_k, ω_k deux réels et $i^2 = -1$ et ces valeurs propres vont permettre d'évaluer la stabilité de l'équilibre :

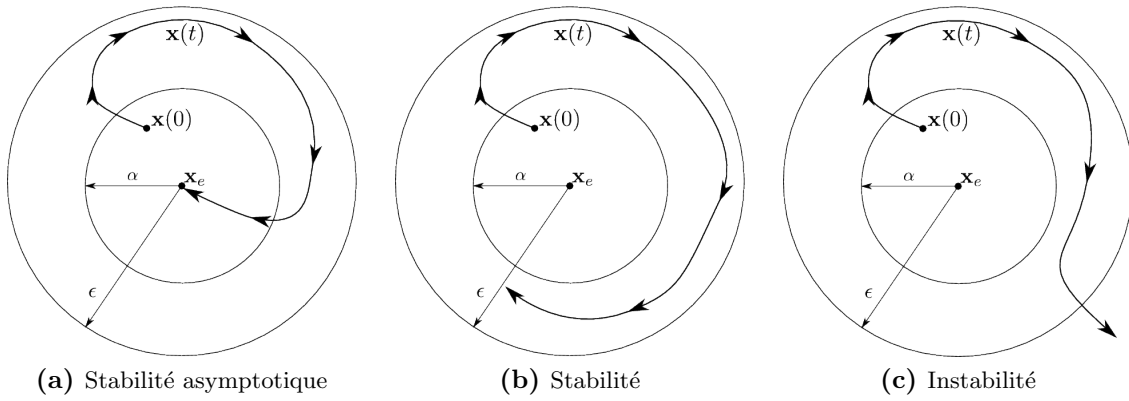


Figure 2.9 – Illustration de la stabilité dans l'espace des phases.

- si toutes les valeurs propres sont à parties réelles négatives alors $e^{\lambda t} = \sum e^{b_k t} e^{i\omega_k t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}\| = 0$ ce qui signifie que la perturbation ne s'amplifie pas et le système rejoint exactement la position d'équilibre. On peut donc conclure que l'équilibre est asymptotiquement stable et cette configuration est qualifiée de puits.
- si au moins une des valeurs propres possède une partie réelle positive, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}\| = +\infty$: la perturbation s'amplifie selon une exponentielle divergente. La position d'équilibre est qualifiée d'instable et est appelée point source.
- si les valeurs propres sont uniquement à parties réelles négatives ou nulles alors on ne peut conclure sur la stabilité et l'équilibre est qualifié de neutre ou marginalement stable.

La partie imaginaire ω_k correspond à la pulsation associée au mode k et la partie réelle b_k donne une mesure de taux de croissance de l'amplitude des oscillations. Ce taux de divergence est défini comme le rapport de la partie réelle et de la fréquence associées à une même valeur propre. D'autre part, l'analyse de stabilité peut être conduite en fonction d'un ou plusieurs paramètres de contrôle et la transition d'un état stable vers un état instable est appelée bifurcation de Hopf. Les paramètres de contrôle associés à cette bifurcation sont appelés paramètres critiques. Une illustration schématisant les différents résultats de stabilité envisagés dans l'espace des phases est proposée sur la Figure 2.9. Il faut cependant remarquer que les puits et les sources sont des points fixes hyperboliques correspondant au fait que la matrice $\mathbf{A}$ ne possède pas de valeurs propres à parties réelles uniquement négatives ou nulles. Dans ce cas, l'application du théorème de Hartman-Grobman [76] garantit qu'un développement de Taylor du premier ordre de l'équation (2.17) au voisinage du point fixe permet d'étendre les résultats de stabilité du système linéaire au système non linéaire. Autrement dit, le système linéarisé se comporte de la même manière que le système initial au voisinage d'un équilibre hyperbolique.

La stabilité des points d'équilibre non hyperboliques tels que les points neutres est plus compliquée à estimer. Pour cela, il faut effectuer un développement d'ordre supérieur à 1 de l'équation (2.17) au voisinage du point d'équilibre [77]. L'analyse de stabilité permet d'analyser l'évolution des valeurs propres en fonction d'un ou plusieurs paramètres et de déterminer les frontières séparant les domaines stables et instables. Ainsi, seuls les points fixes hyperboliques ont un intérêt dans l'étude de stabilité des systèmes mécaniques. Dans la majorité des cas concernant les systèmes dynamiques mécaniques, les points fixes non hyperboliques correspondent à la transition entre le domaine stable et instable et ces équilibres ne présentent que peu d'intérêt. Dans cette étude, la stabilité des points fixes non hyperboliques ne sera pas abordée.

2.2.2 Bifurcation de Hopf

La notion de stabilité de Lyapunov permet d'évaluer la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle. Comme expliqué précédemment, l'intérêt de ce type d'analyse est d'identifier des domaines de stabilité et d'instabilité. Pour cela, des analyses de stabilité sont effectuées en faisant varier un ou plusieurs paramètres et le changement de nature d'une solution est qualifié de bifurcation.

Pour introduire cette notion de bifurcation, nous introduisons l'équation différentielle (2.20) dont le paramètre de contrôle est le scalaire μ .

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (2.20)$$

avec $\mathbf{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Lorsque le paramètre μ varie, la stabilité des solutions de type point fixe peut changer. Une bifurcation au point fixe $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$ est définie par le théorème de Hopf suivant.

Théorème 2 (de Hopf). *Soit le système différentiel de la forme (2.20). Nous sommes en présence d'une bifurcation de Hopf au point $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $\mathbf{f}(\mathbf{x}_c, \mu_c) = \mathbf{0}$
- le jacobien de $\mathbf{f}$ admet une paire de valeurs propres imaginaires pures $\lambda = \pm i\omega$, tandis que toutes les autres ont une partie réelle non nulle
- $\left. \frac{d\Re(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_c} \neq 0$

La première condition stipule que le point en question est un point d'équilibre pour l'équation différentielle. La seconde permet, entre autres, de s'assurer que le point $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$ est hyperbolique. La troisième permet de s'assurer que les parties réelles évoluent avec μ : c'est la condition de transversalité de l'axe des réels. La bifurcation de Hopf nécessite le calcul de tous les équilibres associés à chaque valeur du paramètre de contrôle : on parle de courbe d'équilibre. Le point de bifurcation correspond à une valeur propre complexe dont la partie réelle traverse l'axe des réels avec une vitesse non nulle. Lorsque le paramètre de contrôle se situe après la bifurcation, alors il y a perte de stabilité hyperbolique. Dans ce cas, la moindre perturbation de l'équilibre génère des vibrations qui s'amplifient exponentiellement et qui peuvent donner naissance à une orbite périodique.

Remarque : en général, les paramètres de contrôle sont le coefficient de frottement, les paramètres d'amortissement ou encore les caractéristiques géométriques et matériaux.

2.2.3 Stabilité des orbites périodiques

Lorsqu'un point fixe est qualifié d'instable, toute perturbation l'écarte de cet équilibre. Dans l'espace des phases, le système dynamique évolue alors selon une trajectoire qui s'écarte du point singulier. Nous avons vu précédemment que la vitesse de divergence dépend de la partie réelle des valeurs propres du système linéarisé. Cependant, sous l'effet des non-linéarités, il est possible d'observer une fermeture de la trajectoire. Par définition, un cycle limite est une trajectoire fermée dans l'espace des phases.

Si la trajectoire du système dynamique commence suffisamment proche d'un cycle limite alors trois comportements peuvent être observés. Si la trajectoire rejoint le cycle limite, ce dernier est qualifié de stable. Si la trajectoire s'en écarte, le cycle est instable. Il existe également un comportement semi-stable pour lequel la trajectoire du système rejoint le cycle limite puis s'en écarte. La théorie de Floquet permet de formaliser mathématiquement cette notion de stabilité des cycles limites périodiques [78] avec notamment l'étude de la section

de Poincaré que ne détaillons pas ici .

Remarque : il existe d’autres méthodes permettant d’analyser la stabilité que nous ne présentons pas ici. La détermination des valeurs propres complexes s’effectue par le calcul des racines du polynôme caractéristique. Pour les systèmes de taille raisonnable, ce polynôme peut s’écrire analytiquement et le critère de Routh-Hurwitz [79] permet d’estimer la stabilité d’un équilibre en étudiant uniquement le signe des coefficients du polynôme. D’autre part, il est également possible de déterminer les domaines dans lesquels les résultats de stabilité sont valables. C’est-à-dire l’ensemble des conditions initiales qui mènent à la même réponse dynamique stationnaire : c’est la notion de bassin attracteur. La détermination des bassins attracteurs s’effectue par l’introduction des fonctions de Lyapunov.

2.3 Méthodes numériques du calcul des vibrations et du rayonnement acoustique induits par le frottement

2.3.1 Modélisation des systèmes de freins

Les modèles minimaux présentés dans la section précédente ont fait l’objet d’un très grand nombre d’études numériques. De nombreux travaux se concentrent sur des assemblages plus ou moins complexes de systèmes masse ressort pour modéliser des freins à disque simplifiés. Cependant, devant la complexité des systèmes de freins, ces modèles sont insuffisants pour décrire toute la richesse physique du crissement. Par exemple, les aspects liés à la dynamique multi-corps des freins à disque sont en général assez mal décrits par les systèmes minimaux. D’autre part, les phénomènes complexes induits par le contact frottant qui sont fortement non linéaires et intimement liés ne peuvent être considérés intégralement par ces modèles. Toutefois, il existe des méthodes ayant un niveau de description bien supérieur à celui offert par les modèles minimaux. On peut citer par exemple des méthodes analytiques et semi-analytiques ainsi que la méthode des éléments finis.

Modèle analytique

Les freins à disque sont des structures continues avec un grand nombre de composants ayant des géométries plus ou moins complexes. Cependant, le disque possède une géométrie “relativement” régulière et peut ainsi être modélisé par une plaque annulaire. En 1994, Chan et al. [82] proposent l’étude d’un système de frein composé d’un disque et d’une garniture en utilisant la théorie des plaques minces. Ainsi, les auteurs sont capables d’écrire le déplacement transverse comme la somme des modes de vibrations calculés analytiquement. Cette approche a également été adoptée par d’autres auteurs tels que Mottershead et al. [83], Ouyang et al. [84]. On peut également citer les travaux de Kang et al. [80] dont le modèle semi-analytique de plaque épaisse est illustré sur la Figure 2.10. On remarque également que l’interface de contact est modélisée par des ressorts suivant une loi de contact non linéaire régularisée.

D’autres études se sont attachées à modéliser à la fois le disque et les garnitures comme des plaques minces ou épaisses. C’est le cas de Chowdary et al. [85] qui proposent de modéliser séparément le disque et les garnitures par des plaques minces et de calculer leurs caractéristiques modales. Ensuite, les deux sous-structures sont connectées à l’interface de contact et les équations du mouvement sont écrites analytiquement. Le même concept est repris par Chakraborty et al. [86] qui effectuent la connexion à l’interface par des ressorts non linéaires et introduisent des forces suiveuses pour tenir compte du frottement.

Cependant, la prise en compte des modes plans du disque semble être essentielle pour la génération de vibrations de crissement. En 1998, Tzou et al. [87] montrent que les ré-

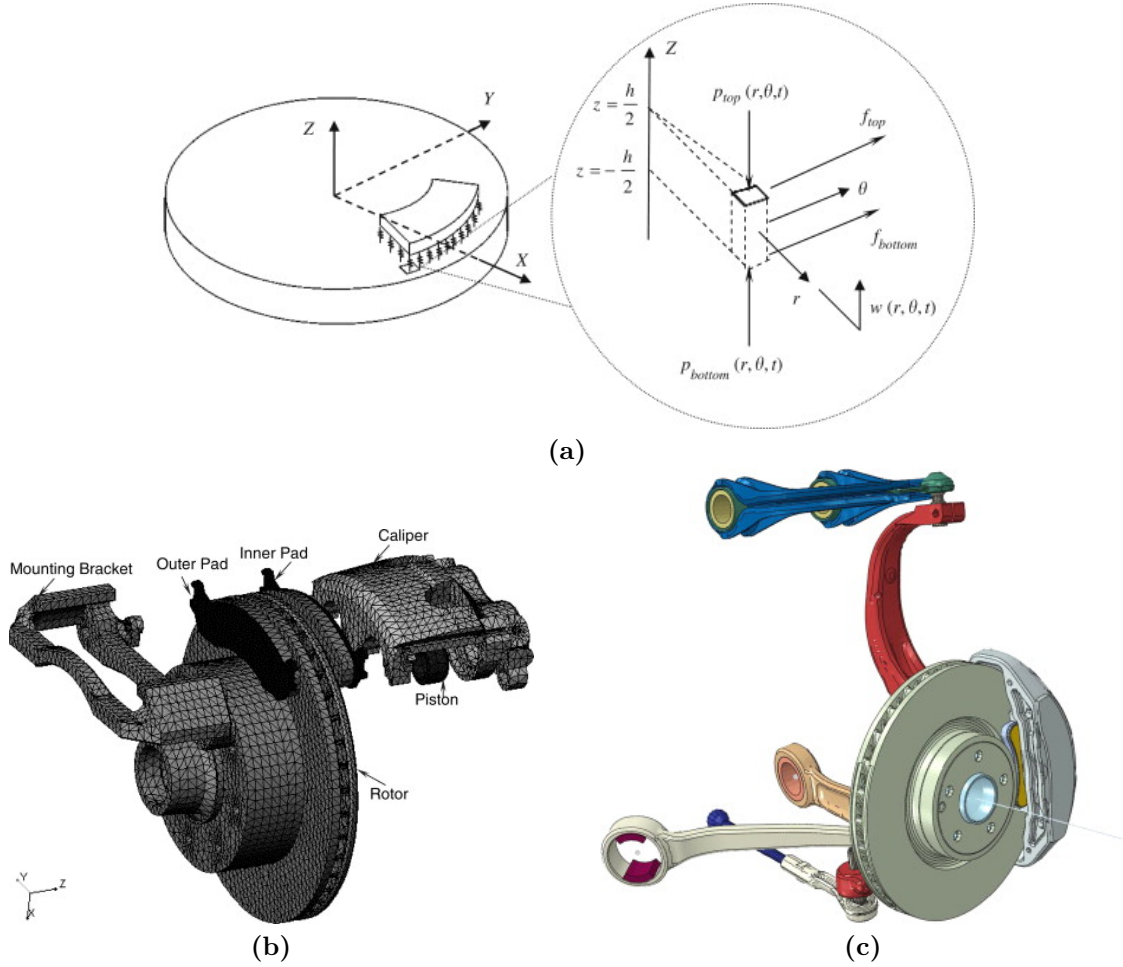


Figure 2.10 – Modélisation des systèmes de freins à disque. (a) Modèle analytique de plaque épaisse de Kang et al. [80], (b) modèle éléments finis de Dai et al. [81] et (c) modèle de Tison et al. [15].

sonances associées à certains modes plans peuvent engendrer des résonances hors plan du fait des couplages et ceci contribue aux mécanismes du crissement. De ce fait, les modèles de plaques à deux dimensions sont insuffisants et des modélisations tridimensionnelles sont alors envisagées.

Modèle éléments finis

Le développement et l'expansion de la méthode des éléments finis a contribué à d'importantes avancées scientifiques dans de nombreux domaines. L'intérêt de cette méthode pour la modélisation du crissement réside dans la capacité à modéliser des géométries complexes et tridimensionnelles et de pouvoir introduire l'ensemble des phénomènes physiques que l'on souhaite prendre en compte. En 1989, Liles [88] fait partie des premiers auteurs à proposer une analyse par éléments finis d'un système de frein. Les composants sont modélisés séparément, le contact frottant est introduit par le biais d'une matrice de raideurs. L'application de la méthode des éléments finis permet d'écrire les équations d'équilibre dynamique à l'aide des matrices de masse, de raideur et d'amortissement. Ainsi, l'analyse de stabilité est effectuée par une analyse des valeurs propres complexes du système linéarisé autour des équilibres glissants. À partir des années 1990, les études numériques du crissement se sont multipliées et on note différents niveaux de modélisation allant des système disque-garniture jusqu'au bras de suspension complet comme illustré sur les Figures 2.10 (b) et (c).

D'autre part, la prise en compte du contact et du frottement dans les modèles éléments finis est un point important de la modélisation. Il existe différentes méthodes de gestion numérique du contact. Les plus simples sont associées aux lois de contact régularisées. L'idée est de générer des maillages coïncidents à l'interface et d'introduire des ressorts entre les nœuds en vis-à-vis. Cette approche est très simple à implémenter et permet de reproduire les instabilités de crissement. Les ressorts sont activés lorsqu'il y a interpénétration et désactivés lors du décollement. Toutefois, nous avons vu précédemment que les raideurs de contact doivent être identifiées expérimentalement. Il est également possible d'utiliser une loi de contact unilatéral. Cependant, les statuts de contact doivent être déterminés à chaque pas de temps ce qui augmente les temps de calcul. Le principe est d'ajuster les raideurs des éléments de contact pour interdire l'interpénétration.

En ce qui concerne le frottement, différentes approches sont également envisageables. En 2005, Ouyang et al. [89] proposent une liste très complète de ces méthodes. Les auteurs mentionnent les forces suiveuses, les couples de friction, le frottement décroissant avec la vitesse de glissement ainsi que le couplage géométrique. Une revue détaillée de la modélisation numérique du contact frottant dans les problèmes dynamiques est proposée par Ibrahim [54]. Du point de vue numérique, des matrices de frottement agissant sur le déplacement ou la vitesse sont introduites dans les équations du mouvement.

Méthodes de réduction des modèles éléments finis

L'une des difficultés de l'utilisation de la méthode des éléments finis concerne la taille des matrices. En effet, la modélisation des systèmes de frein nécessite des maillages contenant un grand nombre de degrés de liberté. La description de l'ensemble des composants ainsi que la modélisation fine des interfaces rendent les simulations numériques très coûteuses (i.e. analyse aux valeurs complexes ou intégration temporelle). La gestion des non-linéarités peut nécessiter l'emploi d'algorithmes itératifs qui augmentent d'autant plus les temps de calcul. Cependant, il existe différentes méthodes permettant de réduire la taille des systèmes tout en gérant les non-linéarités. L'objectif général de ces méthodes est la détermination d'une base sur laquelle le problème dynamique (2.1) est projeté. L'objectif est de construire un modèle réduit et représentatif du modèle complet. Nous donnons ici un aperçu de quelques méthodes classiques.

Méthode de Ritz La méthode de réduction la plus intuitive est sans doute la méthode de Ritz. La solution du problème dynamique (2.1) est recherchée dans un espace vectoriel construit sur une base de fonctions fixées a priori. Le nombre de fonctions de base est directement égal à la dimension du système réduit. La pertinence du modèle réduit est conditionnée par le choix des fonctions de base. La méthode de Ritz s'avère être efficace pour les problèmes linéaires pour lesquels le choix de ces fonctions est relativement simple.

Projection en base modale La méthode de projection en base modale est également une méthode de base en dynamique des structures. C'est une méthode de Ritz où les fonctions de base sont les modes propres de la structure. Les champs solutions sont alors recherchés sous la forme d'une somme pondérée des modes propres. La réduction de la taille du système s'effectue par troncature de cette dernière. De la même manière que la méthode de Ritz, la base modale ne permet que de décrire les problèmes linéaires et le calcul des modes propres peut s'avérer coûteux.

Toutefois, il existe des méthodes de réduction plus sophistiquées permettant de gérer des non-linéarités. C'est notamment le cas de la méthode de Craig et Bampton que nous

décrivons ici.

Réduction de Craig et Bampton à interfaces fixes En 1968, Craig et Bampton développent une méthode de réduction [90] qui s'appuie sur une méthode de Ritz permettant de gérer différentes sous-structures liées par des interfaces. Pour une sous-structure, l'idée principale est de construire une base composée de deux familles de modes. La première concerne des modes propres calculés en maintenant les interfaces fixes. La seconde est associée à des modes statiques de liaison qui sont les déformées statiques du système lorsque les degrés de liberté de l'interface sont soumis à un déplacement unitaire. Le vecteur des degrés de libertés physiques $\mathbf{q}_I$ peut être partitionné en coordonnées modales $\boldsymbol{\eta}_g$ et en coordonnées relatives aux modes statiques de liaison $\mathbf{q}_B$:

$$\mathbf{q}_I = \boldsymbol{\Phi}_{IB}\mathbf{q}_B + \boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\eta}_g \quad (2.21)$$

où $\boldsymbol{\Phi}_{IB}$ et $\boldsymbol{\Phi}_N$ sont les matrices des modes statiques de liaison et à interfaces fixes respectivement. Ces dernières s'obtiennent de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Phi}_{IB} = -\mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{K}_{IB} \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_N \quad \text{correspond aux } N \text{ premiers vecteurs propres calculés avec } \mathbf{q}_B = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

où $\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité de la sous-structure considérée qui s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IB} \\ \mathbf{K}_{BI} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Les coordonnées du modèle complet s'écrivent alors de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_{IB} & \boldsymbol{\Phi}_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \boldsymbol{\eta}_g \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{CB} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \boldsymbol{\eta}_g \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

où $\mathbf{T}_{CB}$ correspond à la matrice de passage entre l'espace de départ et l'espace réduit. Les matrices du problème complet sont ensuite réduites par projection dans l'espace réduit :

$$\mathbf{K}_{\text{réduit}} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{CB} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{M}_{\text{réduit}} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{CB} \quad (2.27)$$

Pour résumer, on conserve les degrés de liberté d'interface et la réduction porte sur la troncature modale des modes à interfaces fixes. Le fait de conserver les degrés de liberté d'interface va permettre d'introduire les non-linéarités directement dans l'espace de réduction. Cette méthode est donc bien adaptée aux problèmes dynamiques comportant des non-linéarités de contact frottant. De plus, les sous-structures peuvent être réduites séparément et connectées par les interfaces dans un second temps. Cette méthode présente donc également des avantages en matière de sous-structuration. D'autre part, sa précision sur les premières fréquences propres est excellente. Toutefois, cette réduction n'a un intérêt que lorsque l'interface comporte "peu" de degrés de liberté. Si nécessaire, les méthodes de double synthèse modale permettent de réduire le nombre de degrés de liberté d'interface en effectuant une seconde passe de réduction. Le lecteur intéressé pourra se référer à [91] pour plus de détail.

Autres méthodes Les méthodes à interfaces libres sont des variantes de la méthode de Craig et Bampton. Elles se différencient par un espace de réduction composé des modes propres libres (i.e. sans conditions aux limites) et de modes statiques dits résiduels.

Il existe également des méthodes permettant de réduire un système dynamique non linéaire possédant des points d'équilibre potentiellement instables. La solution du problème

dynamique est alors recherchée sous la forme d’une combinaison de variétés centrées et de variétés stables. Cependant, ces méthodes ne sont valables qu’au voisinage d’un point de bifurcation de Hopf.

Remarque : le choix d’une méthode à interface fixe ou libre dépend en partie de la nature des liaisons aux interfaces. Lorsque les interfaces sont “souples”, les méthodes à interfaces libre seront préférées. En revanche, lorsque les interfaces sont “rigides”, la méthode de Craig et Bampton est utilisée. C’est notamment le cas des problèmes de contact. De plus, la méthode de Craig et Bampton est classiquement utilisée pour la sous-structuration et la réduction des systèmes de freins. C’est pourquoi nous nous orientons vers cette méthode pour réduire le modèle de cette étude.

Validité des modèles réduits Afin d’estimer la pertinence des modèles réduits, l’un des critères les plus utilisés est le critère de MAC (Modal Assurance Criterion). L’idée principale est de vérifier la corrélation des modes propres calculés dans les espaces complet et réduit. Soient $\mathbf{U}$ la matrice des modes propres du système complet et $\mathbf{V}$ la matrice des modes propres du système réduit exprimée dans la base de départ. Le critère de MAC est défini par :

$$\text{MAC}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{|\mathbf{U}^H \mathbf{V}|^2}{|\mathbf{U}^H \mathbf{U}| |\mathbf{V}^H \mathbf{V}|} \quad (2.28)$$

où l’exposant H désigne le produit scalaire hermitien dans le cas de vecteurs complexes. Les coefficients de la matrice de MAC correspondent au niveau de corrélation entre $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$: si deux vecteurs sont colinéaires alors le coefficient vaut 1, s’ils sont orthogonaux le coefficient est nul. En règle général, on considère que deux vecteurs sont bien corrélés lorsque le critère de MAC est supérieur à 0.8. En plus de la corrélation entre les vecteurs propres, la bande fréquentielle de validité du modèle réduit doit être estimée avec précision. Pour cela, les fréquences propres du système complet sont comparées aux fréquences du système réduit. L’erreur relative augmente avec la fréquence et la dernière fréquence sous le seuil admissible donne la bande fréquentielle valide.

2.3.2 Prédiction et calcul des vibrations de crissement

Analyse non linéaire de stabilité

Historiquement, les notions mathématiques de stabilité ont tout d’abord été appliquées sur des modèles analytiques de freins. Puis, l’expansion de la méthode des éléments finis a permis de considérablement enrichir les modèles avec, en particulier, la prise en compte des aspects tridimensionnels. En général, l’analyse de stabilité des modèles éléments finis de freins à disque s’effectue par une analyse aux valeurs propres complexes. En effet, cette méthode est bien adaptée aux systèmes de grande taille qui peuvent être réduits au préalable.

L’analyse aux valeurs propres complexes décrite dans la section 2.2 s’effectue en plusieurs étapes. Dans un premier temps, l’équilibre glissant quasi-statique (i.e. le point fixe) associé aux paramètres considérés est calculé. Puis, le système est linéarisé autour de cet équilibre et les valeurs propres complexes du système linéarisé sont calculées. Le signe des parties réelles donne alors la stabilité de l’équilibre. Toutefois, l’analyse aux valeurs propres complexes permet uniquement de prédire les instabilités possibles et fournit donc des informations incomplètes sur le comportement dynamique. En particulier, les amplitudes vibratoires et les fréquences du spectre ne sont pas accessibles. Des analyses vibratoires doivent alors être conduites en complément de l’analyse de stabilité afin de caractériser entièrement les vibrations. Dans la majorité des cas, ces deux analyses sont menées conjointement : une analyse

aux valeurs propres complexes pour détecter les paramètres associés à des équilibres potentiellement instables, puis une analyse transitoire permettant d'estimer les niveaux vibratoires. De plus, l'analyse des modes propres complexes procure des résultats locaux valables uniquement au voisinage de l'équilibre glissant du fait de la linéarisation des équations.

Comme vu précédemment, les travaux de Liles [88] font partie des premiers proposant une analyse aux valeurs propres complexes du système linéarisé pour prédire les occurrences de crissement d'un modèle discret de frein à disque. Un grand nombre d'études paramétriques ont ensuite suivi et ont permis de considérablement augmenter la compréhension de certains facteurs sur la propension à crisser. C'est le cas notamment du rôle complexe de l'amortissement avec la mise en évidence du paradoxe déstabilisant [17, 32–36]. Lorsque des modes impliqués dans une coalescence sont amortis de manière non équitable, la propension à crisser augmente. En d'autres termes, mal maîtrisé, un ajout d'amortissement peut provoquer l'apparition d'une bifurcation de Hopf pour un paramètre de contrôle plus faible que sans amortissement. D'autre part, lorsque ces modes sont iso-amortis, les parties réelles sont diminuées ce qui stabilise le système en décalant la bifurcation de Hopf vers la droite.

D'autres facteurs ont fait l'objet d'études paramétriques comme les raideurs de contact dans le cas des lois de contact régularisées, le coefficient de frottement, les caractéristiques matériaux ou encore les paramètres géométriques.

Calcul des vibrations

Solutions stationnaires Lorsqu'un cycle limite est atteint, la réponse dynamique est périodique ou quasi-périodique. Il existe des techniques permettant de calculer directement les solutions stationnaires périodiques de l'équation (2.17). L'idée principale est de décomposer la solution dynamique sur une base de fonctions trigonométriques périodiques et de projeter l'équation (2.17) sur cette base. Cependant, en supposant que la solution est périodique ou quasi-périodique, la trajectoire permettant d'atteindre le cycle n'est pas accessible (i.e. le régime transitoire menant au régime stationnaire). Cette méthode dite d'équilibrage harmonique (Harmonic Balance Method HBM) est performante lorsque la solution stationnaire est recherchée et que les fréquences des oscillations sont connues. La HBM, sous sa forme initiale, est capable de ne calculer que la solution triviale d'équilibre glissant quasi-statique (solution exacte) et non la solution dynamique stationnaire recherchée. Afin de contraindre la méthode à suivre la solution dynamique, une équation supplémentaire est ajoutée dans le système : la nullité des parties réelles pour la solution du problème dynamique complet. D'autre part, nous verrons dans cette étude que les fréquences du crissement ne peuvent être déterminées a priori et que ces dernières deviennent des inconnues du problème. Elles peuvent cependant être déterminées par la minimisation d'une fonction objectif particulière. En 2009, Coudeyras et al. [92] développent une méthode numérique d'équilibrage harmonique contrainte (Constrained Harmonic Balance Method CHBM) permettant de calculer les solutions dynamiques stationnaires des systèmes multi-fréquentiels et autonomes.

Schémas d'intégration temporelle Lorsque les réponses transitoire et stationnaire sont recherchées, les équations du mouvement sont discrétisées en temps et un schéma d'intégration temporelle est utilisé. Ces méthodes permettent d'obtenir une solution approchée à chaque pas de temps. On distingue classiquement les schémas implicites des schémas explicites.

Pour les méthodes implicites, on cherche à chaque pas de temps une solution en déplacement et en vitesse qui satisfont les équations du mouvement. Lorsque le problème est non linéaire, des algorithmes itératifs de type Newton sont employés à chaque pas de temps. Le temps de recherche de la solution dépend notamment des non-linéarités, de la taille du pas et

du rang de la matrice de rigidité qui doit être inversée à chaque itération. L'un des schémas implicite les plus simples est le schéma d'Euler qui s'écrit de la façon suivante :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t \dot{x}_{i+1} \quad (2.29)$$

On remarque que la solution au pas de temps i dépend des solutions au temps i et $i + 1$.

Les méthodes utilisant un schéma explicite expriment l'accélération à la fin du pas de temps en fonction des déplacements, vitesses et accélérations du début du pas de temps. Avec ces méthodes, il n'y a pas de recherche itérative d'équilibre à chaque pas de temps et la solution est obtenue par une inversion de matrice. Les méthodes explicites sont bien adaptées aux problèmes de crashes. Dans ce type de schéma, les quantités à déterminer au temps $i + 1$ ne dépendent que des solutions au temps i . Le schéma d'Euler explicite s'écrit de la façon suivante.

$$x_{i+1} = x_i + \delta t \dot{x}_i \quad (2.30)$$

Équation différentielle du premier ordre Soit l'équation du premier ordre $\dot{x} = f(t, x)$ passant par la condition initiale $x(0) = x_0$ et discrétisé en temps selon un pas δt . Pour résoudre numériquement cette équation, les schémas d'Euler peuvent être utilisés. Cependant, les schémas d'ordre supérieur sont en général préférés aux schémas du premier ordre. C'est en particulier le cas du schéma de Runge-Kutta que nous décrivons ici. Ce schéma d'ordre supérieur possède une stabilité et une précision nettement supérieures au schéma d'Euler implicite et explicite d'ordre 1. Le principe de schéma de Runge-Kutta consiste à rechercher une solution au pas de temps $i + 1$ en utilisant un schéma explicite ou implicite qui s'écrit de la façon suivante :

$$x_{i+1} = x_i + \delta t \varphi(x, t, \delta t) \text{ avec } x(0) = x_0 \quad (2.31)$$

L'expression de la fonction φ dépend de l'ordre du schéma. Pour un ordre 4 la solution au pas de temps $i + 1$ s'écrit :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\delta t}{6} (q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \text{ avec } \begin{cases} q_1 = f(t_i, x_i) \\ q_2 = f(t_i + \frac{\delta t}{2}, x_i + \frac{\delta t}{2} q_1) \\ q_3 = f(t_i + \frac{\delta t}{2}, x_i + \frac{\delta t}{2} q_2) \\ q_4 = f(t_i + \delta t, x_i + \delta t q_3) \end{cases} \quad (2.32)$$

L'utilisation de cette méthode nécessite quatre évaluations de la fonction f ce qui rend la méthode coûteuse mais précise. Son application est restreinte au système différentiel d'ordre 1 et nécessite la réécriture du système sous forme d'état. Ceci a pour effet de doubler la taille du système à résoudre.

Équation différentielle du second ordre Il existe des méthodes permettant de résoudre directement les équations du second ordre de la forme $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ passant par la condition initiale $(x_0, \dot{x}_0)$. Nous décrivons ici l'une des méthodes les plus populaires : le schéma de Newmark. Les solutions en vitesse et déplacement au temps $i + 1$ s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \delta t \dot{x}_i + \frac{\delta t^2}{2} ((1 - 2\beta)\ddot{x}_i + 2\beta\ddot{x}_{i+1}) \\ \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \delta t ((1 - 2\gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}) \end{cases} \quad (2.33)$$

où les réels β et γ correspondent aux paramètres d'intégration qui conditionnent la stabilité et la dissipation du schéma. Il existe des valeurs particulières pour le couple (β, γ) :

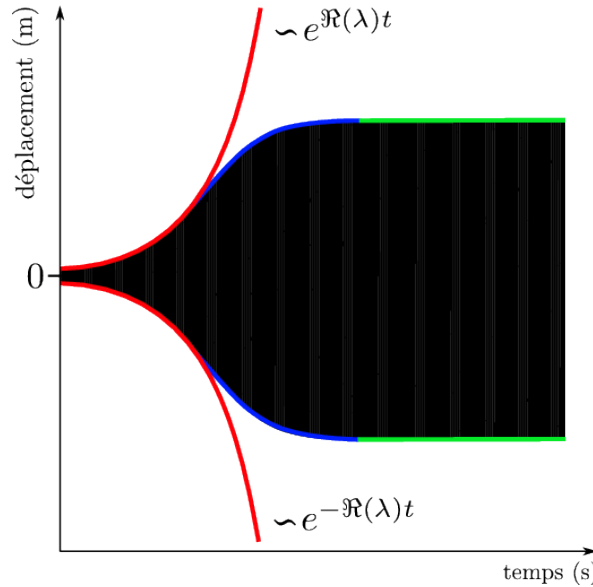


Figure 2.11 – Schématisation de la réponse vibratoire d'un événement de crissement.

- $\gamma = 1/2, \beta = 1/4$: c'est le schéma à accélération moyenne qui est inconditionnellement stable et à dissipation nulle. Il est très largement utilisé en dynamique des structures.
- $\gamma = 1/2, \beta = 0$: c'est le schéma des différences centrées qui est explicite et conditionnellement stable.

Il existe d'autres variantes avec des propriétés différentes comme le schéma de Fox et Goodwin ou encore le schéma à accélération constante.

Choix du schéma Le choix du schéma d'intégration temporelle est motivé par la stabilité et la précision recherchées. En général, il est préférable d'utiliser des schémas inconditionnellement stables permettant d'utiliser des pas de temps plus grands que les schémas conditionnellement stables. Pour ces raisons, la méthode de Newmark à accélération moyenne et le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 sont très largement utilisés en dynamique des structures. Dans notre étude, le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisé pour effectuer les différentes intégrations temporelles.

Vibrations de crissement Les principales difficultés dans l'estimation de la réponse dynamique concernent, entre autres, la gestion des non-linéarités. Dans un grand nombre d'études, le contact est géré par une loi régularisée en introduisant des ressorts non linéaires à l'interface. Cette démarche a l'avantage d'être facilement implémentée car il suffit d'utiliser l'expression bi-univoque de la loi de contact. Il existe également des algorithmes itératifs permettant d'appliquer une loi de contact unilatéral et on peut citer par exemple la méthode des statuts. Cette approche utilise un algorithme itératif qui détermine les statuts de contact à chaque pas de temps ce qui peut engendrer des coûts de calcul importants. Pour ce qui est du frottement, il suffit d'introduire la loi de frottement adéquate selon les choix de modélisation. La réponse transitoire qualitative représentative d'un événement de crissement obtenue par intégration temporelle est illustrée sur la Figure 2.11. Le schéma d'intégration choisi est initialisé sur un équilibre glissant instable sur lequel on ajoute une faible perturbation. On peut voir que le système diverge de la condition initiale lors d'un régime transitoire (i.e. la courbe rouge). La croissance des amplitudes vibratoires est exponentielle et dépend des parties réelles des modes instables. Puis, les non-linéarités agissent en saturant les ampli-

tudes (i.e. la courbe bleue) et le système rejoint un état stationnaire (i.e. courbe verte). Dans la littérature, on retrouve qualitativement ce type de réponse [93]. Dans cette étude, l'auteur étudie le comportement dynamique d'un système disque-garniture soumis à une loi de contact régularisée et un coefficient de frottement constant. L'analyse de stabilité vis-à-vis du coefficient de frottement laisse apparaître des instabilités par couplage de modes à un et deux modes instables. L'analyse transitoire est menée par intégration temporelle et les résultats pour ces deux cas sont illustrés sur les Figures 2.12 et 2.13. L'analyse fréquentielle du cas à un mode instable montre la participation de la fréquence du mode instable et d'un harmonique qui témoigne de la non-linéarité du problème (Figure 2.12 (b)). La signature non linéaire du cas à deux modes instables montre la participation des fréquences des deux modes instables, de leurs harmoniques ainsi que de leurs combinaisons linéaires (Figure 2.13 (b)). On remarque également des variations temporelles des fréquences du spectre principalement dues aux effets non linéaires.

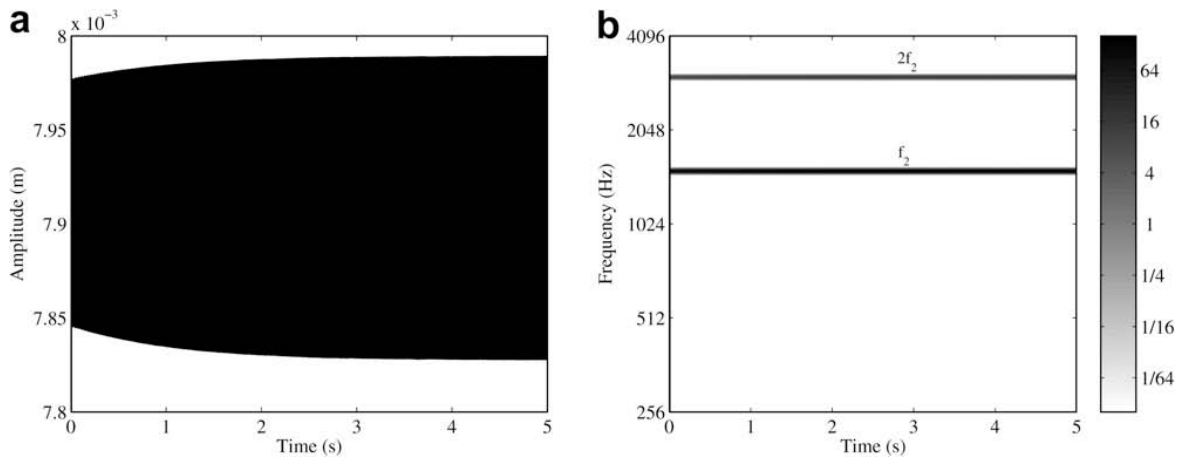


Figure 2.12 – (a) Réponse vibratoire et (b) analyse fréquentielle par ondelette d'un cas de crissement à un mode instable [93].

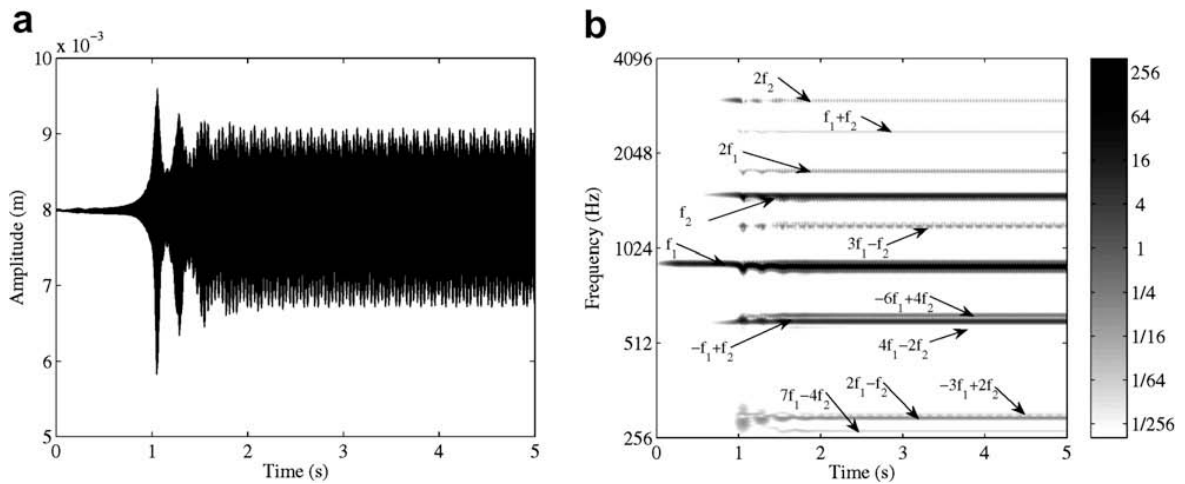


Figure 2.13 – (a) Réponse vibratoire et (b) analyse fréquentielle par ondelette d'un cas de crissement à deux modes instables [93].

2.3.3 Calcul numérique des émissions sonores de crissement

Il existe principalement deux méthodes permettant de calculer le rayonnement acoustique d'une structure dont tout ou partie de la surface est animée de vibrations : la méthode des éléments finis [94] et la méthode des éléments finis de frontière [95, 96]. Dans cette section nous présentons les différents attributs de ces méthodes.

2.3.3.1 Méthode des éléments finis pour la vibro-acoustique

Soit un solide déformable animé de vibrations et immergé dans un fluide léger. Le calcul de la pression acoustique associée est ici effectué par la méthode des éléments finis. Dans un premier temps, les domaines fluide et solide sont maillés et l'écriture des formulations variationnelles acoustique et dynamique permettent d'extraire les matrices de masse et de raideur. Ensuite, le couplage fluide/structure est effectué.

Domaine fluide Les phénomènes de propagation de pression acoustique en régime harmonique (i.e. de pulsation ω) dans un milieu fluide sont décrits par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta P + k^2 P = 0 \quad (2.34)$$

où P désigne la pression, $k = \omega/c$ est le nombre d'onde et c la célérité du son. Cette équation n'est valable que pour les fluides légers. La formulation faible associée s'obtient en multipliant l'équation (2.34) par une fonction test ψ et en intégrant par parties sur le volume de fluide :

$$\int_{\Sigma} (\nabla P \nabla \psi - k^2 P \psi) dV = \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial P}{\partial n} \psi dS, \forall \psi \quad (2.35)$$

la normale $\mathbf{n}$ est choisie unitaire et sortante au domaine fluide. Le terme de gauche est une intégrale sur le volume de fluide appelé terme de domaine tandis que le terme de droite correspond au terme de bord. Le domaine est ensuite discrétisé en éléments finis :

$$\sum_e \int_{\Sigma_e} (\nabla P \nabla \psi - k^2 P \psi) dV = \sum_e \int_{\partial \Sigma_e} \frac{\partial P}{\partial n} \psi dS \quad (2.36)$$

Ensuite, les intégrales sont évaluées à l'aide d'une intégration par points de Gauss. De plus, l'évolution de la pression et de la fonction test sont décrites à l'aide de fonctions formes. Les matrices élémentaires de masse, de raideur et d'efforts sont alors identifiées puis assemblées. Le problème (2.36) s'écrit de la façon suivante :

$$(\mathbb{K}_a - k^2 \mathbb{M}_a) \mathbf{P} = \mathbb{F}_a \quad (2.37)$$

$\mathbb{K}_a$ et $\mathbb{M}_a$ sont les matrices globales assemblées de "masse" et de "raideur" acoustiques et $\mathbb{F}_a$ est le terme de bord permettant d'appliquer les conditions aux limites ou d'effectuer un couplage avec un autre domaine.

Remarque : les termes de "raideur" et de "masse" acoustiques sont utilisés par analogie avec les matrices issues de la formulation éléments finis d'une structure déformable. Ici, ces matrices ne sont pas homogènes à une masse et à une raideur.

Conditions aux limites sur le domaine fluide Les différentes conditions aux limites possibles sont les suivantes :

1. La condition de Dirichlet permet d'imposer la pression sur le bord du domaine.

2. La condition limite de Neumann revient à imposer la gradient normal de la pression acoustique désigné par la dérivé normale $\partial P / \partial n$. De manière équivalente, on peut imposer la vitesse normale au domaine V_n à l'aide de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = j\omega\rho V_n \quad (2.38)$$

où $j^2 = -1$ et ω désigne la pulsation de l'onde acoustique.

3. Lorsque l'onde acoustique atteint le bord du domaine, elle se réfléchit et des ondes retours se propagent vers l'intérieur du domaine. La condition de non-réflexion permet d'éviter ce phénomène et son utilisation permet de gérer la propagation en milieu non borné. Les milieux semi infinis ne pouvant être entièrement maillés, il faut utiliser des méthodes particulières. On peut citer par exemple les Perfectly Match Layers (PML) [97] qui ajoutent un certain nombre de couches d'éléments ayant des propriétés d'absorption sur le bord pour éviter au maximum les réflexions. Il est également possible d'utiliser les éléments infinis permettant de prendre en compte le comportement asymptotique des ondes à l'infini. Ces méthodes de frontière absorbante permettent de capturer le champ proche alors que les éléments infinis permettent d'accéder à la fois au champ proche et au champ lointain.
4. La condition limite de Sommerfeld est une condition de non-réflexion à l'infini. Elle est utile pour modéliser la propagation en champ libre et s'impose avec les mêmes méthodes.

Domaine de la structure La structure est aussi modélisée par la méthode des éléments finis qui n'est pas détaillée ici. L'idée principale est d'écrire une formulation variationnelle à partir des équations de l'élasto-dynamique (équations (2.1) à (2.4)). Après la discrétisation du domaine, l'introduction des fonctions de formes ainsi que l'assemblage, la modélisation du domaine solide conduit au système classique suivant :

$$(\mathbb{K}_s - \omega^2 \mathbb{M}_s) \mathbf{U} = \mathbb{F}_s \quad (2.39)$$

$\mathbb{K}_s$ et $\mathbb{M}_s$ sont les matrices globales assemblées de masse et raideur, $\mathbb{F}_s$ est le terme d'excitation et $\mathbf{U}$ le vecteur des déplacements nodaux.

Couplage fluide/structure Lorsque que la structure est immergée dans le fluide, le couplage s'effectue par les termes de bord de chaque domaine. Pour cela, il suffit d'écrire les conditions de continuité à la frontière séparant les domaines. Les conditions de continuité des contraintes et des vitesses normales à l'interface s'écrivent :

$$\sigma(\mathbf{U})\mathbf{n}_s = -P\mathbf{n}_s \quad (2.40)$$

$$-j\omega\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = V_n \quad (2.41)$$

où σ est le champ de contrainte solution du problème associé à la structure. Ces conditions de continuité permettent d'écrire le problème couplé suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbb{K}_a & \mathbf{0} \\ \mathbb{C} & \mathbb{K}_s \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbb{M}_a & -\mathbb{C}^T \\ \mathbf{0} & \mathbb{M}_s \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbb{F}_s \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

où la matrice $\mathbb{C}$ est associée aux termes de couplage, discrétisés, intégrés et assemblés dans le système complet.

Remarque : les matrices du problème couplé ne sont pas symétriques ce qui peut poser des problèmes numériques. Toutefois, il existe d'autres formulations permettant d'écrire un

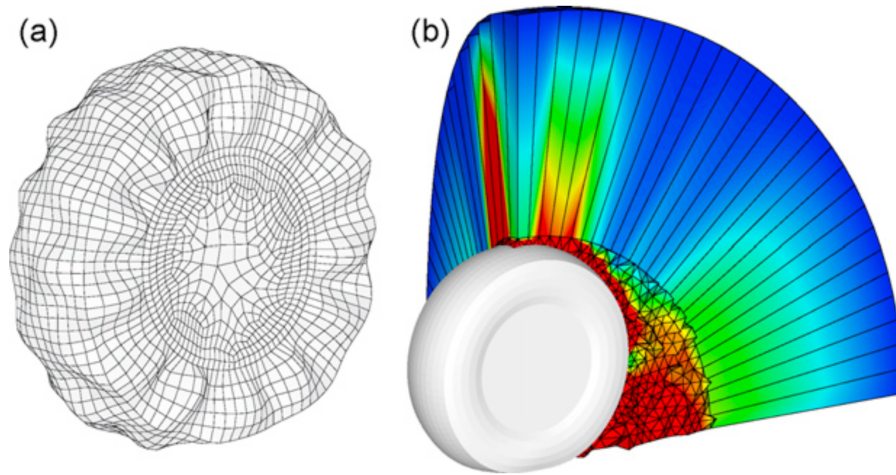


Figure 2.14 – Exemple de couplage fluide/structure la méthode des éléments finis et infinis. (a) Modèle éléments finis de pneu et (b) modèle éléments finis et infinis pour le calcul du rayonnement [99].

problème symétrique en modifiant le vecteur des degrés de liberté. Par exemple, la formulation $\{\mathbf{U}, \boldsymbol{\psi}\}^T$, où $\boldsymbol{\psi}$ désigne le potentiel des vitesses, permet d’obtenir une forme symétrique. En général, pour ce problème couplé, l’obtention de matrices symétriques s’accompagne de l’augmentation de la taille du système. Le lecteur intéressé pourra se référer au livre de Morand et Ohayon [98] pour plus de détails.

Utilités La méthode des éléments finis fait intervenir des matrices qui sont à la fois creuses et symétriques. Ceci est un avantage numérique important puisque le stockage des matrices et les opérations d’inversions sont facilités. D’autre part, la gestion des domaines multiples est facilitée par les termes de bords. Ainsi, les milieux fluides hétérogènes peuvent être modélisés séparément puis raccordés. Cependant, cette méthode se limite aux problèmes à moyenne fréquence. En effet, la taille caractéristique du maillage du domaine fluide devient rapidement très faible lorsque la fréquence augmente. À haute fréquence, le fluide doit être maillé très finement ce qui rend les coûts de calcul rédhibitoires. Pour les hautes fréquences, plusieurs méthodes que nous n’aborderons pas ici sont envisageables. C’est en particulier le cas des méthodes statistiques telle que la Statical Energy Analysis (SEA) ou encore des méthodes hybrides couplant la SEA et les éléments finis.

Exemple d’utilisation Une utilisation de ces méthodes dans un problème de rayonnement généré par une roue de voiture roulant sur une route est proposée par Brinkmeier et al. [99]. Dans cette étude, la structure est soumise à une excitation forcée et la réponse vibratoire est utilisée pour le calcul acoustique. Sur la Figure 2.14, on peut voir une illustration des résultats numériques obtenus avec des éléments finis et infinis pour le maillage du fluide. Dans ce cas, on peut voir le raccord entre les éléments finis et infinis ainsi que les conditions de non-reflexion sur les bords du domaine fluide. Ainsi, on distingue clairement les solutions en champ proche et en champ lointain. On remarque également que l’utilisation des éléments finis nécessite de connaître a priori la localisation du domaine fluide d’intérêt.

2.3.3.2 Méthode des éléments finis de frontière

Lorsque la propagation s’effectue dans un domaine fluide homogène et non borné associé à une condition de Sommerfeld, les méthodes de domaine telle que la méthode des éléments

finis ne semblent pas très appropriées. Les formulations intégrales apparaissent alors mieux adaptées. En effet, l'équation de Helmholtz (2.34) peut être reformulée sous la forme d'une intégrale de surface. Cette réduction est permise par l'utilisation du théorème de Green que nous verrons dans la suite. La formulation intégrale de la méthode des éléments finis de frontière s'écrit :

$$c(\mathbf{r}')P(\mathbf{r}') = \int_S \left(P(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial n} \right) dS \quad (2.43)$$

où $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}$ désignent un point de la surface de la structure et du point du domaine extérieur respectivement. G désigne la fonction de Green en espace libre du problème considéré et permet d'appliquer de manière exact la condition de Sommerfeld. Il existe deux types de formulation de la méthode des éléments de frontière : le type direct exploitant les variables de pression et vitesse normale et le type indirect utilisant des potentiels de simple couche ou double couche sur la surface moyenne. On observe également que le problème est surfacique contrairement au problème tridimensionnel des éléments finis.

Le calcul de la pression se décompose en deux phases : le calcul de la pression pariétale sur la surface vibrante, puis, la pression dans le domaine est calculée à partir de la pression pariétale.

Le principal intérêt des éléments de frontière est que le domaine fluide ne nécessite pas d'être maillé. Seule la surface vibrante est spatialement discrétisée. Le raccord entre la structure et le fluide s'effectue par l'application d'une condition de Neumann qui relie la vitesse normale de la structure (i.e. issue d'un calcul de vibration) à la pression acoustique pariétale.

Par analogie avec la méthode des éléments finis (i.e. discrétisation spatiale, intégration par point de Gauss et introduction de fonctions de forme) l'équation (2.43) peut être reformulée matriciellement. Cependant, les matrices générées sont pleines et parfois non-symétriques. De plus, leur construction nécessite la gestion des singularités de la fonction de Green.

Remarque : une description plus détaillée de la formulation des équations de la méthode des éléments finis de frontière est proposée au chapitre 4. Dans la section présente, nous nous contentons d'écrire l'équation de base au développement de cette méthode (équation (2.43)).

2.3.4 Émissions de crissement : résultats de la littérature

L'estimation numérique des niveaux sonores associés à des vibrations de crissement est une thématique très récente et les études disponibles dans la littérature sont peu nombreuses. En 2004, Lee et Singh [100] proposent l'une des premières étude numérique des émissions d'un système simplifié de frein à disque. Les auteurs s'appuient sur un modèle analytique de plaque épaisse pour modéliser le système de frein. Ensuite, les propriétés modales sont calculées. Ils proposent également une méthode semi analytique permettant d'estimer la pression acoustique dans un volume de fluide pour des vibrations modales forcées. Cette approche est validée par comparaison avec un calcul BEM de référence. D'autre part, ils montrent que les niveaux sonores associés à des vibrations de modes plans, hors plans et combinés du disque peuvent être du même ordre de grandeur.

En 2013, une étude beaucoup plus poussée est proposée par Oberst et al. [101]. Les auteurs effectuent l'analyse de stabilité d'un système disque-garniture puis calculent la vitesse normale pariétale associée à des vibrations modales forcées. La BEM permet de calculer la pression acoustique pariétale, la pression acoustique dans le fluide ainsi que la directivité. Les auteurs font partie des premiers à mettre en lumière l'influence de la géométrie des bords de la garniture sur la directivité du rayonnement. Sur la Figure 2.15 on peut voir une illustration du modèle éléments finis et du modèle surfacique utilisés pour les calculs acoustiques. Sur la

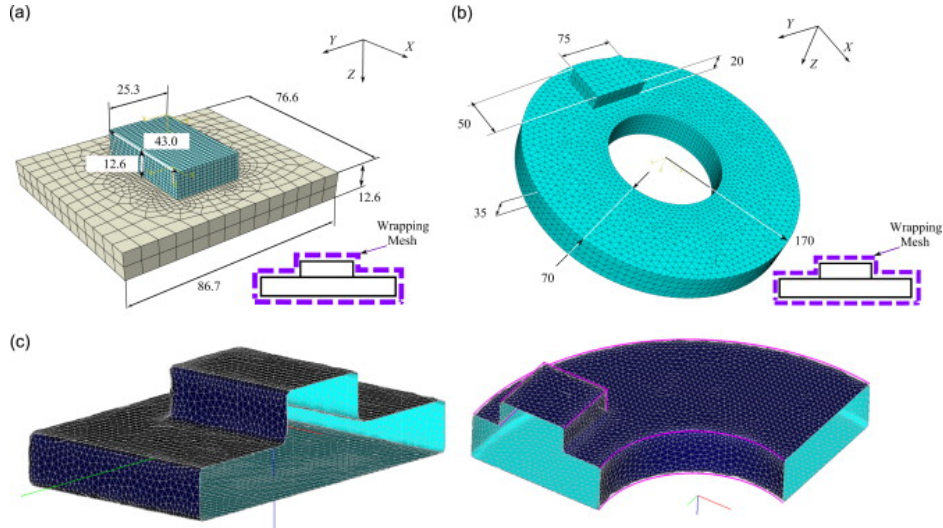


Figure 2.15 – (a) Illustration du maillage éléments finis du système plaque-garniture, (b) illustratin du modèle éléments finis disque-garniture et (c) maillage surfacique optimisée pour le calcul de la pression pariétale [101].

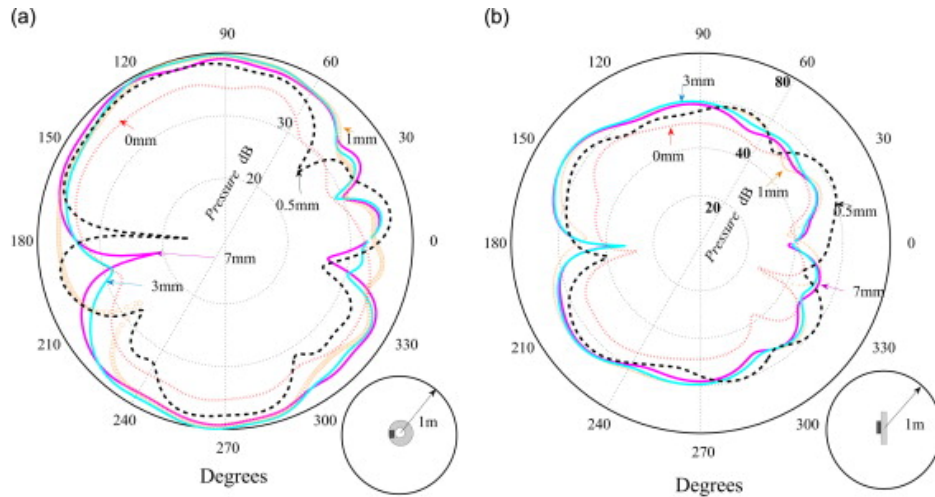


Figure 2.16 – Exemple de calcul de directivité pour différentes géométries de la garniture [101].

Figure 2.16, une illustration de l'impact de la géométrie de la garniture sur la directivité est proposée. Les auteurs recommandent l'utilisation de chanfreins pour diminuer les émissions associées à certains modes. De plus, ils montrent que le maillage surfacique de la structure doit faire l'objet d'une attention particulière : un algorithme d'optimisation doit être utilisé afin d'éviter les erreurs numériques.

Cette technique de calcul des vibrations forcées est très efficace pour déterminer la propension d'un mode donné à rayonner. Toutefois, l'application au cas de crissement reste limitée. En effet, nous avons vu précédemment que le spectre de la réponse vibratoire lors du crissement contient un très grand nombre de fréquences. L'état de l'art effectué au chapitre 1 a montré que ces fréquences sont différentes des fréquences de résonance. De plus, ces dernières ne peuvent être déterminées a priori et sont en général fortement dépendantes des non-linéarités. D'autre part, nous avons également vu que les vibrations de crissement ne sont pas forcées mais auto-entretenues. Toutes ces considérations amènent à penser que les vibrations modales forcées ne peuvent décrire toute la richesse et la complexité du rayonnement de crissement. Ceci est en partie confirmé par quelques études expérimentales, notamment

celles de Lorang [16], Sinou et al. [102] et von Wagner et al. [13] dans lesquelles les analyses fréquentielles des émissions sonores issues de mesures (essieu de TGV et freins à disque automobile) présentent plusieurs fréquences qui participent au rayonnement.

2.4 Contexte général

Dans notre étude numérique du crissement, nous souhaitons limiter les temps de calculs tout en gardant une description raisonnable. De ce fait, on s'oriente vers l'utilisation d'une loi de contact régularisée en introduisant des ressorts non linéaires à l'interface et identifiés par rapport à des essais expérimentaux. Ceci nous permet d'éviter l'emploi d'un algorithme itératif de gestion du contact qui serait beaucoup plus coûteux. D'autre part, comme expliqué au chapitre 1, on ne considère que les instabilités par couplage de modes et le coefficient de frottement est considéré comme constant.

Au vu des limitations des modèles analytiques de plaques, nous utilisons un modèle éléments finis tridimensionnel pour notre disque et la garniture. La méthode de réduction qui nous semble la plus adaptée est celle de Craig et Bampton à interfaces fixes. Cette dernière nous permet d'appliquer nos lois non linéaires de contact et de frottement directement dans l'espace réduit.

Nous souhaitons également estimer la stabilité par l'analyse aux valeurs propres complexes en appliquant la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov. Cette approche est très efficace lorsqu'elle est couplée au formalisme de la méthode des éléments finis.

D'autre part, nous nous concentrons sur le calcul des réponses transitoire et stationnaire lors de différents événements de crissement. Ainsi, les méthodes d'équilibrage harmonique sont écartées et nous nous orientons vers des algorithmes d'intégration temporelle et en particulier celui de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4).

L'un des objectifs de la thèse est de proposer une méthodologie de calcul du rayonnement acoustique issu de vibrations complexes induites par frottement. Les méthodes s'appuyant sur le calcul des vibrations modales forcées ne sont donc pas adaptées. D'autre part, la méthode des éléments finis de frontière nous semble la plus pertinente comme méthode de base pour cette étude. Ces deux points seront discutés en détail au chapitre 4.

Chapitre 3

Vibrations auto-entretenues d'un système frottant

Sommaire

3.1	Démarche globale d'analyse des vibrations de crissement	58
3.2	Modèle simplifié de frein à disque	58
3.2.1	Construction du modèle éléments finis	58
3.2.2	Modélisation de l'interface : gestion du contact frottant	61
3.2.3	Réduction du modèle par la méthode de Craig et Bampton	63
3.2.4	Équation non linéaire du mouvement	64
3.2.5	Construction de la matrice d'amortissement	64
3.3	Analyse de stabilité du système de frein	66
3.4	Calcul des vibrations non linéaires induites par frottement . . .	70
3.4.1	Liste des cas étudiés	70
3.4.2	Formulation du problème dynamique et résolution numérique	71
3.4.3	Analyses des réponses dynamiques	73
3.5	Conclusion	74

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode globale de calcul et d'analyse des vibrations auto-entretenues induites par frottement d'un système simplifié de frein à disque. Dans un premier temps, nous présentons le système de frein étudié. Le modèle en question est construit par la méthode des éléments finis et les différents choix de modélisation concernant le maillage ainsi que les aspects géométriques sont détaillés. L'un des points clés de cette étude concerne l'interface de frottement. En effet, cette partie de la structure concentre l'ensemble des phénomènes non linéaires et sa modélisation est présentée dans un second temps. Dans une troisième partie, nous abordons la question de l'analyse de stabilité permettant de détecter les occurrences de crissement. Les résultats numériques de stabilité du système de frein étudié sont également présentés et analysés. Enfin, dans une dernière partie, des analyses transitoires des vibrations non linéaires associées à des cas classiques d'instabilités par coalescence de modes sont proposées.

3.1 Démarche globale d'analyse des vibrations de crissement

Nous définissons à présent la démarche globale d'analyse des vibrations de crissement que nous allons suivre dans ce chapitre. Sur la Figure 3.1, les cadres bleus correspondent à la méthodologie classique permettant d'estimer les niveaux vibratoires transitoires et stationnaires lors du crissement. La première étape concerne la modélisation du système de frein étudié. Ensuite, nous procédons à l'analyse de stabilité qui permet de prédire les occurrences de crissement. Cette analyse s'effectue en deux étapes avec dans un premier temps le calcul de l'équilibre glissant, puis l'analyse aux valeurs propres complexes permettant d'évaluer la stabilité des équilibres. Lors de cette étape, les outils mathématiques associés à la notion de stabilité de Lyapunov, présentés dans la section 2.2, sont utilisés. Ensuite, pour les équilibres glissants instables, les réponses vibratoires sont calculées par intégration temporelle des équations du mouvement. La seconde partie de la méthode globale (cadre rouge) correspond à la démarche permettant d'estimer les niveaux sonores et sera détaillée au chapitre 4.

3.2 Modèle simplifié de frein à disque

La construction d'un modèle de frein peut s'avérer être une tâche difficile du fait de la complexité de ces systèmes. En effet, les systèmes de freins à disque réels sont des structures complexes composées d'une multitude d'organes. On pourra citer par exemple, le disque, les garnitures ou encore l'étrier qui contient les garnitures (Figure 1.1 du chapitre 1). La démarche adoptée dans cette recherche consiste à épurer le mécanisme de frein pour se concentrer sur un système "minimal" capable de reproduire les phénomènes de crissement. Les composants directement impliqués dans le crissement sont principalement le disque et les garnitures. C'est pourquoi dans notre démarche de construction d'un modèle simplifié nous ne retiendrons que le disque et une garniture. Malgré la simplicité de ce modèle, nous verrons dans la suite qu'il contient les éléments minimaux permettant de générer des événements de crissement. Le lecteur intéressé pourra se référer à [2] pour plus de détails sur les composants d'un système de frein ainsi que sur les mécanismes impliqués dans le crissement.

3.2.1 Construction du modèle éléments finis

Nous concentrons notre attention sur un système simplifié de frein à disque composé d'un disque circulaire et d'une garniture également circulaire (Figure 3.2 (a)). Les dimensions utilisées sont celles d'un système de freinage automobile dont les caractéristiques sont listées dans la Table 3.1 et illustrées sur la Figure 3.3. Les procédés de fabrication de certains composants des freins à disque peuvent être complexes, par exemple les plaquettes sont

composées d'un mélange de différents matériaux. Dans cette étude on supposera que les matériaux utilisés sont homogènes et isotropes. Au niveau des conditions aux limites, la connexion entre l'arbre et le disque est modélisée par un encastrement de la surface intérieure du disque. Au niveau de la garniture, la liaison avec l'étrier est modélisée en bloquant les translations dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ du contour de la surface supérieure de la garniture.

Notre intérêt se porte sur un modèle numérique discrétisé par la méthode des éléments finis plutôt qu'un modèle phénoménologique à faible nombre de degrés de liberté. Les approches développées dans ces travaux concernent en partie le rayonnement acoustique. Un modèle phénoménologique n'est clairement pas approprié puisque des grandeurs pariétales sont nécessaires. C'est pourquoi notre choix se porte vers un modèle éléments finis avec un

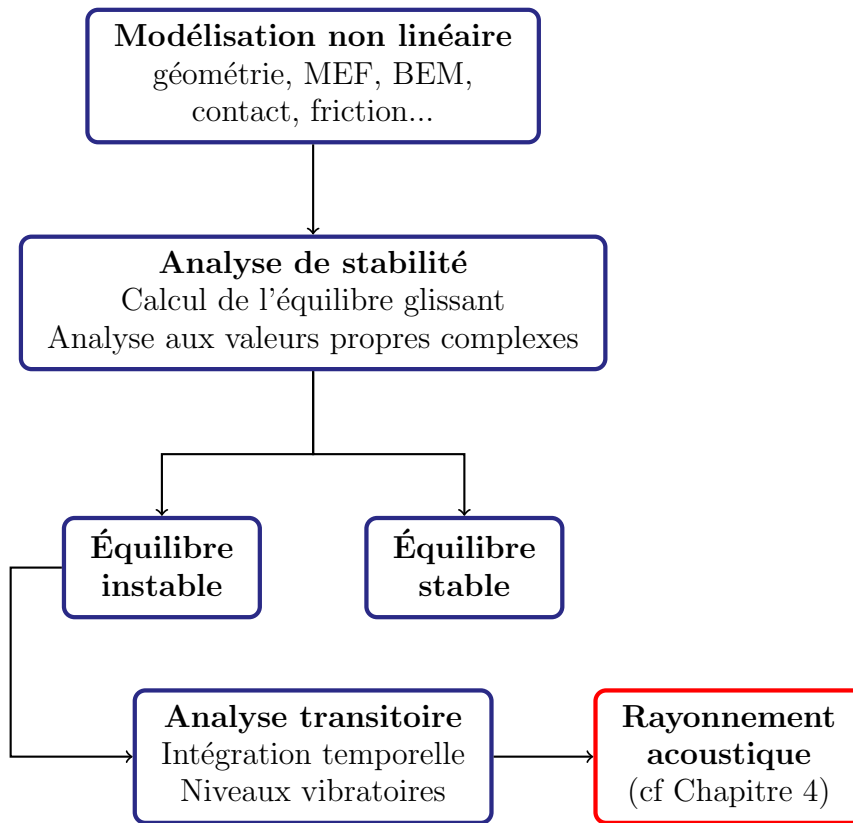


Figure 3.1 – Démarche globale d'analyse des vibrations de crissement.

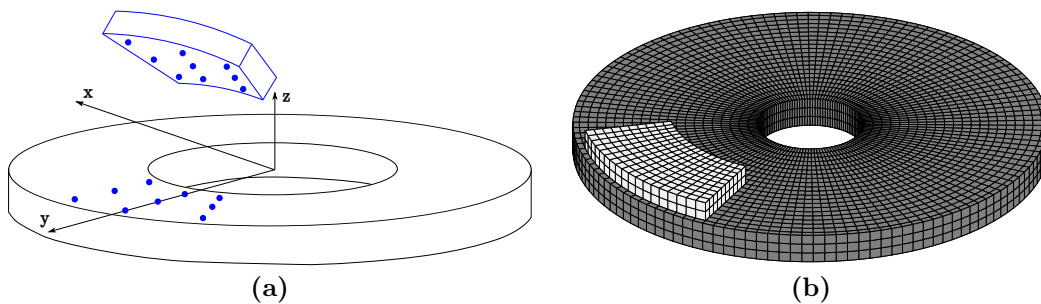


Figure 3.2 – Modélisation du système de frein. (a) Schéma du modèle géométrique simplifié, • points de contact sélectionnés et (b) modèle éléments finis.

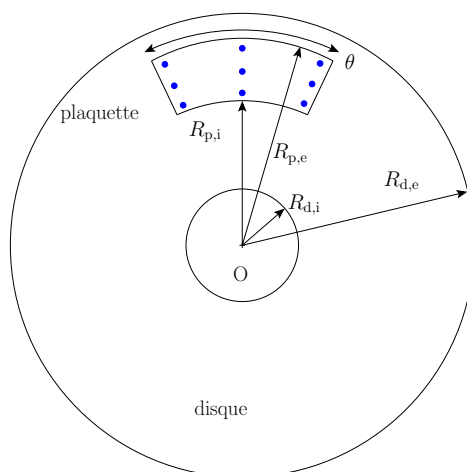


Figure 3.3 – Représentation schématique des paramètres géométriques. • Points de contact sélectionnés.

niveau de description relativement bas, mais qui est adapté à nos besoins. La description du système peut évidemment être améliorée (par exemple en considérant un système de frein complet).

Le modèle géométrique précédent est ensuite discrétisé et le maillage éléments finis se compose d'éléments hexahédriques à huit nœuds avec des fonctions de formes linéaires. La détermination de la finesse du maillage a fait l'objet d'une étude de convergence qui a montré que l'emploi d'une taille caractéristique de l'ordre de 7 mm garantit une convergence du maillage jusque 20 kHz à 5%. Cette fréquence correspond à la fréquence maximum audible et est donc suffisante pour l'étude du rayonnement acoustique. Le modèle final utilisé dans cette étude contient environ 35 000 degrés de liberté. Une illustration du modèle éléments finis est proposée sur la Figure 3.2 (b).

Afin de permettre une gestion simplifiée du contact au niveau de l'interface, les maillages des sous-structures sont construits de manière coïncidente. L'intérêt de cette méthode de construction est de pouvoir introduire directement des lois non linéaires entre les nœuds en vis-à-vis sur l'interface de frottement.

Remarque : dans cette étude, on ne tiendra pas compte des effets gyroscopiques liés à la rotation du disque ni des effets thermo-mécaniques définis au premier chapitre.

Table 3.1 – Caractéristiques matériau et géométriques du système de frein.

Caractéristiques géométriques			Disque	Garniture
Rayon intérieur	R_i	cm	3.4	9.1
Rayon extérieur	R_e	cm	15.1	14.7
Epaisseur	e	cm	1.9	1.28
Angle garniture	θ	degré	-	50
Caractéristiques matériau				
Module d'Young	E	GPa	125	2
Densité	ρ	kg.m ⁻³	7200	2500
Coefficient de Poisson	ν		0.3	0.1

3.2.2 Modélisation de l'interface : gestion du contact frottant

La modélisation de l'interface est un des points fondamentaux lors d'une étude de crissement. La réponse dynamique ainsi que la nature des instabilités induites par frottement reposent sur le niveau de description de l'interface. Nous avons vu dans l'état de l'art qu'il existe différents moyens de représenter l'interface de frottement. Il est à noter que l'on exclut ici la vision tribologique microscopique car la représentation des aspérités générerait un modèle numérique trop lourd. Dans cette étude on adoptera une vision macroscopique du contact en considérant des rugosités macroscopiques. D'autre part, il est d'usage de considérer que la surface efficace de contact entre deux structures n'est que de l'ordre de 30% de la surface de contact totale. Cela nous autorise à ne considérer qu'une partie de notre interface en ne sélectionnant que certains nœuds. Cette sélection permet également de réduire la taille du système lors de l'étape de réduction que nous aborderons dans la section suivante. En revanche, aucune tendance n'est avérée concernant la répartition spatiale des contacts actifs. Cela nous impose de choisir a priori et de façon arbitraire la position des nœuds de contact. Il est également possible de retenir l'ensemble des nœuds de l'interface mais cela augmenterait largement la taille du système. Un compromis entre performance de calcul et description de l'interface doit donc être fait. C'est pourquoi, nous sélectionnons 9 nœuds de contact uniformément répartis sur l'interface, tout en étant conscients que leurs positions et nombre jouent un rôle prépondérant sur le couplage de nos sous-structures. De plus, ce type de répartition est utilisé par Coudeyras et al. [56] et permet de générer des instabilités de couplage de modes qui nous intéressent tout particulièrement. Il est évident que ce choix est discutable. Pour autant, l'objectif de la thèse étant de proposer des stratégies de calcul et des méthodologies numériques pour estimer le rayonnement acoustique généré lors du crissement, nous faisons le choix d'une modélisation simplifiée du contact.

En ce qui concerne la question du contact, la coïncidence des maillages permet de gérer le contact nœud à nœud. L'état de l'art concernant la modélisation du contact a mis en évidence deux grandes familles de loi, à savoir les lois de contact non régulières et les lois non régulières régularisées. Dans cette étude, on utilisera une loi de contact régularisée qui tient compte des configurations de décollement sans adhésion. Le principal intérêt numérique de ce type de loi réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un algorithme itératif qui détermine les statuts de contact à chaque pas de temps lors de l'intégration temporelle. Les lois non régulières sont certes plus réalistes mais génèrent des temps de calculs pouvant être prohibitifs. D'un point de vue mathématique, la régularisation fournit une expression bi-univoque entre l'effort de contact et la pénétration et l'expression de la loi de contact obtenue devient alors différentiable. Cependant, les lois régularisées violent la condition d'impénétrabilité mais cela peut être justifié à l'échelle macroscopique par l'écrasement des aspérités au niveau microscopique. D'un point de vue expérimental, il est difficile d'identifier les paramètres de ce type de loi. Nous avons cependant à disposition des courbes force/déplacement associées à un essai de compression d'une garniture sur un disque d'un système très proche [56, 93, 103]. Ces dernières nous permettent d'identifier la forme de la loi de contact qui a l'expression et la représentation graphique suivantes :

$$F_{\text{contact},z}^d = \begin{cases} k_L \delta + k_{NL} \delta^3 & \text{si } \delta < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\delta = X_p - X_d$ représente le déplacement relatif entre le disque et la garniture, X_p et X_d correspondent aux déplacements normaux de la plaquette et du disque respectivement. k_L et k_{NL} sont les raideurs linéaire et non linéaire, $F_{\text{contact},z}^p$ et $F_{\text{contact},z}^d$ sont les composantes de l'effort normal vu par la garniture et le disque respectivement. De plus, on a trivialement la relation $F_{\text{contact},z}^p = -F_{\text{contact},z}^d$. Il faut également remarquer que l'introduction de raideurs

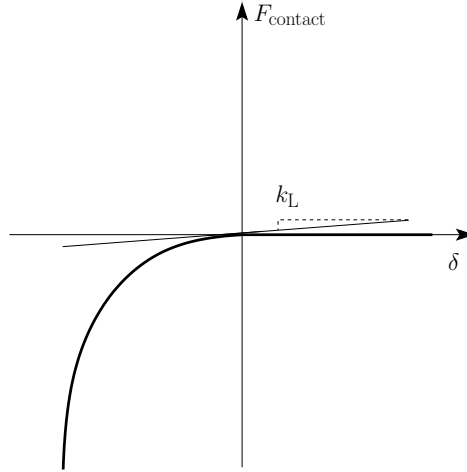


Figure 3.4 – Loi de contact régularisée.

de contact élevées permettrait de garantir une pénétration quasi-nulle : le graphe de la loi de contact tend alors vers celui de la loi de contact unilatéral (Figure 2.3). Cependant, l'inconvénient majeur de cette approche est qu'elle génère de mauvais conditionnements des matrices de raideurs ce qui pose des problèmes d'ordre numérique. Un compromis doit alors être effectué entre la pénétration autorisée et les valeurs des raideurs de contact.

En ce qui concerne la loi de frottement, nous avons vu dans le premier chapitre que la loi classique de Coulomb est largement utilisée dans la littérature. Les lois de frottement dépendantes de la vitesse de glissement sont assez répandues et représentent fidèlement la réalité mais nécessitent des campagnes expérimentales pour identifier l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement. En effet, ces paramètres dépendent des matériaux utilisés, de l'état de surface, ou encore de la température [25, 34, 35, 104]. D'autre part, ce type de loi permet de représenter plusieurs cinématiques avec notamment la description des phases d'adhérence/glisement. Comme illustré dans l'état de l'art, cette cinématique particulière correspond à un type d'instabilité bien précis appelé stick-slip [54]. Ce type d'instabilité se produit pour des “faibles” vitesses de rotation du disque lorsque le coefficient de frottement dépend fortement de la vitesse de glissement. Le crissement généré par le phénomène de stick-slip n'étant pas l'objet de cette étude, nous nous orientons vers une loi de frottement plus simple permettant d'observer uniquement des instabilités par couplage de modes. Ce type d'instabilité se produit lorsque la vitesse du disque est “élevée”, c'est-à-dire dans la phase où le coefficient de frottement ne dépend quasiment plus de la vitesse de glissement. C'est pourquoi la loi de frottement envisagée s'appuie sur un coefficient de frottement constant. Elle est donc indépendante de la valeur de la vitesse de glissement et dépend uniquement de la direction et du sens de glissement. La loi de frottement utilisée tout au long de cette étude a l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{d}} = \mu F_{\text{contact},z}^{\text{d}} \frac{\mathbf{v}_r}{\|\mathbf{v}_r\|} ; \mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{p}} = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{d}} \quad (3.2)$$

où μ désigne le coefficient de frottement et $\mathbf{v}_r$ représente la vitesse relative de glissement. $\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{d}}$ et $\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{p}}$ correspondent aux efforts de frottement vus par le disque et la plaquette respectivement. Dans cette étude, on suppose que la vitesse de rotation du disque est suffisamment élevée pour garantir un sens de glissement constant. De plus, il est important de rappeler que la formulation choisie ne tient pas compte des phases d'adhérence et on suppose un état de glissement permanent lors des phases de contact.

Pour résumer, on introduit des éléments de contact non linéaires et sans épaisseur entre chaque nœud de contact en vis-à-vis. Ces éléments sont activés lors des configurations de

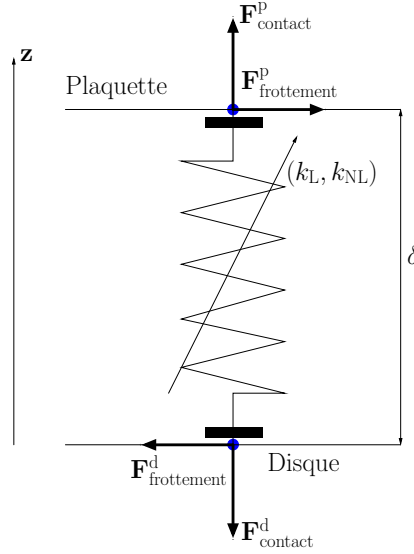


Figure 3.5 – Schéma d'un élément de contact introduit sur l'interface.

contact pour pénaliser l'interpénétration et activer les efforts de frottement, et désactivés lors des configurations décollées. Une illustration d'un élément de contact est proposée sur la Figure 3.5.

Cette formulation globale du modèle discret avec les hypothèses mises en place n'a clairement pas pour vocation de représenter finement la réalité. Cependant, cette modélisation est retenue afin d'illustrer les phénomènes de couplage de modes et d'en analyser les comportements dynamique et acoustique.

3.2.3 Réduction du modèle par la méthode de Craig et Bampton

Les méthodes de réduction de modèles sont, dans certains cas, les seules stratégies possible dans l'étude dynamique des systèmes complexes et de grande taille. Dans le cas du système de freinage étudié, nous sommes en présence d'un système comportant deux sous-structures avec un nombre élevé de degrés de liberté (environ 35 000 ddls). Afin de procéder à l'analyse dynamique, nous nous orientons vers l'utilisation d'une méthode de synthèse modale à interface fixe : la méthode de Craig et Bampton. Comme expliqué dans la section 2.3.1, cette méthode est largement utilisée du fait de sa grande précision et de son efficacité dans la représentation des modes propres des modèles éléments finis.

L'état de l'art des méthodes de réduction (section 2.3.1 du chapitre 2) a présenté les principales phases de traitement de la méthode de Craig et Bampton avec notamment le choix des degrés de liberté physiques retenus. Dans notre étude, les degrés de liberté physiques retenus sont ceux associés aux 18 nœuds d'interface sélectionnés (Figure 3.2 (a)). Un des avantages de cette méthode est que les degrés de liberté physiques sélectionnés sont conservés dans l'espace réduit. Ainsi, les lois non linéaires peuvent être employées directement dans l'espace réduit ce qui constitue un avantage majeur pour la gestion des non-linéarités.

Dans cette étude, la base de l'espace de réduction est constituée de tous les modes statiques de liaison et des 100 premiers modes propres à interface fixe. La projection dans l'espace réduit permet d'obtenir 154 degrés de liberté dont 54 non linéaires et physiques, et 100 linéaires et généralisés. Ces paramètres ont fait l'objet d'une étude de convergence vis-à-vis de l'ordre de la troncature modale afin d'obtenir la meilleure corrélation possible entre les systèmes réduit et complet jusque 20 kHz.

Afin de s'assurer de ce résultat, le critère de MAC (Modal Assurance Criterion) ainsi que

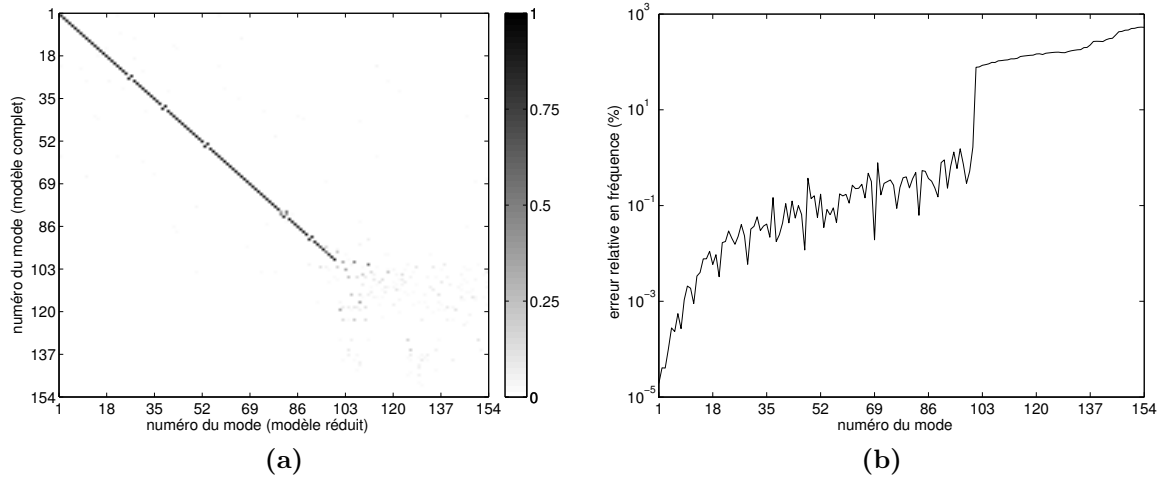


Figure 3.6 – Analyse de la validité du modèle réduit. (a) Comparaison des modes propres par le critère de MAC et (b) erreur relative des fréquences propres entre les modèles complet et réduit.

l'erreur relative en fréquence sont présentés sur les Figures 3.6 (a) et (b) respectivement. L'analyse de ces figures montre clairement qu'à partir du centième mode, les modes associés aux modèles réduit et complet sont totalement décorrélés. De même, l'erreur en fréquence dépasse largement la barre des 3% au niveau des 20 kHz.

3.2.4 Équation non linéaire du mouvement

Finalement, les équations du mouvement dans l'espace de réduction s'écrivent de la façon suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F} \quad (3.3)$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ représentent les matrices de masse, d'amortissement et de raideur. Le vecteur $\mathbf{X}$ correspond au déplacement global (i.e. les degrés de liberté physiques aux interfaces et les degrés de liberté généralisés associés aux participations modales) et le point désigne la dérivation temporelle. $\mathbf{F}_{\text{NL}}$ est le vecteur des efforts linéaires et non linéaires qui contient à la fois les efforts de contact et de frottement (équations (3.1) et (3.2)) vus par le disque et la plaquette. $\mathbf{F}$ est l'effort associé à la pression hydraulique de freinage uniformément appliquée au dos de la plaquette.

La convergence du système couplé n'a pas été évoquée et, pour établir cette convergence, il faut analyser l'évolution des fréquences propres du système couplé en diminuant la taille caractéristique du maillage. Cependant, dans notre cas, les nœuds de contact étant uniformément répartis sur le maillage de l'interface, leurs positions sont légèrement modifiées en raffinant le maillage. Les modes du système couplé étant extrêmement sensibles au contact et à la finesse de l'interface [101], la convergence n'est pas observable. Pour contourner cette difficulté, des fonctions de maillages plus performantes peuvent être développées en forçant le mailleur à passer par les points de contact préalablement définis, mais cette méthode ne sera pas développée dans cette étude. On se limite donc à observer la convergence des sous-structures pour ensuite introduire le couplage.

3.2.5 Construction de la matrice d'amortissement

L'amortissement des structures est un facteur important dans l'analyse vibratoire puisqu'il constitue dans la plupart des cas un moyen d'atténuer les amplitudes des vibrations. Il peut être vu comme un mécanisme de dissipation d'énergie dans les matériaux constitutifs

de la structure ainsi que dans les liaisons. Cette dissipation possède plusieurs origines telles que les frottements associés à des dislocations au niveau microscopique, la viscosité ou encore la plasticité. La notion d'amortissement en mécanique des structures est relativement complexe à appréhender mais il existe des modèles simples permettant de tenir compte des phénomènes microscopiques à l'échelle macroscopique. Ces modèles permettent de gérer un amortissement global de la structure qui peut parfois pallier un manque d'informations sur les composants de la structure.

D'une façon générale, l'amortissement est défini par le facteur de perte qui est déterminé expérimentalement et qui dépend de la fréquence d'excitation. On peut aisément montrer qu'il existe un coefficient d'amortissement visqueux équivalent relié au facteur de perte. L'amortissement visqueux équivalent est un modèle pertinent pour la description des phénomènes de dissipations dans les structures mais nécessite des mesures de coefficient de perte. On peut trouver des valeurs usuelles pour des matériaux courants dans la littérature.

Lorsque les informations sur les composants et les liaisons qui dissipent de l'énergie sont insuffisantes, une modélisation courante consiste à construire une matrice d'amortissement global et proportionnel à la masse et à la raideur : c'est la notion d'amortissement de Rayleigh. Ce type d'amortissement est très simple à construire et semble être raisonnablement efficace mais génère des dissipations exagérées à basses fréquences et hautes fréquences suivant les coefficients de proportionnalité utilisés.

D'autre part, il existe des cas où les mécanismes d'amortissement ainsi que les facteurs de perte sont inconnus ou difficilement accessibles. C'est le cas par exemple des structures contenant des assemblages ayant des jonctions complexes. Pour ce type de problème, on s'oriente vers la construction d'un amortissement modal. Cette matrice diagonale permet d'appliquer un taux d'amortissement spécifique sur chaque mode. Il existe des méthodes expérimentales permettant d'identifier les taux d'amortissement associés à chaque mode en s'appuyant sur l'analyse des Fonctions de Réponses en Fréquence (FRF). Il existe également un lien entre le facteur de perte et le taux d'amortissement modal.

Les phénomènes d'instabilités dynamiques induites par frottement sont sensibles à l'amortissement. Ces paramètres influent directement sur la stabilité des modes : l'amortissement peut stabiliser ou déstabiliser le système. Du fait de la méconnaissance du système étudié ainsi que pour gérer finement l'amortissement introduit sur chacun des modes, nous employons dans cette étude l'approche modale décrite plus haut. La matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ s'obtient alors à partir de la matrice diagonale $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\tilde{C}_{ij} = \begin{cases} \zeta_i = 2\xi_i\omega_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.4)$$

où ζ_i correspond au taux d'amortissement, ξ_i désigne le pourcentage d'amortissement ou amortissement modal et ω_i est la pulsation propre du mode i . La matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ correspond à l'expression de la matrice d'amortissement projetée dans la base modale. Il est possible de calculer une matrice d'amortissement par sous-structures mais dans notre étude, on considère le système global couplé. Les modes propres de la structure couplée à l'interface sont donnés par :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0) - \Omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

où $\mathbf{J}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0)$ est la matrice de couplage (incluant les contributions des efforts de contact et de frottement) et $\mathbf{X}_0$ correspond à l'équilibre quasi-statique qui est solution de l'équation (3.7) à frottement nul. Ω correspond à la matrice diagonale des pulsations propres et ϕ représente la matrice des modes propres associés. Les coefficients d'amortissement modaux définis dans l'équation (3.4) peuvent alors être introduits sur chacun des modes que l'on souhaite amortir. Enfin, la matrice d'amortissement exprimée dans la base de travail est

obtenue par changement de base selon la relation suivante :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\phi\tilde{\mathbf{C}}\phi^T\mathbf{M} \quad (3.6)$$

dans le cas où les vecteurs propres de la matrice ϕ sont normés par rapport à la matrice de masse $\mathbf{M}$. Dans notre étude, les taux d'amortissement sont gérés mode par mode et la détermination de ces paramètres sera présentée lors de l'analyse de stabilité.

3.3 Analyse de stabilité du système de frein

Nous abordons à présent l'analyse de stabilité de notre système de frein. Ce type de système dynamique peut présenter des solutions d'équilibre instable qui provoquent l'apparition de vibrations non linéaires et auto-entretenues. La prédiction des occurrences de crissement s'effectue par l'analyse de stabilité qui comporte deux étapes. La première consiste à calculer la position d'équilibre glissant, et la seconde consiste à évaluer la stabilité de cet équilibre.

La méthodologie permettant d'effectuer l'analyse de stabilité d'un système dynamique est maintenant appliquée au modèle de frein à disque étudié. L'objectif est de déterminer les zones de stabilité en fonction d'un ou plusieurs paramètres tels que l'amortissement, les caractéristiques géométriques et matériaux. On cherche alors à analyser l'évolution des valeurs propres du système tangent afin de détecter le changement de nature (stable ou instable) du point d'équilibre autour duquel le système est linéarisé.

La première étape consiste donc à calculer les solutions de type point fixe de l'équation (3.3). Ceci revient alors à résoudre le problème non linéaire quasi-statique associé dont la solution n'est autre que l'équilibre glissant noté $\mathbf{X}_0$:

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_0 - \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

La résolution de cette équation est relativement simple puisque dans notre cas l'effort non linéaire $\mathbf{F}_{\text{NL}}$ suit une loi cubique. D'un point de vue numérique, nous utilisons directement l'algorithme de Newton-Raphson qui est efficace pour déterminer une approximation des zéros d'une fonction. Pour les fonctions polynômiales, l'approximation des racines est excellente.

La seconde étape consiste alors à estimer la stabilité de cet équilibre au sens de Lyapunov. Pour cela, l'équation (3.3) est linéarisée autour de l'équilibre glissant $\mathbf{X}_0$. En introduisant l'équilibre perturbé $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}$, on obtient le système tangent suivant :

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0))\delta\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

où $\delta\mathbf{X}$ correspond à une perturbation infinitésimale de l'équilibre. La matrice $\mathbf{J}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0)$ correspond au jacobien de l'effort non linéaire $\mathbf{F}_{\text{NL}}$ évalué sur l'équilibre glissant $\mathbf{X}_0$. L'effort non linéaire étant dérivable, l'expression du jacobien est donnée par le développement de Taylor à l'ordre 1 suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) &\approx \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0) + \sum_i \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_0} \delta\mathbf{X} \\ &= \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0)\delta\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.9)$$

On obtient alors l'équation aux valeurs propres associée au système linéarisé (3.8) :

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_0)) \Phi = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

où $\mathbf{\Lambda}$ correspond à la matrice diagonale des valeurs propres et $\mathbf{\Phi}$ est la matrice des vecteurs propres. Le système linéarisé 3.10 est dissymétrique du fait de la présence des termes de frottement dans la matrice jacobienne. Cette propriété engendre des valeurs propres complexes et leur analyse permet de statuer sur la stabilité des équilibres glissants.

D'un point de vue numérique, il est plus pertinent de travailler sur le problème d'état qui est obtenu à partir des équations du mouvement (équation (3.3)) en introduisant la variable d'état $\mathbf{Y} = {}^T [\dot{\mathbf{X}} \ \mathbf{X}]$. D'une part, cette formulation permet de tenir compte de l'amortissement lors du calcul des valeurs propres. D'autre part, l'équation d'état obtenue est un système différentiel du premier ordre ce qui permettra d'utiliser des schémas d'intégrations temporelles classiques lors du calcul des vibrations. En revanche, le principal inconvénient concerne la taille du système qui est doublée. L'équation (3.3) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{E}^{-1}(\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}}_{\text{NL}}) \quad (3.11)$$

avec les matrices données par :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H} \quad (3.12)$$

ainsi que les efforts suivants :

$$\tilde{\mathbf{F}} = {}^T [\mathbf{F} \ \mathbf{0}] \text{ et } \tilde{\mathbf{F}}_{\text{NL}} = {}^T [\mathbf{F}_{\text{NL}} \ \mathbf{0}]. \quad (3.13)$$

Ensuite, le système linéaire associé à l'équation d'état (3.11) s'obtient aisément en posant $\mathbf{Y}_0 = {}^T [\mathbf{0} \ \mathbf{X}_0]$ qui n'est autre que l'équilibre glissant dans l'espace d'état. La linéarisation autour de $\mathbf{Y}_0$ s'obtient en posant $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \delta\mathbf{Y}$ et aboutit au système suivant :

$$\delta\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{Y} \quad (3.14)$$

où $\mathbf{A}$ est définie par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{E}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_{\text{NL}}(\mathbf{Y}_0) \quad (3.15)$$

où $\tilde{\mathbf{J}}$ désigne le jacobien de l'effort non linéaire exprimé dans l'espace d'état. Cette réécriture du problème permet de se ramener au formalisme du théorème 1 de Lyapunov et permet d'évaluer la stabilité en analysant les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$. Les valeurs propres complexes de $\mathbf{A}$ sont de la forme $\lambda = a + ib$, où a désigne la partie réelle et b est la pulsation. La stabilité de la configuration $\mathbf{Y}_0$ est estimée de la façon suivante : si $a < 0$ alors la position d'équilibre statique $\mathbf{Y}_0$ est stable, si $a > 0$ alors elle est instable.

Comme expliqué précédemment, les valeurs propres dépendent d'un grand nombre de paramètres tels que les dimensions de la structure, les raideurs de contact, l'amortissement, les caractéristiques matériau ou encore le frottement. Il est donc possible d'analyser l'évolution des valeurs propres en fonction des grandeurs d'intérêts. Concernant les structures comportant des interfaces frottantes et sujettes à des instabilités, l'analyse de stabilité représente un moyen simple de prédire les occurrences de vibrations auto-entretenues. Cette approche constitue dans la majorité des cas l'unique moyen de déterminer les paramètres permettant de dimensionner au mieux ce type de structure. Par exemple, dans l'industrie automobile, les paramètres dimensionnants ainsi que la propension à crisser des systèmes de frein à disque sont principalement déterminés par l'analyse aux valeurs propres complexes appliquée à des modèles éléments finis.

Nous rappelons que dans cette étude l'objectif n'est pas de se rapprocher de la réalité et que nous cherchons simplement à obtenir un diagramme de stabilité particulier. Ce dernier doit satisfaire les conditions suivantes. Tout d'abord le système doit présenter des configurations d'équilibre stables et instables. Le modèle doit également être sujet à des cas classiques

d'instabilités par couplage de modes à un et deux modes instables. La dernière contrainte consiste à obtenir des parties réelles suffisamment faibles pour chaque mode instable. En effet, comme expliqué précédemment, la partie réelle d'une valeur propre complexe du système linéarisé donne une mesure du taux de divergence de la réponse dynamique. Le fait d'avoir un taux de divergence "raisonnable" va permettre une meilleure convergence du schéma d'intégration temporelle en phase d'initiation des vibrations. En ce qui concerne le choix des différents matériaux ainsi que des dimensions, le modèle développé dans [105] a été repris et simplifié : les ventilations du disque et les trous de fixation ont été négligés. Les contraintes précédentes vont permettre de choisir les paramètres suivants : la pression de freinage, les raideurs de contact k_L et k_{NL} , les paramètres d'amortissement ζ_i et ξ_i ainsi que les coefficients de frottement des cas étudiés.

Pour ce qui est des raideurs de contact, il existe différents moyens expérimentaux permettant de les mesurer et le lecteur intéressé pourra se référer à [57]. Dans [56], une étude est menée sur un système de frein proche de celui que nous étudions ici. Pour ce système, les raideurs ont été déterminées expérimentalement et l'analyse de stabilité détecte un unique mode instable. Dans notre étude, l'objectif est de proposer un modèle présentant des configurations d'équilibre glissant stable, à un et deux modes instables. C'est pourquoi nous utilisons ici des raideurs de contact estimées à partir des courbes expérimentales de [56], et permettant d'avoir un modèle ayant jusqu'à deux modes instables. Les valeurs des raideurs linéaires et cubiques sont respectivement $k_L = 0.9e^5 \text{ Nm}^{-1}$ et $k_{NL} = 4e^9 \text{ Nm}^{-3}$.

En ce qui concerne les parties réelles, les valeurs obtenues pour ces raideurs sont largement supérieures à 1. Les paramètres d'amortissements modaux vont permettre de modifier les taux de divergence associés aux deux modes instables détectés. Comme expliqué par Fritz et al. ainsi que Sinou et Jézéquel [34, 35], l'amortissement joue un rôle essentiel sur la stabilité. En effet, lorsque le système est iso-amorti, l'augmentation de l'amortissement provoque une diminution des parties réelles. En revanche, un amortissement non iso-réparti sur les modes impliqués dans une coalescence peut provoquer une déstabilisation du système, c'est-à-dire un point de bifurcation de Hopf qui apparaît pour un coefficient de frottement plus faible que pour un amortissement nul. Dans notre étude, les modes coalescents stables et instables sont iso-amortis par un taux d'amortissement de 10 et les modes stables non impliqués dans une coalescence sont amortis par un pourcentage d'amortissement de 1%.

L'influence de la pression de freinage sur la stabilité présente les tendances générales suivantes. Si la pression de freinage est "trop" faible, le couplage des deux sous-structures n'est pas assez fort pour générer du crissement. Pour des valeurs plus importantes, la propension à crisser augmente et lorsque la pression est trop importante, le crissement semble être atténué. Il faut donc une valeur de pression suffisamment grande pour coupler les deux sous-structures et les valeurs usuelles pour des freinages automobiles disponibles dans la littérature sont de l'ordre d'une dizaine de bars [17]. Une étude paramétrique de la stabilité vis-à-vis de la pression et du frottement est alors menée et les résultats sont présentés sur la Figure 3.7. Sur l'analyse des valeurs propres complexes, chaque point correspond à une configuration d'équilibre glissant associée à un couple de pression et de coefficient de frottement (Figure 3.7 (a)). Les valeurs de frottement augmentent de gauche à droite et celle de pression de bas en haut. On choisit donc une valeur de pression qui offre plusieurs modes instables avec des parties réelles "faibles". Sur la Figure 3.7 (b), on trace le nombre de modes instables en fonction du frottement et de la pression. L'analyse combinée des Figures 3.7 (a) et (b) permet de fixer la valeur de la pression à 12.5 bars.

Tous les paramètres structuraux sont à présent fixés et figurent dans la Table 3.2. Il faut cependant remarquer que les paramètres utilisés n'ont pas été recalés à partir d'essais expérimentaux. Néanmoins, l'objectif de la thèse est de développer une stratégie complète de calcul et d'analyse du comportement non linéaire et du rayonnement. Le coefficient de

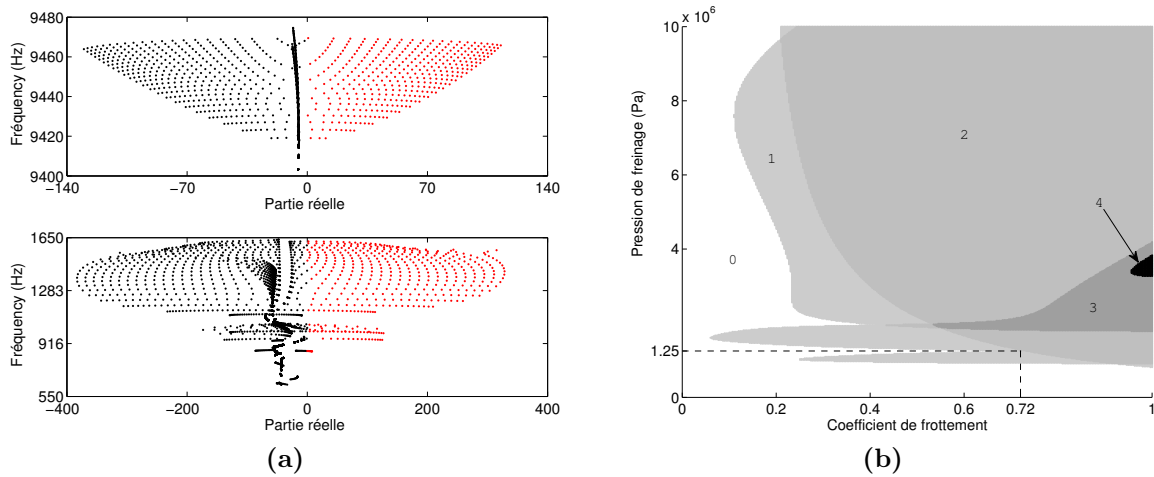


Figure 3.7 – Influence de la pression de freinage et du frottement sur la stabilité. (a) Influence de la pression sur la stabilité dans les bandes [9400 9480] Hz et [550 1650] Hz avec • configurations stables et • instables, (b) zones de stabilité en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage.

frottement est le paramètre de contrôle vis-à-vis duquel l'analyse de stabilité sera conduite et ses valeurs seront déterminées suivant les cas de stabilité souhaités.

L'ensemble des résultats finaux de l'analyse de stabilité est présenté sur la Figure 3.8. On remarque que la bifurcation de Hopf a lieu pour un coefficient de frottement critique d'environ 0.7 en dessous duquel le système est toujours stable au sens de Lyapunov (Figure 3.8 (a)). A $\mu = 0$, les fréquences à 957 Hz et 926 Hz associées à deux modes propres du système couplé sans frottement sont parfaitement distinctes. Les parties réelles de ces valeurs propres sont initialement négatives indiquant que les équilibres glissants associés sont stables. Ensuite, une première instabilité est détectée pour un coefficient de frottement $\mu = 0.72$ et provient de la coalescence de ces deux modes avec l'augmentation du coefficient de frottement comme illustré sur la Figure 3.8 (b). Le mode initialement à 957 Hz reste stable alors que celui initialement à 926 Hz devient instable. Un second mode instable à 9421 Hz apparaît selon le même mécanisme de coalescence pour un coefficient de frottement de 0.73 (Figure 3.8 (b)). On remarque également que la coalescence des fréquences n'est pas parfaite. Ce phénomène est lié à la présence d'amortissement qui modifie légèrement les fréquences de résonance. Pour un amortissement nul ou iso-reparti, la coalescence est parfaite.

Pour notre étude, les paramètres d'amortissement permettent d'obtenir un cas où les modes instables sont simultanément présents avec les mêmes valeurs de taux de divergence. Pour ce coefficient de frottement ($\mu \approx 0.73$), aucun des deux modes ne sera privilégié lors du calcul des vibrations. D'autre part, le pourcentage d'amortissement de 1% appliqué sur les modes stables non coalescents a pour effet de complètement décaler les parties réelles de ces

Table 3.2 – Paramètres de contact, de freinage et d'amortissement.

Raideur linéaire	k_L	$0.9e^5$	Nm^{-1}
Raideur cubique	k_{NL}	$4e^9$	Nm^{-3}
Force de freinage par nœud	F_{max}	70	N/nœud
Pourcentage d'amortissement	ξ	1	%
Taux d'amortissement	ζ_i	10	-

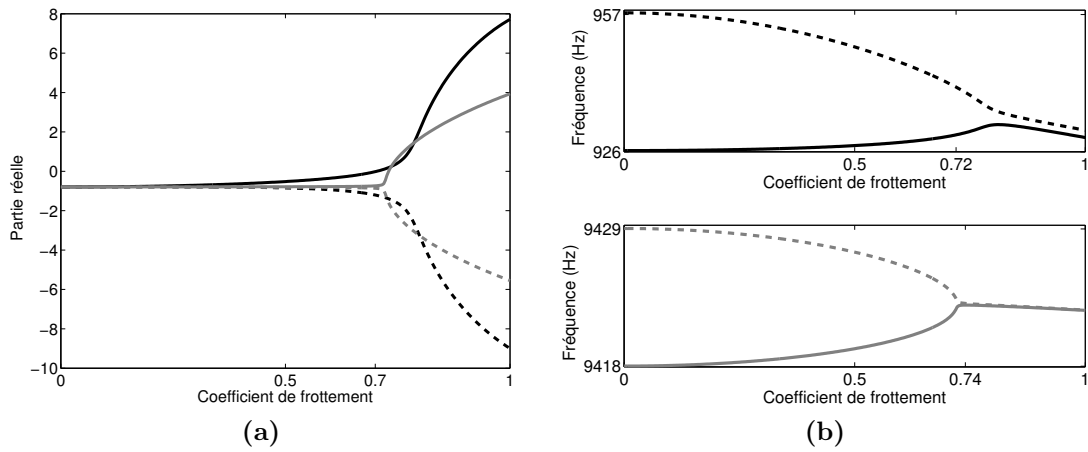


Figure 3.8 – Résultats de l'analyse stabilité vis-à-vis du coefficient de frottement. - Instable, - - stable. (a) Évolution des parties réelles et (b) évolution des fréquences.

valeurs propres du coté négatif.

Les instabilités par coalescence de modes sont également appelées instabilités géométriques. L'origine de ces instabilités provient de deux modes du système couplé ayant des déformées modales proches. Ces modes peuvent alors coalescer en déformée et en fréquence avec l'évolution d'un paramètre de contrôle pour donner naissance à une instabilité. Une illustration des modes engagés dans les deux coalescences est présentée sur la Figure 3.9. Les modes impliqués sont principalement des modes de flexion du système global.

3.4 Calcul des vibrations non linéaires induites par frottement

Dans cette section, une attention particulière est portée à l'estimation des niveaux vibratoires induits par frottement lorsqu'un ou plusieurs modes instables ont été détectés. En s'appuyant sur les résultats de stabilité, les différents coefficients de frottement étudiés sont présentés. Puis, les réponses dynamiques pour tous les cas d'études sont calculées et analysées.

3.4.1 Liste des cas étudiés

L'analyse de stabilité détaillée dans la section précédente a permis d'exhiber les paramètres structuraux aboutissant à des équilibres glissants instables et pouvant potentiellement générer des événements de crissement. Les résultats de stabilité permettent alors de choisir les coefficients de frottement associés aux comportements souhaités. Dans notre étude, on s'intéresse aux régimes stables, à un et deux modes instables. La liste des cas étudiés est présentée dans la Table 3.3. Le cas 1_{statique} est associé à une configuration d'équilibre glissant jugée stable au sens de Lyapunov. Le cas 2_{statique} présente un unique mode instable détecté à 929.8 Hz. Les cas 3_{statique} et 4_{statique} présentent chacun deux modes instables. Cependant, les parties réelles des modes instables du cas 3_{statique} sont quasiment identiques alors que la partie réelle du mode à 9422 Hz du cas 4_{statique} est légèrement supérieure. Les analyses des réponses dynamiques des cas d'études vont permettre d'étudier l'influence du coefficient de frottement ainsi que du nombre d'instabilités sur le comportement non linéaire du système de frein.

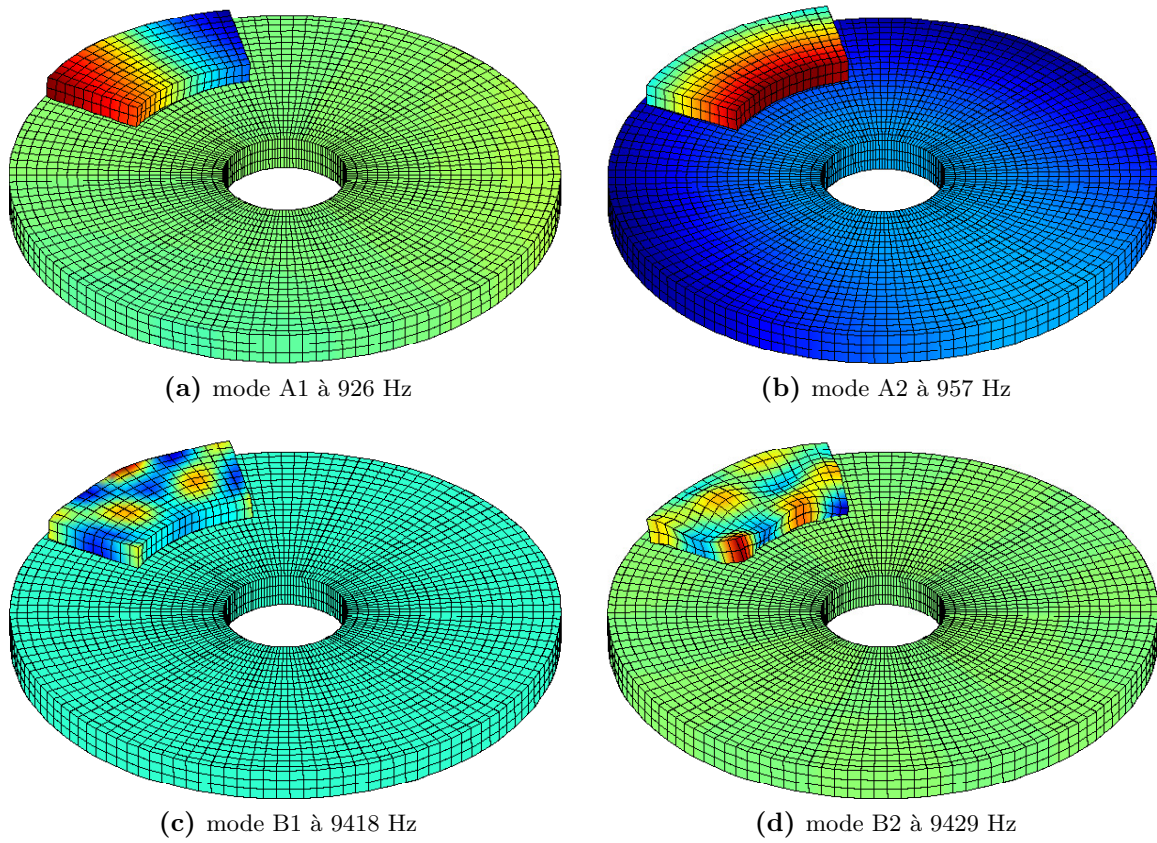


Figure 3.9 – Déformées des modes coalescents du système couplé à frottement nul : coalescence de A1 avec A2 et de B1 avec B2.

3.4.2 Formulation du problème dynamique et résolution numérique

On cherche à résoudre les équations non linéaires du mouvement (3.3) pour tous les cas de la Table 3.3. Le problème dynamique associé au modèle éléments finis est donc le suivant. On cherche la solution $\mathbf{X}(t)$ de l'équation (3.3) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F} \quad (3.16)$$

passant par la condition initiale :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t = t_0) = \dot{\mathbf{X}}_0 \\ \mathbf{X}(t = t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Le problème précédent est relativement simple à obtenir et les deux difficultés principales sont le choix et l'application de la stratégie numérique de résolution de l'équation différen-

Table 3.3 – Liste des cas étudiés.

Cas	Coefficient de frottement	Fréquence f_1 (Hz)	Fréquence f_2 (Hz)
1 _{statique}	0.69	-	-
2 _{statique}	0.72	929.8	-
3 _{statique}	0.731	930	9420.9
4 _{statique}	0.74	930.3	9422

tielle, et le choix de la condition initiale. Dans cette étude, on s'intéresse à la dynamique complète de la structure et on s'oriente donc vers des méthodes d'intégration temporelle permettant d'effectuer des analyses transitoire et stationnaire. Il existe d'autres types de méthodes s'appuyant sur l'équilibrage harmonique permettant d'obtenir l'état stationnaire de la réponse dynamique. Ces méthodes ne seront pas abordées dans cette étude mais le lecteur intéressé pourra se référer à [56] pour plus de détails.

En ce qui concerne l'intégration temporelle, on trouve un grand nombre de schémas d'intégration numérique dont les caractéristiques en termes de précision, de stabilité, de dissipation d'énergie et de convergence sont très bien connues [106]. On pourra citer par exemple, la méthode des différences finies, la famille des schémas de Newmark ou encore le schéma de Runge-Kutta. D'autre part, le problème à résoudre est non linéaire et le second membre de l'itération $n + 1$ dépend de l'état du système à cette même itération : ceci impose l'utilisation d'un schéma implicite. L'objectif de ces travaux n'étant pas le développement de méthodes numériques pour le calcul des vibrations auto-entretenues, nous nous orientons vers le choix d'un solveur classique existant. La méthode qui semble la plus adaptée est le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps adaptatif. Celui-ci offre une erreur à chaque itération de l'ordre de h^5 et une erreur accumulée de l'ordre de h^4 , où h désigne le pas de temps.

Il reste à présent à déterminer la condition initiale permettant d'amorcer le schéma d'intégration. L'approche qui est adoptée dans cette partie consiste à placer le système non linéaire (équation (3.3)) dans les mêmes conditions que celles appliquées lors de l'analyse de stabilité, c'est-à-dire que l'initialisation s'effectue dans un voisinage de la configuration d'équilibre glissant. Comme illustré précédemment, cette configuration est la solution du problème quasi-statique non linéaire (3.7) qui est donc à vitesse nulle : ceci implique que la vitesse initiale $\dot{\mathbf{X}}_0$ est nulle. Ensuite, la position initiale est l'équilibre glissant légèrement perturbé. Toute la difficulté est de choisir la perturbation adéquate qui va permettre de générer les vibrations auto-entretenues recherchées. La perturbation $\delta\mathbf{X}$ doit satisfaire les conditions suivantes :

- $\|\delta\mathbf{X}\|$ "suffisamment" faible pour rester dans un voisinage de l'équilibre glissant
- $\delta\mathbf{X}$ ne doit pas changer les statuts de contact

Si ces conditions sont vérifiées, alors l'analyse de stabilité s'avère être efficacement prédictive. L'approche employée dans cette étude consiste à perturber uniquement les degrés de liberté associés aux modes instables et d'analyser l'évolution de la perturbation dans les équations du mouvement. Ceci conduit à l'expression suivante pour la perturbation :

$$\delta x_i = \begin{cases} 0 & \text{pour les modes stables} \\ \pm \alpha X_{0,i} & \text{pour les modes instables} \end{cases} \quad (3.18)$$

où $\alpha \in [0; 1]$ et $X_{0,i}$ désigne la i -ème composante de l'équilibre glissant. Le paramètre α représente donc le niveau de perturbation introduit. Cependant, il n'existe pas de règle permettant de déterminer la valeur de α . C'est pourquoi des intégrations temporelles successives sont conduites en partant de $\alpha = 0$ et en augmentant progressivement sa valeur jusqu'à l'obtention de la réponse dynamique souhaitée. Dans la suite, la valeur de α sera fixée à 0.1.

L'influence de la condition initiale sur la dynamique globale du système est un sujet qui n'a été que très rarement traité. Des études précédentes ont déjà montré que ce paramètre a un impact non négligeable sur le contenu fréquentiel des vibrations auto-entretenues et que le choix de la perturbation peut modifier le comportement vibratoire [93, 107]. Ils montrent qu'une condition initiale trop éloignée de l'équilibre glissant donne naissance à de nouveaux pics de résonances non prédits par l'analyse de stabilité. Ces résultats montrent alors les limites de la stabilité au sens de Lyapunov et justifient les conditions sur $\delta\mathbf{X}$ présentées plus haut.

3.4.3 Analyses des réponses dynamiques

Les réponses dynamiques associées à tous les cas étudiés sont à présent calculées par intégration temporelle des équations du mouvement. En ce qui concerne le cas 1_{statique} , la perturbation introduite définie par l'équation (3.18) ne s'amplifie pas, elle s'atténue jusqu'à s'annuler et le système rejoint alors la configuration d'équilibre glissant en oscillant. Ce comportement est typique d'un équilibre glissant jugé stable dès lors que la perturbation est "suffisamment" faible. Les résultats correspondant au cas 1_{statique} ne sont pas présentés.

Réponse dynamique à un mode instable $\mu = 0.72$

En ce qui concerne le cas 2_{statique} , l'analyse de stabilité prédit un unique mode instable. Pour ce cas, la perturbation introduite s'amplifie et des vibrations auto-entretenues sont générées. La Figure 3.10 correspond aux déplacements et vitesses d'un nœud de l'interface dans les trois directions de l'espace. On peut observer que le système diverge de la condition initiale durant un régime transitoire caractérisé par une croissance exponentielle des amplitudes vibratoires. Ce régime transitoire s'explique par la divergence de la partie linéaire du système. Ensuite, les non-linéarités agissent et la combinaison de l'évolution des efforts de contact et de frottement avec les configurations de contact/perte de contact provoque une saturation des amplitudes. Le système atteint alors un état stationnaire qualifié de cycle limite ou encore de vibrations auto-entretenues. Une manière d'analyser la dynamique d'un cycle limite est de se placer dans l'espace des phases. La forme du cycle donne des indications sur la complexité de la cinématique et peut contenir des informations qualitatives sur le contenu fréquentiel. Sur les Figures 3.11 (a), (c) et (e), on peut voir les cycles limites correspondant aux déplacements et vitesses de la Figure 3.10 sur la plage de temps de la zone B définie sur la Figure 3.10 (a). On observe des cinématiques similaires dans les trois directions composées d'une unique boucle centrée sur la position d'équilibre glissant. La forme elliptique du cycle limite est caractéristique de la prédominance d'une seule fréquence dans la réponse. Des analyses fréquentielles sont alors menées par transformée de Fourier du signal temporel dans la zone B. Sur les Figures 3.11 (b), (d) et (f), on voit clairement la participation de la fréquence fondamentale instable $f_1 = 930$ Hz et de ses harmoniques $2f_1$ et $3f_1$: les cycles limites sont fermés et la réponse est périodique.

Réponse dynamique à deux modes instables $\mu = 0.731$

Les analyses temporelles et fréquentielles précédentes sont à présent menées sur le cas 3_{statique} . Ce cas est associé à un coefficient de frottement légèrement supérieur et présente deux modes instables. En ce qui concerne les vibrations, on peut voir le même type de comportement que pour le cas 2_{statique} : le système diverge de l'équilibre glissant et atteint un régime stationnaire (Figure 3.12). Cependant, on remarque la présence de deux régimes stationnaires désignés par A et B sur la Figure 3.12 (a). Ces deux régimes correspondent à des dynamiques très différentes comme le montrent les Figures 3.13 (a), (c) et (e).

On peut voir que dans l'espace des phases, la réponse dans la zone A présente une boucle dans la direction $\mathbf{x}$ qui témoigne de la présence de deux fréquences prépondérantes. L'analyse des spectres montre que dans la direction $\mathbf{x}$, le signal est largement dominé par f_1 et $2f_1$ d'où la forme du cycle. En revanche, dans les autres directions f_1 prédomine, ce qui génère des cycles elliptiques.

Lors du régime stationnaire final de la zone B, on peut voir que les cycles limites sont beaucoup plus complexes, comme indiqué sur les Figures 3.14 (a), (c) et (e). L'analyse fréquentielle montre clairement la participation des deux fréquences fondamentales instables f_1 et f_2 , de leurs composantes harmoniques ainsi que de leurs combinaisons linéaires du type

$\pm m f_1 \pm n f_2$ (Figures 3.14 (b), (d) et (f)), où m et n sont des entiers naturels. Les fréquences impliquées sont incommensurables donc la réponse est quasi-périodique et les cycles limites ne sont pas exactement fermés.

Réponse dynamique à deux modes instables $\mu = 0.74$

Le cas 4_{statique} est similaire au cas 3_{statique} du point de vue de la stabilité puisqu'ils présentent chacun deux modes instables. Cependant, le cas 4_{statique} a un coefficient de frottement supérieur et des taux de divergence supérieurs à ceux du cas 3_{statique}. Cela génère les vibrations représentées sur la Figure 3.15. On remarque que les amplitudes des déplacements et vitesses sont nettement supérieures. D'autre part deux régimes particuliers apparaissent (zones A et B) comme indiqué sur la Figure 3.15 (a). Les cycles associés à la zone A sont également complexes et les spectres montrent encore la participation des deux modes instables (Figure 3.16). On peut voir que la réponse est largement dominée par f_1 et f_2 . En zone B, les cycles limites changent complètement de forme et cela est caractéristique d'un changement de contenu fréquentiel (Figures 3.17 (a), (c) et (e)). Les spectres non linéaires associés montrent l'émergence de certaines composantes fréquentielles dont l'amplitude est augmentée (Figures 3.17 (b), (d) et (f)). De la même manière que pour le cas 3_{statique}, la réponse est quasi périodique. Il faut cependant remarquer que la fréquence fondamentale f_2 détectée dans les spectres n'est pas exactement prédite par l'analyse de stabilité. Ces variations de fréquences sont fortement liées au caractère non linéaire du problème et peuvent également s'expliquer par une évolution de la position moyenne autour de laquelle oscille le système. Ce point sera abordé dans le chapitre 5.

3.5 Conclusion

Nous avons à disposition un modèle éléments finis de frein à disque simplifié sur lequel des lois non linéaires de contact et de frottement ont été introduites. L'analyse de stabilité de ce système vis-à-vis du coefficient de frottement a mis en évidence la présence de plusieurs cas classiques d'instabilités par couplages de modes : un cas stable et des cas à un et deux modes instables. Les analyses transitoires par intégration temporelle des équations du mouvement ont montré des comportements vibratoires bien distincts dont les caractéristiques globales sont classiques et connues dans la littérature. D'une part, ceci permet de nous conforter sur la pertinence du modèle simplifié en terme de comportement qualitatif. D'autre part, ces divers cas classiques vont servir de référence à notre étude : l'influence des paramètres physiques sur le comportement vibratoire auto-entretenu ainsi que sur le rayonnement acoustique pourra être analysée.

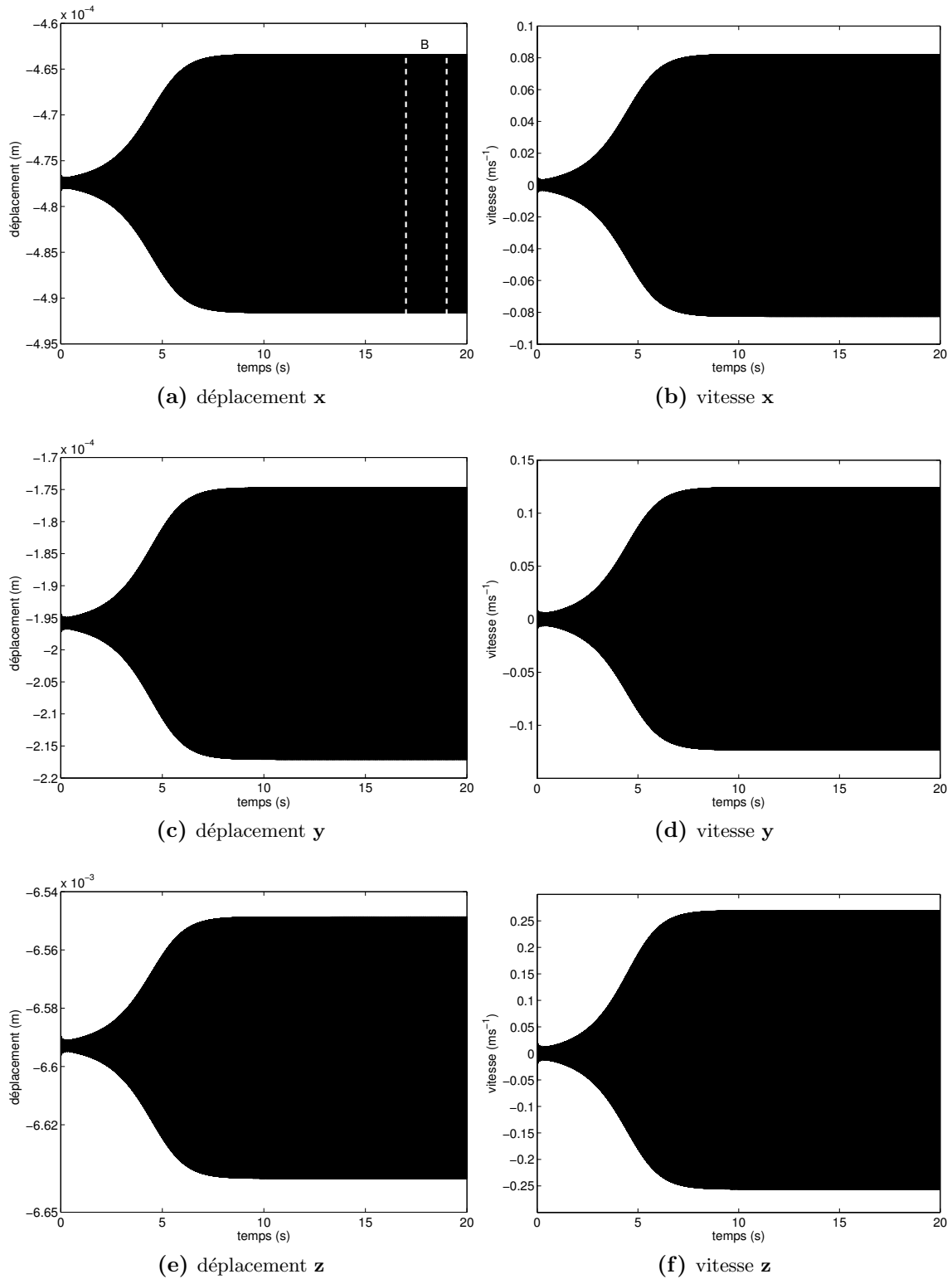


Figure 3.10 – Vibrations d'un nœud de l'interface du cas 2_{statique} . (a), (c) et (e) Déplacements dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) vitesses dans les directions x , y et z .

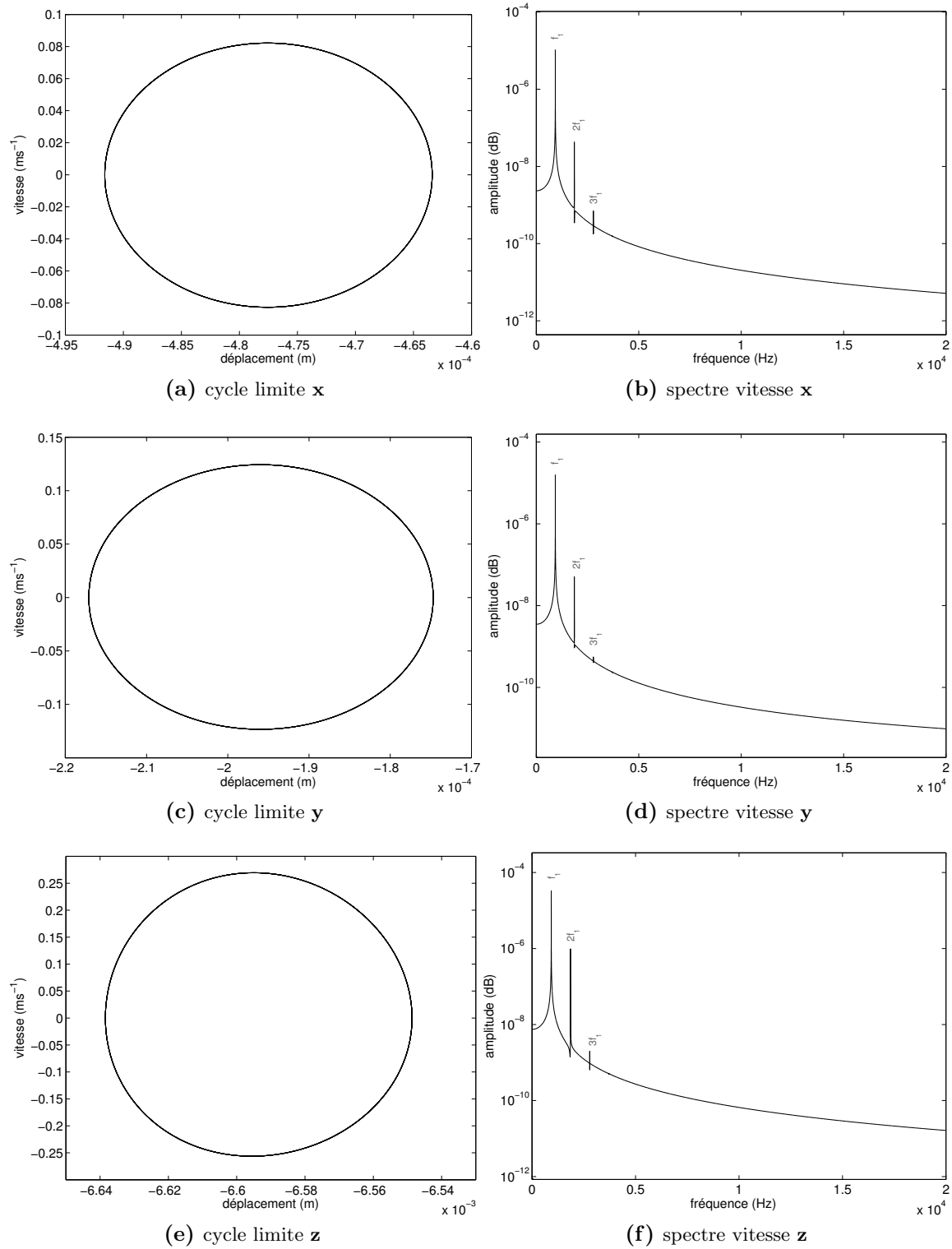


Figure 3.11 – Cycles limites et spectres non linéaires du cas 2_{statique} dans la zone B. (a), (c) et (e) Cycles limites dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) spectres non linéaires associés.

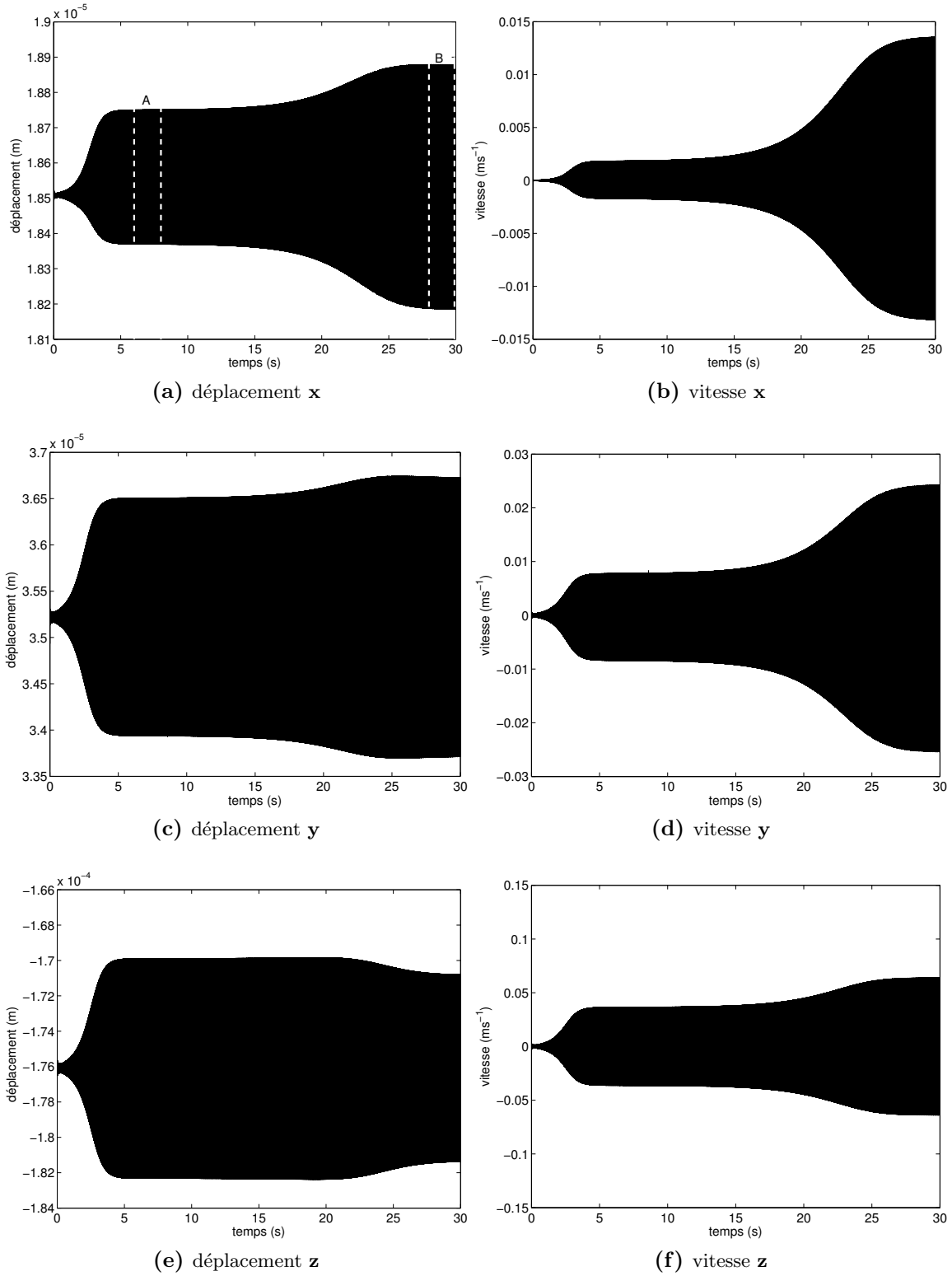


Figure 3.12 – Vibrations d'un nœud de l'interface du cas 3_{statique} . (a), (c) et (e) Déplacements dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) vitesses dans les directions x , y et z .

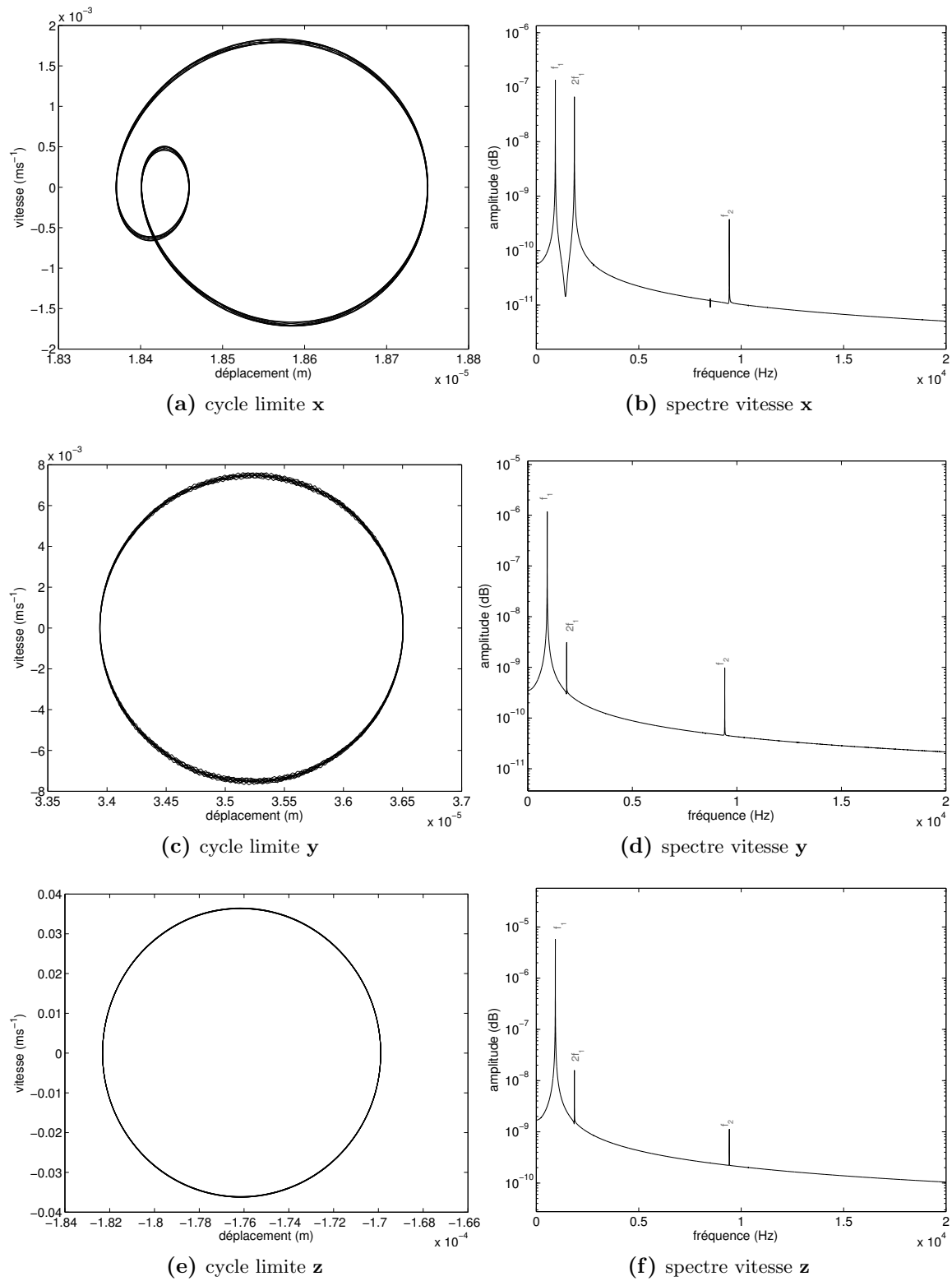


Figure 3.13 – Cycles limites et spectres non linéaires du cas 3_{statique} dans la zone A. (a), (c) et (e) Cycles limites dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) spectres non linéaires associés.

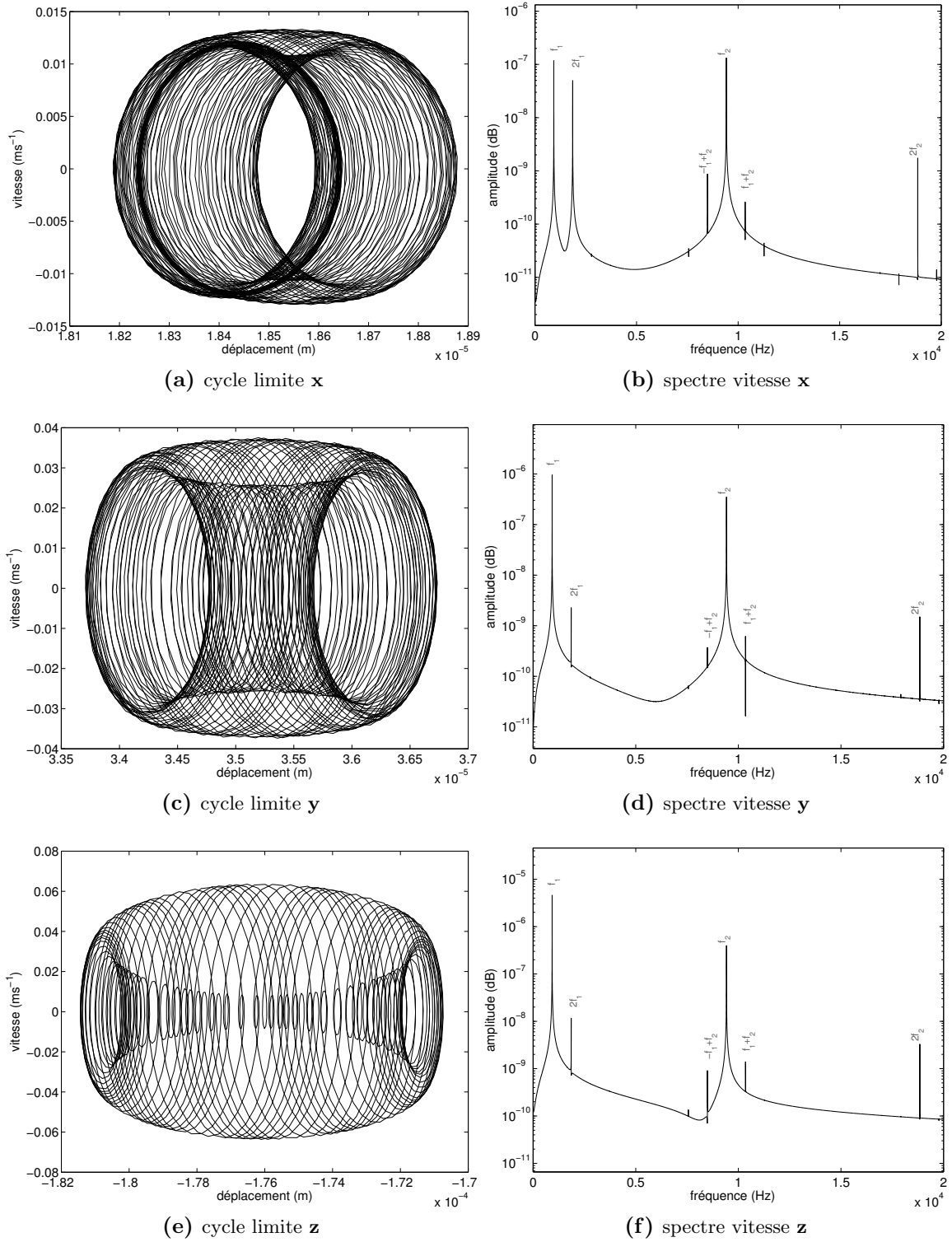


Figure 3.14 – Cycles limites et spectres non linéaires du cas $3_{statique}$ dans la zone B. (a), (c) et (e) Cycles limites dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) spectres non linéaires associés.

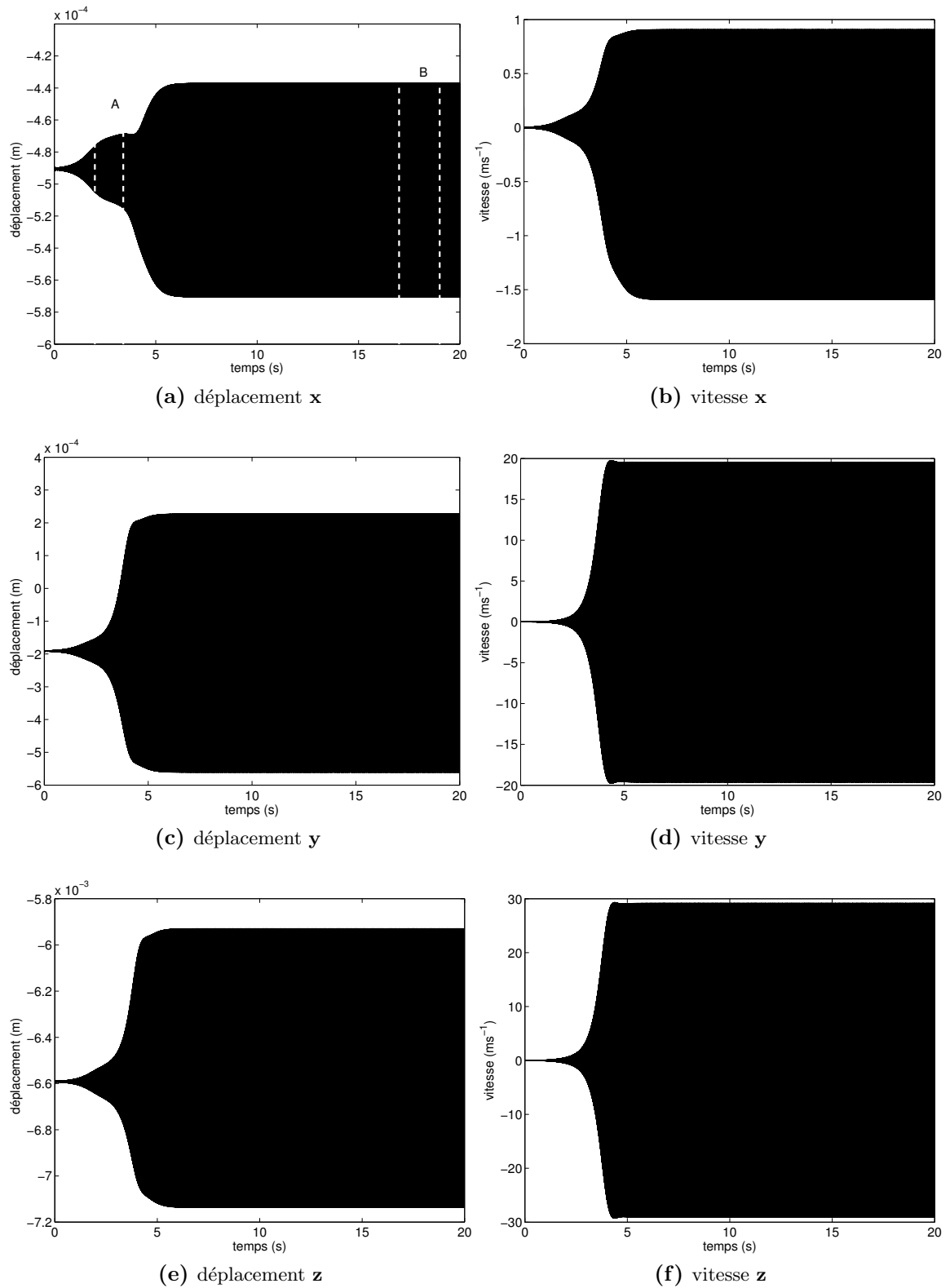


Figure 3.15 – Vibrations d'un nœud de l'interface du cas 4_{statique} . (a), (c) et (e) Déplacements dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) vitesses dans les directions x , y et z .

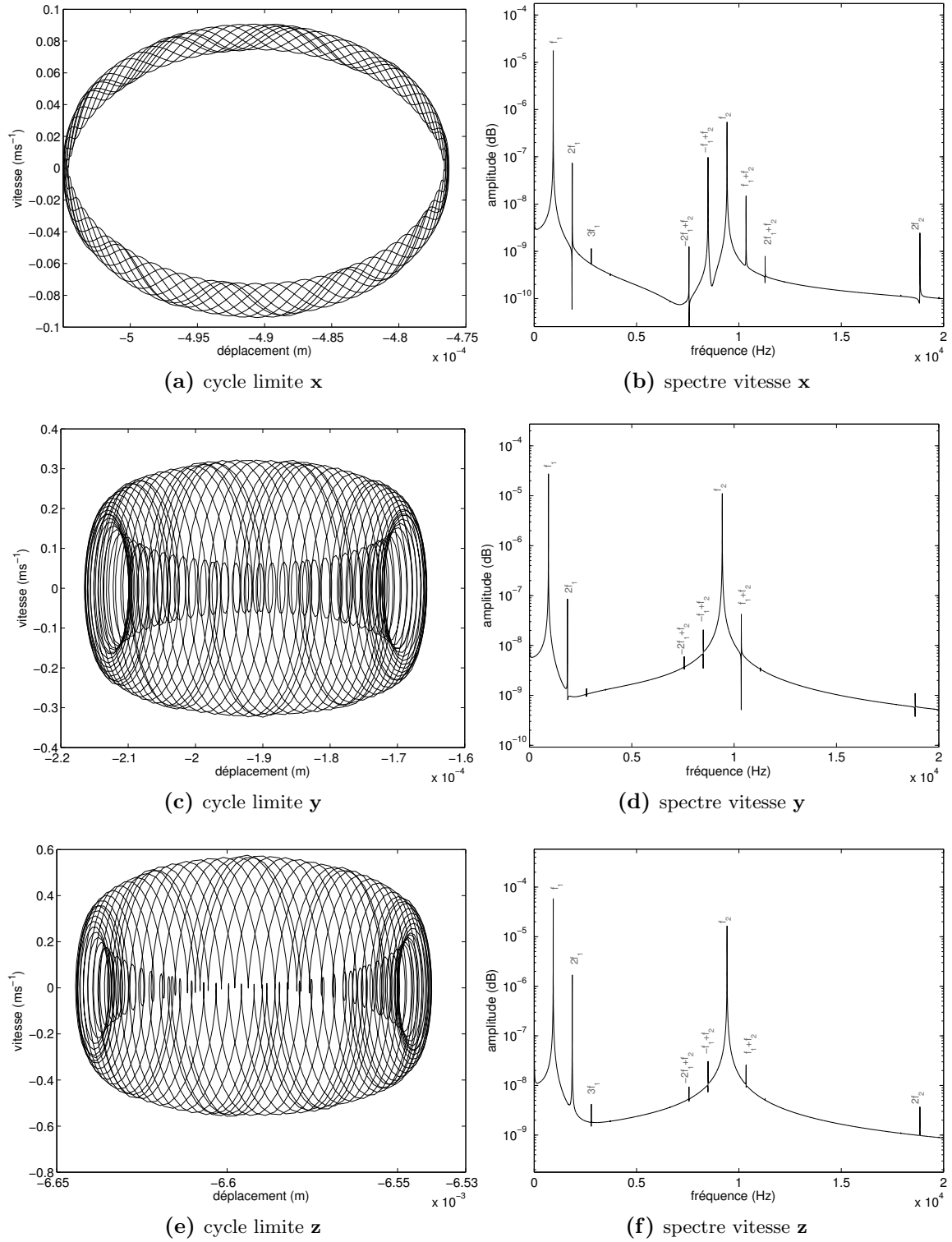


Figure 3.16 – Cycles limites et spectres non linéaires du cas 4_{statique} dans la zone A. (a), (c) et (e) Cycles limites dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) spectres non linéaires associés.

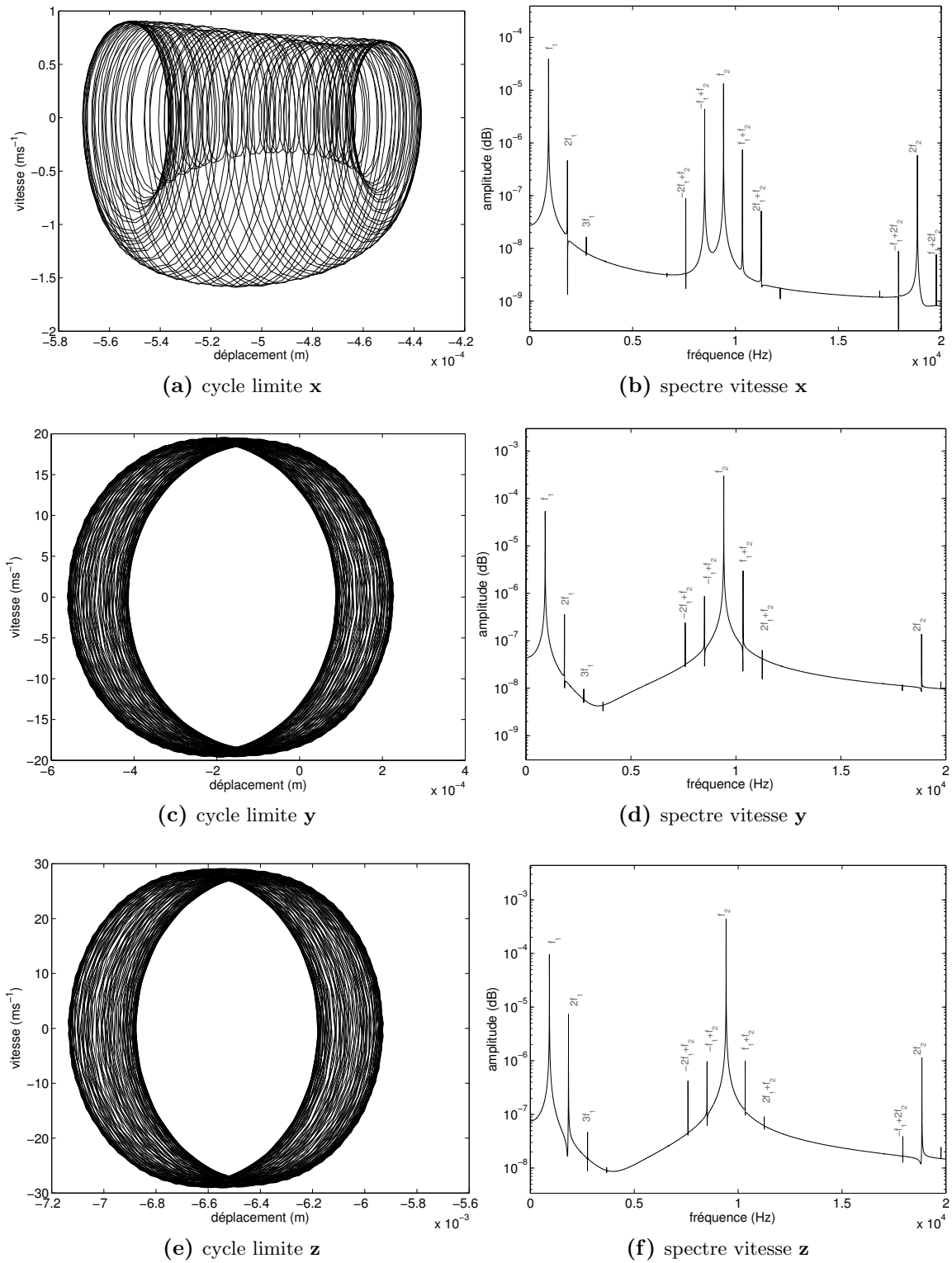


Figure 3.17 – Cycles limites et spectres non linéaires du cas 4_{statique} dans la zone B. (a), (c) et (e) Cycles limites dans les directions x , y et z , (b), (d) et (f) spectres non linéaires associés.

Chapitre 4

Rayonnement acoustique d'un système frottant

Sommaire

4.1	Formulation du problème acoustique	84
4.1.1	Cas d'une structure continue	84
4.1.2	Méthode des éléments finis de frontière	87
4.2	Méthode de calcul acoustique multi-fréquentielle	88
4.2.1	Décomposition du champ de vitesse en série de Fourier	89
4.2.2	Calcul de la pression acoustique par composante fréquentielle	89
4.2.3	Estimation de la pression acoustique globale par superposition pondérée	90
4.2.4	Démarche globale de calcul des émissions sonores lors du crissement	91
4.3	Application au système de frein	91
4.3.1	Construction et validité du maillage	91
4.3.2	Rayonnement acoustique des cas à un et deux modes instables	95
4.3.3	Étude de convergence de la pression acoustique	102
4.4	Conclusion	103

Le crissement des systèmes de frein à disque est caractérisé par des émissions sonores à haute fréquence pouvant atteindre 110 dB. Ces émissions sonores ont un contenu fréquentiel qui peut être extrêmement riche et ceci est dû au spectre non linéaire de la vitesse qui se compose des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales instables (cf chapitre 3).

Le calcul du rayonnement acoustique d'une source mono-fréquentielle classique s'effectue en deux étapes principales : dans un premier temps le calcul des vibrations (effectué au chapitre précédent) puis le calcul de la pression acoustique. Cependant, les équations de l'acoustique linéaire permettant d'accéder au champ acoustique rayonné dépendent de la fréquence des vibrations. Ainsi, les méthodes employées pour l'estimation des niveaux sonores lors du crissement doivent tenir compte du caractère multi-fréquentiel des vibrations.

Dans ce chapitre on se propose d'estimer le rayonnement acoustique d'un système frottant sujet au crissement. Dans un premier temps, la formulation générale d'un problème acoustique est rappelée. Puis, dans une deuxième partie, la méthode de calcul du rayonnement acoustique multi-fréquentielle est présentée. Enfin, cette méthode est appliquée afin d'estimer le rayonnement acoustique de cas classiques de crissement.

4.1 Formulation du problème acoustique

Afin de bien cerner les différentes difficultés de cette démarche, il semble important de rappeler la formulation continue des équations de l'acoustique. Nous nous contentons ici de décrire les étapes principales menant aux équations de l'acoustique linéaire pour un système continu. Puis ces notions sont étendues au cas d'un système discrétisé en présentant la méthode des éléments finis de frontière (BEM). Pour plus de détails sur ces approches, le lecteur intéressé pourra se référer à [95, 96].

4.1.1 Cas d'une structure continue

Soit une structure quelconque de volume V délimité par une surface S dont tout ou partie est animée d'un champ vibratoire. Le problème acoustique consiste alors à déterminer la pression acoustique P sur la surface (pression pariétale) et la pression acoustique rayonnée dans le volume extérieur désigné par V_{ext} comme illustré sur la Figure 4.1. La propagation du son dans un fluide est un phénomène bien connu et peut être modélisé par l'équation des ondes linéaire et homogène :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) P(\mathbf{r}', t) = 0 \quad (4.1)$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien, P désigne la pression acoustique, c la vitesse du son dans le fluide considéré (ici l'air) et $\mathbf{r}'$ le vecteur position d'un point quelconque de l'espace. Le caractère homogène de l'équation différentielle provient du fait que dans notre étude, nous ne considérons pas de sources autres que la structure vibrante. De plus, on s'intéresse à des ondes acoustiques harmoniques en temps. Cela revient à chercher la solution de pression acoustique sous la forme suivante :

$$P(\mathbf{r}', t) = \hat{P}(\mathbf{r}') e^{j\omega t} \quad (4.2)$$

où $\hat{P}$ correspond à l'amplitude de l'onde de pression et ω sa pulsation. En reportant dans l'équation (4.1), on obtient l'équation de Helmholtz homogène suivante :

$$(\Delta + k^2) \hat{P}(\mathbf{r}') = 0 \quad (4.3)$$

où $k = \omega/c$ correspond au nombre d'onde. Ensuite, on ajoute différents jeux de conditions aux limites telles que la continuité des vitesses normales à la paroi, l'impédance de paroi

lorsque celle-ci est absorbante et enfin la condition de Sommerfeld qui correspond au fait qu'il ne peut y avoir de réflexion à l'infini. Les conditions aux limites dépendent de la nature du problème étudié et seront détaillées dans la suite. Afin d'obtenir la formulation intégrale, nous rappelons le théorème de Green.

Théorème 3 (de Green). *Soient deux fonctions Φ et Ψ , définies dans un volume V délimité par une surface S de normale extérieure $\mathbf{n}$, continues et dérivables. On peut montrer que :*

$$\int_V (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dV = \int_V \text{div} (\Phi \text{grad} \Psi - \Psi \text{grad} \Phi) dV = \int_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS$$

Tout l'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'une intégrale de volume peut être entièrement déterminée à partir d'une intégrale de surface. D'un point de vue numérique, l'application du théorème de Green est donc très intéressante.

La fonction de Green en espace libre G associée au problème acoustique correspond à la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz (4.3) sans conditions aux limites. Ainsi, G est définie comme la solution de l'équation suivante :

$$(\Delta + k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.4)$$

Dans le cas général tridimensionnel, on montre que la fonction de Green en espace libre est définie par :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \quad (4.5)$$

En combinant les équations (4.2) et (4.4) on obtient l'équation suivante :

$$\Delta \hat{P}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{P}(\mathbf{r}) = \hat{P}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.6)$$

En remarquant la réciprocité de l'équation (4.6) vis-à-vis de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ ainsi qu'en appliquant le théorème de Green sur le volume V_{ext} délimité par les surfaces S et Σ , on obtient la

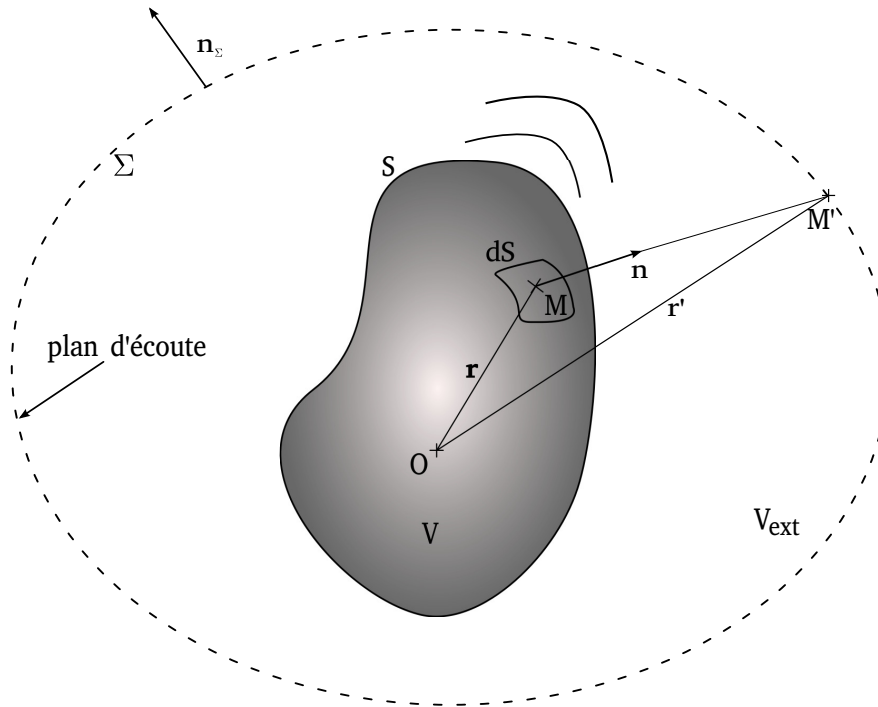


Figure 4.1 – Illustration du problème acoustique.

formulation intégrale suivante :

$$\int_{V_{\text{ext}}} \hat{P}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV_{\text{ext}} = \hat{P}(\mathbf{r}) = \int_{S+\Sigma} \left(\hat{P}(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \hat{P}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) dS \quad (4.7)$$

Cette équation est l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz et n'est valable que pour le problème extérieur. Elle montre que la pression acoustique en un point quelconque de l'espace $\mathbf{r}'$ est calculée à partir de la fonction de Green définie a priori, et de la pression pariétale qui est une inconnue du problème. De plus, la dérivée normale de la pression est directement liée à la vitesse pariétale normale V_n qui est connue dans le problème acoustique. À partir de l'équation d'Euler linéarisée, on peut montrer la relation suivante :

$$\frac{\partial \hat{P}(\mathbf{r})}{\partial n} = -j\omega\rho\hat{V}_n(\mathbf{r}) \quad (4.8)$$

avec

$$V_n(\mathbf{r}, t) = \hat{V}_n(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \quad (4.9)$$

On doit alors traiter un problème de Laplacien sous des conditions de Neumann. Les conditions aux limites sont données par les vitesses vibratoires de la surface (i.e. portant sur la dérivée de la pression) ainsi que la condition de Sommerfeld. En espace infini, le principe de causalité impose que la contribution de l'intégrale sur Σ est nulle si cette surface est rejetée à l'infini. Autrement dit, il n'y a pas de réflexions de l'onde acoustique provenant de l'infini. Cela se traduit par la condition de Sommerfeld suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} \left(\hat{P}(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_{\Sigma}} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \hat{P}(\mathbf{r})}{\partial n_{\Sigma}} \right) dS &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \left| \frac{\partial P(\mathbf{r}')}{\partial r'} - jkP(\mathbf{r}') \right| &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

La contribution de la surface Σ dans le champ de pression acoustique totale est donc nulle : l'équation (4.7) ne dépend plus de Σ et se ramène complètement à la surface S de la structure vibrante. Finalement l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz prend la forme suivante :

$$c(\mathbf{r}') \hat{P}(\mathbf{r}') = \int_S \left(\hat{P}(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \hat{P}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) dS \quad (4.11)$$

C'est une équation de Fredholm de seconde espèce, ce qui implique que c est positif et le caractère surfacique de l'intégrale impose que c soit inférieur ou égal à 1. Les valeurs particulières pour ce paramètre sont les suivantes :

$$c(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } M' \in S \text{ et si } S \text{ est plane au voisinage de } M' \\ \in]0, 1[& \text{si } M' \text{ se trouve sur une portion non plane de } S \\ 1 & \text{si } M' \in V_{\text{ext}} \\ 0 & \text{si } M' \in V \end{cases} \quad (4.12)$$

L'introduction du paramètre c correspondant aux angles solides rend la formulation intégrale valable à la fois sur la surface vibrante et dans le volume extérieur.

L'équation (4.11) doit être résolue en deux étapes. Dans un premier temps, il faut calculer le champ de pression pariétale en passant l'équation (4.7) à la limite lorsque $\mathbf{r}'$ tend vers $\mathbf{r}$

car la fonction de Green présente une singularité sur la surface S . Cette étape n'est pas détaillée ici mais l'idée générale est d'exprimer l'intégrale sur une portion de S contenant le point d'étude et de faire tendre la surface de la portion vers zéro. On calcule alors la valeur principale de l'intégrale au sens de Cauchy qui donne accès à la valeur de la pression pariétale. Dans un second temps, connaissant la pression pariétale, la pression acoustique peut être calculée en tout point de l'espace.

4.1.2 Méthode des éléments finis de frontière

Les sources réelles sont extrêmement complexes et génèrent des phénomènes vibratoires et acoustiques intimement liés. Il n'existe en réalité que très peu de solutions analytiques à l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz (4.11) (source ponctuelle, sphère pulsante, multipôle, etc). C'est pourquoi des méthodes numériques sont largement employées pour l'estimation du rayonnement des structures. Étant donnée la complexité des systèmes de freins, nous nous orientons naturellement vers des méthodes de résolution purement numériques.

L'une des méthodes les plus utilisées en vibro-acoustique est la méthode des éléments finis de frontière (BEM). Sa popularité vient du fait que le rayonnement est estimé par la résolution d'équation intégrale surfacique. Il existe d'autres méthodes numériques telles que les éléments finis ou encore les éléments finis infinis qui nécessitent de mailler le fluide dans lequel l'onde acoustique se propage. Dans notre cas, et d'un point de vue numérique, ces méthodes s'avèrent coûteuses et on s'orientera plutôt vers la BEM.

Le principe de cette méthode est identique à celui de la méthode des éléments finis mis à part que la discrétisation ne concerne que la surface de la structure. De plus, la formulation matricielle du problème n'est pas obtenue par l'écriture d'une formulation variationnelle mais par évaluation de l'équation intégrale en des points de collocation.

Le premier niveau d'approximation dans l'application de la BEM est géométrique. La surface S est discrétisée en N_e éléments finis notés S_i :

$$S \approx \sum_{i=1}^{N_e} S_i \quad (4.13)$$

Ensuite, la procédure utilisée est une méthode de collocation qui consiste à évaluer l'équation (4.11) sur les nœuds r_i de la surface S . Dans le cas simple où le nombre d'éléments est identique au nombre de nœuds, l'équation (4.11) prend la forme suivante :

$$c(\mathbf{r}')\hat{P}(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S_i} \hat{P}(r_i) \frac{\partial G(r_i, \mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial \hat{P}(r_i)}{\partial n} G(r_i, \mathbf{r}') dS \quad (4.14)$$

Puis, en supposant que la pression est constante par élément on obtient :

$$c(\mathbf{r}')\hat{P}(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^{N_e} \hat{P}(r_i) \int_{S_i} \frac{\partial G(r_i, \mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial \hat{P}(r_i)}{\partial n} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S_i} G(r_i, \mathbf{r}') dS \quad (4.15)$$

Ces considérations conduisent alors au système matriciel suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\hat{\mathbf{P}} &= \mathbb{M}\hat{\mathbf{P}}_S - \mathbb{L} \frac{\partial \hat{\mathbf{P}}_S}{\partial n} \\ &= \mathbb{M}\hat{\mathbf{P}}_S + jk\rho c\mathbb{L}\hat{\mathbf{V}}_n \end{aligned} \quad (4.16)$$

où $\hat{\mathbf{P}}_S$ et $\hat{\mathbf{P}}$ désignent les vecteurs dont les composantes sont les amplitudes de pressions acoustiques pariétales et en espace libre respectivement. $\mathbb{C}$ est la matrice diagonale qui

contient les angles solides (i.e. les valeurs du paramètre c) et $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ sont les matrices du problème acoustique discrétisé. Ces matrices peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{ij} &= \delta_{ij}c(r_i) \\ \mathbb{M}_{ij} &= \int_{S_i} \frac{\partial G(r_i, r'_j)}{\partial n} \\ \mathbb{L}_{ij} &= \int_{S_i} G(r_i, r'_j) dS\end{aligned}\tag{4.17}$$

L'un des inconvénients majeurs de la BEM est que les matrices du système à résoudre sont pleines. Lors de la résolution numérique, les procédures d'inversion de matrice sont alors plus longues que pour des matrices creuses.

L'approximation de pression constante par élément est la plus simple possible et le niveau de description de la pression n'a que peu de réalité. Cependant, l'objectif de cette section est de présenter brièvement les principales phases de traitement de la méthode des éléments finis de frontières et les enjeux liés à la dépendance fréquentielle. Les résultats numériques de notre étude ne sont pas obtenus en considérant une pression constante par élément mais l'évolution spatiale de la pression pariétale est décrite par des fonctions de formes.

Lors de la première phase, le calcul de la pression pariétale $\mathbf{P}_S$ est effectué en faisant tendre $\mathbf{r}'$ vers $\mathbf{r}$. Le système (4.16) devient :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\hat{\mathbf{P}}_S &= \mathbb{M}\hat{\mathbf{P}}_S + jk\rho c\mathbb{L}\hat{\mathbf{V}}_n \\ &\Leftrightarrow \\ (\mathbb{M} - \mathbb{C})\hat{\mathbf{P}}_S &= -jk\rho c\mathbb{L}\hat{\mathbf{V}}_n\end{aligned}\tag{4.18}$$

L'une des principales difficultés de ce problème réside dans la potentielle perte d'unicité de la solution de pression pariétale $\hat{\mathbf{P}}_S$. En effet, pour des fréquences particulières correspondant aux valeurs propres de l'opérateur $(\mathbb{M} - \mathbb{C})$, on observe l'apparition de solutions multiples. Ces solutions n'ont pas de réalité physique et correspondent simplement à des singularités mathématiques. On remarque tout de même que les fréquences singulières correspondent aux fréquences de résonance du problème interne associé. Afin d'éviter l'apparition de ce phénomène parasite, une méthode possible consiste à surdéterminer le système en l'évaluant sur des points particuliers afin de lever la singularité. Cette méthode porte le nom de CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) et son efficacité est prouvée pour les basses fréquences [108]. On peut également citer d'autres méthodes telles que les méthodes proposées par Burton et Miller [109] et Hamdi [110]. Lors de la construction du maillage aux éléments finis de frontière, il conviendra de vérifier que cet opérateur ne présente pas ce type de singularité dans la bande fréquentielle d'intérêt et ce point sera détaillé dans la suite du chapitre. En ce qui concerne la dépendance fréquentielle, il est clair que les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ dépendent explicitement de la fréquence de par l'expression de la fonction de Green employée (équation (4.5)).

4.2 Méthode de calcul acoustique multi-fréquentielle

Dans cette partie, on considère que le champ de vitesse normale pariétale $\dot{\mathbf{X}}_S(t)$ associé aux vibrations de crissement est connu. Les analyses des vibrations associées aux différents cas de crissement étudiés ont montré que le champ de vitesse comportait plusieurs fréquences (Figures 3.10–3.17) générées par le caractère non linéaire du contact frottant. Le rayonnement acoustique ne peut donc pas être calculé par résolution directe des équations intégrales de l'acoustique linéaire (4.11). Afin de contourner cette difficulté, nous présentons à présent la

méthode de calcul acoustique multi-fréquentielle. L'idée principale de cette méthode consiste à décomposer le champ de vitesse en série de Fourier et d'effectuer un calcul de pression acoustique par composante fréquentielle pour enfin estimer le champ acoustique global par superposition. On décompose ainsi l'onde de pression globale en un nombre fini d'ondes élémentaires ayant une fréquence unique. Les étapes de calcul sont les suivantes.

4.2.1 Décomposition du champ de vitesse en série de Fourier

Comme expliqué au chapitre précédent, le spectre du champ de vitesse associé à un évènement de crissement contient des pics dont les fréquences sont des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales. Dans le cas le plus général, si la réponse dynamique contient p pulsations fondamentales ω_j avec $j = 1 \dots p$, où p et j sont des entiers naturels, les pics présents dans le spectre sont de la forme :

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots + k_j w_j + \dots + k_p w_p \quad (4.19)$$

avec $k_j \in [-N_h, N_h]$ et N_h correspond à l'ordre maximal détecté. Par exemple l'ordre associé à la pulsation défini par l'expression (6.1) vaut $\sum_{j=1}^p |k_j|$.

Le champ de vitesse normale $\dot{\mathbf{X}}_S(t)$ peut alors être décomposé en série de Fourier :

$$\dot{\mathbf{X}}_S(t) \approx \sum_{k_1=-N_h}^{N_h} \dots \sum_{k_p=-N_h}^{N_h} \mathbf{a}_{k_1, \dots, k_p} \cos(k_1 w_1 + \dots + k_p w_p) t + \mathbf{b}_{k_1, \dots, k_p} \sin(k_1 w_1 + \dots + k_p w_p) t \quad (4.20)$$

où $\mathbf{a}_{k_1, \dots, k_p}$ et $\mathbf{b}_{k_1, \dots, k_p}$ sont les vecteurs dont les composantes sont les coefficients de Fourier associés à la combinaison linéaire des pulsations w_i . En introduisant la base $\boldsymbol{\omega} = [w_1 \dots w_p]^T$ ainsi que le vecteur $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} t$, la vitesse prend la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{X}}_S(\boldsymbol{\tau}) \approx \mathbf{a}_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (4.21)$$

où le vecteur $\mathbf{k}$ contient les coefficients des combinaisons linéaires des pulsations fondamentales ω_j détectées. La contribution m du champ de vitesse associée à la combinaison linéaire $\mathbf{k}_m$ désignée par $\dot{\mathbf{X}}_{S_m}$ s'obtient en écrivant l'un des termes de la série de Fourier :

$$\dot{\mathbf{X}}_{S_m}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}_m} \cos(\mathbf{k}_m \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{b}_{\mathbf{k}_m} \sin(\mathbf{k}_m \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (4.22)$$

où les vecteurs $\mathbf{a}_{\mathbf{k}_m}$ et $\mathbf{b}_{\mathbf{k}_m}$ contiennent les coefficients de Fourier associés à la pulsation m .

4.2.2 Calcul de la pression acoustique par composante fréquentielle

Il est à présent possible de calculer la pression acoustique en utilisant la méthode des éléments finis de frontière. Dans un premier temps, le système linéaire (4.18) est résolu sur la peau de la structure afin de calculer la pression acoustique pariétale. Pour la composante fréquentielle m on a le système suivant :

$$(\mathbb{M}_m - \mathbb{C}) \hat{\mathbf{P}}_S^m = -jk\rho c \mathbb{L}_m \hat{\mathbf{V}}_n^m \quad (4.23)$$

où $\hat{\mathbf{P}}_S^m$ correspond à la pression pariétale associée à la pulsation m . Ensuite, la pression acoustique dans le volume extérieur V_{ext} est obtenue par résolution du système (4.16) en injectant la solution de pression pariétale $\hat{\mathbf{P}}_S^m$ préalablement calculée. Ceci conduit au système suivant :

$$\mathbb{C} \hat{\mathbf{P}}^m = \mathbb{M}_m \hat{\mathbf{P}}_S^m + jk\rho c \mathbb{L}_m \hat{\mathbf{V}}_n^m \quad (4.24)$$

où $\hat{\mathbf{P}}^m$ correspond à la pression acoustique extérieure pour la composante fréquentielle m . Il est à noter que les matrices BEM dépendent de la fréquence mais également du point considéré. Elles sont donc différentes sur la surface et dans le volume extérieur.

4.2.3 Estimation de la pression acoustique globale par superposition pondérée

Dans un premier temps, il faut déterminer si les sources élémentaires sont corrélées ou non. Deux sources non corrélées correspondent à deux sources indépendantes ayant des représentations temporelles différentes et sans relation de phase. C'est le cas des sons bruités ou des sources asynchrones. Dans ce cas, la pression acoustique totale ne correspond pas à la somme des pressions mais à la racine de la somme des carrés des pressions associées à chacune des sources. En revanche, deux sources sont corrélées si elles sont en phase ou simplement décalées dans le temps. Leurs représentations temporelles ont une relation de phase. C'est le cas des sons purs ou bien de sources synchrones. Dans ce cas, la pression totale correspond à la somme des pressions associées à chacune des sources. Dans notre étude, la nature du signal temporel de la vitesse liée à la décomposition en série de Fourier génère des sources corrélées. Afin d'avoir une vision instantanée du rayonnement, la reconstruction du champ de pression global dans le domaine temporel peut donc être approchée par une somme des pressions élémentaires. Cependant, seules les amplitudes complexes des champs de pression sont connues. En effet, les équations de la BEM sont écrites et résolues dans l'espace fréquentiel (i.e. en recherchant les solutions harmoniques) et sommer brutalement l'ensemble des contributions sous entendrait qu'elles rayonnent avec leurs amplitudes maximales simultanément. Les champs globaux de pression pariétale et rayonnée dans le domaine temporel noté $\mathbf{P}_S(t)$ et $\mathbf{P}(t)$ respectivement, s'obtiennent par superposition pondérée :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_S(t) &= \sum_{m=1}^{N_{\max}} \beta_m(t) \hat{\mathbf{P}}_S^m \\ \mathbf{P}(t) &= \sum_{m=1}^{N_{\max}} \beta_m(t) \hat{\mathbf{P}}^m\end{aligned}\tag{4.25}$$

où le coefficient $\beta_m(t)$ correspond au ratio entre l'amplitude maximum de la vitesse normale et la valeur de la vitesse au temps t et $N_{\max}$ correspond au nombre de fréquences détectées. $\beta_m(t)$ s'écrit donc de la façon suivante :

$$\beta_m(t) = \frac{V_n^m(t)}{\hat{V}_n^m}\tag{4.26}$$

Prenons l'exemple d'un champ de vitesse composé de deux composantes fréquentielles. On peut voir sur la Figure 4.2 une illustration de l'évolution temporelle des deux composantes. Sur ce cas simple et schématique on comprend l'importance de considérer une pondération pour la reconstruction de la pression globale. Dans notre étude, le pas de temps permettant d'obtenir la valeur des coefficients de pondération correspond au pas de temps où le plus grand nombre de composantes fréquentielles sont actives dans le champ de vitesse. Ceci permet d'avoir les cas les plus défavorables où le rayonnement sera le plus complexe et avec les niveaux sonores les plus importants.

Enfin, on s'intéresse au niveau total de pression acoustique en décibels. Le ressenti auditif n'est pas proportionnel à la pression : l'oreille fonctionne comme une échelle logarithmique. L'expression classique du niveau de pression acoustique en décibels est la suivante :

$$L_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{\mathbf{P} \mathbf{P}^*}{P_{\text{ref}}^2} \right)\tag{4.27}$$

où P_{ref} correspond à la pression minimum audible et vaut 2×10^{-5} Pa.

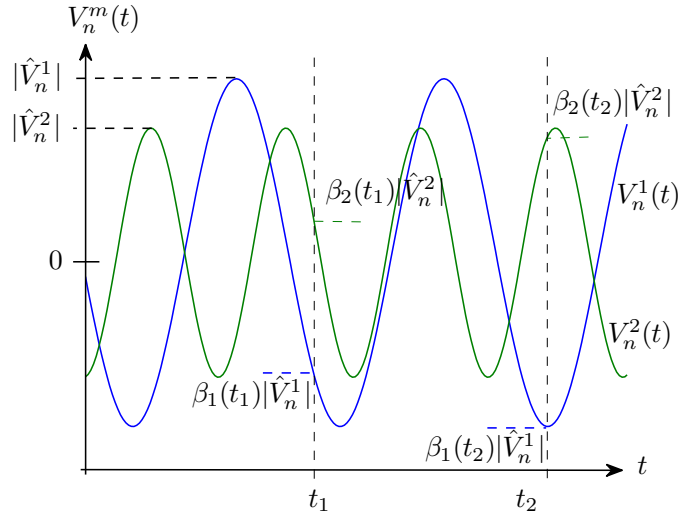


Figure 4.2 – Illustration du coefficient de pondération $\beta_m(t)$.

4.2.4 Démarche globale de calcul des émissions sonores lors du crissement

Durant ces travaux, la méthode de calcul du rayonnement acoustique multi-fréquentielle a été développée et s'intègre dans la démarche globale d'analyse du crissement présentée au chapitre 3. Elle réalise le couplage fluide/structure permettant d'aller des vibrations non linéaires jusqu'au rayonnement acoustique.

Sur la Figure 4.3 nous rappelons l'ensemble de la démarche. La partie bleue correspond au calcul des vibrations du chapitre précédent et l'étape permettant de réaliser le couplage est la décomposition de la vitesse en série de Fourier (cadre jaune). Puis, la partie acoustique, en rouge, est composée de deux étapes : une boucle sur les fréquences détectées pour évaluer la pression acoustique par composante harmonique, puis la superposition pondérée pour estimer le champ global.

Cette démarche est valable quelque soit le modèle de frein étudié et nous avons choisi d'illustrer son application sur un cas simple. Le niveau de description peut évidemment être augmenté avec un modèle plus réaliste ainsi que des lois de contact et frottement issues de campagnes expérimentales par exemple.

4.3 Application au système de frein

Dans cette partie, la méthode acoustique est appliquée aux cas d'études de la Table 3.3 du chapitre précédent. On s'intéresse au rayonnement en régime stationnaire uniquement.

4.3.1 Construction et validité du maillage

Construction du maillage éléments finis de frontière

Le maillage surfacique employé est construit en sélectionnant la peau du maillage élément finis présenté au premier chapitre. Le maillage éléments finis de frontière se compose d'éléments quadrangulaires et l'évolution spatiale du champ de pression est décrite par des fonctions de formes linéaires.

Dans cette étude, on ne conservera que la partie supérieure de la peau comme illustré sur les Figures 4.4 (a) et (b). Cette approximation est spécifique aux cas étudiés puisque les analyses des vibrations ont montré que les vitesses normales pariétales sur la circonférence

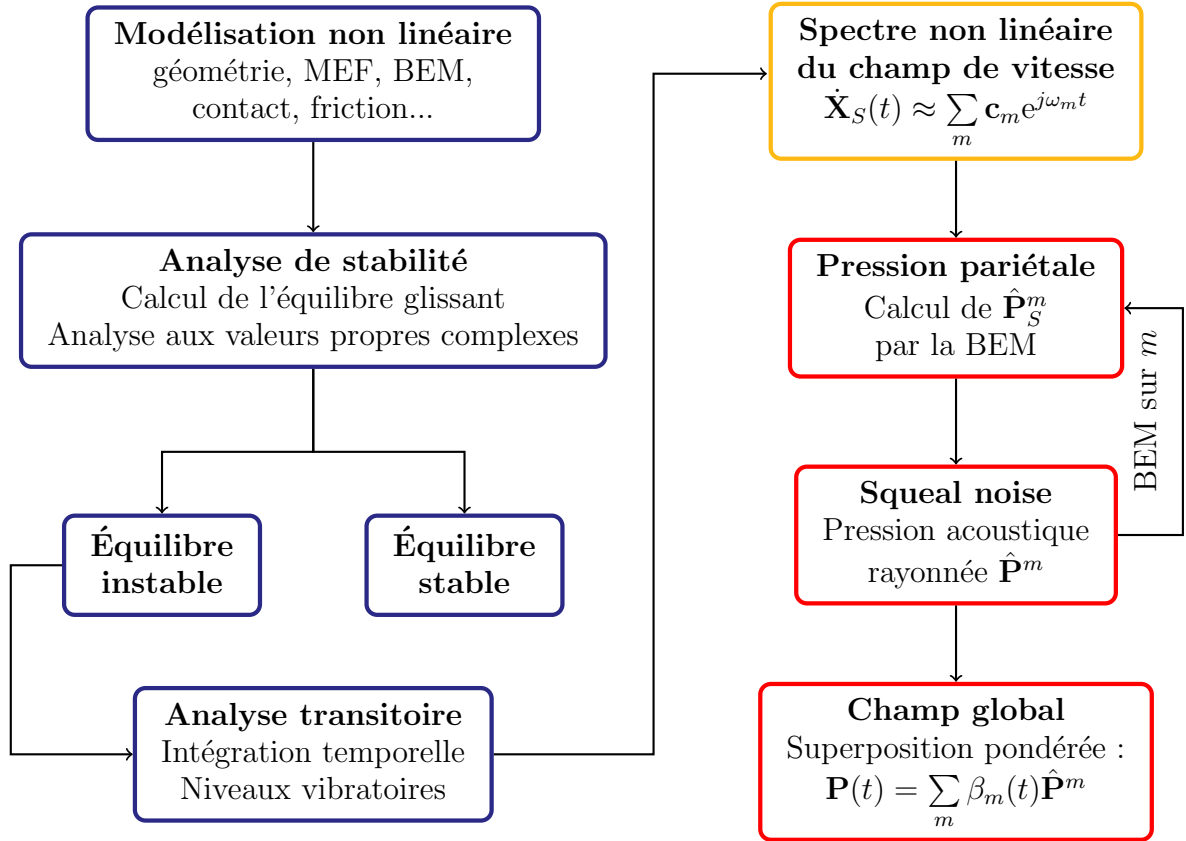


Figure 4.3 – Démarche globale d'analyse du crissement (calcul des vibrations et du bruit rayonné).

étaient quasiment nulles (résultats non présentés). Cela est dû au fait que les réponses dynamiques sont principalement composées de vibrations de flexion. Ceci nous autorise alors à considérer que les surfaces supérieure et inférieure sont déconnectées dans le problème acoustique. De plus, on s'intéresse au rayonnement acoustique dans le demi-espace des altitudes positives (i.e. selon $+\mathbf{z}$) et donc seule la surface supérieure est retenue dans cette étude.

En toute rigueur, il faudrait considérer la peau de chacune des sous structures et tenir compte du fait que ces dernières peuvent être en contact ou décollées. Cependant, la description de l'interface avec neuf points de contact n'est pas suffisante pour avoir ce niveau de détail. De plus, l'interface ne peut rayonner que lors des configurations de perte de contact puisqu'elle doit être en contact direct avec le fluide. Ceci nous autorise alors à utiliser l'hypothèse du maillage proposé sur la Figure 4.4 (b).

La gestion du maillage de l'interface soulève alors le problème de la connexion des maillages. En effet, le disque et la plaquette ont des maillages éléments finis distincts. Ainsi, les nœuds situés sur le contour extérieur à l'interface doivent être fusionnés (i.e. les points rouges sur la Figure 4.4). Cependant, ces nœuds possèdent des vitesses normales différentes et il nous faut donc proposer une approximation de la vitesse normale. Le traitement de la vitesse normale lors de la connexion des maillages est décrit sur la Figure 4.4 (c)–(d). L'idée est de construire une normale unique $\hat{\mathbf{n}}$ qui correspond à la moyenne des normales de chaque sous structure puis de projeter les deux vitesses sur $\hat{\mathbf{n}}$. Ensuite, l'approximation proposée consiste à moyenner les vitesses normales sur les nœuds connectés.

Enfin, la dernière approximation utilisée sur ce modèle concerne les points connectés. Dans la formulation du contact employée, les nœuds connectés ne sont pas sélectionnés

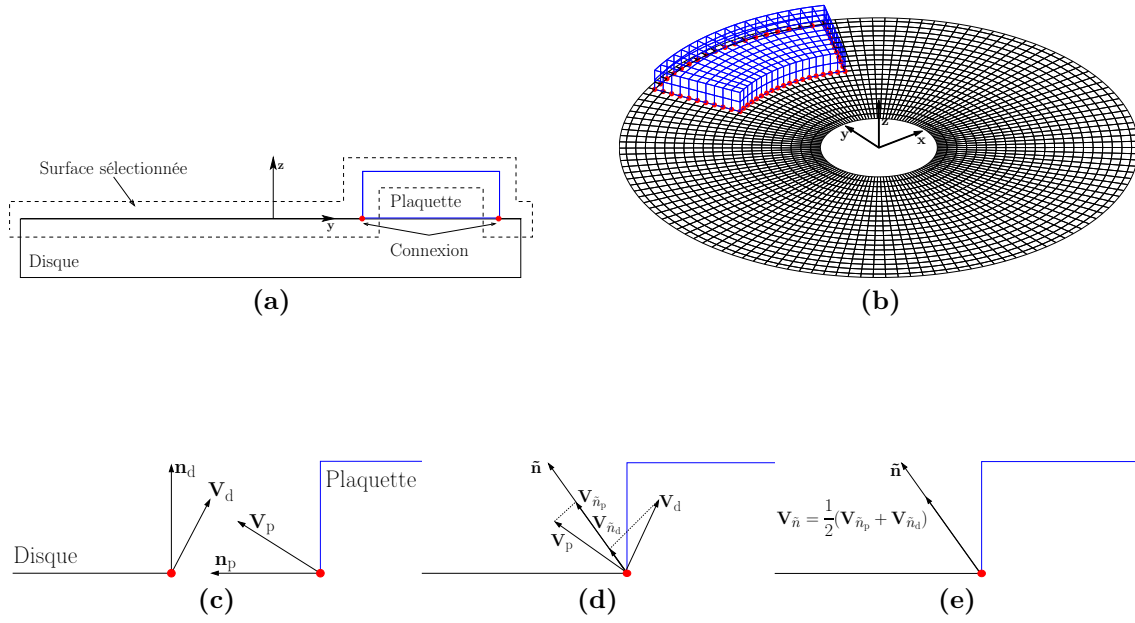


Figure 4.4 – Construction du modèle éléments finis de frontière et traitement de la connexion des maillages. (a) Illustration de la sélection des maillages surfaciques, (b) maillage surfacique retenu, (c) maillages EF déconnectés, (d) processus de connexion et (e) vitesse normale moyennée à la connexion.

(Figure 3.2). Ces derniers peuvent donc potentiellement être sujets à de l'interpénétration sans que le contact ne soit actif. Comme expliqué plus haut, lors de ces configurations, les éléments impliqués ne sont pas en contact avec le fluide et ne peuvent rayonner. Ce phénomène sera négligé dans notre étude et les vitesses de ces nœuds seront considérées.

D'autre part, il existe certaines limitations concernant la méthode de construction du maillage surfacique employé. Ce dernier est construit en sélectionnant la peau du maillage éléments finis. Cette méthode n'est pas la plus précise et un algorithme d'optimisation de maillage peut être utilisé afin d'améliorer le maillage en limitant les erreurs d'intégration numérique. Le lecteur intéressé pourra se référer à [101] où une étude complète de l'influence du maillage sur le rayonnement est proposée. En ce qui concerne l'influence du type d'éléments surfaciques et l'ordre des fonctions de formes, une revue détaillée est proposée par Marburg et Schneider dans [111].

Validité du maillage

La convergence du maillage éléments finis ne garantit pas celle du maillage surfacique pour le problème acoustique. Une valeur classique pour la taille caractéristique des éléments est de considérer environ 8 à 10 éléments par longueur d'onde [111]. Cette valeur n'est cependant pas une règle générale, elle permet dans la majorité des cas d'avoir une solution convergée mais peut également surestimer la finesse du maillage. Nous cherchons à construire un modèle ayant le moins de degrés de liberté possible et nous avons donc mené une étude de convergence afin d'optimiser la taille du système. L'idéal serait de pouvoir conserver la finesse du maillage éléments finis. L'étude menée consiste à observer la convergence de la pression pariétale associée à la fréquence d'étude la plus haute, soit environ 20 kHz. Les calculs de pression pariétale sont effectués par la BEM, une partie des codes développés dans [112] ont été utilisés et on se concentre sur les niveaux de pression acoustique en décibels. Le calcul est mené avec la composante $2f_2$ du champ de vitesse associée au cas 3_{statique} , et les niveaux de pression pariétale en décibels sont affichés sur les deux maillages testés. En comparant la

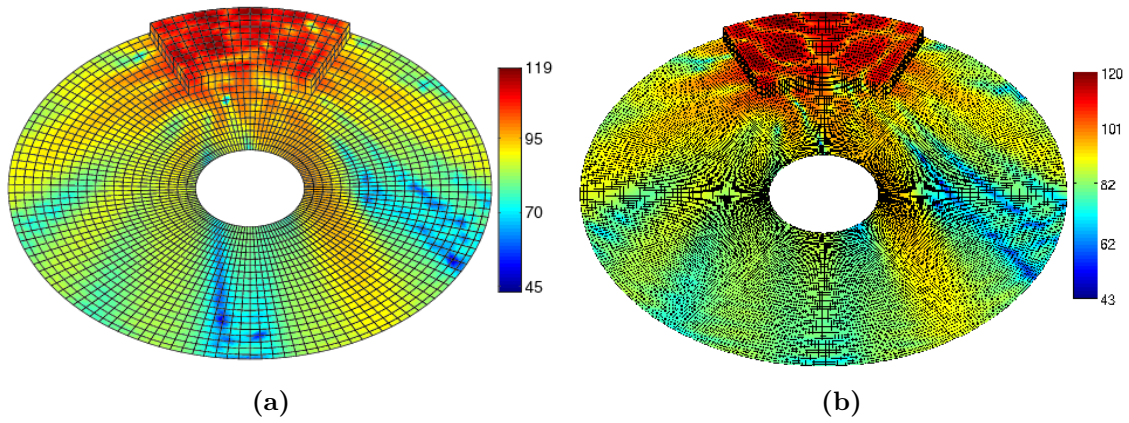


Figure 4.5 – Convergence du maillage éléments finis de frontière. Niveau de pression pariétale en décibel associé à la composante de vitesse ayant la plus haute fréquence. (a) Taille caractéristique 8×10^{-3} m et (b) taille caractéristique 2×10^{-3} m.

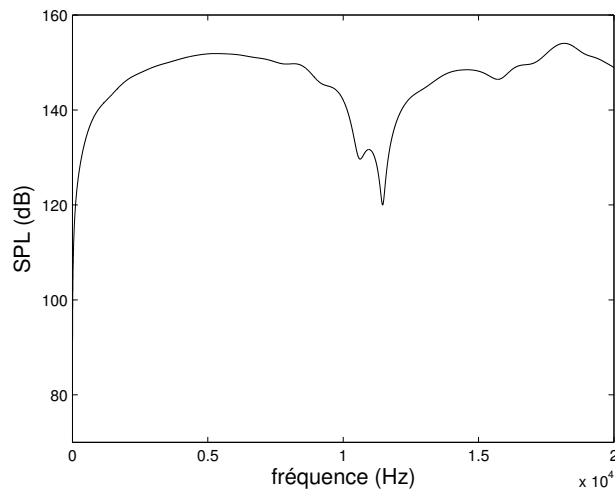


Figure 4.6 – Évolution du niveau de pression acoustique en fonction de la fréquence du champ de vitesse unitaire.

solution associée à la finesse éléments finis (Figure 4.5 (a)) à celle d'un maillage respectant les 8 à 10 éléments par longueur d'onde (Figure 4.5 (b)), on obtient un écart relatif d'environ 3%. Ce résultat permet alors d'utiliser directement la peau du maillage éléments finis.

Le dernier point à vérifier pour compléter la validation du maillage proposé en Figure 4.4 (b) concerne les fréquences irrégulières (c.f. section 4.1.2). Afin de détecter la présence de ces singularités, un champ de vitesse unitaire est appliqué sur la maillage surfacique. Puis, le niveau de pression acoustique en un point du volume extérieur est évalué en incrémentant la fréquence du champ de vitesse. L'analyse de l'évolution du niveau en fonction de la pression permet de détecter les fréquences parasites. Sur la Figure 4.6, on remarque l'absence de pics de résonances factices et on peut donc conclure que le maillage ne présente pas de fréquences parasites sur la bande fréquentielle d'étude.

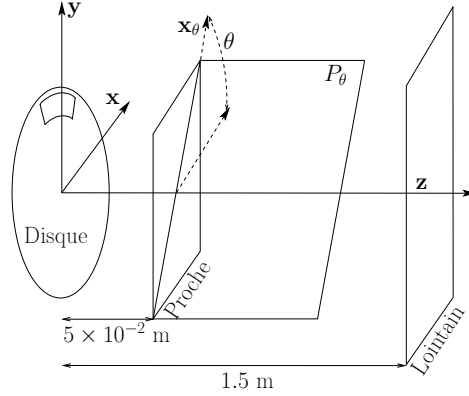


Figure 4.7 – Illustration des plans d'écoutes utilisés pour l'analyse du rayonnement acoustique.

4.3.2 Rayonnement acoustique des cas à un et deux modes instables

Définition des plans d'écoute

Afin d'analyser le rayonnement acoustique en espace libre, nous définissons les différents plans d'écoute sur lesquels sont calculés et affichés les champs de pression acoustique. Le premier plan d'écoute est le maillage surfacique sur lequel sera affichée la pression pariétale. Ensuite, on cherche à caractériser le rayonnement en champ "proche" et "lointain", sur des plans horizontaux et verticaux. Nous choisissons alors deux plans horizontaux et parallèles au plan (x, y) : le premier mesure 1.5×1.5 m et se situe à 5×10^{-2} m au-dessus du disque, le second mesure 4×4 m et se situe à 1.5 m. Les suivants sont les plans verticaux (z, x_θ) notés P_θ et illustrés sur la Figure 4.7. Dans notre étude, les valeurs choisies pour l'angle θ sont 0 et $\pi/2$.

L'ensemble de ces plans est discrétisé selon des points d'écoute et leur nombre doit faire l'objet d'une étude de convergence pour garantir une bonne description spatiale du champ rayonné. L'étude menée consiste à calculer la pression rayonnée en augmentant progressivement le nombre de points. Dans notre étude, mille points d'écoute par plan permettent d'avoir cette convergence.

Dans la suite de cette étude, le terme "champ proche" sera employé pour désigner le plan horizontal situé à 5×10^{-2} m et le terme "champ lointain" désignera le plan situé à 1.5 m. En réalité, les champs proche et lointain sont définis par $kl \ll 1$ et $kl > 1$ respectivement, où l correspond à la distance à la source et k est le nombre d'onde. Il est important de remarquer que les effets de champ proche n'ont pas lieu sur les plans d'étude puisque la plus petite valeur de kl est de l'ordre de 1.

Rayonnement à un mode instable - Cas 2_{statique}

Le cas 2_{statique} correspond à un coefficient de frottement de 0.72 et à la présence d'un mode instable. La première étape de la méthode acoustique multi-fréquentielle permet de détecter les fréquences du spectre du champ de vitesse. La base de Fourier associée au cas 2_{statique} est donnée dans la Table 4.1.

Ensuite, le champ de vitesse est décomposé en série de Fourier suivant les fréquences de la Table 4.1 et le champ global de vitesse normale pariétale est affiché sur le maillage (Figure 4.8 (a)). On remarque que le profil du champ de vitesse est analogue à la déformée du premier mode instable illustré sur les Figures 3.9 (a) et (b). La pression pariétale est alors calculée par composante fréquentielle et la pression globale est obtenue par superposition pondérée. Sur la Figure 4.8 (b), on peut voir que la pression pariétale varie de 80 à 126 dB avec un maximum situé sur la garniture. De plus, sur la surface du disque, on remarque la

Table 4.1 – Base de Fourier du cas 2_{statique} en zone B.

Ordre	Composante	Fréquence (Hz)
1	f_1	930
2	$2f_1$	1860
3	$3f_1$	2790
4	$4f_1$	3720
5	$5f_1$	4650
6	$6f_1$	5580
10	$10f_1$	9300

présence de zones où le niveau est d'environ 160 dB qui correspondent à des phénomènes de réflexions de la garniture sur le disque. Dans notre cas, il semblerait que les émissions de crissement sont générées par la garniture principalement. La méthode permet également d'avoir une vision du champ rayonné dans l'espace et on peut voir sur la Figure 4.8 (c) que le champ présente un lobe vertical prédominant : la propagation s'effectue principalement dans la direction $\mathbf{z}$. On note tout de même la présence de quatre lobes sur le champ proche. De plus, la propagation semble diffuse, le phénomène d'interférence est constructif et cela provient du fait que seule la fréquence fondamentale f_1 et quelques harmoniques participent au rayonnement.

Rayonnement à deux modes instables - Cas 3_{statique} et 4_{statique}

La méthode est également appliquée aux cas 3_{statique} et 4_{statique} présentant deux modes instables. Les fréquences détectées sont listées dans les Tables 4.2 et 4.3, et comme illustré au chapitre 3, le contenu fréquentiel est très riche pour ces cas à deux modes instables. En ce qui concerne le champ de vitesse normale pariétale, ces deux cas ont des motifs relativement proches. On remarque que les profils de vitesses sont analogues au second mode instable calculé lors de l'analyse de stabilité (Figures 3.9 (c) et (d)). La présence de fréquences élevées dans le spectre est souvent associée à des variations spatiales complexes ce qui explique les profils observés. Cependant, on remarque que le cas 3_{statique} présente des amplitudes de vitesses nettement inférieures à celles du cas 4_{statique} (Figures 4.9 (a) et 4.10 (a)). Ces écarts de vitesse génèrent des écarts de niveau de pression acoustique pariétale comme le montrent les Figures 4.9 (b) et (c). Enfin, le rayonnement acoustique sur les plans d'écoute laisse apparaître plusieurs directions privilégiées de propagation. Ceci est dû à la participation de deux modes instables dans la réponse dynamique (Figures 4.9 (c) et 4.10 (c)). On observe également la présence d'interférences destructives qui génèrent des zones de bas niveaux sonores et qui contribuent à la complexité du champ. On retrouve également que le champ rayonné devient très directif lorsque que le nombre d'onde augmente : la complexité du profil de vitesse se reporte alors intuitivement sur le rayonnement.

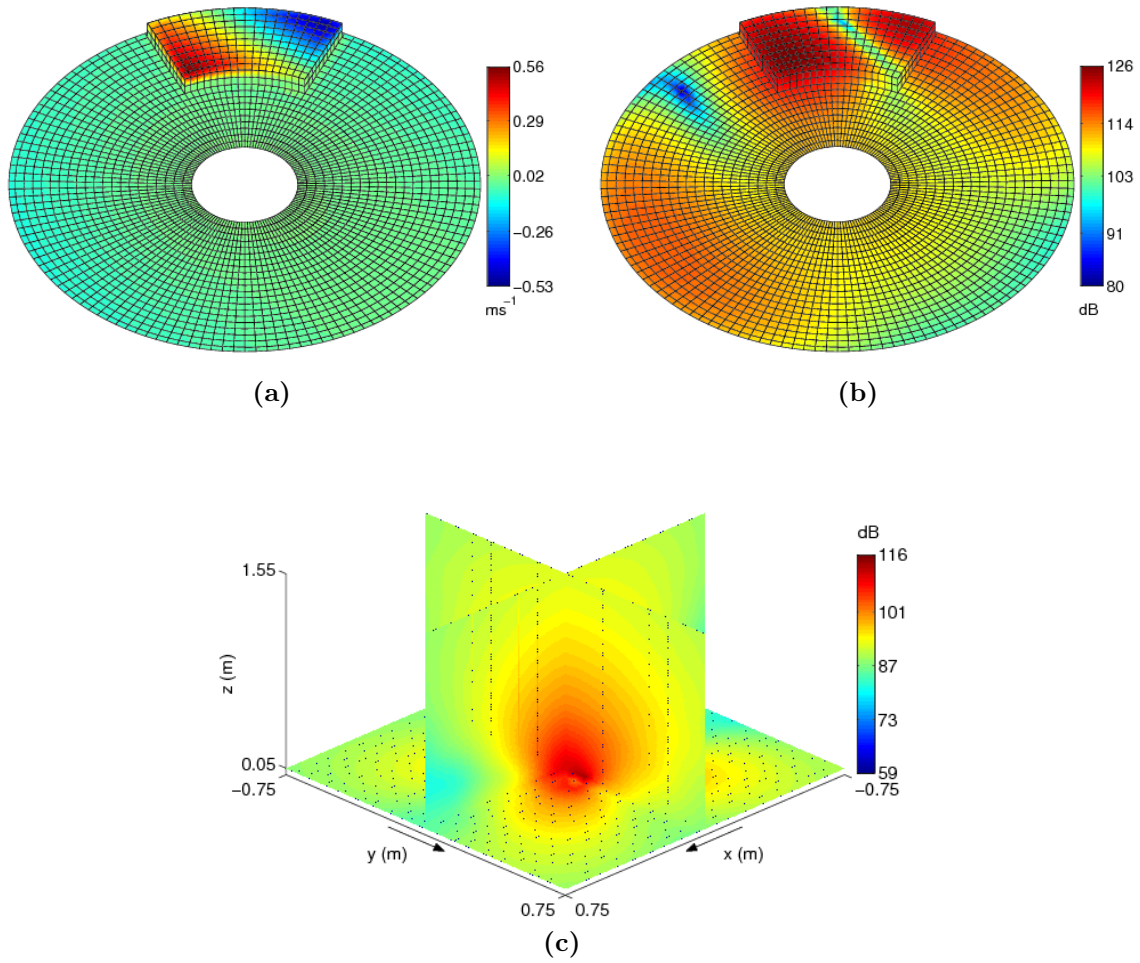


Figure 4.8 – Rayonnement acoustique du cas 2_{statique} en régime stationnaire final. (a) Champ de vitesse normale pariétal, (b) niveau de pression pariétal L_{dB} et (c) L_{dB} en champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$.

Table 4.2 – Base de Fourier du cas $\mathfrak{Z}_{\text{statique}}$ en zone B.

Ordre	Composante	Fréquence (Hz)
1	f_1	920
	f_2	9421
2	$2f_1$	1840
	$-f_1 + f_2$	8501
	$f_1 + f_2$	10341
	$2f_2$	18842
3	$3f_1$	2760
	$-2f_1 + f_2$	7581
	$2f_1 + f_2$	11261
	$-f_1 + 2f_2$	17922
	$f_1 + 2f_2$	19762
4	$-2f_1 + 2f_2$	17002
11	$10f_1 + f_2$	18621

Table 4.3 – Base de Fourier du cas 4_{statique} en zone B.

Ordre	Composante	Fréquence (Hz)
1	f_1	918
	f_2	9422
2	$2f_1$	1836
	$-f_1 + f_2$	8504
	$f_1 + f_2$	10340
	$2f_2$	18844
3	$3f_1$	2754
	$-2f_1 + f_2$	7586
	$2f_1 + f_2$	11258
	$-f_1 + 2f_2$	17926
	$f_1 + 2f_2$	19762
4	$4f_1$	3672
	$-3f_1 + f_2$	6668
	$3f_1 + f_2$	12176
	$-2f_1 + 2f_2$	17008
5	$-4f_1 + f_2$	5750
	$4f_1 + f_2$	13094
	$-3f_1 + 2f_2$	16090
6	$6f_1$	5508
7	$7f_1$	6426
	$-5f_1 + 2f_2$	14254
	$6f_1 + f_2$	14930
8	$-7f_1 + f_2$	2996
	$7f_1 + f_2$	15848
9	$-8f_1 + f_2$	2078
	$-7f_1 + 2f_2$	12418
	$8f_1 + f_2$	16766
10	$-9f_1 + f_2$	1160
11	$-10f_1 + f_2$	242
	$10f_1 + f_2$	18602

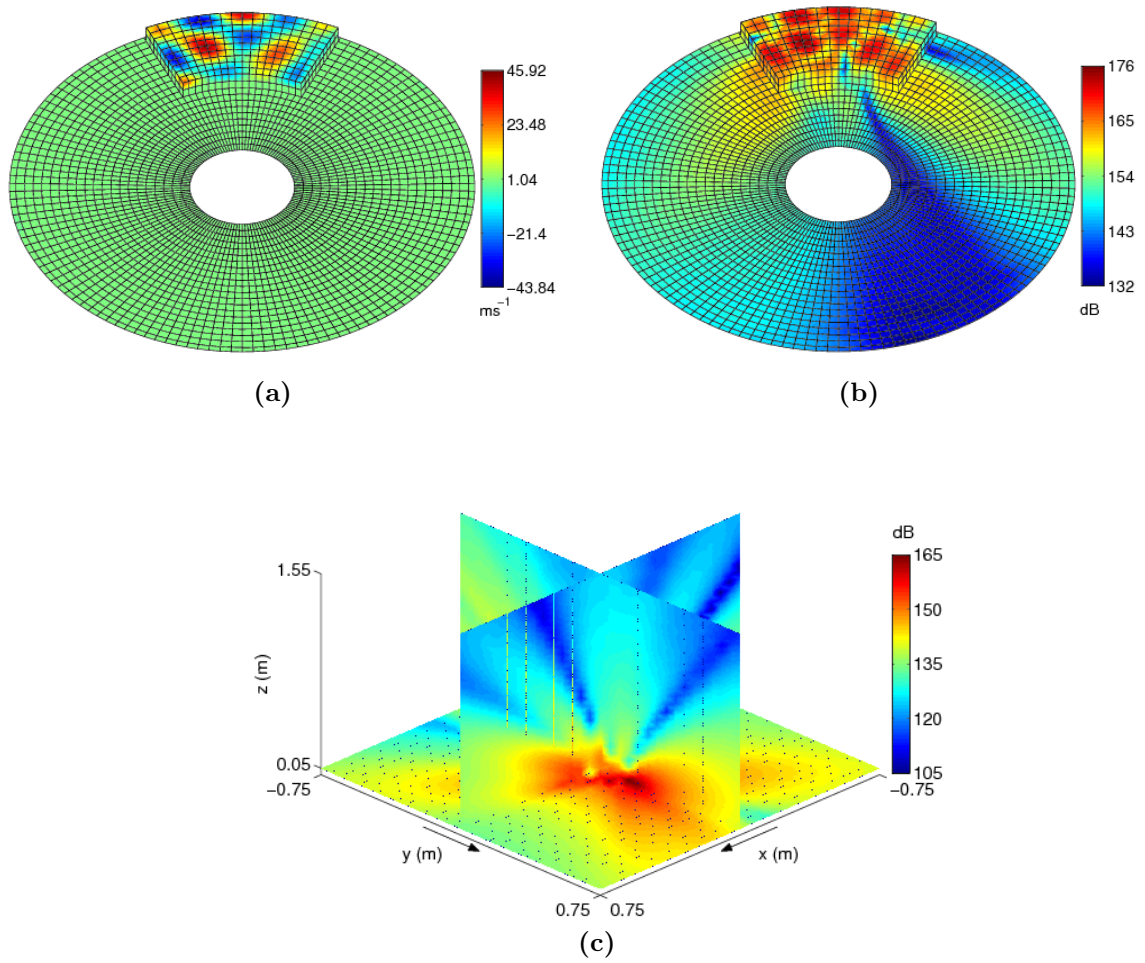


Figure 4.9 – Rayonnement acoustique du cas 3_{statique} en régime stationnaire final. (a) Champ de vitesse normale pariétal, (b) niveau de pression pariétal L_{dB} et (c) L_{dB} en champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$.

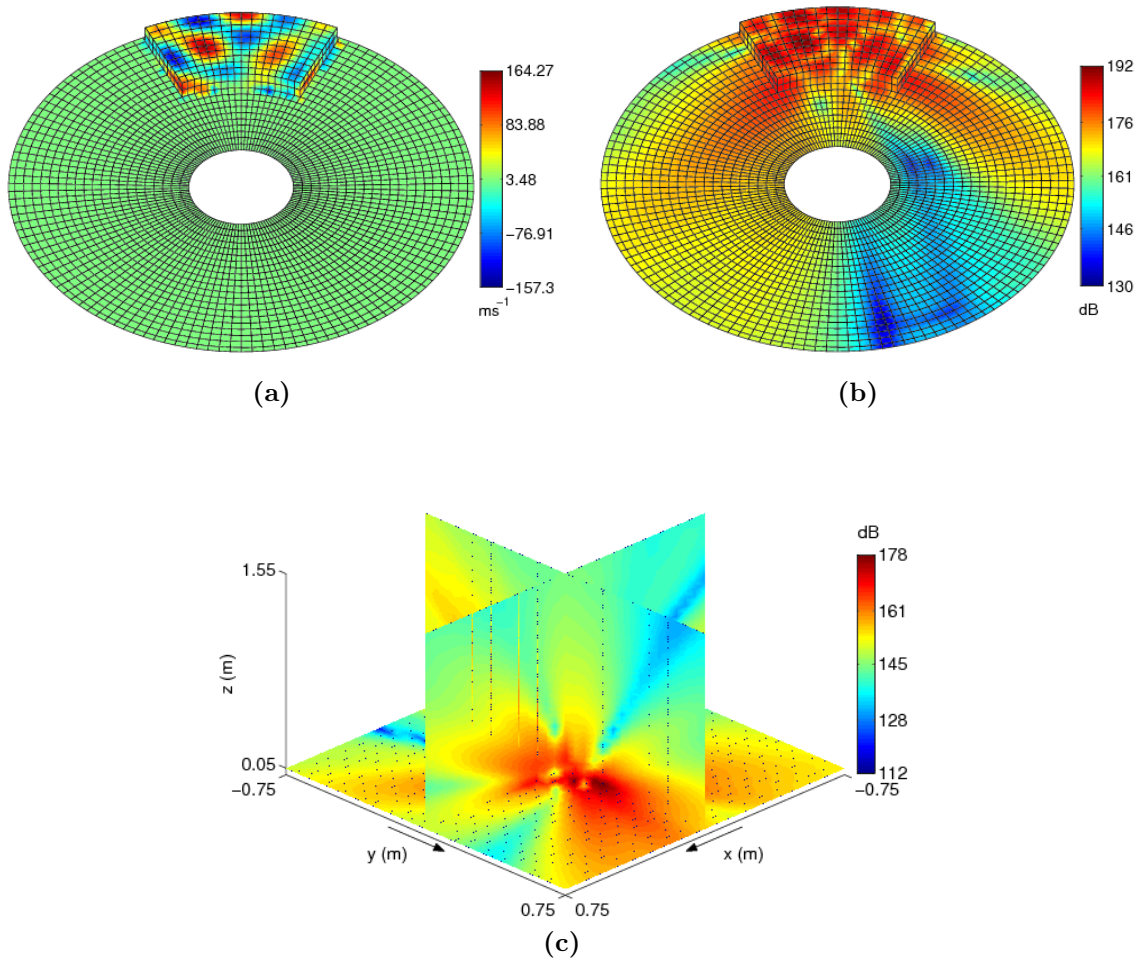


Figure 4.10 – Rayonnement acoustique du cas 4_{statique} en régime stationnaire final. (a) Champ de vitesse normale pariétal, (b) niveau de pression pariétal L_{dB} et (c) L_{dB} en champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$.

4.3.3 Étude de convergence de la pression acoustique

Les cartes de niveau de pression acoustique présentées précédemment sont le résultat de la superposition pondérée calculée avec toutes les composantes fréquentielles. D'après les Tables 4.1, 4.2 et 4.3, on remarque qu'un grand nombre de fréquences est nécessaire pour la description temporelle du champ de vitesse normale. Ainsi, il semble important d'analyser et d'identifier les composantes qui participent de façon non négligeable au rayonnement acoustique.

L'étude de convergence est menée en construisant l'erreur relative ϵ_I suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_I &= \left\| \frac{\mathbf{P}_S - \mathbf{P}_S^I}{\mathbf{P}_S} \right\| \\ &= \left\| \frac{\sum_{m=1}^{N_{\max}} \beta_m(t) \hat{\mathbf{P}}_S^m - \sum_{m=1}^I \beta_m(t) \hat{\mathbf{P}}_S^m}{\sum_{m=1}^{N_{\max}} \beta_m(t) \hat{\mathbf{P}}_S^m} \right\| \\ &= \left\| \frac{\sum_{m=I+1}^{N_{\max}} \beta_m(t) \hat{\mathbf{P}}_S^m}{\sum_{m=1}^{N_{\max}} \beta_m(t) \hat{\mathbf{P}}_S^m} \right\| \end{aligned} \quad (4.28)$$

où $\mathbf{P}_S$ correspond à la pression pariétale calculée en retenant toutes les composantes fréquentielles, et $\mathbf{P}_S^I$ est la pression tronquée au rang I avec $I = 1 \dots N_{\max}$. Il est important de préciser que les composantes fréquentielles sont rangées par ordre croissant et par fréquences croissantes pour chaque ordre comme indiqué dans les Tables 4.1, 4.2 et 4.3. Ce tri est choisi arbitrairement et fera l'objet d'une étude plus poussée au chapitre 6. L'étude de l'erreur ϵ_I revient à étudier l'impact de l'erreur induite par la troncature de la série de Fourier associée à la vitesse sur la pression acoustique.

Sur la Figure 4.11, on peut voir que le rayonnement global associé au cas 2_{statique} à un mode instable est largement dominé par la pression acoustique associée à la fréquence f_1 . En effet, la base composée de la composante f_1 fournit une erreur de 0.32 % ce qui est très faible. Puis, rajouter la composante $2f_1$, c'est-à-dire utiliser la base composée de f_1 et $2f_1$, donne une erreur de 0.02 %. On peut donc conclure que malgré la complexité du spectre de la vitesse, peu de fréquences participent au rayonnement. On obtient des résultats similaires pour les cas 3_{statique} et 4_{statique} qui présentent également quelques composantes fréquentielles prédominantes dans le rayonnement. Pour ces deux cas, les composantes principales sont les fréquences fondamentales f_1 et f_2 .

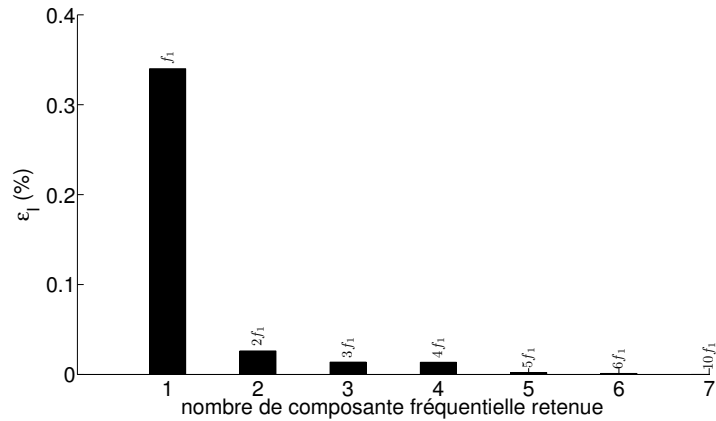


Figure 4.11 – Analyse de la convergence de la pression pariétale en fonction du nombre de composante fréquentielle retenue pour le cas 2_{statique} .

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la méthode de calcul acoustique permettant d'estimer le rayonnement acoustique associé à des vibrations de crissement non linéaires et auto-entretenues. Puis, le modèle surfacique de frein a été introduit et validé. La méthode a ensuite été appliquée sur des cas classiques d'instabilités par couplage de modes. Cet outil numérique permet de caractériser précisément le rayonnement acoustique en termes de niveau et de directivité. L'un des objectifs de cet thèse est ainsi atteint puisque nous disposons à présent d'outils numériques spécifiques qui s'intègrent dans une démarche globale d'analyse du crissement (comportant les différentes étapes : modélisation, stabilité, vibrations auto-entretenues et rayonnement acoustique). Ceci nous permet de mener des études paramétriques et d'identifier les facteurs qui ont un impact sur les niveaux vibratoires et sonores.

D'autre part, nous avons montré sur des cas simples qu'il n'était pas nécessaire de tenir compte de toute la richesse du spectre de la vitesse pour obtenir une bonne description du rayonnement : quelques composantes fréquentielles semblent suffire.

Enfin, les résultats numériques n'ont pas été confrontés à des mesures expérimentales et les niveaux obtenus semblent peu réalistes : les quelques travaux expérimentaux affichent des niveaux de pression acoustique maximaux aux alentours de 120 dB à une distance d'environ un mètre de la source. Cet écart s'explique par l'ensemble des hypothèses simplificatrices employées telles que les lois de contact et de frottement, ainsi que le fait de ne considérer qu'un disque et un garniture. Nous rappelons cependant que l'objectif de la thèse n'est pas de modéliser finement la réalité mais de proposer une méthodologie complète sur un modèle simplifié.

Chapitre 5

Influence des paramètres sur les vibrations et le rayonnement acoustique d'un évènement de crissement

Sommaire

5.1	Contexte et cas d'études	105
5.1.1	Position du problème	105
5.1.2	Coefficients de frottement et chargements envisagés	106
5.2	Vibrations non linéaires sous chargement temporel	109
5.2.1	Déstabilisation d'un cas stable par le chargement temporel	109
5.2.2	Influence du chargement temporel sur le cas à un mode instable	109
5.2.3	Influence du chargement temporel sur le cas à deux modes instables	110
5.2.4	Analyse de la position moyenne	113
5.3	Rayonnement acoustique sous chargement temporel	113
5.3.1	Cas 1_{rapide} stable déstabilisé par la rampe	114
5.3.2	Cas 2_{statique} à un mode instable	114
5.3.3	Cas 3_{statique} à deux modes instables	117
5.4	Analyse de la convergence de la pression acoustique	118
5.5	Conclusion	122

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier l'influence de certains paramètres sur les vibrations et le rayonnement acoustique. L'objectif est d'apporter une compréhension sur les mécanismes de déclenchement du crissement et sur certains facteurs influant sur le rayonnement. Nous nous intéressons plus spécifiquement au coefficient de frottement et au profil de chargement appliqué sur le frein. Il est important de noter dès à présent que l'influence du chargement n'est jamais prise en compte dans les études numériques de crissement.

5.1 Contexte et cas d'études

5.1.1 Position du problème

L'analyse de stabilité présentée au chapitre 3 détecte les modes potentiellement instables. Cette analyse permet de prédire les occurrences de crissement et son efficacité a été prouvée expérimentalement [17]. L'analyse des vibrations calculées par intégration temporelle permet quant à elle d'identifier les modes instables ainsi que le spectre non linéaire composé des harmoniques et des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales instables. D'autre part, la réponse temporelle permet d'observer les éventuelles variations des fréquences des modes instables principalement dues aux effets non linéaires. Lors de l'intégration temporelle, si le système est placé suffisamment proche de l'équilibre glissant, alors les résultats de stabilité sont en accord avec ceux de l'intégration temporelle.

D'autre part, il a été montré que l'analyse aux valeurs propres complexes peut conduire à surestimer ou sous estimer les contributions des "modes instables" présents dans les réponses transitoire et stationnaire [93]. Il est possible d'obtenir différents comportements non linéaires pour le même coefficient de frottement (i.e. pour le même résultat de stabilité) mais pour des perturbations de l'équilibre glissant différentes. Ce phénomène est également observé dans [102], où une méthode globale pour la compréhension et la caractérisation du crissement des freins dans l'industrie ferroviaire, basée sur des résultats expérimentaux et des simulations transitoires est proposée. Cette étude montre que les vibrations non linéaires peuvent comporter des pics de résonances inattendus. Ces observations mettent en lumière le

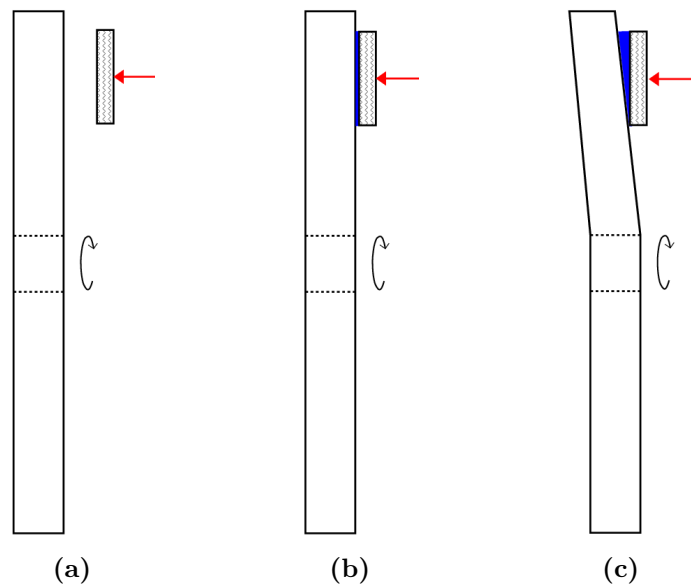


Figure 5.1 – Illustration d'une séquence de freinage pour le système disque/garniture.

caractère local de l'analyse de stabilité : si la condition initiale n'est pas dans un voisinage de l'équilibre glissant, c'est-à-dire que $\|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}(0)\| < \alpha$ (Définition 2 et Figure 2.9 du chapitre 2), alors le comportement non linéaire du système dynamique ne peut être prédit.

Aussi, une séquence de freinage peut se décomposer en trois étapes avec l'application de la pression de freinage, la mise en contact de la plaquette contre le disque et l'atteinte de la position d'équilibre glissant (Figure 5.3). Dans la littérature, le calcul des vibrations s'effectue en général en initialisant le système près de l'équilibre glissant comme expliqué au chapitre 3 : le système non linéaire à intégrer doit initialement être dans un voisinage de l'équilibre glissant afin d'être proche de son linéarisé pour que l'analyse de stabilité soit prédictive. Cependant, le principal inconvénient de cette approche réside dans le fait que les vibrations générées pour placer le système dans sa configuration d'équilibre glissant sont complètement négligées. Afin de prendre en compte la mise en charge du système, il faut considérer un trajet de chargement qui le place dans la configuration d'équilibre glissant.

Cependant, l'analyse de stabilité présentée au chapitre 3 ne permet pas de tenir compte du chargement temporel. Ceci est dû au fait que l'étape de linéarisation doit s'effectuer autour d'une configuration indépendante du temps. Le caractère non conservatif du frottement rend la réponse dynamique fortement dépendante du trajet de chargement et les limitations de l'analyse de stabilité nous obligent à effectuer des simulations transitoires par intégration temporelle.

Les trois axes qui seront développés dans ce chapitre sont les suivants :

1. quelle est l'influence du coefficient de frottement sur le rayonnement ?
2. un chargement temporel constitue-t-il un mécanisme de génération du crissement ?
3. quelle est l'influence du trajet de chargement et des conditions initiales sur la dynamique et l'acoustique du crissement ?

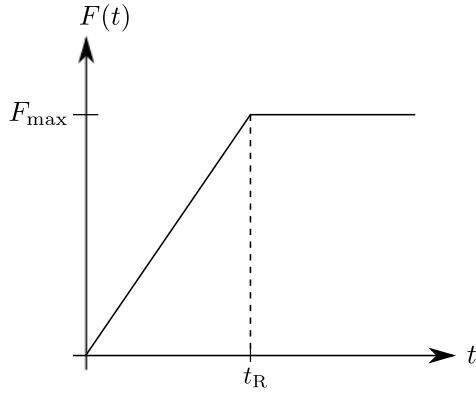
5.1.2 Coefficients de frottement et chargements envisagés

Afin de répondre aux questions précédentes, il faut introduire différents jeux de conditions initiales et de trajets de chargement. L'idée principale est de voir l'influence de ces derniers sur la réponse dynamique et le rayonnement pour un même résultat de stabilité. Lors d'une procédure de freinage, le profil de freinage présente une montée en pression, une stabilisation et une descente. En toute rigueur, ce profil n'est pas nécessairement une rampe, c'est-à-dire que la montée n'est pas forcément linéaire et la phase de stabilisation peut présenter des fluctuations. Cependant, l'objectif de ce chapitre est de montrer l'influence d'un chargement temporel, représentant qualitativement un chargement "réel", sur le comportement non linéaire du frein.

Nous nous orientons vers un trajet de chargement en rampe dont la vitesse de charge est paramétrée par le temps de montée t_R . Ensuite, pour un même coefficient de frottement, différentes vitesses de charges sont introduites dans les équations du mouvement à intégrer, les vibrations sont calculées et le rayonnement est estimé par la méthode de calcul acoustique multi-fréquentielle.

Comme expliqué au chapitre 3, l'analyse de stabilité est effectuée à pression de freinage constante. L'effort maximum associé à la pression de freinage, noté $F_{\max}$, est toujours fixé à 70 N/nœud (i.e. associé à une pression de 12.5 bars comme aux chapitres précédents). L'expression du chargement en rampe est donnée par l'équation (5.1) et une illustration est proposée sur la Figure 5.2.

Le système est alors initialisé sur la configuration au repos à chargement nul, puis la mise en charge est effectuée jusqu'à la pression pour laquelle la stabilité est évaluée. Différentes vitesses de charge sont envisagées : des rampes ayant des temps de montée "lents" et "rapides". La configuration adoptée par le système en fin de chargement est proche de l'équilibre glissant



$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_R} \mathbf{F}_{\max} & \text{si } t \leq t_R \\ \mathbf{F}_{\max} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.1)$$

Figure 5.2 – Illustration du chargement en rampe.

mais possède une vitesse non nulle comme illustré sur la Figure 5.3. En ce qui concerne l'axe (2), pour vérifier si le trajet de chargement peut être considéré comme l'un des mécanismes de déclenchement du crissement, le coefficient de frottement associé à une configuration stable est utilisé. Pour ce coefficient de frottement, le système est soumis à des rampes de chargement ayant différentes vitesses de charge. Sur la Figure 5.3 (a), la trajectoire en trait continu noir correspond à la réponse pour une condition initiale dans un voisinage de l'équilibre glissant à vitesse initiale nulle et à pression constante. Si la configuration est asymptotiquement stable, le système rejoint l'équilibre. Pour les mêmes paramètres, le système est placé sous la même charge finale mais selon un trajet de chargement en rampe à partir de la configuration au repos (i.e. la trajectoire de phase bleue). Le système atteint alors une configuration pour laquelle la stabilité est analysée par intégration temporelle : si cette dernière est stable le système rejoint l'équilibre glissant sinon le système suit une trajectoire différente.

L'axe (3) concerne la caractérisation des vibrations et du rayonnement pour différentes vitesses de charges et également leur comparaison avec des cas de charges statiques (i.e. les résultats des chapitres 3 et 4 en termes de vibrations et de bruit rayonné). Sur la Figure 5.3 (b), on peut voir une configuration d'équilibre glissant qui mène à un cycle limite pour la condition initiale à vitesse nulle et à pression constante. À partir de la configuration au repos, le système est soumis à la rampe de chargement et la réponse dynamique est évaluée par intégration temporelle : soit le système rejoint le cycle limite précédent, ou bien la trajectoire de phase est modifiée.

Enfin, l'influence du coefficient de frottement évoquée dans l'axe (1) sera une question sous-jacente et cette analyse sera conduite lors de l'étude des axes (2) et (3).

Le premier jeu de conditions utilisé correspond aux intégrations temporelles initialisées sur l'équilibre glissant perturbé et sous chargement statique $\mathbf{F}_{\max}$. Le second correspond au système initialisé sur la configuration au repos sous chargement en rampe. Ces deux cas de figure sont présentés dans la Table 5.1.

L'ensemble des cas étudiés est listé dans la Table 5.2. Les cas associés au chargement statique sont indicés "statique" et les cas correspondant au chargement en rampe sont indicés

Table 5.1 – Listes des cas avec chargement en rampe et chargement statique.

Cas	Chargement	Déplacement initial	Vitesse initiale
Charge statique	$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_{\max}$	$\mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta \mathbf{X}$	$\dot{\mathbf{X}}(t = 0) = \mathbf{0}$
Chargement en rampe	$\mathbf{F}(t)$	$\mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{0}$	$\dot{\mathbf{X}}(t = 0) = \mathbf{0}$

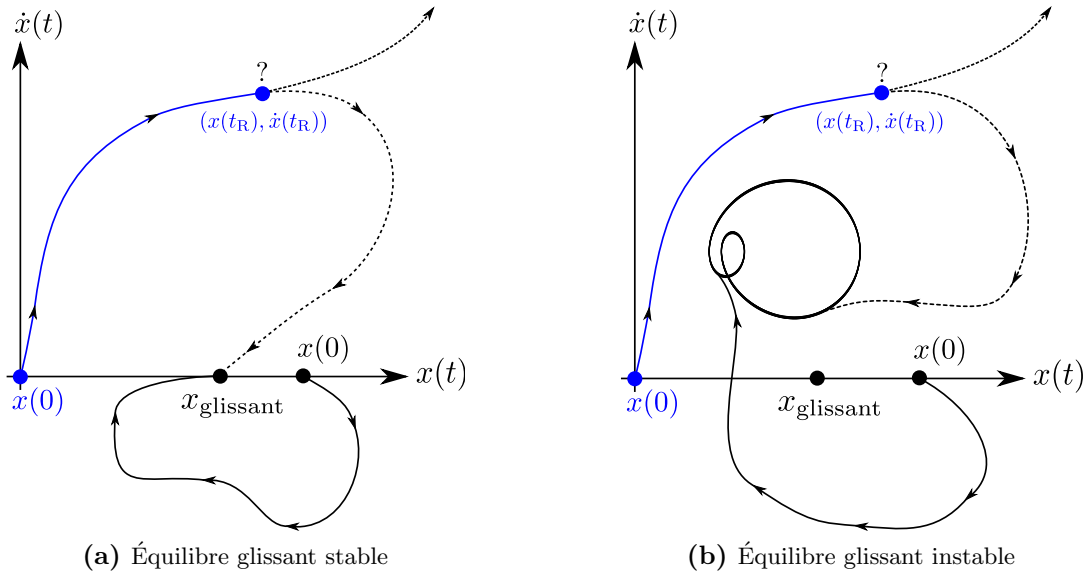


Figure 5.3 – Illustration des axes (2) et (3) portant sur l'influence du trajet de chargement. (a) Rampe comme mécanisme d'ignition du crissement et (b) modification de la réponse dynamique par le trajet de chargement.

Table 5.2 – Listes des cas avec chargement en rampe et chargement statique.

Chargement en rampe		t_R (s)		Charge statique	Coefficient de frottement
1 _{lente}	1 _{rapide}	10^{-1}	10^{-3}	1 _{statique}	0.69
2 _{lente}	2 _{rapide}	10^{-1}	10^{-3}	2 _{statique}	0.72
3 _{lente}	3 _{rapide}	10^{-1}	10^{-3}	3 _{statique}	0.731
4 _{lente}	4 _{rapide}	10^{-1}	10^{-3}	4 _{statique}	0.74

“rapide” pour la rampe la plus rapide et “lente” pour la plus lente. Nous envisageons des valeurs de 10^{-1} et 10^{-3} s pour ces deux cas. Il est à noter que l’on reprend l’ensemble des cas traités au chapitre 3 dont la stabilité a déjà été évaluée, mais on applique ici des rampes de chargement rapide et lente. Par exemple, l’analyse de stabilité prédit un mode instable pour le cas 2_{statique}, et nous verrons quelle sera la réponse vibratoire de ce même cas soumis à différentes rampes (i.e. les cas 2_{lente} et 2_{rapide}).

Remarques :

- En toute rigueur, l’expression “vibrations auto-entretenues” désigne des oscillations qui sont maintenues par une excitation interne au système. Par exemple, les échanges permanents entre les efforts normaux de contact et les efforts tangentiels de frottement sont des mécanismes internes qui entretiennent les vibrations. Dans notre cas, le chargement temporel constitue une excitation externe mais en fin de rampe, la dépendance temporelle disparaît. De ce fait, nous pouvons considérer le phénomène comme étant auto-entretenu.
- D’autre part, les systèmes de freinages réels peuvent être sujets à différents types d’excitations externes dépendantes du temps, qui participent au crissement. Par exemple, les vibrations des composants environnant le disque et la garniture (e.g. l’étrier) peuvent générer des efforts normaux périodiques, qui s’additionnent à la pression de freinage. À ce titre, ces chargements temporels peuvent également entretenir les vibrations.

5.2 Vibrations non linéaires sous chargement temporel

Dans cette partie, les réponses dynamiques et les spectres non linéaires des cas de la Table 5.1 sont calculés, analysés et comparés. Contrairement aux analyses effectuées dans le chapitre 3, on se concentre uniquement sur les vitesses dans la direction $\mathbf{z}$ d'un nœud de l'interface. Enfin, les analyses spectrales sont menées en régime stationnaire uniquement.

5.2.1 Déstabilisation d'un cas stable par le chargement temporel

Le cas 1_{statique} correspond à un cas jugé stable par l'analyse de stabilité (résultat du chapitre 3 section 3.3). Le calcul des vibrations est effectué par intégration temporelle des équations du mouvement en utilisant les conditions de chargement statique de la Table 5.1. Pour ce cas, la perturbation introduite n'est pas amplifiée dans les équations et le système tend exactement vers la configuration d'équilibre glissant associée : c'est la réponse classique d'un cas stable pour une perturbation suffisamment proche de l'équilibre glissant. Le cas 1_{lente} correspond aux conditions de chargement en rampe de la Table 5.1. La réponse est similaire au cas 1_{statique} puisque le système tend également vers l'équilibre glissant. Dans un souci de clarté, les résultats des deux cas précédents ne sont pas présentés.

En revanche, la rampe rapide du cas 1_{rapide} génère des vibrations non linéaires et auto-entretenues comme le montre la Figure 5.4. Sur la Figure 5.4 (a), on remarque que le système diverge durant un régime transitoire puis les vibrations deviennent stationnaires. Ainsi, pour une rampe de chargement suffisamment rapide, le système peut être sujet à des vibrations non linéaires induites par frottement qui ne sont pas prédites par l'analyse de stabilité. De plus, on remarque que les amplitudes transitoires sont prépondérantes devant celles du régime stationnaire. Afin d'identifier le contenu fréquentiel de ces vibrations, on procède à une analyse spectrale par transformée de Fourier en régime stationnaire (i.e. pour $t \in [3, 4]$ s). Sur la Figure 5.4 (b), on peut voir que le spectre est extrêmement riche et que les pics sont toujours des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales f_1 et f_2 . Ces fréquences sont à rapprocher des fréquences fondamentales détectées dans les cas du chapitre 3 qui sont "proches" des fréquences des modes instables impliqués. Cependant, pour le cas 1_{rapide} , ces fréquences ne sont pas prédites par l'analyse de stabilité et ne peuvent être rigoureusement associées aux modes instables. Dans notre cas, leurs valeurs détectées sont $f_1 = 944$ Hz et $f_2 = 9401$ Hz. L'analyse des amplitudes du spectre montre que la réponse est largement dominée par f_1 et les premiers harmoniques $2f_1$ et $3f_1$. La seconde fréquence fondamentale f_2 est activée mais ses contributions restent limitées. Par analogie avec les cas 3_{statique} et 4_{statique} , on peut tout de même rapprocher le cas 1_{rapide} d'une réponse présentant plusieurs instabilités.

5.2.2 Influence du chargement temporel sur le cas à un mode instable

La même analyse est effectuée pour le cas à un mode instable. Le coefficient de frottement est fixé à $\mu = 0.72$ et l'analyse de stabilité prédit un unique mode instable lorsque le système est sous charge statique. Pour le cas 2_{statique} , l'analyse des vibrations et du contenu fréquentiel a déjà été menée au chapitre 3 mais les résultats sont repris ici pour une meilleure comparaison (Figures 5.5 (a) et (b)).

En ce qui concerne le cas 2_{lente} , la dynamique du système est identique à celle du cas 2_{statique} et ces résultats ne sont pas présentés. Comme précédemment, la rampe lente n'influe pas sur le comportement global du système de frein prédit par l'analyse de stabilité.

En revanche, le cas 2_{rapide} présente des caractéristiques très différentes. La Figure 5.5 (c) montre que le profil de vitesse est totalement modifié avec la présence d'un régime transitoire ayant une divergence beaucoup plus rapide que pour le cas 2_{statique} (Figure 5.5 (a)) :

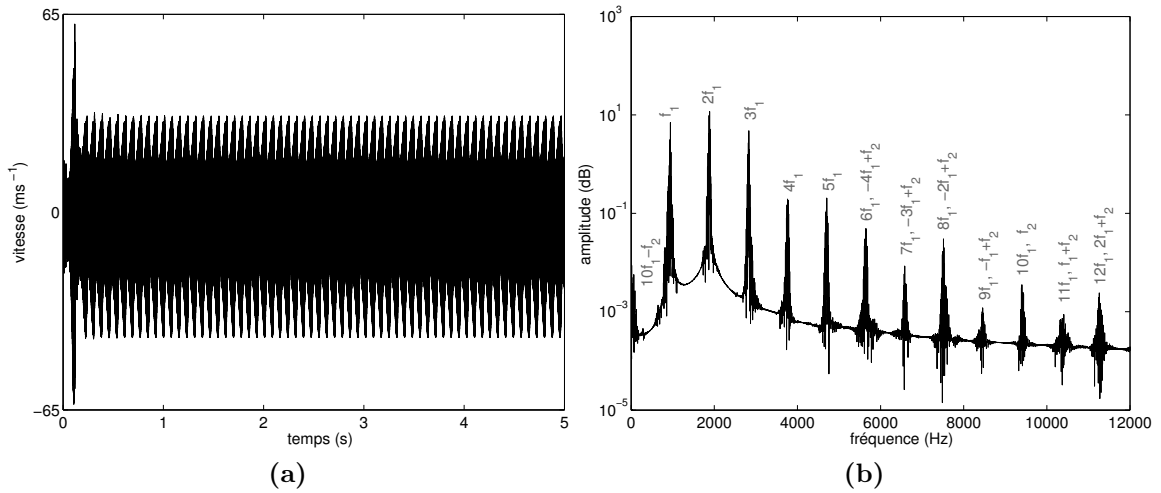


Figure 5.4 – Réponse dynamique du cas 1_{rapide} . (a) Vitesse d'un ddl normal à l'interface et (b) spectre non linéaire.

le système atteint le régime stationnaire en 8 s dans un cas et en 0.4 s dans l'autre. De plus, les amplitudes de vitesses sont largement augmentées par la rampe rapide. Ceci est dû au fait que la rampe rapide induit des variations rapides de déplacements qui sont directement liées aux amplitudes de la vitesse. D'après la théorie de l'analyse de stabilité présentée au chapitre 2, nous avons montré que la vitesse de croissance des amplitudes du régime transitoire était caractérisée par la partie réelle des valeurs propres des modes instables du système linéarisé. Cette modification de la divergence met en lumière l'influence du chargement sur la dynamique transitoire du système.

L'analyse spectrale permet d'observer l'activation de pics associés à des fréquences non prédites : la forme du cycle limite est donc fortement modifiée. Le spectre de la Figure 5.5 (d) possède un grand nombre de fréquences qui sont encore une fois des combinaisons linéaires de deux fréquences fondamentales $f_1 = 944$ Hz et $f_2 = 9424$ Hz. Ces fréquences sont proches des fréquences instables prédites par la stabilité pour les cas 3_{statique} et 4_{statique} (Table 3.3). Cette observation montre qu'une rampe suffisamment rapide peut modifier le résultat de stabilité et faire basculer le système dans une zone où deux instabilités cohabitent. Sur la Figure 3.7 (b) on peut voir que pour $\mu = 0.72$, le système présente un seul mode instable mais est très proche de la zone à deux modes instables : la rampe, et les effets non linéaires, permettent de "franchir la frontière" séparant les deux domaines.

5.2.3 Influence du chargement temporel sur le cas à deux modes instables

En ce qui concerne les cas 3_{statique} et 3_{lente} , comme pour les cas précédents, les vibrations et les contenus fréquentiels en régime stationnaire final sont identiques. Cependant, pour la rampe lente, le départ de la divergence s'effectue 3 secondes plus tard (résultats non présentés).

Le cas 3_{rapide} est quant à lui très différent : le profil de vitesse et le spectre sont modifiés par le chargement en rampe rapide. Sur la Figure 5.6 (c), on remarque que les amplitudes de vitesses augmentent de façon analogue aux cas précédents. De nouvelles composantes fréquentielles émergent comme le montre le spectre de la Figure 5.6 (d), les fréquences fondamentales détectées sont également différentes de celles prédites par la stabilité.

Les cas 4_{statique} , 4_{lente} et 4_{rapide} ayant un coefficient de frottement de 0.74 ne sont pas

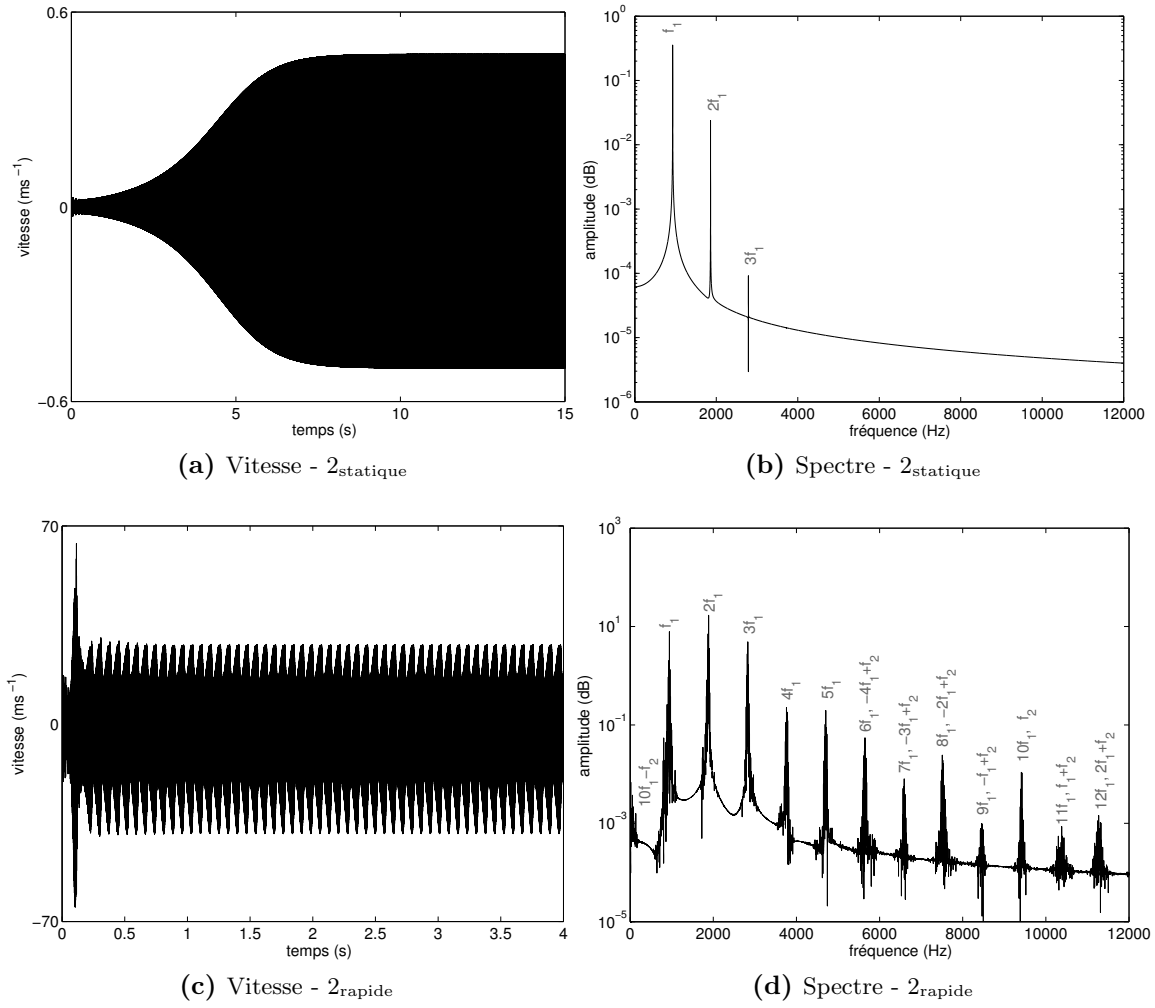


Figure 5.5 – Réponses dynamiques des cas 2_{statique} et 2_{rapide}.

présentés ici. Les tendances sont analogues à celles dégagées précédemment, à savoir que la rampe lente donne des résultats similaires au chargement statique, la rampe rapide augmente les amplitudes de vitesses et active de nouvelles composantes fréquentielles dans le spectre, et les fréquences fondamentales ne sont pas prédites par l'analyse des valeurs propres complexes.

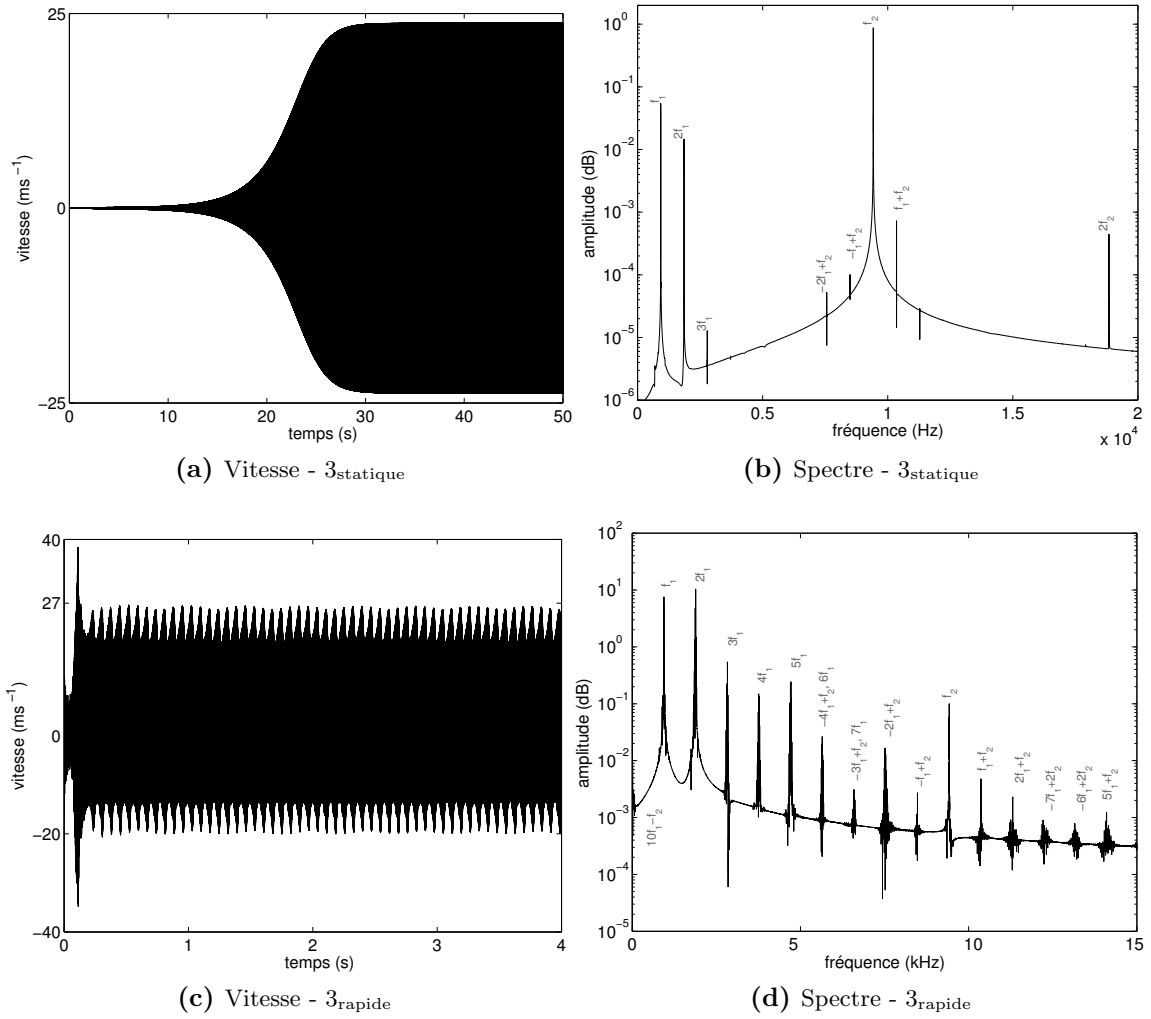


Figure 5.6 – Réponses dynamiques des cas 3_{statique} et 3_{rapide} .

5.2.4 Analyse de la position moyenne

Lors des analyses précédentes, nous avons remarqué que les fréquences fondamentales détectées n'étaient pas prédites par l'analyse de stabilité du système linéarisé. Ce phénomène s'explique en partie par une évolution de la position moyenne autour de laquelle oscille le système. Sur la Figure 5.7, l'évolution temporelle de la position moyenne est représentée pour les cas d'études. On superpose également les positions d'équilibre glissant pour les cas 1, 2 et 3. On peut voir que pour le cas 2_{statique}, la position moyenne au cours du temps est proche de l'équilibre glissant : le système oscille autour de cette configuration. Le système restant dans un voisinage de l'équilibre glissant, ceci peut être une explication au fait que la stabilité est en mesure de prédire la participation de la fréquence fondamentale f_1 (et seuls ses harmoniques participent à la réponse vibratoire stationnaire).

Pour le cas 3_{statique}, on peut voir qu'à partir de 25 s, le système s'écarte de l'équilibre glissant et oscille autour d'une autre configuration. Ceci est cohérent avec les deux régimes stationnaires (Figure 3.12) et explique les écarts entre les fréquences fondamentales détectées par l'analyse de la réponse vibratoire et celles prédites lors d'une étude de stabilité.

Pour les cas 1_{rapide}, 2_{rapide} et 3_{rapide} on peut voir que la rampe rapide empêche le système d'atteindre un voisinage de l'équilibre glissant. De plus, les positions moyennes de ces trois cas sont relativement éloignées des équilibres glissants associés aux coefficients de frottement de 0.69, 0.72 et 0.731 respectivement. Ces trois positions moyennes sont également très proches les unes des autres et ceci permet d'expliquer les similitudes observées sur les caractéristiques des champs de vitesse et des spectres.

Le cas 4_{statique} est similaire au cas 3_{statique} avec une évolution de la position moyenne. De plus, la rampe du cas 4_{rapide} empêche également le système d'osciller autour de l'équilibre glissant et le système reste dans un voisinage d'une configuration qui évolue très peu au cours du temps et qui reste éloignée de positions moyennes des cas 1_{rapide}, 2_{rapide} et 3_{rapide}.

Les conclusions précédentes sont principalement dues à l'application d'une rampe mais également aux effets non linéaires tels que la loi de contact cubique ainsi que la prise en compte du décollement. En analysant l'évolution des statuts de contact au cours du temps, on remarque que l'activité non linéaire est amplifiée par la rampe rapide. En d'autres termes, le nombre de pertes de contact augmente significativement avec l'application de la rampe rapide. Ceci a pour effet d'activer de façon non négligeable les harmoniques d'ordre supérieur. Par exemple, le cas 2_{rapide} présente des vibrations largement dominées par f_1 , $2f_1$ et $3f_1$ associés à un nombre de pertes de contact plus important que pour le cas 2_{statique} pour lequel seule f_1 prédomine (Figure 5.5). Ces résultats corroborent ceux établis par Sinou dans l'étude de l'influence des conditions initiales sur la dynamique du crissement [93].

5.3 Rayonnement acoustique sous chargement temporel

La méthode de calcul acoustique multi-fréquentielle développée au chapitre 4 est à présent utilisée afin d'analyser les émissions sonores des cas de crissement étudiés. Notre attention se porte plus particulièrement sur les champs de vitesse normale pariétale ainsi que sur la pression acoustique globale. On se propose de comparer les réponses acoustiques des cas d'étude en termes de niveaux de bruit et de directivité. Toutefois, les vibrations des cas de chargement en rampe lente étant identiques à celles des cas sous charge statique, la comparaison du rayonnement acoustique ne concernera que les cas indicés "statique" et "rapide". Un aperçu global des cartes de niveaux en champs proche et lointain est proposé dans la Table 5.3.

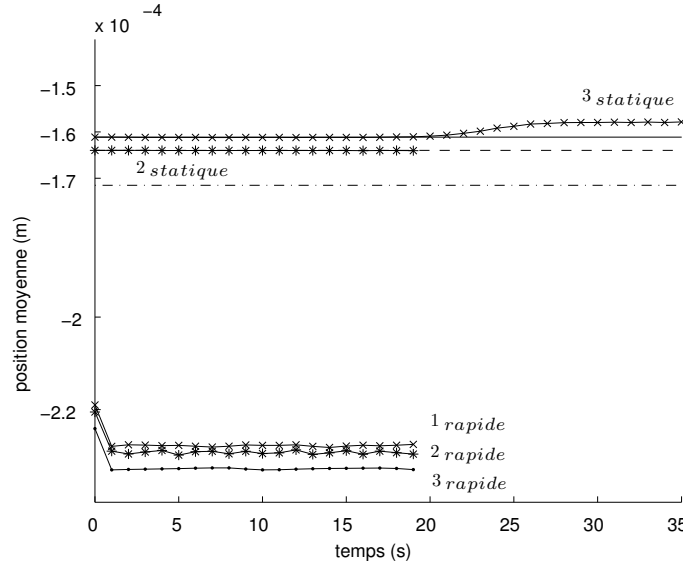


Figure 5.7 – Évolution de la position moyenne du système durant les vibrations de crissement et comparaison avec la configuration d'équilibre glissant quasi-statique. (—) Équilibre glissant pour $\mu = 0.69$, (---) équilibre glissant pour $\mu = 0.72$, (-.-) équilibre glissant pour $\mu = 0.731$, ($\times$) position moyenne des cas 3_{statique} et 3_{rapide}, ($*$) position moyenne des cas 2_{statique} et 2_{rapide} et ($\cdot$) position moyenne du cas 1_{rapide}.

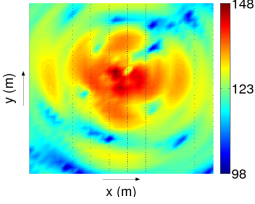
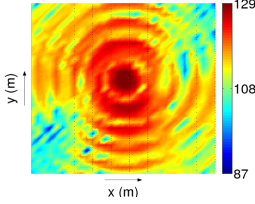
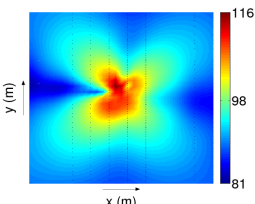
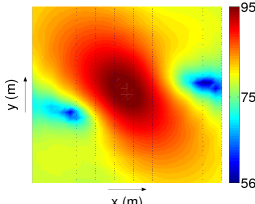
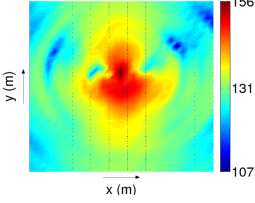
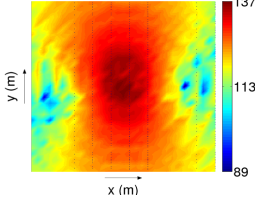
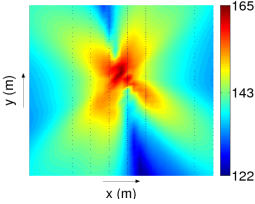
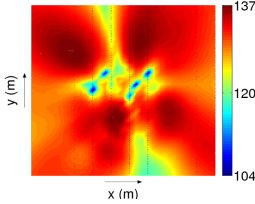
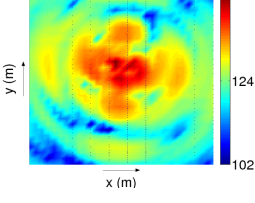
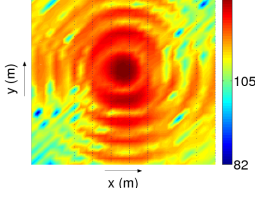
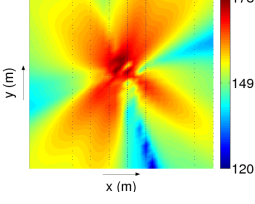
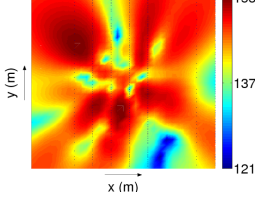
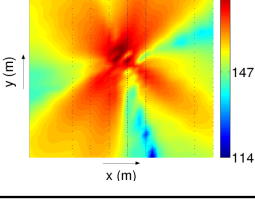
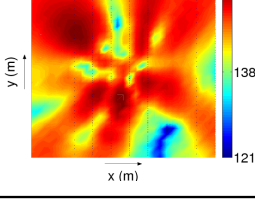
5.3.1 Cas 1_{rapide} stable déstabilisé par la rampe

Le rayonnement acoustique associé aux vibrations du cas 1_{rapide} est calculé à partir du champ de vitesse normale pariétale présenté sur la Figure 5.8 (a). L'analyse du champ de vitesse globale (i.e. sans troncature de Fourier) montre que le système est animé de vibrations de flexion. On remarque également que les amplitudes de vitesse normale sont non négligeables et génèrent des niveaux de pression acoustique pariétale atteignant 166 dB (Figure 5.8 (b)). De plus, la plaquette possède des niveaux plus importants que le disque. Enfin, le rayonnement acoustique dans le volume extérieur est présenté sur la Figure 5.8 (c). On remarque que les niveaux sont non négligeables et marqués par une alternance de zones à basse et haute pressions. Comme expliqué au chapitre précédent, cette particularité témoigne de la présence de phénomènes d'interférences destructives causées par la superposition de plusieurs ondes. D'autre part, la directivité présente un motif particulier avec des fronts d'ondes acoustiques quasiment sphériques : la propagation 3D est presque omnidirectionnelle. Les cartes de niveaux sur les champs proche et lointain illustrent également cette propagation sphérique sur les plans horizontaux (Table 5.3). Nous pouvons d'ores et déjà conclure que l'application d'une rampe rapide déstabilisante génère un rayonnement acoustique non négligeable et significativement audible avec une propagation particulière liée au contenu fréquentiel des vibrations.

5.3.2 Cas 2_{statique} à un mode instable

En ce qui concerne le cas 2_{statique}, nous avons vu au chapitre 4 que le champ de vitesse normale présente des amplitudes relativement faibles (de l'ordre de 0.5 ms^{-1}) et principalement associées à des vibrations de flexion de la garniture (Figure 5.9 (a)). La pression pariétale associée présente des niveaux en décibels non négligeables comme le montre la Figure 5.9 (b). Enfin, le rayonnement dans le volume extérieur est quasiment omnidirectionnel et sans interférences destructives (Figure 5.9 (c)). Ceci est dû au fait que la réponse dynamique est

Table 5.3 – Comparaison des niveaux de pression acoustique en champs proche et lointain.

μ	Cas	Champ proche	Champ lointain
0.69	1_{rapide}		
	2_{statique}		
0.72	2_{rapide}		
	3_{statique}		
0.731	3_{rapide}		
	4_{statique}		
0.74	4_{rapide}		

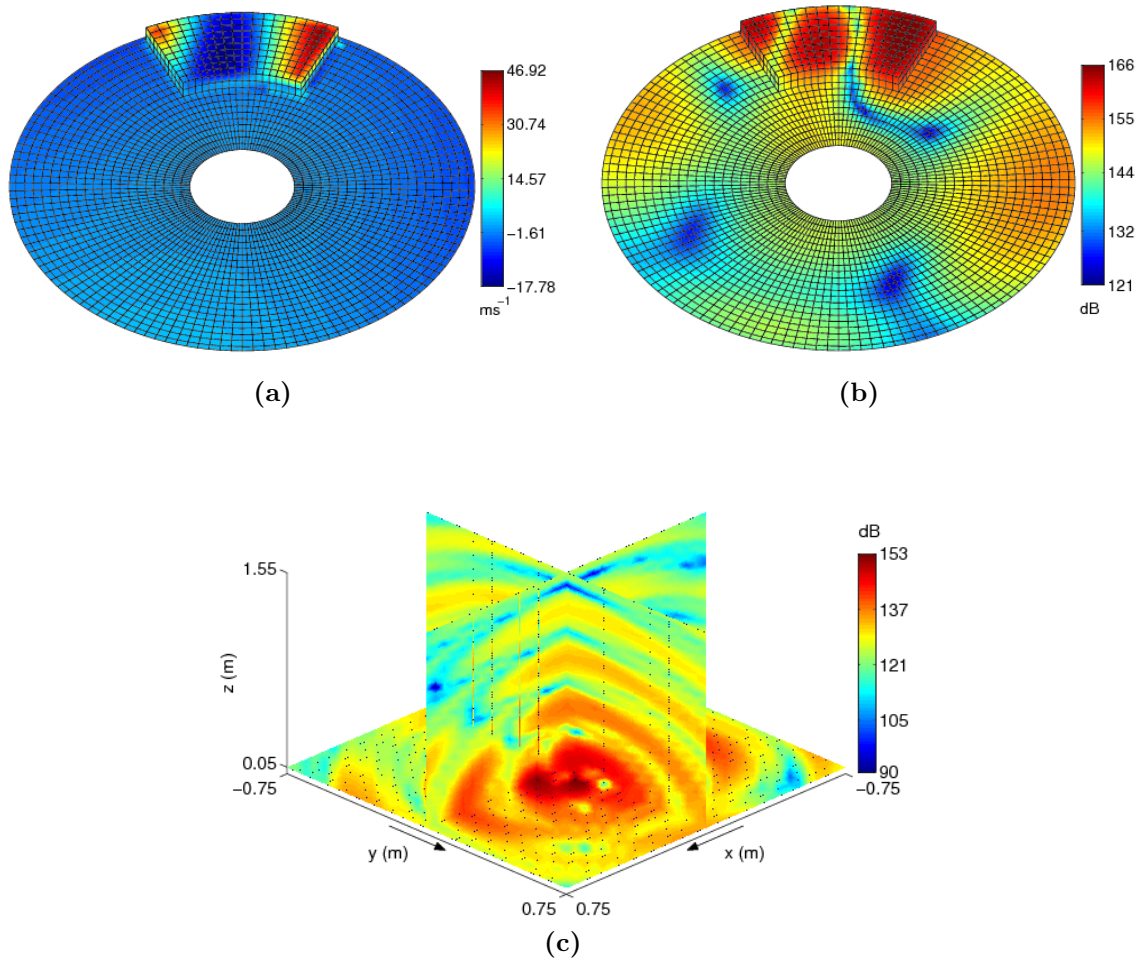


Figure 5.8 – Rayonnement acoustique du cas 1_{rapide} . (a) Champ de vitesse normale pariétale, (b) L_{dB} pariétal et (c) L_{dB} sur le champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$.

dominée par une seule composante fréquentielle f_1 . Au niveau des plans d'écoutes horizontaux, on peut clairement voir la présence de quatre lobes en champ proche qui semblent disparaître en champ lointain (Table 5.3). On peut relier ces quatre lobes aux quatre zones de niveaux sonores maximum sur la surface : deux zones sur la garniture et deux autres diamétralement opposées sur le disque.

L'application de la rampe rapide modifie les vibrations de façon drastique et on peut voir que la vitesse normale pariétale est différente de celle du cas 2_{statique} : le profil est modifié et les amplitudes sont significativement augmentées (Figure 5.10 (a)). Les niveaux de pression pariétale sont nettement supérieurs, jusqu'à 126 dB pour le cas sous charge statique contre 163 dB pour le cas 2_{rapide} (Figure 5.10 (b)). Le champ rayonné dans le volume extérieur est également largement modifié par le chargement. On peut voir que le lobe principal vertical du cas 2_{statique} est présent, mais l'activation des autres composantes fréquentielles génère des interférences comme nous pouvons le remarquer sur la Figure 5.10 (d). Cette observation est également visible sur les champs proche et lointain comme le montrent les figures de la Table 5.3. En effet, pour ce cas, le spectre non linéaire est dominé par f_1 et $2f_1$ et non plus par f_1 uniquement.

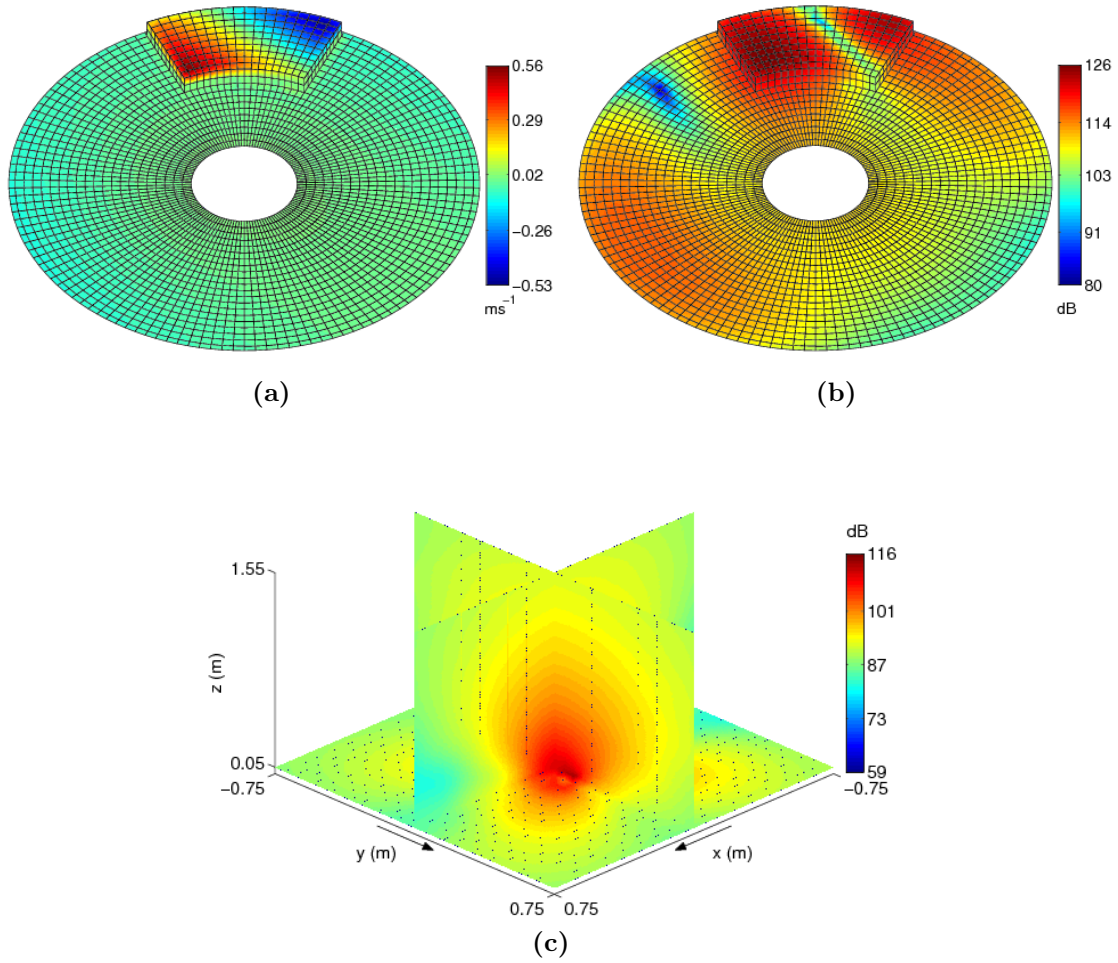


Figure 5.9 – Rayonnement acoustique du cas 2_{statique} . (a) Champ de vitesse normale pariétale du cas 2_{statique} , (b) L_{dB} pariétal du cas 2_{statique} , (c) L_{dB} sur le champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$ du cas 2_{statique} .

5.3.3 Cas 3_{statique} à deux modes instables

L'influence de la rampe est encore plus visible sur la comparaison des cas 3_{statique} et 3_{rapide} . Le profil de la vitesse normale pariétale du cas sous charge statique est proche de celui du second mode instable (Figure 3.9). Ce champ de vitesse génère des niveaux sonores sur la surface qui sont présentés sur la Figure 5.11 (b). Comme expliqué au chapitre 4, le rayonnement acoustique présente plusieurs directions de propagations du fait de la participation de deux modes instables dans la réponse (Figure 5.11 (c)). L'application de la rampe rapide modifie la réponse acoustique de façon significative. On remarque que le profil de la vitesse pariétale est modifié et les amplitudes sont diminuées (5.12 (a)). De ce fait, les niveaux sonores sur la surface sont également diminués (5.12 (b)). Dans le volume extérieur, les directions de propagation du cas 3_{statique} disparaissent et on observe la présence de fronts d'ondes sphériques similaires à ceux obtenus pour les cas précédents (5.12 (d)).

Enfin, les vitesses normales pariétales, ainsi que les niveaux sonores sur les différents plans d'écoutes, ne sont pas modifiés par la rampe pour les cas n°4. Les profils sont identiques à ceux calculés pour le cas 4_{statique} (Figure 4.8 du chapitre 4) mais les niveaux sont augmentés par la rampe rapide. Les résultats en champs proche et lointain pour les cas 4_{statique} et 4_{rapide} sont présentés dans la Table 5.3.

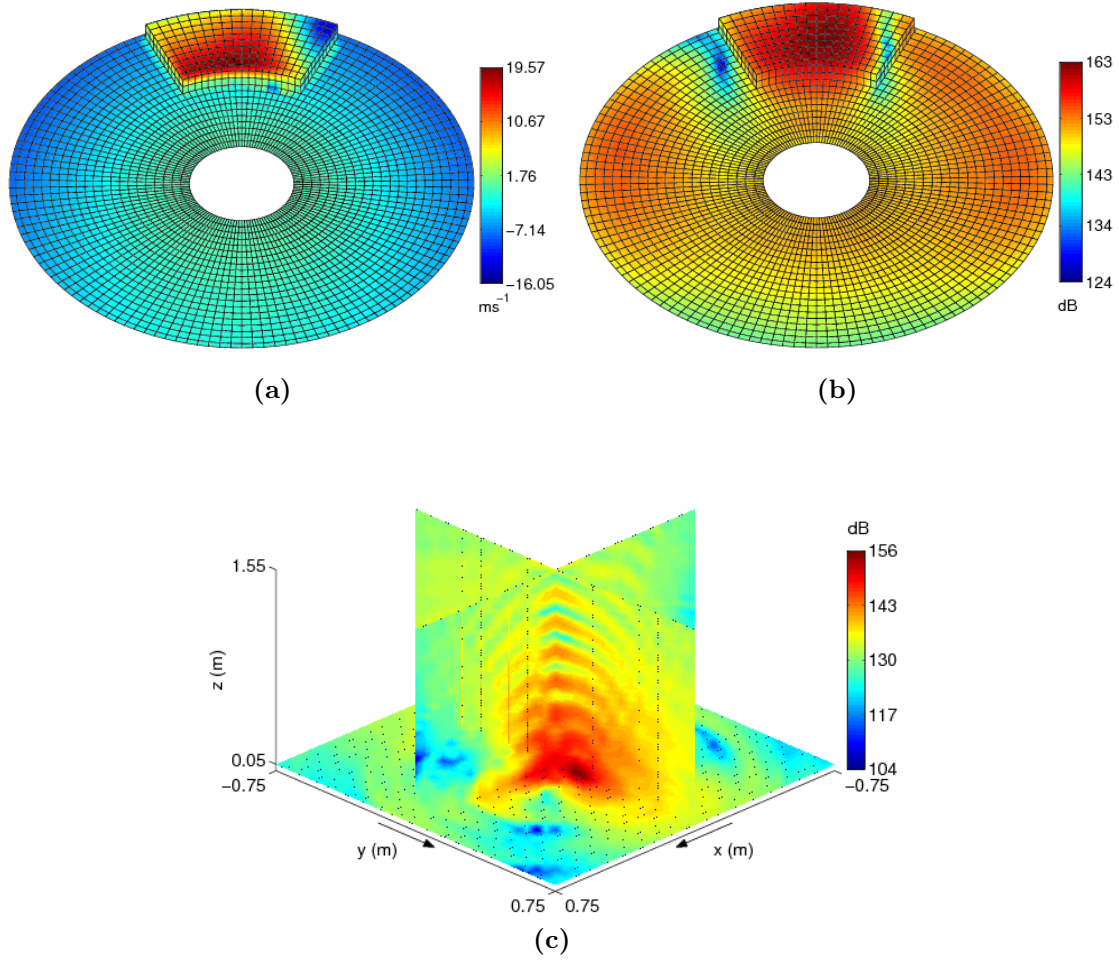


Figure 5.10 – Rayonnement acoustique du cas 2_{rapide} . (a) Champ de vitesse normale pariétale du cas 2_{rapide} , (b) L_{dB} pariétal du cas 2_{rapide} , (c) L_{dB} sur le champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$ du cas 2_{rapide} .

5.4 Analyse de la convergence de la pression acoustique

Par analogie avec l'étude de convergence menée dans la section 4.3.3 du chapitre 4, nous analysons l'évolution de l'erreur ϵ_I (équation (4.28)). La rampe rapide ayant pour effet d'activer un grand nombre de composantes fréquentielles, il semble intéressant d'être en mesure d'identifier celles qui participent au rayonnement global. Nous présentons les études menées pour les cas 1_{rapide} et 2_{rapide} .

Sur la Figure 5.13 (a), on peut voir que 45 composantes fréquentielles sont activées. On remarque qu'utiliser la base de Fourier composée de f_1 suffit à atteindre une erreur relative de 5.5%. Aussi, enrichir la base avec la composante f_2 n'améliore pas la solution de pression pariétale : ceci confirme que même si la fréquence fondamentale f_2 est détectée dans le spectre de vitesse, sa contribution au rayonnement est quasiment nulle. Ensuite, utiliser la base composée de f_1 , f_2 et $2f_1$ fait chuter l'erreur à 2.6% etc.

De la même manière, on peut voir sur la Figure 5.13 (b) que malgré le fait que 24 composantes soient détectées, seules quelques composantes contribuent à améliorer l'erreur de façon significative, ici f_1 , $2f_1$ et $10f_1 - f_2$.

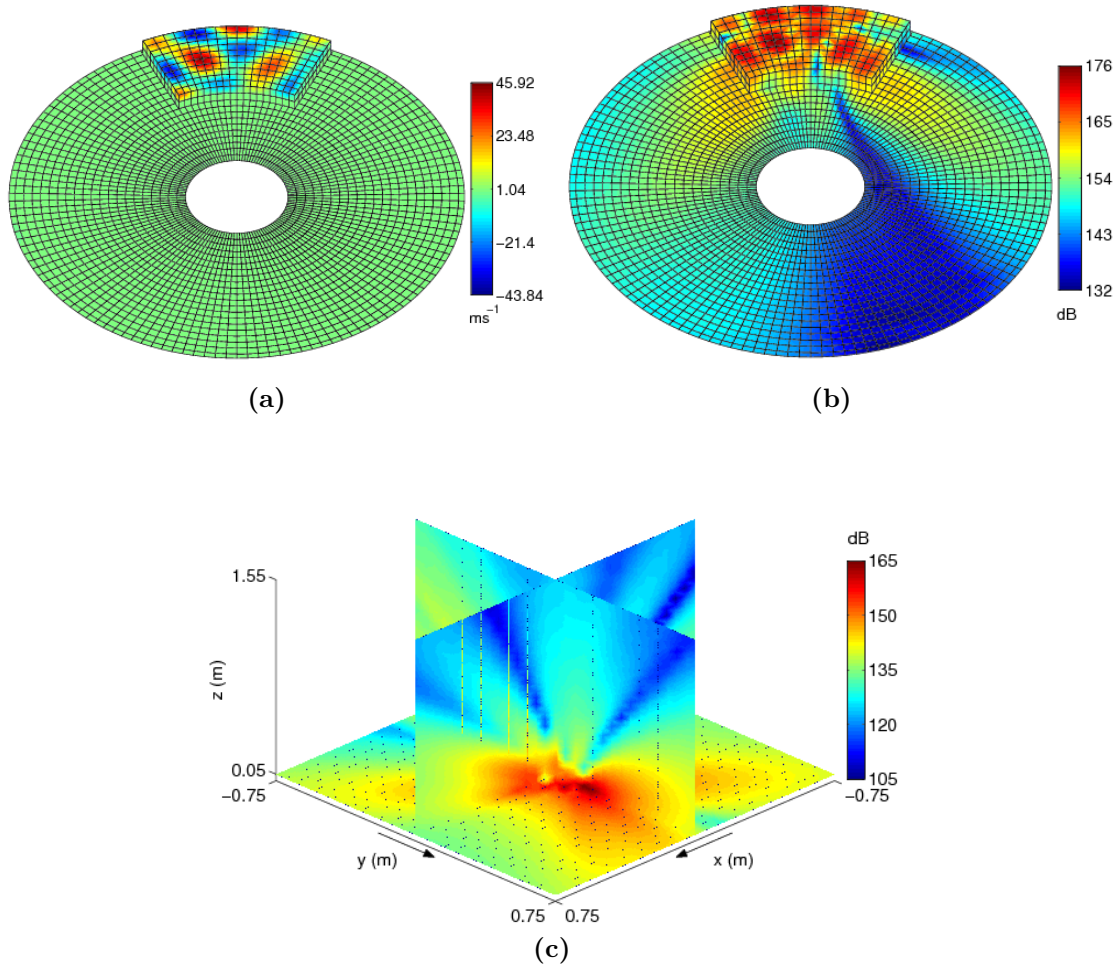


Figure 5.11 – Rayonnement acoustique du cas $\mathcal{Z}_{\text{statique}}$. (a) Champ de vitesse normale pariétale du cas $\mathcal{Z}_{\text{statique}}$, (b) L_{dB} pariétal du cas $\mathcal{Z}_{\text{statique}}$, (c) L_{dB} sur le champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$ du cas $\mathcal{Z}_{\text{statique}}$.

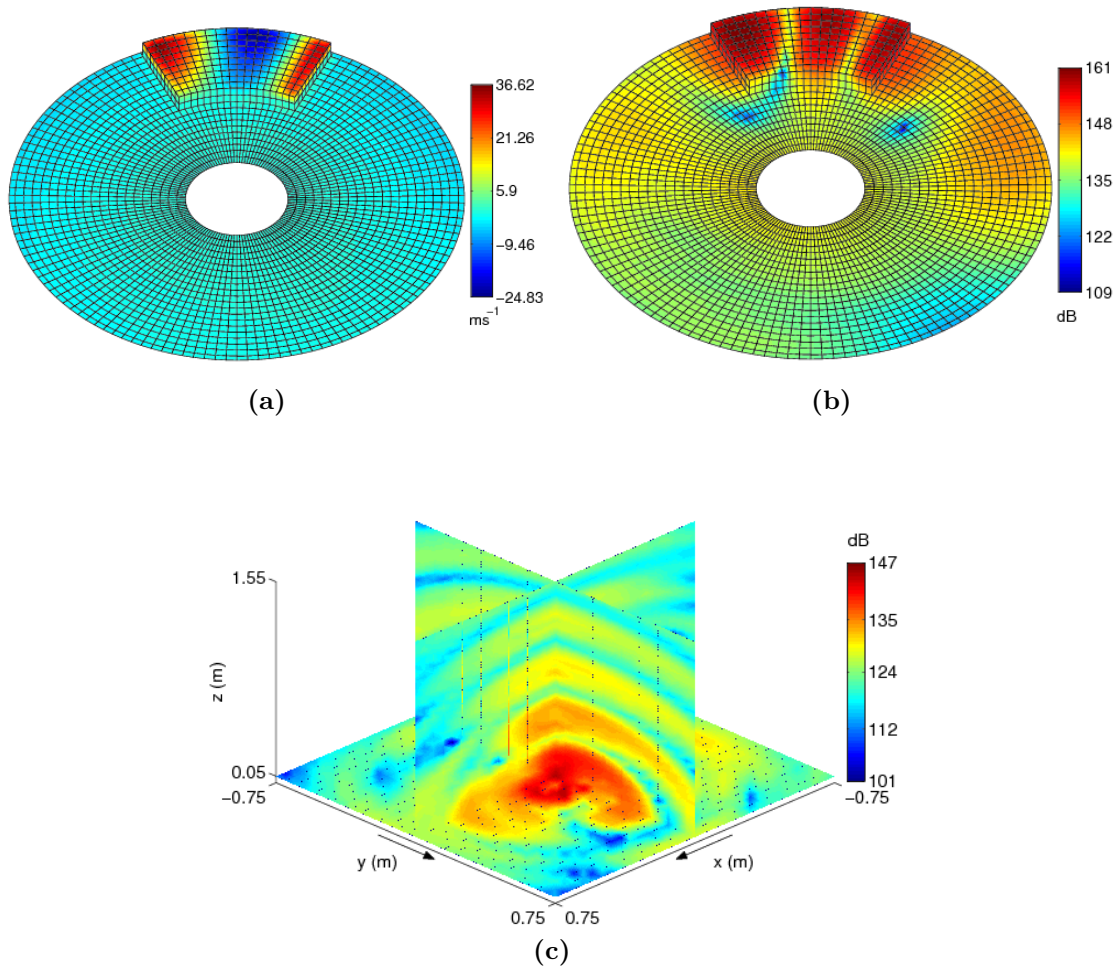


Figure 5.12 – Rayonnement acoustique du cas 3_{rapide} . (a) Champ de vitesse normale pariétale du cas 3_{rapide} , (b) L_{dB} pariétal du cas 3_{rapide} , (c) L_{dB} sur le champ proche $\cap P_0 \cap P_{\pi/2}$ du cas 3_{rapide} .

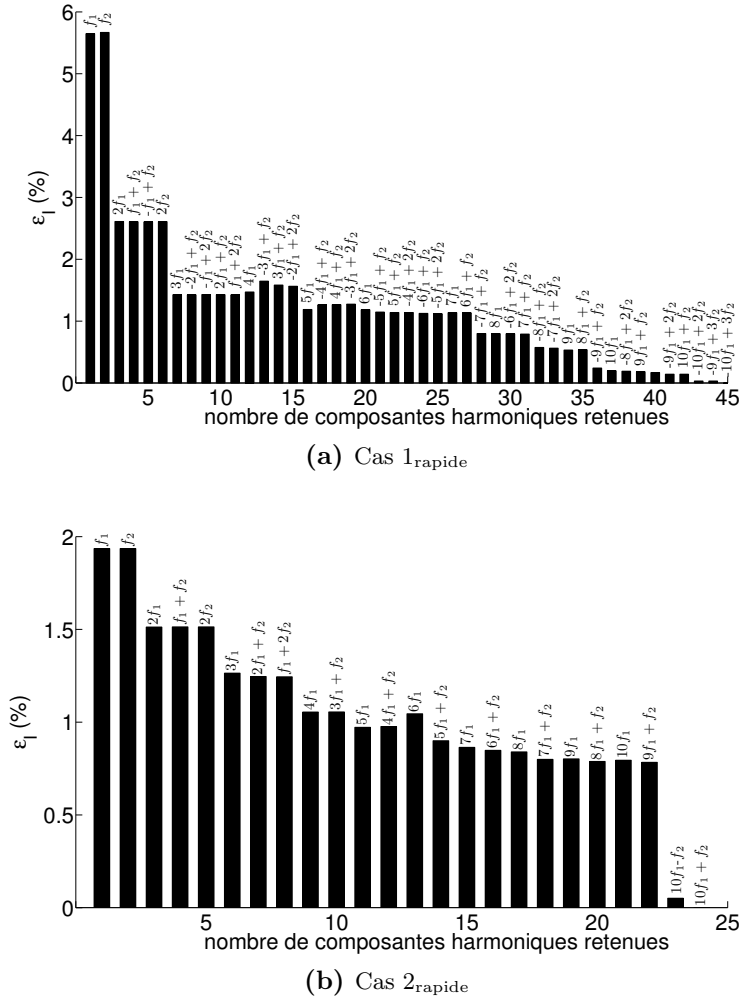


Figure 5.13 – Analyse de la convergence de la pression pariétale en fonction du nombre de composantes fréquentielles retenues.

5.5 Conclusion

Les résultats principaux de cette étude montrent que la prise en compte d'un profil de freinage dépendant du temps peut, dans certaines conditions, déstabiliser une configuration stable et mettre en défaut l'analyse classique de stabilité au sens de Lyapunov. De plus, nous observons que le chargement en rampe peut modifier drastiquement la réponse vibratoire non linéaire et les contributions des fréquences fondamentales et les combinaisons harmoniques associées.

D'un point de vue acoustique, tenir compte d'une rampe rapide peut soit augmenter, soit diminuer les niveaux sonores en fonction du comportement dynamique sélectionné par le trajet de chargement. Il faut tout de même rappeler que les niveaux ne sont pas réalistes du fait de l'ensemble des hypothèses simplificatrices effectuées (cf section 4.4 du chapitre 4). De plus, le motif de propagation est largement modifié par des interférences destructives générées par l'activation de nouvelles composantes harmoniques. D'autre part, dans notre cas, l'augmentation du coefficient de frottement augmente le nombre de modes instables (i.e. 0, 1 puis 2 modes instables) ce qui complexifie le rayonnement acoustique.

Plus généralement, les résultats obtenus dans notre étude mettent en lumière une forte dépendance à la rampe de pression de freinage. De plus, cette dépendance semble "peu prédictible" sans effectuer un calcul de la réponse vibratoire non linéaire.

Enfin, l'étude de convergence de la pression montre qu'un faible nombre de fréquences dominant les émissions globales de bruits.

Chapitre 6

Méthode d'approximation du rayonnement acoustique induit par frottement

Sommaire

6.1	Méthode de sélection des composantes fréquentielles	124
6.1.1	Analyse de la convergence de la vitesse normale quadratique moyenne	124
6.1.2	Construction d'une base de Fourier optimisée	125
6.1.3	Pertinence de la base de Fourier optimisée	126
6.2	Méthode d'approximation des niveaux de bruits	128
6.2.1	Calcul de la directivité : généralités	128
6.2.2	Méthode de calcul de la directivité	129
6.2.3	Indicateurs de convergence de la directivité	130
6.2.4	Reconstruction des niveaux de puissance acoustique	135
6.2.5	Estimateurs d'erreur de la solution approchée : BEM "partielle" . . .	136
6.3	Estimation du bruit rayonné par le système de frein	137
6.3.1	Construction des bases de Fourier optimisées	137
6.3.2	Estimation des niveaux sonores	140
6.3.3	Analyse de l'efficacité de la méthode proposée	155
6.4	Conclusion	156

Dans les chapitres 3, 4 et 5, nous avons montré que les réponses dynamiques et acoustiques pouvaient être complexes lors de l'apparition du crissement. En effet, les cas présentant plusieurs modes instables et les cas de chargement en rampe rapide ont des spectres extrêmement riches. Le calcul de la pression pariétale doit être mené pour chaque fréquence et les temps de calcul peuvent être prohibitifs. Pour autant, l'analyse du champ de pression acoustique rayonnée lors d'un évènement de crissement montre que malgré la richesse du spectre de la vitesse, seul un nombre limité de composantes harmoniques contribuent au rayonnement. Ainsi, il semble intéressant de déterminer ces fréquences avant l'application de la méthode acoustique multi-fréquentielle et de développer une méthode associée du calcul approximé du rayonnement acoustique induit par le crissement. Le premier objectif de ce chapitre est de déterminer un critère de sélection de ces composantes fréquentielles pour réduire le nombre de calculs de pression pariétale (méthode de sélection des composantes fréquentielles). Le second objectif concerne le développement d'une méthode d'approximation du champ de puissance acoustique rayonnée dans le volume extérieur (méthode d'approximation des niveaux de bruits). L'intérêt étant de mettre en place un outil numérique permettant d'estimer rapidement et avec une erreur contrôlée, la directivité de la source ainsi que les niveaux de bruit. Enfin, l'efficacité et la pertinence de l'outil proposé seront validés sur des exemples numériques.

6.1 Méthode de sélection des composantes fréquentielles

Comme expliqué précédemment, les réponses dynamiques associées au crissement peuvent présenter un très grand nombre de fréquences. Par exemple, la base de Fourier détectée pour le cas 4_{statique} en régime stationnaire comporte 30 composantes (Table 4.3 du chapitre 4) et l'estimation du champ de pression rayonnée nécessite le calcul des 30 pressions pariétales. Pour ce cas, l'étude de convergence de la pression acoustique a montré que seules quelques fréquences rayonnaient de façon non négligeable (section 4.3.3 du chapitre 4). Afin de détecter ces fréquences, l'idée principale est de construire une base de Fourier en ne sélectionnant que les composantes qui contribuent significativement à la vitesse normale pariétale quadratique moyenne. Ce champ particulier est utilisé ici car la pression pariétale ne dépend que de celui-ci. De plus, nous nous orientons vers l'utilisation d'une grandeur énergétique, surfacique et indépendante de la masse et de la raideur, permettant d'avoir une vision globale de la convergence. C'est pourquoi la vitesse normale pariétale quadratique moyenne est retenue.

6.1.1 Analyse de la convergence de la vitesse normale quadratique moyenne

La base de Fourier initiale est composée de l'ensemble des composantes fréquentielles détectées dans le spectre. Ces dernières sont triées par ordre croissant, par fréquence croissante pour chacun des ordres et sont de la forme donnée par l'équation (6.1) qui est rappelée ci-dessous :

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots + k_i w_i + \dots + k_p w_p \quad (6.1)$$

avec $k_i \in [-N_h, N_h]$ et N_h correspond à l'ordre maximal détecté. La vitesse normale pariétale est ensuite décomposée en série de Fourier. Son expression est donnée par l'équation (6.2) présentée dans la section 4.2.1 :

$$\dot{\mathbf{X}}_S(\boldsymbol{\tau}) \approx \mathbf{a}_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (6.2)$$

où le vecteur $\mathbf{k}$ contient les coefficients de Fourier de chacune des combinaisons linéaires des pulsations fondamentales ω_j détectées. La contribution m du champ de vitesse associée à la

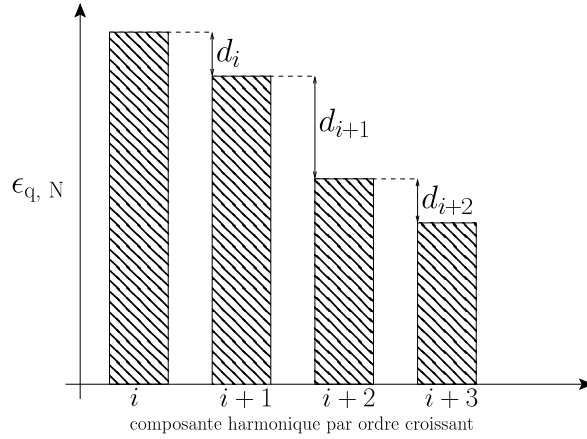


Figure 6.1 – Détection des composantes harmoniques prédominantes.

combinaison linéaire $\mathbf{k}_m$ désignée par $\dot{\mathbf{X}}_{S_m}$ s'obtient en écrivant l'un des termes de la série de Fourier :

$$\dot{\mathbf{X}}_{S_m}(\tau) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}_m} \cos(\mathbf{k}_m \cdot \tau) + \mathbf{b}_{\mathbf{k}_m} \sin(\mathbf{k}_m \cdot \tau) \quad (6.3)$$

où les vecteurs $\mathbf{a}_{\mathbf{k}_m}$ et $\mathbf{b}_{\mathbf{k}_m}$ contiennent les coefficients de Fourier associés à la pulsation m .

Finalement, nous pouvons construire la vitesse normale quadratique moyenne tronquée à l'ordre N qui est notée $\mathbf{V}_{q,N}$:

$$\mathbf{V}_{q,N} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{ddl}}} \left[\mathbf{a}_0 + \sum_{m=1}^N \dot{\mathbf{X}}_{n,m}(\tau) \right]^T \left[\mathbf{a}_0 + \sum_{m=1}^N \dot{\mathbf{X}}_{n,m}(\tau) \right]} \quad (6.4)$$

où N est un entier naturel qui correspond à la troncature de série de Fourier de la vitesse et N_{ddl} désigne le nombre de degrés de liberté du modèle surfacique. Ensuite, la vitesse quadratique moyenne de référence $\mathbf{V}_{q,\text{ref}}$ correspond à la série non tronquée :

$$\mathbf{V}_{q,\text{ref}} = \mathbf{V}_{q,N_{\text{max}}} \quad (6.5)$$

où N_{max} désigne le nombre total de fréquences détectées. L'erreur relative $\epsilon_{q,N}$ est alors introduite afin d'évaluer la convergence de la vitesse normale pariétale quadratique moyenne vis-à-vis du nombre de composantes harmoniques retenues :

$$\epsilon_{q,N} = \left\| \frac{\mathbf{V}_{q,N} - \mathbf{V}_{q,\text{ref}}}{\mathbf{V}_{q,\text{ref}}} \right\| \quad \text{avec } N = 1 \dots N_{\text{max}} \quad (6.6)$$

Remarque : la vitesse quadratique moyenne est reconstruite sur un intervalle de temps fixé. Dans notre cas, les vibrations étant périodiques ou quasi-périodiques en régime stationnaire, cet intervalle de temps correspond à quelques périodes.

6.1.2 Construction d'une base de Fourier optimisée

L'analyse de l'erreur relative $\epsilon_{q,N}$ permet alors de détecter les composantes fréquentielles prédominantes. La première étape de cette analyse consiste à introduire une tolérance *Tole1* qui correspond à l'erreur cible à atteindre. Ensuite, les fréquences qui diminuent significativement l'erreur vis-à-vis d'une seconde tolérance *Tole2* sont détectées. La Figure 6.1 illustre le processus de sélection. L'erreur $\epsilon_{q,N}$ est tracée et les écarts relatifs $d_i = |\epsilon_{q,i+1} - \epsilon_{q,i}|$ sont calculés. Les composantes associées aux écarts supérieurs à la tolérance *Tole2* sont alors sélectionnées. La base de Fourier de départ est optimisée en ne conservant que les composantes

permettant d'atteindre l'erreur cible $Tol1$. Pour tester si l'erreur cible est atteinte, la vitesse de référence $\mathbf{V}_{q,ref}$ est comparée à la vitesse calculée avec les composantes sélectionnées. On définit alors la vitesse quadratique moyenne optimisée :

$$\mathbf{V}_{q,opt} = \sum_{m \in \mathbb{P}} \mathbf{V}_{q,m} \quad (6.7)$$

où $\mathbb{P}$ correspond à la base de Fourier actuelle :

$$\mathbb{P} = \{i \in [1 ; N_{max}] / d_i < Tol2\} \quad (6.8)$$

L'erreur optimisée $\epsilon_{q,opt}$ est définie par :

$$\epsilon_{q,opt} = \left\| \frac{\mathbf{V}_{q,opt} - \mathbf{V}_{q,ref}}{\mathbf{V}_{q,ref}} \right\| \quad (6.9)$$

Si la tolérance $Tol1$ n'est pas atteinte, alors la tolérance $Tol2$ est diminuée pour enrichir la base avec les composantes associées aux écarts d_i moins importants et la base $\mathbb{P}$ est mise à jour. Le processus est réitéré jusqu'à convergence et la base finale est donnée par :

$$\mathbb{P}_{opt} = \{i \in [1 ; N_{max}] / d_i < Tol2, \epsilon_{q,opt} < Tol1\} \quad (6.10)$$

L'algorithme de construction de la base de Fourier optimisée est illustré sur la Figure 6.2.

6.1.3 Pertinence de la base de Fourier optimisée

La base optimisée construite précédemment permet d'avoir une approximation de la réponse dynamique avec le nombre suffisant de composantes fréquentielles permettant d'atteindre l'erreur attendue. Il reste à présent à estimer la pertinence de cette base pour le problème acoustique. Dans ce but, on se propose d'analyser l'erreur relative en puissance acoustique pariétale. En effet, on peut remarquer que la convergence de la pression pariétale (au sens de la tolérance $Tol1$) implique la convergence du champ rayonné. L'idée est de faire un calcul acoustique complet avec toutes les composantes fréquentielles détectées. Ensuite, la convergence de la puissance acoustique pariétale est analysée en utilisant la base optimisée $\mathbb{P}_{opt}$.

La puissance acoustique pariétale associée à la fréquence ω_i est donnée par :

$$W_S^{\omega_i} = \frac{1}{2} \Re \left[\mathbf{P}_S(\omega_i) \dot{\mathbf{X}}_{n,i}^* \right] \quad (6.11)$$

La puissance acoustique pariétale tronquée à l'ordre N est de la forme suivante :

$$W_N = \sum_{i=1}^N W_S^{\omega_i} \quad (6.12)$$

La puissance de référence W_{ref} est calculée sans troncature. Elle est définie par :

$$W_{ref} = W_{N_{max}} \quad (6.13)$$

Ensuite, la convergence est analysée vis-à-vis du nombre de composantes fréquentielles en introduisant l'erreur relative suivante :

$$\epsilon_{p,N} = \left| \frac{W_N - W_{ref}}{W_{ref}} \right| \text{ avec } N = 1 \dots N_{max} \quad (6.14)$$

La puissance acoustique optimisée calculée avec les composantes de la base $\mathbb{P}_{\text{opt}}$ est notée W_{opt} . Elle est définie par :

$$W_{\text{opt}} = \sum_{i \in \mathbb{P}} W_S^{\omega_i} \quad (6.15)$$

La pertinence de la base $\mathbb{P}_{\text{opt}}$ dans le problème acoustique peut alors être évaluée en comparant W_{opt} et W_{ref} :

$$\epsilon_{\text{p,opt}} = \left| \frac{W_{\text{opt}} - W_{\text{ref}}}{W_{\text{ref}}} \right| \quad (6.16)$$

Si l'erreur sur la puissance acoustique $\epsilon_{\text{p,opt}}$ est suffisamment faible, alors la base optimisée est pertinente pour le problème acoustique et la solution de pression acoustique ne sera calculée que pour les composantes de la base $\mathbb{P}_{\text{opt}}$. Dans cette étude, on effectue le calcul acoustique complet uniquement pour montrer la pertinence de la base et on se restreint aux calculs associés aux composantes de la base optimisée.

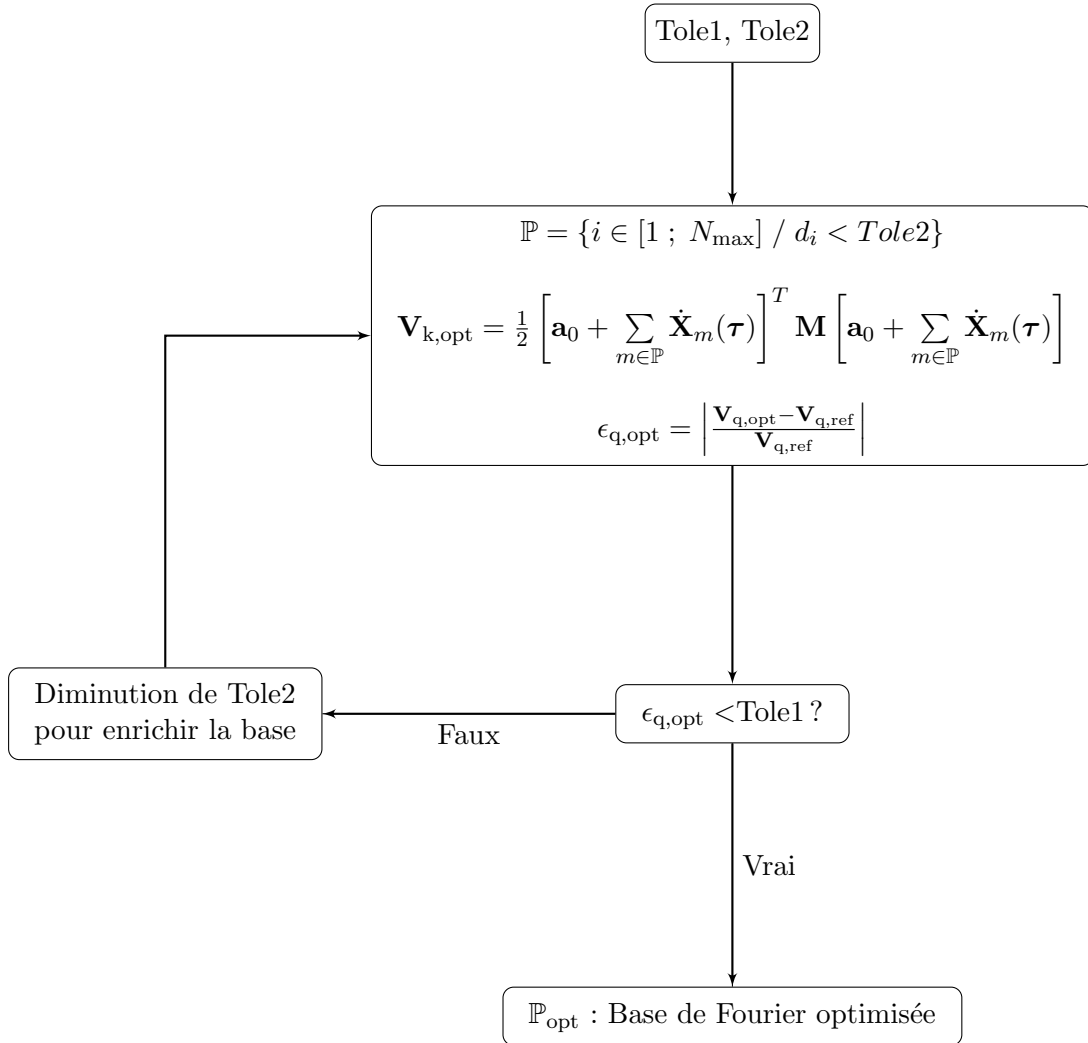


Figure 6.2 – Algorithme d'optimisation de la base Fourier.

6.2 Méthode d'approximation des niveaux de bruits

Le second niveau d'approximation concerne le champ de puissance acoustique rayonnée dans le volume extérieur. Ce dernier est calculé à partir de la pression pariétale, pour chaque fréquence et chaque point d'écoute. Ce calcul est certes moins coûteux que celui de la pression pariétale, mais il est tout de même nécessaire d'employer la BEM pour chaque plan d'écoute. L'objectif de cette partie est de développer une méthode permettant d'explorer tout l'espace sans utiliser la BEM. L'idée principale de cette approche est d'estimer la directivité de la source et de reconstruire la puissance acoustique rayonnée.

6.2.1 Calcul de la directivité : généralités

La première étape de cette approche consiste à estimer la directivité de la source à l'aide de la BEM. La source est enfermée dans une sphère de rayon R (Figure 6.3). La pression acoustique en un point M de la sphère S_R est notée $P(\theta, \phi, R, \omega)$ où θ, ϕ, R sont les coordonnées sphériques de M et ω est la pulsation de l'onde acoustique. L'intensité acoustique I au point M est définie par :

$$I(\theta, \phi, \omega) = \frac{P(\theta, \phi, \omega)P^*(\theta, \phi, \omega)}{\rho c} \quad (6.17)$$

où ρ est la masse volumique de l'air, c correspond à la vitesse du son dans l'air sec et l'étoile désigne le complexe conjugué. On introduit également l'intensité acoustique selon une direction donnée I_{axe} :

$$I_{\text{axe}} = I(\theta_0, \phi_0, \omega) \quad (6.18)$$

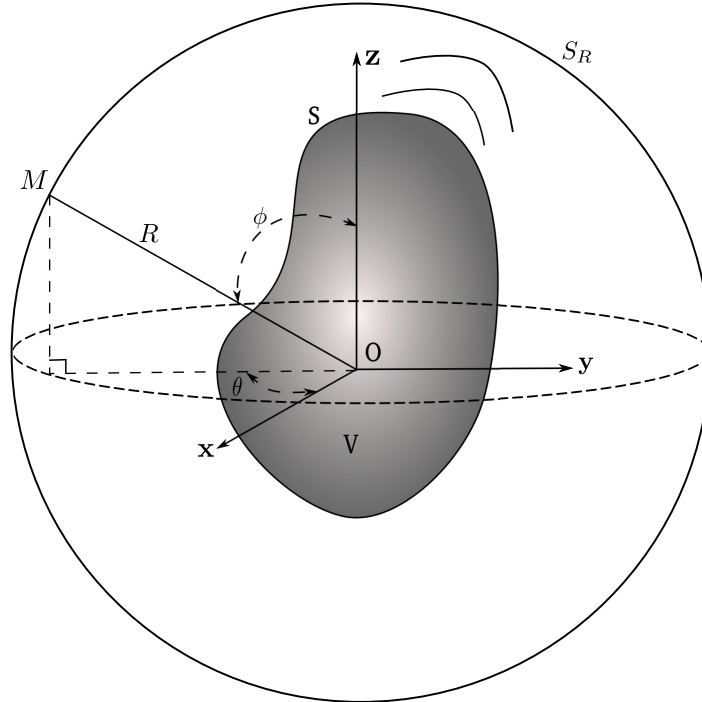


Figure 6.3 – Schéma du calcul de la directivité.

où (θ_0, ϕ_0) désigne une direction référence. Dans notre étude, cette dernière correspond à la direction selon laquelle l'intensité acoustique I est maximale :

$$(\theta_0, \phi_0) = \arg \max_{(\theta, \phi) \in S_R} I(\theta, \phi, \omega) \quad (6.19)$$

Finalement, la directivité est de la forme suivante :

$$h(\theta, \phi, \omega) = \frac{I(\theta, \phi, \omega)}{I_{\text{axe}}} \quad (6.20)$$

La fonction h permet d'obtenir la propension de la source à rayonner dans une direction donnée. Ses valeurs sont nécessairement dans l'intervalle $[0, 1]$ et elle est indépendante du rayon R de la sphère S_R . Afin d'évaluer cette fonction, la sphère S_R est discrétisée et la BEM est appliquée pour calculer la pression acoustique $P(\theta_i, \phi_i, \omega)$ pour chaque point d'écoute $(\theta_i, \phi_i) \in S_R$. Enfin, la directivité discrète $h_{\text{bem}}(\theta_i, \phi_i, \omega)$ est calculée à partir des équations (6.17), (6.18) et (6.20).

6.2.2 Méthode de calcul de la directivité

La directivité discrète h_{bem} n'est valable que sur les points de discrétisation de la sphère S_R . Il nous faut à présent déterminer une fonction analytique de la directivité afin de pouvoir l'évaluer dans toutes les directions de l'espace. La méthode la plus simple consiste à effectuer une interpolation de la directivité discrète vis-à-vis des variables d'espace θ et ϕ . L'objectif de ces travaux n'étant pas le développement de méthodes d'interpolation, nous nous orientons vers une méthode d'interpolation polynomiale à deux variables. Ainsi, on cherche à déterminer une fonction analytique notée h ayant l'expression suivante :

$$h(\theta, \phi, \omega) = \sum_{i=0}^d \sum_{k=0}^i \alpha_{ik} \theta^k \phi^{i-k} \text{ avec } (\theta, \phi) \in \mathbb{R} \quad (6.21)$$

où les α_{ik} correspondent aux coefficients du polynôme de degré d . On cherche alors à déterminer le degré d ainsi que les coefficients α_{ik} permettant d'obtenir la "meilleure" description spatiale de la directivité. Il est reconnu que l'usage d'un degré élevé réduit l'écart entre la fonction interpolée et les valeurs discrètes connues mais, dans certains cas, cela génère de fortes oscillations qui dégradent la fonction interpolée : c'est le phénomène de Runge. Afin d'éviter l'apparition de ce phénomène, l'interpolation polynomiale est effectuée sur une partie des valeurs connues. Puis, la fonction analytique est évaluée sur l'ensemble des points et nous vérifions que les écarts sont suffisamment faibles.

Dans notre cas, l'interpolation est effectuée sur 80% des points d'écoute de S_R . Ces points sont divisés en plusieurs sous-ensembles dont le premier est composé de points notés M_{rand} , aléatoirement répartis sur S_R . Le second correspond aux points où la directivité discrète h_{bem} est maximale et ces points sont notés M_{max} . Les points non sélectionnés sont notés M_C . Une illustration des sous-ensembles de points précédents est proposée sur la Figure 6.4.

Le degré optimal est déterminé en minimisant la distance entre l'ensemble des valeurs discrètes connues et la directivité interpolée évaluée sur ces mêmes points. Le problème à résoudre s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } d \in \mathbb{N} \text{ minimisant} \\ ||\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{bem}}||_{\infty} = \max_{(\theta_i, \phi_i) \in S_R} \left| \sum_{i=0}^d \sum_{k=0}^i \alpha_{ik} \theta_i^k \phi_i^{i-k} - h_{\text{bem}}(\theta_i, \phi_i, \omega) \right| \\ \text{avec } M = (\theta_i, \phi_i) \in S_R \end{array} \right. \quad (6.22)$$

où $\mathbf{h}$ est interpolée sur M_{rand} et M_{max} .

Remarque : le type d'interpolation à utiliser dépend fortement de la forme de la directivité. Dans notre étude, l'interpolation polynomiale suffit et la méthode globale présentée reste valable quelque soit le type d'interpolation employée.

6.2.3 Indicateurs de convergence de la directivité

Nous avons à disposition une méthode permettant d'obtenir une fonction analytique de la directivité associée à une discrétisation de la sphère S_R . À ce stade, l'erreur d'interpolation peut être estimée mais la qualité de la directivité ne peut être évaluée. Afin d'améliorer la description spatiale de la directivité, la discrétisation de la sphère S_R peut être raffinée. C'est-à-dire que l'on rajoute des points d'écoute supplémentaires sur lesquels la pression acoustique est calculée par la BEM. Il faut alors introduire un critère permettant de stopper le processus de discrétisation de la sphère S_R et la convergence de la directivité vis-à-vis du nombre de points d'écoute doit être analysée.

Processus de discrétisation des sphères

La première sphère $S_{R,1}$ contient un “faible” nombre de points de calcul BEM. Ensuite, la directivité est interpolée selon la méthode présentée précédemment. Puis, la sphère $S_{R,2}$ est construite en raffinant la sphère précédente. Plus généralement, la k -ième sphère $S_{R,k}$ associée à l'itération k et à la directivité interpolée h_k^ω est construite selon le processus itératif suivant :

- la sphère $S_{R,k}$ a pour longueurs caractéristiques : $d\theta_k ; d\phi_k$
- la sphère $S_{R,k+1}$ a pour longueurs caractéristiques : $d\theta_{k+1} = \frac{d\theta_k}{2} ; d\phi_{k+1} = d\phi_k$
- la sphère $S_{R,k+2}$ a pour longueurs caractéristiques : $d\theta_{k+2} = d\theta_{k+1} ; d\phi_{k+2} = \frac{d\phi_{k+1}}{2}$

où $d\theta_k$ et $d\phi_k$ correspondent aux pas du maillage sur la surface de la sphère et une illustration de ce processus est proposée sur la Figure 6.5.

Remarque : les tailles caractéristiques sont alternativement divisées par deux afin d'avoir une croissance “modérée” du nombre de points d'écoute afin de ne pas surestimer le nombre optimal. De plus, on peut remarquer que toutes les sphères sont imbriquées. Ainsi, la BEM n'est appliquée que sur les points ajoutés entre deux itérations.

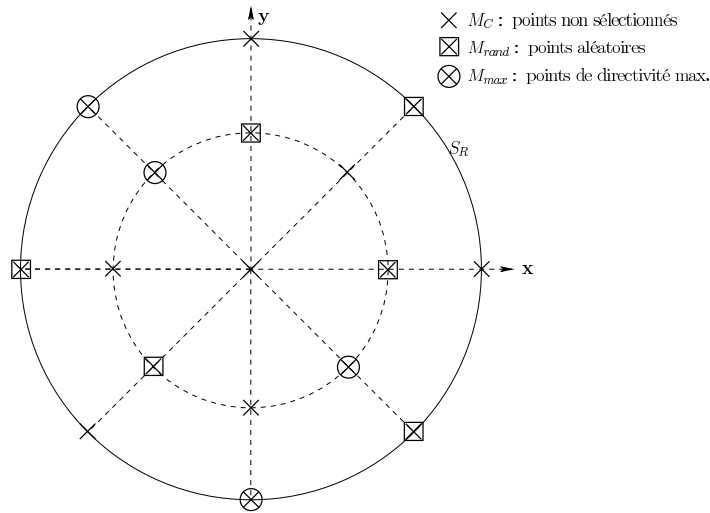


Figure 6.4 – Illustration des sous-ensembles de points utilisés pour l'interpolation de la directivité.

Critère de convergence “globale”

Il est important de remarquer que la qualité de la directivité interpolée ne peut être évaluée sur les points d'écoute de la sphère S_R . Ceci est dû au fait que l'interpolation minimise

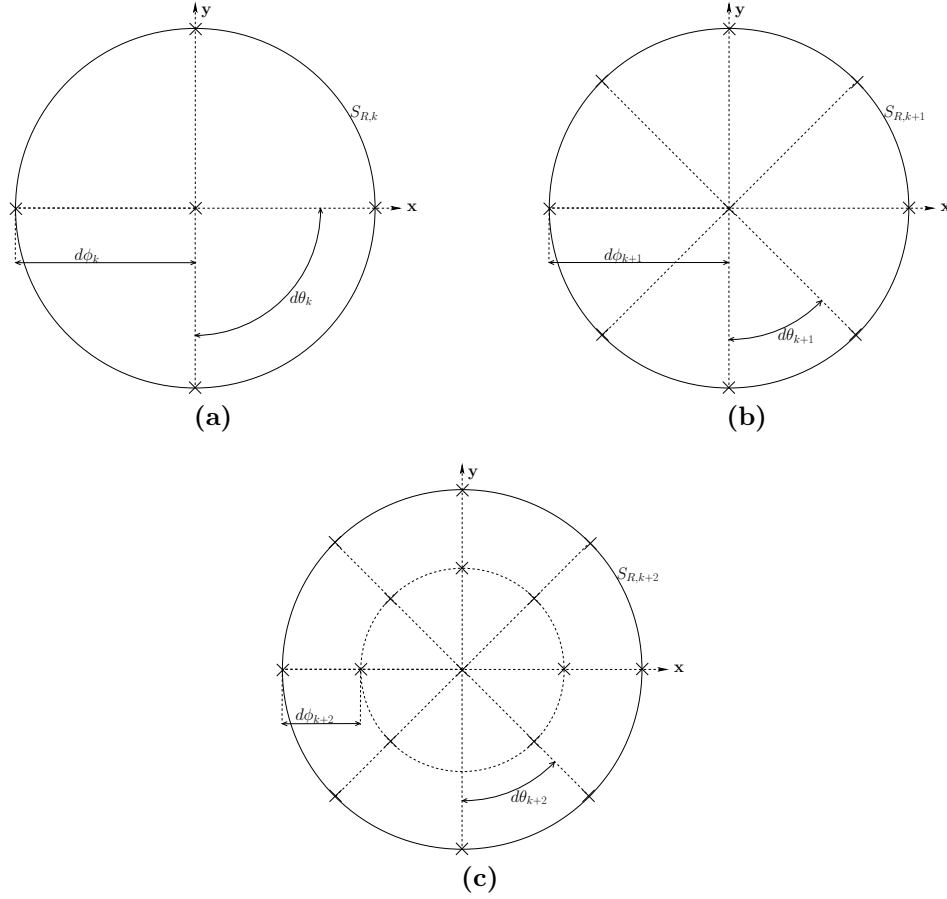


Figure 6.5 – Processus de discrétisation de la sphère S_R . (a) $S_{R,k}$, $d\theta_k$, $d\phi_k$, (b) $S_{R,k+1}$, $d\theta_{k+1}$, $d\phi_{k+1}$ et (c) $S_{R,k+2}$, $d\theta_{k+2}$, $d\phi_{k+2}$.

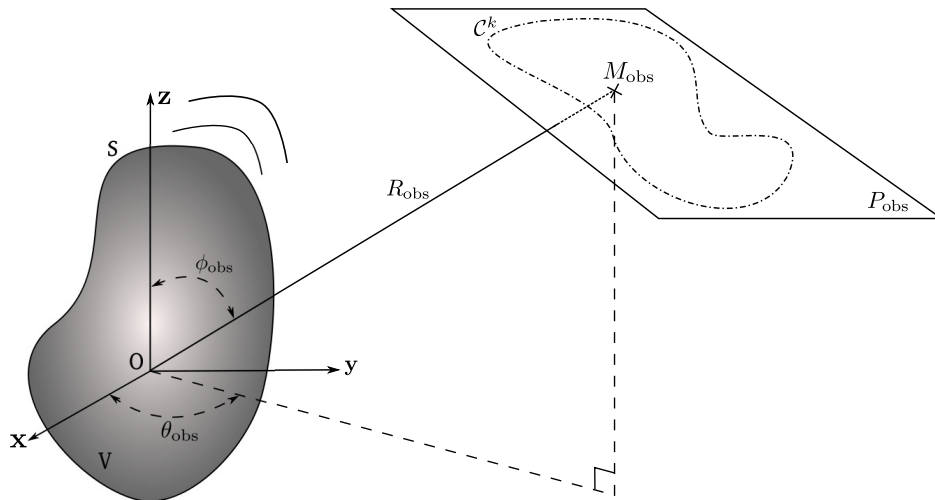


Figure 6.6 – Illustration des critères de convergence de la directivité.

l'écart entre la fonction interpolée et les valeurs connues au sens des moindres carrés. C'est pourquoi la directivité est évaluée sur un plan d'écoute arbitrairement choisi, noté P_{obs} et discrétisé en points d'écoute (Figure 6.6). Sur la $(k-1)$ -ième sphère $S_{R,k-1}$, la directivité h_{k-1}^ω est évaluée sur les points d'écoute de P_{obs} . Cette opération est également effectuée pour la directivité h_k^ω de l'itération suivante. Puis, l'erreur relative entre les directivités successives notée $\epsilon_{h,k}^\omega$ est calculée et le processus de discrétisation des sphères est arrêté lorsque l'erreur relative est suffisamment faible. Ce critère de convergence prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \epsilon_{h,k}^\omega = \|h_k^\omega(M_{\text{obs}}) - h_{k-1}^\omega(M_{\text{obs}})\|_\infty < A_1 \\ \forall M_{\text{obs}} = (\theta_{\text{obs}}, \phi_{\text{obs}}) \in P_{\text{obs}} \end{cases} \quad (6.23)$$

où A_1 correspond à la tolérance à atteindre. Ce critère permet de stopper l'algorithme lorsque l'écart entre deux directivités successives est suffisamment faible au sens de la tolérance A_1 .

Convergence du “motif”

Le critère de convergence “globale” tient compte de l'ensemble des points d'écoute sur le plan P_{obs} et les erreurs localisées d'interpolation sont donc prises en compte. Ainsi, et nous le verrons dans la suite, ce critère est sévère. On peut d'ores et déjà s'attendre à ce que la convergence de la directivité soit difficilement observable. Afin d'adoucir ce critère, nous introduisons un nouvel indicateur de convergence basé sur la forme de la directivité sur le plan P_{obs} . L'idée générale est d'observer la convergence du motif sans tenir compte des valeurs de la directivité.

Le motif de la directivité sur le plan P_{obs} associé à l'itération k et à la pulsation ω , noté $\mathcal{C}_k^\omega$, est défini par :

$$\mathcal{C}_k^\omega(M_{\text{obs}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } h_k^\omega(M_{\text{obs}}) \geq \bar{h}_k^\omega(M_{\text{obs}}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.24)$$

où la barre désigne la moyenne. Il se compose de l'ensemble des points d'écoute de P_{obs} pour lesquels la directivité est supérieure à la moyenne (Figure 6.6). Le processus de discrétisation de la sphère S_R est stoppé lorsque la convergence du motif est atteinte. C'est-à-dire lorsque l'erreur relative entre les motifs de deux itérations successives (i.e. $\mathcal{C}_{k-1}^\omega$ et $\mathcal{C}_k^\omega$) est suffisamment faible et que le motif est “stabilisé”. Nous introduisons alors l'erreur relative $\epsilon_{\mathcal{C},k}^\omega$ définie par :

$$\epsilon_{\mathcal{C},k}^\omega = \frac{\text{card}\{(\theta_{\text{obs}}, \phi_{\text{obs}}) \in P_{\text{obs}} / |\mathcal{C}_k^\omega - \mathcal{C}_{k-1}^\omega| = 1\}}{\text{card}(P_{\text{obs}})} \quad (6.25)$$

où la fonction card renvoie le nombre d'éléments d'un ensemble. On peut voir cette erreur comme le pourcentage d'information ajoutée entre deux motifs issus de deux itérations successives. De plus, cet indicateur ne tient pas compte des valeurs de la directivité sur P_{obs} mais uniquement de sa forme sur un plan arbitrairement choisi : c'est pourquoi il est moins strict que le critère de convergence globale. Le critère de convergence du motif prend la forme suivante :

$$\epsilon_{\mathcal{C},k}^\omega \leq \gamma_\% \text{ et } \delta_k^\omega \leq \gamma_\delta \text{ avec } \delta_k^\omega = \frac{\epsilon_{\mathcal{C},k+1}^\omega - \epsilon_{\mathcal{C},k}^\omega}{\Delta_{k+1} - \Delta_k} \quad (6.26)$$

avec $\gamma_\%$ la tolérance à atteindre sur l'erreur relative, δ_k^ω est la pente de l'erreur entre les itérations k et $k+1$ et γ_δ correspond au paramètre permettant d'estimer si le motif est stabilisé. La variable Δ_k correspond au nombre de points ajoutés entre les sphères $S_{R,k}$ et $S_{R,k+1}$:

$$\Delta_k = \text{card}(S_{R,k+1}) - \text{card}(S_{R,k}) \quad (6.27)$$

Une illustration du critère de convergence du motif est proposée sur la Figure 6.7. Nous avons donc à disposition une méthode de calcul permettant d'évaluer la directivité d'une source

rayonnante ainsi que des indicateurs de convergence. L'ensemble de l'algorithme est illustré sur la Figure 6.8.

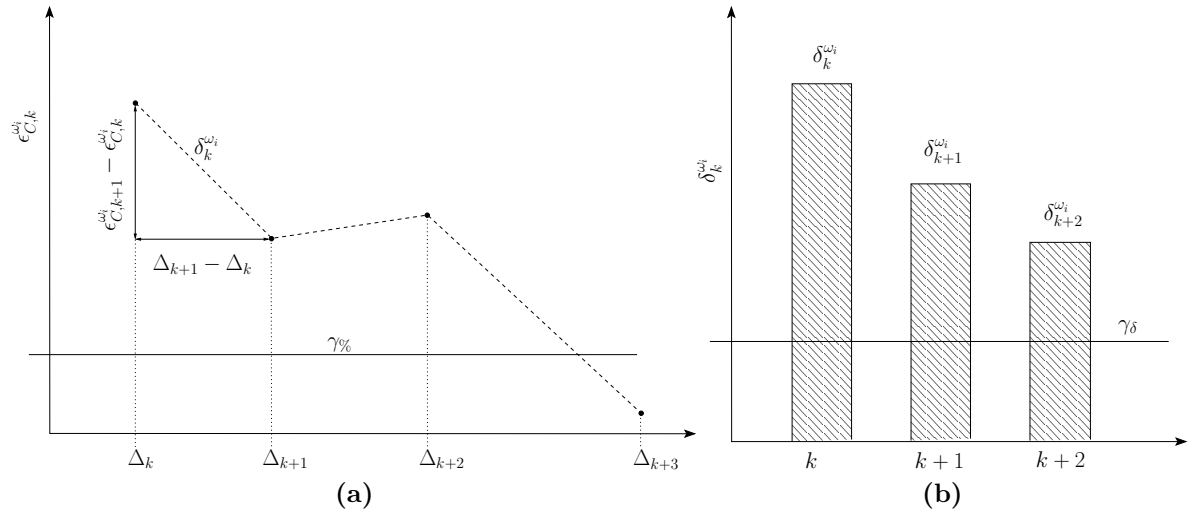


Figure 6.7 – Illustration du critère de convergence du motif. (a) Erreur relative entre deux motifs successifs $\epsilon_{C,k}^{\omega}$ en fonction du nombre de points ajoutés Δk et (b) schémas de l'évolution du gradient de l'erreur δ_k^{ω} .

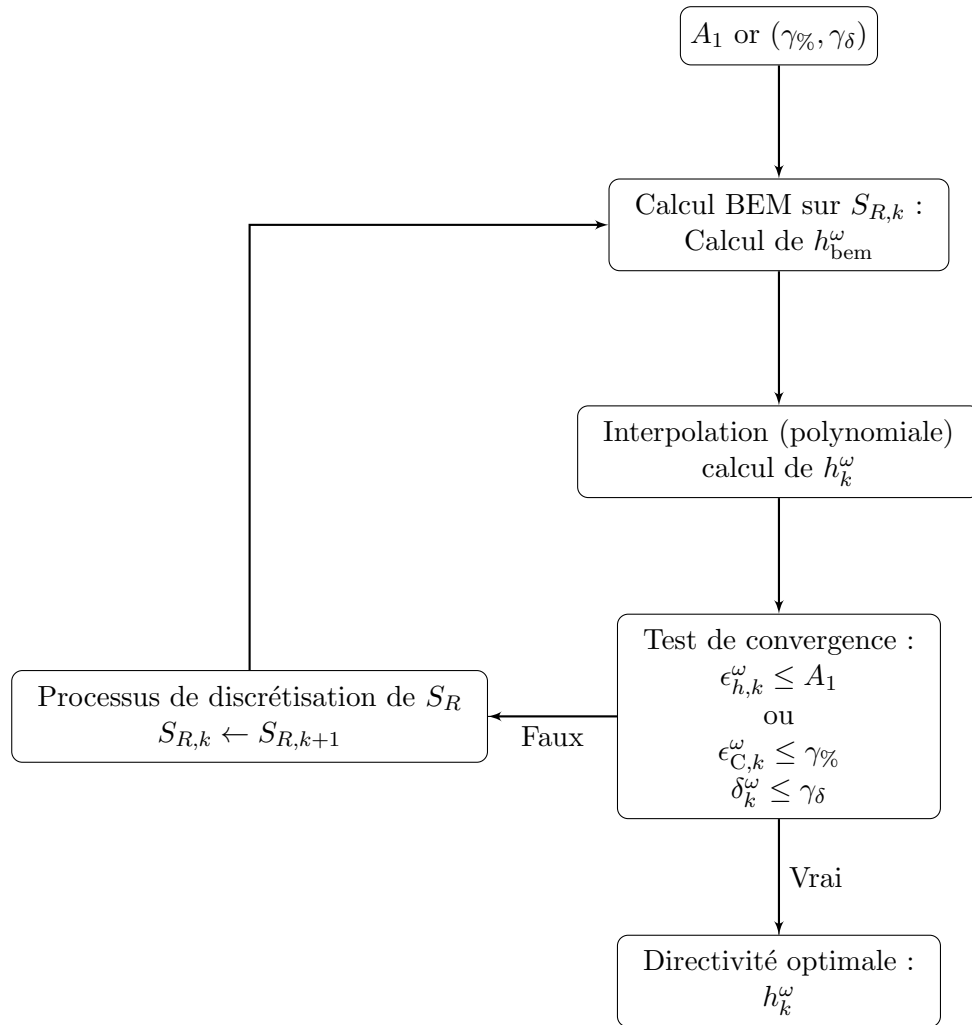


Figure 6.8 – Calcul de la directivité : interpolation polynomiale et test de convergence.

6.2.4 Reconstruction des niveaux de puissance acoustique

La méthode des éléments finis de frontière permet de calculer la pression acoustique en tout point de l'espace et donne accès aux niveaux sonores en décibels. Pour la pulsation ω de l'onde acoustique, ces niveaux calculés par la BEM sont notés $L_{p,\text{bem}}^\omega$. En revanche, l'approche que nous adoptons ici consiste à calculer la puissance acoustique W et les niveaux associés notés L_W définis par :

$$L_W = 10 \log_{10}(W/W_0) \quad (6.28)$$

avec $W_0 = 10^{-12}$ Watt qui correspond à la puissance acoustique minimum audible. L'objectif de cette approche est de reconstruire la puissance acoustique afin d'estimer les niveaux sonores dans le volume extérieur.

La puissance acoustique de la composante fréquentielle ω à l'itération k , associée à la directivité h_k^ω , est notée W_k^ω . Les niveaux de puissance acoustique correspondant sont désignés par $L_{W,k}^\omega$. Afin de calculer W_k^ω en chaque point d'écoute, trois informations sont requises :

- la directivité h_k^ω calculée par l'algorithme de la Figure 6.8,
- la puissance acoustique pariétale $\mathbf{W}_S^{\omega_i}$ définie par l'équation (6.11)
- un modèle de propagation adapté permettant de décrire la décroissance des niveaux sonores avec la distance à la source.

Remarque : la puissance acoustique pariétale, directement calculée par la BEM, est connue dans cette partie.

Le première approximation effectuée est l'approximation de source ponctuelle. La source rayonnante initiale est remplacée par une source ponctuelle équivalente, située à la position moyenne de coordonnées (x_p, y_p, z_p) , qui rayonne la puissance acoustique spatialement moyennée notée $W_p^{\omega_i} = \bar{\mathbf{W}}_S^{\omega_i}$. Sur la Figure 6.9, une illustration de l'approximation de source ponctuelle est proposée.

En ce qui concerne la décroissance des niveaux, un modèle classique est de considérer qu'ils décroissent comme $1/R^2$, où R désigne la distance à la source ponctuelle. Finalement,

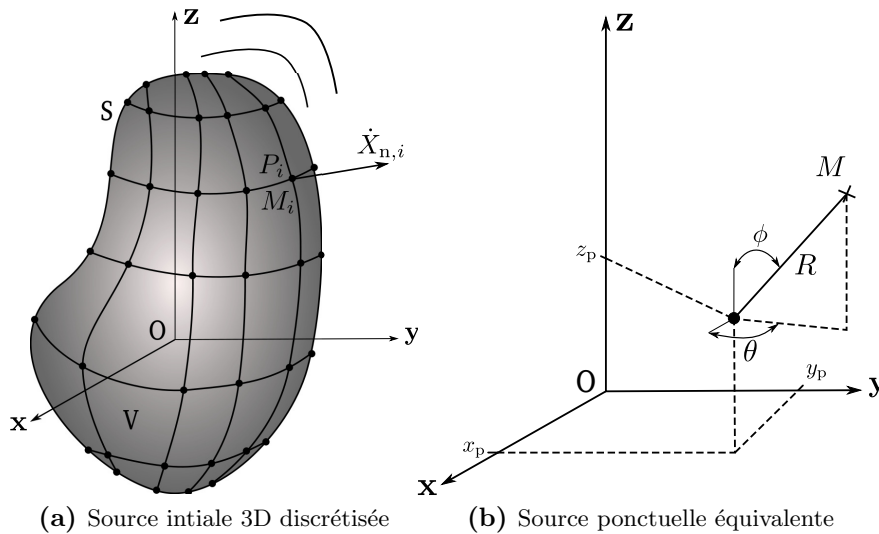


Figure 6.9 – Illustration de l'approximation de source ponctuelle.

la puissance acoustique en un point M de l'espace s'écrit de la façon suivante :

$$W_k^{\omega_i}(M) = W_p^{\omega_i} \frac{h_k^{\omega_i}(M)}{R^2} S \quad (6.29)$$

où S est la surface de la source initiale, M désigne un point de l'espace et on rappelle que $h_k^{\omega_i}(M)$ désigne la directivité calculée sur la sphère $S_{R,k}$ pour la pulsation ω_i . Comme pour la pression acoustique, la puissance acoustique est calculée pour chaque composante fréquentielle et le champ global est obtenu par la méthode de superposition pondérée détaillée dans la section 4.2.3 du chapitre 4.

6.2.5 Estimateurs d'erreur de la solution approchée : BEM “partielle”

Nous introduisons à présent des estimateurs d'erreur permettant d'évaluer la pertinence du champ reconstruit. L'idée principale est d'employer la BEM sur un nombre limité de points d'écoute afin de contrôler rapidement la qualité de la solution approchée. Ensuite, l'erreur est estimée en comparant les niveaux de puissance acoustique reconstruits $L_{W,k}^\omega$, avec les niveaux de pression acoustique $L_{p,\text{bem}}^\omega$ calculés par la BEM.

Il faut cependant judicieusement choisir les points de contrôle et nous envisageons deux types de répartition. La première consiste à placer les points dans un disque centré sur le maximum de niveau sonore. Cette approche semble bien adaptée au cas où la quantité d'intérêt est le niveau sonore maximum. Le second ensemble de points est une courbe d'iso-valeur afin de prendre en compte la forme de la directivité ainsi que les niveaux sonores. Le motif détecté sur le plan d'écoute peut être défini de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_{W,k}^\omega(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_{W,k}^\omega(M) \geq \bar{L}_{W,k}^\omega(M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.30)$$

où M est un point du plan d'observation étudié. Le motif détecté correspond à l'ensemble des points ayant des niveaux supérieurs à la moyenne. Ensuite, la courbe d'iso-valeur notée $\partial\mathcal{C}_{W,k}^\omega$ est obtenue en sélectionnant le contour du motif $\mathcal{C}_{W,k}^\omega(M)$.

Finalement, les solutions “partielles” de références calculées par la BEM sur les ensembles de points précédents sont comparées aux solutions reconstruites. Trois estimateurs d'erreur sont alors introduits :

$$\epsilon_{\text{bem}}^\omega = \|L_{W,k}^\omega - L_{p,\text{bem}}^\omega\|_\infty \quad (6.31)$$

$$\epsilon_{\text{disc}}^\omega = \|L_{W,k}^\omega(M_{\text{disque}}) - L_{p,\text{bem}}^\omega(M_{\text{disque}})\|_\infty \quad (6.32)$$

$$\epsilon_{\text{iso}}^\omega = \|L_{W,k}^\omega(M_{\text{iso}}) - L_{p,\text{bem}}^\omega(M_{\text{iso}})\|_\infty \quad (6.33)$$

où $\epsilon_{\text{bem}}^\omega$ correspond à l'erreur entre la solution complète obtenue par la BEM et la solution reconstruite, $\epsilon_{\text{disc}}^\omega$ désigne l'erreur entre la solution partielle sur le disque et la solution reconstruite et $\epsilon_{\text{iso}}^\omega$ est l'erreur utilisant le patch de contrôle composé des points de l'iso-contour $\partial\mathcal{C}_{W,k}^\omega$. M_{disque} et M_{iso} sont des points du disque de contrôle et de l'iso-contour respectivement.

Remarque : l'erreur $\epsilon_{\text{bem}}^\omega$ est construite à l'aide d'un calcul BEM sur l'ensemble des points d'écoute. Celle-ci est calculée uniquement pour évaluer la pertinence de la méthode d'approximation des niveaux de puissance acoustique. En pratique, on se sert uniquement des indicateurs construits avec les solutions “partielles”.

6.3 Estimation du bruit rayonné par le système de frein

Dans cette partie, nous illustrons la méthode globale d'approximation des niveaux de bruit rayonné en l'appliquant sur différents cas de crissement. Dans un souci de clarté, nous nous concentrons uniquement sur les cas 2_{statique} et 3_{statique} (i.e. à un et deux modes instables sous chargement statique).

6.3.1 Construction des bases de Fourier optimisées

Cas 2_{statique} à un mode instable : dans la section 3.4.3, nous avons vu que les vibrations de ce cas étaient composées de la fréquence fondamentale f_1 et des composantes harmoniques $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$, $5f_1$, $6f_1$ et $10f_1$. L'algorithme de la Figure 6.2 est employé pour sélectionner les composantes prépondérantes et les résultats sont présentés sur la Figure 6.10. L'écart le plus important est détecté entre l'ordre zéro et f_1 . En sélectionnant ces deux composantes, on peut voir que l'erreur optimisée $\epsilon_{k,\text{opt}}$ est de 0.48%. Afin d'évaluer la pertinence de cette base pour le problème acoustique, nous analysons également l'erreur en puissance acoustique pariétale. On observe qu'en utilisant cette base, l'erreur $\epsilon_{p,\text{opt}}$ est de l'ordre de 0.1%. On peut d'ores et déjà conclure que les réponses dynamique et acoustique sont largement dominées par la fréquence fondamentale f_1 . Nous pouvons tout de même atteindre une erreur encore plus faible en ajoutant la composante $2f_1$ (i.e. utiliser la base composée de l'ordre zéro, f_1 et $2f_1$) qui est la composante prédominante suivante. On peut voir que l'erreur optimisée sur la vitesse quadratique vaut $2 \times 10^{-2}\%$ et que celle en puissance acoustique est de $2 \times 10^{-4}\%$. On peut conclure que la convergence de la vitesse quadratique est en accord avec celle de la puissance acoustique et la base de Fourier optimisée convient pour le problème acoustique.

Cas 3_{statique} à deux modes instables : de façon analogue, la base de Fourier optimisée du cas 3_{statique} est calculée et les résultats sont représentés sur la Figure 6.11. On peut observer que 5 composantes harmoniques sur 30 au total suffisent pour décrire la puissance acoustique pariétale avec une erreur de l'ordre $10^{-3}\%$. La dynamique plus complexe de ce cas nécessite un nombre de composantes supérieur au cas 2_{statique} pour atteindre une erreur optimisée du même ordre de grandeur : la convergence est plus lente. Dans la suite, les bases utilisées seront celles listées dans les Tables 6.1 et 6.2.

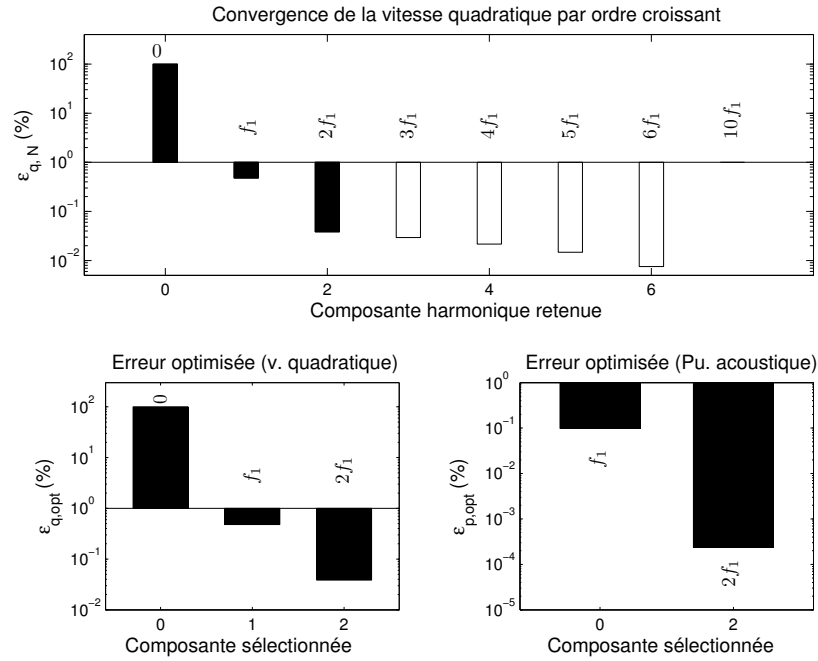


Figure 6.10 – Construction itérative de la base de Fourier optimisée correspondant aux vibrations du cas 2_{statique} . Barre noire : composante harmonique sélectionnée et barre blanche : composante harmonique non sélectionnée.

Table 6.1 – Base de Fourier optimale du cas 2_{statique} avec $Tol_{e1} = 5 \times 10^{-2}\%$.

ordre	f_1	f_2
0	0	0
1	1	0
2	2	0

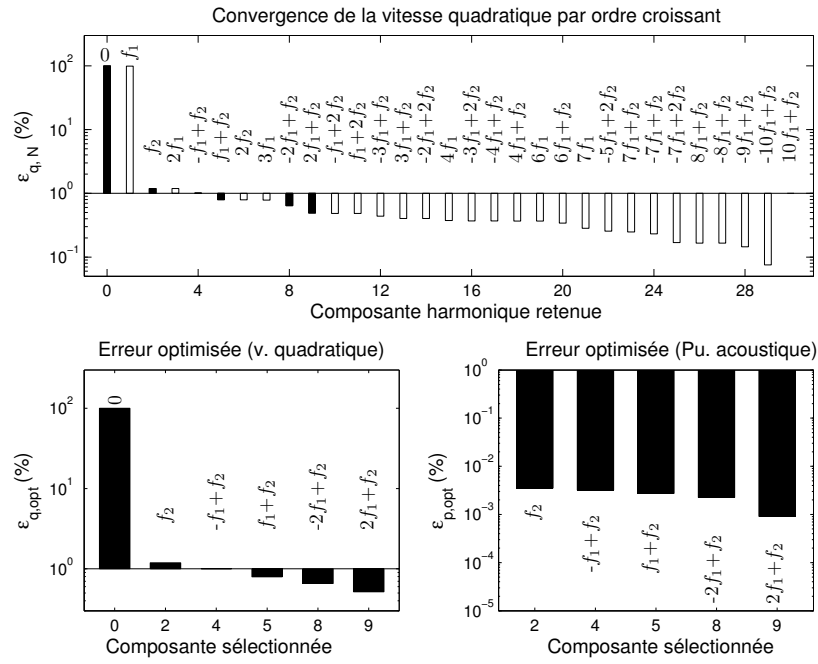


Figure 6.11 – Construction itérative de la base de Fourier optimisée correspondant aux vibrations du cas 3_{statique} . Barre noire : composante harmonique sélectionnée et barre blanche : composante harmonique non sélectionnée.

Table 6.2 – Base de Fourier optimale du cas 3_{statique} avec $Tol_{e1} = 0.5\%$.

ordre	f_1	f_2
0	0	0
1	0	1
2	-1 1	1 1
3	-2 2	1 1

6.3.2 Estimation des niveaux sonores

La méthode d'approximation des niveaux sonores est appliquée sur les deux cas précédents et pour les bases optimisées associées. L'algorithme décrit sur la Figure 6.8 est appliqué pour estimer la directivité de chacune des composantes fréquentielles. Le plan d'observation permettant d'évaluer la convergence de la directivité est le plan appelé champ proche (i.e. le plan horizontal situé à 5 cm du disque). Il est important de rappeler que ce plan est arbitrairement choisi mais que nous choisissons un plan existant dans un souci de clarté. Puis, les niveaux de puissance acoustique sont reconstruits et les estimateurs d'erreur associés aux deux solutions partielles sont utilisés.

Comme expliqué au chapitre 4, notre intérêt se porte sur les émissions dans la direction $+\mathbf{z}$. Ceci nous autorise à ne considérer qu'une demi-sphère pour l'estimation de la directivité. La sphère S_R est centrée sur le disque, son rayon vaut 2 m et se situe dans le demi-espace des altitudes positives. On rappelle que les caractéristiques de la sphère peuvent être arbitrairement choisies, la seule contrainte est qu'elle doit nécessairement contenir la source. D'autre part, le nombre initial de points d'écoute (i.e. la discrétisation de $S_{R,1}$) est fixé à 256. Le processus de discrétisation de la sphère S_R génère des demi-sphères dont les caractéristiques sont listées dans la Table 6.3.

Afin d'illustrer la méthode, nous cherchons à reconstruire les cartes de niveaux sonores présentées sur la Figure 6.12. L'objectif étant de tester la méthode sur des motifs "simples" tels que ceux des composantes du cas 2_{statique} (Figures 6.12 (a) et (b)) et un plus "complexe" comme celui de la quatrième composante de la base optimisée du cas 3_{statique} (Figure 6.12 (c)).

Table 6.3 – Caractéristiques des demi-sphères utilisées pour le calcul de la directivité.

Itération k	1	2	3	4	5	6	7	8
Sphère $S_{R,k}$	$S_{R,1}$	$S_{R,2}$	$S_{R,3}$	$S_{R,4}$	$S_{R,5}$	$S_{R,6}$	$S_{R,7}$	$S_{R,8}$
card($S_{R,k}$)	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

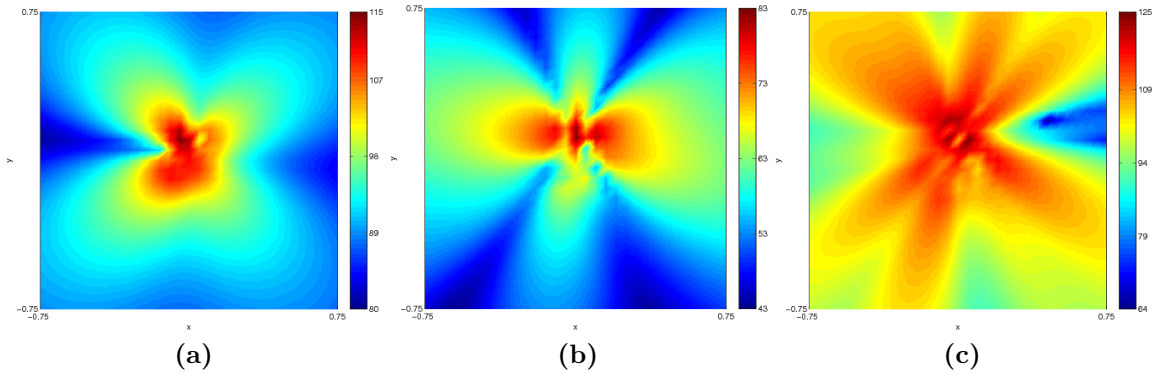


Figure 6.12 – Cartes de niveaux de pression acoustique cibles calculés par la BEM. (a) Cas 2_{statique}- $L_{p,bem}^{\omega_1}$, (b) cas 2_{statique}- $L_{p,bem}^{\omega_2}$ et (c) cas 3_{statique}- $L_{p,bem}^{\omega_4}$.

Cas 2_{statique} à un mode instable

Calcul de la directivité : la directivité $h_{\text{bem},k}^{\omega_1}$ associée à la composante $\omega_1 = 2\pi f_1$ et calculée par la BEM est illustrée sur la Figure 6.13 (a) pour toutes les sphères $S_{R,k}$. La forme de la directivité est relativement simple et on peut observer que la description spatiale ne s'améliore pas significativement avec l'ajout de points d'écoute. En ce qui concerne l'interpolation de la directivité, on peut voir sur la Figure 6.13 (b) que la méthode proposée est efficace.

Le processus de discrétisation est stoppé lorsque que la convergence de la directivité est atteinte au sens de l'un des deux critères présentés dans la section précédente (équations (6.23) et (6.24)). Sur la Figure 6.14 (a), on peut voir la directivité évaluée sur le plan d'écoute et on observe que le motif semble stabilisé dès la quatrième itération. Ceci est confirmé par l'analyse de l'erreur relative entre deux directivités successives (i.e. le critère de convergence globale) $\epsilon_{h,k}^{\omega_1}$ qui converge rapidement (Figure 6.14 (c)). On peut voir que l'erreur est proche de zéro pour 4096 points d'écoute ajoutés, c'est-à-dire pour la sphère $S_{R,6}$ contenant 8192 points. On peut donc fixer la tolérance A_1 à atteindre pour stopper l'algorithme.

Le second critère de convergence du motif est également utilisé et on peut voir les motifs successifs sur la Figure 6.14 (b). Comme précédemment, le motif détecté se stabilise : la forme et l'orientation des quatre lobes sont rapidement constantes. L'analyse de l'erreur associée $\epsilon_{C,k}^{\omega_1}$ présente également une convergence rapide : elle est proche de zéro aux alentours de 2048 points ajoutés (i.e. pour la sphère $S_{R,5}$). De plus, l'étude du gradient de l'erreur montre que la stabilisation est atteinte pour $\delta_3^{\omega_1}$ qui est de l'ordre de 10^{-4} . L'algorithme s'arrête lorsque les tolérances $\gamma\%$ et γ_δ initialement fixées sont atteintes.

Pour ce cas, les deux critères sont très proches et ceci est dû à la simplicité du motif. Cependant, on remarque tout de même que le critère relatif au motif permet d'observer la convergence plus rapidement et est plus proche des observations effectuées sur les Figures 6.14 (a) et (b).

Reconstruction des niveaux de puissance acoustique : la directivité interpolée, l'approximation de source ponctuelle, ainsi que l'équation (6.29) permettent de calculer les niveaux de puissance acoustique. La Figure 6.15 illustre les niveaux sonores pour chacune des itérations $L_{W,k}^{\omega_1}$ (i.e. pour chacune des directivités). Sur la Figure 6.15 (a), on peut voir que les niveaux sont proches de la référence et que les quatre lobes apparaissent dès les premières itérations. En comparant ces cartes de niveau à la référence calculée par la BEM (Figure 6.12 (a)), on peut conclure que la méthode est efficace.

Contrôle de la qualité de la solution approchée : afin d'évaluer la pertinence de l'approximation, les cartes de niveau de chaque itération de la Figure 6.15 (a) sont comparées à la référence de la Figure 6.12 (a). L'évolution de l'erreur $\epsilon_{\text{bem}}^{\omega_1}$ en fonction du nombre de points sur la sphère $S_{R,k}$ est tracée sur la Figure 6.16 (a). On peut observer que l'erreur converge vers une valeur constante de l'ordre de 2%. On peut alors conclure que l'approximation est efficace. Afin d'estimer rapidement la qualité de la solution sans employer la BEM sur le plan complet, il est possible d'utiliser les indicateurs construits sur les solutions partielles (équations (6.32) et (6.33)). Sur la Figure 6.16 (b), on peut voir que l'erreur $\epsilon_{\text{disque}}^{\omega_1}$, associée au disque centré sur le niveau sonore maximum, se stabilise autour de 3.5%. Dans notre étude, le nombre de points contenus dans le disque de contrôle correspond à 10% du nombre de points d'écoute total (i.e. soit environ 100). En ce qui concerne l'erreur calculée sur l'iso-contour $\epsilon_{\text{iso}}^{\omega_1}$, on observe la même évolution mais la valeur finale est de 2.5% comme illustré sur la Figure 6.16 (c). Le nombre de points d'écoute utilisé pour l'iso-contour est identique à celui du disque. Nous pouvons conclure que les estimateurs d'erreur introduits

permettent d'obtenir des valeurs proches de l'erreur complète $\epsilon_{\text{bem}}^{\omega_1}$ avec un nombre limité de calculs BEM. On peut tout de même noter que l'erreur $\epsilon_{\text{iso}}^{\omega_1}$ semble plus proche de l'erreur de référence.

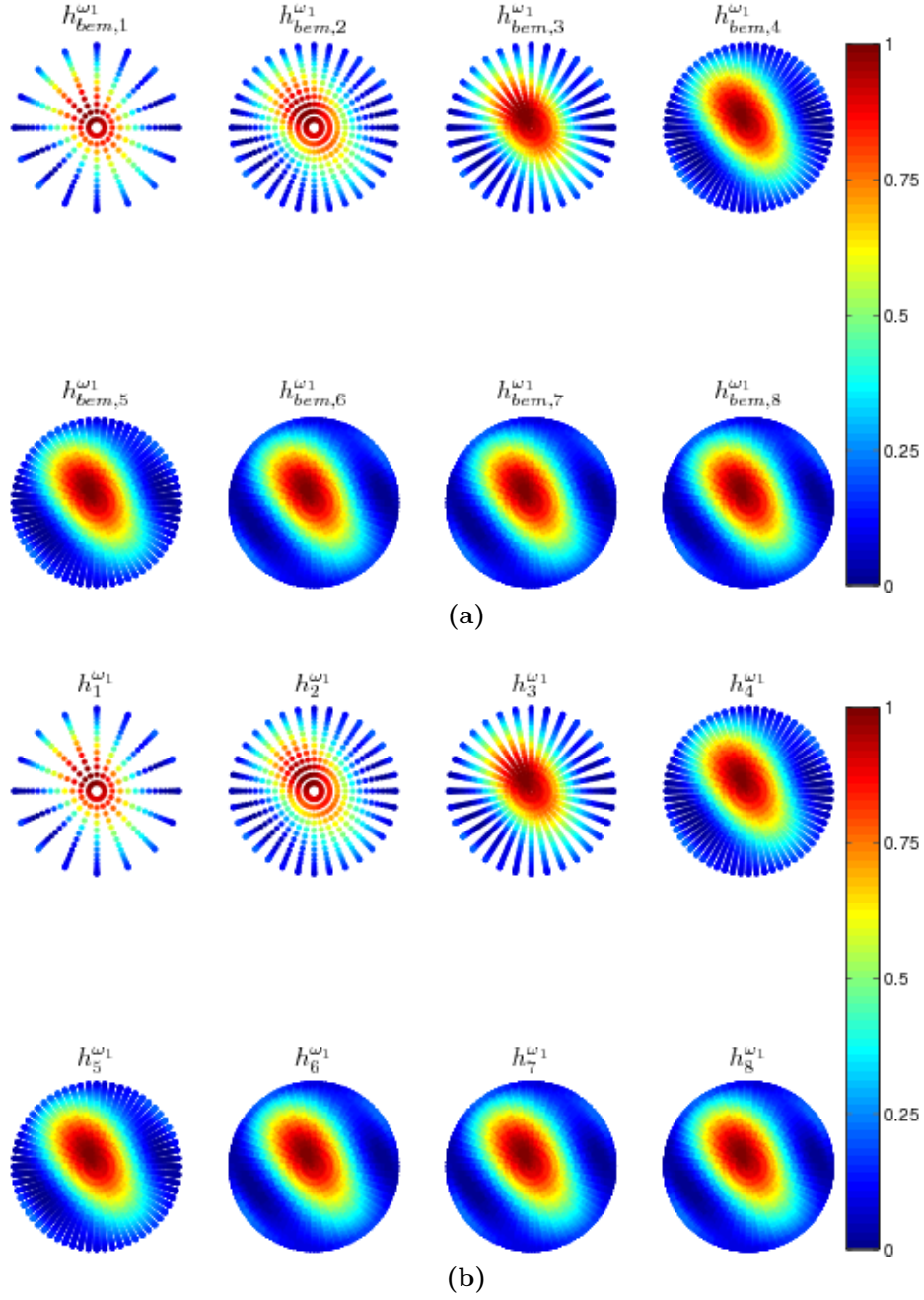


Figure 6.13 – Interpolation polynomiale de la directivité sur les sphères $S_{R,k}$ pour la composante $\omega_1 = 2\pi f_1$ du cas 2_{statique} . (a) Directivité discrète calculée par la BEM $h_{\text{bem},k}^{\omega_1}$ et (b) directivité interpolée $h_k^{\omega_1}$.

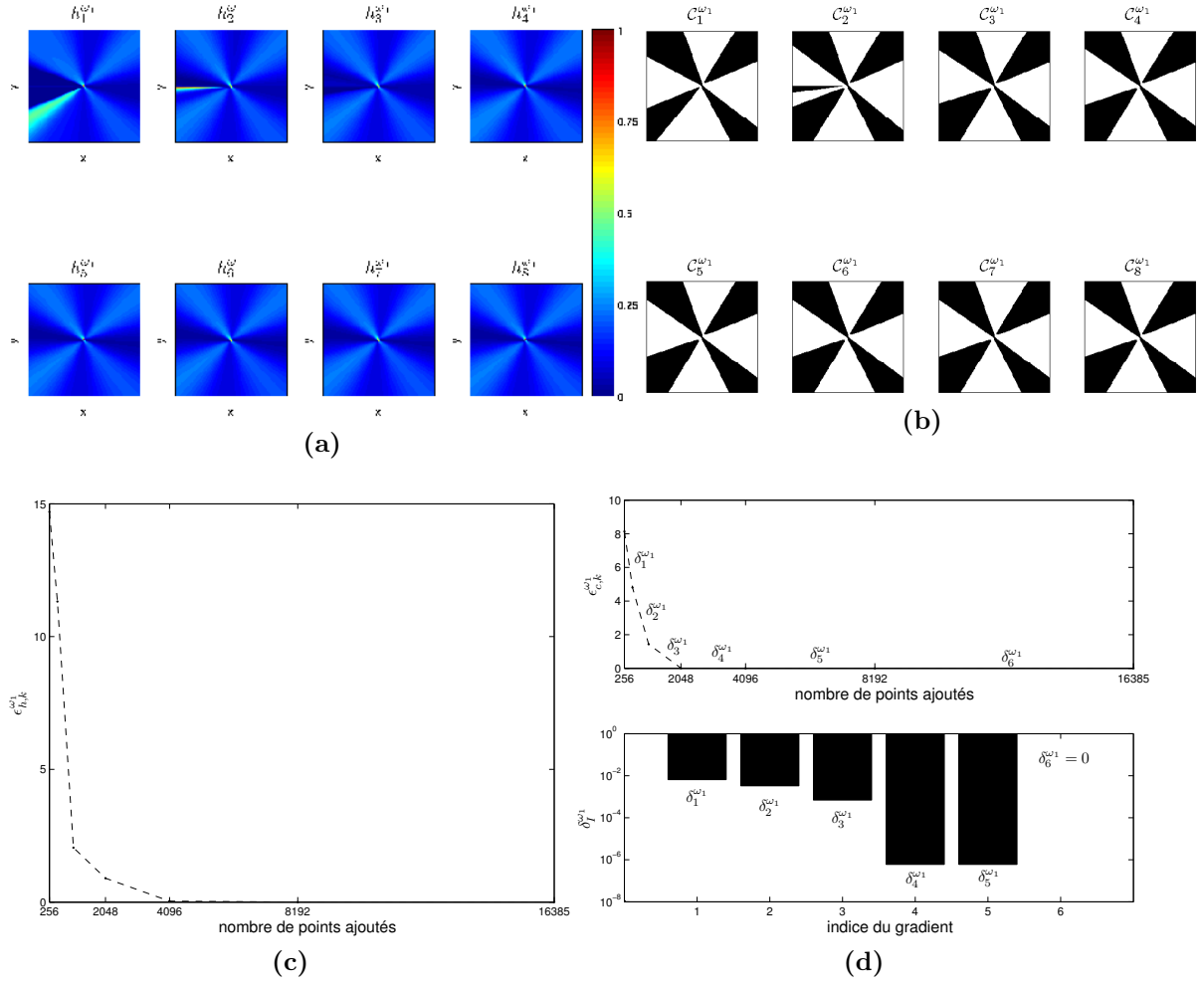


Figure 6.14 – Analyse de la convergence de la directivité associée à la composante ω_1 du cas 2_{statique} . (a) Directivité évaluée sur le plan d'écoute, (b) motif détecté, (c) erreur globale $\epsilon_{h,k}^{\omega_1}$ et (d) haut : erreur sur le motif $\epsilon_{C,k}^{\omega_1}$ - bas : gradient $\delta_I^{\omega_1}$.

La même démarche est appliquée sur la seconde composante fréquentielle $2f_1$. On peut voir que la méthode d'interpolation est toujours efficace malgré la présence de deux directions de propagation (Figure 6.17). En ce qui concerne la convergence de la directivité, on observe que le motif est différent de celui de la composante f_1 (Figure 6.18 (a)). L'erreur globale présente des variations irrégulières et la convergence n'est observée qu'à partir de 16385 points ajoutés, soit pour la sphère $S_{R,8}$ contenant 32768 points. En revanche, la forme du motif détecté semble converger dès l'itération 5 comme le montre la Figure 6.18 (b). L'erreur en motif présente des variations moins irrégulières et la convergence est atteinte pour 8192 points ajoutés (Figure 6.18 (d)). Le gradient $\delta_5^{\omega_2}$ associé est de l'ordre de 10^{-4} et indique que la solution est stabilisée. Comme précédemment, l'erreur en motif est toujours plus efficace et moins stricte que l'erreur globale.

La reconstruction des niveaux pour chaque itération est illustrée sur la Figure 6.19 (a). Le motif final apparaît dès l'itération 4 et les niveaux sont proches des niveaux de référence de la Figure 6.12 (b). Les variations de l'erreur entre les solutions approchées à chaque itération et le calcul BEM complet, par rapport au nombre de points d'écoute sur $S_{R,k}$, se stabilisent autour de 6.6% pour 4096 points, ce qui est en accord avec la convergence de la directivité

(Figure 6.16 (a)). Les erreurs $\epsilon_{\text{disque}}^{\omega_2}$ et $\epsilon_{\text{iso}}^{\omega_2}$ permettent d'avoir une bonne estimation de l'erreur sur la solution approchée (Figures 6.16 (b) et (c)). On observe encore une fois que l'erreur $\epsilon_{\text{iso}}^{\omega_2}$ a des valeurs plus proches de l'erreur complète $\epsilon_{\text{bem}}^{\omega_2}$.

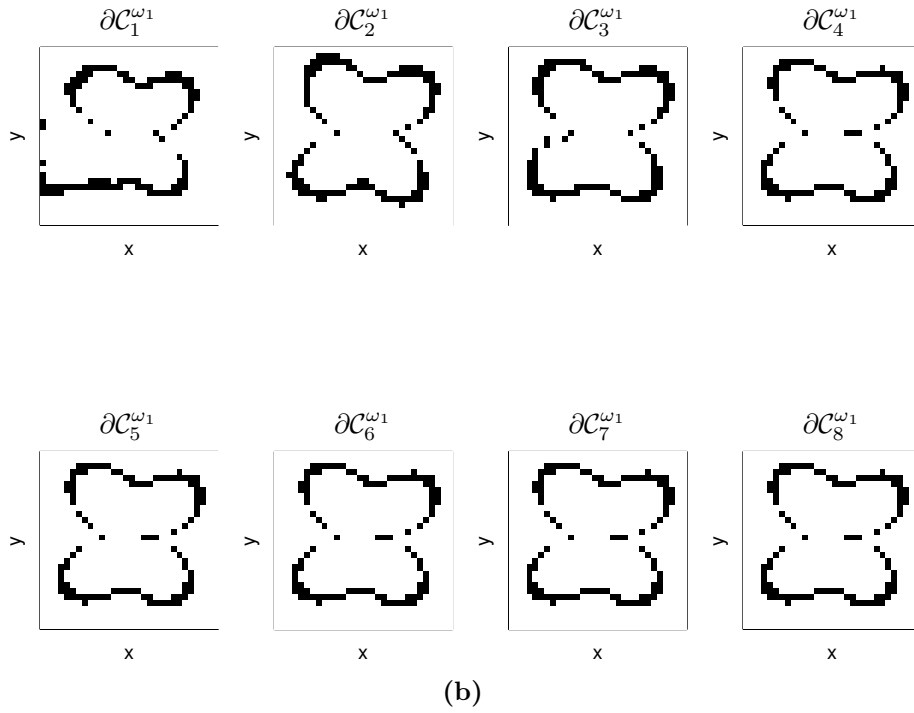
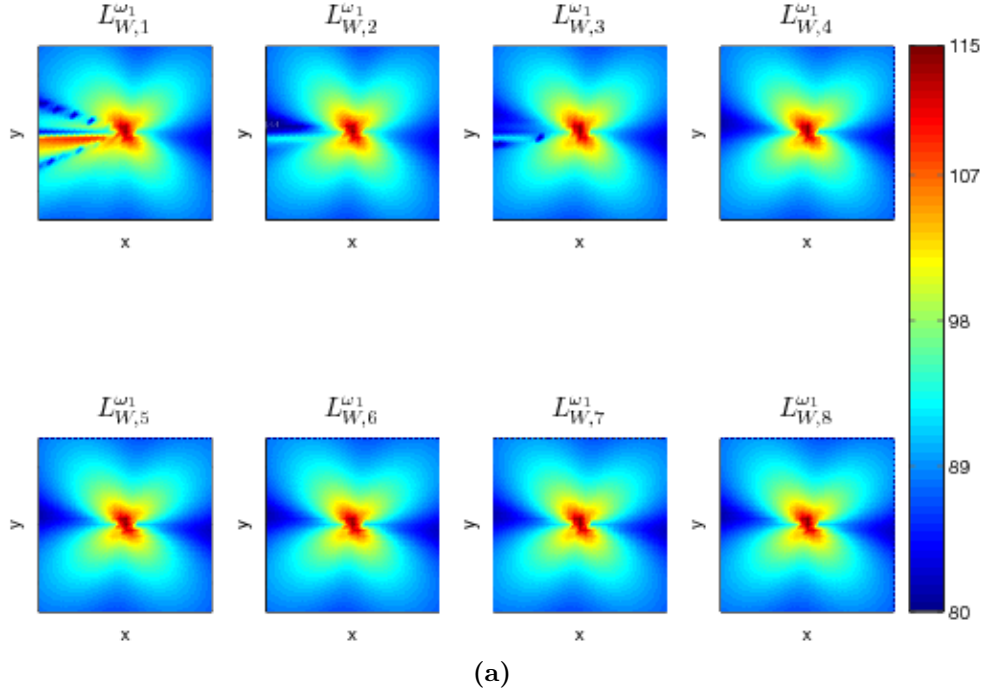


Figure 6.15 – Reconstruction des niveaux de puissance acoustique pour la composante ω_1 du cas 2statique. (a) Niveaux $L_{W,k}^{\omega_1}$ et (b) iso-contour détecté $\partial C_k^{\omega_1}$.

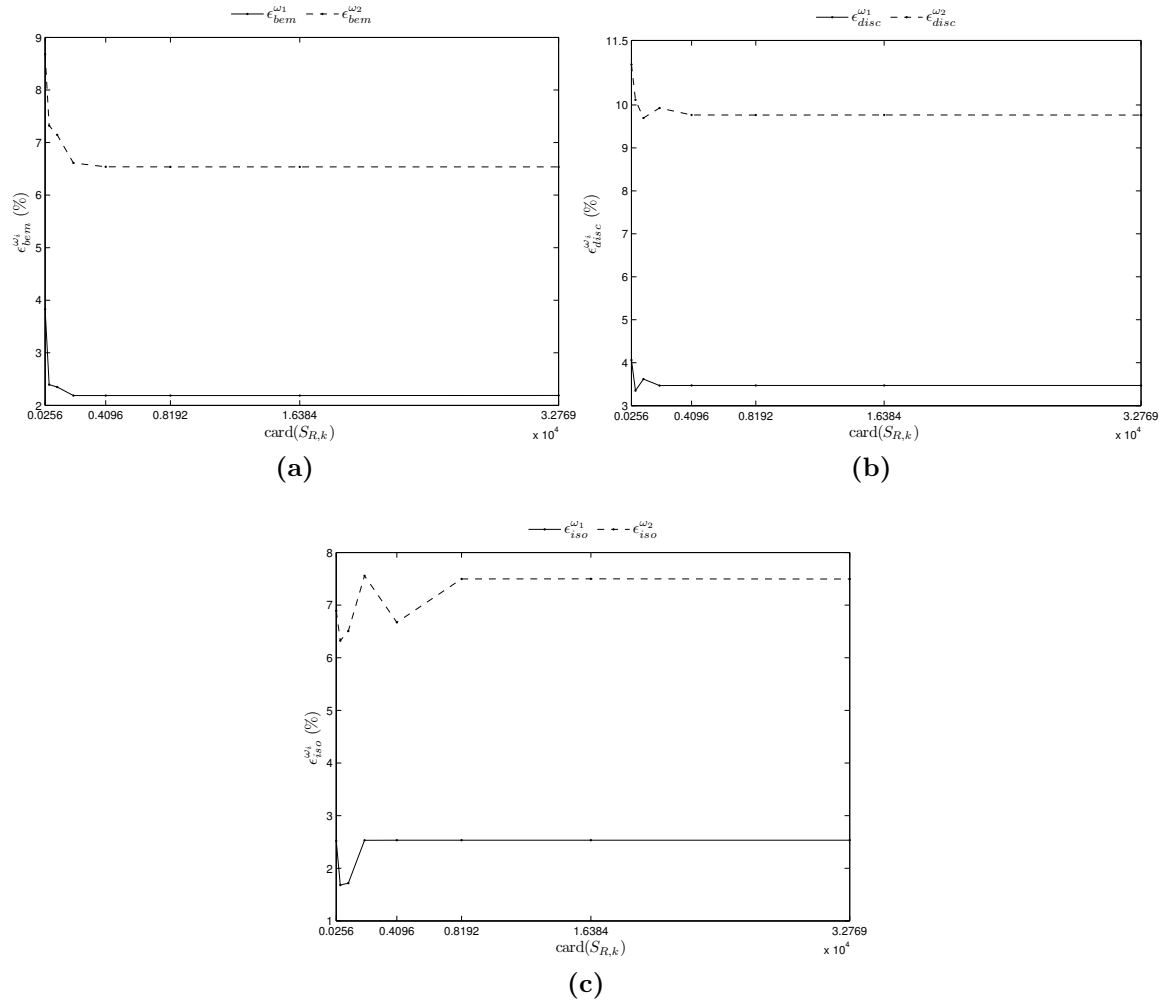


Figure 6.16 – Analyse de la qualité de la solution approchée. (a) Comparaison avec le calcul BEM complet, (b) comparaison avec la solution partielle associée au disque et (c) comparaison avec la solution partielle calculée sur l'iso-contour.

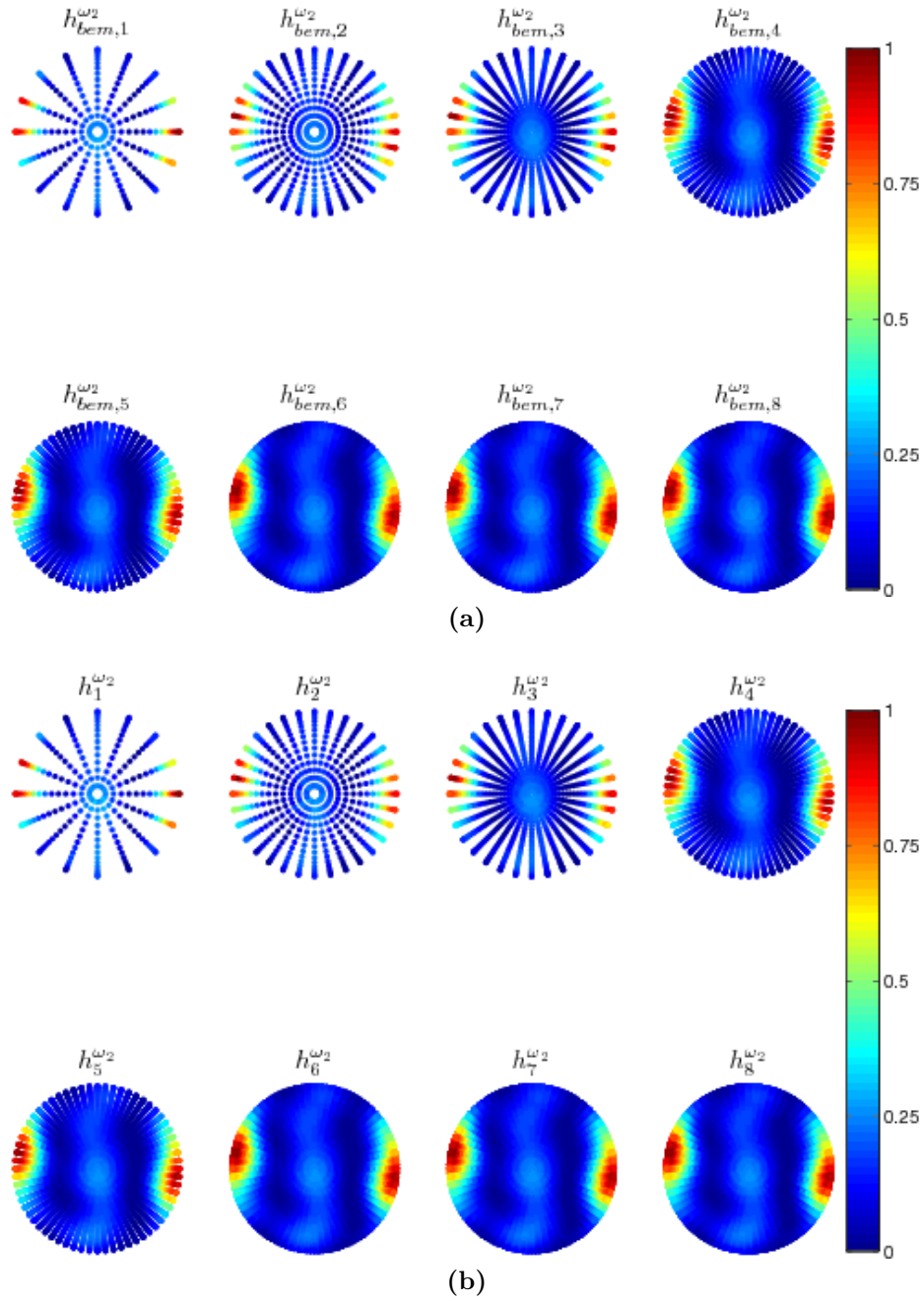


Figure 6.17 – Interpolation polynomiale de la directivité sur les sphères $S_{R,k}$ pour la composante $\omega_2 = 4\pi f_1$ du cas 2_{statique} . (a) Directivité discrète calculée par la BEM $h_{bem,k}^{\omega_2}$ et (b) directivité interpolée $h_k^{\omega_2}$.

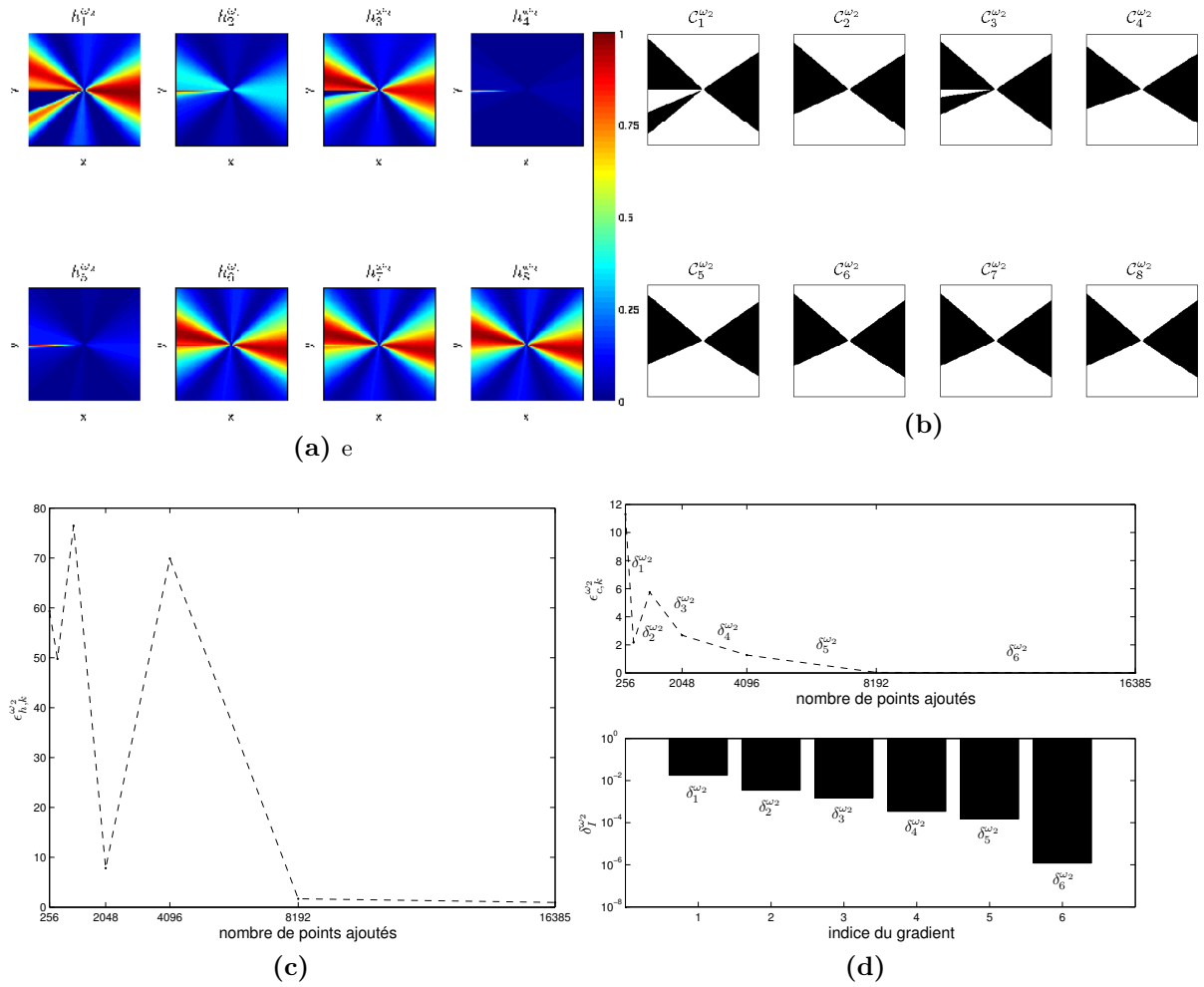


Figure 6.18 – Analyse de la convergence de la directivité associée à la composante ω_2 du cas 2_{statique} . (a) Directivité évaluée sur le plan d'écoute, (b) motif détecté, (c) erreur globale $\epsilon_{h,k}^{\omega_2}$ et (d) haut : erreur sur le motif $\epsilon_{C,k}^{\omega_2}$ - bas : gradient $\delta_I^{\omega_2}$.

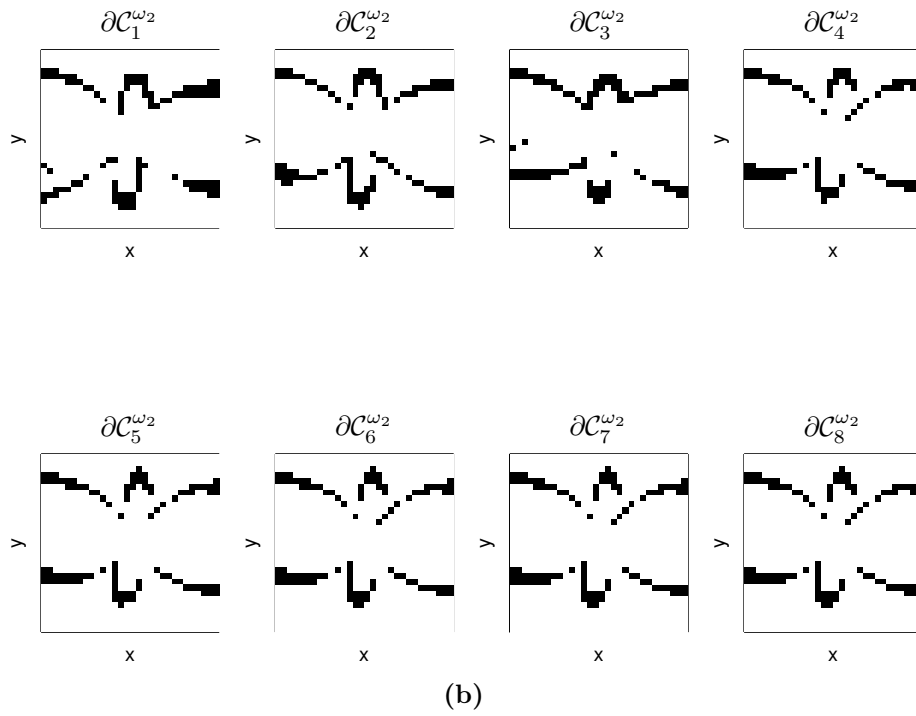
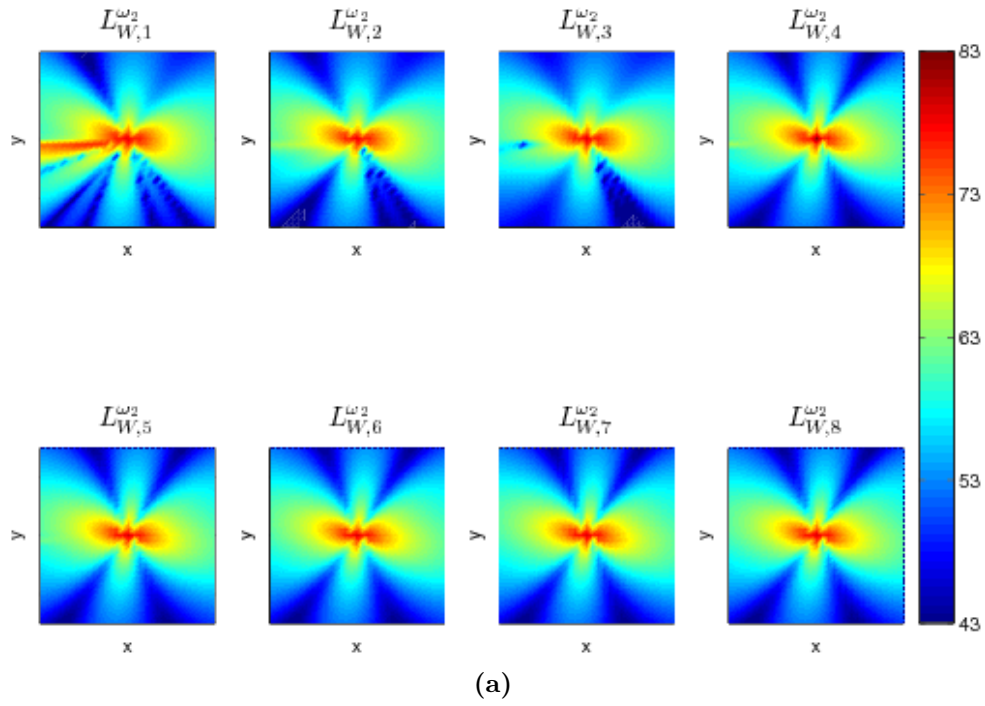


Figure 6.19 – Reconstruction des niveaux de puissance acoustique pour la composante ω_2 du cas 2_{statique}. (a) niveaux $L_{W,k}^{\omega_2}$ et (b) : iso-contour détecté $\partial \mathcal{C}_k^{\omega_2}$.

Cas 3_{statique} à deux modes instables

La méthode globale d'approximation des niveaux sonores a été appliquée et validée sur un cas présentant des directivités simples. Nous allons à présent tester l'efficacité de la méthode sur la composante $-2f_1 + f_2$ de la base de Fourier optimisée du cas 3_{statique}. Comme vu dans les chapitres précédents, la participation de deux modes instables dans la réponse vibratoire fait que ce cas est plus complexe. La carte de niveau que l'on cherche à reconstruire est illustrée sur la Figure 6.12 (c) et laisse apparaître six lobes.

La méthode permettant de calculer la directivité est appliquée et les résultats sont présentés sur la Figure 6.20. On peut voir que la directivité discrète $h_{\text{bem},k}^{\omega_4}$ est très directive (Figure 6.20 (a)). De plus, la méthode d'interpolation permet de reproduire un motif complexe avec des directions de propagation très localisées.

En ce qui concerne la convergence de la directivité, le critère de convergence globale ne permet pas d'arrêter l'algorithme avant la dernière sphère $S_{R,8}$ (Figures 6.21 (a) et (c)). Le critère de convergence du motif fournit une erreur décroissante qui permet de stopper l'algorithme dès lors que les tolérances $\gamma\%$ et γ_δ sont atteintes. On remarque également que la convergence est plus lente que pour le cas 2_{statique} et ceci est dû à la complexité de la directivité. La fréquence $-2f_1 + f_2$ est plus grande que les fréquences f_1 et $2f_1$: le rayonnement est plus directif et donc plus complexe. La convergence des directivités associées aux autres composantes de la base Fourier du cas 3_{statique} (Table 4.3) est présentée sur la Figure 6.22. Les erreurs $\epsilon_{C,k}^{\omega_i}$ sont décroissantes à partir d'un certain nombre de points d'écoute et les gradients associés atteignent des valeurs relativement faibles. Cette étude met en lumière les différentes vitesses de convergence des directivités associées à chaque fréquence.

La reconstruction des niveaux de puissance acoustique de la composante $-2f_1 + f_1$, pour chaque itération, est présentée sur la Figure 6.23 (a). On peut voir que les directivités des premières itérations ne permettent pas de décrire les six lobes et que le motif final n'est atteint que pour la sphère $S_{R,8}$. La comparaison avec la solution de référence est illustrée sur la Figure 6.24 (a). On peut voir que les solutions approchées sont relativement proches de la référence avec une erreur maximale de l'ordre de 7%. On retrouve également que les erreurs les plus importantes correspondent aux fréquences les plus hautes. Les estimateurs d'erreurs sont également efficaces puisque les erreurs obtenues sont toutes proches des erreurs complètes (Figures 6.24 (b) et (c)). Les iso-contours utilisés pour le calcul de l'erreur $\epsilon_{\text{iso}}^{\omega_4}$ sont présentés sur la Figure 6.23 (b).

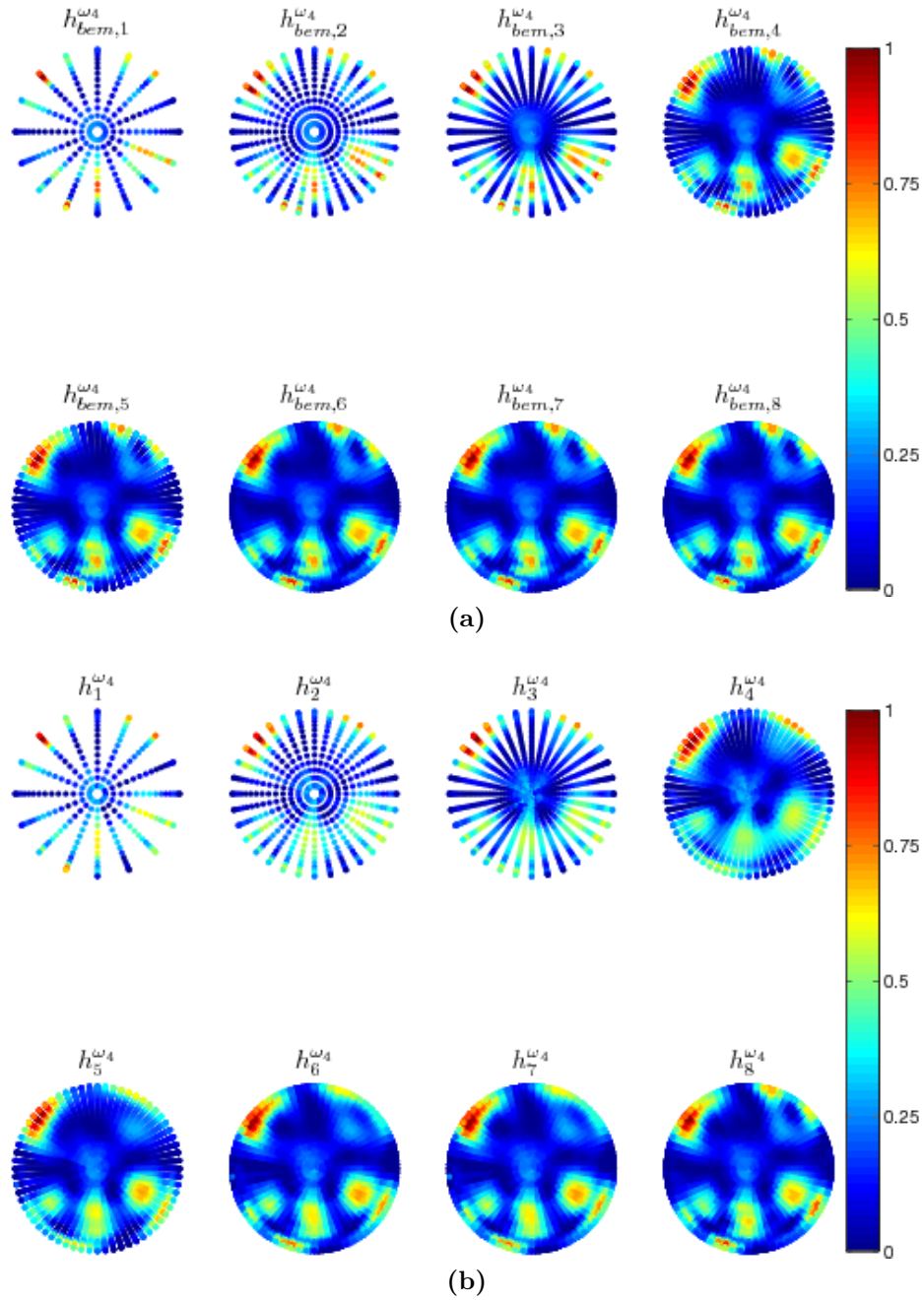


Figure 6.20 – Interpolation polynomiale de la directivité sur les sphères $S_{R,k}$ pour la composante $\omega_4 = 2\pi(-2f_1 + f_2)$ du cas 3_{statique} . (a) Directivité discrète calculée par la BEM $h_{bem,k}^{\omega_4}$ et (b) directivité interpolée $h_k^{\omega_4}$.

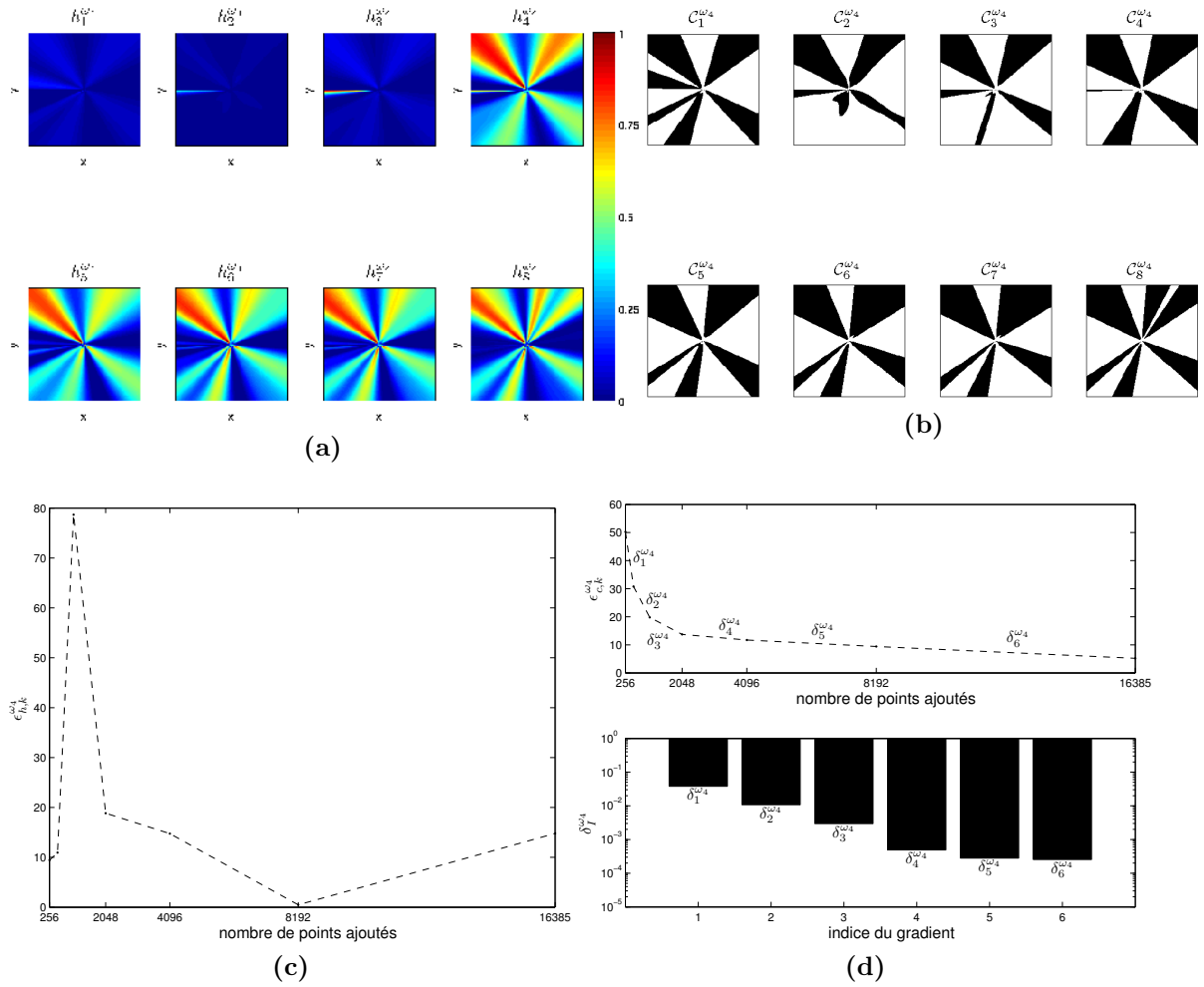


Figure 6.21 – Analyse de la convergence de la directivité associée à la composante ω_4 du cas 3_{statique} . (a) Directivité évaluée sur le plan d'écoute, (b) motif détecté, (c) erreur globale $\epsilon_{h,k}^{\omega_4}$ et (d) haut : erreur sur le motif $\epsilon_{C,k}^{\omega_4}$ - bas : gradient $\delta_I^{\omega_4}$.

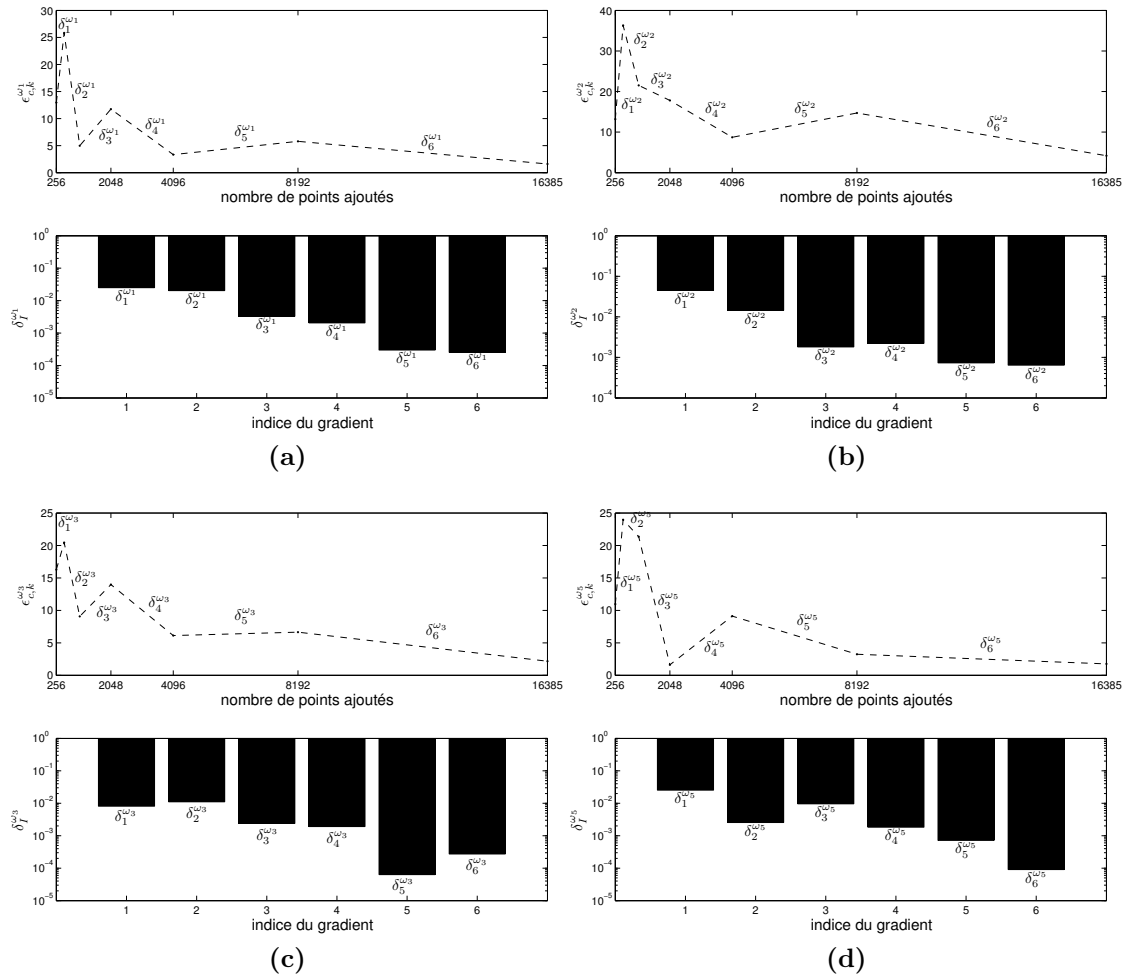


Figure 6.22 – Erreur en motif $\epsilon_{C,k}^{\omega_i}$ pour les composante fréquentielles (a) ω_1 , (b) ω_2 , (c) ω_3 et (d) ω_5 .

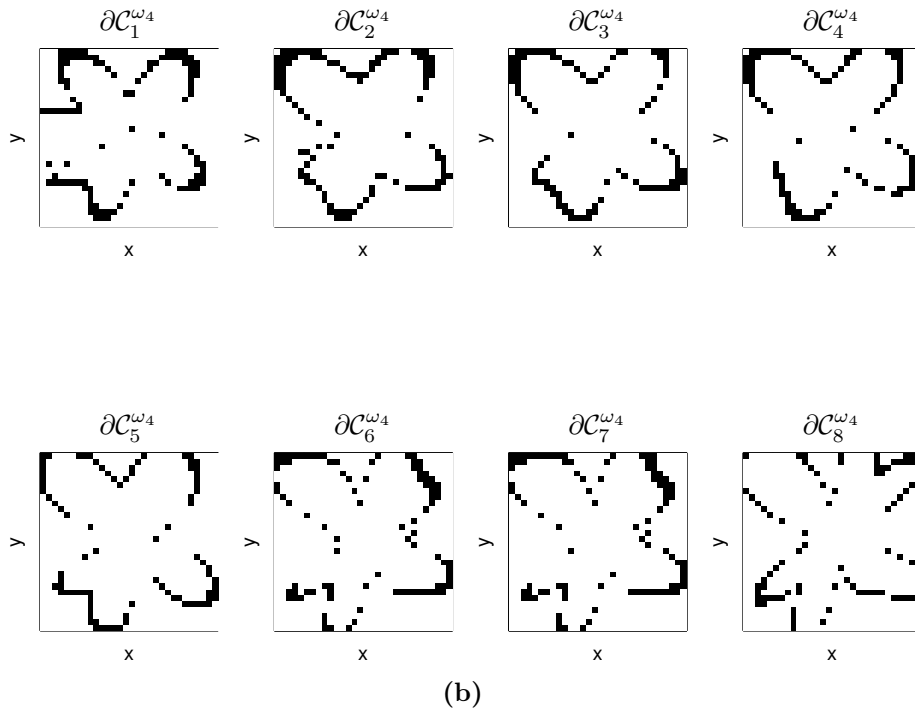
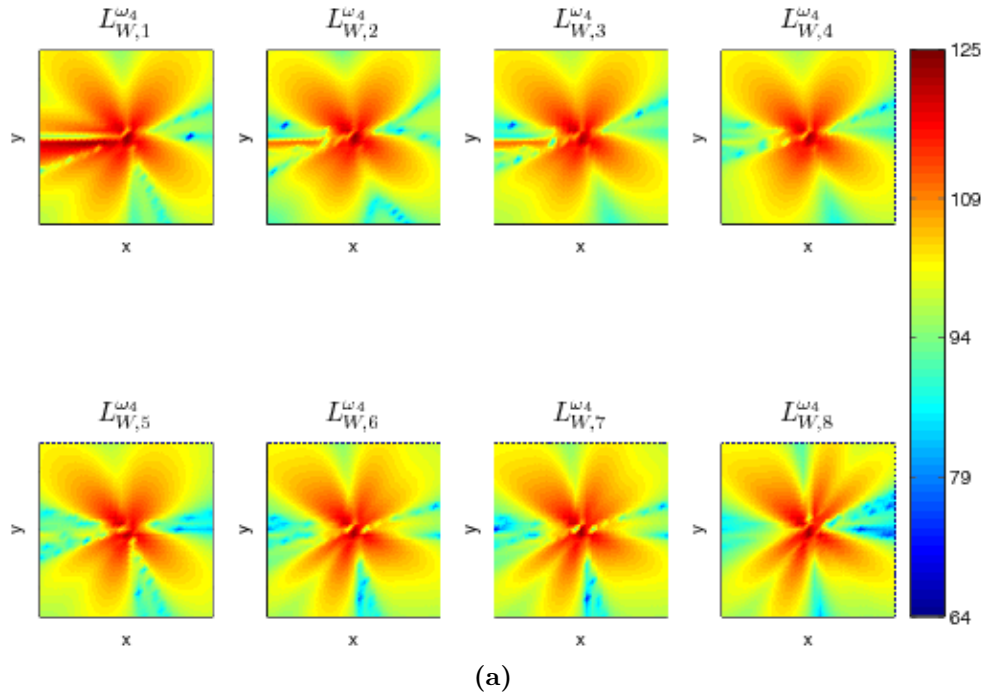


Figure 6.23 – Reconstruction des niveaux de puissance acoustique pour la composante ω_4 du cas 3_{statique} . (a) Niveaux $L_{W,k}^{\omega_4}$ et (b) iso-contour détecté $\partial \mathcal{C}_k^{\omega_4}$.

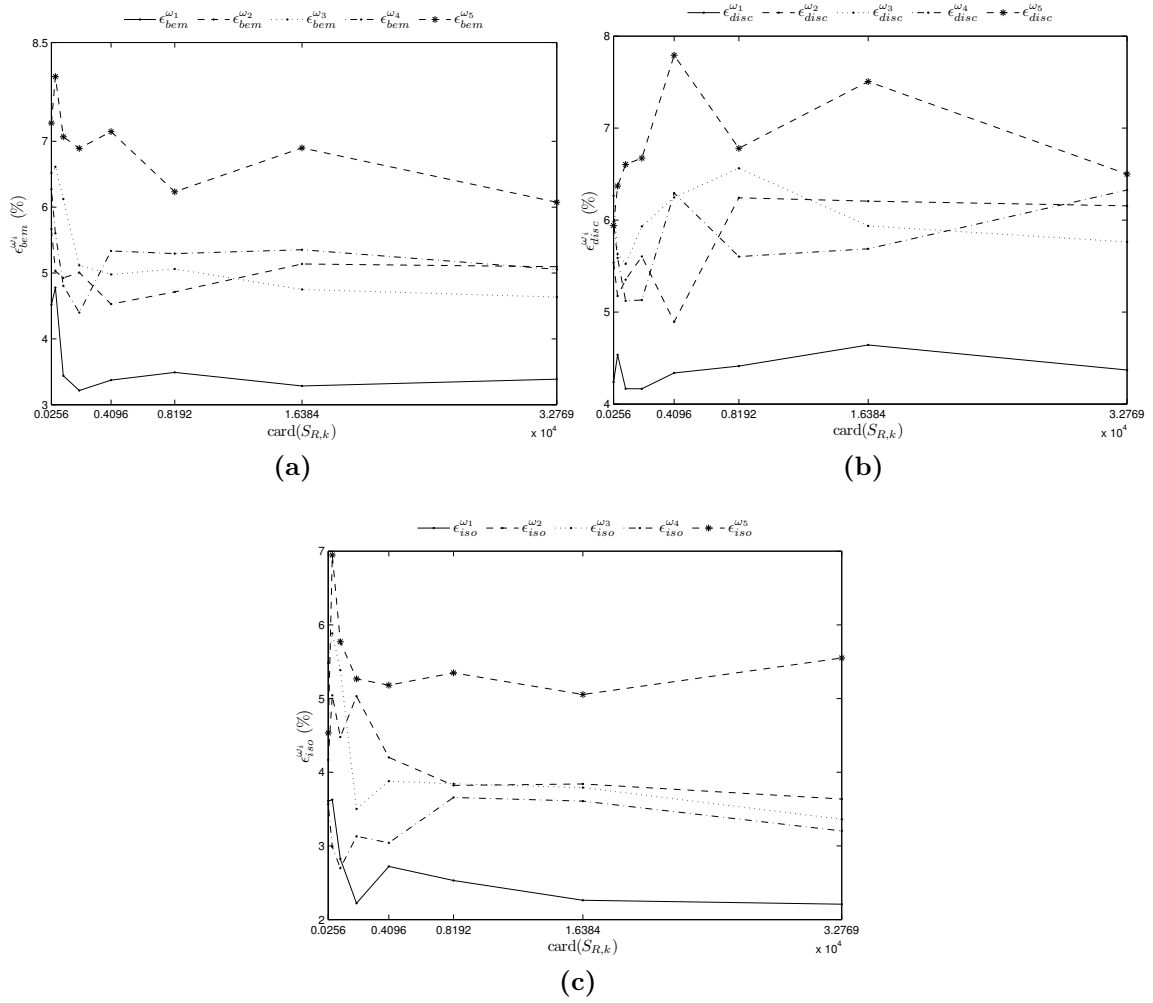


Figure 6.24 – Analyse de la qualité de la solution approchée pour les composantes du cas $\mathcal{I}_{\text{statique}}$. (a) Comparaison avec le calcul BEM complet, (b) comparaison avec la solution partielle associée au disque et (c) comparaison avec la solution partielle calculée sur l'iso-contour.

6.3.3 Analyse de l'efficacité de la méthode proposée

Afin d'analyser l'efficacité de l'approche développée dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord la démarche classique permettant de calculer le rayonnement acoustique par la BEM. Ce calcul s'effectue en deux étapes avec dans un premier temps le calcul de la pression pariétale puis le calcul du champ rayonné. Ces deux étapes nécessitent des inversions de matrices et des produits matrices/vecteurs (équations (4.18) et (4.16) du chapitre 4). De plus, ces matrices pleines (équations (4.17) du chapitre 4) sont construites en évaluant les dérivées normales de la fonction de Green (4.5) ainsi que des intégrales surfaciques. Ainsi, la construction et les opérations les impliquant peuvent être conséquentes. Il est également important de rappeler que l'approche développée dans ce chapitre ne concerne pas la pression pariétale qui est supposée connue, mais uniquement le champ rayonné.

Prenons l'exemple de la composante f_1 du cas 2_{statique}. L'application directe de la BEM nécessite le calcul de la pression pariétale puis le champ rayonné est estimé en construisant les matrices BEM (4.17) et par résolution du système (4.16). La pression acoustique rayonnée est donc obtenue à partir de matrices dont la taille dépend du nombre de points d'écoute envisagés, de la position du plan d'écoute étudié et dont l'estimation s'avère être coûteuse. Dans notre étude, le plan d'écoute sur lequel les niveaux sonores sont calculés contient 1000 points d'écoute et un calcul de pression acoustique dure 16 minutes pour le plan entier et par fréquence soit 1 seconde par point en moyenne.

En utilisant la méthode d'approximation proposée, le calcul de la directivité nécessite 4096 points d'écoute pour atteindre la convergence du motif. Le temps de calcul de la directivité ainsi que son interpolation dure 70 min. La méthode permet alors de calculer les niveaux presque instantanément en évaluant la puissance acoustique (équation (6.29)).

On remarque que le calcul de la directivité nécessite un temps de calcul supérieur à celui de l'estimation du champ rayonné par la BEM. Cependant, si le nombre de points d'écoute est augmenté, le temps de calcul par l'application directe de la BEM augmente, alors que ce dernier reste le même pour la méthode proposée. Ceci est dû au fait que l'estimation de la directivité est indépendante du plan d'écoute étudié. De plus, il faut également remarquer que le calcul de la directivité n'est effectué qu'une seule fois par fréquence et que les niveaux peuvent être calculés en tout point de l'espace sans la BEM.

Un autre aspect intéressant de la méthode proposée concerne sa capacité à adapter la qualité de la solution approchée, en directivité et/ou en niveau sonore, selon les besoins. En effet, si l'intérêt se porte sur l'estimation des niveaux plutôt que sur la directivité, des tolérances "importantes" peuvent être utilisées pour accélérer les calculs. Si la description spatiale du rayonnement est recherchée, des tolérances "faibles" doivent être appliquées. Il est donc possible de dégrader spatialement la solution afin d'obtenir une estimation des niveaux encore plus rapide puis d'affiner la directivité dans un second temps et selon les cas. La souplesse de cette approche est également due au fait que les niveaux de description spatiale peuvent être gérés par composante fréquentielle.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche pour l'estimation des niveaux de bruit générés lors du crissement. La méthode développée dans cette étude permet de calculer une approximation du champ acoustique rayonné et se compose de deux étapes principales : la sélection de composantes fréquentielles puis l'approximation du champ de puissance acoustique rayonnée (estimation de la directivité et reconstruction des niveaux de puissance acoustique). Les approches proposées sont validées sur deux cas classiques de crissement à un et deux modes instables.

La sélection des composantes fréquentielles s'effectue par l'analyse de la convergence de la vitesse normale pariétale quadratique moyenne en fonction de l'ordre de la troncature. Cette analyse permet d'optimiser la base de Fourier initiale en ne sélectionnant que les composantes prépondérantes. De plus, l'analyse de la convergence de la puissance acoustique pariétale permet de conclure que les bases construites sont également pertinentes pour le problème acoustique. Ainsi, le critère de sélection proposé permet de réduire de façon non négligeable le nombre de calculs de pression pariétale en se basant uniquement sur la réponse dynamique.

En ce qui concerne la méthode d'approximation des niveaux sonores, nous avons vu que l'erreur globale est plus stricte. Des valeurs très localisées peuvent être observées (par exemple $h_k^{\omega_2}$ sur la Figure 6.18 (a)) : cela peut perturber la forme globale de la directivité. Cette observation est une conséquence de l'interpolation et, dans certains cas, un nombre minimum de points est nécessaire pour amorcer la convergence. L'erreur en motif ne tient pas compte de ce phénomène et est donc plus performante dans notre cas.

Un autre aspect intéressant de cette approche est que le nombre optimal de points d'écoute est automatiquement déterminé. De plus, le fait de gérer la directivité composante par composante permet d'avoir des nombres de points différents suivant la complexité du rayonnement. Par exemple, certaines fréquences ont une directivité "simple" (telle que f_1) nécessitant un faible nombre de points et d'autres ont une directivité plus complexe (telle que $-2f_1 + f_2$). En général, le rayonnement devient de plus en plus directif lorsque la fréquence augmente et cela explique les convergences plus lentes pour les composantes du cas 3_{statique}.

Au niveau de la reconstruction des niveaux, on peut voir que les niveaux sonores en décibels sont bien approchés dès les premières itérations. Ces derniers ne dépendent que de la puissance acoustique de la source ponctuelle équivalente et de la décroissance en $1/R^2$. On peut donc conclure que l'approximation de source ponctuelle ainsi que le modèle de propagation sont appropriés et donnent d'excellents résultats.

La méthode proposée permet également de reproduire des motifs complexes dès lors que la description de la directivité est suffisante. Enfin, les estimateurs d'erreurs basés sur les solutions partielles sont représentatifs de l'erreur de référence et permettent d'évaluer rapidement la qualité de la solution approchée.

Finalement, le couplage de la sélection des composantes harmoniques avec la méthode d'approximation acoustique permet de considérablement réduire le nombre de calculs acoustiques tout en contrôlant la qualité de la solution.

Conclusions générales

Le premier objectif de ces travaux de thèse est de mettre en place une stratégie globale d'analyse numérique du crissement permettant d'aller jusqu'au calcul du rayonnement acoustique. Pour développer cette stratégie, différentes étapes sont mises en œuvre : la modélisation, l'analyse de stabilité, l'analyse vibratoire transitoire et le calcul du rayonnement.

Afin de reproduire numériquement le crissement, un modèle simplifié de frein à disque composé d'un disque circulaire et d'une garniture est construit par la méthode des éléments finis. Ensuite, une loi de contact cubique et une loi de frottement de Coulomb sont introduites sur l'interface. Le coefficient de frottement est supposé constant et seules les instabilités dynamiques par couplage de modes sont envisagées. L'analyse de stabilité de ce système vis-à-vis du coefficient de frottement laisse apparaître des cas classiques à un ou plusieurs modes instables. Des analyses transitoires par intégration temporelle des équations du mouvement permettent d'obtenir les réponses dynamiques globales pour ces cas d'instabilités. Le modèle proposé ainsi que les vibrations non linéaires et auto-entretenues recoupent les résultats qualitatifs classiques de la littérature et servent de base aux méthodologies développées par la suite.

Les vibrations de crissement sont non linéaires et possèdent des spectres très riches avec l'apparition d'harmoniques et de combinaisons linéaires des fréquences fondamentales instables. De ce fait, l'application des méthodes de calcul de rayonnement acoustique doit être adaptée pour tenir compte de cette richesse. La méthode de calcul acoustique multifréquentielle est développée dans ce but et s'appuie sur la décomposition du champ de vitesse normale en série de Fourier. Cette approche permet de caractériser précisément le rayonnement acoustique du crissement en niveaux sonores et en directivités. De plus, elle s'intègre dans la démarche globale de calcul et d'analyse du crissement.

Cette méthode globale est ensuite appliquée pour analyser l'influence de certains paramètres sur les comportements dynamique et acoustique du crissement. En particulier, le profil de chargement de la pression hydraulique de freinage et le coefficient de frottement ont un impact non négligeable sur les vibrations et le bruit rayonné. Les résultats numériques montrent que ces paramètres modifient les amplitudes des vibrations, les spectres non linéaires des vibrations, la directivité ainsi que les niveaux sonores.

Le dernier aspect de ces travaux concerne le développement de méthodes d'approximation du rayonnement acoustique associé à un événement de crissement. L'objectif de ces méthodes de calcul est d'estimer rapidement et avec une erreur contrôlée les émissions de crissement. Pour cela, le critère de sélection des composantes fréquentielles est proposé pour réduire le contenu fréquentiel aux composantes prédominantes dans la réponse vibratoire. Ensuite, la méthode d'approximation du champ acoustique rayonné qui s'appuie sur l'interpolation de la directivité et la reconstruction de la puissance acoustique est appliquée pour estimer rapidement la pression acoustique. Un ensemble d'estimateurs d'erreur est introduit pour contrôler la qualité des solutions approchées de façon rapide et pertinente. Les résultats obtenus par cette méthode sont très satisfaisants puisque les différentes reconstructions sont obtenues plus rapidement qu'avec des méthodes classiques avec de faibles erreurs.

Perspectives

Les résultats et les méthodes numériques développées durant ces travaux s'ouvrent sur plusieurs perspectives concernant la mise en œuvre d'essais expérimentaux, la description de l'interface et l'amélioration des méthodes numériques proposées. L'objectif à plus long terme étant d'obtenir une méthode numérique rapide permettant, à partir d'un système réel, d'évaluer le rayonnement de crissement.

Améliorations de la méthode de calcul acoustique La principale limitation de la méthode de calcul acoustique proposée concerne le calcul de la pression pariétale. En effet, ce calcul nécessite de travailler dans l'espace complet en exprimant les vitesses normales sur le maillage surfacique. Il serait intéressant de s'intéresser à de nouvelles méthodes numériques de réduction spécifiques à la résolution des problèmes acoustiques pariétaux. À la connaissance de l'auteur, il n'existe à ce jour pas de méthodes de ce type.

En ce qui concerne la méthode d'approximation de la puissance acoustique rayonnée, l'une des perspectives est d'améliorer le processus de discrétisation des sphères permettant l'estimation de la directivité. En effet, dans notre étude, les tailles caractéristiques sont successivement divisées par deux. Il serait intéressant de choisir judicieusement les zones de la sphère à raffiner. Par exemple, les nouveaux points d'écoute pourront être répartis sur les zones où la directivité est maximale. L'objectif étant d'accélérer la convergence de la directivité et ainsi réduire les temps de calcul.

Optimisation et conception des freins à disque réels La perspective directe de ces travaux concerne l'application de la méthode d'analyse du crissement au cas d'un système de frein réel. L'objectif principal est d'estimer numériquement le rayonnement acoustique d'un système de frein dans des conditions de fonctionnement réalistes. D'autre part, les méthodes proposées dans cette thèse peuvent être améliorées en intégrant les améliorations du paragraphe précédent. Dès lors, des procédures d'optimisations de la structure et des conditions de fonctionnement vis-à-vis de critères acoustiques sont envisageables. En général, la conception des garnitures s'effectue principalement par l'analyse de stabilité et nous avons montré que cette approche est parfois insuffisante. L'outil de calcul acoustique proposé permettrait de compléter l'analyse de stabilité et pourra être intégré aux phases de conception de systèmes de frein.

Corrélation calculs/essais et variabilités Une autre perspective envisageable concerne la comparaison entre les résultats numériques et des essais expérimentaux. La modélisation de la géométrie du système de frein devra faire l'objet d'une attention particulière notamment pour la discrétisation de l'interface. Les paramètres des lois de contact et frottement ainsi que les paramètres d'amortissement seront identifiés expérimentalement. Cette étape d'identification est un travail long et délicat à réaliser. Ensuite, l'analyse de stabilité permettra d'estimer numériquement les paramètres permettant d'observer du crissement (i.e.

pression de freinage, coefficient de frottement, etc). Pour ces paramètres, la démarche globale d'analyse du crissement sera appliquée pour estimer les niveaux sonores sur des plans d'écoute. Ensuite, des essais de crissement seront conduits et le champ de pression acoustique sera mesuré sur les mêmes plans d'écoute par une méthode d'holographie acoustique.

Cependant, il est reconnu que l'identification expérimentale des paramètres de contact, de frottement et d'amortissement souffre de la présence de fortes variabilités. D'un point de vue numérique, il existe des techniques permettant d'améliorer les prédictions de l'analyse de stabilité en tenant compte de certaines de ces variabilités (i.e. topographie du disque et des garnitures, raideurs de contact, etc). En revanche, il serait intéressant d'intégrer ces variabilités dans le calcul des vibrations afin d'avoir une estimation du rayonnement. La méthode classique de Monte-Carlo semble ici peu envisageable : mener un ensemble d'intégrations temporelles déterministes sur un système de grande taille engendrerait des coûts de calcul prohibitifs. C'est pourquoi des méthodes spécifiques de calcul vibratoire transitoire stochastique devront être développées. Toutefois, pour le problème acoustique, l'ensemble des variabilités du problème dynamique se reportent sur le champ de vitesse normale pariétale. Il serait donc possible d'envisager la prise en compte de cette variabilité lors de la résolution des équations linéaires de l'acoustique. Par exemple, une méthode de chaos polynomial pourra être employée en décomposant le champs de vitesse normale pariétale sur la base du chaos.

Description de l'interface et synthèse modale L'une des limitations de cette étude concerne le niveau de modélisation de l'interface (9 points de contact uniformément répartis sur l'interface). Une des perspectives est de sélectionner l'ensemble des nœuds de l'interface pour améliorer la description. L'inconvénient est l'augmentation significative du nombre de degrés de liberté physiques conservés dans l'espace de réduction. Afin de contourner cette limitation, l'utilisation de stratégies de réduction à l'interface (e.g. double synthèse modale avec l'introduction de modes de branche à l'interface) semble être une alternative prometteuse. L'inconvénient reste la gestion des non-linéarités dans l'espace réduit. En ce qui concerne l'analyse de stabilité, les analyses peuvent se limiter au cas linéaire tout en restant prédictives. Cependant, le calcul des vibrations par intégration temporelle devra être adapté. En particulier, l'évaluation des efforts non linéaires à chaque pas de temps nécessite la connaissance des déplacements et vitesses physiques de l'interface. Ces grandeurs sont accessibles par projection dans l'espace des degrés de liberté d'interface. On éviterait ainsi de retourner sur l'espace global complet ce qui serait coûteux. La description de l'interface pourrait alors être considérablement améliorée tout en limitant les coûts de calcul.

Bibliographie

- [1] A. Akay, Acoustics of friction, *Journal of Acoustical Society of America* 111 (4) (2002) 1525–1548.
- [2] N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, P. Papadopoulos, Automotive disc brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 267 (1) (2003) 105–166.
- [3] R. T. Spurr, A theory of brake squeal, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 1 (1961) 33–40.
- [4] M.-R. North, Disc brake squeal, a theoretical model, Tech. rep., Motor Industry Research Association M.I.R.A (1972).
- [5] H. R. Mills, Brake squeal, Tech. Rep. 9000B, Institution of Automobile Engineers (1938).
- [6] R. Fosberry, Z. Holubecki, Disc brake squeal : its mechanism and suppression, Tech. rep., Motor Industry Research Institution (1961).
- [7] R. Jarvis, H. R. Mills, Vibration induced by dry friction, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 178 (1) (1963) 847–857.
- [8] A. Felske, G. Hoppe, H. Matthäi, Oscillations in squealing disc brakes – analysis of vibration modes by holographic interferometry, Tech. Rep. 780333, SAE (1978).
- [9] H. Murakami, N. Tsunada, T. Kitamura, A study concerned with a mechanism of disc-brake squeal, Tech. Rep. 84123, SAE (1984).
- [10] K. Otha, K. Kagawa, T. Eto, S. Nishikawa, Study on the disc brake squeal (simulation using modal analysis technique and experiments), *Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineers Serie C* 50.
- [11] J. D. Fieldhouse, T. P. Newcomb, The application of interferometry to the study of disc brake noise, Tech. Rep. 930805, SAE (1993).
- [12] J. D. Fieldhouse, T. P. Newcomb, Double pulsed holography used to investigate noisy brakes, *Optics and lasers in Engineering* 25 (1996) 455–494.
- [13] U. von Wagner, T. Jearsiripongkul, T. Vomstein, G. Chakraborty, P. Hagedorn, Brake squeal : modeling and experiments, *VDI-Bericht* 1749 (2003) 173–186.
- [14] M. Beier, N. Meunier, X. Wirth, H. Frudenberg, Acoustical investigation of disc brake squeal, *Proceedings of Euronoise*.
- [15] T. Tison, A. Heussaff, F. Massa, I. Turipin, R. F. Nunes, Improvement in the predictivity of squeal simulations : uncertainty and robustness, *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014) 3394–3412.
- [16] X. Lorang, F. Foy-Margiocchi, Q. Nguyen, P. Gautier, TGV disc brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 293 (3-5) (2006) 735–746.
- [17] F. Massi, L. Baillet, O. Giannini, A. Sestieri, Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches, *Mechanical Systems and Signal Processing* 21 (6) (2007) 2374–2393.

-
- [18] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion, G. Taudière, Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system, *Mechanical System and Signal Processing* 33 (2012) 155–166.
 - [19] J.-J. Sinou, J. Cayer-Barrio, H. Berro, Friction-induced vibration of a lubricated mechanical system, *Tribology International* 61 (2013) 156–1687.
 - [20] M. Eriksson, F. Bergman, S. Jacobson, On the nature of tribological contact in automotive brakes, *Wear* 252 (2002) 26–36.
 - [21] M. Godet, The third body approach : a mechanical view of wear, *Wear* 100 (1–3) (1984) 437–452.
 - [22] Y. Berthier, Maurice godet’s third body approach, *Tribology* 31 (1996) 21–30.
 - [23] Y. Berthier, Background on friction and wear, *Lemaître handbook of materials behavior models*, 2001.
 - [24] M. Eriksson, S. Jacobson, Tribological surfaces of organic brake pads, *Tribology International* 33 (2000) 817–827.
 - [25] H. Hetzler, K. Willner, On the influence of contact tribology on brake squeal, *Tribology International* 46 (2012) 237–246.
 - [26] H. Hetzler, K. Willner, On the influence of contact tribology on brake squeal, *Tribology International* 46 (2012) 237–246.
 - [27] N. Kinkaid, O. M. O’Reilly, P. Papadopoulos, Automotive disc brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 267 (2004) 105–166.
 - [28] Y. B. Yi, S. DU, J. R. Barber, J. W. Fash, Effect of geometry on thermoelastic instability in disk brakes and clutches, *Contact Mechanics* 121 (4) (1999) 661–666.
 - [29] Y. B. Yi, J. R. Barber, D. L. Hartsock, Thermoelastic instabilities in automotive disc brakes - finite element analysis and experimental verification, *Contact Mechanics* (2002) 187–202.
 - [30] J. R. Barber, Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming bodies, *Royal Society of London Proceedings Series A Mathematics Physics and Engineering Science* 312 (1510) (1969) 381–394.
 - [31] P. Dufrenoy, étude du comportement thermomécanique des disques de frein vis-à-vis des risques de défaillance, PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.
 - [32] P. Duffour, J. Woodhouse, Instability of systems with a frictional point contact. part 1 : basic modelling, *Journal of sound and Vibration* 271 (2004) 365–390.
 - [33] N. Hoffmann, L. Gaul, Non-conservative beating in sliding friction affected systems : transient amplification of vibrational energy and a technique to determine optimal initial conditions, *Mechanical Systems and Signal Processing* 18 (3) (2004) 611–623.
 - [34] J.-J. Sinou, L. Jézéquel, The influence of damping on the limit cycles for self-exciting mechanism, *Journal of Sound and Vibration* 304 (2007) 875–893.
 - [35] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, L. Jézéquel, Effects of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model, *Mechanics Research Communications* 34 (2) (2007) 181–190.
 - [36] F. Cantone, F. Massi, A numerical investigation into the squeal instability : Effect of damping, *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (5) (2011) 1727–1737.
 - [37] H. Jun, G. Xue-Xun, T. Gang-Feng, Complex mode analysis on disc brake squeal and design improvement, Tech. Rep. 2009-01-2101, Warrendale (PA) : SAE International (2009).

- [38] J. Flint, A. Chinnasamy, A. Stikvoort, New method to identify dynamic normal stiffness and damping of shims for cae modeling, Tech. Rep. 2010-010-1711, Warrendale (PA) : SAE International (2010).
- [39] R. V. Kappagantu, Vibro-impact rotor dampers for brake squeal attenuation - towards an insulator free design to quell squeal, Tech. Rep. 2008-01-2549, Warrendale (PA) : SAE International (2008).
- [40] H. Festjens, G. Chevallier, F. Renaud, J. Dion, R. Lemaire, Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study, *Journal of Sound and Vibration* 73 (11) (2012) 1121–1128.
- [41] J. Kang, Finite element modelling for the investigation of in-plane modes and damping shims in disc brake, *Journal of Sound and Vibration* 331 (9) (2012) 2190–2202.
- [42] B. Hervé, J.-J. Sinou, H. Mahé, L. Jézéquel, Extension of the destabilization paradox to limit cycle amplitudes for a nonlinear self-excited system subject to gyroscopic and circulatory actions, *Journal of Sound and Vibration* 323 (2009) 944–973.
- [43] B. Hervé, J.-J. Sinou, H. Mahé, L. Jézéquel, Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects, *European Journal of Mechanics A/Solids* 27 (2008) 141–160.
- [44] J. Kang, Squeal analysis of gyroscopic disc brake system based on finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences* 51 (2009) 284–2947.
- [45] J. Kang, Comprehensive stability analysis of disc brake vibrations including gyroscopic, negative friction slope, and mode-coupling mechanisms, *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009) 387–407.
- [46] T. Butlin, J. Woodhouse, Friction-induced vibration : quantifying sensitivity and uncertainty, *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010) 509–526.
- [47] S. Oberst, J. C. S. Lai, Statistical analysis of brake squeal noise, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 2978–2994.
- [48] S. Oberst, J. C. S. Lai, Chaos in brake squeal noise, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 955–975.
- [49] D. W. Wang, J. L. Mo, Z. G. Wang, G. X. Chen, H. Ouyang, Z. R. Zhou, Numerical study of friction-induced vibration and noise on groove-textured surface, *Tribology International* 64 (2013) 1–7.
- [50] D. W. Wang, J. L. Mo, H. Ouyang, G. X. Chen, M. H. Zhu, Z. R. Zhou, Experimental and numerical studies of friction-induced vibration and noise and the effects of groove-textured surfaces, *Mechanical Systems and Signal Processing* 46 (2014) 191–208.
- [51] H. A. Sherif, J. Blouet, J. F. Cretegy, Experimental investigation of self-excited squeal, Tech. Rep. 892451, SAE paper (1989).
- [52] Y. Ichiba, Y. Nagasawa, Experimental study on brake squeal, Tech. Rep. 930802, SAE paper (1993).
- [53] R. A. Ibrahim, Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos part 1 : Mechanics of contact and friction, *American Society of Mechanical Engineers Applied Mechanics Review* 47 (7) (1994) 209–226.
- [54] R. A. Ibrahim, Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos part 2 : Dynamics and modeling, *American Society of Mechanical Engineers Applied Mechanics Review* 47 (7) (1994) 227–253.
- [55] J. T. Oden, J. A. C. Martin, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 52 (1985) 527–634.

-
- [56] N. Coudeyras, S. Nacivet, J.-J. Sinou, Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 328 (4-5) (2009) 520–540.
 - [57] M. Triches Junior, S. N. Y. Gerges, R. Jordan, Analysis of brake squeal noise using the finite element method : A parametric study, *Applied Acoustics* 69 (2008) 147–162.
 - [58] A. Curnier, A theory of friction, *International Journal of Solid Structures* 20 (1984) 637–647.
 - [59] D. Sinclair, N. J. Manville, Friction vibrations, *ASME Journal of Applied Mechanics* 77 (1955) 207–213.
 - [60] C. Gao, D. Kulhmann-Wilsdorf, D. D. Makel, The dynamic analysis of stick-slip motion, *Wear* 173 (1994) 1–12.
 - [61] S. S. Antoniou, A. Cameron, C. R. Gentle, The friction-speed relation from stick-slip data, *Wear* 36 (1976) 235–254.
 - [62] P. Chambrette, Stabilité des systèmes dynamiques avec frottement sec : application au crissement des freins à disque, Ecole Centrale de Lyon, thèse doctorat.
 - [63] A. Rabinowicz, Friction and wear of materials, Wiley and sons, 1995.
 - [64] A. K. Barnejee, Influence of kinetic friction on the critical velocity of stick-slip motion, *Wear* 12 (1968) 107–116.
 - [65] N. Hinrichs, M. Oestreich, K. Popp, On the modelling of friction oscillators, *Journal of Sound and Vibration* 216 (3).
 - [66] H. Hetzler, On the effect of nonsmooth coulomb friction hopf bifurcations in a 1-dof oscillator with self-excitation due to negative damping, *Nonlinear Dynamics* 69 (2012) 601–614.
 - [67] P. Basfor, S. Twiss, Properties of friction materials. 1 : experiments on variables affecting noise, *ASME* 80 (1958) 402–406.
 - [68] Y. S. Liu, M. A. Ozbeck, J. T. Gordon, A nonlinear model for aircraft brake squeal analysis. part 1 : model and solution methodology, *ASME Design Engineering Technical Conferences* 3 (1996) 406–416.
 - [69] S. W. E. Earles, C. K. Lee, Instabilities arising from the frictional interaction of a pin-disc system resulting in noise generation, *Trans. ASME J. Engng Ind.* 1 (1976) 81–86.
 - [70] N. Millner, An analysis of disc brake squeal, Tech. Rep. 7803322, SAE paper (1978).
 - [71] N. Hoffmann, M. Fisher, R. Allgaier, L. Gaul, A minimal model for studying properties of mode-coupling instability in friction induced oscillations, *Mechanics Research Communications* 29 (2002) 197–205.
 - [72] F. Flint, J. Hulten, Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model, *Journal of Sound and Vibration* 254 (1) (2002) 1–21.
 - [73] M. T. Bengisu, A. Akay, Stability of friction-induced vibrations in multi-degree-of-freedom systems, *Journal of Sound and Vibration* 171 (4) (1994) 557–570.
 - [74] S. W. E. Earles, P. W. Chambers, Disc brake squeal noise generation : predicting its dependency on system parameters including damping, *International Journal of Vehicle Design* 8 (1987) 538–552.
 - [75] U. von Wagner, D. Hochlenert, P. Hagedorn, Minimal models for disk brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 302 (3) (2007) 527–539.

- [76] D. M. Grobman, Homeomorphisms of systems of differential equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 128 (1959) 880–881.
- [77] A. N. Shoshitaishvili, Bifurcations of topological type of singular points of vector fields that depend on parameters, *Funktsional. Anal, i Prilozhen* 6 (2) (1972) 97–98.
- [78] P. A. Kuchment, Floquet theory for partial differential equations, *Russian Mathematical Surveys* 37 (4) (1982) 1–60.
- [79] J.-J. Sinou, L. Jézéquel, Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 309 (2007) 106–122.
- [80] J. Kang, C. M. Kousgrill, F. Sadeghi, Dynamic instability of a thin circular plate with friction interface and its application to disc brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 316 (2008) 164–179.
- [81] Y. Dai, C. T. Lim, Suppression of brake squeal noise applying finite element brake and pad enhanced by spectral-based assurance criteria, *Applied Acoustics* 69 (2008) 196–214.
- [82] S. N. Chan, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, Parametrics resonances at subcritical speeds in discs with rotating frictional loads, *Proceedings IMechE Part C* 208 (1994) 417–425.
- [83] J. E. Mottershead, H. Ouyang, M. P. Cartmell, M. I. Friswell, Parametrics resonances in an annular disc, with a rotating system of distributed mass and elasticity ; and the effects of friction and damping, *Proceedings of the Royal Society of London A* 453 (1) (1997) 1–19.
- [84] H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, M. I. Friswell, Friction-induced parametric resonances in discs : effect of a negative friction-velocity relationship, *Journal of Sound and Vibration* 209 (2) (1997) 251–264.
- [85] H. V. Chowdary, A. K. Bajaj, C. M. Krousgril, An analytical approach to model disc brake system for squeal prediction, *Tech. Rep. DETC2001/VIB-21560*, *Proceedings of 2001 ASME Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference* (2001).
- [86] G. Chakraborty, T. Jearsiripongkul, U. von Wagner, P. Hagedorn, A new model for a floating caliper disc-brake and active squeal control, *VDI-Bericht* 1736 (2002) 93–102.
- [87] K. I. Tzou, J. A. Wickert, A. Akay, In-plane vibration modes of arbitrary thick disc, *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 120 (1998) 384–391.
- [88] G. D. Liles, Analysis of disc brake squeal using the finite element methods, *Tech. Rep. 891150*, *SAE Paper* (1989).
- [89] H. Ouyang, N. Nack, Y. Yuan, F. Chen, Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review, *International Journal of Vehicle Noise* 1 (3–4) (2005) 207–231.
- [90] R. R. Craig, M. C. C. Bampton, Coupling of substructures for dynamic analyses, *AIAA Journal* 6 (7) (1968) 1313–1318.
- [91] L. Jézéquel, H. D. Setio, Component modal synthesis methods based on hybrid models, part i : theory of hybrid models and modal truncation methods, *Journal of applied mechanics* 61 (1994) 100–108.
- [92] N. Coudeyras, J.-J. Sinou, S. Nacivet, A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 319 (3-5) (2009) 1175–1199.

- [93] J.-J. Sinou, Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal - on the need to consider both stability and non-linear analysis, *Mechanics Research Communications* 37 (1) (2010) 96–105.
- [94] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite element method. Vol.2 Solide mechanics*, Butterworht-Heinmann, 2000.
- [95] M. Bonnet, *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, John Wiley & Sons Ltd, 1999.
- [96] S. Marburg, B. Nolte, *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids. Finite and boundary element methods*, Springer Verlag, 2008.
- [97] E. Bécache, A. S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre, Perfectly matched layers for the convected helmholtz equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42 (1) (2004) 409–433.
- [98] H. J.-P. Morand, R. Ohayon, *Fluid-structure interaction*, Wiley, 1995.
- [99] M. Brinkmeier, N. Udo, S. Petersen, O. von Estorff, A finite element approach for the simulation of tire rolling noise, *Journal of Sound and Vibrations* 309 (2008) 20–39.
- [100] H. Lee, R. Singh, Determination of sound radiation from a simplified disk-brake rotor by a semi-analytical method, *Noise Control Engineering* 52 (5).
- [101] S. Oberst, J. C. S. Lai, S. Marburg, Guidelines for numerical vibration and acoustic analysis of disc brake squeal using simple models of brake systems, *Journal of Sound and Vibration* 332 (9) (2013) 2284–2299.
- [102] J.-J. Sinou, A. Loyer, O. Chiello, G. Mogenier, X. Lorang, A global strategy based on experiments and simulations for squeal prediction on industrial railway brakes, *Journal of Sound and Vibration* 332 (20) (2013) 5068–5085.
- [103] J.-J. Sinou, N. Coudeyras, S. Nacivet, Study of the nonlinear stationary dynamic of single and multi instabilities for disc brake squeal, *International Journal of Vehicle Design* 51 (1-2) (2009) 207–222.
- [104] H. Hetzler, On the effect of nonsmooth coulomb friction on hopf bifurcations in a 1-dof oscillator with self-excitation due to negative damping, *Nonlinear Dynamics* 69 (2012) 601–614.
- [105] N. Coudeyras, *Analyse non linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein*, PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon.
- [106] T. J. R. Hughes, *Computational Methods for Transient Analysis*, Chapter 2 : Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior, Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- [107] A. Loyer, J.-J. Sinou, O. Chiello, X. Lorang, Study of nonlinear behaviors and modal reductions for friction destabilized systems. application to an elastic layer, *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012) 1011–1041.
- [108] H. A. Schenk, Improved integral formulation for acoustic radiation problems, *Journal of the Acoustical Society of America* 44 (1968) 41–58.
- [109] A. J. Burton, G. F. Miller, The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Maths Phys Sci* 323 (1553) (1971) 201–210.
- [110] M. A. Hamdi, An integral equation variational formulation for the resolution of the helmholtz equation including mixed boundary conditions, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Paris.* 192 (1981) 17–20.

- [111] S. Marburg, S. Schneider, Influence of element types on numeric error for acoustic boundary elements, *Journal of Computational Acoustics* 11 (3) (2003) 363–386.
- [112] V. Cutanda Henriquez, P. Juhl, Openbem, [http ://www.openbem.dk/](http://www.openbem.dk/).

Publications personnelles

Revue internationale avec comité de lecture

- K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise and vibration, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 50–51, 732–756, 2015.
- K. Soobbarayen, J-J. Sinou and S. Besset, Numerical study of friction-induced instability and acoustic radiation - Effect of ramp loading on the squeal propensity for a simplified brake model, *Journal of Sound and Vibration*, 333(21), 5475–5493, 2014.
- K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, Influence of physical parameters and operating conditions for structural integrity of mechanical system subjected to squeal noise, *Key Engineering Materials*, 1076-1084, 2013 (article de congrès international sélectionné pour publication).
- K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, Noise and vibration for a self-excited mechanical system with friction, *Applied Acoustics*, 74(10), 1191–1204, 2013.

Colloques internationaux

- K. Soobbarayen, J-J. Sinou and S. Besset, Numerical study of the effect of loading condition on the propensity of squeal noise and vibration, Eurobrake, Lille (France), 13-15 mai 2014.
- K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise, Euyrodyn, Porto, (Portugal), 30 juin-2 juillet 2014.
- K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, Friction-induced noise and vibration for brake system, Eurobrake 2013, Dresde (Allemagne), 17-19 juin 2013.
- K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, Influence of physical parameters and operating conditions for structural integrity of mechanical system subjected to squeal noise and self-excited vibration by dry friction, 10th International Conference on Damage Assessment of Structures, Dublin (Ireland), 8-10 juillet 2013.

Colloques nationaux

- K. Soobbarayen, S. Besset et J-J. Sinou, Méthode simplifiée pour le calcul du rayonnement acoustique de structures sujettes au crissement, Congrès Français d'Acoustique, Poitiers (France), 22-25 avril 2014.
- K. Soobbarayen, J-J. Sinou et S. Besset, Vibration non-linéaire et rayonnement acoustique des systèmes frottants sujets au crissement, 11e Colloque National en Calcul des Structures, Giens (France), 13-17 mai 2013.