

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE,
PHYSIQUE THÉORIQUE ET INGÉNIERIE DES SYSTÈME (MIPTIS)

Laboratoire : MAPMO
Discipline : MATHÉMATIQUES

THÈSE présentée par :
Alaa JAMAL EDDINE
soutenue le 06 décembre 2013

pour obtenir le grade de : Docteur de l'université d'Orléans
Discipline : Mathématiques

Équations d'évolution sur certains groupes hyperboliques

THÈSE dirigée par :

M. Jean-Philippe ANKER	Professeur, <i>Université d'Orléans</i>
Mme. Vittoria PIERFELICE	Maître de conférence, <i>Université d'Orléans</i>

RAPPORTEURS :

M. Jacques FARAUT	Professeur émérite, <i>Université Pierre et Marie Curie</i>
M. Alberto SETTI	Professeur, <i>University of Insubria</i>

JURY :

M. Jean-Philippe ANKER	Professeur, <i>Université d'Orléans</i>
Mme. Vittoria PIERFELICE	Maître de conférence, <i>Université d'Orléans</i>
M. Jacques FARAUT	Professeur émérite, <i>Université Pierre et Marie Curie</i>
M. Alberto SETTI	Professeur, <i>University of Insubria</i>
Mme. Aline BONAMI	Professeur émérite, <i>Université d'Orléans</i> , Président du jury
Mme. Gabriella KUHN	Professeur, <i>Università di Milano-Bicocca</i>

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier mon directeur de thèse Jean-Philippe Anker pour m'avoir confié ce travail de recherches, ainsi que pour son aide, ses connaissances ainsi que ses idées pionnières sur mon sujet qui m'ont beaucoup apporté au cours de ces années. Je remercie également Vittoria Pierfelice, co-encadrante de ma thèse pour sa sympathie, ses idées et conseils, ainsi que pour son aide précieuse.

Je remercie les professeurs Jacques Faraut et Alberto Setti d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse et pour tous leurs commentaires pertinents concernant une version préliminaire de cette thèse. Je les remercie également d'avoir pu libérer du temps afin de participer aux jury de ma soutenance.

Je suis très reconnaissant aux professeurs Aline Bonami et Gabriella Kuhn d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais saluer les membres du laboratoire qui m'ont rendu ces années de thèse agréables par leur accueil et leur soutien. Je voudrais remercier Sylvain Arnt, collègue et ami, avec qui j'ai eu de longues discussions de travail. Son enthousiasme a rendu notre travail animé et productif. Un grand merci aux secrétaires du laboratoire pour leur efficacité, leur gentillesse et leur bonne humeur.

Merci à Sébastien Falguière de m'avoir soutenu et de m'avoir aidé pendant ma thèse. Impossible d'oublier les pauses cafés et déjeuners avec Perrine, Guillaume, Roland, David et Mathilde.

Le moral étant chose primordiale, je tiens à remercier mes amis qui m'ont soutenu depuis le début qu'ils aient été présents ou éloignés. Ils m'ont écouté lorsque j'en avais besoin et m'ont permis de sortir des mathématiques de temps en temps. Une grande pensée à Hassan et Alaa.

Les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier à mes parents, mon frère et mes soeurs, qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont soutenu tout le long de mes études.

Enfin, merci à Laura de m'avoir supporté pendant ces derniers mois de ma thèse.

Table des matières

1	Introduction	8
1.1	Cadre de travail	10
1.1.1	Géométrie et analyse harmonique sur les arbres	10
1.1.2	Noyau de la chaleur et équation des ondes sur $\mathbb{T}$	14
1.1.3	Les graphes symétriques polygonaux	16
1.2	Principaux résultats obtenus	18
1.2.1	Première partie : équation de Schrödinger semi linéaire sur un arbre homogène $\mathbb{T}$	18
1.2.2	Deuxième partie : Equations d'évolution sur un graphe symétrique Γ	20
2	Schrödinger equation on homogeneous trees	28
2.1	Introduction	29
2.2	Homogeneous Trees	32
2.3	Dispersive and Strichartz estimates	37
2.4	Well-posedness	42
2.5	Scattering	45
3	Noyau de la chaleur et équation de Schrödinger sur les graphes symétriques	48
3.1	Introduction	48
3.2	Définitions	48
3.3	Transformation d'Abel	51

3.4	Transformation d'Abel duale	59
3.5	Analyse sphérique sur les graphes symétriques	62
3.5.1	Les fonctions sphériques	62
3.5.2	Transformation de Fourier	63
3.6	Noyau de la chaleur en temps réel	70
3.6.1	Inégalités auxiliaires	73
3.6.2	Estimations ponctuelles du noyau de la chaleur	77
3.7	Noyau de la chaleur en temps complexe	88
3.8	Noyau de Schrödinger	89
4	Equation des ondes sur les graphes symétriques	95
4.1	Introduction	95
4.2	Equation des ondes modifiée sur Γ	97
	Perspectives	104
	Bibliographie	106

Conventions d'écriture

1- Si $u = u(t, x)$ est une fonction du temps t et d'une variable d'espace x , on note $u_t(x) = u(t, x)$.

2- Si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles positives, la notation $f \lesssim g$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f \leq Cg$. Cette notation est donc équivalente à $f = O(g)$. Par ailleurs, on notera $f \asymp g$ pour $f \lesssim g \lesssim f$.

3- Si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles positives, on notera $f \sim g$ si le quotient f/g tend vers 1.

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des équations d'évolution sur des structures discrètes hyperboliques au sens de Gromov. Les équations étudiées sont l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes. Nous nous sommes restreints à deux familles de groupes hyperboliques sur lesquels on dispose d'une analyse de Fourier effective. La première famille est constituée des arbres homogènes, qui ont fait l'objet de nombreux travaux, citons notamment Cartier ([15], [16]), Figà-Talamanca et Picardello ([33], [34]), Figà-Talamanca et Nebbia [32], Nebbia [61], Cowling, Meda et Setti ([28], [26], [29]). La seconde famille est constituée des graphes symétriques polygonaux ou graphes symétriques tout court qui sont les graphes de Cayley des produits libres $*^r \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, avec $r, k \geq 2$. Remarquons que les arbres homogènes sont des graphes symétriques particuliers, correspondant au choix du paramètre $k = 2$. L'analyse de Fourier sur ces graphes a été développée par Iozzi et Picardello ([42], [43]), Kuhn et Soardi [52], Faraut et Picardello [31]. Dans cette thèse, nous ne considérons pas le cas $k > r$ où un terme discret apparaît dans la formule de Plancherel et dans la décomposition spectrale du laplacien combinatoire.

Sur les arbres homogènes, les diffusions ont été étudiées de longue date, qu'il s'agisse des marches aléatoires en temps discret (voir par exemple [67], [55], [74]), ou de l'équation de la chaleur en temps continu (voir par exemple [64], [28], [68]). L'équation des ondes a été également considérée en temps discret ([63], [23], [3]), ou continu ([57], [58]). L'article [68] est consacré à des estimations du noyau de la chaleur en temps complexe sur des arbres homogènes. Dans le chapitre 2, nous les particularisons et nous les redémontrons en temps imaginaire, puis nous entreprenons une étude de l'équation de Schrödinger semi-linéaire

semblable à celle menée dans [4] sur les espaces hyperboliques. Ce chapitre en anglais fait l'objet d'un article intitulé "Schrödinger equation on homogeneous trees", qui a été accepté pour publication dans *J. Lie Theory*.

Les équations de la chaleur, de Schrödinger et des ondes n'avaient pas été étudiées précédemment sur les graphes symétriques. Nous les étudions dans les chapitres 3 et 4, à l'instar de ce qui avait été fait précédemment sur les espaces hyperboliques ([1], [4], [3]) ou sur les arbres homogènes ([28], [3], [44]). Un de nos résultats principaux est l'encadrement suivant du noyau de la chaleur en temps réel sur un graphe symétrique Γ de paramètres $k \leq r$.

Théorème 1.0.1. *Posons $q = (r - 1)(k - 1)$, $\alpha = \frac{q+1}{r(k-1)}$ et $\beta = \frac{2\sqrt{q}}{r(k-1)}$. Alors, le noyau de la chaleur vérifie l'estimation suivante*

$$h_t^\Gamma(x) = h_t^\Gamma(|x|) \asymp t^{-1} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(x) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(|x| + 1) \quad \forall t \geq 1, x \in \Gamma,$$

où $\varphi_0(x)$ est la fonction sphérique d'indice 0 et $h_t^{\mathbb{Z}}$ est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{Z}$.

Ainsi le noyau de la chaleur sur les graphes symétriques se comporte comme le noyau de la chaleur sur les arbres homogènes. Il en est de même pour le noyau de Schrödinger lorsque $k < r$, mais lorsque $k = r$, nous obtenons une décroissance en temps différente à l'infini, ce qui constitue un phénomène nouveau.

1.1 Cadre de travail

Un graphe est une paire $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ constituée d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}$ et d'une famille d'arêtes $\mathcal{E}$, où chaque arête est un sous-ensemble formé de deux éléments de $\mathcal{V}$. Si deux sommets x, y appartiennent à la même arête on dit qu'ils sont voisins. On s'intéresse aux graphes localement finis, ce qui signifie que chaque sommet x appartient à un nombre fini d'arêtes.

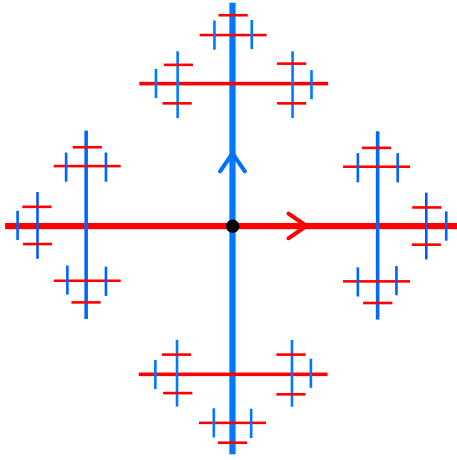


FIGURE 1.1 – Arbre homogène $\mathbb{T}_3$.

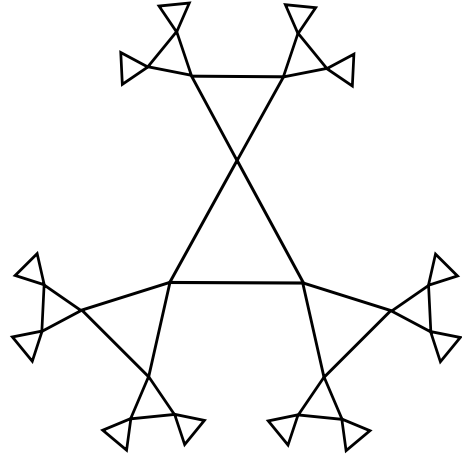


FIGURE 1.2 – Graphe symétrique avec $r = 2$ et $k = 3$

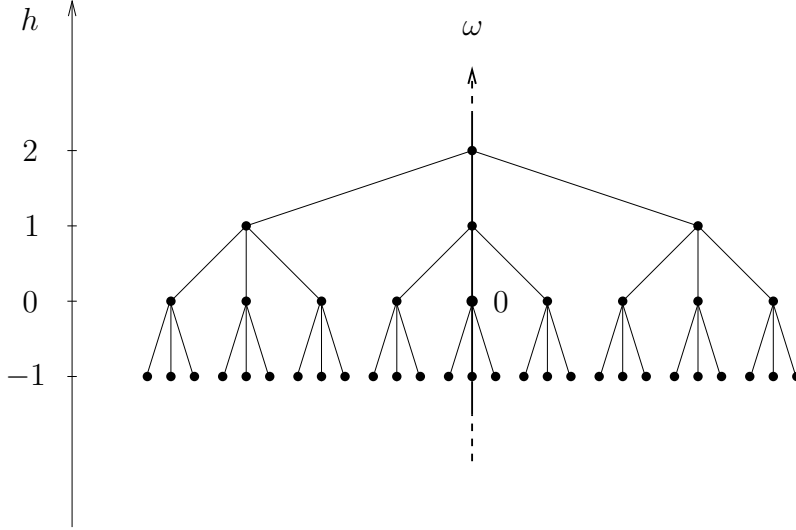
Un chemin est une suite finie $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de sommets $x_i \in \mathcal{V}$ tels que $\{x_i, x_{i+1}\} \in \mathcal{E}$. Un graphe est dit connexe si, pour tout $x, y \in \mathcal{V}$, il existe un chemin $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ reliant $x = x_0$ à $y = x_n$. Une chaîne est un chemin $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tel que $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ pour tout $0 < i < n$. Une chaîne $(x_0, \dots, x_n)$ telle que $x_0 = x_n$ s'appelle un lacet.

1.1.1 Géométrie et analyse harmonique sur les arbres

Définitions de base

Un arbre est un graphe connexe sans lacet. Dans ce cas, deux sommets quelconques x, y sont reliés par une unique chaîne, appelée géodésique et notée $[xy]$, et la distance $d(x, y)$ est le nombre d'arêtes dans $[xy]$. Un arbre est dit homogène si le nombre d'arêtes est constant en chaque sommet. Nous notons $\mathbb{T}_Q$ l'arbre à $Q + 1$ arêtes et nous éliminons le cas $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}$ en supposant $Q \geq 2$. La frontière Ω de $\mathbb{T}$ est constituée des rayons géodésiques ω partant à

l'infini. Pour tout $x, y \in \mathcal{V}$, les rayons géodésiques $[x, \omega]$ et $[y, \omega]$ ont un point de confluence $z \in \mathcal{V}$. Considérons la fonction de Busemann $\zeta_\omega(x, y) = d(x, z) - d(y, z)$. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, l'identité $\zeta_\omega(x, y) = 0$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{V}$, dont les classes d'équivalences sont les horocycles associés à ω . La longueur $|x|$ d'un élément dans G est

FIGURE 1.3 – Horocycles de $\mathbb{T}_3$

donnée par la distance de x à l'élément neutre o . Soit χ_1 la fonction caractéristique de l'ensemble des éléments de longueur 1 dans $\mathbb{T}$. Soit $C_r^*(G)$ la C^* -algèbre réduite de G (i.e la complétude de $L^1(G)$ par rapport à la norme de convolution L^2). La C^* -sous algèbre $\mathcal{C}^*(\chi_1)$ engendrée par χ_1 joue un rôle central dans l'étude fait dans [33], son rôle est similaire à celui des fonctions bi-K-invariantes sur les groupes de Lie semi-simple. En effet, A. Figà-Talamanca et M. Picardello [33] ont obtenu une décomposition intégrale de la représentation régulière sur les groupes libres grâce aux représentations irréductibles de la série principale. La mesure de Plancherel associée à cette décomposition s'est avérée être la seule mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) d\mu(t)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^*(\chi_1)$, où $\hat{f}$ est la transformation de Gelfand de f . Cette mesure de Plancherel et le système de polynômes orthogonaux associés $\{p_n\}$ sont très importants dans l'étude des marches aléatoires sur G . En effet, la n -ième probabilité de transition peut s'exprimer par des intégrales contenant μ et les polynômes orthogonaux [45]. Avoir une expression explicite de μ permettra d'obtenir des théorèmes de limite locaux ([65], [67]). Dans le cas des groupes libres de type fini, $\mathcal{C}^*(\chi_1)$ est l'algèbre des fonctions f qui sont radiales, i.e $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, et c'est une sous algèbre maximale commutative de $C_r^*(G)$.

On commence par définir quelques notions de l'analyse harmonique sur les arbres homogènes $\mathbb{T}$ en suivant les notations de [26]. L'analyse harmonique sur les arbres homogènes $\mathbb{T} = \mathbb{T}_Q$ a été initiée par Cartier ([15], [16]), puis considérablement développée par Figà-Talamanca et ses collaborateurs (voir les ouvrages [32], [34]). Citons également les travaux menés en parallèle par Choucroun (voir son mémoire [22]). Les travaux pionniers de Cartier contiennent déjà les deux outils de base qui sont les fonctions sphériques d'une part et la transformation de Radon horocyclique d'autre part. Dans [33], Figà-Talamanca et Picardello abordent l'analyse harmonique sur les arbres homogènes du point de vue des représentations du groupe libre à Q générateurs qui opère simplement transitivement sur $\mathbb{T}_{2Q-1}$. Dans [32], Figà-Talamanca et Nebbia réalisent les arbres homogènes $\mathbb{T}$ comme espaces homogènes G/K associés à des paires de Gelfand (G, K) et abordent l'analyse harmonique sur $\mathbb{T}$ du point de vue des représentations de G , en analogie avec le cas des espaces symétriques. Cette analogie est encore plus manifeste dans [22], où les arbres homogènes sont réalisés comme espaces symétriques de type p -adique. Par exemple, $\mathbb{T}_Q = PGL(\mathbb{Q}_Q)/PGL(\mathbb{Z}_Q)$ où Q est un nombre premier.

Dès l'origine, l'analyse sur les arbres homogènes a été développée en liaison avec l'étude des diffusions. Pour les marches aléatoires, citons les travaux de Cartier ([15], [16]), de Sawyer ([67]), de Lalley ([54], [55]), de Figà-Talamanca et Steger [35] et le livre de Woess [74]. Pour l'équation de la chaleur en temps continu, citons les travaux de Setti et ses collaborateurs ([68], [28], [59]).

Transformation de Fourier sphérique sur $\mathbb{T}$

On définit sur $\mathbb{T}$ le laplacien combinatoire par

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{Q+1} \sum_{d(x,y)=1} [f(x) - f(y)],$$

où $d(x, y)$ est la distance géodésique entre x et y dans $\mathbb{T}$. Les fonctions sphériques sont les fonctions propres de $\mathcal{L}$ associées aux valeurs propres $\gamma(\lambda) = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{Q+1}(Q^{i\lambda} + Q^{-i\lambda})$. Figà-Talamanca et Picardello ont donné dans [33] deux expressions des fonctions sphériques, la première sous forme intégrale

$$\varphi_\lambda(x, \omega) = \int_{\Omega} P^{\frac{1}{2}+i\lambda}(x, \omega) d\nu(\omega),$$

et une expression exponentielle

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} c(\lambda) Q^{(-\frac{1}{2}+i\lambda)|x|} + c(-\lambda) Q^{(-\frac{1}{2}-i\lambda)|x|} & \text{si } \lambda \notin \frac{\tau}{2}\mathbb{Z}, \\ (-1)^{jn} \left(1 + \frac{Q^{\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}}+Q^{-\frac{1}{2}}}\right) n Q^{-\frac{n}{2}} & \text{si } \lambda \in (\frac{\tau}{2})j\mathbb{Z}, \end{cases}$$

où $\tau = \frac{2\pi}{\ln Q}$ et $c(\lambda)$ est l'analogie de la fonction c de Harish Chandra sur les groupes de Lie semi-simples. On a les symétries suivantes :

$$\varphi_\lambda = \varphi_{-\lambda} \text{ et } \varphi_{\lambda+\tau} = \varphi_\lambda.$$

La transformation de Fourier sphérique d'une fonction radiale sur $\mathbb{T}$ est donnée par

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \sum_{x \in \mathbb{T}} f(x) \varphi_\lambda(x).$$

Ainsi, par les symétries des fonctions sphériques, $\mathcal{H}f$ est paire et τ -périodique. La transformation sphérique inverse, ainsi que la formule de Plancherel ont été établies dans [33],

$$f(n) = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \mathcal{H}f(\lambda) \varphi_\lambda(n),$$

et

$$\|f\|_2^2 = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} |\mathcal{H}f(\lambda)|^2 \right) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T})^\sharp.$$

Cowling et Setti ont étendu dans [29] cette étude sur la transformation de Fourier-Helgason. Ils ont obtenu une caractérisation des images par la transformation de Fourier-Helgason des fonctions à supports bornés ainsi que des fonctions à décroissance rapide. Une caractérisation du même type a été obtenue simultanément par Casadio Tarabusi, Cohen, et Colonna [19] en utilisant la transformation d'Abel horocyclique sur les arbres.

Transformation d'Abel horocyclique sur $\mathbb{T}$

La transformation d'Abel horocyclique $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{T}$ a été introduite par Cartier dans [16]. Une formule explicite a été obtenue tout d'abord dans le cas des fonctions radiales dans [11] puis dans le cas général [9] (voir également [26]). Rappelons les expressions explicites de la

transformation d'Abel horocyclique et de son inverse dans le cas radial :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(h) &= Q^{\frac{|h|}{2}} + \frac{Q-1}{Q} \sum_{m=1}^{\infty} Q^{\frac{|h|}{2}+m} f(|h|+2m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} Q^{\frac{|h|}{2}+m} \{f(|h|+2m) - f(|h|+2m+2)\} \quad \forall h \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-1}f(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} Q^{-\frac{n}{2}-m} \{f(n+2m) - f(n+2m+2)\} \\ &= Q^{-\frac{n}{2}} f(n) - (Q-1) \sum_{m=1}^{\infty} Q^{-\frac{n}{2}-m} f(n+2m) \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Comme dans le cas des espaces symétriques, la transformation de Fourier sphérique se factorise au moyen de la transformation d'Abel horocyclique. Plus précisément,

$$\mathcal{H}f(\lambda) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{A})f(\lambda) \tag{1.1.1}$$

pour toute fonction radiale f , où $\mathcal{F}g(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) Q^{in\lambda}$ désigne la transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}$. Signalons que cette relation conduit à une autre démonstration de la formule d'inversion pour la transformation de Fourier sphérique.

1.1.2 Noyau de la chaleur et équation des ondes sur $\mathbb{T}$

Noyau de la chaleur

Les marches aléatoires sur les graphes constituent un analogue direct des diffusions sur les variétés (voir par exemple [24], [48], [72]). Comme l'ont fait Chavel et Feldman [21] ou Pang [64], on peut également parler des semi-groupes de la chaleur $e^{-t\Delta}$ en temps continu $t > 0$ sur les graphes. Cowling, Meda et Setti ont étudié dans [28] le semi-groupe de la chaleur associé au laplacien combinatoire $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$ sur un arbre homogène $\mathbb{T}$. En utilisant la transformation d'Abel inverse, ils ont obtenu l'expression explicite suivante du noyau de la chaleur sur $\mathbb{T}$:

$$h_t^{\mathbb{T}}(|x|) = e^{-(1-\gamma(0))t} q^{-\frac{|x|}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} q^{-m} [h_{t\gamma(0)}^{\mathbb{Z}}(|x|+2m) - h_{t\gamma(0)}^{\mathbb{Z}}(|x|+2m+2)], \tag{1.1.2}$$

où

$$h_t^{\mathbb{Z}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda e^{-t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} = e^{-t} I_n(t)$$

est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{Z}$, et $I_n(t)$ la fonction de Bessel modifiée de première espèce. Ils en ont déduit l'estimation suivante

$$h_t^{\mathbb{T}}(x) \asymp t^{-1} e^{-(1-\gamma(0))t} \varphi_0(|x|) h_{t\gamma(0)}^{\mathbb{Z}}(|x|). \quad (1.1.3)$$

Enfin, en utilisant des méthodes d'analyse sphérique, ils ont prouvé des estimations L^p du noyau de la chaleur, ainsi que des estimations $L^r - L^s$ du semi groupe associé. Dans [68], Setti a généralisé les résultats de [28] au noyau de la chaleur en temps complexe z avec $\operatorname{Re} z \geq 0$. Deux problèmes majeurs apparaissent dans ce cas. Le premier est le fait que le noyau sur $\mathbb{T}$ n'est plus positif, ce qui pose des difficultés majeures pour établir des minoration. Le deuxième problème est le fait que $h_z^{\mathbb{Z}}(n)$ n'est pas une fonction élémentaire. Afin de contourner ces problèmes, il utilise des méthodes d'équations différentielles déjà utilisées dans [62] pour obtenir un développement asymptotique des fonctions de Bessel modifiées et par conséquent de $h_z^{\mathbb{Z}}(n)$. Il en déduit des estimations ponctuelles de $h_z^{\mathbb{Z}}(n)$ et de $h_z^{\mathbb{T}}$, ainsi que des estimations dans des espaces de Lorentz.

Equation des ondes sur $\mathbb{T}$

Cohen et Pagliacci (cf.[63], [23]) ont considéré l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n^{\mathbb{Z}} u(x, n) = \mathcal{L}_x^{\mathbb{T}} u(x, n), \\ u(x, 0) = f(x), u(x, 1) = g(x), \end{cases} \quad (1.1.4)$$

en temps discret $n \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{T}$, où

$$\mathcal{L}^{\mathbb{Z}} f(n) = f(n) - \frac{f(n+1) + f(n-1)}{2}.$$

Ils ont établi une expression explicite des solutions de cette équation et ils ont prouvé que les solutions se propagent à vitesse finie mais que le principe d'Huygens n'est pas satisfait. Medolla et Setti ([57], [58]) ont considéré l'équation des ondes modifiée suivante :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) = -(\mathcal{L}_x^{\mathbb{T}} - b) u(x, t), \\ u(x, 0) = f \quad \partial_t|_{t=0} u(x, t) = g(x), \end{cases} \quad (1.1.5)$$

en temps continu $t \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}$ où $b = (1 - \gamma(0))$ est le bas du spectre de $\mathcal{L}^{\mathbb{T}}$ (cf. [57], [58]). En utilisant l'analyse de Fourier sphérique, comme pour l'équation de la chaleur, ils ont obtenu l'expression suivante des solutions de (1.1.5)

$$u(x, t) = \mathcal{W}_t^1 f(x) + \mathcal{W}_t^2 g(x)$$

et ont réussi à établir des estimations des noyaux associés à $\mathcal{W}_t^1$ et $\mathcal{W}_t^2$. Ils ont ensuite établi une formule de Paley-Wiener sur les arbres qui leur a permis de conclure que les solutions de l'équation des ondes modifiée se propagent avec une vitesse infinie. Ensuite Medolla [57] a prouvé un phénomène d'équipartition d'énergie. Anker, Martinot, Pedon et Setti [3] ont étudié l'équivalent suivant de l'équation (1.1.5) en temps discret :

$$\begin{cases} \gamma(0) \mathcal{L}_n^{\mathbb{Z}} u(x, n) = (\mathcal{L}_x^{\mathbb{T}} - b) u(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{u(x, 1) - u(x, -1)}{2} = g(x). \end{cases} \quad (1.1.6)$$

En utilisant la transformation d'Abel duale inverse sur $\mathbb{T}$ et une version discrète du théorème d'Ásgeirsson, généralisé aux espaces symétriques par Helgason [40], ils ont obtenu l'expression explicite suivante des solutions de (1.1.6) : $u(x, 0) = f(x)$ et

$$u(x, n) = \frac{1}{2} (M_{|n|} - M_{|n|-2}) f(x) + \text{signe}(n) M_{|n|-1} g(x)$$

si $n \in \mathbb{Z}^*$, où

$$M_n f(x) = Q^{-\frac{n}{2}} \sum_{\substack{d(x, y) \leq n \\ n - d(x, y) \text{ pair}}} f(y)$$

si $n \geq 0$ et $M_{-1} = 0$. Ils en ont déduit que les ondes se propagent à vitesse finie et ont obtenu un principe de Huygens asymptotique. Ils ont également prouvé la conservation et l'équipartition asymptotique de l'énergie totale. Autrement dit, ils ont démontré que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle tendent vers la moitié de l'énergie totale lorsque $|n| \rightarrow \infty$.

1.1.3 Les graphes symétriques polygonaux

La théorie développée sur les arbres homogènes a été généralisée par Iozzi et Picardello ([42], [43]) aux graphes symétriques polygonaux et aux groupes opérant sur ces graphes. Rappelons [43] la définition suivante des graphes symétriques polygonaux

Définition : Un graphe symétrique polygonal ou graphe symétrique tout court est un graphe

connexe Γ tel que

- i) chaque sommet x appartient à r polygones à k cotés chacun et deux tels polygones ont en commun le seul sommet x ,
- ii) l'image de tout lacet non trivial contient un polygone au moins. Ici r et k sont des entiers ≥ 2 .

La distance entre deux éléments x et y est le nombre minimal de polygones traversés entre x et y . Notons que si $k = 2$, Γ se réduit à un arbre homogène de degré r . On démontre comme dans le cas des arbres homogènes (par exemple en reprenant l'argument de [[10] théorème 1.1]) qu'un groupe opérant isométriquement et simplement transitivement sur Γ est isomorphe au produit libre $G = *^r \mathbb{Z} / k\mathbb{Z}$.

Le laplacien combinatoire sur Γ est donné par :

$$\mathcal{L}^\Gamma f(x) = f(x) - \frac{1}{r(k-1)} \sum_{d(x,y)=1} f(y).$$

Les fonctions sphériques sur Γ sont les fonctions radiales sur Γ , qui sont fonctions propres du laplacien $\mathcal{L}^\Gamma$:

$$\mathcal{L}^\Gamma \varphi_\lambda = \gamma(\lambda) \varphi_\lambda$$

où

$$\gamma(\lambda) = \frac{q^{\frac{1}{2}+i\lambda} + q^{\frac{1}{2}-i\lambda} + \sigma}{r(k-1)},$$

et $q = (r-1)(k-1)$, $\sigma = k-2$. Dans [43], Iozzi et Picardello en donnent d'une part, l'expression intégrale

$$\varphi_\lambda(x) = \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2}+i\lambda} d\nu(\omega)$$

où Ω est la frontière de Poisson de Γ , $P(x, \omega)$ est le noyau de Poisson, ν une mesure naturelle sur Ω , et d'autre part l'expression explicite

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} c(\lambda)q^{(-\frac{1}{2}+i\lambda)|x|} + c(-\lambda)q^{(-\frac{1}{2}-i\lambda)|x|} & \text{si } \lambda \notin (\frac{\tau}{2}) \mathbb{Z} \\ (1 + \frac{2q + \sigma + q^{\frac{1}{2}+r(k-1)}}{r(k-1)}|x|) (-1)^{j|x|} q^{-\frac{|x|}{2}} & \text{si } \lambda \in \frac{\tau}{2} j \mathbb{Z}. \end{cases}$$

où

$$c(\lambda) = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{r(k-1)} \frac{q^{\frac{1}{2}+i\lambda} - (k-1)q^{-\frac{1}{2}-i\lambda} + \sigma}{q^{i\lambda} - q^{-i\lambda}}.$$

La formule de Plancherel a été obtenue par Soardi et Kuhn [52]. Par une autre méthode,

Faraut et Picardello [31] ont obtenu la formule suivante, à un changement d'indice près.

Formule d'inversion : Pour tout $f \in L^1_{\text{rad}}(\Gamma)$ et pour tout $x \in \Gamma$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{\ln q}} \hat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda + \frac{k-r}{k} \hat{f}(\lambda_0) \varphi_{\lambda_0}(x), \quad (1.1.7)$$

et le terme en $\lambda_0 = (1-k)^{-1}$ disparaît lorsque $k \leq r$. Cette expression est moins explicite que celles obtenues dans [52], mais permet de faciliter les calculs.

1.2 Principaux résultats obtenus

1.2.1 Première partie : équation de Schrödinger semi linéaire sur un arbre homogène $\mathbb{T}$

Considérons le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{T}$,

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + \mathcal{L}^\mathbb{T} u(x, t) = F(u(x, t)), \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

On rappelle que (1.2.1) a été étudié sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dans [46], [38], [20], [70], [47], et sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ dans [4], [41], [6], [7]. On suit la méthode classique initiée par Kato [46], ensuite développée par Ginibre et Velo [38] pour l'existence et l'unicité des solutions de (1.2.1). Cette méthode consiste à analyser le problème linéaire puis à considérer le problème non linéaire comme perturbation du problème linéaire et à le résoudre par un argument de point fixe. L'analyse du problème linéaire consiste à établir des estimations dispersives pour l'équation homogène puis des estimations de Strichartz pour l'équation inhomogène au moyen de la méthode TT^* . Dans le cas de l'arbre homogène $\mathbb{T}$, nous obtenons les résultats suivants.

Inégalité dispersive

$$\|e^{it\mathcal{L}}\|_{L^{q'}(\mathbb{T}) \rightarrow L^q(\mathbb{T})} \lesssim \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Si $q = 2$, on obtient la conservation L^2 suivante : $\|e^{-it\mathcal{L}}f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Inégalité de Strichartz : On suppose que $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\bar{p}}, \frac{1}{\bar{q}})$ appartiennent au domaine

$$\mathcal{C} = (0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \cup \{(0, \frac{1}{2})\}.$$

Alors, les solutions du problème linéaire inhomogène associé à (1.2.1) vérifient

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2} + \|F\|_{L_t^{\bar{p}'} L_x^{\bar{q}'}}.$$

Remarquons que ce résultat est meilleur que ceux obtenus dans le cas euclidien ([38], [47], [20]) et dans le cas des espaces hyperboliques ([4], [41]).

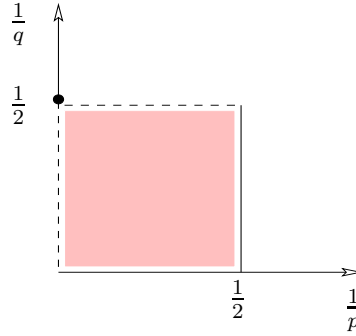


FIGURE 1.4 – zone admissible pour $\mathbb{T}$

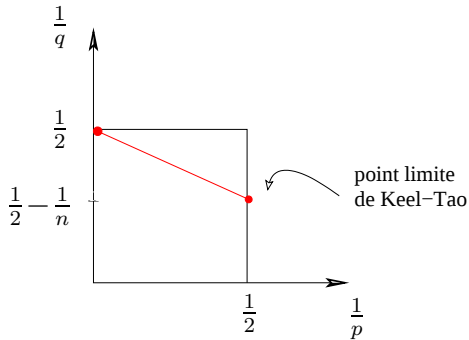


FIGURE 1.5 – Zone admissible pour $\mathbb{R}^n$.

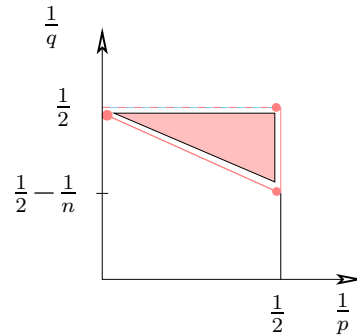


FIGURE 1.6 – Zone admissible pour $\mathbb{H}^n$.

Les estimations de Strichartz permettent de résoudre le problème (1.2.1) pour des non-linéarités F de type polynomial, au sens où il existe des constantes $C > 0$ et $\gamma > 1$ telles

que

$$\begin{cases} |F(u)| \leq C|u|^\gamma, \\ |F(u) - F(v)| \leq C(|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1})|u - v|. \end{cases}$$

Plus précisément, on montre l'existence et l'unicité de solutions globales pour des données initiales petites dans $L^2(\mathbb{T})$, et l'existence et l'unicité de solutions locales pour des données initiales arbitraires dans $L^2(\mathbb{T})$. De plus, sous l'hypothèse habituelle d'invariance de jauge sur F , les solutions locales se prolongent en solutions globales et on établit dans ce cas un phénomène de *scattering*. Remarquons l'absence des conditions sur $\gamma > 1$, contrairement au cas euclidien ([38], [47], [20]) ou au cas hyperbolique ([4], [41]).

1.2.2 Deuxième partie : Equations d'évolution sur un graphe symétrique Γ

La seconde partie de la thèse est consacrée aux graphes symétriques polygonaux Γ avec $r \geq k \geq 2$. Dans le chapitre 3 nous établissons tout d'abord des expressions explicites de la transformation d'Abel horocyclique $\mathcal{A}$ et de son inverse, ainsi que de la transformation d'Abel duale $\mathcal{A}^*$ et de son inverse. Comme dans le cas des arbres homogènes ([10], [26]), nous verrons que la transformation de Fourier sphérique $\mathcal{H}$ sur Γ est la composée de la transformation d'Abel horocyclique $\mathcal{A}$ avec la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A}. \quad (1.2.2)$$

On passe ensuite à l'analyse du noyau de la chaleur successivement en temps réel, en temps complexe et en temps imaginaire.

Noyau de la chaleur en temps réel

L'analyse du noyau de la chaleur sur les arbres homogènes a été menée dans [28]. On procède de même sur les graphes symétriques. Le noyau de la chaleur sur Γ est une fonction radiale qui possède deux expressions, via la transformation de Fourier sphérique inverse $\mathcal{H}^{-1}$:

$$h_t^\Gamma(x) = h_t^\Gamma(|x|) = \frac{1}{2\pi} \frac{q \log(q)}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\gamma(\lambda))} \phi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \quad (1.2.3)$$

ou via la transformation d'Abel inverse $\mathcal{A}^{-1}$:

$$h_t^\Gamma(n) = \frac{r(k-1)}{k} \frac{e^{-(\alpha-\beta)z}}{t} q^{-\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (k-1)^m q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) \right\}. \quad (1.2.4)$$

Un de nos résultats principaux est l'encadrement global suivant.

Théorème 1.2.1. *Posons $\alpha = \frac{q+1}{r(k-1)}$ et $\beta = \frac{2q^{\frac{1}{2}}}{r(k-1)}$. Alors,*

$$h_t^\Gamma(n) \asymp t^{-1} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(n) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+1) \quad \forall t \geq 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.5)$$

Ce résultat généralise l'encadrement (1.1.3) sur les arbres homogènes, qui correspond au cas $k = 2$.

Voici le shema de la preuve qui est compliqué et qui s'effectue en plusieurs étapes. Les premières étapes reposent sur l'expression (1.2.3) tandis que les dernières étapes reposent sur l'expression (1.2.4). Dans la première étape, qui traite le cas $n = 0$, nous analysons le comportement asymptotique de $h_t^\Gamma(0)$, puis nous en déduisons l'encadrement (1.2.5), en utilisant la positivité et la continuité de $h_t^\Gamma(0)$. Les étapes 2, 3, 4 et 5 consistent à établir la borne inférieure dans le cas $n \in \mathbb{N}^*$: l'étape 2 traite la zone $n \ll \sqrt{t}$; L'étape 3, qui est la plus difficile, traite la zone $\kappa_1 \leq n \leq \kappa_2 \sqrt{t}$ où $\kappa_1 > 0$ est une constante grande, et $\kappa_2 > 0$ est une constante arbitraire. L'analyse dans cette étape ressemble à celle menée dans [[2] ; pp. 1060-1062] pour minorer le noyau de la chaleur sur les espaces symétriques. Afin de couvrir le reste de la zone $n \leq \kappa_2 \sqrt{t}$ on utilise à nouveau la positivité et la continuité en t de $h_t^\Gamma(n)$. L'étape 5 traite la zone $n \geq \kappa_2 \sqrt{t}$. On utilise dans ce cas l'expression (1.2.4) et des propriétés des fonctions de Bessel modifiées de première espèce. La borne supérieure, qui est la plus facile à établir et qui utilise les mêmes outils, est traitée dans l'étape 6. Signalons que nous devons parfois distinguer les cas $k < r$ et $k = r$. Les différences résident d'une part dans la formule d'inversion pour la transformation d'Abel horocyclique $\mathcal{A}$ et d'autre part dans le comportement de la fonction $c(\lambda)^{-1}$. Dans les deux cas, celle-ci possède en effet un zéro d'ordre 1 en $\lambda = 0$ mais, dans le cas $k = r$, elle s'annule également en $\lambda = \frac{\tau}{2}$. Les différences n'ont aucune incidence sur l'encadrement global du noyau de la chaleur, mais elles affectent par contre le comportement et l'estimation du noyau de Schrödinger.

Noyau de la chaleur en temps complexe

Cette partie est consacrée au noyau de la chaleur en temps complexe, dont nous donnons une expression explicite, similaire à celle du noyau de la chaleur en temps réel, ainsi que des estimations grossières.

Equation de Schrödinger semi-linéaire sur Γ

Dans cette dernière partie, on considère le noyau de Schrödinger $s_t^\Gamma(x)$, c'est-à-dire le noyau de la chaleur en temps imaginaire $h_{it}^\Gamma(x)$, dont on donne des expressions explicites, ainsi que l'estimation globale suivante.

Proposition 1.2.2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a les estimations suivantes du noyau de Schrödinger :*

– Cas $k < r$:

$$|s_t^\Gamma(n)| \lesssim \begin{cases} q^{-\frac{n}{2}} & si\ |t| \leq 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} (1+n)^2 q^{-\frac{n}{2}} & si\ |t| > 1. \end{cases}$$

– Cas $k = r$:

$$|s_t^\Gamma(n)| \lesssim \begin{cases} q^{-\frac{n}{2}} & si\ |t| \leq 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} (1+|t|+n) (1+n)^2 q^{-\frac{n}{2}} & si\ |t| > 1. \end{cases}$$

Remarquons la décroissance à l'infini plus faible dans le cas $k = r$, qui est liée au comportement de la fonction $c(\lambda)^{-1}$ en $\lambda = \pm \frac{\tau}{2}$ et qui est un phénomène nouveau par rapport aux arbres homogènes. La preuve de cette proposition repose sur la méthode de la phase stationnaire.

L'estimation du noyau de Schrödinger dans le cas $k < r$ permet d'étudier l'équation de Schrödinger semi-linéaire, comme nous l'avons fait au chapitre 2 sur les arbres homogènes.

Equation des ondes modifiées sur Γ

Dans le chapitre 4, on établit une expression explicite des solutions de l'équation des ondes modifiée en temps discret sur Γ :

$$\begin{cases} \beta \mathcal{L}_n^\mathbb{Z} u(x, n) = (\mathcal{L}_x^\Gamma - (\alpha - \beta)) u(x, n), \\ u(x, 0) = f(x), \{u(x, 1) - u(x, -1)\}/2 = g(x) \end{cases} \quad (1.2.6)$$

où α et β sont définis dans l'énoncé du théorème 1.2.1. Signalons que $\alpha - \beta = 1 - \gamma(0)$ est le trou spectral du laplacien $\mathcal{L}^\Gamma$. Rappelons que l'équation des ondes modifiée en temps discret

sur les arbres homogènes a été étudiée dans [3]. Notre résultat principal est une expression explicite des solutions de (1.2.6).

Théorème 1.2.3. Cas $k < r$: La solution de l'équation des ondes (1.2.6) est donnée par $u(x, 0) = f(x)$ et

$$\begin{aligned}
 u(x, n) = & \quad (1.2.7) \\
 & \frac{1}{2} q^{-\frac{|n|}{2}} \sum_{d(x,y)=|n|} f(y) \\
 & - \frac{1}{2k} q^{-\frac{|n|}{2}} \sum_{0 \leq \ell < |n|} \{q - 1 + (r - k)(1 - k)^{|n|-\ell}\} \sum_{d(x,y)=\ell} f(y) \\
 & + \text{signe}(n) q^{-\frac{|n|-1}{2}} \sum_{d(x,y)=|n|-1} g(y) \\
 & + \text{signe}(n) \frac{1}{k} q^{-\frac{|n|-1}{2}} \left\{ \sum_{0 \leq d(x,y) < |n|-1} g(y) - \sum_{0 \leq \ell < |n|-1} (1 - k)^{|n|-\ell} \sum_{d(x,y)=\ell} g(y) \right\}
 \end{aligned}$$

si $n \in \mathbb{Z}^*$.

Cas $k = r$: La solution de l'équation des ondes (1.2.6) est donnée par $u(x, 0) = f(x)$ et

$$\begin{aligned}
 u(x, n) = & \frac{1}{2} (k - 1)^{-|n|} \sum_{d(x,y)=|n|} f(y) \\
 & - \frac{k - 2}{2} (k - 1)^{-|n|} \sum_{d(x,y) < |n|} f(y) + \text{signe}(n) (k - 1)^{-(|n|-1)} \sum_{d(x,y)=|n|-1} g(y) \\
 & + \text{signe}(n) \frac{1}{k} (k - 1)^{-(|n|-1)} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{d(x,y) < |n|-1} g(y) + \sum_{0 \leq \ell < |n|-1} (k - 1)^{|n|-\ell} \sum_{d(x,y)=\ell} g(y) \right\}
 \end{aligned}$$

si $n \in \mathbb{Z}^*$.

On démontre notre résultat en adaptant à notre cas la méthode utilisée dans [3], qui consiste à utiliser la transformation d'Abel duale inverse et la version discrète suivante du théorème d'Ásgeirsson.

Théorème 1.2.4. (Théorème d'Ásgeirsson sur Γ)

Soit U une fonction sur $\Gamma \times \Gamma$ telle que

$$\mathcal{L}_x^\Gamma U(x, y) = \mathcal{L}_y^\Gamma U(x, y) \quad \forall x, y \in \Gamma.$$

Alors

$$\sum_{x' \in S(x, m)} \sum_{y' \in S(y, n)} U(x', y') = \sum_{x' \in S(x, n)} \sum_{y' \in S(y, m)} U(x', y') \quad \forall x, y \in \Gamma, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Première partie :

Equation de Schrödinger sur les
arbres homogènes

Chapitre 2

Schrödinger equation on homogeneous trees

Ce chapitre reprend l'article [44] à paraître dans *Journal of Lie Theory*.

Résumé : Soient $\mathbb{T}$ un arbre homogène et $\mathcal{L}$ le laplacien combinatoire sur $\mathbb{T}$. On considère l'équation de Schrödinger semi-linéaire associée à $\mathcal{L}$ avec une non-linéarité polynomiale F de degré γ . Nous obtenons tout d'abord des estimations dispersives et de Strichartz sans aucune condition d'admissibilité. Nous en déduisons ensuite l'existence globale des solutions pour des données petites dans L^2 sans hypothèse d'invariance de jauge sur la non-linéarité F . En cas d'invariance de jauge, la conservation L^2 permet d'obtenir l'existence globale des solutions pour des données arbitraires dans L^2 . Signalons que, contrairement au cas euclidien, ces résultats d'existence globale sont valables pour toute puissance $\gamma > 1$. Nous concluons par un résultat de “*scattering*” pour des données L^2 arbitraires et en cas d'invariance de jauge.

Abstract : Let $\mathbb{T}$ be a homogeneous tree and $\mathcal{L}$ the Laplace operator on $\mathbb{T}$. We consider the semilinear Schrödinger equation associated to $\mathcal{L}$ with a power-like nonlinearity F of degree γ . We first obtain dispersive estimates and Strichartz estimates with no admissibility conditions. We next deduce global well-posedness for small L^2 data with no gauge invariance

assumption on the nonlinearity F . On the other hand if F is gauge invariant, L^2 conservation leads to global well-posedness for arbitrary L^2 data. Notice that, in contrast with the Euclidean case, these global well-posedness results hold for all finite $\gamma > 1$. We finally prove scattering for arbitrary L^2 data under the gauge invariance assumption.

2.1 Introduction

In this paper we consider the semilinear Schrödinger equation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \mathcal{L}u = F(u) \\ u(0) = f \end{cases} \quad (2.1.1)$$

associated with the positive laplacian $\mathcal{L}$ on homogeneous trees $\mathbb{T}$ of degree $Q + 1 \geq 3$. The essential tools for the study of (2.1.1) are dispersive and Strichartz type estimates. In the Euclidean case, (2.1.1) has been considered for large classes of nonlinearities (see [70], [20] and the references therein). In this case, the dispersive estimate

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C |t|^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

holds for the homogeneous problem. A well known procedure (introduced by Kato [46], developed by Ginibre & Velo [38] and perfected by Keel & Tao [47]) then leads to the following Strichartz estimates

$$\|u\|_{L^p(I, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I, L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}^n))} \quad (2.1.2)$$

for the linear problem

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (2.1.3)$$

These estimates hold for all bounded or unbounded time interval I and for all couples (p, q) , $(\tilde{p}, \tilde{q}) \in [2, \infty] \times [2, \infty)$ satisfying the admissibility condition

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}. \quad (2.1.4)$$

Notice that both endpoints $(p, q) = (\infty, 2)$ and $(p, q) = (2, \frac{2n}{n-2})$ are included in dimension $n \geq 3$ while only the first one is included in dimension $n = 2$. In view of their important

application to nonlinear problems, many attempts have been made to study the dispersive properties of (2.1.1) on various Riemannian manifolds (see [4], [5], [6], [14], [12], [36], [41], [66]). More precisely, dispersive and Strichartz estimates for the Schrödinger equation on real hyperbolic spaces $\mathbb{H}^n$, which are manifolds with constant negative curvature, have been obtained by Banica, Anker and Pierfelice, Ionescu and Staffilani ([6], [4], [41]). In [4] and [41], the authors have obtained sharp dispersive and Strichartz estimates for solutions to the homogeneous and inhomogeneous problems with no radial assumption on the initial data and for a wider range of couples than in the Euclidean case. More precisely they have obtained (2.1.2) for admissible couples in the range

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}); \frac{2}{p} + \frac{n}{q} \geq \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ (0, \frac{1}{2}) \right\}. \quad (2.1.5)$$

In this paper we consider the Schrödinger equation on homogeneous trees $\mathbb{T}$, which are discrete analogs of hyperbolic spaces and more precisely 0-hyperbolic spaces according to Gromov. In [68] A. Setti has already investigated the $L^p - L^q$ mapping properties of the complex time heat operator $e^{\tau \mathcal{L}}$ on $\mathbb{T}$ for $\operatorname{Re} \tau \geq 0$. His study is based on a careful kernel analysis, using the Abel transform and reducing this way to $\mathbb{Z}$. Our paper is organized as follows. In Section 2, we recall the structure of homogeneous trees and spherical harmonic analysis thereon. In Section 3, we resume the analysis of the Schrödinger kernel and deduce our main two estimates, that we now state.

Dispersive Estimate : Let $2 < q \leq \infty$. Then

$$\|e^{it\mathcal{L}}\|_{L^{q'}(\mathbb{T}) \rightarrow L^q(\mathbb{T})} \lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Notice that in the limit case $q = 2$, we have L^2 conservation $\|e^{-it\mathcal{L}}f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ for all $t \in \mathbb{R}$.

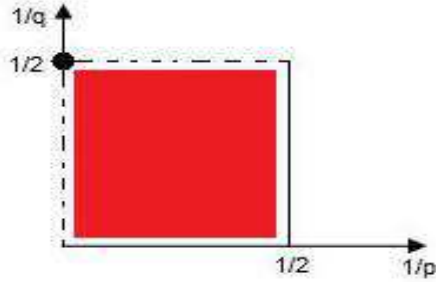
Strichartz estimates : Assume that $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ and $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ belong to the square

$$\mathcal{C} = (0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}) \cup \left\{ (0, \frac{1}{2}) \right\}.$$

Then the solution to the linear problem (2.1.3) satisfies

$$\|u(t, x)\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u(t, x)\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f(x)\|_{L_x^2} + \|F(t, x)\|_{L_t^{\tilde{p}} L_x^{\tilde{q}}}.$$

Notice that the set of admissible couples for $\mathbb{T}$ is much wider than the corresponding set (2.1.5) for real hyperbolic spaces $\mathbb{H}^n$ which was itself wider than the admissible set (2.1.4). This striking result may be regarded as an effect of strong dispersion in hyperbolic geometry, combined with the absence of local obstructions.


 FIGURE 2.1 – Admissible set for $\mathbb{T}$

In Section 4, we use these estimates to prove well-posedness and scattering results for the nonlinear Cauchy problem (2.1.1). We will deal with power-like nonlinearities in the following sense : there exist constants $\gamma > 1$ and $C > 0$ such that

$$\begin{cases} |F(u)| \leq C|u|^\gamma, \\ |F(u) - F(v)| \leq C(|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1})|u - v|. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Recall that F is said to be *gauge invariant* if

$$\operatorname{Im}\{F(u)\overline{u}\} = 0 \quad (2.1.7)$$

and that L^2 conservation holds in this case :

$$\forall t, \int_{\mathbb{T}} |u(t, x)|^2 d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 d\mu(x). \quad (2.1.8)$$

Here is a typical example of such a nonlinearity :

$$F(u) = \lambda |u|^{\gamma-1} u \quad \text{with } \lambda \in \mathbb{R}, \gamma > 1. \quad (2.1.9)$$

In this particular case, another quantity is conserved, namely the energy

$$E(t) = \frac{1}{4} \sum_{x,y \atop d(x,y)=1} |u(t,x) - u(t,y)|^2 + \lambda \frac{Q+1}{\gamma+1} \sum_{x \in \mathbb{T}} |u(t,x)|^{\gamma+1}. \quad (2.1.10)$$

Notice that $E(t) > 0$ in the so-called defocusing case $\lambda > 0$. Here are our well-posedness results.

Well-posedness. Assume $1 < \gamma < \infty$. Then the NLS (2.1.1) is globally well-posed for small L^2 data. It is locally well-posed for arbitrary L^2 data. Moreover, in the gauge invariance case (2.1.7), local solutions extend to global ones.

Notice that there is no restriction on the power $\gamma > 1$ contrarily to the Euclidean case and even to the hyperbolic space case. Recall on one hand that, on $\mathbb{R}^n$, global well-posedness for small L^2 data is known to hold for $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ and local well-posedness for arbitrary L^2 data if $1 < \gamma < 1 + \frac{4}{n}$ (see [20]). Recall on the other hand that better results hold on $\mathbb{H}^n$, namely global well-posedness for small L^2 data in the whole range $1 < \gamma \leq 1 + \frac{4}{n}$, and L^2 local well-posedness for arbitrary data in the range $1 < \gamma < 1 + \frac{4}{n}$ (see [4]). In both cases, L^2 local well-posedness for arbitrary data extends to L^2 global well-posedness when the nonlinearity F satisfies the gauge invariance property (2.1.7). Here are our scattering results.

Scattering. Assume that $1 < \gamma < \infty$. Then under the gauge invariance condition (2.1.7), for any data $f \in L^2$, the unique global solution $u(t, x)$ to the NLS (2.1.1) scatters to linear solutions at infinity, i.e there exist $u_{\pm} \in L^2$ such that

$$\|u(t) - e^{it\mathcal{L}}u_{\pm}\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \pm\infty.$$

Notice again the absence of restriction on $\gamma > 1$. Thich is in sharp contrast with $\mathbb{R}^n$, where scattering for small L^2 data holds in the critical case $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ but may fails for $1 < \gamma < 1 + \frac{4}{n}$ (see [20]). Our result is also better than on $\mathbb{H}^n$, where scattering for small L^2 data holds in the range $1 < \gamma \leq 1 + \frac{4}{n}$ (see [4]).

2.2 Homogeneous Trees

A homogeneous tree of degree $Q + 1$ is an infinite connected graph $\mathbb{T}$ with no loops, in which every vertex is adjacent to $Q + 1$ other vertices. We shall identify $\mathbb{T}$ with its set of vertices. $\mathbb{T}$ carries a natural distance d and a natural measure μ . Specifically, $d(x, y)$ is the

number of edges of the shortest path joining x to y and μ is the counting measure. $L^p(\mathbb{T})$ denotes the associated Lebesgue space, whose norm is given by

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)| & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

There is no Sobolev spaces theory on $\mathbb{T}$. For instance, one might define the Sobolev space $H^1(\mathbb{T})$ by

$$H^1(\mathbb{T}) =: \{f \in L^2(\mathcal{V}) \mid |\nabla|f \in L^2(\mathcal{E})\}$$

where $\mathcal{V}$ denotes the set of vertices, $\mathcal{E}$ the set of edges and

$$|\nabla|f(\overline{xy}) =: |f(y) - f(x)|,$$

is the “positive gradient”. As

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathcal{E})}^2 = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \mathcal{V} \atop d(x,y)=1} |f(x) - f(y)|^2 \leq 2(Q+1) \sum_{x \in \mathcal{V}} |f(x)|^2 = 2(Q+1) \|f\|_{L^2(\mathcal{V})}^2.$$

we see that $H^1(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$.

We fix a base point o and we denote by $|x| = d(x, o)$ the distance to o . Functions depending only on $|x|$ are called radial. If $E(\mathbb{T})$ is a space of functions defined on $\mathbb{T}$, $E(\mathbb{T})^\sharp$ denotes the subspace of radial functions in $E(\mathbb{T})$.

Let G be the group of isometries of the metric space $\mathbb{T}$ and K the stabiliser of o in G .

Proposition 2.2.1. (Tits [71]) *For every finite subset $\mathcal{F}$ of $\mathcal{V}$, denote by $\text{Aut}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T})$ the group of automorphisms g of $\mathbb{T}$ such that $g(x) = x$ for all $x \in \mathcal{F}$. Then G is equipped with a topology of locally compact totally discontinuous group such that the subgroups $\text{Aut}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T})$ form a fundamental system of neighborhoods of the identity in G . Moreover a subgroup H is maximal, open, compact in G if and only if H is the stabiliser of a point x in $\mathcal{V}$.*

Thus G is a locally compact, totally discontinuous, unimodular group, K is an open compact subgroup of G , and (G, K) is a Gelfand pair.

The natural action of G on $\mathbb{T}$, which is transitive and continuous, allows us to identify $\mathbb{T}$ with G/K . Moreover K acts transitively on spheres centered at o . We shall identify functions defined on $\mathbb{T}$ with right K -invariant functions on G , and radial functions on $\mathbb{T}$ with K -bi-invariant ones on G .

Let us recall some basic tools of harmonic analysis on $\mathbb{T}$ (see [32], [15], [26] for more details). We normalize the Haar measure on G in such a way that K has a unit mass. Then

$$\sum_{x \in \mathbb{T}} f(x) = \int_G f(g.o) dg$$

for all $f \in L^1(\mathbb{T})$, and this allows us to define the convolution of two functions on $\mathbb{T}$ by

$$f_1 * f_2(g.o) = \int_G f_1(h.o) f_2(h^{-1}g.o) dh \quad \forall g \in G. \quad (2.2.1)$$

If f_2 is radial, then (2.2.1) rewrites

$$f_1 * f_2(x) = \sum_{n \geq 0} f_2(n) \sum_{y \in S(x,n)} f_1(y),$$

where $S(x, n)$ denotes the sphere with center x and radius n . Notice that

$$|S(x, n)| = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ (Q + 1)Q^{n-1} & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

An interesting property of this convolution product is the following version of the Kunze-Stein phenomenon [53], due to Nebbia [61] (see also [25]).

Proposition 2.2.2. *For all $1 \leq r < 2$, we have*

$$L^2(\mathbb{T}) * L^r(\mathbb{T})^\# \subset L^2(\mathbb{T}). \quad (2.2.2)$$

By such an inclusion, we mean that there exists a constant $C_r > 0$ such that

$$\|f_1 * f_2\|_{L^2} \leq C_r \|f_1\|_{L^2} \|f_2\|_{L^r} \quad \forall f_1 \in L^2(\mathbb{T}), \forall f_2 \in L^r(\mathbb{T})^\#.$$

Corollary 2.2.3. *For all $2 < q, r < \infty$, such that $\frac{q}{2} < r < q$, one has*

$$L^{q'}(\mathbb{T}) * L^r(\mathbb{T})^\# \subset L^q(\mathbb{T}). \quad (2.2.3)$$

The proof is obtained by interpolation between the dual version of (2.2.2) and the trivial inclusion $L^1(\mathbb{T}) * L^1(\mathbb{T})^\# \subset L^1(\mathbb{T})$.

The combinatorial Laplacian on $\mathbb{T}$ is defined by

$$\mathcal{L} = I - \mathcal{M}$$

where I denotes the identity map and $\mathcal{M}$ the mean operator

$$\mathcal{M}f(x) = \frac{1}{Q+1} \sum_{y \in S(x,1)} f(y). \quad (2.2.4)$$

Notice that $\mathcal{L}$ is a convolution operator associated to a radial function

$$\mathcal{L}f = f * (\delta_o - \nu),$$

where δ_o denotes the Dirac measure at o and ν the normalized uniform measure on $S(x, 1)$. Let us next recall the main ingredients of spherical analysis on $\mathbb{T}$. Set $\tau = \frac{2\pi}{\log Q}$, and consider the holomorphic function

$$\gamma(\lambda) = \frac{Q^{i\lambda} + Q^{-i\lambda}}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} \cos \lambda(\log Q) = \gamma(0) \cos \frac{2\pi}{\tau} \lambda.$$

The spherical function φ_λ of index $\lambda \in \mathbb{C}$ is the unique radial eigenfunction of $\mathcal{M}$, which is associated to the eigenvalue $\gamma(\lambda)$ and which is normalized by $\varphi_\lambda(0) = 1$. Here is an explicit expression :

$$\varphi_\lambda(n) = \begin{cases} \mathbf{c}(\lambda) Q^{(-\frac{1}{2}+i\lambda)n} + \mathbf{c}(-\lambda) Q^{(-\frac{1}{2}-i\lambda)n} & \text{if } \lambda \notin (\frac{\tau}{2})\mathbb{Z}, \\ (-1)^{jn} \left(1 + \frac{Q^{\frac{1}{2}} - Q^{-\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} n\right) Q^{-\frac{n}{2}} & \text{if } \lambda \in (\frac{\tau}{2})j\mathbb{Z}, \end{cases}$$

where $\mathbf{c}$ is the meromorphic function given by

$$\mathbf{c}(z) = \frac{1}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} \frac{Q^{\frac{1}{2}+iz} - Q^{-\frac{1}{2}-iz}}{Q^{iz} - Q^{-iz}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (\frac{\tau}{2})\mathbb{Z}.$$

Notice the symmetries

$$\varphi_{-\lambda} = \varphi_{\lambda} \text{ and } \varphi_{\lambda+\tau} = \varphi_{\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.2.5)$$

The spherical Fourier transform of a radial function f on $\mathbb{T}$, let say with finite support, is then defined by the formula

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \sum_{x \in \mathbb{T}} f(x) \varphi_{\lambda}(x) = f(0) + \sum_{n \geq 1} (1 + Q) Q^{n-1} f(n) \varphi_{\lambda}(n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

By the above symmetries of the spherical functions, $\mathcal{H}f$ is even and τ -periodic. The following inverse and Plancherel formulae hold :

$$f(n) = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \mathcal{H}f(\lambda) \varphi_{\lambda}(n),$$

and

$$\|f\|_2^2 = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} |\mathcal{H}f(\lambda)|^2 \right) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T})^{\sharp}.$$

The Abel transform of a radial function f on $\mathbb{T}$ is defined by

$$\mathcal{A}f(n) = Q^{\frac{|n|}{2}} f(|n|) + \frac{Q^{\frac{1}{2}} - Q^{-\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \geq 1} Q^{\frac{|n|}{2} + k} f(|n| + 2k). \quad (2.2.6)$$

Then $\mathcal{A}f$ is even and

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A} \quad (2.2.7)$$

where

$$\mathcal{F}g(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) Q^{in\lambda} = g(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} \lambda n\right). \quad (2.2.8)$$

Hence

$$\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1}, \quad (2.2.9)$$

where the Abel transform (2.2.6) is inverted by

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{-\frac{n}{2} - k} \{ \mathcal{A}f(n + 2k) - \mathcal{A}f(n + 2k + 2) \},$$

and the Fourier transform (2.2.8) by

$$g(n) = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} d\lambda \mathcal{F}g(\lambda) Q^{-i\lambda n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\lambda \mathcal{F}g\left(\frac{\tau}{2\pi}\lambda\right) \cos(\lambda n).$$

2.3 Dispersive and Strichartz estimates

Consider first the homogeneous linear equation on $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) = 0, \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.3.1)$$

whose solution is given by

$$u(t, x) = e^{it\mathcal{L}} f(x) = f * s_t(x).$$

Here s_t is the radial convolution kernel associated to the Schrödinger operator $e^{it\mathcal{L}}$, whose spherical Fourier transform is given by

$$\mathcal{H}s_t(\lambda) = e^{it[1-\gamma(\lambda)]}.$$

The following expression is easily deduced from (2.2.9) :

$$s_t(n) = e^{it} \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} Q^{-\frac{n}{2}-k} \int_0^\pi d\lambda e^{-i\gamma(0)t \cos \lambda} \sin \lambda \sin \lambda(n + 2k + 1). \quad (2.3.2)$$

Proposition 2.3.1. *The following pointwise kernel estimates hold, uniformly in $t \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$*

$$|s_t(n)| \lesssim \begin{cases} Q^{-\frac{n}{2}} & \text{if } |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} (1+n)^2 Q^{-\frac{n}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

The estimate is easily seen to hold for $|t| < 1$. For $|t| \geq 1$, we integrate by parts (2.3.2) and apply the next lemma to the resulting expression

$$s_t(n) = \frac{2i}{\pi \gamma(0)} \frac{e^{it}}{t} \sum_{k \geq 0} Q^{-\frac{n}{2}-k} (n + 2k + 1) \int_0^\pi d\lambda e^{-i\gamma(0)t \cos(\lambda)} \cos(n + 2k + 1)\lambda.$$

Lemma 2.3.2. *Consider the integral*

$$J(t, m) = \int_0^\pi d\lambda \, e^{ict \cos \lambda} \cos m\lambda, \quad (2.3.4)$$

where $c > 0$ is a fixed constant. Then there exists a constant $C > 0$ such that

$$|J(t, m)| \leq C |t|^{-\frac{1}{2}} (1 + m)$$

for every $m \in \mathbb{N}$ and for every $t \in \mathbb{R}$ with $|t| \geq 1$.

Proof. This estimate is obtained either by expressing (2.3.4) in terms of Bessel functions :

$$J(t, m) = \pi i^m J_m(ct)$$

(see for instance [30, (10.9.2)]), and by using classical estimates for these functions, or by analyzing the oscillatory integral (2.3.4) as in [69, Section 7.1]. More precisely, let χ be a smooth bump function around the origin such that

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \chi(\lambda - \ell \frac{\pi}{2}) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

and let us split up

$$J(t, m) = \sum_{\ell=0}^2 \underbrace{\int_0^\pi d\lambda \, \chi(\lambda - \ell \frac{\pi}{2}) e^{ict \cos \lambda} \cos m\lambda}_{J_\ell(t, m)}.$$

On one hand, we obtain

$$|J_1(t, m)| \leq C |t|^{-1} (1 + m),$$

after performing an integration by parts based on

$$e^{ict \cos \lambda} = \frac{i}{ct \sin \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{ict \cos \lambda}).$$

On the other hand, by applying [69, Corollary p. 334], we obtain

$$|J_0(t, m)| \leq C |t|^{-\frac{1}{2}} (1 + m) \quad \text{and} \quad |J_2(t, m)| \leq C |t|^{-\frac{1}{2}} (1 + m).$$

■

Corollary 2.3.3. *For any $q > 2$, the following kernel estimate holds :*

$$\|s_t\|_{L^q(\mathbb{T})} \lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < 1 \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Proof. The case $q = \infty$ follows immediately from Proposition 2.3.1. Assume that $2 < q < \infty$. Then, as s_t is a radial kernel, we have

$$\|s_t\|_{L^q(\mathbb{T})}^q = |s_t(0)|^q + (Q+1) \sum_{n=1}^{\infty} Q^{n-1} |s_t(n)|^q.$$

We conclude by using Proposition 2.3.1. On one hand, if $|t| \leq 1$

$$\|s_t\|_{L^q}^q \lesssim 1 + (Q+1) \sum_{n=1}^{\infty} Q^{n-1} Q^{-\frac{nq}{2}} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} Q^{-n(\frac{q}{2}-1)} \lesssim 1$$

On the other hand, if $|t| \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|s_t\|_{L^q}^q &\lesssim |t|^{-\frac{3q}{2}} [1 + (Q+1) \sum_{n=1}^{\infty} Q^{n-1} (1+Q) Q^{-\frac{nq}{2}} n^{2q}] \\ &\asymp |t|^{-\frac{3q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} Q^{-n(\frac{q}{2}-1)} (1+n)^{2q} \\ &\lesssim |t|^{-\frac{3}{2}q}. \end{aligned}$$

■

Let us turn to $L^{q'}(\mathbb{T}) \rightarrow L^q(\mathbb{T})$ mapping properties of the Schrödinger operator $e^{it\mathcal{L}}$.

Theorem 2.3.4. *Let $2 < q \leq \infty$. Then the following dispersive estimates hold :*

$$\|e^{it\mathcal{L}}\|_{L^{q'}(\mathbb{T}) \rightarrow L^q(\mathbb{T})} \lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

In the case $q = 2$, recall that $e^{it\mathcal{L}}$ is a one parameter group of unitary operators .

Proof. If $q = \infty$, we use the elementary inequality

$$\|e^{it\mathcal{L}} f\|_{L^\infty} = \|f * s_t\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|s_t\|_{L^\infty} \quad \forall f \in L^1(\mathbb{T})$$

and Proposition 2.3.1 or Corollary 2.3.3 to conclude. Assume $2 < q < \infty$ and let $2 < r < \infty$ such that $\frac{q}{2} < r < q$. According to Corollary (2.2.3), we have

$$\|e^{it\mathcal{L}}f\|_{L^q} = \|f * s_t\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^{q'}} \|s_t\|_{L^r} \quad \forall f \in L^{q'}(\mathbb{T}).$$

We conclude again using Corollary 2.3.3. ■

Theorem 2.3.4 can be generalized as follows.

Corollary 2.3.5. *Let $2 < q, \tilde{q} < \infty$. Then*

$$\|e^{it\mathcal{L}}\|_{L^{\tilde{q}'} \rightarrow L^q} \lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Proof. If $q = \infty$, we use the elementary inequality

$$\|e^{it\mathcal{L}}f\|_{L^\infty} = \|f * s_t\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{\tilde{q}'}} \|s_t\|_{L^{\tilde{q}}}$$

and Corollary 2.3.3 to conclude. If $\tilde{q} = \infty$, we use instead

$$\|e^{it\mathcal{L}}f\|_{L^q} = \|f * s_t\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|s_t\|_{L^q}$$

and conclude similarly. The general case is obtained by interpolation between these two cases and the case $q = \tilde{q}$ considered in Theorem 2.3.4. ■

Consider next the inhomogeneous linear Schrödinger equation on $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.3.6)$$

whose solution is given by Duhamel's formula :

$$u(t, x) = e^{it\mathcal{L}}f(x) - i \int_0^t e^{i(t-s)\mathcal{L}}F(s, x) ds. \quad (2.3.7)$$

Recall the square $\mathcal{C} = (0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}) \cup \{(0, \frac{1}{2})\}$ (see Fig.2.1).

Theorem 2.3.6. *Assume that $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ and $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ belong to $\mathcal{C}$. Then the following Strichartz*

estimate holds for solutions to the Cauchy problem (2.3.6) :

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2} + \|F\|_{L_t^{\bar{p}'} L_x^{\bar{q}'}}. \quad (2.3.8)$$

Proof. We proceed as in the Euclidean case ([46], [38]), or in the hyperbolic case ([4], [41]). Consider the operator

$$Tf(t, x) = e^{it\mathcal{L}} f(x)$$

and its adjoint

$$T^*F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-is\mathcal{L}} F(s, x) ds.$$

The method consists in proving the $L_t^{\bar{p}'} L_x^{\bar{q}'} \rightarrow L_t^p L_x^q$ boundedness of the operator

$$TT^*F(t, x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\mathcal{L}} F(s, x) ds$$

and of its truncated version

$$\widetilde{TT^*}F(t, x) = \int_0^t e^{i(t-s)\mathcal{L}} F(s, x) ds,$$

for every $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in \mathcal{C}$. The endpoint $(0, \frac{1}{2})$ is settled by L^2 conservation and we are left with the couples $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in (0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2})$. Thus we consider the operator

$$AF(t, x) = \int_{a(t)}^{b(t)} e^{i(t-s)\mathcal{L}} F(s, x) ds,$$

where $a(t) < b(t)$ are suitable functions of $t \in \mathbb{R}$. Then

$$\begin{aligned} \|AF\|_{L_t^p L_x^q} &= \left\| \int_{a(t)}^{b(t)} e^{i(t-s)\mathcal{L}} F(s, x) ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \\ &\lesssim \left\| \int_{(a(t), b(t)) \cap \{|t-s| < 1\}} e^{i(t-s)\mathcal{L}} F(s, x) ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \\ &\quad + \left\| \int_{(a(t), b(t)) \cap \{|t-s| \geq 1\}} e^{i(t-s)\mathcal{L}} F(s, x) ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \\ &\lesssim \left\| \int_{|t-s| < 1} \|F(s, x)\|_{L_x^{q'}} ds \right\|_{L_t^p} + \left\| \int_{|t-s| \geq 1} |t-s|^{-\frac{3}{2}} \|F(s, x)\|_{L_x^{q'}} \right\|_{L_t^p}. \end{aligned}$$

On $\mathbb{R}$, the convolution kernels $\mathbb{1}_{\{|t-s|<1\}}$ and $|t-s|^{-\frac{3}{2}}\mathbb{1}_{\{|t-s|\geq 1\}}$ define bounded operators from $L_s^{p_1}$ to $L_t^{p_2}$, for all $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, in particular from $L_s^{p'}$ to L_t^p , for all $2 \leq p \leq \infty$. By choosing suitably $a(t)$ and $b(t)$ we deduce the $L_t^{p'}L_x^{q'} \rightarrow L_t^pL_x^q$ boundedness of TT^* and $\widetilde{TT^*}$. Indices are finally decoupled, using the TT^* argument. $\blacksquare$

2.4 Well-posedness

Strichartz estimates for inhomogeneous linear equations are used to prove local or global well-posedness for nonlinear problems. In this section we obtain some results along these lines for the Schrödinger equation (2.1.1) on $\mathbb{T}$, with a power-like nonlinearity F as in (2.1.6). Let us recall the definition of well-posedness in $L^2(\mathbb{T})$.

Definition 2.4.1. *The NLS equation (2.1.1) is locally well-posed in $L^2(\mathbb{T})$ if, for any bounded subset B of $L^2(\mathbb{T})$ there exists $T > 0$ and a Banach space X_T , continuously embedded into $C((-T, +T); L^2(\mathbb{T}))$, such that*

- *for any Cauchy data $f \in B$, (2.1.1) has a unique solution $u \in X_T$;*
- *the map $f \rightarrow u$ is continuous from B to X_T .*

The equation is globally well-posed if these properties hold with $T = \infty$.

As we have obtained better estimates on $\mathbb{T}$ than on $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{H}^n$, we may expect a better well-posedness results. We shall prove indeed well-posedness with no restriction on γ .

Theorem 2.4.2. *Let $1 < \gamma < \infty$. Then the NLS (2.1.1) is globally well-posed for small L^2 data. It is locally well-posed for arbitrary L^2 data. Moreover, under the gauge invariance condition (2.1.7), local solutions extend to global ones.*

Proof. We resume the standard fixed point method based on Strichartz estimates. Define $u = \Psi(v)$ as the solution to the Cauchy problem

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) = F(v(t, x)), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.4.1)$$

which is given by Duhamel's formula :

$$u(t, x) = e^{it\mathcal{L}}f(x) - i \int_0^t e^{i(t-s)\mathcal{L}}F(v(s, x)) ds.$$

According to Theorem 2.3.6 we have

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2} + \|F(v)\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \quad (2.4.2)$$

for every $2 < p, \tilde{p} \leq \infty, 2 \leq q, \tilde{q} < \infty$. Moreover

$$\|F(v)\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \lesssim \| |v|^\gamma \|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \leq \|v\|_{L_t^{\tilde{p}'\gamma} L_x^{\tilde{q}'\gamma}}^\gamma$$

by our nonlinearity assumption (2.1.6). Thus

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2} + \|v\|_{L_t^{\tilde{p}'\gamma} L_x^{\tilde{q}'\gamma}}^\gamma. \quad (2.4.3)$$

In order to remain within the same function space, we require

$$p = \tilde{p}'\gamma, q = \tilde{q}'\gamma. \quad (2.4.4)$$

It is clear that these conditions are fulfilled if we take for instance

$$p = q = \tilde{p} = \tilde{q} = 1 + \gamma.$$

For such a choice Ψ maps $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T})) \cap L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}))$ into itself and actually $X = C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T})) \cap L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}))$ into itself. Since X is a Banach space for the norm

$$\|u\|_X = \|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_t^p L_x^q},$$

it remains to show that Ψ is a contraction in the ball

$$X_\varepsilon = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq \varepsilon\},$$

provided $\varepsilon > 0$ and $\|f\|_{L^2}$ are sufficiently small. Let $v_1, v_2 \in X$ and $u_1 = \Psi(v_1), u_2 = \Psi(v_2)$. Arguing as above and using in addition Hölder's inequality, we estimate

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_X &\lesssim \|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \\ &\lesssim \left\| \left\{ |v_1|^{\gamma-1} + |v_2|^{\gamma-1} \right\} |v_1 - v_2| \right\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \\ &\lesssim \left\{ \|v_1\|_{L_t^p L_x^q}^{\gamma-1} + \|v_2\|_{L_t^p L_x^q}^{\gamma-1} \right\} \|v_1 - v_2\|_{L_t^p L_x^q}, \end{aligned}$$

hence

$$\|u_1 - u_2\|_X \lesssim \{\|v_1\|_X^{\gamma-1} + \|v_2\|_X^{\gamma-1}\} \|v_1 - v_2\|_X. \quad (2.4.5)$$

If we assume $\|v_1\|_X \leq \varepsilon$, $\|v_2\|_X \leq \varepsilon$ and $\|f\|_{L^2} \leq \delta$, then (2.4.3) and (2.4.5) yield

$$\|u_1\|_X \leq C(\delta + \varepsilon^\gamma) \leq \varepsilon, \|u_2\|_X \leq C(\delta + \varepsilon^\gamma) \leq \varepsilon$$

and

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq 2C\varepsilon^{\gamma-1} \|v_1 - v_2\|_X \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_X$$

if $\varepsilon^{\gamma-1} \leq \frac{1}{4(C+1)}$ and $\delta \leq \frac{3\varepsilon}{4(C+1)}$. We obtain our first conclusion by applying the fixed point theorem in the complete metric space X_ε .

Let us next show that (2.1.1) is locally well-posed for arbitrary L^2 data. Consider a small interval $I = [-T, T]$. We proceed as above, except that we require $\frac{\gamma}{q} + \frac{1}{q} < 1$ and get an additional factor T^λ with $\lambda = 1 - \frac{\gamma}{q} - \frac{1}{q} > 0$, by applying Hölder's inequality in time. This way we obtain the estimates

$$\|u\|_X \leq C(\|f\|_{L^2} + T^\lambda \|v\|_X^\gamma), \quad (2.4.6)$$

and

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq CT^\lambda (\|v_1\|_X^{\gamma-1} + \|v_2\|_X^{\gamma-1}) \|v_1 - v_2\|_X \quad (2.4.7)$$

where $X = C(I; L^2(\mathbb{T})) \cap L^p(I, L^q(\mathbb{T}))$ and $p \in [2, \infty)$, $q \in (2, \infty)$ satisfy $p > \gamma$, $q < 2\gamma$.

As a consequence, we deduce that Ψ is a contraction in the ball

$$X_M = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq M\},$$

provided $M > 0$ is large enough respectively $T > 0$ is small enough, more precisely

$$C\|f\|_{L^2} \leq \frac{3}{4}M \text{ and } CT^\lambda M^{\gamma-1} \leq \frac{1}{4}. \quad (2.4.8)$$

We conclude as before. Notice that according to (2.4.8), T depends only on the L^2 norm of the initial data :

$$T^\lambda \lesssim \|f\|_{L^2}^{-\frac{\gamma-1}{\lambda}}.$$

Thus if the nonlinearity F is gauge invariant as in (2.1.7), then L^2 conservation allows us to iterate and deduce global existence from local existence, for arbitrary data $f \in L^2$. ■

2.5 Scattering

Consider still the NLS (2.1.1) with a powerlike nonlinearity F as in (2.1.6)

Theorem 2.5.1. *Assume that $1 < \gamma < \infty$. Then, under the gauge invariance condition (2.1.7), for any data $f \in L^2(\mathbb{T})$, the unique global solution u provided by Theorem 2.4.2 scatters to a linear solution, that is there exists $u_{\pm} \in L^2$ such that*

$$\|u(t) - e^{it\mathcal{L}}u_{\pm}\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \pm\infty.$$

Proof. We will use the following Cauchy criterion : If $\|z(t_1) - z(t_2)\|_{L^2} \rightarrow 0$ as t_1, t_2 , tend both to $\pm\infty$, then there exists $z_{\pm} \in L^2(\mathbb{T})$ such that $\|z(t) - z_{\pm}\|_{L^2} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \pm\infty$. According to Theorem 2.3.6 we have, for all $t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned} \|e^{-it_2\mathcal{L}}u(t_2) - e^{-it_1\mathcal{L}}u(t_1)\|_{L^2(\mathbb{T})} &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-is\mathcal{L}}F(u(s)) ds \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\lesssim \|u\|_{L^p([t_1, t_2], L^q(\mathbb{T}))}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Since $u \in L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}))$, the last expression vanishes as $t_1 \leq t_2$ tend both to $-\infty$ or to $+\infty$. Thus, using the Cauchy criterion above, one gets the desired result. ■

Remark. If the nonlinearity is not gauge invariant we will still have scattering for small L^2 data for all $1 < \gamma < \infty$.

Deuxième partie :

Equations d'évolutions sur les graphes
symétriques

Chapitre 3

Noyau de la chaleur et équation de Schrödinger sur les graphes symétriques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va établir un encadrement optimal du noyau de la chaleur sur les graphes symétriques. On obtiendra également une estimation du noyau de la chaleur en temps complexe. Enfin, on va étendre aux graphes symétriques les résultats du chapitre 2 sur l'équation de Schrödinger.

3.2 Définitions

Un graphe polygonal symétrique est un graphe connexe Γ constitué de polygones à k cotés tels que

- chaque sommet appartient à r polygones exactement
- l'intersection de deux polygones est réduite à un sommet au plus
- l'image de tout lacet non trivial contient un polygone au moins.

Ici k et r sont deux entiers fixés > 2 . Notons que, si $k = 2$, le graphe symétrique est un arbre homogène de degré r . Plusieurs notions de distance sur ce type de graphe ont été introduites dans [43]. Pour nous, la distance entre deux sommets v_1 et v_2 est le nombre minimal de polygones traversés par un chemin reliant v_1 à v_2 . On considère sur l'ensemble des sommets de Γ la mesure de comptage qui permet de définir les espaces de Lebesgue

$L^p(\Gamma)$. Comme dans le cas des arbres homogènes, on montre (voir [33], [34]) qu'un groupe G agissant isométriquement et simplement transitivement sur Γ est isomorphe au produit libre de r copies de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ dans le cas $k > 2$, respectivement au produit libre de t copies de $\mathbb{Z}$ et s copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec $2t+s = r$, dans le cas $k = 2$.

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets de Γ . Un élément de $\mathcal{V}$ s'identifie d'une façon naturelle à un élément de G , et chaque polygone de Γ correspond par cette identification à une orbite pour l'action par translation à droite de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sur Γ . Selon cette identification, on peut définir la longueur $|g|$ d'un élément $g \in G$ de la façon suivante. Soient $a_1, \dots, a_r$ les générateurs de G . Tout élément non trivial g dans G admet une unique représentation sous forme d'un mot réduit $g = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_m}^{n_m}$, (avec $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_m$ et $0 < n_1, \dots, n_m < k$). Alors $|g| = m$. On fixe un point $o \in \Gamma$ qu'on va appeler l'origine de Γ . Dans ce cas, pour $g \in \Gamma$, $|g| = d(g, o)$ est la distance de g à o . On note $S(o, n)$ la sphère centrée à l'origine et de rayon $n \in \mathbb{N}$ dans $G \equiv \mathcal{V}$, dont le cardinal est égal à

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ r(k-1)q^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où $q = (r-1)(k-1)$, et on note $B'(o, n)$ la boule fermée de centre o et de rayon $n \in \mathbb{N}$ dans $\mathcal{V}$, dont le cardinal est égal à $1 + r(k-1) \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Une géodésique est une suite finie $(P_1, \dots, P_n)$ de polygones consécutifs distincts. Si x, y sont deux points de $\mathcal{V}$ tels que $d(x, y) = n > 0$, il existe une unique géodésique $(P_1, \dots, P_n)$ telle que $x \in P_1 \setminus P_2$ et $y \in P_n \setminus P_{n-1}$.

Un rayon géodésique $\mathcal{P}$ dans Γ est une suite $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ de polygones consécutifs distincts. On dit que $x \in \mathcal{P}$ si $x \in P_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Etant donné un rayon géodésique $\mathcal{P}$ issu de o et $x \in \mathcal{V}$, on définit leur point de confluence $c(x, \mathcal{P}) \in \mathcal{V}$ comme étant le dernier point dans $\mathcal{P}$ de la géodésique reliant o à x .

Si $E(G)$ est un espace fonctionnel, on désigne par $E(G)^\#$ le sous-espace de $E(G)$ des fonctions radiales, c'est à dire des fonctions sur G qui ne dépendent que de la longueur des mots. Par exemple, $\mathcal{D}(G)$ désigne l'espace des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ à support fini et $\mathcal{D}(G)^\#$ le sous-espace des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ radiales à support fini.

On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g sur $\mathcal{V} = G$ par

$$f * g(x) = \sum_{y \in \mathcal{V}} f(y) g(y^{-1}x).$$

Si g est radiale alors

$$f * g(x) = \sum_{n \geq 0} g(n) \sum_{d(x,y)=n} f(y).$$

Soit μ_1 la mesure de probabilité uniformément distribuée sur les mots de longueur 1. Dans [43] les auteurs ont montré que l'espace $L^1(G)^\sharp$ des fonctions radiales et sommables, est une algèbre de convolution commutative, qui est engendrée par μ_1 , et qui a pour unité la mesure de Dirac δ_0 à l'origine.

La frontière Ω de $G \equiv \Gamma$ est constituée des mots infinis réduits en les générateurs de G . Le groupe G opère sur Ω par multiplication à gauche des mots. Pour $x \in G$, soit $E(x)$ le sous-ensemble de Ω constitué des mots qui commencent par le mot réduit fini x . La famille $\{E(x), x \in G\}$ est une base de la topologie de Ω faisant de Ω un espace topologique compact. Soit ν la mesure de probabilité sur Ω définie par

$$\nu(E(x)) = \frac{1}{\delta(n)} \text{ si } |x| = n.$$

L'espace topologique mesuré (Ω, ν) est la frontière du Poisson de G , relativement à μ_1 . Le groupe G opère sur les mesures sur Ω et en particulier sur ν par

$$\nu_x(A) = \nu(x^{-1}A)$$

pour tout $x \in G$ et pour toute partie borélienne $A \subset \Omega$. On vérifie que ν_x est absolument continue par rapport à ν . Pour exprimer la dérivée de Radon-Nikodym, on considère l'écriture réduite $\omega = a_{i_1}^{n_1} a_{i_2}^{n_2} \dots$ d'un point de la frontière et on pose $\omega_m = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_m}^{n_m}$ pour tout $m > 0$. On définit la fonction de Busemann

$$\zeta(x, \omega) = d(o, \omega_m) - d(x, \omega_m).$$

Si $m > |x|$, ζ ne dépend pas de ω_m , et

$$\nu(x^{-1}E(\omega_m))/\nu(E(\omega_m)) = q^{\zeta(x, \omega)}, \quad (3.2.2)$$

où $q = (k-1)(r-1)$. La quantité obtenue dans (3.2.2) s'appelle le noyau de Poisson, qu'on note $P(x, \omega)$, et il vérifie les identités cocycliques suivantes :

$$P(o, \omega) = 1 \quad \text{et} \quad P(xy, \omega) = P(y, x^{-1}\omega) P(x, \omega). \quad (3.2.3)$$

3.3 Transformation d'Abel

Dans cette section on étudie la transformation d'Abel, qui est la restriction aux fonctions radiales de la transformation de Radon horocyclique. Commençons par définir les horocycles. On rappelle que $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des sommets de Γ et Ω sa frontière. Pour $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathcal{V}$, il existe un unique rayon géodésique issue de x et abondissant à ω , qu'on désigne par $[x, \omega]$. Pour $x, y \in \mathcal{V}$, les géodésiques $[x, \omega]$ et $[y, \omega]$ ont un point de confluence $z \in \mathcal{V}$. On définit alors $\zeta_\omega(x, y) = d(x, z) - d(y, z)$. Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, l'identité $\zeta_\omega(x, y) = 0$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{V}$, et les classes d'équivalences sont les horocycles associées à ω . Le choix de o comme origine permet de paramétriser l'ensemble des horocycles au moyen de $\Omega \times \mathbb{Z}$. Plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$H_h(\omega) = \left\{ x \in V, \zeta_\omega(o, x) = h \right\}.$$

La fonction $\zeta_\omega(o, x)$ n'étant pas autre que la fonction $\zeta(x, \omega)$, alors les horocycles sont les ensembles de niveau du noyau de Poisson. On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathcal{V}$ est la réunion disjointe des horocycles $H_h(\omega)$ avec $h \in \mathbb{Z}$ et qu'en particulier $o \in H_0(\omega)$. La transformation de Radon horocyclique est définie sur $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ par

$$\mathcal{R}f(\omega, h) = \sum_{x \in H_h(\omega)} f(x)$$

et la transformation d'Abel sur $\mathcal{D}(\mathcal{V})^\#$ par

$$\mathcal{A}f(\omega, h) = q^{\frac{h}{2}} \mathcal{R}f(\omega, h).$$

La proposition suivante donne une expression explicite de la transformée d'Abel d'une fonction radiale f . Une telle fonction s'identifie à une fonction sur $\mathbb{N}$. On note $f(n)$ sa valeur pour $|x| = n$. Rappelons $\sigma = k - 2$.

Proposition 3.3.1. *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})^\sharp$, alors*

$$\mathcal{A}f(\omega, h) = q^{\frac{|h|}{2}} f(|h|) + \sigma \sum_{j \geq 1} q^{\frac{|h|}{2} + j - 1} f(|h| + 2j - 1) + \frac{r-2}{r-1} \sum_{j \geq 1} q^{\frac{|h|}{2} + j} f(|h| + 2j).$$

Par conséquence $\mathcal{A}f$ ne dépend pas de ω , et $\mathcal{A}f$ est paire en h . Le lemme suivant est crucial dans la preuve de cette proposition.

Lemme 3.3.2. *Fixons $\omega \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{Z}$, soit $b(n, h) = \text{Card}[H_h(\omega) \cap S(o, n)]$. Alors*

$$b(n, h) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < |h| \\ q^{-h_-} & \text{si } n = |h|, \\ \sigma q^{-h_- + j - 1} & \text{si } n = |h| + 2j - 1 \text{ avec } j \geq 1 \\ (r-2)(k-1) q^{-h_- + j - 1} & \text{si } n = |h| + 2j \text{ avec } j \geq 1 \end{cases}$$

où $h_- = \min(0, h)$.

Preuve. On va suivre les lignes de la preuve de [10]. Si $\omega = a_{i_1}^{n_1} a_{i_2}^{n_2} \dots$ est l'écriture de ω , alors $\omega_0 = o$, $\omega_1 = a_{i_1}^{n_1}$, $\omega_2 = a_{i_1}^{n_1} a_{i_2}^{n_2}, \dots$ sont les noeuds du rayon géodésique $[o, \omega]$, c'est à dire les points de $[o, \omega]$ en lesquels on change d'horocycles (voir fig.3.1). Lorsque $h \geq 0$, ω_h est le seul élément de $H_h(\omega) \cap S(o, h)$, si bien que $b(h, h) = 1$. Si $h < 0$, un point x appartient à $H_h(\omega) \cap S(o, |h|)$ si et seulement si o est le point de confluence des géodésique $[x, \omega]$ et $[o, \omega]$, or

$$\text{Card} \{x \in S(o, -h) \mid o \notin [x, \omega] \cap [o, \omega]\} = (k-1)^{-h} (r-1)^{-h-1},$$

alors $b(-h, h) = \text{Card} \{S(o, -h)\} - (k-1)^{-h} (r-1)^{-h-1} = q^{-h}$. Il est clair que $b(n, h) = 0$ quand $|h| > n$. Pour le reste, on procède par récurrence sur les valeurs de n , et en utilisant le fait que

$$b(n+2, h) = q b(n, h) \tag{3.3.1}$$

dans les deux cas. En effet, on considère d'abord le cas $h = n - 1$. Dans ce cas h et n sont de parités différentes. Les points d'intersection de $S(o, n)$ et $H_h(\omega)$ sont situés sur le polygone qui a comme noeuds les points ω_h et ω_{h+1} . Or d'après la définition des noeuds, $\omega_h \in H_h(\omega) \setminus S(o, n)$ et $\omega_{h+1} \in H_{h+1}(\omega)$. Il est clair que les autres points de ce polygone sont dans $S(o, n) \cap H_h(\omega)$ (voir fig.3.2). Alors $b(n, n-1) = \sigma$, ainsi la formule est vraie pour $h = n-1$. Ensuite, si $h = n-2$, h et n sont de même parité. Dans ce cas on considère les points

$v \in \mathcal{V}$ tels que $|v| = n = |\omega_h| + 2$ et $v \in H_h(\omega)$. Ces points sont des sommets des polygones issus de ω_{h+1} . Or tous les sommets du polygone situés entre ω_h et ω_{h+1} sont à distance 1 de ω_h et tous les sommets du polygone situé entre ω_{h+1} et ω_{h+2} appartiennent à $H_{h+1}(\omega)$. Il est clair que les sommets des $(r - 2)$ polygones qui restent sont bien dans $S(o, n) \cap H_h(\omega)$ pour $h = n - 2$ (voir fig.3.2). Alors si $h = n - 2$ on a que $b(n, h) = (r - 2)(k - 1)$. On conclut en utilisant (3.3.1). Ainsi la proposition 3.3.1 découle du lemme précédent. Plus précisément, pour tout $f \in \mathcal{D}(G)^\sharp$,

$$\mathcal{A}f(\omega, h) = \mathcal{A}f(h) = q^{\frac{h}{2}} \sum_{x \in H_h(\omega)} f(x) = q^{\frac{h}{2}} \sum_{n \geq 0} b(n, h) f(n), \quad (3.3.2)$$

et le résultat découle en remplaçant $b(n, h)$ par sa valeur dans (3.3.2). ■

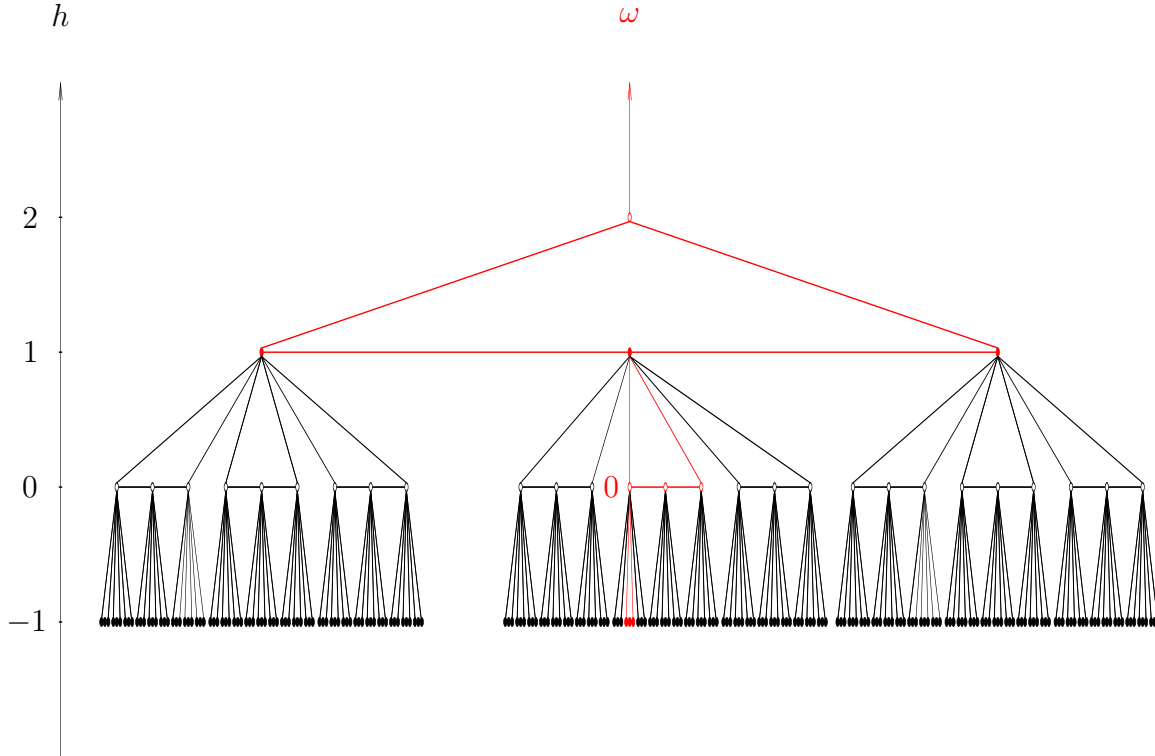
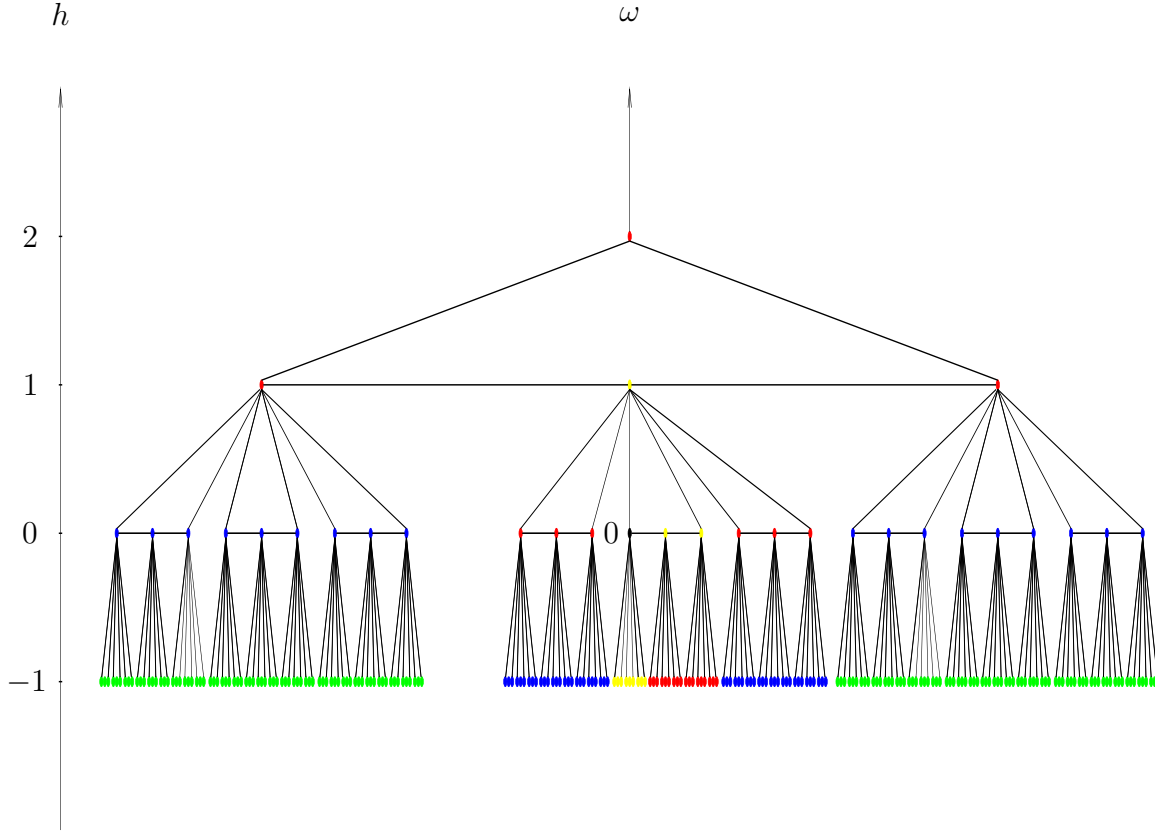


FIGURE 3.1 – Horocycles dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{*4}$

FIGURE 3.2 – Sphères dans la représentation de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{*4}$ comme “demi-espace supérieur”

Remarque 3.3.3. Rappelons que le laplacien combinatoire $\mathcal{L}^\Gamma$ sur $G \equiv \mathcal{V}$ est défini par

$$\mathcal{L}^\Gamma f(x) = f(x) - \frac{1}{r(k-1)} \sum_{y:d(x,y)=1} f(y). \quad (3.3.3)$$

Le laplacien $\mathcal{L}^\Gamma$ correspond, via la transformation d’Abel $\mathcal{A}$, à l’opérateur aux différences suivant sur $\mathbb{Z}$:

$$Dg(n) = \frac{(q+1)g(n) - q^{\frac{1}{2}}\{g(n+1) + g(n-1)\}}{r(k-1)}. \quad (3.3.4)$$

Proposition 3.3.4. Pour tout $k \leq r$, $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(G)^\#$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$ dont l’inverse est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}g(n) = \frac{1}{k} q^{-\frac{n-1}{2}} \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} [g(n+m-1) - g(n+m+1)] \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (k-1)^m q^{-\frac{m}{2}} [g(n+m-1) - g(n+m+1)] \Big\}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Ce qui est équivalent à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}g(n) = & q^{-\frac{n}{2}} \left\{ g(n) - (k-2) q^{-\frac{1}{2}} g(n+1) \right. \\ & - \frac{q-1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} g(n+m) \\ & \left. - \frac{r-k}{r} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (k-1)^m q^{-\frac{m}{2}} g(n+m) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Notons que les sommes ci-dessus sont finies, tant qu'on considère des fonctions g à support fini.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} q^{-\frac{n}{2}} \left\{ \mathcal{A}f(n) - \mathcal{A}f(n+2) + q^{-\frac{1}{2}} [\mathcal{A}f(n+1) - \mathcal{A}f(n+3)] \right\} = \\ f(n) - f(n+2) + (k-1) [f(n+1) - f(n+3)]. \end{aligned}$$

Comme f est à support fini,

$$\begin{aligned} f(n) + (k-1)f(n+1) = & \sum_{j \geq 0} \{f(n+2j) - f(n+2j+2)\} + \\ & (k-1) \sum_{j \geq 1} \{f(n+2j-1) - f(n+2j+1)\} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(n) + (k-1)f(n+1) = & \sum_{j \geq 0} q^{-\frac{n}{2}-j} \left\{ \mathcal{A}f(n+2j) - \mathcal{A}f(n+2j+2) \right\} \\ & + \sum_{j \geq 1} q^{-\frac{n-1}{2}-j} \left\{ \mathcal{A}f(n+2j-1) - \mathcal{A}f(n+2j+1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Soit $F(n) = (k-1)^n f(n)$. Alors en multipliant les deux membres de (3.3.7) par $(k-1)^n$, on obtient la formule de récurrence suivante

$$F(n) + F(n+1) = (k-1)^n G(n) \quad (3.3.8)$$

où

$$\begin{aligned}
G(n) &= \sum_{j \geq 0} q^{-\frac{n}{2}-j} \{g(n+2j) - g(n+2j+2)\} \\
&\quad + \sum_{j \geq 0} q^{-\frac{n+1}{2}-j} \{g(n+2j+1) - g(n+2j+3)\}.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

On résout l'équation de récurrence (3.3.8) de la manière ascendante en écrivant :

$$F(n) = (k-1)^n G(n) - F(n+1)$$

d'où

$$F(n) = \sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell (k-1)^{n+\ell} G(n+\ell). \tag{3.3.10}$$

Ainsi

$$f(n) = \sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell (k-1)^\ell G(n+\ell). \tag{3.3.11}$$

Observons à nouveau que cette somme est finie pour des fonctions $g = \mathcal{A}f$ et par conséquent G à support fini. En substituant (3.3.9) dans (3.3.11), ensuite en posant $m = \ell + 2j + 1$, respectivement $m = \ell + 2j$ et en distinguant les cas m pair et m impair, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{-1}g(n) &= q^{-\frac{n}{2}} \{g(n) - g(n+2)\} \\
&\quad - \sum_{m \text{ pair} \geq 2} \frac{(k-1)^m - 1}{k} q^{-\frac{n+m-1}{2}} \{g(n+m-1) - g(n+m+1)\} \\
&\quad + \sum_{m \text{ impair} \geq 3} \frac{(k-1)^m + 1}{k} q^{-\frac{n+m-1}{2}} \{g(n+m-1) - g(n+m+1)\} \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \sum_{m \text{ impair} > 0} [(k-1)^m + 1] q^{-\frac{n+m-1}{2}} \{g(n+m-1) - g(n+m+1)\} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m \text{ pair} > 0} [(k-1)^m - 1] q^{-\frac{n+m-1}{2}} \{g(n+m-1) - g(n+m+1)\} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Après réarrangement des termes on obtient (3.3.5) puis (3.3.6). ■

Remarque 3.3.5. Lorsque $k = r$ on obtient l'expression suivante de la transformation d'Abel inverse

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{-1}g(n) &= \frac{1}{k} (k-1)^{-(n-1)} \left\{ g(n) - g(n+1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (k-1)^{-m} [g(n+m-1) - g(n+m+1)] \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

ce qui est équivalent à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}g(n) = (k-1)^{-n} \left\{ g(n) - \frac{k-2}{k-1} g(n+1) \right. \\ \left. - (k-2) \sum_{m=1}^{\infty} (k-1)^{-m} g(n+m) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Corollaire 3.3.6. *On a $\text{supp } f \subset B'(0, n)$ si et seulement si $\text{supp } \mathcal{A}f \subset [-n, +n]$.*

Etendons la transformation d'Abel au cadre plus large des espaces de Schwartz. Pour tout $0 < p < \infty$, $\mathcal{S}_p(G)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{(p,m)} = \sup_{x \in G} (1+|x|)^m q^{|x|/p} |f(x)| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.3.15)$$

C'est un espace de Fréchet pour la famille croissante de normes (3.3.15). Considérons également l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$ des fonctions $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ paires telles que

$$\|g\|_{(m)} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (1+|n|)^m |g(n)| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Proposition 3.3.7. *Pour tout $1 \leq p \leq 2$, la transformation d'Abel s'étend en une application linéaire continue de $\mathcal{S}_p(G)^{\sharp}$ sur $q^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} \mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$.*

Preuve. Soit $1 \leq p \leq 2$. Montrons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $f \in \mathcal{S}_p(G)^{\sharp}$,

$$\left\| q^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} \mathcal{A}f \right\|_{(m)} \leq C \|f\|_{(p,m+2)}. \quad (3.3.16)$$

Par hypothèse

$$|f(n)| \leq C'(1+n)^{-m-2} q^{-n/p} \|f\|_{(p,m+2)}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}_p(G)^{\sharp}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} (1+h)^m q^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})h} |\mathcal{A}f(h)| &\leq (1+h)^m \sum_{j \in \mathbb{N}} q^{\frac{h}{p} + \frac{j}{2}} |f(h+j)| \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} (1+j)^{-2} \|f\|_{(p,m+2)} \end{aligned}$$

pour tout $h \in \mathbb{N}$, ce qui prouve (3.3.16). ■

Proposition 3.3.8. (a) *Si $k \leq r$, alors $\mathcal{A}^{-1}$ est une application linéaire continue de $q^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} \mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$ dans $\mathcal{S}_p(G)^{\sharp}$, pour tout $1 \leq p \leq 2$.*

(b) Si $k > r$, alors $\mathcal{A}^{-1}$ est une application linéaire continue de $q^{-\frac{1}{2}|\cdot|} \mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$ dans $\mathcal{S}_1(G)^\#$.

Preuve. On commence par (a). Montrons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\mathcal{A}^{-1}g\|_{(p,m)} \leq C \|g\|_{(m+2)} \quad \forall g \in q^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} \mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}.$$

Par hypothèse, pour tout $g \in q^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} \mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|g(n)| \leq (1+n)^{-m-2} q^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})n} \left\| q^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} g \right\|_{(m+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $|\mathcal{A}^{-1}g(n)| \leq \sum_{i \geq 0} (k-1)^i |G(n+i)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$, avec

$$(k-1)^i \leq q^{\frac{i}{2}} \leq q^{\frac{i}{p}} \text{ et }$$

$$|G(n+i)| \leq C \sum_{j \geq 0} q^{-\frac{n+i+j}{2}} |g(n+i+j)|,$$

on en déduit successivement les estimations

$$\begin{aligned} (1+n+i)^{m+2} q^{\frac{n+i}{p}} |G(n+i)| &\leq C \sum_{j \geq 0} q^{-\frac{j}{p}} (1+n+i+j)^{m+2} q^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n+i+j)} |g(n+i+j)| \\ &\leq C \left\| q^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} g \right\|_{(m+2)} \quad \forall n, i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} (1+n)^m q^{\frac{n}{p}} |\mathcal{A}^{-1}g(n)| &\leq \sum_{i \geq 0} (1+i)^{-2} (1+n+i)^{m+2} q^{\frac{n+i}{p}} |G(n+i)| \\ &\leq C \left\| q^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} g \right\|_{(m+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pour la démonstration de (b) on procède de la même façon, en estimant dans ce cas $(k-1)^i \leq q^i$. ■

Corollaire 3.3.9. (a) Si $k \leq r$, la transformation d'Abel est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}_p(G)^\#$ sur $q^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})|\cdot|} \mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$, pour tout $1 \leq p \leq 2$.

(b) Si $k > r$, la transformation d'Abel est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}_1(G)^\#$ sur $q^{-\frac{1}{2}|\cdot|} \mathcal{S}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$.

3.4 Transformation d'Abel duale

On va calculer la transformée d'Abel duale $\mathcal{A}^*g$ d'une fonction $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ paire au sens où :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^*g(n) f(n) \delta(n) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} g(|h|) \mathcal{A}f(|h|) \quad (3.4.1)$$

pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})^\sharp$.

Rappelons que

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ r(r-1)^{n-1}(k-1)^n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

désigne le cardinal des sphères de rayon n et $\sigma = k - 2$.

Théorème 3.4.1. *On a*

$$\mathcal{A}^*g(0) = g(0)$$

et

$$\mathcal{A}^*g(n) = 2 \frac{r-1}{r} q^{-\frac{n}{2}} g(n) + \sigma \frac{r-1}{r} q^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\substack{-n < j < n \\ j \text{ et } n \text{ de parités différentes}}} g(\pm j) + \frac{r-2}{r} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{\substack{-n < j < n \\ j \text{ et } n \text{ de même parité}}} g(\pm j) \quad (3.4.2)$$

pour tout $n > 0$.

Démonstration. On a

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}f(h) g(h) = \mathcal{A}f(0)g(0) + 2 \sum_{h \geq 1} \mathcal{A}f(h) g(h) = \sum_{n \geq 0} q^{\frac{n}{2}} f(n) G(n). \quad (3.4.3)$$

où $G(0) = g(0)$ et

$$G(n) = 2 g(n) + \frac{r-2}{r-1} \sum_{\substack{-n < j < n \\ j \text{ et } n \text{ de même parité}}} g(\pm j) + \sigma q^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{-n < j < n \\ j \text{ et } n \text{ de parités différentes}}} g(\pm j)$$

Maintenant l'expression de $\mathcal{A}^*g$ en découle facilement. ■

Dans la suite on va établir l'expression de la transformation d'Abel duale inverse. En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 3.4.2. *La transformation d'Abel duale $\mathcal{A}^*$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ paires sur l'espace des fonctions $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ radiales. Son inverse est*

donné par

$$g(0) = f(0), \quad g(1) = -\frac{\sigma}{2} q^{-\frac{1}{2}} f(0) + \frac{r(k-1)}{2} q^{-\frac{1}{2}} f(1)$$

et

$$\begin{aligned} g(n) = & -\frac{1}{2k} \{q-1+(r-k)(1-k)^n\} q^{-\frac{n}{2}} f(0) \\ & -\frac{r(k-1)}{2k} \sum_{0 \leq j \leq n-1} \{q-1+(r-k)(1-k)^{n-j}\} q^{j-\frac{n}{2}-1} f(j) \\ & -\frac{1}{2} r(k-1) \sigma q^{\frac{n}{2}-2} f(n-1) + \frac{1}{2} r(k-1) q^{\frac{n}{2}-1} f(n) \end{aligned}$$

pour $n \geq 2$, avec la convention usuelle qu'une somme vide est nulle.

Démonstration. Etant donné $g \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\text{paire}}$, posons

$$\begin{aligned} G(n) &= q^{\frac{n}{2}} g(n) \quad \text{et} \\ F(n) &= \frac{1}{2} r(k-1) q^{\frac{n}{2}} \left\{ q^{\frac{n+2}{2}} \mathcal{A}^* f(n+2) - q^{\frac{n}{2}} \mathcal{A}^* g(n) \right\}. \end{aligned}$$

On déduit du théorème 3.4.1 l'identité

$$G(n+2) + \sigma G(n+1) - (k-1) G(n) = F(n) \quad (3.4.4)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'équation (3.4.4) est une récurrence linéaire inhomogène du second ordre. La solution générale de l'équation homogène associée est donnée par

$$G_{\text{hom}}(n) = c_1 + c_2(1-k)^n.$$

On résoud ensuite l'équation inhomogène (3.4.4) par variation des constantes :

$$G(n) = c_1(n) + c_2(n) (1-k)^n. \quad (3.4.5)$$

La condition additionnelle

$$c_1(n+1) - c_1(n) = \{c_2(n+1) - c_2(n)\} (1-k)^{n+1} = 0 \quad (3.4.6)$$

donne

$$G(n+1) = c_1(n) + c_2(n) (1-k)^{n+1}, \quad (3.4.7)$$

d'où

$$G(n+2) = c_1(n+1) + c_2(n+1) (1-k)^{n+2}. \quad (3.4.8)$$

En substituant (3.4.5), (3.4.7), (3.4.8) dans (3.4.4), on obtient

$$c_1(n+1) - c_1(n) + \{c_2(n+1) - c_2(n)\} (1-k)^{n+2} = F(n). \quad (3.4.9)$$

Le système constitué des équations (3.4.6) et (3.4.9) a pour solution

$$\begin{cases} c_1(n+1) - c_1(n) = k^{-1} F(n) \\ c_2(n+1) - c_2(n) = -k^{-1} (1-k)^{-n-1} F(n) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} c_1(n) = c_1 + k^{-1} \sum_{0 \leq j < n} F(j) \\ c_2(n) = c_2 - k^{-1} \sum_{0 \leq j < n} (1-k)^{-j-1} F(j) \end{cases}$$

et

$$G(n) = c_1 + c_2(1-k)^n + \sum_{0 \leq j \leq n-2} \frac{1 - (1-k)^{n-j-1}}{k} F(j). \quad (3.4.10)$$

On détermine les constantes

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \mathcal{A}^* g(0) + \frac{r(k-1)}{2k} \mathcal{A}^* g(1), \\ c_2 = \frac{1}{2} \mathcal{A}^* g(0) - \frac{r(k-1)}{2k} \mathcal{A}^* g(1), \end{cases}$$

au moyen des valeurs initiales

$$\begin{cases} G(0) = g(0) = \mathcal{A}^* g(0), \\ G(1) = q^{\frac{1}{2}} g(1) = \frac{r(k-1)}{2} \mathcal{A}^* g(1) - \frac{\sigma}{2} \mathcal{A}^* g(0). \end{cases}$$

On conclut en substituant dans (3.4.10) les expressions de c_1 , c_2 et F . ■

3.5 Analyse sphérique sur les graphes symétriques

3.5.1 Les fonctions sphériques

On rappelle la définition du laplacien combinatoire $\mathcal{L}^\Gamma$ sur les fonctions $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ donnée en (3.3.3) par :

$$\mathcal{L}^\Gamma u(x) = u(x) - \frac{1}{r(k-1)} \sum_{y; d(x,y)=1} u(y).$$

Notons que comme dans le cas de l'arbre homogène, $\mathcal{L}^\Gamma$ peut être défini comme un opérateur de convolution :

$$\mathcal{L}^\Gamma u = f * (\delta_0 - \mu_1)$$

où δ_0 est la mesure de Dirac et μ_1 est la mesure de probabilité uniformément distribuée sur les mots de longueurs 1. Il est clair que $\mathcal{L}^\Gamma$ est borné sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ et autoadjoint sur $L^2(\Gamma)$. Les fonctions sphériques sont les fonctions propres radiales ϕ de $\mathcal{L}^\Gamma$, normalisées par $\phi(0) = 1$. On en possède deux expressions, l'une comme somme d'exponentielles (voir théorème 3.5.1 ci-dessous) et une autre comme intégrale d'une puissance convenable du noyau de Poisson. Plus précisément,

$$\varphi_\lambda(x) = \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} d\nu(\omega) \quad (3.5.1)$$

a pour valeur propre $1 - \gamma(\lambda)$ où

$$\gamma(\lambda) = \frac{q^{\frac{1}{2} + i\lambda} + q^{\frac{1}{2} - i\lambda} + \sigma}{r(k-1)}.$$

Tous ces résultats sont démontrés dans [42] à un changement de paramètre près, notre φ_λ correspond à leur $\varphi_{\frac{1}{2} + i\lambda}$. Observons que $\gamma(\lambda)$ est une expression paire en $\lambda \in \mathbb{C}$, de période $\tau = 2\pi / \ln q$.

Théorème 3.5.1. *Les fonctions sphériques φ_λ sont données par :*

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} c(\lambda)q^{(-\frac{1}{2} + i\lambda)|x|} + c(-\lambda)q^{(-\frac{1}{2} - i\lambda)|x|} & \text{si } \lambda \notin (\frac{\tau}{2})\mathbb{Z} \\ (1 + \frac{2q + \sigma + q^{\frac{1}{2} + r(k-1)}}{r(k-1)}|x|)(-1)^{j|x|}q^{-\frac{|x|}{2}} & \text{si } \lambda \in \frac{\tau}{2}j\mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.5.2)$$

où $c(\lambda)$ est la fonction méromorphe donnée par :

$$c(\lambda) = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{r(k-1)} \frac{q^{\frac{1}{2}+i\lambda} - (k-1)q^{-\frac{1}{2}-i\lambda} + \sigma}{q^{i\lambda} - q^{-i\lambda}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{\tau}{2}\mathbb{Z}. \quad (3.5.3)$$

Observons que φ_λ est une expression paire en $\lambda \in \mathbb{C}$, de période $\tau = 2\pi/\ln q$.

Remarque 3.5.2. Comme application de la transformation d'Abel duale dont l'expression explicite est donnée au théorème 3.4.1, vérifions que les fonctions $\varphi_\lambda(n)$ sont les transformées d'Abel duale des fonctions $\cos_q n\lambda = \frac{q^{in\lambda} + q^{-in\lambda}}{2}$.

A l'origine, on a $\cos_q(0) = 1$ et $\varphi_\lambda(0) = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{\tau}{2}\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{\substack{-n < j < n \\ j, n \text{ de parités différentes}}} \cos_q j\lambda = \sum_{\substack{-n < j < n \\ j, n \text{ de parités différentes}}} q^{ij\lambda} = \frac{\sin_q n\lambda}{\sin_q \lambda}$$

et

$$\sum_{\substack{-n < j < n \\ j, n \text{ de même parité}}} \cos_q j\lambda = \sum_{\substack{-n < j < n \\ j, n \text{ de même parité}}} q^{ij\lambda} = \frac{\sin_q(n-1)\lambda}{\sin_q \lambda},$$

où $\sin_q \ell\lambda = \frac{q^{i\ell\lambda} - q^{-i\ell\lambda}}{2}$.

En utilisant l'identité

$$2 \cos_q n\lambda = \frac{\sin_q(n+1)\lambda}{\sin_q \lambda} - \frac{\sin_q n\lambda}{\sin_q \lambda},$$

on en déduit que la transformée d'Abel duale de $\cos_q n\lambda$ est égale à

$$\frac{1}{r \sin_q \lambda} q^{-\frac{n}{2}} \left\{ (r-1) \sin_q(n+1)\lambda + \sqrt{\frac{r-1}{k-1}} \sigma \sin_q n\lambda - \sin_q(n-1)\lambda \right\}.$$

On obtient la même expression en développant la formule (3.5.2) des fonctions sphériques.

On obtient le cas $\lambda \in \frac{\tau}{2}\mathbb{Z}$ comme limite du cas $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{\tau}{2}\mathbb{Z}$ en utilisant la continuité des fonctions $\cos_q n\lambda$, $\frac{\sin_q n\lambda}{\sin_q \lambda}$ et $\frac{\sin_q(n\pm 1)\lambda}{\sin_q \lambda}$.

3.5.2 Transformation de Fourier

La transformée de Fourier sphérique $\mathcal{H}f$ d'une fonction $f \in \mathcal{D}(G)^\sharp$ est définie par

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \sum_{x \in G} f(x) \varphi_\lambda(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Cette définition garde un sens pour certaines classes de fonctions à support infini. Par exemple, comme

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq 1 \quad \forall x \in G \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ avec } |\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{1}{2},$$

$\mathcal{H}f(\lambda)$ est bien définie pour $f \in L^1(G)^\#$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{1}{2}$.

Observons que $\mathcal{H}f$ est toujours paire et périodique de période τ . Plus généralement, on peut définir la transformée de Fourier-Helgason d'une fonction $f \in \mathcal{D}(G)$ (non nécessairement radiale) par

$$\hat{f}(\lambda, \omega) = \sum_{x \in G} f(x) P(x, \omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda}, \quad \forall (\omega, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{C}. \quad (3.5.4)$$

En utilisant l'expression de $P(x, \omega)$, on obtient

$$\hat{f}(\lambda, \omega) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} q^{(\frac{1}{2} + i\lambda)h} \sum_{x \in H_h(\omega)} f(x) = \mathcal{F}_h \left\{ q^{\frac{h}{2}} \mathcal{R}f(\omega, h) \right\}(\lambda), \quad (3.5.5)$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier suivante sur $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}g(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{in\lambda} g(n),$$

dont l'inverse est donnée par

$$g(n) = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathcal{F}g(\lambda) q^{-in\lambda} d\lambda.$$

Rappelons que, si f est radiale, alors $\mathcal{A}f$ ne dépend pas de ω . D'après (3.5.5), $\hat{f}$ ne dépend pas de ω non plus. Dans ce cas, en utilisant la définition des fonctions sphériques (3.5.1), on

a

$$\hat{f}(\lambda, \omega) = \int_{\Omega} \hat{f}(\lambda, \omega) d\nu(\omega) = \sum_{x \in G} f(x) \int_{\Omega} P^{\frac{1}{2} + i\lambda}(x, \omega) d\nu(\omega) = \mathcal{H}f(\lambda).$$

Ceci montre que, pour les fonctions radiales, la transformation de Fourier-Helgason et la transformation de Fourier sphérique coïncident. De plus, on a

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A}. \quad (3.5.6)$$

Passons à la formule de Plancherel et à l'inversion de la transformation de Fourier sphérique. Il est montré dans [42] que la mesure de Plancherel μ est à support dans $D \cup E$, où D est le segment $[\frac{\sigma-2q^{\frac{1}{2}}}{r(k-1)}, \frac{\sigma+2q^{\frac{1}{2}}}{r(k-1)}]$ et

$$E = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k \leq r, \\ \frac{1}{1-k} & \text{si } k > r. \end{cases}$$

L'expression suivante de la mesure de Plancherel μ a été obtenue dans [31] et [52] :

$$f(o) = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln(q)}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{H}f(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda + \left[\frac{(k-r)_+}{k} \mathcal{H}f(\lambda_0) \right] \quad (3.5.7)$$

où

$$(k-r)_+ = \begin{cases} k-r & \text{si } k > r, \\ 0 & \text{si } k \leq r. \end{cases}$$

et λ_0 est tel que $\gamma(\lambda_0) = \frac{1}{1-k}$. On a donc les résultats suivants. Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})^\sharp$, on a :

Formule de Plancherel : On a

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln(q)}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\mathcal{H}f(\lambda)|^2 |c(\lambda)|^{-2} d\lambda + \left[\frac{(k-r)_+}{k} |\mathcal{H}f(\lambda_0)|^2 \right] \quad (3.5.8)$$

Formule d'inversion : Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})^\sharp$ et $x \in \mathcal{V}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln(q)}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{H}f(\lambda) \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \\ &+ \left[\frac{(k-r)_+}{k} \mathcal{H}f(\lambda_0) \varphi_{\lambda_0}(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Afin de généraliser ces formules aux fonctions non radiales sur Γ , considérons les moyennes sphériques d'une fonction $f : G \mapsto \mathbb{C}$,

$$f_x^\sharp(z) = \frac{1}{\delta(|z|)} \sum_{y \in S(x, |z|)} f(y), \quad (3.5.10)$$

en particulier à l'origine

$$f^\sharp(z) = f_o^\sharp(z) = \frac{1}{\delta(z)} \sum_{y: |y|=|z|} f(y).$$

L'opérateur de moyenne $f \mapsto f^\sharp$ est un projecteur sur les fonctions radiales qui vérifie

$$\langle f^\sharp, g^\sharp \rangle = \langle f^\sharp, g \rangle = \langle f, g^\sharp \rangle, \quad (3.5.11)$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \mathcal{V}} f(x) g(x)$$

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Comme φ_λ est radiale, on a

$$\langle f^\sharp, \varphi_\lambda \rangle = \langle f, (\varphi_\lambda)^\sharp \rangle = \langle f, \varphi_\lambda \rangle. \quad (3.5.12)$$

En appliquant (3.5.7) et (3.5.12) à $f^\sharp$, on obtient

$$f(o) = f^\sharp(o) = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln(q)}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle f, \varphi_\lambda \rangle |c(\lambda)|^{-2} d\lambda + \left[\frac{(k-r)_+}{r} \langle f, \varphi_{\lambda_0} \rangle \right]. \quad (3.5.13)$$

Rappelons la définition des représentations de la série principale de G , qui sont réalisées sur $L^2(\Omega, d\nu)$ par

$$\pi_\lambda(x)\eta(\omega) = P(x, \omega)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \eta(x^{-1}\omega) \quad \forall x \in G, \forall \omega \in \Omega. \quad (3.5.14)$$

Ici $P(x, \omega)$ désigne le noyau de Poisson (3.2.2) et $\lambda \in \mathbb{C}$. Ces représentations ont été définies et étudiées sur les arbres homogènes dans [33] puis sur les graphes symétriques dans [42]. Ajoutons quelques remarques utiles. On note encore π_λ la représentation de l'algèbre de convolution $\mathcal{D}(\mathcal{V})$

$$\pi_\lambda(f) = \sum_{x \in \mathcal{V}} f(x) \pi_\lambda(x).$$

Les fonctions sphériques φ_λ sont des coefficients matriciels des représentations π_λ . Plus précisément,

$$\varphi_\lambda(x) = (\pi_\lambda(x)\mathbb{I}, \mathbb{I})$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur Ω . Enfin la transformation de Fourier-Helgason (3.5.4) peut être définie au moyen des représentations π_λ par

$$\hat{f}(\lambda, \omega) = \sum_{x \in \mathcal{V}} f(x) P(x, \omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} = [\pi_\lambda(f) \mathbb{1}](\omega). \quad (3.5.15)$$

Lemme 3.5.3. *Pour tout $x, y \in G$ on a*

$$\varphi_\lambda(xy^{-1}) = \varphi_\lambda(y^{-1}x) = \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} P(y, \omega)^{\frac{1}{2} - i\lambda} d\nu(\omega).$$

Preuve. Comme φ_λ est une fonction radiale sur $G \equiv \mathcal{V}$, on a $\varphi_\lambda(z^{-1}) = \varphi_\lambda(z)$ pour tout $z \in G$. D'après les relation de cocycle (3.2.3), on a pour tout $x, y \in G$ et $\omega \in \Omega$,

$$P(y^{-1}x, \omega) = P(x, y\omega) P(y^{-1}, \omega) \quad \text{et} \quad 1 = P(o, \omega) = P(y, y\omega) P(y^{-1}\omega),$$

d'où

$$P(y^{-1}x, \omega) = P(x, y\omega) P(y, y\omega)^{-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(y^{-1}x) &= \int_{\Omega} P(y^{-1}x, \omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} d\nu(\omega) = \int_{\Omega} P(x, y\omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} P(y, y\omega)^{-\frac{1}{2} - i\lambda} d\nu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} P(x, y\omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} P(y, y\omega)^{-\frac{1}{2} - i\lambda} \frac{d\nu(\omega)}{d\nu(y\omega)} d\nu(y\omega) \\ &= \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} P(y, \omega)^{-\frac{1}{2} - i\lambda} P(y, \omega) d\nu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2} + i\lambda} P(y, \omega)^{\frac{1}{2} - i\lambda} d\nu(\omega), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $P(y, \omega) = \frac{d\nu(y^{-1}\omega)}{d\nu(\omega)}$ est une dérivée de Radon-Nikodym. ■

Lemme 3.5.4. *Supposon $k \leq r$.*

(a) **Formule de Plancherel :** *Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, on a*

$$\sum_{x \in \mathcal{V}} |f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\Omega} |\hat{f}(\lambda, \omega)|^2 |c(\lambda)|^{-2} d\nu(\omega) d\lambda. \quad (3.5.16)$$

(b) **Formule d'inversion** : Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ et pour tout $x \in \mathcal{V}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_{\Omega} \hat{f}(\lambda, \omega) P(x, \omega)^{\frac{1}{2}-i\lambda} |c(\lambda)|^{-2} d\nu(\omega) d\lambda. \quad (3.5.17)$$

Remarque : Si $k > r$, il faut ajouter aux membres de droite un terme correspondant au paramètre λ_0 .

Preuve. Rappelons qu'on identifie G à $\mathcal{V}$.

(a) Appliquons (3.5.7) à la fonction $(f * f^*)^\sharp$, où $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. D'une part,

$$(f * f^*)(o) = \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \|f\|_{L^2(\mathcal{V})}^2.$$

D'autre part, d'après le lemme 3.5.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[(f * f^*)^\sharp](\lambda) &= \langle f * f^*, \varphi_\lambda \rangle \\ &= \sum_{x, y \in G} f(x) \overline{f(y^{-1})} \varphi_\lambda(xy) \\ &= \sum_{x, y \in G} f(x) \overline{f(y)} \varphi_\lambda(xy^{-1}) \\ &= \int_{\Omega} \left[\sum_{x \in G} f(x) P(x, \omega)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \right] \times \left[\sum_{y \in G} \overline{f(y)} P(y, \omega)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \right] d\nu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} |\hat{f}(\lambda, \omega)|^2 d\nu(\omega) \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. La formule (3.5.7) permet de conclure.

(b) Appliquons (3.5.7) à la fonction $(f_x)^\sharp$. D'une part,

$$(f_x)^\sharp(o) = f(x).$$

D'autre part, d'après la définition (3.5.10) des moyennes sphériques et d'après le lemme

3.5.3,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[(f_x)^\sharp](\lambda) &= \langle (f_x)^\sharp, \varphi_\lambda \rangle \\
&= \sum_{\substack{y, z \in G \\ |y|=|z|}} f(xy) \frac{\varphi_\lambda(z)}{\delta(|z|)} \\
&= \sum_{y \in G} f(xy) \varphi_\lambda(y) \\
&= \sum_{y \in G} f(y) \varphi_\lambda(x^{-1}y) \\
&= \int_{\Omega} \left[\sum_{y \in G} f(y) P(y, \omega)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \right] P(x, \omega)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \\
&= \int_{\Omega} \hat{f}(\lambda, \omega) P(x, \omega)^{\frac{1}{2}-i\lambda} d\nu(\omega)
\end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. La formule (3.5.7) permet de conclure. ■

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathcal{V})^\sharp$. On vérifie facilement que

$$\widehat{(f * \chi)}(\lambda, \omega) = \hat{f}(\lambda, \omega) \mathcal{H}\chi(\lambda). \quad (3.5.18)$$

D'après l'expression intégrale (3.5.1) des fonctions sphériques, on a

$$|\varphi_\lambda(x)| = \varphi_0(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

En utilisant la formule de Plancherel (3.5.16) on a

$$\|f * \chi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \sum_{x \in \mathcal{V}} \chi(x) \varphi_0(x). \quad (3.5.19)$$

Comme

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(|x|) \leq C(1+|x|) q^{-\frac{|x|}{2}} \quad \forall x \in \mathcal{V}$$

et $\delta(n) \leq C q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, on obtient la version suivante du phénomène de Kunze-Stein :

$$\|f * \chi\|_{L^2(\mathcal{V})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathcal{V})} \sum_{n \geq 0} \chi(n) (1+n) q^{\frac{n}{2}}. \quad (3.5.20)$$

Nous aurons besoin du résultat plus général suivant.

Proposition 3.5.5. *Pour tout $2 \leq p, \tilde{p} < \infty$, il existe $C > 0$ telle que*

$$\|f * \chi\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^{\tilde{p}'}} \left\{ \sum_{n \geq 0} |\chi(n)|^r (1+n)^{2s} q^{(1+s)n} \right\}^{\frac{1}{r}},$$

où $r = \frac{p\tilde{p}}{p+\tilde{p}}$ et $s = \frac{\min\{p, \tilde{p}\}}{p+\tilde{p}}$.

Preuve. Cette inégalité s'obtient par interpolation entre l'inégalité (3.5.20) et les deux inégalités élémentaires

$$\|f * \chi\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|\chi\|_{L^p}, \quad \|f * \chi\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{\tilde{p}'}} \|\chi\|_{L^p}.$$

L'argument d'interpolation est décrit en détail dans ([5], lemme 5.1). ■

3.6 Noyau de la chaleur en temps réel

Dans cette section, on considère l'équation de la chaleur sur un graphe symétrique Γ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = -\mathcal{L}_x^\Gamma u(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \quad (3.6.1)$$

La solution de cette équation est donnée par

$$u(t, x) = \mathcal{H}_t^\Gamma f(x), \quad (3.6.2)$$

où $\mathcal{H}_t^\Gamma = e^{-t\mathcal{L}^\Gamma}$ est le semi-groupe de la chaleur associé au laplacien $\mathcal{L}^\Gamma$. On vérifie facilement que $\mathcal{L}^\Gamma$ est borné sur $L^p(\Gamma)$, $\forall p \geq 1$ et autoadjoint sur $L^2(\Gamma)$. La série

$$\mathcal{H}_t^\Gamma = e^{-t\mathcal{L}^\Gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\mathcal{L}^\Gamma)^n}{n!}$$

converge pour la norme d'opérateurs, et $(\mathcal{H}_t^\Gamma)$ est un semi-groupe analytique sur $L^p(\Gamma)$. Comme $\mathcal{H}_t^\Gamma$ est invariant sous l'action du groupe d'automorphismes de Γ et en particulier de G , il est réalisé par convolution à droite par un noyau, appelé noyau de la chaleur et noté h_t^Γ . Plus précisément,

$$\mathcal{H}_t^\Gamma f(x) = f * h_t^\Gamma(x),$$

où

$$h_t^\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\mu_1 - \delta_o)^{(*n)}}{n!} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mu_1^{(*n)}}{n!}, \quad (3.6.3)$$

où μ_1 est la mesure de probabilité uniforme sur la sphère unité et $\mu_1^{(*n)}$ désigne sa n -ième puissance de convolution. Les séries dans (3.6.3) convergent dans $L^1(\Gamma)$, donc uniformement, et on a

$$\|h_t^\Gamma\|_1 = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|\mu_1^{(*n)}\|_1}{n!} = 1. \quad (3.6.4)$$

Le semi-groupe $(\mathcal{H}_t^\Gamma)_{t>0}$ est donc contractif sur $L^p(\Gamma)$, $\forall p \in [1, \infty]$, et il est de plus symétrique.

Notre objectif dans cette section est d'obtenir des estimations ponctuelles précises du noyau de la chaleur h_t^Γ . Ce problème a été étudié sur les arbres homogènes par Cowling, Meda et Setti [28]. Ils ont établi des estimations ponctuelles du noyau de la chaleur h_t^Γ , ainsi que des estimations de sa norme L^p , et ils en ont déduit le comportement en t de la norme d'opérateur $\|\mathcal{H}_t^\Gamma\|_{L^q \rightarrow L^r}$.

Le noyau de la chaleur h_t^Γ est une fonction radiale sur $G = \mathcal{V}$ dont la transformée sphérique est $e^{-t(1-\gamma(\lambda))}$. On en obtient une première expression en utilisant la transformation de Fourier sphérique inverse :

$$h_t^\Gamma(x) = h_t^\Gamma(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln(q)}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\gamma(\lambda))} \varphi_\lambda(x) d\mu(\lambda). \quad (3.6.5)$$

En utilisant la transformation d'Abel inverse, on obtient une seconde expression du noyau de la chaleur h_t^Γ en fonction du noyau de la chaleur $h_t^\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Commençons par exprimer ce dernier au moyen de fonctions de Bessel.

Le laplacien $\mathcal{L}^\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ est défini par

$$\mathcal{L}^\mathbb{Z} F(n) = F(n) - \frac{F(n+1) + F(n-1)}{2} = F *_{\mathbb{Z}} \left[\delta_0 - \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2} \right] (n),$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a . Le noyau de la chaleur $h_t^\mathbb{Z}$ associé à $\mathcal{L}^\mathbb{Z}$ a pour transformée de Fourier $\exp(-t(1 - \cos \lambda))$. D'après la formule d'inversion de Fourier sur $\mathbb{Z}$,

$$h_t^\mathbb{Z}(n) = \frac{e^{-t}}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos \lambda} \cos(n\lambda) d\lambda = e^{-t} I_n(t) \quad (3.6.6)$$

où $I_n(t)$ est une fonction de Bessel classique, dite modifiée de première espèce. Observons que l'expression (3.6.6) du noyau de la chaleur sur $\mathbb{Z}$ se prolonge analytiquement en temps complexe $z \in \mathbb{C}$.

Lemme 3.6.1. (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$h_z^{\mathbb{Z}}(n) - h_z^{\mathbb{Z}}(n+2) = \frac{2(n+1)}{z} h_z^{\mathbb{Z}}(n+1)$$

(ii) Pour tout $t > 0$, la fonction $h_t^{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement décroissante.

Preuve. La preuve de (i) et (ii) découle des propriétés suivantes des fonctions de Bessel modifiées de première espèce (voir [62] ou [30]) :

(i) Relation de récurrence :

$$I_n(z) - I_{n+2}(z) = \frac{2(n+1)}{z} I_{n+1}(z).$$

(ii) Pour tout $t > 0$, $I_n(t)$ est une fonction strictement décroissante en n .

■

Venons-en à l'expression annoncée de h_t^Γ en fonction de $h_t^{\mathbb{Z}}$.

Proposition 3.6.2. Rappelons que $r \geq k \geq 2$, $q = (r-1)(k-1)$, $\alpha = \frac{q+1}{r(k-1)}$ et $\beta = \frac{2q^{\frac{1}{2}}}{r(k-1)}$.

1. Dans le cas $k < r$, on a

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(n) = \frac{r(k-1)}{k} \frac{e^{-(\alpha-\beta)t}}{t} q^{-\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (k-1)^m q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) \right\} \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Dans le cas $k = r$, on a

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(n) = (r-1) \frac{e^{-(\alpha-\beta)t}}{t} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) \\ + \frac{r-1}{r} e^{-(\alpha-\beta)t} q^{-\frac{n}{2}} \{h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n) - h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+1)\}. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Preuve. D'après (3.5.6), on a

$$h_t^\Gamma = (\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1}) (\mathcal{H} h_t^\Gamma).$$

En combinant la proposition 3.3.4 avec la formule d'inversion pour $\mathcal{F}$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_t^\Gamma(n) = \mathcal{A}^{-1} g_t(n) \quad (3.6.9)$$

où

$$\begin{aligned} g_t(n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp[-t(1 - \gamma(\frac{\lambda}{\ln q}))] \cos(n\lambda) d\lambda \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{\pi} \int_0^\pi e^{\beta t \cos \lambda} \cos(n\lambda) d\lambda \\ &= e^{-(\alpha-\beta)t} h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n). \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

D'où, en substituant (3.6.10) dans (3.6.9)

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(n) &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{k} e^{-(\alpha-\beta)t} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{n+m}{2}} \{h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m-1) - h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m+1)\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (k-1)^m q^{-\frac{n+m}{2}} \{h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m-1) - h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m+1)\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

Finalement on obtient (3.6.7) dans le cas $k < r$ en utilisant le lemme 3.6.1.

Dans le cas $k = r$, on obtient (3.6.8) en utilisant le lemme 3.6.1 pour la première somme et en remarquant que la seconde somme se réduit à $q^{-\frac{n}{2}} \{h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n) - h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1)\}$. ■

3.6.1 Inégalités auxiliaires

Nous rassemblons dans les énoncés suivantes des inégalités concernant les fonctions de Bessel modifiées de première espèce.

Lemme 3.6.3. *Les fonctions de Bessel $I_n(t)$ vérifient l'inégalité suivante :*

$$n I_n(t) > (n+1) I_{n+1}(z) \quad (3.6.12)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t > 0$ tels que $n \geq -\frac{1}{4} + \sqrt{z + \frac{1}{16}}$.

Preuve. C'est une conséquence de l'inégalité suivante [60] :

$$I_\nu(z) > \left(1 + \frac{\nu + \frac{1}{2}}{z}\right) I_{\nu+1}(z) \quad (3.6.13)$$

valable pour tout $\nu > -1$ et pour tout $t > 0$. ■

On rappelle le résultat suivant donné dans [60] : Pour tout $n \in]-1, \infty[$ et pour tout $t > 0$ on a

$$\frac{I_{n+1}(t)}{I_n(t)} > \frac{t}{2(n+1) + t}. \quad (3.6.14)$$

La proposition suivante donne une borne supérieure du noyau de la chaleur sur $\mathbb{Z}$.

Proposition 3.6.4. *Pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$h_t^{\mathbb{Z}}(n) \leq C \min(1, t^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.6.15)$$

Preuve. D'une part il est clair que $h_t^{\mathbb{Z}}(n) \leq 1 \forall t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} h_t^{\mathbb{Z}}(n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-t(1-\cos \lambda)} \cos(n\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\pi\sqrt{t}} e^{-t(1-\cos(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}))} \cos(n\frac{\lambda}{\sqrt{t}}) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\pi\sqrt{t}} \exp[-2t \sin^2(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}})] \cos(n\frac{\lambda}{\sqrt{t}}) d\lambda. \end{aligned}$$

Comme la fonction $\sin(x)/x$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors, pour tout $t > 0$ et $\lambda \in [0, \pi\sqrt{t}]$, on a

$$\left(\frac{\sin(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}})}{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}\right)^2 \geq \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} h_t^{\mathbb{Z}}(n) &\leq \frac{1}{\pi} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\pi\sqrt{t}} e^{-2\pi^2\lambda^2} |\cos(n\frac{\lambda}{\sqrt{t}})| d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

Proposition 3.6.5. – Supposons $k = r$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$ on a

$$h_t^\Gamma(n) \geq c t^{-1} e^{-(\alpha-\beta)t} q^{-\frac{n}{2}} (1+n) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1) > 0. \quad (3.6.16)$$

– Si $k < r$, l'inégalité (3.6.16) est vérifiée pour $n \geq \sqrt{\beta t + \frac{1}{16}} - \frac{5}{4}$.

Preuve. On commence par le cas $k < r$. Posons $\varepsilon = (k-1) q^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{r-1}} \in]0, 1[$. Comme

$$h_t^\mathbb{Z}(n) > 0 \quad \forall t > 0, \forall n \in \mathbb{Z},$$

on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m) \geq q^{-\frac{1}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1).$$

Par suite, d'après (3.6.7),

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(n) &\geq \frac{r(k-1)}{k} \frac{e^{-(\alpha-\beta)t}}{t} q^{-\frac{n+1}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1) \\ &\quad + \frac{r(k-1)}{k} \frac{e^{-(\alpha-\beta)t}}{t} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \varepsilon^m (n+m) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m). \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

D'après les lemmes 3.6.3 et 3.6.1, on a

$$(n+m) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m) > (n+m+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m+1) > 0$$

pour tout $m \geq 1$, si $n \geq \sqrt{\beta t + \frac{1}{16}} - \frac{5}{4}$. A fortiori,

$$\varepsilon^m (n+m) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m) > \varepsilon^{m+1} (n+m+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m+1).$$

Ainsi,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \varepsilon^m (n+m) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+m) > 0 \quad (3.6.18)$$

En conclusion, la minoration (3.6.16) résulte de (3.6.17) et de (3.6.18).

Dans le cas $k = r$, on utilise l'expression (3.6.8). Comme précédemment, la contribution de la première somme est minorée par $(k-1) \frac{e^{-(\alpha-\beta)t}}{t} q^{-\frac{n+1}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1)$ tandis que $h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n) - h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1) > 0$. ■

Terminons cette section avec le principe du minimum pour l'équation de la chaleur et la positivité du noyau de la chaleur.

Lemme 3.6.6. Principe du minimum faible : Notons $L = \partial_t + \mathcal{L}$ l'opérateur de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \Gamma$. Soient $t_0 < t_1$ deux réels, $B(o, m) = \{x \in \Gamma \mid |x| \leq m - 1\}$, $\partial B(o, m) = S(o, m)$ et soit $\overline{B(o, m)} = B(o, m) \cup \partial B(o, m)$.

Soit $u : \overline{B(o, m)} \times [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^0([t_0, t_1]) \cap C^1(]t_0, t_1[)$ en temps.

- (i) Si $Lu \geq 0$ sur $B(o, m) \times]t_0, t_1]$, alors u atteint son minimum sur $(B(o, m) \times \{t_0\}) \cup (\partial B(o, m) \times [t_0, t_1])$.
- (ii) Si $u \geq 0$ sur $(B(o, m) \times \{t_0\}) \cup (\partial B(o, m) \times [t_0, t_1])$ et si $Lu \geq 0$ sur $B(o, m) \times]t_0, t_1]$, alors $u \geq 0$ sur $\overline{B(o, m)} \times [t_0, t_1]$.

Preuve. Les assertions (i) et (ii) étant clairement équivalentes, il suffit de prouver (ii). Raisonnons par l'absurde en supposant que la fonction u prenne au moins une valeur strictement négative sur $B(o, m) \times]t_0, t_1]$. Considérons la fonction

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon(t - t_0)$$

sur $\overline{B(o, m)} \times [t_0, t_1]$, où $\varepsilon > 0$ est un réel assez petit pour que v prenne des valeurs négatives. Par continuité la fonction v atteint son minimum $v(x_*, t_*) < 0$ en $(x_*, t_*) \in B(o, m) \times]t_0, t_1]$. Comme $v(x_*, t) \geq v(x_*, t_*)$ pour tout $t \in]t_0, t_*]$, on déduit que $\partial_t v(x_*, t_*) \leq 0$. Comme $v(x, t_*) \geq v(x_*, t_*)$ pour tout $x \in \overline{B(o, m)}$, on a également $\mathcal{L}^\Gamma v(x_*, t_*) \leq 0$. Ainsi $Lv(x_*, t_*) \leq 0$, ce qui contredit $Lv = Lu + \varepsilon > 0$. ■

Lemme 3.6.7. Le noyau de la chaleur $h_t^\Gamma(x)$ est strictement positif, pour tout $x \in \Gamma$ et pour tout $t > 0$.

Preuve. Reprenons les notations du lemme 3.6.6. On considère la fonction $u(x, t) = h_t^\Gamma(x)$ sur le domaine $\overline{B(o, N)} \times [0, T]$, avec N assez grand, par exemple $N \geq \sqrt{\beta t + \frac{1}{16}} - \frac{5}{4}$. D'une part $u > 0$ sur $\partial B(o, N) \times [0, T]$, d'après la proposition 3.6.5. D'autre part, $u(x, 0) = \delta_o(x)$, pour tout $x \in \Gamma$. Enfin $Lu = 0$ sur $B(o, N) \times]0, T]$. D'après le lemme 3.6.6.(ii), on en déduit que $u \geq 0$ sur $\overline{B(o, N)} \times [0, T]$ et par suite sur $\Gamma \times [0, +\infty[$. Supposons qu'il existe $(x_*, t_*) \in \Gamma \times]0, \infty[$ tel que $u(x_*, t_*) = 0$. Alors (x_*, t_*) est un minimum de u . Donc $\partial_t u(x_*, t_*) = 0$ et

$$\mathcal{L}^\Gamma u(x_*, t_*) = u(x_*, t_*) - \frac{1}{r(k-1)} \sum_{x \in S(x_*, 1)} u(x, t_*)$$

s'annule. Comme $u(x_*, t_*) = 0$, on en déduit que $u(x, t_*) = 0 \forall x \in B(x_*, 1)$. Par itération, on obtient que $u(x, t_*) = 0 \forall x \in \Gamma$. Ce qui contredit (3.6.4), à savoir $\|h_t^\Gamma\|_{L^1} = 1$. ■

Remarque : La positivité de h_t^Γ résulte également de la seconde série dans (3.6.3).

3.6.2 Estimations ponctuelles du noyau de la chaleur

Dans cette sous-section on va prouver le théorème suivant :

Théorème 3.6.8. *Soit $k \leq r$. Alors le noyau de la chaleur h_t^Γ vérifie*

$$h_t^\Gamma(n) \asymp t^{-1} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(n) h_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+1) \quad \forall t \geq 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.6.19)$$

On va prouver ce théorème en plusieurs étapes. La première étape traite le cas $n = 0$. On y obtient le comportement asymptotique du noyau de la chaleur et on en déduit l'encadrement annoncé.

Dans le cas $k = r$, la proposition 3.6.5 fournit la borne inférieure globale du noyau de la chaleur. Dans le cas $k < r$, la preuve de la borne inférieure requiert davantage de travail. Elle est menée pour $n \in \mathbb{N}^*$ dans les étapes 2 à 5. On considère d'abord le cas $0 < n < c\sqrt{t}$, où c est une constante positive suffisamment petite. On étend ensuite la minoration à $n \leq C\sqrt{t}$, où $C > 0$ est une constante positive arbitraire. Enfin, la proposition 3.6.5 fournit la borne inférieure dans la zone restante. La dernière étape concerne la borne supérieure du noyau de la chaleur qui est plus facile à obtenir à partir des expressions du noyau de la chaleur établies dans la proposition 3.6.2. Avant de passer à la démonstration du théorème 3.6.8, on va prouver le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 3.6.9. *On a*

$$h_t^{\mathbb{Z}}(n) \asymp t^{-\frac{1}{2}} \quad \text{si } n = O(t^{\frac{1}{2}}). \quad (3.6.20)$$

Preuve du lemme. D'après le théorème 2.3 de [28], on a, pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} h_t^{\mathbb{Z}}(n) &\asymp \exp[\sqrt{n^2 + t^2} - t] \left\{ \frac{t}{|n| + \sqrt{n^2 + t^2}} \right\}^{|n|} (1 + n^2 + t^2)^{-\frac{1}{4}} \\ &= I \times II \times III. \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

On va étudier le comportement de I , II et III lorsque $n = O(t^{\frac{1}{2}})$. Comme

$$-t + \sqrt{t^2 + n^2} = -t + t \sqrt{1 + n^2/t^2} = -t + t\{1 + O(\frac{n^2}{t^2})\} = O(n^2/t) = O(1), \quad (3.6.22)$$

on a $I = O(1)$. De même

$$n \ln \left\{ \frac{n}{t} + \sqrt{\frac{n^2}{t^2} + 1} \right\} = O\left(\frac{n^2}{t}\right) = O(1),$$

implique

$$II = \exp \left[-n \ln \left\{ \frac{n}{t} + \sqrt{\frac{n^2}{t^2} + 1} \right\} \right] = O(1).$$

Finalement, d'après la condition sur n , il est clair que $III \asymp t^{-\frac{1}{2}}$. Ceci conduit la démonstration du lemme. ■

Remarque 3.6.10. D'après le lemme 3.6.9, si $n + 1 = O(t^{\frac{1}{2}})$, alors (3.6.19) équivaut à

$$h_t^\Gamma(n) \asymp t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(n). \quad (3.6.23)$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.6.8.

Etape 1 : $n = 0$

Lemme 3.6.11. On a le comportement asymptotique suivant

$$h_t^\Gamma(0) \sim c t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty \quad (3.6.24)$$

et par conséquent l'encadrement

$$h_t^\Gamma(0) \asymp t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \quad \forall t \geq 1. \quad (3.6.25)$$

Ici $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r \beta^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{r-1} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} + \sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right)^{-2}$ et, rappelons le, $\alpha - \beta = \frac{(q^{\frac{1}{2}}-1)^2}{r(k-1)}$.

Preuve du lemme. On va étudier séparément le cas $k < r$ et le cas $k = r$. On commence par le cas $k < r$. Rappelons que le noyau de la chaleur est donné par

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\gamma(\lambda))} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp[-(\alpha - \beta \cos \lambda \ln q)t] |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} e^{-(\alpha-\beta)t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta t(1-\cos \lambda \ln q)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

où $q = (r-1)(k-1)$, $\alpha = \frac{q+1}{r(k-1)}$ et $\beta = 2\frac{q^{\frac{1}{2}}}{r(k-1)}$. D'après (3.5.3), on a

$$|c(\lambda)|^{-2} = \frac{4r^2}{r-1} \frac{\sin^2(\lambda \ln q)}{|Z(\lambda \ln q)|^2}$$

où

$$\begin{aligned} Z = Z(\lambda \ln q) &= \frac{1}{\sqrt{k-1}} \left[q^{\frac{1}{2}+i\lambda} - (k-1) q^{-\frac{1}{2}-i\lambda} + (k-2) \right] \\ &= \left[\sqrt{r-1} q^{i\lambda} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} q^{-i\lambda} + \sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right]. \end{aligned}$$

On remarque que l'expression Z est bornée. Plus précisément, on a

$$|Z| \leq \sqrt{r-1} + \frac{1}{\sqrt{r-1}} + (\sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}) \leq 2\sqrt{r-1}, \quad (3.6.27)$$

et

$$|Z| \geq \sqrt{r-1} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} - (\sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}) > 0. \quad (3.6.28)$$

En faisant le changement de variable $\tilde{\lambda} = \lambda\sqrt{t} \ln q$, on obtient

$$h_t^\Gamma(0) = \frac{2r}{\pi} t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \int_0^{\pi\sqrt{t}} e^{-2\beta t \sin^2(\frac{\tilde{\lambda}}{2\sqrt{t}})} t \sin^2(\frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{t}}) Z(\frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{t}})^{-2} d\tilde{\lambda}. \quad (3.6.29)$$

Comme la fonction $\sin(x)/x$ est décroissante sur $[0, \pi/2]$, on a

$$\left(\frac{\sin(\frac{\tilde{\lambda}}{2\sqrt{t}})}{\frac{\tilde{\lambda}}{2\sqrt{t}}} \right)^2 \geq \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right)^2 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sin(\frac{\tilde{\lambda}}{2\sqrt{t}})}{\frac{\tilde{\lambda}}{2\sqrt{t}}} \right)^2 \leq 1. \quad (3.6.30)$$

Ainsi, l'intégrande est $O\left(\tilde{\lambda}^2 e^{-\frac{2\beta}{\pi^2}\tilde{\lambda}^2}\right)$ et elle tend vers

$$\tilde{c} \tilde{\lambda}^2 e^{-\frac{\beta}{2}\tilde{\lambda}^2}$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$, où $\tilde{c} = Z(0)^{-2} = \left(\sqrt{r-1} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} + \sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right)^{-2}$.

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on aboutit au résultat (3.6.24) annoncé :

$$h_t^\Gamma(0) \sim c t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \quad (3.6.31)$$

lorsque $t \rightarrow \infty$. Le comportement asymptotique (3.6.24) implique l'encadrement (3.6.25) pour t grand, disons $t \geq T$. L'encadrement pour $1 \leq t \leq T$ résulte de la positivité et de la continuité de $t \mapsto h_t^\Gamma(0)$.

Dans le cas $k = r$, on a à nouveau

$$h_t^\Gamma(0) = \frac{2r}{\pi} e^{-(\alpha-\beta)t} \int_0^\pi e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} \frac{\sin^2 \lambda}{|Z(\lambda)|^2} d\lambda, \quad (3.6.32)$$

mais maintenant,

$$Z = Z(\lambda) = \left[\sqrt{r-1} (1 + e^{i\lambda}) - \frac{1}{\sqrt{r-1}} (1 + e^{-i\lambda}) \right] \quad (3.6.33)$$

s'annule en $\lambda = \pi$. Plus précisément, les estimations (3.6.27) et (3.6.28) deviennent

$$2\sqrt{r-1} \geq |Z| \geq 2\left(\sqrt{r-1} - \frac{1}{\sqrt{r-1}}\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right). \quad (3.6.34)$$

Décomposons $h_t^\Gamma(0) = I + II$, où

$$I = \frac{2r}{\pi} e^{-(\alpha-\beta)t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} \frac{\sin^2 \lambda}{|Z(\lambda)|^2} d\lambda$$

et

$$II = \frac{2r}{\pi} e^{-\alpha t} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{\beta t \cos \lambda} \frac{\sin^2 \lambda}{|Z(\lambda)|^2} d\lambda.$$

En raisonnant comme dans le cas $k < r$, on obtient

$$I \asymp c t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t}$$

lorsque $t \rightarrow \infty$, avec

$$\alpha - \beta = \frac{(r-2)^2}{r(r-1)}$$

et

$$c = \frac{r}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{r-1} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} \right)^{-2} = \frac{1}{\beta \sqrt{\pi}} \frac{r^{\frac{5}{2}}(r-1)}{(r-2)^2}.$$

Après avoir effectué le changement de variables $\tilde{\lambda} = \lambda - \pi$, on obtient

$$II = \frac{4}{\pi} r e^{-\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp[-\beta t \cos \tilde{\lambda}] \frac{\sin^2 \tilde{\lambda}}{|\tilde{Z}(\tilde{\lambda})|^2} d\tilde{\lambda}$$

où

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}(\tilde{\lambda}) = \left[\sqrt{r-1}(1 - e^{-i\tilde{\lambda}}) - \frac{1}{\sqrt{r-1}}(1 - e^{i\tilde{\lambda}}) \right].$$

Comme

$$|\tilde{Z}(\tilde{\lambda})| \geq 2 \left(\sqrt{r-1} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} \right) \sin\left(\frac{\tilde{\lambda}}{2}\right)$$

on déduit que

$$II = O(e^{-\alpha t})$$

décroît à l'infini plus vite que I . En conclusion,

$$h_t^\Gamma(0) \sim I \sim c t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t}$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$. Finalement (3.6.24) implique (3.6.25) comme dans le cas $k < r$. ■

Etape 2 : $n \ll \sqrt{t}$

On utilise l'expression (3.5.2) des fonctions sphériques

$$\varphi_\lambda(x) = \int_\Omega P(x, \omega)^{\frac{1}{2}+i\lambda} d\nu(\omega)$$

où, rappelons-le, $P(x, \omega) = q^{\zeta(x, \omega)}$ est le noyau de Poisson et $\zeta(x, \omega) = m - d(x, \omega_m)$ la fonction de Busemann, qui vérifie

$$|\zeta(x, \omega)| \leq |x|. \quad (3.6.35)$$

Décomposons l'expression (3.6.5) du noyau de la chaleur sous la forme

$$h_t^\Gamma(x) = I + II,$$

où

$$I = h_t^\Gamma(0) \varphi_0(x)$$

et

$$II = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} e^{-(\alpha-\beta)t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta t(1-\cos(\lambda \ln q))} (\varphi_\lambda(x) - \varphi_0(x)) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda.$$

D'après le lemme 3.6.11 on a

$$I \asymp t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(x) \quad \forall t \geq 1.$$

Ainsi il existe $c_1 > 0$ telle que

$$I \geq c_1 t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(x) \quad \forall t \geq 1.$$

D'après (3.5.2) on a

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(x) - \varphi_0(x)| &= \left| \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2}} (q^{i\lambda\zeta(x, \omega)} - 1) d\nu(\omega) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2}} |\exp[i\lambda\zeta(x, \omega) \ln q] - 1| d\nu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} P(x, \omega)^{\frac{1}{2}} |\lambda\zeta(x, \omega) \ln q| d\nu(\omega) \\ &\leq (\ln q) |\lambda| |x| \varphi_0(x). \end{aligned}$$

En reprenant les arguments utilisés dans la démonstration du lemme 3.6.11, on aboutit à l'estimation

$$|II| \leq c_2 t^{-2} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(x). \quad (3.6.36)$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(x) &\geq I - II \geq \left\{ c_1 - c_2 \frac{|x|}{t} \right\} t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(x) \\ &\geq \frac{c_1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} \varphi_0(x) \end{aligned}$$

si $|x| \leq \frac{c_1}{2c_2} \sqrt{t}$.

Etape 3 : $\kappa_1 \leq n \leq \kappa_2 \sqrt{t}$

Dans cette étape, on va supposer que $\kappa_1 \leq n \leq \kappa_2 \sqrt{t}$, où $\kappa_1 > 0$ est une constante grande, et $\kappa_2 > 0$ est une constante arbitraire. La démonstration consiste à isoler un terme fournissant la contribution principale et à vérifier que les autres termes sont comparativement négligeables.

Plus précisément, on va obtenir

$$h_t^\Gamma(n) = \mathcal{P} + \sum_{i=1}^9 c_i E_i \geq \mathcal{P} - \sum_{i=1}^9 |c_i| |E_i|$$

où $\mathcal{P}$ est le terme principal en question, les c_i des constantes et les E_i des termes de reste. On rappelle l'expression du noyau de la chaleur

$$h_t^\Gamma(n) = \frac{1}{2\pi} e^{-(\alpha-\beta)t} \frac{q \ln q}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\eta |c(\eta)|^{-2} \varphi_\eta(n) e^{-\beta t(1-\cos_q \eta)}.$$

avec $\cos_q(\eta) = \cos(\eta \ln q)$. D'après l'expression (3.5.2) des fonctions sphériques, on a

$$|c(\eta)|^{-2} \varphi_\eta(n) = c(-\eta)^{-1} q^{(-\frac{1}{2}+i\eta)n} + c(\eta)^{-1} q^{-(\frac{1}{2}-i\eta)n}.$$

En effectuant le changement de variables $\lambda = \eta \ln q$, on obtient

$$|c(\frac{\lambda}{\ln q})|^{-2} \varphi_{\frac{\lambda}{\ln q}}(n) = c(-\frac{\lambda}{\ln q})^{-1} q^{-\frac{n}{2}} e^{in\lambda} + c(\frac{\lambda}{\ln q})^{-1} q^{-\frac{n}{2}} e^{-in\lambda}$$

avec

$$c(-\frac{\lambda}{\ln q})^{-1} = -2i \frac{r}{\sqrt{r-1}} \sin(\lambda) Z(-\lambda)^{-1}.$$

Ainsi, on a

$$e^{(\alpha-\beta)t} q^{\frac{n}{2}} h_t^\Gamma(n) = \frac{\sqrt{r-1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda (-2i \sin(\lambda)) e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} Z(-\lambda)^{-1}. \quad (3.6.37)$$

En premier lieu, nous allons analyser le terme d'erreur

$$E_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} d\lambda e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} \sin(\lambda) Z(-\lambda)^{-1}.$$

Or, lorsque $\lambda \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ on a

$$1 - \cos \lambda = 2 \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

De plus, si $k < r$,

$$\begin{aligned} |Z(-\lambda)| &\geq |\sqrt{r-1} e^{-i\lambda}| - \left| \frac{1}{\sqrt{r-1}} e^{i\lambda} \right| - \left| \sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right| \\ &= \sqrt{r-1} - \sqrt{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} > 0 \end{aligned}$$

et, si $k = r$,

$$\begin{aligned} |Z(-\lambda)| &\geq \sqrt{k-1} |e^{-i\lambda} + 1| - \frac{1}{\sqrt{k-1}} |e^{i\lambda} + 1| \\ &= 2(\sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}) \cos(\frac{\lambda}{2}) \end{aligned}$$

Dans ce cas également,

$$\sin(\lambda) |Z(-\lambda)^{-1}| \leq \frac{\sin(\frac{\lambda}{2})}{\sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}}$$

est borné. Ainsi, si $k \leq r$, on a

$$|E_1| = O\left(e^{-\frac{\beta}{2}t}\right). \quad (3.6.38)$$

De même, pour

$$E_2 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} d\lambda e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} \sin(\lambda) Z(-\lambda)^{-1}$$

on a

$$|E_2| = O\left(e^{-\frac{\beta}{2}t}\right). \quad (3.6.39)$$

En faisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda \sin(\lambda) e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} Z(-\lambda)^{-1} \\ &= \frac{in}{\beta t} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} Z(-\lambda)^{-1} \end{aligned} \quad (3.6.40)$$

$$+ E_3 + E_4, \quad (3.6.41)$$

où

$$E_3 = -\frac{1}{\beta t} e^{-\frac{\beta}{2}t} \frac{e^{in\lambda}}{Z(-\lambda)} \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

et

$$E_4 = -\frac{1}{\beta t} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} Z'(\lambda) Z(-\lambda)^{-2}.$$

Alors

$$|E_3| = O\left(t^{-1}e^{-\frac{\beta}{2}t}\right). \quad (3.6.42)$$

Pour E_4 , on a d'une part

$$Z'(-\lambda) = -i \left\{ \sqrt{r-1} e^{-i\lambda} + \frac{1}{\sqrt{r-1}} e^{i\lambda} \right\},$$

d'où $|Z'(\lambda) Z(\lambda)^{-2}|$ est borné. D'autre part on a, sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$,

$$1 - \cos(\lambda) = 2 \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) \begin{cases} \leq \frac{1}{2} \lambda^2, \\ \geq \frac{9}{2\pi^2} \lambda^2, \end{cases}$$

d'où

$$|E_4| \lesssim \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda e^{-ct\lambda^2} \lesssim t^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.6.43)$$

Afin de remplacer $Z(-\lambda)^{-1}$ par $Z(0)^{-1}$ dans (3.6.40), estimons le terme de reste

$$E_5 = \frac{n}{t} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda} \{Z(-\lambda)^{-1} - Z(0)^{-1}\}.$$

Or

$$|Z(-\lambda)^{-1} - Z(0)^{-1}| \leq |\lambda| \sup_{|\lambda'| \leq \frac{\pi}{3}} |Z'(-\lambda') Z(-\lambda')^{-2}|$$

est borné sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Ainsi

$$|E_5| \lesssim \frac{n}{t} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda |\lambda| e^{-ct\lambda^2} \lesssim n t^{-2}. \quad (3.6.44)$$

A des termes d'erreurs près, (3.6.37) se réduit ainsi à

$$\frac{\sqrt{r-1}}{\pi\beta} Z(0)^{-1} \frac{n}{t} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda}. \quad (3.6.45)$$

Analysons l'intégrale

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\lambda e^{-\beta t(1-\cos \lambda)} e^{in\lambda}$$

dans cette expression. En effectuant le changement de variables $s = \sin(\frac{\lambda}{2})$, on obtient

$$I_1 = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} e^{-2\beta t s^2} e^{in2 \arcsin(s)}.$$

Éliminons $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ en considérant le terme d'erreur

$$E_6 = \frac{n}{t} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - 1 \right\} e^{-2\beta t s^2} e^{in2 \arcsin(s)}.$$

Comme

$$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - 1 = \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}(1+\sqrt{1-s^2})} = O(s^2)$$

on a

$$|E_6| \lesssim \frac{n}{t} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s^2 e^{-2\beta t s^2} \lesssim t^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.6.46)$$

Poursuivons en remplaçant $e^{in2 \arcsin(s)}$ par e^{in2s} . On considère à cet effet le terme de reste

$$E_7 = \frac{n}{t} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds e^{-2\beta t s^2} [e^{2in \arcsin(s)} - e^{2ins}].$$

Comme

$$|e^{2in \arcsin(s)} - e^{2ins}| \leq 2n |\arcsin(s) - s| = O(n |s|^3),$$

$$|E_7| \lesssim \frac{n^2}{t} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\beta t s^2} |s|^3 ds \lesssim n^2 t^{-3} \lesssim t^{-2}.$$

Ainsi,

$$|E_7| = O(n |t|^{-2}) = O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \quad (3.6.47)$$

Notre étude se concentre maintenant sur l'intégrale

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\beta t s^2} e^{i2ns} ds.$$

Nous allons l'étendre à $\mathbb{R}$ en introduisant les termes d'erreur

$$E_8 = \frac{n}{t} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{-2\beta t s^2} e^{2ins} ds \quad \text{et} \quad E_9 = \frac{n}{t} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-2\beta t s^2} e^{2ins} ds,$$

qui sont $O\left(n t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\beta t}{2}}\right)$. On se réduit ainsi à l'intégrale bien connue

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\beta t s^2} e^{i2ns} ds,$$

qui devient

$$e^{-\frac{n^2}{2\beta t}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-2\beta t s^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta t}} e^{-\frac{n^2}{2\beta t}}$$

après un changement de contour dans le plan complexe. En conclusion,

$$h_t^\Gamma(n) = \mathcal{P} + \sum_{i=1}^9 c_i E_i$$

où

$$\mathcal{P} = c_0 t^{-\frac{3}{2}} e^{-(\alpha-\beta)t} n q^{-\frac{n}{2}},$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{r-1}}{\sqrt{r-1} - \frac{1}{\sqrt{r-1}} + \sqrt{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}} \beta^{-\frac{3}{2}},$$

et les c_i sont des constantes. On conclut en utilisant l'encadrement suivant, qu'on déduit de l'expression explicite des fonctions sphériques (3.5.2) :

$$\frac{r(k-1)}{2q + q^{\frac{1}{2}} + r(k-1) + k - 2} \varphi_0(x) \leq (1 + |x|) q^{-\frac{|x|}{2}} \leq \varphi_0(x). \quad (3.6.48)$$

Etape 4 : $n \leq C\sqrt{t}$

Dans cette étape on suppose que $n \leq C\sqrt{t}$ où $C > 0$ est une constante arbitraire. D'après les étapes 2 et 3, il reste à analyser la zone $c_2\sqrt{t} \leq n \leq \kappa_1$, où c_2 et κ_1 sont les constantes apparues dans les deuxième et troisième étapes. Or cette zone est compacte, et comme le noyau de la chaleur est continu et positif, on peut étendre les résultats des deux dernières étapes à cette zone.

Etape 5 : $n \geq C\sqrt{t}$

C'est le contenu de la proposition 3.6.5.

Etape 6 : Borne supérieure

On distingue les cas $k < r$ et $k = r$.

Dans le cas $k < r$, on pose $\varepsilon = \frac{k-1}{r-1} < 1$. En utilisant l'expression (3.6.7) et le lemme 3.6.1 (ii), on obtient

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(n) &\leq C_1 e^{-(\alpha-\beta)t} t^{-1} q^{-\frac{n}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1) \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (m+1) \\ &\quad + C_2 e^{-(\alpha-\beta)t} t^{-1} q^{-\frac{n}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1) \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m (m+1) \\ &\leq C e^{-(\alpha-\beta)t} t^{-1} q^{-\frac{n}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant (3.6.48).

Dans le cas $k = r$, on utilise l'expression (3.6.8), le lemme 3.6.1 (ii) et (3.6.14) pour estimer

$$\begin{aligned} h_t^\Gamma(n) &\leq C_1 e^{-(\alpha-\beta)t} t^{-1} q^{-\frac{n}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1) \\ &\quad + C_2 e^{-(\alpha-\beta)t} q^{-\frac{n}{2}} \frac{n+1}{t} h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1) \\ &< C e^{-(\alpha-\beta)t} t^{-1} q^{-\frac{n}{2}} (n+1) h_{\beta t}^\mathbb{Z}(n+1). \end{aligned}$$

Finalement, en combinant le théorème 3.6.8 avec l'estimation (3.6.21) du noyau de la chaleur $h_t^\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$, on obtient des estimations ponctuelles précises du noyau de la chaleur h_t^Γ sur Γ pour $t \geq 1$.

3.7 Noyau de la chaleur en temps complexe

Dans cette section on considère le noyau de la chaleur $h_z^\Gamma(x)$ sur Γ en temps complexe $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z \geq 0$. Comme en temps réel, on en a deux expressions. L'une via la transformation de Fourier sphérique inverse

$$\begin{aligned} h_z^\Gamma(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z(1-\gamma(\lambda))} \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} e^{-(\alpha-\beta)z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta(1-\cos \lambda \ln q)z} \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

et l'autre via la transformation d'Abel inverse :

$$h_z^\Gamma(x) = \frac{r(k-1)}{k} \frac{e^{-(\alpha-\beta)z}}{z} q^{-\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta z}^{\mathbb{Z}}(n+m) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (k-1)^m q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta z}^{\mathbb{Z}}(n+m) \right\}. \quad (3.7.2)$$

si $k < r$ et

$$h_z^\Gamma(x) = (r-1) \frac{e^{-(\alpha-\beta)z}}{z} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (n+m) h_{\beta z}^{\mathbb{Z}}(n+m) \\ + \frac{r-1}{r} e^{-(\alpha-\beta)z} q^{-\frac{n}{2}} \{h_{\beta z}^{\mathbb{Z}}(n) - h_{\beta z}^{\mathbb{Z}}(n+1)\} \quad (3.7.3)$$

si $k = r$. Ici $n = |x|$ et $h_z^{\mathbb{Z}}(n)$ désigne le noyau de la chaleur en temps complexe sur $\mathbb{Z}$, qui est donné par

$$h_z^{\mathbb{Z}}(n) = \frac{1}{\pi} e^{-z} \int_0^\pi e^{z \cos(\lambda)} \cos(n\lambda) d\lambda = e^{-z} I_n(z)$$

où $I_n(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce. Comme

$$|h_z^{\mathbb{Z}}(n)| \leq C \int_0^\pi e^{-\operatorname{Re} z (1-\cos \lambda)} d\lambda,$$

on a

$$|h_z^{\mathbb{Z}}(n)| \leq C \min \{1, (\operatorname{Re} z)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

On en déduit l'estimation suivante :

$$|h_z^\Gamma(n)| \leq C e^{-(\alpha-\beta) \operatorname{Re} z} \left\{ \frac{1}{|z|} + 1 \right\} (n+1) q^{-\frac{n}{2}} \min \{1, (\operatorname{Re} z)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Dans la suite on considère l'équation de la chaleur en temps imaginaire afin de décrire le noyau de Schrödinger sur Γ .

3.8 Noyau de Schrödinger

Dans cette section, nous étudions l'équation de Schrödinger sur les graphes symétriques Γ avec $k \leq r$, comme nous l'avons fait au chapitre 2 sur les arbres homogènes. Le noyau

de Schrödinger $s_t^\Gamma(x) = s_t^\Gamma(|x|)$ sur Γ est le noyau de la chaleur $h_{it}^\Gamma(x) = h_{it}^\Gamma(|x|)$ en temps imaginaire. D'après (3.7.1), il possède les expressions suivantes :

$$s_t^\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{q \ln q}{r(k-1)} e^{-i(\alpha-\beta)t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\beta t(1-\cos(\lambda \ln q))} \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \quad (3.8.1)$$

et

$$\begin{aligned} s_t^\Gamma(n) &= h_{it}^\Gamma(n) \\ &= \frac{1}{k} e^{-i(\alpha-\beta)t} q^{-\frac{n-1}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} [s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m-1) - s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m+1)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (k-1)^m q^{-\frac{m}{2}} [s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m-1) - s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m+1)] \right\} \\ &= \frac{r(k-1)}{k} \frac{e^{-(\alpha-\beta)it}}{it} q^{-\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{m}{2}} (n+m) s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (k-1)^m q^{-\frac{m}{2}} (n+m) s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) \right\} \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

si $k < r$, respectivement

$$\begin{aligned} s_t^\Gamma(n) &= \frac{1}{k} e^{-i(\alpha-\beta)t} (k-1)^{-(n-1)} \left\{ s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n) - s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (k-1)^{-m} [s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m-1) - s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m+1)] \right\} \\ &= \frac{1}{k} e^{-i(\alpha-\beta)t} (k-1)^{-(n-1)} [s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n) - s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+1)] \\ &\quad + \frac{e^{-i(\alpha-\beta)t}}{it} (k-1)^{-(n-1)} \sum_{m=1}^{\infty} (k-1)^{-m} (n+m) s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+m) \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

si $k = r$. Ici $s_t^{\mathbb{Z}}(n) = h_{it}^{\mathbb{Z}}(n)$ désigne le noyau de Schrödinger sur $\mathbb{Z}$.

Proposition 3.8.1. *Pour $t \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a les estimations uniformes suivantes du noyau de Schrödinger :*

– Dans le cas $k < r$,

$$|s_t^\Gamma(n)| \lesssim \begin{cases} \varphi_0(n) & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} (1+n)^2 q^{-\frac{n}{2}} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.8.4)$$

– Dans le cas $k = r$,

$$|s_t^\Gamma(n)| \lesssim \begin{cases} \varphi_0(n) & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} (1 + |t| + n)(1 + n) q^{-\frac{n}{2}} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.8.5)$$

Preuve. L'estimation pour $0 < |t| < 1$ se déduit facilement de (3.8.1). Passons aux estimations pour $|t| \geq 1$. Si $k < r$, la preuve est semblable au cas des arbres homogènes. D'après (3.8.2) on a

$$\begin{aligned} |s_t^\Gamma(n)| &\lesssim \frac{1}{|t|} q^{-\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{m \geq 1} (q^{-\frac{m}{2}} + \varepsilon^m) (n + m) |s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n + m)| \right\} \\ &\lesssim \frac{1}{|t|} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{m \geq 1} \varepsilon^m (n + m) |s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n + m)|, \end{aligned}$$

où $\varepsilon = \frac{k-1}{r-1} < 1$. Or d'après le lemme 2.3.2, on a

$$s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n) \lesssim |t|^{-\frac{1}{2}} (1 + n).$$

d'où (3.8.4).

Dans le cas $k = r$, on montre que la série dans (3.8.3) est $O\left(|t|^{-\frac{3}{2}} q^{-\frac{n}{2}} (1 + n)^2\right)$ comme on l'a fait dans le cas $k < r$. La différence réside dans la contribution du terme $s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n) - s_{\beta t}^{\mathbb{Z}}(n+1)$, qui fait l'objet du lemme suivant ■

Lemme 3.8.2. *On considère la fonction*

$$\begin{aligned} J(t, n) &= \pi e^{it} \{s_t^{\mathbb{Z}}(n) - s_t^{\mathbb{Z}}(n+1)\} \\ &= \int_0^\pi d\lambda e^{it \cos \lambda} \{\cos(n\lambda) - \cos(n+1)\lambda\}. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Alors,

$$|J(t, n)| \leq C |t|^{-\frac{3}{2}} (1 + |t| + n) (1 + n) q^{-\frac{n}{2}}. \quad (3.8.7)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geq 1$.

Preuve. Cette estimation est obtenue en analysant (3.8.6) comme une intégrale oscillante ([69] section 8.1)). A cette fin, on introduit une fonction auxiliaire $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ paire à

support dans $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ telle que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \chi(\lambda - \ell \frac{\pi}{2}) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

et on décompose $J = J_0 + J_1 + J_2$ où

$$J_\ell(t, n) = \int_0^\pi d\lambda \chi(\lambda - \ell \frac{\pi}{2}) e^{it \cos \lambda} \cos(n\lambda).$$

On obtient

$$|J_1(t, n)| \leq C |t|^{-2} (1+n)^2,$$

après une double intégration par parties basée sur

$$e^{it \cos \lambda} = \frac{i}{t \sin \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{it \cos \lambda}.$$

En développant

$$\cos n\lambda - \cos(n+1)\lambda = \underbrace{(1 - \cos \lambda)}_{O(\lambda^2)} \cos n\lambda + \sin \lambda \sin n\lambda,$$

en effectuant une intégration par parties et en appliquant la méthode de la phase stationnaire, on obtient

$$|J_0(t, n)| \leq C |t|^{-\frac{3}{2}} (1+n)^2.$$

Par symétrie, on a

$$\begin{aligned} J_2(t, n) &= \int_0^\pi d\lambda \chi_2(\pi - \lambda) e^{it \cos(\pi - \lambda)} \{ \cos n(\pi - \lambda) - \cos(n+1)(\pi - \lambda) \} \\ &= (-1)^n \int_0^\pi d\lambda \chi_0(\lambda) e^{-it \cos \lambda} (1 + \cos \lambda) \cos n\lambda \\ &\quad + (-1)^n \int_0^\pi d\lambda \chi_0(\lambda) e^{-it \cos \lambda} \sin \lambda \sin n\lambda. \end{aligned}$$

La seconde intégrale se traite comme $J_0(t, n)$. Par contre, on ne peut plus commencer par intégrer par parties la première intégrale. La méthode de la phase stationnaire fournit l'estimation $O(|t|^{-\frac{1}{2}}(1+n))$. ■

Remarque 3.8.3. Dans le cas $k=r$, nous avons obtenu une décroissance $|t|^{-\frac{1}{2}}$ du noyau de

Schrödinger en temps grand, qui est inférieure à la décroissance typique $|t|^{-\frac{3}{2}}$ pour les espaces hyperboliques et les arbres homogènes. Ce phénomène nouveau est lié au comportement en $\lambda = \pm \frac{\tau}{2}$ de la fonction

$$|c(\lambda)|^{-2} = \frac{4r^2}{r-1} \frac{\sin^2(\lambda \ln q)}{|Z(\lambda \ln q)|^2},$$

où

$$Z(\lambda) = \left[\sqrt{r-1} (1+e^{i\lambda}) - \frac{1}{\sqrt{r-1}} (1+e^{-i\lambda}) \right].$$

Plus précisément, comme l'expression $Z(\lambda \ln q)$ s'annule en $\lambda = \pm \frac{\tau}{2}$, la méthode de la phase stationnaire fournit le comportement

$$s_t(0) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{signe}(t)} e^{-i\frac{r}{r-1}t} |t|^{-\frac{1}{2}}$$

lorsque $t \rightarrow \pm \infty$.

Supposons dorénavant $k < r$. Les résultats suivants s'obtiennent avec les mêmes arguments qu'au chapitre 2, dans le cas des arbres homogènes.

Corollaire 3.8.4. *Soit $2 < p \leq \infty$. Alors, le noyau de Schrödinger vérifie l'estimation suivante :*

$$\|s_t\|_{L^p(\Gamma)}^p \lesssim \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ t^{-\frac{3}{2}} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.8.8)$$

Démonstration. Semblable au corollaire 2.3.3. ■

Théorème 3.8.5. *Soit $2 < p \leq \infty$. Alors, on a l'estimation dispersive suivante :*

$$\|e^{it\mathcal{L}}\|_{L^{p'}(\mathbb{T}) \rightarrow L^p(\mathbb{T})} \lesssim \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.8.9)$$

Si $p = 2$, $e^{it\mathcal{L}}$ est un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires.

Preuve. Semblable au théorème 2.3.4. ■

Enfin, en employant les méthodes du chapitre 2, on peut démontrer les mêmes résultats d'existence et d'unicité pour les solutions de l'équation de Schrödinger semi-linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}^\Gamma u(t, x) = F(u(t, x)), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (3.8.10)$$

où F est une nonlinéarité de type polynomiale. On peut aussi démontrer qu'il y a scattering en cas d'invariance de jauge et pour des données initiales arbitraires dans $L^2(\Gamma)$.

Chapitre 4

Equation des ondes sur les graphes symétriques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on généralise aux graphes symétriques un résultat obtenu dans [3] pour les arbres homogènes. Plus précisément, dans [3] les auteurs ont trouvé une expression explicite de l'équation des ondes modifiée en temps discret

$$\begin{cases} \gamma(0) \mathcal{L}_n^{\mathbb{Z}} u(x, n) = (\mathcal{L}_x^{\mathbb{T}} - 1 + \gamma(0)) u(x, n), \\ u(x, 0) = f(x), \{u(x, 1) - u(x, -1)\}/2 = g(x) \end{cases}$$

en utilisant la transformation d'Abel duale inverse sur les arbres homogènes $\mathbb{T}$ et la version suivante du théorème d'Ásgeirsson.

Théorème 4.1.1. (*Théorème d'Ásgeirsson sur $\mathbb{T}$*)

Soient U une fonction sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ telle que

$$\mathcal{L}_x^{\mathbb{T}} U(x, y) = \mathcal{L}_y^{\mathbb{T}} U(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{T}$$

Alors

$$\sum_{x' \in S(x, m)} \sum_{y' \in S(y, n)} U(x', y') = \sum_{x' \in S(x, n)} \sum_{y' \in S(y, m)} U(x', y').$$

Rappelons que nous considérons des graphes symétriques Γ avec $r \geq k \geq 2$, que le

laplacien sur Γ est défini par

$$\mathcal{L}^\Gamma f(x) = f(x) - \frac{1}{r(k-1)} \sum_{y:d(x,y)=1} f(y)$$

et que son spectre L^2 coïncide avec l'intervalle $[1 - \gamma(0), 1 + \gamma(0)]$. Rappelons également les notations

$$\sigma = k - 2, \quad q = (r - 1)(k - 1), \quad \alpha = \frac{q + 1}{r(k - 1)}, \quad \beta = \frac{2q^{\frac{1}{2}}}{r(k - 1)}$$

si bien que $1 - \gamma(0) = \alpha - \beta$.

Sur les fonctions radiales, le laplacien est donné par

$$\mathcal{L}^\Gamma f(0) = f(0) - f(1)$$

et

$$\mathcal{L}^\Gamma f(n) = \frac{1}{r(k-1)} \{(q+1)f(n) - f(n-1) - qf(n+1)\} \quad (4.1.1)$$

si $n \in \mathbb{N}^*$. Sur les fonctions horocycliques, il est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\Gamma f(h) &= \frac{1}{r(k-1)} \{(q+1)f(h) - qf(h-1) - f(h+1)\} \\ &= \beta q^{\frac{h}{2}} \mathcal{L}_h^{\mathbb{Z}} \{q^{-\frac{h}{2}} f(h)\} + (1 - \gamma(0))f(h) \\ &= \beta q^{\frac{h}{2}} \mathcal{L}_h^{\mathbb{Z}} \{q^{-\frac{h}{2}} f(h)\} + (\alpha - \beta)f(h). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

On rappelle les expression de la transformation d'Abel horocyclique duale (théorème 3.4.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* g(n) &= 2 \frac{r-1}{r} q^{-\frac{n}{2}} g(n) \\ &+ \sigma \frac{r-1}{r} q^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\substack{-n < j < n \\ j \text{ et } n \text{ de parités différentes}}} g(\pm j) + \frac{r-2}{r} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{\substack{-n < j < n \\ j \text{ et } n \text{ de même parité}}} g(\pm j), \end{aligned}$$

et de son inverse (théorème 3.4.2) :

$$g(0) = \mathcal{A}^* g(0)$$

et

$$\begin{aligned} g(n) = & -\frac{1}{2k} \{q-1+(r-k)(1-k)^n\} q^{-\frac{n}{2}} \mathcal{A}^* g(0) \\ & -\frac{r(k-1)}{2k} \sum_{0 < j < n} \{q-1+(r-k)(1-k)^{n-j}\} q^{j-\frac{n}{2}-1} \mathcal{A}^* g(j) \\ & +\frac{1}{2} r(k-1) q^{\frac{n}{2}-1} \mathcal{A}^* g(n) \end{aligned}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec la convention usuelle qu'une somme vide est nulle.

4.2 Equation des ondes modifiée sur Γ

On s'intéresse dans la suite à l'équation des ondes modifiée sur Γ donnée par :

$$\begin{cases} \beta \mathcal{L}_n^{\mathbb{Z}} u(x, n) = (\mathcal{L}_x^{\Gamma} - (\alpha - \beta)) u(x, n), \\ u(x, 0) = f(x), \{u(x, 1) - u(x, -1)\}/2 = g(x). \end{cases} \quad (4.2.1)$$

On résoud (4.2.1) en utilisant la version discrète suivante du théorème d'Ásgeirsson, puis l'expression explicite de la transformation d'Abel duale inverse.

Théorème 4.2.1. *Soient U une fonction définie sur $\Gamma \times \Gamma$ telle que*

$$\mathcal{L}_x^{\Gamma} U(x, y) = \mathcal{L}_y^{\Gamma} U(x, y) \quad \forall x, y \in \Gamma. \quad (4.2.2)$$

Alors

$$\sum_{x' \in S(x, m)} \sum_{y' \in S(y, n)} U(x', y') = \sum_{x' \in S(x, n)} \sum_{y' \in S(y, m)} U(x', y') \quad (4.2.3)$$

pour tout $x, y \in \Gamma$ et $m, n \in \mathbb{N}$. En particulier

$$\sum_{x' \in S(x, n)} U(x', y) = \sum_{y' \in S(y, n)} U(x, y'). \quad (4.2.4)$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2.2. *On désigne par*

$$f_x^{\#}(n) = \frac{1}{\delta(n)} \sum_{y \in S(x, n)} f(y) \quad \forall x \in \Gamma, \forall n \in \mathbb{N}$$

les moyennes sphériques d'une fonction $f : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$. Alors

$$(\mathcal{L}^\Gamma f)_x^\sharp(n) = (\text{rad } \mathcal{L}^\Gamma)_n f_x^\sharp(n),$$

où $\text{rad } \mathcal{L}^\Gamma$ désigne la partie radiale (4.1.1) de $\mathcal{L}^\Gamma$.

Preuve du lemme 4.2.2. On a

$$(\mathcal{L}^\Gamma f)_x^\sharp(n) = \begin{cases} f(x) - f_x^\sharp(1) & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{r(k-1)} \{ (q+1)f_x^\sharp(n) - f_x^\sharp(n-1) - q f_x^\sharp(n+1) \} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

■

Preuve du Théorème 4.2.1. Soient $x, y \in \Gamma$. On définit la double moyenne sphérique de U par

$$U_{x,y}^{\sharp\sharp}(m,n) = \frac{1}{\delta(m)} \sum_{x' \in S(x,m)} \frac{1}{\delta(n)} \sum_{y' \in S(y,n)} U(x,y),$$

qu'on va noter $V(m,n)$. Montrons d'abord que

$$(\text{rad } \mathcal{L}^\Gamma)_m V(m,n) = (\text{rad } \mathcal{L}^\Gamma)_n V(m,n). \quad (4.2.5)$$

En notant

$$M^{(n)} f(x) = f_x^\sharp(n)$$

l'opérateur de moyenne, on a

$$U_{x,y}^{\sharp\sharp}(m,n) = M_x^{(m)} M_y^{(n)} U(x,y).$$

D'après (4.2.2) et le lemme 4.2.2,

$$\begin{aligned} (\text{rad } \mathcal{L}^\Gamma)_m M_x^{(m)} M_y^{(n)} U(x,y) &= M_x^{(m)} \mathcal{L}_x^\Gamma M_y^{(n)} U(x,y) = M_x^{(m)} M_y^{(n)} \mathcal{L}_x^\Gamma U(x,y) \\ &= M_x^{(m)} M_y^{(n)} \mathcal{L}_y^\Gamma U(x,y) = (\text{rad } \mathcal{L}^\Gamma)_n M_x^{(m)} M_y^{(n)} U(x,y), \end{aligned}$$

d'où (4.2.5). Montrons ensuite la symétrie

$$V(m,n) = V(n,m) \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (4.2.6)$$

par récurrence sur $\ell = m + n$. Pour $\ell = 0$, (4.2.6) est trivial. Pour $\ell = 1$ (4.2.6) résulte

de la définition de $\text{rad } \mathcal{L}^\Gamma$ et de (4.2.2). Soit $\ell \geq 1$ et supposons que (4.2.6) est vrai pour $m + n \leq \ell$. On suppose que $m > n > 0$ avec $m + n = \ell + 1$, le cas $n > m > 0$ se traitant symétriquement. En appliquant (4.2.5) au point $(m - \ell', n + \ell' - 1)$ avec $1 \leq \ell' \leq m - n$, on obtient

$$\begin{aligned} & V(m - \ell' + 1, n + \ell' - 1) - V(m - \ell', n + \ell') \\ &= \frac{1}{q} \{V(m - \ell', n + \ell' - 2) - V(m - \ell' - 1, n + \ell' - 1)\}, \end{aligned}$$

puis en faisant la somme sur ℓ' on obtient,

$$V(m, n) - V(n, m) = \frac{1}{q} \{V(m - 1, n - 1) - V(n - 1, m - 1)\}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on conclut que $V(m, n) = V(n, m)$, ce qui équivaut à (4.2.3). Pour démontrer (4.2.4) on utilise (4.2.5) aux points $(0, \ell)$ et $(\ell, 0)$ et dans ce cas on obtient

$$\begin{cases} V(0, \ell + 1) = \frac{1}{q} \{-(k - 2)V(0, \ell) - V(0, \ell - 1) + r(k - 1)V(1, \ell)\}, \\ V(\ell + 1, 0) = \frac{1}{q} \{-(k - 2)V(\ell, 0) - V(\ell - 1, 0) + r(k - 1)V(\ell, 1)\}. \end{cases}$$

On conclut par récurrence. ■

Résolvant explicitement l'équation des ondes (4.2.1) sur Γ . Considérons tout d'abord une solution u de (4.2.1) avec conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad \{u(x, 1) - u(x, -1)\}/2 = 0.$$

Comme la fonction $(x, n) \mapsto u(x, -n)$ satisfait la même équation, on a $u(x, n) = u(x, -n)$ par unicité. D'autre part, d'après (4.1.2), la fonction

$$U(x, y) = q^{\frac{h(y)}{2}} u(x, h(y)) \quad \forall x, y \in \Gamma$$

satisfait (4.2.2). En appliquant (4.2.3) à $U(x, y)$ en $y = 0$, on déduit que la transformée d'Abel duale de $n \mapsto u(x, n)$ est égale à la moyenne sphérique $f_x^\sharp(n)$ de la donnée initiale f . Ainsi

$$u(x, n) = (\mathcal{A}^*)^{-1}(f_x^\sharp)(n) \quad \forall x \in \Gamma, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considérons ensuite une solution de l'équation (4.2.1) avec conditions initiales

$$u(x, 0) = 0 \text{ et } \frac{u(x, 1) - u(x, -1)}{2} = g(x).$$

Alors la fonction $n \mapsto u(x, n)$ est impaire et

$$v(x, n) = \frac{u(x, n+1) - u(x, n-1)}{2}.$$

est solution de l'équation (4.2.1) avec conditions initiales

$$v(x, 0) = g(x) \text{ et } \frac{v(x, 1) - v(x, -1)}{2} = 0.$$

D'après (4.2),

$$u(x, n) = \begin{cases} 2 \operatorname{signe}(n) \sum_{0 < \ell \text{ impair} < |n|} v(x, \ell) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ g(x) + 2 \operatorname{signe}(n) \sum_{0 < \ell \text{ pair} < |n|} v(x, \ell) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

avec $v(x, \ell) = (\mathcal{A}^*)^{-1}(g_x^\#)(\ell)$. Ainsi, la solution générale de l'équation des ondes modifiée (4.2.1) est donnée par

$$u(x, n) = (\mathcal{A}^*)^{-1}(f_x^\#)(n) + 2 \operatorname{signe}(n) \sum_{0 < \ell \text{ impair} < |n|} (\mathcal{A}^*)^{-1}(g_x^\#)(\ell)$$

si n est pair et

$$u(x, n) = (\mathcal{A}^*)^{-1}(f_x^\#)(n) + g(x) + 2 \operatorname{signe}(n) \sum_{0 < \ell \text{ pair} < n} (\mathcal{A}^*)^{-1}(g_x^\#)$$

si n est impair. En utilisant l'expression de la transformation d'Abel duale inverse, on aboutit finalement au résultat suivant :

Théorème 4.2.3. Cas $k < r$: La solution de l'équation des ondes (4.2.1) est donnée par $u(x, 0) = f(x)$ et

$$\begin{aligned}
u(x, n) = & \quad (4.2.7) \\
& \frac{1}{2} q^{-\frac{|n|}{2}} \sum_{d(x,y)=|n|} f(y) \\
& - \frac{1}{2k} q^{-\frac{|n|}{2}} \sum_{0 \leq \ell < |n|} \{q - 1 + (r - k)(1 - k)^{|n|-\ell}\} \sum_{d(x,y)=\ell} f(y) \\
& + \text{signe}(n) q^{-\frac{|n|-1}{2}} \sum_{d(x,y)=|n|-1} g(y) \\
& + \text{signe}(n) \frac{1}{k} q^{-\frac{|n|-1}{2}} \left\{ \sum_{0 \leq d(x,y) < |n|-1} g(y) - \sum_{0 \leq \ell < |n|-1} (1 - k)^{|n|-\ell} \sum_{d(x,y)=\ell} g(y) \right\}
\end{aligned}$$

si $n \in \mathbb{Z}^*$.

Cas $k = r$: La solution de l'équation des ondes (4.2.1) est donnée par

$u(x, 0) = f(x)$ et

$$\begin{aligned}
u(x, n) = & \quad (4.2.8) \\
& \frac{1}{2} (k - 1)^{-|n|} \sum_{d(x,y)=|n|} f(y) \\
& - \frac{k - 2}{2} (k - 1)^{-|n|} \sum_{d(x,y) < |n|} f(y) + \text{signe}(n) (k - 1)^{-(|n|-1)} \sum_{d(x,y)=|n|-1} g(y) \\
& + \text{signe}(n) \frac{1}{k} (k - 1)^{-(|n|-1)} \times \\
& \times \left\{ \sum_{d(x,y) < |n|-1} g(y) + \sum_{0 \leq \ell < |n|-1} (k - 1)^{|n|-\ell} \sum_{d(x,y)=\ell} g(y) \right\}
\end{aligned}$$

si $n \in \mathbb{Z}^*$

Preuve. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et commençons par le cas $k < r$. Dans la suite, afin de faciliter l'écriture, on introduit les notations suivantes. Pour $f : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_j(x) = \sum_{d(x,y)=j} f(y).$$

En utilisant l'expression explicite de la transformation d'Abel duale inverse, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}^*)^{-1}(f_x^\#)(n) &= \frac{1}{2} q^{-\frac{n}{2}} f_n(x) \\
&- \frac{1}{2k} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{0 \leq j < n} \{q - 1 + (r - k)(1 - k)^{n-j}\} f_j(x).
\end{aligned}$$

Si n est pair, alors

$$2 \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} (\mathcal{A}^*)^{-1}(g_x^\sharp)(\ell) = \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} q^{-\frac{\ell}{2}} g_\ell(x) - \frac{1}{k} \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} q^{-\frac{\ell}{2}} \sum_{0 \leq j < \ell} \{q - 1 + (r - k)(1 - k)^{\ell-j}\} g_\ell(x)$$

Cette expression se décompose comme suit, en distinguant les cas j impair et j pair :

$$2 \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} (\mathcal{A}^*)^{-1} g_x^\sharp(\ell) = q^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{d(x,y)=n-1} g(y) + \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n-1} q^{-\frac{\ell}{2}} g_\ell(x) - \frac{q-1}{k} \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} q^{-\frac{\ell}{2}} \sum_{0 < j \text{ impair} < \ell} g_j(x) \quad (4.2.9)$$

$$- \frac{q-1}{k} \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} q^{-\frac{\ell}{2}} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < \ell} g_j(x) \quad (4.2.10)$$

$$- \frac{r-k}{k} \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} (1-k)^\ell q^{-\frac{\ell}{2}} \sum_{0 < j \text{ impair} < \ell} (1-k)^{-j} g_j(x) \quad (4.2.11)$$

$$- \frac{r-k}{k} \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} (1-k)^\ell q^{-\frac{\ell}{2}} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < \ell} (1-k)^{-j} g_j(x) \quad (4.2.12)$$

Simplifions les quatres derniers termes. On a d'une part

$$(4.2.9) = -\frac{q-1}{k} \sum_{0 < j \text{ impair} < n-1} \sum_{j < \ell \text{ impair} < n} q^{-\frac{\ell}{2}} g_j(x) = -\frac{1}{k} \sum_{0 < j \text{ impair} < n-1} q^{-\frac{j}{2}} g_j(x) + \frac{q^{-\frac{n-1}{2}}}{k} \sum_{0 < j \text{ impair} < n-1} g_j(x)$$

en utilisant la somme géométrique

$$\sum_{j < \ell \text{ impair} < n} q^{-\frac{\ell}{2}} = \frac{q^{-\frac{j}{2}} - q^{-\frac{n-1}{2}}}{q-1}.$$

De même,

$$(4.2.10) = -\frac{1}{k} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < n} q^{-\frac{j-1}{2}} g_j(x) + \frac{q^{-\frac{n-1}{2}}}{k} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < n} g_j(x).$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}
(4.2.11) &= -\frac{r-k}{k} \sum_{0 < j \text{ impair} < n-1} (1-k)^{-j} \sum_{j < \ell \text{ impair} < n} (1-k)^\ell q^{-\frac{\ell}{2}} g_j(x) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{0 < j \text{ impair} < n-1} \left\{ (1-k)q^{-\frac{j}{2}} - (1-k)^n q^{-\frac{n-1}{2}} g_j(x) \right\} \\
&= -\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{0 < j \text{ impair} < n-1} q^{-\frac{j}{2}} g_j(x) \\
&\quad - \frac{q^{-\frac{n-1}{2}}}{k} \sum_{0 < j \text{ impair} < n-1} (1-k)^{n-j} g_j(x)
\end{aligned}$$

en utilisant la somme géométrique

$$\sum_{j < \ell \text{ impair} < n} \left[\frac{(1-k)^2}{q} \right]^{\frac{\ell}{2}} = -\frac{1}{r-k} \left\{ (1-k)^{j+1} q^{-\frac{j}{2}} - (1-k)^n q^{-\frac{n-1}{2}} \right\}.$$

De même,

$$\begin{aligned}
(4.2.12) &= -\frac{r-k}{k} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < n} (1-k)^{-j} \sum_{j+1 \leq \ell \leq n-1} (1-k)^\ell q^{-\frac{\ell}{2}} g_j(x) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < n} \left\{ q^{-\frac{j-1}{2}} - (1-k)^{n-j} q^{-\frac{n-1}{2}} \right\} g_j(x) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < n} q^{-\frac{j-1}{2}} \sum_{d(x,y)=j} g(y) - \frac{q^{-\frac{n-1}{2}}}{k} \sum_{0 \leq j \text{ pair} < n} (1-k)^{n-j} g_j(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ pair,

$$\begin{aligned}
2 \sum_{0 < \ell \text{ impair} < n} (\mathcal{A}^*)^{-1}(g_x^\#)(\ell) &= q^{-\frac{n-1}{2}} g_{n-1}(x) \\
&+ \frac{q^{-\frac{n-1}{2}}}{k} \left\{ \sum_{d(x,y) < n-1} g(y) - \sum_{0 \leq j < n-1} (1-k)^{n-j} g_j(x) \right\}.
\end{aligned}$$

Pour n impair, un calcul similaire conduit à la même expression. On aboutit ainsi à la solution (4.2.7) de l'équation des ondes (4.2.1) dans le cas $k < r$.

Dans le cas $k = r$, (4.2.11) et (4.2.12) s'annulent et on aboutit à l'expression (4.2.8). ■

Perspectives

Problèmes en suspens dans le cadre de la thèse

- Au chapitre 4 nous n'avons pas trouvé l'expression de l'énergie totale pour l'équation des ondes modifiée (4.2.1). La conservation d'une telle quantité permet d'envisager ensuite le problème d'équipartition, stricte ou asymptotique, entre énergie cinétique et énergie potentielle (voir [13] pour le cas des espaces symétriques et [3] pour le cas des arbres homogènes), ainsi que le phénomène de Huygens, strict ou asymptotique.
- L'un des principaux résultats du chapitre 3 est le théorème 3.6.8 où nous avons donné l'estimation du noyau de la chaleur en temps réel sur Γ , $h_t^\Gamma(n)$ pour $t \geq 1$. Le problème dans le cas $0 < t < 1$ réside dans le facteur $|t|^{-1}$ qui apparaît dans l'estimation (3.6.24) du noyau de la chaleur. Le but est de trouver une estimation précise du noyau de la chaleur $h_t^\Gamma(n)$ dans ce cas.
- Setti [68] a trouvé l'expression suivante du noyau de la chaleur en temps complexe $h_z^\mathbb{T}$ sur les arbres homogènes

$$h_z^\mathbb{T}(n) = \frac{2e^{-b_2 z}}{\gamma(0)z} Q^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} Q^{-k} (n+2m+1) h_{\gamma(0)z}^\mathbb{Z}(n+2m+1) \quad (P_1)$$

où $\mathbb{T}$ est un arbre homogène de degré $Q+1$, $\gamma(0) = \frac{2Q^{\frac{1}{2}}}{Q+1}$, $b_2 = 1 - \gamma(0)$ est le bas du spectre L^2 et $h_z^\mathbb{Z}$ est le noyau de la chaleur en temps complexe sur $\mathbb{Z}$. Comme $h_z^\mathbb{Z}$ n'est pas une fonction élémentaire, Setti a trouvé des estimations du terme erreur qui apparaît dans l'expression du $h_z^\mathbb{Z}(n)$. Ces estimations lui ont permis de calculer des estimations du noyau de la chaleur sur $\mathbb{Z}$, $h_z^\mathbb{Z}$ et ceci a abouti, en utilisant l'expression (P_1) à des estimations ponctuelles et en norme L^p du noyau de la chaleur sur $\mathbb{T}$, $h_z^\mathbb{T}$. Le but est d'adapter la méthode de Setti [68] afin de donner des estimations plus précises

du noyau de la chaleur en temps complexe sur Γ , h_z^Γ .

- Au chapitre 3 nous avons obtenu une décroissance $|t|^{-\frac{1}{2}}$ du noyau de Schrödinger s_t^Γ sur un graphe symétrique Γ dans le cas $k = r$. Cette décroissance faible du noyau de Schrödinger va nous donner des estimations dispersives et de Strichartz moins fortes que celles obtenues dans le cas $k < r$, qui eux sont d'ordre $|t|^{-\frac{3}{2}}$. Le but est d'étudier l'équation de Schrödinger non linéaire dans le cas $k = r$ et de vérifier si ces estimations sont suffisantes pour prouver l'existence et l'unicité des solutions.

Généralisations du cadre de travail

- Dans le cas $k > r$, la formule de Plancherel et la formule d'inversion pour la transformation de Fourier sphérique contiennent un facteur discret additionnel. Le problème envisagé dans l'analyse du noyau de la chaleur et l'équation des ondes modifiée dans ce cas réside d'une part dans l'estimation du terme continu comme dans le cas $k \leq r$, et d'autre part à comprendre la contribution du terme discret.
- D.A. Cartwright et P. Soardi ont étendu au cas du produit libre de deux groupes cycliques d'ordres différents la théorie des fonctions sphériques, des polynômes orthogonaux et de la mesure de Plancherel.
Le problème consiste à étudier dans ce contexte les équations considérées dans cette thèse.
- Généraliser les résultats obtenus dans cette thèse au cadre des groupe hyperboliques généraux.

Bibliographie

- [1] J.-Ph. Anker, E. Damek, C. Yacoub : *Spherical analysis on harmonic AN groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 23 (1996), 643–679.
- [2] J.-Ph. Anker, L. Ji : *Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces*, Geom. Funct. Anal. 9 (1999), 1035–1091.
- [3] J.-Ph. Anker, P. Martinot, E. Pedon, A.G. Setti : *The shifted wave equation on Damek-Ricci spaces and homogeneous trees*, dans *Trends in harmonic analysis*, Springer INdAM Ser. 3 (2013), 1–25.
- [4] J.-Ph. Anker, V. Pierfelice : *Nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré (C) *Nonlinear Anal.* 26 (2009), 1853–1869.
- [5] J.-Ph. Anker, V. Pierfelice, M. Vallarino : *Schrödinger equations on Damek-Ricci spaces*, Comm. Part. Diff. Eq. 36 (2011), no. 6, 976–997.
- [6] V. Banica : *The nonlinear Schrödinger equation on the hyperbolic space*, Comm. Part. Diff. Eq. 32 (2007), no. 10, 1643–1677.
- [7] V. Banica, R. Carles, G. Staffilani : *Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space*, Geom. Funct. Anal. 18 (2008), no. 2, 367–399.
- [8] Á. Baricz, S. Ponnusamy : *On Turán type inequalities for modified Bessel functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 2, 523–532
- [9] W. Betori, J. Faraut, M. Pagliacci : *An inversion formula for the Radon transform on trees*, Math. Z. 201 (1989), 327–337.
- [10] W. Betori, M. Pagliacci : *Harmonic analysis for groups acting on trees*, Boll. Unione Mat. Ital. 6 (1984), 333–345
- [11] W. Betori, M. Pagliacci : *The Radon transform on trees*, Boll. Un. Mat. Ital. B (6), vol. 5, (1986), 267–277.

- [12] J. Bourgain : *Periodic nonlinear Schrödinger equations and invariant measures*, Comm. Math. Phys. 166 (1995), 1–26.
- [13] T. Branson, G. Ólafsson, H. Schlichtkrull : *Huyghens' principle in Riemannian symmetric spaces*, Math. Ann. 301 (1995), no.3, 445–462
- [14] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov : *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds*, Amer. J. Math. 126 (2004), no. 3, 569–605.
- [15] P. Cartier : *Géométrie et analyse sur les arbres*, Séminaire Bourbaki, 1971–1972, exposé 407, Lect. Notes Math. 317, Springer (1973), 123–140.
- [16] P. Cartier : *Harmonic analysis on trees*, Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 26 (1972), 419–424
- [17] D.I. Cartwright, P.M. Soardi : *Harmonic analysis on the free product of two cyclic groups*, J. Funct. Anal. 65 (1986), no. 2, 147–171.
- [18] D.I. Cartwright, P.M. Soardi : *Random walks on free products, quotients and amalgams*, Nagoya Math. J. 102 (1986), 163–180.
- [19] E. Casadio Tarabusi, J.M. Cohen, et F. Colonna : *The horocyclic Radon transform on nonhomogeneous trees*, Israel J. Math. 78 (1992), no. 2-3, 363–380
- [20] T. Cazenave : *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, 3rd ed. Institut de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.
- [21] I. Chavel, E.A. Feldman : *Isoperimetric constants and large time heat diffusion in Riemannian manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. 54 (1993), 111–121.
- [22] F.M. Choucroun : *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 58 (1994), 170 pp.
- [23] J.M. Cohen, M. Pagliacci : *Explicit solutions for the wave equations on homogeneous trees*, Adv. Appl. Math. 15 (1994), 390–403
- [24] T. Coulhon : *Noyau de la chaleur et discrétisation d'une variété riemannienne*, Israel J. Math. 80 (1992), 289–300.
- [25] M.G. Cowling : *Herz's "principe de majoration" and the Kunze-Stein phenomenon*, in *Harmonic analysis and number theory* (Montreal, 1996), CMS Conf. Proc. 21, Amer. Math. Soc. (1997), 73–88.
- [26] M.G. Cowling, S. Meda, A.G. Setti : *An overview of harmonic analysis on the group of isometries of a homogeneous tree*, Expo. Math. 16 (1998), 385–423.

- [27] M.G. Cowling, S. Meda, A.G. Setti : *Invariant operators on function spaces on homogeneous trees*, Colloq. Math. 80 (1999), no. 1, 53–61
- [28] M.G. Cowling, S. Meda, A.G. Setti : *Estimates for functions of the Laplace operator on homogeneous trees*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 4271–4293
- [29] M.G. Cowling, A.G. Setti : *The range of the Helgason-Fourier transformation on homogeneous trees*, Bull. Austral. Math. Soc. 59 (1999), no. 2, 237–246.
- [30] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, <http://dlmf.nist.gov>
- [31] J. Faraut, M. Picardello : *The Plancherel measure for symmetric graphs*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 138 (1984), 151–155.
- [32] A. Figà-Talamanca, C. Nebbia : *Harmonic analysis and representation theory for groups acting on homogeneous trees*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 162, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [33] A. Figà-Talamanca, M. Picardello : *Spherical functions and harmonic analysis on free groups*, J. Funct. Anal. 47 (1982), no. 3, 281–304.
- [34] A. Figà-Talamanca, M. Picardello : *Harmonic analysis on free groups*, Marcel Dekker, New York, 1983.
- [35] A. Figà-Talamanca, T. Steger : *Harmonic analysis for anisotropic random walks on homogeneous trees*, Mem. Amer. Math. Soc. 110 (1994), no. 531, xii+68 pp.
- [36] P. Gérard, V. Pierfelice : *Nonlinear Schrödinger equation on four-dimensional compact manifolds*, Bull. Soc. Math. France 138 (2010), no. 1, 119–151.
- [37] J. Ginibre : *Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires*, Cours de DEA, Univ. Paris-Sud, 1994–1995.
- [38] J. Ginibre, G. Velo : *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures Appl. 64 (1985), 363–401.
- [39] W. Hebisch, W. Młotkowski : *Irreducible representations of the free product of groups*, Indiana Univ. Math. J. 59 (2010), no. 1, 131–182.
- [40] S. Helgason : *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, 1984.
- [41] A. Ionescu, G. Staffilani : *Semilinear Schrödinger flows on hyperbolic spaces : scattering in H^1* , Math. Ann. 345 (2009), no. 1, 133–158.
- [42] A. Iozzi, M. Picardello : *Graphs and convolution operators*, Topics in modern harmonic analysis, Vol. I, II (Turin/Milan, 1982), 187–208, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Rome, 1983.

- [43] A. Iozzi, M. Picardello : *Spherical functions on symmetric graphs*, Harmonic analysis (Cortona, 1982), 344–386, Lecture Notes in Math., 992, Springer, Berlin, 1983.
- [44] A. Jamal Eddine : *Schrödinger equation on homogeneous trees*, J. Lie Theory 23 (2013), no. 3, 779–794.
- [45] S. Karlin, J. McGregor : *Random walks*, Illinois J. Math. 3 (1959), 66–81.
- [46] T. Kato : *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré (A) Phys. Theor. 46 (1987), no. 1, 113–129.
- [47] M. Keel, T. Tao : *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math. 120 (1998), no. 5, 955–980.
- [48] M. Kinai : *Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 391–413.
- [49] M. Kinai : *Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 38 (1986), 227–238.
- [50] G. Kuhn : *Random walks on free products*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (1991), no. 2, 467–491.
- [51] G. Kuhn : *Anisotropic random walks on free products of cyclic groups, irreducible representations and idempotents of $C_{reg}^*(G)$* , Nagoya Math. J. 128 (1992), 95–120.
- [52] G. Kuhn, P.M. Soardi : *The Plancherel measure for polygonal graphs*, Ann. Mat. Pura Appl. 4 (1983), 393–401.
- [53] R.A. Kunze, E.M. Stein : *Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 unimodular group*, Amer. J. Math. 82 (1960), 1–62.
- [54] S.P. Lalley : *Saddle-point approximations and space-time Martin boundary for nearest-neighbor random walk on a homogeneous tree*, J. Theoret. Probab. 4 (1991), no. 4, 701–723.
- [55] S.P. Lalley : *Finite range random walk on free groups and homogeneous trees*, Ann. Probab. 21, (1993), 2087–2130.
- [56] N.N. Lebedev : *Special functions and their applications*, Dover, New York, 1972.
- [57] G. Medolla : *Asymptotic energy equipartition for the wave equation on homogeneous trees*, Monatsh. Math. 127 (1999), no. 1, 43–53.
- [58] G. Medolla, A.G. Setti : *The wave equation on homogeneous trees*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 176 (1999), 1–27.

-
- [59] G. Medolla, A.G. Setti : *Long time heat diffusion on homogeneous trees*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 6, 1733–1742.
- [60] I. Nasell : *Rational bounds for ratios of modified Bessel functions*, SIAM J. Math. Anal. 9 (1978), no. 1, 1–11.
- [61] C. Nebbia : *Groups of isometries of a tree and the Kunze-Stein phenomenon*, Pacific J. Math. 133 (1988), 141–149.
- [62] F.W. Olver : *Asymptotics and special functions*, Academic Press, San Diego, 1974.
- [63] M. Pagliacci : *Heat and wave equations on homogeneous trees*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 7 (1993), no. 1, 37–45.
- [64] M.M. Pang : *Heat kernels on graphs*, J. London Math. Soc. 47 (1993), 50–64.
- [65] M. Picardello : *Spherical functions and local limit theorems on free groups*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 133 (1983), 177–191.
- [66] V. Pierfelice : *Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and wave equations on Damek- Ricci spaces*, Math. Z. 260 (2008), 377–392.
- [67] S. Sawyer : *Isotropic random walks in a tree*, Z. Wahrsch. 12 (1978), 279–292.
- [68] A.G. Setti : *L^p and operator norm estimates for the complex time heat operator on homogeneous trees*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 2, 743–768.
- [69] E.M. Stein : *Harmonic analysis (real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals)*, Princeton Math. Ser. 43, Princeton Univ. Press (1993).
- [70] T. Tao : *Nonlinear Dispersive Equations. Local and Global Analysis*, CBMS Regional Conf. Ser. Math. 106, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2006.
- [71] J. Tits : *Sur le groupe des automorphismes d’un arbre*, “Mémoires dédiés à Georges de Rham”, Springer Verlag, Berlin, 1970, 188–211.
- [72] N. Th. Varopoulos : *Long range estimates for Markov chains*, Bull. Sci. Math. (2) 109 (1985), 225–252.
- [73] W. Woess : *Nearest neighbour random walks on free products of discrete groups*, Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 5 (1986), no. 3, 961–982.
- [74] W. Woess : *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics 138, Cambridge University Press.

Alaa Jamal Eddine

Équation d'évolution sur certains groupes hyperboliques

Cette thèse porte sur l'étude d'équations d'évolution sur certains groupes hyperboliques, en particulier, nous étudions l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes modifiée, d'abord sur les arbres homogènes, ensuite sur des graphes symétriques. Sur les arbres homogènes, nous montrons que, sous une hypothèse d'invariance de jauge, on a existence globale des solutions de l'équation de Schrödinger ainsi qu'un phénomène de '*scattering*' pour des données arbitraires dans l'espace des fonctions de carré intégrable sans restriction sur le degré de la non-linéarité, contrairement au cas euclidien ou au cas hyperbolique. Nous généralisons ensuite ce résultat sur les graphes symétriques de degré $(k - 1)(r - 1)$ sous la condition $k < r$. Un de nos principaux résultats sur les graphes symétriques est l'estimation du noyau de la chaleur associé au laplacien combinatoire. Pour finir, nous établissons une expression explicite des solutions de l'équation des ondes modifiée sur les graphes symétriques.

Mots clés : Arbre homogène, graphes symétrique, équation des ondes, équation de la chaleur, équation de Schrödinger, estimations de Strichartz.

Evolution equation on some hyperbolic groups

This thesis focuses on the study of evolution equations on certain hyperbolic groups, in particular, we study the heat equation, the Schrödinger equation and the modified wave equation first on homogeneous trees then on symmetric graphs. In the homogeneous trees case, we show that under a gauge invariance condition, we have global existence of solutions of the Schrödinger equation and scattering for arbitrary data in the space of square integrable functions without any restriction on the degree of the nonlinearity, in contrast to the euclidean and hyperbolic space cases. We then generalize this result on symmetric graphs of degree $(k - 1)(r - 1)$ under the condition $k < r$. One of our main results on symmetric graphs is the estimate of the heat kernel associated to the combinatorial laplacian. Finally, we establish an explicit expression of solutions of the modified wave equation on symmetric graphs.

Keywords : Homogeneous tree, symmetric graph, wave equation, heat equation, Schrödinger equation, Strichartz estimates.