

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

Spécialité

Mathématiques appliquées

École doctorale InfoMaths ED512

UMR 5208 CNRS-UCBL

Numéro d'ordre 2014-24

Présentée par

Vincent RUNGE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Sujet de la thèse :

**Éléments d'analyse et de contrôle
dans le problème de Hele–Shaw**

soutenue publiquement le 25 septembre 2014

devant le jury composé de :

Mahdi	BOUKROUCHE	Université Jean Monnet	Président du jury
Alexandre	DEMIDOV	Université d'État de Moscou	Directeur de thèse
Joachim	ESCHER	Université Leibniz de Hanovre	Rapporteur
Jean-Pierre	LOHÉAC	École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
Sébastien	MARTIN	Université Paris Descartes	Examineur
Alexander	VASILIEV	Université de Bergen	Rapporteur

Au courage de mon ami et camarade biélorusse Alexandre Trus,
À l'Ukraine de la place Maïdan et ses espoirs de liberté et de justice.

Remerciements

Mes premiers mots de gratitude s'adressent tout naturellement à Jean-Pierre. Il m'a offert la possibilité de découvrir le monde de la recherche mathématique ; c'est un geste que l'on n'oublie pas. J'ai passé avec lui des journées passionnantes à échanger nos idées respectives, des heures entières collés au tableau noir, sans que jamais il ne se départisse de son regard bienveillant et de ses mots d'encouragement. Pendant cette thèse, j'ai beaucoup échoué et beaucoup rêvé, tard le soir, d'équations magiques qui m'apportèrent les songes les plus doux. Jean-Pierre était toujours présent lors de ces réveils difficiles, lorsque l'exaltation faisait place à la déception. Dans l'échec comme dans le succès, Jean-Pierre m'a montré que faire des mathématiques était un acte de joie et de fête et que les échecs présents rendaient encore plus attrayant l'espoir de succès futurs. Malgré les difficultés de la vie, il m'a soutenu avec constance dans mes recherches, même lorsque je prenais le risque de m'aventurer un peu loin des sentiers battus. Jean-Pierre, merci pour tout !

Je ne serais pas aujourd'hui en train d'achever ce mémoire de thèse sans le soutien inconditionnel de mes parents, Christine et Daniel, qui m'ont toujours encouragé et poussé vers le haut, quels que furent mes choix. J'ai appris auprès d'eux bien plus que n'importe quel enfant ne peut espérer. Ils m'ont transmis un goût immodéré pour l'intelligence, qui est l'envie jamais satisfaite de connaître et de comprendre. Par leur éducation patiente et tolérante, ils m'ont ouvert au plaisir de l'effort et cette thèse leur est pour beaucoup redevable.

Je remercie également tout particulièrement mon grand-frère Jean-Baptiste. Il a été et reste pour moi un exemple. Dans une famille vide d'ingénieurs et de chercheurs, il m'a facilité la compréhension d'un monde qui m'était étranger et m'a encouragé dans cette voie exigeante. Je pense aussi à mon petit frère Étienne qui s'est longtemps battu contre les études et qui désormais impressionne tout le monde par la grande maîtrise dont il fait preuve en informatique et programmation.

Je m'excuse d'avoir sans doute dérogé au protocole, mais cela ne veut pas dire que ma reconnaissance envers mes collègues de l'École Centrale de Lyon n'en est pas moindre. Mon expérience de monitorat a été extrêmement enrichissante et la sympathie de Grégory Vial, Philippe Michel, Christophette Blanchet-Scalliet et Céline Hebert y est pour beaucoup. Plus que des chefs, ils ont été pour moi des amis toujours ouverts à la discussion alors que je traînais les couloirs de ma solitude de thésard. Je n'oublie pas non plus que l'ambiance générale n'aurait pas été la même sans la présence toujours souriante d'Isabelle Dominique et de Colette Vial-Buil, toujours prêtes à rendre service au petit doctorant que j'étais, avec le même entrain qu'au plus brillant des professeurs. Parmi les permanents, je tiens à saluer tout particulièrement Malek Zine pour nos nombreuses pauses « café-débat » ainsi que François Musy et Alexandre Saidi. Enfin, un grand merci à la grande chef et meneuse d'hommes qu'est Élisabeth Mironescu ; elle m'a toujours parlé avec simplicité et soutenu dans mes interrogations. Je souhaite aussi dire toute mon amitié aux thésards que j'ai croisés à Centrale, je pense à Jonathan

Bodin, Emna Jaiem, Ambroise Vest, Loïc Barbarroux et Mona Abtini. J'espère un jour peut-être les compter parmi mes collaborateurs !

Grâce à Élisabeth, j'ai pu obtenir une place dans le bureau des doctorants de l'université Lyon 1 et rencontrer mes coreligionnaires. Je souhaite la meilleure réussite à Bérénice Delcroix-Oger, Rudy Rodsphon et Claire-Soizic Voillequin qui en prennent tous le chemin. J'aurais aimé plus m'investir dans le bureau et dans l'activité du labo, mais au lieu de ça, j'avais choisi de rendre visite chaque année à la grande Russie.

Il est temps de parler de la Russie. Je voudrais d'abord remercier mon codirecteur de thèse, Alexandre Demidov, qui a eu la gentillesse de m'accueillir trois années consécutives dans la très impressionnante université d'État Lomonossov de Moscou. J'ai été extrêmement honoré de pouvoir entrer dans ce temple de la science, d'arpenter ses kilomètres de couloirs et d'admirer de l'intérieur la puissance presque mégalomaniacale du bâtiment stalinien. Plus encore, je mesure l'immense chance qui a été la mienne d'avoir pu fréquenter les chercheurs du département historique de contrôle ; je pense en particulier à la très heureuse rencontre avec Mikhail Zelikine et Andrei Fursikov. Un de mes meilleurs souvenirs reste la conférence en l'honneur de Vishik organisée dans l'académie des sciences de Russie et à laquelle on m'a laissé assister en toute simplicité, alors que je débute ma thèse. Un moins bon souvenir concerne le refus de l'université Lomonossov d'organiser une vraie cotutelle en dépit des engagements pris, cela a compliqué quelque peu l'obtention des visas et la paperasserie administrative. Il y a des réflexes qui ne changent pas...

À Moscou, je me suis passionné pour la littérature scientifique russe, à mes yeux d'une qualité bien supérieure à la nôtre (et beaucoup moins chère !). J'ai le plus grand respect pour la mathématique russe et cette approche à la fois rigoureuse et pédagogique qui marque et marquera ma façon de faire des maths.

Je remercie mon ami et collègue Lev Lokutsievskiy qui, chaque année avec Alexandre Demidov, a trouvé pour moi dans la résidence une chambre spartiate mais d'un confort toujours supérieur à celui réservé aux doctorants russes. Lev m'a constamment encouragé et poussé à aller de l'avant et s'est enthousiasmé pour le moindre de mes petits progrès. Grâce à nos discussions et à ses conseils utiles, le chapitre 3 s'est étoffé de résultats que j'espère intéressants. Le chapitre 2 porte la patte des remarques toujours avisées d'Alexandre Demidov qui m'ont très efficacement orienté dans la bonne voie.

Je tiens aussi à remercier MM. Vasiliev et Escher d'avoir accepté de relire ce manuscrit ainsi que MM. Boukhrouche et Martin d'avoir accepté de participer au jury.

Enfin, j'avoue que ce manuscrit doit beaucoup au patient travail de relecture de mon ami et témoin de mariage Alexandre Barata. Il a non seulement trouvé une quantité impressionnante d'erreurs orthographiques et grammaticales mais aussi amélioré de son regard de physicien le contenu de l'introduction générale. Je le remercie infiniment pour cette marque d'amitié et me demande encore comment je vais pouvoir m'acquitter de cette dette ! Pour finir, j'embrasse Irina qui est depuis peu ma femme. Par un seul petit « oui » elle m'a offert beaucoup plus que toutes les médailles et les diplômes du monde

ne sauraient le faire.

Je dédie ce travail à mon ami doctorant en informatique Alexandre Trus. Nous nous sommes rencontrés au laboratoire InfoMaths de l'École Centrale lors de ma première année de thèse et avons immédiatement sympathisé – ayant en commun deux langues et une même année de naissance. Touché il y a deux ans par un cancer au cerveau, il lutte depuis contre la maladie avec un courage bien supérieur à celui qu'il ne faut pour faire une thèse. Il m'offre, avec sa mère Katiarina, le plus beau visage de la Biélorussie, un visage de dignité dans l'adversité qui mérite le respect et le soutien de tous. J'ai l'espoir, qu'un jour guéri, nous irons tous ensemble visiter la Bourgogne, la France et pourquoi pas leur beau pays blanc !

Il est enfin difficile pour moi de ne pas évoquer le refroidissement brutal des relations avec la Russie qui marquera le souvenir de mon passage par Moscou et qui m'attriste beaucoup. Après tout ce que j'ai vu, lu et entendu en Russie pendant mes cinq années de présence (master compris), j'ai la certitude que ce pays partage avec l'Europe une même culture et une identité commune. Alors que le pouvoir russe dénonce la décadence occidentale, j'ai vu dans son peuple les mêmes réflexes individualistes mais aussi les mêmes espérances que celles qui nous animent.

Cette dernière année, la crise ukrainienne a vampirisé une bonne partie de mon temps libre et sans doute réduit mon efficacité au travail. La Russie a alors montré un tout autre visage et m'a profondément déçu. Très inquiet de la propagande et des mensonges éhontés des médias russes, puis de l'annexion rapide et illégale de la Crimée, je le suis encore plus de la guerre d'agression menée dans l'Est de l'Ukraine par une des plus puissantes armées au monde. Un grand pays riche et responsable, partenaire jusqu'à présent de toutes les grandes institutions internationales, ne devrait pas profiter de la faiblesse de ses voisins pour s'ingérer militairement chez eux parce que ceux-ci ont eu l'audace d'exprimer leur volonté d'indépendance. C'est pourquoi, je dédie ce travail à tous les Ukrainiens de Maïdan et d'ailleurs, qui ont eu l'immense courage de s'opposer au péril de leur vie à l'arbitraire d'un pouvoir corrompu et qui, aujourd'hui, font face au plus grand des périls. Sur Maïdan, armés pour la plupart de la seule force des convictions, ils ont cru dans la noirceur de l'orage à l'espoir d'un rayon de soleil. C'est désormais le devoir moral de la France et de l'Europe (et entre autres de sa communauté scientifique) de serrer la main qu'ils nous tendent. Sans cela, c'est un lourd déshonneur pour la France, le déshonneur durable d'avoir renoncé à nos valeurs face aux sirènes illusoires de l'argent facile, portées par un pouvoir en Russie avide de conquêtes et, rappelons-le, solidaire, chez nous, de toutes les extrêmes droites d'Europe.

Je terminerai cette dédicace par une anecdote. Il m'est arrivé, en Russie, de recevoir les confessions de tel ou tel autre Russe, parfois même, de quasi-inconnus. À chaque fois, ils m'ont dit à mi-voix, comme on dit un secret inavouable, la même inquiétude et la même crainte d'un pouvoir autoritaire et ont exprimé leur passion des valeurs humanistes, et j'ai senti avec eux une fraternité d'idée. Ces gens, trop peu nombreux, sont l'honneur et l'espoir de ce grand pays. Il ne faut pas les oublier.

Table des matières

Table des figures	13
0 Introduction générale	19
0.1 Promenade au pays des fluides	20
0.1.1 Une question d'échelle	20
0.1.2 Bilan des forces	26
0.1.3 Équations de Navier-Stokes	28
0.2 Modèles d'écoulements incompressibles	30
0.2.1 Réduction de Stokes	30
0.2.2 Modèle de Hele-Shaw étudié et applications	32
0.2.3 Florilège de modèles, florilège de problèmes	34
0.2.4 Approche probabiliste	36
0.3 Transformations géométriques	37
0.3.1 Précis d'analyse complexe	37
0.3.2 Transformations conformes du plan	44
0.3.3 Transformation de Helmholtz-Kirchhoff	46
0.4 Contrôle optimal	46
0.4.1 Contrôle en dimension finie	47
0.4.2 Contrôlabilité	47
0.4.3 Principe du maximum de Pontriaguine	48
1 Étude théorique et numérique par transformation de Helmholtz-Kirchhoff	49
1.0 Présentation	50
1.1 Introduction	51
1.2 Geometrical transformation	54
1.2.1 General case	54
1.2.2 Circular case	57
1.2.3 Polygonal case	57
1.3 Theoretical results	59
1.3.1 Evolution equation	60
1.3.2 Existence and uniqueness result	62
1.4 Discrete problem	64
1.4.1 Discrete law and notations	65
1.4.2 Discrete model	66
1.4.3 Numerical scheme	69

1.5	Numerical experiments	70
1.5.1	Source-case	70
1.5.2	Sink-case	71
1.6	Cas d'une cellule de Hele-Shaw en coin	75
1.6.1	Démonstration	78
1.6.2	Étude numérique	79
1.6.3	Conclusion	80
1.7	Équation de Demidov généralisée	81
1.7.1	Mise en équation	81
1.7.2	Interprétation géométrique	83
1.7.3	Schéma numérique du quasi-contour	84
1.8	Perspectives	86
1.8.1	Exposé du problème	86
1.8.2	Équations de liaison	89
1.8.3	Résultats envisagés	91
2	Solutions trinomiales réelles et domaines d'univalence	93
2.0	Présentation	94
2.1	Introduction	95
2.1.1	Hele-Shaw flows and Stokes-Leibenson model	95
2.1.2	Conformal transformation	96
2.1.3	The search for exact solutions	97
2.2	Domain of univalence	98
2.2.1	Presentation of the trinomial case	98
2.2.2	Caracterisation of the d_N functions	100
2.3	Results	104
2.4	Proof of the theorems	106
2.4.1	Proof of theorem 2.2	107
2.4.2	Proof of theorem 2.3	107
2.4.3	Proof of theorem 2.4	108
2.5	Visualisation of the results	109
2.6	Perspectives	111
3	Étude de la contrôlabilité et du contrôle optimal des solutions polynomiales par multipôles	113
3.0	Présentation	114
3.1	Introduction	115
3.1.1	Limit in Laplace's equation	115
3.1.2	Generalized Polubarinova-Galin equation	117
3.1.3	Polynomial solution in sink-case	119
3.1.4	Sink/source configuration	121
3.2	Multipole configuration	122
3.2.1	Dipole and multipole approximation	122
3.2.2	Richardson's moments	125

3.2.3	Links between Richardson's moments and Polubarinova–Galin equation	127
3.3	Study of the controllability	131
3.3.1	Sufficient conditions	131
3.3.2	Necessary conditions	133
3.4	Optimal control in small dimensions	133
3.4.1	Case of dimension 2	133
3.4.2	Case of dimension 3	136
3.5	Modèle de turbulence	145
3.5.1	Remarques préliminaires	145
3.5.2	Discrétisation du puits	145
3.5.3	Expérience numérique	147
3.6	Perspectives	147
Bibliographie		151

Notations

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes privé de 0
$\vec{A}$	vecteur bi- ou tridimensionnel de composantes (A_1, A_2, A_3)
$\vec{A} \cdot \vec{B}$	produit scalaire entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
$\text{div } \vec{A}$	opérateur divergence
$\text{rot } \vec{A}$	opérateur rotationnel
∇A	gradient
ΔA	opérateur laplacien
$(\vec{V} \cdot \nabla)$	opérateur d'advection, dans un repère orthonormé $V_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$
$\partial_\nu u$	gradient directionnel, $\nabla u \cdot \nu$ avec ν un vecteur unitaire
δ_0	distribution de Dirac localisée en 0, aussi notée δ
$\delta^{(k)}$	dérivée k-ième du Dirac selon l'axe de symétrie
$\Re$	partie réelle
$\Im$	partie imaginaire
(a, b)	couple de deux nombres a et b ou intervalle ouvert $]a, b[$
$\cosh$	fonction cosinus hyperbolique
$f * g$	convolution entre les fonctions f et g
$\dot{s}$	dérivée temporelle au point s , aussi notée $\frac{ds}{dt}$
f'	dérivée spatiale de la fonction f
$\det$	déterminant
$U(f)$	domaine d'univalence de la fonction f
U	disque unité ou ensemble des contrôles accessibles
∂U	frontière de l'ensemble U
i	nombre complexe unité imaginaire
$\binom{n}{k_1, \dots, k_N}$	coefficient multinomial, on a $\binom{n}{k_1, \dots, k_N} = \frac{n!}{k_1! \dots k_N!}$
$\langle . \rangle$	opérateur moyennant

Table des figures

0.1	Fluide microscopique.	21
0.2	Gauche : fluide microscopique (seconde loi de Newton) ; centre : fluide méso- scopique (équation de Boltzmann) ; droite : fluide macroscopique (équations de Navier-Stokes).	24
0.3	Variations de la mesure en fonction de la taille de dV	25
0.4	Profil des vitesses entre deux plans parallèles horizontaux.	30
0.5	Problème de Stefan.	35
0.6	Problème de Muskat : deux fluides en compétition dans le plan.	36
0.7	Modèle DLA.	37
1.1	Fluid is injected (or extracted) through some source-point (or sink-point) $\mathbf{O}$	52
1.2	Upper part of fluid domain.	56
1.3	Example of upper part of a centered regular hexagonal domain.	58
1.4	Quasi-normal and quasi-tangent vectors at vertex $\mathbf{p}_k$	66
1.5	Evolution in time of a quasi-contour in source-case.	71
1.6	Evolution in time of determinant of matrix $\tilde{Q}$ in function of time (left) and of ρ in function of $\ln(\Omega)$ (right).	71
1.7	Evolution in time in sink-case of a quasi-contour leading to a cardioid.	72
1.8	Evolution in time of determinant of matrix $\tilde{Q}$	72
1.9	Evolution in time of quasi-contours in sink-case and exact solutions for (a) (left side up), (b) (left side bottom) and (c) (right side).	73
1.10	Evolution in time of $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$ for quasi-contour (a).	74
1.11	Evolution in time in sink-case of a quasi-contour (left side) and its determinant $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$ (right side)	74
1.12	Fluid domain in a corner.	76
1.13	Example of discretization.	77
1.14	Évolution du contour initial dans le cas puits jusqu'à l'apparition du point de rebroussement (à gauche) comparé à la cardioïde (à droite).	79
1.15	Évolution du contour initial jusqu'à l'apparition du point de rebroussement – 19 itérations représentées sur un total de 58 calculées (à gauche) ; évolution de $\det(Q)$ en fonction du temps (au centre) ; évolution de $\det(\tilde{Q})$ en fonction du temps (à droite).	80
1.16	Évolution du contour initial jusqu'à l'apparition du point de rebroussement (à gauche) ; évolution de $\det(Q)$ (au centre) puis de $\det(\tilde{Q})$ (à droite) en fonction de $-\ln(\Omega(t) - \Omega (i = 53))$	80

TABLE DES FIGURES

1.17	À gauche : élément de variation de longueur ; à droite : différence schématisée entre les déplacements lagrangien et eulérien.	84
1.18	À gauche : évolution exacte [34] ; à droite : résultat numérique.	86
1.19	Problème de Muskat.	87
1.20	Conservation de la masse.	88
1.21	Gradients à la frontière.	90
2.1	An example of initial fluid domain in inner (A) and outer (B) Hele–Shaw problem.	96
2.2	Riemann mapping theorem.	97
2.3	Domain of univalence in the inner problem with $N = 3$ (left) and outer problem with $N = 2$ (right) in grey.	99
2.4	Left: schematization of the dynamic of a contour with a loop by Polubarinova–Galina equation; right: example of a contour with double points with a trinomial of type 1 given by equation $\zeta + \frac{1.88}{2}\zeta^2 + \frac{0.95}{3}\zeta^3$	109
2.5	Trajectories of the inner problem for various initial conditions. On the left $N = 2$; on the right $N = 10$	110
2.6	Trajectories of the outer problem for various initial conditions. On the left $N = 2$; on the right $N = 10$	110
2.7	Time evolution in the sink-case of a trinomial of type 1 with $N = 2$ from point A to E.	110
2.8	Time evolution in the sink-case of a trinomial of type 2 with $N = 4$ from point A to E.	111
3.1	Riemann mapping theorem.	119
3.2	Riemann mapping theorem in sink/source configuration.	121
3.3	A multisource configuration of degree 4.	124
3.4	Domain of controllability in the plane (u_n, u_{N+1-n})	132
3.5	Optimal trajectories in space phases.	136
3.6	Domain of univalence for $N = 3$	137
3.7	Boundaries of the “necessary” (dotted lines) and sufficient (continuous lines) domains of controllability.	138
3.8	Possible domain of controllability.	139
3.9	Optimal control in 3 dimensions.	144
3.10	Discretisation du puits avec $N = 3$	146

Avant-propos

Ce présent manuscrit décrit le travail réalisé pendant mes trois années de doctorat à l'École Centrale de Lyon. Son sujet porte entièrement sur l'étude mathématique des écoulements de Hele-Shaw. Ici sont exposés, avec des détails complémentaires, quatre des six articles (publiés ou en cours de publication) auxquels j'ai participé. Seuls les travaux pour lesquels ma contribution est essentielle sont présentés. Ce document est construit selon un principe simple : mise à part l'introduction générale, chaque chapitre correspond à un article, précédé d'une présentation, et suivi d'une conclusion portant sur les perspectives de ce travail. Le contenu des articles est donné dans la langue originelle de rédaction (principalement en anglais).

Le chapitre 1 aborde la dynamique du fluide en utilisant une transformation de Helmholtz-Kirchhoff. À la différence des autres chapitres, nous exposons à la suite un article puis un *Compte Rendu* (voir (I) et (II) à la fin de cet avant-propos), également signés par mes directeurs de thèse A. S. Demidov et J.-P. Lohéac. L'avant-dernière partie contient une simplification des équations et du schéma numérique, généralisant les résultats précédents. En conclusion de ce chapitre, nous expliquons comment la transformation de Helmholtz-Kirchhoff peut s'appliquer au problème de Muskat, bien que l'équation du mouvement ne soit pas encore établie.

Le chapitre 2 présente les solutions trinomiales réelles au problème de Hele-Shaw. Une partie importante de l'étude concerne la détermination de domaines d'univalence précisés par l'étude des trajectoires des solutions exactes. Ces résultats font l'objet d'un article personnel (III).

Le dernier chapitre de ce manuscrit étudie la possibilité de contrôler les mouvements du contour fluide par l'action de multipôles placés sur la source de fluide. Par un choix judicieux des contrôles, nous arrivons à démontrer la contrôlabilité des équations et à optimiser ce contrôle dans les cas les plus élémentaires. Ce travail a été soumis à publication à l'été 2014 avec pour coauteur L. V. Lokutsievskiy de l'université d'État de Moscou Lomonossov (IV). Nous concluons en proposant une nouvelle modélisation mathématique du problème prenant la forme d'une équation stochastique. Afin d'expliquer l'instabilité de la solution dans le cas puits, nous particularisons le fluide près de la source, introduisant ainsi des variables aléatoires décrivant la « mal position » du problème.

Liste des travaux rassemblés dans cette thèse

- (I) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2014) Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flow : a critical manifold in the space of contours. *European Journal of Applied Mathematics*. Soumis.
- (II) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Cauchy problem for Stokes–Leibenson approximation in a Hele–Shaw corner cell. *Compte Rendu de l’académie des sciences mécaniques*. Vol. 341, No. 11-12, 755-759
- (III) RUNGE V. (2014) Exact real trinomial solutions to the inner and outer Hele–Shaw problems. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. Soumis.
- (IV) LOKUTSIEVSKIY L. V., RUNGE V. (2014) Optimal Control by multipoles in the Hele–Shaw problem. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. Soumis.

Publications complémentaires

- (V) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Critical manifold in the space of contours of Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flow. *New developments in hydrodynamics research (Editors : M.J. Ibragimov, M.A. Anisimov) NOVA New-York*, 301-315.
- (VI) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Attractors–repellers in the space of contours in the Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flows, *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 189, No. 4, 568–581.

Foreword

This doctoral thesis describes the work I carried out during these three years of PhD at the École Centrale of Lyon. Its content concerns the mathematical study of Hele–Shaw flows. We here present, with complementary details, four of the six articles (published or submitted) the writing in which I participated. Only the works for which my contribution is essential are presented. This document is built on a simple principle : except the general introduction, each chapter corresponds to an article, preceded by a presentation, and followed by a conclusion on the prospects of this work. The content of articles is given in original drafting language (principally in english).

Chapter 1 tackles dynamics of the fluid using an Helmholtz-Kirchhoff transformation. Contrary to other chapters, we exhibit an article and then a proceeding (see (I) and (II) at the end of this abstract), also signed by my doctoral co-supervisors A. S. Demidov and J.P. Lohéac. The penultimate part contains a simplification of the equations and of the numerical scheme, which generalize previous results. To conclude this chapter, we explain how the Helmholtz-Kirchhoff transformation can be applied to the Muskat problem, although evolution equation is not yet established.

Chapter 2 concerns exact real trinomial solutions to the Hele–Shaw problem. An important part of the study deals with the determination of univalent domains, specified by trajectories of exact solutions. These results are presented in a personal article (II).

Last chapter of this manuscript study the possibility of controlling shapes of the fluid contour by adding multipoles on the source. By a wise choice of the control parameters, we succeed in proving the controllability of the equations and in optimizing these parameters in simple cases. This work was submitted in summer 2014 with coauthor L. V. Lokutsievskiy from Moscow State University (IV). Finally, we propose a new mathematical modelization of this problem on the form of a stochastic equation. In order to explain instability of the solution in the sink case, we particularize the fluid near the stoke, introducing random variables describing the "bad-posedness" of the problem.

List of works gathered in this thesis

- (I) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2014) Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flow : a critical manifold in the space of contours. *European Journal of Applied Mathematics*. Soumis.
- (II) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Cauchy problem for Stokes–Leibenson approximation in a Hele–Shaw corner cell. *Compte Rendu de l’académie des sciences mécaniques*. Vol. 341, No. 11-12, 755-759
- (III) RUNGE V. (2014) Exact real trinomial solutions to the inner and outer Hele–Shaw problems. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. Soumis.
- (IV) LOKUTSIEVSKIY L. V., RUNGE V. (2014) Optimal Control by multipoles in the Hele–Shaw problem. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. Soumis.

Complementary publications

- (V) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Critical manifold in the space of contours of Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flow. *New developments in hydrodynamics research (Editors : M.J. Ibragimov, M.A. Anisimov) NOVA New-York*, 301-315.
- (VI) DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Attractors–repellers in the space of contours in the Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flows, *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 189, No. 4, 568–581.

0 Introduction générale

Sommaire

0.1	Promenade au pays des fluides	20
0.1.1	Une question d'échelle	20
0.1.2	Bilan des forces	26
0.1.3	Équations de Navier-Stokes	28
0.2	Modèles d'écoulements incompressibles	30
0.2.1	Réduction de Stokes	30
0.2.2	Modèle de Hele-Shaw étudié et applications	32
0.2.3	Florilège de modèles, florilège de problèmes	34
0.2.4	Approche probabiliste	36
0.3	Transformations géométriques	37
0.3.1	Précis d'analyse complexe	37
0.3.2	Transformations conformes du plan	44
0.3.3	Transformation de Helmholtz-Kirchhoff	46
0.4	Contrôle optimal	46
0.4.1	Contrôle en dimension finie	47
0.4.2	Contrôlabilité	47
0.4.3	Principe du maximum de Pontriaguine	48

Cette introduction générale est composée de quatre parties. Dans les deux premières seront présentés le domaine physique d'étude ainsi que les hypothèses de modélisation menant au problème de Hele-Shaw. Nous parlerons ensuite brièvement de modèles d'intérêt mathématique en relation avec notre problème. La troisième partie est dédiée à l'introduction d'outils d'analyse complexe liés à la mécanique des fluides et nécessaires à la bonne compréhension de ce travail. La dernière partie constitue un bref survol de quelques résultats en théorie du contrôle utilisés dans le dernier chapitre.

0.1 Promenade au pays des fluides

*Les mathématiques, ce sont la partie de la physique
où les expériences ne coûtent pas cher.*

V. I. Arnold

La physique mathématique a pour objet la description mathématique de phénomènes physiques dans le but d'enrichir la compréhension de ces derniers. Chaque traitement mathématique repose sur une modélisation préalable du réel répondant à un cadre d'étude précis. Nous proposons ici de rappeler des généralités sur la modélisation des fluides à diverses échelles d'observation jusqu'à présenter les équations de Navier-Stokes et ses lois de conservation.

0.1.1 Une question d'échelle

Historiquement, l'idée de l'existence de possibles unités de matière est très ancienne et présente au moins depuis le philosophe grec Démocrite (460 av. J.-C. - 370 av. J.-C.). Scientifiquement, le chemin fut beaucoup plus long et c'est seulement suite à la parution de l'ouvrage *Les Atomes* de Jean Perrin en 1913 que l'hypothèse atomique développée tout au long du XIX^e siècle devient théorie. D'un point de vue épistémologique, il est intéressant de remarquer qu'une idée qui nous est aujourd'hui si familière a mis tant de temps à s'imposer. Il en résulte que les équations de Navier-Stokes (1822) [HNA] [GGS] précèdent la maturation de la théorie cinétique des gaz (équation de Boltzmann 1872 [LBO]) bien que cette dernière soit peut-être devenue pour nous plus facile à appréhender. Pour cette raison, nous commencerons par considérer l'étude d'un fluide peu dense (un gaz) dans le cadre de la mécanique newtonienne. Nous augmenterons peu à peu la densité de particules pour explorer le modèle statistique puis hydrodynamique. Sans tenir compte de la taille des particules, cette question de densité peut être interprétée comme une échelle d'observation allant du microscopique au macroscopique en passant par le mésoscopique.

Billard à N boules

Considérons un fluide appartenant à l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ pouvant aussi bien évoluer dans un récipient que s'étendre à l'infini¹. Une première idée consiste à décrire le fluide

1. Nous ne traiterons pas ici les conditions aux bords.

comme une collection d'un nombre extrêmement élevé N de particules² ayant chacune une position r_i et une vitesse donnée v_i , $i = 1, \dots, N$ (cf. figure 0.1). Chaque particule est une petite sphère dure subissant de nombreuses collisions élastiques à la manière des boules d'un billard et dont l'évolution est décrite par le principe fondamental de la dynamique. L'état du fluide est défini par un point se déplaçant dans l'espace des phases $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$ de façon déterministe et temporellement réversible.

Fait remarquable et connu depuis Poincaré pour le problème à trois corps [HPO] puis redécouvert par Lorenz [ENL], un phénomène de chaos déterministe (ou sensibilité aux conditions initiales) émerge de ces équations, nous privant de l'espoir de simulations numériques réalistes. En outre, l'approche newtonienne est inéluctablement vouée à l'échec par la quantité d'équations à résoudre ($2N$ équations du premier ordre). Pour étudier la dynamique d'un litre d'air sur une itération en temps, il faudrait utiliser environ 200 millions d'années de calcul du plus puissant des ordinateurs actuels³ (2014) et par ailleurs connaître avec précision les conditions initiales des particules ou savoir les estimer en perdant cette sensibilité aux conditions initiales. En supposant que la loi de Moore⁴ continuerait à se vérifier et en choisissant d'étudier la dynamique pendant un intervalle de temps seconde divisée en $2^7 = 128$ itérations, nous pouvons estimer que la première simulation numérique de ce problème en un an de calcul n'est pas envisageable avant l'année 2077.

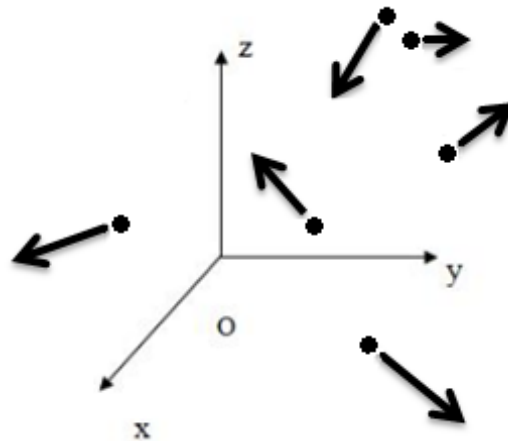


FIGURE 0.1: Fluide microscopique.

La description *microscopique* d'un fluide aussi commun que l'air est donc impossible à cette échelle. Quand bien même elle deviendrait possible, elle ne serait pas pertinente pour la description des quantités macroscopiques qui nous intéressent comme la pression

2. Typiquement environ $3 \cdot 10^{22}$ particules par litre d'air dans les conditions normales de température et de pression ; $3 \cdot 10^{25}$ molécules par litre d'eau.

3. Tianhe-2, 33,86 pétaFLOPS, université chinoise de technologie de défense.

4. Généralement assimilée à un doublement de la capacité de calcul tous les deux ans.

ou la température. L'expérience montre que l'étude de gaz raréfiés – comme par exemple la haute atmosphère terrestre – demande l'introduction de modèles plus efficaces. Il faut alors abandonner l'idée d'une description exacte des particules matérielles du fluide pour se reporter sur la seule alternative possible : une description *statistique*.

Remarque 0.1. *La théorie cinétique des gaz s'est développée dès la fin du XVIII^e siècle par la nécessité imposée par la révolution industrielle de comprendre les principes généraux de la thermodynamique. Elle a permis de donner une interprétation microscopique à des phénomènes observés à l'échelle macroscopique telle que la pression, la température ou l'énergie.*

Par exemple, la pression p en un petit domaine de l'espace est donnée par la relation

$$p = \frac{1}{3}m\rho \langle v^2 \rangle ,$$

avec m la masse d'une seule particule, ρ la densité de particules dans le petit domaine et $\langle v^2 \rangle$ la vitesse quadratique moyenne des particules du domaine.

La théorie cinétique est capable de reconstruire un grand nombre de quantités macroscopiques selon les hypothèses imposées au système étudié. En négligeant la taille des particules et leur interactions réciproques, il est possible de reconstruire la loi des gaz parfaits (fait découvert expérimentalement). De nombreux ouvrages décrivent dans le détail les potentialités de cette approche particulière ([CIP], [BCH]).

Bien que riche d'enseignements pour un fluide à l'équilibre, le modèle microscopique est inopérant dans la reconstitution de la dynamique d'un fluide. On peut par exemple reconstituer la répartition des vitesses dans un volume à l'équilibre (loi de distribution des vitesses de Maxwell [JCM]) mais les mouvements d'ensemble nous échappent, ils sont dilués dans l'immense quantité d'informations que donnent la position et la vitesse de chaque particule.

La physique statistique

Faute de pouvoir regarder séparément chaque particule, nous adoptons une description en moyenne du nombre de particules dans un volume donné – menant au concept de densité (quantité de particules par unité de volume). On dit que l'on passe d'une description microscopique à une description *mésoscopique*. L'état du système est donné par une unique fonction $f(x, v, t)$ décrivant la probabilité de présence au temps t d'une particule de vitesse v au point x dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Le nombre $dN(t) = f(x, v, t) d^3x d^3v$ est la quantité de particules présentes au temps t dans un petit volume de taille d^3x autour du point x ayant pour vitesse v connue à d^3v près.

Les hypothèses réalistes suivantes peuvent être faites :

- le fluide est constitué de N atomes identiques de masse m et de rayon r ;
- chaque atome se déplace à vitesse constante entre les collisions ;

- les atomes rebondissent élastiquement les uns sur les autres et sur les parois du récipient ;
- les vitesses de deux particules avant collision sont *a priori* non corrélées (chaos moléculaire).

Dans ces conditions et en l'absence de force extérieure agissant sur le système, la dynamique est décrite par l'équation de Boltzmann [LBO]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{Kn} Q(f, f)(v), \quad t \geq 0, \quad x, v \in \mathbb{R}^3,$$

avec Kn le nombre de Knudsen, f une fonction positive et $\nabla_x f$ son gradient par rapport à la variable x . L'opérateur Q est dit *de collision* ; il modélise les interactions entre particules et ne dépend que de la variable v . Nous n'explicitons pas ici son expression intégrale qui peut prendre de multiples formes selon les hypothèses considérées [CVI].

Il existe une justification théorique rigoureuse au passage du problème à N corps vers l'équation de Boltzmann dite *limite de Boltzmann-Grad*. Le théorème de Lanford exprime que pour un temps très court, un système microscopique pourra dans cette limite être décrit par cette dernière équation.

Notons que l'équation de Boltzmann introduit une notion d'irréversibilité du temps propre aux systèmes thermodynamiques qui n'existe pas *a priori* dans le modèle des collisions particulaires. Le célèbre théorème H stipule que, lorsque le temps avance, une certaine quantité H ne peut que décroître⁵ lorsque le système se relaxe vers la loi de distribution à l'équilibre de Maxwell. Ce résultat constitue un lien remarquable avec la notion d'entropie.

Remarque 0.2. *De nombreux ouvrages volumineux traitent de la physique statistique et notre propos n'est pas ici d'en donner une introduction mais seulement de comprendre l'échelle de modélisation. Pour se convaincre de l'importance de ce sujet, faisons remarquer au lecteur que dans la somme du cours de physique de Landau-Lifshitz, deux tomes (les volumes 5 et 9) entiers sur les dix sont consacrés à ce domaine. Citons par exemple le livre [NGO] qui constitue une référence accessible sur le sujet.*

Le modèle menant à l'équation de Boltzmann présuppose que le fluide est en fait un gaz et que le nombre de particules relativement faible entraîne une prédominance des collisions binaires entre les « billes » de fluide (hypothèse de raréfaction). Lorsque la densité augmente et les particules se rapprochent les unes des autres, de nouvelles interactions ne peuvent plus être négligées et une autre modélisation devient préférable. Elle nous mènera aux équations de Navier-Stokes.

5. $H(f) = \int f \ln f \, dx dv$; $\frac{dH}{dt} \leq 0$.

La figure 0.2 représente de façon schématique les trois échelles d'observation présentées.

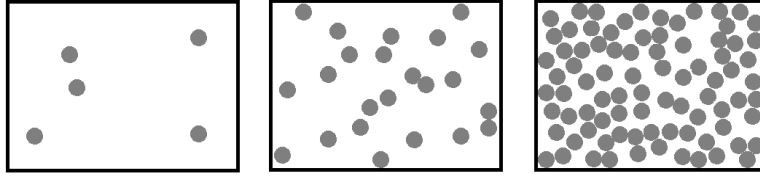


FIGURE 0.2: Gauche : fluide microscopique (seconde loi de Newton) ; centre : fluide mésoscopique (équation de Boltzmann) ; droite : fluide macroscopique (équations de Navier-Stokes).

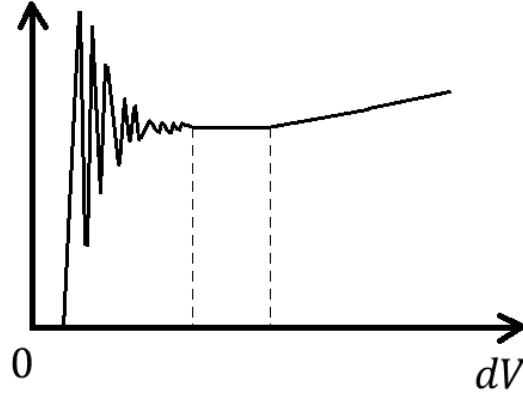
Dans cette partie, le nombre de Knudsen Kn a fait son apparition. Il est défini par la formule $\frac{\lambda}{L}$, où λ désigne la longueur du libre parcours moyen d'une particule entre deux collisions successives et L la grandeur caractéristique du problème (diamètre des particules). Pour $Kn > 10$, on étudie la dynamique au niveau moléculaire ; pour $0,01 < Kn < 10$, le modèle statistique est préféré ; pour $Kn < 0,01$, les particules sont très proches les unes des autres et la notion de continuum doit être introduite [AB].

Modèle hydrodynamique

Pour un fluide *dense*, une dernière description des fluides à une échelle que nous appellerons *macroscopique* est possible. En un petit domaine de volume dV de l'espace, nous n'observons pas un mouvement désordonné de particules allant, qui dans une direction, qui dans une autre, à des vitesses différentes. Nous observons un mouvement d'ensemble des points de l'espace formant un continuum. Chaque point de l'espace représente un petit volume dV nommé *particule fluide* se déformant et se déplaçant sous la contrainte des particules environnantes. La taille de cette particule fluide est typiquement pour les fluides de l'ordre de 1 mm^3 à 1 cm^3 .

La particule fluide est définie comme étant le plus petit volume considéré pour lequel les fluctuations aléatoires de l'agitation moléculaire n'interfèrent pas avec le résultat de la mesure faite dans ce volume. La figure 0.3 schématise la variation de la mesure en fonction du volume de la particule fluide, cette mesure étant par exemple une densité ou une température. La bonne taille pour dV se situe sur la figure 0.3 entre les lignes en pointillés, là où de petites variations de ce volume ne changent pas la valeur de la grandeur étudiée.

La dernière étape du modèle macroscopique consiste à réduire (mathématiquement mais pas physiquement) chaque particule fluide de volume dV à un point matériel de l'espace euclidien. Ainsi, cette modélisation par un continuum sera traitée par la mécanique des milieux continus appliquée aux fluides et nous permettra d'utiliser les outils très puissants du calcul différentiel et intégral.

FIGURE 0.3: Variations de la mesure en fonction de la taille de dV .

Remarquons que tout comme entre les points de vue microscopique et mésoscopique, des ponts existent entre la modélisation statistique et la description hydrodynamique et font l'objet d'intenses travaux mathématiques. Les livres de P.-L. Lions [PLL1], [PLL2] ou [FG] sont une bonne introduction au domaine, en particulier on pourra consulter les travaux précurseurs de Hilbert [HIL] et Enskog [ENS].

Intéressons-nous, pour conclure cette partie, aux propriétés inhérentes à la description continue que nous utiliserons dans les paragraphes suivants.

Description du mouvement

Il est possible de suivre l'évolution d'un fluide de deux manières différentes. Nous pouvons faire le choix de suivre le déplacement de chaque particule de fluide (représentée par un point de $\mathbb{R}^3$); cette description du mouvement est dite *lagrangienne*. Nous pouvons également choisir de se fixer en un point de l'espace et d'observer les modifications du milieu en ce point; cette description est dite *eulérienne*.

Ces deux descriptions du fluide sont liées par la relation suivante dans le système référentiel eulérien fixe

$$\frac{d}{dt} \bullet = \frac{\partial}{\partial t} \bullet + (\vec{V} \cdot \nabla) \bullet .$$

La dérivée du terme de gauche est appelée *dérivée particulaire*. Elle décrit la variation temporelle d'une grandeur donnée associée à une particule fluide. La dérivée partielle en temps est, quant à elle, une variation temporelle en un point fixé et donc par nature reliée à la description eulérienne. Le dernier terme est un terme d'advection⁶ faisant intervenir la vitesse de la particule fluide $\vec{V}$ et qui décrit le transport de la particule fluide au sein de l'écoulement. Rappelons que cette relation s'applique aussi bien à une

6. En notant $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$, on a dans un repère orthonormé (x, y, z) et pour un scalaire a : $(\vec{V} \cdot \nabla) a = V_1 \frac{\partial a}{\partial x} + V_2 \frac{\partial a}{\partial y} + V_3 \frac{\partial a}{\partial z}$; pour un vecteur, la relation est appliquée à chaque coordonnée.

grandeur scalaire qu'à une grande vectorielle (à substituer au point $\bullet$).

Équation de continuité

Dans un système de particules, il est clair en mécanique classique que la masse totale est conservée tant que le nombre de particules demeure constant. En milieu continu, cette propriété de conservation de la masse n'est pas immédiate et doit être établie par une équation. En notant $\rho(\vec{x}, t)$ la masse volumique d'une particule fluide située au point $\vec{x}$ et de vitesse $\vec{V}$ à l'instant t , nous avons l'équation suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (0.1)$$

Démonstration. En considérant un domaine fixe arbitraire de volume V et de surface S , nous savons que la variation de masse dans le domaine est égale à l'opposé du flux de densité à travers la surface S . On a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = - \int_S \rho \vec{V} \, dS.$$

Le volume V étant fixe, la dérivée temporelle passe sous l'intégrale. En outre, le théorème de Green-Ostrogradski permettant de réécrire l'intégrale de surface en une intégrale de volume, on obtient

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right) dV = 0.$$

Cette égalité étant vraie pour un volume V arbitraire, le signe intégral peut être supprimé⁷ et on a le résultat voulu. $\square$

0.1.2 Bilan des forces

Mécanique des tenseurs

L'équation de la dynamique de Navier-Stokes s'obtient par l'application du principe fondamental de la dynamique sur un domaine arbitraire de volume V et de surface S . Deux types de forces s'exercent sur ce domaine, des forces volumiques $\vec{f}$ dites d'action à distance et des forces surfaciques par l'intermédiaire de la contrainte locale $\vec{T}$. Des exemples classiques d'interaction à distance sont la force de pesanteur mais aussi l'attraction coulombienne. Les forces surfaciques résument à l'échelle macroscopique l'effet des interactions intermoléculaires dans le milieu continu. Le principe fondamental de la dynamique nous donne

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{V} \, dV = \int_V \rho \vec{f} \, dV + \int_S \vec{T} \, dS. \quad (0.2)$$

7. Théorème bien connu des physiciens.

Le vecteur $\vec{T} = \vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t)$ dépend du temps t , de la position $\vec{x}$ et de l'orientation du vecteur normal extérieur à la surface $\vec{n}$. L'état local des contraintes peut par ailleurs être représenté par un tenseur d'ordre 2 indépendant de la direction $\vec{n}$. On a

$$\vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \bar{\bar{\Sigma}}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n},$$

où $\bar{\bar{\Sigma}}$ est appelé tenseur des contraintes dont les composantes sont notées σ_{ij} .

Remarque 0.3. *Un tenseur est une forme multilinéaire qui généralise la notion de scalaire et de vecteur. Les tenseurs ont été introduits pour l'étude des milieux continus mais sont utilisées dans de nombreuses branches de la physique ; ils sont par exemple un outil essentiel en relativité générale. Pour plus de détail et une introduction mathématique rigoureuse voir [SSB].*

Le tenseur des contraintes est symétrique ; il peut être décomposé en la somme de deux tenseurs, l'un représentant la pression p , l'autre les frottements entre les particules fluides. On note

$$\bar{\bar{\Sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}},$$

avec $\bar{\bar{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses (symétrique) et $\bar{\bar{I}}$ le tenseur unitaire.

Approximation des fluides newtoniens

Jusqu'à présent, nous avons développé des résultats généraux de la mécanique des milieux continus applicables à tous les matériaux pouvant être décrits par un continuum. Cependant, les caractéristiques physiques d'un fluide permettent de trouver une bonne approximation du tenseur des contraintes visqueuses. Lorsque les taux de déformation du fluide sont faibles, les fluides suivent une loi, dite *de Newton*, reliant le tenseur des contraintes visqueuses à l'inconnue de vitesse

$$\bar{\bar{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{V})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}},$$

avec μ la viscosité dynamique et $\bar{\bar{D}}$ le tenseur des déformations⁸.

Au niveau des particules fluides, cette loi exprime le fait que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse perpendiculaire à la direction de cisaillement. Le coefficient de proportionnalité introduit est la viscosité.

Dans l'équation intégrale (0.2), la dérivée particulière de l'accélération peut rentrer sous le signe intégral grâce à une simplification due à l'équation de continuité. On obtient l'équation

8. $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right).$

$$\int_V \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV = \int_V \left(\rho \vec{f} + \operatorname{div} \bar{\bar{\Sigma}} \right) dV.$$

Le choix du volume V étant arbitraire, les intégrales apparaissant dans les deux membres de l'égalité précédente peuvent être levées

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \bar{\bar{\Sigma}}.$$

De plus, en injectant la relation concernant le tenseur des contraintes pour un fluide newtonien, on obtient

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla \left(p - \frac{\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) + \mu \Delta \vec{V},$$

où interviennent trois inconnues : la densité ρ , la pression p et la vitesse $\vec{V}$.

0.1.3 Équations de Navier-Stokes

Formulation générale

On suppose qu'aucune force extérieure ne s'applique sur le système, pas même la pesanteur, ayant à l'esprit que le fluide est horizontalement réparti avec une faible extension verticale. En combinant l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec celle de continuité, nous obtenons les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \mu \Delta \vec{V}) + \frac{\mu}{3\rho} \nabla \operatorname{div} (\vec{V}), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{V}) = 0. \end{cases}$$

Le système décrivant ces équations n'est cependant pas complet. Une équation de conservation de l'énergie peut être rajoutée mais nous nous concentrerons seulement sur la dynamique des particules fluides. Ces équations sont d'une très grande complexité ; leur compréhension fait d'ailleurs l'objet d'un des prix du millénaire de l'institut Clay⁹. Pour en permettre un traitement analytique, des hypothèses simplificatrices supplémentaires seront nécessaires.

Écoulement de Poiseuille-Hagen

Dans un repère orthonormé de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) avec z désignant la verticale, considérons une première simplification consistant à décrire un écoulement permanent ayant lieu entre deux plans horizontaux parallèles situés en $z = \pm h$. L'écoulement est supposé non pesant (pas d'action de la pesanteur), invariant selon la direction x , visqueux (viscosité dynamique μ) et incompressible. Une pompe crée un gradient

9. <http://www.claymath.org/millennium-problems>

de pression horizontal à l'infini de sorte que nous recherchons une solution de la forme

$$\vec{V} = V(z)\vec{e}_y, \quad p = p(y, z).$$

L'incompressibilité ($\rho = \text{const}$) conduit à la relation $\text{div } \vec{V} = 0$ (cf équation (0.1)), immédiatement vérifiée par la forme de la solution recherchée. L'équation de la dynamique se réduit à

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{d^2 V}{dz^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Cette dernière équation indique que la pression ne dépend pas de la coordonnée z de sorte que $p = p(y)$. Finalement

$$\frac{dp}{dy} = \mu \frac{d^2 V}{dz^2}, \quad \vec{V} = V(z)\vec{e}_y, \quad p = p(y),$$

et nous observons que dans l'équation reliant p à V , le terme de pression ne dépend pas de z tandis que la dérivée seconde de V reste indépendante de la variable y , on peut alors écrire

$$\frac{dp}{dy} = \mu \frac{d^2 V}{dz^2} = -C,$$

avec C une constante positive afin d'avoir une décroissance de la pression vers les y positifs et donc une source de fluide venant de $y = -\infty$.

Les deux équations s'intègrent alors facilement et nous avons

$$p(y) = -Cy + p(0), \quad V(z) = -\frac{C}{2\mu}z^2 + Az + B,$$

avec A et B deux constantes d'intégration. Au contact des parois, la condition d'adhérence propre aux fluides visqueux impose une continuité des vitesses et donc la contrainte $V(z = \pm h) = 0$. Nous obtenons la solution suivante

$$V(z) = \frac{C}{2\mu} (h^2 - z^2), \quad p(y) = -Cy + p(0).$$

La fonction V décrit un profil des vitesses parabolique caractéristique des écoulements de Poiseuille. Nous représentons ce profil sur la figure 0.4.

Calculons le débit surfacique Q de cet écoulement.

$$Q = \int_{z=-h}^{z=+h} V(z) dz = \frac{2h^3}{3} \frac{C}{\mu} = 2hU_d,$$

avec U_d nommé *vitesse débitante*. Elle correspond à la vitesse qu'aurait dû avoir le fluide si le profil des vitesses avait été constant dans l'hypothèse d'un fluide parfait. Remarquons que pour conserver un débit constant alors que l'espacement entre les plans h

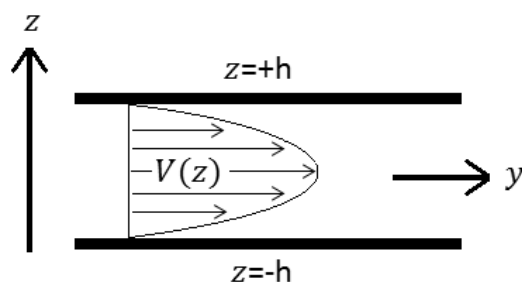


FIGURE 0.4: Profil des vitesses entre deux plans parallèles horizontaux.

diminue, il faut augmenter la vitesse débitante.

L'écoulement de Poiseuille-Hagen est l'archétype de l'écoulement qui se forme entre deux plaques faiblement espacées. Considérant le profil parabolique des vitesses obtenu comme globalement valide dans ces conditions, nous réutiliserons ce résultat lors de la réduction de notre modèle de trois à deux dimensions.

0.2 Modèles d'écoulements incompressibles en deux dimensions

L'objet de cette thèse est un problème de mécanique des fluides jusqu'à présent non résolu modélisant un écoulement lent et incompressible dans le plan. Nous proposons ici de construire la démarche menant à ce problème à partir de l'énoncé des équations de Navier-Stokes en justifiant l'ensemble des hypothèses utilisées. La restriction aux écoulements bidimensionnels correspond à une volonté de cohérence avec l'étude mathématique basée sur des transformations géométriques du plan. Plusieurs arguments viennent en sus justifier cette démarche. La recherche de solutions est simplifiée lorsque l'inconnue est une courbe et non une surface. Ensuite, l'étude du problème de Hele-Shaw plan demeure inaboutie et soulève encore nombre d'interrogations. La bibliographie du problème à deux dimensions couvre environ 95 % des publications mathématiques de ce domaine et cette tendance ne faiblit pas. Enfin – et c'est peut-être l'argument le plus massue – ce problème modélise un très grand nombre de phénomènes naturels et d'applications industrielles que nous décrirons brièvement.

0.2.1 Réduction de Stokes

Les équations de Navier-Stokes modélisent le comportement dynamique de toutes sortes de fluides dans une large gamme de densités, températures et pressions. Pour notre étude en deux dimensions d'un écoulement lent, un certain nombre de simplifications peuvent être effectuées menant à des équations réduites. Un écoulement lent correspond à un écoulement très dense ou bien à une description supramacroscopique du mouvement. C'est en quelque sorte une quatrième échelle de description dans laquelle

les phénomènes temporels sont reportés à la frontière du fluide.

Considérons un fluide incompressible se déplaçant entre deux plans horizontaux séparés par un faible écart $2h$. En l'absence de forces extérieures, les équations de Navier-Stokes s'écrivent¹⁰

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \cdot V = \frac{1}{\rho}(-\nabla p + \mu \Delta V), \\ \operatorname{div} V = 0. \end{cases}$$

Le déplacement du fluide étant considéré comme lent, la dérivée temporelle peut être négligée. L'écoulement ayant lieu sur une faible épaisseur, on impose une vitesse nulle le long de la verticale. En se plaçant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) avec x_3 l'axe vertical et en notant $V = (V_1, V_2, V_3)$, on a

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad V_3 = 0.$$

Les équations de Navier-Stokes de quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes se traduisent alors par les relations

$$\begin{cases} V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \Delta V_1 \right), \\ V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \Delta V_2 \right), \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites de continuité des vitesses suivantes

$$V_1 \Big|_{x_3=\pm h} = V_2 \Big|_{x_3=\pm h} = 0.$$

Pour une épaisseur $2h$ très petite, les dérivées de la vitesse V selon les directions x_1 et x_2 deviennent négligeables par rapport à celles de V selon l'axe vertical. Cette simplification est justifiée par le profil parabolique des vitesses rencontré dans le problème de Poiseuille-Hagen. Pour conserver un débit Q constant avec une épaisseur h entre les plans qui tend vers 0, il est nécessaire d'avoir une vitesse débitante U_d qui augmente de sorte que le gradient de vitesse entre une vitesse nulle aux parois et la vitesse maximale augmente. Ainsi, pour un h suffisamment petit, on considère que

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_i} = \frac{\partial V_2}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_i^2} = 0, \quad i = 1, 2,$$

et le système d'équations se simplifie en

10. Nous choisissons d'omettre les flèches sur les grandeurs vectorielles pour simplifier l'écriture des expressions.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_3^2}, \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Ces équations nous montrent que p ne dépend pas de x_3 et que par conséquent les vitesses V_1 et V_2 peuvent s'intégrer en des polynômes au plus de degré 2 en x_3 . Avec la condition de vitesse nulle aux bords $x_3 = -h$ et $x_3 = h$, nous obtenons

$$V_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot (x_3^2 - h^2), \quad V_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \cdot (x_3^2 - h^2).$$

Lorsque h devient très petit, l'observabilité de différence des vitesses entre des vitesses nulles en $x_3 = -h$ ou $x_3 = h$ et maximale en $x_3 = 0$ diminue. C'est pourquoi, par volonté de réalisme, on se permet de moyenniser les vitesses V_1 et V_2 selon l'axe vertical entre 0 et h (par symétrie)

$$\langle V_1 \rangle = \frac{1}{h} \int_{x_3=0}^{x_3=h} V_1 dx_3 = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \langle V_2 \rangle = \frac{1}{h} \int_{x_3=0}^{x_3=h} V_2 dx_3 = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2}.$$

En notant $\langle V \rangle$ le vecteur moyennant, de composantes $(\langle V_1 \rangle, \langle V_2 \rangle)$, on obtient l'équation de Hele-Shaw

$$\langle V \rangle = -\frac{h^2}{3\mu} \nabla p.$$

Cette équation ne dépend plus que des variables du plan x_1 et x_2 et nous pouvons faire le choix d'enlever la notation moyenne à la vitesse en considérant que cette vitesse moyenne est la vitesse réelle que l'écoulement prend dans le plan. Remarquons que l'équation a la même forme que l'équation de Darcy décrivant l'écoulement des fluides en milieux poreux.

En injectant cette équation dans l'équation de continuité réduite à $\text{div } V = 0$, nous observons que la pression est solution de l'équation harmonique à l'intérieur du fluide

$$-\Delta p = 0.$$

0.2.2 Modèle de Hele-Shaw étudié et applications

Dans les paragraphes précédents, le fluide remplissait l'espace tout entier et aucune condition aux frontières du domaine n'a été prise en compte. Dans le modèle de Hele-Shaw, le fluide étudié est entouré d'un deuxième fluide dit *passif* et non miscible avec le premier. À la frontière entre les fluides, doivent se vérifier des conditions permettant la coexistence des deux phases et leur mouvement commun.

La phase active occupe une région connexe simple de l'espace Ω_0 à l'instant initial $t = 0$ et se déforme au cours du temps en un domaine Ω_t selon l'équation de Hele-Shaw (ou Darcy) vérifiée aux points $\mathbf{s}$ du bord du domaine de vitesse $\dot{\mathbf{s}}$. On projette cette relation selon la normale extérieure au domaine ν . On a

$$\begin{aligned} \text{condition de Stokes :} & \quad -\Delta p = 0, \quad \text{dans } \Omega_t, \\ \text{condition cinétique (loi de Darcy) :} & \quad \dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = -\partial_\nu p, \quad \text{sur } \partial\Omega_t = \Gamma_t. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Nous considérons que la viscosité du fluide étudié est beaucoup plus grande que celle du fluide qui l'entoure. Dans ces conditions, l'équilibre entre les deux phases est assuré par une relation dépendant de la géométrie de la frontière¹¹. On note

$$p(x_1, x_2) = \gamma\kappa(x_1, x_2), \quad \text{sur } \Gamma_t,$$

avec κ désignant la courbure de la frontière et γ la tension de surface. La principale contribution au coefficient de courbure est due à la forme du profil des vitesses selon l'axe vertical x_3 quasi parabolique et plus ou moins le même en chaque point du bord. Ainsi, nous décidons de simplifier l'expression de la condition au bord pour la pression en la remplaçant par une constante. Cette simplification a été introduite par Leibenson (1934). Les équations (0.3) étant invariantes en déplaçant la pression d'une constante, nous considérerons que la pression est nulle au bord du domaine. Le problème étudié dans cette thèse se résume alors au système de trois équations suivant – problème nommé *problème de Hele-Shaw dans l'approximation de Stokes-Leibenson*.

$$\begin{aligned} \text{condition de Stokes :} & \quad -\Delta p = S, \quad \text{dans } \Omega_t, \\ \text{condition cinétique (loi de Darcy) :} & \quad \dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = -\partial_\nu p, \quad \text{sur } \Gamma_t, \\ \text{condition de Leibenson :} & \quad p = 0, \quad \text{sur } \Gamma_t. \end{aligned} \quad (0.4)$$

Un terme source S a fait son apparition dans les équations. En effet, en substituant ce terme par 0 on s'aperçoit immédiatement qu'une pression nulle partout dans le domaine vérifie toutes les équations et que rien ne se passe. Pour faire se déplacer le fluide, nous injectons un terme source dans les équations, modélisant ainsi l'ajout ou l'aspiration de fluide. Dans ce travail, nous nous sommes concentrés sur un terme source formé d'une ou plusieurs sources ponctuelles représentées mathématiquement par des *fonctions de Dirac* (ainsi que ses dérivées). Ces termes ponctuels conditionnent la dynamique du domaine, en particulier les puissances des sources et des puits déterminent la vitesse de changement d'aire du domaine.

Transformons l'équation de Stokes en explicitant un terme source formé de Dirac placés aux points $x_1, \dots, x_N$ (avec $N \in \mathbb{N}^*$) situés dans Ω_t et de puissances respectives $Q_1, \dots, Q_N$.

$$-\Delta p = \sum_{i=1}^{i=N} Q_i \delta_{x_i}, \quad \text{dans } \Omega_t \setminus \{x_1, \dots, x_N\}.$$

11. Voir pour cela l'équation de Laplace-Young.

En notant $|\Omega_t|$ l'aire du domaine Ω_t nous avons

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} d\Sigma = \int_{\Gamma_t} \dot{s} \cdot \nu \, ds = - \int_{\Gamma_t} \partial_\nu p \, ds,$$

en vertu du théorème de transport de Reynolds puis de la loi de Darcy.

En utilisant la formule de Green puis la condition de Stokes, l'expression devient

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t| = - \int_{\Omega_t} \Delta p \, d\Sigma = \sum_{i=1}^{i=N} Q_i.$$

Il apparaît donc que la variation de l'aire en fonction du temps est reliée à la puissance des sources.

Les applications industrielles à ce problème (0.4) sont nombreuses. Les Russes ont dès le début du XX^e siècle porté un vif intérêt à ce problème sachant qu'il peut modéliser la déformation d'une nappe de pétrole sous l'effet d'un puits. Les premières publications des années 30 et 40 font explicitement référence au domaine pétrolier. Avec le développement des plastiques, des problèmes de moulage par injection sont apparus – ils sont également reliés aux écoulements de Hele-Shaw. Depuis quelques années, se développe le domaine de la microfluidique, domaine qui fait appel à des cellules de Hele-Shaw.

0.2.3 Florilège de modèles, florilège de problèmes

De nombreux modèles de problèmes à frontière libre existent. Nous évoquons les plus significatifs d'entre eux. Ils sont, à première vue, d'infimes variations sur les équations de Hele-Shaw mais apportent des problèmes incommensurables quant à leur résolution. Le problème de Hele-Shaw rassemble à lui seul une bibliographie très importante [28]. Les modèles ici présentés décrivent des phénomènes mal compris et sont autant de défis pour la communauté mathématique.

Le problème de Stefan à une phase

Le problème de Stefan décrit le déplacement de la frontière entre un solide (de la glace) en contact avec sa forme liquide (l'eau). Dans le problème à une phase, on ne considère que les variations de température (variable u) dans la phase solide décrites par l'équation de la chaleur. On obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda \Delta u, & \text{dans } \Omega_t, \\ \rho L_s \dot{s} \cdot \nu &= \lambda \partial_\nu u, & \text{sur } \partial\Omega_t = \Gamma_t, \\ u &= u_1, & \text{sur } \Gamma_t. \end{aligned}$$

Une source froide de température constante égale à u_0 est appliquée sur une frontière $\tilde{\Gamma}$ de la phase solide – comme présenté sur la figure 0.5 – et u_1 est la température de transition de phase. λ est le coefficient de conductivité thermique du milieu, ρ la densité de

la glace et C_p sa capacité thermique massique. Enfin L_s est la chaleur latente massique de solidification. Les conditions aux bords ne sont pas présentées, considérant que cette question est éludée par la présente de symétries.

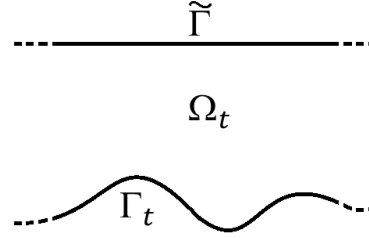


FIGURE 0.5: Problème de Stefan.

Le problème de Hele-Shaw est un problème de Stefan à une phase dégénéré, c'est-à-dire pour lequel la capacité thermique massique est considérée égale à zéro.

Écoulement de Stokes dans le plan avec frontière libre

Dans le cas d'un écoulement lent et en absence de gravité (ou plutôt en négligeant son effet dans le plan) et de toute autre force d'action à distance, les équations de Navier-Stokes prennent la forme suivante

$$\begin{aligned}\nabla p &= \Delta u, \\ \operatorname{div} u &= 0,\end{aligned}$$

dans la phase connexe simple $\Omega(t)$, avec p la pression et u la vitesse. Il est alors possible d'introduire une fonction de courant ψ biharmonique vérifiant une condition de Darcy sur le bord du domaine. Un traitement par l'analyse complexe comparable à celui utilisé pour le problème de Hele-Shaw est considéré dans [8].

Le problème de Muskat

Dans le cas Muskat, la seconde phase ne peut pas disparaître dans la condition de Leibenson au bord $p = 0$ et les deux phases doivent coexister dans un équilibre.

$$\begin{aligned}-\Delta u_1 &= Q_1 \delta_0, & \text{dans } \Omega_1, \\ -\Delta u_2 &= 0, & \text{dans } \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \Omega_1, \\ p_1 &= p_2, & \text{sur } \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \Gamma, \\ k_1 \nabla p_1 &= k_2 \nabla p_2, & \text{sur } \Gamma.\end{aligned}$$

À l'origine du repère cartésien se situe une source de fluide représentée par un Dirac (δ_0) de puissance Q_1 appartenant au domaine simplement connexe Ω_1 . À l'infini se situe également une source de fluide réalisant la conservation de la quantité de matière dans le plan. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la viscosité du fluide dans Ω_1 et Ω_2 respectivement. Le problème de Hele-Shaw est un problème de Muskat dans lequel on a supposé

la viscosité μ_1 d'une phase très supérieure à la viscosité μ_2 de la seconde. Un exemple de configuration géométrique est donné sur la figure 0.6.

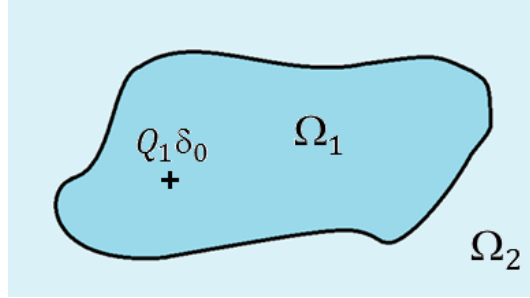


FIGURE 0.6: Problème de Muskat : deux fluides en compétition dans le plan.

Ce problème – bien qu'en apparence simple – est d'une difficulté bien plus grande que le problème de Hele-Shaw. La méthode classique de résolution par une transformation conforme du plan ne peut plus être employée et d'autres outils doivent être mis en place¹².

0.2.4 Approche probabiliste

Le tableau ne serait pas complet sans évoquer le sujet de la croissance laplacienne probabiliste. Les équations de Hele-Shaw dans l'approximation de Stokes-Leibenson peuvent être particularisées et replacées dans un contexte microscopique dans lequel l'avancée de la frontière se fait par ajout successif de particules élémentaires de fluide. L'avantage d'un tel modèle est sa simplicité conceptuelle et pratique lors de la programmation. L'expérience montre que des objets fractals peuvent apparaître. Ainsi est-il fait un lien entre les modèles microscopique et supramicroscopique.

Le modèle probabiliste le plus connu est sans doute le modèle DLA (*Diffusion-Limited Aggregation*) proposé par T. A. Witten Jr. et L. M. Sander en 1981 [WS]. Il consiste à agréger des particules subissant un mouvement brownien sur une particule fixe appelée racine. Lorsque la particule touche la racine, elle se fige, faisant petit à petit augmenter de taille la figure. Pour une marche aléatoire continue, la loi de probabilité vérifiera l'équation de Stokes et la condition de Leibenson au bord du domaine. De plus amples informations sont disponibles dans la monographie de référence de Gustafsson et Vasiliev [GUV] ; la figure 0.7 donne un exemple de résultat obtenu.

12. On verra qu'il n'existe pas de transformation du plan complexe vers le disque unité.

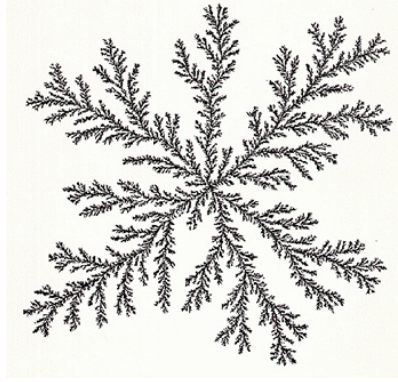


FIGURE 0.7: Modèle DLA.

0.3 Transformations géométriques

L'analyse des problèmes à frontière libre consiste généralement à transformer un domaine mouvant en un domaine fixe sur lequel les recettes mathématiques peuvent être déployées. Il est alors nécessaire d'utiliser une fonction possédant certaines propriétés qui code la transformation d'un domaine vers l'autre. Nous verrons deux types de transformations, toutes deux justifiées par l'analyse complexe. La plus classique d'entre elles est la transformation conforme dont l'universalité de son application dans le plan est due à Riemann. Avant cela, nous regroupons des résultats élémentaires d'analyse complexe utiles à la description des fluides du plan.

0.3.1 Précis d'analyse complexe

Nous rassemblons ici des résultats classiques d'analyse complexe qui sont quelques outils de compréhension de ce vaste domaine. Nous présentons en particulier les notions de dérivabilité et d'univalence pour les fonctions complexes, des théorèmes propres à l'intégration dans le plan complexe et enfin une application des complexes aux fluides planaires.

Présentation

Dans toute cette partie nous désignerons par f une fonction d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dans le plan complexe ($f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$). À un point z de Ω correspond une ou plusieurs valeurs w telles que $w = f(z)$. En notant $z = x + iy$ et $w = w_1 + iw_2$, l'application f peut être décrite par deux fonctions réelles de deux variables réelles

$$w_1(x, y), \quad w_2(x, y).$$

Une fonction complexe peut posséder plusieurs images par une même fonction bien que cela soit en contradiction avec la notion usuelle de fonction. On dit que ces fonctions sont multivaluées. C'est le cas par exemple de la fonction logarithme complexe $z \mapsto \ln z$

définie sur $\mathbb{C}^*$.

Par définition du logarithme, on a

$$\ln(e^{it}) = it,$$

et en faisant passer t de 0 à 2π on obtient par continuité pour le nombre $\ln(1)$ tantôt la réponse 0, tantôt $2\pi i$ pour un même point $z = 1 = e^{2i\pi}$. Ce phénomène est appelé *monodromie*.

Une première solution consiste à restreindre le domaine image à ce qu'on appelle une détermination principale, faisant de ces fonctions multivaluées des fonctions univoques. Pour le logarithme, nous considérons que $\ln z$ est donné par le nombre $\ln|z| + i\theta$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Ces fonctions multivaluées peuvent également être regardées comme étant des fonctions univoques mais évoluant sur des surfaces de Riemann.

Fonctions holomorphes

Il existe pour les fonctions d'une variable complexe la même notion de dérivabilité que pour les fonctions réelles. Cependant cette propriété entraîne toute une série de résultats étonnants faisant de l'analyse complexe un domaine fortement distinct de son cousin réel.

Définition 0.1. ($\mathbb{C}$ -dérivabilité)

Une fonction f d'un ouvert Ω dans $\mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$ -dérivable au point z_0 si la limite quand h tend vers 0 ($h \in \mathbb{C}^*$) du quotient $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ est unique et finie. Elle est alors notée $f'(z_0)$ et nommée dérivée de f en z_0 .

Définition 0.2. (fonctions holomorphes)

f est dite holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de Ω .

Cette définition de la dérivée est beaucoup plus contraignante que dans le cas réel, puisque le point z_0 peut être approché par une infinité de directions différentes pour h . Ainsi une fonction de deux variables réelles pour laquelle les dérivées partielles existent n'est pas nécessairement dérivable au sens complexe (problème de l'unicité de la dérivée). C'est le cas par exemple de la simple fonction conjugaison ($z \mapsto \bar{z}$). Pour cela il est nécessaire que soient vérifiées des équations dites de *Cauchy-Riemann*.

Théorème 0.1. (Equations de Cauchy-Riemann)

Si $f = w_1 + iw_2$ est $\mathbb{C}$ -dérivable en un point $z_0 = x_0 + iy_0$ alors les équations suivantes sont vérifiées

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial w_2}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial w_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial w_2}{\partial x}(x_0, y_0).$$

En outre, la dérivée de f en z_0 est donnée par $f'(z_0) = \frac{\partial w_1}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial w_2}{\partial x}(x_0, y_0)$.

En ajoutant une condition de régularité sur les fonctions réelles (de deux variables réelles) w_1 et w_2 , nous obtenons une équivalence permettant de caractériser les fonctions holomorphes dans le domaine réel.

Théorème 0.2. *La fonction $f = w_1 + iw_2$ est holomorphe dans Ω si et seulement si les fonctions w_1 et w_2 sont C^1 dans Ω et vérifient les équations de Cauchy-Riemann.*

Fonctions harmoniques

Rappelons qu'une fonction u de Ω dans $\mathbb{C}$ est dite harmonique si ses dérivées partielles du second ordre sont définies et la fonction u est solution de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Il existe un lien très profond entre fonctions holomorphes et fonctions harmoniques puisque la partie réelle w_1 et imaginaire w_2 d'une fonction holomorphe sont harmoniques. L'existence de dérivées partielles du second ordre est une conséquence du théorème de Cauchy-Goursat. En fait, une fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$ -dérivable et développable en série entière au voisinage de chaque point de l'ouvert Ω . Les fonctions analytiques complexes sont alors les fonctions holomorphes.

Théorème 0.3. *(Cauchy-Goursat)*

Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -dérivable dans Ω alors u est infiniment $\mathbb{C}$ -dérivable dans Ω .

À chaque fonction harmonique définie sur un ouvert simplement connexe Ω , nous pouvons associer une petite sœur également harmonique, reliée à la première par les équations de Cauchy-Riemann. À cela correspond la notion de fonctions harmoniques conjuguées.

Définition 0.3. *(Fonctions harmoniques conjuguées)*

Deux fonction harmoniques $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont dites fonctions harmoniques conjuguées dans Ω si u et v satisfont les équations de Cauchy Riemann.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 0.4. *Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction réelle de classe C^2 définie sur Ω ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Si u est harmonique, il existe une fonction harmonique $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (de classe C^2) telle que u et v soient des fonctions harmoniques conjuguées. La fonction v est unique à une constante près.*

Remarquons que par le théorème 0.2, la fonction $f = u + iv$ est alors holomorphe. Le même théorème peut être écrit en inversant les rôles des fonctions u et v .

Fonctions univalentes

Définition 0.4. Une fonction complexe est univalente si elle est à la fois holomorphe et injective.

C'est-à-dire que sur un domaine donné D , elle ne peut prendre deux fois la même valeur. Nous pouvons montrer que pour une fonction univalente f d'un ensemble ouvert connexe A vers un autre ensemble ouvert connexe B ($f(A) = B$) possède une dérivée f' qui ne s'annule jamais.

Calcul intégral

L'intégration de fonctions complexes fait apparaître des propriétés nouvelles absentes de l'intégration dans les réels. En particulier, l'évaluation d'une fonction en un point peut être réalisée par le calcul d'une intégrale autour de ce point. C'est le contenu du théorème suivant.

Théorème 0.5. (Formule intégrale de Cauchy)

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe du plan complexe et z_0 un point de cet ouvert. En désignant par C un lacet entourant le point z_0 orienté dans le sens positif, on a la relation suivante

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Dans le cas particulier où f est développable en une série de Laurent sur un anneau centré en z_0 ($r < |z - z_0| < R$) de la manière suivante

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

la formule intégrale de Cauchy permet d'obtenir chaque coefficient c_n par un calcul d'intégrale

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où C est un lacet entourant z_0 dans le sens positif.

Une autre conséquence du théorème intégrale de Cauchy est la propriété de la moyenne, souvent exposée parmi les propriétés des fonctions harmoniques. En se plaçant sur un cercle C de rayon r centré sur z_0 et orienté positivement, on obtient la relation suivante

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Noyau de Poisson

La résolution de l'équation de Laplace dans un domaine donné n'est pas chose aisée. Seulement pour des géométries à frontière simple, nous sommes capables d'explicitement analytiquement une solution ; c'est le cas par exemple du disque unité. Si pour la fonction inconnue harmonique u dans le disque unité, nous connaissons ses valeurs f sur le bord de ce domaine et f continue, nous pouvons exprimer la solution en coordonnées polaires de ce problème (problème de Dirichlet) de la manière suivante

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\pi}^{t=\pi} Pr(\theta - t) f(e^{it}) dt, \quad 0 \leq r < 1,$$

avec

$$Pr(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

C'est cette possibilité de résolution offerte dans le disque unité, qui, combinée au concept de transformation conforme, permettra d'écrire l'équation de Polubarinova-Galin et d'en extraire un grand nombre de solutions exactes¹³. Avant d'en venir aux transformations géométriques, examinons une application de l'analyse complexe au domaine des fluides planaires.

Potentiel complexe

Montrons qu'un écoulement stationnaire plan incompressible et irrotationnel peut être entièrement caractérisé par une fonction d'une variable complexe.

Considérons que V désigne un champ de vecteurs vitesse de coordonnées $(u(x, y), v(x, y))$ à un point (x, y) d'un domaine ouvert Ω du plan. L'incompressibilité du fluide se traduit par l'équation

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

tandis que le caractère irrotationnel donne (sur sa troisième composante en utilisant $V = (u, v, 0)$)

$$\operatorname{rot} V = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ces équations nous rappellent les équations de Cauchy-Riemann, qui d'ailleurs s'obtiennent facilement en remplaçant v par $-v$. Il devient alors possible d'introduire une fonction complexe f définie par la relation

$$f = u - iv,$$

et appelée *vitesse complexe* du fluide. Les particules fluides suivent donc les trajectoires gouvernées par l'équation différentielle complexe portant sur l'inconnue $z = x + iy$

$$\frac{dz}{dt} = \overline{f(z)} = u(z) + iv(z).$$

13. Cf. le chapitre 2.

Par ailleurs, la condition d'incompressibilité nous autorise à écrire $V = \text{rot } A$ puisque $\text{div rot} = 0$. Il vient

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ v(x, y) = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{cases}$$

De nombreux choix sont possibles pour le vecteur A , mais l'un d'entre eux attire notre attention : $A = (0, 0, \psi(x, y))$ de part sa simplicité. En supposant que la fonction ψ est C^2 , le théorème de Schwarz s'applique et nous avons

$$\text{div } V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0,$$

et cette fonction ψ convient.

Définition 0.5. La fonction ψ telle que $(u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ s'appelle fonction de courant.

En considérant maintenant la condition d'irrotationnalité, on peut écrire $V = \nabla \phi$ puisque $\text{rot } \nabla = 0$.

On obtient $\text{rot } V = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ et en supposant que ϕ est C^2 , on calcule

$$\text{rot } V = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0.$$

Définition 0.6. La fonction ϕ telle que $(u, v) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$ s'appelle fonction potentielle ou potentiel des vitesses.

Par un calcul immédiat, on s'aperçoit que $\Delta \phi = \Delta \psi = 0$. On remarque également que par la relation $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$, les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées et que ϕ et ψ sont deux fonctions harmoniques conjuguées. Nous introduisons alors la fonction F telle que

$$F = \phi + i\psi,$$

appelée *potentiel complexe* des vitesses, qui est reliée à la vitesse complexe par la relation

$$f = u - iv = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Les lignes $\phi(x, y) = \text{const}$ s'appellent *lignes équipotentielles*, alors que celles correspondant à $\psi(x, y) = \text{const}$ sont des *lignes de courant*. Les particules fluides sont contraintes à se déplacer le long des lignes de courant. En effet, le vecteur tangent à une courbe

$\psi(x, y) = \text{const}$ est colinéaire à $(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}) = (u, v)$, qui sont les composantes du vecteur vitesse.

En reliant deux points A et B par une courbe rectifiable L , nous avons la formule suivante

$$\Gamma_L + \imath N_L = \int_L F'(z) dz = (\phi_B - \phi_A) + \imath(\psi_B - \psi_A),$$

où Γ_L est appelé *circulation du vecteur vitesse* V et caractérise le niveau de vorticité de l'écoulement ; N_L est le *flux du vecteur vitesse* V et correspond à la quantité de fluide traversant L par unité de temps.

Dans le cas où L est un lacet, le théorème des résidus permet une reformulation simple de ce résultat

$$\Gamma_L + \imath N_L = 2\pi\imath \sum_{k=1}^n \text{res} f'(z_k),$$

avec les z_k les points particuliers entourés par L .

Pour illustrer l'utilisation des potentiels complexes, nous choisissons de donner quelques exemples classiques utilisés pour certains d'entre eux dans la résolution de l'équation de Polubarinova-Galin (voir chapitres 2 et 3).

Source ponctuelle

Dans le cas d'un écoulement plan généré par une source ou un puits situé au point $\mathbf{O}$, le potentiel complexe des vitesses prend la forme suivante

$$F(z) = C \ln z,$$

avec C une constante réelle.

Avec la notation $z = re^{i\theta}$, le potentiel des vitesses $u(r, \theta)$ et la fonction de courant $v(r, \theta)$ sont respectivement

$$u(r, \theta) = C \ln r, \quad v(r, \theta) = C\theta.$$

Les équipotentielles sont alors les cercles centrés sur la source, et les lignes de courant les demi-droites extraites de zéro. Le champ des vitesses s'obtient en calculant

$$v_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{C}{r},$$

$$v_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

La détermination de la constante C est conditionnée par la puissance N de la source. En effet, on a $N = \int_{|z|=r} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C$.

Vortex ou tourbillon libre.

Le potentiel complexe des vitesses est donné par la relation

$$F(z) = iC \ln z ,$$

avec C une constante réelle.

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant jouent alors des rôles inversés par rapport au cas source. La détermination de la constante C s'effectue cette fois par le calcul de la circulation du vecteur vitesse $\Gamma = - \int_{|z|=r} \frac{C}{r} r d\theta = -2\pi C$.

Multipôle.

En combinant $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sources et puits de puissances $\pm N$, il est possible de générer des multipôles de degré n , possédant des caractéristiques identiques à ceux rencontrés en électromagnétique. Le potentiel des vitesses f correspond à la relation

$$f(z) = \frac{D}{z^n} .$$

La construction d'un multipôle sera vue dans le détail au chapitre 3.

0.3.2 Transformations conformes du plan

L'étude des transformations conformes a été stimulée par le développement de la cartographie et la volonté de représenter des cartes planes de la Terre. Il n'existe pas de carte plane de la Terre conservant les distances et les angles. Cette difficulté a obligé les ingénieurs et chercheurs du XIX^e siècle à trouver la meilleure carte possible, respectant au mieux les formes sans trop déformer les distances. Certaines de ces projections respectent des règles qui permettent de les regrouper sous le nom de *transformations conformes*. On considère que la première transformation conforme découverte est la projection de Mercator (1569).

La fonction complexe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite conforme (ou application conforme) dans le domaine D si elle transforme D dans le plan complexe en conservant localement les angles. C'est-à-dire que pour deux courbes C^1 orientées γ_1 et γ_2 se croisant avec un angle α , l'image de ces deux courbes $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ et $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ se croisera aussi avec un angle α bien que globalement ces courbes seront déformées par la transformation. Une transformation conforme du plan est donc localement une similitude directe.

Proposition 0.1. *Pour qu'une fonction f soit conforme du domaine D vers $f(D) = E$ il est nécessaire et suffisant que cette fonction soit univalente et holomorphe sur D .*

En d'autres termes, f est une transformation conforme de D vers E si f est holomorphe et est une bijection de D vers E . En particulier, la dérivée complexe de f ne s'annule jamais sur D . Une fonction holomorphe est partout conforme sauf aux points où sa dérivée s'annule.

Théorème de la représentation conforme

A la base de la théorie des transformations conformes se trouve le théorème d'existence de Riemann.

Théorème 0.6. *(de l'application conforme de Riemann)*

Tout ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et distinct de $\mathbb{C}$ est conforme au disque unité.

En désignant par f cette application conforme du domaine D vers un domaine E , z_0 un point de D , w_0 et un point de E , alors l'unicité de f est assurée si $f(z_0) = w_0$ et $\arg f'(z_0) = \alpha_0$ avec $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

Transformation de Joukovsky

La transformation de Joukovsky est sans doute la plus célèbre des transformations conformes puisqu'elle a permis un premier calcul de la portance autour d'un profil d'aile d'avion. Elle est donnée par la formule

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

avec ζ appartenant au disque unité.

Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel réalise une transformation du demi-plan supérieur vers un polygone simple quelconque. Elle constitue un analogue de la transformation de Helmholtz-Kirchhoff (voir section 0.3.3) utilisée dans le cadre des quasi-contours (voir chapitre 1). Comme dans ce dernier cas, il est possible d'expliciter une formule, donnée ici par

$$f(\zeta) = \int_{\zeta} \frac{K}{(w-a)^{1-\frac{\alpha}{\pi}}(w-b)^{1-\frac{\beta}{\pi}}(w-c)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \dots} dw,$$

avec K une constante, $a, b, c, \dots$ des nombres réels et $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les angles intérieurs au polygone. La transformation est définie pour les ζ de l'ensemble $\{\zeta \in \mathbb{C} | \Im \zeta > 0\}$.

Par exemple, un triangle ayant pour angles $\pi\alpha, \pi\beta, \pi(1-\alpha-\beta)$ sera donné par la relation

$$f(\zeta) = \int_{\zeta} \frac{1}{(w-1)^{1-\alpha}(w+1)^{1-\beta}} dw.$$

0.3.3 Transformation de Helmholtz-Kirchhoff

Contrairement à la transformation conforme qui porte uniquement sur les propriétés topologiques des ensembles considérés, la transformation de Helmholtz-Kirchhoff est créée par l'introduction de la fonction conjuguée à une fonction harmonique. Dans un domaine Ω connexe simple dans lequel existe une fonction harmonique u , nous pouvons introduire sa fonction conjuguée harmonique associée v (cf théorème 0.4) dans Ω .

Définissons la fonction de Helmholtz-Kirchhoff de la manière suivante

$$A(u, v) + \imath B(u, v) = \ln \frac{dz}{dw}. \quad (0.5)$$

Les variables géométriques x et y du plan euclidien $z = x + \imath y$ disparaissent et sont remplacées par de nouvelles variables u et v , auparavant considérées comme des fonctions. Les fonctions A et B sont alors définies par la relation (0.5) et s'interprètent comme des coordonnées polaires généralisées. En notant $dz = r_1 e^{\imath \theta_1}$ et $dw = r_2 e^{\imath \theta_2}$, on observe que sur une équipotentielle $u = \text{const}$ on a la relation

$$A(u, v) + \imath B(u, v) = \ln \frac{r_1}{r_2} + \imath \left(\theta_1 - \frac{\pi}{2} \right),$$

étant donné que $du = 0$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

La fonction B est alors l'angle entre l'axe horizontal et la normale extérieure au domaine. La fonction A possède également une interprétation géométrique, elle est le coefficient de dilatation du contour permettant de reconstituer sa position par une intégrale curviligne

$$z(\tilde{v}) - z(0) = \int_{v=0}^{v=\tilde{v}} e^{A(u,v)} \tau(v) dv,$$

$\tau(v)$ étant le vecteur tangent à la frontière au point v . En faisant un choix judicieux des conditions aux limites sur le domaine Ω , il est possible de contraindre les valeurs de u et de v dans un intervalle donné. Ainsi, de la même façon que pour les transformations conformes, nous avons réussi à déplacer un domaine qui dépendait du temps dans un domaine fixe dont les valeurs prises par les fonction A et B sur son bord permettent de reconstituer la frontière réelle.

0.4 Contrôle optimal

Cette dernière section est consacrée à l'introduction de résultats élémentaires en théorie du contrôle. Nous ne considérerons que des équations différentielles en nombre fini pour lesquelles le contrôle est recherché de sorte à minimiser une expression intégrale en un temps donné. Nous définirons la notion de contrôlabilité puis exposerons le principe du maximum de Pontriaguine utilisé dans le chapitre 3. Au contraire de résultats plus généraux, la démonstration de ce résultat peut ici être menée avec des arguments simples [OPT].

0.4.1 Contrôle en dimension finie

Considérons le système d'équations différentielles

$$\dot{x} = \phi(x, u, t),$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ définissant l'état du système et $u = (u_1, \dots, u_q)$ le paramètre de contrôle avec $q \leq n$. Notre objectif est de déterminer un contrôle $u = \hat{u}$ pour lequel l'intégrale

$$\int_{t=0}^{t=T} f(x(t), u(t), t) dt$$

est minimale pour un temps donné T .

La difficulté de ce problème porte sur les contraintes imposées au contrôle. Le contrôle peut par exemple représenter l'angle fait par le volant d'une voiture nécessaire à l'obtention d'une trajectoire donnée. Dans cet exemple, on voit que le contrôle peut atteindre les bornes de son domaine d'existence. On aura alors $u \in U$ avec $U \subset \mathbb{R}^q$ ensemble fermé. Par ailleurs, le conducteur peut modifier de façon très brusque la trajectoire de la voiture en tournant très énergiquement le volant. À la limite, on impose alors que u soit une fonction continue par morceaux ($u \in PC([0, t], \mathbb{R}^q)$). Finalement, on résout le problème (P) suivant

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_{t=0}^{t=T} f(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= \phi(x(t), u(t), t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

avec les contraintes

$$u(t) \in U, \quad u \in PC([0, t], \mathbb{R}^q),$$

imposant une trajectoire (cf. Cauchy-Lipschitz) C^1 par morceaux ($x \in PC^1([0, T], \mathbb{R}^n)$).

0.4.2 Contrôlabilité

Définition 0.7. Le système $\dot{x} = \phi(x, u, t)$ est dit contrôlable en temps T s'il existe pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ un contrôle u tel quel la trajectoire $x = x(t)$ solution du système d'équations différentielles relie le point x_0 au point x_1 en le temps T .

Il existe de nombreux théorèmes permettant d'établir la contrôlabilité d'un système, le plus connu est donné par la condition de Kálmán.

Théorème 0.7. Lorsque $U = \mathbb{R}^q$ et $\phi(x(t), u(t), t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ avec A et B des matrices indépendantes du temps et r un vecteur de dimension n , le système est contrôlable en un temps T quelconque si et seulement si la matrice

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n .

C'est seulement lorsque le problème de l'existence d'un contrôle est résolu que nous pouvons nous poser la question de savoir si parmi les contrôles réalisant le passage de x_0 vers x_1 , il en existe un qui minimise une fonctionnelle donnée. Cette question nous mène au principe du maximum.

0.4.3 Principe du maximum de Pontriaguine

Avant d'énoncer pour quelles conditions nous pouvons espérer pouvoir minimiser la fonctionnelle J , il faut préciser la topologie sur laquelle nous travaillons.

Définition 0.8. La trajectoire $\hat{\xi} = (\hat{x}, \hat{u})$ est nommée *minimum local fort* dans le problème (P) et nous écrivons $\hat{\xi} \in \text{slocmin } P$ s'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $J(\xi) \geq J(\hat{\xi})$ pour toutes solutions de (P) telles que

$$\|x - \hat{x}\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)} < \epsilon ,$$

avec $\|x\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)} = \max_{i=1\dots n, t \in [0,T]} |x_i(t)|$.

Nous pouvons remarquer que deux trajectoires proches ξ_1 et ξ_2 ne requièrent pas de conditions sur les contrôles u_1 et u_2 associés.

Théorème 0.8. Désignons par $\hat{\xi} = (\hat{x}, \hat{u})$ la trajectoire optimale du problème (P) (qui minimise la fonctionnelle J). Les fonctions f et ϕ sont continues dans un voisinage de l'ensemble $\Gamma_{\hat{x}} \times U$, les dérivées f_x et ϕ_x définies sur ce même ensemble et continues pour les points de l'ensemble $\Gamma_{\hat{x}\hat{u}}(S)$ avec

$$\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)), t \in [0, T]\} ,$$

et

$$\Gamma_{\hat{x}\hat{u}}(S) = \{(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), t \in S\} ,$$

l'ensemble S rassemblant les points de $[0, T]$ pour lesquels la fonction $\hat{u}$ est continue. Si $\hat{\xi}$ est une trajectoire optimale alors la fonction $H(x, u, t, p) = p\phi(t, x, u) - f(t, x, u)$ atteint son maximum en $\hat{\xi}$, on écrit

$$H(t, x, u, p) \leq H(t, \hat{x}, \hat{u}, p) , \quad \forall t \in S, \forall u \in U ,$$

avec p l'unique solution de l'équation différentielle

$$-\dot{p}(t) = H_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)) ,$$

vérifiant la condition finale

$$p(T) = 0 .$$

Pour plus de renseignements, l'ouvrage de Trélat [TRE] constitue une introduction très accessible au domaine.

1 Étude théorique et numérique par transformation de Helmholtz-Kirchhoff

Sommaire

1.0	Présentation	50
1.1	Introduction	51
1.2	Geometrical transformation	54
1.2.1	General case	54
1.2.2	Circular case	57
1.2.3	Polygonal case	57
1.3	Theoretical results	59
1.3.1	Evolution equation	60
1.3.2	Existence and uniqueness result	62
1.4	Discrete problem	64
1.4.1	Discrete law and notations	65
1.4.2	Discrete model	66
1.4.3	Numerical scheme	69
1.5	Numerical experiments	70
1.5.1	Source-case	70
1.5.2	Sink-case	71
1.6	Cas d'une cellule de Hele-Shaw en coin	75
1.6.1	Démonstration	78
1.6.2	Étude numérique	79
1.6.3	Conclusion	80
1.7	Équation de Demidov généralisée	81
1.7.1	Mise en équation	81
1.7.2	Interprétation géométrique	83
1.7.3	Schéma numérique du quasi-contour	84
1.8	Perspectives	86
1.8.1	Exposé du problème	86
1.8.2	Équations de liaison	89
1.8.3	Résultats envisagés	91

1.0 Présentation

L'utilisation d'une transformation de type Helmholtz-Kirchhoff dans le problème de Hele-Shaw a été introduite par Alexandre Demidov dès la fin des années 1990 ([12], [13]). En collaboration avec Jean-Pierre Lohéac, une méthode numérique a été développée au cours des années 2000 ([18], [19]). Ce travail s'inscrit dans la continuité de cette coopération et peut se résumer par les trois points suivants.

- Une amélioration du schéma numérique est proposée permettant de transformer ce schéma en un problème de Cauchy en dimension finie. Auparavant, l'estimation d'un paramètre $\frac{d\alpha_0}{dt}$ était nécessaire à chaque itération et menait à une forte instabilité rendant quasiment impossible l'obtention de résultats crédibles. Par ailleurs, à chaque itération, le calcul d'une intégrale de volume sur un domaine Π (une demi-bande infinie) était nécessaire, ralentissant de beaucoup l'efficacité de l'algorithme. En donnant une nouvelle position aux points du quasi-contour, le paramètre $\frac{d\alpha_0}{dt}$ a pu être éliminé et les calculs d'intégrales doubles tous transformés en des calculs d'intégrales simples sur le bord du domaine Π .
- La disparition d'intégrales doubles a permis de généraliser la méthode à toutes sortes de configurations géométriques, incluant les cas où le fluide occupe un domaine d'aire infinie (complémentaire d'un domaine simplement convexe) et les problèmes de type Saffman-Taylor.
- Pour finir, une simplification dans l'équation intégral-différentielle a été trouvée et le schéma correspondant explicité. Les résultats obtenus nous laissent penser qu'aucune autre simplification substantielle ne pourra être apportée et nous pouvons considérer ce travail comme achevé. Il reste cependant à démontrer la convergence du schéma numérique vers la solution exacte.

Ce chapitre se présente de la façon suivante : les parties 1.1 à 1.5 reproduisent l'article (I) (voir avant-propos). La partie 1.6 contient le compte rendu (II) publiée fin 2013 et partiellement rédigé en français. La partie 1.7 nommée *Équation de Demidov généralisée* expose une dernière équation intégral-différentielle ainsi que son schéma numérique généralisant les approches des parties précédentes. Enfin, la partie 1.8 *Perspectives* propose d'appliquer la transformation de Helmholtz-Kirchhoff au problème de Muskat. Pour le moment, nous ne savons pas comment en extraire une équation du mouvement.

La première partie de ce chapitre est précédée par le résumé de l'article lui correspondant.

Début de l'article (I)

Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flow: a critical manifold in the space of contours

Abstract.

We here deal with the Stokes–Leibenson problem for a Hele–Shaw flow. By using a geometrical transformation inspired by Helmholtz–Kirchhoff method, we introduce an integro-differential problem which leads to the construction of a discrete model.

We first give a short recall about the source-case: global in time existence and uniqueness result for a H^2 -smooth initial contour close to a circular one, evolutionary structure of the solution, existence of a critical manifold of co-dimension 1 in the space of contours. This manifold contains one attractive point in the source-case corresponding to a circular contour centered at the source-point.

Our main subject concerns the development of a discrete model, called quasi-contour model, in order to get some qualitative properties of the motion.

This model provides numerical experiments which confirm above theoretical properties, especially the existence of a critical sub-manifold of co-dimension 1 in space of quasi-contours. This sub-manifold contains one attractive point in the source-case corresponding to a regular quasi-contour, centered at the source-point.

The main contribution of our quasi-contour model concerns the sink-case: numerical experiments show that above sub-manifold is attractive. Furthermore, this discrete model allows to extend previous results obtained by using complex analysis. It also provides numerical experiments linked to fingering effects.

1.1 Introduction

When presenting the first edition of the book [49], A. N. Krylov wrote in the preface: *“Involuntarily, I remembered the spring session of the Marine Engineering Society in 1898. At this session, Prof. Hele–Shaw for the first time exhibited his cell, which was projected on a screen to show the streamlines of a jet flow past various kinds of obstacles.”* In the same year, G. G. Stokes [65] showed that the Hele–Shaw cell was (as H. Lamb wrote in [45]) *“a beautiful experimental verification of the forms of streamlines for certain cases of stationary vortex-free planar motion”*.

The core of the Hele–Shaw device is a blob of fluid, for example glycerin, moving between two glass plates. In recent decades, the attention of some scientists has been attracted to the problem of motion of such a blob when glycerin is injected or extracted through a small hole in one of the plates. The air that surrounds the blob is another fluid with negligible viscosity.

In the idealization proposed by L. S. Leibenson [47], this viscosity vanishes. This corresponds to the case of a constant pressure on the blob boundary. The classical statement of the Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flows can be written as follows.

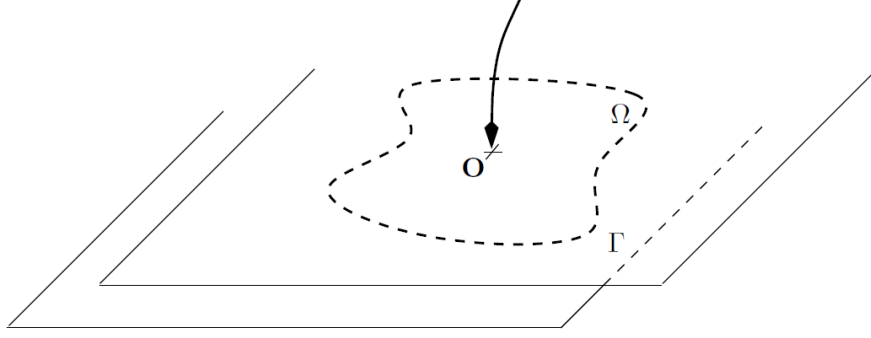


Figure 1.1: Fluid is injected (or extracted) through some source-point (or sink-point) $\mathbf{O}$.

Let Ω_0 be a bounded simply connected domain in $\mathbb{R}^2$ inclosing the origin (where the source-sink point is located) and such that its boundary Γ_0 is smooth enough. This domain will be deformed according to the following law.

At time t we obtain a domain Ω_t of boundary Γ_t such that the normal velocity of each point $\mathbf{s}$ of Γ_t is given by

$$\text{kinetic condition:} \quad \dot{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \partial_{\nu} u, \quad \text{on } \Gamma_t,$$

where $\boldsymbol{\nu}$ is the unit normal outward-pointing vector, $\partial_{\nu} u$ is the normal outside derivative of some real function u (see [47, 65]) defined in Ω_t by

$$\begin{aligned} \text{Stokes equation:} \quad & \Delta u = q\delta, \quad \text{in } \Omega_t, \\ \text{Leibenson dynamical condition:} \quad & u = 0, \quad \text{on } \Gamma_t. \end{aligned}$$

Here, $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ is the classical Laplace operator and δ is the “Dirac distribution” concentrated at the origin. Coefficient q belongs to $\mathbb{R}^*$ and characterizes the source-strength (resp. sink-strength) when it is positive (resp. negative).

Mathematical research about above Stokes–Leibenson problem was begun by the papers of L. A. Galin [27] and P. Ya. Polubarinova–Kochina [54, 55] published in 1945. In these articles, authors introduced some univalent mapping $f(\cdot, t)$ from the unit disk $\{\zeta \in \mathbb{C} / |\zeta| \leq 1\}$ onto the desired domain Ω_t and obtained the equation

$$2\pi \Re \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\zeta, t) \overline{\left(\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right)} \right] = q, \quad |\zeta| = 1.$$

Under the assumption that $f(\zeta, t) = a_1(t) + a_2(t)\zeta + \dots + a_n(t)\zeta^n$, Galin [27] obtained a system of ordinary differential equations for coefficients $a_j(t)$. For $n = 2$, this system takes the form [55]

$$a_1^2(t)a_2(t) = a_1^2(0)a_2(0), \quad a_1^2(t) + 2a_2^2(t) = a_1^2(0) + 2a_2^2(0) - \frac{qt}{\pi}.$$

If $|a_2/a_1| < 1/2$, then the image of the unit circle by mapping $f(\cdot, t)$ is a limaçon Γ_0 . In the sink-case ($q < 0$), it is transformed in finite time into a cardioid Γ_{t_*} whose cusp does

not reach the sink-point. Further (i.e. for $t > t_*$) the map $f(\cdot, t)$ stops to be univalent and the solution $t \mapsto \Gamma_t$ disappears. By using meromorphic map $\zeta \mapsto f(\zeta, t)$, P. P. Kufarev [43] found a similar effect for a circle where the sink-point is shifted relatively to the center. The first theorem on local solvability of above system *kinetic condition–Stokes equation–Leibenson dynamical condition* was obtained in [68].

In the last decades, such problems have often been called problems of Hele–Shaw flows or Hele–Shaw free boundary problems [52]. Interest in such problems increased in recent years (see e.g. [30, 31, 36, 42, 48, 52] and references therein). These problems are also good models for some more complicated two-phases problems (see e.g. [6, 7, 53]).

In this paper, another geometrical transformation onto a half-belt in $\mathbb{C}$ shall be introduced by using the Helmholtz–Kirchhoff method [13].

This method mainly leads to a very convenient parameterization of boundary Γ_t which naturally gives the orientation of normal unit vector at almost each point.

This allows to prove some theoretical results concerning the Hele–Shaw problem in the source-case (global in time existence and uniqueness result for a H^2 -smooth initial contour close to a circle without analyticity assumption, existence of a critical manifold $\mathfrak{M}$ of co-dimension 1). This result has been announced in [18], briefly outlined in the note [14] (see also [15, 16]).

Furthermore, this leads to a discrete model, called *quasi-contour model* [12, 22, 18, 19], which is very useful to get some qualitative properties. This allows us to present numerical results which show the existence of a critical sub-manifold contained in $\mathfrak{M}$ and of co-dimension 1 in a fixed space of quasi-contours. The behavior near this sub-manifold can be an explanation of some physical instabilities.

In order to simplify some technical aspects, we shall rewrite the previous system *kinetic condition–Stokes equation–Leibenson dynamical condition* in the following form:

- Ω_0 is a bounded simply connected domain in $\mathbb{R}^2$, symmetric with respect to x -axis, which contains the origin $\mathbf{O}$ (where the source-sink is located), such that its boundary Γ_0 is smooth enough;
- this domain will be deformed according to the following law: at time $t \geq 0$, we obtain a domain Ω_t of boundary Γ_t such that the normal velocity of almost every point $\mathbf{s}$ of Γ_t is given by following kinetic condition

$$\dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = \frac{q}{2} \partial_\nu u, \quad \text{on } \Gamma_t, \quad (1.1)$$

where function u satisfies the following Stokes–Leibenson system

$$\begin{cases} \Delta u = 2\delta, & \text{in } \Omega_t, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_t. \end{cases} \quad (1.2)$$

The proof of equivalence with above system *kinetic condition–Stokes equation–Leibenson dynamical condition* (see above) is immediate and left to the reader.

It can be observed that the behavior of points of Γ_t depends on the shape of Ω_t through u and depends linearly on the flow-power q .

Our paper is organized in four following sections:

- *geometrical transformation*: techniques inspired by works of Helmholtz [37] and Kirchhoff [41];
- *theoretical results*: concerning Stokes–Leibenson problem;
- *discrete problem*: an approximated Stokes–Leibenson problem and a numerical scheme, so-called “*quasi-contour model*”, are build there;
- *numerical experiments*: some results obtained by using above model are given.

1.2 Geometrical transformation

In this section, we consider a fixed bounded connected open set of $\mathbb{R}^2$, Ω , with a conveniently regular boundary Γ so that a normal unit vector pointing outwards Ω , ν , and its directly orthogonal tangent unit vector τ can be defined almost everywhere. Furthermore, we suppose that Ω contains the origin point $\mathbf{O}$ of Cartesian coordinates and is symmetric with respect to x -axis.

1.2.1 General case

As above, we denote by δ the associated Dirac distribution. Let us consider the following Laplace problem, similar to (1.2),

$$\begin{cases} \Delta u = 2\delta, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (1.3)$$

Let us now suppose that Ω is symmetric with respect to x -axis and define

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{(x, y) \in \Omega \mid y > 0\}, & \Gamma^+ &= \{(x, y) \in \Gamma \mid y > 0\}, \\ \gamma^- &= \{(x, 0) \in \Omega \mid x < 0\}, & \gamma^+ &= \{(x, 0) \in \Omega \mid x > 0\}. \end{aligned}$$

Because of symmetry with respect to x -axis, above problem (1.3) can be reduced to

$$\begin{cases} \Delta u = \delta, & \text{in } \Omega^+, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma^+, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{on } \gamma^- \cup \gamma^+. \end{cases} \quad (1.4)$$

Then we can consider that u is an harmonical function in Ω^+ and we can introduce its harmonically conjugate function v such that Riemann conditions are satisfied

$$\partial_x v = -\partial_y u \quad \text{and} \quad \partial_y v = \partial_x u, \quad \text{in } \Omega^+. \quad (1.5)$$

Remark 1.1. *Since v is harmonically conjugate to u , we get*

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla v &= 0 \quad \text{and} \quad |\nabla v| = |\nabla u|, & \text{in } \Omega^+, \\ \nabla u &= |\nabla u| \nu \quad \text{and} \quad \nabla v = |\nabla v| \tau, & \text{on } \Gamma^+. \end{aligned}$$

By using Green formula, one can easily get the following result.

Remark 1.2. γ^- and γ^+ are level curves for v and $v|_{\gamma^-} - v|_{\gamma^+} = \int_{\Gamma^+} \partial_\nu u \, d\sigma = 1$.

Finally, without any constraint, we can choose that v satisfies

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{in } \Omega^+, \\ \partial_\nu v = 0, & \text{on } \Gamma^+, \\ v = 0, & \text{on } \gamma^+, \\ v = 1, & \text{on } \gamma^-. \end{cases} \quad (1.6)$$

Let us now consider the analytic complex valued function $w = u + iv$ which is defined in Ω^+ . With the maximum principle for harmonic functions, w is univalent from Ω^+ onto

$$\Pi = \{w = u + iv \mid (u, v) \in (-\infty, 0) \times (0, 1)\}.$$

Since Π is simply connected, the Helmholtz–Kirchhoff function (see [13]) is well-defined in Π

$$A + iB = \ln \frac{dz}{dw}, \quad \text{where } z(w) = x(u, v) + iy(u, v), \quad (1.7)$$

and where A and B are real-valued functions.

By a continuity argument, we get $B(u, 0) = 0$ and $B(u, 1) = \pi$. Hence the Helmholtz–Kirchhoff function can be written as follows

$$A(u, v) + iB(u, v) = \alpha_0 + \pi(u + iv) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \exp(\pi k(u + iv)), \quad (1.8)$$

where α_0 and β_k ($k \in \mathbb{N}^*$) are real coefficients.

Definition 1.1. From above formula, we can define real functions $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, a , b , α , β such that

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \alpha_0 + \pi u + \tilde{A}(u, v), & B(u, v) &= \pi v + \tilde{B}(u, v), \\ \tilde{A}(u, v) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \exp(k\pi u) \cos(k\pi v), & \tilde{B}(u, v) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \exp(k\pi u) \sin(k\pi v), \\ a(\eta) &= A(0, \eta) = \alpha_0 + \alpha(\eta), & b(\eta) &= B(0, \eta) = \pi\eta + \beta(\eta), \\ \alpha(\eta) &= \tilde{A}(0, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos(k\pi\eta), & \beta(\eta) &= \tilde{B}(0, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\pi\eta). \end{aligned}$$

Functions $\tilde{A}$, B , $\tilde{B}$, b , α , β depend only on sequence $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$.

Coefficient α_0 is used in definition of functions A and a .

Remark 1.3. Every point $z = x + iy$ of Ω^+ is linked to a unique point $w = u + iv$ of Π . Every point of Γ^+ is linked to a unique point $\eta \in (0, 1)$ such that “ $w = 0 + i\eta$ ”.

Lemma 1.1. The solution u of (1.4) and the solution v of (1.6) satisfy

$$\nabla u = \exp(-A) \begin{pmatrix} \cos B \\ \sin B \end{pmatrix}, \quad \nabla v = \exp(-A) \begin{pmatrix} -\sin B \\ \cos B \end{pmatrix}, \quad \text{in } \bar{\Pi}.$$

Immediate consequences are

$$|\nabla u| = |\nabla v| = \exp(-A), \quad \text{in } \Pi \quad \text{and} \quad |\nabla u| = |\nabla v| = \exp(-a), \quad \text{on } (0, 1).$$

Proof. From (1.7), one can get $\frac{dw}{dz} = \exp(-A - \imath B)$.

On the other hand, Riemann conditions (1.5) give $\frac{dw}{dz} = \partial_x u - \imath \partial_y u = \partial_y v + \imath \partial_x v$.

Then the results can be deduced from (1.8). $\square$

Remark 1.4. A point $\mathbf{s} \in \Gamma^+$ is linked to parameter $\eta \in (0, 1)$, normal and tangential unit vectors are given by

$$\nu = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b \end{pmatrix}, \quad \text{on } (0, 1),$$

and $\mathbf{s}$ is given by the following formula

$$\mathbf{s}(\eta) = \mathbf{s}_0 + \int_0^\eta \exp a(v) \tau(v) dv = \mathbf{s}_0 + e^{\alpha_0} \int_0^\eta \exp \alpha(v) \tau(v) dv, \quad \text{with } \{\mathbf{s}_0\} = \overline{\Gamma^+} \cap \overline{\gamma^+}.$$

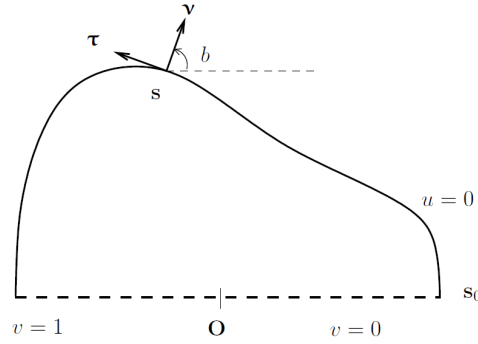


Figure 1.2: Upper part of fluid domain.

Remark 1.5. The measures of γ^+ (abscissa of $\mathbf{s}_0$), and Γ^+ (dimension 1) and Ω^+ (dimension 2) are given by formulæ

$$\begin{aligned} |\gamma^+| &= \int_{-\infty}^0 \exp A(u, 0) du = e^{\alpha_0} \int_{-\infty}^0 \exp(\pi u + \tilde{A}(u, 0)) du, \\ |\Gamma^+| &= \int_0^1 \exp a(v) dv = e^{\alpha_0} \int_0^1 \exp \alpha(v) dv, \\ |\Omega^+| &= \int_{\Pi} \exp 2A(u, v) du dv = e^{2\alpha_0} \int_{\Pi} \exp 2(\pi u + \tilde{A}(u, v)) du dv. \end{aligned}$$

Remark 1.6. If $|\Omega^+|$ is known and if ν is known almost everywhere on Γ^+ , then the shapes of Ω^+ and Γ^+ are completely determined.

Let b be the angle between ν and x -axis and suppose that this function is regular enough so that

$$b(0) = 0, \quad b(1) = \pi, \quad \beta \in L^2(0, 1).$$

Then the Fourier development of β can be computed. This gives sequence β and functions $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, B .

The last coefficient α_0 can be deduced from formula giving $|\Omega^+|$ in previous remark 1.5

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \ln |\Omega^+| - \frac{1}{2} \Upsilon(\beta) \quad \text{with} \quad \Upsilon(\beta) = \ln \left(\int_{\Pi} \exp 2(\pi u + \tilde{A}(u, v)) \, du \, dv \right). \quad (1.9)$$

This leads to functions a , A and Helmholtz–Kirchhoff function by formula (1.7).

Hence the geometrical transformation from Π onto Ω^+ is known.

1.2.2 Circular case

Remark 1.7. *If sequence β vanishes, Ω is a circular disk centered at $\mathbf{O}$ and the complex number $u + v \in \Pi$ is linked to polar coordinates in the following sense*

$$r = \sqrt{\frac{2|\Omega^+|}{\pi}} \exp(\pi u), \quad \theta = \pi v.$$

1.2.3 Polygonal case

A more interesting case concerns polygonal open sets.

We consider the class $\mathcal{P}_m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) of simply connected polygonal domains such that:

- each of these domains is symmetric with respect to the x -axis and contains the origin;
- its boundary is a polygonal line with $2m$ vertices;
- consequently, m edges belong to the half-plane $y > 0$.

Above polygonal domain can be characterized by two sequences:

- the first one, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$ such that $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{m-1} < \sigma_m = 1$. It gives the length of edges. This sequence is defined by means of the function v harmonically conjugate to the solution u of problem (1.3) (see also (1.6)): σ_k is the value of v at the k -th vertex of the upper part of Γ^m ;
- the second one, $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_m)$, gives the orientation of edges, i.e. N_k is the angle between the x -axis and the normal unit vector pointing outwards Ω^m along the k -th edge of the upper part of Γ^m . Because of the symmetry with respect to x -axis, we define $N_0 = -N_1$ and $N_{m+1} = 2\pi - N_m$.

Function b given in definition 1.1 and used in remark 1.4 is piecewise constant:

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \quad \sigma_{k-1} < \eta < \sigma_k \implies b(\eta) = N_k. \quad (1.10)$$

Remark 1.8. *The regular polygonal domain centered at the origin corresponds to the choice $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ and $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{N}}$ where*

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left(0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\right), \quad \hat{\mathbf{N}} = \left(\frac{\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \dots, \frac{(2m-1)\pi}{2m}\right).$$

Proposition 1.1. *With function b given in (1.10), functions A and a are*

$$\begin{aligned}
 A(u, v) &= \alpha_0 - \ln 2 - \frac{N_1}{\pi} \ln |\cosh \pi u - \cos \pi v| \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N_m}{\pi}\right) \ln |(\cosh \pi u - \cos \pi(v+1))(\cosh \pi u - \cos \pi(v-1))| \\
 &\quad - \sum_{k=1}^m \frac{N_{k+1} - N_k}{2\pi} \ln |(\cosh \pi u - \cos \pi(v + \sigma_k))(\cosh \pi u - \cos \pi(v - \sigma_k))|, \\
 a(\eta) &= \alpha_0 - \ln 2 - \frac{N_1}{\pi} \ln |1 - \cos \pi \eta| - \left(1 - \frac{N_m}{\pi}\right) \ln |\cos \pi \eta + 1| \\
 &\quad - \sum_{k=1}^m \frac{N_{k+1} - N_k}{\pi} \ln |\cos \pi \eta - \cos \pi \sigma_k|,
 \end{aligned}$$

where α_0 is given by (1.9).

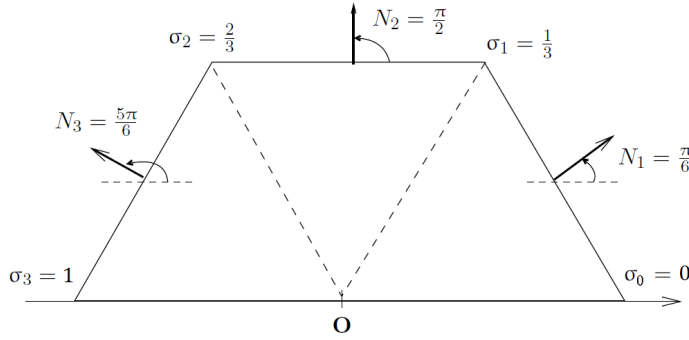


Figure 1.3: Example of upper part of a centered regular hexagonal domain.

Proof. The classical Fourier expansion of β is

$$\beta(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j} \left(\frac{N_1}{\pi} + \sum_{k=1}^m \frac{N_{k+1} - N_k}{\pi} \cos(j\pi\sigma_k) \right) \sin(j\pi\eta).$$

From definition 1.1, we deduce $A(u, v) = \alpha_0 + \pi u + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \exp(j\pi u) \cos(j\pi v)$.

Sequence $\beta = (\beta_j)_{j \geq 1}$ is given by above function β .

We then get A by using the following expansion, which holds for $u < 0$ and $v \in (-1, 1)$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j} \exp(j\pi u) \cos(j\pi v) = -\ln 2 - \pi u - \ln |\cosh \pi u - \cos \pi v|.$$

For $v = \eta$, when $u \rightarrow 0$, the computation leads to the expansion of a . □

Let us now introduce following notations,

$$\begin{aligned}
F_j(u, v) &= \left| \frac{(\cosh \pi u - \cos \pi(v + \sigma_{j-1}))(\cosh \pi u - \cos \pi(v - \sigma_{j-1}))}{(\cosh \pi u - \cos \pi(v + \sigma_j))(\cosh \pi u - \cos \pi(v - \sigma_j))} \right|^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq m, \\
F_{m+1}(u, v) &= |(\cosh \pi u - \cos \pi(v + 1))(\cosh \pi u - \cos \pi(v - 1))|^{1/2}, \\
G(\mathbf{N}, u, v) &= 2 \left(\prod_{k=1}^m F_k(u, v)^{N_k/\pi} \right) F_m(u, v). \\
f_j(\eta) &= F_j(0, \eta) = \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\eta + \sigma_{j-1}) \sin \frac{\pi}{2}(\eta - \sigma_{j-1})}{\sin \frac{\pi}{2}(\eta + \sigma_j) \sin \frac{\pi}{2}(\eta - \sigma_j)} \right|, \quad 1 \leq j \leq m, \\
f_{m+1}(\eta) &= F_{m+1}(0, \eta) = 2 \left| \sin \frac{\pi}{2}(\eta + 1) \sin \frac{\pi}{2}(\eta - 1) \right|, \\
g(\mathbf{N}, \eta) &= G(\mathbf{N}, 0, \eta) = 2 \left(\prod_{k=1}^m f_k(\eta)^{N_k/\pi} \right) f_m(\eta).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Proposition 1.2. Notations (1.11) allow to write: $|\Omega^+| = e^{2\alpha_0} \int_{\Pi} \frac{1}{G(\mathbf{N}, u, v)^2} du dv$,

$$\text{and: } |\gamma^+| = e^{\alpha_0} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{G(\mathbf{N}, u, 0)} du, \quad |\Gamma^+| = e^{\alpha_0} \int_0^1 \frac{1}{g(\mathbf{N}, \eta)} d\eta.$$

Proof. Proposition 1.1 and notations (1.11) lead to

$$A(u, v) = \alpha_0 - \ln(G(\mathbf{N}, u, v)), \quad a(\eta) = \alpha_0 - \ln(g(\mathbf{N}, \eta)). \tag{1.12}$$

We get the result by using remark 1.5. □

1.3 Theoretical results

We now consider the Stokes–Leibenson problem (1.1)–(1.2) introduced in section 1.1. We here use tools described in section 1.2 in order to be able to build a one parameter (t) chain of solutions (Ω_t, Γ_t) .

As well as in section 1.2, we suppose the existence of a fixed axis, containing the point $\mathbf{O}$, along which Ω_t and Γ_t are symmetric with respect to, and, at each time t , we shall use above geometrical transformation in order to express u and kinetic behavior of points of Γ_t^+ .

Hence functions given in definition 1.1 depend on time t through coefficients α_0 and $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$. In particular, we get

$$\begin{aligned}
a(t, \eta) &= \alpha_0(t) + \alpha(t, \eta), & b(t, \eta) &= \pi\eta + \beta(t, \eta), \\
\alpha(t, \eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \cos(k\pi\eta), & \beta(t, \eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \sin(k\pi\eta).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Then we can observe that a point $\mathbf{s}$ of Γ_t^+ depends on time t and its position along Γ_t^+ depends on parameter $\eta \in (0, 1)$.

Proposition 1.3. *At each point of Γ_t^+ , normal velocity is independent of geometric parameter.*

Proof. For some point $\mathbf{s} \in \Gamma_t^+$, we can write $\dot{\mathbf{s}} = \partial_t \mathbf{s} + \dot{\eta} \partial_\eta \mathbf{s}$, and observe that $\partial_\eta \mathbf{s}$ is a tangential vector with respect to Γ_t^+ (see remark 1.4). Taking the inner product by ν , we get normal velocity, $\dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = (\partial_t \mathbf{s}) \cdot \nu$, and this expression is independent of the choice of η . $\square$

1.3.1 Evolution equation

Let us apply previous results of section 1.2.

Proposition 1.4. *Assume that at almost every point, Γ_t^+ is regular enough. Then, for $t > 0$ and $\eta \in (0, 1)$, we have*

$$(e^a \partial_t b)(t, \eta) = \frac{q}{2} (e^{-a} \partial_\eta a)(t, \eta) + \partial_\eta b(t, \eta) \int_0^\eta (e^a \partial_t a - \frac{q}{2} e^{-a} \partial_\eta b)(t, v) dv. \quad (1.14)$$

Proof. We consider here a point $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t, \eta)$ which belongs to Γ_t^+ . From (1.1), remark 1.1, lemma 1.1 and proposition 1.3, we deduce

$$\dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = (\partial_t \mathbf{s}) \cdot \nu = \frac{q}{2} e^{-a}.$$

Derivating with respect to η , we get, for $t > 0$ and $\eta \in (0, 1)$,

$$(\partial_{\eta t}^2 \mathbf{s}) \cdot \nu + (\partial_\eta b)(\partial_t \mathbf{s}) \cdot \tau = -\frac{q}{2} e^{-a} \partial_\eta a. \quad (1.15)$$

Using remark 1.4, we get $\partial_\eta \mathbf{s} = e^a \tau$ and $\partial_{\eta t}^2 \mathbf{s} = e^a ((\partial_t a) \tau - (\partial_t b) \nu)$. Thus,

$$(\partial_{\eta t}^2 \mathbf{s}) \cdot \nu = -e^a \partial_t b \quad \text{and} \quad (\partial_{\eta t}^2 \mathbf{s}) \cdot \tau = e^a \partial_t a.$$

Similarly, we compute

$$\partial_\eta ((\partial_t \mathbf{s}) \cdot \tau) = (\partial_{\eta t}^2 \mathbf{s}) \cdot \tau - (\partial_\eta b)(\partial_t \mathbf{s}) \cdot \nu = e^a \partial_t a - \frac{q}{2} e^{-a} \partial_\eta b.$$

Using the symmetry of the contour Γ with respect to x -axis, we get $(\partial_t \mathbf{s}) \cdot \tau = 0$ for $\eta = 0$. Then, for $t > 0$ and $\eta \in (0, 1)$,

$$((\partial_t \mathbf{s}) \cdot \tau)(t, \eta) = \int_0^\eta (e^a \partial_t a - \frac{q}{2} e^{-a} \partial_\eta b)(t, v) dv. \quad (1.16)$$

Our result can now be easily deduced from (1.15)–(1.16). $\square$

Corollary 1.1. *Above integro-differential equation can be written as follows*

$$\begin{aligned} & \partial_t \beta(t, \eta) - ((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, \eta) \int_0^\eta (\partial_t \alpha e^\alpha)(t, v) dv \\ &= \frac{q}{2} e^{-2\alpha_0(t)} \left[(\partial_\eta \alpha e^{-2\alpha})(t, \eta) - ((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, \eta) \int_0^\eta ((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, v) dv \right] \\ &+ \dot{\alpha}_0(t) \left[((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, \eta) \int_0^\eta e^{\alpha(t, v)} dv \right]. \end{aligned}$$

Proof. In equation of proposition 1.4, we substitute formulæ (1.13). $\square$

We can observe that functions α and β are linked by a transformation of Hilbert-type (see again formulæ (1.13) deduced from definition 1.1). These functions depend on sequence $\beta(t) = (\beta_k(t))_{k \geq 1}$.

Hence we can define an operator depending only on β which is linear with respect to $\dot{\beta}$

$$\mathbb{K}_0(\beta) : \dot{\beta} \longmapsto \left[(t, \eta) \mapsto -((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, \eta) \int_0^\eta (\partial_t \alpha e^\alpha)(t, v) dv \right], \quad (1.17)$$

and two following functions

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_1(\beta)(t, \eta) &= (\partial_\eta \alpha e^{-2\alpha})(t, \eta) - ((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, \eta) \int_0^\eta ((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, v) dv, \\ \mathbb{F}_2(\beta)(t, \eta) &= ((\pi + \partial_\eta \beta) e^{-\alpha})(t, \eta) \int_0^\eta e^{\alpha(t, v)} dv. \end{aligned} \quad (1.18)$$

With these notations, integro-differential equation obtained in corollary 1.1 can be written as follows

$$[\mathbb{I} + \mathbb{K}_0(\beta)] \dot{\beta} = \frac{q}{2} e^{-2\alpha_0} \mathbb{F}_1(\beta) + \dot{\alpha}_0 \mathbb{F}_2(\beta), \quad (1.19)$$

where $\mathbb{I}$ is the identity operator.

Observe that the dependence of operator $\mathbb{K}_0$ and right-hand expressions $\mathbb{F}_1$ and $\mathbb{F}_2$ with respect to β is highly non-linear.

In the next proposition, we get the dependence of α_0 with respect to β .

Proposition 1.5. *For all $t \geq 0$, the shape of Γ_t^+ is characterized by Fourier coefficients of β .*

Proof. From above formulæ, the knowledge of Fourier coefficients of β gives functions $\tilde{A}$, B , $\tilde{B}$, α , β and b . Observe that increasing rate of the area of Ω_t is given by

$$\frac{d|\Omega_t|}{dt} = \int_{\Gamma_t} \dot{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma = \frac{q}{2} \int_{\Gamma_t} \partial_\nu u d\gamma = q.$$

In other words, $|\Omega_t^+| = \frac{q}{2} t + |\Omega_0^+|$.

We now use remarks 1.5 and 1.6 to obtain function α_0 and deduce A and a . $\square$

Function $\tilde{A}$ is given by β (see (1.13)). Hence, using the function Υ given in (1.9), we can compute coefficients depending on α_0 in equation (1.19)

$$e^{-2\alpha_0} = \frac{\exp(\Upsilon \circ \beta)}{|\Omega_t^+|} \quad \text{and} \quad \dot{\alpha}_0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ln |\Omega_t^+| - \Upsilon \circ \beta \right). \quad (1.20)$$

Let us now define a new operator depending on β linear with respect to $\dot{\beta}$

$$\mathbb{K}_1(\beta) : \dot{\beta} \mapsto \left[(t, \eta) \mapsto \frac{1}{2} \frac{d(\Upsilon \circ \beta)}{dt}(t) \mathbb{F}_2(\beta)(t, \eta) \right]. \quad (1.21)$$

From definition of function Υ given in (1.9), one can easily observe that the dependence with respect to $\dot{\beta}$ is linear. With this operator we can write a new integro-differential equation given by the combination of (1.19) and (1.20).

Theorem 1.1. *Let us consider problem (1.1)–(1.2). If at almost every point, Γ^+ is regular enough, then the main unknown β satisfies the following integro-differential equation*

$$[\mathbb{I} + \mathbb{K}_0(\beta) + \mathbb{K}_1(\beta)] \dot{\beta} = \frac{q}{|\Omega_t|} \left[\exp(\Upsilon \circ \beta) \mathbb{F}_1(\beta) + \frac{1}{2} \mathbb{F}_2(\beta) \right], \quad (1.22)$$

where $\mathbb{K}_0$, $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ and Υ are respectively defined above in (1.17), (1.21), (1.18), (1.20) and $|\Omega_t| = qt + |\Omega_0|$, $\forall t \geq 0$.

Proof. Let us consider (1.19).

From (1.20), we deduce the coefficient $\frac{q}{2} e^{-2\alpha_0(t)} = \frac{q}{qt + 2|\Omega_0^+|} \exp(\Upsilon(\beta(t)))$.

Again, from (1.20), we can get the time derivative of α_0

$$\dot{\alpha}_0(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{qt + 2|\Omega_0^+|} - \frac{d(\Upsilon \circ \beta)}{dt}(t) \right).$$

We finally rewrite (1.19) by using above formulæ and (1.21). □

Remark 1.9. *Above formulæ could be easily extended to the case of a time depending power of flow.*

The corresponding law for fluid area should be $|\Omega_t^+| = \frac{1}{2} \int_0^t q(s) ds + |\Omega_0^+|$.

1.3.2 Existence and uniqueness result

The case “ $q = 2$ and β small (in the sense of Fourier series)” has been studied by above method in [15, 16]: it corresponds to a fluid domain closed to a circle centered at the source-point.

Starting from (1.22), an asymptotic computation in a convenient neighborhood of $\beta = 0$

leads to the following differential system satisfied by an approximation $\bar{\beta}$ of β such that $\bar{\beta}(t, \eta) = \sum_{k \geq 1} \bar{\beta}_k(t) \sin(k\pi\eta)$,

$$\begin{cases} 2(t + |\Omega_0^+|) \bar{\beta}_1 \dot{\bar{\beta}}_1 = -\bar{\beta}_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \bar{\beta}_j^2, \\ 2(t + |\Omega_0^+|) \dot{\bar{\beta}}_k = -(k+2) \bar{\beta}_k, \quad \forall k \geq 2. \end{cases} \quad (1.23)$$

Let us add initial conditions

$$\beta(0, \eta) = \sum_{k \geq 1} \beta_k^0 \sin(k\pi\eta), \quad \eta \in (0, 1). \quad (1.24)$$

If initial data satisfy $\beta_1^0 \neq 0$, the solution of above Cauchy problem is

$$\begin{cases} \bar{\beta}_1(t) = \beta_1^0 \left(\frac{|\Omega_0^+|}{t + |\Omega_0^+|} \right)^{1/2} \left(1 + \sum_t j = 2^\infty \frac{2}{j+1} \left| \frac{\beta_j^0}{\beta_1^0} \right|^2 \left(1 - \left(\frac{|\Omega_0^+|}{t + |\Omega_0^+|} \right)^{j+1} \right) \right)^{1/2}, \\ \bar{\beta}_k(t) = \beta_k^0 \left(\frac{|\Omega_0^+|}{t + |\Omega_0^+|} \right)^{1+k/2}, \quad \forall k \geq 2. \end{cases}$$

In [15, 16], it is proved that solution β of (1.22)–(1.24) behaves similarly to above function $\bar{\beta}$.

Theorem 1.2. *There exists $C_* > 1$ such that for every (χ, ε, T) which satisfies $\chi \geq 1$, $C_* \chi^3 \varepsilon \leq 1$, $C_* \chi^2 T \leq 1$, if initial data β^0 belong to $H^1(0, 1)$ and verify*

$$|\beta_1^0| = \frac{\varepsilon}{8\chi}, \quad \sum_{j \geq 2} k^2 |\beta_j^0|^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{8} \right)^2,$$

problem (1.22)–(1.24) admits one and only one solution β which belongs to some ε -neighborhood of zero in $C(0, T; H^1(0, 1))$. Furthermore, β can be approximated by $\bar{\beta}$, solution of (1.23)–(1.24) in the following sense

$$|\dot{\beta}_1(0) - \dot{\bar{\beta}}_1(0)| \leq C_* \varepsilon, \quad \left(\sum_{j \geq 2} |\dot{\beta}_j(0) - \dot{\bar{\beta}}_j(0)|^2 \right)^{1/2} \leq \chi \varepsilon.$$

This result particularly shows that solution β of (1.22)–(1.24) follows solution $\bar{\beta}$ of (1.23)–(1.24) under assumptions of theorem 1.2. We can observe that the origin (with respect to β) is an attractive point when time increases. It means that the limit-domain is circular and centered on source-point.

Furthermore, the first equation in system (1.23) shows that the manifold “ $\beta_1 = 0$ ” is critical in the sense that it does not give any solution. It can be observed that if, in initial data, β_1 is small, then the speed $\dot{\beta}_1$, as well as $\dot{\bar{\beta}}_1$, is high.

From these two remarks, we can deduce that locally the manifold “ $\beta_1 = 0$ ” contains the origin which is attractive (when time increases) and that every other point of this

manifold is repulsive (in the source case).

This phenomena seems to be associated to the fact that operator $\mathbb{I} + \mathbb{K}_0(\beta) + \mathbb{K}_1(\beta)$ is singular. We shall try to develop a convenient numerical scheme in order to study this manifold

$$\mathfrak{M} = \{\beta \mid \mathbb{I} + \mathbb{K}_0(\beta) + \mathbb{K}_1(\beta) \text{ is singular} \}. \quad (1.25)$$

Let us now complete this section with a global-in-time existence and uniqueness result.

Theorem 1.3. *There exists $\rho \in (0, 1/8)$ such that for $\mu \in (0, 1]$, if the initial data β^0 belong to $H^1(0, 1)$ and satisfy*

$$0 < |\beta_1^0| \leq \mu\rho, \quad \sum_{k=2}^{\infty} k^2 |\beta_k^0|^2 \leq (\mu\rho)^{1/2} |\beta_1^0|^{3/2},$$

then problem (1.22)–(1.24) admits one and only one solution $\beta \in \mathcal{C}(0, +\infty; H^1(0, 1))$. If $\bar{\beta}$ is the reference function satisfying (1.23)–(1.24), then we get

$$|\dot{\beta}_1(0) - \dot{\bar{\beta}}_1(0)| \leq \mu, \quad \left(\sum_{k \geq 2} |\dot{\beta}_k(0) - \dot{\bar{\beta}}_k(0)|^2 \right)^{1/2} \leq \mu.$$

Furthermore, there exists some constant C slightly exceeding 1 such that for every $t \geq 0$ the following estimates hold

$$|\dot{\beta}_1(t) - \dot{\bar{\beta}}_1(t)| \leq C\mu, \quad \left(\sum_{k \geq 2} |\dot{\beta}_k(t) - \dot{\bar{\beta}}_k(t)|^2 \right)^{1/2} \leq C\mu.$$

The reader can find a proof in [15, 16].

1.4 Discrete problem

A Galerkin method could be used to simulate numerically our problem (1.1)–(1.2) but this method would be limited to a small neighborhood of initial data because of high non-linearity of introduced integro-differential equation (1.22).

We here try to develop a more robust numerical method inspired by Euler's idea of *broken lines*. To this end, we introduce a discrete model [12, 13] of problem (1.1)–(1.2). The reader may also find some relationship with Wulff crystal models [1].

Our main idea consists of two points:

- we consider the class $\mathcal{P}_m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) of simply connected polygonal domains (see subsection 1.3);
- we compute the behavior of such domains, so-called “quasi-contours”, by applying a discrete law inspired by the law of motion of smooth curves in the classical Stokes–Leibenson problem.

1.4.1 Discrete law and notations

We fix a value of $m \in \mathbb{N}^*$ and consider polygonal domains belonging to $\mathcal{P}_m$. For such domains, we denote by $\tilde{\Gamma}_t^m$ the set of $2m$ vertices of boundary Γ_t^m . At each $\mathbf{p} \in \tilde{\Gamma}_t^m$, we define a quasi-normal unit vector pointing outwards the domain, $\tilde{\nu}_{\mathbf{p}}$, and a quasi-tangential unit vector $\tilde{\tau}_{\mathbf{p}}$ (directly orthogonal with respect to $\tilde{\nu}_{\mathbf{p}}$).

Furthermore, we build some non negative weight function $d_{\mathbf{p}}$ which is positive at $\mathbf{p}$ and supported in two edges around $\mathbf{p}$, so that the set of these weight functions is a unit-partition of Γ_t^m in the following sense: $\sum_{\mathbf{p} \in \tilde{\Gamma}_t^m} d_{\mathbf{p}} = 1$, on Γ_t^m .

We now consider a discrete problem close to Stokes–Leibenson problem (1.1)–(1.2). For $t \geq 0$, we want to construct Ω_t^m in $\mathcal{P}_m$, and its boundary Γ_t^m , such that for $t = 0$, Ω_0^m is given in $\mathcal{P}_m$ and all vertices of Γ_t^m verify the punctual kinetic condition

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\nu}_{\mathbf{p}} = \frac{q}{2} \int_{\Gamma_t^m} d_{\mathbf{p}} |\nabla u| d\gamma, \quad \forall \mathbf{p} \in \tilde{\Gamma}_t^m, \quad (1.26)$$

where u satisfies (1.2) in Ω_t^m :

$$\begin{cases} \Delta u = 2\delta, & \text{in } \Omega_t^m, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_t^m. \end{cases} \quad (1.27)$$

In order to build a numerical model, we use tools introduced in subsection 1.3: we consider $m \in \mathbb{N}^*$ and the first sequence σ as fixed parameters and the second sequence $\mathbf{N}$ will be the main variable, depending on time.

In particular, functions A and a depend on time through α_0 and $\mathbf{N}$ and, in this frame, using functions G , g given by (1.11) and α_0 given by (1.9), formulæ (1.12) can be rewritten as follows,

$$A(t, u, v) = \alpha_0(t) - \ln(G(\mathbf{N}(t), u, v)), \quad a(t, \eta) = \alpha_0(t) - \ln(g(\mathbf{N}(t), \eta)).$$

For given parameters m and σ , we introduce some further notations:

- $m + 1$ vertices of the upper part of quasi-contour Γ^m : $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ corresponding to sequence σ ;
- normal and tangential unit vectors along every edge $\mathbf{p}_k \mathbf{p}_{k+1}$: $\nu_{k+1/2}$ and $\tau_{k+1/2}$ (see (1.10));
- at each point $\mathbf{p}_k$, quasi-normal and quasi-tangential unit vectors: $\tilde{\nu}_k$ and $\tilde{\tau}_k$, so that the speed of $\mathbf{p}_k$ is: $\dot{\mathbf{p}}_k = R_k \tilde{\nu}_k + T_k \tilde{\tau}_k$, where R_k and T_k are quasi-normal and quasi-tangential speeds and

$$\tilde{\nu}_k = \begin{pmatrix} \cos b_k \\ \sin b_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}_k = \begin{pmatrix} -\sin b_k \\ \cos b_k \end{pmatrix}, \quad \text{where } b_k = \frac{N_k + N_{k+1}}{2}.$$

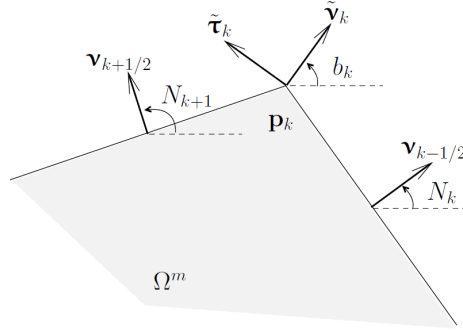


Figure 1.4: Quasi-normal and quasi-tangent vectors at vertex $\mathbf{p}_k$.

Because of the symmetry, we get $T_0 = T_m = 0$. $T_1, \dots, T_{m-1}$ are a priori unknown as well as $R_0, R_1, \dots, R_m$ which depend on t for a given parameter σ .

The weight functions $d_{\mathbf{p}}$ in kinetic condition (1.26) must be chosen so that the following properties hold

- (P1) punctual kinetic condition (1.26) tends to kinetic condition (1.1), as $m \rightarrow \infty$;
- (P2) for a regular quasi-contour centered at the origin (see remark 1.8), we get:
 $R_0 = R_1 = \dots = R_m$.

To this end, we make the following elementary choice:

- we introduce the sequence
 $\lambda_k = \frac{\sigma_{k-1} + \sigma_k}{2}$, if $1 \leq k \leq m$, $\lambda_0 = -\lambda_1$, $\lambda_{m+1} = 2 - \lambda_m$;
- we define the k -th weight function by using the characteristic function χ_k of $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$,

$$d_{\mathbf{p}_k} = \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \chi_k.$$

Lemma 1.2. *Under above choice, kinetic condition (1.26) at each vertex $\mathbf{p}_k$ ($0 \leq k \leq m$) can be written*

$$R_k = \frac{q}{2} \exp(-\alpha_0) \rho_k(\mathbf{N}), \quad \text{with } \rho_k(\mathbf{N}) = \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} g(\mathbf{N}, \eta) d\eta.$$

Proof. We use lemma 1.1, formula (1.12) and above notations. □

1.4.2 Discrete model

We are now able to give a discrete version of equation (1.19) given in section 1.3. The following result is very useful to build a convenient numerical scheme.

Theorem 1.4. *Let $m \in \mathbb{N}^*$ and σ be fixed parameters as above. If (Ω_t^m, Γ_t^m) is solution of discrete Stokes–Leibenson problem (1.26)–(1.27), then associated functions $t \mapsto \alpha_0(t)$ and $t \mapsto \mathbf{N}(t)$ satisfy the equation*

$$Q(\mathbf{N})\dot{\mathbf{N}} = \frac{q}{2} e^{-2\alpha_0} P^0(\mathbf{N}) + \dot{\alpha}_0 P^1(\mathbf{N}),$$

where $Q = (q_{kj})_{1 \leq k, j \leq m}$, $P^0 = (p_k^0)_{1 \leq k \leq m}$ and $P^1 = (p_k^1)_{1 \leq k \leq m}$ can be expressed via the functions f_j , g given by (1.11) and ρ_j given in lemma 1.2, in the following way (δ_{kj} is the classical Kronecker symbol),

$$\begin{aligned} q_{kj}(\mathbf{N}) &= \frac{1}{\pi} \left[\tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N}, \eta)} d\eta + \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N}, \eta)} d\eta \right] \\ &\quad + \delta_{kj} \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)}, \\ p_k^0(\mathbf{N}) &= \rho_{k-1}(\mathbf{N}) \cos \frac{N_k - N_{k-1}}{2} - \rho_k(\mathbf{N}) \cos \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \\ &\quad + (\delta_{k1} - 1) \tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left[\rho_{j-1}(\mathbf{N}) \sin \frac{N_j - N_{j-1}}{2} + \rho_j(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right] \\ &\quad - \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \sum_{j=1}^k \left[\rho_{j-1}(\mathbf{N}) \sin \frac{N_j - N_{j-1}}{2} + \rho_j(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right], \\ p_k^1(\mathbf{N}) &= \tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)} + \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)}. \end{aligned}$$

Proof. With above notations we can write for $t > 0$,

$$\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k = \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} e^a \tau_{k+1/2} d\eta = \left(\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} e^a d\eta \right) \tau_{k+1/2}.$$

Deriving with respect to t , we get

$$\dot{\mathbf{p}}_{k+1} - \dot{\mathbf{p}}_k = \left(\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} e^a \partial_t a d\eta \right) \tau_{k+1/2} - \dot{N}_{k+1} \left(\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} e^a d\eta \right) \nu_{k+1/2}. \quad (1.28)$$

But we have

$$\dot{\mathbf{p}}_{k+1} - \dot{\mathbf{p}}_k = R_{k+1} \tilde{\nu}_{k+1} + T_{k+1} \tilde{\tau}_{k+1} - R_k \tilde{\nu}_k - T_k \tilde{\tau}_k. \quad (1.29)$$

One can easily observe

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_k \cdot \nu_{k+1/2} &= \tilde{\tau}_k \cdot \tau_{k+1/2} = \cos \frac{N_{k+1} - N_k}{2}, \\ \tilde{\nu}_{k+1} \cdot \nu_{k+1/2} &= \tilde{\tau}_{k+1} \cdot \tau_{k+1/2} = \cos \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2}, \\ \tilde{\nu}_k \cdot \tau_{k+1/2} &= -\tilde{\tau}_k \cdot \nu_{k+1/2} = -\sin \frac{N_{k+1} - N_k}{2}, \\ \tilde{\nu}_{k+1} \cdot \tau_{k+1/2} &= -\tilde{\tau}_{k+1} \cdot \nu_{k+1/2} = \sin \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2}. \end{aligned}$$

Now, with (1.28) and (1.29), we compute $(\dot{\mathbf{p}}_{k+1} - \dot{\mathbf{p}}_k) \cdot \tau_{k+1/2}$, $(\dot{\mathbf{p}}_{k+1} - \dot{\mathbf{p}}_k) \cdot \nu_{k+1/2}$.

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} e^a \partial_t a d\eta &= R_{k+1} \sin \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2} + R_k \sin \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \\ &\quad + T_{k+1} \cos \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2} - T_k \cos \frac{N_{k+1} - N_k}{2}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\left(\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} e^a d\eta \right) \dot{N}_{k+1} = -R_{k+1} \cos \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2} + R_k \cos \frac{N_{k+1} - N_k}{2} + T_{k+1} \sin \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2} + T_k \sin \frac{N_{k+1} - N_k}{2}. \quad (1.31)$$

Summing above equations (1.30) from $k = 0$ to $k = j - 1$ ($j \in \mathbb{N}^*$, $j < m + 1$) and taking in account that $T_0 = 0$, we get

$$T_j \cos \frac{N_{j+1} - N_j}{2} = \int_0^{\sigma_j} e^a \partial_t a d\eta - \sum_{k=0}^{j-1} \left[R_{k+1} \sin \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2} + R_k \sin \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \right].$$

This gives T_j . We substitute this expression in (1.31). From formulæ (1.11) and (1.12), we deduce

$$a(t, \eta) = \alpha_0(t) - \ln g(\mathbf{N}(t), \eta), \quad \partial_t a(t, \eta) = \dot{\alpha}_0(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \dot{N}_j(t) \ln f_j(\eta).$$

Using lemma 1.2, we finally get the required differential equation. $\square$

Remark 1.10. Since the domain Ω_t is supposed to be connected, the vector-function $\mathbf{N}$ satisfies

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < N_1 < \frac{\pi}{2}, \\ -\pi < N_k - N_{k-1} < \pi, & \forall k \in \{2, \dots, m\}, \\ \frac{\pi}{2} < N_m < \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \quad (1.32)$$

These conditions give the existence of every integral term in formulæ introduced in proposition 1.2 and theorem 1.4.

This leads to define a set of constraints about sequences $\mathbf{N}$.

Definition 1.2. For given $m \in \mathbb{N}^*$, the set of constraints, $\mathfrak{U}_m$, is the set of sequences $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^m$ such that (1.32) is satisfied and generated vertices $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{m-1}$ have a non negative second coordinate.

Theorem 1.5. The equation of the previous theorem can be simplified and transformed into a Cauchy problem. Using the same notations as in theorem (1.4), we obtain the equation

$$\tilde{Q}(\mathbf{N}) \dot{\mathbf{N}} = \frac{q}{2} e^{-2\alpha_0} \left(P^0(\mathbf{N}) + \frac{1}{2|\omega|} P^1(\mathbf{N}) \right),$$

where $\tilde{Q}(\mathbf{N}) = Q(\mathbf{N}) + \overline{Q}(\mathbf{N})$.

$\overline{Q}(\mathbf{N})$ verifies the equality $\overline{Q}(\mathbf{N}) \dot{\mathbf{N}} = \frac{1}{2|\omega|} \frac{d|\omega|}{dt} P^1(\mathbf{N})$ with

$$|\omega| = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < i \leq m-1} \sin(N_{i+1} - N_{k+1}) \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{g(\eta)} d\eta \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(\eta)} d\eta,$$

and

$$\begin{aligned} \frac{d|\omega|}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < i \leq m-1} (\dot{N}_{i+1} - \dot{N}_{k+1}) \cos(N_{i+1} - N_{k+1}) \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{g(\eta)} d\eta \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(\eta)} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < i \leq m-1} \sum_{n=1}^m \frac{\dot{N}_n}{\pi} \left[\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{\ln f_n(\eta)}{g(\eta)} d\eta \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(\eta)} dv \right. \\ &\quad \left. + \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{g(v)} d\eta \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{\ln f_n(\eta)}{g(\eta)} d\eta \right] \sin(N_{i+1} - N_{k+1}). \end{aligned}$$

Proof. The area of the fluid delimited by the quasi-contour is a polygon, whose area can be expressed by the formula $|\Omega| = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$ where (x_i, y_i) are the coordinates of the i -th vertex. We already know that

$$x_i = \left(|\gamma_0| - \sum_{k=1}^i \sin N_k \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{1}{g(v)} dv \right) e^{\alpha_0}, \quad y_i = \left(\sum_{k=1}^i \cos N_k \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{1}{g(v)} dv \right) e^{\alpha_0};$$

by introducing the notations $x_{i+1} = (\tilde{x}_i - s_i) e^{\alpha_0}$ and $y_{i+1} = (\tilde{y}_i + c_i) e^{\alpha_0}$ we immediatly obtain

$$|\Omega| = e^{2\alpha_0} |\omega| = \frac{1}{2} e^{2\alpha_0} \sum_{i=0}^{m-1} (\tilde{x}_i c_i + \tilde{y}_i s_i). \quad (1.33)$$

Remembering that the m -th vertex belongs to the x -axis we deduce the relation

$$\sum_{i=0}^{m-1} \cos N_{i+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(v)} dv = 0,$$

and a direct calculus of the area with above expressions leads to the result for $|\omega|$. Differentiating the first equality in (1.33) and using the expression $\frac{d|\Omega|}{dt} = \frac{q}{2}$, we succeed in removing $\dot{\alpha}_0$ in the equation. $\square$

1.4.3 Numerical scheme

We implemented an explicit Euler scheme with respect to time. The originality in our method consists in the choice of time scale, which is not a chosen parameter but a consequence of constraint on angles.

Supposing that the sequence $(\mathbf{N}^0, \mathbf{N}^1, \dots, \mathbf{N}^\ell)$ and $(\alpha_0^0, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^\ell)$ are known for successive times $t_0 = 0, t_1, \dots, t_\ell$, then we compute $\mathbf{N}^{\ell+1}$ and $\alpha_0^{\ell+1}$ at time $t_{\ell+1} > t_\ell$ by the following formulæ

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{N}^{\ell+1} - \mathbf{N}^\ell}{t_{\ell+1} - t_\ell} = \frac{q}{2} \exp(-2\alpha_0^\ell) \tilde{Q}(\mathbf{N}^\ell)^{-1} \left(P^0(\mathbf{N}) + \frac{1}{2|\omega|} P^1(\mathbf{N}) \right), \\ \alpha_0^{\ell+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{|\Omega|(\mathbf{N}^{\ell+1})}{|\omega|(\mathbf{N}^{\ell+1})}. \end{cases} \quad (1.34)$$

To avoid fast movement of the boundary, we chose to fix the quantity $\max_{i=1\dots m} |\mathbf{N}_i^{\ell+1} - \mathbf{N}_i^\ell|/dt$ to a constante C . The value $t_{\ell+1} - t_\ell$ is therefore equal to $C / \max_{i=1\dots m} |\mathbf{N}_i^{\ell+1} - \mathbf{N}_i^\ell|$. The variation of the area (and time) is then a consequence of this previous choice

$$\frac{d|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{q C}{e^{2\alpha_0} |\omega| \max_{i=1\dots m} \dot{N}_i}.$$

The above expression giving $\alpha_0^{\ell+1}$ is explicitly found using the formulæ in theorem (1.5). The main difficulty of this scheme is that, for some ℓ , $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}^\ell))$ can be close to 0. In this case, an iterative method is used in order to remove the calculus of $\tilde{Q}^{-1}$. Before giving numerical results, we define the critical submanifold of co-dimension 1 which corresponds to a discrete version of (1.25). Of course, it depends on parameters σ through matrix $\tilde{Q}(\mathbf{N})$ (see beginning of subsection 4.1).

Definition 1.3. *For given $m \in \mathbb{N}^*$ and fixed parameters σ , the critical submanifold is*

$$\mathfrak{M}_m = \{ \mathbf{N} \in \mathfrak{U}_m \mid \det(\tilde{Q}(\mathbf{N})) = 0 \}.$$

1.5 Numerical experiments

In our program implemented in C++, we chose the same initial conditions for all examples. We fixed $|\Omega_0| = 100$, $q = \pm 1$ and $C = 2$. In all cases, we look at the evolution of $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$ and visually compare numerical results with exact solutions.

Initial conditions for $\mathbf{N}$ are a discretization of the graphical representation of an analytic function $z = f(\zeta)$ with $|\zeta| = 1$. The sequence σ is found using a software specialised in finite element calculations (FreeFem++).

1.5.1 Source-case

Our aim is to verify that in source-case, quasi-contours usually tend to regular centered ones for initial contours near to regular polynom.

Here initial contour is the discretization in 20 edges of curve $z = \zeta - 0.2\zeta^2 + 0.2\zeta^3$ with $|\zeta| = 1$. In order to understand how the quasi-contour evolves, we define:

$$\rho = \frac{\max\{\mathbf{Op}_k \mid 0 \leq k \leq m\}}{\min\{\mathbf{Op}_k \mid 0 \leq k \leq m\}}.$$

In the figure 1.5, we give evolution in time of the initial configuration with nine other shapes, the last one being the 38-th iteration. The source-point, represented by the cross, with strength ($q = 1$) guaranted that time and area evolve at the same speed.

The determinant of matrix $\tilde{Q}$ (left side) and the value of ρ (right side) are given on figure 1.6; they are functions of time and $\ln(|\Omega|)$ respectively.

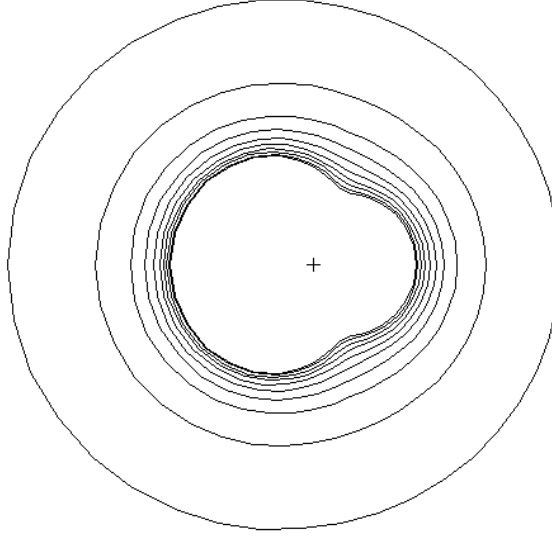
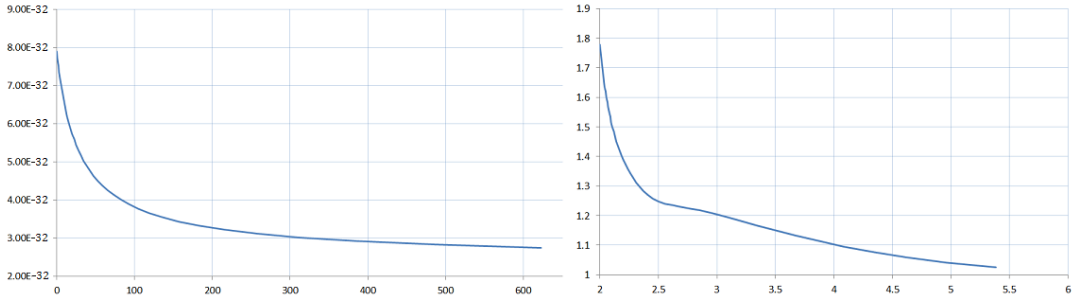


Figure 1.5: Evolution in time of a quasi-contour in source-case.

Figure 1.6: Evolution in time of determinant of matrix $\tilde{Q}$ in function of time (left) and of ρ in function of $\ln(|\Omega|)$ (right).

We observed that the chosen quasi-contour tends to a regular one, which belongs to the critical sub-manifold $\mathfrak{M}_{15}$. The attractivity is very slow when time increases. This confirms that the circular contour (for initial contour *near* to a regular polynom) is the limit of contour when $t \rightarrow +\infty$, in the source-case. We have proceeded to many other numerical experiments (different geometrical cases and higher values of m) and obtained similar behaviors which confirm theoretical results given in section 1.3.

1.5.2 Sink-case

To underline the efficiency of our method, we chose to numerically reproduce the evolution of well-known exact solutions.

Classical Galin–Kochina example: cardioid case

In the figure 1.7 is represented the evolution in time of a quasi-contour (left side), whose initial shape is the discretization in 20 edges of the graphical representation $z = \zeta - 0.05\zeta^2, |\zeta| = 1$. We observed that the obtained quasi-contour came closer to a cardioid (the exact solution) when $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$ approached zero. For comparison, we give the exact solution (left side in figure 1.7).

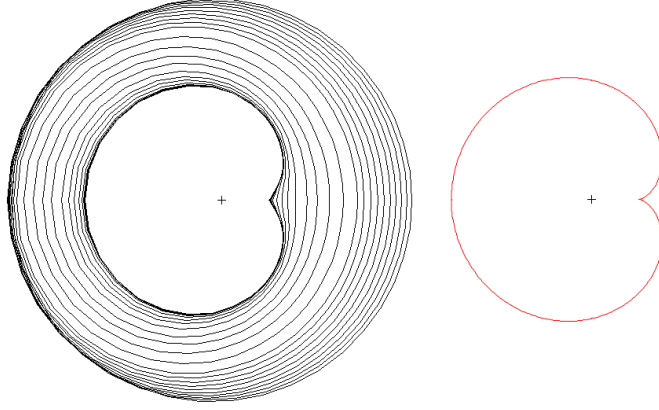


Figure 1.7: Evolution in time in sink-case of a quasi-contour leading to a cardioid.

We notice that the calculation can go further until the domain remains connected. As observed on the graphic 1.8, the determinant moves away from zero after the occurring of a cusp. It also gives us a way to numerically understand when the quasi-contour is the best discretization of the final exact result (contour with a cusp).

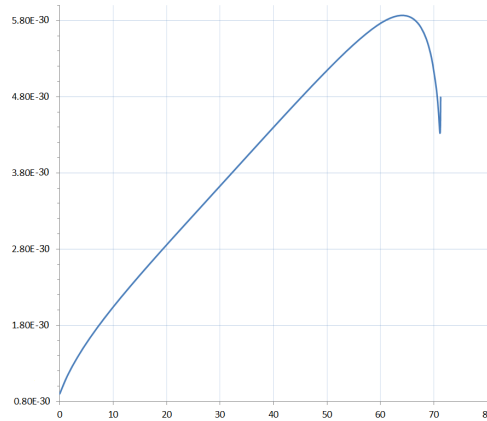


Figure 1.8: Evolution in time of determinant of matrix $\tilde{Q}$.

Higher symetry case

We also give examples of more complicated behavior which correspond to higher symetry configurations. Discretization is made on a domain delimited by a corner (no more on the half-plane). The numerical scheme remains explicit with small modifications in formulæ. Explanations can be found in [20] (*cf. part 1.6 of this chapter*).

We consider three initial 10-edges quasi-contours, whose edges are deduced from following graphical representations: $z = \zeta - 0.02\zeta^3, |\zeta| = 1$ (a); $z = \zeta - 0.02\zeta^4, |\zeta| = 1$ (b) and $z = \zeta - 0.01\zeta^7, |\zeta| = 1$ (c).

We present results in the figure 1.9, giving for each time evolution the exact solution.

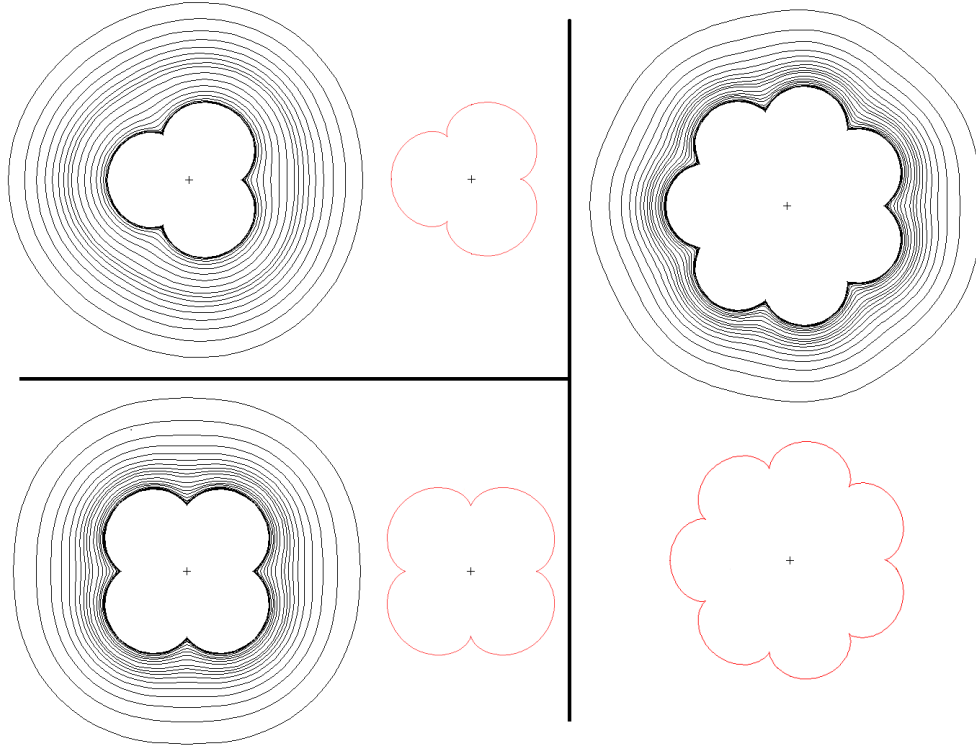


Figure 1.9: Evolution in time of quasi-contours in sink-case and exact solutions for (a) (left side up), (b) (left side bottom) and (c) (right side).

Again, we concluded that the moment when cusps occur corresponds to a minimum of function $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$. For example, we represent in figure 1.10 for quasi-contour (a) the time evolution of $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$.

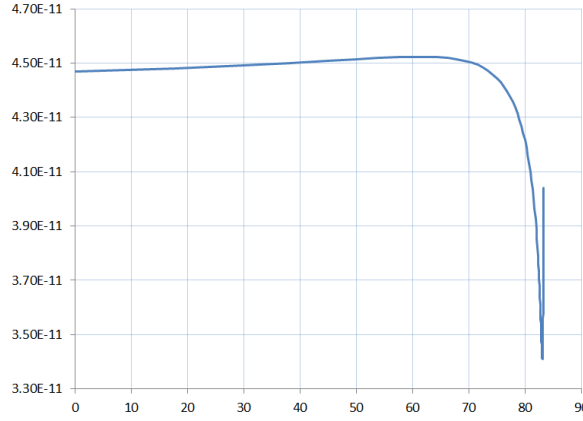


Figure 1.10: Evolution in time of $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$ for quasi-contour (a).

We have tried to reproduce the evolution of a more complicated solution. In [33] can be found an initial contour leading, when first cusp occurs, to the superposition of two identical circles, whose sink-point is located at the unique intersection.

In the figure 1.11, we represented time evolution of the 20-edges initial quasi-contour until cusp occurs (left side) and the fonction $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$ depending on time (right side).

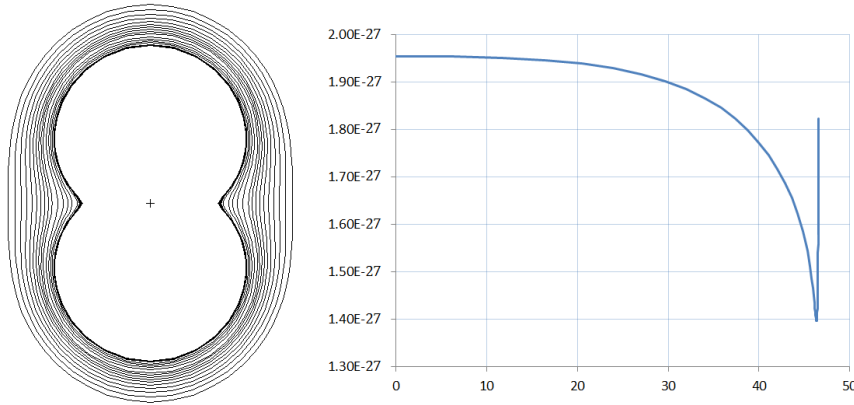


Figure 1.11: Evolution in time in sink-case of a quasi-contour (left side) and its determinant $\det(\tilde{Q}(\mathbf{N}))$ (right side)

The conclusion concerning determinant remains the same, however the final quasi-contour does not draw two circles. Lost in accuracy certainly comes to the low number of edges chosen for discretization. An other explanation could be the choice of parameter C , whose value should be smaller to improve results.

We manage to built a scheme, which demonstrate a high accuracy in numercal results. A further work on convergence of the numerical scheme have to be done since a Cauchy

problem has be found.

Fin de l'article (I)

Début de l'article (II)

Cauchy problem for Stokes–Leibenson approximation in a
Hele–Shaw corner cell

1.6 Cas d'une cellule de Hele-Shaw en coin

La transformation de Helmholtz–Kirchhoff offre une approche nouvelle pour la résolution du problème de Hele–Shaw. En particulier, le modèle du quasi-contour qui en découle permet une résolution numérique du problème. Faisant suite à un précédent article [21], nous proposons ici une amélioration significative du schéma numérique du modèle du quasi-contour qui mène à la résolution d'un problème de Cauchy. Le calcul fastidieux d'une intégrale de surface (absente du modèle physique) a été remplacé par celui d'intégrales simples le long du contour du fluide. Nous testons ensuite le schéma obtenu sur le problème de Stokes–Leibenson dans une géométrie en coin, mettant en évidence le gain de précision des résultats. Par ailleurs, l'existence de la variété critique dans l'espace des quasi-contours est confirmée (voir [21]).

Cauchy problem for Stokes–Leibenson approximation in a Hele–Shaw corner cell.

The Helmholtz–Kirchhoff transformation gives us a new approach to solve the Hele–Shaw problem. Particulary, we have derived a so-named quasi-contour method from which we have built a numerical scheme. Following a previous article [21], we propose a way to significantly improve the numerical scheme, which leads to the resolution of a Cauchy problem. The tedious calculation of a surface integral (absent in the physical problem) was replaced by simple integrals along the contour of the fluid. We then tested the new numerical scheme on the Stokes–Leibenson problem in a corner geometry, highlighting the gain in accuracy of the results. Besides, the existence of a critical manifold in the space of contours is confirmed (see [21]).

Abridged English version

We first consider a generic Hele–Shaw problem in a corner of a plane with an angle α between both edges γ_0 and γ_1 . The fluid fills a simply connected domain Ω_0 including the origin in which lies a source (or source) point of liquid (see figure 1.12).

The domain Ω_0 corresponds to liquid spot at some initial moment, it will be deformed according to the following law: at time $t \geq 0$, we obtain a domain Ω_t with a moving

boundary Γ_t , which moves with velocity $\dot{\mathbf{s}}$ at point $\mathbf{s}$, such that

$$\text{kinetic condition:} \quad \dot{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \partial_{\nu} u, \quad \text{on } \Gamma_t,$$

where $\boldsymbol{\nu}$ is the outward-pointing unit normal vector, $\partial_{\nu} u$ is the normal outward derivative of the pressure (the opposite of u) defined in Ω_t by

$$\begin{aligned} \text{Stokes equation}^1: & \quad \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega_t, \\ \text{Leibenson dynamical condition}^2: & \quad u = 0, \quad \text{on } \Gamma_t, \\ \text{Boundary conditions:} & \quad \partial_{\nu} u = 0, \quad \text{on } \gamma_0 \cup \gamma_1. \end{aligned}$$

Fluid is injected or extracted uniformly at a rate q at point $\mathbf{O}$, which corresponds to the following condition for points z in the corner

$$u \sim \frac{q}{\alpha} \ln(|z|), \quad \text{as } |z| \rightarrow 0.$$

Notice that all the notations are taken from a previous paper [21] (*see also the previous parts of this chapter*).

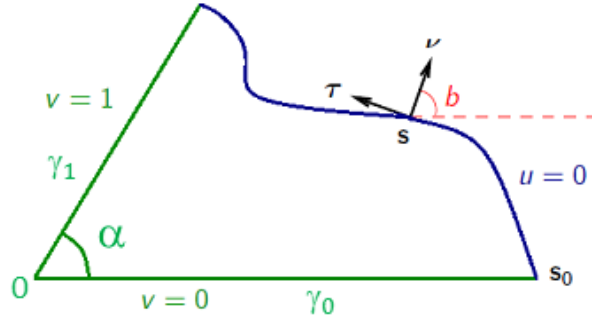


Figure 1.12: Fluid domain in a corner.

We introduce the function v , harmonically conjugate to u and can define the Helmholtz–Kirchhoff transformation as follows

$$A + \imath B = \ln \frac{dz}{dw},$$

where $z(w) = z(u + \imath v) = z(u, v) = x(u, v) + \imath y(u, v)$.

At each point $(x, y) \in \Omega_t$, level curves of u and v are orthogonal and the function

$$z = x + \imath y \mapsto w = u + \imath v$$

is analytic and univalent onto $\Pi = \{w = u + \imath v / (u, v) \in (-\infty, 0) \times (0, 1)\}$.

1. G. G. Stokes (1898) Mathematical Proof of the Identity of the Stream-Lines obtained by means of Viscous Film with those of a Perfect Fluid moving in Two Dimensions. *Brit. Ass. Rep.* 143 (Papers, V, 278).

2. L. S. Leibenson (1934) Mechanics of oil extraction, Part II, *Nefteizdat*, Moscow.

Real functions A and B are harmonically conjugate with respect to w and we can write, for each time t ,

$$(A + \imath B)(t, u, v) = \alpha_0(t) + \alpha(u + \imath v) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \exp(k\pi(u + \imath v)).$$

On the free boundary, we use the notation $(A + \imath B)(t, 0, v) = a(t, v) + \imath b(t, v)$.

Polygonal approximation: quasi-contour model

A way to solve the problem is to discretize the contour into a polygon in order to obtain a finite set of unknown angles [19]. Polygonal domain can be characterized by two sequences. The unknown *quasi-contour* of order m depends on a finite number of parameters:

- a sequence $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_m) \in (0, 1)^{m+1}$ such that

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{m-1} < \sigma_m = 1,$$

which defines values of function v at the vertices (given at the beginning and constant during the evolution);

- a sequence $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_m)$ which gives the orientation of the outward-pointing unit normal vectors with respect to each edge.

It corresponds to the unknown piecewise constant function b .

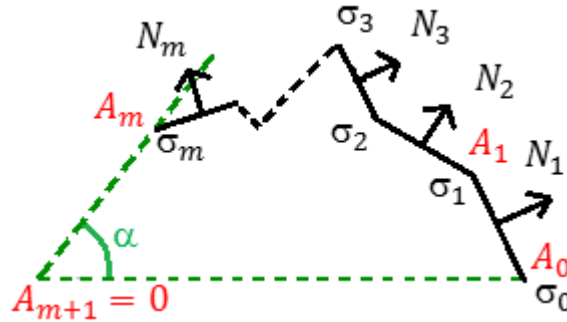


Figure 1.13: Example of discretization.

We can express the function a only with the angles $\mathbf{N}$ and the sequence σ in the following form

$$a(\mathbf{N}, v) = \alpha_0(t) - \ln(g(\mathbf{N}, v)), \quad g(\mathbf{N}, v) = 2^{\alpha/\pi} \left(\prod_{k=1}^m f_k(v)^{N_k/\pi} \right) f_{m+1}(v)^{\alpha/\pi},$$

$$f_j(v) = \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2}(v + \sigma_{j-1}) \sin \frac{\pi}{2}(v - \sigma_{j-1})}{\sin \frac{\pi}{2}(v + \sigma_j) \sin \frac{\pi}{2}(v - \sigma_j)} \right| \quad \text{for } 1 \leq j \leq m,$$

$$f_{m+1}(v) = 2 \left| \sin \frac{\pi}{2}(v+1) \sin \frac{\pi}{2}(v-1) \right|.$$

Numerical Scheme: $\tilde{Q}(\mathbf{N}) \dot{\mathbf{N}} = q \exp(-2\alpha_0) \left(P_0(\mathbf{N}) + \frac{1}{|2\omega|} P_1(\mathbf{N}) \right)$, where

- $\mathbf{N}$ satisfies following constraints, since the fluid domain is connected:
 $-\frac{\pi}{2} < N_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < N_k - N_{k-1} < \pi$, $\forall k \in \{2, \dots, m\}$, $\alpha - \frac{\pi}{2} < N_m < \alpha + \frac{\pi}{2}$;
- $\tilde{Q}(\mathbf{N}) = \overline{Q}(\mathbf{N}) + Q(\mathbf{N})$ is a $(m \times m)$ -matrix, $P_0(\mathbf{N})$ and $P_1(\mathbf{N})$ belong to $\mathbb{R}^m$;
- $\overline{Q}$ can be expressed using the equality $\overline{Q}(\mathbf{N}) \dot{\mathbf{N}} = \frac{1}{2|\omega|} \frac{d|\omega|}{dt} P^1$ and relation $|\Omega| = e^{2\alpha_0} |\omega|$ with
$$|\omega| = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < i \leq m-1} \sin(N_{i+1} - N_{k+1}) \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{g(v)} dv \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(v)} dv, & \text{if } \alpha = \pi, \\ \sum_{0 \leq k \leq i \leq m-1} C_{ik} \cos N_{k+1} \left(\sin N_{i+1} + \frac{\cos N_{i+1}}{\tan \alpha} \right) \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{g(v)} dv \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(v)} dv, & \text{if } \alpha \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[, \end{cases} \quad (1.35)$$

where $C_{ik} = 1$ if $i \neq k$, $C_{ik} = 1/2$ if $i = k$.

Formulas for matrix Q and vectors P^0 and P^1 are exactly the same as in the article [21]. We now demonstrate this result and apply the previous scheme to the Stokes–Leibenson problem.

1.6.1 Démonstration

Démontrons la simplification du schéma numérique dans le cas $\alpha = \pi$.

L'aire d'un polygone de sommet A_i et de coordonnées (x_i, y_i) pour $i = 0, \dots, m+2$ (cf. figure 1.13) avec $A_0 = A_{m+2}$ est exprimée par la formule $|\Omega| = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$.

Par ailleurs, pour $i = 0, \dots, m$, on a les relations

$$x_i = \left(|\gamma_0| - \sum_{k=1}^i \sin N_k \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{1}{g(v)} dv \right) e^{\alpha_0}, \quad y_i = \left(\sum_{k=1}^i \cos N_k \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{1}{g(v)} dv \right) e^{\alpha_0}.$$

En introduisant les notations $x_{i+1} = (\tilde{x}_i - s_i) e^{\alpha_0}$ et $y_{i+1} = (\tilde{y}_i + c_i) e^{\alpha_0}$, on obtient une expression allégée pour l'aire

$$|\Omega| = \frac{1}{2} e^{2\alpha_0} \sum_{i=0}^{m-1} (\tilde{x}_i c_i + \tilde{y}_i s_i).$$

En remarquant que

$$\sum_{i=0}^{m-1} \cos N_{i+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(v)} dv = 0,$$

– relation qui exprime l'appartenance du point A_m à l'axe des abscisses – le résultat découle d'un calcul direct de l'aire avec les formules données pour x_i et y_i . La deuxième égalité dans (1.35) (cas $\alpha \neq \pi$) s'obtient par le même type de raisonnement.

1.6.2 Étude numérique

Dans les exemples qui suivent, on s'intéresse seulement au cas puits en imposant $q = -1$. La résolution du système d'équations différentielles nous laisse libre dans le choix du pas de temps. Il est choisi de telle sorte que les variations d'angles maximales pour N ne dépassent pas une constante C donnée (ici 2 degrés). La variation d'aire à chaque itération est alors décrite par la formule suivante (les $\dot{N}_i$ étant solution du système d'équations du schéma numérique) :

$$\frac{d|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{q C}{e^{2\alpha_0} |\omega| \max_{i=1\dots m} \dot{N}_i}.$$

Cas des symétries

Le problème générique considéré dans la première partie nous permet de reconstruire un écoulement de Hele-Shaw dans le plan tout entier par symétrie et rotation du problème lorsque $\alpha = \pi/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Une symétrie d'axe γ_1 est tout d'abord effectuée, suivie de $n - 1$ duplications pour reconstituer l'écoulement dans le plan.

Pour $n = 1$, on tente de reproduire l'évolution d'un contour initial vers une cardioïde [27]. Le contour initial possède 20 côtés dans sa partie supérieure et est la discrétisation de la représentation graphique de l'équation $z = \zeta - 0,05 \zeta^2$, $|\zeta| = 1$, dans le demi-plan $\Im(z) > 0$. L'essai numérique comporte 65 itérations ; 19 d'entre elles sont représentées sur la figure 1.14.

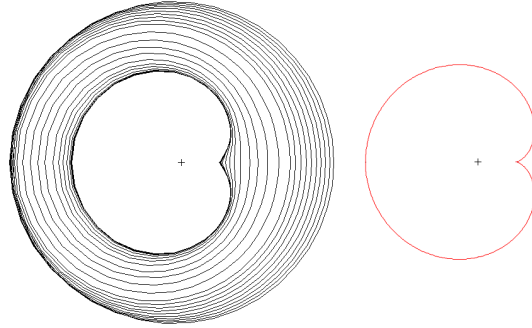


FIGURE 1.14: Évolution du contour initial dans le cas puits jusqu'à l'apparition du point de rebroussement (à gauche) comparé à la cardioïde (à droite).

Le déterminant de Q et celui de $\tilde{Q}$ ont le même comportement, ils présentent une brusque chute à l'approche de la singularité.

L'exemple suivant pour $n = 3$ est construit en discrétisant en 10 côtés la figure obtenue par l'équation $z = \zeta - 0,02 \zeta^4$, $|\zeta| = 1$, vue sous l'angle α (cf. figure 1.15). Les déterminants de Q et $\tilde{Q}$ présentent de même un minimum local au moment de l'apparition du point de rebroussement.

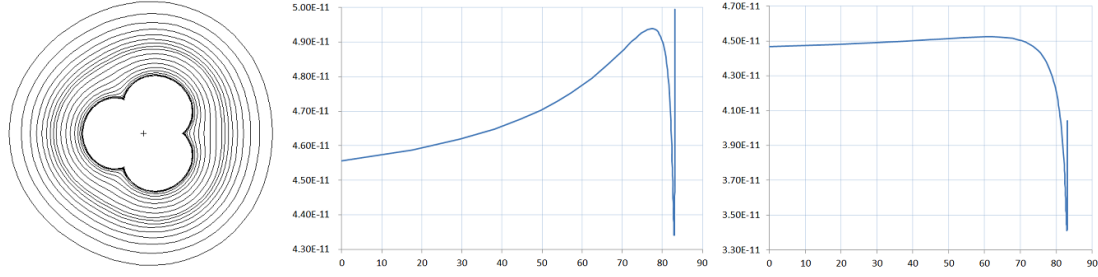


FIGURE 1.15: Évolution du contour initial jusqu'à l'apparition du point de rebroussement – 19 itérations représentées sur un total de 58 calculées (à gauche) ; évolution de $\det(Q)$ en fonction du temps (au centre) ; évolution de $\det(\tilde{Q})$ en fonction du temps (à droite).

Cas du coin

N'ayant pas à disposition de solutions exactes non homothétiques pour le cas du coin, nous choisissons un contour initial quasi régulier volontairement légèrement déformé. L'angle au coin est imposé à 110 degrés. Nous représentons 15 des 53 itérations effectuées sur la figure 1.16 ainsi que l'évolution des déterminants.

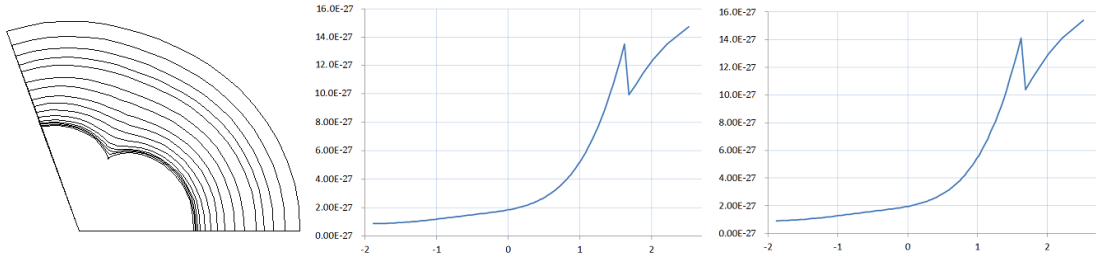


FIGURE 1.16: Évolution du contour initial jusqu'à l'apparition du point de rebroussement (à gauche) ; évolution de $\det(Q)$ (au centre) puis de $\det(\tilde{Q})$ (à droite) en fonction de $-\ln(|\Omega(t)| - |\Omega|(i = 53))$.

1.6.3 Conclusion

La transformation en un problème de Cauchy du schéma numérique de l'article [21] permet non seulement la disparition du calcul d'une intégrale double (ce qui est important), mais aussi la suppression du terme $\dot{\alpha}$, source d'une très grande instabilité dans le schéma numérique. Les résultats présentés démontrent la grande efficacité de l'approche utilisant la transformation de Helmholtz-Kirchhoff.

La diminution du déterminant de Q est confirmée à l'approche des singularités. Le déterminant de la matrice $\tilde{Q}$ a le même comportement. La remontée brusque du déterminant en fin de calcul signifie que le contour a « dépassé » la singularité, c'est-à-dire s'est éloigné

du quasi-contour discrétisant le contour appartenant à la variété critique. En révélant la présence d'une variété dans le domaine discret en accord avec celle du modèle théorique, nous avons mis en évidence la pertinence du modèle numérique du quasi-contour.

Fin de l'article (II)

1.7 Équation de Demidov généralisée

Nous présentons dans cette partie une généralisation de l'équation de Demidov à tous types d'écoulements de Hele-Shaw. Ce résultat, plus simple que l'équation initiale (1.19), permet d'en donner une interprétation géométrique. Nous terminons en exposant le schéma numérique du quasi-contour qui lui est associé. Les notations utilisées dans la partie précédente sont conservées.

1.7.1 Mise en équation

Proposition 1.6. *Considérons un fluide contraint dans un angle $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$ (voir figure 1.12) tel que sa frontière libre Γ_t soit suffisamment régulière. Alors, pour $t > 0$ et $v \in (0, 1)$, nous avons*

$$[\mathbb{I} + \mathbb{K}(b)] \dot{b} = q e^{-2\alpha_0} [\mathbb{F}_1(b) + G(b) \mathbb{F}_2(b)] , \quad (1.36)$$

où

$b : v \mapsto b(v)$ est la fonction angle, $\mathbb{I}$ l'identité, $\mathbb{K}(b)$ l'opérateur

$$\mathbb{K}(b) : \dot{b} \mapsto \left[(t, v) \mapsto -\partial_v b e^{-\alpha}(t, v) \int_0^v (\partial_t \alpha e^\alpha)(t, v) dv + \mathbb{F}_2(b) \left(\frac{\int_0^1 (\partial_t \alpha e^\alpha)(t, v) dv}{\int_0^1 e^\alpha(t, v) dv} \right) \right] ,$$

avec $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ les deux fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_1(b)(t, v) &= (\partial_v \alpha e^{-2\alpha})(t, v) - \partial_v b e^{-\alpha}(t, v) \int_0^v \partial_v b e^{-\alpha}(t, v) dv , \\ \mathbb{F}_2(b)(t, v) &= \partial_v b e^{-\alpha}(t, v) \int_0^v e^{\alpha(t, v)} dv , \end{aligned}$$

et

$$G(b) = \frac{\int_0^1 \partial_v b e^{-\alpha}(t, v) dv}{\int_0^1 e^{\alpha(t, v)} dv} .$$

Démonstration. Notre objectif est de supprimer le terme $\dot{\alpha}_0$ de l'équation (1.19). En remplaçant la fonction a par $\alpha_0 + \alpha$ dans cette équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_t b - (\partial_v b) e^{-\alpha} \int_0^v e^{\alpha} \partial_t \alpha \, dv &= q e^{-2\alpha_0} [e^{-2\alpha} \partial_v \alpha - (\partial_v b) e^{-\alpha} \int_0^v (\partial_v b) e^{-\alpha} \, dv] \\ &+ \dot{\alpha}_0 (\partial_v b) e^{-\alpha} \int_0^v e^{\alpha} \, dv. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Nous remarquons que nous n'avons pas encore fait usage de la deuxième condition aux limites (au point s_1 , intersection entre Γ_t et γ_1). Ce point est contraint de rester sur γ_1 , cela signifie que nous avons

$$\int_0^1 (e^a \partial_t a - q e^{-a} \partial_v b)(t, v) \, dv = 0,$$

(cette relation sera justifiée lorsque nous introduirons la grandeur $\tilde{L}$ (ou bien voir relation 1.16)) et par conséquent

$$\dot{\alpha}_0 = q \frac{e^{-2\alpha_0} \int_0^1 e^{-\alpha} \partial_v b \, dv}{\int_0^1 e^{\alpha} \, dv} - \frac{\int_0^1 e^{\alpha} \partial_t \alpha \, dv}{\int_0^1 e^{\alpha} \, dv}. \quad (1.38)$$

En injectant ce résultat à la place de $\dot{\alpha}_0$ dans l'équation (1.37) nous obtenons le résultat voulu. $\square$

Contrairement aux équations d'évolution précédentes, cette équation montre que l'évolution géométrique du contour est indépendante du choix d'un volume initial (correspondant à un choix de α_0) et de la puissance de la source q . Ces deux paramètres peuvent être intégrés dans la description du temps. Cela nous rappelle la relation reliant la variation de l'aire à la puissance de la source $\frac{d|\Omega_t|}{dt} = q$. Avec une source ponctuelle de fluide (dans $\overline{\mathbb{C}}$), les déplacements du contour ne dépendent que de la géométrie initiale de la frontière et de la position de la source.

Cas particulier $\alpha = \pm 2\pi$

Considérons le cas dans lequel le fluide n'est pas contraint de se déplacer entre deux droites mais peut évoluer dans le plan tout entier ($s(v=0) = s(v=1)$) sans nécessaire présence d'une quelconque symétrie. Le point s_0 n'est plus obligé de se déplacer sur l'axe (Ox) et nous devons alors introduire un nouveau degré de liberté. Dans les équations, le paramètre $T = (\partial_t s) \cdot \tau(t, 0)$ fait son apparition. Nous obtenons

$$((\partial_t s) \cdot \tau)(t, v) = \int_0^v (e^a \partial_t a - q e^{-a} \partial_v b)(t, v) \, dv + T.$$

Le lemme 1.1 impose que la vitesse de déplacement $\dot{s}$ de la frontière soit proportionnelle au terme $q e^{-\alpha_0}$ sachant que $\dot{s} = q \nabla u$ à la frontière du fluide. Ainsi, on remplacera la

variable T par $q e^{-\alpha_0} \bar{T}$. En introduisant une nouvelle inconnue nous devons rechercher également une nouvelle équation. Nous remarquons que la fonction a doit être continue, ce qui impose $a(t, 0) = a(t, 1)$. Par intégration de l'équation (1.14) nous obtenons

$$\int_0^1 (e^a \partial_t b)(t, v) dv = \int_0^1 \left(\partial_v b(t, v) \int_0^v (e^a \partial_t a - q e^{-a} \partial_v b)(t, \tilde{v}) d\tilde{v} \right) dv + q e^{-\alpha_0} \bar{T}. \quad (1.39)$$

L'équation intégrro-différentielle (1.36) est légèrement modifiée afin d'intégrer le paramètre $\bar{T}$, de sorte qu'avec la condition supplémentaire (1.39) les équations du mouvement peuvent être résolues. Nous obtenons l'équation

$$[\mathbb{I} + \mathbb{K}(b)] \dot{b} = q e^{-2\alpha_0} [\mathbb{F}_1(b) + G(b) \mathbb{F}_2(b) + \mathbb{F}_3(b)],$$

en conservant les notations précédentes et avec

$$\mathbb{F}_3(b) = \partial_v b e^{-\alpha}(t, v) \bar{T}.$$

Remarque 1.1. L'équation (1.36) est d'un caractère plus général que l'équation (1.19) puisque le paramètre α peut prendre sa valeur dans $[-2\pi, 2\pi]$. Pour des α négatifs, le fluide occupe le complémentaire d'un domaine connexe simple, tandis que le cas $\alpha = 0$ correspond à un écoulement entre deux droites parallèles (problème de Saffman-Taylor). Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué, la factorisation par $q e^{-2\alpha_0}$ est cohérente avec le modèle physique.

1.7.2 Interprétation géométrique

Le résultat précédent (1.36) peut être présenté différemment afin de préciser le rôle de chaque opérateur.

Proposition 1.7. Si la frontière Γ_t du fluide est suffisamment régulière, alors pour $t > 0$ et $v \in (0, 1)$, nous avons

$$\partial_t b = q e^{-2a} (\partial_v a) + (\partial_v b) e^{-a} \int_0^1 e^a dv \left(\frac{\partial L(t, v)}{\partial t} - \frac{dL(t, v)}{dt} \right),$$

avec

$$L(t, v) = \frac{\int_0^v e^a dv}{\int_0^1 e^a dv}, \quad 0 \leq L \leq 1.$$

Remarque 1.2. Le terme $\frac{\partial L(t, v)}{\partial t} - \frac{dL(t, v)}{dt}$ est un terme d'advection représentant l'écart entre les descriptions eulérienne et lagrangienne, c'est-à-dire entre la longueur normalisée du contour en un point fixé (valeur de v fixée) et un point matériel physique (valeur de v variable). Ce terme peut se simplifier pour réduire l'équation de la proposition précédente en la relation $\frac{db}{dt} = q e^{-2a} (\partial_v a)$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat se fait par des calculs élémentaires. Nous présentons comment sont explicitées les grandeurs $\frac{d\tilde{L}}{dt}$ et $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}$, avec $\tilde{L}(t, s) = \int_0^s e^a dv$, ce qui permet alors de terminer facilement la preuve.

$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}(t, v)$ correspond à la variation de la longueur de la frontière en un point v fixé.

La dérivée droite $\frac{d\tilde{L}}{dt}$, *a contrario*, suit le point du contour initialement en position v . Pour calculer ce deuxième terme nous observons sur la figure 1.17 que la variation de longueur $d\tilde{L}$ pendant un temps dt est donnée par la somme (pour v) des éléments de longueur $d\sigma = q e^{-a}(\partial_v b)dv dt$ et nous obtenons la formule

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = q \int_0^v e^{-a}(\partial_v b)dv .$$

□

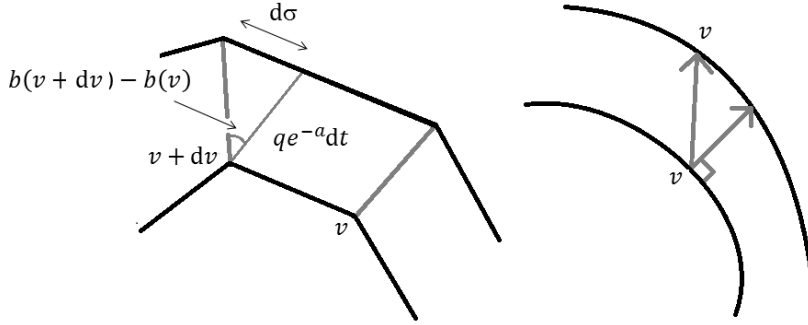


FIGURE 1.17: À gauche : élément de variation de longueur ; à droite : différence schématisée entre les déplacements lagrangien et eulérien.

1.7.3 Schéma numérique du quasi-contour

Theorem 1.6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et σ des paramètres fixés par la discrétisation du problème pour $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$. Alors la fonction angle discrétisée $t \mapsto \mathbf{N}(t)$ satisfait l'équation

$$O(\mathbf{N})\dot{\mathbf{N}} = q e^{-2\alpha_0} (P^0(\mathbf{N}) + G(\mathbf{N}) P^1(\mathbf{N})) ,$$

avec $O = (o_{kj})_{1 \leq k, j \leq m}$, $P^0 = (p_k^0)_{1 \leq k \leq m}$, $P^1 = (p_k^1)_{1 \leq k \leq m}$ et $G(\mathbf{N})$ un réel. Ces quantités peuvent être exprimées grâce aux fonctions f_j , g données par (1.11) et ρ_j du lemme 1.2

de la façon suivante,

$$\begin{aligned}
 o_{kj}(\mathbf{N}) &= \frac{1}{\pi} \left[\tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N}, \eta)} d\eta + \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N}, \eta)} d\eta \right] \\
 &\quad + \delta_{kj} \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\int_0^1 \frac{\ln f_j}{g} dv}{\int_0^1 \frac{1}{g} dv} \right) p_k^1(\mathbf{N}), \\
 p_k^0(\mathbf{N}) &= \rho_{k-1}(\mathbf{N}) \cos \frac{N_k - N_{k-1}}{2} - \rho_k(\mathbf{N}) \cos \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \\
 &\quad + (\delta_{k1} - 1) \tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left[\rho_{j-1}(\mathbf{N}) \sin \frac{N_j - N_{j-1}}{2} + \rho_j(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right] \\
 &\quad - \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \sum_{j=1}^k \left[\rho_{j-1}(\mathbf{N}) \sin \frac{N_j - N_{j-1}}{2} + \rho_j(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right], \\
 p_k^1(\mathbf{N}) &= G(\mathbf{N}) \tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)} + \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)}, \\
 G(\mathbf{N}) &= \sum_{j=1}^{m-1} \left[\rho_{j+1}(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+2} - N_{j+1}}{2} + \rho_j(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right] \left(\int_0^1 \frac{1}{g} dv \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Démonstration. La simplification repose sur une version discrète de la condition d'adhérence aux bords. La condition $T_0 = T_m = 0$ (cf partie 1.4) permet d'extraire la relation suivante en sommant (1.28) sur tous les segments du quasi-contour

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_0 \int_0^1 \frac{1}{g} dv &= T_j \cos \frac{N_{j+1} - N_j}{2} = \sum_{k=0}^{m-1} \left[R_{k+1} \sin \frac{N_{k+2} - N_{k+1}}{2} + R_k \sin \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \dot{N}_j \int_0^1 \frac{\ln f_j}{g} dv.
 \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient en substituant cette expression dans le théorème (1.4). $\square$

Nous donnons un exemple obtenu avec ce schéma numérique en choisissant pour contour initial la courbe décrite par l'ensemble $\Gamma_0 = \{z = \frac{1}{\zeta} - 0,5\zeta^2, |\zeta| = 1\}$. Le paramètre α vaut ici $-\frac{\pi}{3}$ et le quasi-contour n'est constitué que de 10 segments. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 1.18 et comparé à la solution exacte extraite de l'article de Howison [34].

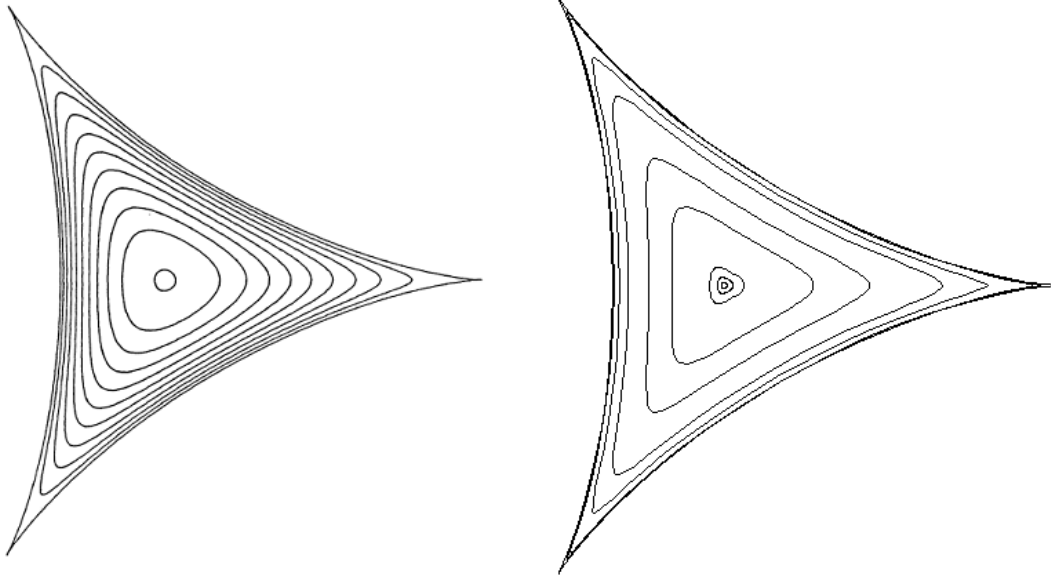


FIGURE 1.18: À gauche : évolution exacte [34] ; à droite : résultat numérique.

1.8 Perspectives

Comme indiqué dans l'introduction (chapitre 0), le problème de Hele-Shaw est une simplification d'un problème plus général nommé problème de Muskat. Dans ce dernier cas, les variations de pression dans les deux phases doivent être prises en compte afin de comprendre la dynamique de la frontière.

1.8.1 Exposé du problème

Soit Ω_1 un domaine borné simplement connexe qui contient l'origine $\mathbf{O}$ du repère de l'espace euclidien de dimension 2. Ce domaine est occupé par un fluide 1 décrit par sa pression en chaque point p_1 . Le complémentaire du domaine Ω_1 est noté Ω_2 et représente un second fluide caractérisé par sa pression p_2 .

Le fluide 1 est injecté à travers le point origine à une puissance q_1 . Pour conserver la quantité de matière dans le plan, on se doit d'aspirer le fluide 2 à l'infini avec une puissance q_2 . Le lien entre q_1 et q_2 sera par la suite explicité. En changeant les signes de q_1 et q_2 , il est possible de considérer une aspiration par le point origine couplée à une injection à l'infini.

Ces lois de conservation de la masse s'expriment par les équations,

$$\begin{aligned} -\Delta p_1 &= q_1 \delta, & \text{dans } \Omega_1, \\ -\Delta p_2 &= 0, & \text{dans } \Omega_2. \end{aligned}$$

L'aspiration à l'infini se traduit par une condition donnée par un équivalent dans le plan complexe z ,

$$p_2(z) \sim \frac{q_2}{2\pi} \ln z, \quad \text{lorsque } z \rightarrow \infty.$$

À la frontière entre les fluides, nommée Γ , nous avons une continuité des pressions,

$$p_1 = p_2, \quad \text{sur } \Gamma.$$

Cependant la différence de viscosité entre les fluides introduit une discontinuité de gradient sur la frontière,

$$\dot{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\nu} = -k_1 \partial_\nu p_1 = -k_2 \partial_\nu p_2, \quad \text{sur } \Gamma,$$

où k_1 et k_2 sont des constantes qui dépendent de la viscosité du fluide et $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur normal unitaire extérieur au contour ; $\dot{\mathbf{s}}$ est la vitesse du contour qui s'applique au point $\mathbf{s}$ du contour.

Le déplacement de la frontière libre à chaque pas de temps est alors donné par la relation cinétique précédente.

Pour mieux visualiser le problème, nous présentons un schéma récapitulatif (cf. figure 1.19) indiquant les notations introduites. Une contrainte supplémentaire de symétrie du contour par rapport à l'axe des abscisses est ajoutée par souci de lisibilité des équations et non à cause d'une contrainte inhérente au problème. Les notations introduites précédemment sont alors utilisées pour le seul demi-espace.

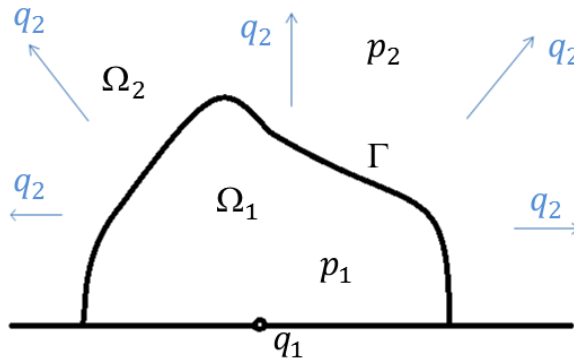


FIGURE 1.19: Problème de Muskat.

Une première condition naturelle à considérer est la quantité de matière dans le plan. Elle est infinie mais nous faisons le choix raisonnable « d'aspirer autant de matière que l'on en injecte ». Cela nous donnera une relation entre les puissances q_1 et q_2 encore à préciser.

Pour cela, on considère un domaine fini – formé d'un demi-cercle et de son diamètre – et arbitrairement grand, comme représenté sur la figure 1.20.

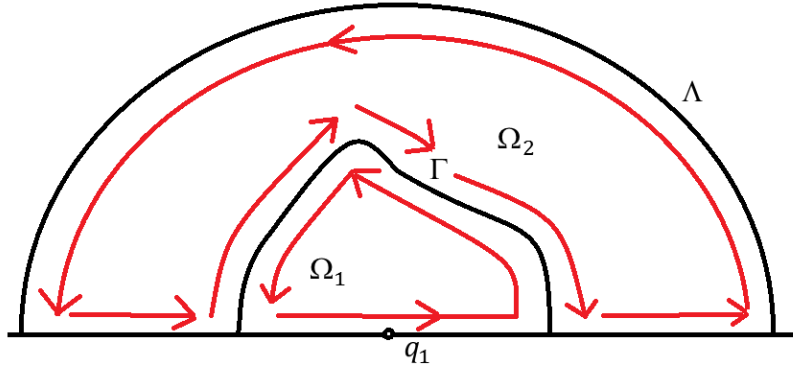


FIGURE 1.20: Conservation de la masse.

La conservation de la masse implique que

$$\int_{\Omega_1} \Delta p_1 d\Sigma + \int_{\Omega_2} \Delta p_2 d\Sigma = 0,$$

et en utilisant la formule de Stokes, on obtient

$$\int_{\partial\Omega_1} \partial_\nu p_1 d\sigma + \int_{\partial\Omega_2} \partial_\nu p_2 d\sigma = 0,$$

puis,

$$-\frac{q_1}{2} + \int_{\Gamma} \partial_\nu p_1 d\sigma - \int_{\Gamma} \partial_\nu p_2 d\sigma + \int_{\Lambda} \partial_\nu p_2 r d\theta = 0,$$

Λ étant un demi-arc de cercle assez éloigné de l'origine pour pouvoir utiliser l'équivalent et écrire $\partial_\nu p_2 = \frac{q_2}{2\pi r}$, soit

$$-\frac{q_1}{2} + \int_{\Gamma} \partial_\nu p_1 d\sigma - \int_{\Gamma} \partial_\nu p_2 d\sigma + \frac{q_2}{2} = 0.$$

Nous n'obtenons pas une relation intéressante. Cependant, on voit facilement qu'en faisant un changement de variables substituant la variable p_1 par $u_1 = -k_1 p_1$ et p_2 par $u_2 = -k_2 p_2$ et en reprenant le même calcul avec le couple (u_1, u_2) à la place de (p_1, p_2) , il est possible d'extraire la relation simple

$$k_1 q_1 = k_2 q_2.$$

Réécrivons les équations du problème dans les nouvelles variables

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= k_1 q_1 \delta, & \text{dans } \Omega_1, \\ \Delta u_2 &= 0, & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2(z) &\sim -\frac{k_2 q_2}{2\pi} \ln z, & \text{lorsque } z \rightarrow \infty, \\ \gamma u_1 &= u_2, & \text{sur } \Gamma, \\ \dot{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2, & \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

avec $\gamma = k_2/k_1$.

Par un changement d'échelle du temps, on peut toujours fixer la valeur de $k_1 q_1$. Nous choisissons $k_1 q_1 = k_2 q_2 = 2$ et nous avons

$$1 = \int_{\Gamma} \partial_{\nu} u_1 \, d\sigma = \int_{\Gamma} \partial_{\tau} v_1 \, d\sigma = v_1(|\Gamma|) - v_1(0) = 1 - 0.$$

Le même résultat est établi dans la phase 2, ce qui nous permet – au vu de la relation cinétique – de définir une unique fonction strictement croissante v sur la frontière libre, se déplaçant de 0 à 1.

$$v_1 = v_2 = v, \quad \text{sur } \Gamma.$$

La clef de la résolution du problème est alors de déterminer comment évolue la variable v le long de la frontière Γ , c'est-à-dire de comprendre quelle est la dépendance de v en l'abscisse curviligne s .

1.8.2 Équations de liaison

La vitesse des points de la frontière est déterminée à la fois par le gradient dans Ω_1 et le gradient dans Ω_2 . En utilisant deux transformations de Helmholtz-Kirchhoff, nous allons exprimer cette relation d'égalité des gradients par des équations dites *de liaison* qui relieront les fonctions définies dans les domaines 1 et 2.

Pour cela, définissons les transformations de Helmholtz-Kirchhoff dans chacun des domaines.

$$A_1(u_1, v_1) + \imath B_1(u_1, v_1) = \ln \frac{dz}{dw_1}, \quad \text{dans } \Omega_1,$$

avec $z(w_1) = z(u_1 + \imath v_1) = z(u_1, v_1) = x(u_1, v_1) + \imath y(u_1, v_1)$,
et

$$A_2(u_2, v_2) + \imath B_2(u_2, v_2) = \ln \frac{dz}{dw_2}, \quad \text{dans } \Omega_2,$$

avec $z(w_2) = z(u_2 + \imath v_2) = z(u_2, v_2) = x(u_2, v_2) + \imath y(u_2, v_2)$.

Nous nous intéressons à ce qui se passe à la frontière de séparation des phases. Sur cette courbe, on peut définir une fonction f telle que $f(v) = u_1$ et $\gamma f(v) = u_2$. Dès lors, les transformations de Helmholtz-Kirchhoff seront exprimées sur la frontière dans les seules variables v et s . Par ailleurs, l'angle que fait la normale extérieure au contour avec l'axe des abscisses – nommée N – est une donnée initiale et dépend bien sûr de sa position sur la courbe $N = N(s)$. La position des gradients est schématisées sur la figure 1.21.

Proposition 1.8. (*équations de liaison*)

À la frontière Γ , les inconnues A_1, B_1, B_2, N et f sont reliées entre elles par les relations suivantes

$$\frac{df}{dv} = \tan(B_1(f(v), v) - N) = \frac{1}{\gamma} \tan(B_2(\gamma f(v), v) - N),$$

$$\frac{\sqrt{\frac{df^2}{dv} + 1}}{\sqrt{(\gamma \frac{df}{dv})^2 + 1}} = \frac{\exp(-A_1(f(v), v))}{\exp(-A_2(\gamma f(v), v))}.$$

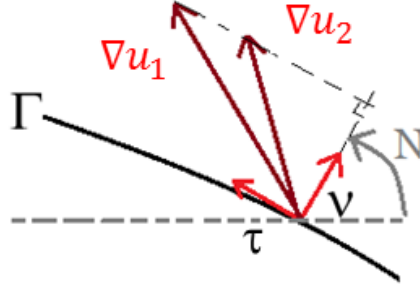


FIGURE 1.21: Gradients à la frontière.

Démonstration. Sur la frontière Γ , on écrit

$$A_1(f(v), v) + \imath B_1(f(v), v) = \ln \frac{e^{\imath(N+\frac{\pi}{2})} ds}{d(f(v) + \imath v)},$$

$$A_2(\gamma f(v), v) + \imath B_2(\gamma f(v), v) = \ln \frac{e^{\imath(N+\frac{\pi}{2})} ds}{d(\gamma f(v) + \imath v)}.$$

On obtient alors

$$\frac{df}{dv} \frac{dv}{ds} + \imath \frac{dv}{ds} = \exp \left(-A_1(f(v), v) + \imath (-B_1(f(v), v) + N + \frac{\pi}{2}) \right),$$

$$\gamma \frac{df}{dv} \frac{dv}{ds} + \imath \frac{dv}{ds} = \exp \left(-A_2(\gamma f(v), v) + \imath (-B_2(\gamma f(v), v) + N + \frac{\pi}{2}) \right).$$

Les relations recherchées sont facilement déduites des deux égalités précédentes. $\square$

Il pourrait être utile de remarquer que nous avons

$$\frac{dv}{ds} = e^{-A_1(f(v), v)} \cos(B_1(f(v), v) - N) = e^{-A_2(\gamma f(v), v)} \cos(B_2(\gamma f(v), v) - N) = \frac{\partial u}{\partial v}.$$

Ces résultats montrent que les données de df/dv et de γ suffisent à passer d'une phase à l'autre. La déviation de ∇u_1 par rapport à la normale est donnée par l'angle

$$\arctan \frac{df}{dv} = B_1(f(v), v) - N.$$

∇u_2 s'obtient en étirant d'un facteur γ la valeur $\nabla u_1 \cdot \tau$.

1.8.3 Résultats envisagés

La nouveauté introduite dans le problème de Muskat en comparaison de Hele-Shaw est la variabilité de u sur la frontière entre les phases. Cette variabilité est traitée par la fonction f telle que $u_1 = f(v, t)$.

Pour simplifier l'écriture des équations, on introduit les notations

$$\begin{aligned} A_1(f(v), v) &= a_1(v), & B_1(f(v), v) &= b_1(v), \\ A_2(\gamma f(v), v) &= a_2(v), & B_2(\gamma f(v), v) &= b_2(v). \end{aligned}$$

On a

$$\dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = e^{-a_1(v)} \cos(b_1(v) - N) = e^{-a_2(v)} \cos(b_2(v) - N).$$

L'approche jusqu'alors utilisée n'aboutit pas, la première relation utilisée pour Hele-Shaw ($\dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot \nu$) n'est plus valide et une autre approche devra être développée. Il est probable que nous ne puissions tout simplement pas résoudre le problème de Muskat par cette méthode, de la même façon qu'il est impossible de construire une transformation conforme du plan tout entier sur le disque unité.

2 Solutions trinomiales réelles et domaines d'univalence

Sommaire

2.0	Présentation	94
2.1	Introduction	95
2.1.1	Hele–Shaw flows and Stokes–Leibenson model	95
2.1.2	Conformal transformation	96
2.1.3	The search for exact solutions	97
2.2	Domain of univalence	98
2.2.1	Presentation of the trinomial case	98
2.2.2	Characterisation of the d_N functions	100
2.3	Results	104
2.4	Proof of the theorems	106
2.4.1	Proof of theorem 2.2	107
2.4.2	Proof of theorem 2.3	107
2.4.3	Proof of theorem 2.4	108
2.5	Visualisation of the results	109
2.6	Perspectives	111

2.0 Présentation

Ce chapitre expose les solutions trinomiales réelles aux problèmes de Hele-Shaw intérieur et extérieur. Par *intérieur* on entend que le fluide occupe un domaine fini simplement connexe du plan, alors que le terme *extérieur* désigne son complémentaire – la source de fluide étant rejetée à l’infini. L’article présenté ci-dessous contient – outre ces solutions – une discussion sur le domaine d’univalence de ces trinômes. On montre en particulier que la frontière de ce domaine peut être précisée grâce aux trajectoires des solutions exactes, donnant un exemple concret pour lequel un problème de mécanique des fluides permet d’améliorer des résultats d’analyse pure. La partie analytique qui concerne les trinômes du problème extérieur est nouvelle et n’avait jusqu’à présent pas fait l’objet de travaux scientifiques.

Comme nous l’évoquerons par la suite, de nombreuses solutions exactes au problème de Hele-Shaw ont été explicitées depuis la découverte de l’équation de Polubarinova-Galin en 1945. Cependant, personne ne s’est intéressé aux solutions exactes des trinômes réels alors que les solutions binomiales sont connues depuis la découverte de cette équation. Un seul article (Huntingford [40], daté de 1995) porte sur les trajectoires de ces solutions, mais uniquement pour les trinômes de degré 3. Nous espérons ainsi combler un petit oubli, sans doute dû à la difficulté de comprendre avec précision le domaine d’univalence de ces solutions.

Une des particularités des solutions trinomiales est la possibilité de perdre l’univalence par rencontre de la frontière du domaine avec elle-même au cours de l’évolution temporelle et non pas par l’apparition d’une singularité (*cusp*). Les résultats obtenus permettent de retrouver un comportement de continuation de la solution après singularité mis en valeur par Howison [34]. Par ailleurs, la question de l’existence des solutions pour tout temps dans le cas source est résolue dans le cas des trinômes. On voit alors que les contraintes proposées par Kuznetsova [44] (dans le problème intérieur) sont très restrictives dans la mesure où une famille de polynômes aux degrés croissants possède un très grand nombre de solutions existant pour tout temps.

Nous terminons cette introduction en donnant le résumé de l’article. Le reste de ce chapitre correspond au contenu de l’article soumis au *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* en mai 2014. Dans une dernière partie, nous évoquerons brièvement les perspectives de ce travail.

Début de l'article (III)

Exact real trinomial solutions to the inner and outer Hele–Shaw problems

Abstract.

We find an explicit representation of the evolution of $t \mapsto \gamma_t = \{z(\zeta, t), \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1\}$ of the contour $\gamma_t = \partial\omega_t$ of fluid spots $\omega_t = \{z(\zeta, t), |\zeta| < 1\}$ for $t > 0$ or $t < 0$ in the Hele–Shaw problem with a sink ($t > 0$) or a source ($t < 0$) localized at point $z(0, t)$ discribed by trinomials

$$z(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_N(t)\zeta^N + a_M(t)\zeta^M, \quad \text{where } M = 2N - 1, \quad \text{and integer } N \geq 2,$$

for the classical formulation of the problem when ω_t is within γ_t (inner Hele–Shaw problem), or by

$$z(\zeta, t) = a_{-1}(t)\zeta^{-1} + a_N(t)\zeta^N + a_M(t)\zeta^M, \quad \text{where } M = 2N + 1, \quad \text{and integer } N \geq 1,$$

for the outer Hele–Shaw problem when ω_t is outside of γ_t .

We obtained a sufficient condition for univalence of real trinomials, improving a result found by S. Ruscheweyh and K. J. Wirths [(1973) *Ann. Pol. Math.*, 28, pp. 341-355]. A sufficient condition is also found for functions used in the outer problem.

2.1 Introduction

2.1.1 Hele–Shaw flows and Stokes–Leibenson model

Considering the slow flow of a fluid between two parallel flat plates separated by a infinitesimally small gap, Hele–Shaw wanted to visualize stream lines of the flow around an object (particularly around the hull of a ship). Working on this experiment, he accidentally discovered that the transition between laminar and turbulent flow does not take place for any velocity. The same year as the publication by Hele–Shaw of his work in *Nature* (1898) [32], a modelization in two dimensions of the problem was proposed by Stokes [65] and Lamb [45].

We consider a configuration in which two immiscible fluids fill the plane; one of them is the *active* phase and has the geometry of a simply connected domain. Navier–Stokes equations are reduced to a Laplace’s equation $\Delta p = 0$, whose unknown p represents the pressure within the active phase. On the boundary between the phases, time evolution of the contour is realized by a Darcy’s law. For further theoretical treatments, Leibenson (1934) [47] simplifies the problem, neglecting surface tension on the boundary (fixing $p = 0$). This also means that the viscosity of the considering (active) fluid is much greater than viscosity of the surrounding fluid. Without source or sink of fluid, the solution $p = 0$ in the fluid domain trivially verifies all the equations. In most applications (injection moulding or oil extraction), fluid is injected or extracted through a small hole,

represented by a Dirac delta function (or an equivalent near the sink or source point) and belonging to the active phase.

We can sum up the content of the previous paragraph into a system of three equations (2.1). The associated figure 2.1 gives an example of an initial domain with its boundary in the inner and outer Hele–Shaw problem. The domain ω_0 corresponds to an initial fluid domain in plane $z (z = x + iy)$, which will be deformed according to the following laws: at time $t \geq 0$, we obtain a domain ω_t with a boundary γ_t , which moves at velocity $\dot{\mathbf{s}}$ at point $\mathbf{s}$, such that

$$\begin{aligned} \text{Stokes condition:} & \quad \Delta p = 0, & \text{in } \omega_t, \\ \text{Leibenson dynamical condition:} & \quad p = 0, & \text{on } \gamma_t, \\ \text{kinetic condition (Darcy's law):} & \quad \dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = -\partial_\nu p, & \text{on } \gamma_t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

p is the pressure in the fluid domain ω_t , ν the outward-pointing unit normal vector and $\partial_\nu p$ the normal outward derivative of p .

Fluid is extracted uniformly at a fixed rate (that is for $t > 0$ in sink-case) at point z_0 ($z_0 = 0$ for the inner problem, $z_0 = +\infty$ for the outer one), which corresponds to the additional condition for points z near z_0

$$p \sim C \ln(|z|), \quad \text{as } |z| \rightarrow z_0.$$

Constant C equals to $+1$ in the inner problem and -1 in the outer one.

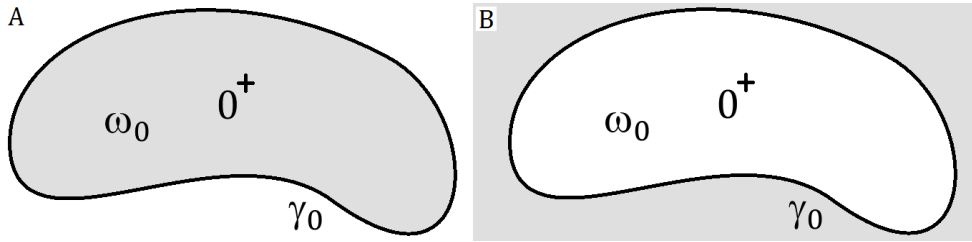


Figure 2.1: An example of initial fluid domain in inner (A) and outer (B) Hele–Shaw problem.

The mathematical treatment of these equations should be considered with specific mathematical tools.

2.1.2 Conformal transformation

The first theoretical achievement in Hele–Shaw problem was proposed by Galin [27] and Polubarinova–Kochina [55]. Using a conformal map between the unit disk U and the fluid domain ω_t , they succeeded in extracting an equation governing the shape of the fluid boundary in Stokes–Leibenson approximation. Discovered in 1945, this equation remains the main tool for studying the Hele–Shaw flows, in particular because of the amount of exact solutions it admits.

A conformal transformation locally conserves the angles and the shapes of infinitesimally small figures. In particular, a conformal transformation can be realized by a complex function f from the unit disk to the current domain $f(U)$ if this function is holomorphic and its derivative is everywhere non-zero on U . This leads to the Riemann mapping theorem: a non-empty open simply connected domain in $\mathbb{C}$ admits a bijective conformal map to the open unit disk in $\mathbb{C}$. The configuration of this theorem is represented on the figure 2.2.

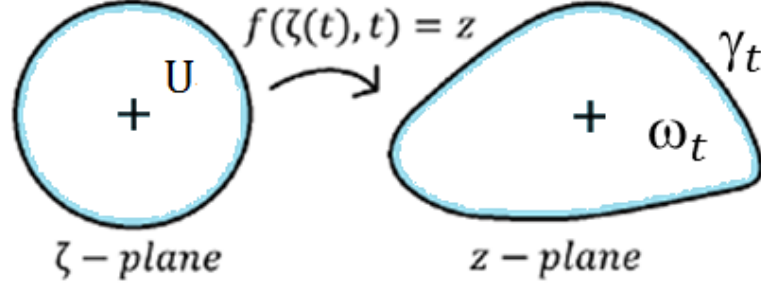


Figure 2.2: Riemann mapping theorem.

We will use the fact that if a function f is univalent in U , then the derivative of f is never zero in U .

In the condition of the theorem, we have, for a family of univalent holomorphic functions indexed by time t , $f(\cdot, t) : \{|\zeta| < 1\} \rightarrow \omega_t$ in both inner and outer problems, the Polubarinova–Galín equation, which takes the form

$$\Re \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\zeta, t) \zeta \overline{\frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta, t)} \right) = -1, \quad \text{with } |\zeta| = 1, \quad (2.2)$$

where we chose to describe the sink-case when time increases. Local existence of a solution takes place when f is analytic or only smooth in the source-case (i.e. $t < 0$) ([29], [51], [68]). The unicity is provided by fixing the image of two points, one in the domain, the second on the boundary.

2.1.3 The search for exact solutions

In the publications by Galín [27] and Polubarinova–Kochina [55] are described the system of equations obtained by a polynomial solution of degree N ($N \in \mathbb{N}$, $N > 1$) for the inner problem. In the case of a binomial solution of type $a_1(t)\zeta + a_N(t)\zeta^N$, $|\zeta| = 1$, with $a_1, a_N \in \mathbb{R}$, they explicit an exact solution. We have two following first integrals

$$\frac{1}{2}a_1(t)^2 + \frac{1}{2}Na_N(t)^2 = -t + C, \quad a_1(t)^N a_N(t) = D,$$

where constants C and D are determined by the initial conditions.

After this pioneer work, a lot of exact solutions were found: rational and logarithmic by Kufarev and Vinogradov [67], hypergeometric by Howison and King [35], self similar by

Ben Amar [4], or travelling-wave by Saffman and Taylor [60]. However nothing else has been done on polynomial solutions, except that trajectories for a trinomial solution were obtained by Huntingford in 1995 [40] for the inner problem, only in particular case $N = 2$. His work was quickly forgotten, so quickly that I discovered it when I was just finishing writing this paper. The idea of reducing the quantity of unknowns to only two remains the same as in his article, however I did not use resolution with Schwartz function but direct calculations with Polubarinova–Galín equation, which allows to write a simple proof for all trinomials. Furthermore, it is possible to understand how fast points move on trajectories, which give exact solutions. The same proof can be done with functions describing the outer configuration.

Definition 2.1. *Trinomials used in the inner Hele–Shaw problem are called trinomials of type 1, whereas trinomials in the outer problem of type 2.*

Particular attention has to be given to the understanding of the domain of univalence for trinomials of type 1 and 2. This difficulty can explain the lack of interest in polynomial solutions. This question is the content of the section 2.2.

2.2 Domain of univalence

2.2.1 Presentation of the trinomial case

A family of complex functions indexed by unknowns $A_1, \dots, A_P$ ($P \in \mathbb{N}^*$) in the unit disk defines a domain of univalence in the P -dimensional space $(A_1, \dots, A_P)$. Particularly, for the trinomials, this domain is a region of the plane, generated by the two coefficients of a univalent normalized trinomials.

Univalent functions are those that can physically represent the border of a fluid. Consequently the graphical representation of $\gamma = \partial\omega$ should be a simple closed curve. Two configurations have to be avoided: the presence of singularities on γ (created when a cusp occurs) and the presence of double points (created when the curve comes into contact with itself).

To study the domain of univalence of trinomial solutions, we introduce normalized trinomial functions defined on the closed unit disk into domain ω by

$$f_{in}(\zeta) = \zeta + \frac{Y}{N}\zeta^N + \frac{X}{2N-1}\zeta^{2N-1}, \quad \text{with } N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},$$

and

$$f_{out}(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \frac{W}{N}\zeta^N + \frac{V}{2N+1}\zeta^{2N+1}, \quad \text{with } N \in \mathbb{N}^*,$$

where the two couples of real numbers, (X, Y) and (V, W) , define two planes in which we search to precise the domain of univalence for families of functions f_{in} and f_{out} .

The first configuration with cusps corresponds to an impossibility to solve the equation (2.2) due to an annulation of the derivative of f_{in} or f_{out} (see further equation (2.5)). It leads to necessary conditions of univalence: points (X, Y) (and (V, W)) should belong to the interior of a triangle, represented on the figure 2.3. When a point crosses the border of the triangle, a loop appears (or disappears) going through a singularity in the graphical representation of γ .

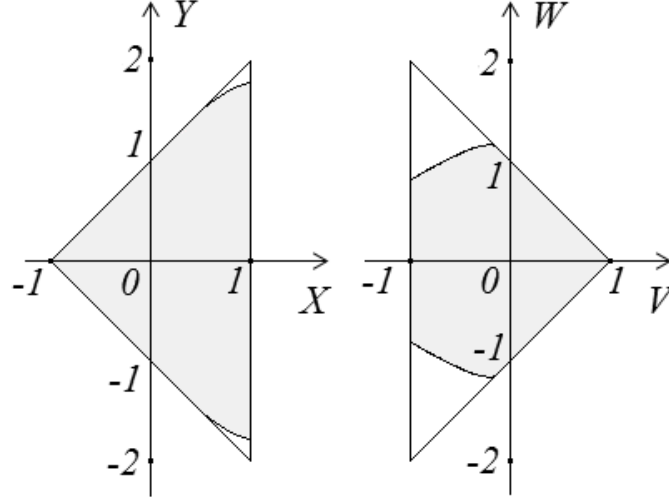


Figure 2.3: Domain of univalence in the inner problem with $N = 3$ (left) and outer problem with $N = 2$ (right) in grey.

Trinomials with double points are localized in a neighborhood of points $(X, Y) = (1, \pm 2)$ and $(V, W) = (-1, \pm 2)$ belonging to the triangles. For all considered trinomials, a trivial symmetry can be seen, and we restrict our study to positive half-planes $Y \geq 0$ and $W \geq 0$. The curves $Y = c_N(X)$ and $W = d_N(V)$ separate the univalent domain from the domain with double points (cf. figure 2.3). These domains can not (yet) be explicitly described (except for c_2 and c_3 , see [10] and [56]), however some informations exist, due to a result by Ruscheweyh and Wirths [59].

Theorem 2.1. (see [59] for c_N)

The domain of univalence of the function $f_{in}(\cdot)$ and $f_{out}(\cdot)$ are respectively

- $U(f_{in}) = \{-c_N(X) < Y < c_N(X), \quad |X| < 1\} \subset T_{in}$ where

$$T_{in} = \{-(X + 1) < Y < X + 1, \quad |X| < 1\},$$

and the function $c_N : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$ is continuous and increases monotonically. Besides,

$$c_N(X) = X + 1 \quad \text{for} \quad X \in [-1, \frac{N+1}{3N-1}],$$

and

$$c_N\left(\frac{N+1}{3N-1}\right) = \frac{4N}{3N-1}, \quad c_N(1) = \frac{2N^2}{2N-1} \sin \frac{\pi}{2N};$$

- $U(f_{out}) = \{-d_N(V) < W < d_N(V), \quad |V| < 1\} \subset T_{out}$ for the outer problem where

$$T_{out} = \{V - 1 < W < -V + 1, \quad |V| < 1\},$$

and the function $d_N : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$ is continuous. Besides,

$$d_N(V) = -V + 1 \quad \text{for } V \in \left[-\frac{N-1}{3N+1}, 1\right],$$

and

$$d_N\left(-\frac{N-1}{3N+1}\right) = \frac{4N}{3N+1}, \quad d_N(-1) = \frac{2N^2}{2N+1} \sin \frac{\pi}{2N}.$$

Furthermore, d_N is increasing on $[-1, V_{max}]$ and decreasing on $[V_{max}, -\frac{N-1}{3N+1}]$ with

$$V_{max} = \cos \frac{\pi}{2N+1} - \frac{N \sin \frac{\pi}{2N+1}}{\tan \frac{N\pi}{2N+1}} \quad \text{and} \quad d_N(V_{max}) = N \frac{\sin \frac{\pi}{2N+1}}{\sin \frac{N\pi}{2N+1}}.$$

Functions d_1 and d_2 can be explicitly described (see the proof).

As far as we know, this is the best theorem for c_N on trinomial polynomials f_{in} . Concerning functions d_N , we did not find any results in literature, so that we have to prove the results.

2.2.2 Characterisation of the d_N functions

Most of the works about univalence of polynomials are based on a result by Dieudonné [23] and a rule by Cohn [9]. We give these two results and then establish the proof of the second part of the theorem 2.1, taking inspiration from [59].

Dieudonné's criterion: Let $f(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_N\zeta^N$ be a normalized complex polynomial. Function f is univalent in the unit disk U if and only if the associated equation

$$1 + \sum_{k=2}^N a_k \frac{\sin(k\theta)}{\sin(\theta)} z^{k-1} = 0,$$

has no roots in the unit disk ($|z| < 1$) for any $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Cohn's rule: If $\sum_{k=0}^N a_k \zeta^k$ is a polynomial of degree N and $|a_0| > |a_N|$ then it has the same number of roots in $|\zeta| < 1$ as the polynomial $\overline{a_0}f(\zeta) - a_N\zeta^N \overline{f(1/\overline{\zeta})}$.

For the study of d_N we need to introduce a new kind of polynomials slightly different of the classical ones. We define the “polynomial” f^* by

$$f^*(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + a_1\zeta + \dots + a_N\zeta^N.$$

A modified Dieudonné’s criterion can be set using this form of polynomial. This variant of this criterion was already found by Brannan [5].

Lemma 2.1. (*modified Dieudonné’s criterion*): *Function f^* is univalent in $0 < |\zeta| < 1$ if and only if the associated equation*

$$-1 + \sum_{k=1}^N a_k \frac{\sin(k\theta)}{\sin(\theta)} z^{k+1} = 0,$$

has no roots in the unit disk ($|z| < 1$) for any $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

With polynomials f_{out} we have

$$-1 + \frac{W}{N} \frac{\sin(N\theta)}{\sin(\theta)} z^{N+1} + \frac{V}{2N+1} \frac{\sin((2N+1)\theta)}{\sin(\theta)} z^{2(N+1)} = 0, \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

If $\left| \frac{V}{2N+1} \frac{\sin((2N+1)\theta)}{\sin(\theta)} \right| \geq 1$, then the product of the roots is less than 1 and at least one root belongs to the unit disk. Thus, because of the univalence of f_{out} , we can apply the Cohn’s rule; knowing that the coefficients are real, we obtain the condition

$$|A| \leq \min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} \frac{1 - B \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin \theta}}{\left| \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right|} = \min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} G_N(\theta, B),$$

where $A = \frac{W}{N}$ and $B = \frac{V}{2N+1}$.

Study of small degrees

Case $N = 1$.

We have $G_1(\theta, B) = 1 + B - 4B \cos^2 \theta$, so that the boundary of the univalent domain can be explicitly described by relation

$$|W| \leq 1 - \frac{V}{3} - 2 \operatorname{sign}(V) \frac{V}{3}, \quad V \in [-1, 1].$$

Case $N = 2$.

In case $N = 2$, we obtain $G_2(c, B) = \frac{1}{2c} - B \left(2c(4c^3 - 3) + \frac{1}{2c} \right)$, where $c = \cos \theta \in]0, 1]$. The study of this function shows us that the minimum is reached at point $\tilde{c} = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{7B-4}{3B}}}$ when $B \in [-\frac{1}{5}, -\frac{1}{35}]$ and point $\tilde{c} = 1$ when $B \in [-\frac{1}{35}, \frac{1}{5}]$. Thus,

$$|W| \leq \begin{cases} G_2(\tilde{c}, \frac{V}{5}), & \text{if } -1 \leq V < -1/7, \\ 1 - V, & \text{if } -1/7 \leq V \leq 1. \end{cases}$$

Study for $N \geq 3$

Lemma 2.2. For $B \in [-\frac{1}{2N+1}, \frac{1}{2N+1}]$, the function $G_N(\theta, B)$ attains its minimum for θ in the interval $[0, \frac{\pi}{2N}]$.

Proof. We notice that

$$G_N(\frac{\pi}{2N}, B) \leq \left(1 + \frac{1}{2N+1} \right) \sin \frac{\pi}{2N} \leq \frac{N+1}{N} \frac{\pi}{2N+1},$$

and we set that

$$G_N(\theta, B) > \frac{N+1}{N} \frac{\pi}{2N+1}, \quad \text{for } \theta \in [\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2}].$$

Indeed, for $\theta \in [\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2}]$ we have for $N \geq 3$ the inequalities

$$-\frac{2N+1}{3} \leq \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin \theta} \leq \frac{2N+1}{3},$$

and

$$\left| \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right| \leq \left(\sin \frac{\pi}{2N} \right)^{-1}.$$

Thus,

$$G(\theta, B) \geq \left(1 - \frac{1}{2N+1} \frac{2N+1}{3} \right) \sin \frac{\pi}{2N} = \frac{2}{3} \sin \frac{\pi}{2N} > \frac{N+1}{N} \frac{\pi}{2N+1}.$$

The minimum should be search in the interval $\theta \in [0, \frac{\pi}{2N}]$ in which we have

$$G_N(\theta, B) = \frac{\sin \theta}{\sin N\theta} - B \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin N\theta}.$$

□

Study of G_N

We differentiate the function G_N by θ ,

$$h(\theta) = \frac{\partial G_N}{\partial \theta}(\theta, B) \sin^2 N\theta = (\cos \theta - (2N+1)B \cos(2N+1)\theta) \sin N\theta - (\sin \theta - B \sin(2N+1)\theta) N \cos N\theta,$$

and

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = ((N^2 - 1) \sin \theta + (3N+1)(N+1)B \sin(2N+1)\theta) \sin N\theta,$$

furthermore,

$$h(0) = 0 \quad \text{and} \quad h\left(\frac{\pi}{2N}\right) = (1 + (2N+1)B) \cos \frac{\pi}{2N} \geq 0.$$

The unique non-zero root $\tilde{\theta}$ of $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ verifies the equation

$$-\frac{N-1}{(3N+1)B} = \frac{\sin(2N+1)\tilde{\theta}}{\sin \tilde{\theta}}. \quad (2.3)$$

Unicity comes from the fact that function $\frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin \theta}$ is strictly decreasing on $[0, \frac{\pi}{2N}]$ and it is clear that on $]0, \tilde{\theta}[$ the function h is negative and on $]\tilde{\theta}, \frac{\pi}{2N}[$ positive. The expression (2.3) is majorated by $2N+1$ on the considered interval and we can derive a condition of existence of a unique root for $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ in $]0, \frac{\pi}{2N}[$, that is to say for the existence of a unique minimum on $]0, \frac{\pi}{2N}[$ for the function G_N

$$-1 < (2N+1)B = V < -\frac{N-1}{3N+1}.$$

Consequently, for $(2N+1)B = V \in [-\frac{N-1}{3N+1}, 1]$, we obtain

$$\min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} G_N(\theta, B) = \frac{1 - (2N+1)B}{N}.$$

We define function $\tilde{\theta}(B)$ such that

$$G_N(\tilde{\theta}(B), B) = \min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} G_N(\theta, B),$$

and we search in which point B we have $\frac{\partial G_N}{\partial B}(\tilde{\theta}(B), B) = 0$. This point is obtained when the expression $\frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin N\theta}$ is equal to zero for $\theta \in]0, \frac{\pi}{2N}[$. The only one solution is

$\theta = \frac{\pi}{2N+1}$. Then, the equation $\frac{\partial G_N}{\partial \theta}(\frac{\pi}{2N+1}, B) = 0$ can be solved and we have

$$(2N+1)B = V = \cos \frac{\pi}{2N+1} - \frac{N \sin \frac{\pi}{2N+1}}{\tan \frac{N\pi}{2N+1}}.$$

At this point, the curve d_N reaches its maximum and takes the value

$$W_{max} = NA_{max} = N \frac{\sin \frac{\pi}{2N+1}}{\sin \frac{N\pi}{2N+1}}.$$

Notice that $W_{max} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ when $N \rightarrow +\infty$.

For $V = -1$ we have $h(0) = h(\frac{\pi}{2N}) = 0$ and the minimum is reached in one of this two points. A simple calculation shows us that the right choice is $\theta = \frac{\pi}{2N}$ and we get the result described in the theorem 2.1. The proof is then completed.

2.3 Results

We consider real trinomial solutions to the Hele–Shaw problem with initial conditions given at $t = 0$ (belonging to the domain of univalence) of the following form, for the inner formulation,

$$f_1(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_N(t)\zeta^N + a_M(t)\zeta^M, \quad \text{where } M = 2N - 1, \quad \text{and } N \geq 2,$$

and, for the outer formulation,

$$f_{-1}(\zeta, t) = a_{-1}(t)\zeta^{-1} + a_N(t)\zeta^N + a_M(t)\zeta^M, \quad \text{where } M = 2N + 1, \quad \text{and } N \geq 1.$$

This kind of trinomials is stable by the Polubarinova–Galim equation, that is why no other harmonic occurs during time evolution (for $t > 0$ or $t < 0$).

The main idea for solving the problem with trinomial functions of type 1 and 2 is to introduce new unknowns

$$X = M \frac{a_M}{a_1}, \quad Y = N \frac{a_N}{a_1}, \quad \text{for the inner problem,}$$

and

$$V = M \frac{a_M}{a_{-1}}, \quad W = N \frac{a_N}{a_{-1}}, \quad \text{for the outer problem.}$$

This normalization is justified by the fact that time evolution of the boundary does not depend on initial area. The resulting system of equations can be partially solved, leading to the following results.

Theorem 2.2. *For trinomial initial contours in inner problem, the solution moves on a curve, whose equation is*

$$Y = C_{in} \frac{|X|^{\frac{N+1}{2N}}}{1+X},$$

with $C_{in} = Y_0(1+X_0)|X_0|^{\frac{N+1}{2N}}$. The notation with a small zero corresponds to initial values in the domain of univalence (e.g. $X_0 = \frac{(2N-1)a_{2N-1}(0)}{a_1(0)}$).

In the sink-case, the point (X, Y) reaches in finite time the border of the domain of univalence. In the source-case, the point approaches the origin $\mathbf{O}$ and can possibly exists for all time (see theorem 2.3).

Time evolution (and consequently area evolution $|\Omega_t|$) is described by relation

$$|\Omega_0| - t = |\Omega_t| = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{X} \right)^{\frac{1}{N}} \left(1 + \frac{Y^2}{N} + \frac{X^2}{2N-1} \right),$$

where

$$\alpha = (2N-1)a_{2N-1}(0)a_1^{2N-1}(0).$$

For trinomial initial contours in outer problem, we have the same kind of result. Curve is given by relation

$$W = C_{out} \frac{|V|^{\frac{N-1}{2N}}}{1-V},$$

with $C_{out} = W_0(1-V_0)|V_0|^{\frac{1-N}{2N}}$. Area evolution $|\Omega_t|$ is described by

$$|\Omega_0| + t = |\Omega_t| = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\beta} \right)^{\frac{1}{N}} \left(1 - \frac{W^2}{N} - \frac{V^2}{2N+1} \right),$$

where $\beta = \frac{(2N+1)a_{2N+1}(0)}{a_1^{2N+1}(0)}$.

We would like to understand for which initial conditions the contour could exist for all time in source-case. This is the content of the following theorems.

Theorem 2.3. *For the inner problem, if initial condition occurs above the curve*

$$\tilde{Y} = \frac{|X| \frac{N+1}{2N}}{1+X} \frac{(1+X_0)^2}{\frac{N+1}{|X_0| \frac{2N}{2N}}}$$

with $X_0 = \frac{N+1}{3N-1}$, the contour meets a singularity in the source-case.

The same result occurs for $\tilde{W} = \frac{|V| \frac{N-1}{2N}}{1-V} \frac{(1-V_0)^2}{\frac{N-1}{|V_0| \frac{2N}{2N}}}$ with $V_0 = -\frac{N-1}{3N+1}$ in the outer problem.

We further demonstrate that all points located below curve $\tilde{Y}$ (or $\tilde{W}$) move on curves, without encountering any points of c_N (respectively d_N). This leads to the following theorem.

Theorem 2.4.

For $X \in [\frac{N+1}{3N-1}, 1]$, function c_N satisfies the inequality $\tilde{Y}(X) \leq c_N(X) \leq \hat{Y}(X)$ where

$$\hat{Y}(X) = \frac{4N^2}{2N-1} \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \frac{|X| \frac{N+1}{2N}}{1+X}.$$

Furthermore, we have $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\hat{Y}(1) - \tilde{Y}(1) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9}\sqrt{3} < 0.032$.

For $V \in [-1, -\frac{N-1}{3N+1}]$, function d_N satisfies the inequality $\tilde{W}(V) \leq d_N(V) \leq \hat{W}(V)$ where

$$\hat{W}(V) = \frac{4N^2}{2N+1} \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \frac{|V| \frac{N-1}{2N}}{1-V}.$$

Furthermore, we have $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\hat{W}(1) - \tilde{W}(1) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9}\sqrt{3} < 0.032$.

2.4 Proof of the theorems

In order to not overload the text, we chose to prove theorems only in the inner case. Results for outer flows could be easily obtained with small modifications of the equations.

2.4.1 Proof of theorem 2.2

Substituting f in the equation (2.2) by a trinomial function of type 1 ($f(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_N(t)\zeta^N + a_M(t)\zeta^M$ with $M = 2N - 1$ ($N > 1$)), we explicit the system of equations

$$\begin{pmatrix} a_1 & Na_N & Ma_M \\ Na_N & a_1 + Ma_M & Na_N \\ Ma_M & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

This system can be transformed into a Cauchy problem in which arises the determinant

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_M \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -a_1(a_1 + Ma_M) \\ Na_N(a_1 - Ma_M) \\ Ma_M(a_1 + Ma_M) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

where $D = (a_1 - Ma_M)(a_1 + Ma_M + Na_N)(a_1 + Ma_M - Na_N)$.

We now introduce the unknowns X and Y , which leads to the equations

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{1}{a_1^2 E} 2NX(1 + X), \\ \dot{Y} = \frac{1}{a_1^2 E} Y(X(1 - N) + N + 1), \end{cases}$$

with $E = (1 - X)(1 + X + Y)(1 + X - Y)$. Noticed that

$$\frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \frac{Y(X(1 - N) + N + 1)}{2NX(1 + X)},$$

we can separate the expression into two simple ordinary differential equations (losing the linear description of the time)

$$\begin{cases} \dot{Y} = Y, \\ \dot{X} = \frac{2NX(1 + X)}{X(1 - N) + N + 1}. \end{cases}$$

The second equation can be reduced to $\frac{N+1}{2N} \frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{X}}{1+X} = 1$, which gives the result after integration.

Time evolution of the area is obtained by integration of the first and third equations in (2.4).

2.4.2 Proof of theorem 2.3

Among the trajectories which have common points with equation $Y = 1 + X$, we would like to know if one of them can be tangential to it and, at this point, remains locally in the triangle.

To this end, we solved $\frac{d\tilde{Y}}{dX} = 1$, with $\tilde{Y}$ a function Y obtained in the previous theorem such that $\tilde{Y}(X_0) = 1 + X_0$. We have

$$\frac{N+1}{2N} \frac{1+X_0}{X_0} - 1 = 1,$$

so that

$$X_0 = \frac{N+1}{3N-1}.$$

Looking at the derivative of function $\tilde{Y}$, we conclude that the curve $\tilde{Y}$ remains locally around point $X = X_0$ in the interior of the triangle. Notice that $\tilde{Y}$ is a strictly increasing function in $[0, 1]$.

For the solution $\tilde{Y}$ a blow-up occurs at finite time (at point X_0), but the solution continues to exist. The same kind of behavior was first highlighted by Howison in [34].

2.4.3 Proof of theorem 2.4

To prove that for all initial points below curve $\tilde{Y}$ the contour remains univalent during time evolution (in source-case) without possible occurring of a double point, we look at the Polubarinova–Galin equation and its properties. The left side of this equation represents the quantity $\vec{V} \cdot \vec{n}$ where $\vec{V}$ is the velocity of a point of the boundary and $\vec{n}$ the outer normal vector and we know that $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$ in source-case.

We prove this result by contradiction, supposing that an initial contour below curve $\tilde{Y}$ represents a contour with two double points. The Polubarinova–Galin equation remains usable for contours with a loop (we do not cross a cusp, thus the behaviour of the contour remains the same by continuity), although the dynamic does not represent in this case the dynamic of a 2D fluid but takes place on a riemannian geometry. Double points in the fluid can be considered as belonging to two different layers of a thin screw in order to conserve Riemann mapping transformation. On figure 2.4 we see that the presence of a loop leads to a cusp because of property $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$.

The removing of these two double points can be realized only by going through two cusps: when time increases, boundary tends to a circle (see the trajectories of the solutions), then the apparition of these two cusps is inevitable. We have set that, if a double point occurs, then the next singularity to appear is a cusp. This is impossible for an initial contour below $\tilde{Y}$.

The second inequality with function $\hat{Y}$ comes from the same argument, knowing that $c_N(1) = \frac{2N^2}{2N-1} \sin(\frac{\pi}{2N})$.

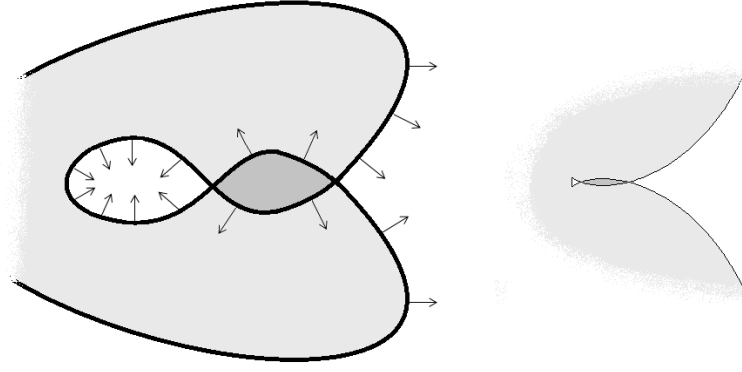


Figure 2.4: Left: schematization of the dynamic of a contour with a loop by Polubarinova–Galin equation; right: example of a contour with double points with a trinomial of type 1 given by equation $\zeta + \frac{1.88}{2}\zeta^2 + \frac{0.95}{3}\zeta^3$.

2.5 Visualisation of the results

On the following figure 2.5, we represent trajectories of solutions in the inner problem for various initial conditions. The grey zone corresponds to the domain above c_N within the triangle, that is $T_{in} \setminus U(f_{in})$. Another zone exists but is too small to be represented, this is a “forbidden” area in $U(f_{in})$ near c_N ($X > \frac{N+1}{3N+1}$), in which the contour (if initial point represents an univalent trinomial) meets a singularity in the source-case. We remind that the symmetry of solutions in order to axe (Ox) justifies the restriction to the domain $Y \geq 0$.

In the article by Kuznetsova [44] was obtained a suffisant condition for all time existence of a polynomial solution. In the particular case of a trinomial, this condition leads to the relation

$$Y_0^2 + \frac{N}{2N-1}X_0^2 < \frac{N}{(N-1)(2N+1)}.$$

The theorem 2.4 is a necessary and suffisant condition for the case of trinomial solutions of type 1 and 2.

Remark 2.1. *The area of the Kuznetsova’s domain tends to 0 when N tends to infinity, while our domain fills more than 99.95 % of the domain of univalence when N tends to infinity.*

For the outer problem, the same kind of figure for trajectories can be represented in the plane (U, W) (see figure 2.6).

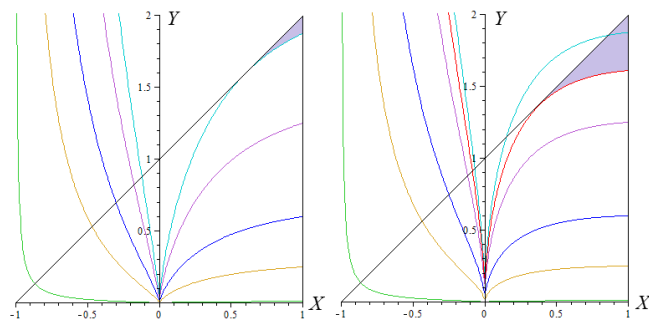


Figure 2.5: Trajectories of the inner problem for various initial conditions. On the left $N = 2$; on the right $N = 10$.

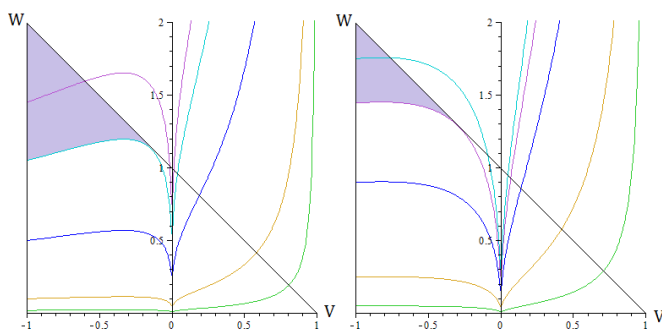


Figure 2.6: Trajectories of the outer problem for various initial conditions. On the left $N = 2$; on the right $N = 10$.

To conclude this paper, we chose to represent contours at different time of its evolution. We give an example for the inner problem and another one for the outer problem on figure 2.7 and 2.8.

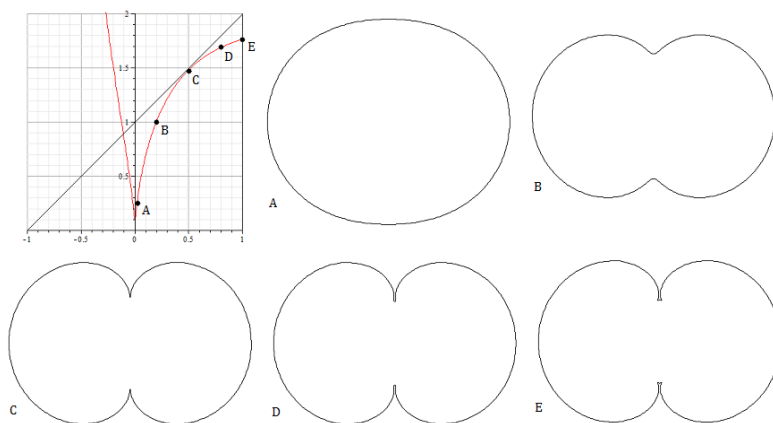


Figure 2.7: Time evolution in the sink-case of a trinomial of type 1 with $N = 2$ from point A to E.

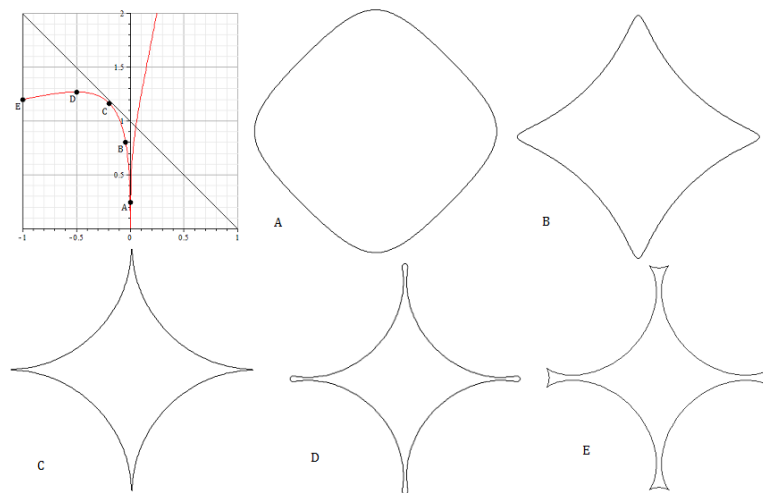


Figure 2.8: Time evolution in the sink-case of a trinomial of type 2 with $N = 4$ from point A to E.

Acknowledgments. I would like to thank my doctoral supervisors, J.-P. Lohéac and A. S. Demidov for helpful comments. I also want to thank the Moscow State University in which a part of this work was completed. This visit was financially supported by the région Rhône-Alpes.

Fin de l'article (III)

2.6 Perspectives

Dans la mesure où l'utilisation de polynômes est une manière simple d'approcher un contour donné, des informations sur ces solutions sont utiles. On pourrait espérer obtenir une résolution analytique complète du problème en factorisant un polynôme quelconque en produit de binômes et trinômes. Une astuce de calcul permettrait alors de traiter des systèmes couplés d'équations déjà résolues (cas du binôme et trinôme).

Le cas de la dimension 4 devrait à son tour être considéré. Une réduction par homothétie ramènerait le nombre d'inconnues à seulement trois et les trajectoires devraient alors être regardées dans l'espace usuel. Le domaine d'univalence de tels polynômes est une question largement ouverte et essentielle pour la compréhension des solutions exactes. Une étape intermédiaire consisterait à chercher les solutions trinomiales complexes à l'équation de Polubarinova-Galin puisque dans ce cas précis des résultats existent sur le domaine d'univalence [10].

Ce travail sur les solutions trinomiales du problème de Hele-Shaw nous permettra de traiter dans le chapitre suivant ces mêmes trinômes dans le contexte du contrôle optimal.

3 Étude de la contrôlabilité et du contrôle optimal des solutions polynomiales par multipôles

Sommaire

3.0	Présentation	114
3.1	Introduction	115
3.1.1	Limit in Laplace's equation	115
3.1.2	Generalized Polubarinova–Galin equation	117
3.1.3	Polynomial solution in sink-case	119
3.1.4	Sink/source configuration	121
3.2	Multipole configuration	122
3.2.1	Dipole and multipole approximation	122
3.2.2	Richardson's moments	125
3.2.3	Links between Richardson's moments and Polubarinova–Galin equation	127
3.3	Study of the controlability	131
3.3.1	Sufficient conditions	131
3.3.2	Necessary conditions	133
3.4	Optimal control in small dimensions	133
3.4.1	Case of dimension 2	133
3.4.2	Case of dimension 3	136
3.5	Modèle de turbulence	145
3.5.1	Remarques préliminaires	145
3.5.2	Discrétisation du puits	145
3.5.3	Expérience numérique	147
3.6	Perspectives	147

3.0 Présentation

Ce dernier chapitre expose la construction d'un système contrôlé, créé par l'introduction de multipôles de différents degrés superposés à la source. Notre analyse est entièrement tournée vers l'étude des contours polynomiaux qui permettent d'explicitier des relations simples. Nous pouvons résumer son contenu en trois étapes.

Nous présentons tout d'abord comment les multipôles s'intègrent aux équations de Polubarinova-Galin dans le cas particulier des solutions polynomiales. Les coefficients u_n décrivant les puissances des multipôles peuvent par ailleurs être ajoutés dans l'équation de Stokes à l'aide de dérivées de la distribution de Dirac. Un second type de multipôles est introduit dans le plan réel (avec les puissances v_n), ceux-ci sont alors directement reliés aux moments de Richardson. Pour finir, nous explicitons les relations qui font correspondre les coefficients des multipôles du disque unité (u_n) à ceux du plan réel (v_n). Ces considérations sont présentées dans les parties 3.1 et 3.2.

Dans un second temps, nous recherchons les conditions à imposer aux coefficients u_i des multipôles – devenus paramètres de contrôle – nécessaires et suffisantes à la réalisation de la contrôlabilité du système (partie 3.3). Par contrôlabilité, on entend que notre objectif est de contourner l'apparition de singularités afin de pouvoir absorber tout le fluide présent. Par la suite, nous nous concentrons sur le cas du binôme et du trinôme en cherchant à optimiser la déformation de la frontière selon un critère donné (partie 3.4).

Une dernière partie 3.5 nommée *Model of turbulence* fait office de conclusion et propose au lecteur une nouvelle modélisation. L'idée principale consiste à décrire la turbulence naturellement présente près du point source par des multipôles. Ce choix nous permet d'introduire une description stochastique du problème, expliquant l'instabilité inhérente au problème de l'absorption.

Les parties 3.1 à 3.4 sont la reproduction de l'article (IV); nous terminons cette introduction en exposant le résumé de cet article.

Début de l'article (IV)

Optimal Control by multipoles in the Hele–Shaw problem

Abstract. The two-dimensional Hele–Shaw problem for a fluid spot with free boundary can be solved using the Polubarinova–Galin equation. The main condition of its applicability is the smoothness of the spot boundary. In the sink-case, this problem is not well-posed and the boundary loses smoothness within finite time – the only exception being the disk centred on the sink. An extensive literature deals with the study of the Hele–Shaw problem with non-smooth boundary or with surface tension, but the problem remains open. In our work, we propose to study this flow from a control point of view, by introducing an analogue of multipoles (term taken from the theory of electromagnetic fields). This allows us to control the shape of the spot and to avoid non-smoothness phenomenon on its border. For polynomial contours of small dimensions, we demonstrate how all the fluid can be extracted, while the border remains smooth until the very end. We find, in particular, sufficient conditions for controllability and a link between Richardson’s moments and Polubarinova–Galin equation.

3.1 Introduction

3.1.1 Limit in Laplace’s equation

This first part of this article is dedicated to a theoretical result, allowing us to simplify further limit computations in the Laplace’s equation. In this article, we make all the limit calculations in two different ways: by using theorem 3.1 or by the classical way. Consequently, theorem 3.1 strongly simplifies calculations but can be skipped in a first reading.

Let us consider the following problem

$$\begin{cases} \Delta p = S, \\ p|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

with Ω a simply connected and bounded domain in $\mathbb{C}$ with smooth boundary $\partial\Omega$, p a unknown function (physically, a pressure) and S a generalized real-valued function with $\text{supp } S \subseteq \Omega$, i.e. $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$. The function S is a *source-term*, which contains all information about sources/sinks and multipoles.

The first equation in (3.1) has a solution $p \in \mathcal{S}'(\mathbb{C})$ for any $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{C})$ (see [39], p. 69, theorem 3.2.1). Also any generalized solution of equation $\Delta u = 0$ in any domain is a smooth analytic function (see [39], p. 101, corollary 4.1.2, and p. 114, corollary 4.4.1). So any solution p of the first equation is smooth in a neighbourhood of $\partial\Omega$. Consequently $p|_{\partial\Omega}$ is a smooth function, and the second condition in (3.1) is well posed.

Let $E(z) = \frac{1}{2\pi} \ln |z|$ denote a fundamental solution for the Laplace operator $\Delta E = \delta_0$.

Theorem 3.1. *There exists a unique solution of problem (3.1) and it can be found as $p_S = E * S - \varphi_{E*S}$, with $*$ being the convolution between functions, and where φ_{E*S} denotes a smooth analytic solution of the problem*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = (E * S)|_{\partial\Omega}. \end{cases}$$

Moreover the map $\Phi : S \mapsto p_S$ is linear and continuous on $\mathcal{E}'(\Omega_1)$ for any $\Omega_1 \Subset \Omega$.

Proof. We know that $E * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{C})$ is a solution of the first equation in (3.1). We set that $p_S = E * S - \varphi_{E*S}$ is the unique solution of problem (3.1). Let p_1 and p_2 be two solutions of (3.1). Then $p_2 - p_1$ is a solution of (3.1) with $S = 0$ and $p_2 - p_1$ is a smooth analytic function (see [38], p. 101, corollary 4.1.2), therefore $p_2 - p_1 = 0$ by maximum principle, so that uniqueness is proved.

The map Φ being clearly linear, we only have to set the continuity of Φ . Let us consider the map $L : \mathcal{E}'(\Omega_1) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$, $L : S \mapsto (E * S)|_{\partial\Omega}$. We prove that L is continuous. We denote by $a > 0$ the distance between $\partial\Omega$ and Ω_1 and choose an $\varepsilon \in (0, a)$ and define $A = \{a - \varepsilon \leq |z| \leq \text{diam } \Omega + \varepsilon\}$. Then we can decompose E in the sum

$$E = E_1 + E_2 \quad \text{where} \quad E_1(z) = E(z), \forall z \in A, \quad \text{and} \quad \text{supp } E_2 \cap A = \emptyset.$$

We may assume that $E_1 \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ because $0 \notin A$.

We claim that $(E_1 * S)|_{\partial\Omega} = (E * S)|_{\partial\Omega}$ for all $S \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$. Indeed $E * S = E_1 * S + E_2 * S$. On the one hand $\text{supp}(E_2 * S) \subset \text{supp } E_2 + \text{supp } S \subset (\mathbb{C} \setminus A) + \Omega_1$, and on the other hand $\Omega_1 - (\partial\Omega + \{|z| < \varepsilon\}) \subset A$. So $\text{supp}(E_2 * S) \cap (\partial\Omega + \{|z| < \varepsilon\}) = \emptyset$.

The convolution

$$L_1 : \mathcal{E}'(\Omega_1) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{C}), \quad L_1 : S \mapsto E_1 * S,$$

is continuous. The restriction

$$L_2 : C_0^\infty(\mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega), \quad L_2 : \psi \mapsto \psi|_{\partial\Omega},$$

is continuous. So $L = L_2 \circ L_1$ is also continuous.

Consequently, the map $M : \mathcal{E}'(\Omega_1) \rightarrow C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $M : S \mapsto \varphi_{E*S}$, is continuous by maximum principle. The theorem is then proved by $\Phi(S) = E * S - M(S)$. $\square$

Remark 3.1. *The continuity of Φ gives us the possibility to make easy passage to limits in problem (3.1)*

$$\Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(S_n).$$

The sufficient condition is that $\text{dist}(\text{supp } S_n, \partial\Omega) > \varepsilon$ where $\varepsilon > 0$ does not depend on n .

Example 3.1. *If $0 \in \Omega$ and $S_n = (\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0)/n$ then the limit solution p of (3.1) as $n \rightarrow \infty$ is the solution of (3.1) with $S = \delta'_0$, i.e. $p = E * \delta'_0 - \varphi_{E*\delta'_0}$. The first term is easy to compute: $E * \delta'_0 = (E * \delta_0)' = E' = \frac{1}{2\pi} \Re\left(\frac{1}{z}\right)$. The second term may be explicitly found as a solution of the Dirichlet problem. For example let $\Omega = \{|z| < 1\}$. Then on $\{|z| = 1\}$ we have $\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \Re(z)$ and $\varphi_{E*\delta'_0} = \frac{1}{2\pi} \Re(z)$. Therefore $p = \frac{1}{2\pi} \Re\left(\frac{1}{z} - z\right)$.*

From now, the calculus of limits in the Laplace problem will be done indifferently on the solution or on the equation. The part 3.2.1 named *Dipole and multipole approximation* consists in an explanation about the building of multipoles, but strong justifications are already established by theorem 3.1.

3.1.2 Generalized Polubarinova–Galin equation

We consider a slow flow between two parallel flat plates and made up of two unmiscible fluids. The viscosity of the first fluid is much more higher than the viscosity of the second one. In such conditions, the Navier–Stokes equations can be reduced to simple 2D equations only living in the first phase [45]. This phase is geometrically a simply connected domain ω_0 at initial moment, and will be deformed in a domain ω_t in time evolution according to the following laws.

At time $t \geq 0$, we obtain a domain ω_t whose boundary is $\gamma_t = \partial\omega_t$. Each point $\mathbf{s}$ on ω_t moves at velocity $\dot{\mathbf{s}}$ along the direction of the outward-pointing unit normal vector $\nu(\mathbf{s})$, such that

$$\text{kinetic condition (Darcy's law [11]):} \quad \dot{\mathbf{s}} \cdot \nu = -\partial_\nu p, \quad \text{on } \gamma_t,$$

$\partial_\nu p$ being the normal outward derivative of p . Pressure p is determined by the inner state of the phase

$$\begin{aligned} \text{Stokes condition [65]:} & \quad -\Delta p = S, \quad \text{in } \omega_t, \\ \text{Leibenson dynamical condition [47]:} & \quad p = 0, \quad \text{on } \gamma_t. \end{aligned}$$

Function $S = S(z)$ is the *source term* in ω_t made of pointwise contributions. In this article, S will be a combination of Dirac delta functions and its derivatives localized in a neighbourhood of point $\mathbf{O}$.

Remark 3.2. *It is important to notice that these equations may be written as long as the boundary γ_t remains smooth.*

The above-described configuration is called a *Hele–Shaw problem in Stokes–Leibenson approximation*. An effective way to translate these equations into an elegant mathematical relation is to use an idea proposed by Polubarinova–Kochina and Galin in 1945 (see [27],[55]). Using a conformal transformation, they succeeded in obtaining a unique equation governing the shapes of the fluid boundary. An important remark was made concerning a loss of regularity in the pointwise sink-case. Indeed, in any case (except the circle centered on the sink), solution ceases to exist before extracting all the fluid [33] (lost of regularity of the contour). The proof of this equation is based on the Riemann mapping theorem, which establishes the existence of a holomorphic bijection f between the unit disk and a simply connect domain. Function f is unique modulo conformal

transformations from the unit disk to itself.

As we would like to use different kind of source, we need a generalized version of the Polubarinova–Galin equation. We introduce the notation

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}(\zeta, t) \quad \text{and} \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta, t),$$

and we have

Theorem 3.2. *Generalized Polubarinova–Galin equation.*

For an univalent function $f(\cdot, t) : \{|\zeta| < 1\} \rightarrow \omega_t$ from the unit disk to the current domain, Polubarinova–Galin equation takes the form¹

$$\Re(\dot{f} \overline{\zeta f'}) = -\frac{\partial W}{\partial \zeta} \zeta, \quad |\zeta| = 1, \quad (3.2)$$

with $W = W(\zeta, t)$ solution of the Dirichlet problem in the unit disk $U = \{|\zeta| < 1\}$:

$$\begin{aligned} \text{Stokes condition :} \quad & -\Delta_\zeta W = |f'(\zeta, t)|^2 S(f(\zeta, t)), \quad \text{in } U, \\ \text{Leibenson condition :} \quad & \Re(W) = 0, \quad \text{on } \partial U. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Indeed, we have $\Delta_z W = \frac{1}{|f'(\zeta, t)|^2} \Delta_\zeta W$. In our study, one of the encountered difficulties will be the substitution in the source function S (which is a generalized function), from initial plane z used in $S(z)$ to the plane ζ of the unit disk in $S(\zeta)$.

Remark 3.3. *In the particular case where $S(z) = \delta(z)$, we have*

$$S(f(\zeta, t)) = \delta(f(\zeta, t)) = \frac{\delta(\zeta)}{|f'(0, t)|^2},$$

the term $|f'(0, t)|^2$ cancels out and the Stokes condition becomes

$$-\Delta_\zeta W = \delta(\zeta).$$

Most of the authors write the Stokes equation only with a delta Dirac function that is why the term $|f'|^2$ usually does not appear.

A conformal map realized by the function f is represented on the figure 3.1.

Proof. (of theorem 4.1.) In ω_t , the flow is conservative due to the incompressibility ($\text{div } \vec{V} = 0$ in $\Omega \setminus \text{supp } S$) and irrotational because of relation $\vec{V} = -\nabla p$, so that we can introduce the complex velocity potential W (see [46]). Pressure p is then extended into the potential W in the complex plane (solution W of (3.3) is a multivalued function

1. The equation (3.2) is written without the real part usually used in the right hand side of the equality, but which is unnecessary. See the end of the proof.

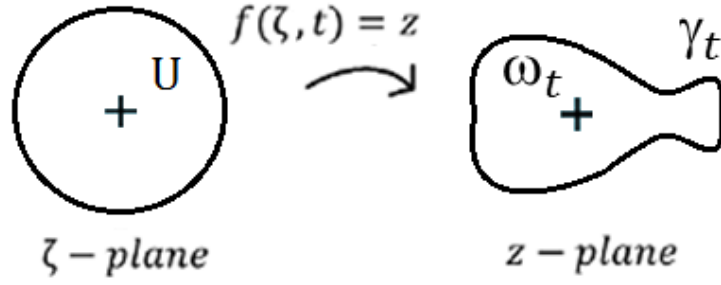


Figure 3.1: Riemann mapping theorem.

defined in $\omega_t \setminus \text{supp } S$). Function $f = f(\zeta, t)$ is the conformal transformation between the unit disk and the domain ω_t as each time t , as long as f remains univalent. We write

$$p(z, t) = \Re(W(z, t)) = \Re(W(f(\zeta, t), t)).$$

We will use the same notation ξ for a 2-dimensional vector (ξ_1, ξ_2) and its corresponding complex number $\xi_1 + i\xi_2$.

Cauchy-Riemann equation takes the form

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y},$$

knowing that on the boundary,

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial z}} = \nabla p = -\dot{\mathbf{s}} = -(\dot{x} + i\dot{y}) = -\dot{z} = -\dot{f}(\zeta, t),$$

and that

$$\Re\left(\dot{f} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta\right) = -\Re\left(\frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta\right) = -\Re\left(\frac{\partial W}{\partial \zeta} \zeta\right),$$

we obtain the desired result because of $\frac{\partial W}{\partial \zeta} \zeta \in \mathbb{R}$ for $|\zeta| = 1$ as $\Re\left(W\Big|_{|\zeta|=1}\right) = 0$.

□

3.1.3 Polynomial solution in sink-case

Let us briefly remind well-known results about explicit polynomial solutions in the Hele-Shaw problem with a unique sink (or source) point.

Substituting function S by a Dirac delta function at point $\mathbf{O}$ with strength -2π ($-\Delta p = -2\pi\delta_0$), we can easily solve the Dirichlet problem to obtain the following Polubarinova-Galin equation [27]

$$\Re(\dot{f} \overline{\zeta} \dot{f}') = -1, \quad |\zeta| = 1. \quad (3.4)$$

3 Contrôle optimal

This configuration corresponds to a large range of applications in engineering, the obvious one being oil extraction. Notice that, when time increases, area of the domain decreases.

Let us introduce real polynomial functions of degree $N + 1$ ($N \in \mathbb{N}^*$) (see [27])

$$f(\zeta, t) = \sum_{n=1}^{N+1} a_n(t) \zeta^n, \quad a_n(t) \in \mathbb{R}, \quad a_1(t) > 0, \quad (3.5)$$

which can be injected in the equation (3.4), so that we finally obtain, by direct computation, the system of equations

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & \dots & Na_N & (N+1)a_{N+1} \\ 0 & a_1 & \dots & (N-1)a_{N-1} & Na_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_1 & 2a_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & \dots & Na_N & (N+1)a_{N+1} \\ 2a_2 & 3a_3 & \dots & (N+1)a_{N+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_N & (N+1)a_{N+1} & 0 & \dots & 0 \\ (N+1)a_{N+1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \vdots \\ \dot{a}_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Looking at the last equation of this system, we are able to integrate it and we get

$$a_1^{N+1}(t)a_{N+1}(t) = \text{const}. \quad (3.6)$$

Moreover, the first equation is the variation of the area of the fluid, which can be also integrated into a relation governing area evolution

$$a_1(t)^2 + 2a_2(t)^2 + \dots + (N+1)a_{N+1}^2(t) = |\omega_0| - 2t, \quad (3.7)$$

with $|\omega_0|$ being the initial area.

When time increases and gets closer to $\frac{|\omega_0|}{2}$ ($t \rightarrow \frac{|\omega_0|}{2} - 0$), the equation (3.7) states that $a_1(t)$ and $a_{N+1}(t)$ tend to zero, when $a_1^{N+1}(t)a_{N+1}(t)$ should remain constant according to (3.6). This impossibility proves that the occuring of a cusp is unavoidable; at a moment $t^* < \frac{|\omega_0|}{2}$ the polynomial solution ceases to exist because of a lost of univalence (except in case $N = 0$).

In this article, our purpose is to improve the capacity of extraction. We would like to get all the fluid, or at least the most we can. A first idea consists in the introduction of a second hole, allowing us to control the shape of the fluid and to increase the quantity of extracted fluid.

3.1.4 Sink/source configuration

Let us consider the following configuration. Within the fluid, on axis $O(x)$, are localized two holes, that is two Dirac delta functions with respective strengths Q_1 and Q_2 . The first one of strength Q_1 is fixed on origin point $\mathbf{O}$ and the second one at a distance L from point $\mathbf{O}$. The signs of the values Q_1 and Q_2 determine whether the hole is a source (> 0) or a sink (< 0). A function f realizes the conformal transformation between the unit disk and the fluid domain. Furthermore, the curve $f(\partial U, t)$ is symmetric relative to the x -axis. In these assumptions, knowing that $f([0, 1], t) \in \mathbb{R}^+$ and that $f(1, t)$ belongs to the fluid boundary, we deduce the existence of a quantity $d(t) \in]0, 1[$ depending on time and such that $f(d(t), t) = L$. As long as $d(t)$ remains less than 1, the hole takes place within the fluid and an equation of Polubarinova–Galin’s type can be found. The geometrical situation of the transformation is presented on figure 3.2.

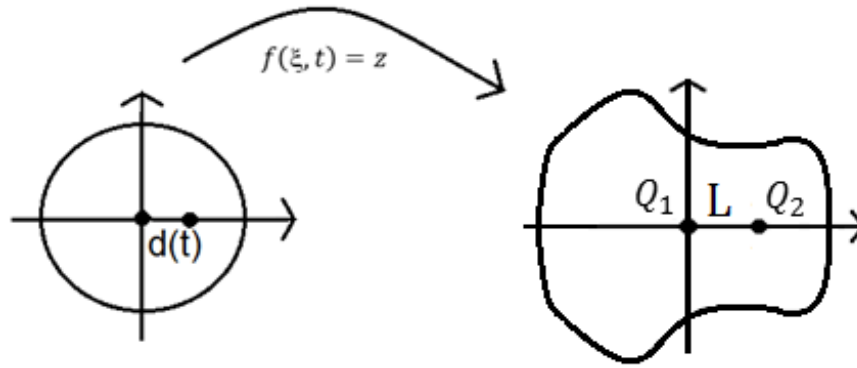


Figure 3.2: Riemann mapping theorem in sink/source configuration.

Proposition 3.1. *Polubarinova–Galin equation in sink/source configuration.*

If solving $f(d(t), t) = L$, we verify the inequality $d(t) < 1$, then the shape of the boundary in the sink/source problem is governed by equation

$$\Re \left(\dot{f} \overline{\zeta} \overline{f'} - \frac{Q_2}{2\pi} \frac{1 + d(t)\zeta}{1 - d(t)\zeta} \right) = \frac{Q_1}{2\pi}, \quad |\zeta| = 1.$$

Proof. Substituting source term in the generalized Polubarinova–Galin equation by the function $S(\zeta) = Q_1\delta(\zeta) + Q_2\delta(\zeta - d)$ (see remark (3.3)), we obtain a solution for the Dirichlet problem, which can be explicitly described by elementary functions

$$W(\zeta, t) = -\frac{Q_1}{2\pi} \ln(\zeta) - \frac{Q_2}{2\pi} \ln \left(\frac{\zeta - d(t)}{d(t)\zeta - 1} \right),$$

and we obtain on $\partial U = \{\zeta | \zeta = e^{i\theta}, \theta \in [0; 2\pi[\}$,

$$-\frac{\partial W}{\partial \zeta} \zeta = \frac{Q_1}{2\pi} + \frac{Q_2}{2\pi} \frac{1 - d(t)^2}{1 - 2d(t) \cos \theta + d(t)^2}.$$

Quantity $\frac{1-d^2}{1-2d\cos\theta+d^2}$ is called Poisson kernel. In particular, we have

$$\frac{1-d^2}{1-2d\cos\theta+d^2} = \Re\left(\frac{1+d\zeta}{1-d\zeta}\right),$$

and the result is proved. $\square$

As in the previous section, we would like to explicit a family of “simple” solutions, for example of polynomial type (3.5), in order that the resulting system of equations remains a finite-dimensional system from a optimal control point of view. However,

Proposition 3.2. *There is no polynomial solution to the Hele–Shaw problem in the sink/source configuration.*

Proof. Because of the relation $\Re\left(\frac{1+d\zeta}{1-d\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d^{|n|}\zeta^n$ we have

$$\Re\left(\frac{\partial f(e^{i\theta}, t)}{\partial t} e^{-i\theta} \overline{\frac{\partial f(e^{i\theta}, t)}{\partial \theta}}\right) = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi} + \frac{Q_2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} d^n \cos n\theta. \quad (3.8)$$

With a polynomial solution (3.5), we get, by identification of coefficients in front of cosine functions, $d(t)^k = 0, k \geq N+1$. Then $d(t) = 0$ and the two Dirac functions should be on the same point $\mathbf{O}$, which is impossible in the sink/source configuration. $\square$

3.2 Multipole configuration

Polynomial contours are close to real ones and should be studied in order to understand qualitative behavior of the problem. As we will see, there exists a way to control the domain while conserving the polynomial structure of the solutions; but this approach needs the introduction of pointwise configuration named *multipoles*, which was already introduced in [24]. We describe the building of multipoles and give the link between the classical approach by Richardson’s moments and ours.

3.2.1 Dipole and multipole approximation

The limit calculations of this section can be avoided looking at the paragraph 3.1.1 *Limit in Laplace’s equation (see remark 3.5)*, nevertheless it seems to be useful to expose the physical building of multipoles.

To introduce a dipole, we consider that, in the unit disk, two holes with opposite strength Q are localized at a distance d and $-d$ from point $\mathbf{O}$ on the x -axis. We search

the form of the solution when the two holes are getting closer (d tends to 0), while quantity $Q \cdot d$ remains constant ($= D$). We intentionally do not look at the real position of the holes in the z -plane.

We have to solve the following Dirichlet problem in the unit disk U (see remark 3.3 for the removing of $|f'|^2$)

$$\begin{cases} -\Delta u_{(d)} = D \frac{\delta_d - \delta_{-d}}{2d}, & \text{in } U, \\ u_{(d)} = 0, & \text{on } \partial U, \end{cases}$$

and making d tend to 0. We notice that the right hand side of the Laplace equation tend to $D \delta'_0$.

We get

$$u_{(d)} = -\frac{D}{4\pi d} \ln \left| \frac{\zeta - d}{d\zeta - 1} \right| + \frac{D}{4\pi d} \ln \left| \frac{\zeta + d}{d\zeta + 1} \right|,$$

and if $\zeta = r \cos \theta + ir \sin \theta$, then

$$\begin{aligned} u_{(d)} = & -\frac{D}{8\pi d} \ln(d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta) + \frac{D}{8\pi d} \ln(1 + d^2 r^2 - 2dr \cos \theta) \\ & + \frac{D}{8\pi d} \ln(d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta) - \frac{D}{8\pi d} \ln(1 + d^2 r^2 + 2dr \cos \theta), \end{aligned}$$

when $d \rightarrow 0$ by taking pointwise limit outside the origin, we have

$$\begin{aligned} u_{(d)} \rightarrow u = & \frac{D}{8\pi} \left(\frac{4r \cos \theta}{r^2} - 4r \cos \theta \right) = \frac{D}{2\pi} \left(\frac{\cos \theta}{r} - r \cos \theta \right), \\ u = & \frac{D}{2\pi} \Re \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right). \end{aligned}$$

Function $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta} - \zeta$ as a rational function is holomorphic on $\mathbb{C}^*$. Consequently, the complex solution of this Dirichlet problem when $d \rightarrow 0$ is

$$W(\zeta) = \frac{D}{2\pi} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right),$$

and

$$-\frac{\partial W}{\partial \zeta} \zeta = \frac{D}{\pi} \cos \theta, \quad |\zeta| = 1.$$

The infinite serie in (3.8) is reduced to a unique term, the identification can be done and we conserve the polynomial form of the solution.

To generate other control parameters by introducing high order multipoles, we add Dirac functions in the unit disk. An amount of $2n$ sources and sinks alternatively and regularly

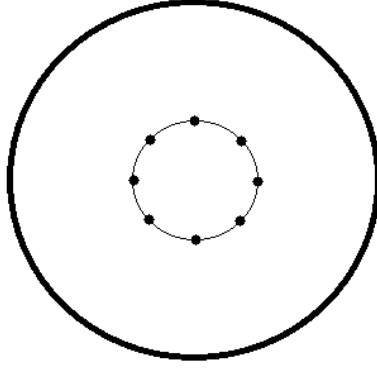


Figure 3.3: A multisource configuration of degree 4.

set on a small circle of radius d (see figure 3.3) leads to the following equations describing a multisource configuration

$$\begin{cases} -\Delta W_n = \frac{\pi}{2n d^n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \delta(d e^{\frac{i k \pi}{n}}), & \text{in } U, \\ \Re(W_n) = 0, & \text{on } \partial U. \end{cases} \quad (3.9)$$

Remark 3.4. The right hand side of the Laplace equation in (3.9) tends to $\frac{(-1)^{n-1} \pi}{n!} \delta^{(n)}$ as $d \rightarrow 0$.

Without taking into account the boundary condition, we solve (3.9) in the whole complex plane and we get

$$W_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{4n d^n} \ln(\zeta - d e^{\frac{i k \pi}{n}}).$$

Our purpose is to obtain the form of the solution when d gets closer to 0. In [50], we have the relation

$$\frac{1}{2n} \Re\left(\frac{1}{\zeta^n}\right) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{4n d^n} \ln |\zeta - d e^{\frac{i k \pi}{n}}|.$$

Finally, the solution of the problem (3.9) when d tends to 0 is

$$W_n = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{\zeta^n} - \zeta^n \right), \quad (3.10)$$

noticing that a polynomial is a harmonic function and that the boundary condition is verified.

We now can combine different multipoles in a same point, considering that the harmonic function W in the unit disk has a growth rate at point $\mathbf{O}$ of kind

$$W(\zeta) = \ln(\zeta) + \frac{u_1}{2} \left(\frac{1}{\zeta}\right) + \dots + \frac{u_N}{2N} \left(\frac{1}{\zeta^N}\right) + O(1), \quad (3.11)$$

with real u_i , $i = 1, \dots, N$, being the strength of the i -th multipole, and we solve the two equations

$$\begin{aligned} -\Delta W &= 0, & \text{in } U \setminus \{0\}, \\ \Re(W) &= 0, & \text{on } \partial U. \end{aligned} \quad (3.12)$$

If f is a polynomial solution of kind (3.5), it leads to a system of $(N + 1)$ equations with N control parameters

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & \dots & Na_N & (N+1)a_{N+1} \\ 0 & a_1 & \dots & (N-1)a_{N-1} & Na_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_1 & 2a_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \right. \\ & + \left. \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & \dots & Na_N & (N+1)a_{N+1} \\ 2a_2 & 3a_3 & \dots & (N+1)a_{N+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Na_N & (N+1)a_{N+1} & 0 & \dots & 0 \\ (N+1)a_{N+1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \vdots \\ \dot{a}_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Remark 3.5. *We a posteriori notice that the form of a multipole solution corresponds to the solution of the Laplace's equation with derivatives of the Dirac delta function in the right hand side. This result is justify by the theorem 3.1.*

Indeed, with $|f^2(0, t)|S(\zeta) = \delta^{(n)}(\zeta)$, a solution of the Stokes condition is smooth outside the origin (see [38]) and coincides with $\frac{1}{2\pi} \ln^{(n)}(\zeta) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi} (n-1)! \zeta^{-n}$. A unique solution due to restriction $\Re W|_{|\zeta|=1} = 0$ is (outside the origin)

$$W(\zeta) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi} (n-1)! \left(\frac{1}{\zeta^n} - \zeta^n \right),$$

which gives the solution (3.10) by linearity and remark 3.4.

3.2.2 Richardson's moments

The previous method leads to a simple system of equations (3.13), however the physical understanding of these multipoles is not clear. Multipoles were added in the ζ -plane, but one can only act on the real world of the z -plane. This second approach needs the introduction of the system of Richardson's moments [57]. Contrary to Polubarinova-Galin equation, this system has a strong deficiency. Namely, the domain can not be in general reconstructed by its Richardson's moments. There is exceptions when one can guarantee the uniqueness of the domain with given Richardson's moments (see [66]). In other words, there are many different domains with identical Richardson's moments (see

[61]) and this approach has to be used carefully.

We consider that a combination of multipoles takes place at point $\mathbf{O}$, so that the pressure at this point possesses the following growth rate

$$p(z) = \ln |z| + \frac{v_1}{2} \Re\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + \frac{v_N}{2N} \Re\left(\frac{1}{z^N}\right) + O(1), \quad (3.14)$$

with real v_i , $i = 1, \dots, N$, being the strength of the i -th multipole in the z -plane. We define the Richardson's moments as follows

$$M_n = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_t} z^n d\Sigma, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 3.3. *With the combination of multipoles 3.14 at point $\mathbf{O}$, we have an infinite number of differential equations*

$$\frac{d}{dt} M_0 = -2, \quad \frac{d}{dt} M_1 = v_1, \quad \dots, \quad \frac{d}{dt} M_N = v_N, \quad \frac{d}{dt} M_k = 0, \quad k \geq N + 1.$$

Proof. Using the Reynolds transport theorem and then the Green's formula, we set

$$\frac{d}{dt} M_n = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_t} z^n \dot{s} \cdot \nu ds = -\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_t} z^n \partial_\nu p ds = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_t} z^n (-\Delta p) d\Sigma. \quad (3.15)$$

Looking at the previous remark 3.5 (translated to the z -plane), we have the possibility to use theorem 3.1 with source term

$$-\Delta p = S(z) = 2\pi\delta_0 + \sum_{k=1}^N v_k \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(z).$$

Substituting $-\Delta p$ by S in 3.15, we obtain the desired result. $\square$

A very elegant result exists about Richardson's moments in the polygonal case.

With the map $f(\zeta, t) = z$ from the unit disk U we have

$$M_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial U} f^n(\zeta, t) f' \bar{f} d\zeta.$$

With a polynomial (3.5) of degree $N + 1$ we get $N+1$ relations (see [44]) by residue theorem

$$M_n = \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}} i_1 a_{i_1}(t) a_{i_2}(t) \dots a_{i_{n+1}}(t) a_{i_1 + \dots + i_{n+1}}(t), \quad n \in \{0, \dots, N\}.$$

In this case, the system of equations is reduced to a finite system of $N + 1$ equations because of $M_k = 0$, $k \geq N + 1$.

3.2.3 Links between Richardson's moments and Polubarinova–Galin equation

We found two different ways to control the system. Control parameters u_n can be introduced in the Polubarinova–Galin equation and we obtain a simple system of quadratic equations but the interpretation of the control parameters is not clear. The second approach used the Richardson's moments with control parameters v_n . In this case, the physical interpretation of the multipole is easy to make; however we work with moments, which are complicated polynomials of high degrees and we can not establish how the coefficients of the polynomial solution (3.5) change during time evolution.

The following theorem describes the links, which exist between the control parameters u_n and v_n for a polynomial solution.

Theorem 3.3. *When considering polynomial solutions to the Hele–Shaw problem of type $a_1\zeta + \dots + a_{N+1}\zeta^{N+1}$, links between the control parameters $u = (u_1, \dots, u_N)$ from the Polubarinova–Galin equation and the second ones $v = (v_1, \dots, v_N)$ used in the Richardson's moments are described by relations*

$$\frac{v_n}{n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} i_1 a_{i_1}(t) a_{i_2}(t) \dots a_{i_n}(t) \frac{u_{i_1 + \dots + i_n}}{i_1 + \dots + i_n}, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.16)$$

In particular, we have

$$v_1 = a_1 u_1 + \dots + a_N u_N,$$

and

$$v_N = a_1^N u_N.$$

Proof. We prove this result by induction.

In case $N = 1$, we use the polynomial $f(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_2(t)\zeta^2$ and only one relation has to be found bounding parameters u_1 and v_1 .

Polubarinova–Galin equation gives the relation

$$2a_2 \dot{a}_1 + a_1 \dot{a}_2 = u_1,$$

whereas the moment is

$$M_1 = a_1^2 a_2.$$

We immediatly have $v_1 = a_1 u_1$ and the result is proved in this case.

If the result is true for all polynomials from degree 2 ($N = 1$) to P ($N = P - 1$), we will set that the result remains valid for a polynomial of degree $P + 1$ ($N = P$). Adding a coefficient a_{P+1} to the polynomial, we have new terms in the Polubarinova–Galin equation and in the Richardson's moments but the terms without a_{P+1} are conserved. We define

$$M_n = \sum_{k=n+1}^{k=P+1} M_n^k \quad \text{and} \quad u_n = \sum_{k=n+1}^{k=P+1} u_n^k,$$

where

$$\begin{cases} M_n^k = \sum_{i_1+\dots+i_{n+1}=k} i_1 a_{i_1}(t) a_{i_2}(t) \dots a_{i_{n+1}}(t) a_k(t), \\ u_n^k = k a_k \dot{a}_{k-n} + (k-n) a_{k-n} \dot{a}_k, \end{cases} \quad (3.17)$$

with $k \in \{n+1, \dots, P+1\}$, $n \in \{1, \dots, P\}$.

The hypothesis gives that for $k = (n+1) \dots P$, we have

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M_n - M_n^{P+1}}{n} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n} i_1 a_{i_1}(t) a_{i_2}(t) \dots a_{i_n}(t) \frac{u_{i_1+\dots+i_n} - u_{i_1+\dots+i_n}^{P+1}}{i_1 + \dots + i_n}, \quad n \in \{1, \dots, P-1\}.$$

and we should only prove that

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M_n^{P+1}}{n} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n} i_1 a_{i_1}(t) a_{i_2}(t) \dots a_{i_n}(t) \frac{u_{i_1+\dots+i_n}^{P+1}}{i_1 + \dots + i_n}, \quad n \in \{1, \dots, P\}.$$

It means that, when we introduce a new coefficient, the relation (3.22) is conserved. With the defition of M_n we know that

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_t} z^n d\Sigma = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\omega_t} z^n \bar{z} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_U f(\zeta)^n \overline{f(\zeta)} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_U \frac{1}{n+1} \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \zeta} \overline{f(\zeta)} d\zeta, \end{aligned}$$

where f denotes a polynomial (3.5) with $N = P$.

We remain the multinomial theorem :

$$(a_1 \zeta + \dots + a_{P+1} \zeta^{P+1})^n = \sum_{k_1+\dots+k_{P+1}=n} \binom{n}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} \zeta^{\sum_{i=1}^{P+1} i k_i}.$$

Then

$$\frac{1}{n+1} \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \zeta} = \sum_{k_1+\dots+k_{P+1}=n+1} \binom{n}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} \left(\sum_{i=1}^{P+1} i k_i \right) \zeta^{(\sum_{i=1}^{P+1} i k_i) - 1}.$$

Consequently, using $M_n = \frac{1}{2i\pi} \int_U \frac{1}{n+1} \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \zeta} \overline{f(\zeta)} d\zeta$, we obtain

$$M_n^{P+1} = (P+1) \sum_{\sum k_j=n+1, \sum j k_j=P+1} \binom{n}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} a_{P+1} \quad (3.18)$$

or using $M_n = \frac{1}{2i\pi} \int_U f(\zeta)^n \overline{f(\zeta)} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta$ we have

$$M_n^{P+1} = \sum_{m=1}^{P+1} \sum_{\sum k_j=n, \sum jk_j=P+1-m} \binom{n}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} m a_m a_{P+1}. \quad (3.19)$$

We derivate (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{M_n^{P+1}}{n} &= (P+1) \sum_{\sum k_j=n+1, \sum jk_j=P+1} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} \dot{a}_{P+1} \\ &+ \sum_{m=1}^{P+1} (P+1) \sum_{\sum k_j=n, \sum jk_j=P+1-m} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} \dot{a}_m a_{P+1}. \end{aligned}$$

Moreover, the first term of the sum (with $\dot{a}_{P+1}$) can be substituted by the expression in (3.19) and we have

$$\frac{d}{dt} \frac{M_n^{P+1}}{n} = \sum_{m=1}^{P+1} \sum_{\sum k_j=n, \sum jk_j=P+1-m} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} (m a_m \dot{a}_{P+1} + (P+1) a_{P+1} \dot{a}_m),$$

so that

$$\frac{d}{dt} \frac{M_n^{P+1}}{n} = \sum_{m=1}^{P+1} \left((P+1-m) \sum_{\sum k_j=n, \sum jk_j=P+1-m} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{P+1}} a_1^{k_1} \dots a_{P+1}^{k_{P+1}} \right) \frac{u_{P+1-m}^{P+1}}{P+1-m}, \quad (3.20)$$

and (using comparison of the derivative in the multinomial theorem)

$$\frac{d}{dt} \frac{M_n^{P+1}}{n} = \sum_{m=1}^{P+1} \sum_{\sum i_j=P+1-m} i_1 a_{i_1}(t) a_{i_2}(t) \dots a_{i_n}(t) \frac{u_{P+1-m}^{P+1}}{P+1-m}.$$

The result is established. □

Notice that in the sum by m there is no term for m greater than $N+1-n$.

An example with $N=3$. We have

$$v_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3,$$

$$v_2 = a_1^2 u_2 + 2a_1 a_2 u_3,$$

$$v_3 = a_1^3 u_3.$$

Remark 3.6. *Substitution in the Stokes equation.*

When the source term $S = S(z)$ in the Stokes equation of the real plane is made of a combination of derivatives of delta Dirac functions, the substitution of z by ζ is difficult to make but it gives a generalization of the links between Polubarinova–Galin equation and the Richardson’s moments. We write

$$\Delta_z u = -2\pi\delta(z) + \frac{(-1)^1}{1!}v_1\delta^{(1)}(z) + \dots + \frac{(-1)^N}{N!}v_N\delta^{(N)}(z)$$

and we search the corresponding coefficients $v_i = U_i(u_1, \dots, u_N)$ after substitution by ζ in the equation

$$\Delta_\zeta u = -2\pi\delta(\zeta) + \frac{(-1)^1}{1!}u_1\delta^{(1)}(\zeta) + \dots + \frac{(-1)^N}{N!}u_N\delta^{(N)}(\zeta).$$

Let us fix a moment $t = t_0$ and write $f(\zeta) = f(\zeta, t_0)$ for short. From the relation $\delta(f(\zeta)) = \frac{\delta(\zeta)}{|f'(t_0, t)|^2}$, we use the Faà di Bruno’s formula to write

$$\frac{\delta^{(n)}(\zeta)}{|f'(t_0, t)|^2} = \sum_{\sum ik_i=n} \binom{n}{k_1, \dots, k_j} \delta^{(k_1+\dots+k_n)}(z) \left(\frac{f^{(1)}(\zeta)}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}\right)^{k_n}. \quad (3.21)$$

However, δ function and its derivatives are generalized functions and should be considered under the action of a test function $\phi \in D$. For an entire $n \in 1, \dots, N$,

$$\frac{(-1)^n}{n!}u_n\delta^{(n)}(\phi) = \int_{\mathbb{C}} \frac{(-1)^n}{n!}u_n\delta^{(n)}(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \int_{\mathbb{C}} \frac{u_n}{n!}\delta(\zeta)\phi^{(n)}(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Noticing that

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{u_n}{n!}\delta(z)\phi^{(n)}(z)dz \wedge d\bar{z} = \int_{\mathbb{C}} \frac{u_n}{n!}\delta(f(\zeta))\phi^{(n)}(f(\zeta))|f'(\zeta)|^2d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

we apply the relation (3.21) to the function ϕ instead of δ and we obtain a relation between control parameters u_i and v_i of the following form

$$\frac{v_n}{n!} = \sum_{j=1}^N \sum_{\sum k_i=n, \sum ik_i=j} \binom{j}{k_1, \dots, k_j} \left(\frac{f^{(1)}(0)}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)^{k_n} \frac{u_j}{j!},$$

which can be simplified into

$$\frac{v_n}{n} = \sum_{j=1}^N \sum_{\sum k_i=n, \sum ik_i=j} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_j} j \left(\frac{f^{(1)}(0)}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)^{k_n} \frac{u_j}{j},$$

being the same formula as (3.20), so that we have a generalized version of the theorem 3.3

$$\frac{v_n}{n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} i_1 \left(\frac{f^{(i_1)}(0)}{i_1!}\right) \left(\frac{f^{(i_2)}(0)}{i_2!}\right) \dots \left(\frac{f^{(i_n)}(0)}{i_n!}\right) \frac{u_{i_1+\dots+i_n}}{i_1+\dots+i_n}, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.22)$$

3.3 Study of the controllability

3.3.1 Sufficient conditions

We are looking for conditions on control parameters to make the system controllable. We chose to work with the u -parameters from the Polubarinova–Galin equation; we will justify this approach.

Theorem 3.4. *For any polynomial solutions (3.5) of degree $N+1$, we are able to extract all the fluid while contour γ_t of the spot remains smooth, using the multipole structure with the following restrictions*

$$\begin{cases} |u_n| + |u_{N+1-n}| \leq 2, & n = 1, \dots, E[N/2], \\ |u_n| \leq 1, & n = E[N/2] + 1, \dots, N, \end{cases}$$

with $E[\cdot]$ being the floor function.

Proof. To extract all the fluid, we need to find a particular solution of the problem, which exists until the whole absorption of the fluid (until $\sum ia_i^2 > 0$). Let us design a control $u_k(t)$ such that the contour γ_t verifies the equalities

$$a_i(t) = c_i a_1(t)^i, \quad i = 1, \dots, N+1,$$

where c_i are constants and can be found by relations

$$c_i = \frac{a - i(0)}{a_1(0)^i}.$$

We obtain a corresponding polynomial function f of the form

$$f(\zeta, t) = \sum_{n=1}^{n=N+1} c_n (a_1(t)\zeta)^n.$$

We claim that, if the initial solution $f(\zeta, 0)$ is univalent and if $a_1(t)$ is decreasing, then $f(\zeta, t)$ is univalent until the end. Indeed, $f(\zeta, t) = f\left(\frac{a_1(t)}{a_1(0)}\zeta, 0\right)$.

Using $0 < a_1(t) \leq a_1(0)$, we obtain that $f(\zeta, t)$ coincides with $f(\zeta, 0)$ on the subdisk $|\zeta| \leq \frac{a_1(t)}{a_1(0)} \leq 1$.

Knowing that

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a_i}{a_1^i} \right) = 0,$$

that is

$$\dot{a}_i = ia_i \frac{\dot{a}_1}{a_1},$$

3 Contrôle optimal

we rewrite the system of equations (3.13) in another form

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^{N+1} i^2 a_i^2 \right) \frac{\dot{a}_1}{a_1} = -1, \\ \left(\sum_{i=1}^{N+1-n} 2i(i+n)a_i a_{i+n} \right) \frac{\dot{a}_1}{a_1} = u_n, \quad n = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

First equation states that a_1 is decreasing.

By elementary calculations, using the relation $2ab \leq a^2 + b^2$, we notice that for $n > E[N/2]$,

$$\left| \sum_{i=1}^{N+1-n} 2i(i+n)a_i a_{i+n} \right| \leq \sum_{i=1}^{N+1} i^2 a_i^2,$$

i.e.,

$$|u_n| \leq 1.$$

For $n \leq E[N/2]$,

$$\left| \sum_{i=1}^{N+1-n} 2i(i+n)a_i a_{i+n} \right| + \left| \sum_{i=1}^n 2i(i+N+1-n)a_i a_{i+N+1-n} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^{N+1} i^2 a_i^2,$$

i.e.,

$$|u_n| + |u_{N+1-n}| \leq 2.$$

□

In the planes (u_n, u_{N+1-n}) , $n = 1, \dots, E[N/2]$ the domain of controllability takes the form of an hexagon, as represented on figure 3.4.

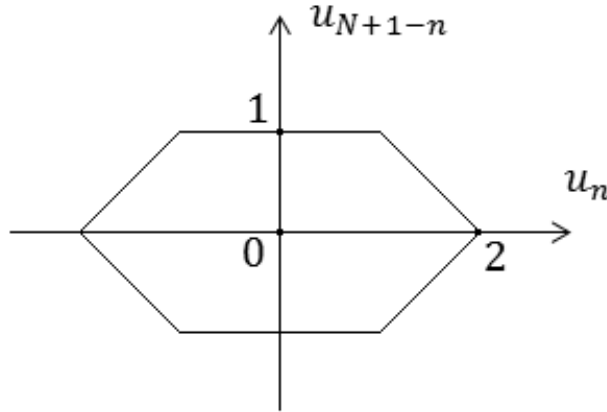


Figure 3.4: Domain of controllability in the plane (u_n, u_{N+1-n}) .

In the case of the v -parameters in z -plane the situation with controllability is much more complicated and we will further see in a simple example in dimension 2 that the boundaries for the control have to be considered on the u -control parameters in order to have a result not depending on the coefficients of the polynomial to obtain controllability.

3.3.2 Necessary conditions

In the next section, we will see that, for the 2-dimensional case, $f a_1 \zeta + a_N \zeta^N$, $N > 1$, the condition $|u_N| \geq 1$ is necessary. The dimension 3 gives us a similar result and we can guess the following proposition.

Let $U \subseteq \mathbb{R}^N$ denote the chosen convex set of admissible controls, i.e. we assume $(u_1, \dots, u_N) \in U$.

Conjecture 3.5. *For a polynomial solution (3.5) of degree $N + 1$, if there exists an admissible control extracting all the fluid for any initial spot, then U contains the set*

$$\sum_{n=1}^N |u_n| \leq 1.$$

3.4 Optimal control in small dimensions

3.4.1 Case of dimension 2

Equations of the problem

In dimension 2, the considered polynomials are of the form $f(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_N(t)\zeta^N$ with $N \geq 2$. The system of equations becomes

$$\begin{pmatrix} a_1 & N a_N \\ N a_N & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ u \end{pmatrix},$$

where $u = u_{N-1}$ is the unique control parameter.

We obtain

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1^2 - N^2 a_N^2} \begin{pmatrix} -a_1 - u N a_N \\ N a_N + u a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Necessary and sufficient condition of controllability

Let us assume that u belongs to a closed convex set $U \subset \mathbb{R}$.

Proposition 3.4. *The necessary and sufficient condition of controllability in the 2-dimensional case is*

$$|u| \leq 1.$$

Proof. The sufficient condition of controllability obtained in theorem 3.4 can be easily translated to this particular case and expressed by the inequality

$$|u| \leq 1. \quad (3.24)$$

We already know that this condition is sufficient, we prove that it is also necessary. By introduction of the unknown X such that $X = \frac{N a_N}{a_1}$, we obtain the equation

$$\dot{X} = \frac{1}{a_1^2} \frac{1}{1 - X^2} [uX^2 + X(N + 1) + uN].$$

Binomial $a_1(t)\zeta + a_N(t)\zeta^N$ remains univalent until $|X| = |\frac{Na_N}{a_1}| < 1$.

Rescaling the time (conserving its orientation), we simplify the expression into

$$\dot{X} = uX^2 + X(N + 1) + uN = g(X, u).$$

For $X \in [-1, 1]$ in a neighborhood of points $X = 1$ and $X = -1$, the velocity $\dot{X}$ should be oriented toward the point $X = 0$.

if these conditions are verified then

$$\begin{cases} \exists u & | & g(1, u) \leq 0, \\ \exists u & | & g(-1, u) \geq 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

consequently

$$\begin{cases} \exists u & | & (N + 1)(u + 1) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq -1, \\ \exists u & | & (N + 1)(u - 1) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 1. \end{cases}$$

Then, we have a domain of univalence necessary containing interval $[-1, 1]$ in order to verify the conditions (3.25), so that the equality (3.24) is a necessary and sufficient condition for the controllability of the system in dimension 2.

□

If the control is taken in the z -plane, we have the relation $v = a_1^N u$ (see 3.3) and the boundary of the domain of controllability for v depends on coefficient a_1 . For a bigger a_1 , we will need a bigger v , even if the geometry is the same (homothetic). The optimality in Pontryagin maximum principle imposes to have $v = \text{const}$ for a certain interval of time while a_1 decreases. From an engineer point of view, we will need a constant high power, whereas if we are able to estimate a_1 during time evolution, the used power can be chosen smaller for the same result (absorption of all the fluid).

Optimal control

We would like to minimize a quantity

$$\int_{t=0}^{t=T} h(a_1, a_N) dt,$$

during time evolution of the system. T is fixed and corresponds to the maximal time of existence of the spot in sink-case. Our aim is to get closer to the circle in order to avoid the occuring of singularities, that's why the function h will be chosen to be minimal for the circle. We will work with three main examples, $h(a_1, a_N) = a_N^2$, $h(a_1, a_N) = \frac{a_N^2}{a_1^2}$ and

$$h(a_1, a_N) = \left(\frac{a_N}{a_1^i}\right)^2.$$

We apply the Pontryagin maximum principle. Hamiltonian H is the following one

$$H = (p \quad q) \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \end{pmatrix} - h(a_1, a_N) = \frac{1}{a_1^2 - N^2 a_N^2} [-a_1 p + u(a_1 q - N a_N p) + N a_N q] - h(a_1, a_N).$$

If $a_1 q - N a_N p > 0$, then $u = u_{max} = 1$, we have $\dot{a}_1 + \dot{a}_N = 0$.

If $a_1 q - N a_N p < 0$, then $u = u_{min} = -1$, we have $\dot{a}_1 - \dot{a}_N = 0$.

If $a_1 q - N a_N p = 0$, then u can not be obtained from the maximum condition (it leads to singular extremals).

Optimal trajectories are straights with derivative ± 1 in the space phases (a_1, a_N) (see figure 3.5).

Now, we want to construct optimal synthesis. Singular extremals usually play a key role in investigating behaviour of optimal synthesis. So, let us find singular extremals in this problem, by solving

$$a_1 q = N a_N p, \quad t \in (t_1, t_2), \quad (3.26)$$

for some $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

We know that

$$\begin{aligned} -\dot{p} &= \frac{p + uq}{a_1^2 - N^2 a_N^2} - h'_{a_1}, \\ -\dot{q} &= N \frac{-q - up}{a_1^2 - N^2 a_N^2} - h'_{a_N}. \end{aligned}$$

Differentiating (3.26) and using (3.23), we have the equation

$$a_1 h'_{a_N} = N a_N h'_{a_1}.$$

With our examples,

if $h(a_1, a_N) = a_N^2$, then $2a_N a_1 = 0$, and $a_N = 0$;

if $h(a_1, a_N) = \frac{a_N^2}{a_1^2}$, then $\frac{2a_N}{a_1} \left(1 + \frac{N a_N^2}{a_1^2}\right) = 0$ and $a_N = 0$;

if $h(a_1, a_N) = \left(\frac{a_N}{a_1^i}\right)^2$, then $a_N(a_1^2 + N^2 a_N^2) = 0$, and $a_N = 0$.

In all the proposed examples, we have $a_N = 0$, so that $\dot{a}_N = 0$, i.e. $u = 0$ because of $a_1 \neq 0$ and $a_N = 0$.

Proposition 3.5. *In the particular case of a binomial solution f , the contour is optimally controllable (with chosen functions h) until total aspiration of the fluid with the choice of the following control parameter:*

- i) $u = 1$ ($a_N < 0$) or $u = -1$ ($a_N > 0$) until the occuring of a circular contour;
- ii) $u = 0$ from the moment when the contour became a circle.

Remark 3.7. *Optimality can be easily proved by Zelikina's theorem (see [69]).*

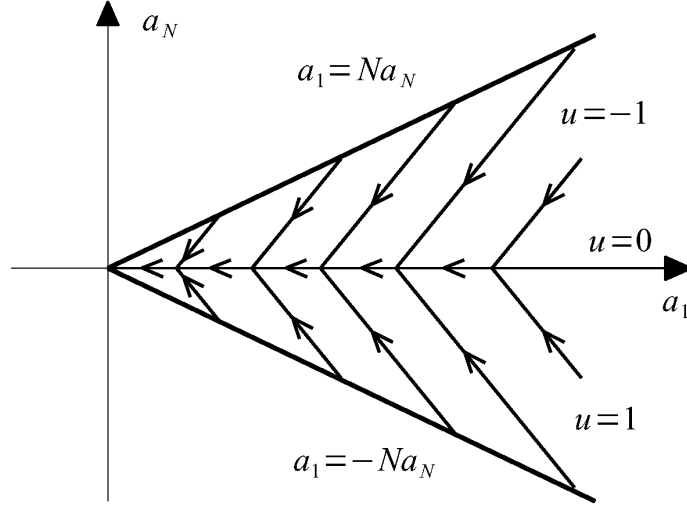


Figure 3.5: Optimal trajectories in space phases.

Fin de l'article (IV)

3.4.2 Case of dimension 3

Equations of the problem

We consider the contour represented by trinomial functions

$$f(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_N(t)\zeta^N + a_M(t)\zeta^M,$$

with $M = 2N - 1$. This restriction enables the stability of the system and no other harmonic occurs during time evolution.

Substituting this function into (3.13), the system of equations is reduced to the following three equations

$$\begin{pmatrix} a_1 & Na_N & Ma_M \\ Na_N & a_1 + Ma_M & Na_N \\ Ma_M & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

where $u = u_{N-1}$ and $v = u_{M-1}$ are the control parameters.

We write the system in a solved configuration

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_M \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -a_1(a_1 + Ma_M) - ua_1Na_N + v(N^2a_N^2 - Ma_M(a_1 + Ma_M)) \\ Na_N(a_1 - Ma_M) + u(a_1^2 - M^2a_M^2) - vNa_N(a_1 - Ma_M) \\ Ma_M(a_1 + Ma_M) + uNa_NMa_M + v(a_1(a_1 + Ma_M) - N^2a_N^2) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

with $D = (a_1 + Na_N + Ma_M)(a_1 - Na_N + Ma_M)(a_1 - Ma_M) = \alpha\beta\gamma$.

Quantities α , β and γ will be further used to simplify the writing.

A study of the domain of univalence for a trinomial solution and the exact solution without control parameter to these equations can be found in [58] (*chapter 2 of this thesis*). We normalize the trinomial, introducing new unknowns

$$(X, Y) = \left(\frac{Na_N}{a_1}, \frac{Ma_M}{a_1} \right),$$

and can restrict our study to half-plane $X \geq 0$ and $u \leq 0$ because of a trivial symmetry in the equations.

On the figure 3.6, we represente in grey the domain of univalence for $N = 3$.

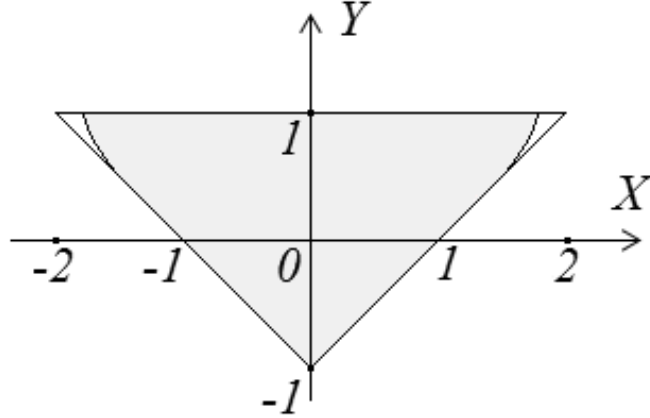


Figure 3.6: Domain of univalence for $N = 3$.

Controllability

Using the same technique as in theorem 3.4 on sufficient conditions of controllability, we obtain the two following relations

$$\begin{cases} |v| \leq 1, \\ |u| + |v| \leq 2. \end{cases} \quad (3.28)$$

We also have the potential necessary condition $|u| + |v| \leq 1$ (see conjecture 3.5). These conditions can be represented on the (u, v) -plane as done on the figure 3.7.

Rescaling the time, we write a system of two differential equations in X and Y describing the evolution of the system

$$\begin{cases} \dot{X} = NX(1 - Y) + X(1 + Y) + u(N(1 - Y^2) + X^2) \\ \quad \quad \quad + v(NX(Y - 1) - X(X^2 - Y(1 + Y))) , \\ \dot{Y} = 2NY(1 + Y) + 2NuXY + v((2N - 1)(1 + Y - X^2) - Y(X^2 - Y(1 + Y))) . \end{cases}$$

On the line of equation $1 - X + Y = 0$ we would like to find u and v such that,

$$-\dot{X} + \dot{Y} = (1 + u - v)X((3N - 1)X - 4N) \leq 0.$$

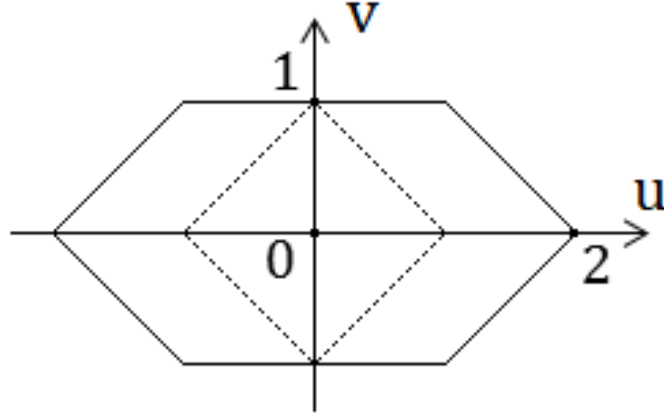


Figure 3.7: Boundaries of the “necessary” (dotted lines) and sufficient (continuous lines) domains of controllability.

The form of this equality suggests us that it could be sufficient to consider control parameters in a domain of kind $|u| + v \leq 1$. Notice that, when X is greater than $\frac{4N}{3N-1}$, the domain of univalence is not on straight $1 - X + Y = 0$ [59] and other conditions should be found. When X is equal to zero, $|v| \leq 1$ is a necessary and sufficient condition of controllability. We now need to verify that on the line $Y = 1$, we have $\dot{Y} < 0$ for a couple (u, v) such that $|u| + v \leq 1$ and $v \geq -1$. We have

$$\dot{Y} = 2N (2(1 + v) + uX - vX^2) ,$$

and if we choose $v = -1$ and $u = -2$ we obtain $\dot{Y} = 2NX(X - 2) < 0$ because of the restriction to half-plane $X \geq 0$ (and $X < 2$).

On the figure 3.8 we represent the simplified domain, which could be a good candidate for a domain of controllability.

Proposition 3.6. *Controllability is established if we are able to avoid the occuring of cusps and double points during time evolution. This is the case if we choose for $X \geq 0$ (symmetric result with $-u$ for $X \leq 0$)*

- $(u, v) = (0, 1)$ near the straight $Y = X - 1$, $X \in [0, 1]$,
- $(u, v) = (-2, -1)$ near the straight $Y = 1$, $X \in [0, 2]$ and the straight $Y = X - 1$, $X \in [0, 2]$.

Proof. On curve $v = u + 1$ we notice that the following simplification in (3.27) can be made

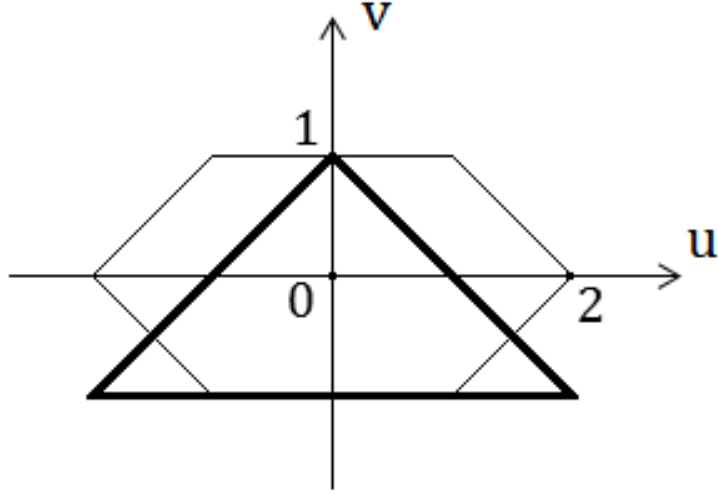


Figure 3.8: Possible domain of controllability.

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma} + \frac{u}{\alpha\gamma}(-Na_N - Ma_M) \\ \frac{u}{\alpha\gamma}(a_1 - Ma_M) \\ \frac{1}{\gamma} + \frac{u}{\alpha\gamma}(a_1 + Na_N) \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

and rescaling the time we write

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + (1+u)Na_N + (1+u)Ma_M) \\ u(a_1 - Ma_M) \\ (1+u)a_1 + (1+u)Na_N + Ma_M \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

a) In the case $(u, v) = (0, 1)$, the system of equation (3.30) becomes

$$\begin{pmatrix} a_1\dot{a}_1 + Ma_M\dot{a}_M \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_1 + \dot{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

which can be integrated to have

$$Y = M \left(\frac{\tilde{a}_1 + \tilde{a}_M}{N\tilde{a}_N} X - 1 \right),$$

with $\tilde{a}_i$ the initial value for a_i ($i = 1, N, M$). The point (X, Y) moves on direction $X > 0$ because of the relation $\dot{X} > 0$.

We conclude that in the domain of univalence with $X \geq 0$ and $Y \leq 0$ the system is controllable with control parameters $(u, v) = (0, 1)$. Indeed we have

$M \left(\frac{\widetilde{a}_1 + \widetilde{a}_M}{N\widetilde{a}_N} \right) \geq -1 + \frac{(2N-2)\widetilde{a}_1}{N\widetilde{a}_N} \geq 2N-3 \geq 1$ because of $X \leq 1$ in this part of the domain.

b) In the case $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-2, -1)$, using the unknowns X and Y , the system of equations (3.30) becomes

$$\begin{cases} \dot{X} = 2N(Y-1) - X(-1+X+Y), \\ \dot{Y} = M(-1-X+Y) - Y(-1+X+Y). \end{cases}$$

We search for which conditions on X and Y we will have the inequalities $\dot{Y} \leq 0$ and $\dot{Y} - \dot{X} \leq 0$.

$\dot{Y} \leq 0$ corresponds to $\frac{(M-Y)(Y-1)}{Y+M} \leq X$, and $\dot{Y} - \dot{X} \leq 0$ to $X^2 - 2NX + 1 \leq Y^2$.

For $Y = 1 - \epsilon$ with $\epsilon > 0$ we get $X \geq -\epsilon \frac{M-1+\epsilon}{M+1-\epsilon}$ and this inequality is always true in half-plane $X \geq 0$.

For $X \in]0, 1]$, we have on straight $Y = X - 1$: $\dot{Y} - \dot{X} = -2(N-1)X < 0$.

For $X \in [1, 2]$, the second inequality $\dot{Y} - \dot{X} \leq 0$ is also verified for points (X, Y) such that $X^2 - 2X + 1 \leq Y^2$. Finally, in the domain $X + Y \geq 1$ within the domain of univalence, the controllability is established if the frontier of this domain has a derivative greater or equal to 1 (for $X \geq 1$).

In [59], we know that

$$\frac{dY}{dX} = \frac{N}{2N-1} \frac{\sin(2N-1)\theta_{min}(X)}{\sin N\theta_{min}(X)},$$

with X and Y being respectively $\frac{Ma_M}{a_1}$ and $\frac{Na_N}{a_1}$ and $\theta_{min}(X)$ the point for which the minimum of the function is reached (see [59]). $\theta(X) > 0$ when $X > \frac{N+1}{3N-1}$ and we obtain $\frac{dY}{dX} < 1$ so that the result is proved. $\square$

Optimal control

We build the hamiltonian H and we minimize the same kind of integral with function h ,

$$H = pa_1 + qa_N + ra_M - h(a_1, a_N, a_M)$$

With the restriction $u \geq 0$, we solve the control problem on only two boundaries.

Boundary $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{1}$

Using the system of equations (3.29), we obtain

$$H = \frac{1}{D} [u((q+r)a_1 + (r-p)Na_N + (-p-q)Ma_M) + (r-p)\alpha] - h(a_1, a_N, a_M).$$

Then, if $(q+r)a_1 + (r-p)Na_N + (-p-q)Ma_M > 0$, we have $u = 0$ and if $(q+r)a_1 + (r-p)Na_N + (-p-q)Ma_M < 0$, $u = -2$.

In case of an equality

$$(q+r)a_1 + (r-p)Na_N + (-p-q)Ma_M = 0, \quad (3.31)$$

we search the singular trajectories corresponding to the edge $v = u + 1$. We have

$$\begin{aligned} -\dot{p} &= \frac{p-r}{\gamma^2} + (q+r)\frac{u}{\alpha\gamma} - \frac{\partial h(a_1, a_N, a_M)}{\partial a_1} \\ -\dot{q} &= (r-p)N\frac{u}{\alpha\gamma} - \frac{\partial h(a_1, a_N, a_M)}{\partial a_N} \\ -\dot{r} &= M\frac{r-p}{\gamma^2} + (-p-q)M\frac{u}{\alpha\gamma} - \frac{\partial h(a_1, a_N, a_M)}{\partial a_M} \end{aligned}$$

and differentiating (3.31), we get

$$\begin{aligned} (\dot{p}(-Na_N - Ma_M) + (q+r)\dot{a}_1) + (\dot{q}(a_1 - Ma_M) + (r-p)Na_N\dot{a}_N) \\ + (\dot{r}(a_1 + Na_N) + (-p-q)Ma_M\dot{a}_M) = 0. \end{aligned}$$

Moreover

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}(-Na_N - Ma_M) + (q+r)\dot{a}_1 &= \frac{p-r}{\gamma^2}(Na_N + Ma_M) - \frac{q+r}{\gamma} + \frac{\partial h}{\partial a_1}(-Na_N - Ma_M), \\ \dot{q}(a_1 - Ma_M) + (r-p)Na_N\dot{a}_N &= \frac{\partial h}{\partial a_N}(a_1 - Ma_M), \\ \dot{r}(a_1 + Na_N) + (-p-q)Ma_M\dot{a}_M &= M\frac{p-r}{\gamma^2}(a_1 + Na_N) + M\frac{-p-q}{\gamma} + \frac{\partial h}{\partial a_M}(a_1 + Na_N). \end{aligned} \right.$$

Using the relation

$$(q+r)a_1 + (r-p)Na_N + (-p-q)Ma_M = 0,$$

we get

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial a_1}(-Na_N - Ma_M) + \frac{\partial h}{\partial a_N}(a_1 - Ma_M) + \frac{\partial h}{\partial a_M}(a_1 + Na_N) = 0}.$$

3 Contrôle optimal

We choose to look at the result for a particular function h , $h(a_1, a_N, a_M) = |a_N| + |a_M|$. If $Y \geq 0$ we have $2 + X - Y = 0$ and this line does not intersect the domain of univalence for $X \geq 0$.

If $Y \leq 0$ we get $Y = -X$ and we determine the control on this trajectory

$$N\dot{a}_N + M\dot{a}_M = \frac{M}{\gamma} + \frac{u}{\alpha\gamma} ((N + M)a_1 + MNa_N - NMa_M) = 0.$$

With the relation $Na_N = -Ma_M$ we have

$$M + u((M + N) - 2NY) = 0,$$

and finally we found singular control of the first order corresponding to the edge $v = u + 1$,

$$u = \frac{M/N}{2Y - (1 + M/N)}.$$

We see that the control parameter u remains between -2 and 0 .

Boundary $v = -1$.

We set $\hat{u} = u + 2$ in order to simplify the writing. The system of equations (3.27) becomes

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_N \\ \dot{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} - \frac{2a_1}{\alpha\gamma} - \hat{u} \frac{a_1 Na_N}{\alpha\beta\gamma} \\ -\frac{2}{\alpha} + \hat{u} \frac{a_1^2 - M^2 a_M^2}{\alpha\beta\gamma} \\ -\frac{1}{\gamma} + \frac{2Ma_M}{\alpha\gamma} + \hat{u} \frac{Na_N Ma_M}{\alpha\beta\gamma} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

We have

$$\begin{aligned} -pa_1 Na_N + q(a_1^2 - M^2 a_M^2) + rNa_N Ma_M &> 0: u=2 \\ -pa_1 Na_N + q(a_1^2 - M^2 a_M^2) + rNa_N Ma_M &< 0: u=-2 \end{aligned}$$

In the case of an equality, we compute

$$\begin{aligned} -\dot{p} &= p \left[-\frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\alpha\gamma} + \frac{2a_1}{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right) \right] + q \left[\frac{2}{\alpha^2} \right] + r \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{2Ma_M}{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right) \right] \\ &\quad + \hat{u} \frac{-pNa_N + 2qa_1}{\alpha\beta\gamma} - \frac{\partial h}{\partial a_1}, \\ -\frac{\dot{q}}{N} &= p \left[\frac{2a_1}{\alpha^2\gamma} \right] + q \left[\frac{2}{\alpha^2} \right] + r \left[-\frac{2Ma_M}{\alpha^2\gamma} \right] + \hat{u} \frac{-pa_1 + rMa_M}{\alpha\beta\gamma} - \frac{\partial h}{\partial Na_N}, \\ -\frac{\dot{r}}{M} &= p \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{2a_1}{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} \right) \right] + q \left[\frac{2}{\alpha^2} \right] + r \left[-\frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\alpha\gamma} - \frac{2Ma_M}{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} \right) \right] \\ &\quad + \hat{u} \frac{-2qMa_M + rNa_N}{\alpha\beta\gamma} - \frac{\partial h}{\partial Ma_M}. \end{aligned}$$

We can simplify these equations and we have

$$\begin{aligned} -\dot{p} &= (p-r) \frac{-a_1 - Na_N + Ma_M}{\alpha\gamma^2} + \frac{2q}{\alpha Na_N} + \hat{u} \frac{-pNa_N + 2qa_1}{\alpha\beta\gamma} - \frac{\partial h}{\partial a_1}, \\ \dot{q} &= q \frac{\dot{a}_N}{a_N} + \frac{\partial h}{\partial a_N}, \\ -\frac{\dot{r}}{M} &= (p-r) \frac{-a_1 + Na_N + Ma_M}{\alpha\gamma^2} + \frac{2q}{\alpha Na_N} + \hat{u} \frac{-2qMa_M + rNa_N}{\alpha\beta\gamma} - \frac{\partial h}{\partial Ma_M}. \end{aligned}$$

Differentiating the equality

$$-pa_1Na_N + q(a_1^2 - M^2a_M^2) + rNa_NMa_M = 0, \quad (3.33)$$

we obtain

$$\begin{aligned} & -\dot{p}a_1Na_N + 2qa_1\dot{a}_1 - p\dot{a}_1Na_N \\ & + \dot{q}(a_1^2 - M^2a_M^2) + rNa_N\dot{M}a_M - pa_1N\dot{a}_N \\ & + \dot{r}Na_NMa_M - 2qMa_MMa\dot{M} + rNa_NMa\dot{M} = 0. \end{aligned}$$

Each line removes the coefficient on the control $\hat{u}$ (control parameter on a singular trajectory can not appear after first step of differentiating). We have

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q \frac{\dot{a}_N}{a_N} + \frac{\partial h}{\partial a_N}, \\ pa_1 + qa_N + ra_M &= \frac{p-r}{\gamma} - \frac{2q}{Na_N}, \\ a_1\dot{p} + a_N\dot{q} + a_M\dot{r} &= \frac{p-r}{\gamma} - \frac{2q}{Na_N} + a_1\frac{\partial h}{\partial a_1} + a_N\frac{\partial h}{\partial a_N} + a_M\frac{\partial h}{\partial a_M}. \end{aligned}$$

Or, for the last equation,

$$a_1\dot{p} + a_M\dot{r} = p\dot{a}_1 + ra_M + a_1\frac{\partial h}{\partial a_1} + a_M\frac{\partial h}{\partial a_M}.$$

I did not find a simplification in the equations allowing us to extract a relation between the coefficients a_1 , a_N , a_M and a general function h . However, a simple argument helps us to conclude when we make the choice $h(a_1, a_N, a_M) = |a_N| + |a_M|$. Indeed, we can compare quantities $\dot{a}_N + \dot{a}_M$ with $(u, v) = (-2, -1)$ and $(u, v) = (2, -1)$, we obtain

$$(\dot{a}_N + \dot{a}_M)(2, -1) - (\dot{a}_N + \dot{a}_M)(-2, -1) = \frac{4a_1}{D}(1 - Y^2 + XY).$$

3 Contrôle optimal

The quadratic equation $-Y^2 + XY + 1$ is positive if $Y \in [\frac{X - \sqrt{X^2 + 4}}{2}, \frac{X + \sqrt{X^2 + 4}}{2}]$, so that for all $X \in [0, 2]$, the result remains positive for all $Y \in [0, 1]$.

$$(\dot{a}_N + \dot{a}_M)(2, -1) - (\dot{a}_N + \dot{a}_M)(-2, -1) > 0 \quad X, Y \geq 0.$$

In this part of the domain of univalence, the choice $(u, v) = (2, -1)$ can not be optimal. We have the following proposition on optimal control with $X > 0$, the same results occur with $X < 0$ substituting parameter u by its opposite.

Proposition 3.7. *In the particular case of a trinomial solution f (with $X > 0$), the contour is optimally controllable (with $h = |a_N| + |a_M|$) until total aspiration of the fluid with the choice of the following control parameters:*

i) $(u, v) = (0, 1)$ if $Na_N + Ma_M < 0$, otherwise $(u, v) = (-2, 1)$,

ii) $(u, v) = \left(\frac{M/N}{2Y - (1 + M/N)}, \frac{M/N}{2Y - (1 + M/N)} + 1 \right)$ on the straight $Na_N + Ma_M = 0$ and until total absorption.

When the system attains the curve $X = 0$ or $Y = 0$, we apply proposition (3.5). Notice that the singular extremal (case ii) is always used when $a_M < 0$.

The optimal synthesis is summed up on the next figure 3.9.

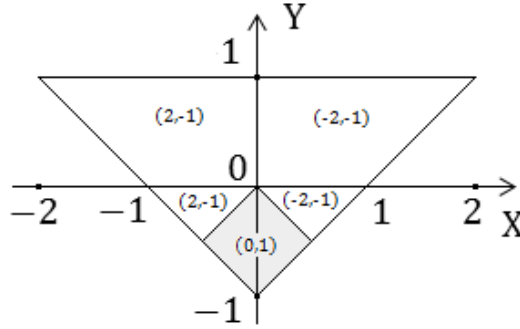


Figure 3.9: Optimal control in 3 dimensions.

3.5 Modèle de turbulence

3.5.1 Remarques préliminaires

Nous pouvons nous étonner du fait que, lorsque le fluide occupe initialement un domaine circulaire centré sur le puits, ce domaine reste circulaire jusqu'à l'absorption totale du fluide. En effet, nous observons dans la pratique que cette configuration est impossible à cause de la présence d'un phénomène d'instabilité. La modélisation du puits est réalisée par l'utilisation d'une fonction de Dirac et son aire d'application est alors nulle. Nous oublions ici de façon intentionnelle que la matière est composée de particules discrètes et de taille finie.

Afin de simuler le phénomène d'instabilité dans les équations, nous allons utiliser des multipôles qui prennent naissance naturellement dans une description probalistique de l'absorption. Notre but est d'introduire une modélisation nouvelle du puits capable d'expliquer la mal position du problème dans le cas puits.

Désignons par R la position de particules coïncidant avec le rayon du puits et par Q la puissance de l'absorption. En première approximation, nous pouvons écrire la relation

$$2\pi R \frac{dR}{dt} = Q.$$

La nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent) est déterminé par la valeur du nombre de Reynolds défini par

$$Re = \frac{RV}{\nu}$$

avec V étant la vitesse de la particule fluide et ν la viscosité cinématique. Nous avons alors

$$2\pi\nu Re = Q$$

établissant un lien direct entre la puissance de la source et le nombre de Reynolds. Lorsque Q est grand alors Re l'est aussi : l'écoulement devient localement turbulent (pour $Re \gg 2000$, par exemple, dans une conduite à section circulaire) près du puits et l'utilisation de multipôles s'en trouve justifiée. Cependant, nous ne pouvons qu'utiliser un nombre fini de multipôles mais cela est en accord avec la limitation introduite par la dimension de Kolmogorov.

3.5.2 Discrétisation du puits

Comme dans les paragraphes précédents, nous fixons Q à -2π et pour un petit disque D de rayon R centré sur le puits, nous avons pour n de 0 à N

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\pi} \int_D z^n d\Sigma = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} z^n (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = v_n,$$

avec $v_0 = -2$, $\vec{V}$ la vitesse des particules fluides sur la frontière et $\vec{n}$ sa normale extérieure. L'idée principale consiste à approcher le disque par un polygone régulier pour lequel chaque triangle isocèle représente une particule fluide. Cette approche est résumé par la figure 3.10.



Figure 3.10: Discretisation du puits avec $N = 3$.

La quantité $\vec{V} \cdot \vec{n} ds$ est le flux de particule par unité de temps (en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) à travers la frontière, noté x_i , pour le i -ème côté du polygone. En choisissant un flux symétrique par rapport à l'axe Ox , la discrétisation de l'intégrale mène à la relation

$$\frac{2R^n}{\pi} \sum_{i=1}^{i=N} \cos\left(n \frac{\pi}{N} \left(i - \frac{1}{2}\right)\right) x_i = v_n$$

Le cas $n = 0$ donne une normalisation de ces coefficients

$$\sum_{i=1}^{i=N} x_i = -\pi. \quad (3.34)$$

La valeur de x_i est déterminée à chaque itération temporelle comme étant la réalisation d'une variable aléatoire $-\frac{\pi}{N} X_i$, avec X_i une distribution de Poisson de paramètre 1 (en tant que limite d'une distribution binomiale). Par conséquent, la relation (3.34) est obtenue seulement en moyenne.

Finalement, la description de l'instabilité est incluse dans le choix aléatoire de N paramètres x_i à chaque itération de temps, et à partir desquels nous construisons la valeur des N moments v_i par la formule précédente. V_i est la variable aléatoire de réalisation v_i et nous introduisons la notation (bien que la somme soit discrète)

$$V_n = -2 \frac{R^n}{N} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos(n\theta) X_\theta d\theta. \quad (3.35)$$

Le paramètre R détermine la nature du puits avec pour seule restriction $R < 1$.

3.5.3 Expérience numérique

La première étape consiste à faire un choix des coefficients a_i d'un polynôme univalent de degré $N + 1$ (voir relation (3.5)),

$$f(\zeta, t) = \sum_{n=1}^{N+1} a_n(t) \zeta^n, \quad a_n(t) \in \mathbb{R}, \quad a_1(t) > 0. \quad (3.36)$$

Ensuite, nous choisissons le rayon R de notre puits beaucoup plus petit que a_1 afin de rendre l'approximation ponctuelle la plus valide possible. Par exemple, nous fixons a_1 à 1 000 avec R qui prend la valeur 0,5. À chaque pas de temps, l'aire recouverte par le puits est totalement absorbée et par conséquent nous avons la relation $\pi R^2 = 2\pi dt$, soit

$$dt = \frac{R^2}{2}.$$

Pour chaque dt , nous calculons une réalisation v_i de la variable aléatoire V_i . Avec les formules (3.3), nous pouvons trouver les paramètres u_i . Finalement, en résolvant le système d'équations (3.13), nous obtenons les nouveaux coefficients a_i au temps $t + dt$.

En commençant par un cercle centré sur le puits, nous sommes désormais capables de générer nous-mêmes des instabilités dans la dynamique du système. Nous avons obtenu une équation différentielle stochastique qui devra être par la suite étudiée pour mieux comprendre le comportement qualitatif du modèle.

3.6 Perspectives

Dans le problème de contrôle optimal pour les petites dimensions, nous avons des paramètres de contrôle u (ou u et v) fixés constants pendant une grande partie de l'évolution temporelle. Cependant, dans le plan réel, un opérateur devra tenir compte de la relation (3.3) et évaluer *en temps réel* les coefficients du polynôme a_i afin d'obtenir des contrôles v_i variables. Le second problème auquel nous faisons face est l'inversion du système (3.13). Pour de petits systèmes, nous avons réussi à appliquer le principe du maximum de Pontriaguine; cependant, dès la dimension 4, il devient très difficile d'inverser le système et d'appliquer le théorème. Nous proposons alors la solution suivante : étant donné que les paramètres v_i prennent une forme compliquée quel que soit notre choix pour les u_i , nous prenons la décision de ne plus « choisir » les u_i mais de les considérer comme une conséquence d'un choix des vitesses $\dot{a}$.

Présenté sous forme compacte, le système (3.13) correspond à la relation

$$A(a)\dot{a} = u,$$

que nous écrivons désormais

$$\begin{cases} \dot{X} = A(Y)U, \\ \dot{Y} = U, \end{cases}$$

3 Contrôle optimal

avec $u = \dot{X}$, $\dot{a} = U$, $a = Y$. Le système s'écrit ainsi sous une forme simple. Il reste à faire un choix judicieux d'une fonctionnelle à minimiser qui donnera un sens à ce changement de point de vue. Par exemple,

$$J = \int_{t=0}^{t=T} Y^2 dt + X^2,$$

l'instant $t = T$ étant le premier instant pour lequel le fluide est totalement absorbé, c'est-à-dire que $a_1(T) = \dots = a_{N+1}(T) = 0$ et $a_1(T - \epsilon) \neq 0$ pour un ϵ positif arbitrairement petit.

Avec cette fonctionnelle, notre but est alors double : minimiser les coefficients du polynôme ($Y = a$) et minimiser l'énergie utilisée pour faire fonctionner les multipôles ($X = \int U$).

Dans l'utilisation du théorème du maximum de Pontriaguine, il sera alors intéressant de remarquer la relation suivante – en notant $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{N+1})$ le vecteur adjoint au système –,

$$\psi A(Y) = (a_1, 2a_2, \dots, (N+1)a_{N+1}) \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_N & \psi_{N+1} \\ \psi_2 & \psi_1 & \ddots & \psi_{N-1} & \psi_N \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \psi_N & \psi_{N-1} & \ddots & \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_{N+1} & \psi_N & \dots & \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix},$$

ou sous forme compacte

$$\psi A(Y) = (a_1, 2a_2, \dots, (N+1)a_{N+1}) B(\psi),$$

en faisant remarquer que la matrice $B(\psi)$ est symétrique.

L'obstacle à une bonne application du résultat réside dans la compréhension du domaine de contrôlabilité pour les vitesses $\dot{a}$. Quelles doivent être les bornes de ce domaine pour obtenir un résultat intéressant ?

Ce premier travail devrait être suivi d'un second qui concerne l'étude du système stochastique obtenu dans la partie 3.5. Ce nouveau système nous donne la possibilité de rechercher des résultats qualitatifs dans l'étude du cas source pour les contours les plus « instables ». On pourrait se poser la question – en démarrant avec un contour initial circulaire – de savoir quelle proportion du fluide est absorbée entre deux cercles de rayons donnés après un temps $t > 0$.

Dans ce nouveau cadre, la perte d'univalence du contour serait réinterprétée non pas comme une frontière infranchissable, mais comme une limite de la modélisation qui

apparaît lorsque le rapport $\frac{R}{a_1}$ devient trop élevé. Une question intéressante consisterait à savoir sur quel intervalle de temps le système a presque sûrement une solution (en choisissant un contour initial circulaire).

Bibliographie

- [AB] SAKIR AMIROUDINE, JEAN-LUC BATTAGLIA (2011) Mécanique des fluides *Dunod*.
- [LBO] LUDWIG BOLTZMANN (1872) Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien*, 2, **66**, p. 275-370.
- [CIP] CARLO CERCIGNANI, REINHARD ILLNER, MARIO PULVIRENTI (1994) The mathematical theory of dilute gases. *Springer, New York*.
- [BCH] BRUNO CHÉRON (2001) Théorie cinétique, gaz et plasmas. Résumés de cours, problèmes corrigés. *Ellipses*.
- [ENS] DAVID ENSKOG (1917) Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen. *Uppsala, Almqvist och Wiksells boktryckeri-a.-b.*
- [FG] FRANÇOIS GOLSE (1998) From kinetic to macroscopic models. Session “L’Etat de la Recherche” de la SMF.
- [GUV] BJÖRN GUSTAFSSON, ALEXANDER VASILIEV (2006) Conformal and Potential Analysis in Hele–Shaw Cells. *Birkhäuser Basel*.
- [HIL] DAVID HILBERT (1912) Begründung der kinetischen Gastheorie, *Math. Annalen*, **72**, p. 562–577.
- [PLL1] PIERRE-LOUIS LIONS (1996) Mathematical Topics in Fluid Mechanics : Volume 1 : Incompressible Models. *The Clarendon Press Oxford University Press, New York*.
- [PLL2] PIERRE-LOUIS LIONS (1998) Mathematical Topics in Fluid Mechanics : Volume 2 : Compressible Models. *The Clarendon Press Oxford University Press, New York*.
- [ENL] EDWARD NORTON LORENZ (1963) Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, p. 130-141.
- [JCM] JAMES CLERK MAXWELL (1867) On the dynamical theory of gases. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **157**, p. 49-88.
- [HNA] HENRI NAVIER (1822) Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Académie Royale des sciences*, **6**, p. 389-440, publié en 1827, lu les 18 mars et 16 décembre 1822 à l’ARS.
- [NGO] CHRISTIAN NGÔ, HÉLÈNE NGÔ (2007) Physique statistique - Introduction. *Dunod*.
- [HPO] HENRI POINCARÉ (1890) Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. [mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II] *Acta Math.*, **13**, p. 1-270.

- [SSB] CLAUDE SEMAY, BERNARD SILVESTRE-BRAC (2007) Introduction au calcul tensoriel : Applications à la physique. *Dunod*.
 - [GGS] GEORGE GABRIEL STOKES (1846) Report on recent researches in hydrodynamics. *British Association for the Advancement of Science*.
 - [CVI] CÉDRIC VILLANI (2002) A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*.
 - [OPT] GALEEV, ZELIKINE, KONIAGUINE, MAGARILE-ILIEV, OSMOLOVSKII, PROTASOV, TIKHOMIROV, FURSIKOV (2008) Optimalnoe upravlenie. (in Russian)
 - [TRE] EMMANUEL TRÉLAT (2013) Contrôle optimal : théorie et applications. *Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)*. Livre en libre accès sur internet.
 - [WS] WITTEN T. A., SANDER L. M. (1981) Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Physical Review Letters*, **47**, p. 1400-1403.
-
- [1] ALMGREN R. (1995) Crystalline Saffman-Taylor fingers. *SIAM J. Appl. Math.*, **6**, 55, 1511–1535.
 - [2] ANTONTSEV A., MEIRMANOV A. M., YURINSKY V. (1999) Hele–Shaw flow in two dimensions : Global-in-time classical solutions. *Universidade da Beira Interior, Portugal*, preprint **6**.
 - [3] BAZALIÏ B. V. (1998) On a proof of the classical solvability of the Hele–Shaw problem with a free boundary. *Ukrainian Math. J.*, **50**, 11, 1452–1462.
 - [4] BEN AMAR M. (1991) Exact self-similar shapes in viscous fingering. *Phys. Review A*, **50**, 10, 5724-5727.
 - [5] BRANNAN D. A. (1967) Coefficient regions for univalent polynomials of small degree. *Mathematika*, **14**, no 2, 165-169.
 - [6] CAGINALP G. (1989) Stefan and Hele–Shaw type models as asymptotic limits of the phase-field equations. *Phys. Rev. A*, **39**, 11, 5887–5896.
 - [7] CAGINALP G., CHEN X. (1998) Convergence of the phase field model to its sharp interface limits. *European J. Appl. Math.*, **9**, 4, 417–445.
 - [8] CUMMINGS L. J., HOWISON S. D., KING J. R. (1999) Two-dimensional Stokes and Hele–Shaw flows with free surfaces. *European J. Appl. Math.*, **6**, **10**, 635-680.
 - [9] COHN A. (1922) Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Mathematische Zeitschrift*, **14**, no 1, 110-148.
 - [10] COWLING V. F., ROYSTER W. C. (1968) Domains of variability for univalent polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **19**, no 4, 767-772.
 - [11] DARCY H. (1856) Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau. *Paris, Victor Dalmont*.

- [12] DEMIDOV A. S. (1998) A polygonal model for the Hele–Shaw flow. *Uspekhi Mat. Nauk.*, **4**, 195–196.
- [13] DEMIDOV A. S. (2000) Some applications of the Helmholtz–Kirchhoff method (equilibrium plasma in tokamaks, Hele–Shaw flow, and high-frequency asymptotics). *Russian Journal of Mathematical Physics*, **7**, No. 2, 166–186.
- [14] DEMIDOV A. S. (2002) On evolution of a small perturbation of a circle in a problem for Hele–Shaw flows. *Communications of the Moscow Math. Society*, **6**.
- [15] DEMIDOV A. S. (2003) Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele–Shaw flows. *Journ. of Math. Sciences*. Translated from *Contemporary Math. and its Applications, Partial Differential Equations*, **2**, 22–49.
- [16] DEMIDOV A. S. (2006) Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele–Shaw flows. Part II. *Journ. of Math. Sciences*, **139**, 6, 2335–2343.
- [17] DEMIDOV A. S. (2010) A functional-geometric method for solving problems with a free boundary for harmonic functions. *Russian Math. Surveys*, **65**, 1, 1–94.
- [18] DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P. (2003) The Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flows. *Patterns and waves (Saint Petersburg, 2002)*, AkademPrint, St. Petersburg, 103–124.
- [19] DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P. (2009) Numerical scheme for Laplacian growth models based on the Helmholtz–Kirchhoff method. *Analysis and mathematical physics, Trends Math.* Birkhäuser, Basel, 107–114.
- [20] DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Cauchy problem for Stokes–Leibenson approximation in a Hele–Shaw corner cell. *CRAS mécanique*, Vol. 341, No. 11–12, 755–759
- [21] DEMIDOV A. S., LOHÉAC J.-P., RUNGE V. (2013) Attractors–repellers in the space of contours in the Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flows, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 189, No. 4, 568–581.
- [22] DEMIDOV A. S., VASILIEVA O. A. (1999) The finite point model of the Stokes–Leibenson problem for the Hele–Shaw flow. *Fundament. Priklad. Mat.*, **1**, 67–84.
- [23] DIEUDONNÉ J. (1931) Recherche sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d’une variable complexe. *Annales scientifiques de l’ENS*, **48**, 247–358.
- [24] ENTOV V. M., ETINGOF P. I., KLEINBOCK D. YA. (1993) Hele–Shaw flows with a free boundary produced by multipoles. *European Journal of Applied Mathematics*, **4**, 97–120.
- [25] ESCHER J., SIMONETT G. (1997) Classical solutions of multidimensional Hele–Shaw models. *SIAM J. Math. Anal.*, **28**, 1028–1047.
- [26] GAKHOV F. D. (1966) Boundary value problems. *Oxford, N.Y., Pergamon Press*.
- [27] GALIN L. A. (1945) Unsteady filtration with a free surface. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **47**, 250–253.

- [28] GILLOW K. A., HOWISON S. D. A bibliography of free and moving boundary problems for Hele–Shaw and Stokes flow, Published electronically at [http://people.maths.ox.ac.uk/howison/Hele–Shaw/](http://people.maths.ox.ac.uk/howison/Hele-Shaw/)
- [29] GUSTAFSSON B. (1984) On a differential equation arising in a Hele Shaw flow moving boundary problem. *Arkiv för Matematik*, **22**, no 1-2, 251-268.
- [30] GUSTAFSSON B. (1985) Applications of variational inequalities to a moving boundary problem for Hele–Shaw flows. *SIAM J. Math. Anal.*, **16**, 2, 279–300.
- [31] GUSTAFSSON B., VASILEV A. (2006) Conformal and potential analysis in Hele–Shaw cells. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- [32] HELE–SHAW H. S. (1898) The flow of water. *Nature*, **58**, no. 1489, 34-36, 520.
- [33] HOHLOV YU. E., HOWISON S. D. (1993) On the classification of solutions to the zero-surface-tension model for Hele–Shaw free boundary flows. *Quarterly of Appl. Math.*, **51**, no. 4, 777–789.
- [34] HOWISON S. D. (1986) Cusp development in Hele–Shaw flow with a free surface. *SIAM J. Appl. Math.*, **46**, no. 1, 20-26.
- [35] HOWISON S. D., KING J. (1989) Explicit solutions to six free-boundary problems in fluid flow and diffusion. *IMA J. Appl. Math.*, **42**, 155-175.
- [36] HOWISON S. D., OCKENDON J. R. (1999) Papers from the conference held in Oxford. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, **10**, 511–709.
- [37] HELMHOLTZ H. (1868) Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monatsber. Konigl. Akad. Wissenschaften, Berlin*.
- [38] HÖRMANDER L. (1963) Linear partial differential operators. *Springer Verlag*.
- [39] HÖRMANDER L. (1976) Linear partial differential operators. *Fourth Printing, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York..*
- [40] HUNTINGFORD C. (1995) An exact solution to the one-phase zero-surface-tension Hele–Shaw free-boundary problem. *Computers and Mathematics with Applications*, **29**, no. 10, 45-50.
- [41] KIRCHHOFF G. (1869) Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *Borchardt's J.*, Bd. 70, p 215-228.
- [42] KOCHINA P. YA. (1991) Selected works. Hydrodynamics and filtration theory. *Nauka, Moscow*.
- [43] KUFAREV P. P. (1948) A solution of the boundary problem for an oil well in a circle. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.)*, **60**, 1333–1334.
- [44] KUZNETSOVA O. S. (2001) On polynomial solutions of the Hele–Shaw problem. *Sibirsk. Mat. Zh.*, **42**, no. 5, 1084-1093; Engl. transl. : *Siberian Math. J.*, **42**, (2001), no. 5, 907-915.
- [45] LAMB H. (1932) Hydrodynamics. *Cambridge Univ. Press.*, 6th ed., Cambridge.
- [46] LAVRENTIEV M. A., SHABAT B. V. (1987) Methods of complex function theory. *Nauka, Moscow*.

- [47] LEIBENSON L. S. (1934) Oil producing mechanics, Part II. *Moscow, Neftizdat*.
- [48] MEIRMANOV A. M., ZALTZMAN B. (2002) Global in time solution to the Hele–Shaw problem with a change of topology. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, **13**, 431–447.
- [49] MUSKHELISHVILI N. I. (1933) Some problems of the theory of elasticity (in Russian). *Leningrad, AN SSSR* (1997 second english edition, Noordhoff Int. Publishing).
- [50] NIE Q. AND TIAN F. (2001) Singularities in Hele–Shaw Flows Driven by a Multiple. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **62**, no. 2, 385–406.
- [51] NISHIDA T. (1977) A note on a theorem of Nirenberg. *J. Differential Geom.*, **12**, no. 4, 629–633.
- [52] OCKENDON J. R., HOWISON S. D. (2002) Kochina and Hele–Shaw in modern mathematics, natural sciences and technology. *J. Appl. Math. Mech.*, **66**, 3, 505–512.
- [53] PLOTNIKOV P. I., STAROVOÏKOV V. N. (1993) The Stefan problem with surface tension as a limit of the phase field model. *Diff. Eq.*, **29**, 3, 395–404.
- [54] POLUBARINOVA-KOCHINA P. YA. (1945) On the motion of the oil contour. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **47**, 254–257.
- [55] POLUBARINOVA-KOCHINA P. YA. (1945) Concerning unsteady motions in the theory of filtration. *Prik. Mat. Mech.*, **9**, no. 1, 79–90. (in Russian)
- [56] RAHMAN Q. I., SZYNAL J. (1978) On some classes of univalent polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, **30**, no. 2, 332–349.
- [57] RICHARDSON S. (1972) Hele–Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel. *J. Fluid Mech.*, **56**, no. 4, 609–618.
- [58] RUNGE V. (2014) Exact real trinomial solutions to the inner and outer Hele–Shaw problem. *Journal of math. Fluid Mech.*, To be published.
- [59] RUSCHEWEYH S., WIRTHS K.-J. (1973) Über die Koeffizienten spezieller schlichter Polynome. *Ann. Pol. Math.*, **28**, 341–355.
- [60] SAFFMAN P. G., TAYLOR G. I. (1958) The penetration of a fluid into a porous medium or Hele–Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Royal Soc. London Ser. A*. **245**, 281, 312–329.
- [61] SAKAI M. (1978) A moment problem on Jordan domains. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **70**, no. 1, 35–38.
- [62] SAKAI M. (1991) Regularity of boundaries having a Schwarz function. *Acta Math.*, **166**, 263–297.
- [63] SAKAI M. (1993) Regularity of boundaries in two dimensions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **20**, 323–339.
- [64] SHAPIRO H. S. (1992) The Schwarz function and its generalization to higher dimensions. *University of Arkansas, lecture notes in the mathematical sciences*. **9**, New-York, John Wiley & Sons Inc.

BIBLIOGRAPHIE

- [65] STOKES G. G. (1898) Mathematical proof of the identity of the streamlines obtained by means of viscous film with those of a perfect fluid moving in two dimensions. *Brit. Ass. Rep.* 143 (Papers, V, 278).
- [66] VARCHENKO A. N., ETINGOF P. I. (1992) Why the Boundary of a Round Drop Becomes a Curve of Order Four? *University Lecture Series, AMS*, 3.
- [67] VINOGRADOV YU. P., KUFAREV P. P. (1947) On some particular solutions of the problem of filtration. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, **57**, 335-338. (in Russian)
- [68] VINOGRADOV YU. P., KUFAREV P. P. (1948) On a problem of filtration. *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Mech.*, **12**, 181-198.
- [69] ZELIKINA L. F. (1982) K voprosu o reguliarnom sinteze. In Russian.

Résumé. Éléments d'analyse et de contrôle dans le problème de Hele-Shaw

Cette thèse porte sur le traitement mathématique du problème de Hele-Shaw dans l'approximation de Stokes-Leibenson. À l'aide d'une transformation de type Helmholtz-Kirchhoff, nous explicitons une équation d'évolution du contour fluide valable pour tout type d'écoulement plan. Cette équation généralise des résultats précédents et permet alors d'établir un schéma numérique performant dit du quasi-contour, qui se réduit à un problème de Cauchy.

Nous considérons ensuite l'étude du problème par transformations conformes menant à l'équation de Polubarinova-Galin. Dans le cas simple d'un contour représenté par un trinôme à coefficients réels, nous réussissons à expliciter la solution exacte du problème. Notons que les trajectoires des solutions exactes permettent de préciser la position de la frontière des domaines d'univalence décrits par les trinômes.

Enfin, nous introduisons des paramètres de contrôle sous forme de coefficients d'un multipôle superposé à la source. Des conditions suffisantes de contrôlabilité sont établies et des résultats de contrôle optimal sont explicités pour les solutions binomiales et trinomiales. L'introduction de paramètres de contrôle permet de comprendre le lien qui relie les moments de Richardson à l'équation de Polubarinova-Galin.

Mots clefs : Hele-Shaw, approximation de Stokes-Leibenson, Helmholtz-Kirchhoff, solutions trinomiales réelles, domaine d'univalence, contrôlabilité, contrôle optimal.

Abstract. Elements of analysis and control in the Hele-Shaw problem.

This PhD thesis deals with the mathematical treatment of the Hele-Shaw problem in the Stokes-Leibenson approximation. By an Helmholtz-Kirchhoff transformation, we exhibited an evolutive equation of the fluid contour applicable to all type of planar flows. This equation generalizes previous results and also allows to state an efficient numerical scheme called quasi-contour's, which is a simple Cauchy problem.

We then consider the study of this problem using conformal transformations leading to the Polubarinova-Galin equation. In the simple case of a contour representing by a trinomial with real coefficients, we succeeded in exhibiting the exact solution of the problem. Notice that the trajectories of the exact solutions enable to precise the position of frontiers of univalent domains described by trinomials.

Finally, we introduce control parameters under the form of coefficients of a multipole superposed to the source. Sufficient conditions of controllability are stated and results on optimal control established for the binomial and trinomial cases. Introduction of control parameters allows us to understand the link, which bound Richardson's moments to the Polubarinova-Galin equation.

Key words : Hele-Shaw, Stokes-Leibenson approximation, Helmholtz-Kirchhoff, real trinomial solutions, domain of univalence, controllability, optimal control.