

Numéro d'ordre : 2013-08

année 2013

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Spécialité : Mécanique

PAR

Paul du CAUZÉ de NAZELLE

Paramétrage de formes surfaciques pour l'optimisation

Présentée et soutenue publiquement le 27 Mars 2013 devant le jury composé de :

Jean-Louis BATOZ	Université de Technologie de Compiègne, Professeur	Président
Christian FOURCADE	Renault S.A.S., Ingénieur de Recherche	Examineur
Frédéric GILLOT	École Centrale de Lyon, Maître de Conférences	Examineur
Louis JÉZÉQUEL	École Centrale de Lyon, Professeur	Directeur de Thèse
Michel POTIER-FERRY	Université de Lorraine, Professeur	Rapporteur
Christian SOIZE	Université de Paris Est, Professeur	Rapporteur
Yves TOURBIER	Renault S.A.S., Expert Optimisation	Examineur

NOM	Prénom	Laboratoire	Spécialité	Date de soutenance
SIMONET	Pascal	AMPERE	microbiologie	1990
MOREL	Hervé	AMPERE	électrotechnique	10 février 1994
NICOLAS	Laurent	AMPERE	électrotechnique	12 juillet 1994
REDARCE	Hervé Tanneguy	AMPERE	automatique	20 juillet 1995
KRÄHENBÜHL	Laurent	AMPERE	par nomination DR au CNRS	1 octobre 1996
CLERC	Guy	AMPERE	PR LYON 1	6 mars 1998
BURAI	Noël	AMPERE	PR LYON 1	7 décembre 2004
VOLLAIRE	Christian	AMPERE	génie électrique	25 mars 2005
SCORLETTI	Gérard	AMPERE	automatique	6 octobre 2006
BURET	François	AMPERE	électrotechnique	17 novembre 2006
VENET	Pascal	AMPERE	génie électrique	24 octobre 2007
BEROUAL	Abderrahmane	AMPERE	Doctorat d'Etat es Sc Physiques	1 janvier 1987

TOTAL AMPERE : 4

LAFON	Philippe	Extérieur	Acoustique	26 janvier 2011
GOURDAIN	Nicolas	Extérieur	Mécanique des fluides	3 novembre 2011

TOTAL EXTERIEUR :

MAITRE	Jean-François	ICJ	PR émérite	30 novembre 1974
MOUSSAOUI	Mohand	ICJ	retraite au 1/10/11	20 juin 1977
MUSY	François	ICJ	Doctorat d'Etat	7 juin 1985
MARION	Martine	ICJ	Doctorat d'Etat en Mathématiques	15 décembre 1988
MIRONESCU	Elisabeth	ICJ	Doctorat d'Etat	15 décembre 1999
LOHEAC	Jean-Pierre	ICJ	Mathématiques	15 novembre 2002
ZINE	Abdel-Malek	ICJ	Mathématiques	9 novembre 2005

TOTAL ICJ : 5

VIKTOROVITCH	Pierre	INL	Doctorat d'Etat es Sc Physiques	1975
SOUTEYRAND	Eliane	INL	Doctorat d'Etat en Matériaux	1985
GRENET	Geneviève	INL	Doctorat d'Etat es Sciences	6 novembre 1981
GENDRY	Michel	INL	Doctorat d'Etat es Sciences	12 octobre 1986
ROBACH	Yves	INL	Doctorat d'Etat en Matériaux	31 janvier 1989
JACQUEMOD	Gilles	INL	électronique	13 janvier 2000
GAFFIOT	Frédéric	INL	électronique	18 janvier 2000
PHANER-GOUTORBE	Magali	INL	Physique	19 décembre 2003
CLOAREC	Jean-Pierre	INL	chimie des matériaux	20 décembre 2004
DANESCU	Alexandre	INL	mécanique	20 juin 2005
O'CONNOR	Ian	INL	électronique	11 octobre 2005
SEASSAL	Christian	INL	Photonique	9 mars 2007
CALLARD	Anne-Ségolène	INL	Physique, Nanophotonique	6 décembre 2007
LETARTRE	Xavier	INL	Photonique	3 juin 2008

SAINT-GIRONS	Guillaume	INL	milieux denses et matériaux	5 juin 2009
GARRIGUES	Michel	INL		
JOSEPH	Jacques	INL	PR émérite	
TARDY	Jacques	INL	électronique	
MIEYEVILLE	Fabien	INL	Dispositif de l'électronique intégrée	29 mai 2012
CHEVOLOT	Yann	INL	Chimie théorique, physique, analytique	28 septembre 2012

TOTAL INL : 8

DAVID	Bertrand	LIESP	doctorat d'Etat en Informatique	1981
SEFFAH	Ahmed	LIESP	informatique	15 septembre 2006

TOTAL LIEPS : 2

CHEN	Liming	LIRIS		1 janvier 1998
------	--------	-------	--	----------------

TOTAL LIRIS : 1

SCOTT	Julian	LMFA	PhD	1978
HAMADICHE	Mahmoud	LMFA	Doctorat d'Etat es Sciences	7 juin 1905
JUVE	Daniel	LMFA	Doctorat d'Etat es Sciences	1985
BLANC-BENON	Philippe	LMFA	Doctorat d'Etat es Sciences	9 juin 1905
ROGER	Michel	LMFA	Doctorat d'Etat en Acoustique	1989
JEANDEL	Denis	LMFA	Doctorat d'Etat es Sc Physiques	9 juillet 1976
GOROKHOVSKI	Mickael	LMFA		28 avril 1982
LEBOEUF	Francis	LMFA	Doctorat d'Etat en Mécanique	26 juin 1984
FERRAND	Pascal	LMFA	Doctorat d'Etat	17 mars 1986
HENRY	Daniel	LMFA	Docteur es Sciences Physiques	19 juin 1986
GALLAND	Marie-Annick	LMFA	Acoustique	12 juillet 1993
PERKINS	Richard	LMFA	mécanique	20 février 1998
BAILLY	Christophe	LMFA	Acoustique	29 mars 1999
CARRIERE	Philippe	LMFA	Mécanique des Fluides	27 septembre 2000
SIMOENS	Serge	LMFA	Mécanique des Fluides	1 avril 2002
TREBINJAC	Isabelle	LMFA	mécanique	7 mai 2003
LE RIBAUT	Catherine	LMFA	Mécanique des Fluides	11 juillet 2003
LAKEHAL	Djamel	LMFA	mécanique, génie mécanique et civil	26 novembre 2004
GODEFERD	Fabien	LMFA	énergétique et thermique	13 décembre 2004
UHLMANN	Markus	LMFA	Thermique et Energétique	27 juin 2006
BOGEY	Christophe	LMFA	Acoustique	25 mai 2007
SHAO	Liang	LMFA	Mécanique	15 septembre 2007
NICOLLEAU	Franck	LMFA	mécanique, génie mécanique et civil	8 décembre 2009
BERTOGLIO	Jean-Pierre	LMFA	Doctorat d'Etat es Sciences	1 juin 1986
BIESHEUVEL	Arie	LMFA		
CAMBON	Claude	LMFA		
CHAMPOUSSIN	J-Claude	LMFA		
COMTE-BELLOT	Geneviève	LMFA	PR émérite	
BOS	Wouter	LMFA	Mécanique des Fluides	29 juin 2012

TOTAL LMFA : 9

JUVE	Denyse	LTDS	Doctorat d'Etat en Chimie	1983
JEZEQUEL	Louis	LTDS	Doctorat d'Etat	1985
LOUBET	Jean-Luc	LTDS	Doctorat d'Etat	1 décembre 1986
STREMSDOERFER	Guy	LTDS	chimie des matériaux	3 avril 1992
DONNET	Christophe	LTDS	PR ENISE	27 avril 1995
MAZUYER	Denis	LTDS	mécanique	27 avril 1995
SALVIA	Michelle	LTDS	matériaux	4 décembre 1997
CHOVELON	J.Marc	LTDS	matériaux	3 avril 1998
BOMBA	Cécile	LTDS	génie des matériaux	29 mai 1998
PONSONNET	Laurence	LTDS	matériaux	29 mai 1998
CHATEAUMINOIS	Antoine	LTDS	matériaux	22 janvier 1999
PERRET-LIAUDET	Joël	LTDS	mécanique	16 avril 1999
DUBUJET	Philippe	LTDS	PR ENISE	31 mars 2000
JEANDIN	Michel	LTDS	Matériaux Mécanique	20 mars 2001
THOUVEREZ	Fabrice	LTDS	mécanique	5 juillet 2001
WONG	Henry	LTDS	génie civil	8 janvier 2002
FOUVRY	Siegfrid	LTDS	Matériaux Mécanique	12 septembre 2002
LE BOT	Alain	LTDS	Acoustique	19 décembre 2002
BENAYOUN	Stéphane	LTDS	matériaux	9 décembre 2003
HERTZ	Dominique	LTDS	génie des matériaux	18 juin 2004
ICHCHOU	Mohamed	LTDS	mécanique	6 décembre 2004
GUERRET	Chrystelle	LTDS	milieux denses et matériaux	7 mars 2005
HOC	Thierry	LTDS	chimie des matériaux	19 novembre 2007
SINOUE	Jean-Jacques	LTDS	Mécanique	21 novembre 2007
VINCENS	Eric	LTDS	génie civil	17 novembre 2010
CAMBOU	Bernard	LTDS	PR émérite	
KAPSA	Philippe	LTDS		
MARTIN	Jean-Michel	LTDS	PR émérite	
SIDOROFF	François	LTDS	PR émérite	
VINCENT	Léo	LTDS	PR émérite	
CAYER-BARRIOZ	Juliette	LTDS	Mécanique	14 octobre 2012
DASSENIOY	Fabrice	LTDS	Chimie théorique, physique, analytique	2 décembre 2011
DE BARROS BOUCHET	Maria Isabel	LTDS	Chimie des matériaux	12 décembre 2011
VALETTE	Stéphane	LTDS	milieux denses et matériaux	4 décembre 2012
TREHEUX	Daniel		PR émérite	

TOTAL LTDS : 15

Personnels ECL

Personnels CNRS

Personnels extérieurs

Cette Thèse est confidentielle pour une durée de 5 ans.

Résumé :

Afin d'améliorer la qualité des solutions proposées par l'optimisation dans les processus de conception, il est important de se donner des outils permettant à l'optimiseur de parcourir l'espace de conception le plus largement possible. L'objet de cette Thèse est d'analyser différentes méthodes de paramétrage de formes surfaciques d'une automobile en vue de proposer à Renault un processus d'optimisation efficace.

Trois méthodes sont analysées dans cette Thèse. Les deux premières sont issues de l'existant, et proposent de mélanger des formes, afin de créer de la diversité. Ainsi, on maximise l'exploration de l'espace de conception, tout en limitant l'effort de paramétrage des CAO. On montre qu'elles ont un fort potentiel, mais impliquent l'utilisation de méthodes d'optimisation difficiles à mettre en œuvre aujourd'hui.

La troisième méthode étudiée consiste à exploiter la formulation de Koiter des équations de coques, qui intègre paramètres de forme et mécanique, et de l'utiliser pour faire de l'optimisation de forme sur critères mécaniques. Cette méthode a par ailleurs pour avantage de permettre le calcul des gradients. D'autre part, nous montrons qu'il est possible d'utiliser les points de contrôles de carreaux de Bézier comme paramètres d'optimisation, et ainsi, de limiter au strict nécessaire le nombre de variables du problème d'optimisation, tout en permettant une large exploration de l'espace de conception. Cependant, cette méthode est non-standard dans l'industrie et implique des développements spécifiques, qui ont été réalisés dans le cadre de cette Thèse.

Enfin, nous mettons en place dans cette Thèse les éléments d'un processus d'optimisation de forme surfacique.

Mots clés : paramétrage, optimisation de formes, surfacique, théorie des coques minces.

Abstract:

To improve optimized solutions quality in the design process, it is important to provide the optimizer tools to navigate the design space as much as possible. The purpose of this thesis is to analyze different parametrization methods for automotive surface shapes, in order to offer Renault an efficient optimization process.

Three methods are analyzed in this thesis. The first two are closed to the existing ones, and propose to blend shapes to create diversity. Thus, we are able to maximize the exploration of the design space, while minimizing the effort for CAD setting. We show their high potential, but they involve the use of optimization methods difficult to implement today.

The third method is designed to exploit the formulation of Koiter shell equations, which integrates mechanical and shape parameters, and to use it to perform shape optimization with respect to different mechanical criteria. This method also has the advantage of allowing the gradients calculation. On the other hand, we show that it is possible to use the Bezier's control points as optimization parameters, and thus control the minimum number of variables necessary for the optimization problem, while allowing a broad exploration of the design space. However, this method is non-standard in the industry and involves specific developments that have been made in the context of this thesis.

Finally, we implement in this thesis essentials elements of an optimization process for surface shapes.

Keywords: design parameters, shape optimization, surface shapes, thin shell theory.

Remerciements

Le travail effectué dans cette Thèse n'aurait été possible sans l'aide, les encouragements et le support d'un certain nombre de personnes. En particulier, je tiens à remercier certaines personnes à qui la réussite de ce projet est due.

Louis Jézéquel, mon directeur de Thèse, sans qui ces travaux n'auraient aboutis, pour son soutien tout au long de la Thèse, pour la confiance qu'il m'a donné et pour les libertés qu'il m'a laissé tout au long de ce projet ;

Frédéric Gillot, mon co-encadrant à l'École Centrale de Lyon, qui m'a guidé tout au long de cette Thèse afin de produire un travail de qualité, pour ces longs moments de discussion et d'explications, pour ses remarques constructives autant sur le fond que sur la forme ;

Yves Tourbier, mon encadrant Renault, sans qui cette Thèse n'aurait eu lieu, pour ces brainstormings qui ont soulevés un certain nombre de questions, pour ces conseils et remarques pertinentes qui m'ont permis d'avancer, et pour la confiance et les libertés qu'il m'a laissé tout au long de cette période ;

Christian Fourcade, mon co-encadrant Renault, qui a su redonner une impulsion à un moment clé de la Thèse, pour ces heures de débogage, pour tous le temps qu'il m'a accordé ;

Mes collègues Renault, Pascal pour m'avoir supporté dans son bureau, Marc pour les discussions politico-économiques plus ou moins enflammées, Frédéric pour les contrepèteries du Jeudi ;

Pierre, pour le temps partagé pendant ces efforts.

Aussi, je souhaite remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce projet, notamment mes amis, mes parents, mes frères et sœurs qui m'ont soutenu pendant ces trois ans et qui m'ont permis d'avancer tout au long de ce projet.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement ma Lex, sans qui, rien de tout ceci ne serait... Ta main dans la mienne, tout devient possible.

A Josselin.

Table des matières

I Démarches classiques de paramétrage de formes surfaciques et améliorations	3
1 Introduction à l'optimisation de formes surfaciques	5
1.1 Ingénierie système et cycle en V	6
1.1.1 Architecture fonctionnelle	7
1.1.2 Architecture organique	7
1.1.3 Avantages et limites de la méthode	9
1.2 Paramétrages classiques d'optimisation de formes surfaciques	9
1.2.1 Optimisation paramétrique	10
1.2.2 Optimisation topographique	12
1.2.3 Morphing de maillage	12
1.3 Contexte Industriel	13
1.4 Méthodes d'optimisation	17
1.4.1 Méthodes d'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponses	19
1.4.2 Optimisation par méthode du gradient	23
1.5 Synthèse	25
Bibliographie	26
2 Optimisation par mélange de formes	29
2.1 Optimisation par mélange de formes élémentaires	30
2.1.1 Définition d'une bibliothèque de formes	30
2.1.2 Principe de l'optimisation de forme	31
2.1.3 Boucle d'optimisation	31
2.1.4 Bilan sur le mélange de formes élémentaires	34
2.2 Optimisation par mélange de modes propres	35
2.2.1 Définition du paramétrage	35
2.2.2 Optimisation d'une doublure de capot	38
2.2.3 Résultats numériques	39
2.2.4 Conclusion sur le mélange de modes propres	42
2.3 Bilan sur le mélange de formes	43
Bibliographie	44
3 Application du mélange de formes	45
3.1 Définition du problème	45
3.1.1 Choix du Critère	46
3.1.2 Paramétrage	49
3.2 Optimisation	50
3.3 Résultats	52
3.4 Conclusion sur le mélange de formes	56
Bibliographie	57

II	Paramétrage intrinsèque de forme	59
4	Mise en place d'une méthode de paramétrage intrinsèque de forme	61
4.1	Présentation de la méthode	63
4.1.1	Le modèle linéaire de Koiter	64
4.1.2	Équation dynamique d'une coque mince	67
4.1.3	Calcul de la dérivée par rapport à φ	68
4.2	Critères mécaniques	70
4.2.1	Énergie de déformation	70
4.2.2	Positionnement de la première fréquence de résonance	70
4.3	Mise en œuvre éléments finis	73
4.3.1	Description des éléments de Kanev et d'Argyris	73
4.3.2	Élément utilisé	78
4.3.3	Intégration numérique	78
4.4	Exemples de paramétrages	78
4.4.1	Cylindre	78
4.4.2	Tronc de cône excentré	80
4.4.3	Paraboloïde hyperbolique	81
4.5	Bilan et perspectives sur le paramétrage intrinsèque de forme	83
	Bibliographie	85
5	Industrialisation de la méthode	87
5.1	Patches splines	87
5.1.1	Définition de la fonction de forme	88
5.1.2	Application numérique	90
5.1.3	Multi-patches	91
5.1.4	Assemblage simple	92
5.1.5	Assemblage superposé : Équations de compatibilité	95
5.2	Boucle d'optimisation	98
5.3	Synthèse sur l'industrialisation	101
	Bibliographie	102
III	Conclusions et perspectives	103
	Conclusion et Perspectives	105
A	Optimisation de la première fréquence propre d'un patch spline	107
	Bibliographie	109
		109

Table des figures

1.1	Description du cycle de conception en V	6
1.2	Étapes du déploiement du cahier des charges lors de la descente du cycle en V . . .	8
1.3	Un exemple de boucle d'optimisation paramétrique	11
1.4	Solution d'optimisation topographique et reconstruction CAO [Altair 2011] . . .	12
1.5	Exemple de boîte de morphing et de déformation dans ANSA [ANSA 2011, p. 1662]	13
1.6	Vue éclatée d'une Mégane montrant les éléments surfaciques et massifs	13
1.7	Description du cycle de conception d'une doublure de capot pour la prestation "sécurité"	14
1.8	Exemple de contraintes pour la définition de l'espace de conception d'une doublure de capot	15
1.9	Exemple de boucle classique d'optimisation de forme	16
1.10	Exemples de doublures de capots	16
1.11	Exemple de schéma représentant une méthode d'optimisation par plan d'expériences	20
1.12	Exemple de cassure obtenue à l'aide de splines linéaires	21
1.13	Exemple de modèle de krigeage	22
1.14	Optimum d'une fonction coût pour un problème mono-objectif	23
1.15	Illustration du concept de front de Pareto	24
1.16	Classification des méthodes d'optimisation surfaciques en fonction de leur capacité à explorer l'espace de conception	25
2.1	Principe de l'optimisation par mélange formes élémentaires - Exemple d'une dou- blure de capot	31
2.2	Boucle d'optimisation pour le mélange de formes élémentaires	32
2.3	Exemple de formes obtenues par mélange de deux sphères	33
2.4	Algorithme d'optimisation par mélange de formes élémentaires	34
2.5	Exemple 1D de mélange de deux modes propres d'une poutre	35
2.6	Paramétrage par mélange de modes propres et optimisation par la méthode des plans d'expériences	36
2.7	Forme $\hat{S}$ issue du mélange (2.7a) ; Fonction de filtrage (2.7b) ; Forme filtrée (2.7c)	37
2.8	Utilisation de paramètres implicites dans l'optimisation par mélange de modes propres	38
2.9	Définition de l'espace design (2.9b) et de l'espace non-design (2.9c) pour la partie symétrique d'une doublure de capot (2.9a)	39
2.10	Volume (dm^3) séparant la doublure approchée et celle de référence en fonction du nombre N de modes utilisés dans le mélange	40
2.11	Doublure de référence (2.11a) et forme approchée (2.11b) par le mélange de $N =$ 500 modes propres	40
2.12	Volume (dm^3) séparant la doublure approchée et celle de référence en fonction du nombre N de modes utilisés dans le mélange avec utilisation des filtres (+) ou sans ($\square$)	41

2.13	Approximation de la doublure de référence obtenue en utilisant les filtres	41
3.1	Exemple de deux écrans thermiques avec les points de fixation et de mesures . . .	46
3.2	Mise en place de l' α -test sur le critère maximum de MFT obtenu à partir de 32 et 2×16 points d'écoute	48
3.3	Comparaison de la pression acoustique et du critère basé sur l'énergie cinétique sur la plage de fréquences $[500Hz; 1500Hz]$	48
3.4	Évolution du critère $f\sqrt{E_c}$ en fonction de l'épaisseur de la plaque	49
3.5	Exemple de fonctions paramètres pour le mélange	50
3.6	Représentation des résultats d'optimisation sur un graphe de Pareto	51
3.7	Essai n° 224 : -50.36% de rayonnement acoustique; $+56.28\%$ de masse	53
3.8	Essai n° 1025 : -21.33% de rayonnement acoustique; $+14.01\%$ de masse	54
3.9	Essai n° 1636 : -43.30% de rayonnement acoustique; $+36.91\%$ de masse	55
4.1	Représentation d'une géométrie Ω à l'aide d'une fonction de forme associée et d'un plan de référence Ω_0	63
4.2	Description des coordonnées barycentriques d'un triangle	73
4.3	Description de l'élément	73
4.4	Description d'une fonction de formes entre un domaine de référence et un cylindre	79
4.5	Exemple des deux premiers modes propres d'un cylindre ayant la même fréquence	79
4.6	Représentation de la fonction de forme d'un tronc de cône	80
4.7	représentation du parabolioïde hyperbolique	81
5.1	Exemple de patch de Bézier de classe 4 à 16 points de contrôles	88
5.2	Configuration optimale d'un patch spline sous critère de fréquence propre	91
5.3	Deux patches que l'on souhaite relier en 4 points	93
5.4	Représentation du maillage de 4 patches avec l'affichage des nœuds milieux et des nœuds maîtres	94
5.5	Forme industrielle réalisée à l'aide de neuf patches de Bézier	95
5.6	Description des espaces de références associés au raccord de deux patches	96
5.7	Industrialisation de la méthode	101
A.1	Formes obtenues au cours des itérations pour l'optimisation d'un patch spline sous critère de fréquence propre	108

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre différents types de paramétrages	10
2.1	Qualité des modèles statistiques	42
2.2	Qualité des modèles statistiques construits avec les <i>PIs</i>	42
3.1	Erreur de modélisation pour les deux critères étudiés	51
3.2	Sélection de points intéressants	52
4.1	Optimisation de la première fréquence propre d'un cylindre à surface constante .	80
4.2	Comparaison des 15 premières fréquences propres obtenues avec NASTRAN et la méthode de Koiter ($R = 150\text{ mm}$, $r = 100\text{ mm}$, $H = 200\text{ mm}$ et $a = 70\text{ mm}$) . . .	82
4.3	Modes de corps solides du parabolôïde-hyperbolique ($a = 1\text{ m}$ et $\frac{c}{2b^2} = 2\text{ m}^{-1}$) . .	83
5.1	Optimisation de la première fréquence propre d'un patch spline	91

Introduction

L'optimisation de forme est de plus en plus utilisée dans l'industrie, que ce soit comme outil d'aide à la décision, pour orienter la conception d'un produit vers une solution meilleure, ou comme outil de conception à part entière. De nombreuses méthodes ont été développées dans ce sens pour l'optimisation des pièces volumiques, cependant, les méthodes permettant de traiter des pièces surfaciques présentent rapidement leurs limites. On constate de plus que les pièces surfaciques dans un véhicule sont très largement majoritaires. Nous proposons donc d'étudier différentes possibilités pour la conception et l'optimisation de pièce surfaciques. L'objectif de ce travail est de déterminer les méthodes de paramétrage qui ont du potentiel pour l'optimisation de formes surfaciques.

Dans ce travail, nous proposons d'étudier différentes méthodes d'optimisation de formes surfaciques, nous nous concentrons sur l'aspect paramétrage ; il s'agit de trouver des moyens efficaces de parcourir un espace de conception. Nous cherchons alors des paramétrages qui sont adaptés à l'optimisation dans un contexte industriel, ceux-ci doivent être simples à mettre en œuvre et permettre une exploration maximale de l'espace de conception.

Au travers de deux axes, nous allons explorer différentes méthodes de paramétrage pour les formes surfaciques, dans une première partie, en proposant une extension des méthodes classiques, puis, en partie II, en montrant l'efficacité d'un paramétrage, basé sur les équations de coques de Koiter, à traiter des pièces automobiles. L'objectif de cette Thèse est de mettre à disposition des concepteurs des outils efficaces pour l'optimisation de pièces surfaciques.

Dans un premier chapitre, nous allons faire un état de l'art concernant les méthodes d'optimisation et de paramétrage pour les formes surfaciques, et présenter le contexte industriel d'application de ces méthodes. Les chapitres 2 et 3 sont dédiés à l'enrichissement des méthodes classiques et à leur application à un problème industriel. On propose ici des paramétrages qui restent simples à définir, car proches du processus classique de conception, mais qui permettent une exploration plus large de l'espace de conception. Cependant, nous allons voir qu'ils sont peu adaptés à l'optimisation car ils n'ont pas été pensés pour, bien qu'ils soient efficaces d'un point de vue géométrie.

Nous présentons ensuite, en partie II, une méthode de paramétrage basée sur les équations de Koiter, qui permet d'introduire les paramètres de formes dans les équations mécaniques, et présente l'avantage de rendre possible le calcul des gradients des critères mécaniques par rapport aux paramètres de forme. Dans le chapitre 4, nous présentons les équations de coques, nous verrons qu'elles sont bien adaptées à l'optimisation de forme, en effet, les équations mécaniques sont paramétrées par une fonction de forme, que l'on considère ici comme étant les variables d'optimisation. On peut ainsi calculer les dérivées de ces équations par rapport aux paramètres de forme. Dans le chapitre 5, nous étudierons le potentiel de cette méthode à être utilisée pour la conception de pièces automobiles, nous proposerons pour cela l'utilisation d'une fonction de forme spécifique : la spline. Nous allons voir que les développements spécifiques pour la mise en œuvre de cette méthode est non-triviale, notamment dans un contexte industriel, c'est pourquoi nous proposerons un processus automatisé pour son utilisation par les concepteurs.

Enfin, nous proposons de conclure sur l'utilisation de ces méthodes dans un contexte industriel. Les méthodes présentées en partie I sont bien adaptées pour faire des modifications de détail, à partir de la définition d'une pièce initiale, mais elles sont vite limitées lorsqu'il s'agit de trouver de nouveaux concepts, elles sont donc adaptées pour des outils d'aide à la décision. La méthode proposée en partie II a de bonnes propriétés pour l'optimisation de pièces automobiles, nous montrons son potentiel en tant qu'outil de conception. Il faudra par la suite les étendre à de nouvelles physiques, telles que l'endurance, les grands déplacements, ainsi que prendre en compte des non-linéarités matériaux et de la plasticité.

Première partie

Démarches classiques de paramétrage de formes surfaciques et améliorations

Introduction à l'optimisation de formes surfaciques

Sommaire

1.1	Ingénierie système et cycle en V	6
1.1.1	Architecture fonctionnelle	7
1.1.2	Architecture organique	7
1.1.3	Avantages et limites de la méthode	9
1.2	Paramétrages classiques d'optimisation de formes surfaciques	9
1.2.1	Optimisation paramétrique	10
1.2.2	Optimisation topographique	12
1.2.3	Morphing de maillage	12
1.3	Contexte Industriel	13
1.4	Méthodes d'optimisation	17
1.4.1	Méthodes d'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponses	19
1.4.1.1	Plan d'expériences	19
1.4.1.2	Surface de réponse	20
1.4.1.3	Optimisation	22
1.4.1.4	Génération de nouveaux essais	23
1.4.2	Optimisation par méthode du gradient	23
1.5	Synthèse	25
	Bibliographie	26

Dans ce chapitre nous allons décrire les enjeux de l'optimisation de forme pour la conception d'un système complexe. En effet, une automobile doit assurer un certain nombre de fonctions, normatives ou permettant d'assurer un niveau de performance du véhicule. En particulier, la réduction de la consommation est un enjeu d'actualité sur lequel les constructeurs se focalisent. On peut aussi citer le coût, la sécurité des passagers, le confort de vie à bord, le comportement routier, etc. L'ensemble de ces objectifs prestations constitue un cahier des charges. Afin de répondre au mieux à ce cahier des charges, il est nécessaire de définir un processus de conception structuré. L'industrie automobile a ainsi adopté les principes de l'ingénierie système (voir section 1.1). Puis nous allons détailler, dans la section 1.2, les méthodes d'optimisation de formes surfaciques classiquement utilisées. La section 1.3 donnera un aperçu de l'utilisation de ces méthodes dans le contexte RENAULT. Enfin la section 1.4 permettra de donner un aperçu des outils d'optimisation disponibles.

1.1 Ingénierie système et cycle en V

L'ingénierie système est une méthodologie de référence qui permet de concevoir des systèmes mécaniques complexes, sur la base de compromis entre des objectifs contradictoires (dans le cas d'une automobile, les physiques dimensionnantes sont : le crash, la vibro-acoustique, et l'endurance). Le concept de base de cette méthode est de procéder à un découpage hiérarchisé entre sous-ensembles fonctionnels, sous-systèmes, organes et pièces. À chaque niveau de conception, des spécifications techniques sont définies. La phase de descente du cycle en V correspond à la conception du produit, l'intégration et la validation des prestations constituent la phase de remontée du cycle (voir figure 1.1). Dans un premier temps, nous allons présenter ce cycle en V de manière théorique, puis dans la section 1.3, nous montrerons un exemple d'utilisation dans le cadre du dimensionnement d'une automobile.

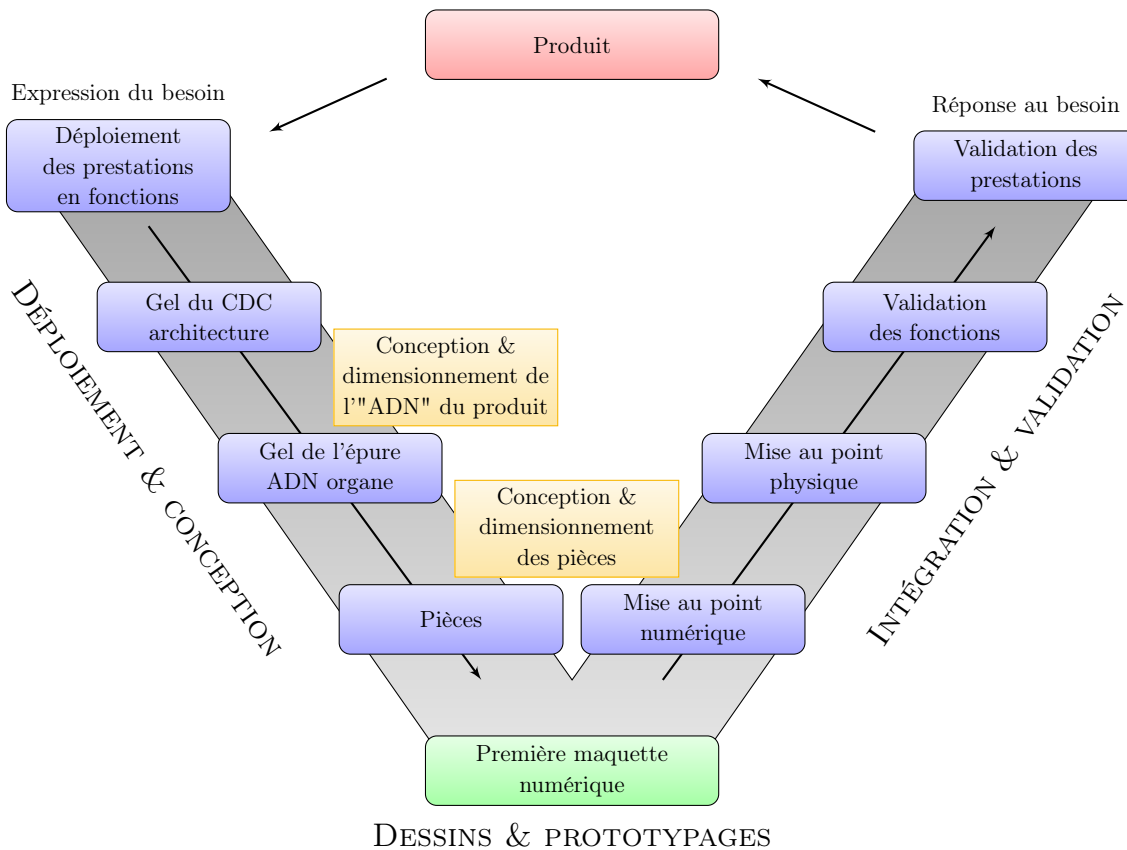


FIGURE 1.1 – Description du cycle de conception en V

Une telle décomposition permet de traiter indépendamment chaque niveau de la phase de descente et ainsi obtenir le plan de détail de chacune des pièces qui composent l'ensemble fonctionnel. À chaque étape de la conception, une telle démarche doit permettre de définir, pour chaque ensemble analysé, un domaine paramétrique qui prenne en compte sous forme synthétique le comportement des autres ensembles, considérés comme extérieurs. Ainsi, à chaque étape, des cahiers des charges adaptés au niveau de conception, et un ensemble de paramètres permet-

tant de répondre à ces cahiers des charges peuvent être définis. Pour mettre en œuvre une telle méthode, il est nécessaire de disposer d’une modélisation adaptée à chaque niveau de détail. Par exemple, dans le cadre de la conception de la caisse en crash, il est nécessaire de dimensionner les éléments structurants, tels que les longerons, afin de donner les bons “gènes” à la structure dès l’amont du cycle en V.

L’ensemble des sollicitations et des dimensions n’étant en général pas connues dès le début de la conception, il peut être suffisant de pré-dimensionner un longeron, par exemple, à partir de la charge critique de flambage¹ (cf. remarque 4.2.2 page 72).

La conception peut se décomposer en deux grandes étapes : *l’architecture fonctionnelle* et *l’architecture organique*. La vision fonctionnelle correspond à la question : *à quoi sert le produit ?*, tandis que la vision organique répond à la question : *Comment réalise-t-on pratiquement ces fonctions ?*

Prenons l’exemple de la fonction *"contrôle de trajectoire"*, la vision organique permet alors de définir les différents éléments permettant d’assurer cette fonction, tels que la crémaillère et sa démultiplication, la présence ou non de systèmes actifs (direction assistée, ESP, contrôle actif, etc.), les raideurs de trains et de caisse, etc.

La figure 1.2 représente les étapes du déploiement d’un cahier des charges et distingue les étapes relatives à l’architecture fonctionnelle de celles relatives au dimensionnement organique.

1.1.1 Architecture fonctionnelle

Ensembles fonctionnels

À partir des cahiers des charges du produit, incluant principalement les spécifications du cycle de vie, les performances et l’endurance, un diagramme fonctionnel est établi dans la première phase de conception. Ce diagramme fait apparaître les ensembles fonctionnels et les grandeurs caractéristiques sur lesquelles s’appuieront les cahiers des charges. Les spécifications sur les grandeurs d’entrée et de sortie du diagramme constituent les spécifications techniques de besoins (STB).

Sous-ensembles fonctionnels

La deuxième phase de définition de l’architecture fonctionnelle consiste à décliner le diagramme fonctionnel en schémas systémiques représentant clairement les divers sous-systèmes fonctionnels permettant d’assurer globalement les STB. Le choix des solutions technologiques fonctionnelles, et des paramètres fonctionnels de nature physique et géométrique, permet de déduire les spécifications techniques générales (STG), qui servent alors de cahiers des charges pour le développement des organes mécaniques destinés à assurer les fonctions du produit.

1.1.2 Architecture organique

Organes

La troisième phase consiste à associer à chaque sous-système fonctionnel un organe mécanique

¹À ce stade de la conception, un modèle global, certes réalisable, peut s’avérer contra-productif en raison des incertitudes de conception qu’il existe.

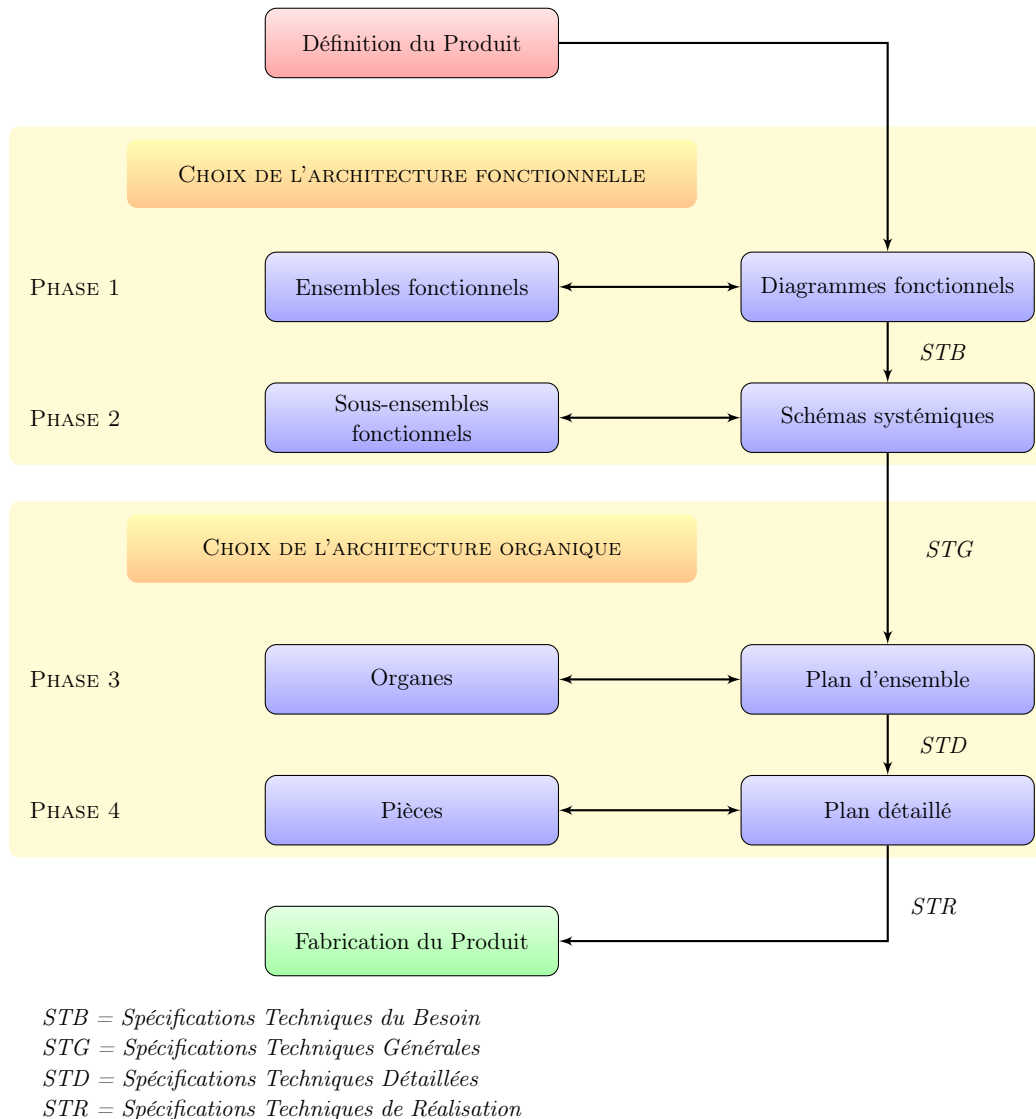


FIGURE 1.2 – Étapes du déploiement du cahier des charges lors de la descente du cycle en V

introduisant des paramètres matériels capables d'assurer les STG. Cette relation entre les sous-ensembles fonctionnels et les organes n'est pas biunivoque : un seul organe peut assurer plusieurs fonctions et une fonction peut être obtenue à l'aide de plusieurs organes.

La définition des liaisons géométriques entre les organes ainsi que la description des flux des grandeurs physiques constituent ce que l'on appelle les règles connectiques du produit. À ce stade de conception du produit, la géométrie des organes apparaît sous forme simplifiée ; et des calculs d'ensemble peuvent être effectués pour évaluer les sollicitations sur chaque sous-système. Les niveaux obtenus, et les contraintes sur les paramètres géométriques et physiques, constituent les spécifications techniques détaillées (STD) qui serviront à définir chaque organe.

Pièces

La quatrième phase de l'architecture organique consiste à dimensionner précisément chaque organe mécanique, en le scindant, la plupart du temps, en composants élémentaires appelés pièces. L'analyse des solutions obtenues aboutit aux spécifications techniques de réalisation (STR).

1.1.3 Avantages et limites de la méthode

Les avantages de l'ingénierie système justifient le développement quasi-universel de cette méthode dans les grandes organisations (industrielles ou organisationnelles). Elle est basée sur la décomposition du produit en différentes parties, développées de façon indépendantes. Cette organisation du travail permet de distribuer le dimensionnement des différents sous-systèmes à différentes équipes qui peuvent travailler en parallèle. Le délai total de conception s'en trouve ainsi raccourci.

L'utilisation de modèles adaptés à chaque étape de la conception permet de réaliser au mieux les compromis entre les différentes prestations sans avoir à gérer les incertitudes sur le produit, nombreuses au début du cycle de conception.

Dans les phases d'avant-projet, les modèles globaux utilisés sont associés à une vision géométrique simplifiée, nécessaire pour représenter convenablement les phénomènes physiques jugées prépondérants. Ces modèles (simplifiés, fonctionnels ou de retour d'expérience), qui ne déterminent que des réponses moyennes d'objets incertains, donnent les bonnes tendances malgré les incertitudes inhérentes aux phases préliminaires du projet.

Enfin, cette organisation de la conception évite un re-développement total du produit lorsqu'on ne trouve pas de solution à un niveau de conception : il suffit de remonter au niveau de conception supérieur et de rechercher une autre solution. On redescendra alors au niveau inférieur avec une nouvelle spécification, sans perdre pour autant les informations acquises sur les niveaux de conception supérieurs. Ces bouclages favorisent l'introduction d'innovations : si une technologie donnée est mise en échec pour atteindre les spécifications des cahiers des charges, il faut en envisager une autre.

L'aspect itératif de la recherche de solutions peut cependant poser des problèmes de convergence vers une solution satisfaisant les cahiers des charges, à cause des couplages entre disciplines. En effet, les bouclages de conception peuvent être coûteux en temps et en argent. C'est pourquoi le découpage du produit en sous systèmes indépendants a été largement étudié, comme le montre la partie suivante qui traite des stratégies d'optimisation multi-disciplinaires.

1.2 Paramétrages classiques d'optimisation de formes surfaciques

Il s'agit ici de faire un état de l'art des méthodes de paramétrage utilisées dans l'industrie pour faire de l'optimisation de formes surfaciques. Les méthodes les plus couramment utilisées dans les phases des projets véhicules sont :

- l'optimisation paramétrique, basée sur un paramétrage des numérisations CAO (Conception Assistée par Ordinateur),

- l'optimisation topographique, qui propose de modifier la position de chaque nœud d'un maillage éléments finis,
- le morphing de maillage, basé aussi sur la déformation de maillage mais qui regroupe un ensemble de nœuds dans une "boite de morphing", chacune des boites est un paramètre ; la position des nœuds est alors modifiée de manière globale.

Nous allons détailler ces méthodes dans la suite de cette section. Elles sont basées sur une définition technique de la pièce et sont donc adaptées à des modifications de détails dans le bas du cycle en V. Ceci impose un espace de conception très contraint dans lequel il est difficile d'apporter des solutions innovantes, [Roy 2008] propose une comparaison de ces méthodes de paramétrage, récapitulée dans le tableau 1.1. Elles sont disponibles dans des codes de calculs commerciaux (ALTAIR Optistruct, NASTRAN, ANSA, etc.). Nous allons détailler ces trois types de paramétrages

TABLE 1.1 – Comparaison entre différents types de paramétrages

type	Paramètres	Maîtrise du nombre de paramètres	Exploration de l'espace de conception	Changements de topologie	Capacité à respecter des procédés de fabrication
CAO	cotes de dessin	+	+	+	+++
Topographie	nœuds	–	+++	++	+
Morphing	ensembles de nœuds	–	++	+	++

dans la suite de cette section. Le tableau 1.1 récapitule les principales propriétés de ces trois méthodes, on remarque que les méthodes à disposition nous obligent à faire des compromis, par exemple, respecter un procédé de fabrication se fera au détriment de l'exploration de l'espace de conception, lorsque l'on souhaite utiliser un paramétrage CAO. Ces lacunes nous amènent à chercher de nouveaux paramétrages pour les formes surfaciques. Dans le chapitre 2, nous présentons deux méthodes basées sur le mélange de formes qui permet d'avoir un paramétrage simple à mettre en œuvre, qui explore un espace de conception important, et qui permet de respecter un procédé de fabrication.

Partie II, nous présentons une méthode innovante de paramétrage qui permet de résoudre simultanément le problème de forme et le problème mécanique, et ainsi apporte de bonnes propriétés pour l'optimisation de forme.

1.2.1 Optimisation paramétrique

Le paramétrage pour ce type d'optimisation est situé au niveau de la conception 3D. Il faut alors définir des paramètres dans le logiciel CAO (ex. CATIA). Ces paramètres sont ensuite modifiés pour générer une nouvelle géométrie. La boucle d'optimisation utilisée consiste donc à créer une géométrie paramétrée qui doit être définie pour explorer au mieux l'espace disponible. Il faut donc faire un compromis entre une géométrie simplifiée qui sera robuste vis-à-vis des modifications de paramètres, et une géométrie de détail qui sera moins adaptée à l'optimisation mais qui

sera plus précise. Puis il faut explorer l'espace de conception à l'aide d'un plan d'expériences (voir figure 1.3). Pour une utilisation industrielle, il faut mettre en place une batterie de scripts permettant d'automatiser les étapes entre la définition des paramètres, jusqu'à la mise en donnée du problème mécanique. Enfin, on construit une surface de réponse permettant de trouver de nouvelles géométries candidates². Dans [Hardee 1999], on peut voir que l'auteur envisage la déformation de la forme, non-plus par les paramètres ayant servi à construire la CAO, mais directement à l'aide des patchs splines qui définissent la géométrie, nous reprendrons le paramétrage par les fonctions splines dans le chapitre 5.

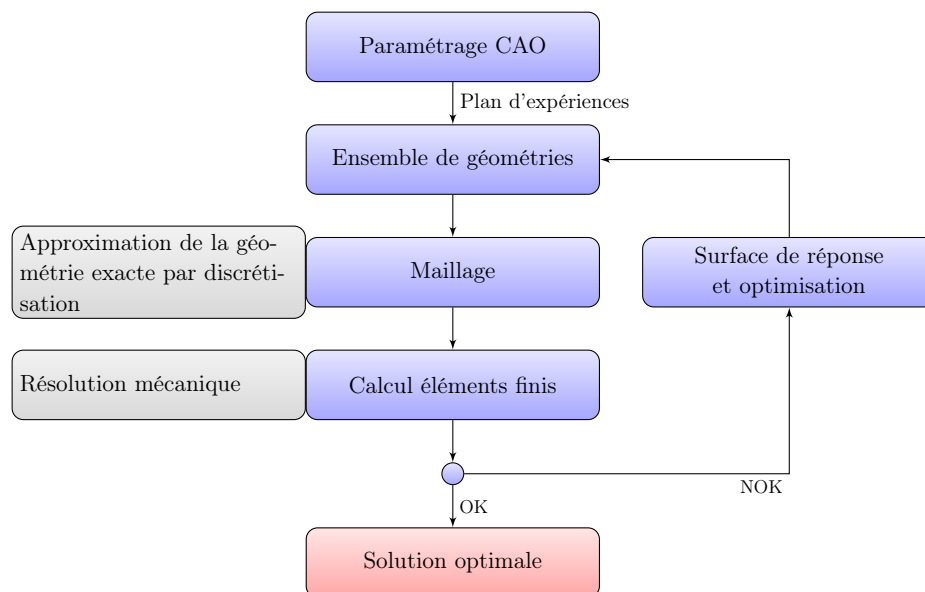


FIGURE 1.3 – Un exemple de boucle d'optimisation paramétrique

Le principal avantage de cette méthode, basée sur un paramétrage CAO, réside dans le fait qu'elle n'est pas intrusive par rapport aux codes de calculs. L'ingénieur peut alors définir une boucle d'optimisation à l'aide des codes de calculs avec lesquels il est habitué à travailler (voir [Brujic 2010]). De plus le nombre de paramètres utilisés pour contrôler la forme reste en général maîtrisé, car le concepteur introduit la complexité qu'il veut à la construction de la géométrie. En général, la réalisation du modèle CAO restreint l'espace de conception accessible autour de la géométrie initiale. Cette méthode a cependant deux limitations importantes : la première est la faible exploration de l'espace de conception, avec notamment des problèmes de reconstruction des nouvelles géométries [Roy 2008, Saitou 2005]. Ceci est en partie dû au fait qu'elle n'est applicable qu'à partir d'une définition de détail de la pièce ou du système. La deuxième est le coût élevé de création d'une CAO paramétrée et des scripts d'automatisation nécessaire à l'élaboration d'une boucle de calcul. En effet sa création est d'autant plus fastidieuse si elle est destinée à faire de l'optimisation de forme, car il faut s'assurer que les géométries se reconstruisent tout en explorant le maximum de l'espace de conception possible, ce qui implique un très grand nombre de cas à prévoir dès cette étape de création.

²La méthode proposée en partie II permet de simplifier ce workflow, en regroupant des étapes et en permettant de conserver le lien entre la CAO et le calcul.

1.2.2 Optimisation topographique

Le paramétrage topographique³ est très simple à mettre en place puisqu'il s'agit d'utiliser les positions de chaque nœud d'un maillage comme paramètres de conception [Voth 1999, Yang 2007]. À la différence de la méthode précédente, cette méthode basée sur une optimisation par calcul de gradient est intrusive vis-à-vis du code de calcul, mais il est en général disponible dans les codes de calculs commerciaux tels que ALTAIR Optistruct ou NASTRAN.

Le principal avantage de cette méthode est d'utiliser un paramétrage simple qui permette d'explorer un grand domaine de conception, si on s'affranchit des problèmes de qualité du maillage déformé, qui apparaissent rapidement. Un autre point bloquant à l'utilisation de cette méthode est l'étape de "retour CAO" à l'issue de l'optimisation. En effet, la solution obtenue n'est pas industrialisable : il faut alors s'inspirer de cette solution pour reconstruire une surface "au plus proche" mais respectant les standards de dessin. Il existe plusieurs interprétations possibles de

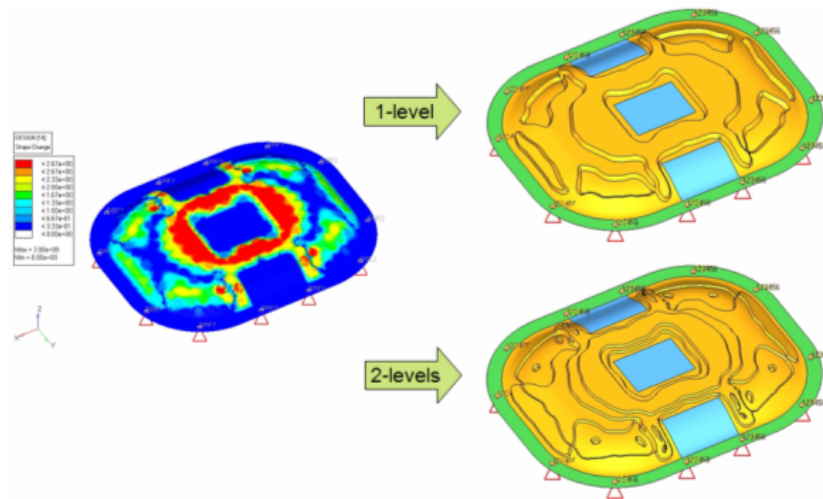


FIGURE 1.4 – Solution d'optimisation topographique et reconstruction CAO [Altair 2011]

ce résultat, on voit sur la figure 1.4 qu'il faut filtrer la solution, et selon sa valeur, la solution est différente. *Se pose alors la question de savoir quelle est "la bonne valeur du filtre"*. De plus la reconstruction implique que l'on s'éloigne de l'optimum, et donc réduit les performances de la pièce.

1.2.3 Morphing de maillage

Cette méthode consiste à déformer le maillage de manière globale [Yang 1992]. L'utilisateur définit des "boîtes" de morphing. En contrôlant le déplacement des nœuds de cette boîte (figure 1.5a), les nœuds du maillage qui y sont contenus sont à leur tour déplacés (figure 1.5b). On remarque qu'en définissant une boîte de morphing par nœud du maillage, on se ramène à un problème d'optimisation topographique. L'intérêt de cette méthode est de limiter le nombre de paramètres, ainsi que structurer la déformation du maillage. La difficulté de ce paramétrage

³En anglais : Topography optimization, peut aussi être appelé dans certains cas Free form optimization

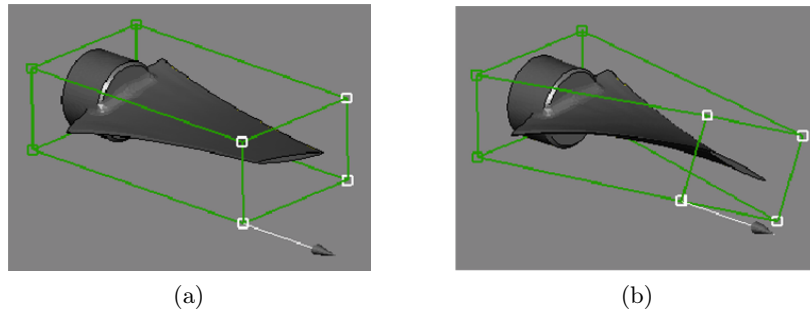


FIGURE 1.5 – Exemple de boîte de morphing et de déformation dans ANSA [ANSA 2011, p. 1662]

est de trouver le bon compromis entre le nombre de boîtes définies et la finesse de modification de formes souhaitée. De plus, cette méthode étant elle aussi basée sur la déformation de maillage, nous allons rencontrer les mêmes soucis de qualité de maillage que la méthode précédente. [Zhou 2004] propose une approche intéressante mettant en œuvre les trois méthodes détaillées ci-dessus dans un processus intégré d'optimisation.

1.3 Contexte Industriel

On classe les éléments constitutifs d'une automobile en deux principaux types : les parties dites massives (culasse, bielle moteur, biellettes de direction, etc.), et les parties surfaciques qui représentent 80% de l'ensemble des constituants d'un véhicule [Batoz 1992, p. 5] (voir figure 1.6). Les



FIGURE 1.6 – Vue éclatée d'une Mégane montrant les éléments surfaciques et massifs

physiques dimensionnantes d'un véhicule sont les suivantes :

- la vibro-acoustique : modes et fréquences propres, fonctions de transferts et réponse forcée sur sollicitations imposées,
- la fiabilité : calculs de contraintes sur profils de mission route et cumul de dommage,

- les grandes déformations : simulations dynamique et quasi-statique (c'est à dire : avec prise en compte de lois de comportement elasto-plastiques).

Les pièces structurantes de la carrosserie sont en général conçues en tôles d'acier ou d'aluminium, les habillages sont en composites ou en plastiques (bouclier, ailes etc.), ces matériaux mettent alors en jeu différents procédés de fabrication, tels que l'emboutissage, l'injection plastique, etc. qui sont autant de contraintes à respecter lors de la conception d'une pièce. L'ensemble de ces contraintes seront à prendre en compte pour l'optimisation de forme.

Les cahiers des charges des ses éléments de structure sont directement obtenus à partir de la déclinaison du cycle en V. Nous montrons, figure 1.7, les différentes étapes de la conception d'une doublure de capot.

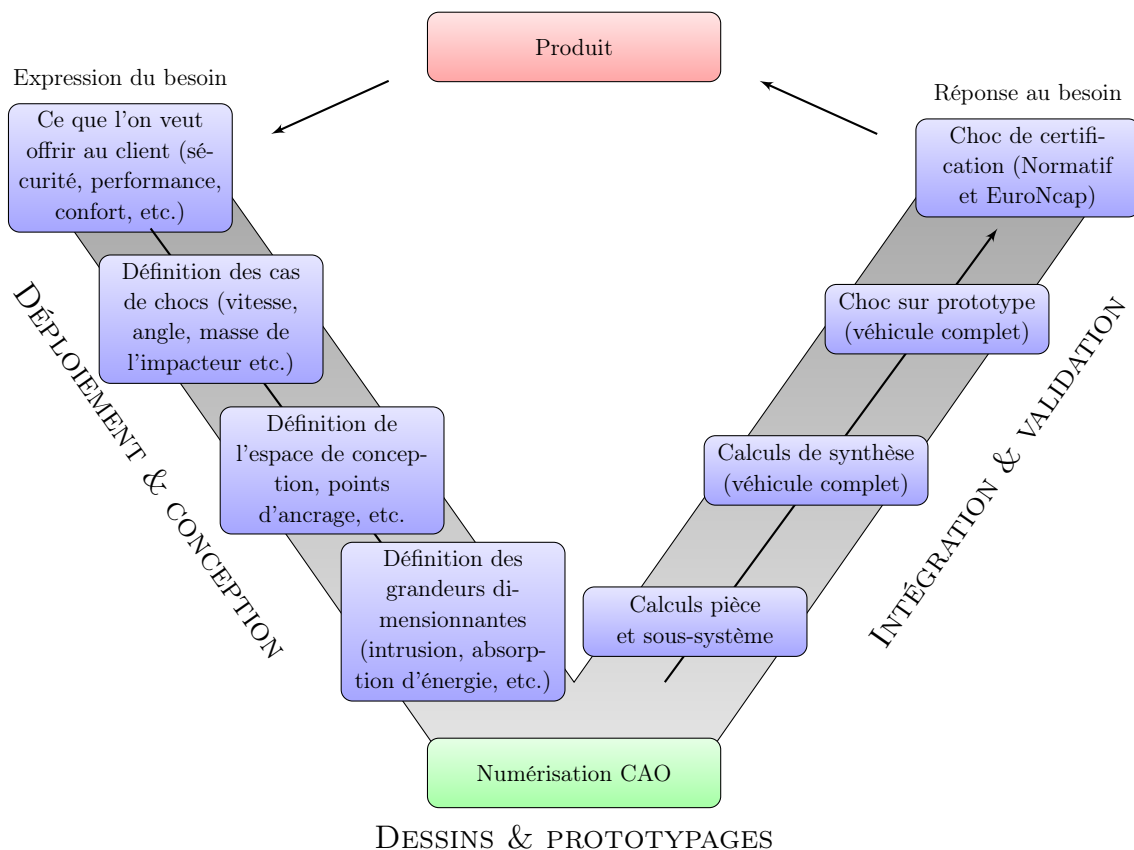


FIGURE 1.7 – Description du cycle de conception d'une doublure de capot pour la prestation "sécurité"

La première étape du cycle consiste à définir le besoin, c'est à dire ce que l'on souhaite pour le client. Dans le cas qui nous intéresse, on se focalise sur la sécurité des piétons, ceci nous permet de définir l'étape suivante : les conditions de chocs que l'on souhaite prendre en compte, celles-ci sont en général dictées par des normes et autres aspects législatifs. On peut alors déterminer l'espace de conception à disposition pour le dessin du système (la figure 1.8 montre les contraintes qui définissent l'espace de conception d'une doublure de capot : l'espace réservé au Groupe Moto Propulseur, la vision basse pour le conducteur, la longueur du véhicule, etc.),

son environnement (points de fixations, etc.) et choisir s'il s'agira d'un système actif ou passif. On se focalise maintenant sur chacune des pièces du système, notamment la doublure, on définit les valeurs cible des critères physiques dimensionnants, tel que le HIC (Head Injury Criterion), critère biomécanique traduisant les lésions de la tête, dont nous reparlerons à la section 2.2.2.

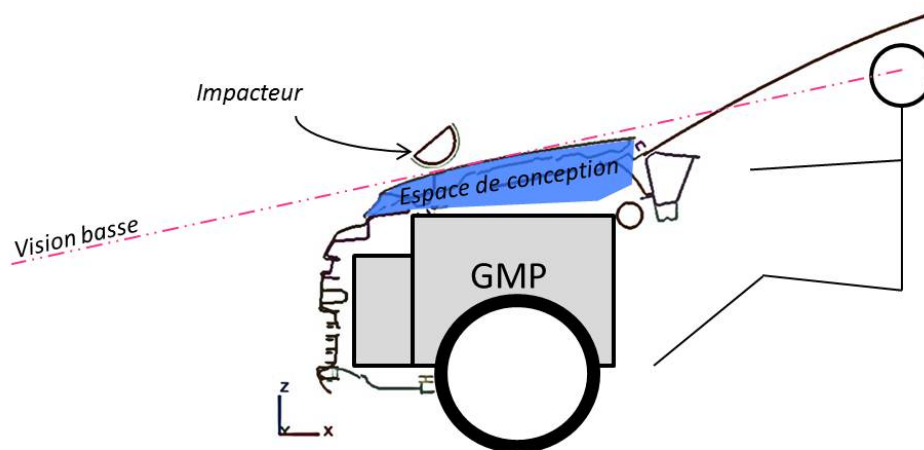


FIGURE 1.8 – Exemple de contraintes pour la définition de l'espace de conception d'une doublure de capot

La numérisation CAO peut alors être réalisée, ce qui nous permet d'effectuer les calculs de validation au niveau pièce, sous-système et véhicule complet. Enfin on peut envisager de faire des essais physiques sur prototype puis les essais normatifs. Dans le contexte actuel de réduction des coûts et des délais de conception, la conception numérique est poussée au maximum afin de minimiser les essais physiques. Les essais physiques se résument à quelques tirs sur prototypes et aux tirs normatifs que l'on ne peut pas éviter, en particulier pour les essais crash qui sont destructifs.

L'optimisation de forme est utilisée aujourd'hui comme outils d'aide à la conception dans les phases aval des projets, où il s'agit de faire des modifications de détail des différents éléments de carrosserie (par exemples la doublure du capot, la traverse poste de conduite, les épaisseurs du plancher et du pavillon, etc.), les paramètres mis en jeu sont en général :

- des épaisseurs de tôles,
- des nuances matériaux,
- des rayons de raccordements,
- l'ajout ou la suppression de renforts.

Dans ce contexte, une boucle classique d'optimisation de forme est constituée d'un modeler CAO, d'un mailleur éléments finis, d'un solveur et d'un optimiseur (figure 1.9). Une autre difficulté est donc d'arriver à faire communiquer ces outils, par nature hétérogènes : ce qui pose la

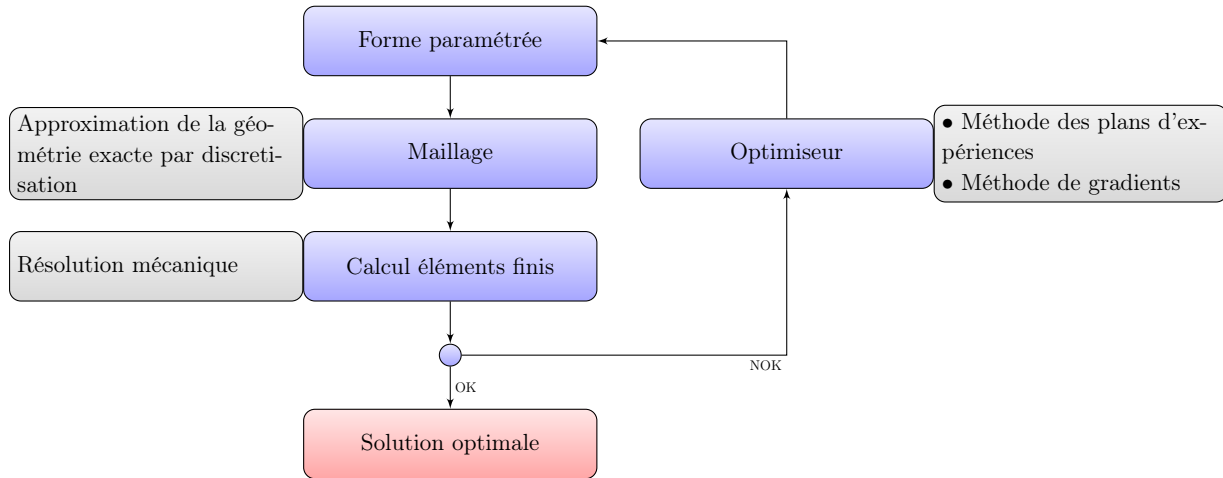


FIGURE 1.9 – Exemple de boucle classique d'optimisation de forme

question de l'automatisation des boucles de simulation, et de leur post-traitement via des scripts ou autres interfaces.

Nous avons vu que les méthodes disponibles, décrites en section 1.2, permettent essentiellement de travailler sur des modifications de détail dans le bas du cycle en V, afin de remplir ses objectifs de performances, à savoir une réduction de 30% de la masse des véhicule, et une augmentation des niveaux de prestations tout en maîtrisant le coût et les délais de conception, Renault se pose aujourd'hui la question d'utiliser des méthodes d'optimisation appliquées aux phases amont de la conception. Il s'agit alors de dessiner :

- des raidisseurs (sur une doublure de capot par exemple, voir figure 1.10),
- des formes de corps creux,
- des galbes (par exemple pour limiter les vibration d'un plancher).

L'état de l'art actuel montre que dans ce contexte, les méthodes d'optimisation mises en œuvre classiquement conduisent à des problèmes de très grandes dimensions, qu'il est difficile d'appréhender par les méthodes de paramétrage vues précédemment [Saitou 2005, Roy 2008].



(a)



(b)



(c)

FIGURE 1.10 – Exemples de doublures de capots

En ajoutant à ce constat les limites des méthodes de paramétrage pour des pièces surfaciques détaillées précédemment, l'objectif de ce travail de Thèse est de proposer des outils dédiés à l'optimisation d'éléments surfaciques dans les phases amont des projets véhicules, afin d'exploiter au mieux les latitudes de dessin, et de donner les bons "gènes", dès le début de la conception. L'enjeu de cette étude est de définir une méthodologie de paramétrage de formes surfaciques pour l'optimisation, permettant d'explorer au mieux l'espace de conception, et qui soit simple à mettre en œuvre.

Nous allons dans un premier temps (chapitres 2 et 3) exploiter les outils utilisés chez Renault, afin d'étendre les approches classiques aux phases amont de la conception, car actuellement :

- ces approches sont très dépendantes de la définition initiale de la pièce, et conduisent à un optimum très local,
- d'autre part, leur coût de mise en œuvre est relativement élevé, car il nécessite un dessin de détail et une automatisation de construction.

Pour contourner ces problèmes, nous proposons d'utiliser plusieurs formes simples, que l'on va disposer sur une pièce vierge. Leur combinaison permettant de générer de nouvelles topologies, on transfère ainsi les difficultés du paramétrage vers l'optimiseur qui doit traiter un très grand nombre de combinaisons de formes élémentaires. Afin de ré-équilibrer le processus, on envisage d'ajouter une contrainte supplémentaire sur le paramétrage (cf. section 2.2) et ainsi simplifier le processus d'optimisation.

Enfin, en partie II nous proposons de revenir aux fondamentaux de la mécanique, en utilisant les équations de coques, où la forme est caractérisée de manière intrinsèque. Il s'agit alors de voir s'il est possible d'utiliser cette description pour faire de l'optimisation de formes industrielles. On montre dans ce travail :

- que les méthodes d'optimisation ne peuvent être découplées des méthodes de paramétrage,
- que l'amélioration des méthodes de paramétrage classiques conduit à deux types de problèmes : soit il est nécessaire de mettre en place des méthodes d'optimisation très sophistiquées afin de traiter des problèmes de topologie et de diversité des solutions, soit le problème d'optimisation est très fortement dé-régularisé par le paramétrage.

1.4 Méthodes d'optimisation

Cette section est destinée à présenter les méthodologies d'optimisation qui seront utilisées dans la suite de cette Thèse. À cet égard, il paraît important de repartir de la formalisation classique (1.1) d'un problème d'optimisation : trouver un jeu de paramètres ϕ_{opt} appartenant à un ensemble admissible $\mathcal{G}_{ad}$ qui minimise un critère $J(\phi)$.

$$\phi_{opt} = \underset{\phi \in \mathcal{G}_{ad}}{\text{Arg min}} J(\phi) \quad (1.1)$$

Du point de vue du concepteur :

- $\mathcal{G}_{ad}$ est l'espace de conception, c'est à dire l'espace disponible d'un point de vue architecture. Par exemple l'espace alloué pour la conception d'une doublure de capot, d'un longeron ou d'un écran thermique. D'un point de vue formel $\mathcal{G}_{ad}$ est l'espace de fonctions dans lequel les paramètres ϕ peuvent prendre leurs valeurs,
- $J(\phi)$ est une fonction indirectement liée à la forme, en général issue de la résolution d'un problème mécanique, par exemple : compliance, fréquences propres d'un élément de structure, charge critique de flambage d'un longeron,
- compte tenu du nombre de compromis à réaliser lors de la conception d'un véhicule (par exemple : lorsque l'on cherche à minimiser les vibrations d'un composant, une méthode naturelle est d'augmenter sa masse, cependant la consommation du véhicule impose de contrôler cette augmentation de masse), la méthode optimisation est en réalité multicritères ; elle est décrite page 22.

Pour mettre en œuvre ce processus, le concepteur doit alors choisir un paramétrage lui permettant d'explorer au mieux l'espace $\mathcal{G}_{ad}$, et une méthode d'optimisation pour le parcourir. Le problème est alors l'accès aux critères J qui sont en général des résultats de simulations plus ou moins "boîte noire", selon le code de calculs utilisé ; ceci conduit à l'utilisation de méthodes d'optimisation très différentes, et donc à l'utilisation de paramétrages différents.

Nous allons introduire les deux méthodes principales d'optimisation :

- l'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponses,
- l'optimisation par descente de gradient.

L'optimisation par plans d'expériences et surfaces de réponses est efficace lorsque l'accès aux critères est difficile (codes de calculs en "boîte noire") et pour un nombre limité de paramètres. La méthode du gradient permet de traiter des problèmes de plus grande taille mais qui nécessite à la fois l'accès au code de calcul et aux équations qu'il faut dériver⁴. L'enjeu est alors de :

- définir un paramétrage qui maximise l'exploration de l'espace de conception,
- définir les critères et les contraintes,
- choisir une méthode d'optimisation adaptée au couple paramètres/critères définit.

Le choix du paramétrage est une étape cruciale pour trouver une solution optimale, par exemple, un cylindre de révolution est classiquement paramétré par sa hauteur et son rayon par les concepteurs. Ce paramétrage est naturel mais ne permet pas de changer la topologie du cylindre, si on choisi de paramétrer la base du cylindre par une ellipse dont les deux axes sont égaux, on a non seulement accès aux cylindres de révolution mais aussi à des cylindre à base elliptique.

⁴Nous verrons dans la suite de cette Thèse que des problèmes d'optimisation d'apparence très simples peuvent ne pas être dérivables au sens classique

1.4.1 Méthodes d'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponses

La méthode d'optimisation par plans d'expériences consiste à structurer l'exploration d'un espace de conception afin de construire une approximation du critère sous la forme d'une surface de réponse⁵. Cette discrétisation permet d'interpoler les valeurs du critère entre les points ϕ_i du plan d'expériences pour construire une représentation continue de J . L'optimisation pourra alors se faire sur la surface de réponse. On comprend alors l'importance de choisir des fonctions adaptées au phénomène étudié afin d'estimer au mieux les points interpolés et d'être le plus précis possible dans la phase d'optimisation.

Cette méthode d'optimisation se décompose donc en quatre étapes (figure 1.11) :

- réalisation d'un plan d'expériences (choix des points ϕ_i),
- construction d'une surface de réponse (interpolation entre les $J(\phi_i)$ pour définir J),
- détection de l'optimum sur cette surface de réponse,
- enrichissement du plan d'expériences pour améliorer l'estimation de J .

Les avantages de cette méthode sont multiples : tout d'abord, elle n'est pas intrusive vis à vis des outils utilisés par le concepteur, de plus, elle permet d'estimer des fonctions en "boîte noire" sur lesquelles il serait impossible d'envisager une dérivation par rapport aux paramètres (exemple : calcul de crash). En contre-partie, l'interpolation doit être cohérente avec la physique mise en jeu. La convergence de ce type de méthodes peut être longue, cependant l'expérience montre que dans les cas usuels, en un nombre raisonnable d'itérations permet de faire diminuer le critère de façon significative.

1.4.1.1 Plan d'expériences

Le plan d'expériences permet de planifier de manière rationnelle un ensemble d'expériences, afin d'en obtenir le maximum d'information à moindre coût. On présente dans cette section différents types de plans d'expériences à disposition. Cette liste n'est pas exhaustive, mais présente les plans d'expériences les plus couramment rencontrés. Pour plus de détails concernant les plans d'expériences se référer à [Tourbier 2009, Goupy 2009].

Les plans d'expériences communément utilisés sont :

- les plans orthogonaux,
- les plans centraux composites et Box-Behnken,
- les plans latin hypercube,
- les plans optimaux,
- les plans sursaturés.

Nous allons voir dans les chapitres 2 et 3, qu'étant donné le nombre important de paramètres il est nécessaire d'utiliser un plan d'expériences de type optimal. Ce type de plan est construit à l'aide d'un algorithme d'optimisation maximisant la distance entre les points, ce qui assure une bonne exploration de l'espace de conception.

⁵La surface de réponse est aussi appelée méta-modèle

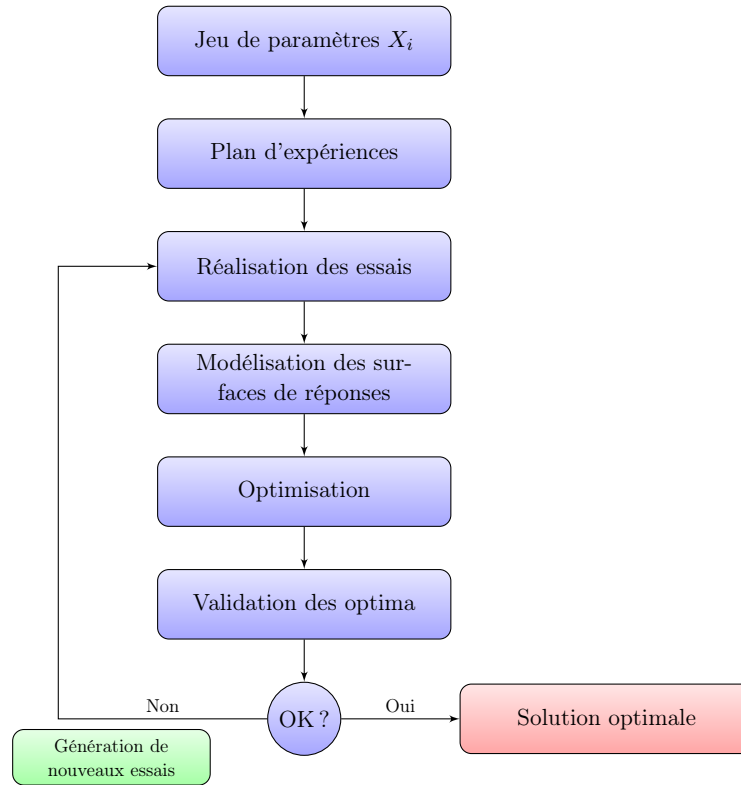


FIGURE 1.11 – Exemple de schéma représentant une méthode d'optimisation par plan d'expériences

1.4.1.2 Surface de réponse

Il existe différentes stratégies de construction d'une surface de réponse. Les outils ALTERNOVA développés en partenariat entre RENAULT et EURODECISION permettent d'exploiter au mieux différents modèles statistiques (méta-modèles) grâce au *mélange d'experts* initialement développé par [Jacobs 1991]. Nous allons détailler les modèles polynomiaux, MARS et polyMARS ainsi que le krigeage qui nous serviront dans les chapitres 2 et 3. Enfin, le mélange d'experts de modèles statistiques, utilisé lui aussi dans ces deux chapitres, nous permet de synthétiser l'information issue de différents méta-modèles et de l'utiliser comme modèle.

Modèles polynomiaux

Les modèles de type polynomiaux sont une classe de modèles très largement utilisée. On définit X les valeurs des paramètres d'entrée obtenu à partir du plan d'expériences. On calcule ensuite Y , les réponses du système pour les configurations X . On cherche alors la matrice a des coefficients du polynôme (1.2), minimisant l'erreur de modélisation e commise.

$$Y = X \cdot a + e \quad (1.2)$$

Augmenter le degré de ce polynôme permet de capter des interactions entre certains facteurs et de modéliser des phénomènes physiques complexes.

MARS - polyMARS

Les modèles de type MARS (Multivariate Adaptive Regression Spline) [Friedman 1991] et polyMARS (Polychotomous regression based on MARS) utilisent des polynômes par morceaux [Kooperberg 1997]. Le modèle s'écrit :

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^J \beta_j h_j(X) \quad (1.3)$$

Ce type de modèle permet essentiellement de faire apparaître une cassure dans la modélisation d'un paramètre, ainsi, à partir de modèles linéaires on peut modéliser des fonctions ayant un comportement non-linéaire (voir figure 1.12).

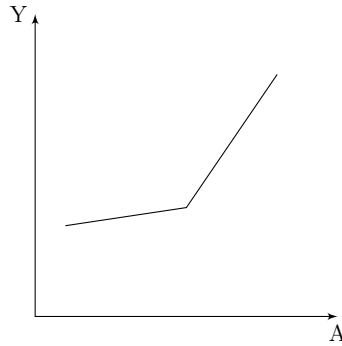


FIGURE 1.12 – Exemple de cassure obtenue à l'aide de splines linéaires

Krigeage

Le modèle de Krigeage est un modèle non-paramétrique, qui permet d'estimer la valeur moyenne de la fonction, ainsi que l'erreur commise en chaque point. La fonction ainsi définie est interpolante vis à vis des points de mesure. Ce type de modèles sont issus de la géostatistique et formalisés par G. Matheron au Centre de Géostatistiques de l'École des Mines de Paris [Matheron 1963]. Dans [Ginsbourger 2009], les auteurs proposent des développements récents du krigeage ainsi que des conseils dans le choix du modèle à utiliser.

Un modèle de krigeage s'écrit sous la forme suivante :

$$Y(X) = f(X)\beta + Z(X) \quad (1.4)$$

où $f(X)\beta$ représente la tendance de la réponse en moyenne. On a d'ailleurs l'espérance de Y telle que $E(Y) = f(X)\beta$.

Le terme $Z(X)$ est un processus gaussien qui représente l'erreur de modèle à l'endroit évalué.

On a :

$$\begin{cases} \forall X \in \mathbb{R}^p, E(Z(X)) = 0 \\ \forall X \in \mathbb{R}^p, \forall h \in \mathbb{R}^p, Cov(Z(X), Z(X+h)) = \sigma^2 R_\theta(h) \end{cases} \quad (1.5)$$

avec σ un réel positif, qui caractérise l'amplitude de l'erreur du modèle pour tout point n'appartenant pas aux points de mesure, c'est-à-dire les points du plan d'expériences, et $R_\theta(h)$ une

fonction de corrélation qui caractérise la régularité de cette erreur.

Ainsi, un krigeage donnera une estimation de la forme moyenne de la surface de réponse, et de l'erreur associée au modèle en chaque point, erreur nulle aux point de mesure. Ce principe est illustré dans la figure 1.13.

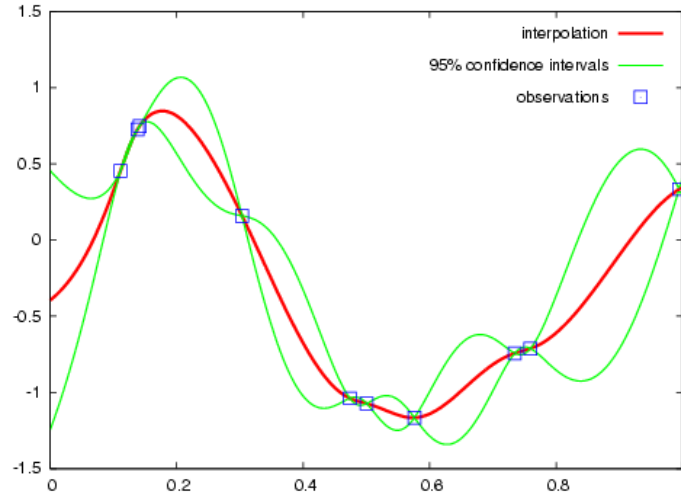


FIGURE 1.13 – Exemple de modèle de krigeage

Mélange d'experts

Ce dernier type de modèle statistique n'en est pas un en soi : le principe du mélange d'experts est de mélanger différents modèles statistiques, en les pondérant en fonction du degré de confiance dans chaque modèle [Jacobs 1991, Torres 2003].

Ce type de modèle est utile pour s'affranchir du choix des modèles à utiliser, en construisant différents modèles, et en utilisant le mélange d'experts. Nous utilisons alors le modèle ayant le meilleur indice de confiance.

1.4.1.3 Optimisation

On cherche la configuration X du système qui minimise une (ou plusieurs) fonction(s) coût, en respectant un certain nombre de contraintes. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } f^k(X) \\ & \text{avec } h_i(X) = 0, \quad 0 \leq i \leq p \\ & \quad \quad g_j(X) \leq 0, \quad 0 \leq j \leq q \end{aligned} \tag{1.6}$$

avec $k \in \{1, \dots, n\}$ le nombre d'objectifs à optimiser, $h_i(X)$ les contraintes d'égalité et $g_j(X)$ les contraintes d'inégalité à respecter.

Problèmes mono et multi-objectifs

Dans le cas d'un problème mono-objectif, on recherche le minimum de la fonction $f(X)$, qui est un scalaire. Ce cas ne pose pas de problème particulier à représenter, comme illustré dans la figure

1.14. On constate en revanche dans la figure 1.14 que la fonction coût présente un minimum local et un minimum global. Ce point pourra poser des problèmes aux algorithmes d'optimisation lors de la recherche d'un minimum global : comment s'assurer que le minimum obtenu n'est pas un minimum local ? D'autre part, de nombreux problèmes dans l'industrie sont multi-objectifs : on

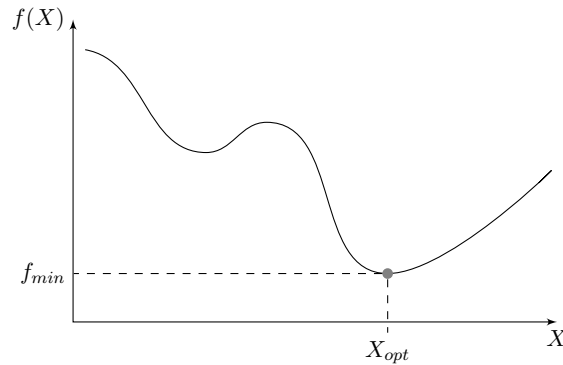


FIGURE 1.14 – Optimum d'une fonction coût pour un problème mono-objectif

doit minimiser simultanément plusieurs fonctions coût, souvent antagonistes. On introduit alors la notion de dominance pour déterminer si une solution est optimale ou non. Soit X_1 et X_2 deux configurations distinctes du système, on a alors :

$$\begin{aligned} X_1 \text{ domine } X_2 \text{ si, pour tout objectif } k, \text{ on a } f^k(X_1) \leq f^k(X_2) \\ \text{avec au moins une inégalité stricte sur une des fonctions coût} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Cette notion de dominance permet de construire un front (ou frontière) de Pareto, qui rassemble les configurations optimales. Un front de Pareto pour un problème à deux objectifs est illustré dans la figure 1.15. Le concept s'applique dans des dimensions plus élevées, mais la dimension 2 est celle qui se prête le mieux à une représentation graphique du principe.

Le front de Pareto est un outil d'aide à la décision puissant, qui permet au concepteur de choisir un compromis parmi les solutions au problème d'optimisation. On présente dans la suite quelques algorithmes permettant de résoudre le problème d'optimisation défini dans l'équation (1.6).

1.4.1.4 Génération de nouveaux essais

À la suite du plan d'expériences une première surface de réponse est construite. En utilisant un sous-ensemble des essais du plan d'expériences pour la construction, il est possible d'estimer l'erreur commise à partir du complémentaire des essais. L'erreur de modélisation est en général importante, il est alors intéressant d'enrichir la base d'essais au cours des itérations. On cherche donc à maximiser l'exploration de l'espace de conception.

1.4.2 Optimisation par méthode du gradient

La méthode d'optimisation par calcul de gradient est une méthode classique pour rechercher les optimums d'une fonctionnelle. À la différence de la méthode d'optimisation par surfaces de

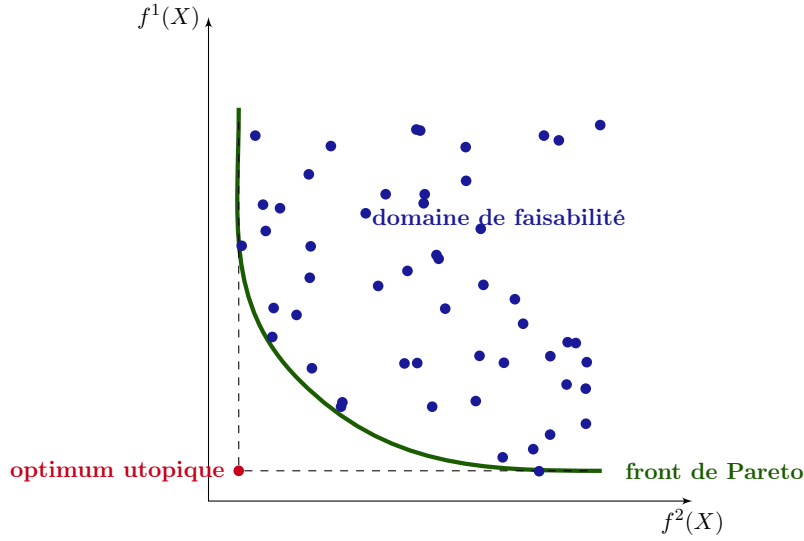


FIGURE 1.15 – Illustration du concept de front de Pareto

réponses, la méthode du gradient permet de traiter un grand nombre de paramètres. Cependant elle nécessite une bonne connaissance de la fonctionnelle. En effet, il faut être capable de le calculer, ce qui implique que la fonction soit suffisamment régulière, et d'être intrusif dans le code de calcul. Le gradient ainsi calculé donne une direction de descente permettant de diminuer la fonction de coût vers l'optimum. Si la fonction n'est pas convexe, elle permet seulement d'obtenir des optima locaux qui dépendent du point de départ de l'optimisation. On note que cette méthode est aussi utilisée pour la recherche des minima d'une surface de réponse.

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{\alpha} J(\alpha) \\ g_i(\alpha) \leq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sont les paramètres de la fonction de coût J que l'on suppose $\mathcal{C}^1$, et g_i sont les contraintes, on définit alors le gradient de J grâce à l'expression (1.9), la condition d'optimalité est donnée par (1.10).

$$\nabla_{\alpha} J = {}^t \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} \right) \quad (1.9)$$

$$\nabla_{\alpha} J(\alpha) + \sum_{i \in I(\alpha)} \lambda_i(\alpha) \nabla_{\alpha} g_i(\alpha) = 0, \text{ et } \lambda_i(\alpha) \geq 0 \quad (1.10)$$

où $I(\alpha) = \{1 \leq i \leq n, g_i(\alpha) = 0\}$ est l'ensemble des indices associé aux contraintes saturées et $\lambda_i(\alpha)$ les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes $g_i(\alpha) \leq 0$. Il existe plusieurs méthodes d'obtention de ce gradient, nous allons détailler dans le chapitre 4 la méthode de l'état adjoint, particulièrement utile lorsque le critère est associé à la résolution d'une EDP⁶.

⁶Dans cette Thèse, nous nous bornerons à expliciter les gradients et les états adjoints associés, l'optimisation étant réalisé à l'aide de la fonction *fmincon* de MATLAB défini par (1.9) et (1.10).

1.5 Synthèse

Dans ce chapitre nous avons recensé les différentes méthodes de paramétrage disponibles pour la conception de structures minces dans l'automobile. Afin de répondre à la problématique industrielle : *permettre l'optimisation en avant-projet*, nous avons montré que les paramétrages disponibles sont trop limités dans ce contexte. Se pose alors la question d'étendre ces méthodes pour les rendre suffisamment souples et permettre de proposer des solutions innovantes.

Nous avons présenté les méthodes d'optimisation associées à ces paramétrage, l'une basée sur les plans d'expériences et les surfaces de réponses n'est pas intrusive vis-à-vis des outils du concepteur et permet de traiter des problèmes multi-physiques en revanche, elle ne permet pour l'instant de ne traiter qu'un nombre limité de paramètres ; l'autre est basée sur le gradient, elle nécessite le calcul d'un critère et de sa dérivée mais permet de traiter un grand nombre de paramètres. Le schéma 1.16 fait la synthèse des différentes méthodes de paramétrage pour l'optimisation de formes surfaciques. Les méthodes de mélange de formes et de paramétrage intrinsèque qui seront étudiées dans les chapitres suivants sont aussi intégrées à ce schéma.

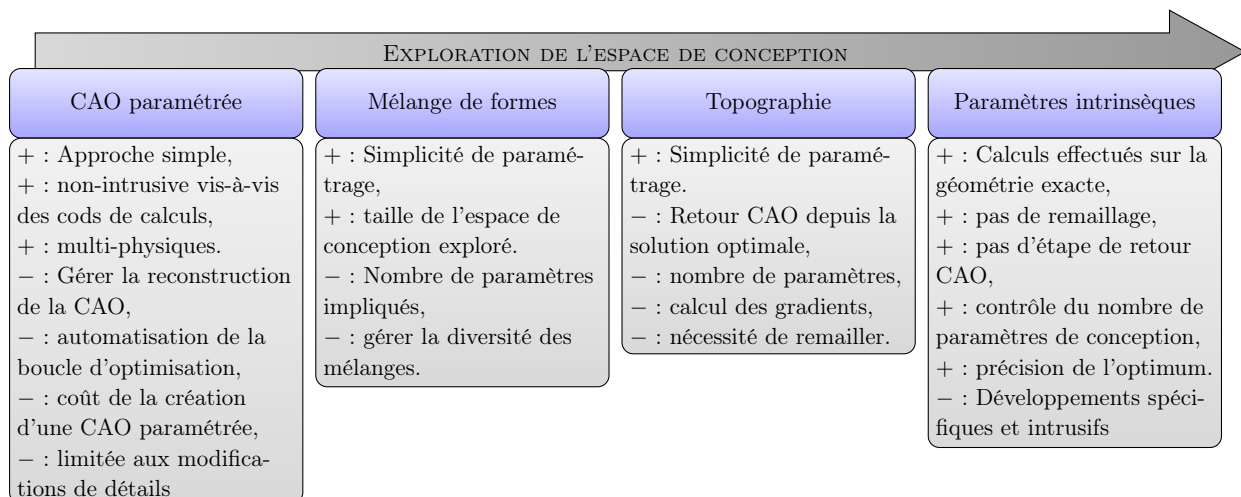


FIGURE 1.16 – Classification des méthodes d'optimisation surfaciques en fonction de leur capacité à explorer l'espace de conception

Dans le chapitre suivant nous allons présenter une extension des méthodes classiques de l'aval, afin de les adapter à l'optimisation en avant-projet en simplifiant le paramétrage des formes, au risque de rendre plus complexe le processus d'optimisation.

Bibliographie

- [Altair 2011] Altair. *Hyperworks 11 – Optistruct user’s guide*. Altair Engineering, 11.0.0 édition, 2011. (Cité en pages [xv](#) et [12](#).)
- [ANSA 2011] ANSA. *ANSA 13.2.1 – user’s guide*. beta CAE Systems SA, 2011. (Cité en pages [xv](#) et [13](#).)
- [Batoz 1992] Jean-Louis Batoz et Gouri Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis : Coques, volume 3. Hermès, 1992. (Cité en page [13](#).)
- [Brujic 2010] Djordje Brujic, Mihailo Ristic, Massimiliano Mattone, Paolo Maggiore et Gian-Paolo Poli. *CAD based shape optimization for gas turbine component design*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 41, pages 647–659, 2010. (Cité en page [11](#).)
- [Friedman 1991] Jerome H Friedman. *Multivariate Adaptive Regression Splines*. The Annals of Statistics, vol. Vol. 19, No. 1, pages 1–141, 1991. (Cité en pages [21](#) et [42](#).)
- [Ginsbourger 2009] David Ginsbourger, Delphine Dupuy, Anca Badea, Laurent Carraro et Olivier Roustant. *A note on the choice and the estimation of Kriging models for the analysis of deterministic computer experiments*. Applied Stochastic Models in Business and Industry, vol. 25, no. 2, pages 115–131, 2009. (Cité en page [21](#).)
- [Goupy 2009] Jacques Goupy et Lee Creighton. Introduction aux plans d’expériences. Dunod/L’usine nouvelle, 4th  dition, 2009. (Cité en page [19](#).)
- [Hardee 1999] Edwin Hardee, Kuang-Hua Chang, Jian Tu, Kyung K. Choi, Iulian Grindeanu et Xiaoming Yu. *A CAD-based design parameterization for shape optimization of elastic solids*. Advances in Engineering Software, vol. 30, no. 3, pages 185 – 199, 1999. (Cité en page [11](#).)
- [Jacobs 1991] Robert A. Jacobs, Michael I. Jordan, Steven J. Nowlan et Geoffrey E. Hinton. *Adaptive Mixture of Local Experts*. Neural Computation, vol. 3, pages 79–87, 1991. (Cité en pages [20](#) et [22](#).)
- [Kooperberg 1997] Charles Kooperberg, Smarajit Bose et Charles J. Stone. *Polychotomous Regression*. Journal of the American Statistical Association, vol. 92, no. 437, pages 117–127, March 1997. (Cité en page [21](#).)
- [Matheron 1963] G. Matheron. Traité de g ostatique appliquée, ii : le krigeage. B.R.G.M., Paris, 1963. (Cité en page [21](#).)
- [Roy 2008] Rajkumar Roy, Srichand Hinduja et Roberto Teti. *Recent advances in engineering design optimisation : Challenges and future trends*. CIRP Annals - Manufacturing Technology, vol. 57, no. 2, pages 697 – 715, 2008. (Cité en pages [10](#), [11](#) et [16](#).)
- [Saitou 2005] Kazuhiro Saitou, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki et Panos Papalambros. *A Survey of Structural Optimization in Mechanical Product Development*. Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 5, no. 3, pages 214–226, 2005. (Cité en pages [11](#) et [16](#).)

- [Torres 2003] Romina Torres, Rodrigo Salas, Héctor Allende et Claudio Moraga. *Robust Expectation Maximization Learning Algorithm for Mixture of Experts*. In José Mira et José Álvarez, éditeurs, Computational Methods in Neural Modeling, volume 2686 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1041–1041. Springer Berlin / Heidelberg, 2003. (Cité en page 22.)
- [Tourbier 2009] Yves Tourbier. *Plans d'expériences*. Formation interne renault, 2009. (Cité en page 19.)
- [Voth 1999] B. Voth. *Using automatically generated shape variables to optimize stamped plates*. Technical Memorandum, Altair Engineering, Inc., 1999. (Cité en page 12.)
- [Yang 1992] R.J. Yang, A. Lee et D.T. McGeen. *Application of basis function concept to practical shape optimization problems*. Structural optimization, vol. 5, pages 55–63, 1992. (Cité en page 12.)
- [Yang 2007] Zhi Yang et Dimitri J. Mavriplis. *A Mesh Deformation Strategy Optimized by the Adjoint Method on Unstructured meshes*. In Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2007. (Cité en page 12.)
- [Zhou 2004] M. Zhou, N. Pagaldipti, H.L. Thomas et Y.K. Shyy. *An integrated approach to topology, sizing, and shape optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 26, pages 308–317, 2004. (Cité en page 13.)

Optimisation par mélange de formes

Sommaire

2.1	Optimisation par mélange de formes élémentaires	30
2.1.1	Définition d'une bibliothèque de formes	30
2.1.2	Principe de l'optimisation de forme	31
2.1.3	Boucle d'optimisation	31
2.1.4	Bilan sur le mélange de formes élémentaires	34
2.2	Optimisation par mélange de modes propres	35
2.2.1	Définition du paramétrage	35
2.2.1.1	Paramètres de conception	36
2.2.1.2	Espace design et espace non-design	37
2.2.1.3	Enrichissement de l'approximation : les règles d'experts	37
2.2.1.4	Qualité des modèles statistiques et paramètres implicites	37
2.2.2	Optimisation d'une doublure de capot	38
2.2.3	Résultats numériques	39
2.2.3.1	Base modale tronquée et approximation	39
2.2.3.2	Procédé de fabrication	39
2.2.3.3	Effet des paramètres implicites sur la qualité des méta-modèles	41
2.2.4	Conclusion sur le mélange de modes propres	42
2.3	Bilan sur le mélange de formes	43
	Bibliographie	44

Nous proposons dans ce chapitre deux méthodes de paramétrage par mélange de formes. La section 2.1 présente une méthode basée sur la définition d'une bibliothèque de formes élémentaires simples et paramétrées. Ces formes sont dimensionnées, positionnées et mélangées entre-elles sur la structure initiale. Le mélange de ces formes, qui permet d'introduire la complexité nécessaire à l'atteinte de l'optimum, est géré par l'algorithme d'optimisation, et non par le concepteur ; l'idée étant de s'affranchir, d'une part, des a priori de conception, et d'autre part, d'éliminer la phase coûteuse du paramétrage de CAO des processus de dessin. Cependant, nous allons voir que la complexité et le nombre formes candidates devient vite ingérable par une méthode d'optimisation à l'aide de plans d'expériences.

La seconde méthode, présentée en section 2.2 a pour but de contourner les difficultés de la méthode précédente, concernant le processus d'optimisation. Elle repose sur la création d'une base de fonctions mathématiques qui, par combinaisons linéaires, permet de générer de nouvelles formes ; à cet égard, nous allons utiliser les modes propres de la structure initiale.

2.1 Optimisation par mélange de formes élémentaires

L'optimisation par mélange de formes élémentaires est relativement proche de l'optimisation paramétrique, mais autorise plus de libertés pour explorer l'espace de conception (voir figure 1.16). L'idée de base est de disposer de formes géométriques relativement simples dans une bibliothèque : les formes élémentaires. Elles sont ensuite "piochées" par l'optimiseur dans la bibliothèque, puis dimensionnées et positionnées sur une pièce initiale (voir figure 2.2). Ce principe a été mis en œuvre par [Lavaud 2007] et par [Weiss 2009], nous complétons leur démarche en autorisant les intersections entre les formes. Notons que la mise en place opérationnelle de cette méthode nécessite l'utilisation d'une méthode d'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponses. Nous allons examiner l'impact de cette contrainte sur l'efficacité de la méthode.

2.1.1 Définition d'une bibliothèque de formes

La bibliothèque des formes élémentaires est le pivot de la méthode, le mélange de ces formes (au sens topologique du terme) permet d'en construire de nouvelles, et ainsi d'explorer un espace de conception beaucoup plus large que celui qui est défini par les seuls éléments de la bibliothèque. En procédant ainsi, on minimise l'effort de paramétrage, et on s'autorise à concevoir des pièces qui n'avaient pas été intuitées a priori, mais on reporte les difficultés de conception sur l'algorithme d'optimisation ; nous allons voir comment.

Bibliothèque de formes élémentaires

La bibliothèque est construite à partir de formes simples paramétrées dans un modèleur géométrique (on peut par exemple envisager des templates CATIA). Chacune d'entre elles a ses paramètres de conception propres qui permettent de dimensionner indépendamment les instances appelées.

Remarque 2.1.1 *Dans la suite de cette section nous prenons soin de distinguer la forme (qui est un élément géométrique de la bibliothèque) de son instance (qui est la forme en question positionnée sur la structure après avoir fixé ses paramètres de dessin).*

Lorsque deux instances se croisent, il faut décrire topologiquement l'intersection. Comme cette question n'admet pas de solution unique (voir figure 2.3), on est confronté au choix d'une forme résultante dont le comportement mécanique doit être cohérent avec les objectifs de l'optimisation¹. Nous nous proposons par ailleurs d'utiliser des formes élémentaires compatibles avec le procédé de fabrication envisagé, afin d'assurer la cohérence du mélange vis-à-vis de celui-ci, cette contrainte ayant par ailleurs l'intérêt d'éliminer certains mélanges inexploitable.

Définition et enrichissement de la bibliothèque

Les formes élémentaires peuvent être issues, dans un premier temps, de brainstormings ou de l'expérience des concepteurs. La bibliothèque initiale peut ensuite être enrichie des mélanges récurrents (il s'agit d'utiliser le résultat d'un mélange comme forme élémentaire et de s'affranchir de son calcul à chaque itération). Au fur et à mesure des études, les formes innovantes peuvent

¹Si tel n'est pas le cas l'algorithme d'optimisation peut osciller.

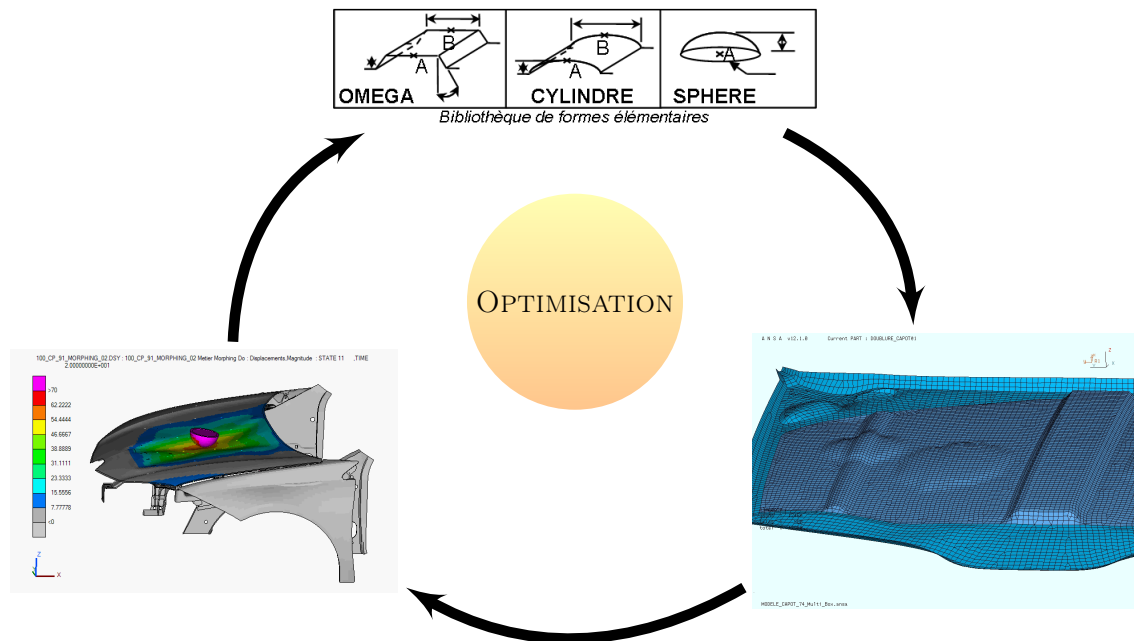


FIGURE 2.1 – Principe de l’optimisation par mélange formes élémentaires - Exemple d’une doublure de capot

à leur tour être intégrées dans la bibliothèque de formes. Cette méthode est donc bien adaptée la capitalisation du savoir au cours des projets, et à une utilisation en milieu industriel.

2.1.2 Principe de l’optimisation de forme

Une fois la bibliothèque définie, l’optimisation doit sélectionner un certain nombre de formes élémentaires, puis les dimensionner, et les positionner sur une pièce initiale (voir figure 2.1). Au cours du positionnement, deux instances peuvent venir en contact, un choix sur la forme résultante doit alors être fait. En effet, dans le cas de deux demies-sphères coaxiales de diamètre différents, il y a cinq formes résultantes triviales : chacune des deux demie-sphères seules et les trois autres formes représentées (figure 2.3), celles-ci ont par ailleurs des comportements mécaniques très différents². Notons cependant que ce sont ces mélanges de formes élémentaires qui permettent l’innovation : en ne définissant que des formes simples dans la bibliothèque, on souhaite obtenir des formes complexes issues du mélange de plusieurs instances.

2.1.3 Boucle d’optimisation

Plusieurs difficultés sont à prévoir lors de l’utilisation d’un tel paramétrage au sein d’une boucle d’optimisation. En particulier, l’optimiseur doit être capable d’effectuer un certain nombre de

²Les formes ont les mêmes valeurs de paramètres, sont topologiquement proches et ont des comportements mécaniques, par exemple en raideur, antagonistes. On peut alors se poser la question d’une métrique permettant de discriminer ces formes vis-à-vis de l’optimisation : on souhaite que deux formes ayant des comportements mécaniques différents soient caractérisées par des valeurs différentes des paramètres.

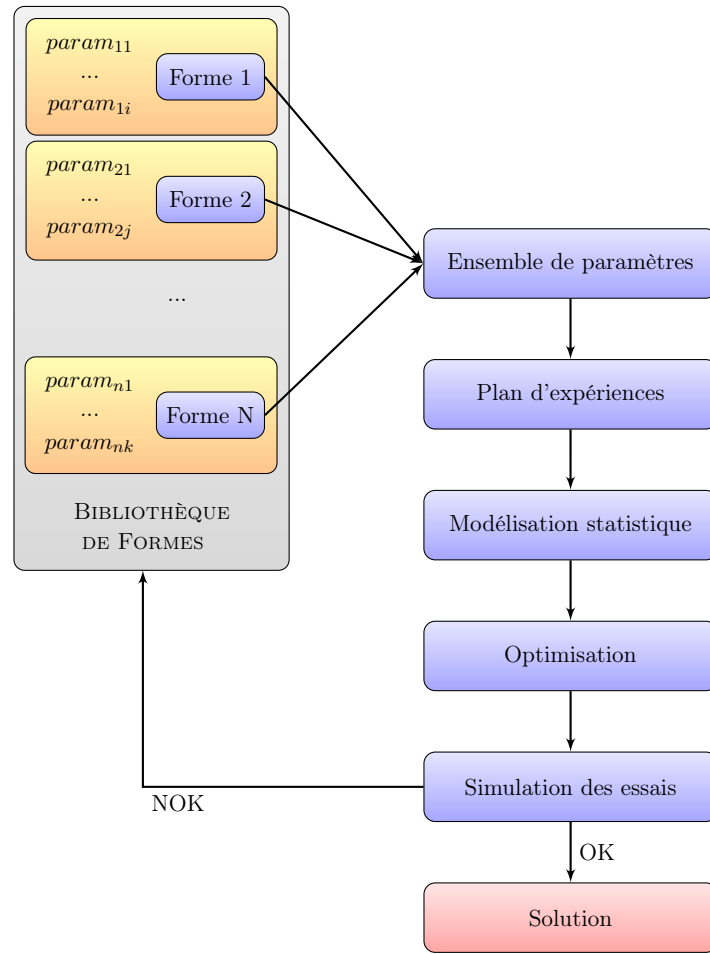


FIGURE 2.2 – Boucle d'optimisation pour le mélange de formes élémentaires

choix : combien de formes et quel type de formes doivent être utilisées ? Quel résultat du mélange doit être exploité ? etc.

Choix du nombre et du type de formes à utiliser

On peut envisager les stratégies suivantes, classées en fonction de leur capacité à explorer l'espace de conception :

1. l'utilisateur fixe *le nombre maximum d'instances par type de formes élémentaires à utiliser*, auxquelles on ajoute un paramètre booléen de présence/absence qui permet à l'optimiseur de choisir les instances à combiner. Ce cas de figure est l'un des plus simples, cependant, il reste à choisir la forme résultante en cas d'intersection. Ce choix peut être réalisé à l'aide d'un algorithme de type *branch-and-cut* [Beale 1979]. Le schéma 2.4 montre un algorithme de mise en œuvre qui décrit en fait un problème de combinatoire dont la complexité croît de façon exponentielle avec la taille de la bibliothèque.
2. l'utilisateur fixe *le nombre d'instances de formes à utiliser indépendamment de leurs types* :

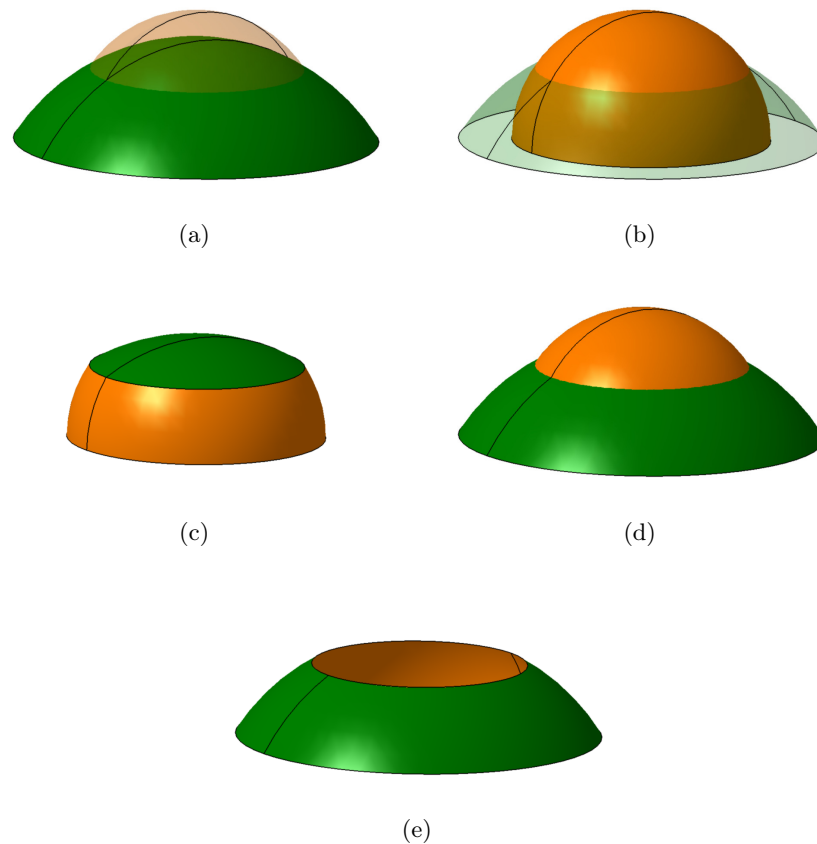


FIGURE 2.3 – Exemple de formes obtenues par mélange de deux sphères

ce cas est un peu plus complexe que le précédent car, d'une itération à l'autre, l'optimiseur peut changer le type d'une instance, ce qui amène une difficulté supplémentaire, car le nombre de paramètres dans chaque configuration n'est pas constant.

3. l'optimiseur est libre de ses choix : ce cas de figure est le plus complet, mais permet une exploration maximale du domaine de conception. Cependant cela induit une création non-contrôlée de paramètres d'optimisation.

Ces trois cas se distinguent par le nombre croissant de paramètres qu'il y a gérer dans la phase d'optimisation. Cette complexité peut être vue en plusieurs niveaux :

- le premier consiste à ne pas autoriser de mélange entre deux formes, ce qui ramène la méthode à un problème de CAO paramétrée "classique",
- le second consiste à définir une heuristique, qui impose un choix sur le mélange (par exemple élimination de la configuration 2.3e de la figure 2.3, qui n'est pas réalisable). Afin de mieux exploiter le mélange, on envisage de conserver toutes les topologies candidates, ce qui a pour effet de faire apparaître un paramètre discret supplémentaire qui correspond au numéro

de la topologie. In fine, cela conduit à poser le problème d'optimisation sans moyen de contrôle sur le nombre de variables,

- enfin, on peut enrichir la bibliothèque en intégrant les résultats des mélanges comme forme élémentaire à part entière. L'utilisation de cette méthode dans la boucle d'optimisation est équivalente au cas précédent ; hors boucle, on construit une bibliothèque de complexité croissante et on n'autorise pas de nouveaux mélanges au cours l'optimisation : le problème semble donc mieux posé.

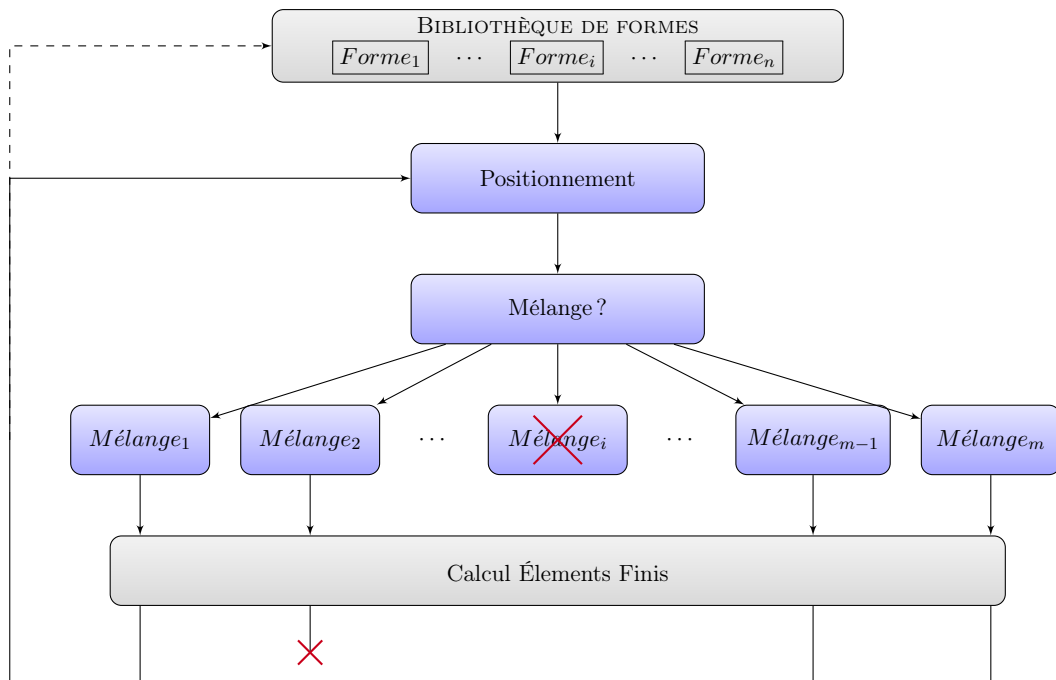


FIGURE 2.4 – Algorithme d'optimisation par mélange de formes élémentaires

2.1.4 Bilan sur le mélange de formes élémentaires

En répondant à la problématique de trouver un paramétrage permettant d'explorer un espace de conception important, nous avons présenté ici un paramétrage simple basé sur la définition de formes élémentaires "piochées" dans une bibliothèque. Pour générer des changements de topologies, on envisage des mélanges entre différentes instances de ces formes, et on trouve ainsi de nouvelles topologies potentiellement innovantes. Cependant nous avons vu que la diversité des mélanges potentiels introduit une création non-contrôlée de variables. Le problème d'optimisation devient alors difficile à résoudre, car il faut traiter un grand nombre de combinaisons, ce qui n'est pas envisageable aujourd'hui dans un contexte industriel. Ainsi, nous avons choisi de ne pas investiguer plus loin dans cette direction.

2.2 Optimisation par mélange de modes propres

La difficulté inhérente à la méthode précédente est l'impossibilité de contrôler les formes candidates. On fait ici l'hypothèse simplificatrice qu'elles sont le résultat d'une combinaison linéaire de formes de base. Il s'agit d'une synthèse entre le mélange de formes élémentaires et le paramétrage topographique (où on contrôle la position des nœuds d'un maillage cf. section 1.2.2) : en construisant une forme candidate à partir de la combinaison linéaire de fonctions de base, on contrôle la déformation du maillage au sens de l'optimisation topographique, tout en conservant la simplicité de paramétrage et la capacité à explorer l'espace de conception. Cette méthode reste une méthode de déformation de maillage, où la déformation est paramétrée non-plus par la normale extérieure à la surface, mais par une base de fonctions. À ce stade, le choix des fonctions de base reste à définir pour explorer au mieux l'espace de conception.

2.2.1 Définition du paramétrage

On propose d'utiliser la base des modes propres d'une structure initiale comme base de fonctions pour le mélange. Cela a l'avantage de permettre l'interpolation de formes suffisamment régulières définies sur la configuration initiale. Nous proposons d'utiliser la boucle d'optimisation décrite en figure 2.6 :

- Il s'agit, dans un premier temps, d'extraire la base modale de la forme initiale,
- La position des nœuds du maillage de la nouvelle géométrie est obtenue à partir d'une combinaison linéaire de la position des nœuds de chacune des formes modales,
- La forme candidate est obtenue à partir d'un remaillage automatique de la déformée ainsi obtenue.

Un exemple simple de mélange en $1D$ est décrit sur la figure 2.5. On observe que ce paramétrage est dépendant du maillage initial à l'instar de l'optimisation topographique, par exemple pour obtenir des flancs verticaux (en pointillés) avec le maillage de la figure 2.5, il faut insérer deux nouveaux nœuds.

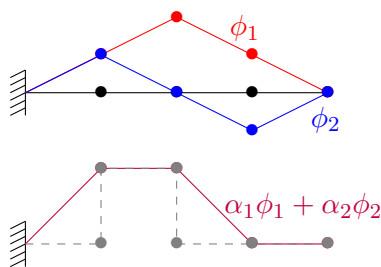


FIGURE 2.5 – Exemple $1D$ de mélange de deux modes propres d'une poutre

La base des modes propres nous assure d'explorer l'ensemble de l'espace géométrique autour de la forme initiale, pour se faire il faut utiliser une infinité de modes propres (et donc de paramètres), ce qui est bien évidemment impossible. Nous allons donc tronquer cette base pour obtenir un problème de taille raisonnable.

Pour s'affranchir des oscillations induites par la troncature, il faut alors filtrer la géométrie résultante. Les filtres utilisés représentent des *règles d'experts* qui ont pour but de faire respecter à la nouvelle forme un certain procédé de fabrication. Enfin, la forme filtrée est testée afin de vérifier sa performance vis-à-vis du critère d'optimisation.

En considérant les coefficients α_i de la combinaison linéaire comme des paramètres, on peut intégrer ces étapes successives dans une boucle d'optimisation basée sur une méthode de plan d'expériences et de surfaces de réponses.

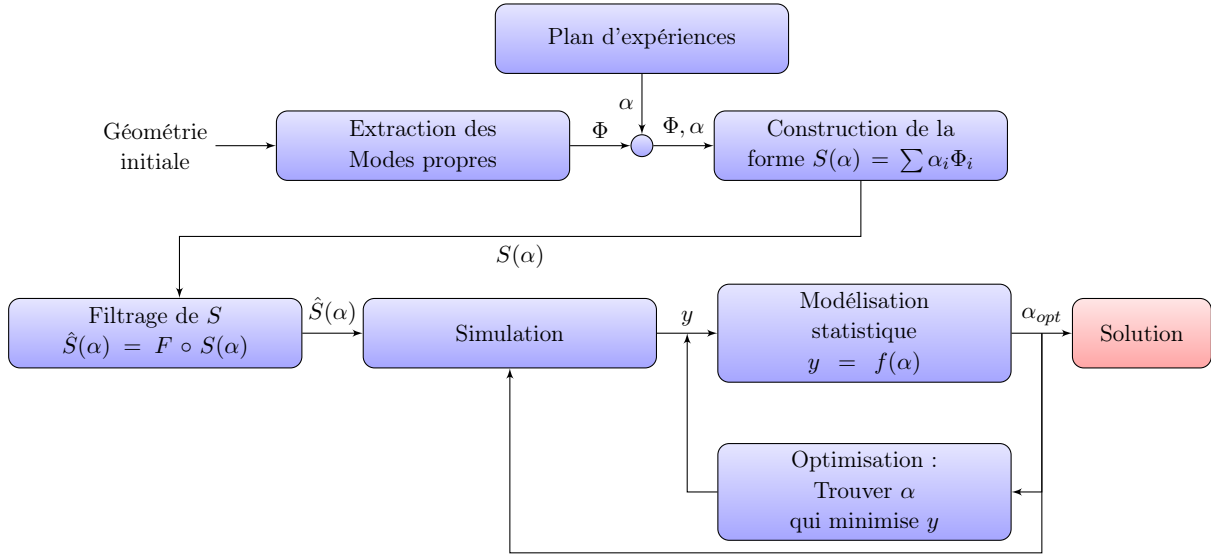


FIGURE 2.6 – Paramétrage par mélange de modes propres et optimisation par la méthode des plans d'expériences

2.2.1.1 Paramètres de conception

Les paramètres de conception Φ_i sont les vecteurs propres d'une forme initiale, en utilisant l'ensemble de la base modale de la pièce initiale pour définir une forme candidate S (2.1), où $\alpha_i \in [-1, 1]$ les coefficients³ associés aux modes propres Φ_i . On obtient un espace de conception identique à celui obtenu à l'aide d'un paramétrage topographique.

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi_i \quad (2.1)$$

On propose de maîtriser le nombre de paramètres de conception en approchant la forme S par la forme $\hat{S}$ définie à partir des N premiers vecteurs propres de la base modale en (2.2). En procédant ainsi, on maîtrise le nombre de paramètres impliqués, en revanche on restreint l'espace de conception que l'on peut explorer.

$$\hat{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_i \quad (2.2)$$

³On borne ainsi le problème d'optimisation.

2.2.1.2 Espace design et espace non-design

En optimisation topologique ou topographique, il est commun de définir l'espace design (design space) et l'espace non-design (non-design space). Ils caractérisent respectivement les parties de la pièce qui sont autorisées à varier ou non. Dans le cas du mélange de modes propres, il est possible de faire cette distinction pour, par exemple, définir les interfaces entre la pièce et son environnement, des points de fixations, ou tout autres parties de la pièce que l'on souhaite exclure de notre paramétrage. Pour ce faire, nous utilisons les conditions aux limites lors de l'extraction de la base modale. En effet, en encastrant un ensemble de nœuds lors de l'analyse modale, on assure ensuite son blocage lors de la combinaison linéaire des modes. La mise en place de tels espaces est intuitive et très facile à mettre en place.

2.2.1.3 Enrichissement de l'approximation : les règles d'experts

Nous avons vu que nous utilisons une base tronquée pour maîtriser le nombre de paramètres. En utilisant seulement N paramètres, la forme $\hat{S}$ va difficilement respecter un procédé de fabrication. Afin d'assurer la compatibilité d'un mélange vis-à-vis du procédé de fabrication, nous proposons d'utiliser des fonctions de post-traitement (figure 2.7) qui permettent de déplacer les nœuds de $\hat{S}$ pour qu'ils respectent des règles d'experts modélisant un procédé de fabrication donné (par exemple, dans le cas de l'emboutissage, on peut contraindre l'angle des flancs). On peut alors envisager de mettre en place plusieurs procédés de fabrication en utilisant un jeu de filtre différent pour chacun d'eux. La forme filtrée est calculée à l'aide de l'équation (2.3), où F représente un jeu

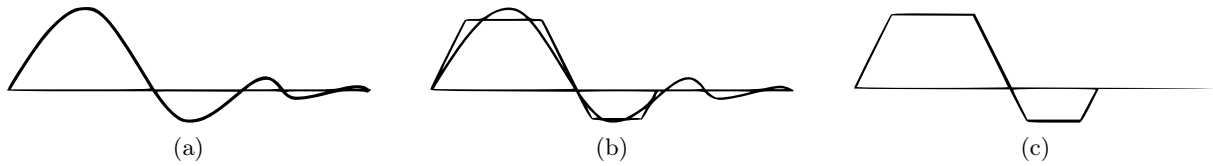


FIGURE 2.7 – Forme $\hat{S}$ issue du mélange (2.7a) ; Fonction de filtrage (2.7b) ; Forme filtrée (2.7c)

de filtres exprimé en terme de composée de fonctions. L'utilisation de des filtres va dé-régulariser le problème, ce qui induit des difficultés de modélisation du phénomène physique par une surface de réponse. Nous allons voir dans la section suivante comment gérer les filtres dans les modèles statistiques.

$$\underline{\hat{S}}(\alpha) = F \circ \hat{S}(\alpha) \quad (2.3)$$

2.2.1.4 Qualité des modèles statistiques et paramètres implicites

Dans cette partie nous proposons de décrire comment maîtriser la perte de qualité des modèles statistiques due à l'utilisation des filtres. En effet, le méta-modèle f doit estimer la réponse de la forme $\hat{S}(\alpha)$ pour le vecteur de paramètres α . Or ce vecteur α correspond à la forme S , et non à la forme $\hat{S}$. Les filtres induisent une perte de convexité, puisqu'à partir de deux jeux de paramètres α_1 et α_2 on peut obtenir la même forme filtrée. C'est pour cela qu'on propose d'utiliser des paramètres représentant les changements induits par chaque filtre sur la forme, les "*paramètres implicites*". On détail le calcul des paramètres implicites (*PI*) dans (2.4) où X_{j-1}^i and X_j^i sont

les position des nœuds de la forme discrétisée. $j - 1$ est l'indexe de la forme avant que le filtre j soit appliqué. Pour $j = 1$, X_0 est la discrétisation de $S(\alpha)$. Le méta-modèle $y = f(\alpha)$ peut être recalculé en ajoutant les paramètres implicites $IP_1 \dots IP_n$ aux paramètres α d'entrée du modèle (2.5). Le workflow de cette modélisation est détaillé dans la figure 2.6. La qualité des modèles statistiques est évaluée à l'aide d'une base de construction et d'une base de validation. La base de construction est un sous-ensemble de la base d'essais, la base de validation est son complémentaire. Le nombre d'essais dans la base de construction est plus important que dans la base de validation. Les critères de validation sont l'erreur des moindres carrés $RMSE$ et l'erreur statistique R^2 [Armstrong 1992, Cook 1982].

$$PI_j = \left[\sum_i \omega_i (X_{j-1}^i - X_j^i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.4)$$

$$\hat{y} = \hat{f}(\alpha, PI_{\{1 \dots n\}}) \quad (2.5)$$

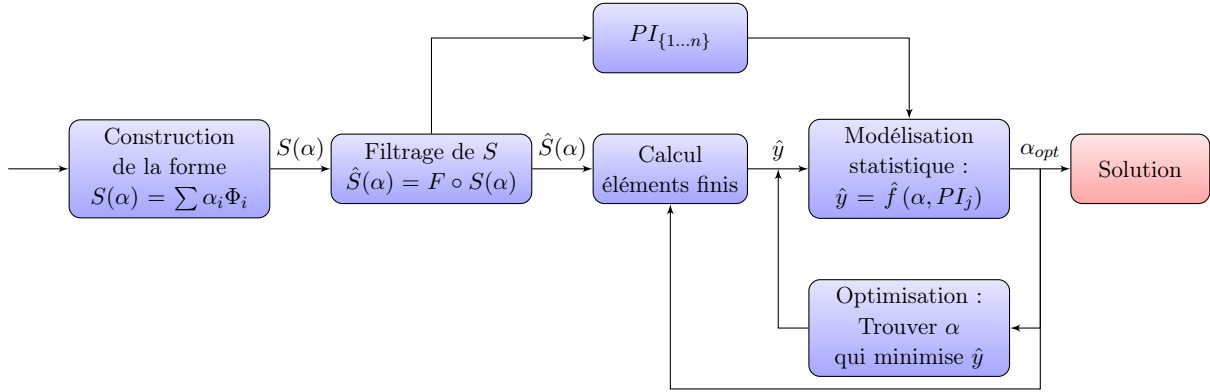


FIGURE 2.8 – Utilisation de paramètres implicites dans l'optimisation par mélange de modes propres

2.2.2 Optimisation d'une doublure de capot

On propose d'utiliser ce paramétrage pour optimiser la forme d'une doublure de capot. La principale prestation de cette doublure est d'absorber l'énergie en cas de choc entre le véhicule et la tête d'un piéton. Nous cherchons à concevoir une doublure de type passive (pas de système actif), c'est pourquoi sa forme joue un rôle très important. Le critère biomécanique utilisé est le HIC (Head Injury Criterion) (2.6) où t_1 et t_2 sont les temps initiaux et finaux (la fenêtre $t_2 - t_1$ est limité à $15ms$) et a est l'accélération de la tête (voir [Simms 2009, Hutchinson 1998] pour plus de détails).

$$HIC = \sup_{t_1, t_2} \left\{ \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \right]^{2.5} (t_2 - t_1) \right\} \quad (2.6)$$

La doublure de capot (voir figure 2.9a) est généralement conçue en métal emboutis. Comme nous avons vu à la subsection précédente, nous séparons l'espace design et l'espace non-design

(figures 2.9b et 2.9c respectivement) et encastrons les surfaces fonctionnelles.

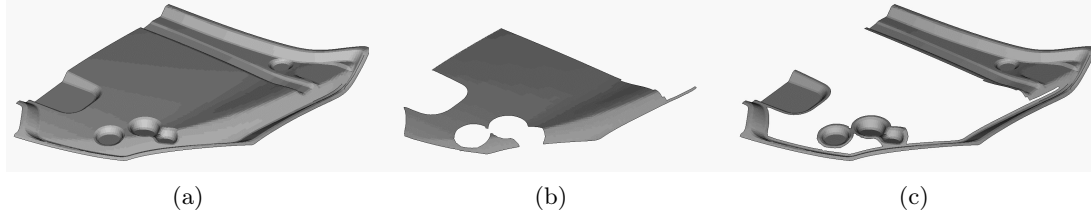


FIGURE 2.9 – Définition de l'espace design (2.9b) et de l'espace non-design (2.9c) pour la partie symétrique d'une doublure de capot (2.9a)

2.2.3 Résultats numériques

Dans cette section nous étudions l'influence du nombre N de déformées modales utilisées pour générer la forme S , l'impacte des règles d'experts sur la qualité de la solution ainsi que la qualité des modèles statistiques utilisés.

2.2.3.1 Base modale tronquée et approximation

Ici nous allons faire une régression des moindres carrés afin de trouver les coefficients du vecteur α_N où N est sa dimension, pour différentes valeurs de N , pour que la structure approximée (figure 2.11b) soit le plus proche possible d'une doublure de référence (figure 2.11a). La forme de la doublure de référence est composée de 3 raidisseurs de type "oméga", correspondant à une configuration classiquement utilisée. On propose de mesurer la qualité de l'approximation comme étant le volume séparant les deux pièces, plus celui-ci sera faible, meilleure elle sera. On utilise le théorème de la divergence pour calculer le volume : en calculant le flux à travers chaque élément des deux doublures discrétisées ($\vec{\phi}_e$), on peut alors approximer le volume qui sépare les deux formes. Comme on peut le voir sur la figure 2.10, l'utilisation d'une base modale tronquée implique une forte approximation de la forme de référence, plus le nombre de modes utilisés est faible, plus la forme approchée est éloignée de la référence.

Sur la figure 2.11b, on peut voir qu'une forme obtenue à partir de $N = 500$ modes mélangés n'est pas suffisamment proche de la forme de référence, il reste un certain nombre d'oscillations parasites, l'utilisation des filtres va permettre de gommer cet effet indésirable.

2.2.3.2 Procédé de fabrication

On propose ici d'utiliser des filtres pour réduire le volume entre la forme de référence et la forme approchée. Ces filtres représentent les règles d'experts qui caractérisent l'emboutissage. En utilisant le même critère de volume que précédemment, on compare (figure 2.12) les écarts entre les deux formes avec et sans utilisation des filtres. On observe une nette diminution du volume séparant forme approchée et forme de référence. De plus on constate que l'approximation converge à partir de $N = 100$ modes utilisés dans le mélange.

On remarque que les filtres étant implémentés à partir des règles d'experts, la pièce obtenue est

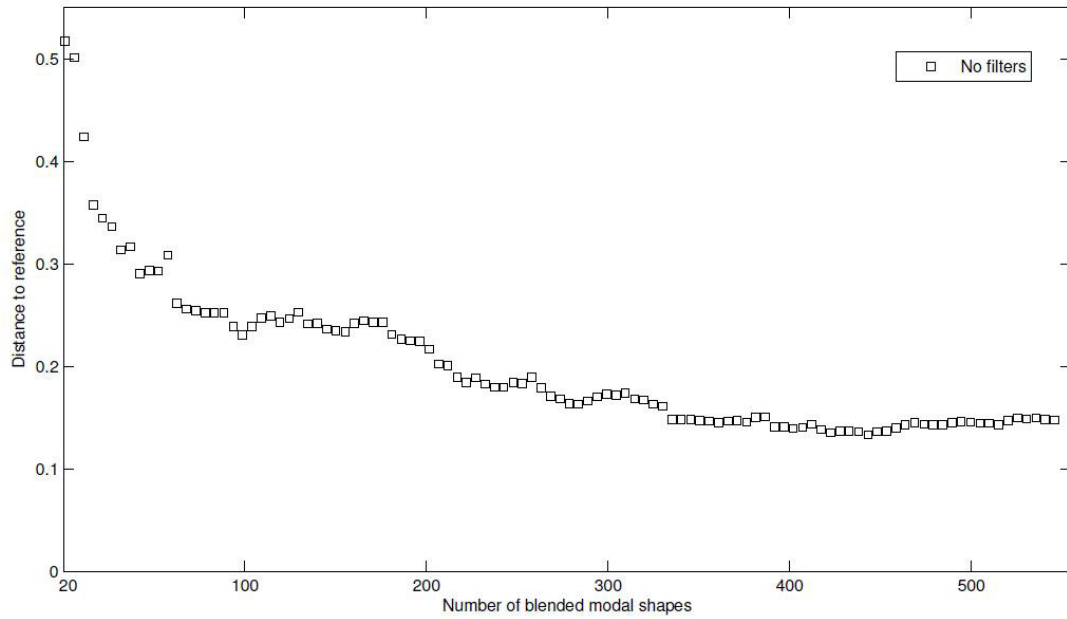


FIGURE 2.10 – Volume (dm^3) séparant la doublure approchée et celle de référence en fonction du nombre N de modes utilisés dans le mélange

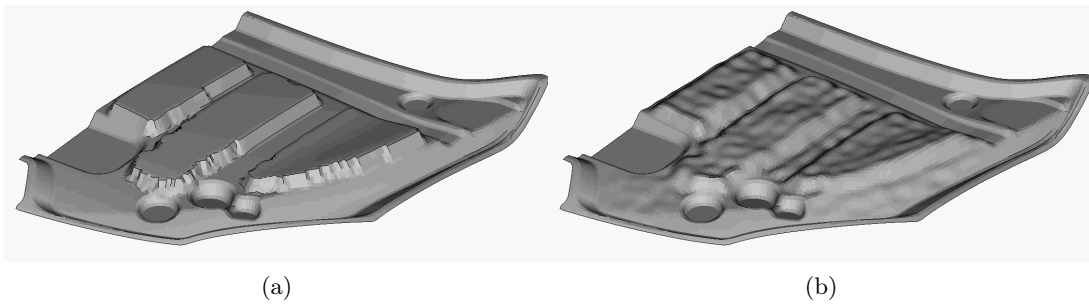


FIGURE 2.11 – Doublure de référence (2.11a) et forme approchée (2.11b) par le mélange de $N = 500$ modes propres

conforme avec le procédé de fabrication (ici, l'emboutissage). On s'affranchit alors d'une étape de "*reverse engineering*" pour obtenir une pièce industrialisable. En optimisation topologique ou topographique telle qu'elle est disponible dans les codes commerciaux, cette étape de retour CAO est indispensable, mais elle impose de s'éloigner de la solution optimale. Il faut donc être très prudent pour ne pas trop dégrader la solution. L'utilisation des filtres assure l'industriabilité de la solution proposée. Les filtres sont implémentés avec leurs propres paramètres, ces paramètres peuvent eux aussi être utilisés comme paramètres de conception afin de trouver, par exemple, l'angle optimal des flancs d'emboutissage. Enfin, un changement de procédé de fabrication peut être réalisé en changeant simplement les filtres utilisés.

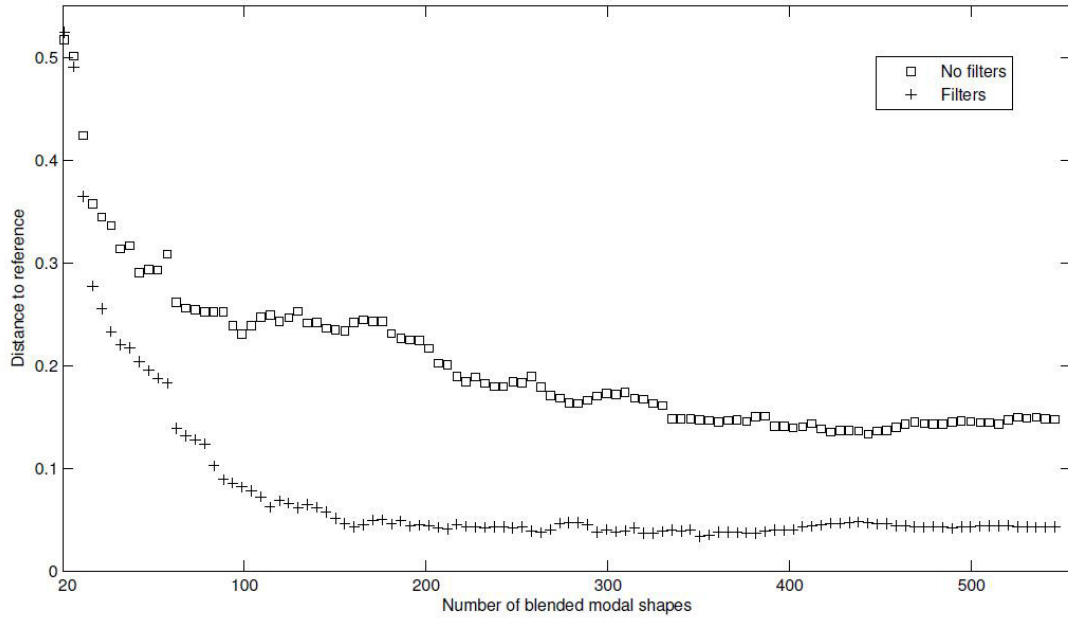


FIGURE 2.12 – Volume (dm^3) séparant la doublure approchée et celle de référence en fonction du nombre N de modes utilisés dans le mélange avec utilisation des filtres (+) ou sans ($\square$)

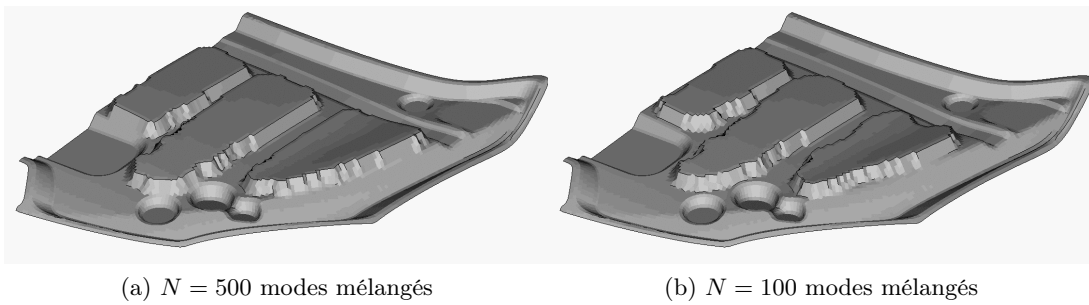


FIGURE 2.13 – Approximation de la doublure de référence obtenue en utilisant les filtres

2.2.3.3 Effet des paramètres implicites sur la qualité des méta-modèles

Dans cette section nous allons étudier les effets des paramètres implicites sur les modèles statistiques, pour cela, leur qualité est mesurée en séparant la base d'essais en deux bases :

- une base de construction contenant la majorité des essais et permettant de construire les méta-modèles. Elle est aussi appelée base d'apprentissage.
- une base de validation contenant quelques essais qui permettront de mesurer l'écart entre la valeur calculée et la valeur estimée par le modèle.

Les éléments de la base de validation sont tirés aléatoirement dans la base d'essais. L'utilisation de ces deux bases permet de vérifier que les modèles ne sont pas simplement bons en construction,

c'est à dire qu'ils interpolent bien les essais de la base de construction, mais qu'ils permettent de bien estimer un nouveau point, pour cela on se réserve quelques essais qui n'ont pas servi à la construction du modèle. Dans le tableau 2.1, on compare le $RMSE$ et le R^2 pour des modèles de type polynomiaux ou polyMARS [Friedman 1991]. On observe que les modèles concordent avec les données de constructions mais estiment mal les données de validation. On propose de

TABLE 2.1 – Qualité des modèles statistiques

Modèle	$RMSE$ Construction	R^2 Construction	$RMSE$ Validation	R^2 Validation
Linéaire	0.12	0.92	0.24	0.62
Quadratique	0.07	0.97	0.24	0.59
Cubique	0.04	0.99	0.24	0.65
PolyMARS	0.15	0.86	0.11	0.92

calculer les paramètres implicites tels que décrits dans l'équation (2.4) et de les utiliser comme paramètres de conception pour la construction des modèles statistiques (2.5). Le tableau 2.2 nous permet de constater une nette amélioration des modèles et notamment sur la base de validation.

TABLE 2.2 – Qualité des modèles statistiques construits avec les PIs

Modèle	$RMSE$ Construction	R^2 Construction	$RMSE$ Validation	R^2 Validation
Linéaire	0.10 (+16.67%)	0.94 (+2.17%)	0.14 (+41.67%)	0.86 (+38.71%)
Quadratique	0.05 (+28.57%)	0.99 (+2.06%)	0.18 (+25.00%)	0.77 (+30.51%)
Cubique	0.03 (+25.00%)	0.99 (+0.00%)	0.08 (+66.67%)	0.975 (+50.00%)
PolyMARS	0.10 (+33.33%)	0.94 (+9.30%)	0.09 (+18.18%)	0.95 (+3.26%)

2.2.4 Conclusion sur le mélange de modes propres

L'optimisation par mélange de modes propres est relativement simple à mettre en œuvre et est indépendante du problème physique à résoudre. De plus, cette méthode est non-intrusive par rapport aux codes de calculs. Nous avons montré le potentiel de cette méthode pour explorer l'espace de conception, tout en respectant un procédé de fabrication, grâce à l'implémentation de filtres caractérisant les règles métier. En prenant en compte l'effet des filtres dans la construction des modèles statistiques, on s'assure de conserver une bonne qualité de modélisation, notamment, en améliorant la qualité d'estimation des modèles statistiques. Le procédé de fabrication est vu comme un ensemble de paramètres de conception, et non plus en tant que contraintes pour l'optimisation, cette différence d'approche est notable car elle permet d'en envisager plusieurs et de laisser l'optimisation choisir le process le plus adapté pour répondre au problème.

Cependant, nous avons vu que pour ne pas trop restreindre l'espace de recherche, cette méthode nécessite encore beaucoup de paramètres (entre 100 et 500 modes propres pour le cas étudié), l'investissement que nous n'avons pas fait pour le paramétrage doit être fait aux étapes de modélisation et d'optimisation.

2.3 Bilan sur le mélange de formes

Dans ce chapitre nous avons vu deux méthodes de paramétrage de formes surfaciques qui peuvent être considérées comme des extensions des méthodes classiques aux avants-projets. La première méthode présentée est basée sur la création de templates à positionner sur une pièce initiale. Nous avons vu que les changements de topologies et l'innovation sont permis grâce au mélange des différentes instances utilisées. Cependant ce mélange impose de mettre en place un algorithme d'optimisation basé sur de la combinatoire qui semble très difficile à gérer. En voulant étendre le paramétrage CAO pour l'optimisation en phase amont il faut permettre les changements de topologies, nous avons donc cherché ici à mettre en place un paramétrage simple à définir qui repousse la difficulté dans le processus d'optimisation, qui devient alors trop complexe pour être envisagée dans l'industrie. Le deuxième paramétrage proposé est issu de la synthèse entre le mélange de formes élémentaires et l'optimisation topographique, il s'agit de contrôler les déformations du maillage par combinaisons linéaires de fonctions de bases. Nous avons présenté ici l'utilisation d'une base de fonctions propres associée à une définition initiale de la pièce, on assure ainsi la possibilité d'explorer un espace de conception important, mais la combinaison des modes propres induit des oscillations résiduelles qu'il faut filtrer. La définition des filtres est effectuée de manière à imposer un procédé de fabrication, mais ils induisent une dé-régularisation du problème d'optimisation. Dans le chapitre, suivant nous proposons la mise en œuvre opérationnelle de cette méthode à l'optimisation d'un écran thermique, nous allons voir qu'ici aussi nous avons privilégié le paramétrage au détriment de l'optimisation.

Bibliographie

- [Armstrong 1992] J. Scott Armstrong et Fred Collopy. *Error Measures for Generalizing About Forecasting Methods : Empirical Comparisons*. Marketing Papers, vol. 8, pages 69–80, 1992. (Cité en page 38.)
- [Beale 1979] E.M.L. Beale. *Branch and Bound Methods for Mathematical Programming Systems*. In E.L. Johnson P.L. Hammer et B.H. Korte, éditeurs, Discrete Optimization II Proceedings of the Advanced Research Institute on Discrete Optimization and Systems Applications of the Systems Science Panel of NATO and of the Discrete Optimization Symposium co-sponsored by IBM Canada and SIAM Banff, Aha. and Vancouver, volume 5 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 201 – 219. Elsevier, 1979. (Cité en page 32.)
- [Cook 1982] R. Dennis Cook. *Residuals and Influence in Regression*. New York - Chapman and Hall, 1982. (Cité en page 38.)
- [Friedman 1991] Jerome H Friedman. *Multivariate Adaptive Regression Splines*. The Annals of Statistics, vol. Vol. 19, No. 1, pages 1–141, 1991. (Cité en pages 21 et 42.)
- [Hutchinson 1998] John Hutchinson, Mark J. Kaiser et Hamid M. Lankarani. *The Head Injury Criterion (HIC) functional*. Applied Mathematics and Computation, vol. 96, no. 1, pages 1 – 16, 1998. (Cité en page 38.)
- [Lavaud 2007] Gaël Lavaud. *Optimisation robuste appliquée au crash automobile*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007. (Cité en page 30.)
- [Simms 2009] Ciaran Simms et Denis Wood. *The Influence of Vehicle Design on Pedestrian and Cyclist Injuries*. In Pedestrian and Cyclist Impact, volume 166 of *Solid Mechanics and Its Applications*, pages 171–208. Springer Netherlands, 2009. (Cité en page 38.)
- [Weiss 2009] Daniel Weiss. *Geometry-Based Structural Optimization on CAD Specification Trees*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2009. (Cité en page 30.)

Application du mélange de formes

Sommaire

3.1 Définition du problème	45
3.1.1 Choix du Critère	46
3.1.1.1 Le Critère MFT	46
3.1.1.2 Un nouveau critère	47
3.1.2 Paramétrage	49
3.2 Optimisation	50
3.3 Résultats	52
3.4 Conclusion sur le mélange de formes	56
Bibliographie	57

Dans ce chapitre nous proposons d'utiliser le paramétrage par mélange de modes propres pour l'optimisation d'un écran thermique sous critère de rayonnement acoustique. Nous allons, dans un premier temps, définir le problème d'optimisation qui consiste à choisir un critère caractérisant le rayonnement acoustique adapté à l'optimisation et à choisir les paramètres d'optimisation.

3.1 Définition du problème

Les écrans thermiques sont des éléments en tôles embouties qui sont disposées sur le moteur afin de protéger certaines pièces sensibles (flexibles, plastiques...) de la chaleur dégagée. Ils sont directement fixés au Groupe Moto-Propulseur (GMP) (voir figure 3.1), dont les vibrations excitent les modes, et produisent des bruits parasites dans l'habitacle. Un calcul acoustique permet d'estimer l'effet du rayonnement de l'écran thermique dans l'habitacle. Cependant, ce calcul étant coûteux, les experts Renault ont défini un critère de dimensionnement vibratoire, permettant de traduire ce rayonnement : le critère MFT (Moyenne Fonction de Transfert).

Nous allons voir que ce critère n'est pas adapté à l'optimisation¹ ; cela nous conduira à introduire un critère équivalent plus adapté qui nous permettra de mettre en œuvre l'optimisation d'un écran thermique à l'aide du mélange de modes propres défini dans le chapitre précédent.

¹Il s'agit là d'un cas typique rencontré dans l'industrie, où le critère défini à des fins de validation, ne peut être utilisé pour l'optimisation car trop coûteux à calculer, ou tout simplement ne permettant pas de discriminer des solutions. Il faut alors définir de nouveaux critères équivalents mieux adaptés à l'optimisation.

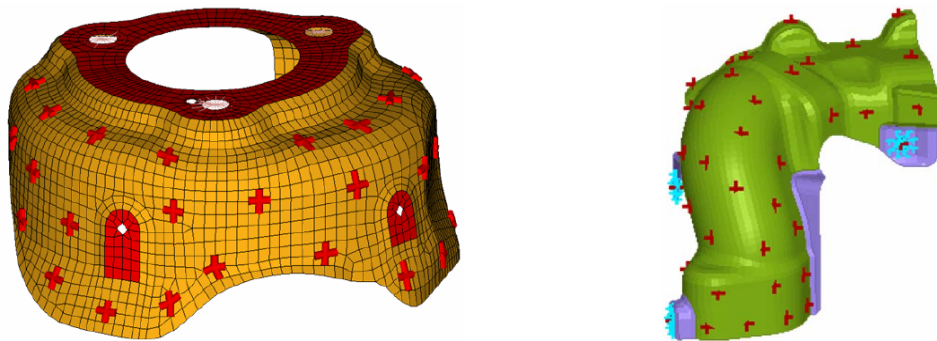


FIGURE 3.1 – Exemple de deux écrans thermiques avec les points de fixation et de mesures

3.1.1 Choix du Critère

Nous allons effectuer quelques vérifications sur le critère MFT afin de voir s'il est adapté à l'optimisation, nous allons donc confronter ce critère à un test simple, que nous allons détailler dans la suite de cette section, l' α -test, qui permet de caractériser le comportement du critère vis-à-vis du problème mécanique. En effet le critère doit caractériser le phénomène mais aussi permettre de discriminer des solutions de manière robuste, ceci semble difficile à faire avec le critère MFT, c'est pourquoi nous proposons un nouveau critère permettant de caractériser le rayonnement acoustique de manière globale, et permettant par exemple de s'affranchir de la dépendance à des points de mesures, on propose donc de mettre en place un critère intégral.

3.1.1.1 Le Critère MFT

Pour le calcul de ce critère, l'écran est excité dans les trois directions via ses points de fixation, puis les réponses sont calculées pour n points de mesure (voir figure 3.1). L'échantillonnage en fréquence est effectué par pas de 1 Hz autour l'octave 750 Hz , pour le calcul de ce critère, on pose les notations suivantes [Anamode-5.2 2007] :

- $(A_i)_{i=1}^N$ les points d'excitation,
- $(B_j)_{j=1}^P$ les points de mesures,
- $F_k(A_i)$ l'effort unitaire de direction k sur le point A_i ,
- $\gamma_n(B_j)$ l'accélération de direction normale à la paroi sur le point B_j ,
- $FT_{ijk} = \frac{\gamma_n(B_j)}{F_k(A_i)}$ la fonction de transfert de la direction k du point A_i vers la normale au point B_j .

On peut alors calculer la fonction MFT grâce à l'équation (3.1), il s'agit de faire une moyenne de toutes les courbes de transfert calculées à chaque fréquence et pour chaque excitation. Elle dépend de la plage de fréquence sur laquelle elle est calculée, ainsi que des points de mesures. Les points d'excitations sont en général des points ayant un sens physique : les points de fixation de la pièce, tandis que les points de mesures n'ont pas de sens physique, dans l'idéal, il faudrait utiliser

une version continue de ce critère vis-à-vis des points de mesures, ce qui serait bien évidemment trop coûteux à calculer.

$$MFT \left((A_i)_{i=1}^N, (B_j)_{j=1}^P \right) = \frac{1}{2NP} \sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1,N \\ j=1,P \\ k=1,3}} |Re(FT_{ijk})| \right)^2 + \left(\sum_{\substack{i=1,N \\ j=1,P \\ k=1,3}} |Im(FT_{ijk})| \right)^2} \quad (3.1)$$

Ce critère étant une moyenne de fonctions de transfert, il s'agit à son tour d'une fonction, pour pouvoir discriminer des solutions et donc l'utiliser comme critère d'optimisation, il faut être capable de discriminer les courbes MFT obtenues. Les experts Renault proposent d'étudier le maximum de cette fonction sur la plage de fréquences.

α -test

On propose de vérifier la possibilité d'optimiser à partir de $\max(MFT)$. Afin de vérifier si la réponse est convexe vis-à-vis du problème mécanique, on propose d'utiliser l' α -test. Il s'agit de faire varier le module d'Young et la masse volumique grâce à un paramètre α qui varie entre 0 et 1, comme décrit dans (3.2). On s'attend à ce que le critère décroisse quand α croît (plus la structure est rigide, moins son rayonnement est important). La figure 3.2 montre que ce n'est pas le cas, on observe de plus que la décroissance de ce critère est fortement non-linéaire.

$$\begin{cases} E = \alpha^3 E_0 \\ \rho = \alpha \rho_0 \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (3.2)$$

Nous observons aussi la dépendance de ce critère aux points de mesures, la figure 3.2 montre le maximum de MFT obtenu à partir de 32 points d'écoute, puis nous observons les résultats obtenus en sélectionnant 16 points parmi les 32 et les 16 complémentaires. La courbe est sans équivoque et on retrouve le comportement d'une moyenne de la part de la courbe MFT, la courbe 32 points est comprise entre les deux courbes 16 points, lorsque la courbe à 32 points n'est pas comprise entre les deux autres, on retrouve le comportement indésirable de la fonction maximum où elle peut passer d'une fréquence à une autre en fonction du nombre de points de mesure. Cette dépendance spatiale produit un autre effet indésirable, l'optimisation de forme va localiser les changements de forme autour des points de mesure et ainsi modifier la MFT de manière artificielle sans garantir un effet sur le rayonnement acoustique.

3.1.1.2 Un nouveau critère

Bien que le critère précédent soit un critère classiquement utilisé par les ingénieurs Renault, il semble difficile de l'utiliser pour l'optimisation. Nous allons donc définir un nouveau critère, permettant de caractériser le rayonnement acoustique de l'écran thermique, et qui ait un meilleur comportement pour l'optimisation que le précédent.

Nous avons effectué une première étude sur la plage de fréquences $[500Hz; 1500Hz]$ par pas de $5Hz$ afin d'étudier la corrélation entre la pression quadratique moyenne au niveau de l'interface éléments finis/infinis et le critère. L'analyse est effectuée pour une plaque d'épaisseur $0,5mm$. Intuitivement, existant une forte relation entre l'accélération normale à la paroi et la pression

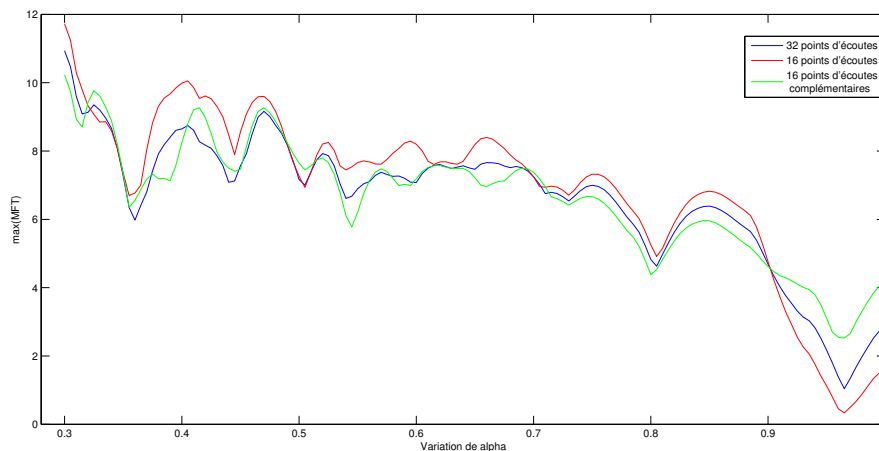


FIGURE 3.2 – Mise en place de l' α -test sur le critère maximum de MFT obtenu à partir de 32 et 2×16 points d'écoute

acoustique dans le fluide, on peut penser que le critère : $f\sqrt{E_c}$ est un bon candidat. En effet, lorsque l'on trace les courbes en fréquence de la pression acoustique moyenne au niveau de la *radiating surface* (figure 3.3a) et du critère défini précédemment (figure 3.3b), on observe que celles-ci sont très proches : les maximums se situent aux mêmes fréquences et la tendance est la même. La corrélation de ces deux critères, calculée grâce à la définition de Pearson (3.3),

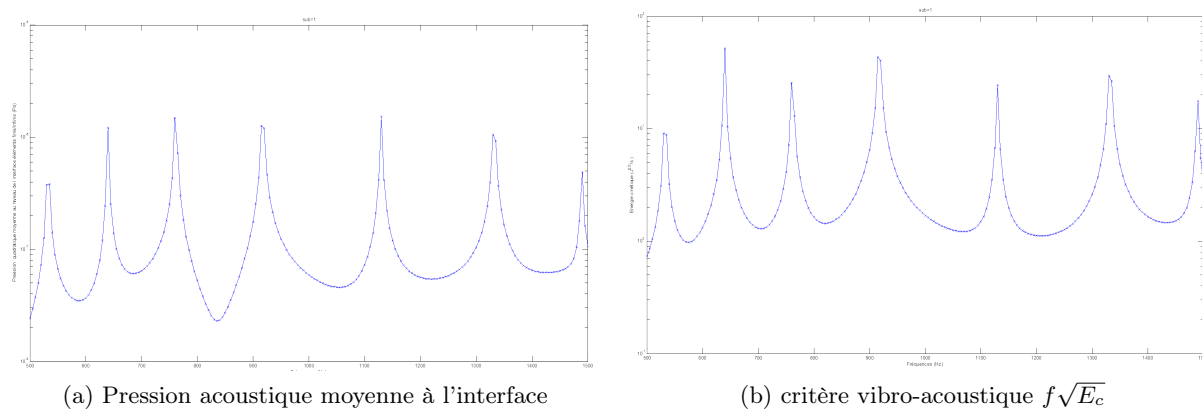
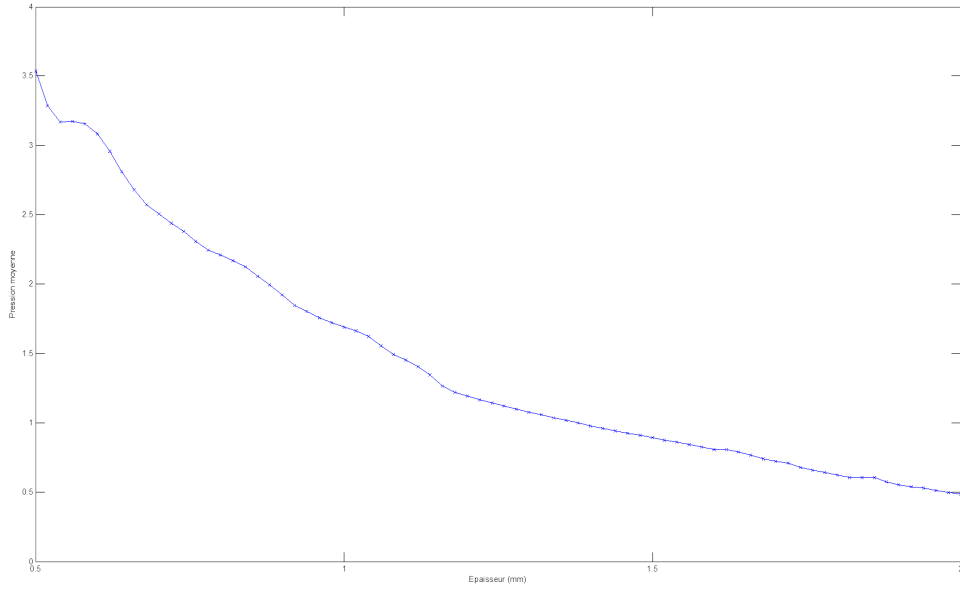


FIGURE 3.3 – Comparaison de la pression acoustique et du critère basé sur l'énergie cinétique sur la plage de fréquences $[500Hz; 1500Hz]$

vaut 0,9266 ce qui nous assure que le critère choisi est adapté au phénomène que l'on souhaite modéliser. Il reste maintenant à valider ce critère à l'aide de l' α -test présenté précédemment. Pour cela nous utilisons l'épaisseur de la plaque comme paramètre à faire varier. Les résultats de ce test sont représentés figure 3.4, la courbe est monotone décroissante ce qui nous assure le bon comportement de ce critère pour l'optimisation. Pour plus d'informations sur l'étude de ce

FIGURE 3.4 – Évolution du critère $f\sqrt{E_c}$ en fonction de l'épaisseur de la plaque

critère, se référer à [Philippe 2011].

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.3)$$

Ce nouveau critère ayant de bonnes propriétés pour l'optimisation et ayant une bonne corrélation avec le problème acoustique, nous proposons de l'utiliser pour l'optimisation du rayonnement d'un écran thermique.

3.1.2 Paramétrage

Nous allons mettre en place un paramétrage de type mélange de modes propres, les points de fixation sont définis hors de l'espace de conception, le reste de la surface est donc l'espace de conception. Nous allons donc encasturer les surfaces contenant les points de fixation lors de l'analyse modale préliminaire donnant les formes pour le mélange, ce qui nous assure de les exclure de l'espace de conception (voir figure 3.5). Nous allons utiliser les 40 premiers modes propres comme paramétrage, ce choix est un compromis entre :

- nombre de paramètres,
- des modes de faibles fréquences qui assurent des modifications de formes globales,
- ainsi que des modes de plus hautes fréquences pour des modifications plus localisées.

Le procédé utilisé pour la fabrication des écrans thermiques est l'emboutissage, nous définissons donc les 6 filtres suivants le caractérisant afin de trouver des formes adéquates :

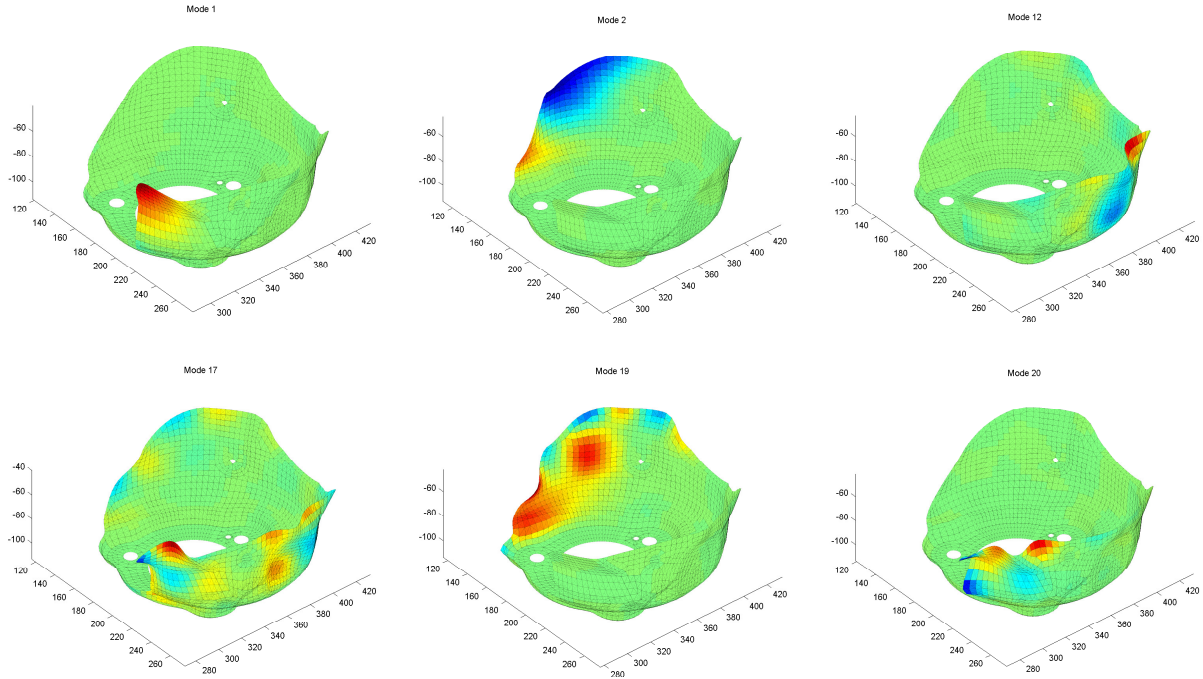


FIGURE 3.5 – Exemple de fonctions paramètres pour le mélange

Filtre 1 : choix d'une direction d'emboutissage

Filtre 2 : élimination des oscillations trop faibles

Filtre 3 : troncature des emboutis pour harmoniser la hauteur d'emboutissage

Filtre 4 : jonction des emboutis trop proches

Filtre 5 : réalisation des murs d'emboutissage

Filtre 6 : création de rayons de courbure

Les paramètres des filtres (direction, hauteur minimale, hauteur, distance minimale, etc.) sont utilisés en tant que paramètres dans l'optimisation, ils sont définis pour respecter un procédé de fabrication (en harmonisant les emboutis par exemple) mais il est intéressant de laisser une marge de manœuvre à l'optimisation sur les paramètres des emboutis.

3.2 Optimisation

La solution optimale est un compromis à faire entre l'augmentation de la masse qui doit être la plus faible possible et la minimisation du rayonnement acoustique, on étudie donc le graphe de Pareto masse en fonction du critère $f\sqrt{E_c}$ (figure 3.6). Le problème étant défini, nous réalisons l'optimisation de l'écran grâce à la méthode des plans d'expériences et des surfaces de réponses. Le tableau 3.1 montre la qualité des modèles statistiques, à savoir un mélange d'experts basé

TABLE 3.1 – Erreur de modélisation pour les deux critères étudiés

	Construction		Validation	
	RMSE	R2	RMSE	R2
$f\sqrt{E_c}$	0.08	0.87	0.09	0.81
Masse	0.02	1.00	0.05	0.98

sur des polynômes et des modèles de type polyMARS, à l'issue de 10 itérations, on constate que l'erreur commise est faible, notamment sur les données de validation, ce qui montre que les modèles statistiques calculés permettent de bien interpoler le phénomène. On observe deux

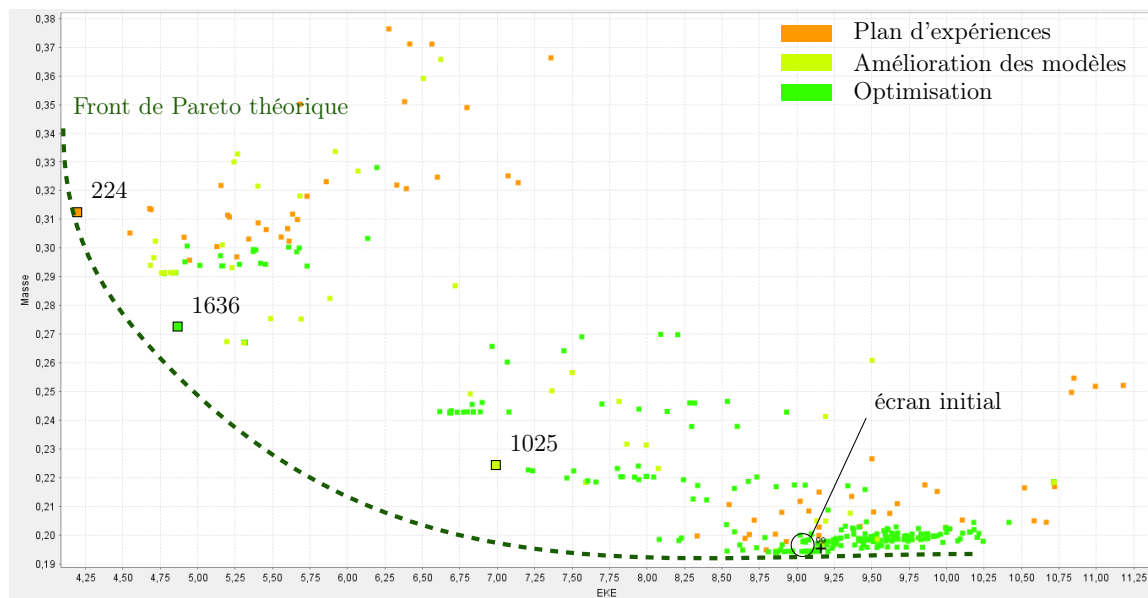


FIGURE 3.6 – Représentation des résultats d'optimisation sur un graphe de Pareto

groupes de points sur cette figure, il semble difficile d'explorer la totalité du plan de Pareto avec le paramétrage choisi, en effet l'utilisation des filtres empêche l'exploration de certaines parties du plan en se ramenant à des formes respectant les contraintes d'emboutissage. De plus les points issus de l'optimisation ont tendance à minimiser fortement la masse sans réussir à minimiser le rayonnement acoustique, ce qui indique que la masse a un poids plus important dans l'optimisation, ceci est dû au fait que le paramétrage choisi induit nécessairement une augmentation de masse puisqu'il s'agit de créer des embouts. Il n'y a pas de tendance franche pour obtenir un front de Pareto, en effet, on constate que des points issus de l'amélioration des modèles sont meilleurs que des points d'optimisation. Cependant, on peut remarquer que le processus d'optimisation mis en œuvre ici permet tout de même de trouver des solutions répondant au problème posé, en effet, on sélectionne trois points qui nous paraissent intéressants (cf. tableau 3.2) que nous allons analyser.

3.3 Résultats

À l'issue du processus d'optimisation, nous avons proposé aux ingénieurs trois points correspondant à des compromis intéressants entre la masse et le rayonnement acoustique, ils ont été choisis car ils correspondent à des points du graphe de Pareto proches de l'optimum théorique. Les résultats sont donnés dans le tableau 3.2, comme nous l'avons précisé précédemment, ces trois points augmentent la masse de la pièce, il faut donc faire un compromis entre cette augmentation et la réduction du rayonnement obtenue.

TABLE 3.2 – Sélection de points intéressants

Essai n°	Origine	$f\sqrt{E_c}$	Gain $f\sqrt{E_c}$ (%)	Masse (g)	Δ Masse (%)
0	écran initial	9.160700	–	195.33	–
224	plan d'expériences	4.547215	50.36	305.26	56.28
1025	amélioration des modèles	7.206543	21.33	222.70	14.01
1636	optimisation	5.193979	43.30	267.42	36.91

Le premier essai que nous avons sélectionné, le n° 224 représenté sur la figure 3.7, permet de réaliser la plus forte diminution du rayonnement acoustique, soit un gain de 50.36%, en contre partie, il s'agit aussi de la plus forte augmentation de masse avec 56.28%. Ce point est issu du plan d'expériences, il peut difficilement être considéré comme un résultat d'optimisation mais il répond tout de même au problème, c'est pour cette raison que nous l'avons proposé aux concepteurs. On remarque qu'un raidisseur a été positionné sur l'ensemble de la partie basse de l'écran, le mode de gonflement de l'écran a donc été fortement limité ce qui permet de réduire le rayonnement aussi fortement.

L'essai n° 1025 (représenté figure 3.8) est le deuxième que nous avons sélectionné, il est issu du processus d'amélioration des modèles dont le but est d'explorer de nouvelles zones de l'espace de conception. La diminution du rayonnement acoustique est moins importante que pour l'essai précédent avec seulement 21.33% de gain mais il nous a semblé intéressant de le proposer aux concepteurs car l'augmentation de la masse est faible (14.01%) ce qui fait un ratio gain de rayonnement/augmentation de masse de 1,52 contre 0.89 pour l'essai n° 224. On constate qu'ici aussi les modes de gonflement ont été diminués mais cette fois-ci à l'aide de raidisseurs verticaux. Cette solution est un bon compromis si l'augmentation de masse est un critère important pour le choix d'une solution.

Le dernier essai que nous avons sélectionné est le n° 1636 (figure 3.9), il s'agit d'un point issu de l'optimisation permettant un gain en rayonnement de 43.30% pour une augmentation de la masse de 36.91%, soit un ratio de 1.17. Cette fois-ci les raidisseurs sont situés essentiellement sur le haut de l'écran ainsi que certains verticaux, la tendance est là aussi à limiter les modes de gonflement de cette pièce.

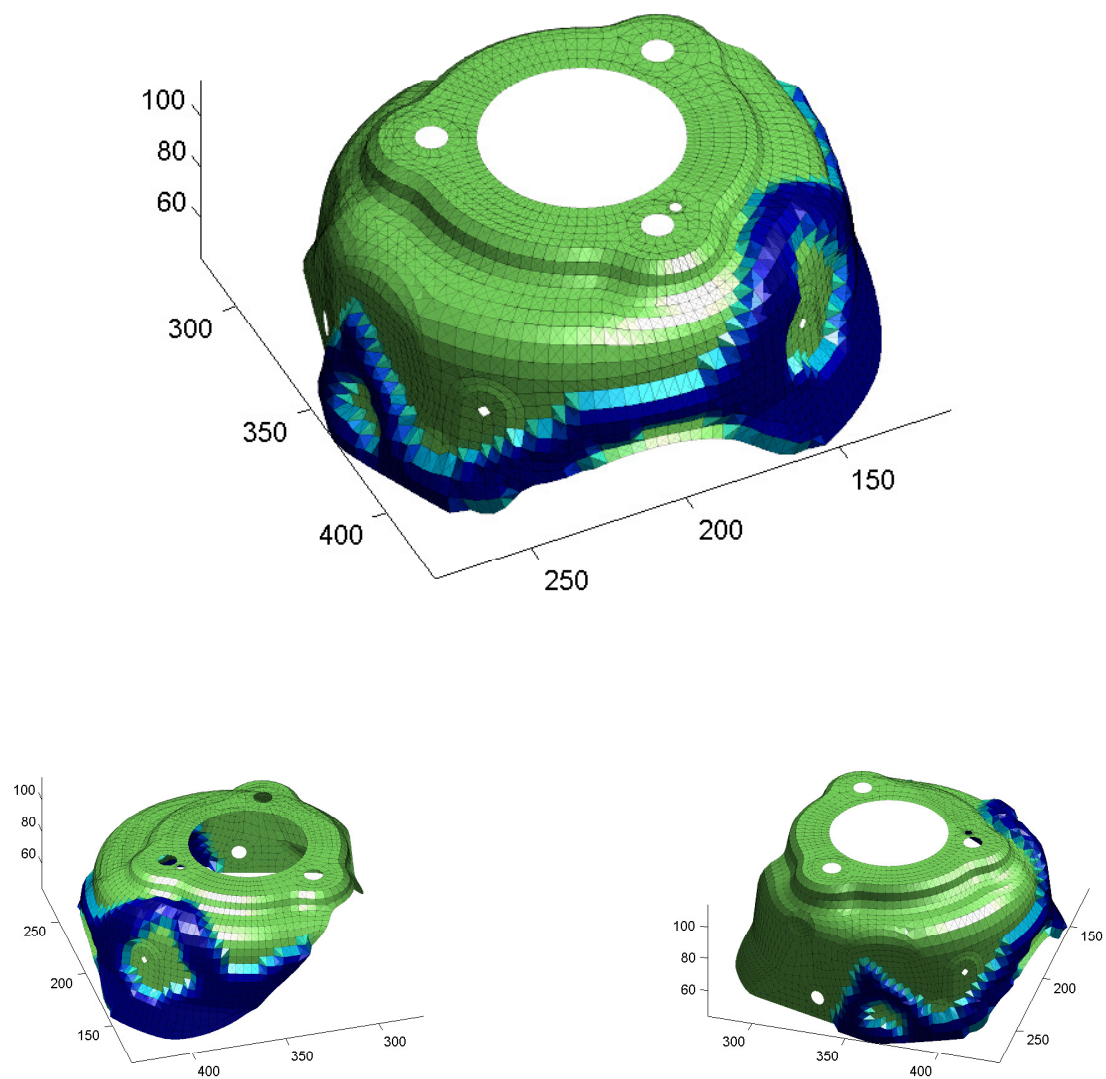


FIGURE 3.7 – Essai n° 224 : -50.36% de rayonnement acoustique ; $+56.28\%$ de masse

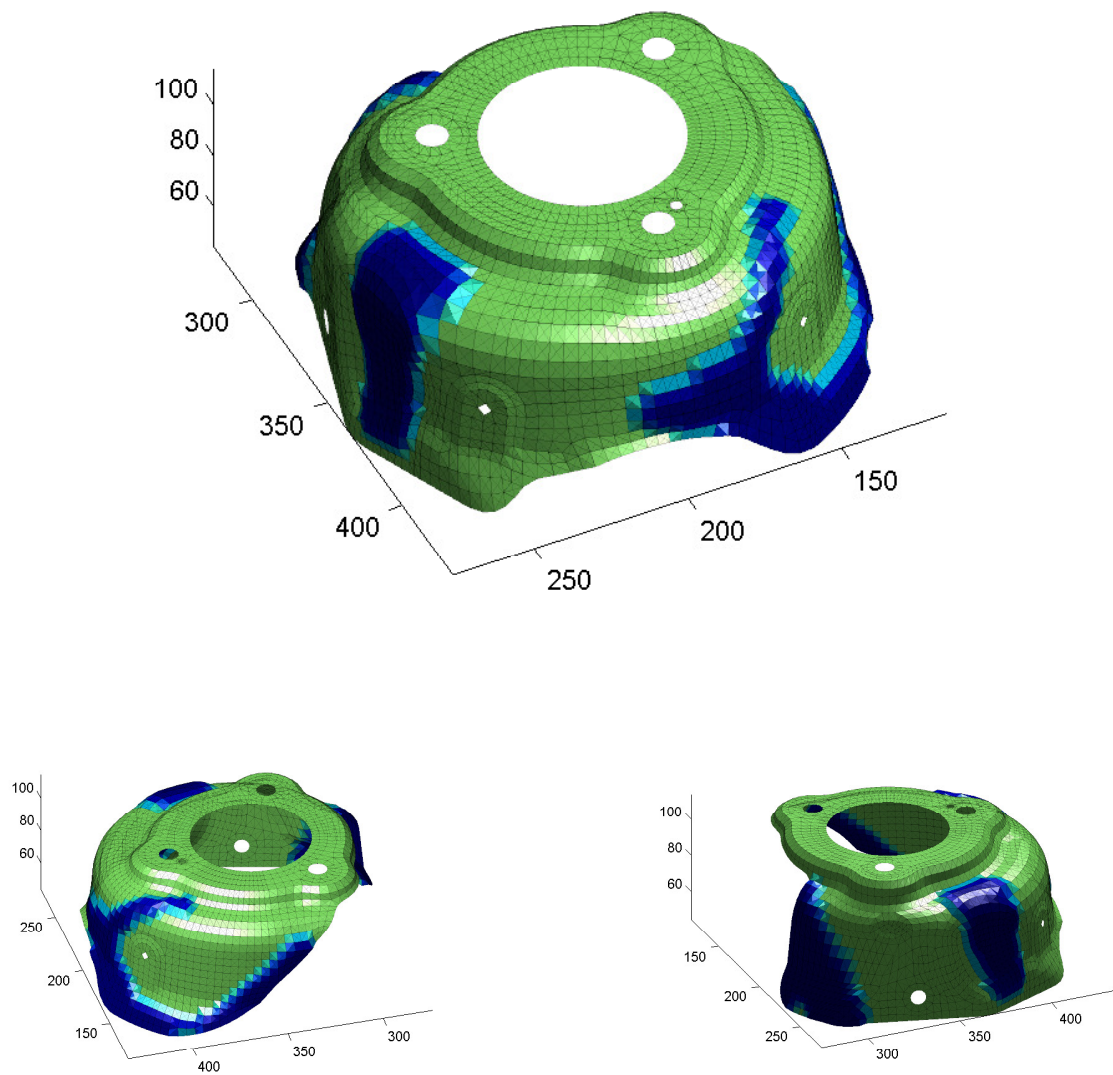


FIGURE 3.8 – Essai n° 1025 : -21.33% de rayonnement acoustique ; $+14.01\%$ de masse

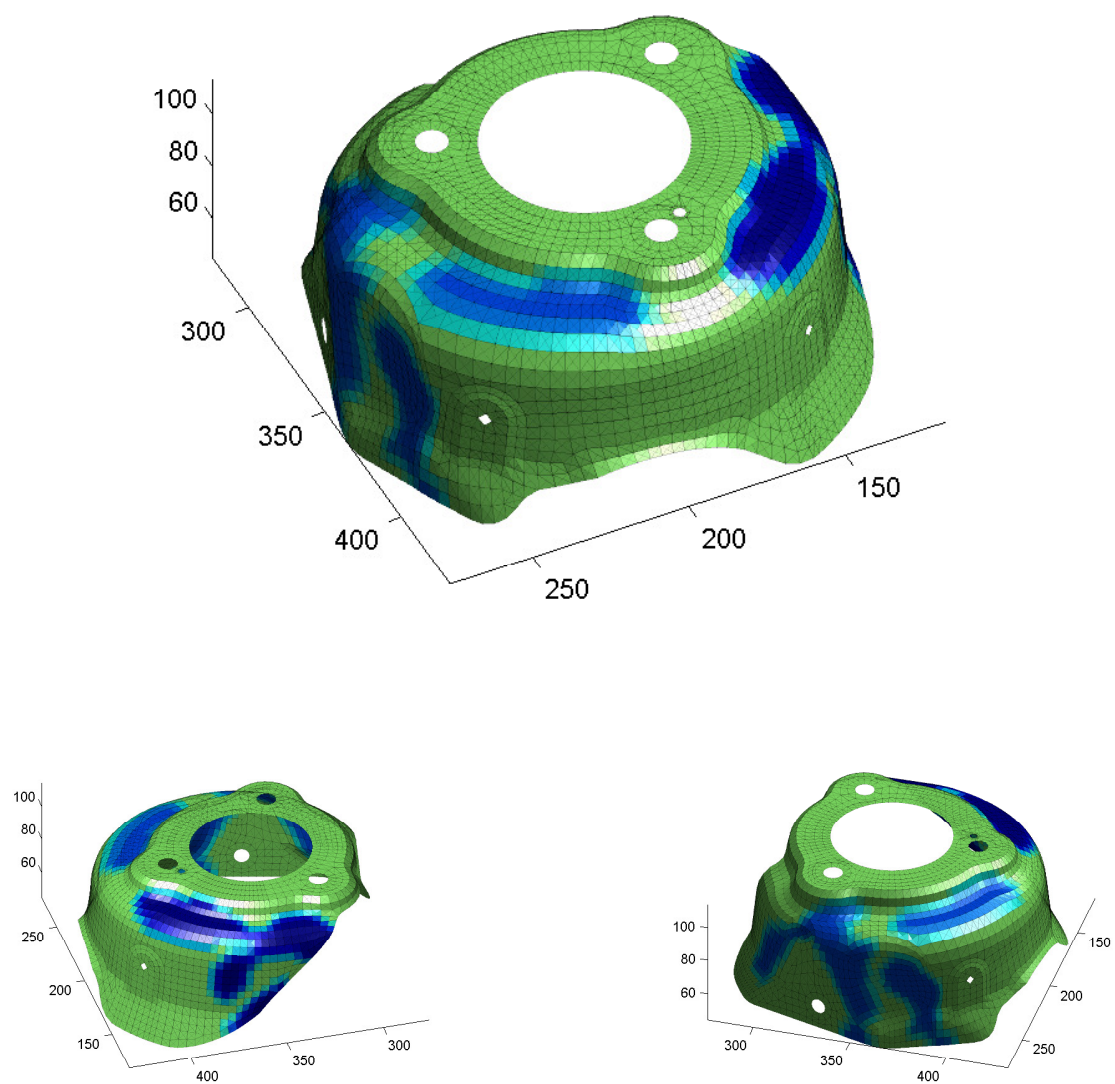


FIGURE 3.9 – Essai n° 1636 : -43.30% de rayonnement acoustique ; $+36.91\%$ de masse

3.4 Conclusion sur le mélange de formes

Ces deux chapitres ont été l'occasion de présenter deux extensions des méthodes utilisées chez Renault. Dans un premier temps, nous avons cherché à utiliser un paramétrage basé sur une CAO. Afin de limiter le coût de l'élaboration d'une CAO paramétrée, nous proposons de définir des formes simples dans une bibliothèque. La création de nouvelles topologies, donc l'exploration de l'espace de conception, est rendue possible grâce au mélange entre les instances des formes élémentaires. Cependant, nous avons vu qu'en simplifiant le paramétrage a priori, le processus d'optimisation devient très difficile à mettre en place.

Cette limitation nous a poussé à proposer une autre méthode en faisant la synthèse entre l'optimisation topographique d'une part, et le mélange de formes élémentaires d'autre part. Nous avons mis en œuvre cette méthode pour optimiser le rayonnement acoustique d'un écran thermique à partir d'une base de modes propres. Les résultats obtenus permettent de répondre au problème d'optimisation posé, cependant, nous avons vu que l'exploration du plan de Pareto est limitée car l'utilisation de filtres restreint l'accès à certaines zones.

Cette méthode fait un meilleur compromis entre la richesse du paramétrage et le processus d'optimisation, ses principaux avantages sont sa simplicité de mise en œuvre quelque soit la physique mise en jeu, ainsi que les codes de calculs utilisés. Cependant, afin de décrire des formes complexes, il est nécessaire d'utiliser beaucoup de modes propres : le problème d'optimisation est de grande taille. Nous avons proposé l'utilisation de filtres permettant d'harmoniser les formes vis-à-vis d'un procédé de fabrication, ce qui a pour effet de dé-régulariser le problème d'optimisation (deux jeux de paramètres différents peuvent donner des formes identiques). On peut aussi souligner le fait que deux formes proches sont obtenues à l'aide de jeux de paramètres très différents. Ces limites nous amènent à proposer une nouvelle méthode qui est l'objet de la partie suivante.

Bibliographie

- [Anamode-5.2 2007] Anamode-5.2. *Manuel Utilisateur*. Renault S.A., 2007. (Cité en page [46](#).)
- [Philippe 2011] Jonathan Philippe, Marc Albertelli et Laurent Blanc. Optimisation des critères NVH. Master's thesis, Renault – École Centrale de Lyon, 2011. (Cité en page [49](#).)

Deuxième partie

Paramétrage intrinsèque de forme

Mise en place d'une méthode de paramétrage intrinsèque de forme

Sommaire

4.1	Présentation de la méthode	63
4.1.1	Le modèle linéaire de Koiter	64
4.1.1.1	Calcul de la rigidité en membrane	66
4.1.1.2	Calcul de la rigidité en flexion	66
4.1.1.3	Calcul de la rigidité globale	67
4.1.2	Équation dynamique d'une coque mince	67
4.1.3	Calcul de la dérivée par rapport à φ	68
4.2	Critères mécaniques	70
4.2.1	Énergie de déformation	70
4.2.2	Positionnement de la première fréquence de résonance	70
4.3	Mise en œuvre éléments finis	73
4.3.1	Description des éléments de Kanev et d'Argyris	73
4.3.1.1	Introduction aux coordonnées barycentriques	73
4.3.1.2	Triangle de Kanev	74
4.3.1.3	Triangle d'Argyris	76
4.3.2	Élément utilisé	78
4.3.3	Intégration numérique	78
4.4	Exemples de paramétrages	78
4.4.1	Cylindre	78
4.4.2	Tronc de cône excentré	80
4.4.3	Paraboloïde hyperbolique	81
4.5	Bilan et perspectives sur le paramétrage intrinsèque de forme	83
	Bibliographie	85

Nous proposons d'utiliser la formulation coques profondes de type Koiter [Koiter 1968] afin d'introduire les paramètres de formes dans les équations mécaniques. En effet il s'agit de décrire la forme comme une fonction

$$\varphi : (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_0 \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$$

et d'utiliser cette fonction pour résoudre le problème mécanique sur le domaine de référence Ω_0 . L'intérêt de cette formulation réside dans le fait que la fonction φ peut faire intervenir de très fortes courbures [Destuynder 1985], à la différence d'un modèles de type Marguerre-von Kármán [Ciarlet 2006] qui est destiné aux coques peu profondes. Le prix à payer est d'avoir des équations complexes à traiter qui font appel à des notions non-triviales de géométrie différentielle.

Cette fonction peut alors être vue comme un paramétrage de la forme et le problème d'optimisation revient à trouver la fonction φ_{opt} telle que le problème¹

$$\mathcal{E}_{\Omega_{opt}}(u) = f \quad \text{posé sur} \quad \Omega_{opt} = \varphi_{opt}(\Omega_0)$$

minimise une fonctionnelle $J(\varphi, u)$.

Ainsi il est possible de résoudre simultanément le problème de forme et le problème mécanique en sorte que *l'optimisation porte alors sur un problème mécanique paramétré par la forme*. Étant donné que les équations mécaniques dépendent de la forme et qu'elles sont posées sur un domaine indépendant de celle-ci, il sera possible :

- d'en calculer les gradients,
- d'utiliser un maillage fixe du domaine de référence,
- de faire de l'optimisation en utilisant les points de contrôles des carreaux de Bézier comme variables d'optimisation.

Cette méthode permet donc de regrouper dans un même outil informatique plusieurs fonctions (modification de forme + solveur + optimiseur), ce qui simplifie le workflow d'optimisation. L'inconvénient est qu'elle nécessite des développements spécifiques que nous allons préciser dans ce chapitre.

L'objectif de cette partie est de montrer que l'utilisation de ces méthodes dans le cadre de l'optimisation de forme peuvent être utilisées dans le contexte automobile, caractérisé par des formes ayant de très fortes courbures. On constate que dans la littérature, des développements ont été réalisés pour des structures dans le domaine du génie civil ou de l'aéronautique [Bernadou 1994] (donc sur des structures plus régulières). Nous allons développer dans ce chapitre le calcul des gradients pour l'énergie de déformation et le premier mode propre d'une structure.

Notons que ces méthodes de coques n'étant pas disponibles dans les codes commerciaux utilisés dans l'industrie automobile il est nécessaire d'écrire formulation éléments finis associée avant de traiter le problème d'optimisation.

¹Dans la suite de cette Thèse, on traitera un problème d'élasticité linéaire, mais la méthode peut être généralisée à d'autres types d'équations.

4.1 Présentation de la méthode

Le principe de base de cette méthode repose sur l'utilisation d'une fonction de transformation qui permet d'écrire l'équilibre mécanique de la coque de forme inconnue sur une configuration de référence indépendante de la forme. Les paramètres de la fonction donnent alors un paramétrage de la forme inconnue qui pourra être utilisé pour l'optimisation. Une manière simple d'envisager ce problème est de projeter un rectangle plan de référence sur la surface.

Cette méthode repose sur des travaux tels que [Bernadou 1991a] ou [Ciarlet 2005] qui forment les équations d'élasticité des coques en coordonnées curvilignes, donc à l'aide de cette fonction de transformation. Nous proposons, sur la base des travaux de [Bernadou 1991a], d'étendre cette méthode à l'optimisation de forme pour l'automobile. Des travaux récents sur la rigidité géométrique des surfaces, réalisés sur la même base que la méthode présentée, font une interprétation géométrique de la relation entre la forme et le comportement mécanique [Choi 1995, Audoly 2000, Audoly 2010].

On considère transformation φ (voir figure 4.1), qui projette un domaine de référence $2D$, Ω_0 , sur une forme $3D$, Ω , définie par :

$$(\xi_1, \xi_2) \in \Omega_0 \mapsto \varphi(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$$

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, cette fonction est la base de cette méthode, elle nous permet de faire le passage entre la forme inconnue et un domaine de référence plan. Il est alors nécessaire d'introduire des éléments de géométrie différentielle, qui permettent d'écrire les équations d'élasticité en coordonnées curvilignes sur le domaine de référence. En particulier, nous allons voir que les tenseurs des taux de déformations en membrane et en flexion nécessitent l'utilisation des bases covariantes et contravariantes que nous définissons dans la suite de cette section. La justification du passage en coordonnées curvilignes ne fait pas l'objet de cette Thèse, cependant, les démonstrations des résultats énoncés ci-après ont été faites dans [Ciarlet 2005, p. 103–193].

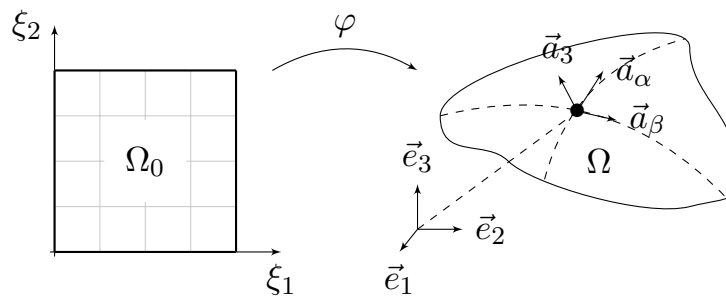


FIGURE 4.1 – Représentation d'une géométrie Ω à l'aide d'une fonction de forme associée et d'un plan de référence Ω_0

À l'aide de notions de géométrie différentielle, on peut définir les bases locales covariantes (4.1) et contra-variantes (4.2) ainsi que la première² (4.3) et la seconde forme fondamentale³ (4.5) de

²La première forme fondamentale correspond aux coordonnées curvilignes de la surface $3D$, représentée par les lignes pointillées sur la figure 4.1. Elle peut aussi s'appeler tenseur métrique.

³La seconde forme fondamentale représente la courbure de la surface $3D$.

la fonction φ . Dans la suite du chapitre, les indices grecs prennent leurs valeurs dans $\{1, 2\}$ et les indices latins les prennent dans $\{1, 2, 3\}$. À partir de (4.4), on peut calculer l'élément d'aire de la surface $dS = \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2$.

$$\begin{aligned}\vec{a}_\alpha &= \varphi_{,\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\alpha} \\ \vec{a}_3 &= \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\delta_\beta^\alpha &= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}, \\ \vec{a}^\beta \cdot \vec{a}_\alpha &= \delta_\alpha^\beta, \\ \vec{a}^3 &= \vec{a}_3\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta\tag{4.3}$$

$$a = \det(a_{\alpha\beta})\tag{4.4}$$

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\beta,\alpha}\tag{4.5}$$

Le tenseur métrique $(a_{\alpha\beta})$ permet alors de passer de la base covariante à la base contravariante à l'aide de la relation (4.6) où $(a^{\alpha\beta})$ est l'inverse de la matrice $(a_{\alpha\beta})$.

$$\vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta, \quad \vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta = a^{\beta\alpha}\tag{4.6}$$

De même, on peut définir les composantes mixtes (4.7) et contravariantes (4.8) de la seconde forme fondamentale, ou inversement, calculer les composantes covariantes à partir des composantes contravariantes correspondantes (4.9).

$$b_\alpha^\beta = a^{\beta\lambda} b_{\lambda\alpha}\tag{4.7}$$

$$b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\nu} b_{\lambda\nu}\tag{4.8}$$

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\nu} b^{\lambda\nu}\tag{4.9}$$

On définit alors le symbole de Christoffel (4.10) qui permet de calculer les dérivées des vecteurs de base dans le repère global.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \vec{a}^\sigma \cdot \partial_\beta \vec{a}_\alpha\tag{4.10}$$

Après avoir défini les bases de la géométrie différentielle, on peut calculer la surface moyenne d'une coque mince. Cette surface moyenne nous permet alors de poser les équations de coques comme nous allons le voir dans la section suivante.

4.1.1 Le modèle linéaire de Koiter

Dans cette section nous énonçons la formulation linéaire de coques de Koiter [Koiter 1968]. Notons qu'il existe plusieurs formulations linéaires de coques minces, on peut citer le modèle de [Naghdi 1963] qui permet de calculer les effets de cisaillement en plus des effets de membrane et de flexion, ces deux modèles sont destinés aux coques générales, notamment, sans hypothèse sur la profondeur de la coque. Un modèle de Marguerre-von Kármán [Ciarlet 2006], qui est destiné aux coques peu profondes, est moins adapté à l'optimisation de forme car il impose des variations de courbures faibles par rapport aux autres dimensions de la coque.

Remarque 4.1.1 Pour formuler un tel problème, on définit une coque par sa surface moyenne et son épaisseur en tout point. Ici, on considère la surface moyenne comme étant une immersion⁴ $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega_0 \mapsto \varphi(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$ du domaine de référence dans $\mathbb{R}^3$, cette hypothèse est très faible car elle n'implique pas la bijectivité de φ , et autorise donc de paramétrer des surfaces complexes.

Dans un premier temps, on propose de calculer les matrices de masse et de rigidité dans le cadre de la théorie des coques de Koiter. Le modèle de Koiter se base sur les hypothèses de Kirchhoff-Love, bien qu'il ne permette pas de calculer directement les sollicitations en cisaillement, il sera possible de les reconstruire en intégrant dans l'épaisseur. Nous avons choisi ce modèle car c'est un bon compromis entre précision et simplicité. Sa formulation variationnelle s'écrit :

$$\text{Trouver } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}), \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \quad (4.11)$$

$\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-espace de $H^1(\Omega_0)$ qui permet de prendre en compte les conditions aux limites (encastrement en périphérie, bord libre, etc.), on définit les expressions suivantes, qui correspondent aux formulations classiques de l'élasticité :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega_0} \varepsilon E^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\sigma\tau}(\vec{v}) + \frac{\varepsilon^3}{3} E^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}) \rho_{\sigma\tau}(\vec{v}) \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.12)$$

$$f(\vec{v}) = \int_{\Omega_0} \vec{p}\vec{v}\sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\Gamma_0} \vec{N}\vec{v} + M^\alpha(v_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda v_\lambda) d\gamma \quad (4.13)$$

où $\gamma_{\alpha\beta}$, défini en (4.14), est le tenseur des taux de déformations en membrane, $\rho_{\alpha\beta}$, défini en (4.15), est le tenseur des taux de déformations en flexion, et $E^{\alpha\beta\sigma\tau}$ le tenseur d'élasticité, dont nous définissons la loi pour un matériau isotrope en (4.16). Les composantes covariantes du déplacement de la coque, $\vec{u}$, sont mesurées par rapport à sa configuration de référence $\Omega = \varphi(\Omega_0)$, $(u_i(\xi_1, \xi_2))_{i=1}^3$ qui sont exprimées dans la base contravariante au point $\varphi(\xi_1, \xi_2)$. Le tenseur de déformation en membrane s'écrit de la manière suivante (on utilise la convention de sommation d'Einstein)

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) &= \frac{1}{2} (\partial_\beta \vec{u} \cdot \vec{a}_\alpha + \partial_\alpha \vec{u} \cdot \vec{a}_\beta) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma - b_{\alpha\beta} u_3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

et le tenseur des déformations en flexion

$$\rho_{\alpha\beta}(\vec{u}) = (\partial_{\alpha\beta} \vec{u} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \vec{u}) \cdot \vec{a}_3 \quad (4.15)$$

$$= \partial_{\alpha\beta} u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma u_3 - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3 \quad (4.15_a)$$

$$+ b_\alpha^\sigma (\partial_\beta u_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau u_\tau) + b_\beta^\tau (\partial_\alpha u_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma u_\sigma) \quad (4.15_b)$$

$$+ (\partial_\alpha b_\beta^\tau + \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau b_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\tau) u_\tau \quad (4.15_c)$$

Remarque 4.1.2 La dépendance des tenseurs de déformation vis-à-vis des paramètres de forme est localisée dans les vecteurs des bases covariantes et contravariantes, les symboles de Christoffel ainsi que la seconde forme fondamentale. Le tenseur d'élasticité dépend alors intrinsèquement des paramètres de forme.

⁴C'est à dire que la matrice jacobienne de φ , de dimension $(3, 2)$ est de rang 2 en tout point du domaine Ω_0 .

4.1.1.1 Calcul de la rigidité en membrane

D'un point de vue formel, la forme bilinéaire (4.12) est évaluée en exprimant le tenseur élastique (d'ordre 4) $E^{\alpha\beta\sigma\tau}$ et les tenseurs d'ordre 2 de déformation en membrane $\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u})$ et de déformation en flexion $\rho_{\alpha\beta}(\vec{u})$ sous la forme respectivement d'une matrice 4×4 et de vecteurs de dimensions 4. Ainsi $E^{\alpha\beta\sigma\tau}$ est représenté par

$$E^{\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{2\nu E}{1-\nu^2} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{E}{1+\nu} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \quad (4.16)$$

Les tenseurs γ et ρ sont écrits sous la forme

$${}^t\{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}\} \quad (4.17)$$

et

$${}^t\{\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}\} \quad (4.18)$$

respectivement. Ces vecteurs dépendent évidemment des déplacements $\vec{u}$ et de leurs dérivées. Le vecteur défini en (4.17) s'exprime de la façon suivante en fonction des degrés de liberté

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\xi_1, \xi_2) = & {}^t\{u_1, \partial_{\xi_1} u_1, \partial_{\xi_2} u_1, \\ & u_2, \partial_{\xi_1} u_2, \partial_{\xi_2} u_2, \\ & u_3, \partial_{\xi_1} u_3, \partial_{\xi_2} u_3, \partial_{\xi_1 \xi_1} u_3, \partial_{\xi_1 \xi_2} u_3, \partial_{\xi_2 \xi_2} u_3\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11}^1 & 1 & 0 & -\Gamma_{11}^1 & 0 & 0 & -b_{11} & 0_5 \\ -\Gamma_{12}^1 & 0 & 0.5 & -\Gamma_{12}^1 & 0.5 & 0 & -b_{12} & 0_5 \\ -\Gamma_{21}^1 & 0 & 0.5 & -\Gamma_{21}^1 & 0.5 & 0 & -b_{21} & 0_5 \\ -\Gamma_{22}^1 & 0 & 0 & -\Gamma_{22}^1 & 0 & 1 & -b_{21} & 0_5 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

La matrice de raideur en membrane est alors obtenue par le produit matriciel suivant :

$$E_{memb} = \varepsilon {}^t\Lambda \cdot E \cdot \Lambda \quad (4.21)$$

4.1.1.2 Calcul de la rigidité en flexion

Les termes du tenseur $\rho_{\alpha\beta}(\vec{u})$ défini en (4.15) sont exprimés en fonction des degrés de liberté de $\mathbf{U}$ à l'abscisse curviligne (ξ_1, ξ_2) sous la forme matricielle suivante :

i) Pour le terme (4.15_a)

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 0_6 & -(b_1^1 b_{11} + b_1^2 b_{21}) & -\Gamma_{11}^1 & -\Gamma_{11}^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0_6 & -(b_1^1 b_{12} + b_1^2 b_{22}) & -\Gamma_{12}^1 & -\Gamma_{12}^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0_6 & -(b_2^1 b_{11} + b_2^2 b_{21}) & -\Gamma_{21}^1 & -\Gamma_{21}^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0_6 & -(b_2^1 b_{12} + b_2^2 b_{22}) & -\Gamma_{22}^1 & -\Gamma_{22}^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ii) le terme (4.15_b) s'exprime sous la forme :

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} -b_1^1 \Gamma_{11}^1 - b_1^2 \Gamma_{12}^1 & b_1^1 & 0 & -b_1^1 \Gamma_{11}^2 - b_1^2 \Gamma_{12}^2 & b_1^2 & 0 & 0_6 \\ -b_1^1 \Gamma_{21}^1 - b_1^2 \Gamma_{22}^1 & 0 & b_1^1 & -b_1^1 \Gamma_{21}^2 - b_1^2 \Gamma_{22}^2 & 0 & b_1^2 & 0_6 \\ -b_2^1 \Gamma_{11}^1 - b_2^2 \Gamma_{12}^1 & b_2^1 & 0 & -b_2^1 \Gamma_{11}^2 - b_2^2 \Gamma_{12}^2 & b_2^2 & 0 & 0_6 \\ -b_2^1 \Gamma_{21}^1 - b_2^2 \Gamma_{22}^1 & 0 & b_2^1 & -b_2^1 \Gamma_{21}^2 - b_2^2 \Gamma_{22}^2 & 0 & b_2^2 & 0_6 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$+ \begin{bmatrix} -b_1^1 \Gamma_{11}^1 - b_1^2 \Gamma_{12}^1 & b_1^1 & 0 & -b_1^1 \Gamma_{11}^2 - b_1^2 \Gamma_{12}^2 & b_1^2 & 0 & 0_6 \\ -b_2^1 \Gamma_{11}^1 - b_2^2 \Gamma_{12}^1 & b_2^1 & 0 & -b_2^1 \Gamma_{11}^2 - b_2^2 \Gamma_{12}^2 & b_2^2 & 0 & 0_6 \\ -b_1^1 \Gamma_{21}^1 - b_1^2 \Gamma_{22}^1 & 0 & b_1^1 & -b_1^1 \Gamma_{21}^2 - b_1^2 \Gamma_{22}^2 & 0 & b_1^2 & 0_6 \\ -b_2^1 \Gamma_{21}^1 - b_2^2 \Gamma_{22}^1 & 0 & b_2^1 & -b_2^1 \Gamma_{21}^2 - b_2^2 \Gamma_{22}^2 & 0 & b_2^2 & 0_6 \end{bmatrix}$$

iii) et enfin le terme (4.15_c) s'écrit :

$$\rho_3 = \begin{bmatrix} b_{1,1}^1 + \Gamma_{12}^1 b_1^2 - \Gamma_{11}^2 b_2^1 & 0_{11} \\ b_{2,1}^1 + \Gamma_{11}^1 b_2^1 + \Gamma_{12}^1 b_2^2 - \Gamma_{12}^2 b_1^1 - \Gamma_{12}^2 b_2^1 & 0_{11} \\ b_{1,2}^1 + \Gamma_{22}^1 b_1^2 - \Gamma_{21}^2 b_2^1 & 0_{11} \\ b_{2,2}^1 + \Gamma_{21}^1 b_2^1 + \Gamma_{22}^1 b_2^2 - \Gamma_{22}^2 b_1^1 - \Gamma_{22}^2 b_2^1 & 0_{11} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0_3 & b_{1,1}^2 + \Gamma_{11}^2 b_1^1 + \Gamma_{12}^2 b_1^2 - \Gamma_{11}^1 b_1^1 - \Gamma_{11}^1 b_2^2 & 0_8 \\ 0_3 & b_{2,1}^2 + \Gamma_{11}^2 b_2^1 - \Gamma_{12}^2 b_1^1 & 0_8 \\ 0_3 & b_{1,2}^2 + \Gamma_{21}^2 b_1^1 + \Gamma_{22}^2 b_1^2 - \Gamma_{21}^1 b_1^1 - \Gamma_{21}^1 b_2^2 & 0_8 \\ 0_3 & b_{2,2}^2 + \Gamma_{21}^2 b_2^1 - \Gamma_{22}^1 b_1^1 & 0_8 \end{bmatrix}$$

Pour assembler la matrice de rigidité en flexion, on additionne les trois termes précédents et on effectue le produit matriciel suivant :

$$E_{flex} = \frac{\varepsilon^3}{3} {}^t[\rho_1 + \rho_2 + \rho_3] \cdot E \cdot [\rho_1 + \rho_2 + \rho_3] \quad (4.25)$$

4.1.1.3 Calcul de la rigidité globale

La matrice d'élasticité globale E est obtenue à partir des matrices de membrane et flexion précédemment calculées en (4.21) et (4.25) :

$$E = E_{memb} + E_{flex} \quad (4.26)$$

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} {}^t \mathbf{U} E \mathbf{V} \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.27)$$

La matrice ainsi obtenue permet de calculer la rigidité en tout point (ξ_1, ξ_2) de Ω_0 sur la géométrie exacte φ (4.27). De plus, comme on a pu le voir précédemment, cette rigidité dépend directement de la forme φ . Cette dépendance est le fondement de la méthode et permet d'envisager le calcul du gradient par rapport à la forme.

4.1.2 Équation dynamique d'une coque mince

On cherche le déplacement de la coque $\vec{\mathbf{U}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ exprimé dans le repère global : $\vec{\mathbf{U}} = \vec{u} + \xi_3(u_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}) \vec{a}^{\alpha}$, on rappelle que $\vec{u} = u_i \vec{a}^i$ et $u_{3|\alpha} = u_{3,\alpha}$, solution du problème (4.28) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le déplacement } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) + a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, t), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{array} \right. \quad (4.28)$$

avec :

$$\begin{aligned} b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) &= \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \vec{V} d\Omega, \\ d\Omega &= (1 - b_{\alpha}^{\alpha} \xi_3 + (\xi_3)^2) d\xi_3 dS \\ dS &= \sqrt{ad} \xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Grâce aux expressions de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on peut expliciter $b(\vec{u}, \vec{v})$ sous la forme suivante :

$$b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) = \int_{\Omega} \rho \left[\ddot{u}_i a^i + \xi_3 (\ddot{u}_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \ddot{u}_{\lambda}) \vec{a}^{\alpha} \right] \left[v_i a^i + \xi_3 (v_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda}) \vec{a}^{\alpha} \right] d\Omega \quad (4.30)$$

On développe et on intègre dans l'épaisseur suivant ξ_3 , en prenant $o(\varepsilon^3)$ on obtient alors une écriture approchée de b sous la forme :

$$\begin{aligned} b\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) &\simeq \int_{\Omega} \rho \varepsilon \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{3} (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1)\right) (a^{\alpha\beta} \ddot{u}_{\alpha} v_{\beta} + \ddot{u}_3 v_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^2}{3} a^{\alpha\beta} ((\ddot{u}_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \ddot{u}_{\lambda}) + (\ddot{u}_{\alpha} v_{3|\beta} + \ddot{u}_{3|\alpha} v_{\beta} + 2b_{\alpha}^{\lambda} \ddot{u}_{\lambda} v_{\beta}) b_{\eta}^{\eta}) \right] \sqrt{ad} \xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.1.3 Calcul de la dérivée par rapport à φ

On définit le problème $(\mathcal{P})$ d'optimisation de forme (4.32) comme un ensemble formé d'une équation d'état (souvent représenté par sa formulation faible), une fonction de coût J_{φ} dépendant de la forme φ .

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} a_{\varphi}(\vec{u}, \vec{v}) = f_{\varphi}(\vec{v}) \\ \arg \min_{\varphi \in \mathcal{G}_{ad}} J_{\varphi}(\vec{u}) \end{array} \right. \quad (4.32)$$

On écrit le lagrangien conformément à [Céa 1986] sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = J_{\varphi}(\vec{u}) - \partial_{\vec{u}} P_{\varphi}(\vec{u}) \vec{v} \quad (4.33)$$

où la fonctionnelle P_{φ} est l'énergie potentielle de la coque, dans le cas linéaire, elle s'écrit sous la forme $P_{\varphi}(\vec{u}) = \frac{1}{2} a_{\varphi}(\vec{u}, \vec{u}) - f(\vec{u})$.

Remarque 4.1.3 *Le calcul de la dérivée détaillé dans cette section est fait de manière formelle, il suppose la dérivabilité de $\vec{u}$ par rapport à la fonction de forme. Ce qui n'est pas toujours vrai, cependant, d'après [Rousselet 1990] et [Bernadou 1994, p. 298], une justification est faite dans le cas de la statique linéaire. Pour un problème de dynamique, il est aussi possible de le justifier dans certains cas, voir la remarque 4.2.1.*

Problème direct :

L'équation d'état s'écrit donc : Pour $\varphi \in \mathcal{G}_{ad}$ et $\vec{v} \in \vec{V}$ donnés, on considère le problème :

$$\text{Trouver } \vec{u}_{\varphi} \in \vec{V} \text{ tel que } \partial_{\vec{v}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_{\varphi}, \vec{v}) \vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \in \vec{V} \quad (4.34)$$

soit encore :

$$\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_{\varphi}, \vec{v}) \vec{w} = -\partial_{\vec{u}} P_{\varphi}(\vec{u}_{\varphi}) \vec{w} \quad (4.35)$$

Problème adjoint :

L'équation d'état adjoint s'écrit : Pour $\varphi \in \mathcal{G}_{ad}$ donnée et pour $\vec{u}_\varphi \in \vec{V}$ solution de l'équation d'état (4.34), on considère le nouveau problème :

$$\text{Trouver } \vec{v}_\varphi \in \vec{V} \text{ tel que } \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) \vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \in \vec{V} \quad (4.36)$$

On en déduit donc :

$$\partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) \vec{w} = \partial_{\vec{u}} J_\varphi(\vec{u}_\varphi) \vec{w} - \partial_{\vec{u}, \vec{u}}^2 P_\varphi(\vec{u}_\varphi)(\vec{v}_\varphi, \vec{w}) \quad (4.37)$$

Dérivée de forme de l'objectif :

On cherche à exprimer la dérivée de J_φ par rapport à la forme : $DJ_\varphi \psi$, pour cela, on remarque que $J_\varphi = \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi)$, avec $\vec{u}_\varphi$ et $\vec{v}_\varphi$ les solutions du problème direct et du problème adjoint respectivement. On écrit alors la dérivée au sens dérivée de Fréchet :

$$\begin{aligned} DJ_\varphi \psi &= D_\varphi \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) \psi \\ &= \partial_\varphi \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) \psi + \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) (D\vec{u}(\varphi) \psi) + \partial_{\vec{v}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) (D\vec{v}(\varphi) \psi) \\ &= \partial_\varphi \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) \psi \end{aligned} \quad (4.38)$$

Avec (4.34) et (4.36) on en déduit que $DJ_\varphi \psi = \partial_\varphi \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) \psi$, soit encore :

$$DJ_\varphi \psi = \partial_\varphi J_\varphi(\vec{u}_\varphi) \psi - \partial_{\vec{u}, \varphi}^2 P_\varphi(\vec{u}_\varphi)(\vec{v}_\varphi, \psi) \quad (4.39)$$

Application au cas linéaire :

Dans le cas de l'élasticité linéaire, l'énergie potentielle de la coque s'écrit :

$$P_\varphi(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - f(\vec{v}) \quad (4.40)$$

On vérifie alors que le problème direct s'écrit sous la forme : Trouver $\vec{u}$ tel que $a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \vec{V}$:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{u}} P_\varphi(\vec{u}) \vec{v} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_\varphi(\vec{u} + h\vec{v}) - P_\varphi(\vec{u})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} a(\vec{u} + h\vec{v}, \vec{u} + h\vec{v}) - f(\vec{u} + h\vec{v}) - \frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{u}) + h a(\vec{u}, \vec{v}) + \frac{h^2}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - \frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{u}) - f(\vec{u}) - h f(\vec{v}) + f(\vec{u})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a(\vec{u}, \vec{v}) - f(\vec{v}) + \frac{h}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) \\ &= a(\vec{u}, \vec{v}) - f(\vec{v}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

On obtient donc :

$$\partial_{\vec{u}} P_\varphi(\vec{u}) \vec{v} = a(\vec{u}, \vec{v}) - f(\vec{v}) \quad (4.42)$$

La dérivée par rapport à la forme s'obtient donc grâce à l'équation (4.43). On rappelle que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $f(\cdot)$ dépendent directement de φ grâce à (4.27) et (4.26), on les note alors $a_\varphi(\cdot, \cdot)$ et $f_\varphi(\cdot)$ respectivement :

$$DJ_\varphi \psi = \partial_\varphi J_\varphi(\vec{u}_\varphi) \psi - \partial_\varphi a_\varphi(\vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi) + \partial_\varphi f_\varphi(\vec{v}_\varphi) \quad (4.43)$$

Des exemples d'application de ce calcul de dérivée seront donnés en section 4.2.

4.2 Critères mécaniques

Dans cette section nous allons appliquer la méthode de l'état adjoint, décrite précédemment, au calcul du gradient de forme pour l'énergie de déformation, ainsi que pour le premier mode propre.

4.2.1 Énergie de déformation

On cherche à minimiser l'énergie de déformation, le problème d'optimisation est le suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } a(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = f(\varphi, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \\ \text{Arg min}_{\varphi \in \mathcal{G}_{ad}} J_\varphi(\vec{u}), \quad \text{avec : } J_\varphi(\vec{u}) = \frac{1}{2}a(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) \end{cases} \quad (4.44)$$

On reprend le formalisme détaillé en section 4.1.3, on utilise l'expression (4.33) du lagrangien et (4.40) de l'énergie potentielle. Le problème direct est alors donné par :

$$\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) \vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \Leftrightarrow f(\varphi, \vec{w}) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w}$$

et admet une solution unique $\vec{u}_0$. Le problème adjoint s'écrit grâce à l'expression $\partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}_0, \vec{v}) \vec{w} = 0$ soit encore :

$$a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{w}) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w}$$

Or $a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{w}) = f(\varphi, \vec{w})$, on obtient alors :

$$f(\varphi, \vec{w}) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w}$$

Le problème adjoint admet donc lui aussi une solution unique, qui est identique à celle du problème direct, on dit que le problème est auto-adjoint. On peut alors calculer la dérivée du critère par rapport à la forme :

$$\begin{aligned} DJ_\varphi \psi &= \partial_\varphi J_\varphi(\vec{u}_\varphi) \psi - \partial_{\vec{u}, \varphi}^2 P_\varphi(\vec{u}_\varphi)(\vec{v}_\varphi, \psi) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\varphi a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{u}_0) \psi - \partial_\varphi a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{u}_0) \psi + \partial_\varphi f(\varphi, \vec{u}_0) \psi \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\varphi a(\varphi, \vec{u}_0, \vec{u}_0) \psi + \partial_\varphi f(\varphi, \vec{u}_0) \psi \end{aligned}$$

4.2.2 Positionnement de la première fréquence de résonance

Un problème classique dans le dimensionnement de pièces automobile consiste à repousser les fréquences propres en dehors de la plage d'excitation du moteur et ainsi s'assurer que la pièce n'entre pas en résonance avec celui-ci. En pré-dimensionnement, ne connaissant pas les fréquences exactes du GMP (qui sont somme toute relativement basses), on cherche à maximiser la première fréquence propre de la pièce étudiée et ainsi la repousser hors du domaine de variation des fréquences moteur. Nous allons donc dans un premier temps étudier les modes de vibrations libres de la coque et maximiser la première valeur propre. Le problème de vibrations libres est obtenu à partir du problème (4.28) où les efforts extérieurs sont nuls :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver le déplacement } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ b\left(\varphi, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \vec{v}\right) + a(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

On cherche des solutions sous la forme $\vec{u}(x, t) = \vec{w}(x)e^{i\omega t}$, où ω est la pulsation de la coque, ce qui nous ramène au problème équivalent suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\omega, \vec{w}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}_{ad} \text{ tels que :} \\ a(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) - \omega^2 b(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{array} \right.$$

On pose maintenant $\lambda = \omega^2$, le problème devient :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\lambda, \vec{w}) \in \mathbb{R}^+ \times \left((H^1(\Omega_0))^2 \times H^2(\Omega_0) \right) \text{ tels que :} \\ a(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) = \lambda b(\varphi, \vec{w}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned} \quad (4.45)$$

D'après [Riesz 1952] le problème (4.45) admet une suite croissante de valeurs propres, de multiplicité finie dont les vecteurs propres associés forment une base hilbertienne de $((H^1(\Omega_0))^2 \times H^2(\Omega_0))$. On définit la première valeur propre λ_0 , associée au premier vecteur propre $\vec{\theta}_0$ de la coque en libre-libre comme étant la plus petite des valeurs propres solutions de ce problème. Afin de se ramener à un problème de minimisation, on considère le critère $J_\varphi = -\lambda_0$, le calcul de λ_0 est obtenu à l'aide du quotient de Rayleigh (4.46).

$$J_\varphi = -\lambda_0 = -\min_{\vec{u}} \frac{a(\varphi, \vec{u}, \vec{u})}{b(\varphi, \vec{u}, \vec{u})} \quad (4.46)$$

D'après [Rousselet 1990], l'application $J_\varphi : \varphi \in \mathcal{G}_{ad} \mapsto -\lambda_0(\varphi) \in \mathbb{R}^-$ est dérivable lorsque la première valeur propre est de multiplicité 1, tandis qu'elle est seulement sous-dérivable (c.f. [Clarke 1987] ou [Ekeland 1974]) lorsque l'ordre de multiplicité est supérieur à 1.

Remarque 4.2.1 Lorsque la valeur propre λ_0 est de multiplicité supérieure à 1, [Rousselet 1990] montre que les vecteurs propres associés ne sont en général pas des fonctions continues de la forme φ et donc non dérivables. Cependant il est possible de calculer les sous-dérivées au sens de [Clarke 1987], voir [Gournay 2006] et [Allaire 2001]. La non-dérivabilité du vecteur propre étant due à un changement de multiplicité de la valeur propre, si celle-ci est de multiplicité constante, les vecteurs propres associés conservent leur dérivabilité. Dans les cas détaillés dans la section 4.4, la forme étant symétrique et le paramétrage ne permettant pas de casser cette symétrie, la première valeur propre sera de multiplicité constante et on assure ainsi la légitimité de la méthode décrite ci-dessous.

On propose d'utiliser la méthode décrite section 4.1.3 afin de calculer la dérivée de J_φ . On suppose par la suite que la valeur première valeur propre est de multiplicité 1 ou de multiplicité constante. On calcule l'énergie potentielle sous la forme (4.47) :

$$P_\varphi(\vec{u}) = \frac{1}{2}a(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) - \frac{\lambda}{2}b(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) \quad (4.47)$$

On définit le lagrangien sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) = J_\varphi(\vec{u}, \lambda) - \partial_{\vec{u}}P_\varphi(\vec{u})\vec{v} \quad (4.48)$$

On obtient le problème direct à partir du calcul de $\partial_{\vec{v}}\mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v})\vec{w}$, on cherche donc la solution du problème :

$$\text{Trouver } (\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}_{ad} \text{ tels que : } \partial_{\vec{u}}P_\varphi(\vec{u})\vec{v} = a(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) - \lambda b(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad}$$

La solution de ce problème est donc le couple $(\lambda_0, \eta_i \vec{\theta}_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, où $(\vec{\theta}_i)_{i=1}^n$ sont n les vecteurs propres de (4.45) associés à la valeur propre λ_0 . Le problème adjoint est obtenu à partir de $\partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) \vec{w}$:

$$\begin{aligned} \forall \vec{w} \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{u}, \lambda, \vec{v}) \vec{w} &= \partial_{\vec{u}} J_{\varphi}(\vec{u}) \vec{w} - \partial_{\vec{u}, \vec{u}}^2 P_{\varphi}(\vec{u})(\vec{v}, \vec{w}) \\ &= - \frac{2a(\varphi, \vec{w}, \vec{u})b(\varphi, \vec{u}, \vec{u}) - 2b(\varphi, \vec{w}, \vec{u})a(\varphi, \vec{u}, \vec{u})}{b(\varphi, \vec{u}, \vec{u})^2} \\ &\quad - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

On calcule maintenant cette dérivée au point solution $(\lambda_0, \eta_i \vec{\theta}_i)$ du problème direct, on norme ce vecteur, que l'on nomme dorénavant $\vec{\theta}_0$, par $b(\vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) = 1$. On rappelle que $a(\vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) = \lambda_0$, dans ce cas, $\forall \vec{w} \in \mathcal{U}_{ad}$ on a :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{\theta}_0, \lambda_0, \vec{v}) \vec{w} &= - \frac{2a(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0)b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) - 2b(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0)a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0)}{b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0)^2} \\ &\quad - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda_0 b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= - 2a(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0) + 2\lambda_0 b(\varphi, \vec{w}, \vec{\theta}_0) - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda_0 b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= - a(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) + \lambda_0 b(\varphi, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

Le problème adjoint est donc le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ \partial_{\vec{u}} \mathcal{L}(\varphi, \vec{\theta}_0, \lambda_0, \vec{v}) \vec{w} = a(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) - \lambda_0 b(\varphi, \vec{w}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

La solution du problème adjoint s'écrit donc, elle aussi, sous la forme $\zeta_i \vec{\theta}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, on note par la suite cette solution $\vec{\theta}_1$. On peut alors calculer la dérivée de forme de J_{φ} , $\forall \psi \in \mathcal{G}_{ad}$ on a :

$$\begin{aligned} DJ_{\varphi} \psi &= \partial_{\varphi} J_{\varphi}(\vec{\theta}_0) \psi - \partial_{\vec{u}, \varphi}^2 P_{\varphi}(\vec{\theta}_0)(\vec{\theta}_1, \psi) \\ &= -\partial_{\varphi} a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi + \lambda_0 \partial_{\varphi} b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi - \partial_{\varphi} a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_1) \psi + \lambda_0 \partial_{\varphi} b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_1) \psi \quad (4.49) \\ &= -\partial_{\varphi} a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0 + \vec{\theta}_1) \psi + \lambda_0 \partial_{\varphi} b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0 + \vec{\theta}_1) \psi \end{aligned}$$

À l'instar du problème de minimisation de l'énergie de déformation, on remarque que ce problème est lui aussi auto-adjoint, on peut alors choisir $\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0$ et on obtient :

$$DJ_{\varphi} \psi = -2\partial_{\varphi} a(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi + 2\lambda_0 \partial_{\varphi} b(\varphi, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}_0) \psi \quad (4.50)$$

Remarque 4.2.2 Dans le cadre du pré-dimensionnement de pièces en choc, on peut envisager de maximiser la charge critique de flambement, il s'agit alors de maximiser la première valeur propre de l'opérateur $a(\varphi, \vec{u}, \vec{u})$ linéarisée au voisinage d'une configuration déformée particulière, la difficulté étant précisément de déterminer cette configuration ; dans le cas d'une plaque (cf. [Ciarlet 1980]) ou d'un cylindre (cf. [Bernadou 1991b]) chargés en compression, le flambement a lieu à partir de la solution de flexion $u_f = 0$ et la charge critique est la première valeur propre de l'opérateur linéarisé au voisinage d'une configuration déformée en membrane.

4.3 Mise en œuvre éléments finis

L'enjeu pour les éléments finis est de pouvoir résoudre les équations mécaniques qui intègrent maintenant la forme. En d'autres termes, il est maintenant nécessaire que l'élément soit suffisamment riche pour intégrer à la fois les équations et la forme. Comme nous avons pu le voir en (4.19), les degrés de libertés mis en jeu sont les dérivées premières pour la membrane et les dérivées secondes pour la flexion.

4.3.1 Description des éléments de Kanev et d'Argyris

Plusieurs éléments sont disponibles dans la littérature, nous nous sommes concentrés sur l'implémentation de deux triangles, le triangle de Kanev et le triangle d'Argyris. Ces triangles à 6 nœuds sont de degrés 4 et 5 respectivement, ils permettent le calcul des degrés de libertés énoncés ci-dessus. Le choix de ces triangles permet de s'affranchir d'éventuels problèmes liés à la richesse insuffisante de l'élément et de se concentrer sur le cœur du problème : l'optimisation de forme.

4.3.1.1 Introduction aux coordonnées barycentriques

Nous allons utiliser les coordonnées barycentriques de l'élément, cette méthode permet de s'affranchir du passage à un élément de référence et d'effectuer les calculs sur l'élément réel.

On définit $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ pour un élément triangulaire non-dégénéré d'aire A telles que pour un point quelconque X du plan (Fig. 4.2) :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{A} \|\overrightarrow{a_2 a_3} \wedge \overrightarrow{a_2 X}\| \\ \lambda_2 = \frac{1}{A} \|\overrightarrow{a_3 a_1} \wedge \overrightarrow{a_3 X}\| \\ \lambda_3 = \frac{1}{A} \|\overrightarrow{a_1 a_2} \wedge \overrightarrow{a_1 X}\| \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

Soit P un point quelconque du plan de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormal $(O, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$:

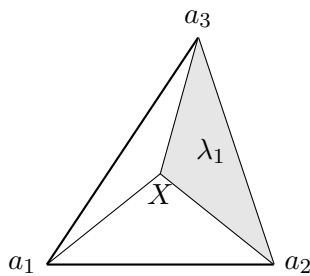


FIGURE 4.2 – Description des coordonnées barycentriques d'un triangle

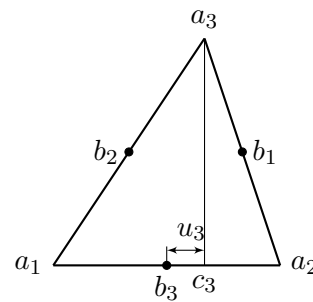


FIGURE 4.3 – Description de l'élément

$$\vec{OP} = x\vec{\varepsilon}_1 + y\vec{\varepsilon}_2$$

Ainsi les coordonnées cartésiennes (x, y) du point P sont donc données par les relations :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$$

4.3.1.2 Triangle de Ganév

Le triangle de Ganév permet de calculer le déplacement en tout point ainsi que les deux dérivées premières de ce déplacement : $v(x, y)$, $\partial_x v(x, y)$, $\partial_y v(x, y)$. Il a 15 degrés de liberté globaux (Fig. 4.3) qui sont donnés par :

$$DLGL_G = \{v(a_i), \partial_x v(a_i), \partial_y v(a_i), v(b_i), \partial_x v(b_i), \partial_y v(b_i)\} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.52)$$

On définit le vecteur Λ_4 à 15 composantes qui donne les monômes de degrés 4 des λ_i :

$$\begin{aligned} \Lambda_4 = \{ & \lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4, \\ & \lambda_1^3 \lambda_2, \lambda_1^3 \lambda_3, \lambda_2^3 \lambda_1, \lambda_2^3 \lambda_3, \lambda_3^3 \lambda_1, \lambda_3^3 \lambda_2, \\ & \lambda_1^2 \lambda_2^2, \lambda_2^2 \lambda_3^2, \lambda_1^2 \lambda_3^2, \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3, \lambda_2^2 \lambda_1 \lambda_3, \lambda_3^2 \lambda_1 \lambda_2 \} \end{aligned} \quad (4.53)$$

On cherche alors des polynômes P de Λ_4 ayant pour degrés de liberté les composantes locales de l'élément (4.54) où les indices $a_i a_{i+1}$ et $a_{i+1} a_i$ sont comptés modulo 3.

$$DLLC_G = \{P(a_i), P(b_i), DP(a_i) \overrightarrow{a_i a_{i+2}}, DP(a_i) \overrightarrow{a_i a_{i+1}}, DP(b_i) \overrightarrow{a_i c_i}\} \quad (4.54)$$

Parmi les degrés de liberté de cet élément il y a les dérivées normales aux milieux des côtés. Cette normale est généralement *transformée en oblique* quand on passe de l'élément de référence à l'élément courant. On introduit alors le paramètre d'excentricité u_i (voir figure 4.3) comme suit :

$$u_i = \frac{(l_{i+2})^2 - (l_{i+1})^2}{l_i^2}, \quad l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2} \quad (4.55)$$

L'écriture en coordonnées barycentriques permet de d'écrire les degrés de liberté locaux sous la forme $DLLC_G = M_G \Lambda_4$ où M_G est une matrice 15×15 qui peut s'écrire de manière formelle

sous la forme :

$$M_G = \begin{bmatrix} \Lambda_4(1, 0, 0) \\ \Lambda_4(0, 1, 0) \\ \Lambda_4(0, 0, 1) \\ [-1, 1, 0] \cdot D\Lambda_4(1, 0, 0) \\ [-1, 0, 1] \cdot D\Lambda_4(1, 0, 0) \\ [1, -1, 0] \cdot D\Lambda_4(0, 1, 0) \\ [0, -1, 1] \cdot D\Lambda_4(0, 1, 0) \\ [1, 0, -1] \cdot D\Lambda_4(0, 0, 1) \\ [0, 1, -1] \cdot D\Lambda_4(0, 0, 1) \\ \Lambda_4(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \Lambda_4(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ \Lambda_4(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ [-1, \frac{1}{2} - u_1, \frac{1}{2} + u_1] \cdot D\Lambda_4(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ [\frac{1}{2} - u_2, -1, \frac{1}{2} + u_2] \cdot D\Lambda_4(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ [\frac{1}{2} - u_3, \frac{1}{2} + u_3, -1] \cdot D\Lambda_4(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Cette matrice a été explicité dans [Bernadou 1994, p. 104]. En multipliant cette matrice par les degrés de liberté locaux $DLIC_G$, on obtient l'ensemble des fonctions de formes. Il reste alors à exprimer les degrés de liberté locaux en fonction des degrés de liberté globaux. Pour cela il faut définir une matrice de passage D_G (4.57), avec les matrices d_i et n_i définies en (4.58) et (4.59) respectivement.

$$[D_G]_{15 \times 15} = [1 \ 1 \ 1 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ 1 \ 1 \ 1 \ n_1 \ n_2 \ n_3] \quad (4.57)$$

$$[d_i]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} x_{i-1} - x_i & x_{i+1} - x_i \\ y_{i-1} - y_i & y_{i+1} - y_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.58)$$

$$n_i = \begin{cases} |\vec{c_i a_i}| \frac{XCAI}{|XCAI|} & \text{si } XCAI \neq 0 \\ |\vec{c_i a_i}| \frac{YCAI}{|YCAI|} & \text{si } XCAI = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} XCAI = x_i - \frac{1}{2}(1 - u_i)x_{i+1} - \frac{1}{2}(1 + u_i)x_{i-1} \\ YCAI = y_i - \frac{1}{2}(1 - u_i)y_{i+1} - \frac{1}{2}(1 + u_i)y_{i-1} \end{cases} \quad (4.59)$$

Remarque 4.3.1 La définition des n_i sous cette forme permet d'orienter la normale afin que deux triangles adjacents aient la même orientation ($\vec{n}_{T_1} = \vec{n}_{T_2}$) et non une orientation opposée ($\vec{n}_{T_1} = -\vec{n}_{T_2}$). Ceci est un point important qui permet de ne pas s'en soucier lors de l'assemblage éléments finis, et de simplement additionner les degrés de libertés à assembler.

Enfin, on obtient le déplacement d'un point quelconque par le produit matriciel (4.60) :

$$v(x, y) = [DLGLG_G]_{1 \times 15} [D_G]_{15 \times 15} [M_G]_{15 \times 15} [\Lambda_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]_{15 \times 1} \quad (4.60)$$

Il faut maintenant dériver cette expression afin d'obtenir $\partial_x v(x, y)$ et $\partial_y v(x, y)$:

$$\begin{aligned}\partial_x v(x, y) &= [DLGLG_G] [D_G] [M_G] [\partial_x \Lambda_4] \\ \partial_y v(x, y) &= [DLGLG_G] [D_G] [M_G] [\partial_y \Lambda_4]\end{aligned}$$

Les expressions de $\partial_x \Lambda_4$ et $\partial_y \Lambda_4$ sont données par (4.61) et (4.62) respectivement.

$$\begin{aligned}\partial_x \Lambda_4 &= \frac{\partial \Lambda_4}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)[\partial_1 \Lambda_4] + (y_3 - y_1)[\partial_2 \Lambda_4] + (y_1 - y_2)[\partial_3 \Lambda_4]]\end{aligned}\tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}\partial_y \Lambda_4 &= \frac{\partial \Lambda_4}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2A} [(x_2 - x_3)[\partial_1 \Lambda_4] + (x_3 - x_1)[\partial_2 \Lambda_4] + (x_1 - x_2)[\partial_3 \Lambda_4]]\end{aligned}\tag{4.62}$$

Finalement on obtient 6 valeurs en chaque point de l'élément :

$$Q_G = \begin{bmatrix} v(x, y) \\ \partial_x v(x, y) \\ \partial_y v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [DLGLG_G]_{1 \times 15} [D_G]_{15 \times 15} [M_G]_{15 \times 15} [\Lambda_4]_{15 \times 1} \\ [DLGLG_G]_{1 \times 15} [D_G]_{15 \times 15} [M_G]_{15 \times 15} [\partial_x \Lambda_4]_{15 \times 1} \\ [DLGLG_G]_{1 \times 15} [D_G]_{15 \times 15} [M_G]_{15 \times 15} [\partial_y \Lambda_4]_{15 \times 1} \end{bmatrix}\tag{4.63}$$

4.3.1.3 Triangle d'Argyris

Le triangle d'Argyris est semblable au triangle de Kanev, en plus du déplacement en tout point ainsi que les deux dérivées premières de ce déplacement, il permet d'en calculer ses dérivées secondes : $v(x, y)$, $\partial_x v(x, y)$, $\partial_y v(x, y)$, $\partial_{xx}^2 v(x, y)$, $\partial_{xy}^2 v(x, y)$, $\partial_{yy}^2 v(x, y)$. Il a 21 degrés de liberté globaux (voir figure 4.3) qui sont donnés par :

$$DLGLA = \{v(a_i), \partial_x v(a_i), \partial_y v(a_i), \partial_{xx}^2 v(a_i), \partial_{xy}^2 v(a_i), \partial_{yy}^2 v(a_i), \partial_\nu v(b_i)\} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \tag{4.64}$$

On définit le vecteur Λ_5 à 21 composantes qui donne les monômes de degrés 5 des λ_i :

$$\begin{aligned}\Lambda_5 = \{ & \lambda_1^5, \lambda_2^5, \lambda_3^5 \\ & \lambda_1^4 \lambda_3, \lambda_1^4 \lambda_2, \lambda_2^4 \lambda_1, \lambda_2^4 \lambda_3, \lambda_3^4 \lambda_2, \lambda_3^4 \lambda_1 \\ & \lambda_1^3 \lambda_3^2, \lambda_1^3 \lambda_2^2, \lambda_2^3 \lambda_1^2, \lambda_2^3 \lambda_3^2, \lambda_3^3 \lambda_2^2, \lambda_3^3 \lambda_1^2 \\ & \lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2^3 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^3 \\ & \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3^2, \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3^2, \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3\}\end{aligned}\tag{4.65}$$

Tout comme pour le triangle de Kanev, on cherche des polynômes P de Λ_5 ayant pour degrés de liberté les degrés de liberté locaux de l'élément (4.66).

$$\begin{aligned}DLLCA = & P(a_i), \\ & DP(a_i) \overrightarrow{a_i a_{i+2}}, DP(a_i) \overrightarrow{a_i a_{i+1}}, \\ & D^2 P(a_i) (\overrightarrow{a_i a_{i+2}})^2, D^2 P(a_i) (\overrightarrow{a_i a_{i+1}})^2, D^2 P(a_i) (\overrightarrow{a_{i+2} a_{i+1}})^2, \\ & DP(b_i) \overrightarrow{a_i c_i}\end{aligned}\tag{4.66}$$

En utilisant les u_i définis en (4.55), on construit la matrice M_A dans le même esprit que la matrice M_G définie en (4.56). Cette matrice est explicitée dans [Bernadou 1994, p. 101]. Dans le même esprit que la construction de la matrice D_G (4.57), on définit la matrice D_A (4.67) qui permet de passer des degrés de liberté globaux aux degrés de liberté locaux. Cette matrice est construite avec les définitions précédentes (4.58) et (4.59) pour les éléments d_i et n_i , $i = 1, 2, 3$ respectivement. La matrice $[d_4]_{9 \times 9}$ est donnée par la relation (4.68) [Bernadou 1994, p. 102].

$$[D_A]_{21 \times 21} = [1 \ 1 \ 1 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ n_1 \ n_2 \ n_3] \quad (4.67)$$

$$[d_4]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} X_{13}^2 & X_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{23}^2 & 0 & 0 \\ 2X_{13}Y_{13} & 2X_{12}Y_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2X_{23}Y_{23} & 0 & 0 \\ Y_{13}^2 & Y_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{23}^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & X_{12}^2 & X_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & X_{13}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2X_{12}Y_{12} & 2X_{23}Y_{23} & 0 & 0 & 0 & 2X_{13}Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{12}^2 & Y_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & Y_{13}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & X_{23}^2 & X_{13}^2 & 0 & 0 & X_{12}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2X_{23}Y_{23} & 2X_{13}Y_{13} & 0 & 0 & 2X_{12}Y_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{23}^2 & Y_{13}^2 & 0 & 0 & Y_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

En analogie avec (4.60), on calcule le déplacement d'un point quelconque (4.69) du triangle d'Argyris :

$$v(x, y) = [DLGLG_A]_{1 \times 21} [D_G]_{21 \times 21} [M_G]_{21 \times 21} [\Lambda_5(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]_{21 \times 1} \quad (4.69)$$

Les dérivées premières sont données par les relation (4.61) et (4.62), il reste alors à calculer les dérivées secondes (4.70), (4.71) et (4.72).

$$\begin{aligned} \partial_{xx}\Lambda_5 = & \frac{1}{(2A)^2} [(y_2 - y_3)^2 [\partial_{11}\Lambda_5] + (y_3 - y_1)^2 [\partial_{22}\Lambda_5] + (y_1 - y_2)^2 [\partial_{33}\Lambda_5] \\ & + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) [\partial_{12}\Lambda_5] + 2(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) [\partial_{23}\Lambda_5] \\ & + 2(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) [\partial_{13}\Lambda_5]] \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \partial_{yy}\Lambda_5 = & \frac{1}{(2A)^2} [(x_2 - x_3)^2 [\partial_{11}\Lambda_5] + (x_3 - x_1)^2 [\partial_{22}\Lambda_5] + (x_1 - x_2)^2 [\partial_{33}\Lambda_5] \\ & + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) [\partial_{12}\Lambda_5] + 2(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) [\partial_{23}\Lambda_5] \\ & + 2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) [\partial_{13}\Lambda_5]] \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \partial_{xy}\Lambda_5 = & \frac{1}{(2A)^2} [(y_2 - y_3)(x_2 - x_3) [\partial_{11}\Lambda_5] + (y_3 - y_1)(x_3 - x_1) [\partial_{22}\Lambda_5] + (y_1 - y_2)(x_1 - x_2)^2 [\partial_{33}\Lambda_5] \\ & + ((y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)) [\partial_{12}\Lambda_5] \\ & + ((y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_1)(x_1 - x_2)) [\partial_{23}\Lambda_5] \\ & + ((y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)) [\partial_{13}\Lambda_5]] \end{aligned} \quad (4.72)$$

Finalement on obtient 6 valeurs en chaque point de l'élément :

$$Q_A = \begin{bmatrix} v(x, y) \\ \partial_x v(x, y) \\ \partial_y v(x, y) \\ \partial_{xx} v(x, y) \\ \partial_{xy} v(x, y) \\ \partial_{yy} v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [DLGLG_A]_{1 \times 21} [D_A]_{21 \times 21} [M_A]_{21 \times 21} [\Lambda_5]_{21 \times 1} \\ [DLGLG_A]_{1 \times 21} [D_A]_{21 \times 21} [M_A]_{21 \times 21} [\partial_x \Lambda_5]_{21 \times 1} \\ [DLGLG_A]_{1 \times 21} [D_A]_{21 \times 21} [M_A]_{21 \times 21} [\partial_y \Lambda_5]_{21 \times 1} \\ [DLGLG_A]_{1 \times 21} [D_A]_{21 \times 21} [M_A]_{21 \times 21} [\partial_{xx} \Lambda_5]_{21 \times 1} \\ [DLGLG_A]_{1 \times 21} [D_A]_{21 \times 21} [M_A]_{21 \times 21} [\partial_{xy} \Lambda_5]_{21 \times 1} \\ [DLGLG_A]_{1 \times 21} [D_A]_{21 \times 21} [M_A]_{21 \times 21} [\partial_{yy} \Lambda_5]_{21 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Les matrices détaillées dans cette section peuvent être utilisées directement pour l'implémentation.

4.3.2 Élément utilisé

On propose d'utiliser deux éléments de Kanev pour la membrane et un élément d'Argyris pour la flexion. L'élément ainsi défini aura 51 degrés de libertés. Cet élément peut paraître un peu surdimensionné mais il a tout de même un certain nombre d'avantages. Il a par exemple comme degrés de libertés les normales et les dérivées normales en chaque nœud, ce qui est très intéressant pour des calculs vibro-acoustiques.

Remarque 4.3.2 *Le problème mécanique étant posé sur la forme de référence, le maillage est uniquement un intermédiaire de calcul, on peut alors envisager de faire l'optimisation sur un unique maillage. Un remaillage local peut être envisagé si des modifications de courbures locales sont importantes.*

4.3.3 Intégration numérique

Nous avons choisi la quadrature de Gauss-Legendre :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i f\left(\frac{b-a}{2} \xi_i + \frac{b+a}{2}\right) \quad (4.74)$$

$$\omega_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2) [P'_n(\xi_i)]}$$

où les valeurs des ξ_i sont les n zéros du polynôme de Legendre de degré n : $P_n(\xi)$.

4.4 Exemples de paramétrages

Dans cette section nous allons détailler quelques paramétrages de formes permettant de soulever des propriétés intéressantes de la méthode. Ces paramétrages sont des benchmarks classiques utilisés pour éprouver la méthode et valider son implémentation.

4.4.1 Cylindre

On cherche à décrire un cylindre à l'aide de la fonction de forme (4.75). Le changement de variable entre le domaine de référence et le cylindre est représenté figure 4.4. Cet exemple simple nous permet déjà de faire une remarque importante concernant le domaine de référence.

Remarque 4.4.1 *Il est très important que le domaine de référence soit indépendant de la fonction de forme φ , en effet lorsque l'on dérive par rapport à la forme, il faut s'assurer que le domaine reste fixe.*

$$\begin{aligned} \varphi &: [0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2) &\longmapsto \left[R \cos\left(\frac{\xi_1}{R}\right), R \sin\left(\frac{\xi_1}{R}\right), H \cdot \xi_2 \right] \end{aligned} \quad (4.75)$$

On propose de maximiser la première fréquence propre du cylindre avec pour paramètres d'optimisation R et H . On reprend l'expression (4.50) afin de calculer le gradient.

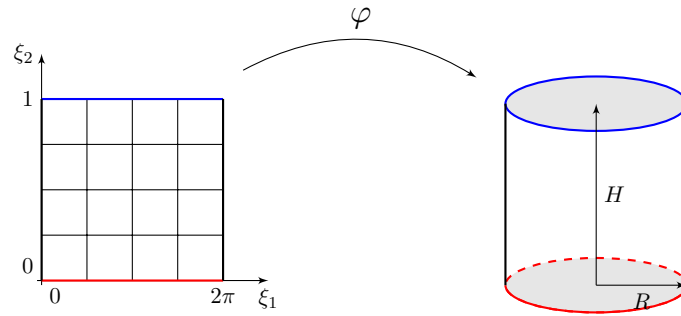


FIGURE 4.4 – Description d'une fonction de formes entre un domaine de référence et un cylindre

Remarque 4.4.2 *Les calculs étant effectués sur la géométrie exacte, on capture des modes doubles (voir figure 4.5), ces modes sont physiques mais ne sont en général pas capturés par les méthodes éléments finis classiques car le maillage étant une approximation de la forme désymétrise le problème et empêche de capturer de tels modes. Pour l'optimisation du cylindre à partir de R et H , en référence à la remarque 4.2.1 p.71, le paramétrage n'autorisant pas de désymétriser le cylindre, la multiplicité de la première valeur propre reste constante et il est alors possible de calculer un gradient.*

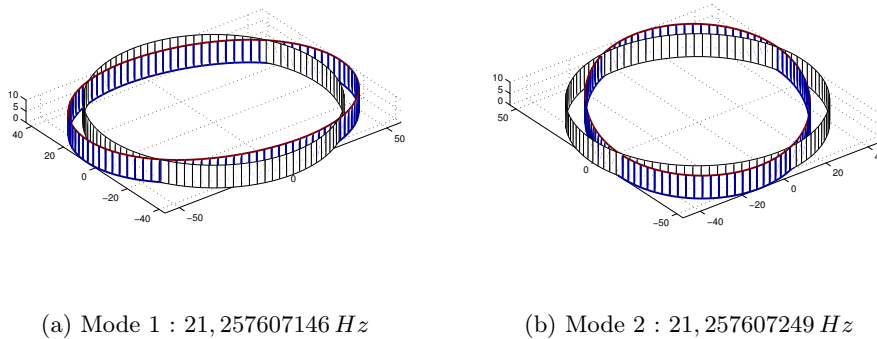


FIGURE 4.5 – Exemple des deux premiers modes propres d'un cylindre ayant la même fréquence

Afin de résoudre le problème d'optimisation, on impose de rester à surface constante ; on rappelle que le calcul de la surface peut s'effectuer grâce à l'expression suivante :

$$S = \int_{\Omega} \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.76)$$

On propose d'utiliser deux types de contraintes, la première, on souhaite que la surface soit constante, il s'agit donc d'une contrainte égalité. Pour le second type, on autorise une augmentation de la surface jusqu'à 10%, la contrainte s'écrit donc sous la forme d'une inégalité. Les résultats d'optimisation sont donnés dans le tableau 4.1, pour $(R, H) \in [.45 m, .55 m] \times [.05 m, .15 m]$.

TABLE 4.1 – Optimisation de la première fréquence propre d'un cylindre à surface constante

	Initiale	Contrainte égalité	Contrainte inégalité
$R(m)$	0,5	0,45	0,45
$H(m)$	0,1	0,111111	0,122222
$f_0(Hz)$	1,915678	2,370338	2,373657
$S(m^2)$	0,314159265	0,314159234	0,345574564
$\%S$	-	0,00%	10,00%

Les contraintes sont respectées dans les deux cas, cependant, le gain sur la fréquence propre n'est pas aussi important que l'augmentation de surface, ce qui réduit l'intérêt de cette solution.

4.4.2 Tronc de cône excentré

Le tronc de cône excentré (voir figure 4.6) de hauteur H et de rayons r et R , définit en (4.77), nous permet de montrer la capacité de la méthode à traiter un nombre plus important de paramètres mais aussi de comparer les performances de cette méthode par rapport au code éléments finis classiquement utilisé chez Renault : NASTRAN.

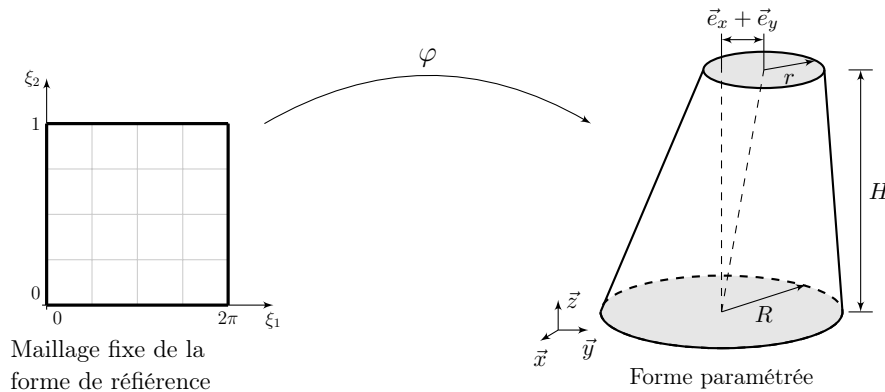


FIGURE 4.6 – Représentation de la fonction de forme d'un tronc de cône

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2) &\longmapsto \begin{cases} \rho(\xi_2) \cdot \cos \xi_1 + e_x(\xi_2) \\ \rho(\xi_2) \cdot \sin \xi_1 + e_y(\xi_2) \\ H \cdot \xi_2 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \rho(\xi_2) = (r - R) \cdot \xi_2 + R \\ e_x(\xi_2) = a \cdot \xi_2, a \in \mathbb{R} \\ e_y(\xi_2) = b \cdot \xi_2, b \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.77)$$

On propose de comparer les modes propres obtenus à partir de plusieurs maillages, dans le cas de notre méthode, le maillage correspond à un maillage plan tandis que pour le calcul NASTRAN il s'agit bien évidemment du maillage du tronc de cône excentré. Nous allons comparer notre méthode avec le calcul tel qu'il est fait en standard chez Renault, c'est à dire avec des éléments CQUAD4 qui sont des éléments iso-paramétriques à 24 degrés de libertés [Nastran 2001, p. 688–691]. Nous présentons les résultats obtenus dans le tableau 4.2. En observant les 15 premiers modes propres du tronc de cône (modes 7 à 20), on remarque que l'écart entre les modes obtenus avec NASTRAN et ceux obtenus par notre méthode sont très proches. Cette étude préliminaire de sensibilité nous permet d'une part de valider notre programmation et de nous assurer qu'avec un nombre relativement restreint de degrés de libertés les résultats restent suffisamment précis.

Ce tableau permet de souligner un intérêt majeur de la méthode, les calculs étant réalisés sur la géométrie exacte, la convergence est très rapide, l'intégration d'un cône peut se faire grâce à 10 éléments dans la circonférence.

4.4.3 Paraboloïde hyperbolique

Il s'agit ici d'un exemple test classique de la méthode, on définit la forme par la fonction (4.78) représentée par la figure 4.7.

$$\begin{aligned} \varphi : [-a, a]^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2) &\longmapsto \left[\xi_1, \xi_2, \frac{c}{2b^2}(\xi_2^2 - \xi_1^2) \right] \end{aligned} \quad (4.78)$$

Cette forme met en jeu des courbures dans toutes les directions, elle fait donc intervenir l'ensemble des couplages dans le calcul de la matrice de rigidité. Les paramétrages présentés, le cylindre et le tronc de cône, ne faisaient pas intervenir tous les couplages. Nous allons donc utiliser cette forme pour valider la programmation en vérifiant sa capacité à retrouver les modes de corps solides. En effet [Ciarlet 2005, p. 90–91] énonce un théorème assurant l'existence de 6 modes de corps solides.

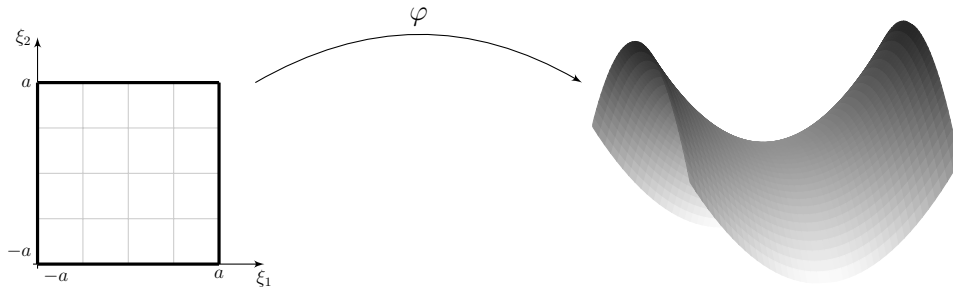


FIGURE 4.7 – représentation du paraboloïde hyperbolique

Les résultats présentés dans le tableau 4.3 montrent que les modes de corps solides sont capturés pour des formes ayant de très fortes courbures, et ce, même avec un faible nombre

TABLE 4.2 – Comparaison des 15 premières fréquences propres obtenues avec NASTRAN et la méthode de Koiter ($R = 150\text{ mm}$, $r = 100\text{ mm}$, $H = 200\text{ mm}$ et $a = 70\text{ mm}$)

Mode	Nastran					Koiter				
	Elts	496	1579	37226	147576	200 (10x10)	202 (100x1)	400 (30x5)	800 (20x20)	
Ddls	11904	37896	893424	349824	2870	4400	4560	11140		
7	30,18532416	30,03287935	30,00301591	30,00216742	28,40638763	28,32437208	28,24807448	28,24807674		
8	30,4139891	30,04553218	30,01363058	30,01274441	28,40639664	28,3243819	28,24808362	28,2480858		
9	52,49652879	52,23086001	52,23600042	52,23449714	53,31510646	53,22142067	53,07432913	53,07249844		
10	52,82486587	52,26944921	52,27993996	52,27853486	53,31521358	53,22153175	53,07443627	53,0726053		
11	84,15095436	83,96006293	84,00227448	84,00345049	79,393298	78,03058392	77,79991136	77,80471234		
12	84,56377062	83,9899857	84,01119967	84,01222481	79,39332159	78,03058519	77,79991261	77,80471362		
13	131,7392291	130,6476938	130,7068243	130,7043824	136,1993329	134,3112542	133,8192502	133,8165978		
14	132,3753001	130,825886	130,7105838	130,7080161	136,2001324	134,3112544	133,8192512	133,816598		
15	160,0545703	160,4446025	160,8429021	160,8551854	155,173318	146,6603338	146,1698608	146,2016679		
16	161,4283882	160,5422978	160,8437682	160,8564452	155,2125928	146,6603339	146,1698629	146,201668		
17	229,3411133	227,954942	227,9806092	227,9789426	241,8393882	230,8239196	230,0178519	230,1539651		
18	230,3609328	228,0422099	227,9819425	227,9802204	252,7484274	230,8239196	230,0178687	230,1539651		
19	265,1609239	264,3429455	265,3079008	265,344513	254,0827571	244,1843446	243,1210272	243,1376947		
20	265,3297637	264,4413859	265,3133428	265,3482837	304,6472335	244,1843446	243,1210313	243,1376948		

d'éléments. Ce cas simple nous permet de valider l'implémentation de la méthode, des éléments de Kanev et d'Argyris et de leur assemblage, ainsi que de l'intégration numérique.

TABLE 4.3 – Modes de corps solides du paraboloïde-hyperbolique ($a = 1m$ et $\frac{c}{2b^2} = 2m^{-1}$)

Nombre d'éléments	18 (3x3)	50 (5x5)	200 (10x10)	800 (20x20)
Mode	Fréquences propres ($10^{-3} Hz$)			
1	0.081257101531279	0.066108121523471	0.057479592101637	0.056841306345718
2	0.145544739943778	0.109587726431929	0.063581508124663	0.063042960880586
3	0.170582824925476	0.135042899869698	0.071175168585512	0.070775488214873
4	0.232841997879516	0.157441648483356	0.146769515427140	0.146464816041172
5	0.247121446599097	0.178729255336130	0.155764217583305	0.154002083046128
6	0.529104571492685	0.303107396753091	0.158203962012635	0.158077222737103

4.5 Bilan et perspectives sur le paramétrage intrinsèque de forme

Dans ce chapitre, nous avons proposé d'utiliser les équations de coques, et de tirer partie de leur écriture curviligne pour faire de l'optimisation de forme. Dans un premier temps, nous avons décrit l'écriture curviligne des équations, notamment pour le modèle linéaire de Koiter, afin de comprendre comment les utiliser pour l'optimisation. En définissant une fonction de forme φ , qui fait le lien entre la forme $3D$ et un domaine de référence $2D$, nous avons à disposition deux bonnes propriétés pour faire de l'optimisation de forme :

- le problème mécanique dépend de φ ,
- et on le résout sur un domaine indépendant de la forme.

Ces deux propriétés nous permettent de calculer un gradient par rapport à la forme.

Nous avons donc détaillé le calcul du gradient pour l'énergie de déformation, ainsi que pour le premier mode propre (dans certaines conditions). Dans ce chapitre, nous avons choisi d'utiliser les équations linéaires de Koiter, qui imposent la continuité $\mathcal{C}^1$ de φ , et son injectivité locale. Cependant, dans [Blouza 1999], on montre qu'il est possible de les écrire dans le cadre de formes moins régulières. En particulier pour des fonctions de forme dont les dérivées secondes ne sont pas continues.

Enfin, nous avons détailler la mise en œuvre pratique éléments finis, grâce à l'implémentation de deux éléments : l'élément de Kanev et l'élément d'Argyris. Pour valider les développements, nous les confrontons à des benchmarks classiques de la méthode au travers de cas tests simples.

La méthode proposé ici repose sur la définition d'une fonction de forme, φ , qui est alors utilisée comme paramétrage pour le problème de forme. Dans [Ciarlet 2005, p. 85–100], on montre l'existence d'une fonction $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow E^3$ définie à partir de la première et la seconde forme fondamentale. On montre aussi qu'elle est unique à un déplacement de corps solide près. On peut alors se poser la question de savoir s'il est pertinent d'utiliser ces résultats pour l'optimisation de formes. On repart des équations linéaires (4.12) à (4.16), et on propose d'utiliser les matrices définies de (4.1) à (4.9) comme paramètres d'optimisation. Les dérivées du problème par rapport à ces matrices sont immédiates. Les termes de membrane et de flexion s'écrivent en fonction des

premières et secondes formes fondamentales selon les expressions (4.79) et (4.80) respectivement.

$$\gamma_{\sigma\tau}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma - b_{\alpha\beta} u_3 \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}) = & \partial_{\alpha\beta} u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma u_3 - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3 \\ & + b_\alpha^\sigma (\partial_\beta u_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau u_\tau) + b_\beta^\tau (\partial_\alpha u_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma u_\sigma) \\ & + (\partial_\alpha b_\beta^\tau + \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau b_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\tau) u_\tau \end{aligned} \quad (4.80)$$

On rappelle que $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = (\vec{a}^\sigma \cdot \partial_\beta \vec{a}_\alpha) = \frac{a^{\sigma\tau}}{2} (\partial_\beta a_{\alpha\tau} + \partial_\alpha a_{\beta\tau} - \partial_\tau a_{\alpha\beta})$ ce qui permet de se ramener aux premières et secondes formes fondamentales. On peut ainsi considérer le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad} \\ \text{Arg } \min_{\substack{a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \\ b_\alpha^\beta}} J(\vec{u}) \end{array} \right. \quad (4.81)$$

La résolution de ce problème conduit à définir les valeurs des premières et secondes formes fondamentales en tout point du domaine de référence. La mise en œuvre pratique d'une telle méthode impliquerait la définition de fonctions d'interpolation entre les valeurs aux nœuds.

Dans le chapitre suivant nous proposons d'appliquer cette méthode dans un cadre de conception industriel. Pour cela on définit une fonction de forme basée sur une fonction spline, ce qui nous permet d'interpoler un grand nombre de formes surfaciques.

Bibliographie

- [Allaire 2001] Grégoire Allaire, Sylvie Aubry et François Jouve. *Eigenfrequency optimization in optimal design*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, no. 28, pages 3565 – 3579, 2001. (Cité en page 71.)
- [Audoly 2000] Baslie Audoly. *Élasticité et géométrie : de la rigidité des surfaces à la délamination en fil de téléphone*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000. (Cité en page 63.)
- [Audoly 2010] B. Audoly et Y. Pomeau. *Elasticity and geometry : From hair curls to the non-linear response of shells*. Oxford University Press, 2010. (Cité en page 63.)
- [Bernadou 1991a] M. Bernadou, F. J. Palma et B. Rousselet. *Shape optimization of an elastic thin shell under various criteria*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 3, pages 7–21, 1991. 10.1007/BF01743485. (Cité en page 63.)
- [Bernadou 1991b] Michel Bernadou et Bernard Lallane. *Flambement linéaire d’une coque mince élastique de forme générale*. Rapport de Recherche 1435, INRIA, 1991. (Cité en page 72.)
- [Bernadou 1994] M. Bernadou. *Méthodes d’éléments finis pour les problèmes de coques minces*. Recherches en mathématiques appliquées. Masson, 1994. (Cité en pages 62, 68, 75 et 77.)
- [Blouza 1999] Adel Blouza et Hervé Le Dret. *Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity*. Q. Appl. Math., vol. LVII, pages 317–337, June 1999. (Cité en page 83.)
- [Céa 1986] Jean Céa. *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*. Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 20, no. 3, pages 371–402, 1986. (Cité en page 68.)
- [Choï 1995] Daniel Choï. *Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques élastiques minces*. PhD thesis, Université Paris VI, 1995. (Cité en page 63.)
- [Ciarlet 1980] P. G. Ciarlet et P. Rabier. *Les Équations de von Kármán*. Springer-Verlag, 1980. (Cité en page 72.)
- [Ciarlet 2005] P.G. Ciarlet. *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*. Numéro vol. 66 ;vol. 99 de An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity. Springer, 2005. (Cité en pages 63, 81 et 83.)
- [Ciarlet 2006] Philippe G. Ciarlet et Liliana Gratie. *From the classical to the generalized von Kármán and Marguerre-von Kármán equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 190, no. 12, pages 470 – 486, 2006. <ce :title>Special Issue : International Conference on Mathematics and its Application</ce :title> <xocs :full-name>Special Issue : International Conference on Mathematics and its Application</xocs :full-name>. (Cité en pages 62 et 64.)
- [Clarke 1987] F.H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. (Cité en page 71.)

- [Destuynder 1985] Philippe Destuynder. *A classification of thin shell theories*. Acta Applicandae Mathematicae, vol. 4, pages 15–63, 1985. 10.1007/BF02293490. (Cité en page 62.)
- [Ekeland 1974] I. Ekeland et R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Études Mathématiques. Dunod, 1974. (Cité en page 71.)
- [Gournay 2006] Frédéric de Gournay. *Velocity Extension for the Level-set Method and Multiple Eigenvalues in Shape Optimization*. SIAM J. Control Optim., vol. 45, no. 1, pages 343–367, Janvier 2006. (Cité en page 71.)
- [Koiter 1968] W. T. Koiter. *Foundations and basic equations of shell theory : a survey of recent progress*. Afdeling der Werktuigbouwkunde, Technische Hogeschool, vol. 5, pages 93–105, 1968. (Cité en pages 62 et 64.)
- [Naghdi 1963] P. M. Naghdi. *Foundations of Elastic Shell Theory*. Progr. in Solid Mech., no. 4, pages 1–90, 1963. (Cité en page 64.)
- [Nastran 2001] Nastran. *Quick Reference Guide*. MSC Software, 2001. (Cité en page 81.)
- [Riesz 1952] F. Riesz, B. Szokefalvi-Nagy et Magyar Tudományok Akadémia (Budapest). *Leçons d’analyse fonctionnelle*. Akadémiai Kiadó, 1952. (Cité en page 71.)
- [Rousselet 1990] Bernard Rousselet et Denise Chenais. *Continuité et différentiabilité d’éléments propres : Application à l’optimisation de structures*. Applied Mathematics and Optimization, vol. 22, pages 27–59, 1990. (Cité en pages 68 et 71.)

Industrialisation de la méthode

Sommaire

5.1 Patches splines	87
5.1.1 Définition de la fonction de forme	88
5.1.2 Application numérique	90
5.1.3 Multi-patches	91
5.1.4 Assemblage simple	92
5.1.4.1 Calculs des entités géométriques	92
5.1.4.2 Lecture de la géométrie initiale	95
5.1.5 Assemblage superposé : Équations de compatibilité	95
5.2 Boucle d'optimisation	98
5.3 Synthèse sur l'industrialisation	101
Bibliographie	102

Dans ce chapitre nous allons détailler comment la méthode exposée peut être appliquée dans l'industrie. Pour cela, nous proposons d'utiliser comme fonction de forme les patches splines car ce sont les fonctions utilisées par les modeleurs CAO, on pourra alors envisager d'utiliser la définition géométrique d'une pièce comme forme initiale pour l'optimisation en utilisant l'ensemble des patches splines définis par le modeleur CAO. Nous allons ensuite proposer un cadre industriel pour l'application de cette méthode, c'est à dire, comment intégrer cette méthode dans le cadre de l'optimisation de forme dans un processus industriel.

5.1 Patches splines

Nous avons choisi d'utiliser les patches splines comme fonctions de formes pour l'industrialisation de la méthode, en effet ils sont la base de la modélisation CAO, ce qui permet d'assurer une cohérence avec les outils utilisés par les concepteurs. De plus, pour des patches de classe 4, classiquement utilisés par les modeleurs géométriques, il est possible d'interpoler un grand nombre de formes. Ce qui nous assure une exploration importante de l'espace de conception. On remarque qu'ils font couramment l'objet de paramétrage pour l'optimisation de forme, voir par exemple [Hyun 2004, Andreoli 2003, Samareh 1999].

5.1.1 Définition de la fonction de forme

Nous définissons un patch spline de classe 4 (voir figure 5.1) comme étant la projection d'un carré de côté 1 par la fonction suivante (5.1) qui est l'écriture matricielle d'un patch spline tel que l'on peut le trouver dans [Boyer 2009, Liu 2002]. Le patch décrit est défini à partir de 16 points de contrôles qui seront les variables d'optimisation.

$$\begin{aligned}
 & T_t = [t^3, t^2, t, 1], \\
 & B \text{ matrice spline,} \\
 & P_X, P_Y, P_Z : \text{matrices } 4 \times 4 \text{ représentant les coordonnées des points de contrôles} \\
 & \varphi : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 & \xi_1, \xi_2 \longmapsto \begin{cases} T_{\xi_1} \cdot B \cdot P_X \cdot {}^t B \cdot {}^t T_{\xi_2} \\ T_{\xi_1} \cdot B \cdot P_Y \cdot {}^t B \cdot {}^t T_{\xi_2} \\ T_{\xi_1} \cdot B \cdot P_Z \cdot {}^t B \cdot {}^t T_{\xi_2} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

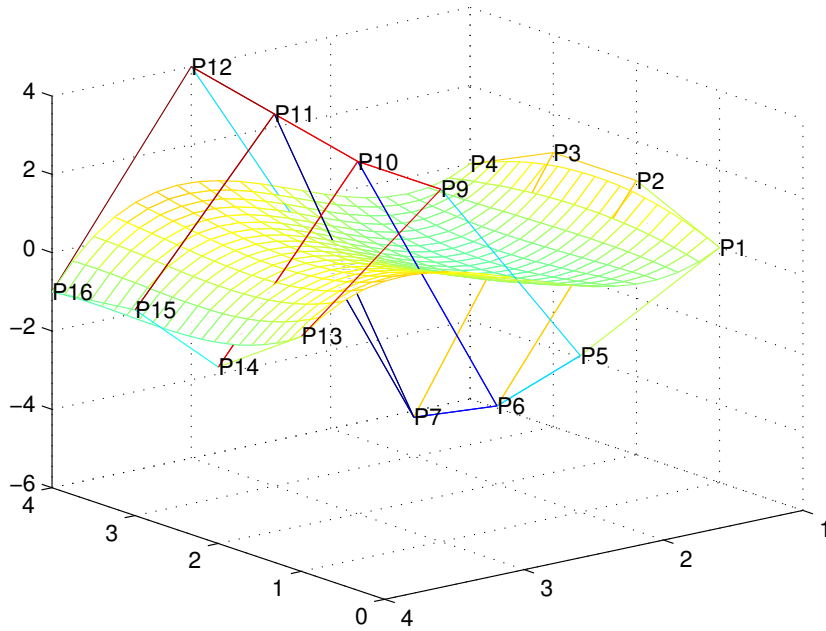


FIGURE 5.1 – Exemple de patch de Bézier de classe 4 à 16 points de contrôles

Il existe différentes fonctions splines [Risler 1991, Demengel 1998], nous allons voir dans cette section les principales fonctions et leurs propriétés pour des patches à 16 points de contrôles. Les fonctions présentées sont définies à partir de la forme matricielle (5.1).

Fonction de Bézier

La fonction de Bézier a été pensée par l'ingénieur Renault Pierre Bézier en 1962 pour concevoir par ordinateur les pièces automobiles. C'est donc naturellement que nous décrivons cette fonction.

Elle est définie à l'aide de la matrice B (5.2) et de ses points de contrôles. Ses principales propriétés sont :

- la courbe ne passe pas, en général, par les points de contrôle à l'exception du premier et du dernier,
- la courbe est toujours contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle,
- une courbe fermée peut-être générée en prenant le même point comme premier et dernier point de contrôle.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Il s'agit d'une fonction simple à mettre en œuvre qui a de bonnes propriétés et qui est utilisée par de nombreux modeleurs CAO, nous avons donc choisi d'implémenter cette fonction par la suite, cependant nous détaillons d'autres fonctions splines pour un éventuel choix ultérieur.

Fonction de Spline

La spline cubique uniforme est définie grâce à la matrice :

$$B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Cette courbe a les propriétés suivantes :

- contrôle local : chaque segment est défini par quatre points de contrôle,
- elle approxime et n'interpole pas les points de contrôle. En jouant sur la multiplicité des points de contrôle, on peut attirer la courbe vers les points de contrôle jusqu'à l'interpolation pour une multiplicité de trois,
- elle est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle,
- elle est invariante par transformation affine,
- elle est de continuité $\mathcal{C}^2$ partout.

Fonction de β -spline

La β -spline cubique uniforme est obtenue à l'aide de la matrice :

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\beta_1^3 & 2(\beta_2 + \beta_1^3 + \beta_1^2 + \beta_1) & -2(\beta_2 + \beta_1^3 + \beta_1^2 + \beta_1) & 2 \\ 6\beta_1^3 & -3(\beta_2 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1^2) & 3(\beta_2 + 2\beta_1^2) & 0 \\ -6\beta_1^3 & 6(\beta_1^3 - \beta_1) & 6\beta_1 & 0 \\ 2\beta_1^3 & \beta_2 + 4(\beta_2^2 + \beta_1) & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Ces courbes permettent un contrôle local plus important au travers des deux paramètres β_1 et β_2 . A noter que pour $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 0$, on retrouve les splines cubiques.

Fonction de NURBS

La fonction NURBS (Non Uniform Rational Basis Splines) est une généralisation des fonctions précédentes. Bien qu'une écriture matricielle soit possible [Liu 2002], on lui préférera sa définition par récurrence. Les fonctions NURBS de degré d sont définies par la formule doublement récursive de Cox – de Boor [de Boor 1962] :

$$\begin{cases} b_{j,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ b_{j,d}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+d} - t_j} b_{j,d-1}(t) + \frac{t_{j+d+1} - t}{t_{j+d+1} - t_{j+1}} b_{j+1,d-1}(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

où les t_j sont des nœuds appartenant au vecteur nodal, et d le degré de la NURBS. Lorsque plusieurs nœuds t_j sont confondus, on pose $\frac{0}{0} = 0$. La formule des NURBS possède de grandes correspondances avec celle des splines. Elle est simplement généralisée afin d'être appliquée à des coordonnées homogènes :

$$S(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m-d-1} w_i Q_i b_{i,d}(t)}{\sum_{i=1}^{m-d-1} w_i b_{i,d}(t)} \quad (5.6)$$

où les Q_i sont les points de contrôle donnés, m le nombre de nœuds, d le degré de la NURBS, les $b_{i,d}$ des coefficients calculés selon l'algorithme de Cox-de Boor, et t le paramètre.

Le principal intérêt de ces courbes NURBS est qu'elles parviennent à ajuster des courbes qui ne peuvent pas être représentées par des splines uniformes. En effet, les splines uniformes ne peuvent représenter exactement (quel que soit leur degré de définition, c'est-à-dire le nombre de coordonnées de points de contrôle en plus des coordonnées des sommets de chaque arc ou facette courbe) que des segments de droite et certaines courbes et surfaces, la plupart des courbes polynomiales de degré 2 ou supérieur ne peuvent l'être.

Un exemple fameux est le tracé d'un quart de cercle, qui ne peut se représenter avec des courbes uniformes. On introduit alors les NURBS qui permettent une représentation exacte de la totalité des arcs coniques (dont le cercle et toutes les ellipses, même celle dont les foyers ne sont pas sur un axe horizontal ou vertical, les arcs paraboliques et hyperboliques, et bien sûr aussi les segments de droite), ainsi que la totalité des courbes et surfaces polynomiales, avec uniquement des paramètres entiers (ou rationnels).

5.1.2 Application numérique

Ici, nous allons utiliser la définition de Bézier (5.2) comme paramétrage, nous proposons de maximiser la première fréquence propre d'un patch spline en libre-libre. Pour cela, nous allons mettre en œuvre la méthode de l'adjoint proposée en section 4.2.

Nous utilisons les 16 points de contrôle du patch dans les 3 directions comme paramètres d'optimisation, nous partons d'une plaque carrée de côté 1m, dont les caractéristiques mécaniques sont :

- $\varepsilon = .35e^{-3} m$: la demie-épaisseur de la pièce,
- $E = 210 \times 1e9 GPa$: le module d'Young,
- $\nu = 0.3$: le coefficient de Poisson,

- $\rho = 7300 \text{ Kg/m}^3$: la masse volumique.

Dans un premier temps, nous calculons la première fréquence de flexion de plaque à l'aide de la formule théorique [Gibert 1988] :

$$f_0 = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{E(2\varepsilon)^2}{\rho a^4(1-\nu^2)}} \quad (5.7)$$

où $\alpha = 4.07$ est un coefficient empirique, et a le côté de la plaque, on obtient $f_0 = 2.549412 \text{ Hz}$, le calcul élément finis, pour un maillage 10×10 donne $f_0^h = 2.536843 \text{ Hz}$, soit une erreur de 0.4%.

L'optimisation a convergé en cinq itérations, les résultats sont résumés dans le tableau 5.1, les différentes itérations d'optimisation sont décrites en annexe A. On constate que la solution optimale, représentée figure 5.2, permet d'augmenter la fréquence propre de 36,45%.

TABLE 5.1 – Optimisation de la première fréquence propre d'un patch spline

Iter	$f_0 \text{ (Hz)}$	$\Delta f_0 \text{ (%)}$
0	2,442508	–
1	2,655227	8,71
2	2,809681	15,03
3	2,952545	20,88
4	3,332729	36,45
5	3,332729	36,45

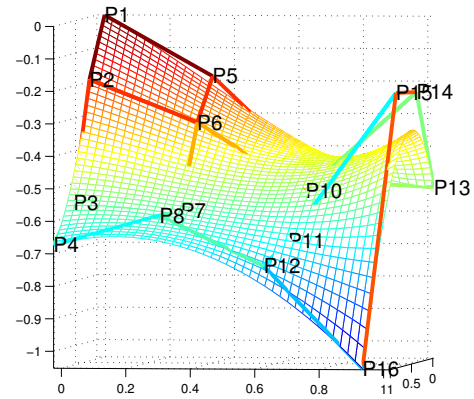


FIGURE 5.2 – Configuration optimale d'un patch spline sous critère de fréquence propre

On peut remarquer que, pour augmenter la fréquence propre, l'optimiseur fait intervenir un maximum de courbures possibles. L'optimisation converge rapidement vers l'optimum (en cinq itérations) et permet d'atteindre des formes complexes. En effet, cet exemple permet de souligner la capacité de la méthode à explorer un espace de conception important, en partant d'une plaque on est capable d'obtenir des formes faisant intervenir beaucoup de courbures.

5.1.3 Multi-patches

Afin de modéliser des pièces industrielles, il est important de pouvoir combiner plusieurs patchs. Pour cela, il faut être capable de conserver la continuité entre les patchs¹, et écrire les équations de compatibilité entre deux fonctions de formes φ_i et φ_{i+1} . Le fait d'utiliser plusieurs patchs, et donc plusieurs fois la même fonction de forme, et non une seule fonction de forme modélisant un patch avec plus de points de contrôle, nous permet de simplifier le calcul des entités géométriques, en définissant une fonction par morceaux à partir de fonctions plus simples.

¹Il peut être intéressant d'avoir des formes C^0 uniquement par exemple pour obtenir des arrêtes vives.

5.1.4 Assemblage simple

On considère un patch composé de $n \times m$ patches de Bézier, chacun décrits par une fonction φ_{ij} , on définit alors la fonction $\tilde{\varphi}$ globale :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : [0, n] \times [0, m] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2) &\longmapsto \begin{cases} \varphi_{11}(\xi_1, \xi_2), & \text{pour } (\xi_1, \xi_2) \in [0, 1]^2 \\ \dots \\ \varphi_{ij}(\xi_1, \xi_2), & \text{pour } (\xi_1, \xi_2) \in [i-1, i] \times [j-1, j] \\ \dots \\ \varphi_{nm}(\xi_1, \xi_2), & \text{pour } (\xi_1, \xi_2) \in [n-1, n] \times [m-1, m] \end{cases} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ce pendant, pour que la définition de cette fonction soit cohérente avec le problème de coques, il faut assurer la continuité entre les patches. Dans la section suivante, nous allons détailler la méthode de calcul pour la fonction $\tilde{\varphi}$ définie en (5.8).

Afin d'étendre les calculs à des formes $\mathcal{C}^0$, on propose par la suite (en section 5.1.5) une méthode plus subtile qui permet de joindre deux fonctions de formes sur une frontière commune.

Continuité entre les patches

Les conditions de continuité entre deux patches sont décrites dans [Leiceaga 2007]. Pour un deux patches de classe 4 définis par leurs points de contrôles P_X^1, P_Y^1, P_Z^1 et P_X^2, P_Y^2, P_Z^2 respectivement et qu'ils ont 4 points de contrôles en commun (voir figure 5.3) :

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \begin{cases} P_X^1(i, 4) = P_X^2(i, 1) \\ P_Y^1(i, 4) = P_Y^2(i, 1) \\ P_Z^1(i, 4) = P_Z^2(i, 1) \end{cases} \quad (5.9)$$

La continuité $\mathcal{C}^0$ est immédiate en confondant les points comme décrit précédemment, la continuité $\mathcal{C}^1$ est alors obtenue grâce à l'équation (5.10) et la continuité $\mathcal{C}^2$ est obtenue grâce à l'équation (5.11).

$$P_{i2}^2 = 2P_{i4}^1 - P_{i3}^1 \quad (5.10)$$

$$P_{i3}^2 = P_{i2}^1 + 4(P_{i4}^1 - P_{i3}^1) \quad (5.11)$$

Ces relations doivent être imposées comme contraintes sur les points de contrôles pour assurer la continuité $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$ et/ou $\mathcal{C}^2$ entre deux patches.

On constate que ces conditions de continuité entre deux patches ne dépendent que de la valeur des points de contrôles. Il faut maintenant calculer les différentes entités géométriques pour le calcul des matrices de masse et de rigidité.

5.1.4.1 Calculs des entités géométriques

La définition de $\tilde{\varphi}$ en (5.8) impose de faire une translation de la fonction de Bézier définie en (5.2), puis de calculer les différentes entités géométriques présentées au chapitre 4.

Afin de proposer une méthode automatique, nous allons utiliser un calculateur formel permettant de calculer les bases locales, les tenseurs métriques et les symboles de Christoffels. Pour

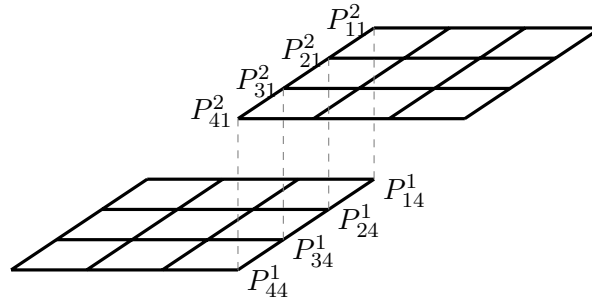


FIGURE 5.3 – Deux patches que l'on souhaite relier en 4 points

cela nous utilisons le logiciel open source MAXIMA. Comme montré figure 5.7, l'entrée du programme est la définition de la fonction $\tilde{\varphi}$ et de son support, et la sortie est composée de plusieurs programmes FORTRAN permettant le calcul numérique des entités géométriques et de leurs dérivées. Le calcul de leurs dérivées par rapport aux paramètres de conception est effectué pour pouvoir faire le calcul du gradient. À partir de ces programmes FORTRAN, on calcule les tenseurs de rigidité (4.26) et de masse (4.31) et on assemble les matrices du problème discret associé. Le maillage est lu à partir d'un fichier de maillage NASTRAN généré automatiquement par ANSA (qui est le meilleur standard Renault).

Remarque 5.1.1 *Pour appliquer ceci aux fonctions splines dont les paramètres sont logiquement les points de contrôles, nous avons décidé d'utiliser comme paramètres le produit de matrice $B \cdot P \cdot {}^tB$, cette astuce nous permet de conserver une latitude sur le choix de la fonction spline à utiliser.*

Pour l'assemblage de plusieurs patches, on propose d'utiliser un unique maillage du plan, que l'on copie autant de fois qu'il y a de fonctions φ_{ij} . On applique ensuite la translation à ces copies, puis on les re-numérote afin d'obtenir le maillage global. On donne un exemple des maillages obtenus pour quatre patches en figure 5.4.

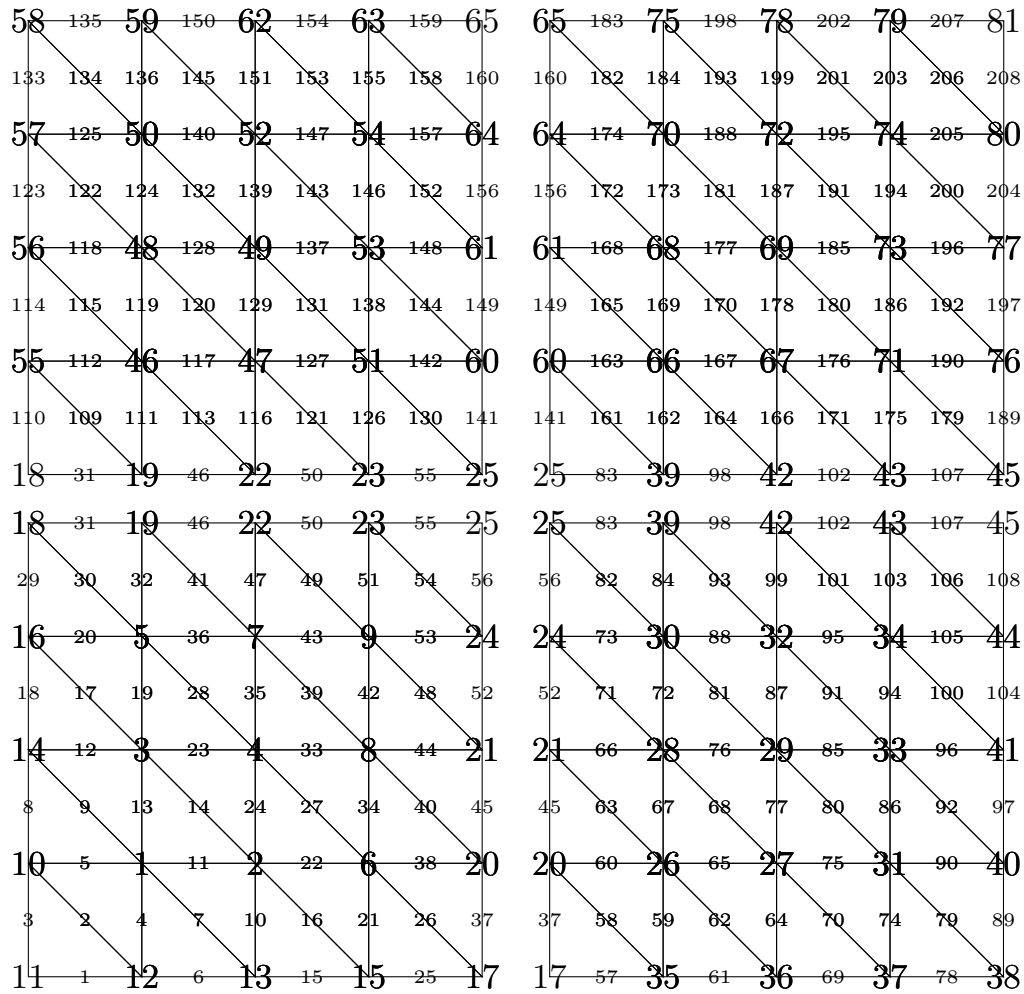


FIGURE 5.4 – Représentation du maillage de 4 patchs avec l'affichage des nœuds milieux et des nœuds maîtres

5.1.4.2 Lecture de la géométrie initiale

Afin d'assurer un processus le plus automatisé possible, on propose d'utiliser les formats d'échange de fichiers de géométries STEP et IGES pour récupérer les définitions des patches splines d'une CAO qui aurait été généré à l'aide d'un modelleur, par exemple CATIA qui est utilisé en standard chez Renault.

L'exemple d'application détaillé en section 5.1.2, montre que l'utilisation d'un unique patch est trop limité pour la conception d'une pièce industrielle. La figure 5.5 montre une forme industrielle réalisée à partir de neuf patches de Béziérs, elle est lue par MATLAB afin d'initialiser la procédure d'optimisation détaillée dans la section 5.2.

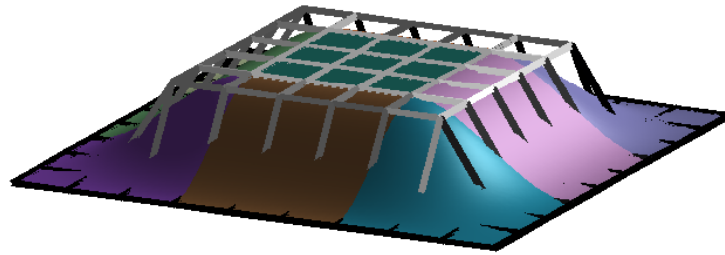


FIGURE 5.5 – Forme industrielle réalisée à l'aide de neuf patches de Bézier

Cette forme fait intervenir cent points de contrôle, on comprend donc la nécessité d'implémenter une méthode automatique de lecture de la géométrie.

5.1.5 Assemblage superposé : Équations de compatibilité

Nous avons vu que l'utilisation d'une fonction globale définie à partir de plusieurs patches implique de calculer les entités géométriques pour chacun des patches, ce qui peut être coûteux, de plus, cela implique la continuité entre les différents patches, et donc de travailler avec des formes régulières. Une autre méthode consiste à transmettre les efforts entre deux patches, pour cela, on se base sur les travaux [Bernadou 1996a, Bernadou 1996b]. De cette manière, on peut modéliser des formes $\mathcal{C}^0$, et n'effectuer les calculs formels pour un unique patch.

Soient φ et $\hat{\varphi}$ deux patches que l'on souhaite raccorder en une frontière commune Γ comme spécifié par l'équation (5.9), on suppose que l'on utilise deux copies Ω_1 et Ω_2 du domaine de référence Ω_0 pour les deux formes. On définit la frontière Γ commune, telle que $\varphi(\Gamma) = \hat{\varphi}(\Gamma)$, voir figure 5.6. De manière générale, les entités relatives à $\hat{\varphi}$ seront notées $\hat{\cdot}$. Le raccord entre les deux patches implique :

- la continuité des déplacements (transmission des force),
- ainsi que la continuité des rotations (transmission des moments).

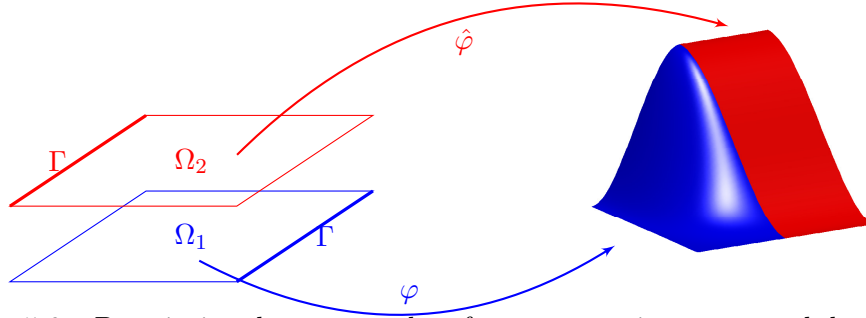


FIGURE 5.6 – Description des espaces de références associés au raccord de deux patches

La continuité des déplacements est simple à écrire, elle est décrite par l'équation suivante :

$$u_i a^i = \hat{u}_i \hat{a}^i, \quad \text{sur } \Gamma \quad (5.12)$$

La continuité des rotations est elle un peu plus difficile à écrire car elle nécessite de porter une attention particulière à la base locale utilisée pour ramener les points de la frontière commune sur le domaine de référence. En effet, la continuité des déplacements et des rotations est à écrire dans l'espace $3D$, alors que les calculs sont effectués dans l'espace $2D$. Il ne s'agit pas simplement d'égaliser les degrés de libertés mais de ramener les contraintes dans le plan.

On définit les vecteurs sur la configuration de référence :

- le vecteur normal unitaire sortant sur la frontière : $\vec{n} = n_\alpha \vec{a}^\alpha$,
- la tangente unitaire à la frontière : $\vec{t} = \vec{a}_3 \times \vec{n} = t_\alpha \vec{a}^\alpha$.

On commence par imposer la continuité des moments :

$$M(P) = \hat{M}(P), \quad \forall P \in \Gamma$$

avec :

$$\begin{aligned} M &= M^\alpha \vec{a}_\alpha \times \vec{a}_3 \\ &= (M^\alpha \vec{a}_\alpha + M^\beta \vec{a}_\beta) \times \vec{a}_3 \\ &= (M_n \vec{n} + M_t \vec{t}) \times \vec{a}_3 \\ &= M_t \vec{n} - M_n \vec{t} \end{aligned}$$

Lorsque $\vec{n} \times \vec{n} \neq 0$, il vient $M_t = \hat{M}_t = 0$, dans le cas contraire, on considère que M_t et $\hat{M}_t$ sont toujours nuls. Ce qui nous permet d'écrire la relation suivante :

$$M(P) = \hat{M}(P) = -M_n \vec{t}, \quad \forall P \in \Gamma \quad (5.13)$$

En se référant à [Bernadou 1996a, p. 9–10], il vient l'équation de compatibilité :

$$\left(\frac{e^{\lambda\beta}}{\sqrt{a}} (u_{3,\beta} + b_\beta^\alpha u_\alpha) \vec{a}_\lambda + \frac{e^{\lambda\beta}}{2\sqrt{a}} u_{\beta|\lambda} \vec{a}_3 \right) \cdot \vec{t} = (\vec{t} \cdot \vec{t}) \left(\frac{e^{\lambda\beta}}{\sqrt{\hat{a}}} (\hat{u}_{3,\beta} + \hat{b}_\beta^\alpha \hat{u}_\alpha) \hat{\vec{a}}_\lambda + \frac{e^{\lambda\beta}}{2\sqrt{\hat{a}}} \hat{u}_{\beta|\lambda} \hat{\vec{a}}_3 \right) \cdot \vec{t} \quad (5.14)$$

avec $e^{\lambda\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 5.1.2 *Le raccord décrit par les équations (5.12) et (5.14) n'est pas nécessairement $\mathcal{C}^1$, il s'agit de conditions permettant de décrire des formes globales $\mathcal{C}^0$, ce qui ne serait pas possible avec une seule fonction de forme car les équations de coques ne sont pas définies.*

On peut écrire les équations (5.12) et (5.14) sous forme matricielle : $A_l \cdot \mathbf{U} = (\vec{t} \cdot \vec{\hat{t}}) \hat{A}_l \cdot \hat{\mathbf{U}}$, où $\mathbf{U}$ est l'ensemble des degrés de libertés tels que décrits par l'équation (4.19) page 66. L'équation (5.15) décrit la partie A_l concernant la forme φ , l'équivalent peut s'écrire pour la forme $\hat{\varphi}$.

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 & \sqrt{a} & 0 & 0 & \sqrt{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2^1 t_1 - b_1^1 t_2 & 0 & -\frac{t_3}{2} & b_2^2 t_1 - b_1^2 t_2 & \frac{t_3}{2} & 0 & 0 & -t_2 & t_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{A}_l &= \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} \sqrt{a} \cdot a^1 \hat{a}^1 & 0 & 0 & \sqrt{a} \cdot a^2 \hat{a}^2 & 0 & 0 & \sqrt{a} \cdot a^3 \hat{a}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2^1 t_1 - b_1^1 t_2 & 0 & -\frac{t_3}{2} & b_2^2 t_1 - b_1^2 t_2 & \frac{t_3}{2} & 0 & 0 & -t_2 & t_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Cette écriture nous permet de poser le problème de raccord entre deux patchs sous la forme suivante : trouver $\mathbf{U}$ et $\hat{\mathbf{U}}$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_1} {}^t\ddot{\mathbf{U}} M \ddot{\mathbf{V}} + {}^t\mathbf{U} K \mathbf{V} d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} F \mathbf{V}, & \forall \mathbf{V} d\Omega_1 \\ \int_{\Omega_2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} M \ddot{\mathbf{V}} + {}^t\hat{\mathbf{U}} K \hat{\mathbf{V}} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} \hat{F} \hat{\mathbf{V}}, & \forall \hat{\mathbf{V}} d\Omega_2 \\ \int_{\Gamma} A_l \cdot \mathbf{U} dS = \int_{\Gamma} (\vec{t} \cdot \vec{\hat{t}}) \hat{A}_l \cdot \hat{\mathbf{U}} dS \end{cases}$$

où F et $\hat{F}$ caractérisent les efforts transmis entre les deux patchs. On peut alors ré-écrire le problème, il devient, trouver $\mathbf{U}$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} {}^t\ddot{\mathbf{U}} M \ddot{\mathbf{V}} + {}^t\mathbf{U} K \mathbf{V} d\Omega = \int_{\Omega} F \mathbf{V}, & \forall \mathbf{V} d\Omega \\ \int_{\Gamma} \underline{A} \cdot \mathbf{U} dS = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

où $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \hat{K} \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{bmatrix}$, et $\underline{A} = [A_l, -(\vec{t} \cdot \vec{\hat{t}}) \hat{A}_l]$ la matrice associée aux contraintes de liaisons.

Afin de mettre en œuvre cette méthode dans le cadre de l'optimisation, il faut être capable de calculer le gradient du critère, donc dériver ce problème vis-à-vis des paramètres de formes. Cependant, les efforts internes F , qui sont dépendant des paramètres de formes, sont inconnus. Il faut donc mettre en place une méthode de résolution itérative, ce qui rend son utilisation très coûteuse pour une utilisation en avant-projet.

5.2 Boucle d'optimisation

Dans cette section nous allons mettre en application la méthode dans une boucle industrielle (voir figure 5.7). L'industrialisation impose d'automatiser au maximum la méthode afin que le concepteur ne se concentre que sur les tâches de définition du problème et d'interprétation des résultats.

Nous proposons d'utiliser la boucle complète d'optimisation, représentée en figure 5.7. L'utilisateur doit seulement définir les paramètres d'optimisation, au travers de la fonction de forme, ainsi que le critère à optimiser. L'automatisation des tâches depuis les calculs des entités géométriques jusqu'à la solution optimale est assurée grâce à l'utilisation de codes MAXIMA, FORTRAN et MATLAB.

Nous définissons un patch spline dans MAXIMA à l'aide du code suivant :

```
Px : matrix([px(1,1),px(1,2),px(1,3),px(1,4)],
            [px(2,1),px(2,2),px(2,3),px(2,4)],
            [px(3,1),px(3,2),px(3,3),px(3,4)],
            [px(4,1),px(4,2),px(4,3),px(4,4)]) $
Py : matrix([py(1,1),py(1,2),py(1,3),py(1,4)],
            [py(2,1),py(2,2),py(2,3),py(2,4)],
            [py(3,1),py(3,2),py(3,3),py(3,4)],
            [py(4,1),py(4,2),py(4,3),py(4,4)]) $
Pz : matrix([pz(1,1),pz(1,2),pz(1,3),pz(1,4)],
            [pz(2,1),pz(2,2),pz(2,3),pz(2,4)],
            [pz(3,1),pz(3,2),pz(3,3),pz(3,4)],
            [pz(4,1),pz(4,2),pz(4,3),pz(4,4)]) $
define(T(t), [t^3,t^2,t,1])$
define(phi(x,y), [T(x).Px.transpose(T(y)),
                  T(x).Py.transpose(T(y)),
                  T(x).Pz.transpose(T(y))]) $
```

On peut alors calculer les entités géométriques définies dans la section 4.1 :

```
/*Calcul de la base covariante*/
define(a_1(x,y),diff(phi(x,y),x))$
define(a_2(x,y),diff(phi(x,y),y))$
define(norm(x,y),sqrt(express(a_1(x,y)~a_2(x,y)).express(a_1(x,y)~a_2(x,y))))$
define(a_3(x,y),express(a_1(x,y)~a_2(x,y))/norm(x,y))$

/*Première forme fondamentale : covariante et contravariante*/
define(A_cov(x,y),transpose(matrix(a_1(x,y),a_2(x,y),a_3(x,y))))$ /* attention à la
    tranposition, la matrice est écrite en ligne */
define(a_cov(x,y),transpose(A_cov(x,y)).A_cov(x,y))$
define(A_cont(x,y),transpose(invert(A_cov(x,y))))$
define(a_cont(x,y),transpose(A_cont(x,y)).A_cont(x,y))$

/*Symboles de Christoffel*/
define(Gamma1_11(x,y),col(A_cont(x,y),1).diff(col(A_cov(x,y),1),x))$
define(Gamma1_12(x,y),col(A_cont(x,y),1).diff(col(A_cov(x,y),1),y))$
define(Gamma1_21(x,y),col(A_cont(x,y),1).diff(col(A_cov(x,y),2),x))$
```

```

define(Gamma1_22(x,y),col(A_cont(x,y),1).diff(col(A_cov(x,y),2),y))$

define(Gamma2_11(x,y),col(A_cont(x,y),2).diff(col(A_cov(x,y),1),x))$
define(Gamma2_12(x,y),col(A_cont(x,y),2).diff(col(A_cov(x,y),1),y))$
define(Gamma2_21(x,y),col(A_cont(x,y),2).diff(col(A_cov(x,y),2),x))$
define(Gamma2_22(x,y),col(A_cont(x,y),2).diff(col(A_cov(x,y),2),y))$

/*Seconde forme fondamentale : covariante et mixte*/
define(b_11(x,y),a_3(x,y).diff(a_1(x,y),x))$
define(b_12(x,y),a_3(x,y).diff(a_1(x,y),y))$
define(b_21(x,y),a_3(x,y).diff(a_2(x,y),x))$
define(b_22(x,y),a_3(x,y).diff(a_2(x,y),y))$

define(b1_1(x,y),a_cont(x,y)[1,1]*b_11(x,y)+a_cont(x,y)[1,2]*b_21(x,y))$
define(b1_2(x,y),a_cont(x,y)[1,1]*b_12(x,y)+a_cont(x,y)[1,2]*b_22(x,y))$
define(b2_1(x,y),a_cont(x,y)[2,1]*b_11(x,y)+a_cont(x,y)[2,2]*b_21(x,y))$
define(b2_2(x,y),a_cont(x,y)[2,1]*b_12(x,y)+a_cont(x,y)[2,2]*b_22(x,y))$

define(dx_b1_1(x,y),diff(b1_1(x,y),x))$
define(dx_b1_2(x,y),diff(b1_2(x,y),x))$
define(dx_b2_1(x,y),diff(b2_1(x,y),x))$
define(dx_b2_2(x,y),diff(b2_2(x,y),x))$

define(dy_b1_1(x,y),diff(b1_1(x,y),y))$
define(dy_b1_2(x,y),diff(b1_2(x,y),y))$
define(dy_b2_1(x,y),diff(b2_1(x,y),y))$
define(dy_b2_2(x,y),diff(b2_2(x,y),y))$

```

Le code FORTRAN est ensuite généré automatiquement, voici un exemple du code MAXIMA pour écrire la fonction FORTRAN du symbole de Christoffel :

```

with_stdout("corps_Gamma.F",
  fortran(Gamma1(1,1) = Gamma1_11(x,y)),
  fortran(Gamma1(1,2) = Gamma1_12(x,y)),
  fortran(Gamma1(2,1) = Gamma1_21(x,y)),
  fortran(Gamma1(2,2) = Gamma1_22(x,y)),
  fortran(Gamma2(1,1) = Gamma2_11(x,y)),
  fortran(Gamma2(1,2) = Gamma2_12(x,y)),
  fortran(Gamma2(2,1) = Gamma2_21(x,y)),
  fortran(Gamma2(2,2) = Gamma2_22(x,y)));

```

Les programmes FORTRAN étant générés automatiquement par le calcul formel, il faut tout de même faire attention que les simplifications aient été faites correctement. Par exemple, si on soustrait deux nombres très grands et très proches avec le calculateur formel, celui-ci va donner le bon résultat tandis qu'en numérique, à cause des approximations, le résultat peut être nul.

De la même manière, on peut calculer les dérivées de ces entités par rapport aux points de contrôle définis dans les matrices P_x , P_y et P_z .

```

for i:1 thru 4 step 1 do
for j:1 thru 4 step 1 do
    (

        define(d_a_cont(x,y),diff(a_cont(x,y),px(i,j))),

        define(d_Gamma1_11(x,y),diff(Gamma1_11(x,y),px(i,j))),
        define(d_Gamma1_12(x,y),diff(Gamma1_12(x,y),px(i,j))),
        define(d_Gamma1_21(x,y),diff(Gamma1_21(x,y),px(i,j))),
        define(d_Gamma1_22(x,y),diff(Gamma1_22(x,y),px(i,j))),

        define(d_Gamma2_11(x,y),diff(Gamma2_11(x,y),px(i,j))),
        define(d_Gamma2_12(x,y),diff(Gamma2_12(x,y),px(i,j))),
        define(d_Gamma2_21(x,y),diff(Gamma2_21(x,y),px(i,j))),
        define(d_Gamma2_22(x,y),diff(Gamma2_22(x,y),px(i,j))),

        define(d_b_11(x,y),diff(b_11(x,y),px(i,j))),
        define(d_b_12(x,y),diff(b_12(x,y),px(i,j))),
        define(d_b_21(x,y),diff(b_21(x,y),px(i,j))),
        define(d_b_22(x,y),diff(b_22(x,y),px(i,j))),

        define(d_b1_1(x,y),diff(b1_1(x,y),px(i,j))),
        define(d_b1_2(x,y),diff(b1_2(x,y),px(i,j))),
        define(d_b2_1(x,y),diff(b2_1(x,y),px(i,j))),
        define(d_b2_2(x,y),diff(b2_2(x,y),px(i,j))),

        define(d_dx_b1_1(x,y),diff(dx_b1_1(x,y),px(i,j))),
        define(d_dx_b1_2(x,y),diff(dx_b1_2(x,y),px(i,j))),
        define(d_dx_b2_1(x,y),diff(dx_b2_1(x,y),px(i,j))),
        define(d_dx_b2_2(x,y),diff(dx_b2_2(x,y),px(i,j))),

        define(d_dy_b1_1(x,y),diff(dy_b1_1(x,y),px(i,j))),
        define(d_dy_b1_2(x,y),diff(dy_b1_2(x,y),px(i,j))),
        define(d_dy_b2_1(x,y),diff(dy_b2_1(x,y),px(i,j))),
        define(d_dy_b2_2(x,y),diff(dy_b2_2(x,y),px(i,j)))
    );

```

Ainsi en ne définissant que la fonction φ , l'ensemble des calculs est fait automatiquement et formellement, ce qui permet de compiler des exécutables FORTRAN . Une procédure MATLAB permet de faire l'assemblage éléments finis, la résolution du problème mécanique et l'optimisation, et ce, à partir des fonctions FORTRAN . Cette procédure est donc identique quelque soit la fonction φ utilisée.

On définit donc un processus automatique, schématisé en figure 5.7, qui à partir de la simple définition de la fonction de forme et du critère, permet de trouver la forme optimale de la structure. Aux vues des calculs présentés dans le chapitre 4, on comprend l'intérêt d'utiliser un calculateur formel pour mettre en place une boucle automatique, qui permette de résoudre le problème d'optimisation quelque soit la définition de la fonction de forme. Cependant, pour

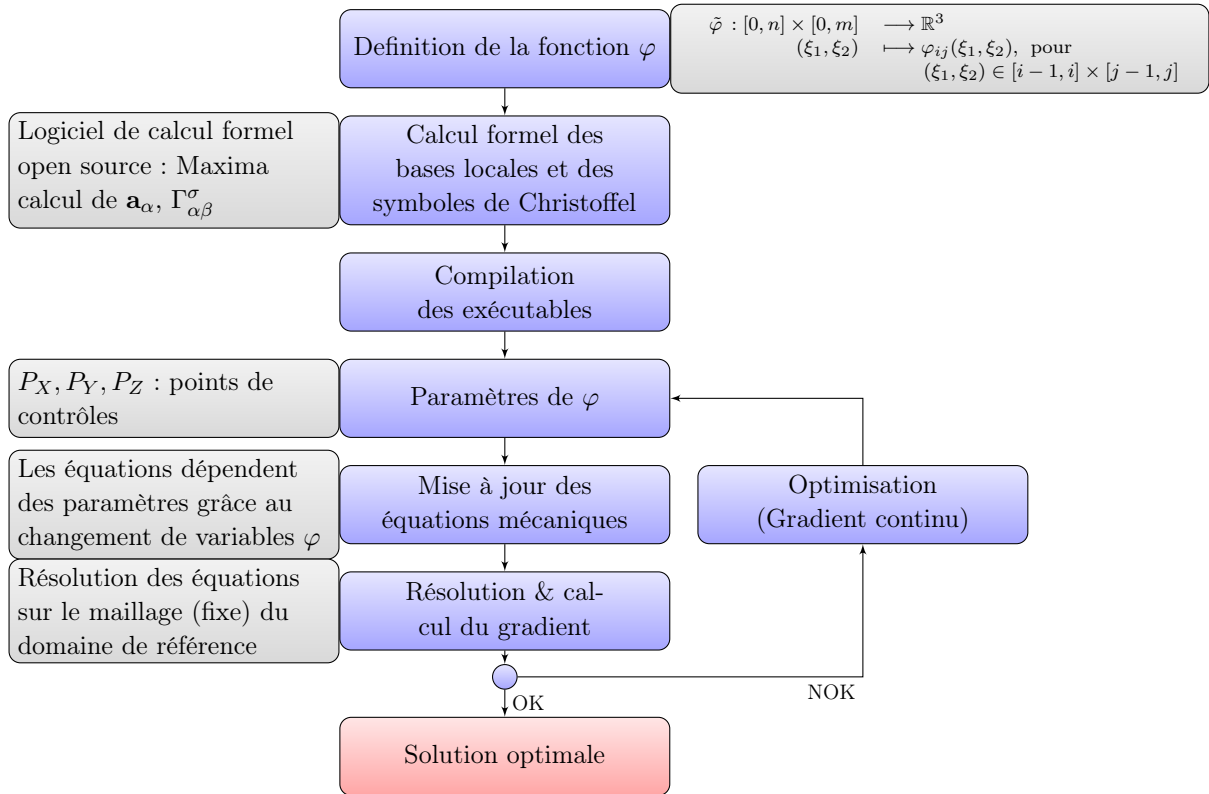


FIGURE 5.7 – Industrialisation de la méthode

industrialiser la méthode de manière performante, le code présenté ici doit maintenant être implémenté à l'aide d'un langage de programmation compilé, qui sera plus performant.

5.3 Synthèse sur l'industrialisation

Nous avons proposé dans ce chapitre un processus global permettant l'utilisation de cette méthode dans un cycle de conception industriel. En effet, grâce à l'utilisation de fonction splines, il est possible d'interpoler un grand nombre de formes. Nous avons implémenté le calcul formel des éléments de géométrie différentielle et de leurs dérivées de forme, ce qui nous permet de créer des exécutables. Ainsi il est possible de faire l'assemblage éléments finis des matrices de masse et de rigidité, qui dépendent des paramètres de φ .

Par la simple définition d'une fonction de forme il est ainsi possible de résoudre le problème mécanique ainsi que de calculer les gradients associés. On peut ainsi mettre en place un processus d'optimisation de forme surfaciques adapté à une utilisation industrielle.

Bibliographie

- [Andreoli 2003] Michele Andreoli, Aleš Janka et Jean-Antoine Désidéri. *Free-form-deformation parameterization for multilevel 3D shape optimization in aerodynamics*. Rapport technique 5019, INRIA, 2003. (Cité en page 87.)
- [Bernadou 1996a] Michel Bernadou et Annie Cubier. *Numerical analysis of junctions between thin shells, Part 1 – continuous problems*. Rapport technique 2921, INRIA, 1996. (Cité en pages 95 et 96.)
- [Bernadou 1996b] Michel Bernadou et Annie Cubier. *Numerical analysis of junctions between thin shells, Part 2 – Approximation by finite element methods*. Rapport technique 2922, INRIA, 1996. (Cité en page 95.)
- [Boyer 2009] Edmond Boyer. *Représentation des courbes et des surfaces*. UFRIMA, 2009. (Cité en page 88.)
- [de Boor 1962] Carl de Boor. *Bicubic Spline interpolation*. Journal of Mathematics and Physics, vol. 41, pages 212–218, 1962. (Cité en page 90.)
- [Demengel 1998] Gilbert Demengel et Jean-Pierre Pouget. *Modèle de bézier, des b-splines et des nurbs*. 1998. (Cité en page 88.)
- [Gibert 1988] R.J. Gibert. *Vibrations des structures : interactions avec les fluides, sources d’excitation aléatoires*. Collection de la Direction des études et recherches d’Électricité de France. Eyrolles, 1988. (Cité en page 91.)
- [Hyun 2004] S Hyun, C Kim, J.H Son, S.H Shin et Y.S Kim. *An efficient shape optimization method based on FEM and B-spline curves and shaping a torque converter clutch disk*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 40, no. 1314, pages 1803 – 1815, 2004. (Cité en page 87.)
- [Leiceaga 2007] Xoan A. Leiceaga, Oscar E. Ruiz, Carlos A. Vanegas, Jose Prieto, Manuel Rodriguez et Eva Soto. *Bi-curve and Multi-patch smoothing with Application to the Shipyard Industry*. In Congresso Internazionale Congiunto XVI ADM - XIX INGEGRAF, pages 415–424., Perugia, Italy, June 6-9 2007. (Cité en page 92.)
- [Liu 2002] Ligang Liu et Guojin Wang. *Explicit matrix representation for NURBS curves and surfaces*. Computer Aided Geometric Design, vol. 19, no. 6, pages 409 – 419, 2002. (Cité en pages 88 et 90.)
- [Risler 1991] Jean-Jacques Risler. *Méthodes mathématiques pour la cao. Recherches en mathématiques appliquées*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, 1991. (Cité en page 88.)
- [Samareh 1999] Jamshid A. Samareh, Jamshid A. Samareh et B Bernstein Polynomial. *A Survey Of Shape Parameterization Techniques*. 1999. (Cité en page 87.)

Troisième partie

Conclusions et perspectives

Conclusion et Perspectives

Une boucle classique d'optimisation de forme est basée sur la définition d'un paramétrage, qui est ensuite utilisé dans un workflow mettant en œuvre : un modelleur CAO, un mailleur éléments finis, un solveur, et un optimiseur.

La difficulté est de faire communiquer ces outils, *par nature hétérogènes : ce qui pose la question de l'automatisation des boucles de simulation et de leur post-traitement*. En effet, l'optimisation nécessitant un grand nombre d'évaluations, il est nécessaire de confectionner des boucles de calcul automatiques permettant de faire le pré-traitement, le calcul, et le post-traitement. Ces boucles sont en général très coûteuses à mettre en place, car elle nécessitent d'utiliser un grand nombre de scripts qui doivent interpréter des fichiers dans un langage et les retranscrire dans un autre. De plus, nous avons vu que la cohérence entre le paramétrage et l'optimiseur est un point essentiel pour le bon déroulement de l'optimisation de forme.

Dans cette Thèse, nous avons vu que les paramétrages disponibles pour l'optimisation des pièces surfaciques, tels que le paramétrage CAO ou l'optimisation topographique, sont limités en termes d'efficacité. Cette efficacité est un compromis entre sa capacité à explorer un espace de conception, la difficulté de définition des paramètres et la cohérence du résultat obtenu par rapport au problème posé. Nous avons donc proposé la problématique suivante : *trouver un paramétrage de formes adapté à l'optimisation des pièces surfaciques permettant une plus large exploration de l'espace de conception que les paramétrages standards*.

À cet égard, deux axes ont été investigués : le premier consiste à adapter les méthodes classiquement utilisées dans l'industrie pour élargir leur espace de conception, et le deuxième est de proposer une méthode en rupture, basé sur les équations de Koiter, paramétrant la mécanique par la forme.

Dans le cadre du premier axe, nous avons proposé deux méthodes proches des méthodes classiques. La première repose sur la définition d'une bibliothèque de formes élémentaires. Nous avons vu que pour obtenir des formes innovantes il est nécessaire d'autoriser le mélange de ces formes, ce qui conduit à des méthodes d'optimisation combinatoires complexes à mettre en œuvre. Cette méthode a ensuite été simplifiée en adoptant une approche de mélange de fonctions élémentaires, ce qui a conduit au deuxième axe de recherche développé dans cette Thèse. Cette méthode a été développée pour corriger les défauts de la précédente, cependant, compte tenu du grand nombre de variables à optimiser, on a établi que les méthodes d'optimisation basées sur les surfaces de réponses ont du mal à converger vers un optimum.

L'approche Koiter a permis de simplifier le processus d'optimisation en intégrant les étapes de modification de géométrie, de simulation, et d'optimisation, au prix de développements spécifiques, non standards aujourd'hui dans les codes de simulation. Cette méthode s'apparente à l'optimisation topographique au regard de l'espace exploré, et présente les avantages

- de ne pas nécessiter de retour CAO,
- d'être indépendante du maillage et donc de s'affranchir des problèmes liés à la qualité des éléments lors des modifications de formes,

- et de permettre le calcul des gradients.

Comme il s'agit d'équations de coques profondes, elles permettent de prendre en compte des géométries à fortes variations de courbures, par exemple, ce qui assure leur pertinence pour traiter les formes classiquement utilisées dans l'industrie automobile.

Nous avons montré dans ce travail la pertinence de cette méthode vis-à-vis des problèmes à traiter dans l'industrie automobile. En proposant un workflow d'optimisation basé sur les carreaux de Bézier, automatisé grâce à l'utilisation d'un logiciel de calcul formel, on assure la capacité de ces méthodes à traiter des problèmes de modification de formes pour des pièces automobiles. Pour la rendre totalement opérationnelle, il est nécessaire

- de l'implémenter dans un code élément finis ou de CAO,
- d'élargir le champ des physiques traitées à des non-linéarités matériaux et des grands déplacements.

À l'avenir, les développements de cette méthode pour traiter différentes physiques, comme le crash par exemple, et différents critères d'optimisation, permettrait d'intégrer tout le processus de conception dans un même outil. On peut donc envisager de concevoir un système complet, en prenant en compte l'ensemble des prestations, dès les avants projets, et donc d'exploiter toutes les latitudes de dessin disponibles dans le haut du cycle en V.

Optimisation de la première fréquence propre d'un patch spline

Nous allons reprendre l'optimisation du patch spline faite dans la section 5.1.2 page 90. Tout d'abord, nous rappelons que les résultats obtenus à chaque itération sont donnés dans le tableau 5.1 page 91, le point de départ est une plaque carrée, les formes obtenues à chaque itération sont décrites par les figures A.1.

On remarque que les modifications de forme sont importantes d'une itération à l'autre, par exemple entre l'itération 3 et les itérations 4 et 5, la coordonnée en Z du point P_{16} passe de $-0.269759m$ à $-1.052324m$. L'optimisation a convergé, les déplacements des points sont de l'ordre de $7e^{-7}$ entre l'itération 4 et l'itération 5.

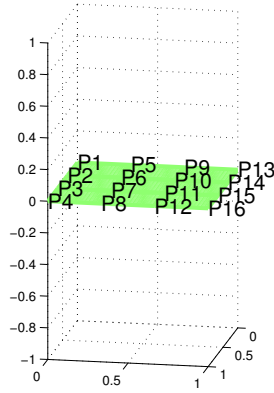
Les trois matrices de coordonnées de points de contrôles sont donnés en (A.1), (A.2) et (A.3), on remarque que l'ensemble des points se sont déplacés.

$$P_x = \begin{bmatrix} 0.000000 & -0.002681 & -0.008043 & -0.024130 \\ 0.335023 & 0.331448 & 0.324298 & 0.302849 \\ 0.672103 & 0.666741 & 0.656017 & 0.623843 \\ 1.018438 & 1.007713 & 0.986264 & 0.921917 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

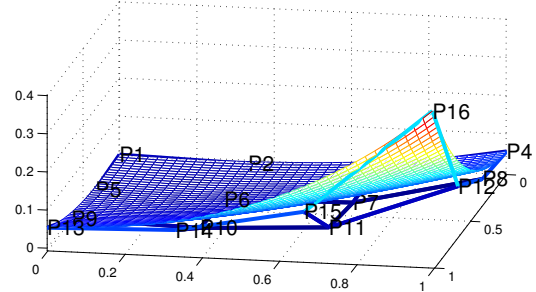
$$P_y = \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.335023 & 0.672103 & 1.018438 \\ -0.002681 & 0.331448 & 0.666741 & 1.007713 \\ -0.008043 & 0.324298 & 0.656017 & 0.986264 \\ -0.024130 & 0.302849 & 0.623843 & 0.921917 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$P_z = \begin{bmatrix} 0.000000 & -0.186766 & -0.506737 & -0.526189 \\ -0.186766 & -0.317501 & -0.527834 & -0.222071 \\ -0.555626 & -0.576723 & -0.669031 & -0.213874 \\ -0.672857 & -0.580885 & -0.735943 & -1.052324 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

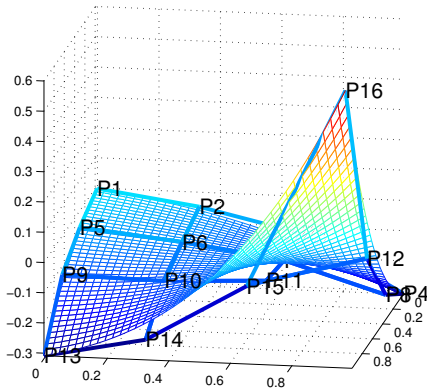
Ces résultats montrent l'efficacité de la méthode à explorer l'espace de conception, et donc à proposer des solutions innovantes.



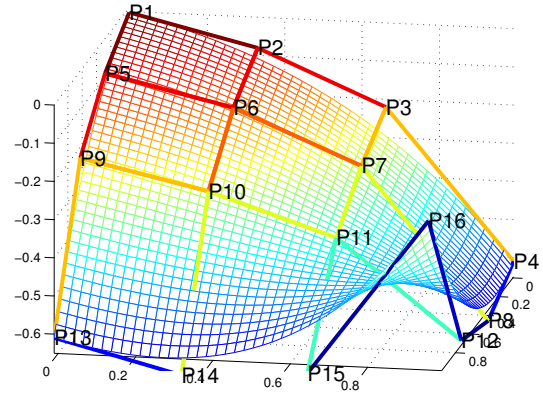
(a) Itération 0 : $f_0 = 2,442508 \text{ Hz}$



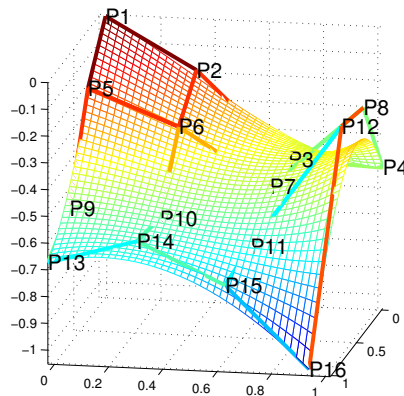
(b) Itération 1 : $f_0 = 2,655227 \text{ Hz}$



(c) Itération 2 : $f_0 = 2,809681 \text{ Hz}$



(d) Itération 3 : $f_0 = 2,952545 \text{ Hz}$



(e) Itérations 4 et 5 : $f_0 = 3,332729 \text{ Hz}$

FIGURE A.1 – Formes obtenues au cours des itérations pour l'optimisation d'un patch spline sous critère de fréquence propre

Bibliographie

- [Allaire 2001] Grégoire Allaire, Sylvie Aubry et François Jouve Jouve. *Eigenfrequency optimization in optimal design*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, no. 28, pages 3565 – 3579, 2001. (Cité en page 71.)
- [Altair 2011] Altair. *Hyperworks 11 – Optistruct user’s guide*. Altair Engineering, 11.0.0 édition, 2011. (Cité en pages xv et 12.)
- [Anamode-5.2 2007] Anamode-5.2. *Manuel Utilisateur*. Renault S.A., 2007. (Cité en page 46.)
- [Andreoli 2003] Michele Andreoli, Aleš Janka et Jean-Antoine Désidéri. *Free-form-deformation parameterization for multilevel 3D shape optimization in aerodynamics*. Rapport technique 5019, INRIA, 2003. (Cité en page 87.)
- [ANSA 2011] ANSA. *ANSA 13.2.1 – user’s guide*. beta CAE Systems SA, 2011. (Cité en pages xv et 13.)
- [Armstrong 1992] J. Scott Armstrong et Fred Collopy. *Error Measures for Generalizing About Forecasting Methods : Empirical Comparisons*. Marketing Papers, vol. 8, pages 69–80, 1992. (Cité en page 38.)
- [Audoly 2000] Baslie Audoly. *Élasticité et géométrie : de la rigidité des surfaces à la délamination en fil de téléphone*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000. (Cité en page 63.)
- [Audoly 2010] B. Audoly et Y. Pomeau. *Elasticity and geometry : From hair curls to the non-linear response of shells*. Oxford University Press, 2010. (Cité en page 63.)
- [Batoz 1992] Jean-Louis Batoz et Gouri Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis : Coques*, volume 3. Hermès, 1992. (Cité en page 13.)
- [Beale 1979] E.M.L. Beale. *Branch and Bound Methods for Mathematical Programming Systems*. In E.L. Johnson P.L. Hammer et B.H. Korte, éditeurs, Discrete Optimization II Proceedings of the Advanced Research Institute on Discrete Optimization and Systems Applications of the Systems Science Panel of NATO and of the Discrete Optimization Symposium co-sponsored by IBM Canada and SIAM Banff, Aha. and Vancouver, volume 5 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 201 – 219. Elsevier, 1979. (Cité en page 32.)
- [Bernadou 1991a] M. Bernadou, F. J. Palma et B. Rousselet. *Shape optimization of an elastic thin shell under various criteria*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 3, pages 7–21, 1991. 10.1007/BF01743485. (Cité en page 63.)
- [Bernadou 1991b] Michel Bernadou et Bernard Lalanne. *Flambement linéaire d’une coque mince élastique de forme générale*. Rapport de Recherche 1435, INRIA, 1991. (Cité en page 72.)

- [Bernadou 1994] M. Bernadou. Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Recherches en mathématiques appliquées. Masson, 1994. (Cité en pages 62, 68, 75 et 77.)
- [Bernadou 1996a] Michel Bernadou et Annie Cubier. *Numerical analysis of junctions between thin shells, Part 1 – continuous problems*. Rapport technique 2921, INRIA, 1996. (Cité en pages 95 et 96.)
- [Bernadou 1996b] Michel Bernadou et Annie Cubier. *Numerical analysis of junctions between thin shells, Part 2 – Approximation by finite element methods*. Rapport technique 2922, INRIA, 1996. (Cité en page 95.)
- [Blouza 1999] Adel Blouza et Hervé Le Dret. *Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity*. Q. Appl. Math., vol. LVII, pages 317–337, June 1999. (Cité en page 83.)
- [Boyer 2009] Edmond Boyer. *Représentation des courbes et des surfaces*. UFRIMA, 2009. (Cité en page 88.)
- [Brujic 2010] Djordje Brujic, Mihailo Ristic, Massimiliano Mattone, Paolo Maggiore et Gian-Paolo Poli. *CAD based shape optimization for gas turbine component design*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 41, pages 647–659, 2010. (Cité en page 11.)
- [Céa 1986] Jean Céa. *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*. Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 20, no. 3, pages 371–402, 1986. (Cité en page 68.)
- [Choï 1995] Daniel Choï. *Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques élastiques minces*. PhD thesis, Université Paris VI, 1995. (Cité en page 63.)
- [Ciarlet 1980] P. G. Ciarlet et P. Rabier. *Les Équations de von Kàrmàn*. Springer-Verlag, 1980. (Cité en page 72.)
- [Ciarlet 2005] P.G. Ciarlet. An introduction to differential geometry with applications to elasticity. Numeéro vol. 66 ;vol. 99 de An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity. Springer, 2005. (Cité en pages 63, 81 et 83.)
- [Ciarlet 2006] Philippe G. Ciarlet et Liliana Gratie. *From the classical to the generalized von Kármán and Marguerre von Kármán equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 190, no. 12, pages 470 – 486, 2006. <ce :title>Special Issue : International Conference on Mathematics and its Application</ce :title> <xocs :full-name>Special Issue : International Conference on Mathematics and its Application</xocs :full-name>. (Cité en pages 62 et 64.)
- [Clarke 1987] F.H. Clarke. Optimization and nonsmooth analysis. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. (Cité en page 71.)
- [Cook 1982] R. Dennis Cook. *Residuals and Influence in Regression*. New York - Chapman and Hall, 1982. (Cité en page 38.)

- [de Boor 1962] Carl de Boor. *Bicubic Spline interpolation*. Journal of Mathematics and Physics, vol. 41, pages 212–218, 1962. (Cité en page 90.)
- [Demengel 1998] Gilbert Demengel et Jean-Pierre Pouget. Modèle de bézier, des b-splines et des nurbs. 1998. (Cité en page 88.)
- [Destuynder 1985] Philippe Destuynder. *A classification of thin shell theories*. Acta Applicandae Mathematicae, vol. 4, pages 15–63, 1985. 10.1007/BF02293490. (Cité en page 62.)
- [Ekeland 1974] I. Ekeland et R. Temam. Analyse convexe et problèmes variationnels. Études Mathématiques. Dunod, 1974. (Cité en page 71.)
- [Friedman 1991] Jerome H Friedman. *Multivariate Adaptive Regression Splines*. The Annals of Statistics, vol. Vol. 19, No. 1, pages 1–141, 1991. (Cité en pages 21 et 42.)
- [Gibert 1988] R.J. Gibert. Vibrations des structures : interactions avec les fluides, sources d’excitation aléatoires. Collection de la Direction des études et recherches d’Électricité de France. Eyrolles, 1988. (Cité en page 91.)
- [Ginsbourger 2009] David Ginsbourger, Delphine Dupuy, Anca Badea, Laurent Carraro et Olivier Roustant. *A note on the choice and the estimation of Kriging models for the analysis of deterministic computer experiments*. Applied Stochastic Models in Business and Industry, vol. 25, no. 2, pages 115–131, 2009. (Cité en page 21.)
- [Goupy 2009] Jacques Goupy et Lee Creighton. Introduction aux plans d’expériences. Dunod/L’usine nouvelle, 4th édition, 2009. (Cité en page 19.)
- [Gournay 2006] Frédéric de Gournay. *Velocity Extension for the Level-set Method and Multiple Eigenvalues in Shape Optimization*. SIAM J. Control Optim., vol. 45, no. 1, pages 343–367, Janvier 2006. (Cité en page 71.)
- [Hardee 1999] Edwin Hardee, Kuang-Hua Chang, Jian Tu, Kyung K. Choi, Iulian Grindeanu et Xiaoming Yu. *A CAD-based design parameterization for shape optimization of elastic solids*. Advances in Engineering Software, vol. 30, no. 3, pages 185 – 199, 1999. (Cité en page 11.)
- [Hutchinson 1998] John Hutchinson, Mark J. Kaiser et Hamid M. Lankarani. *The Head Injury Criterion (HIC) functional*. Applied Mathematics and Computation, vol. 96, no. 1, pages 1 – 16, 1998. (Cité en page 38.)
- [Hyun 2004] S Hyun, C Kim, J.H Son, S.H Shin et Y.S Kim. *An efficient shape optimization method based on FEM and B-spline curves and shaping a torque converter clutch disk*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 40, no. 1314, pages 1803 – 1815, 2004. (Cité en page 87.)
- [Jacobs 1991] Robert A. Jacobs, Michael I. Jordan, Steven J. Nowlan et Geoffrey E. Hinton. *Adaptive Mixture of Local Experts*. Neural Computation, vol. 3, pages 79–87, 1991. (Cité en pages 20 et 22.)

- [Koiter 1968] W. T. Koiter. *Foundations and basic equations of shell theory : a survey of recent progress*. Afdeling der Werktuigbouwkunde, Technische Hogeschool, vol. 5, pages 93–105, 1968. (Cité en pages 62 et 64.)
- [Kooperberg 1997] Charles Kooperberg, Smarajit Bose et Charles J. Stone. *Polychotomous Regression*. Journal of the American Statistical Association, vol. 92, no. 437, pages 117–127, March 1997. (Cité en page 21.)
- [Lavaud 2007] Gaël Lavaud. *Optimisation robuste appliquée au crash automobile*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007. (Cité en page 30.)
- [Leiceaga 2007] Xoan A. Leiceaga, Oscar E. Ruiz, Carlos A. Vanegas, Jose Prieto, Manuel Rodriguez et Eva Soto. *Bi-curve and Multi-patch smoothing with Application to the Shipyard Industry*. In Congresso Internazionale Congiunto XVI ADM - XIX INGEGRAF, pages 415–424., Perugia, Italy, June 6-9 2007. (Cité en page 92.)
- [Liu 2002] Ligang Liu et Guojin Wang. *Explicit matrix representation for NURBS curves and surfaces*. Computer Aided Geometric Design, vol. 19, no. 6, pages 409 – 419, 2002. (Cité en pages 88 et 90.)
- [Matheron 1963] G. Matheron. *Traité de géostatistique appliquée, ii : le krigeage*. B.R.G.M., Paris, 1963. (Cité en page 21.)
- [Naghdi 1963] P. M. Naghdi. *Foundations of Elastic Shell Theory*. Progr. in Solid Mech., no. 4, pages 1–90, 1963. (Cité en page 64.)
- [Nastran 2001] Nastran. *Quick Reference Guide*. MSC Software, 2001. (Cité en page 81.)
- [Philippe 2011] Jonathan Philippe, Marc Albertelli et Laurent Blanc. *Optimisation des critères NVH*. Master’s thesis, Renault – École Centrale de Lyon, 2011. (Cité en page 49.)
- [Riesz 1952] F. Riesz, B. Szokefalvi-Nagy et Magyar Tudományok Akadémia (Budapest). *Leçons d’analyse fonctionnelle*. Akadémiai Kiadó, 1952. (Cité en page 71.)
- [Risler 1991] Jean-Jacques Risler. *Méthodes mathématiques pour la cao. Recherches en mathématiques appliquées*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, 1991. (Cité en page 88.)
- [Rousselet 1990] Bernard Rousselet et Denise Chenais. *Continuité et différentiabilité d’éléments propres : Application à l’optimisation de structures*. Applied Mathematics and Optimization, vol. 22, pages 27–59, 1990. (Cité en pages 68 et 71.)
- [Roy 2008] Rajkumar Roy, Srichand Hinduja et Roberto Teti. *Recent advances in engineering design optimisation : Challenges and future trends*. CIRP Annals - Manufacturing Technology, vol. 57, no. 2, pages 697 – 715, 2008. (Cité en pages 10, 11 et 16.)
- [Saitou 2005] Kazuhiro Saitou, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki et Panos Papalambros. *A Survey of Structural Optimization in Mechanical Product Development*. Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 5, no. 3, pages 214–226, 2005. (Cité en pages 11 et 16.)

- [Samareh 1999] Jamshid A. Samareh, Jamshid A. Samareh et B Bernstein Polynomial. *A Survey Of Shape Parameterization Techniques*. 1999. (Cité en page 87.)
- [Simms 2009] Ciaran Simms et Denis Wood. *The Influence of Vehicle Design on Pedestrian and Cyclist Injuries*. In *Pedestrian and Cyclist Impact*, volume 166 of *Solid Mechanics and Its Applications*, pages 171–208. Springer Netherlands, 2009. (Cité en page 38.)
- [Torres 2003] Romina Torres, Rodrigo Salas, Héctor Allende et Claudio Moraga. *Robust Expectation Maximization Learning Algorithm for Mixture of Experts*. In José Mira et José Álvarez, éditeurs, *Computational Methods in Neural Modeling*, volume 2686 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1041–1041. Springer Berlin / Heidelberg, 2003. (Cité en page 22.)
- [Tourbier 2009] Yves Tourbier. *Plans d'expériences*. Formation interne renault, 2009. (Cité en page 19.)
- [Voth 1999] B. Voth. *Using automatically generated shape variables to optimize stamped plates*. Technical Memorandum, Altair Engineering, Inc., 1999. (Cité en page 12.)
- [Weiss 2009] Daniel Weiss. *Geometry-Based Structural Optimization on CAD Specification Trees*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2009. (Cité en page 30.)
- [Yang 1992] R.J. Yang, A. Lee et D.T. McGeen. *Application of basis function concept to practical shape optimization problems*. *Structural optimization*, vol. 5, pages 55–63, 1992. (Cité en page 12.)
- [Yang 2007] Zhi Yang et Dimitri J. Mavriplis. *A Mesh Deformation Strategy Optimized by the Adjoint Method on Unstructured meshes*. In *Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2007. (Cité en page 12.)
- [Zhou 2004] M. Zhou, N. Pagaldipti, H.L. Thomas et Y.K. Shyy. *An integrated approach to topology, sizing, and shape optimization*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 26, pages 308–317, 2004. (Cité en page 13.)

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur L. JEZEQUEL

et les rapports de

Monsieur C. SOIZE

Professeur - Université Paris Est Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle
Equipe de Mécanique - 5 bd Descartes - 77454 Marne la Vallée cedex 2

Et de

Monsieur M. POTIER-FERRY

Professeur - Université de Metz - Laboratoire LEM3, SAULCY - Bât. C - Bureau 105 - Ile du Saulcy
57045 METZ cedex 01

Monsieur DU CAUZE DE NAZELLE Paul

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE , ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 25 mars 2013

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

