

**THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE d'AIX-MARSEILLE**

Spécialité

Mécanique des Solides

Ecole doctorale Sciences pour l'ingénieur : Mécanique, Physique, Micro et
Nanoélectronique

Présentée par

El Hadi MOUSSI

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE d'AIX-MARSEILLE

Sujet de la thèse :

**Analyse de structures vibrantes dotées de non-linéarités localisées à
jeu à l'aide des modes non-linéaires**

soutenue le 17 décembre 2013

devant le jury composé de :

Dr. Mathias LEGRAND	Rapporteur
Pr. Olivier THOMAS	Rapporteur
Pr. Frédéric LEBON	Examineur
Pr. Fabrice THOUVEREZ	Examineur
Pr. Bruno COCHELIN	Directeur de thèse
Dr. Sergio BELLIZZI	Co-Directeur de thèse
Dr. Ionel NISTOR	Encadrant industriel
Dr. Mathieu CORUS	Invité

Résumé

Le travail de cette thèse a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre EDF R&D et le LMA de Marseille (CNRS). Le but était de développer des outils théoriques et numériques pour le calcul de modes non-linéaires de structures industrielles possédant des non-linéarités localisées à jeu.

La méthode de calcul utilisée est une combinaison de la méthode d'équilibrage harmonique (EH) et de la méthode asymptotique numérique (MAN), appelée EHMAN. Elle est réputée pour sa robustesse sur les problèmes réguliers. L'enjeu de ce travail de thèse est de l'appliquer sur des problèmes non-réguliers régularisés de type butée à jeu pour lequel un grand nombre d'harmonique est nécessaire. Des améliorations ont été apportées à la méthode de base pour rendre effectif le traitement de modèles à "grand" nombre de degrés de liberté (DDL). L'algorithme Fast Fourier Transform est utilisé pour accélérer le calcul des termes non-linéaires. Le calcul de la matrice jacobienne a été optimisé. Et la dissociation du nombre d'harmoniques entre les variables de déplacement et de force non-linéaire a été introduite. Les développements réalisés pendant la thèse ont été capitalisés par la création de nouveaux opérateurs dans *Code_Aster*.

Une étude approfondie d'un système à 2 degrés de liberté a permis de faire émerger quelques caractéristiques des systèmes non-linéaires à jeu. Celles-ci ont servi entre autre à établir une méthodologie pour l'étude de systèmes à grand nombre de DDL. Pour finir, la potentialité des modes non-linéaires comme outil de diagnostic vibratoire est démontrée avec l'étude d'un tube cintré de générateur de vapeur. Le calcul des modes non-linéaires a montré l'existence d'une interaction entre un mode hors-plan (basse fréquence) et un mode plan (haute fréquence) expliquant des régimes vibratoires non-standards. Ce résultat, impossible à obtenir avec les outils de l'analyse modale linéaire, est confirmé expérimentalement.

Mots-clés : systèmes dynamiques, vibrations de structures, modes non-linéaires, orbites périodiques, systèmes hamiltoniens, méthode asymptotique numérique, méthode d'équilibrage harmonique, résonances internes, problèmes de contact.

Abstract

This work is a collaboration between EDF R&D and the Laboratory of Mechanics and Acoustics. The objective is to develop theoretical and numerical tools to compute nonlinear normal modes (NNMs) of structures with localized nonlinearities.

We use an approach combining the harmonic balance and the asymptotic numerical methods, known for its robustness principally for smooth systems. Regularization techniques are used to apply this approach for the study of nonsmooth problems. Moreover, several aspects of the method are improved to allow the computation of NNMs for systems with a high number of degrees of freedom (DOF). Finally, the method is implemented in *Code_Aster*, an open-source finite element solver developed by EDF R&D.

The nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom system are studied and some original characteristics are observed. These observations are then used to develop a methodology for the study of systems with a high number of DOFs. The developed method is finally used to compute the NNMs for a model U-tube of a nuclear plant steam generator. The analysis of the NNMs reveals the presence of an interaction between an out-of-plane (low frequency) and an in-plane (high frequency) modes, a result also confirmed by the experiment. This modal interaction is not possible using linear modal analysis and confirms the interest of NNMs as a diagnostic tool in structural dynamics.

Keywords : dynamical systems, structural vibrations, nonlinear normal modes, periodic orbits, hamiltonian systems, asymptotic numerical method, harmonic balance method, internal resonances, contact problems.

Table des matières

Introduction Générale	3
1 Analyse modale non-linéaire	7
1.1 Rappel : les modes propres linéaires	7
1.2 Définitions des modes non-linéaires	8
1.2.1 Approche de Rosenberg	9
1.2.2 Approche de Shaw et Pierre : variété invariante	9
1.2.3 Approche forme normale	11
1.3 Une définition pour les systèmes conservatifs : solutions périodiques	12
1.4 Les propriétés particulières des modes non-linéaires	13
1.4.1 Phénomènes de résonances	14
1.4.2 Phénomènes de localisation	15
1.4.3 Bifurcation et stabilité	16
1.5 Méthodes de calcul des modes non-linéaires	18
1.5.1 Méthodes semi-analytiques	18
1.5.2 Méthodes numériques : calcul de variétés invariantes	18
1.5.3 Méthodes numériques : calcul de solutions périodiques	19
1.6 Calcul de stabilité des solutions périodiques	23
1.6.1 Principes théoriques	23
1.6.2 Quelques méthodes de calcul de stabilité	25
1.6.3 Le cas particulier des systèmes hamiltoniens	26
1.7 Quelques applications de MNLs	28
1.7.1 Pompage énergétique	28
1.7.2 Diagnostic du comportement vibratoire	29
1.7.3 Réduction de modèle	29
1.8 Les systèmes non-réguliers	31

2	Une méthode pour le calcul de solutions périodiques : Fast-EHMAN	33
2.1	Introduction	33
2.2	Modèle mécanique et régularisation des non-linéarités	34
2.2.1	Modèle mécanique global	34
2.2.2	Régularisation	35
2.2.3	Adimensionnement	36
2.2.4	Modélisation des non-linéarités	37
2.3	Calcul de solutions périodiques : EHMAN	42
2.3.1	Réécriture du système d'équation dans le formalisme EHMAN	42
2.3.2	Méthode de balance harmonique	44
2.3.3	Méthode asymptotique numérique	44
2.3.4	Détection des bifurcations	45
2.4	Amélioration de la performance : Fast-EHMAN	48
2.4.1	Introduction	48
2.4.2	Résoudre au second ordre	48
2.4.3	Dissociation de l'ordre de troncature des harmoniques	49
2.4.4	Produit de convolution par l'AFT	52
2.4.5	Calcul optimal de la matrice jacobienne	54
2.4.6	Conclusion	55
2.5	Discussion sur le choix et l'influence des paramètres	57
2.5.1	Le paramètre de régularisation des forces de contact	57
2.5.2	Les ordres de troncatures de la MBH	60
2.6	Implémentation de la méthode	62
2.6.1	<i>MANLAB</i>	63
2.6.2	<i>Code_Aster</i>	64
2.7	Conclusions	67
3	Etudes de modèles simplifiés de structures avec chocs	69
3.1	Un système linéaire par morceaux à deux degrés de liberté	69
3.1.1	Description du modèle	69
3.1.2	Notations et choix des paramètres	70
3.1.3	Le MNL en opposition de phase	72
3.1.4	Le MNL en phase	73
3.1.5	L'influence de la raideur de butée α	79
3.2	Une barre mince avec condition au limite de contact unilatéral	81
3.2.1	Description du modèle	81
3.2.2	Étude détaillée du premier MNL	82

3.2.3	Calcul des MNLs en interaction avec le premier MNL	85
3.3	Une poutre avec condition aux limites de contact bilatéral	86
3.3.1	Description du modèle	86
3.3.2	Étude détaillée du premier MNL de flexion	89
3.3.3	Calcul des trois MNLs en interaction avec le premier MNL	91
4	Application industrielle : Tube en U d'un générateur de vapeur	93
4.1	Contexte de l'étude	93
4.2	Présentation du modèle	95
4.3	Étude numérique	97
4.3.1	Choix de l'ordre de troncature H_l	97
4.3.2	Premier MNL de flexion hors-plan	99
4.4	Étude expérimentale	101
4.4.1	Dispositif d'essai	101
4.4.2	Discussion des résultats expérimentaux	102
4.5	Conclusion	104
	Conclusions et Perspectives	107
	Bibliographie	111
A	Produit de deux séries de Fourier : Analytique vs. DFT	119
A.1	Description de la méthode avec DFT	119
A.1.1	Le formalisme de la DFT	120
A.1.2	Matrice de transition	120
A.1.3	Choix de la discrétisation temporelle	121
A.1.4	Produit de deux séries de Fourier	121
A.2	Preuve de l'équivalence entre les deux méthodes	121
A.2.1	Passage au domaine temporel	121
A.2.2	Coefficient Z_0	122
A.2.3	Coefficient Z_{Cp}	122
A.2.4	Coefficient Z_{Sp}	123
A.2.5	Conclusion	123
B	Calcul optimal de la matrice jacobienne issue de la MAN	125
C	Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system	129
D	Un système à un degré de liberté avec contact unilatéral	157
D.1	1 ^{er} cas : $x(\tau) \leq 1$	158
D.2	2 ^{ème} cas : $x(\tau) > 1$	158
D.3	Conclusion	159

Introduction générale

Les analyses de dynamique vibratoire sont presque toujours associées à une modélisation linéaire ou linéarisée. Cette hypothèse de linéarité permet de facilement définir des modes de vibrations et de les utiliser comme base de décomposition pour simplifier et réduire les modèles. Aujourd'hui, la plupart des outils d'identification expérimentale ou de modélisation numérique s'appuient sur des concepts linéaires.

Pourtant les systèmes mécaniques présentent toujours de nombreuses non-linéarités telles que :

- (i) les non-linéarités géométriques en présence de vibrations de grande amplitude,
- (ii) les non-linéarités de contact et de frottement aux interfaces entre les composants d'un système,
- (iii) les non-linéarités de comportement des matériaux utilisés,

Ces non-linéarités sont en général difficiles à modéliser et les modèles numériques proposés souvent difficiles à résoudre. Diverses stratégies ont longtemps été de mise, soit pour éviter de prendre en compte ces comportements, soit pour les traiter de manière simplifiée. Or les progrès des techniques ont conduit, par exemple, de plus en plus à l'utilisation de matériaux complexes dont la loi de comportement ne peut pas être considérée comme linéaire. Un autre exemple concerne les structures souples, minces, utilisées dans la construction des systèmes de plus en plus légers, et pour lesquels l'hypothèse des petits déplacements n'est plus valable. Par ailleurs, les systèmes avec jeu et impact sont intrinsèquement non-linéaires.

Si bien qu'aujourd'hui, il est devenu difficile de faire l'impasse sur ces modèles numériques non-linéaires, nécessitant l'utilisation de méthodes de résolution appropriées.

C'est dans cet esprit que la notion de modes de vibration aux problèmes non-linéaires a été généralisée à certaines classes de problèmes et baptisée modes non-linéaires (MNL). Ce concept permet de mieux comprendre les problèmes de vibrations en présence de non-linéarités, en désacralisant l'idée que les oscillations libres se font à fréquence et déformée modale fixées. tirant profit des non-linéarités plutôt qu'en les ignorant. Les premiers travaux sur l'existence des MNL et la formalisation du concept ont émergé dans les années 1960, principalement ceux de Rosenberg. Depuis, beaucoup de travaux ont été publiés autour de ce concept, que ce soit pour revisiter la définition elle-même, pour développer des méthodes analytiques et numériques pour les calculer, ou encore pour les utiliser dans un contexte de diagnostic, voire dans la phase de conception des structures en tirant profit des non-linéarités plutôt qu'en les ignorant.

Contexte industriel

Dans ce contexte, un industriel comme EDF, opérateur des centrales de production d'électricité en France, a besoin d'outils développés par la R&D pour assurer le maintien des installations en fonctionnement dans des conditions de sécurité. Les besoins d'EDF R&D sont principalement motivés par le diagnostic vibratoire et la construction de modèles réduits afin de réaliser des études de comportement vibratoire de structures avec contacts, jeux et frottements, problème difficile et non résolu de manière satisfaisante aujourd'hui. L'introduction du concept de modes non-linéaires dans les analyses de dynamique vibratoire avec impact est une opportunité donnée à l'ingénieur pour affronter la difficulté avec un éclairage nouveau. Bien que les types de non-linéarités rencontrés, dans le contexte du diagnostic vibratoire, sont nombreux on s'intéresse ici principalement au contact. Parmi les applications, on peut citer par exemple les générateurs de vapeurs (chocs entre les tubes et les plaques entretoises), les assemblages combustibles (choc grille contre grilles, grilles contre cloisons, crayons contre tubes guides), ou encore dans les lignes d'arbres (contact rotor-stator). Il existe bien évidemment d'autres non-linéarités, comme le comportement des matériaux ou les vibrations à grande amplitude qui feront sans doute l'objet d'investigation dans l'avenir à l'aide des MNLs.

Plan du mémoire

Dans ce cadre, le travail présenté ici est structuré en trois axes, le développement de méthodes numériques performantes et robustes, leur intégration dans des outils existants et la proposition de méthodologies dédiées à une utilisation dans un contexte industriel. On illustrera les résultats obtenus par l'exemple d'un tube Générateur de Vapeur afin de démontrer la nécessité d'un diagnostic vibratoire par une analyse modale non-linéaire.

Le premier chapitre, principalement dédié à l'état de l'art, comporte des rappels sur les différents concepts de l'analyse modale non-linéaire, en passant dans un premier temps par la définition des modes non-linéaires et leurs propriétés, et quelques méthodes pour les calculer. On s'attarde, en particulier, sur la définition d'un mode non-linéaire comme une famille de solutions périodiques. En effet, le thème des solutions périodiques étant très étudié, il existe quelques résultats mathématiques sur leur existence et surtout un ensemble de méthodes pour les calculer, comme par exemple les méthodes de continuation, méthodes robustes et performantes. Dans le cadre de ce travail, on se limite à cette définition et à la mise en oeuvre de ce type de méthodes. On présentera également comment calculer la stabilité des solutions périodiques. On terminera, enfin, par les différentes applications des modes non-linéaires, principalement dans le développement d'absorbeurs, le diagnostic vibratoire et la réduction de modèle.

Le deuxième chapitre présente une méthode de calcul des modes non-linéaires pour des structures élastiques minces qui sont retenues par des butées élastique en quelques points. La méthode repose sur de l'équilibrage harmonique pour la description des solutions périodiques et des séries de Taylor pour la continuation de ces solutions périodiques (méthode asymptotique numérique). L'apport est d'avoir étendu la méthode aux problèmes non-réguliers de contact en proposant des régularisations adaptées et des améliorations spécifiques. Ces améliorations se situent principalement au niveau de la performance par l'introduction entre autres de l'algorithme Fast-Fourier Transform (FFT), mais aussi de la robustesse par l'introduction d'une dissociation de l'ordre de troncature des séries de Fourier selon les variables. Avant cela, on présente la modélisation choisie, c'est-à-dire l'étude de systèmes non-linéaires conservatifs et autonomes issues de modèles éléments finis. On se limite dans ce travail à trois types de

non-linéarités de contact, que l'on a appelé unilatéral, bilatéral et annulaire. Cette méthode a été implementée dans un code éléments finis développé par EDF, appelé *Code_Aster*.

Le troisième chapitre présente quelques exemples académiques, un système à 2 degrés de liberté avec une condition aux limites de contact bilatéral sur un degré de liberté, une barre en traction compression qui impacte une butée élastique et une poutre en flexion dotée d'une butée bilatérale sur un de ses degrés de liberté. Ces exemples permettent de valider la méthode et de faire émerger une méthodologie pour une utilisation dans un contexte industriel, principalement sur le choix de l'ordre de troncature des séries de Fourier de la méthode d'équilibrage harmonique.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'une maquette d'un tube cintré représentatif des tubes qui composent le Générateur de Vapeur, composant essentiel d'une centrale de production d'électricité. On montre qu'une analyse modale non-linéaire permet d'effectuer un diagnostic vibratoire qui entre en contradiction avec une analyse modale linéaire classique. Pour cela on utilisera une étude numérique à l'aide de l'outil développé dans *Code_Aster* et une étude expérimentale sur la maquette du tube cintré.

Chapitre 1

Analyse modale non-linéaire

Ce chapitre présente quelques rappels sur l'analyse modale non-linéaire. On commence par un rappel sur les modes linéaires, ensuite on présente brièvement plusieurs définitions des modes non-linéaires, et de manière plus détaillée la définition utilisée dans ce travail. Ensuite, on verra que dans le cas non-linéaire, certaines propriétés diffèrent de l'analyse modale linéaire. On se concentrera sur l'une de ces propriétés particulières, la stabilité et la manière de la déterminer. On proposera, également, de manière non exhaustive des méthodes de calcul des modes non-linéaires. Et enfin, on verra quelques applications des modes non-linéaires, ainsi que le cas spécifique des non-linéarités non-régulières, qui nous intéresse plus particulièrement dans ce travail.

1.1 Rappel : les modes propres linéaires

Dès le début du XVII^{ème} siècle, la théorie des vibrations est un sujet d'étude, par le problème de la corde vibrante notamment. On avait observé que la corde avait des parties qui vibraient et que certains points appelés "noeuds" n'étaient jamais en mouvement. De plus, on avait remarqué que la présence d'un nombre important de ces "noeuds" impliquait que les vibrations étaient à plus haute fréquence que dans le cas sans noeud. En 1759, Lagrange résoud de manière analytique le problème de la corde vibrante [56], en la supposant composée d'un nombre fini de particules possédant chacune une masse. Il établira, ainsi, qu'il existe un nombre de fréquences indépendantes égale au nombre de particules, et en passant à la limite il démontrera que les fréquences sont les fréquences harmoniques de la corde vibrante. Ces résultats ont servi de prémices au travail de Rayleigh [95], qui dans son traité nommé *Theory of Sound*, publié en 1877, introduit les concepts fondamentaux des oscillations d'un système linéaire, et démontre l'existence des modes propres et des fréquences propres pour les systèmes discrets et continus. Les principes introduits dans ce traité sont encore aujourd'hui appliqués tels quels.

Pour calculer les modes propres, on considère un système mécanique autonome conservatif à n degrés de liberté, régi par les équations du mouvement,

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) = 0 \quad (1.1)$$

où $U = [U_1 \dots U_n]^t$, t désignant l'opération de transposition, est le vecteur des déplacements de l'ensemble des degrés de liberté, M la matrice de masse, K la matrice de raideur et

($\dot{}$) signifie la dérivée par rapport au temps. On supposera que les matrices de masse et de raideur sont symétriques et réelles définies positives.

On recherche alors les solutions de type harmonique du système,

$$\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\phi} a \cos(\omega t - \alpha) \quad (1.2)$$

où les trois scalaires a , ω et α sont respectivement l'amplitude de référence, la pulsation et la phase, et $\boldsymbol{\phi}$ un vecteur constant normalisé. Lorsqu'on introduit cette expression dans l'Eq. (1.1), on obtient le problème aux valeurs propres généralisées suivant,

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0 \quad (1.3)$$

Ce système possède n solutions indépendantes, qu'on note $(\omega_i, \boldsymbol{\phi}_i)$ pour $i = 1, \dots, n$,

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_i = 0 \quad (1.4)$$

Les valeurs propres sont positives et les vecteurs propres $\boldsymbol{\phi}_i$ sont \mathbf{M} et \mathbf{K} -orthogonaux deux à deux et sont normalisés de la manière suivante :

$$(i) \quad \boldsymbol{\phi}_i^t \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \forall i \neq j \text{ et } \boldsymbol{\phi}_i^t \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = 1$$

$$(ii) \quad \boldsymbol{\phi}_i^t \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \forall i \neq j \text{ et } \boldsymbol{\phi}_i^t \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2$$

En mécanique des structures, un couple $(\omega_i, \boldsymbol{\phi}_i)$ définit un mode propre où $\boldsymbol{\phi}_i$ est appelé vecteur déformé du mode propre et ω_i la pulsation propre associée, sachant qu'on peut en déduire la fréquence propre $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$.

Les modes propres sont essentiels pour comprendre et prévoir le comportement d'une structure et sont utilisés tous les jours par l'ingénieur. De plus, l'orthogonalité de ces modes propres permet de les utiliser comme une base pour réduire les systèmes de grande taille et les résoudre ainsi rapidement.

Toutefois, l'idéalisation du système en le considérant linéaire amène à négliger des phénomènes qui sont essentiellement liés à la non-linéarité de la structure. Aussi, les outils de l'analyse modale non-linéaire peuvent aider à pallier ce problème.

1.2 Définitions des modes non-linéaires

Dans les années 1960, Rosenberg [88, 89, 90] propose une définition des modes de vibration pour des systèmes non-linéaires autonomes conservatifs, et développe également des méthodes qualitatives et quantitatives pour l'analyse de ces modes. A la même époque, on peut trouver également des travaux dans la communauté mathématicienne sur les modes de systèmes non-linéaires qui se basent sur les travaux de Lyapunov [67]. Nous reviendrons plus en détail sur ces travaux dans la section 1.3. Dans les années 1990, Shaw et Pierre [92, 93, 94] utilisent le concept de variétés invariantes, issu de la théorie des systèmes dynamiques, pour définir un mode non-linéaire. A la même époque, Jézéquel et Lamarque [45] montrent qu'on peut arriver à une définition des modes non-linéaires en utilisant le cadre des formes normales, issues des travaux de Poincaré [83].

Ces différentes approches sont détaillées dans la suite.

1.2.1 Approche de Rosenberg

Rosenberg fut le premier à proposer une extension de la définition de “mode” pour des systèmes non-linéaires. Il définit alors un mode, la définition englobant également les systèmes linéaires, comme une *vibration à l’unisson du système* où le mouvement satisfait les conditions suivantes :

- (i) Tous les degrés de liberté vibrent périodiquement avec une période commune ;
- (ii) Tous les degrés de liberté passent par l’origine simultanément ;
- (iii) Tous les degrés de liberté ont leur vitesse qui s’annule simultanément ;
- (iv) La position de chaque degré de liberté, à chaque instant, peut être déterminée de manière unique par la position d’un seul degré de liberté, i.e.

$$U_i = \gamma_i(U_{ref}) \quad (1.5)$$

Il identifie également deux types de modes, les modes similaires et les modes non-similaires. Les premiers ont comme propriété supplémentaire que les fonctions γ_i de l’Eq. (1.5) sont linéaires. Il donne aussi des conditions pour l’existence des modes similaires. A noter que les modes des systèmes linéaires sont toujours similaires.

Rosenberg propose également une manière de représenter ces modes, utilisée principalement pour des systèmes à deux degrés de liberté. La représentation s’effectue dans l’espace de configuration, (U_1, \dots, U_n) , les mouvements modaux dans l’espace de configuration sont des lignes appelées lignes modales. Dans le cas de mode similaire, les lignes modales sont droites

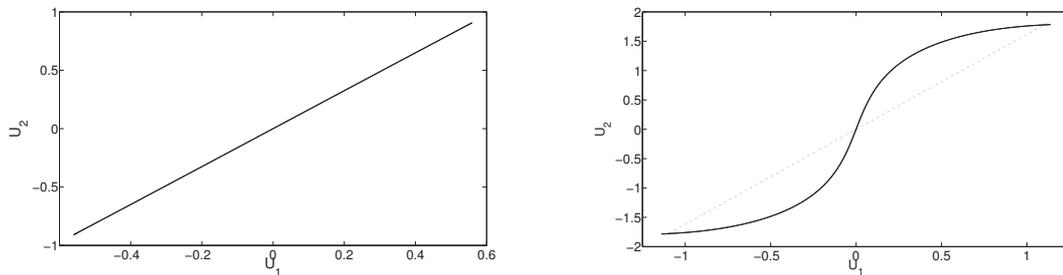


FIGURE 1.1 – Exemples de lignes modales pour un mode (similaire à gauche et non-similaire à droite) pour un système à 2 ddl avec contact bilatéral (voir Section 3.1 pour plus de détails). La droite en pointillé de la figure de droite représente un mode similaire.

et portées par le même vecteur comme dans la Fig. 1.1 (à gauche), et courbées comme dans la Fig. 1.1 (à droite) pour un mode non-similaire.

1.2.2 Approche de Shaw et Pierre : variété invariante

La définition proposée par Shaw et Pierre, au début des années 1990, permet de généraliser le concept de modes non-linéaires à des systèmes dynamiques non-linéaires autonomes, en se basant sur la théorie des variétés invariantes pour les systèmes dynamiques [37]. Cet outil mathématique permet de donner une définition solide et la plus générale possible.

Ainsi, on définit un mode non-linéaire comme une *variété invariante de dimension 2 de l’espace des phases, tangente à un point d’équilibre stable du système linéarisé autour de cet*

équilibre. Cette définition utilise la technique de la variété centrale pour expliciter les variétés invariantes. On rappelle que la notion d'invariance signifie que si on choisit un point quelconque de la variété pour initialiser le système dynamique que l'on souhaite résoudre, alors la solution qu'on obtiendra restera toujours dans la variété.

Dans ce contexte, les modes linéaires sont des plans dans l'espace des phases.

La méthode proposée pour le calcul des modes non-linéaires nécessite de réécrire le système dynamique non-linéaire,

$$\ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t)) \quad (1.6)$$

au premier ordre, en introduisant la variable $\mathbf{V}(t)$, qui correspond à la vitesse,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{V}(t) \\ \dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) \end{cases} \quad (1.7)$$

La variété invariante ou mode non-linéaire est cherchée en contraignant l'ensemble des variables déplacement-vitesse $(\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i)$ à être fonction d'une seule paire déplacement-vitesse. On choisit alors arbitrairement une paire de variable $(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)$, qu'on renomme $\mathbf{X} = \mathbf{U}_1$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{V}_1$. Et on exprime les autres degrés de liberté comme fonction de cette paire de variable, sous la forme,

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i = u_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{V}_i = v_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.8)$$

Après dérivation par rapport au temps de l'Eq. (1.8) et substitution dans l'Eq. (1.7), la dépendance temporelle peut être éliminée en remplaçant $\dot{\mathbf{X}}$ par \mathbf{Y} et $\dot{\mathbf{X}}$ par \mathbf{F}_1 (composante 1 du vecteur $\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$), conduisant à un système d'équations aux dérivées partielles dépendant des deux variables \mathbf{X} et \mathbf{Y} , définissant géométriquement la variété pour $i = 2, \dots, n$.

$$\begin{cases} v_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Y} \\ \quad + \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{F}_1([\mathbf{X} \ u_2 \ \dots \ u_n], [\mathbf{Y} \ v_2 \ \dots \ v_n]) \\ \mathbf{F}_i([\mathbf{X} \ u_2 \ \dots \ u_n], [\mathbf{Y} \ v_2 \ \dots \ v_n]) = \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Y} \\ \quad + \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{F}_1([\mathbf{X} \ u_2 \ \dots \ u_n], [\mathbf{Y} \ v_2 \ \dots \ v_n]) \end{cases} \quad (1.9)$$

Ce système de $2n - 2$ équations caractérise les $2n - 2$ fonctions u_i et v_i . A noter que ce système est aussi difficile à résoudre que le système initial. En général, ce système n'admet pas une solution unique au voisinage du point d'équilibre. Toutefois, différentes techniques ont été proposées pour approcher la solution. Des méthodes pour résoudre ces équations ont été proposées comme on le verra dans la section 1.5.2.

Disposant d'une solution de l'Eq. (1.9), c'est-à-dire la géométrie de l'invariant, on peut alors caractériser les dynamiques modales à l'aide des équations différentielles de (1.7) associées à $(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)$ à savoir,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_1(t) = \mathbf{V}_1(t) \\ \dot{\mathbf{V}}_1(t) = \mathbf{F}_1([\mathbf{U}_1 \ \dots \ \mathbf{U}_n], [\mathbf{V}_1 \ \dots \ \mathbf{V}_n]) \end{cases} \quad (1.10)$$

et en substituant les \mathbf{U}_i et les \mathbf{V}_i par les u_i et les v_i conduisant au système différentiel du premier ordre de dimension 2 suivant,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{Y}(t) \\ \dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{F}_1([\mathbf{X} \ u_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \ \dots \ u_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})], [\mathbf{Y} \ v_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \ \dots \ v_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]) \end{cases} \quad (1.11)$$

Ainsi les dynamiques modales peuvent être générées en résolvant ce système différentiel et reportant la dynamique dans les équations géométriques (1.9)

On peut ainsi obtenir n variétés invariantes définissant aux n modes non-linéaires issues des modes propres du système linéaire sous-jacent.

La définition proposée par Shaw et Pierre est également valable pour le cas des systèmes continus [94]. Elle est valide aussi pour les systèmes mécaniques amortis. Dans ce cas les mouvements modaux ne sont plus des orbites périodiques mais des trajectoires qui tendent vers zéro quand t tend vers l'infini. Dans le cas des systèmes dissipatifs, la représentation dans l'espace de configuration proposée par Rosenberg n'est pas suffisante. Dès lors, on utilise une représentation dans l'espace des phases (U_i, V_i) , comme par exemple dans la Fig. 1.2, où l'on représente par une projection 3D de l'espace des phases de dimension 4, une variété invariante d'un système à 2 ddl avec non-linéarité cubique.

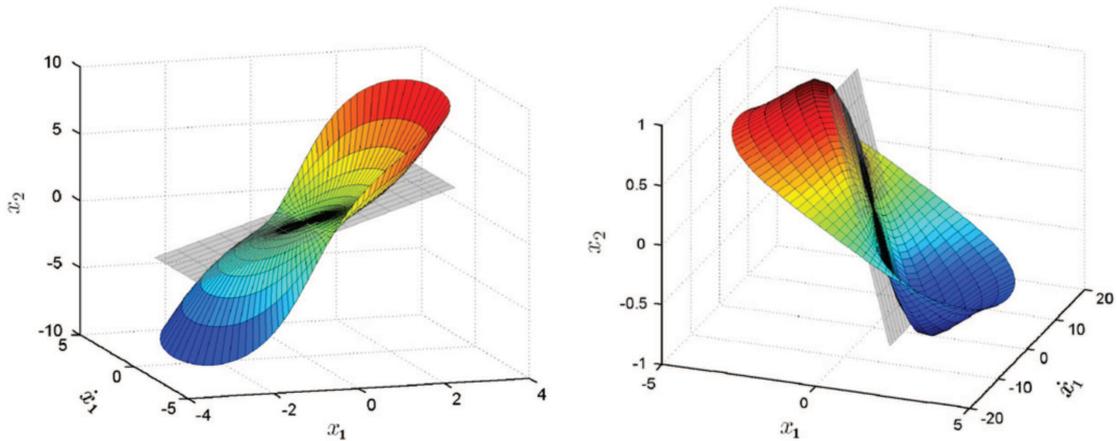


FIGURE 1.2 – Exemples de variétés invariantes issues des modes propres du système linéaire sous-jacent (plan gris) d'un système à 2 ddl avec non-linéarité géométrique cubique (source : [53]).

1.2.3 Approche forme normale

La définition proposée ci-dessus d'un mode non-linéaire comme une variété invariante peut être vue d'une autre manière en utilisant le cadre de la théorie des formes normales, en se basant sur les théorèmes de Poincaré [83] et Poincaré-Dulac [28]. Dans cette approche un changement de variable non-linéaire permet de générer l'espace des phases à l'aide de coordonnées, qui sont liées aux variétés invariantes. Ce travail a été initié dans les années 1990 par Jézéquel et Lamarque [45]. Une description des modes non-linéaires en utilisant le cadre des formes normales, mais cette fois-ci en restant dans le domaine réel, a été développée dans les années 2000 par Touzé et al. [98, 99, 102]. C'est cette dernière que l'on discute brièvement ici.

On suppose un système mécanique non-linéaire à n degrés de liberté, réécrit après un changement de variables suivant les modes propres linéaires en,

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) + F(U(t)) = 0 \quad (1.12)$$

et transformé au premier ordre sous la forme,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}(t)) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

où \mathbf{F} regroupe l'ensemble des termes non-linéaires qu'on suppose polynômiaux d'ordre ≥ 2 et vérifie $\mathbf{F}(0) = 0$. L'idée consiste à simplifier les termes non-linéaires, au voisinage du point fixe $\mathbf{U} \equiv 0$. Le théorème de Poincaré nous dit que s'il n'y a pas de relation de résonances entre les valeurs propres de \mathbf{L} , c'est-à-dire,

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k m_k - \lambda_i \neq 0, \quad \text{où } m_k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{2n} m_k \geq 2, \quad \forall i \in \{1, \dots, 2n\} \quad (1.14)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice \mathbf{L} , alors il existe un homéomorphisme h tel que la transformation,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} + h \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} \right) \quad (1.15)$$

permet de réduire la dynamique du système à sa partie linéaire,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Dans le cas, où des relations de résonances sont présentes, la transformation ne permet pas d'éliminer totalement F et la dynamique est donnée par n oscillateurs dépendants les uns des autres,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{F}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}(t) \end{bmatrix} \right) \quad (1.17)$$

où $\tilde{\mathbf{F}}$ représente les non-linéarités que l'on ne peut pas éliminer après transformation.

Lorsqu'on traite un système mécanique conservatif, les valeurs propres sont des nombres complexes conjugués et imaginaires purs $\lambda_{2i} = -\omega_i$, $\lambda_{2i+1} = +\omega_i$. On a donc la relation de résonance triviale, $\omega_i = 2\omega_i + (-\omega_i)$. Il y aura toujours des relations de résonance lorsqu'on traite un système mécanique, on ne pourra donc pas éliminer l'ensemble des termes résonnants. Une approximation jusqu'à l'ordre 3 de h et $\tilde{\mathbf{F}}$ est développée. Les MNLs sont alors construits à partir de ces expressions en imposant pour définir le MNL p les composantes \mathbf{R}_k et \mathbf{S}_k à zéro pour $k \neq p$. La géométrie du MNL est donnée par (1.15) et la dynamique par (1.17).

1.3 Une définition pour les systèmes conservatifs : solutions périodiques

Les travaux de Rosenberg débutés en 1959 [90], sur l'extension de la définition de modes ("normal modes") aux systèmes non-linéaires, ont suscité l'intérêt des mathématiciens dès les années 1960.

Ainsi, en 1966, Cooke et Struble dans [22] font le lien entre la définition des modes non-linéaires proposée par Rosenberg et les solutions périodiques. Ils proposent une démonstration d'existence de solutions périodiques pour un système non-linéaire quelconque, avec quelques propriétés de symétrie, autonome et conservatif, ces solutions périodiques étant aux voisinages

des modes propres du système linéaire sous-jacent. La définition de Rosenberg est utilisée comme référence, ainsi ils considèrent que les solutions périodiques ne satisfaisant pas l'ensemble des critères introduit par Rosenberg ne sont pas des modes non-linéaires, comme par exemple, celles qui présentent un déphasage entre degrés de liberté.

Dans les années 1970, Weinstein dans [109] élargit la définition des modes non-linéaires de Rosenberg. Cette définition se limite toutefois au cas des systèmes hamiltoniens, où l'hamiltonien est supposé analytique et ayant une matrice hessienne définie positive. Il part d'abord du principe qu'un système hamiltonien linéaire, au voisinage d'un point d'équilibre, possède pour chaque degré de liberté une famille de solutions périodiques, qui correspond à un mode propre. Il prolonge ce résultat aux systèmes hamiltoniens non-linéaires. Dans le cas non-linéaire, on a toujours l'existence d'au moins une solution périodique pour chaque degré de liberté, mais cette fois-ci ces solutions périodiques sont définies à un niveau d'énergie donné. Un mode non-linéaire peut donc être défini comme une famille de solutions périodiques liée au mode linéaire du système linéaire sous-jacent et paramétrée avec l'énergie. Ce travail sera poursuivi par Moser dans [72], en élargissant les conditions du théorème de Weinstein.

A noter que les travaux de Lyapunov [67] en 1892, permettent déjà d'obtenir ce type de résultats, mais avec une condition supplémentaire qui est l'incommensurabilité des fréquences propres du système linéaire sous-jacent. Les travaux de Weinstein et Moser permettent donc de s'affranchir de cette condition. De plus, on peut trouver déjà dans [52] des liens entre la définition de Shaw et Pierre et la notion de solutions périodiques. C'est-à-dire que, dans le cas de systèmes conservatifs, les modes non-linéaires définis comme des variétés invariantes, tangentes aux modes linéaires, sont en fait composés de solutions périodiques.

On retrouve alors plus récemment dans [5, 6, 53], la définition en tant que telle d'un mode non-linéaire comme une famille de solutions périodiques, se confondant aux modes linéaires lorsque l'énergie tend vers zéro. Cette définition a été choisie dans ce travail, car elle permet d'accéder à des méthodes numériques performantes pour le calcul des modes non-linéaires, comme on le verra plus tard.

1.4 Les propriétés particulières des modes non-linéaires

Les modes non-linéaires par définition ne respectent pas le principe de superposition. On a donc une des propriétés les plus intéressantes des modes linéaires qui disparaît. Il reste tout de même un certain nombre de propriétés qui rend l'analyse des modes non-linéaires très importante.

On verra qu'une analyse modale non-linéaire permet d'avoir une idée des résonances de la structure, qu'elle soit forcées ou internes. Ces propriétés sont celles qui nous intéressent le plus ici.

Toutefois d'autres propriétés existent, ainsi on peut avoir des modes localisés, c'est-à-dire que le mouvement se localise sur une partie de la structure. On verra que cela peut avoir des applications dans la mise au point d'absorbeurs. De plus, les modes peuvent être stables ou instables a contrario du cas linéaire où les modes sont toujours stables. A noter également la présence de bifurcations qui peuvent faire apparaître un nombre de modes non-linéaires supérieur au nombre de degrés de liberté.

1.4.1 Phénomènes de résonances

Il existe plusieurs types de résonances, qu'on peut séparer en deux groupes, celles qu'on appelle les résonances forcées et les résonances internes. On retrouve ces résonances dans les cas linéaire et non-linéaire, cependant pour ce dernier les résonances internes sont beaucoup plus fréquentes que dans le cas linéaire.

Résonances forcées

Les résonances forcées se produisent lorsqu'on soumet la structure à une excitation mono-harmonique avec une fréquence Ω proche de l'une de ses fréquences propres ω_i .

$$\Omega \approx \omega_i, \text{ où } i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.18)$$

A la différence du cas linéaire, où la valeur de la fréquence de résonance est constante, la valeur pour laquelle le système non-linéaire entre en résonance va dépendre de l'amplitude de la réponse. Cette situation va conduire à des phénomènes de saut, avec l'existence de plusieurs solutions permanentes pour une même valeur de la fréquence d'excitation. Par contre, la résonance a toujours lieu à proximité des modes et donc autour de la fréquence propre du système linéaire sous-jacent.

Résonances internes

Les résonances internes ne sont pas liées à une excitation externe, mais à une relation de commensurabilité entre les fréquences propres de la structure, c'est-à-dire,

$$p\omega_i = q\omega_j, \text{ où } p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (1.19)$$

Pour les systèmes conservatifs, les modes non-linéaires sont des familles de solutions périodiques définies sur des plages de fréquences, à la différence du cas linéaire où les fréquences propres sont constantes. Il peut alors, très facilement, exister une relation de commensurabilité entre certaines valeurs de fréquences de deux modes non-linéaires.

Prenons l'exemple d'un système à 2 ddl auquel on ajoute une non-linéarité de contact sur un des degrés de liberté (étudié dans la Section 3.1). Soit $U^1(t)$ une solution périodique de période T^1 du premier mode non-linéaire, et $U^2(t)$ de période T^2 une solution périodique du deuxième mode non-linéaire. Il existe une résonance interne 3 : 1 entre le premier et le deuxième mode non-linéaire si,

$$\begin{cases} T^1 = 3T^2 \\ U^1(t) = U^2(3t) \end{cases} \quad (1.20)$$

Il existe alors une intersection entre les deux modes non-linéaires. La Fig. 1.3 représente le premier mode non-linéaire, et le second mode non-linéaire défini par des solutions périodiques exprimées sur 3 fois la période, i.e. avec une fréquence divisée par 3. Il y a intersection des deux graphiques Fréquence-Energie. Le cercle violet identifie la solution $U^1(t)$, dont le déplacement en fonction du temps est également représenté en bas de la figure. Celle-ci montre bien que le déplacement s'effectue sur 3 fois la période.

A noter que lorsqu'on étudie des systèmes non-linéaire forcés, ces résonances internes peuvent influencer les réponses, comme observé dans [65, 66].

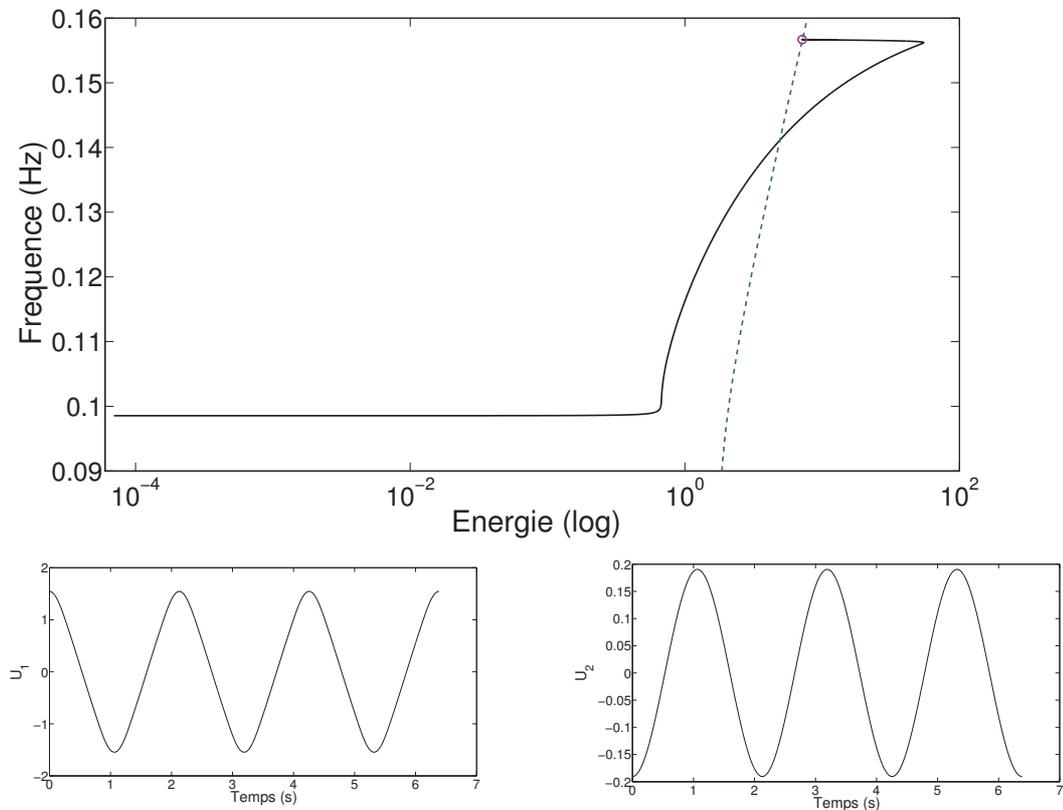


FIGURE 1.3 – Graphique Fréquence-Energie (en haut) du premier mode non-linéaire pour un système à 2ddl avec contact bilatéral (voir Section 3.1 pour plus de détails). En pointillé le second mode non-linéaire pour des solutions définies sur trois périodes. Déplacement de la première masse (en bas à gauche) et de la seconde masse (en bas à droite) dans le temps pour la solution périodique identifiée par un cercle violet.

1.4.2 Phénomènes de localisation

On peut observer pour certaines structures l'existence de modes non-linéaires, où les mouvements modaux sont localisés sur un nombre réduit de degrés de liberté. En terme énergétique, l'énergie vibratoire se concentre principalement sur ces degrés de liberté. Ce phénomène est par exemple à l'origine des travaux présentés dans [103, 104] concernant le développement d'absorbeurs non-linéaires de vibrations. L'ajout d'une sous-structure non-linéaire appelée NES (pour Nonlinear Energy Sink) introduit un mode non-linéaire localisé sur le NES favorisant le transfert irréversible de l'énergie du système primaire vers le NES. Un exemple sera détaillé Section 1.7.

Un exemple de phénomène de localisation est observé sur le modèle à 2 degrés de liberté avec contact bilatéral, étudié dans la Section 3.1. En effet, lorsqu'on trace le graphique fréquence-énergie du second mode non-linéaire (voir Fig. 1.4), on voit que lorsque l'énergie tend vers l'infini, la fréquence devient constante. Si on observe les mouvements modaux dans cette zone, voir la Fig. 1.5, on constate que le mouvement se concentre principalement sur la première masse.

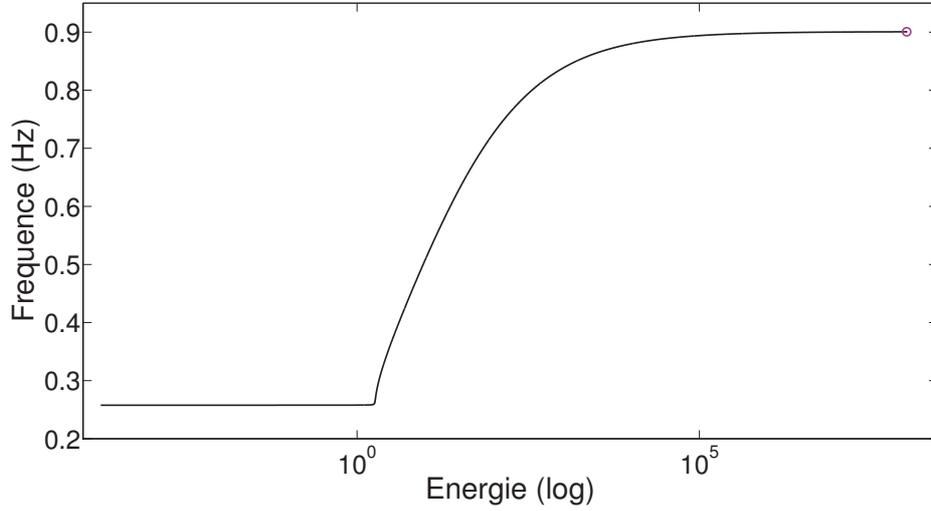


FIGURE 1.4 – Graphique Fréquence-Energie du second mode non-linéaire pour un système à 2ddl avec contact bilatéral (voir Section 3.1 pour plus de détails).

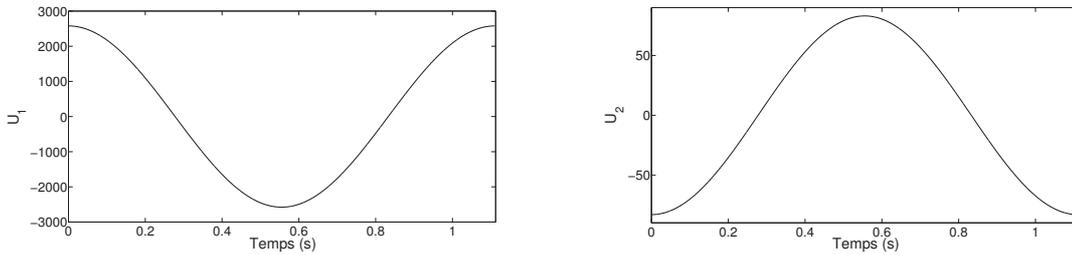


FIGURE 1.5 – Évolution temporelle de la première masse (à gauche) et de la seconde masse (à droite) pour $E = 1.06 \times 10^{-8}$, et $f = 0.9$. (voir Section 3.1 pour plus de détails).

1.4.3 Bifurcation et stabilité

Modes non-linéaires issus de bifurcation

On rappelle que pour un système linéaire à n degrés de liberté, il existe n modes propres linéaires, ceci n'est plus forcément vrai pour les modes non-linéaires d'un système non-linéaire. En effet, Vakakis dans [103] donne l'exemple d'un système à 2 degrés de liberté, avec une non-linéarité cubique symétrique,

$$\begin{cases} \ddot{U}_1 + U_1 + U_1^3 + k(U_1 - U_2)^3 = 0 \\ \ddot{U}_2 + U_2 + U_2^3 - k(U_1 - U_2)^3 = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Si l'on recherche les modes similaires suivant la définition de Rosenberg, admettant une relation linéaire entre les deux degrés de liberté U_1 et U_2 , de la forme,

$$U_2 = cU_1 \quad (1.22)$$

où c est une constante non-nulle. On aboutit à une équation algébrique non-linéaire, d'inconnue c ,

$$k(1+c)(c-1)^3 = c(1-c^2), \quad c \neq 0 \quad (1.23)$$

Cette équation possède deux valeurs évidentes, $c = \pm 1$, correspondant aux modes propres linéaires en phase et en opposition de phase, du système linéaire sous-jacent. Toutefois il peut exister des modes supplémentaires en fonction de la valeur de la raideur k comme le montre la Fig. 1.6. Pour une valeur de $k < 0.25$ on a l'apparition de deux modes supplémentaires qui

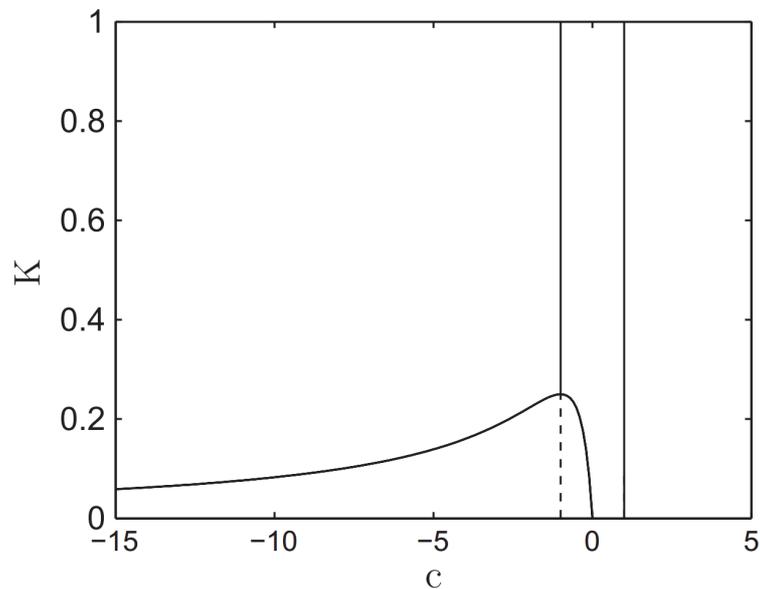


FIGURE 1.6 – Modes non-linéaires similaires en fonction de la raideur k du système d'Eq. (1.21) (source : [53]).

bifurquent du mode en opposition de phase, rendant ce dernier instable. Pour plus de détails sur ce système, on peut se reporter à [106].

Bifurcation et résonance interne

Une résonance interne se produit lorsqu'il y a une relation de commensurabilité entre les fréquences de deux modes. Cette définition est aussi valable dans le cas non-linéaire, à la différence près que la fréquence est celle d'une solution périodique donnée, issue des deux modes non-linéaires. Cette solution périodique crée une intersection entre les deux modes. On peut observer ce phénomène dans la Fig. 1.3 de l'exemple donné dans la section 1.4.1. Le second mode non-linéaire est composé d'une famille de solutions périodiques qui ne sont pas représentées sur une mais sur trois périodes. Ainsi, la fréquence est divisée par trois et intersecte le premier mode non-linéaire. On verra que lorsqu'on utilise des algorithmes de continuation pour le calcul des modes non-linéaires, ce type de bifurcation pose des problèmes. En effet, l'algorithme n'arrive pas toujours à distinguer les deux branches.

1.5 Méthodes de calcul des modes non-linéaires

Chaque définition des modes non-linéaires a été accompagnée d'une ou plusieurs méthodes pour le calcul de ces modes. Rosenberg [89] s'est principalement appuyé sur des développements asymptotiques. Shaw et Pierre [93] ont utilisé des méthodes issues des techniques de la variété centrale. Des méthodes plus spécifiques ont également été proposées. On verra que les méthodes numériques permettent de s'affranchir de la limite des méthodes asymptotiques. Ces méthodes peuvent se différencier par deux familles, la recherche de solutions périodique à l'aide d'outils de continuation et le calcul des variétés invariantes.

1.5.1 Méthodes semi-analytiques

Il existe beaucoup de méthodes à forte dominante analytique issues principalement des techniques de perturbation développées pour la mécanique céleste. Ces méthodes peuvent être utilisées pour le calcul des modes non-linéaires, à la place de celles proposées initialement dans [89, 93]. Citons par exemple, la méthode de Lindstedt-Poincaré, la méthode des échelles multiples ou la méthode de la moyenne, dont on peut retrouver les développements dans [73].

On peut également citer la méthode de balance harmonique, qui consiste à développer par série de Fourier tronquée les inconnues. Mais les calculs analytiques ne sont possibles que pour un ordre de troncature faible en général réduit, au plus, à trois termes. On retrouvera cette méthode utilisée de manière purement numérique ce qui permet de passer outre les limitations de la méthode en utilisant un ordre de troncature élevée.

Une méthode plus récente, appelée "complexification-averaging method", utilisée dans [33, 105] et qui s'inspire de la méthode de la moyenne permet le calcul des modes non-linéaires de manière semi-analytique.

1.5.2 Méthodes numériques : calcul de variétés invariantes

En se basant sur la définition des modes non-linéaires, comme une variété invariante, Peshack et al. [80] propose une méthode numérique basée sur une approche de Galerkin. Le système considéré est projeté au préalable sur la base modale du système linéaire sous-jacent,

$$\ddot{\mathbf{U}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{U}}(t) + \tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t)) \quad (1.24)$$

où $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ sont respectivement les matrices d'amortissement et de raideur diagonalisées. On choisit ensuite un couple de variables $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1)$ dites variables "maîtres", et on effectue un changement de variable passant des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires (\mathbf{a}, ϕ) , sous la forme,

$$\begin{cases} \mathbf{X} &= \mathbf{a} \cos(\phi) \\ \mathbf{Y} &= -\mathbf{a}\omega_1 \sin(\phi) \end{cases} \quad (1.25)$$

où ω_1 est la première fréquence (angulaire) propre du système d'Eq. (1.24). La variable \mathbf{a} est définie sur un intervalle fini $\mathbf{a} \in [0, a_0]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, l'intérêt du changement de variable est d'introduire une fonction périodique suivant ϕ réduisant le domaine de variation de ϕ à $\phi \in [0, 2\pi]$. On définit les autres degrés de liberté en fonction de ces variables \mathbf{a} et ϕ ,

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i &= u_i(\mathbf{a}, \phi) \\ \mathbf{V}_i &= v_i(\mathbf{a}, \phi), \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.26)$$

où u_i et v_i sont des fonctions (2π périodiques suivant la variable ϕ) à déterminer.

En introduisant l'Eq. (1.26) dans l'Eq. (1.24), on obtient alors un système d'équations aux dérivées partielles, du type de l'Eq. (1.9). Pour le résoudre une méthode de Galerkin est utilisée. C'est-à-dire qu'on développe les inconnues sur une base tronquée utilisant un développement en série suivant la variable ϕ et de type polynomial suivant α . On obtient ainsi un système algébrique qu'on résout à l'aide d'un algorithme adapté.

On retrouve également une extension de cette méthode au cas des systèmes linéaires par morceaux dans [46].

Plus récemment dans [13], on effectue le même passage aux coordonnées polaires, mais en considérant cette-fois-ci que le système d'équations aux dérivées partielles est un problème de transport. On impose une condition de périodicité pour assurer la continuité de la variété invariante ce qui nécessite de trouver les bonnes conditions initiales au problème de transport. On utilise alors un schéma de différence finis pour le résoudre, la convergence étant obtenue par la résolution d'un problème adjoint et l'utilisation d'un algorithme d'optimisation. Le cas dissipatif n'est pas traité car posant des problèmes de convergence.

Une approche similaire a été proposée dans [11, 12] basée sur une transformation amplitude-phase (généralisant le passage en coordonnées polaires) caractérisant le mode non-linéaire à l'aide d'une fonction "fréquence" et d'une fonction "déformée modale" dépendant de l'amplitude et de la phase, les équations étant ici aussi résolues par une méthode de Galerkin.

Dans la lignée de cette méthode, on retrouve dans [85] une alternative utilisant une méthode éléments finis pour la mécanique des fluides, appelée méthode "Streamline Upwind Petrov-Galerkin" (SUPG).

A noter que si l'on veut tenir compte de ce qu'on a appelé plus haut les résonances internes, comme précisé dans [15], il est nécessaire de prendre plus d'un couple de variable déplacement et vitesse, comme variable de référence ou variables "maîtres". Dans ce cas, la difficulté est accrue pour le calcul de la variété, comme observé dans [47].

1.5.3 Méthodes numériques : calcul de solutions périodiques

Comme on l'a vu auparavant, dans un cadre conservatif on peut définir les modes non-linéaires comme une famille de solutions périodiques. Pour calculer cette famille, on combine une méthode d'intégration temporelle des équations du mouvement (pour atteindre une solution périodique) avec une méthode de continuation pour générer la famille. Une méthode de continuation permet de résoudre des systèmes d'équations algébriques sous-déterminés, c'est-à-dire ayant une inconnue supplémentaire par rapport au nombre d'équations. En effet, dans notre cas, que ce soit pour la période de la solution recherchée, si l'on est dans le domaine temporel, ou la fréquence, si l'on est dans le domaine fréquentiel, ces quantités sont inconnues et peuvent être en première intention utilisées pour générer la famille de solutions périodiques même si ce choix n'est pas optimal numériquement.

On peut citer deux méthodes de continuation, la méthode par pseudo-longueur d'arc [51] et la méthode asymptotique numérique (MAN) [18].

La MAN nécessitant des hypothèses fortes sur le système à résoudre, la combinaison avec des méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires demande un effort particulier, que ce soit la méthode de balance harmonique [21, 84], les méthodes d'intégrations temporelles [5, 6], ou la méthode de collocation [50]. Ceux-ci sont toutefois largement compensés

par sa robustesse [18] et la gestion des bifurcations [20] que la MAN apporte. La MAN est la méthode qui a été choisie dans ce travail et est présentée de manière plus détaillée Section 2.

La méthode par pseudo-longueur d'arc, très utilisée [36, 44, 57, 77, 78, 108], a été couplée à différentes méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires. Citons par exemple, la méthode de "tir" associé à un algorithme d'intégration temporelle [77], la méthode de balance harmonique [57], ou à la méthode de collocation [26].

On présentera brièvement deux méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires : la méthode de "tir" et la méthode de balance harmonique avec alternance fréquence-temps (AFT-HBM), qui sont les plus performantes à l'heure actuelle pour le calcul des modes non-linéaires de systèmes de grande taille. On terminera par une description de la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc.

On part du système conservatif de taille n ,

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) + F(U(t)) = 0 \quad (1.27)$$

où M est la matrice de masse, K la matrice de raideur et F la fonction qui modélise les non-linéarités du système mécanique. On souhaite calculer une solution périodique.

Méthode de "tir"

On peut alors réécrire l'Eq. (1.27) au premier ordre,

$$\dot{Z}(t) = f(Z(t)) \quad (1.28)$$

où $Z = [U^t \ V^t]^t$ et f est une application de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^{2n} .

On cherche une solution périodique du système d'Eq. (1.28), c'est-à-dire vérifiant $Z(t + T) = Z(t)$, où T est la période minimale. Posons $Z_0 = Z(0)$ le vecteur correspondant à la condition initiale. La méthode de "tir", consiste à résoudre le système suivant,

$$R(Z_0, T) = Z(T) - Z_0 = 0 \quad (1.29)$$

où la fonction R est appelée la fonction de "tir" et représente la différence entre la condition initiale et la réponse du système au temps T . Ce temps T est lui aussi inconnu. L'Eq. (1.29) est celle que l'on résoudra par la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc décrite ci-dessous. Il reste à déterminer comment on calcule $R(Z_0, T)$. On utilise pour cela un algorithme d'intégration temporelle comme, par exemple, un schéma de Newmark, de Runge-Kutta [39, 40] pour résoudre le problème de Cauchy défini par l'Eq. (1.28) sur $[0, T]$ et de condition initiale $Z(0) = Z_0$.

Méthode de balance harmonique avec alternance fréquence-temps (AFT-HBM)

La méthode de balance harmonique est une méthode analytique qui consiste à chercher une solution périodique de l'Eq. (1.27) sous la forme d'un développement en série de Fourier,

$$U(t) = U_0 + \sum_{k=1}^H U_{Ck} \cos(k\omega t) + U_{Sk} \sin(k\omega t) \quad (1.30)$$

où U_0 , U_{Ck} et U_{Sk} sont des vecteurs constants correspondant aux coefficients de Fourier, et ω la fréquence angulaire qui définit la période de la solution. L'intérêt de la méthode est que la propriété de périodicité de la solution est toujours satisfaite. Par contre le choix de l'ordre de troncature des harmoniques H doit être fait a priori. Il existe toutefois des techniques pour rendre ce choix adaptatif [36, 44, 57].

En reportant l'Eq. (1.30) dans l'Eq. (1.27) et en équilibrant les termes en cos et sin on obtient le système d'équations algébriques

$$\begin{cases} 0 = \mathbf{K}U_0 + \hat{\mathbf{F}}_0(\hat{U}) \\ 0 = -k^2\gamma_1 \mathbf{M}U_{Ck} + \mathbf{K}U_{Ck} + \hat{\mathbf{F}}_{Ck}(\hat{U}), k = 1, \dots, H \\ 0 = -k^2\gamma_1 \mathbf{M}U_{Sk} + \mathbf{K}U_{Sk} + \hat{\mathbf{F}}_{Sk}(\hat{U}), k = 1, \dots, H \end{cases} \quad (1.31)$$

où $\hat{U} = [U_0^t, U_{C1}^t, \dots, U_{CH}^t, U_{S1}^t, \dots, U_{SH}^t]^t$, et les fonctions $\hat{\mathbf{F}}_0$, $\hat{\mathbf{F}}_{Ck}$ et $\hat{\mathbf{F}}_{Sk}$ sont les coefficients de Fourier de $\mathbf{F}(U(t))$.

Lorsqu'on utilise cette méthode de manière analytique, on ne peut pas prendre une valeur de H trop grande, car les calculs deviennent vite trop complexes, pour obtenir $\mathbf{F}(U(t))$. Pour résoudre ce problème, l'idée de la méthode AFT-HBM, est de revenir dans le domaine temporel pour effectuer ce calcul. C'est pourquoi on parle d'AFT (Alternating Frequency Time) [16], c'est-à-dire d'alternance fréquence-temps,

$$\begin{array}{ccc} \hat{U} & \xrightarrow{\text{Transformée de Fourier Discrète inverse}} & U(t) \\ & & \downarrow \\ \left[\hat{\mathbf{F}}_0^t \hat{\mathbf{F}}_{C1}^t \dots \hat{\mathbf{F}}_{CH}^t \hat{\mathbf{F}}_{S1}^t \dots \hat{\mathbf{F}}_{SH}^t \right]^t & \xleftarrow{\text{Transformée de Fourier Discrète}} & \mathbf{F}(U(t)) \end{array}$$

On peut alors réécrire l'Eq. (1.31) sous la forme suivante,

$$\mathbf{R}(\hat{U}, \omega) = 0 \quad (1.32)$$

et résoudre le système à l'aide de la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc.

Continuation par pseudo-longueur d'arc

Les méthodes de continuation par pseudo-longueur d'arc consistent à chercher l'ensemble des solutions d'un système algébrique sous-déterminé,

$$\mathbf{R}(U, \lambda) = \mathbf{R}(S) = 0 \quad (1.33)$$

où $U \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $S = [U^t \ \lambda]^t$ et \mathbf{R} une application de \mathbb{R}^{N+1} dans \mathbb{R}^N .

La première étape de la méthode consiste à définir un point de départ à l'algorithme, qu'on appellera $S_0 = [U_0^t \ \lambda_0]^t$, connu a priori. En pratique, on pourra utiliser un algorithme de Newton pour l'obtenir. L'objectif est de trouver un point solution, qu'on appelle $S_1 (= S_0 + \delta S_0)$, de l'Eq. (1.33), en procédant en deux étapes, une phase de prédiction et une phase de

correction. Pour la prédiction, on effectue un développement de Taylor de \mathbf{R} au voisinage de \mathcal{S}_0 ,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}(\mathcal{S}_1) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_1, \lambda_1) = \mathbf{R}(\mathcal{S}_0) + \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}(\mathcal{S}_0)\delta\mathbf{U}_0 + \frac{d\mathbf{R}}{d\lambda}(\mathcal{S}_0)\delta\lambda_0 + O(\|\delta\mathcal{S}_0\|^2) \\ &= \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}(\mathcal{S}_0)\delta\mathbf{U}_0 + \frac{d\mathbf{R}}{d\lambda}(\mathcal{S}_0)\delta\lambda \end{aligned} \quad (1.34)$$

où $\frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}(\mathcal{S}_0) & \frac{d\mathbf{R}}{d\lambda}(\mathcal{S}_0) \end{bmatrix}$ est la matrice jacobienne de \mathbf{R} au point \mathcal{S}_0 . A noter que cette matrice est rectangulaire puisque de taille $N \times (N + 1)$. Le système d'Eq. (1.34) est donc mal posé, il faut ajouter une condition supplémentaire pour que l'on puisse résoudre ce système.

On lui ajoute alors, la condition relative au choix de la longueur du pas de prédiction, qu'on appelle l'équation de la longueur d'arc, c'est-à-dire,

$$\|\delta\mathcal{S}_0\|^2 = \|\delta\mathbf{U}_0\|^2 + |\delta\lambda|^2 = 1 \quad (1.35)$$

On doit alors résoudre le système bien posé suivant,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}(\mathcal{S}_0) & \frac{d\mathbf{R}}{d\lambda}(\mathcal{S}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U}_0 \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

La dernière ligne faisant intervenir des termes inconnues, il est nécessaire de trouver un moyen détourné de résoudre l'Eq. (1.36). Pour cela, on introduit un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha\delta\lambda = 1$, on peut donc réécrire l'Eq. (1.35) en,

$$\alpha^2\|\delta\mathcal{S}_0\|^2 = \alpha^2\|\delta\mathbf{U}_0\|^2 + 1 = \|\alpha\delta\mathbf{U}_0\|^2 + 1 = \alpha^2 \quad (1.37)$$

et l'Eq. (1.36) de la manière suivante,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}(\mathcal{S}_0) & \frac{d\mathbf{R}}{d\lambda}(\mathcal{S}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\delta\mathbf{U}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

On résout alors l'équation suivante,

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}(\mathcal{S}_0)\alpha\delta\mathbf{U}_0 = -\frac{d\mathbf{R}}{d\lambda}(\mathcal{S}_0) \quad (1.39)$$

et pour déterminer α il suffit d'utiliser l'Eq. (1.37), ainsi on peut en déduire $\delta\lambda_0 = \frac{1}{\alpha}$.

La deuxième étape consiste alors à corriger le point $\mathcal{S}_1 = [\mathbf{U}_1^t \ \lambda_1]^t$, qu'on notera ici $\mathcal{S}_1^{(0)}$, obtenue par la méthode de prédiction précédente. Pour cela on utilise, la méthode de Newton pour que le vecteur tangent $\mathcal{S}_1^{(0)}$ vérifie l'Eq. (1.33). On doit alors résoudre le problème suivant de manière itérative,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}(\mathcal{S}_0) & \frac{d\mathbf{R}}{d\lambda}(\mathcal{S}_0) \\ \mathbf{U}_1^{(0)} & \lambda_1^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{(k+1)} \\ \lambda_1^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(\mathbf{U}_1^{(k)}, \lambda_1^{(k)}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

la condition supplémentaire étant que les corrections se fassent orthogonalement à la tangente calculée auparavant. Les itérations s'arrêtent lorsqu'on a,

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}_1^{(k)}, \lambda_1^{(k)})\| < \epsilon \quad (1.41)$$

La Fig. 1.7 résume les étapes de prédiction et de corrections détaillé ci-dessus. Pour obtenir le

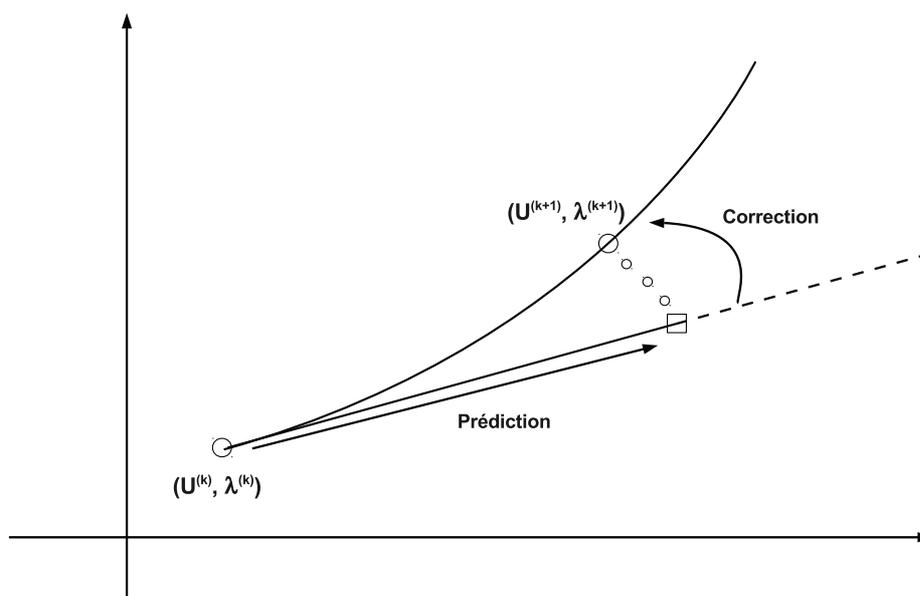


FIGURE 1.7 – Principe de prédiction-corrrection.

point suivant, il suffit de redémarrer l'algorithme, en prenant comme point de départ le point obtenu précédemment.

1.6 Calcul de stabilité des solutions périodiques

On a vu précédemment que l'on pouvait définir un mode non-linéaire comme une famille de solutions périodiques, or on sait que dans le cas où le système est non-linéaire, la stabilité des solutions périodiques n'est pas assurée. Par conséquent, il est intéressant de calculer leur stabilité.

On verra, dans un premier temps, la base théorique pour déterminer si une solution périodique est stable ou instable, puis on présentera quelques méthodes pour le calcul de stabilité. Enfin, on verra que pour les systèmes dits hamiltoniens on peut déduire certaines propriétés originales sur la stabilité des solutions périodiques.

1.6.1 Principes théoriques

On commence par décrire la base théorique commune aux différentes méthodes, qui consiste principalement à ajouter une perturbation à une solution périodique et à évaluer si celle-ci disparaît ou s'accroît dans le temps. On évaluera donc ici ce qu'on appelle la stabilité locale

de solutions périodiques. En utilisant la théorie de Floquet [31], développée principalement pour l'étude de systèmes linéaires à coefficients périodiques, on peut donner des critères qui permettent de définir cette stabilité.

Soit le système conservatif suivant de taille n ,

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) + F(U(t)) = 0 \quad (1.42)$$

où M est la matrice de masse, K la matrice de raideur et F l'application qui modélise les non-linéarités du système mécanique. On peut alors réécrire l'Eq. (1.42) au premier ordre,

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = V(t) \\ \dot{V}(t) = -M^{-1}KU(t) - M^{-1}F(U(t)) \end{cases} \quad (1.43)$$

qu'on peut réécrire de manière condensée,

$$\dot{Z}(t) = f(Z(t)) \quad (1.44)$$

où $Z = [U^t V^t]^t$ et f est une application qui va de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^{2n} .

Soit $Z_0(t)$ une solution périodique du système d'Eq. (1.44), de période T . Pour étudier la stabilité locale de cette solution, on la perturbe à l'aide de la fonction $\xi(t)$, telle que

$$Z(t) = Z_0(t) + \xi(t) \quad (1.45)$$

est solution du système d'Eq. (1.44). On linéarise alors ce système autour de la solution périodique $Z_0(t)$, en effectuant un développement de Taylor de la fonction f , pour obtenir le système linéaire suivant,

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\partial f}{\partial Z}(Z_0(t))\xi(t) \quad (1.46)$$

L'Eq. (1.46) étant linéaire et la matrice $\frac{\partial f}{\partial Z}(Z_0(t))$ étant périodique, la théorie de Floquet nous dit que $\xi(t)$ peut s'écrire comme la somme de n solutions indépendantes, $\xi_k(t)$, c'est-à-dire,

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k(t) \quad (1.47)$$

où les c_k sont des constantes dépendantes des conditions initiales. Les solutions fondamentales $\xi_k(t)$ peuvent s'écrire

$$\xi_k(t) = p_k(t)e^{\alpha_k t} \quad (1.48)$$

où $p_k(t)$ est une fonction périodique et α_k est un nombre complexe appelé coefficient de Floquet. Puisque $p_k(t)$ est périodique, on a la relation suivante,

$$\xi_k(t+T) = p_k(t+T)e^{\alpha_k(t+T)} = \xi_k(t)e^{\alpha_k T} \quad (1.49)$$

Les termes $e^{\alpha_k T}$, appelés multiplicateurs de Floquet, déterminent si la solution $Z_0(t)$ est stable ou non. En effet,

- (i) si $|e^{\alpha_k T}| < 1, \forall k \in \{1, \dots, n\}$ alors $Z_0(t)$ est asymptotiquement stable ;
- (ii) si $|e^{\alpha_k T}| > 1, \forall k \in \{1, \dots, n\}$ alors $Z_0(t)$ est instable.

Sachant qu'il existe un coefficient $e^{\alpha_k T}$ tel que $|e^{\alpha_k T}| = 1$, car le système est autonome.

Il ne reste plus qu'à montrer comment déterminer ces multiplicateurs. On réunit tout d'abord dans une matrice appelée $\bar{\xi}(t) = [\bar{\xi}_1(t) \dots \bar{\xi}_n(t)]$, les n solutions de l'Eq. (1.46) qui ont pour condition initiale, $\bar{\xi}(0) = I$, où I est la matrice identité. La périodicité de $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{Z}}(\mathbf{Z}_0(t))$, permet d'écrire la relation suivante

$$\bar{\xi}(t+T) = \bar{\xi}(t)\Phi \quad (1.50)$$

où Φ est appelée la matrice de monodromie. Par l'Eq. (1.50), en posant $t = 0$, on en déduit que,

$$\bar{\xi}(T) = \Phi \quad (1.51)$$

Puisque $\bar{\xi}_k(t)$ est solution de l'Eq. (1.46), on peut l'écrire sous la forme de l'Eq. (1.47), ce qui conduit à la forme matricielle,

$$\bar{\xi}(t) = \hat{\xi}(t)C \quad (1.52)$$

où $\hat{\xi} = [\hat{\xi}_1(t) \dots \hat{\xi}_n(t)]$ et C est une matrice constante inversible de taille $n \times n$. On peut en déduire que $I = \bar{\xi}(0) = \hat{\xi}(0)C$, c'est-à-dire que $\hat{\xi}(0) = C^{-1}$. De plus d'après les Eqs. (1.49), (1.51) et (1.52), on a

$$\Phi = \bar{\xi}(T) = \hat{\xi}(T)C = \hat{\xi}(0)DC = C^{-1}DC$$

$$\text{où } D = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 T} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n T} \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Les coefficients de Floquet $e^{\alpha_k T}$ pour $k = 1, \dots, n$ sont en fait les valeurs propres de la matrice de monodromie. La méthode pour définir la stabilité consiste donc à calculer $\bar{\xi}(t)$ solution de l'Eq. (1.46) pour la condition initiale $\bar{\xi}(0) = I$, jusqu'à $t = T$. La matrice $\bar{\xi}(T)$ étant la matrice de monodromie, il suffit de calculer les valeurs propres de cette matrice pour statuer sur la stabilité de la solution périodique $Z_0(t)$ selon les critères définis plus haut.

1.6.2 Quelques méthodes de calcul de stabilité

On verra ici quelques méthodes pour le calcul de stabilité d'une solution périodique. On peut retrouver dans [32, 79], une comparaison de différentes méthodes pour le calcul de stabilité des solutions périodiques. A noter que les résultats et les conclusions ont été obtenus pour des systèmes comportant un terme d'amortissement et une force excitatrice périodique. Or, dans le cas des modes non-linéaires les systèmes sont conservatifs. On ne connaît donc pas l'influence que peut avoir l'absence du terme d'amortissement sur la qualité de convergence des méthodes utilisées pour le calcul de stabilité.

Schéma d'intégration temporelle

Pour résoudre l'Eq.(1.46), on peut utiliser des algorithmes d'intégration temporelle, le plus usuel étant le schéma de Runge-Kutta. Son utilisation, d'après [79], semble toutefois ne pas être satisfaisante car les temps de calcul deviennent rapidement très coûteux. En mécanique, l'utilisation du schéma de Newmark est très courante, pour deux raisons principalement. La première est qu'il est inconditionnellement stable pour la résolution de systèmes linéaires. La

seconde est qu'il ne nécessite pas une réécriture du système au premier ordre, ainsi on réduit ostensiblement, lorsque le nombre de ddl est grand, la taille du système à résoudre. Toujours dans [79], l'utilisation du schéma de Newmark semble donner des résultats de bonne qualité avec un temps de calcul raisonnable.

On peut tout de même se poser la question des raisons d'une telle différence entre les schémas de Rung-Kutta et de Newmark. Une idée de réponse pourrait se trouver du côté de ce qu'on appelle les schémas d'intégration temporelle symplectiques [41] qui possèdent des propriétés de conservation d'énergie utiles pour la résolution de systèmes hamiltoniens (ce qui est le cas de l'Eq. (1.46)) ou de systèmes hamiltoniens perturbés. Le schéma de Newmark étant symplectique, il posséderait alors les propriétés adéquates pour sa résolution.

Méthode dans le domaine fréquentiel : Méthode de Hill

Les méthodes décrites auparavant sont basées sur une description temporelle du problème, mais lorsqu'on utilise des méthodes qui sont dans le domaine fréquentiel, comme la méthode de balance harmonique, il serait intéressant d'avoir une méthode qui détermine la stabilité de la solution périodique qui reste elle aussi dans le domaine fréquentiel.

Dans la méthode de Hill, la perturbation est écrite comme une combinaison d'un terme périodique et un terme exponentiel décroissant. La perturbation est introduite dans l'équation du mouvement et une procédure, semblable à la méthode de balance harmonique, est appliquée. On peut alors en déduire un problème aux valeurs propres quadratique, c'est-à-dire,

$$\text{Trouver } (\lambda, U) \text{ tel que, } (\lambda^2 \mathbf{B} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{A})U = \mathbf{0} \quad (1.54)$$

qui peut être transformé en un problème linéaire aux valeurs propres de taille $(2n(2H + 1))^2$.

Cependant, comme la perturbation est écrite comme une série de Fourier tronquée, la précision de la méthode dépend alors du nombre d'harmoniques H choisi. Ainsi, utiliser un nombre infini d'harmoniques donnerait un résultat exact et une matrice de dimension infinie. La méthode est connue pour donner des résultats de mauvaise qualité la plupart du temps, surtout pour des systèmes de grande taille [32].

Lorsqu'on utilise la méthode de Hill, on obtient $2n(2H + 1)$ multiplicateurs de Floquet, avec seulement $2n$ multiplicateurs qui possèdent une signification physique. L'existence de multiplicateurs de Floquet "non-physique" peut mener à une évaluation erronée de stabilité.

Pour résoudre ce problème, on trouve dans [60] une technique pour distinguer et éliminer ces multiplicateurs "non-physiques". Leur approche est légèrement différente de celle utilisée dans la méthode de Hill. Les valeurs propres de la matrice de monodromie sont filtrées sur la base d'un critère relativement aux vecteurs propres associés, ce qui améliore la précision.

1.6.3 Le cas particulier des systèmes hamiltoniens

Comme démontré dans [38], on verra que les systèmes Hamiltoniens possèdent quelques propriétés en relation avec la stabilité des solutions périodiques.

Le cas général

On repart du système défini plus haut par l'Eq. (1.42), ce système est dit Hamiltonien s'il existe une fonction $H : (U, V) \rightarrow H(U, V)$, telle que l'Eq. (1.42) peut s'écrire,

$$\begin{cases} \dot{U} = -\frac{\partial H}{\partial V} \\ \dot{V} = \frac{\partial H}{\partial U} \end{cases} \quad (1.55)$$

où $V = \frac{dU}{dt}$. Si on pose $Z(t) = [U(t), V(t)]^t$, alors on peut écrire le système d'Eq. (1.55) sous la forme,

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= -J\nabla H \\ \text{où } J &= \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.56)$$

où $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial U} \\ \frac{\partial}{\partial V} \end{pmatrix}$ désigne le gradient.

Soit $Z_0(t)$ une solution périodique du système d'Eq. (1.56), avec une période minimale de T . Pour étudier la stabilité de cette solution périodique, on impose une petite perturbation $\xi(t)$ tel que,

$$Z(t) = Z_0(t) + \xi(t) \quad (1.57)$$

En substituant (1.57) dans l'Eq. (1.56) et en effectuant un développement de Taylor de $\nabla H(Z)$, on obtient l'équation linéaire suivante,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= -JA(t)\xi(t) \\ \text{où } A_{ij}(t) &= \frac{\partial^2 H}{\partial Z_i \partial Z_j}(Z_0(t)) \end{aligned} \quad (1.58)$$

La solution du système d'Eq. (1.58) s'écrit,

$$\xi(t) = \Delta(t)\xi(0) \quad (1.59)$$

où $\Delta(t)$ est appelée la matrice fondamentale des solutions, et $\Delta(T)$ la matrice de monodromie. D'après [38, 111], la matrice $\Delta(T)$ est symplectique, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition suivante,

$$\Delta(T)^t J \Delta(T) = J \quad (1.60)$$

On rappelle que la matrice de monodromie $\Delta(T)$ permet d'identifier la stabilité de la solution périodique $Z_0(t)$, en analysant ces valeurs propres. Or celle-ci étant symplectique, les valeurs propres sont alors paires complexes conjuguées et paires réciproques. On peut alors identifier trois possibilités,

- (i) complexes conjuguées sur le cercle unité, $e^{\pm i\alpha}$;
- (ii) réel sur l'axe des réels, en paires réciproques, λ et $\frac{1}{\lambda}$;
- (iii) complexes conjuguées et réciproques, $\phi e^{i\alpha}$, $\phi e^{-i\alpha}$, $\frac{1}{\phi} e^{i\alpha}$, $\frac{1}{\phi} e^{-i\alpha}$.

Si l'ensemble des valeurs propres vérifient la première propriété alors la solutions périodique est stable.

Cas d'un système à 2 degrés de liberté

Lorsqu'on traite un système à 2 ddl Hamiltonien, on peut en déduire une propriété importante. En effet, dans ce cas il existe 4 valeurs propres qu'on appellera ici λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Puisqu'on traite des systèmes autonomes, on sait qu'il existe i_0 tel que $\lambda_{i_0} = 1$, on supposera par la suite que $i_0 = 1$. Or la propriété de réciprocity implique qu'il existe $\lambda_i = \frac{1}{\lambda_1} = 1$. On a donc la certitude de toujours avoir deux valeurs propres égales à 1 lorsqu'on traite un système Hamiltonien à 2 ddl. On notera ces deux valeurs $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Les deux autres valeurs propres sont alors une paire réciproque conjuguée, donc $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_4}$, ou encore $\lambda_3 \lambda_4 = 1$, et $\lambda_3 = \bar{\lambda}_4$. On en déduit que si les valeurs propres sont complexes, c'est-à-dire que $\lambda_3 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_4 = \alpha - i\beta$, on a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Donc il y a instabilité de la solution périodique seulement lorsque les valeurs propres λ_3 et λ_4 sont réels.

On rappelle que la perte de stabilité peut mener à différents types de bifurcation [91]. Ainsi lorsqu'on a une paire de coefficients complexes avec un module strictement supérieur à 1, il apparaît une bifurcation de Neimark-Sacker. On peut donc en déduire qu'il n'y a pas de bifurcation de Neimark-Sacker pour des systèmes Hamiltoniens à 2 ddl.

1.7 Quelques applications de MNLs

On présentera ici quelques applications des modes non-linéaires, comme le pompage énergétique en utilisant le phénomène de localisation introduit précédemment, mais aussi le diagnostic vibratoire de structure, ainsi que la réduction de modèle.

1.7.1 Pompage énergétique

On peut utiliser certaines propriétés des systèmes non-linéaires, notamment le phénomène de localisation, c'est-à-dire la concentration de l'énergie sur une partie de la structure, pour construire des absorbeurs de vibrations appelés aussi Nonlinear Energy Sink (NES). Un NES est constitué d'une masse, d'une raideur essentiellement non-linéaire et d'un amortissement, l'ensemble est couplé au système à amortir. Un exemple type est donné Fig. 1.8 où le couplage entre NES et structure est réalisé à l'aide d'une raideur de couplage. Le principe du NES est de transférer, pour y être dissipée, l'énergie du système primaire vers le NES par localisation du mouvement sur l'élément non-linéaire. L'utilisation d'une raideur essentiellement non-linéaire permet au NES de fonctionner sur une plage en fréquence plus large, et de rester robuste à des changements de la fréquence de résonance du système primaire. Un point faible étant que le transfert d'énergie du système primaire vers le NES ne s'effectue que passé un certain seuil d'énergie. On trouvera dans [104] les bases des développements théoriques et notamment comment la théorie des MNLs a permis de mettre en évidence le transfert d'énergie par résonance simple. L'utilisation de ce type d'absorbeurs trouve son intérêt dans différents domaines de l'ingénierie. Citons, par exemple, l'aéronautique pour les problèmes de flottement [61, 62], le domaine du génie civil par le biais d'"absorbeurs anti-sismiques" [35, 64, 75]. Des applications ont également été développées dans le domaine de l'acoustique [8, 9, 10, 19, 68].

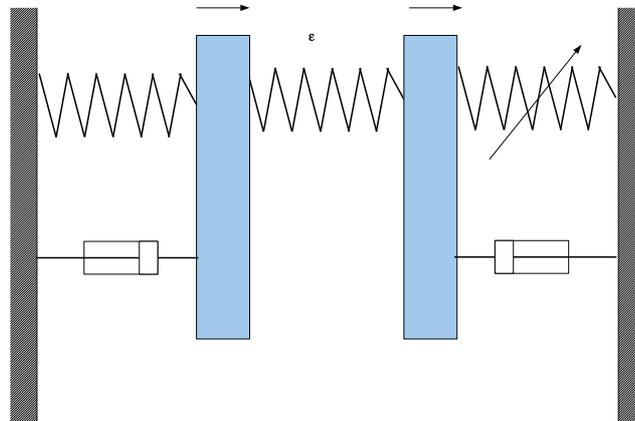


FIGURE 1.8 – Exemples d’un couplage d’un oscillateur linéaire couplé à un oscillateur non-linéaire.

1.7.2 Diagnostic du comportement vibratoire

Les modes non-linéaires peuvent permettre une compréhension plus approfondie des phénomènes qui apparaissent en dynamique vibratoire non-linéaire. En effet, dans un cadre linéaire, lorsqu’on calcule les modes linéaires, on obtient un ensemble de fréquences propres qui vont être les zones fréquentielles sensibles de la structure car pouvant entraîner des résonances. Dans le cas non-linéaire, les modes sont définis par des relations fréquence-énergie. De plus, la présence fréquente de résonances internes, donc de communications entre les modes, peut conduire à des dynamiques riches et complexes. Ces dynamiques peuvent être difficile à appréhender, mais elles peuvent servir a contrario de cadre explicatif à certains phénomènes que la théorie classique linéaire n’est pas capable d’interpréter.

L’étude d’une structure spatiale non-linéaire proposée par Kerschen et son équipe dans [74, 86] est une bonne illustration de l’intérêt de l’analyse modale non-linéaire dans la compréhension du comportement vibratoire complexe. Nous l’illustrons brièvement ci-après. Le premier MNL de la structure est reporté Fig. 1.9 suivant un graphe FEP. Ce mode fait apparaître autour de 11 Hz une résonance interne 5 : 1 avec le septième MNL à la fréquence voisine de 55 Hz. Les déformées modales de ces 2 modes au voisinage de la résonance interne sont aussi représentées montrant pour le premier mode des déformations localisées dans la zone non-linéaire et pour le septième mode des déformations localisées sur le sommet de la structure.

Le MNL aux alentours de 11 Hz, qui est le premier mode, a son énergie concentrée dans la partie non-linéaire de la structure, et le MNL aux alentours de 55 Hz, qui est le septième mode, a son énergie concentrée sur le “chapeau” de la structure.

Une étude expérimentale a montré que la même structure soumise à une excitation sinusoïdale au voisinage de 11 Hz fait apparaître un transfert d’énergie de la fréquence d’excitation vers son quintuple comme illustré sur la Fig. 1.10 par la représentation temps-fréquence de la réponse forcée.

1.7.3 Réduction de modèle

Lorsqu’on traite des systèmes mécaniques linéaires, les modes propres, base orthogonale de l’espace de configuration, constituent en complément du principe de superposition, un outil

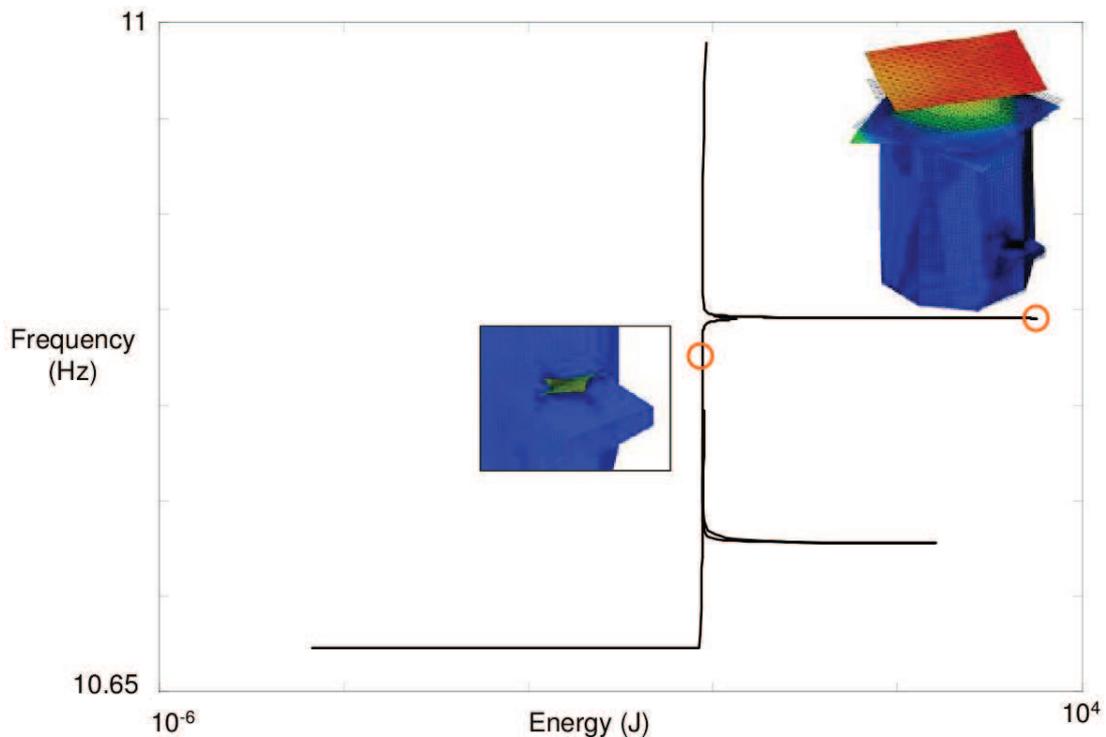


FIGURE 1.9 – Graphique fréquence-énergie du premier MNL d'un satellite issu de [74, 86].

puissant de réduction de modèle permettant un gain significatif en taille et en complexité. Pour des systèmes non-linéaires, les difficultés à surmonter sont la perte du principe de superposition et la capacité à reproduire des dynamiques modales contenues dans des variétés invariantes "courbées". De nombreux travaux ont porté sur la recherche de bases tronquées comme support à la définition du modèle réduit sans qu'à ce jour un choix soit optimal. L'utilisation des modes non-linéaires ouvre une autre voie.

Un mode non-linéaire renferme une richesse dynamique plus importante que la dynamique du mode propre associé du système linéaire sous-jacent. Utiliser un mode non-linéaire dans une procédure de réduction de modèle va donc apporter une plus grande finesse pour représenter des dynamiques.

Dans cette perspective, Touzé et al. [101] ont montré qu'un ou deux modes non-linéaires étaient suffisants pour capturer la dynamique d'une structure modélisée par un modèle de coque, alors qu'il faut un nombre conséquent de modes linéaires pour obtenir la même précision. D'autres études ont été menées, lié principalement aux méthodes utilisées pour l'approche forme normale des modes non-linéaires [99, 100, 101, 102], mais aussi pour l'approche variété invariante [4, 81, 82].

L'utilisation des modes non-linéaires comme outil de réduction de modèle reste toutefois loin d'avoir la maturité nécessaire pour une utilisation dans un cadre industriel. En effet, dans ce cadre, l'utilisation des modes linéaires reste beaucoup plus probante. On peut citer, dans le contexte de la résolution de systèmes non-linéaires, particulièrement dans le cas de non-linéarités localisées, les méthodes dites de synthèse modale (Component Modal Synthesis), comme par exemple la méthode de Craig-Bampton [23] ou de Craig-Martinez [69]. Ces mé-

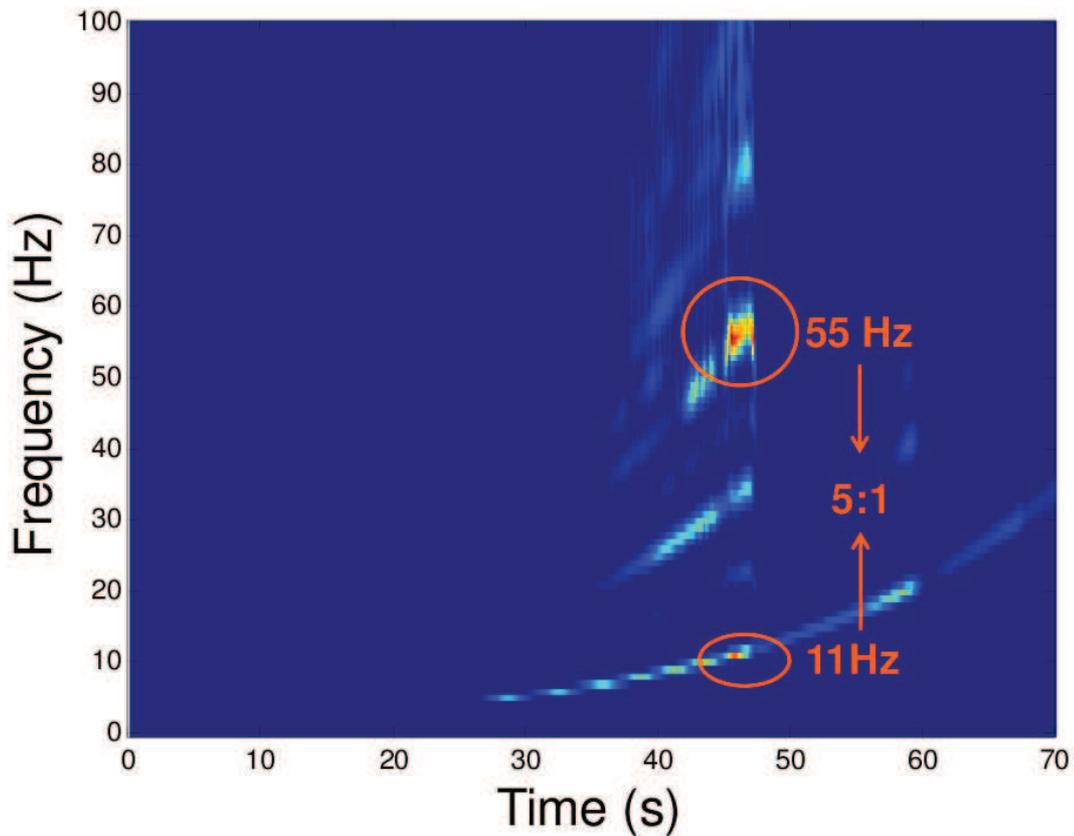


FIGURE 1.10 – Graphique fréquence-temps de résultats expérimental sur un satellite issu de [74, 86].

thodes permettent de réduire sur base modale les parties de la structure qui sont linéaires et de garder sur base physiques les parties de la structure où les non-linéarités sont présentes. Ces méthodes très utilisés dans l'industrie permettent de répondre aux besoins actuels de réduction de modèle pour la résolution de systèmes où les non-linéarités sont localisées.

1.8 Les systèmes non-réguliers

La plupart des travaux sur les modes non-linéaires ont été effectués autour de systèmes non-linéaires réguliers. Pourtant, beaucoup de systèmes que l'on retrouve dans les études d'ingénierie comportent des non-linéarités de contact, frottement ou encore présentent des matériaux élastiques différents, donc non-réguliers.

Il existe différentes manières de modéliser le contact-frottement :

- (i) Le contact unilatéral, classique en tribologie et rigoureux mathématiquement, entre deux structures. On peut citer par exemple la loi de Signorini. Les lois de contact sont souvent associées à des lois de frottement, comme par exemple la loi de Coulomb.

Pour ce type de contact la littérature est très abondante, souvent en mécanique statique, que ce soit pour des preuves d'existence et d'unicité [7, 29] ou le développement de

méthodes numériques [55], mais aussi en dynamique, que ce soit le développement d'algorithme pour la résolution des problèmes de contact-frottement [54], ou d'algorithme d'intégration temporelle [1] dédié à ce type de problème.

Du côté de l'analyse modale non-linéaire, on peut citer la méthode proposée dans [58], qui s'inspire des méthodes usuelles citées précédemment. En effet, en utilisant le formalisme de la mécanique des milieux continus, le problème initial est transformé après un développement en série de Fourier en un problème aux valeurs propres dont le domaine admissible est défini par les conditions de contact. Une condition supplémentaire est ajoutée à ce problème de minimisation avec contrainte correspondant à la normalisation des vecteurs propres par rapport à l'énergie. Le problème final est résolu par l'approche du Lagrangien augmenté.

- (ii) Le contact entre un noeud et un obstacle rigide, c'est-à-dire qu'on considère que la raideur de l'obstacle est infinie. Parfois on rajoute une loi de restitution, comme celle de Newton, pour modéliser la dissipation lors du choc.

On trouve beaucoup d'études détaillées de systèmes dynamiques possédant ce type de non-linéarités [24]. On retrouve des systèmes forcés périodiquement [3, 97] et des systèmes autonomes [64, 71, 76].

- (iii) Le contact entre un noeud et un obstacle qu'on appelle butée élastique. L'obstacle est modélisé par un ressort, auquel on ajoute parfois des lois de frottement.

La littérature est très abondante sur les systèmes forcés périodiquement [2, 17, 30, 110], voire en ajoutant un aspect aléatoire [25], ou encore en utilisant la théorie des ondelettes au lieu des séries de Fourier dans [48, 49].

On retrouve tout de même des études de systèmes autonomes, parfois pour en déterminer les modes non-linéaires. Par exemple, par le calcul de variétés invariantes comme dans [46], par le traitement de systèmes dissipatifs dans [59], en introduisant le concept de "mode non-linéaire complexe". On peut citer également comme exemple le contact pour des structures endommagées par des fissures dans [34, 107].

La liste ci-dessus n'est bien évidemment pas exhaustive.

Les systèmes mécaniques non-linéaires qui nous intéressent ici sont sous la forme générale suivante,

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) + F(U(t)) = \mathbf{0} \quad (1.61)$$

où M , K sont les matrices de masse et de raideur, et $U \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de déplacement. F la fonction qui exprime la non-linéarité de contact est non-régulière, c'est-à-dire que F est au plus $C^0(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 2

Une méthode pour le calcul de solutions périodiques : Fast-EHMAN

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'il existe plusieurs méthodes pour le calcul des modes non-linéaires (MNLs). Ces méthodes ont leurs qualités et leurs défauts mais aucune n'a été encore identifiée comme étant performante et robuste. Ce constat est encore plus flagrant lorsqu'il s'agit d'aborder des systèmes non-réguliers ou peu réguliers. Dans ce contexte, nous avons fait le choix de privilégier une approche qui a déjà montré une très bonne robustesse pour les problèmes réguliers comportant des non-linéarités polynomiales ou rationnelles et des fonctions $C^{+\infty}$ telles que les fonctions puissances ou exponentielles par exemple. Cette approche combine la méthode de l'équilibrage harmonique (EH) qui est bien connue pour ses bonnes qualités de convergence (méthodes spectrales) et la méthode asymptotique numérique (MAN) qui est une méthode de continuation réputée pour sa grande robustesse. L'enjeu est ici d'adapter cette approche, appelée EHMAN, pour des systèmes non-réguliers et de démontrer sa capacité à calculer efficacement les modes non-linéaires.

Comme nous l'avons précisé auparavant, on se concentre sur l'étude de systèmes mécaniques non-linéaires dont les non-linéarités sont localisées et correspondent à des contacts de type "butées élastiques à jeu".

Pour pouvoir appliquer l'approche EHMAN, qui repose sur des développements en séries à des ordres élevés (séries de Fourier et de Taylor), il est nécessaire d'une part de régulariser les lois de comportement des butées à jeu, d'autre part d'écrire ces lois dans un formalisme adapté, c'est-à-dire sous une forme polynomiale et quadratique, qui autorise une manipulation aisée des séries.

On donne ici un exemple pour éclaircir l'idée de régularisation, sur un système vibro-impact élémentaire, illustré par le schéma de la Fig. 2.1 et le système d'Eq. (2.2), où H représente la fonction de Heaviside.

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + ku(t) + f(t) & = 0 \\ f(t) - \alpha(u(t) - g)H(u(t) - g) & = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

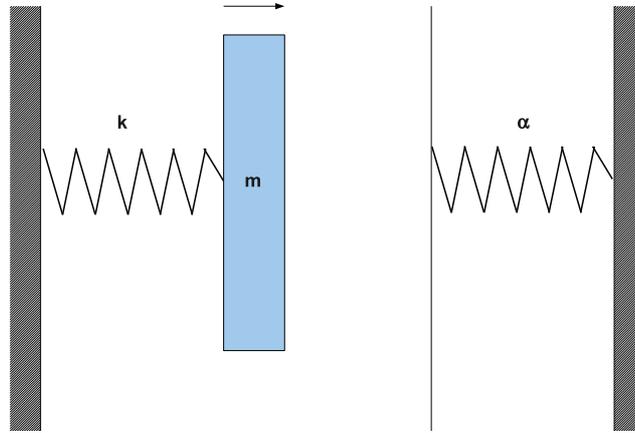


FIGURE 2.1 – Schéma d'un oscillateur impactant sur une butée élastique à jeu.

On régularise à l'aide d'un paramètre appelé η de la manière suivante,

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + ku(t) + f(t) & = 0 \\ f(t)(f(t) - \alpha(u(t) - g)) - \alpha\eta & = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

De plus, on vise l'étude de modèles industriels, qui pourront comporter un nombre relativement élevé de degrés de liberté avec un nombre relativement faible de butées élastiques à jeu. Il est donc nécessaire d'améliorer les performances de la méthode EHMAN, qui a été élaborée pour des systèmes à faible nombre de degrés de liberté.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : on commencera par une description du modèle mécanique et des non-linéarités qu'on a choisi d'étudier. On présente en détail la méthode EHMAN, puis on décrit les améliorations apportées à la méthode qui prendra alors le nom de Fast-EHMAN pour la différencier. Suivra une discussion sur le choix des paramètres de la méthode de régularisation des lois de contact. Et enfin, on décrira l'implémentation de la méthode dans les logiciels *MANLAB* et *Code_Aster*.

2.2 Modèle mécanique et régularisation des non-linéarités

2.2.1 Modèle mécanique global

On considère un système mécanique autonome, conservatif et non-linéaire de n degrés de liberté

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) + F(U(t)) = 0 \quad (2.3)$$

où M est la matrice de masse, K la matrice de raideur linéaire et $F(U)$ le vecteur des forces de rappel non-linéaires. Le signe (\cdot) signifie la dérivée par rapport au temps.

La partie linéaire de l'Eq. (2.3) correspond aux équations du mouvements pour des structures élastiques, du type coque, plaque ou poutre, après une discrétisation par éléments finis, ou par la méthode de Ritz.

Nous supposons, ici, que le vecteur $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ exprime sous la forme d'une fonction les forces de contact localisées sur un certain nombre de noeuds, appelés noeuds de contact. Posons $I_n = 1, 2, \dots, n$ la liste d'indice de l'ensemble des degrés de liberté. On note alors I_{nl} , avec $\text{card}(I_{nl}) = n_{nl}$, la liste d'indice correspondant aux degrés de liberté qui peuvent rentrer en contact. Par complémentarité, on note I_l l'ensemble tel que $I_n = I_l \cup I_{nl}$. On peut alors introduire le vecteur \mathbf{U}^{nl} (respectivement \mathbf{U}^l), correspondant aux variables restreintes par l'ensemble d'indice I_{nl} (respectivement I_l),

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{nl} = \mathbf{U}|_{I_{nl}} \\ \mathbf{U}^l = \mathbf{U}|_{I_l}. \end{cases} \quad (2.4)$$

On réécrit alors le système d'Eq. (2.3),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{M}^l & \mathbf{M}^{lnl} \\ \mathbf{M}^{nll} & \mathbf{M}^{nl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}}^l(t) \\ \ddot{\mathbf{U}}^{nl}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}^l & \mathbf{K}^{lnl} \\ \mathbf{K}^{nll} & \mathbf{K}^{nl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^l(t) \\ \mathbf{U}^{nl}(t) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{U}^{nl}(t)) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où les blocs de matrices sont aisément déduits de \mathbf{M} et \mathbf{K} . \mathbf{F}^{nl} est une application de $\mathbb{R}^{n_{nl}}$ dans $\mathbb{R}^{n_{nl}}$ associée aux forces de rappel non-linéaires.

2.2.2 Régularisation

L'utilisation de l'équilibrage harmonique (EH) et de la MAN pour le calcul des modes non-linéaires nécessite d'avoir un système suffisamment régulier pour pouvoir chercher les solutions sous la forme de séries d'ordre élevé. On s'oblige également à écrire sous une forme polynomiale et quadratique pour avoir une algèbre simple dans la manipulation des séries.

Cette propriété est essentielle pour que la méthode garde sa robustesse et son efficacité. Par conséquent, on propose ici d'adopter une régularisation atypique des non-linéarités de contact pour répondre à ces exigences. En effet, nous supposons que les forces régularisées s'obtiennent par la recherche des racines de l'application, qui va de $\mathbb{R}^{2n_{nl}+n_z}$ dans $\mathbb{R}^{n_{nl}+n_z}$, suivante

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}^{nl}(t), \mathbf{F}^{nl}(t), \mathbf{Z}(t)) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

où chaque composante de \mathbf{G} est un polynôme de degré 2 en fonction des degrés de liberté \mathbf{U}_{nl} , des variables de forces non-linéaires \mathbf{F}_{nl} et un ensemble de variables auxiliaires regroupées dans un vecteur appelé \mathbf{Z} , de taille n_z . A noter que la même notation a été choisie pour désigner l'application \mathbf{F}^{nl} de l'Eq. (2.5) et de l'Eq. (2.6).

On peut séparer en groupes d'équations l'Eq. (2.6), chacun définissant la loi de comportement d'un noeud par rapport à la butée élastique,

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{U}_i^{nl}(t), \mathbf{F}_i^{nl}(t), \mathbf{Z}_i(t)) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n_f \quad (2.7)$$

L'application \mathbf{G}_i va de $\mathbb{R}^{2n_{nl}^i+n_z^i}$ dans $\mathbb{R}^{n_{nl}^i+n_z^i}$, tel que $\sum_{i=1}^{n_f} n_{nl}^i = n_{nl}$ et $\sum_{i=1}^{n_f} n_z^i = n_z$.

Il est nécessaire que \mathbf{G} soit un opérateur quadratique, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous la forme suivante,

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{G}_c + \mathbf{G}_l(\mathbf{X}) + \mathbf{G}_q(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \quad (2.8)$$

avec $\mathbf{X} = [\mathbf{U}^{nlT}, \mathbf{F}^{nlT}, \mathbf{Z}^T]^T$, \mathbf{G}_c étant une application constante, $\mathbf{G}_l(\cdot)$ linéaire et $\mathbf{G}_q(\cdot, \cdot)$ bilinéaire.

On obtient alors le système suivant,

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^{n_f} \mathbf{F}_i^{nl}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_i(\mathbf{U}_i^{nl}(t), \mathbf{F}_i^{nl}(t), \mathbf{Z}_i(t)) = \mathbf{0}, i = 1, \dots, n_f \end{cases} \quad (2.9)$$

2.2.3 Adimensionnement

Dans la suite, on verra que pour la méthode de continuation choisie, la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), on va calculer une matrice jacobienne relative à des équations de nature différente (équations du mouvement et lois de contact). Le conditionnement de cette matrice est très important pour le bon déroulement de la continuation. Pour cela, on propose un adimensionnement de quelques variables du modèle exposé ci-dessus.

On adimensionne dans un premier temps le déplacement \mathbf{U} en le rapportant au jeu de plus grande valeur. Soit $\mathbf{g}_0 = \max_{i \in \{1, \dots, n_f\}} \{\mathbf{g}_i\}$, on pose $\tilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{g}_0}$ alors on peut réécrire l'équation de la dynamique sous la forme,

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{U}}}(t) + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{\mathbf{g}_0} \mathbf{F}^{nl}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Il reste à adimensionner les variables \mathbf{F} et les déterminer par la recherche des racines de la fonction \mathbf{G} . Chaque système d'équations définissant une non-linéarité de contact relative à un noeud (cf. Eq. (2.7)) sera traité indépendamment. En effet, on adimensionne les variables de déplacement par rapport au jeu \mathbf{g}_i , correspondant à la non-linéarité \mathbf{F}_i^{nl} , et non plus par rapport à la plus grande valeur \mathbf{g}_0 .

$$\mathbf{G}_i\left(\frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_i} \tilde{\mathbf{U}}_i^{nl}(t), \mathbf{F}_i^{nl}(t), \mathbf{Z}_i(t)\right) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Ce qui nous amène à résoudre le système suivant,

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{U}}}(t) + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{g}_i}{\mathbf{g}_0} \mathbf{F}_i^{nl}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_i\left(\frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_i} \tilde{\mathbf{U}}_i^{nl}(t), \mathbf{F}_i^{nl}(t), \mathbf{Z}_i(t)\right) = \mathbf{0}, i = 1, \dots, n_f \end{cases} \quad (2.12)$$

On verra dans la Section 2.2.4 comment est effectué l'adimensionnement pour chaque non-linéarité.

La dernière étape consiste à adimensionner le temps. Plusieurs méthodes sont possibles, la plus simple consiste à adimensionner par rapport à la première fréquence propre du système linéaire sous-jacent.

Soit ϕ_i et ω_i , $i = 1, \dots, n$, respectivement l'ensemble des modes propres et l'ensemble des pulsations propres du système linéaire sous-jacent. On définit un temps adimensionné $\tilde{t} = \omega_1 t$, ce qui donne

$$\omega_1^2 M \ddot{\tilde{U}}(\tilde{t}) + K \tilde{U}(\tilde{t}) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{g_0} \mathbf{F}^{nl}(\tilde{t}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

On rappelle qu'on peut écrire $\omega_i^2 = \frac{\phi_i^t K \phi_i}{\phi_i^t M \phi_i}$. Dès lors, on pose $\mathbf{k} = \phi_1^t K \phi_1$ et $\mathbf{m} = \phi_1^t M \phi_1$ et on divise le système par rapport à \mathbf{k} , ce qui donne,

$$\begin{cases} \tilde{M} \ddot{\tilde{U}}(t) + \tilde{K} \tilde{U}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{g_i}{g_0} \tilde{\mathbf{F}}_i^{nl}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_i(\tilde{\mathbf{U}}_i^{nl}(t), \tilde{\mathbf{F}}_i^{nl}(t), \mathbf{Z}_i(t)) = \mathbf{0}, i = 1, \dots, n_f \end{cases} \quad (2.14)$$

où $\tilde{K} = \frac{1}{\mathbf{k}} K$, $\tilde{M} = \frac{1}{\mathbf{m}} M$ et $\tilde{\mathbf{F}}_i^{nl} = \frac{1}{\mathbf{k}} \mathbf{F}_i^{nl}$.

2.2.4 Modélisation des non-linéarités

Ici, on propose quelques configurations possibles de butées élastiques étudiées et réécrites sous la forme d'équations régularisées (voir Eq. (2.7)).

Non-linéarité de contact unilatéral

On définit la non-linéarité de contact unilatéral (voir Fig. 2.2) à l'aide de la fonction linéaire par morceaux suivante

$$f^{nl}(u^{nl}) = \begin{cases} \alpha(u^{nl} - g) & \text{if } g \leq u^{nl} \\ 0 & \text{if } g \geq u^{nl} \end{cases} \quad (2.15)$$

où g représente le jeu (en m) et α ($\alpha > 0$) le coefficient de raideur (en N/m) associé.

L'équation régularisée peut-être décrite de manière implicite à l'aide de l'équation polynomiale de degré 2 (par rapport à la variable f^{nl}),

$$0 = G(u^{nl}, f^{nl}) = f^{nl}(f^{nl} - \alpha(u^{nl} - g)) - \alpha\eta \quad (2.16)$$

où η représente le paramètre de régularisation. Pour $\eta = 0$, les solutions de l'Eq. (2.16) sont $f^{nl} = 0$ et $f^{nl} = \alpha(u^{nl} - g)$. Et pour $\eta \neq 0$, les solutions sont des courbes perturbées de ces deux droites.

Comme indiqué dans la section précédente, on adimensionne les variables par rapport au jeu g , ce qui nous donne l'équation suivante

$$G(\tilde{u}^{nl}, \tilde{f}^{nl}) = \tilde{f}^{nl}(\tilde{f}^{nl} - \alpha(\tilde{u}^{nl} - 1)) - \alpha\tilde{\eta} \quad (2.17)$$

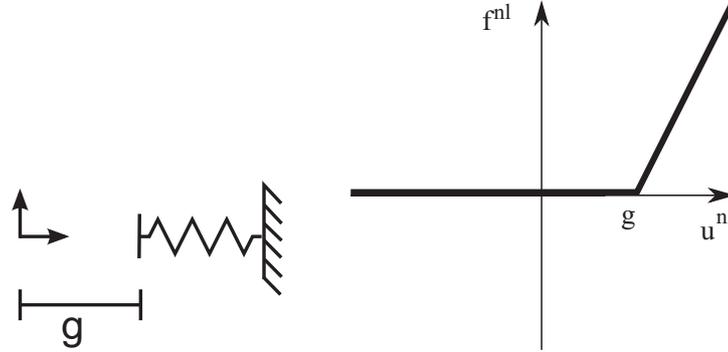


FIGURE 2.2 – Butée unilatérale

où $\tilde{u}^{nl} = \frac{u^{nl}}{g}$, $\tilde{f}^{nl} = \frac{f^{nl}}{g}$ et $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{g^2} \ll 1$. Pour éviter une surcharge de notation, on gardera les mêmes noms pour les variables adimensionnées et non-adimensionnées.

Pour un ensemble de valeur (u^{nl}, α, η) , le polynôme (Eq. (2.17)) admet deux racines, dont une seule approxime la fonction définie par l'Eq. (2.15) à l'adimensionnement près,

$$f^{nl} = \frac{1}{2}(\alpha(u^{nl} - 1)) + \frac{1}{2}\alpha|u^{nl} - 1|\sqrt{1 + \frac{4\alpha\eta}{\alpha^2(u^{nl} - g)^2}} \quad (2.18)$$

et satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & u^{nl} \ll 0, f^{nl} \approx \frac{\eta}{(1 - u^{nl})}; \\ (ii) \quad & u^{nl} = 0, \eta \ll 1, f^{nl} \approx \eta; \\ (iii) \quad & u^{nl} = 1, f^{nl} = \sqrt{\alpha\eta}; \\ (iv) \quad & u^{nl} \gg 1, f^{nl} \approx \alpha(u^{nl} - 1). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Par conséquent, la force de contact unilatéral régularisée peut-être vue comme une force de rappel qui pour une valeur élevée de $u^{nl} \gg 1$ reproduit le comportement de la butée élastique et où le paramètre η introduit une perturbation d'ordre η dans l'approximation de la force lorsque $u^{nl} \approx 0$.

La Fig. 2.3 représente la relation entre la force de contact f^{nl} et la variable de déplacement u^{nl} . On compare la force non-régulière (en rouge) avec la force régularisée pour différentes valeurs de $\eta \in \{2.5 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-1}\}$. On voit que lorsqu'on diminue le paramètre de régularisation η , la fonction régularisée converge vers la fonction non-régulière.

Non-linéarité de contact bilatéral

Nous considérons, cette fois-ci, une butée élastique bilatérale (voir Fig. 2.4) que l'on définit par la fonction linéaire par morceaux,

$$f^{nl}(u^{nl}) = \begin{cases} \alpha(u^{nl} - g) & \text{si } g \leq u^{nl} \\ 0 & \text{si } -g \leq u^{nl} \leq g \\ \alpha(u^{nl} + g) & \text{si } u^{nl} \leq -g \end{cases} \quad (2.20)$$

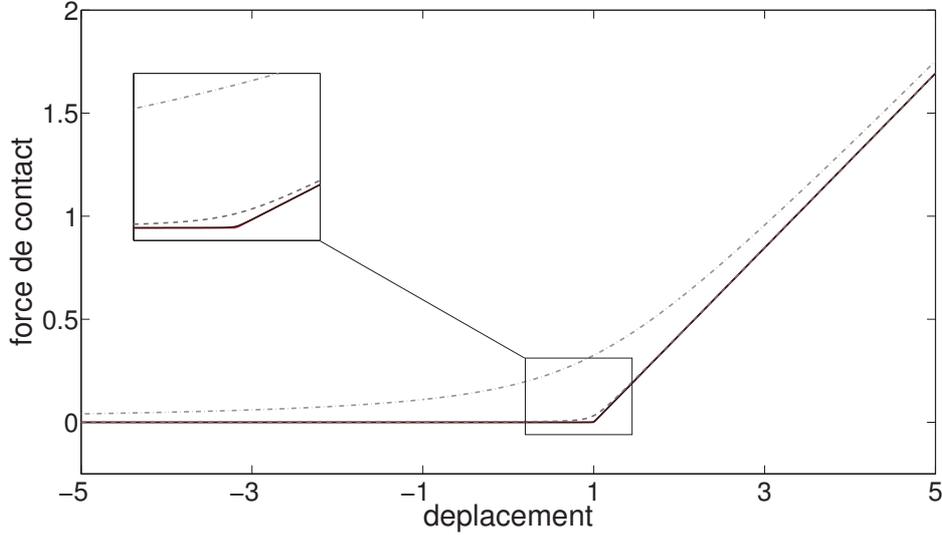


FIGURE 2.3 – Comparaison de la force de contact unilatéral non-régulière obtenue avec l’Eq. (2.15) (en rouge) avec la force régularisée exprimée par l’Eq. (2.17), pour différentes valeurs de η . Valeurs des paramètres : $\alpha = 0.4$, $\eta = 2.5 \times 10^{-5}$ (en noir), $\eta = 2.5 \times 10^{-3}$ (en gris discontinu), $\eta = 2.5 \times 10^{-1}$ (en gris pointillées).

où g désigne le jeu symétrique et α ($\alpha > 0$) le coefficient de raideur symétrique associé.

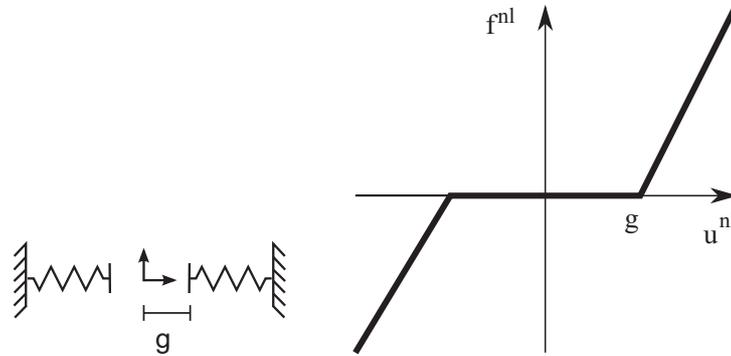


FIGURE 2.4 – Butée bilatérale

Comme dans le cas unilatéral, l’équation polynomiale de degré 3 (par rapport à la variable f^{nl}) régularisée provient d’une approximation de la fonction linéaire par morceaux définie par l’Eq. (2.20),

$$0 = p(u^{nl}, f^{nl}) = f^{nl}(f^{nl} - \alpha(u^{nl} - g))(f^{nl} - \alpha(u^{nl} + g)) - \alpha^2 \eta u^{nl} \quad (2.21)$$

où η désigne le paramètre de régularisation. Pour $\eta = 0$, les valeurs de $f^{nl}(u^{nl})$ quel que soit u^{nl} (voir Eq. (2.20)) sont en fait les trois racines du polynôme de l’Eq. (2.21) par rapport à la variable f^{nl} .

Comme indiqué dans la section précédente, on propose ici d’adimensionner l’équation par

rapport au jeu g , ce qui nous donne l'équation,

$$p(\tilde{u}^{nl}, \tilde{f}^{nl}) = \tilde{f}^{nl}(\tilde{f}^{nl} - \alpha(\tilde{u}^{nl} - 1))(\tilde{f}^{nl} - \alpha(\tilde{u}^{nl} + 1)) - \alpha^2 \tilde{\eta} \tilde{u}^{nl} \quad (2.22)$$

Aussi, pour un ensemble de valeurs (u^{nl}, α, η) donné, le polynôme de l'Eq. (2.21) admet toujours une racine réelle appelée f^{nl} (l'expression n'est pas donnée ici) qui satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} (i) \quad & u^{nl} f^{nl} \geq 0 \\ (ii) \quad & |u^{nl}| < 1, f^{nl} \approx \eta u^{nl}; \\ (iii) \quad & u^{nl} \gg 1, f^{nl} \approx \alpha(u^{nl} - \text{sign}(u^{nl})). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Par conséquent, la force de contact bilatérale régularisée peut être vue comme une force de rappel qui pour une valeur élevée de u^{nl} reproduit le comportement de la butée élastique et telle que le paramètre de régularisation introduit une raideur artificielle de valeur proche de η au voisinage du point d'équilibre $u^{nl} = 0$.

La Fig. 2.5 représente la relation entre la force de contact f^{nl} et la variable de déplacement u^{nl} . On compare la force non-régulière avec la force régularisée pour différentes valeurs de $\eta \in \{5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-1}\}$. On voit que lorsqu'on diminue le paramètre de régularisation

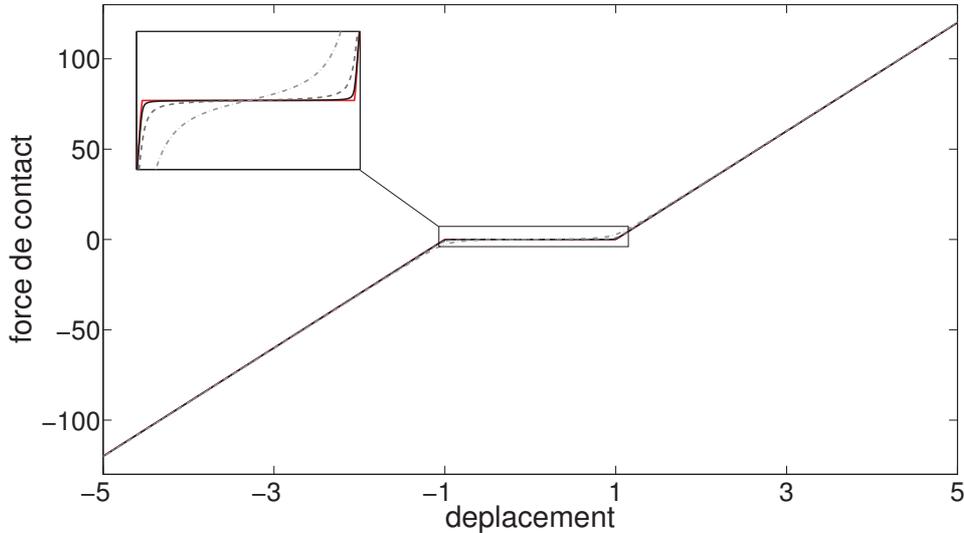


FIGURE 2.5 – Comparaison de la force de contact bilatéral non-régulière obtenue avec l'Eq. (2.20) (en rouge) avec la force régularisée exprimée par l'Eq. (2.17), pour différentes valeurs de η . Valeurs des paramètres : $\alpha = 30$, $\eta = 5 \times 10^{-3}$ (en noir), $\eta = 5 \times 10^{-2}$ (en gris discontinu), $\eta = 5 \times 10^{-1}$ (en gris pointillées).

η la fonction régularisée converge vers la fonction non-régulière.

Afin d'avoir une écriture équivalente à l'Eq. (2.8), c'est-à-dire quadratique, il est nécessaire d'introduire une variable auxiliaire z . On peut alors réécrire l'application non-linéaire p sous la forme d'une application quadratique appelée G

$$0 = G(u^{nl}, f^{nl}, z) = \begin{pmatrix} \alpha^2 f^{nl} - \eta \alpha^2 u^{nl} - f^{nl} z \\ z - (f^{nl} - \alpha u^{nl})^2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Non-linéarité de contact circulaire

Nous considérons ici un impact sur un anneau élastique (2D) centré en (e_x, e_y) (voir Fig. 2.6) que l'on définit en coordonnées polaires par,

$$f^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl}) = \begin{cases} \alpha(z - g) & \text{si } g \leq z \\ 0 & \text{si } z \leq g \end{cases} \quad (2.25)$$

et en coordonnées cartésiennes par,

$$\begin{cases} f_x^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl}) = \frac{f^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl})u_x^{nl}}{z} \\ f_y^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl}) = \frac{f^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl})u_y^{nl}}{z} \end{cases} \quad (2.26)$$

où (u_x^{nl}, u_y^{nl}) est la position courante du noeud qui peut impacter sur l'anneau,

$z = \sqrt{(u_x^{nl} - e_x)^2 + (u_y^{nl} - e_y)^2}$ est la distance radiale par rapport à la position d'équilibre (e_x, e_y) , g désigne le rayon de l'anneau (autrement dit le jeu) et α ($\alpha > 0$) désigne le coefficient de raideur associé.

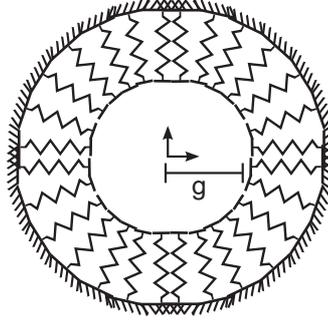


FIGURE 2.6 – Anneau

En s'inspirant du cas unilatéral, on obtient l'équation polynomiale implicite de degré deux (par rapport à la variable f^{nl}), et les deux équations suivantes

$$0 = p(u_x^{nl}, u_y^{nl}, f^{nl}, f_x^{nl}, f_y^{nl}) = \begin{pmatrix} f^{nl}(f^{nl} - \alpha(\sqrt{(u_x^{nl} - e_x)^2 + (u_y^{nl} - e_y)^2} - g)) - \alpha\eta \\ f_x^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl}) = \frac{f^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl})u_x^{nl}}{z} \\ f_y^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl}) = \frac{f^{nl}(u_x^{nl}, u_y^{nl})u_y^{nl}}{z} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

où η désigne le paramètre de régularisation. Et de la même manière, on peut adimensionner

les variables par rapport au jeu g ,

$$0 = p(\tilde{u}_x^{nl}, \tilde{u}_y^{nl}, \tilde{f}^{nl}, \tilde{f}_x^{nl}, \tilde{f}_y^{nl}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}^{nl}(\tilde{f}^{nl} - \alpha(\sqrt{(\tilde{u}_x^{nl} - \tilde{e}_x)^2 + (\tilde{u}_y^{nl} - \tilde{e}_y)^2} - 1)) - \alpha\eta \\ \tilde{f}_x^{nl}(\tilde{u}_x^{nl}, \tilde{u}_y^{nl}) = \frac{\tilde{f}^{nl}(\tilde{u}_x^{nl}, \tilde{u}_y^{nl})\tilde{u}_x^{nl}}{z} \\ \tilde{f}_y^{nl}(\tilde{u}_x^{nl}, \tilde{u}_y^{nl}) = \frac{\tilde{f}^{nl}(\tilde{u}_x^{nl}, \tilde{u}_y^{nl})\tilde{u}_y^{nl}}{z} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

où $\tilde{u}_x^{nl} = \frac{u_x^{nl}}{g}$, $\tilde{u}_y^{nl} = \frac{u_y^{nl}}{g}$, $\tilde{e}_x = \frac{e_x}{g}$, $\tilde{e}_y = \frac{e_y}{g}$, $\tilde{f}_x^{nl} = \frac{f_x^{nl}}{g}$, $\tilde{f}_y^{nl} = \frac{f_y^{nl}}{g}$, $\tilde{f}^{nl} = \frac{f^{nl}}{g}$ et $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{g^2} \ll 1$.

On introduit une variable auxiliaire z_1 , correspondant à la distance radiale, et on renomme la variable correspondant à la force de contact régularisée en coordonnées polaires f^{nl} par z_2 . Ainsi on peut réécrire p sous la forme de l'Eq. (2.7) d'une application quadratique appelée \mathbf{G} ,

$$0 = \mathbf{G}(u_x^{nl}, u_y^{nl}, f_x^{nl}, f_y^{nl}, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} f_x^{nl} z_1 - z_2 u_x^{nl} \\ f_y^{nl} z_1 - z_2 u_y^{nl} \\ z_1^2 - (u_y^{nl} - e_y)^2 - (u_x^{nl} - e_x)^2 \\ z_2(z_2 - \alpha(z_1 - 1)) - \alpha\eta \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

où f_x^{nl} et f_y^{nl} représente les forces de contact en coordonnées cartésiennes.

La Fig. 2.7 permet de voir l'influence du paramètre η sur le résidu de l'erreur entre la force décrite par l'Eq. (2.25) et la force déduite de l'Eq.(2.28) pour $\eta \in [5 \times 10^{-7}, 0.1]$. En effet, ici la force étant représentée par une fonction à deux variables, il est difficile d'avoir une représentation 2D lisible. On trace alors $\|f^{nl} - f_\eta^{nl}\|_2$ en fonction de η . On voit que lorsqu'on diminue le paramètre de régularisation η la fonction régularisée converge vers la fonction non-régulière.

2.3 Calcul de solutions périodiques : EHMAN

Le calcul des modes non-linéaires conservatifs consiste à chercher des familles de solutions périodiques (voir Section 1.3). On choisit ici d'utiliser une procédure [21] qui combine la Méthode de Balance Harmonique (MBH) et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), tout en restant dans le domaine fréquentiel, l'idée étant de passer par une réécriture du système à résoudre sous une forme polynomiale et quadratique.

La procédure est décrite ici telle qu'elle a été proposée dans [21]. Ceci permettra de facilement mettre en évidence les améliorations qui ont été apportées et qui sont décrites dans la Section 2.4.

2.3.1 Réécriture du système d'équation dans le formalisme EHMAN

Dans une logique de généralité, la méthode EHMAN impose d'écrire les équations du problème sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles du premier ordre et d'équations algébriques sous la forme,

$$\mathbf{m}(\dot{\mathbf{S}}) = \mathbf{c} + \mathbf{l}(\mathbf{S}) + \lambda_1(\mathbf{S}) + \mathbf{q}(\mathbf{S}, \mathbf{S}) \quad (2.30)$$

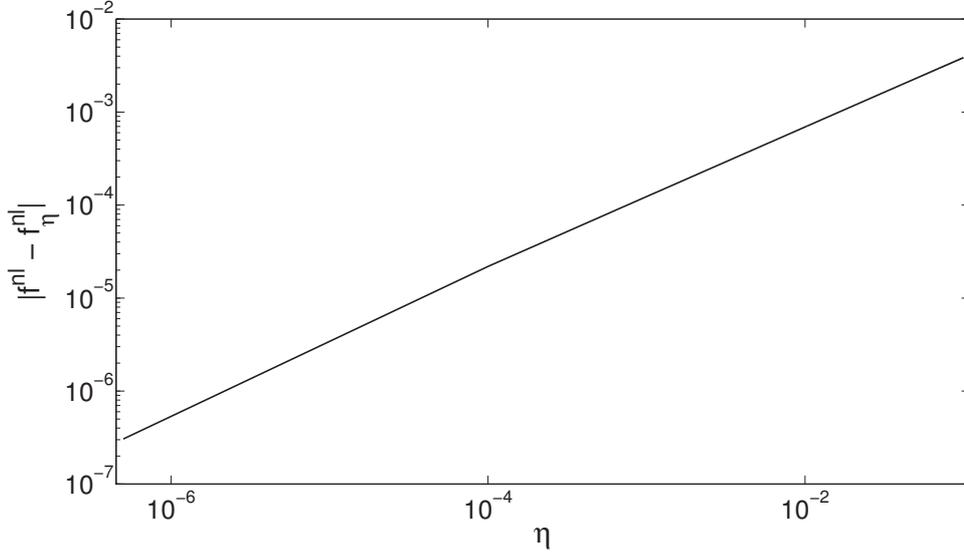


FIGURE 2.7 – Erreur entre la fonction non-régulière décrite par l’Eq. (2.25) et la fonction régularisée déduite de l’Eq. (2.28) en fonction du paramètre η .

où $S(t)$ est un vecteur qui regroupe les fonctions du temps inconnues, c est un vecteur constant qui regroupe les termes constant, l , l_1 et m des applications linéaires qui regroupent les termes linéaires, q une application quadratique qui regroupe les termes quadratiques, et λ le paramètre de bifurcation.

Le problème que l’on veut résoudre est donné par l’Eq. (2.9) qui contient une équation linéaire du second ordre et un ensemble d’équations algébriques quadratiques. Ce système d’Eq. (2.9) est autonome et conservatif, ce qui entraîne qu’il présente des familles de solutions périodiques qui peuvent être paramétrées, par exemple par l’énergie, alors qu’aucun paramètre n’apparaît explicitement dans les équations pour suivre ces solutions périodiques.

Pour faire rentrer le système d’Eq. (2.9) dans le formalisme de l’Eq. (2.30), il convient de faire deux choses,

- (i) Introduire la vitesse V comme variable indépendante pour revenir au premier ordre.
- (ii) Ajouter un terme dissipatif fictif λV dans les équations du mouvement pour faire apparaître explicitement un paramètre de bifurcation λ .

On obtient alors,

$$\begin{cases} \dot{U}(t) &= V(t) \\ M\dot{V}(t) &= -\lambda V(t) - KU(t) - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F^{nl}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} &= G(U^{nl}(t), F^{nl}(t), Z(t)) \end{cases} \quad (2.31)$$

qui respecte alors le formalisme de l’Eq. (2.30) avec $S(t) = [U(t)^t V(t)^t F^{nl}(t)^t Z(t)^t]^t$. Ce dernier système ne possède de solutions périodiques que pour $\lambda = 0$. En effet, si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 0$ le système ne fait que gagner ou perdre de l’énergie à tout instant et il ne peut avoir des solutions périodiques. Aussi l’Eq. (2.31) a les mêmes solutions périodiques que le système d’Eq. (2.9). L’intérêt de l’écriture du système d’Eq. (2.31) est de rendre explicite le paramètre de bifurcation λ .

2.3.2 Méthode de balance harmonique

La deuxième étape consiste à appliquer la méthode de balance harmonique. Pour cela on développe en série de Fourier tronquée à l'ordre H le vecteur d'inconnue \mathcal{S} ,

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_0 + \sum_{k=1}^H \mathcal{S}_{Ck} \cos(k\omega t) + \mathcal{S}_{Sk} \sin(k\omega t) \quad (2.32)$$

où \mathcal{S}_0 , \mathcal{S}_{Ck} , \mathcal{S}_{Sk} sont les coefficients de Fourier de $\mathcal{S}(t)$ et ω la pulsation. On regroupe alors ces coefficients, ω et λ dans un grand vecteur \mathcal{S} , de taille $(2H + 1) \times (2n + n_{nl} + n_z) + 2$,

$$\mathcal{S} = [\mathcal{S}_0^t, \mathcal{S}_{C1}^t, \dots, \mathcal{S}_{CH}^t, \mathcal{S}_{S1}, \dots, \mathcal{S}_{SH}, \lambda, \omega] \quad (2.33)$$

On introduit alors l'Eq. (2.32) dans le système d'Eq. (2.30). En regroupant les termes d'indice d'harmonique identique et en négligeant les harmoniques d'ordre supérieur à H , on obtient un système algébrique.

A noter qu'on ajoute une équation supplémentaire dans le système algébrique pour combler une indétermination liée au fait qu'on recherche des solutions périodiques. En effet, si $\mathcal{S}(t)$ est une solution périodique du système d'Eq. (2.30) alors $\forall t_0$, $\mathcal{S}(t + t_0)$ est également une solution. Pour éliminer cette surabondance, il est nécessaire d'ajouter ce qu'on appelle une condition de phase [50], c'est-à-dire une équation supplémentaire qui sélectionne une seule orbite dans la famille, par exemple

$$\dot{\mathcal{S}}_i(t = 0) = 0. \quad (2.34)$$

On peut alors réécrire le système algébrique et la condition de phase d'une manière condensée,

$$\mathbf{R}(\mathcal{S}) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\mathcal{S}) + \mathbf{Q}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 0 \quad (2.35)$$

avec \mathbf{R} une application qui va de $\mathbb{R}^{(2H+1) \times (2n+n_{nl}+n_z)+2}$ dans $\mathbb{R}^{(2H+1) \times (2n+n_{nl}+n_z)+1}$

2.3.3 Méthode asymptotique numérique

La dernière étape consiste à déterminer, par le biais de la continuation, les branches de solutions du système algébrique (2.35). Pour cela on applique la MAN, qui consiste à décomposer en série entière (tronquée à l'ordre N_{MAN}) l'inconnue du système algébrique, suivant un paramètre $a = (\mathcal{S} - \mathcal{S}_0)^t \mathcal{S}_1$. Celui-ci correspond à la pseudo-longueur d'arc, où \mathcal{S}_0 est un point solution de l'Eq. (2.35) connu et \mathcal{S}_1 le vecteur tangent en \mathcal{S}_0 ,

$$\mathcal{S}(a) = \mathcal{S}_0 + a\mathcal{S}_1 + a^2\mathcal{S}_2 + \dots + a^{N_{MAN}}\mathcal{S}_{N_{MAN}} \quad (2.36)$$

On développe en série de Taylor la fonction \mathbf{R} , au voisinage du vecteur d'initialisation \mathcal{S}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{R}(\mathcal{S}(a)) \\ &= \mathbf{R}(\mathcal{S}_0) + \frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) \left(\sum_{k=1}^{N_{MAN}} a^k \mathcal{S}_k \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{R}}{d\mathcal{S}^2}(\mathcal{S}_0) \left(\sum_{k=1}^{N_{MAN}} a^k \mathcal{S}_k \right) \left(\sum_{l=1}^{N_{MAN}} a^l \mathcal{S}_l \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

en notant que $\frac{d^p \mathbf{R}}{d\mathcal{S}^p} = 0, \forall p \geq 3$, car \mathbf{R} est au plus quadratique.

On ordonne les termes suivant les puissances croissantes de a ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{R}(\mathcal{S}_0) \\
&+ a \left\{ \frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_1 \right\} \\
&+ a^2 \left\{ \frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_2 + \frac{d^2 \mathbf{R}}{d\mathcal{S}^2}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_1 \right\} \\
&+ a^3 \left\{ \frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_3 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{R}}{d\mathcal{S}^2}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{R}}{d\mathcal{S}^2}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 \right\} \\
&\vdots \\
&+ a^{N_{MAN}} \left\{ \frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_{N_{MAN}} + \text{termes dépendants de } \mathcal{S}_1 \dots \mathcal{S}_{N_{MAN}-1} \right\}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Aussi, on peut déterminer analytiquement la matrice jacobienne,

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) e_i = \mathbf{L}(e_i) + \mathbf{Q}(e_i, \mathcal{S}_0) + \mathbf{Q}(\mathcal{S}_0, e_i) \tag{2.39}$$

où e_i est le vecteur de la base canonique, et la matrice hessienne qui est constante,

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{d\mathcal{S}^2}(\mathcal{S}_0) e_i e_j = \mathbf{Q}(e_i, e_j) + \mathbf{Q}(e_j, e_i) \tag{2.40}$$

où e_i et e_j sont des vecteurs de la base canonique. L'Eq. (2.37) étant vraie quel que soit a , par identification on a N_{MAN} systèmes linéaires à résoudre possédant la même matrice tangente $\frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0)$,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_1 = 0 \\ \frac{d\mathbf{R}}{d\mathcal{S}}(\mathcal{S}_0) \mathcal{S}_p = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{R}}{d\mathcal{S}^2}(\mathcal{S}_0) \left(\sum_{k+l=p} \mathcal{S}_k \mathcal{S}_l \right), p = 2, \dots, N_{MAN} \end{cases} \tag{2.41}$$

Ces systèmes sont dépendants les uns des autres de manière récursive et leur résolution permet d'obtenir les vecteur \mathcal{S}_p . On obtient ainsi une branche de solutions $\mathcal{S}(a)$ (voir Fig. 2.8) avec $a \in [0, a_{max}]$, où a_{max} représente le domaine de validité de la série entière (2.36). Une valeur de a_{max} optimale peut-être obtenue analytiquement, on renvoie à [18] pour plus de détail.

Par le biais de cette procédure, seule une partie de la branche de solutions périodiques a été obtenue. Pour obtenir l'intégralité de la branche, il est nécessaire de redémarrer entièrement le calcul de série en prenant comme nouvelle solution de départ \mathcal{S}_0 le dernier point de la branche calculée auparavant, i.e $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(a_{max})$. La Fig. 2.8 résume le principe de la méthode asymptotique numérique décrit ci-dessus.

2.3.4 Détection des bifurcations

Lorsqu'on calcule des branches de solutions à l'aide de méthodes de continuation, il est possible de rencontrer des points qui sont en fait des intersections entre deux branches. Dans

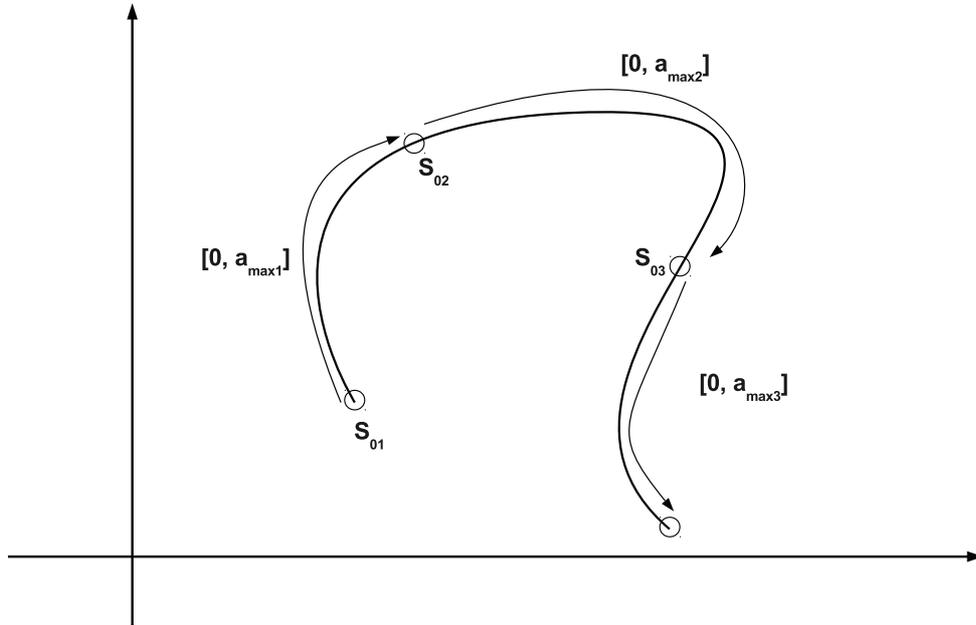


FIGURE 2.8 – Principe de la méthode asymptotique numérique (MAN).

notre cas, c'est-à-dire le calcul de branches de solutions périodiques, ces intersections peuvent avoir lieu, par exemple, lorsqu'on a une résonance interne, donc que deux familles de solutions périodiques correspondant à deux modes non-linéaires possèdent une solution périodique en commun. D'autres types de bifurcations existent également comme on le verra par la suite dans les différents exemples traités au chapitre suivant.

Ces points de bifurcations sont un problème récurrent pour les méthodes de continuation, car lorsqu'on est au voisinage de ce point, il n'y a plus unicité du vecteur tangent, et la matrice tangente n'est pas de rang complet. Il peut alors arriver que la méthode "bifurque", c'est-à-dire qu'elle change de branche lorsqu'elle passe par le point de bifurcation. Aussi, une méthode pour détecter les bifurcations est essentielle pour une plus grande robustesse de la méthode mais aussi pour une meilleure analyse des solutions.

Dans cette perspective, on présentera brièvement ici une technique peu coûteuse et relativement robuste pour détecter les points de bifurcation et passer à travers de manière efficace, dont on retrouvera les détails dans [20].

En utilisant la théorie issue de [27] appliquée à la méthode asymptotique numérique, c'est-à-dire en considérant que la branche de solution $S(a)$ peut s'écrire sous la forme d'une série entière tronquée, on peut démontrer qu'au voisinage d'un point de bifurcation les termes d'ordre élevé se comportent comme une série géométrique. Ce résultat nous donne donc un moyen pour identifier la présence d'une bifurcation. La procédure consiste alors, après déduction des termes \mathcal{S}_p , par la résolution des Eqs. (2.41). On effectue le test sur les s derniers termes, $\mathcal{S}_{N_{MAN}-s+1}, \dots, \mathcal{S}_{N_{MAN}}$.

Pour améliorer la robustesse de la méthode, la prochaine étape consiste à éliminer cette série géométrique de la série entière afin de choisir une tangente en particulier. Pour cela il

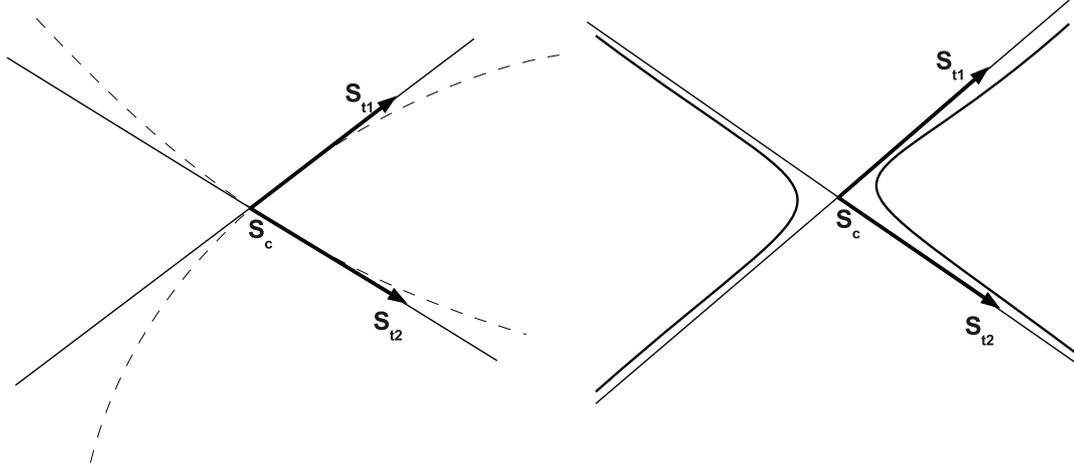


FIGURE 2.9 – Exemple de bifurcation exacte et quasi-bifurcation.

suffit de réécrire la nouvelle série entière de la manière suivante,

$$\mathcal{S}(a) = \mathcal{S}_0 + a\hat{\mathcal{S}}_1 + a^2\hat{\mathcal{S}}_2 + \dots + a^{N_{MAN}-1}\hat{\mathcal{S}}_{N_{MAN}-1} \quad (2.42)$$

où $\hat{\mathcal{S}}_p = \mathcal{S}_p - \alpha^{N_{MAN}-p}\mathcal{S}_{N_{MAN}}$, avec α la raison de la série géométrique, qu'on aura déterminée auparavant.

Le point de bifurcation qu'on appellera \mathcal{S}_c se situe au point $a = \alpha$ de la branche décrit par l'Eq.(2.42), c'est-à-dire que

$$\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_0 + \alpha\hat{\mathcal{S}}_1 + \alpha^2\hat{\mathcal{S}}_2 + \dots + \alpha^{N_{MAN}-1}\hat{\mathcal{S}}_{N_{MAN}-1} \quad (2.43)$$

On appellera \mathcal{S}_{t_1} la tangente du nouveau développement de l'Eq.(2.42), c'est-à-dire,

$$\mathcal{S}_{t_1} = \hat{\mathcal{S}}_1 + 2\alpha\hat{\mathcal{S}}_2 + \dots + (N_{MAN} - 1)\alpha^{N_{MAN}-2}\hat{\mathcal{S}}_{N_{MAN}-1} \quad (2.44)$$

On rappelle que le deuxième vecteur tangent, qu'on appellera \mathcal{S}_{t_2} , vérifie la condition $\mathcal{S}_{t_1}^t \mathcal{S}_{t_2} = 0$. La Fig. 2.9 résume le principe de la détection de bifurcation décrit ci-dessus.

Ainsi, on est capable de déterminer les deux tangentes et donc de parcourir ultérieurement la seconde branche qui intersecte la branche principale. Cette méthode rend l'algorithme beaucoup plus robuste pour le calcul des modes non-linéaires où les bifurcations sont très nombreuses.

2.4 Amélioration de la performance : Fast-EHMAN

2.4.1 Introduction

La méthode précédente présente des points faibles lorsqu'on veut traiter des systèmes de "grande dimension" et/ou nécessitant un grand nombre d'harmoniques ($H \geq 20$). Or dans notre cas les systèmes traités présentent ces deux caractéristiques. En effet, on cherche à traiter des systèmes industriels et on traite des non-linéarités de contact, dont les fonctions qui les modélisent nécessitent un grand nombre d'harmoniques. L'amélioration de la méthode pour le traitement de ce type de problème est donc nécessaire. Si on se réfère à [50], les temps de calcul sont concentrés principalement dans une étape, le calcul de la matrice jacobienne décrit par l'Eq. (2.56), et donc a fortiori dans le calcul des termes quadratiques. En effet, les performances de l'algorithme EHMAN présenté auparavant s'avère très mauvaises pour résoudre le système d'Eq. (2.31).

Les premières améliorations consisteront donc à réduire le nombre d'équations du système d'Eq. (2.31) sans modifier la qualité des solutions. Ceci permettra de réduire le temps de calcul de la matrice jacobienne. Pour cela, on propose de laisser le système d'Eq. (2.9) au second ordre et de dissocier les harmoniques entre les vecteurs de déplacements et de force de contact. On verra que cela n'est pas suffisant et qu'il sera nécessaire d'accélérer également certaines étapes de l'algorithme EHMAN. La première est d'utiliser l'algorithme Fast Fourier Transform (FFT) pour effectuer les opérations quadratiques du système d'Eq. (2.35), et enfin de calculer de manière analytique, au préalable, une partie de la matrice jacobienne.

2.4.2 Résoudre au second ordre

La première amélioration consiste à ne pas écrire le système d'Eq. (2.31) au premier ordre. En effet, notre contexte d'étude ici étant toujours la mécanique il est inutile de multiplier par deux le nombre d'inconnues. On s'attache donc à chercher les solutions périodiques du système d'Eq. (2.45) (a et b) avec la condition de phase (2.45) (c),

$$\begin{cases} \mathbf{0} = M\ddot{\mathbf{U}}(t) + \lambda\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{nl}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{U}^{nl}(t), \mathbf{F}^{nl}(t), \mathbf{Z}(t)) = \mathbf{G}_c + \mathbf{G}_l(\mathbf{X}) + \mathbf{G}_q(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \\ \mathbf{0} = \dot{\mathbf{U}}_i(0) \end{cases} \quad (2.45)$$

avec $\mathbf{X} = [\mathbf{U}^{nlT}, \mathbf{F}^{nlT}, \mathbf{Z}^T]^T$. On développe les inconnues en série de Fourier comme précédemment,

$$\begin{cases} \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{U}_{Ck} \cos(k\omega t) + \mathbf{U}_{Sk} \sin(k\omega t) \\ \mathbf{F}^{nl}(t) = \mathbf{F}_0^{nl} + \sum_{k=1}^H \mathbf{F}_{Ck}^{nl} \cos(k\omega t) + \mathbf{F}_{Sk}^{nl} \sin(k\omega t) \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{Z}_{Ck} \cos(k\omega t) + \mathbf{Z}_{Sk} \sin(k\omega t) \end{cases} \quad (2.46)$$

Le choix de rester au second ordre nécessite, lorsqu'on applique la méthode de balance harmonique (MBH), d'introduire deux nouvelles variables scalaires γ_1 et γ_2 pour rester qua-

dratique, car la dérivée seconde introduit le terme ω^2 et la dérivée première le terme $\lambda\omega$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} = \mathbf{K}\mathbf{U}_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_0^{nl} \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} = \mathbf{K}\mathbf{U}_{Ck} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{Ck}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1\mathbf{M}\mathbf{U}_{Ck} + k\gamma_2\mathbf{U}_{Sk}, k = 1, \dots, H \\ \mathbf{0} = \mathbf{K}\mathbf{U}_{Sk} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{Sk}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1\mathbf{M}\mathbf{U}_{Sk} - k\gamma_2\mathbf{U}_{Ck}, k = 1, \dots, H \\ \mathbf{0} = \mathcal{G}_c + \mathcal{G}_l(\mathcal{X}) + \mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \\ \mathbf{0} = \gamma_1 - \omega^2 \\ \mathbf{0} = \gamma_2 - \lambda\omega \\ \mathbf{0} = \sum_{k=1}^{H_l} k\omega\mathbf{U}_{Sk}^i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{quadratique}} \end{array} \quad (2.47)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{constant}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{linéaire}}$

où $\mathcal{X} = [\mathbf{U}_0^{nl} \ \mathbf{U}_{C1}^{nl} \ \dots \ \mathbf{U}_{CH}^{nl} \ \mathbf{U}_{S1}^{nl} \ \dots \ \mathbf{U}_{SH}^{nl} \ \mathbf{F}_0^{nl} \ \dots \ \mathbf{F}_{SH}^{nl} \ \mathbf{Z}_0 \ \dots \ \mathbf{Z}_{SH}]$ regroupe les coefficients de Fourier des variables \mathbf{U}^{nl} , \mathbf{F}^{nl} et \mathbf{Z} . Et où \mathcal{G}_c , (respectivement \mathcal{G}_l , \mathcal{G}_q) est un opérateur constant (respectivement linéaire et quadratique). Les opérateurs \mathcal{G}_c , \mathcal{G}_l et \mathcal{G}_q qui vont de $\mathbb{R}^{(2n_{nl}+n_z)(2H+1)}$ dans $\mathbb{R}^{(n_{nl}+n_z)(2H+1)}$ sont le résultat de l'introduction des séries de Fourier (2.48) dans les fonctions \mathbf{G}_c , \mathbf{G}_l et \mathbf{G}_q qui définissent les équations algébriques décrivant les forces non-linéaires du modèle.

2.4.3 Dissociation de l'ordre de troncature des harmoniques

Comme précédemment, on applique la méthode de balance harmonique (MBH), en ajoutant une différence : la dissociation du nombre d'harmoniques entre la variable de la dynamique $\mathbf{U}(t)$, et les autres variables, i.e la force de contact $\mathbf{F}^{nl}(t)$ et la variable auxiliaire $\mathbf{Z}(t)$. Pour $\mathbf{U}(t)$ on tronquera à un nombre d'harmoniques qu'on appellera H_l et pour les autres variables on tronquera à un nombre d'harmoniques qu'on appellera H_{nl} . En effet, on sait que la représentation temporelle de \mathbf{F}^{nl} est relativement brutale, car modélisant une force de contact et nécessitant donc un nombre d'harmoniques élevé pour une bonne représentation à l'aide d'une série de Fourier. Alors que pour \mathbf{U} la variation est plus régulière, car modélisant le déplacement d'une structure, on peut donc utiliser un nombre d'harmoniques plus faible.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^{H_l} \mathbf{U}_{Ck} \cos(k\omega t) + \mathbf{U}_{Sk} \sin(k\omega t) \\ \mathbf{F}^{nl}(t) = \mathbf{F}_0^{nl} + \sum_{k=1}^{H_{nl}} \mathbf{F}_{Ck}^{nl} \cos(k\omega t) + \mathbf{F}_{Sk}^{nl} \sin(k\omega t) \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_0 + \sum_{k=1}^{H_{nl}} \mathbf{Z}_{Ck} \cos(k\omega t) + \mathbf{Z}_{Sk} \sin(k\omega t) \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Il convient maintenant d'adapter la procédure d'équilibrage d'obtenir autant d'équations que d'inconnues. Il suffit pour cela d'équilibrer l'Eq. (2.45) (a) jusqu'à l'harmonique H_l et l'Eq. (2.45) (b) jusqu'à H_{nl} , sachant que les coefficients \mathbf{U}_{Ck}^{nl} et \mathbf{U}_{Sk}^{nl} pour $k = H_l + 1, \dots, H_{nl}$ sont nuls.

$$\mathbf{0} = \mathcal{G}_c + \mathcal{G}_l(\mathcal{X}) + \mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \quad (2.49)$$

où $\mathcal{X} = [U_0^{nl} \ U_{C1}^{nl} \ \dots \ U_{CH_l}^{nl} \ 0 \ \dots \ 0 \ U_{S1}^{nl} \ \dots \ U_{SH_l}^{nl} \ 0 \ \dots \ 0 \ F_0^{nl} \ \dots \ F_{SH_{nl}}^{nl} \ Z_0 \ \dots \ Z_{SH_{nl}}]$. Les opérateurs \mathcal{G}_c , \mathcal{G}_l et \mathcal{G}_q vont de $\mathbb{R}^{n_{nl}(2H_l+1)+(n_{nl}+n_z)(2H_{nl}+1)}$ dans $\mathbb{R}^{(n_{nl}+n_z)(2H_{nl}+1)}$. Pour l'équilibrage de l'Eq. (2.45) (a) de la dynamique, on ne prends pas en compte les coefficients de Fourier de $F^{nl}(t)$ d'ordre strictement supérieur à H_{nl} .

$$\begin{cases} 0 = KU_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F_0^{nl} \end{pmatrix} \\ 0 = KU_{Ck} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F_{Ck}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1 MU_{Ck} + k\gamma_2 U_{Sk}, k = 1, \dots, H_l \\ 0 = KU_{Sk} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F_{Sk}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1 MU_{Sk} - k\gamma_2 U_{Ck}, k = 1, \dots, H_l \end{cases} \quad (2.50)$$

Au final, on obtient le système algébrique,

$$\begin{cases} 0 = KU_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F_0^{nl} \end{pmatrix} \\ 0 = KU_{Ck} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F_{Ck}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1 MU_{Ck} + k\gamma_2 U_{Sk}, k = 1, \dots, H_l \\ 0 = KU_{Sk} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F_{Sk}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1 MU_{Sk} - k\gamma_2 U_{Ck}, k = 1, \dots, H_l \\ 0 = \mathcal{G}_c + \mathcal{G}_l(\mathcal{X}) + \mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \\ 0 = \gamma_1 - \omega^2 \\ 0 = \gamma_2 - \lambda\omega \\ 0 = \sum_{k=1}^{H_l} k\omega U_{Sk} \end{cases} \quad (2.51)$$

On rappelle que la taille du vecteur U est grande (modèles éléments finis) et que la taille de F^{nl} et Z est bien plus petite (liée au nombre de butées). En prenant $H_l \ll H_{nl}$, la réduction du nombre total d'équations entre les Eqs. (2.47) et les Eqs. (2.51)

La dissociation des harmoniques pose la question de l'influence de la robustesse sur la précision des calculs, si on prend $H_l \ll H_{nl}$. On propose donc par le biais d'un exemple d'étudier l'influence de cette dissociation du nombre d'harmoniques. En se basant sur le modèle introduit dans la Section 3.1 (et étudié en détail dans l'Annexe C), on comparera les résultats obtenus pour différentes valeurs d'harmoniques. Le premier calcul sera effectué avec $H_l = H_{nl} = 151$, le second avec $H_l = 33$ et $H_{nl} = 151$ et le troisième avec $H_l = H_{nl} = 33$.

Les Fig. (2.10,2.11,2.12) représentent une comparaison globale à l'aide d'un graphique fréquence-énergie (FEP), pour les différentes valeurs d'harmoniques. On voit que seul le cas où on a pris $H_l = 33$ et $H_{nl} = 151$ permet d'avoir le MNL dans son "intégralité". Pour les deux autres cas ($H_l = H_{nl} = 33$ et $H_l = H_{nl} = 151$) l'algorithme de continuation échoue.

On peut supposer que l'échec pour le cas, $H_l = H_{nl} = 33$ (voir Fig. 2.10), est dû à une mauvaise représentation de la force de contact, étant donné le peu d'harmoniques utilisées pour la décrire. Par exemple, proche d'une résonance interne l'harmonique prépondérante n'est plus la première harmonique, par conséquent il est nécessaire d'avoir un nombre d'harmoniques beaucoup plus grand pour représenter la force de contact.

Dans le cas, $H_l = H_{nl} = 151$ (voir Fig. 2.12), l'excès d'harmoniques pour une représentation de U par une série de Fourier est un handicap car si beaucoup de coefficients sont nuls alors la matrice jacobienne risque d'avoir un mauvais conditionnement et donc influencer sur le bon déroulement de la continuation.

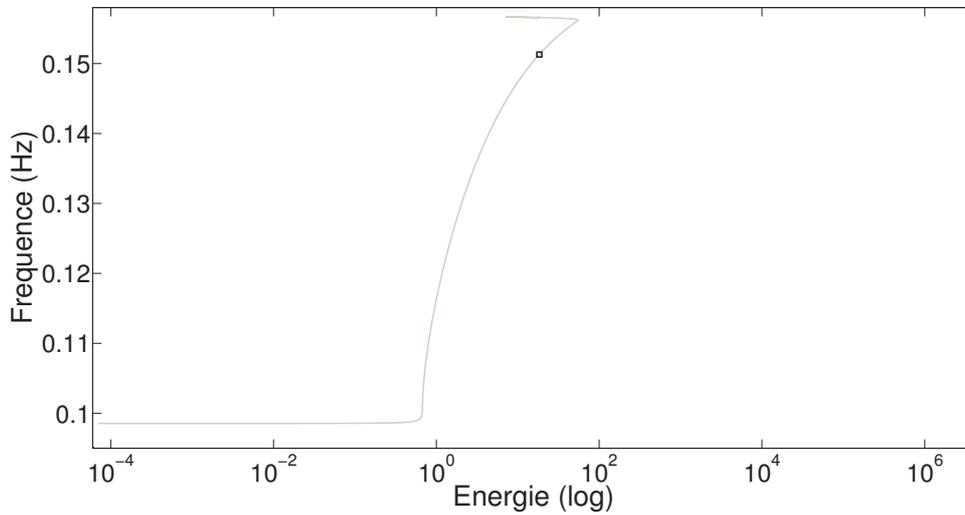


FIGURE 2.10 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = H_{nl} = 33$.

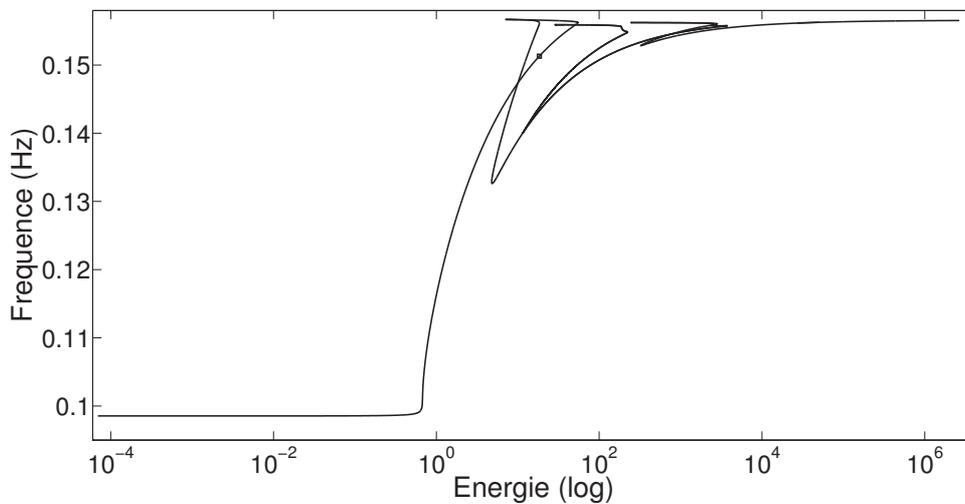


FIGURE 2.11 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 33$ et $H_{nl} = 151$.

A l'inverse, le cas $H_l = 33$ et $H_{nl} = 151$ (voir Fig. 2.11), aboutit à un résultat complet, le nombre d'harmoniques étant approprié à la physique que modélise chaque variable.

A noter, toutefois le peu d'influence sur la dynamique globale du MNL du nombre d'harmoniques. En effet, le nombre d'harmonique $H_l = 33$ est suffisamment élevé pour une bonne représentation de la dynamique. C'est pourquoi si l'on prend une solution périodique du MNL ($E = 18.4$, $f = 0.1513$), on retrouve les mêmes résultats. La Fig. 2.13 montre la superposition de l'évolution temporelle de la solution périodique pour les différents jeux de paramètres H_l

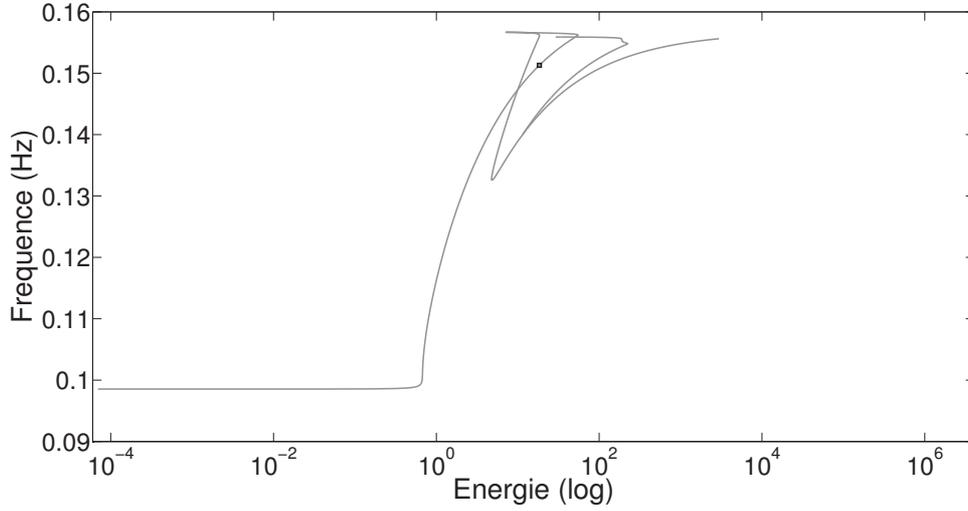


FIGURE 2.12 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = H_{nl} = 151$.

et H_{nl} , qui sont indistinguables.

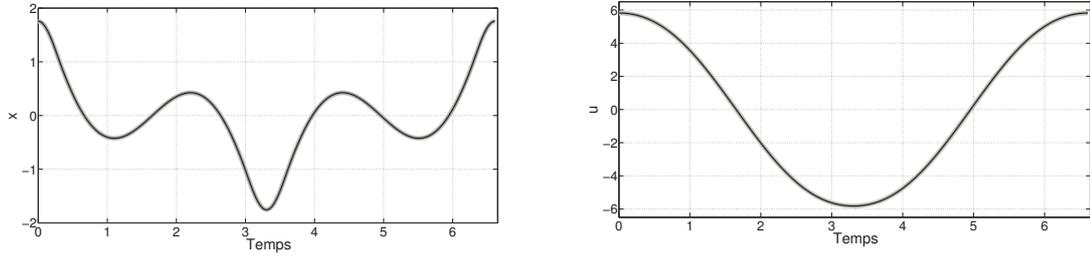


FIGURE 2.13 – Evolution temporelle de la première masse (à gauche) et de la seconde masse (à droite) d'une solution périodique issue du premier MNL ($E = 18.4$ et $f = 0.1513$) d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour différentes valeurs d'harmoniques. Pour $H_l = H_{nl} = 33$ (en gris clair), $H_l = 33$ et $H_{nl} = 151$ (en noir), et pour $H_l = H_{nl} = 151$ (en gris foncé).

2.4.4 Produit de convolution par l'AFT

Le système d'Eq.(2.47), peut maintenant être réécrit sous une forme plus simple, qui est la même que celle de la méthode EHMAN,

$$\mathbf{R}(\mathcal{S}) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\mathcal{S}) + \mathbf{Q}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 0 \quad (2.52)$$

avec une taille différente,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : \mathbb{R}^{n(2H_l+1)+(n_{nl}+n_z)(2H_{nl}+1)+4} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n(2H_l+1)+(n_{nl}+n_z)(2H_{nl}+1)+3} \\ \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbf{C} + \mathbf{L}(\mathcal{S}) + \mathbf{Q}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

où $\mathcal{S} = [U_0 U_{C1} \dots U_{CH_1} U_{S1} U_{SH_1} F_0^{nl} F_{C1}^{nl} \dots F_{CH_{nl}}^{nl} F_{S1}^{nl} F_{SH_{nl}}^{nl} Z_0 Z_{C1} \dots Z_{CH_{nl}} Z_{S1} Z_{SH_{nl}} \gamma_1 \gamma_2 \lambda \omega]$ est le vecteur inconnu regroupant tous les coefficients de Fourier, les nouvelles variables γ_1 et γ_2 , le coefficient de dissipation λ et la pulsation ω .

Les améliorations proposées ci-dessus ont consisté donc à réduire le nombre d'équations pour une solution semblable. En effet, les solutions ne sont pas totalement équivalente à cause de la dissociation d'harmoniques.

Ces améliorations sont malgré tout insuffisantes pour arriver à une méthode efficace, car le temps de calcul pour traiter les termes quadratiques est beaucoup trop prépondérant. En effet, dans le système d'Eq.(2.47), la fonction \mathcal{G}_q correspond au produit de convolution entre deux signaux temporels dans le domaine de Fourier et à un produit classique dans le domaine temporel. On retrouve ce produit dans la phase de calcul de la matrice jacobienne pour obtenir les termes $\mathcal{G}_q(e_i, \mathcal{X})$ et $\mathcal{G}_q(\mathcal{X}, e_i)$, ainsi que dans la construction des seconds membres des systèmes d'Eqs. (2.41) linéaires à résoudre lors de l'application de la MAN.

Pour effectuer ce produit, une méthode analytique est proposée dans [21]. Cette démarche paraît naturelle analytiquement mais devient très coûteuse lorsqu'on passe à la phase d'implémentation.

On propose ici une démarche moins directe mais qui a l'intérêt de réduire le temps de calcul. Celle-ci est décrite pour un cas général pour des vecteurs quelconques $X(t)$ et $Y(t)$ et leurs coefficients de Fourier associés \mathcal{X} et \mathcal{Y} . On se base sur la méthode Alternating Fourier Transform (AFT) qui consiste à transformer dans un premier temps les coefficients de Fourier \mathcal{X} et \mathcal{Y} en signaux temporels $X(t)$, $Y(t)$ à l'aide d'une inverse Fast Fourier Transform (iFFT).

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X}, \mathcal{Y} & \xrightarrow{\text{iFFT}} & X(t), Y(t) \\
 & & \downarrow \\
 \mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) & \xleftarrow{\text{FFT}} & G_q(X(t), Y(t))
 \end{array}$$

Ensuite, on effectue un produit classique $G_q(X(t), Y(t))$. Le gain en temps de calcul de cette approche se trouve ici, c'est-à-dire par la substitution de l'opération $\mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ par $G_q(X(t), Y(t))$ beaucoup moins coûteuse. Pour finir, on revient dans le domaine de Fourier en appliquant une Fast Fourier Transform (FFT) sur $G_q(X(t), Y(t))$ et on obtient le résultat recherché $\mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Cette manière d'effectuer le produit de convolution permet une réduction des temps de calcul sans diminuer la qualité de la solution puisqu'on peut prouver l'équivalence entre les deux méthodes (cf. Annexe A). En effet, la non-linéarité étant quadratique, par le biais du théorème de Shannon on peut déterminer a-priori l'expansion nécessaire des séries de Fourier par des coefficients nuls pour que l'opération soit exacte.

On peut évaluer le gain apporté par cette implémentation du produit de convolution qui utilise la FFT. Pour cela, on propose de comparer les temps de calcul, sur la même machine, entre la méthode analytique proposé en annexe de [21] et la méthode AFT dont le principe est expliqué en détail, dans l'Annexe A.

Soit deux séries de Fourier dont les coefficients et la pulsation ω sont choisis aléatoirement,

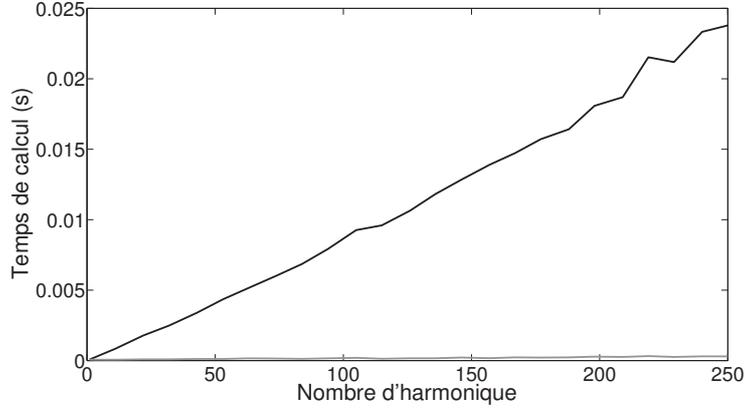


FIGURE 2.14 – Comparaison du temps de calcul en fonction du nombre d’harmoniques entre la technique analytique (en noir) et la technique AFT (en gris).

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \sum_{k=1}^H X_{Ck} \cos(k\omega t) + X_{Sk} \sin(k\omega t) \\ Y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^H Y_{Ck} \cos(k\omega t) + Y_{Sk} \sin(k\omega t) \end{cases} \quad (2.54)$$

On cherche à déterminer les coefficients de

$$\begin{aligned} Z(t) &= X(t)Y(t) \\ &= Z_0 + \sum_{k=1}^H Z_{Ck} \cos(k\omega t) + Z_{Sk} \sin(k\omega t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

La Fig. 2.14 représente les temps de calcul en fonction du nombre d’harmoniques obtenu à l’aide de la méthode classique (en noir) et de la méthode AFT (en gris).

On voit que la méthode AFT est très peu influencée par le nombre d’harmoniques contrairement à la méthode analytique. On a donc introduit ici une méthode qui permet d’accélérer l’algorithme sans perte de robustesse puisque les deux méthodes sont équivalentes (cf. Annexe A).

2.4.5 Calcul optimal de la matrice jacobienne

L’accélération proposée ci-dessus permet un gain non-négligeable lors du calcul de la matrice jacobienne, qui on le rappelle s’écrit,

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{S}}(\mathcal{S}_0)e_i = \mathbf{L}(e_i) + \mathbf{Q}(e_i, \mathcal{S}_0) + \mathbf{Q}(\mathcal{S}_0, e_i) \quad (2.56)$$

où e_i est le vecteur de la base canonique. Toutefois, le fait de ne pas tenir compte du fait que les termes e_i sont connus d’avance amène à des opérations inutiles, en terme algorithmique.

Dans [50], il est proposé d’améliorer ce point par une écriture sous forme tensorielle, qui aboutit d’un point de vue informatique à des matrices “tri-dimensionnelles” (dans MATLAB)

ou encore si on fait une réécriture judicieuse, à des matrices classiques mais de très grande taille. Le format morse du stockage de ces matrices permet de passer outre les problèmes de mémoire, mais la manipulation de ce type d'objet devient rapidement difficile lorsqu'on implémente la méthode dans des logiciels industriels aux structures de données moins souples, mais plus efficaces, que celles de logiciels comme MATLAB. De plus, dans notre cas où le nombre d'équations à résoudre est élevé, il est nécessaire de prendre en compte le temps de calcul de ces matrices "tri-dimensionnelles". En effet, il est nécessaire de calculer $(n(2H_l + 1) + (n_{nl} + n_z)(2H_{nl} + 1))$ matrices de taille $(n(2H_l + 1) + (n_{nl} + n_z)(2H_{nl} + 1))^2$. Le gain apporté lors de la phase de calcul de l'algorithme ne compense pas le temps de pré-traitement.

On propose une méthode différente qui tient compte du contexte d'étude, c'est-à-dire, qu'on recherche à résoudre le système d'Eq. (2.47) composé majoritairement de termes linéaires. On subdivise ce système d'équations en sous-systèmes,

$$0 = \mathbf{R}_1(V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}U_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_0^{nl} \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}U_{C1} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{C1}^{nl} \end{pmatrix} - \gamma_1 \mathbf{M}U_{C1} - \gamma_2 U_{S1} \\ \vdots \\ \mathbf{K}U_{CH_l} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{CH_l}^{nl} \end{pmatrix} - H_l^2 \gamma_1 \mathbf{M}U_{CH_l} - H_l \gamma_2 U_{SH_l} \\ \mathbf{K}U_{S1} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{S1}^{nl} \end{pmatrix} - \gamma_1 \mathbf{M}U_{S1} - \gamma_2 U_{C1} \\ \vdots \\ \mathbf{K}U_{SH_l} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{SH_l}^{nl} \end{pmatrix} - H_l^2 \gamma_1 \mathbf{M}U_{SH_l} - H_l \gamma_2 U_{CH_l} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$0 = \mathbf{R}_2(V_1, V_2, V_3) = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_l(\mathcal{X}) + \mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \quad (2.58)$$

$$0 = \mathbf{R}_3(V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} \gamma_1 - \omega^2 \\ \gamma_2 - \lambda \omega \\ \sum_{k=1}^{H_l} k \omega U_{S_k}^i \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

où $V_1 = [U_0 \ U_{C1} \ \cdots \ U_{CH_l} \ \cdots \ U_{S1} \ \cdots \ U_{SH_l}]^t$, $V_2 = [F_0^{nl} \ F_{C1}^{nl} \ \cdots \ F_{CH_l}^{nl} \ \cdots \ F_{S1}^{nl} \ \cdots \ F_{SH_l}^{nl} \ Z_0 \ Z_{C1} \ \cdots \ Z_{CH_l} \ \cdots \ Z_{S1} \ \cdots \ Z_{SH_l}]^t$ et $V_3 = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \lambda \ \omega]^t$.

La matrice jacobienne est ainsi subdivisée en sous-matrices, chacune étant obtenue séparément. En effet, des propriétés intrinsèques à ces sous-matrices permettent d'accélérer le calcul, on trouvera plus de détails dans l'Annexe B.

2.4.6 Conclusion

On a proposé et mis en oeuvre ici des améliorations de la méthode, principalement du point de vue de son implémentation, en ne passant pas au premier ordre, en introduisant l'AFT

pour le traitement des termes quadratiques et par une optimisation du calcul de la matrice jacobienne. On a aussi introduit la dissociation de l'ordre de troncature des séries de Fourier qui permet de réduire le nombre d'équations et d'améliorer la robustesse de la continuation.

A noter que la combinaison de la dissociation du nombre d'harmoniques, ainsi que l'utilisation de l'AFT pour le traitement des termes quadratiques permet un rapprochement avec la méthode classique AFT-HBM [36, 44, 57, 78].

Pour visualiser l'influence sur la performance des différentes améliorations, on compare le temps de calcul pour un pas de la MAN en partant de la méthode classique et en ajoutant une à une les améliorations proposées dans la Section 2.4. Ainsi, on part de la méthode classique EHMAN ; la deuxième méthode consiste à supprimer le passage au premier ordre ; la troisième consiste à ajouter en plus le traitement des termes quadratiques par l'AFT ; la quatrième méthode ajoute le calcul optimal de la matrice jacobienne (cf. Annexe B) qui correspond à la Fast-EHMAN. En effet, dans cette comparaison on prendra toujours $H_l = H_{nl}$, pour que la comparaison se fasse sur des modèles identiques. La Fig 2.15 compare les temps de calcul,

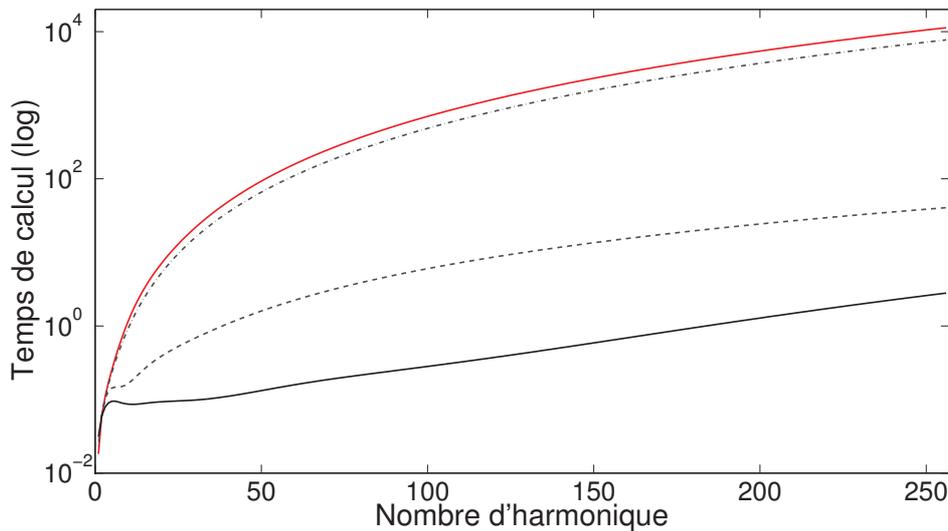


FIGURE 2.15 – Comparaison des temps de calcul (pour 1 pas de la MAN) en fonction du nombre d'harmoniques, entre la EHMAN (en rouge), la EHMAN+écriture au second ordre (en gris pointillé), la EHMAN+écriture au second ordre+AFT (en gris discontinu) et la Fast-EHMAN (en noir).

pour différentes valeurs de H_l , des quatre méthodes. La comparaison montre l'apport essentiel de l'AFT et du calcul optimal de la matrice jacobienne. L'influence du passage au second ordre est moins visible car le système est de petite taille ($n = 2$).

La méthode EHMAN était destinée à des systèmes de petite taille à vocation académique, dont les non-linéarités devaient être suffisamment régulières pour qu'un nombre d'harmoniques faible soit suffisant pour les représenter. Par ces améliorations on est aujourd'hui capable de résoudre des systèmes de grande taille et de traiter des non-linéarités de contact qui nécessitent un nombre d'harmoniques élevé.

La méthode a tout de même un point faible non-négligeable, le passage sous forme quadratique. En effet, cette étape impose des équations et des inconnues supplémentaires qui augmentent la taille du système à résoudre et donc augmente le temps de calcul. Toutefois, à l'aide

des différentes améliorations qui ont été apportées à la méthode, celle-ci possède maintenant un temps de calcul raisonnable tout en gardant son point fort, c'est-à-dire sa robustesse.

En effet, la MAN possède deux avantages majeurs par rapport aux méthodes classiques de continuation. Elle détermine continûment les branches calculées sous la forme de fonctions analytiques et non pas de manière discrète. De plus, on peut déterminer la présence de bifurcations et gérer de manière robuste leurs passages en utilisant des propriétés intrinsèques à ces fonctions analytiques, c'est-à-dire sans coût supplémentaire, tel que décrit précédemment. Ces deux avantages sont extrêmement importants pour le calcul des modes non-linéaires où la difficulté réside principalement par la présence abondante de bifurcations, dues principalement aux résonances internes (intersection entre modes non-linéaires).

On peut donc dire que la méthode Fast-EHMAN est une méthode robuste et raisonnablement performante pour le calcul des modes non-linéaires.

2.5 Discussion sur le choix et l'influence des paramètres

Nous verrons ici, l'influence des différents paramètres introduits par la méthode ainsi que des conseils sur leurs choix. On commencera par le paramètre de régularisation introduit dans la section 2.2.4 et on terminera sur les ordres de la troncature des harmoniques H_l et H_{nl} introduit dans la section 2.4.3.

2.5.1 Le paramètre de régularisation des forces de contact

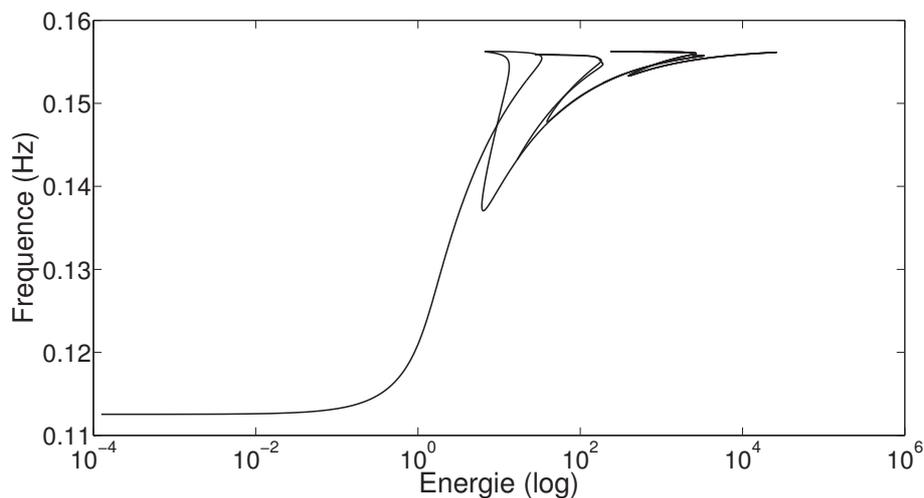


FIGURE 2.16 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $\eta = 0.5$.

On décrit ici l'influence du paramètre de régularisation η des forces de contact sur les modes non-linéaires d'un système à deux degrés de liberté et d'un modèle de barre en traction/compression dont on retrouvera la description respectivement dans la Section 3.1 et la Section 3.2.

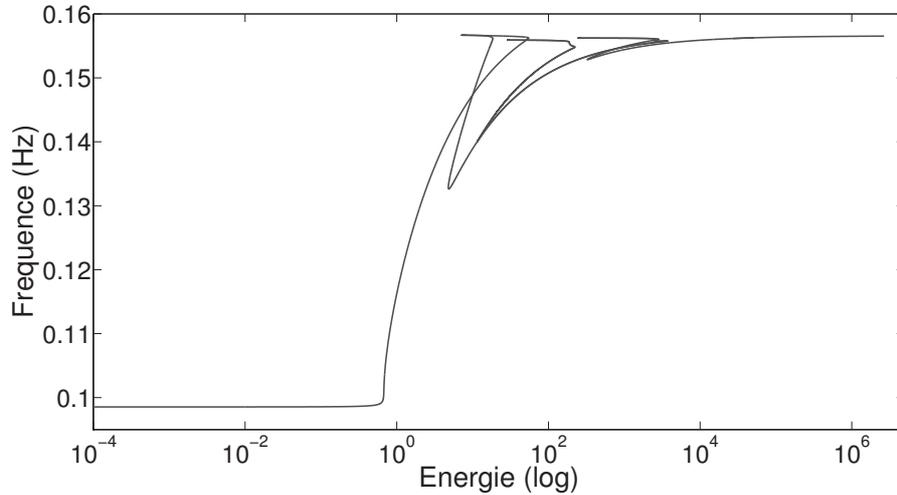


FIGURE 2.17 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $\eta = 5 \times 10^{-3}$.

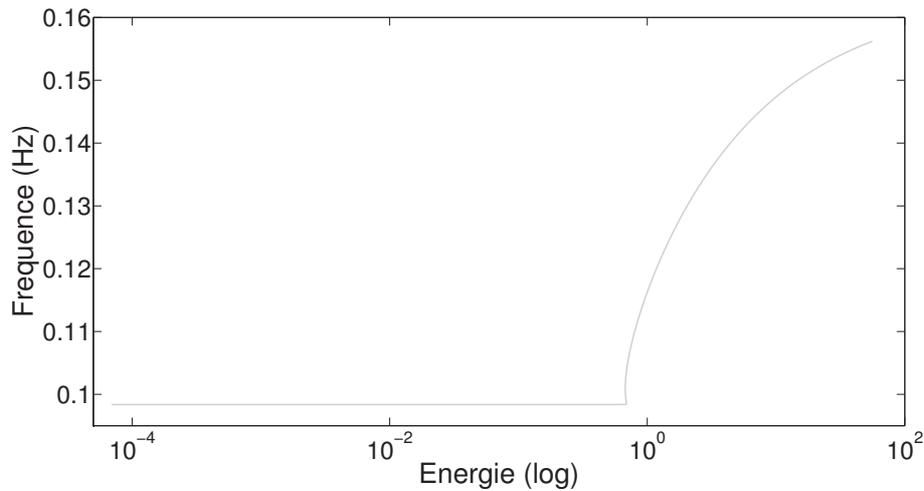


FIGURE 2.18 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $\eta = 5 \times 10^{-5}$.

Les Fig. (2.16, 2.17, 2.18) présentent les résultats obtenus pour le système à 2 ddls pour $\eta \in \{0.5, 5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-5}\}$ sous la forme d'un graphique fréquence-énergie (FEP). La valeur de η correspond à la valeur adimensionnée et donc $\eta \ll 1$.

On voit ainsi que l'influence de la valeur du paramètre de régularisation η se trouve dans la partie linéaire (c'est-à-dire à une amplitude suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de contact) du MNL. En effet pour une valeur proche de 1 la courbe est très éloignée de la fréquence propre du système linéaire sous-jacent, alors que sur la partie non-linéaire les trois courbes sont relativement proches. Ceci s'explique par le fait que la régularisation peut être

décrite comme un ajout de raideur dans la phase sans contact, il est donc logique de retrouver un décalage dans la fréquence.

Une autre observation est l'influence de η sur le bon déroulement de la continuation. En effet, on voit qu'avec les paramètres $\eta = 0.5$ et $\eta = 5 \times 10^{-5}$, l'algorithme échoue dans la continuation. Une valeur trop grande dénature la loi de comportement régularisée de la butée, et une valeur trop petite pose des problèmes numériques.

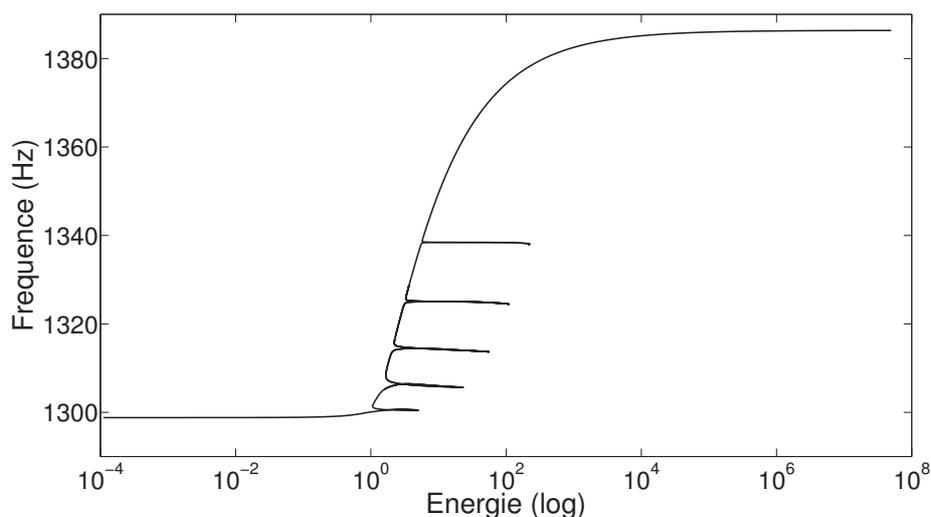


FIGURE 2.19 – FEP du premier MNL d'une barre en traction avec une non-linéarité de contact unilatéral pour $\eta = 2.5 \times 10^{-3}$.

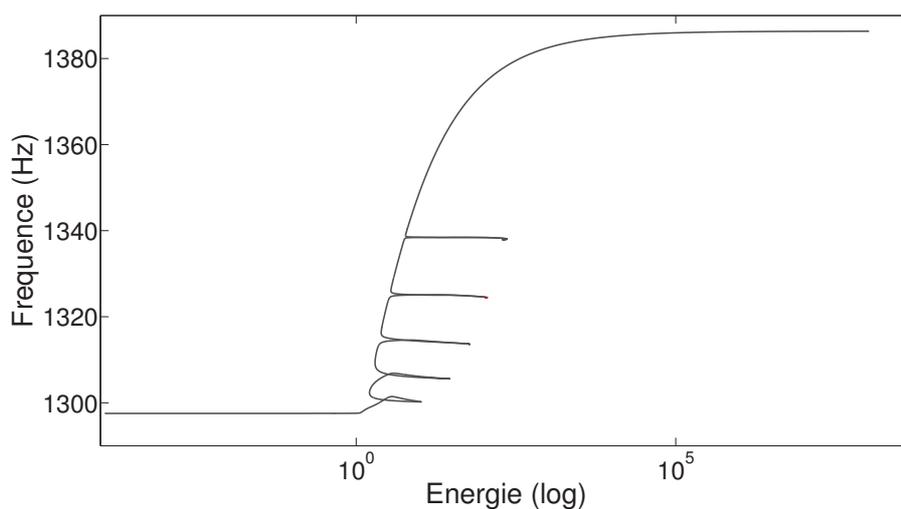


FIGURE 2.20 – FEP du premier MNL d'une barre en traction avec une non-linéarité de contact unilatéral pour $\eta = 2.5 \times 10^{-5}$.

Les Fig. (2.19, 2.20, 2.21) présentent les résultats obtenus pour le modèle de barre pour $\eta \in$

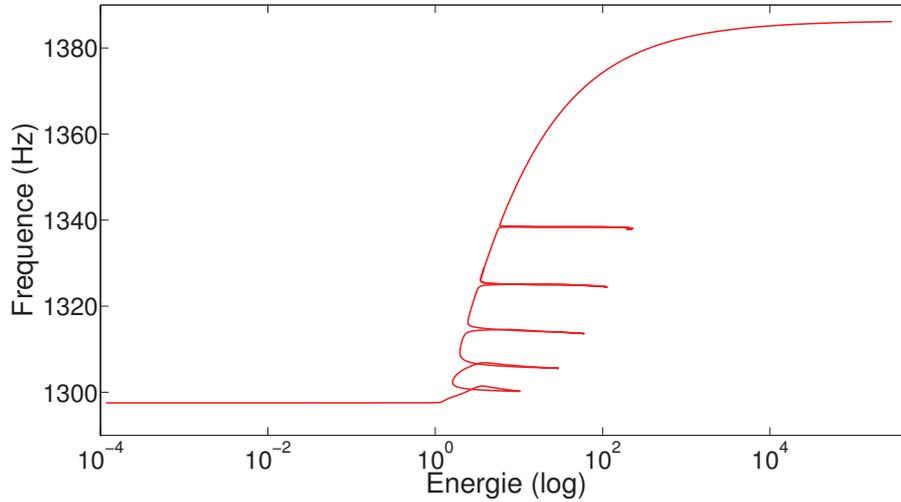


FIGURE 2.21 – FEP du premier MNL d'une barre en traction avec une non-linéarité de contact unilatéral pour $\eta = 2.5 \times 10^{-7}$.

$\{2.5 \times 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-7}\}$ sous la forme d'un graphique fréquence-énergie (FEP). De la même manière, l'influence de η pour des valeurs relativement petites est très faible à faible énergie et s'estompe quasiment à un niveau d'énergie élevé. On remarque, toutefois, que pour une non-linéarité de contact unilatéral, la valeur de η n'influence pas le bon déroulement de la continuation.

Le choix de η dépend donc de la non-linéarité (contact bilatéral, contact unilatéral). Les valeurs choisies ici sont de bonnes indications, mais une phase d'expérimentation numérique semble nécessaire pour trouver un compromis entre des résultats qui approximent comme il faut la solution et un algorithme de continuation qui n'échoue pas.

A noter que pour le contact annulaire (cf. Section 2.2.4), la relation étant basée sur celle du contact unilatéral, on peut considérer que l'influence de η diffère peu de ce qu'on a pu voir avec le modèle de barre.

2.5.2 Les ordres de troncatures de la MBH

L'ordre de troncature H_l

Le choix du paramètre H_l est essentiel, il influe sur la qualité de la solution que l'on recherche mais aussi sur le nombre de résonances internes qui seront visibles. La branche principale du mode non-linéaire est très peu influencée par le nombre d'harmoniques, ainsi si on compare $H_l = 1$ et $H_l = 33$ pour le système à 2 DDLs (cf. Section 3.1 pour plus de détails), les deux courbes fréquence-énergie de la Fig. 2.22 sont relativement proches si l'on fait abstraction des résonances internes. Par contre si l'on choisit une solution périodique ($E = 41$ et $f = 0.147$) de la courbe de la Fig. 2.22 et que l'on compare l'évolution temporelle de la Fig. 2.23, il est évident qu'une seule harmonique est insuffisante pour décrire comme il faut la solution.

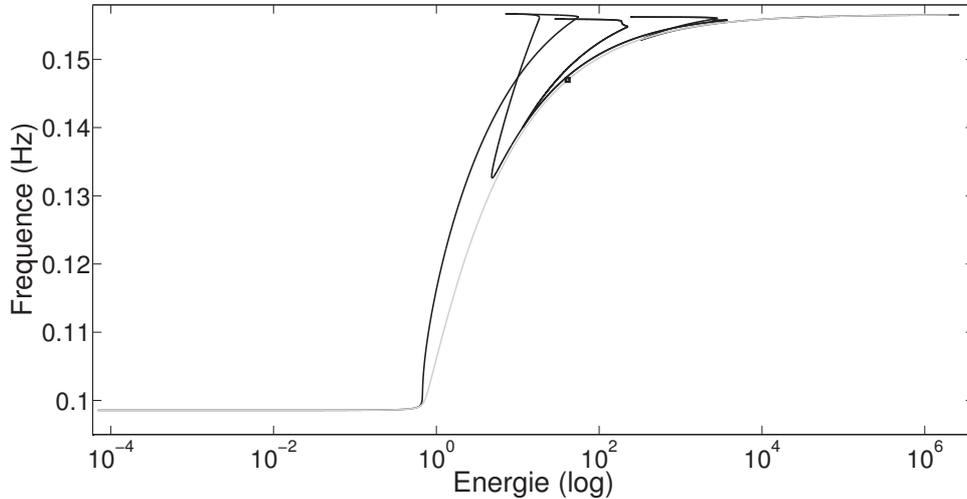


FIGURE 2.22 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 1$ (en gris) et pour $H_l = 33$ (en noir).

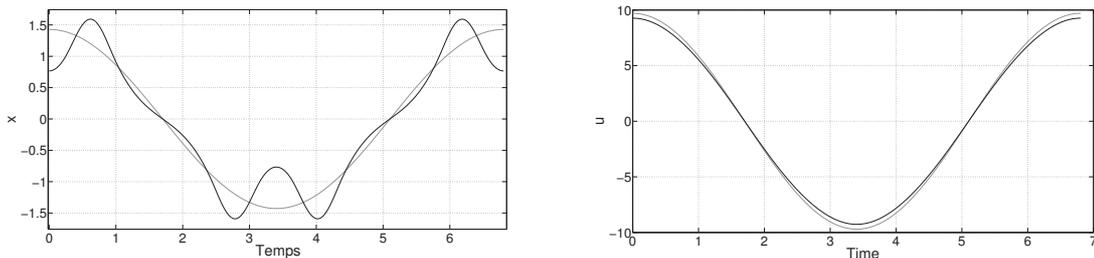


FIGURE 2.23 – Evolution temporelle, de la première masse (à gauche) et de la seconde masse (à droite) d'une solution périodique issue du premier MNL ($E = 41$ et $f = 0.147$) d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 1$ (en gris) et pour $H_l = 33$ (en noir).

L'absence des résonances internes s'explique facilement. Dans la Fig. 2.22, on observe les résonances $3 : 1$, $4 : 1$ et $5 : 1$, pour le jeu de paramètres choisi, ce qui signifie qu'il existe des solutions périodiques telles que l'harmonique prépondérante n'est plus la première mais respectivement la troisième, la quatrième et la cinquième. Aussi le fait d'avoir choisi un nombre d'harmoniques $H_l = 1$ empêche l'apparition de ces harmoniques.

A la vue de ces observations le premier réflexe serait de prendre $H_l = 7$, ainsi on pourrait voir l'apparition des résonances tout en évitant un coût trop important en terme de temps de calcul. En effet, la plus grande résonance interne étant $5 : 1$, prendre $H_l > 5$ est nécessaire pour qu'il y ait une possibilité de la voir apparaître.

La Fig. 2.24 représente le FEP pour $H_l = 7$, où l'on voit apparaître les résonances internes $3 : 1$ et $4 : 1$ mais pas la résonance $5 : 1$ car une bifurcation empêche d'obtenir le MNL dans sa totalité. Le choix de H_l est donc lié aux résonances internes qu'on veut voir apparaître, mais aussi à la possibilité ou non de passer une bifurcation.

Une autre implication dans le choix de H_l est son effet filtre. Le MNL est défini sur

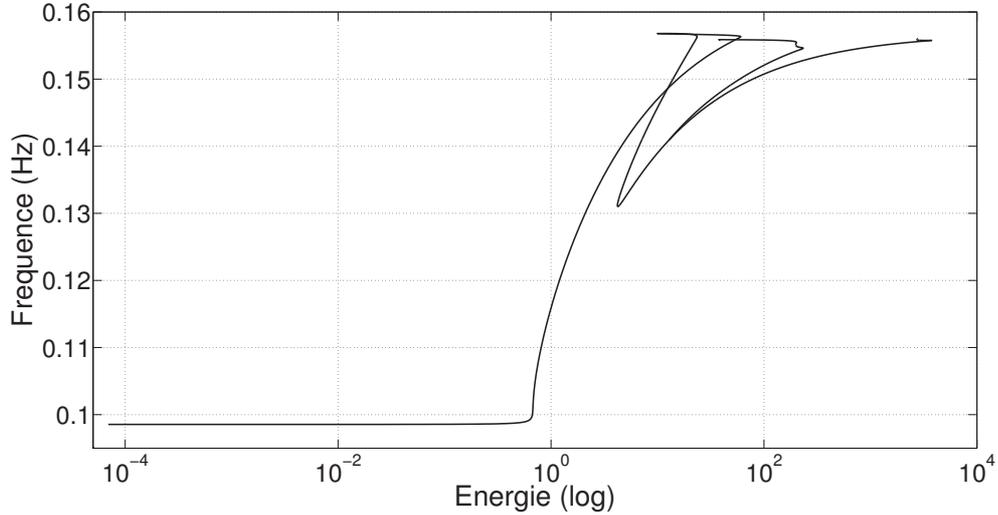


FIGURE 2.24 – FEP du premier MNL d'un système à 2 ddl avec une non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 7$.

une plage de fréquence qu'on peut nommer, par exemple, $[f_{min}, f_{max}]$. Par conséquent, le choix de H_l implique qu'on ne pourra voir apparaître des résonances internes qu'avec les MNLs compris dans la plage de fréquence $[f_{min}, H_l f_{max}]$, et que les MNLs compris entre $[H_l f_{max}, +\infty[$ seront filtrés.

L'ordre de troncature H_{nl}

Le choix du nombre d'harmoniques H_{nl} est primordial pour avoir des résultats de bonne qualité (cf. Section 2.4.3). Prendre un nombre trop élevé va augmenter le nombre d'inconnues du système ce qui va induire des temps de calcul trop élevés. Comme précisé plus haut, la méthode Fast-EHMAN est à rapprocher de la méthode AFT-HBM. Celle-ci préconise durant la phase AFT d'étendre par des coefficients nuls le nombre d'harmoniques de la série de Fourier correspondant à la force non-linéaire, ceci permet d'obtenir une discrétisation plus fine lorsqu'on passe dans le domaine temporel. Ainsi, l'opération dans le domaine temporel est effectuée de manière plus précise et permet, lorsqu'on revient dans le domaine de Fourier, d'avoir une meilleure approximation des coefficients de Fourier recherchés.

Pour ce type de méthode, il est conseillé d'utiliser une discrétisation de l'ordre de 10 fois le nombre d'harmoniques. Si l'on suit cette recommandation dans notre cas, cela revient à prendre $H_{nl} = 10 H_l$. Ce chiffre n'est qu'une recommandation et peut être modifié (à la hausse comme à la baisse) dans la pratique, pour passer par exemple certaines bifurcations.

2.6 Implémentation de la méthode

La Fast-EHMAN a été développée dans un premier temps en se basant sur la méthode EHMAN implémenté dans MANLAB, les améliorations ont ainsi permis d'accélérer les temps de calcul. L'utilisation d'un langage interprété pose des limites en terme de vitesse d'exécution

et gestion de la mémoire. Or le but étant l'utilisation de la méthode pour des modèles éléments finis de grande taille, il est nécessaire d'utiliser un langage compilé. C'est pourquoi la méthode Fast-EHMAN a été également implémentée dans *Code_Aster*. De plus, celui-ci nous donne accès à un ensemble de modélisation éléments finis et permet sa capitalisation dans un environnement informatique sous assurance qualité.

2.6.1 MANLAB

MANLAB est un logiciel libre développé durant la thèse d'Arquier [5], il consiste en une implémentation de la MAN dans l'environnement MATLAB, sous la forme d'une interface graphique interactive qui permet le pilotage en direct de la continuation. Ce logiciel donne

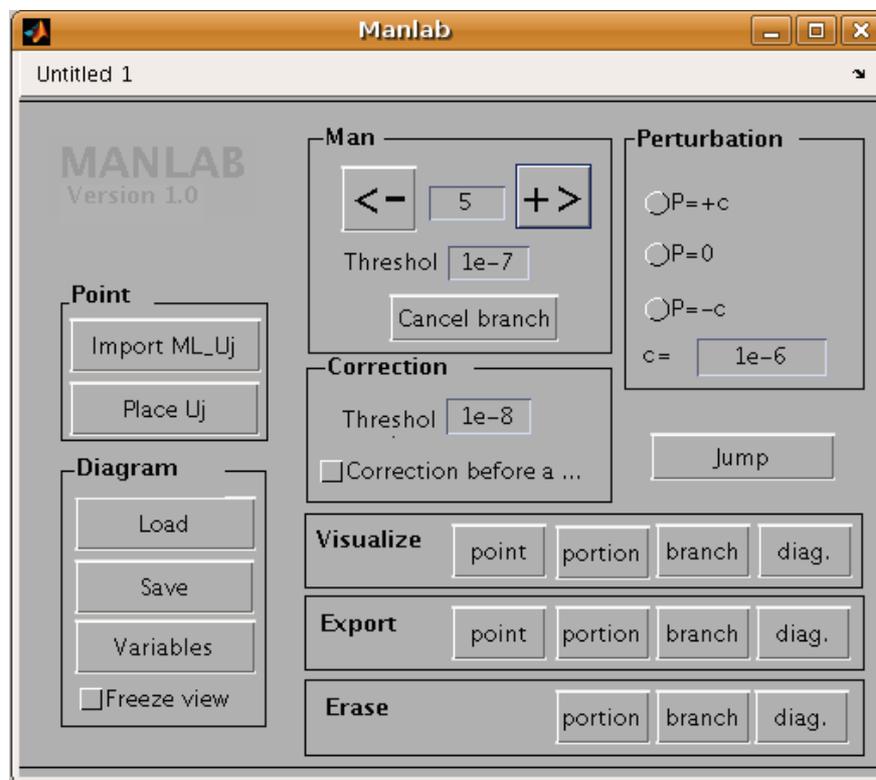


FIGURE 2.25 – Interface graphique de MANLAB.

la possibilité de calculer des familles de solutions périodiques de systèmes d'équations différentielles, par l'implémentation de la méthode appelée EHMAN (voir Section 2.3). Celui-ci se veut généraliste et ne se limite pas aux systèmes classiques issus de la mécanique. Cette volonté a un coût en terme en temps de calcul comme on l'a vu précédemment. Toutefois, le logiciel reste idéal pour traiter des systèmes de petite taille qui nécessite un nombre d'harmoniques faible, notamment grâce à son interface graphique et une robustesse éprouvée [18].

Des améliorations pour remédier à ces problèmes de temps de calcul ont été proposées dans [50], et développées dans la version 2.0 du logiciel.

Afin de rester dans le cadre généraliste du logiciel, on a choisit d'insérer dans la version 3.0 du logiciel, deux améliorations de la Fast-EHMAN. La première étant l'AFT pour le traitement

des termes quadratiques, la seconde est la dissociation des harmoniques. Ces deux évolutions n'étant pas liées à une spécificité du système traité, le cadre généraliste est ainsi conservé.

2.6.2 Code_Aster

Code_Aster est un logiciel libre de simulation numérique en mécanique des structures développé au sein d'EDF R&D. Il permet de modéliser le comportement de structures par la méthode des éléments finis. Plusieurs types d'analyses sont disponibles : statique linéaire et non-linéaire, transitoires de systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires, calcul des modes linéaires, etc. Le code est dédié aux applications industrielles d'EDF et ses partenaires, en gardant toutefois un caractère générique.

Dans cette lignée, on a introduit un nouvel opérateur appelé *MODE_NON_LINE*, destiné au calcul de modes non-linéaires de structures élastiques linéaires dotées des non-linéarités de contact. L'opérateur fait appel à la méthode Fast-EHMAN et permet ainsi notamment avec l'aide d'une implémentation en Fortran 90 (langage compilé), de traiter des structures industrielles (cf. Section 4).

Le calcul d'un mode non-linéaire dans *Code_Aster* peut se diviser en trois étapes,

- (i) Le pré-traitement qui consiste à la construction du modèle que l'on veut traiter : lecture du maillage, définition du modèle, des conditions aux limites, construction des matrices, calcul des modes linéaires. Cette étape est mise en oeuvre à l'aide des opérateurs présents initialement dans le code. A noter que le modèle initial nécessite d'être élastique linéaire puisque la non-linéarité est définie dans l'opérateur *MODE_NON_LINE*.
- (ii) Calcul du mode non-linéaire : choix du mode utilisé comme condition initiale, choix des paramètres numériques, et surtout la définition des non-linéarités, c'est-à-dire, choix du type de contact, tel que défini plus haut, choix des noeuds de contact, et enfin choix des paramètres physiques (raideur, jeu) et numériques (régularisation). Les résultats sont sauvegardés sous la forme d'un tableau récapitulatif, chaque ligne correspondant à une solution périodique avec les informations suivantes : l'énergie, la fréquence, présence d'une bifurcation ou non, le numéro de l'harmonique dominante. La solution périodique est sauvegardée dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire avec des colonnes de vecteurs de la manière suivante

$$U_0, U_{C1}, \dots, U_{CH_i}, U_{S1}, \dots, U_{SH_i}$$

- (iii) Post-traitement des résultats : un opérateur pour le calcul de la stabilité des solutions périodiques a été créé, appelé *CALC_STABILITE*. Celui-ci permet d'ajouter une information sur la stabilité des solutions périodiques (stable ou instable). Un autre opérateur a été créé pour permettre d'extraire une solution périodique dans le domaine temporel, qu'on a appelé *REST_MODE_NONL*.

Ces étapes seront détaillées par la suite.

Pré-traitement

La première étape consiste à construire le modèle que l'on veut étudier. On peut alors profiter de l'étendue des possibilités du logiciel que ce soit pour la construction de modèle de type poutre, plaque, coque, 1D, 2D, 3D. On peut se rapporter à la documentation pour la construction du modèle. La seconde étape est de calculer les modes linéaires du système, avec

MODE_ITER_SIMULT [14] qui permettront d’avoir une idée des déformées et de la répartition fréquentielle du modèle. Mais aussi de construire ce qui va être la condition initiale nécessaire au lancement de l’opérateur de calcul de mode non-linéaire *MODE_NON_LINE*.

Calcul d’un MNL avec *MODE_NON_LINE*

L’opérateur est accessible à l’utilisation avec la syntaxe suivante :

```
MNL=MODE_NON_LINE (ETAT_INIT=( _F (
    MODE_LINE=modes, NUME_ORDRE = 1,
    DIR_EVOLUTION=-1) ), ,
    MATR_RIGI=k,
    MATR_MASS=m,
    RESOLUTION=_F (METHODE='EHMAN',
        NB_HARM_LINE=h_l, NB_HARM_NONL=h_nl,
        NB_PAS_MAN=ndiscr, NB_BRANCHE=nbranch,
        PREC_MAN=1.E-09, NB_ORDRE_MAN=15,
        PREC_NEWTON=1.E-08, ITER_NEWTON_MAXI=10, ),
    CHOC=( _F (OBSTACLE='BI_PLAN',
        NOEUD='N2',
        NOM_CMP='DX',
        JEU=g,
        RIGI_NOR=alpha,
        PARA_REGUL=eta,
        ),
    ),
),
```

On décrit ici les mots-clés de l’opérateur :

- (i) *ETAT_INIT* : on donne comme argument la structure de données sauvegardant les modes linéaires, appelé dans l’exemple *modes*, et le numéro d’ordre, c’est-à-dire le choix d’un mode calculé.
- (ii) *MATR_RIGI* et *MATR_MASS* : les matrices de masse et de rigidité, appelées *m* et *k* dans l’exemple, construites au préalable avec les opérateurs disponibles dans le logiciel.
- (iii) *RESOLUTION* : paramètres numériques de la méthode Fast-EHMAN.
 - (a) *NB_HARM_LINE* : Le nombre d’harmoniques pour les variables de déplacement, appelé H_l dans la section 2.4.
 - (b) *NB_HARM_NONL* : Le nombre d’harmoniques pour les variables de forces de contact, appelé H_{nl} dans la section 2.4.
 - (c) Les autres mots-clés correspondent aux paramètres de la méthode asymptotique numérique (voir section 2.3.3).
- (iv) *CHOC* : Définition de la non-linéarité de choc.
 - (a) *OBSTACLE* : choix du type de non-linéarité entre unilatéral, bilatéral (voir section 2.2.4) et annulaire étant respectivement *PLAN*, *BI_PLAN* et *CERCLE*.
 - (b) *NOEUD* : nom du noeud auquel s’applique la non-linéarité.
 - (c) *JEU* : distance qui sépare le noeud de l’obstacle, ou rayon de l’anneau.
 - (d) *RIGI_NOR* : raideur de butée appelée α dans la section 2.2.4.
 - (d) *PARA_REGUL* : paramètre de régularisation appelé η dans la section 2.2.4.

Le résultat est sous la forme suivante, à titre d’exemple,

<i>NUME_ORDRE</i>	<i>FREQUENCE</i>	<i>ENERGIE</i>	<i>NB_COEF_FOURIER</i>
1	5.043	6.1859×10^{-10}	27
2	5.02995	7.54457×10^{-10}	27

<i>NOM_SD</i>	<i>TYPE_OBJET</i>	<i>NOM_OBJET</i>	<i>CARA_CHOC</i>
_0000002	<i>MODE_MECA</i>	<i>COEF_FOURIER</i>	_0000001
_0000003	<i>MODE_MECA</i>	<i>COEF_FOURIER</i>	_0000001

<i>HARM_MAX</i>	<i>BIFURCATION</i>	<i>STABILITE</i>	<i>NUME_REPRISE</i>
1	NON	NON_EVALUE	0
1	NON	NON_EVALUE	0

TABLE 2.1 – Exemple de structure de donnée de résultat de *MODE_NON_LINE*.

Les colonnes du tableau sont décrites ci-dessous.

- (i) *NUME_ORDRE* : numérotation des solutions périodiques calculées et moyen d'accès unique à chacune d'entre elles.
- (ii) *ENERGIE* et *FREQUENCE* : paramètres physiques d'une solution périodique qui permettent à l'utilisateur de construire facilement des graphiques fréquence-énergie.
- (iii) *NB_COEF_FOURIER* : nombre de coefficients de Fourier, i.e. $2H_l + 1$.
- (iv) *NOM_SD*, *TYPE_OBJET* et *NOM_OBJET* : nom, type et contenu des champs de la structure de données qui contient la solution périodique.
- (v) *CARA_CHOC* : nom de la structure de données qui stocke les informations sur les caractéristiques des non-linéarités de choc définies dans le mot-clé choc de *MODE_NON_LINE*.
- (vi) *HARM_MAX* : numéro de la plus grande harmonique.
- (vii) *BIFURCATION* : NON ou OUI selon si la solution périodique définit un point de bifurcation de l'algorithme de continuation, en utilisant la technique décrite dans la section 2.3.4.
- (viii) *STABILITE* : indique si la solution périodique est stable ou non, ou si elle n'a pas encore été évaluée.
- (ix) *NUME_REPRISE* : identifie si la solution périodique est issue d'un premier calcul de branche ou d'une reprise.

Post-traitement

On rappelle que le langage des fichiers de commande du logiciel *CODE_ASTER* est le langage python. Par conséquent, il est possible de construire tous les outils de post-traitement que l'on veut, en utilisant des bibliothèques tels que numpy, scipy ou matplotlib.

Toutefois deux opérateurs ont été créés, afin de faciliter certains post-traitements difficiles à faire en utilisant les outils cités précédemment. Le premier opérateur, appelé *REST_MODE_NONL*, permet de passer du domaine de Fourier au domaine temporel en transformant les coefficients de Fourier d'une solution périodique en un signal temporel. Ainsi en utilisant des outils de visualisation, du type *SALOME*, on peut visualiser le mouvement périodique.

```
SOL=REST_MODE_NONL(MODE_NON_LINE = MNL,
                    TYPE_RESU = 'DYNA_TRANS',
                    NUME_ORDRE = 1,
                    NB_INST = 512,
                    ),
```

Le second opérateur, nommé *CALC_STABILITE*, permet de remplir par oui ou non le champ de la colonne *STABILITE* de la structure de donnée de *MODE_NON_LINE*.

```
MNL = CALC_STABILITE(reuse=MNL,
                    MODE_NON_LINE=MNL,
                    FILTRE=_F(NUME_ORDRE=1, ),
                    TOLERANCE=1.E-2,
                    SCHEMA_TEMPS=_F(NB_INST=1000,
                                    SCHEMA='NEWMARK', ),
                    )
```

On utilise la méthode de Newmark décrite pour effectuer l'intégration temporelle du système linéarisé obtenu par la théorie de Floquet, voir la section 1.6 pour plus de détails. On détaille ici les mots-clés,

- (i) *FILTRE* : permet d'effectuer un filtre sur les solutions périodiques pour lesquelles on souhaite déterminer la stabilité.
- (ii) *TOLERANCE* : marge d'erreur sur le critère des valeurs propres de la matrice de monodromie qui détermine la stabilité ou non de la solution périodique.
- (iii) *SCHEMA_TEMPS* : permet de définir l'algorithme d'intégration temporelle et ses paramètres numériques pour la résolution sur une période du système linéarisé décrit dans la section 1.6.
 - (i) *SCHEMA* : actuellement, un seul choix est possible, l'algorithme de Newmark.
 - (ii) *NB_INST* : discrétisation choisie pour le schéma de Newmark.

2.7 Conclusions

On a présenté ici une méthode pour le calcul de solutions périodiques, qu'on a appelée Fast-EHMAN. Après une description du cadre mécanique que l'on souhaite étudier, on propose une description détaillée d'une méthode appelée EHMAN, qui est la combinaison de la méthode d'équilibrage harmonique (EH) et de la méthode asymptotique numérique (MAN). Celle-ci présente toutefois des limites en terme de performances. En effet, les modèles que l'on souhaite étudier sont des modèles éléments finis, donc avec un nombre de degrés de liberté relativement élevé, et une non-linéarité de type contact (unilatéral, bilatéral et annulaire), donc nécessitant un grand nombre d'harmoniques.

On a montré ensuite qu'avec certaines améliorations (résolution au second ordre, dissociation de l'ordre de troncature des harmoniques, utilisation de l'AFT et optimisation du calcul de la matrice jacobienne), on pouvait obtenir une méthode relativement performante pour traiter le type de systèmes que l'on souhaite étudier, d'où la dénomination Fast-EHMAN.

La méthode nécessite de donner des valeurs à un certain nombre de paramètres (paramètre de régularisation, ordres de troncature des harmoniques) dont on a pu voir l'influence sur les résultats et par conséquent les critères pour des choix relativement optimaux.

Enfin, ce travail se conclut par l'implémentation de la méthode Fast-EHMAN dans le logiciel MANLAB, où la méthode EHMAN a été implémentée en premier lieu, mais aussi dans un code de calcul industriel, *Code_Aster*.

On peut maintenant utiliser ces différents outils pour le calcul de familles de solutions périodiques, donc de modes non-linéaires de systèmes dynamiques avec des non-linéarités localisées à jeu. Par le biais de quelques exemples académiques, on proposera une méthodologie d'utilisation de la méthode Fast-EHMAN.

Chapitre 3

Etudes de modèles simplifiés de structures avec chocs

3.1 Un système linéaire par morceaux à deux degrés de liberté

Le système étudié ici a fait l'objet d'une soumission à la revue *Mechanical Systems and Signal Processing* retranscrit tel quel dans l'Annexe C.

3.1.1 Description du modèle

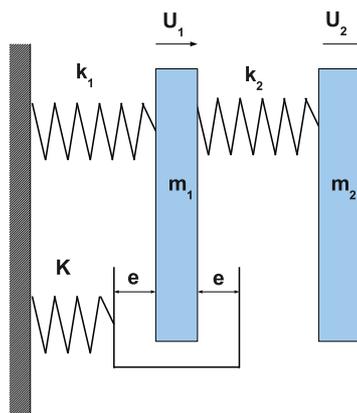


FIGURE 3.1 – Oscillateur à deux degrés de liberté avec une condition de contact bilatéral.

Le système étudié est représenté Fig. 3.1. Il est composé de deux masses m_1 et m_2 liées à deux ressorts de raideurs k_1 et k_2 . Le mouvement de la masse m_1 est limité par deux butées élastiques avec un ressort de raideur K et un jeu symétrique e . Les équations du mouvement

sont données par

$$\begin{cases} m_1 \ddot{U}_1(t) + k_1 U_1(t) + k_2 (U_1(t) - U_2(t)) + F(U_1(t)) & = 0 \\ m_2 \ddot{U}_2(t) + k_2 (U_2(t) - U_1(t)) & = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$F(U) = \begin{cases} K(U - e) & \text{si } e \leq U \\ 0 & \text{si } -e \leq U \leq e \\ K(U + e) & \text{si } U \leq -e \end{cases} \quad (3.2)$$

où U_i désigne le déplacement de la masse m_i (pour $i = 1, 2$) et F désigne la force de contact bilatéral. En utilisant les quantités adimensionnées suivantes, $x = \frac{U_1}{e}$, $u = \frac{U_2}{e}$, $\hat{f} = \frac{F}{k_1 e}$ et l'adimensionnement du temps $\tau = \omega t$ avec $\omega = \sqrt{k_1 m_1^{-1}}$, les Eq. (3.1)-(3.2) prennent la forme adimensionnée suivante

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) + \hat{f}(x(\tau)) & = 0 \\ \delta \ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

avec

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \alpha(x - 1) & \text{if } 1 \leq x \\ 0 & \text{if } -1 \leq x \leq 1 \\ \alpha(x + 1) & \text{if } x \leq -1 \end{cases} \quad (3.4)$$

où $\beta = \frac{k_2}{k_1}$, $\alpha = \frac{K}{k_1}$, $\delta = \frac{m_2}{m_1}$ et $(\dot{})$ signifie maintenant la dérivée temporelle par rapport au nouveau temps τ .

Les Eq. (3.3)-(3.4) caractérisant le modèle adimensionné ne dépendent plus que de trois paramètres (α, β, δ), le paramètre de jeu e étant réduit à 1 dans le modèle adimensionné. Les deux paramètres β et δ caractérisent le système linéaire en fonction des rapports des masses et des raideurs. α caractérise la non-linéarité en fonction du rapport de la raideur de butée à la raideur linéaire. Dans la pratique, α doit être choisi grand pour une bonne représentation de la butée.

On rappelle que pour le calcul des modes non-linéaires (MNLs) du système (3.3)-(3.4), à l'aide de la Fast-EHMAN, il est nécessaire de passer par une étape de régularisation de la force de contact \hat{f} , décrite dans la section 2.2.4. On notera f la force régularisée et η le paramètre de régularisation. Par conséquent, le système qu'on étudiera par la suite est le suivant,

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) + f(\tau) & = 0 \\ \delta \ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \\ f(\tau) - \eta x(\tau) - f(\tau)z(\tau) & = 0 \\ z(\tau) - \left(\frac{f(\tau)}{\alpha} - x(\tau)\right)^2 & = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

3.1.2 Notations et choix des paramètres

Les notations

Pour décrire le comportement des MNLs, il est utile d'introduire une notation pour différencier les modes linéaires des différents systèmes linéaires associés au système (3.3). Trois systèmes linéaires seront utiles :

(i) le système (3.6) qui caractérise les mouvements sans impact,

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) & = 0 \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

(ii) le système (3.7) (respectivement (3.8)) qui caractérise les mouvements durant les impacts ayant lieu sur la butée de droite (respectivement de gauche),

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) + \alpha(x(\tau) - 1) & = 0 \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) + \alpha(x(\tau) + 1) & = 0 \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

(iii) et enfin le système (3.9) qui correspond au système linéaire sous-jacent au voisinage du point d'équilibre associé à l'Eq. (3.5).

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + (1 + \eta)x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) & = 0 \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Ces systèmes linéaires Eq. (3.6), (3.9), (3.7) et (3.8) diffèrent par la raideur associée à la composante x qui est égale respectivement à 1 , $1 + \eta$, $1 + \alpha$ et $1 + \alpha$. Par la suite, les modes linéaires seront dénommés respectivement L_p^0 , L_p^η and L_p^α , où l'indice p indique le premier ($p = 1$) ou le second ($p = 2$) mode linéaire. A noter que les modes linéaires de l'Eq. (3.8) coïncident avec ceux de l'Eq. (3.7) et par conséquent aucune distinction entre les deux ne sera faite.

Enfin, on introduit le mode linéaire, qu'on note L_1^∞ , du système linéaire tel que la première masse est au repos ($x(\tau) = 0$).

$$\delta\ddot{u}(\tau) + \beta u(\tau) = 0 \quad (3.10)$$

Pour le calcul des deux premiers MNLs du système d'Eqs. (3.5), on utilise la Fast-EHMAN décrite dans la section précédente. On initialise l'algorithme en utilisant les modes propres du système linéaire sous-jacent décrit par le système d'Eqs. (3.6). On rappelle qu'on note L_1^0 le premier mode correspondant à un mouvement en phase et L_2^0 le second mode correspondant à un mouvement en opposition de phase.

Des notations sont également nécessaires pour différencier les branches des MNLs. La classification choisie ici est issue de [63, 64], et permet de regrouper des orbites périodiques selon certaines caractéristiques :

- (i) $S_{nmpq\pm}$ correspond aux orbites symétriques par rapport au temps sur une période. n et m désignent le nombre de "demi-onde" sur une demi-période pour respectivement les variables x et u . Les indices p et q correspondent respectivement au nombre d'impacts pour le premier et le second quart de période. Le signe \pm indique si la courbe (ligne modale) dans l'espace des configurations (x, u) passe par l'origine avec une pente positive ou négative.
- (ii) U_{nmpq} correspond aux orbites non-symétriques avec la même signification pour les indices n , m , p et q que le précédent. Toutefois il n'y a pas de signe pour indiquer une pente car les lignes modales dans ce cas sont des courbes de Lissajous.

Le choix des paramètres

On choisit arbitrairement les valeurs suivantes pour les paramètres physiques : $\delta = 1$, $\beta = 1$ et $\alpha = 30$. Pour les paramètres numériques de la Fast-EHMAN, après quelques expérimentations numériques, les valeurs suivantes ont été retenues : $\eta = 0.005$, $H_l = 33$ and $H_{nl} = 151$. Ces valeurs ne sont donc pas optimales, mais correspondent à un compromis entre résultats satisfaisants et bon déroulement de la continuation.

3.1.3 Le MNL en opposition de phase

Le MNL en opposition de phase est défini à niveau d'énergie faible par le mode linéaire L_2^0 où les composantes de la ligne modale associée ont des signes opposés. Le comportement du MNL en opposition de phase est représenté Fig. 3.2 en terme de « Frequency-Energy Plot (FEP) ». Les lignes modales des orbites périodiques sont également à l'intérieur de la vignette Fig. 3.2 dans l'espace de configuration (x, u) . Les graduations des axes ("tick mark") sont positionnées telles qu'il existe une distance égale à 1 (i.e. égale au jeu) entre chacune d'entre elles, pour les directions x et u , de plus deux lignes verticales représentent la position du jeu dans la direction x . A faible énergie, la branche débute avec les mouvements nommés S1100- (branche noire) et coïncide avec le mode linéaire L_2^η qui reste très proche du mode linéaire L_2^0 . Au delà du seuil d'énergie $E = 1,79865$ correspondant à l'énergie de l'orbite périodique du système linéaire (3.6) suivant le mode en opposition de phase d'amplitude maximale $x = 1$, les mouvements nommés S1110- (un impact par demi-période) prennent place et persistent lorsque le niveau d'énergie augmente (branche grise foncé) jusqu'à tendre asymptotiquement vers le mode linéaire L_2^α . Sur cette portion de branche, toutes les orbites sont caractérisées par un seul impact par butée par période.

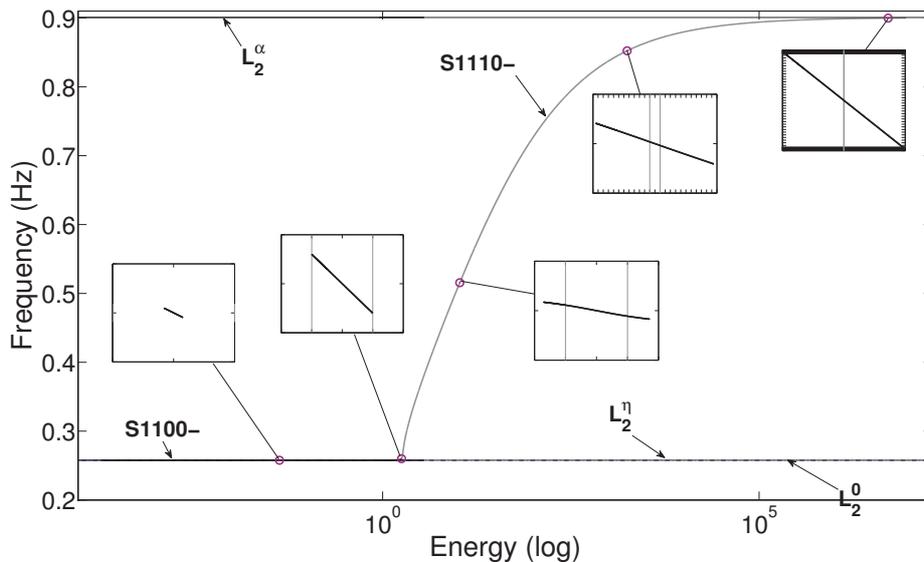


FIGURE 3.2 – FEP du MNL en opposition de phase (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

Les résultats ci-dessus ont été obtenus par la méthode Fast-EHMAN exposée dans la Section 2. L'absence d'impacts multiples sur les butées permet d'utiliser la méthode analytique proposée dans l'annexe C pour obtenir le second mode non-linéaire. Cette méthode consiste à déterminer les orbites périodiques du système non régularisé (3.5) par raccordement des branches de solutions du système linéaire caractérisant les portions de l'orbite sans impact et du système linéaire caractérisant les portions de l'orbite avec impact. La symétrie des butées réduisant le nombre d'inconnues rend le calcul plus facile. Par construction, la méthode ne permet pas le calcul des orbites où le nombre d'impacts par période et par butée est supérieur à 1. Cette méthode peut être utilisée pour valider la méthode Fast-EHMAN, la validation incluant la phase de régularisation.

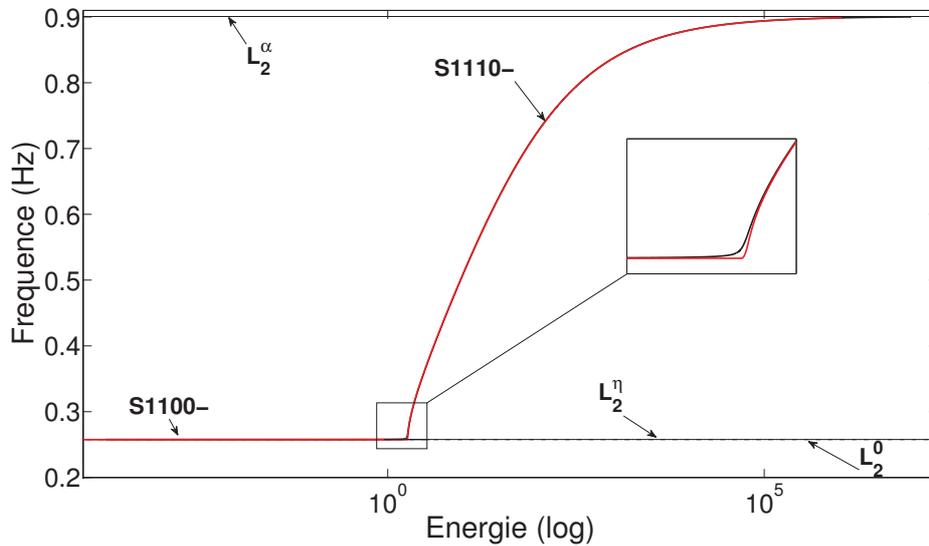


FIGURE 3.3 – Comparaison des FEP du MNL en opposition de phase obtenus avec la méthode analytique (rouge) et la Fast-EHMAN (en noir). (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

Les résultats obtenus avec les deux méthodes sont reportés Fig. 3.3. On observe une très bonne adéquation, perturbée à faible niveau d'énergie par l'influence de la régularisation. En effet, à faible niveau d'énergie, le MNL calculé par le méthode directe coïncide avec L_2^0 alors que le MNL calculé par Fast-EHMAN coïncide avec L_2^η , montrant un léger écart. A noter aussi que le changement de courbure au voisinage de $E = 1.8$ diffère entre les deux cas, la méthode directe montrant une discontinuité de pente (voir zoom Fig. 3.3).

3.1.4 Le MNL en phase

Le MNL en phase est défini à faible niveau d'énergie par le mode linéaire L_1^η où les composantes de la ligne modale associée ont le même signe. Le comportement du MNL en phase est représenté par la Fig. 3.4 en terme de FEP. De la même manière que pour le MNL en opposition de phase, la branche débute à niveau d'énergie faible avec des mouvements S1100+ (branche noire). Cette portion de branche coïncide avec le mode linéaire L_1^η qui reste très proche du mode linéaire L_1^0 . A niveau d'énergie élevée, les mouvements nommés S1110+ prennent place

et ce type de mouvement persiste lorsque le niveau d'énergie augmente (branche grise foncé) jusqu'à atteindre le mode linéaire L_1^α .

De plus, et contrairement au MNL en opposition de phase, une dynamique plus riche est observée entre les deux états limites caractérisés par des mouvements périodiques avec un nombre d'impacts qui augmente et la présence de résonances internes. Les résonances internes correspondent à une interaction du MNL en phase avec le MNL en opposition de phase. Trois résonances internes (3 : 1, 4 : 1, 5 : 1) ont été identifiées (voir les branches (S3121+, S3121-), U4122 et (S5132+, S5132-)) pour le jeu de paramètres choisi. Il est intéressant de noter l'absence de la résonance interne 2 : 1 due à une configuration asymétrique des ressorts du modèle (voir par exemple le système [77]), mais aussi l'absence de résonances internes $k : 1$ pour $k > 5$, due à la valeur du paramètre de raideur α du système (voir Section 3.1.5).

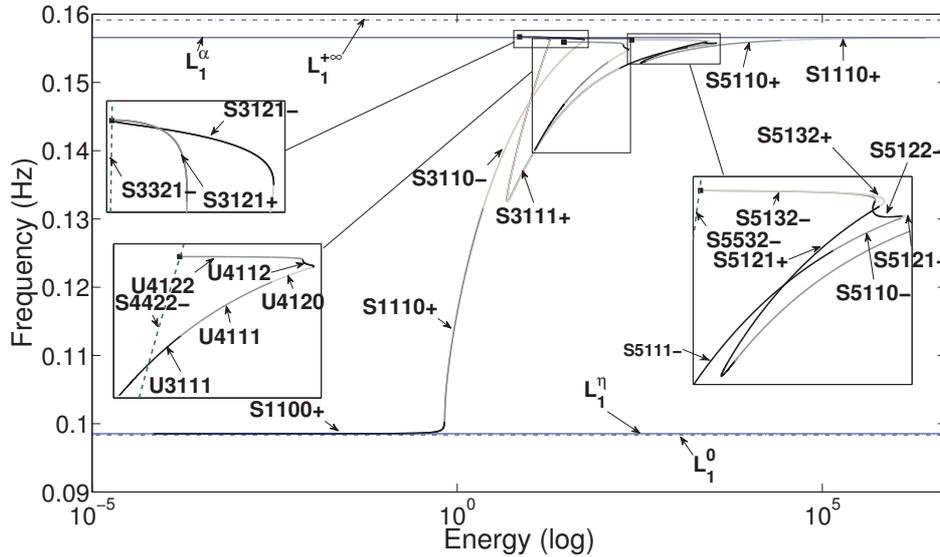


FIGURE 3.4 – FEP du MNL en phase (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

Pour comprendre le comportement de ce MNL, des zooms de différentes portions des branches ont été reportés Fig. 3.5-3.12 incluant des orbites périodiques représentatives dans l'espace de configuration (x, u) et une étude de stabilité.

Les portions de branches S1100+ (branche noire), S1110+ (branche gris foncé) et S3110- (branche gris clair) sont représentées Fig. 3.5. Ces trois branches caractérisent des mouvements périodiques stables. Comme mentionné précédemment, la branche S1100+ coïncide avec le mode linéaire L_1^η qui se termine lorsque l'énergie (ou l'amplitude) est suffisamment grande pour que la première masse (composante x) atteigne la butée. A partir de là, on passe de lignes modales droites dans l'espace de configuration à des lignes modales incurvées. Dès lors, l'amplitude de la deuxième masse (composante u) augmente contrairement à l'amplitude de la première masse (composante x) limité par les butées. Ce comportement implique un changement de signe de la pente de la ligne modale (au voisinage de l'origine), et l'apparition d'une oscillation supplémentaire, d'où la transition entre S1110+ et S3110-. Cette nouvelle oscillation augmente avec le niveau d'énergie et atteint elle aussi les butées. Un nouvel impact se produit et correspond au passage de S3110- à S3121-. Ces résultats ont été comparés avec les résultats obtenus par la méthode directe, donnant ici encore une très bonne adéquation.

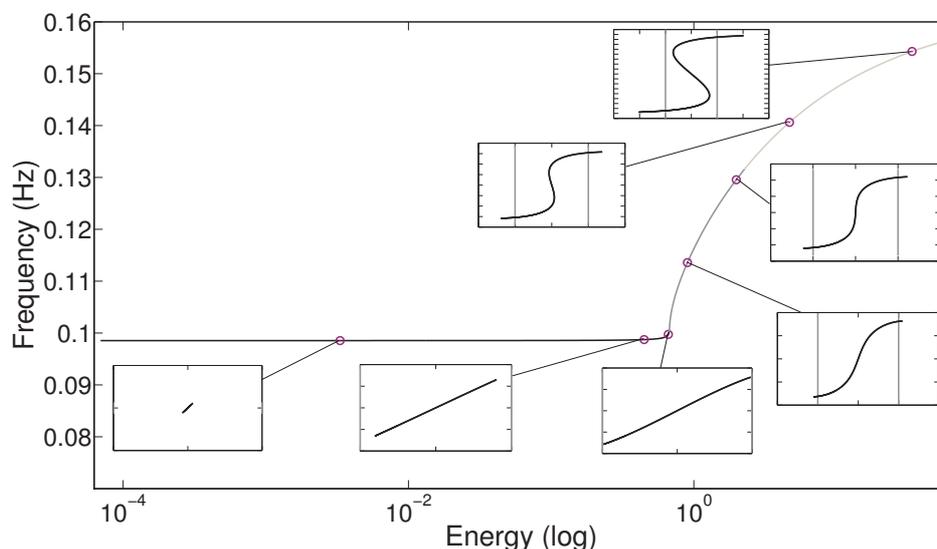


FIGURE 3.5 – Zoom sur des branches particulières (S1100+, S1110+, S3110–) du MNL en phase, accompagné (voir les vignettes) d’orbites périodiques représentées dans l’espace des configurations (lignes modales). (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

Les portions de branches S3121– (branche gris foncé) et S3121+ (branche gris clair) où intervient la première résonance interne sont représentées Fig. 3.6. En suivant la branche S3121–, le niveau d’énergie décroît et seule l’amplitude de la seconde masse est prépondérante. Ce type de mouvement persiste jusqu’à ce que la ligne modale incurvée tende vers une ligne modale droite où un mouvement en opposition de phase (sur trois périodes au lieu d’une) est atteint (voir carré noir), correspondant à la résonance interne 3 : 1, d’où l’intersection avec la portion de branche S3321–. A ce point, une transition entre S3121– et S3121+ se produit, correspondant à un changement de signe de la pente de la ligne modale. Le niveau d’énergie augmente, la branche S3121+ disparaît lorsque le nombre d’impact diminue et une transition entre les branches S3121+ et S3111+ se produit. A noter la présence de solutions instables dans cette zone.

Les portions de branche S3111+ et S5111– sont représentées Fig. 3.7, et la transition entre les deux se déroule au point indiqué par le (+). Ce point correspond à une augmentation des oscillations de x . Un autre phénomène important est l’apparition d’un point de bifurcation (voir le cercle noir), obtenu par la méthode décrite dans [20] et résumé à la section 2.3.4. Ce point de bifurcation ne correspond pas à une résonance interne mais conduit à une nouvelle branche de solutions périodiques. Cette branche secondaire est associée à une résonance interne 4 : 1 (voir Fig. 3.8-3.9).

Les portions de branche U3111, U4111 et U4120 (respectivement U4121 et U4122) sont représentées Fig. 3.8 (respectivement Fig. 3.9). Les mouvements ici ne sont plus symétriques, mais les mêmes phénomènes observés auparavant tels que le nombre d’oscillations et la variation du nombre d’impacts sont ici toujours visibles, mais seulement sur une demi-période. Après la transition entre les deux branches (voir le (+) noir, Fig. 3.9), le mouvement tend alors vers une ligne modale qui correspond à un point de bifurcation (voir carré noir) entre le MNL en phase et la branche S1110– du MNL en opposition de phase (représenté sur quatre périodes donnant un mouvement S4422–), correspondant à une résonance interne 4 : 1. On peut égale-

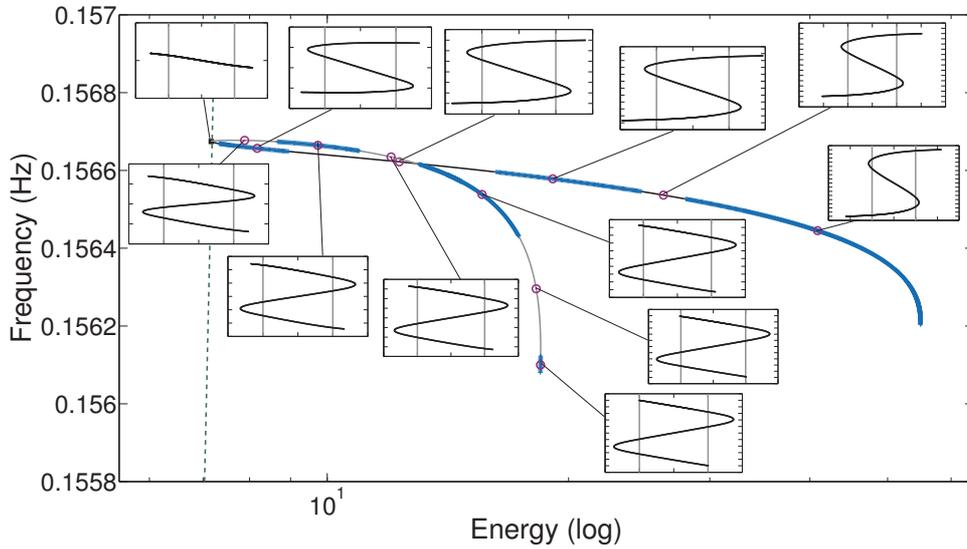


FIGURE 3.6 – Zoom sur des branches particulières (S3121–, S3121+) du MNL en phase, accompagné (voir les vignettes) d’orbites périodiques représentées dans l’espace des configurations (lignes modales). Les instabilités sont représentées par un (+) bleu foncé (multiplicateur de Floquet plus grand que +1). (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

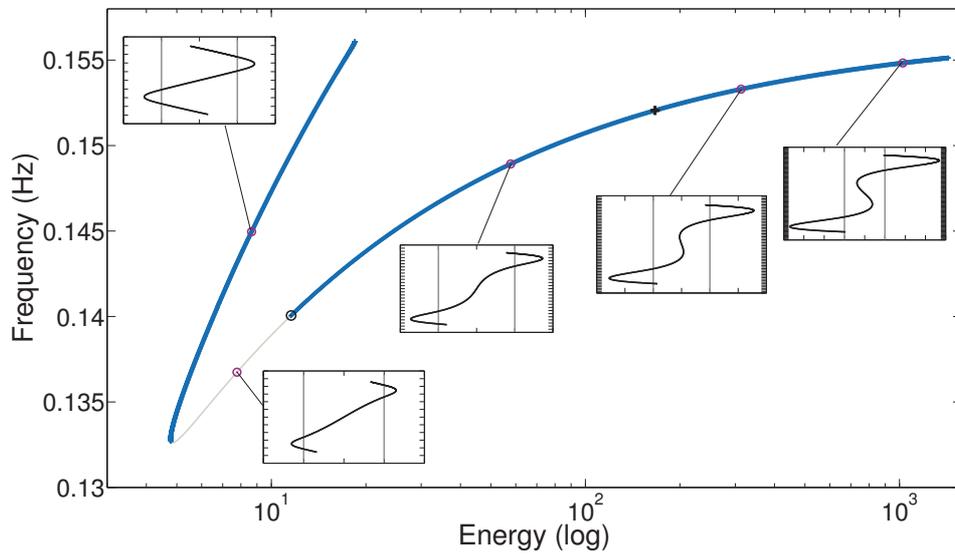


FIGURE 3.7 – Zoom sur des branches particulières (S3111+, S5111–) du MNL en phase, accompagné (voir les vignettes) d’orbites périodiques représentées dans l’espace des configurations (lignes modales). Les instabilités sont représentés par un (+) bleu foncé (multiplicateur de Floquet plus grand que +1). Le marqueur (+) noir indique le changement de branche. (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

ment observer que pour cette branche des zones d’instabilité existent (avec un multiplicateur

de Floquet plus grand que +1).

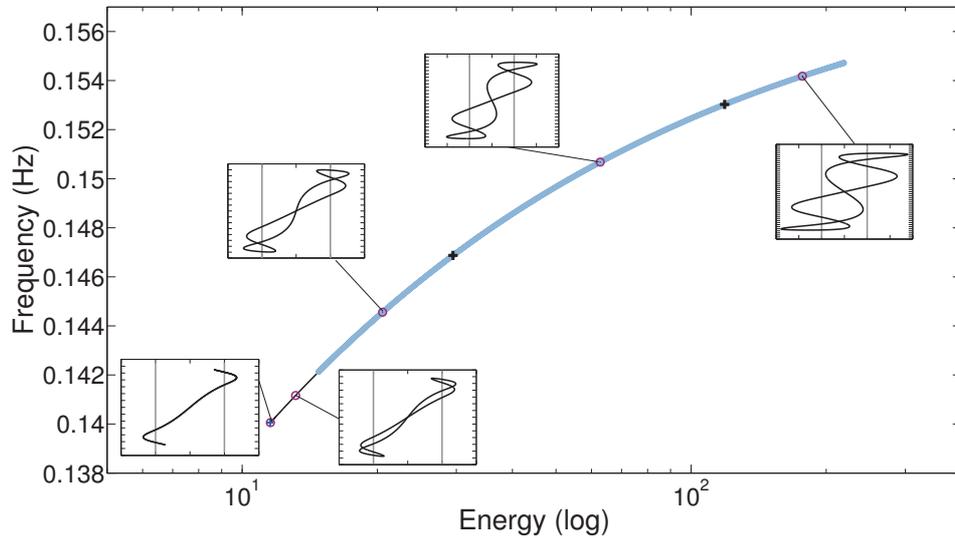


FIGURE 3.8 – Zoom sur des branches particulières (U3111, U4111, U4120) du MNL en phase, accompagné (voir les vignettes) d’orbites périodiques représentées dans l’espace des configurations (lignes modales). Les instabilités sont représentées par un (o) bleu clair (multiplicateur de Floquet plus petit que -1). Le marqueur (+) noir indique le changement de branche. (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

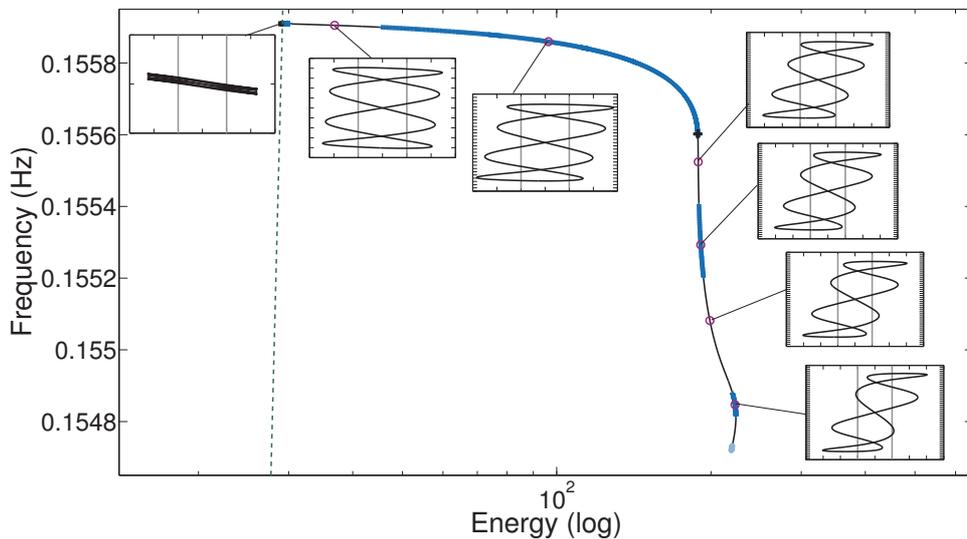


FIGURE 3.9 – Zoom sur des branches particulières (U4121, U4122) du MNL en phase, accompagné (voir les vignettes) d’orbites périodiques représentées dans l’espace des configurations (lignes modales). Les instabilités sont représentées par un (o) bleu clair (multiplicateur de Floquet plus petit que -1) et par un (+) bleu foncé (multiplicateur de Floquet plus grand que $+1$). Le marqueur (+) noir indique le changement de branche. (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

Les portions de branche S5110–, S5121– et S5122–, qui correspondent cette fois-ci à des mouvements symétriques, sont représentées Fig. 3.10. Des oscillations apparaissent durant la première et la seconde demi-période et la première masse (composante x) atteint la butée et par conséquent augmente le nombre d’impacts (transition entre S5110– et S5121–, et entre S5121– et S5122–) sans changer le nombre de « demi-ondes ». Dès lors, aucune résonance interne n’apparaît ici. Le nombre d’impacts nécessite d’être égale à cinq pour voir apparaître des résonances internes, ce qui se produit à la fin de la branche S5122–.

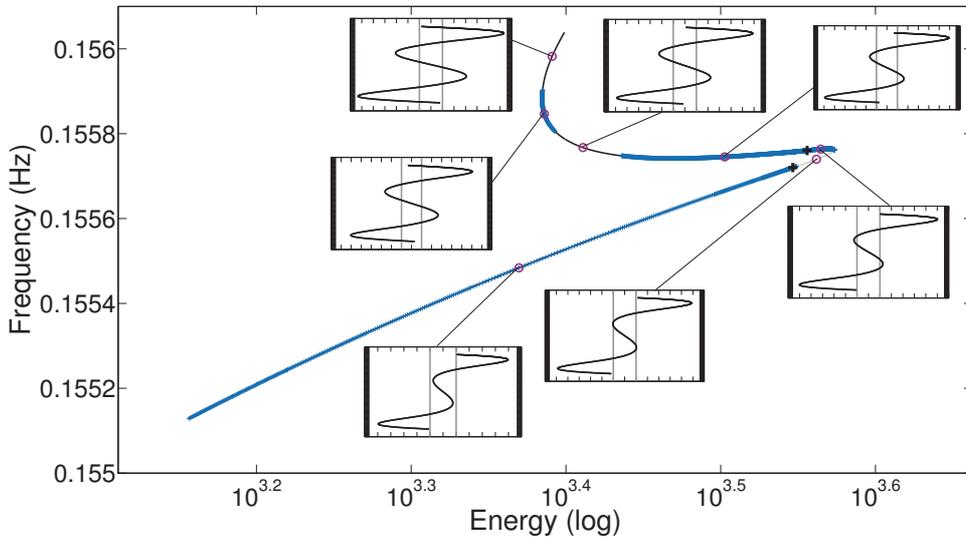


FIGURE 3.10 – Zoom sur des branches particulières (S5110–, S5121–, S5122–) du FEP du MNL en phase, certaines orbites périodiques sont représentées par une ligne modale (voir les encadrées). Les instabilités sont représentées par un (+) bleu foncé (multiplicateur de Floquet plus grand que +1). Le marqueur (+) noir indique le changement de branche. (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_t = 33$, $H_{nl} = 151$).

Une portion de la branche où la résonance interne 5 : 1 apparaît (branches S5132– et S5132+) est représentée Fig. 3.11. Ces deux branches, dans le graphique FEP, sont presque identiques, c’est pourquoi on les représente séparément. Comme observé pour la résonance interne 3 : 1, un point de bifurcation entre le MNL en phase et la branche S1110– du MNL en opposition de phase (représenté sur cinq périodes, donnant un mouvement issu de S5532–) est atteint. A ce point une transition entre les branches S5132– et S5132+ provoque un changement de signe de la pente de la ligne modale.

Pour finir, la dernière partie du FEP est représentée Fig. 3.12. Le même phénomène observé sur la branche S3111+ est observé ici : le nombre d’impacts décroît, mais au lieu de l’apparition d’une oscillation lorsque l’énergie croît (ce qui implique l’apparition de nouveaux impacts), ici, l’amplitude de la seconde masse augmente et les impacts disparaissent. Les mouvements périodiques obtenus sont alors proches du mode linéaire L_1^α .

Il est à noter que le contenu fréquentiel du MNL en phase peut être à certain moment plus grand que $\omega_{L_1^\alpha}$ (voir Fig. 3.6), mais reste toujours inférieur à la valeur limite donnée par $\omega_{L_1^\infty}$ (voir Fig. 3.4).

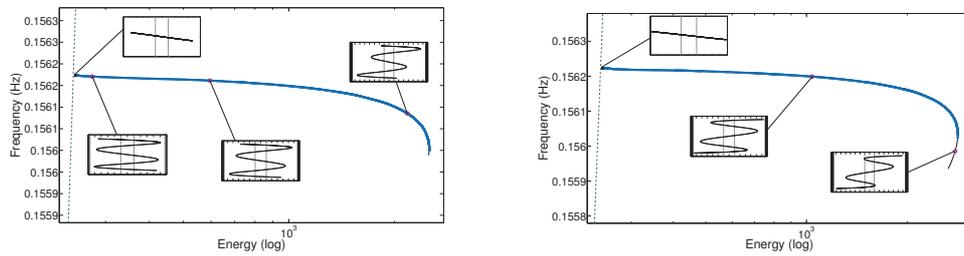


FIGURE 3.11 – Zoom sur des branches particulières (S5132– à gauche, S5132+ à droite) du MNL en phase, accompagné (voir les vignettes) d’orbites périodiques représentées dans l’espace des configurations (lignes modales). Les instabilités sont représentées par un (+) bleu foncé (multiplicateur de Floquet plus grand que +1). Le marqueur (+) noir indique le changement de branche. (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

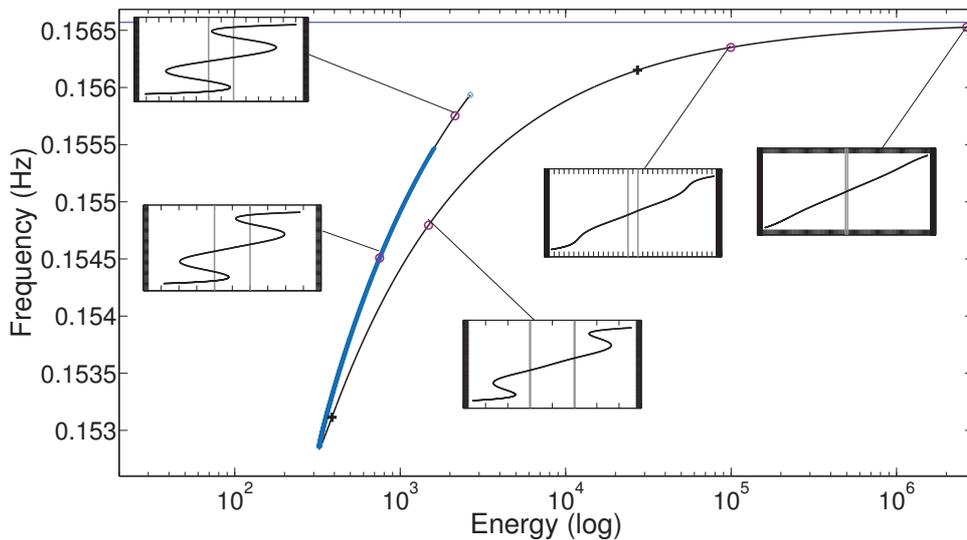


FIGURE 3.12 – Zoom sur des branches particulières (S5121+, S5110+, S1110+) du MNL en phase, accompagné (voir les vignettes) d’orbites périodiques représentées dans l’espace des configurations (lignes modales). Les instabilités sont représentées par un (+) bleu foncé (multiplicateur de Floquet plus grand que +1). Le marqueur (+) noir indique le changement de branche. (Paramètres : $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H_l = 33$, $H_{nl} = 151$).

3.1.5 L’influence de la raideur de butée α

L’objectif ici est d’évaluer l’influence du paramètre physique α , représentatif de la raideur de butée, sur la richesse des dynamiques du mode non-linéaire en phase. Les Fig. 3.13-3.14 visualisent le MNL en phase en terme de FEP, pour $\alpha = 20$ et $\alpha = 50$. Pour $\alpha = 50$, le nombre d’harmoniques H_{nl} a été augmenté passant de 151 à 201.

On observe alors que le paramètre α influence le nombre de résonances internes. Pour $\alpha = 20$, nous avons les résonances internes 3 : 1 et 4 : 1, pour $\alpha = 30$, nous avons les résonances internes 3 : 1, 4 : 1 et 5 : 1 et finalement pour $\alpha = 50$ nous avons les résonances internes 3 : 1, 4 : 1, 5 : 1 et 6 : 1. A noter que les résonances internes impaires apparaissent

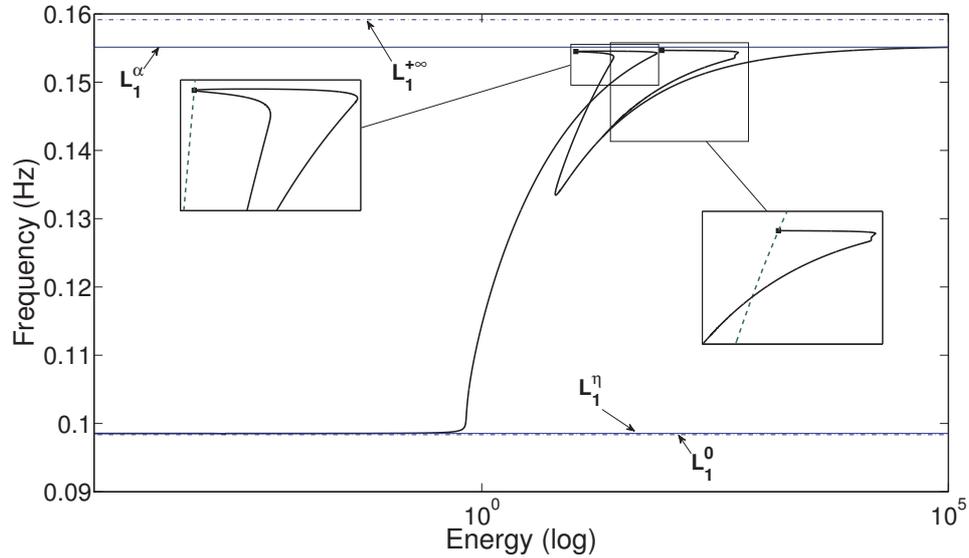


FIGURE 3.13 – FEP du premier MNL avec $\alpha = 20$. (Paramètres : $\beta = 1, \delta = 1, \eta = 0.005, H_l = 33, H_{nl} = 151$).

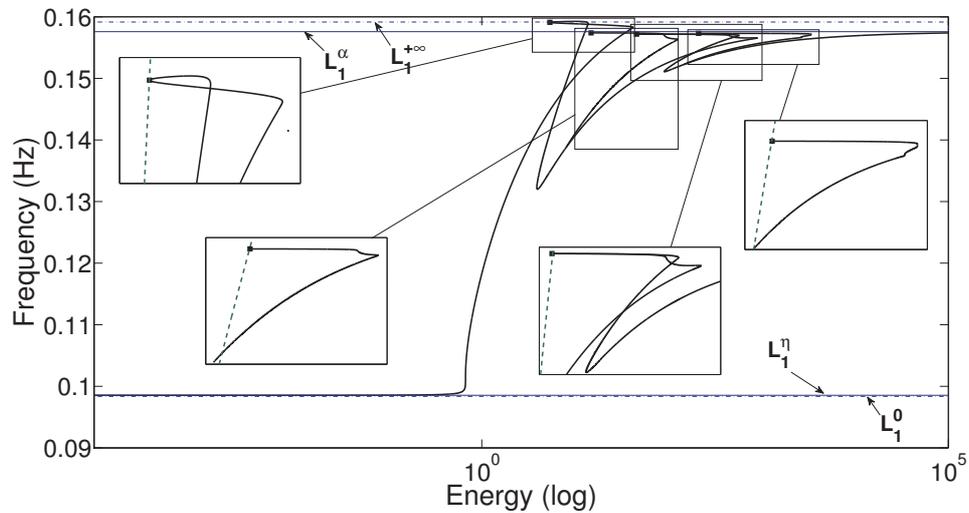


FIGURE 3.14 – FEP du premier MNL avec $\alpha = 50$. (Paramètres : $\beta = 1, \delta = 1, \eta = 0.005, H_l = 33, H_{nl} = 201$).

sous la forme de « turning point » de la branche principale, alors que les résonances internes paires apparaissent après un point de bifurcation simple.

Comme mentionné auparavant, la limite supérieure en terme de fréquence pour le mode non-linéaire en phase est donnée par $\omega_{L_1^\infty}$. En augmentant α , la limite asymptotique $\omega_{L_1^\alpha}$ augmente et se rapproche de $\omega_{L_1^\infty}$.

3.2 Une barre mince avec condition au limite de contact unilatéral

3.2.1 Description du modèle



FIGURE 3.15 – Barre en traction/compression avec une condition au limite de contact unilatéral.

Le système étudié ici est une barre en traction-compression discrétisée par éléments finis avec une condition au limite de contact élastique unilatéral. Ce système a été considéré dans [58]. Ce travail permet d'aborder un problème de plus grande taille, et de traiter le cas d'une force non-régulière et non-symétrique.

Les équations locales du mouvement sont données par,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) - \mathbf{E} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad x \in]0, L[\quad (3.11)$$

où ρ représente la densité massique, \mathbf{E} le module de Young et L la longueur de la barre. Les équations sont complétées par les conditions aux limites suivantes,

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0, t) = 0 \\ \mathbf{EA} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(L, t) = \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}(t)(\mathbf{f}(t) - \alpha(\mathbf{u}(L, t) - \mathbf{g})) - \alpha \eta = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

où g représente le jeu, α la raideur de butée. La force de contact a été régularisée comme proposé Eq. (2.16), où η représente le paramètre de régularisation. On utilise des éléments de barre pour la discrétisation spatiale, dont les matrices élémentaires sont :

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{K}_e = \frac{\mathbf{EA}}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad l_e = \frac{L}{n} \quad (3.13)$$

où A représente l'aire d'une section et l_e le pas de discrétisation spatiale.

Après assemblage des matrices élémentaires, il est possible de réécrire le système sous la

forme du système d'Eq. (2.45) afin d'utiliser la Fast-EHMAN.

$$\begin{cases} \mathbf{0} = M\ddot{U}(t) + \lambda\dot{U}(t) + KU(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^{nl}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} = \mathbf{f}^{nl}(t)(\mathbf{f}^{nl}(t) - \alpha(U^{nl}(t) - \mathbf{g})) - \alpha\eta \\ \mathbf{0} = \dot{U}_i(0) \end{cases} \quad (3.14)$$

où $U \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des degrés de liberté de taille $n = 20$.

On fixe les différents paramètres avec les valeurs suivantes :

Paramètres	Valeurs
ρ (densité)	7800 kg/m ³
E (module de Young)	$2,1 \times 10^{11}$ Pa
L (longueur de la barre)	1 m
A (aire de section)	$(0,03 \times 0,03)$ m ²
g (jeu)	10^{-4} m
α (raideur de la butée)	8×10^7 N/m
η (paramètre de régularisation)	$2,5 \times 10^{-7}$

TABLE 3.1 – Valeurs numériques pour les paramètres pour le modèle de barre défini par le système d'Eq. (3.11)-(3.12).

On calcule, dans un premier temps, les premières fréquences propres du système linéaire sous-jacent du système d'Eq. (3.14), c'est-à-dire du système sans la non-linéarité de contact. Les valeurs sont reportées Tab. 3.2.

Mode	Fréquence propre (en Hz)
1	1297,5
2	3900,6
3	6527,7
4	9195,1
5	11919
6	14716
7	17602

TABLE 3.2 – Fréquences propres de la barre sans la condition au limite de contact unilatéral.

3.2.2 Étude détaillée du premier MNL

On étudie ici, de manière détaillée, le premier MNL du système d'Eqs. (3.14), calculé en utilisant la Fast-EHMAN (cf. Section 2.4) implémentée dans le logiciel MANLAB. Les valeurs numériques des paramètres de la méthode ont été choisies comme suit : $H_l = 11$, $H_{nl} = 151$, $\eta = 2,5 \times 10^{-7}$.

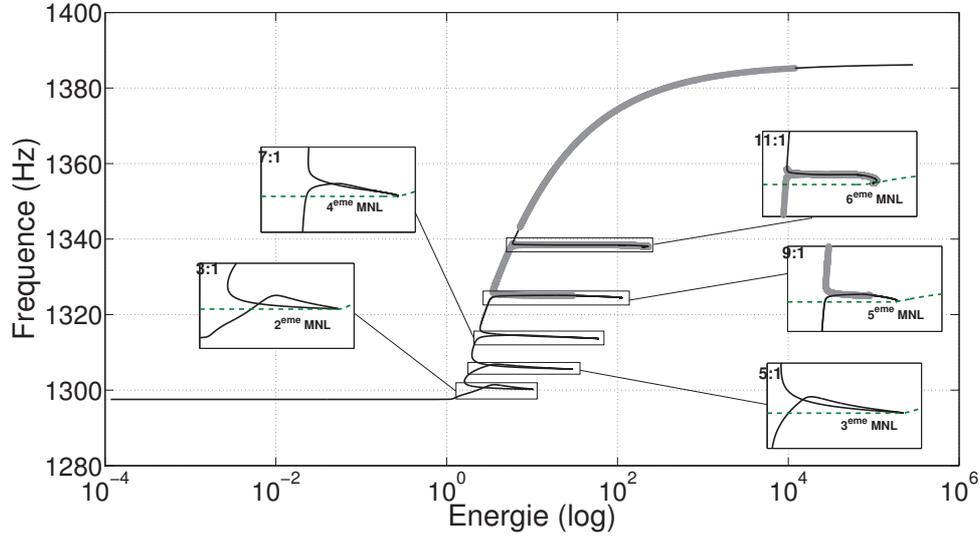


FIGURE 3.16 – FEP du premier MNL et zoom sur les résonances internes $k : 1$ ($k \in \{3, 5, 7, 9\}$) avec représentation du FEP (en pointillé vert) du i^{me} ($i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$) MNL composé de solutions périodiques représentées sur k périodes. Les instabilités sont représentées sous la forme de (+) en gris.

Pour initialiser l'algorithme, on utilise le premier mode linéaire du système d'Eq. (3.14), avec un niveau d'énergie proche de zéro. Le MNL est visualisé Fig. 3.16 suivant un graphique FEP. A faible niveau d'énergie, le MNL est identique au mode linéaire, qu'on note L_1^η suivant les notations introduites dans la Section 3.1.2. Comme pour le système à 2 ddl étudié section 3.1, il existe un niveau d'énergie tel que la fréquence se met à croître avec l'énergie. Ce seuil correspond à l'énergie la plus faible des orbites impactant sur la butée (amplitude de déformation de la barre supérieure au jeu g). Le MNL présente également, à fort niveau d'énergie, une limite asymptotique horizontale caractérisant une limite supérieure en fréquence. Cette fréquence limite ne correspond pas à la fréquence du mode linéaire du système à jeu nul, notée L_1^α (cf. Section 3.1.2), contrairement au système à 2 ddl traité section 3.1. Comme on peut le démontrer (cf. Annexe D) pour un système à 1 ddl avec contact unilatéral, la limite asymptotique en fréquence n'est pas donnée par L_1^α mais correspond en fait à la moyenne harmonique entre la fréquence $f_{L_1^\eta}$ et $f_{L_1^\alpha}$, que l'on note $f_{L_1^{\eta\alpha}}$.

Entre ces deux états limites, comme pour le système à 2 ddl étudié section 3.1, on observe cinq résonances internes 3 : 1, 5 : 1, 7 : 1, 9 : 1 et 11 : 1, avec respectivement les modes 2, 3, 4, 5 et 6 (représentés en pointillé dans les zooms Fig. 3.16). A noter qu'il existe des solutions périodiques instables. Ainsi la branche correspondant à la résonance interne 11 : 1 est entièrement instable, alors que la branche correspondant à la résonance interne 9 : 1 n'est que partiellement instable.

La description du comportement du MNL a mis en évidence des points communs avec le comportement des MNL du système à 2 ddl. Des différences marquées que l'on peut imputer à la perte de symétrie de la force d'impact ont aussi été observées. Il s'agit d'une part d'une valeur différente pour la limite asymptotique quand l'énergie tend vers l'infini et l'absence de bifurcation liée à une brisure de symétrie.

Il reste à valider le choix $H_l = 11$. D'une part, ce choix est-il suffisant pour reproduire

les dynamiques modales ? et d'autre part, le filtre qu'il introduit dans la détection des résonances internes (cf. section 2.5.2) n'est-il pas trop sévère ? Pour répondre à la première question, considérons l'orbite périodique définie par le couple $E = 144.06$ et $f = 1338.3$ (voir Fig. 3.17) située entre la quatrième et la cinquième résonance interne. Partant de la série de Fourier, nous pouvons déduire l'évolution temporelle du degré de liberté qui entre en contact avec la butée. Cette trajectoire temporelle est visualisée sur une période Fig. 3.17 ; elle met en évidence l'existence de six impacts par période. Sur cette même figure est reportée la trajectoire temporelle obtenue par intégration temporelle (méthode de Runge-Kutta) des équations du mouvement Eq. (3.11)-(3.12) en choisissant comme condition initiale un point de l'orbite fournie par la méthode Fast-EHMAN. Les deux courbes sont confondues.

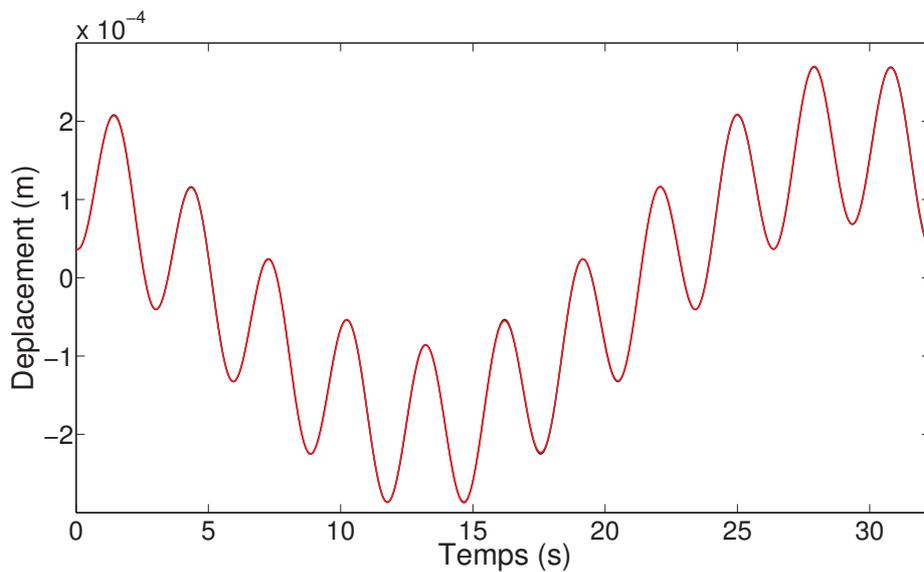


FIGURE 3.17 – Evolution temporelle du degrés de liberté qui entre en contact avec la butée, d'une orbite périodique ($E = 144.06$, $f = 1338.3$) issue du premier MNL. Comparaison entre l'approximation fournie par la Fast-EHMAN (en noir) et une approximation obtenue par intégration temporelle des équations du mouvement (en rouge).

Pour répondre à la deuxième question, les approximations du MNL correspondant aux choix $H_l = 1, 3, 7$ et 11 sont visualisées et comparées Fig. 3.18-3.20. L'effet de filtrage de H_l sur la détection des résonances internes est clairement mis en évidence Fig. 3.21. Pour $H_l = 1$, aucune résonance interne n'est détectée, pour $H_l = 3$, une résonance interne est détectée, pour $H_l = 7$, trois résonances internes sont détectées et pour $H_l = 11$, cinq résonances internes sont détectées. A noter aussi que les résonances détectées sont toujours présentes pour une valeur de H_l supérieure.

La Fig. 3.21 montre également que quel que soit le choix de H_l la limite asymptotique $f_{L_1^{\eta^\alpha}}$ est identique. Par conséquent, dans le cadre d'une étude, il sera intéressant de faire un premier calcul avec $H_l = 1$ et ainsi d'avoir accès numériquement à la limite asymptotique en fréquence du MNL lorsque l'énergie tend vers l'infini. Cette valeur permet de faire un choix stratégique de H_l pour inclure les modes que l'on voudrait voir interagir avec le MNL étudié. Par exemple, ici $H_l = 11$ et la fréquence limite est estimée à $f_{L_1^{\eta^\alpha}} = 1386.4$ Hz ; les seuls MNLs compris dans la plage de fréquence $[1297.5, 11 \times 1386.4]$ ont alors la possibilité d'interagir avec le premier MNL. Cette estimation concorde avec les résultats obtenus. En

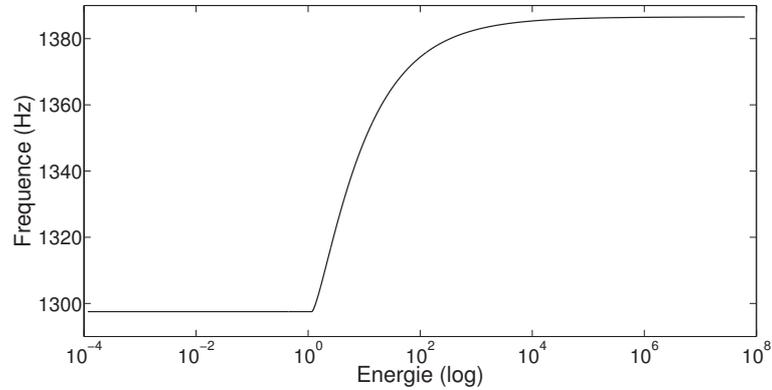


FIGURE 3.18 – FEP du premier MNL d'une barre en traction/compression avec non-linéarité de contact unilatéral pour $H_l = 1$.

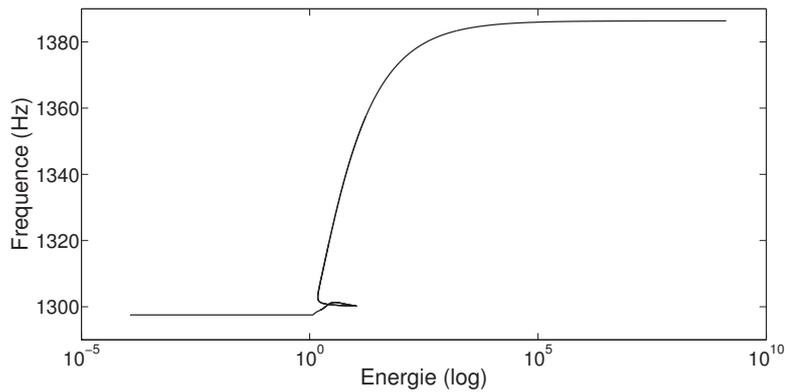


FIGURE 3.19 – FEP du premier MNL d'une barre en traction/compression avec non-linéarité de contact unilatéral pour $H_l = 3$.

effet, les résonances internes avec le 7^{ème} MNL, qui se situe sur une plage de fréquence au-delà de 17602 Hz, et seules celles avec les deuxième, troisième, quatrième, cinquième et sixième MNLs apparaissent.

3.2.3 Calcul des MNLs en interaction avec le premier MNL

On représente ici les cinq modes non-linéaires (MNLs) suivants, obtenus en initialisant la méthode Fast-EHMAN à l'aide des modes propres respectifs du système linéaire sous-jacent. On utilise ici les mêmes valeurs des paramètres que pour le calcul du premier MNL. Les MNLs représentés sous la forme d'un graphique fréquence-énergie (FEP) Fig. 3.22 montrent une évolution en fonction de l'énergie relativement simple et identique. Comme dans le cas du système à 2 ddl étudié Section 3.1, aucune résonance interne n'est présente et la limite asymptotique coïncide avec la moyenne harmonique des fréquences $f_{L_p^\eta}$ et $f_{L_p^\alpha}$.

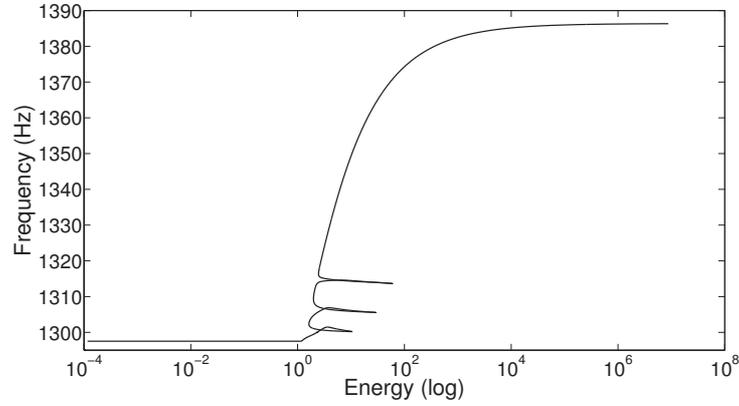


FIGURE 3.20 – FEP du premier MNL d'une barre en traction/compression avec non-linéarité de contact unilatéral pour $H_l = 7$.

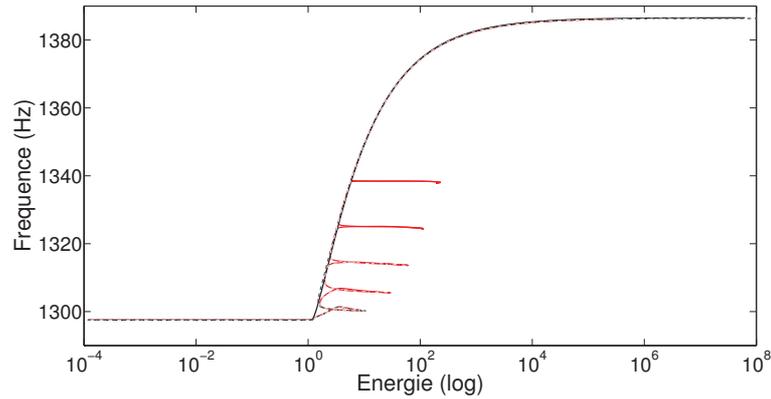


FIGURE 3.21 – Comparaisons des FEP du premier MNL d'une barre en traction/compression avec non-linéarité de contact unilatéral pour différentes valeurs d'harmoniques : pour $H_l = 1$ (en haut à droite), $H_l = 3$ (en bas à gauche) et $H_l = 7$ (en bas à droite).

3.3 Une poutre avec condition aux limites de contact bilatéral

3.3.1 Description du modèle

Nous considérons une poutre encastree-libre en flexion dans un plan d'une condition aux limites de type contact élastique bilatéral, comme représentée Fig. 3.23, Les équations locales du mouvement sont données par

$$\rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial x^4}(x, t) = 0 \quad (3.15)$$

où ρ représente la densité, A l'aire de la section, E le module de Young, I le moment d'inertie. Avec les conditions aux limites

$$\mathbf{u}(0, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(0, t) = \mathbf{u}(L, t) = 0 \quad (3.16)$$

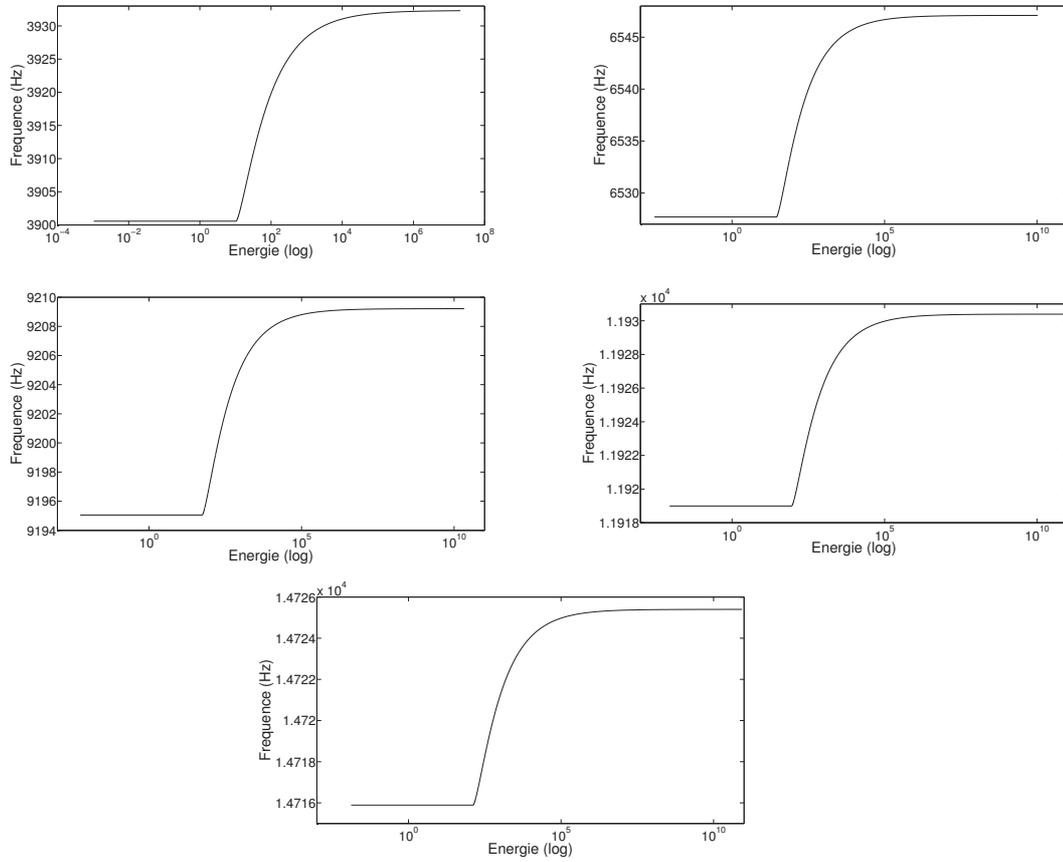


FIGURE 3.22 – FEP du deuxième, troisième, quatrième, cinquième et sixième MNL.

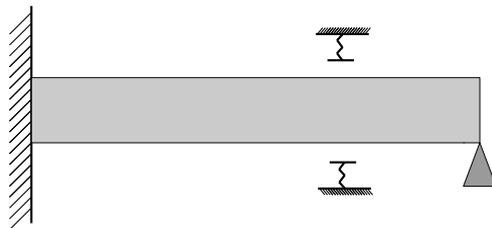


FIGURE 3.23 – Poutre en flexion dans le plan avec une condition au limite de contact bilatéral.

où L représente la longueur de la poutre. La condition au limite de contact fait apparaître une force de contact de type (2.20) régularisée suivant (2.24). Cette condition de saut régularisée

s'exprime alors sous la forme,

$$\begin{cases} \llbracket EI \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3}(x_g, t) \rrbracket & = \mathbf{f}^{nl}(t) \\ \alpha^2 \mathbf{f}^{nl}(t) - \eta \alpha^2 \mathbf{u}(x_g, t) - \mathbf{f}^{nl}(t) \mathbf{z}(t) & = 0 \\ \mathbf{z}(t) - (\mathbf{f}^{nl}(t) - \alpha \mathbf{u}(x_g, t))^2 & = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

où x_g représente la position de la butée élastique, g le jeu, α la raideur de butée et η le paramètre de régularisation.

On utilise des éléments d'Hermite, pour la discrétisation spatiale, dont les matrices élémentaires sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \frac{\rho A l_e}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{pmatrix} \\ \text{et } \mathbf{K}_e &= \frac{EI}{l_e^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{pmatrix}, l_e = \frac{L}{n} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Après assemblage de ces matrices élémentaires, il est possible de réécrire le système sous la forme du système d'Eq. (2.45) afin d'utiliser la Fast-EHMAN.

$$\begin{cases} \mathbf{0} & = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \lambda \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^{nl}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & = \alpha^2 \mathbf{f}^{nl}(t) - \eta \alpha^2 \mathbf{U}^{nl}(t) - \mathbf{f}^{nl}(t) \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{0} & = \mathbf{z}(t) - (\mathbf{f}^{nl}(t) - \alpha \mathbf{U}^{nl}(t))^2 \end{cases} \quad (3.19)$$

On fixe les différents paramètres avec les valeurs suivantes :

Paramètres	Valeurs
ρ (densité)	8357 kg/m ³
E (module de Young)	$2,06 \times 10^{11}$ Pa
I (moment d'inertie)	$\frac{\pi}{64} \times (0,02222^4 - 0,00127^4)$ m ⁴
L (longueur de la barre)	1,59 m
x_g (position de la butée)	1,3515 m
A (aire de section)	$\pi(11,11 \times 10^{-3})^2$ m ²
g (jeu)	$2,9 \times 10^{-4}$ m
α (raideur de la butée)	8×10^5 N/m

TABLE 3.3 – Valeurs numériques des paramètres du modèle de poutre.

On calcule dans un premier temps, les premières fréquences propres du système linéaire sous-jacent du système d'Eq. (3.19), c'est-à-dire le système sans la non-linéarité de contact. Les valeurs obtenues sont reportés Tab. 3.4

Mode	Fréquence propre (en Hz)
1	26,77
2	86,75
3	181,01
4	309,57
5	472,47

TABLE 3.4 – Fréquences propres de la poutre sans la condition au limite de contact bilatéral.

3.3.2 Étude détaillée du premier MNL de flexion

On utilise la Fast-EHMAN pour résoudre le système d'Eq. (3.19). En utilisant les valeurs numériques des paramètres de la méthode ont été choisies comme suit : $H_l = 11$, $H_{nl} = 151$, $\eta = 5 \times 10^{-3}$.

Le comportement du premier mode non-linéaire est représenté dans la Fig. 3.24 en terme de "Frequency Energy Plot" (FEP). A faible niveau d'énergie, la fréquence est constante et corres-

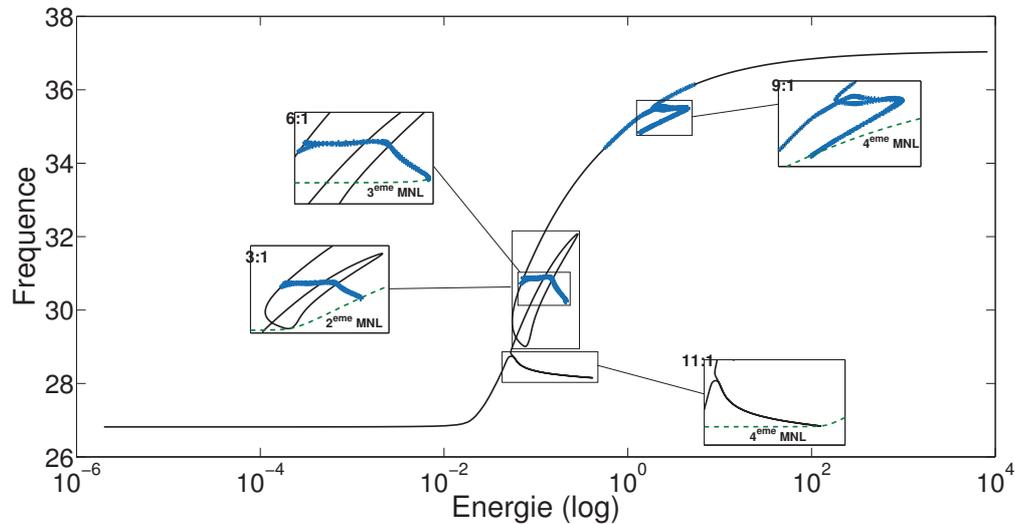


FIGURE 3.24 – FEP du premier MNL en flexion et zoom sur les résonances internes $k : 1$ ($k \in \{11, 6, 3, 9\}$) avec représentation du FEP (en pointillé vert) du i^{me} ($i \in \{4, 3, 2, 4\}$) MNL composé de solutions périodiques représentées sur k périodes. Les instabilités sont représentées sous la forme de (+) en bleu.

pond à des mouvements sans impact. Lorsque les impacts apparaissent, la fréquence augmente avec l'énergie, faisant apparaître quatre résonances internes (voir zoom), pour atteindre une limite asymptotique correspondant à la première fréquence propre du système linéaire avec un jeu nul ($g = 0$), qu'on appelle f_{L_0} . La première résonance interne correspond à une résonance 11 : 1 entre le quatrième MNL et le premier. En effet, on peut voir le quatrième MNL (voir la courbe verte en pointillé) tracé avec un facteur d'échelle de $\frac{1}{11}$ pour l'axe des fréquences. La deuxième résonance interne est une résonance 3 : 1 entre le deuxième MNL et le premier. La

troisième résonance interne est une résonance 6 : 1 avec le troisième MNL. Cette dernière, de la même manière que le modèle à 2 ddls étudié section 3.1, est une résonance paire issue d'une bifurcation. La dernière résonance interne est une résonance 9 : 1 avec le quatrième MNL.

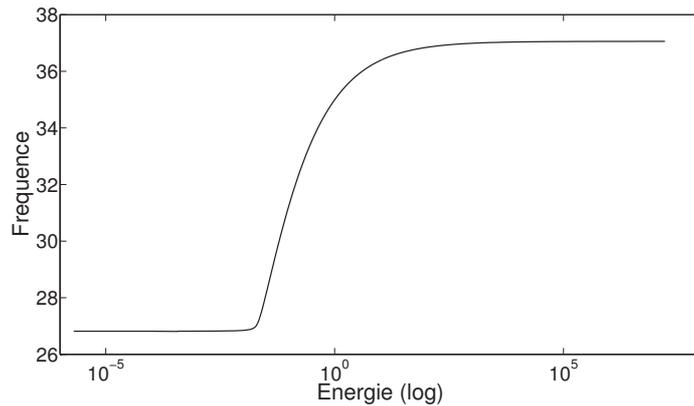


FIGURE 3.25 – FEP du premier MNL d'une poutre en flexion avec non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 1$.

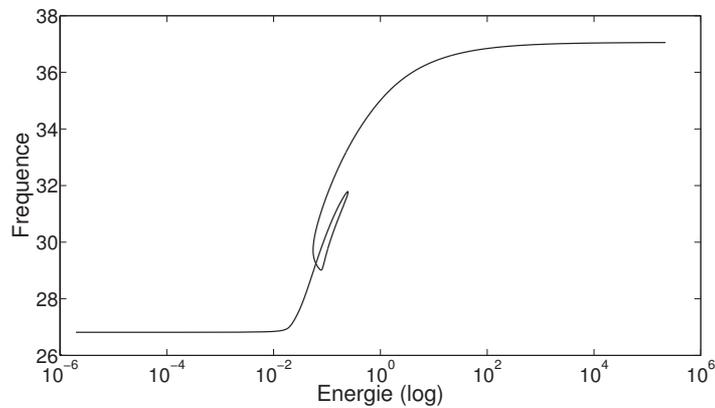


FIGURE 3.26 – FEP du premier MNL d'une poutre en flexion avec non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 3$.

On peut confirmer ici aussi la méthodologie proposée pour le modèle de barre concernant le choix de H_l . Cette méthodologie consiste à effectuer un premier calcul du MNL avec un nombre d'harmoniques $H_l = 1$, pour déterminer la limite en fréquence $f_{L\ddagger}$ qui est atteinte lorsqu'on fait tendre l'énergie vers l'infini et ainsi déterminer les MNLs susceptibles d'entrer en interaction avec le MNL calculé. Comme pour la barre, les Fig. 3.25-3.28 montrent que lorsqu'on augmente le nombre d'harmoniques progressivement, $H_l = 1$ jusqu'à $H_l = 11$, les résonances internes apparaissent progressivement. Ainsi, le choix qu'on a fait de $H_l = 11$ laisse une possibilité d'interaction avec l'ensemble des modes compris dans la plage de fréquence [26.77, 407.55] Hz, c'est-à-dire avec les quatre premiers modes non-linéaires.

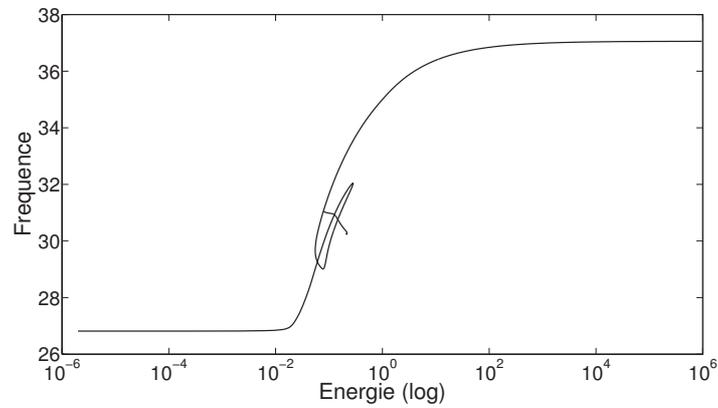


FIGURE 3.27 – FEP du premier MNL d'une poutre en flexion avec non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 7$.

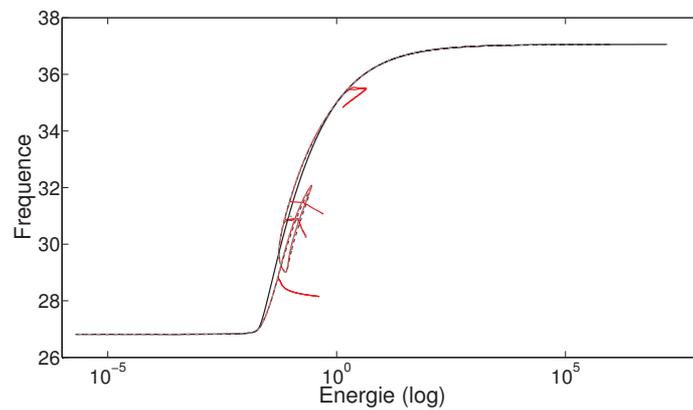


FIGURE 3.28 – Comparaison des FEP du premier MNL d'une poutre en flexion avec non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 1$ (en noir), $H_l = 3$ (en gris pointillé) et $H_l = 11$ (en rouge).

3.3.3 Calcul des trois MNLs en interaction avec le premier MNL

Les Fig. 3.29-3.31 représente sous la forme d'un graphique fréquence-énergie, les deuxième, troisième et quatrième MNL, calculés à l'aide de la Fast-EHMAN. On observe la présence de résonances internes pour le deuxième et le quatrième MNL. Seul le troisième MNL ne possède pas de résonances internes.

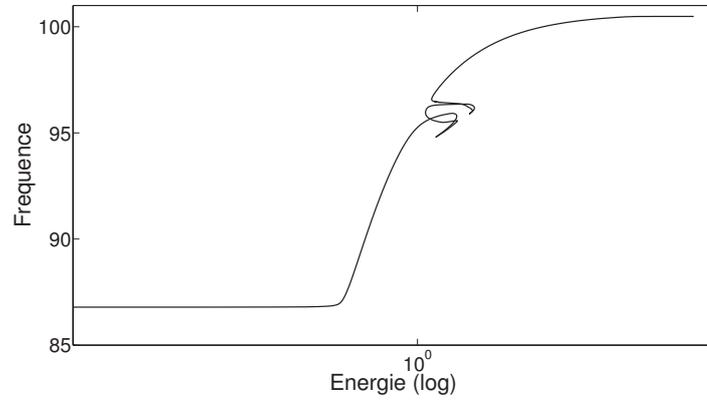


FIGURE 3.29 – FEP du deuxième mode non-linéaire d'une poutre en flexion avec non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 11$.

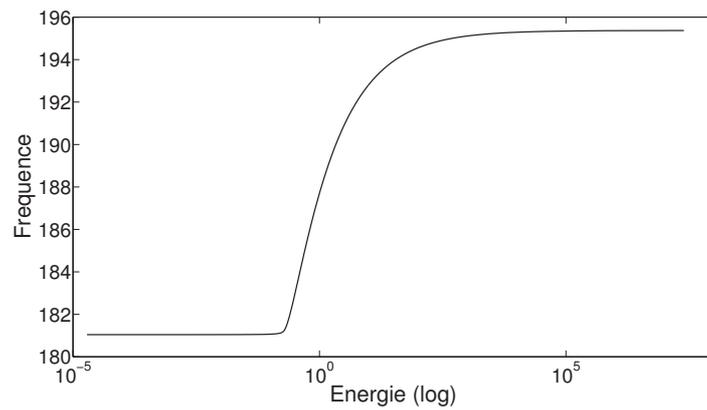


FIGURE 3.30 – FEP du troisième mode non-linéaire d'une poutre en flexion avec non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 11$.

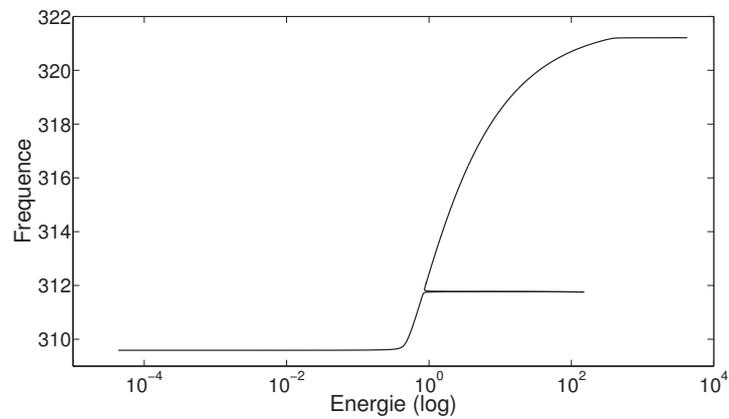


FIGURE 3.31 – FEP du quatrième mode non-linéaire d'une poutre en flexion avec non-linéarité de contact bilatéral pour $H_l = 11$.

Chapitre 4

Application industrielle : Tube en U d'un générateur de vapeur

4.1 Contexte de l'étude

Dans les centrales nucléaires (voir schéma Fig. 4.1), les tubes Générateurs de Vapeurs (GV) sont des échangeurs thermiques qui utilisent l'énergie thermique provenant du fluide primaire pour transformer le fluide secondaire en vapeur, fluide qui va aller alimenter ensuite les turbines. La surface d'échange est constituée d'un ensemble de 3500 à 5600 tubes, selon le modèle, qui ont la forme d'un "U" inversé. Dans ces tubes circulent le fluide primaire à haute température (320°C) et haute pression (155 bars). De plus, un certain nombre de plaques entretises viennent les maintenir verticalement.

L'intégrité physique de ces tubes est un enjeu majeur pour la sûreté des centrales car ils constituent le rempart entre le fluide primaire et secondaire, le premier étant radioactif et l'autre non.

L'usure et la fatigue des tubes sont relativement bien étudiées [42], l'une des causes majeures avancée pour expliquer ces phénomènes est l'instabilité fluide-élastique. En effet, la vitesse d'écoulement du fluide secondaire peut atteindre une vitesse critique, conduisant à une excitation de la structure aux alentours d'une de ses fréquences propres. Ce phénomène induit une résonance de la structure et donc de grandes amplitudes, d'où l'usure des tubes, voir l'apparition de fissures. Ce type de phénomène est relativement bien connu des constructeurs [43] et donc bien pris en compte durant la phase de conception.

Toutefois, la pratique industrielle pose comme base l'impossibilité d'une instabilité fluide-élastique due à un mode dans le plan. En effet, comme on le verra la fréquence des mouvements dans le plan est plus grande que celle des mouvements hors-plan. Par conséquent, la probabilité d'une fissure due à un mouvement dans le plan est très faible. La pratique dans l'industrie [43] est donc de ne pas tenir compte de la possibilité d'une instabilité fluide-élastique dans le plan durant la phase de conception.

Si on se place dans un cadre linéaire, le raisonnement est valable. Toutefois, on peut mettre en doute l'hypothèse de linéarité par l'accident récent qui s'est déroulé à la centrale de San Onofre aux Etats-Unis, dont les conclusions semblent mettre en cause la rupture de tubes par un mouvement dans le plan [70].

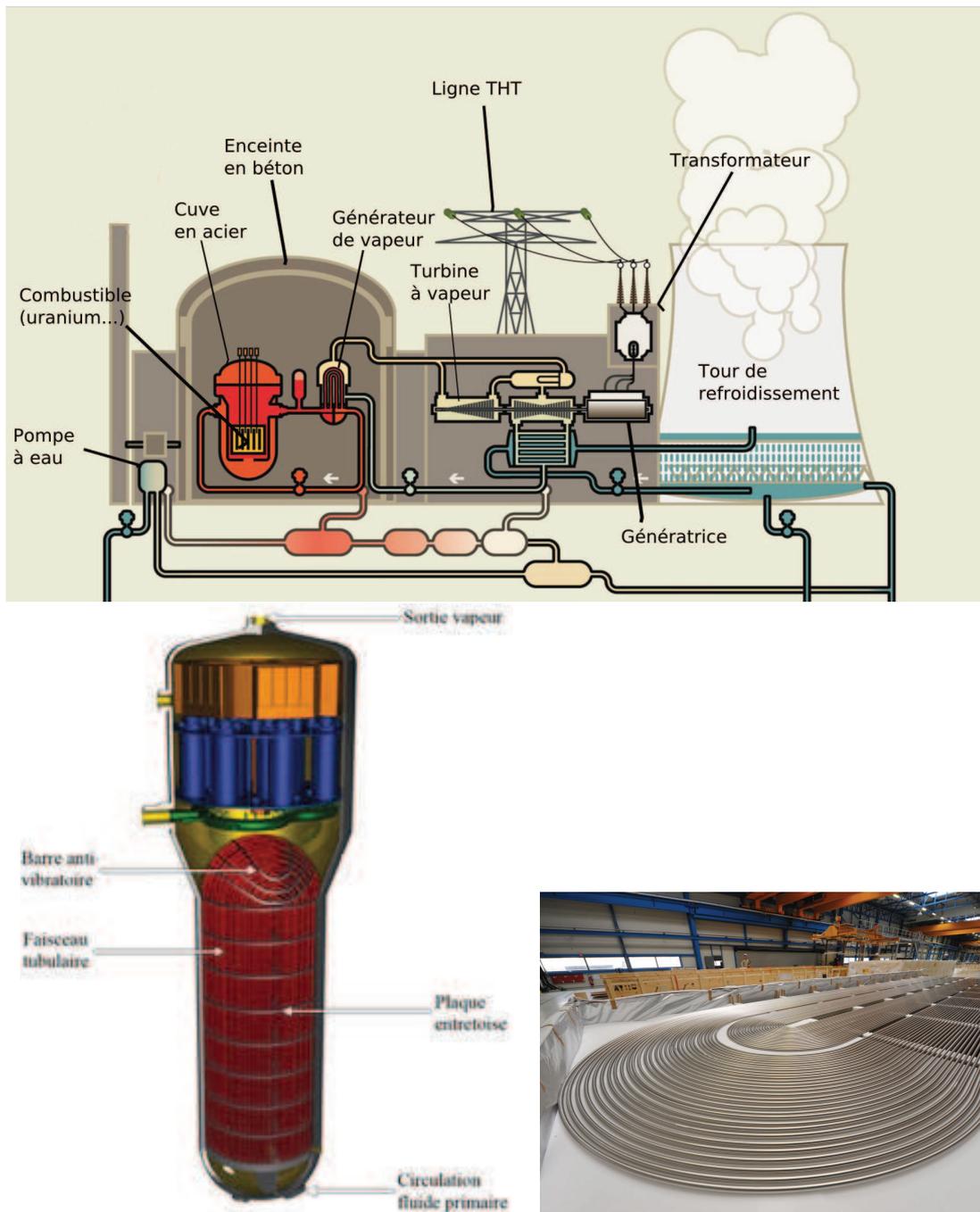


FIGURE 4.1 – Schéma d'une centrale nucléaire REP (réacteur à eau pressurisé), en haut. Schéma d'un générateur de vapeur (en bas à gauche). Tube en U d'un générateur de vapeur (en bas à droite).

On peut se poser la question de l'influence sur la dynamique de la non-linéarité de contact liée à la présence des plaques entretoises. En effet, on a pu voir dans la Section 3 qu'une

analyse modale non-linéaire faisait intervenir pour certains modes des résonances internes avec d'autres modes de la structure. Dans ce scénario, un mode à basse fréquence peut interagir un mode à haute fréquence. Ainsi, l'argument qui dit que les mouvements dans le plan sont à une fréquence trop élevée pour avoir une influence sur la structure, peut être remis en cause. En effet, s'il existe une résonance interne entre le premier mode non-linéaire (hors-plan) et un autre MNL en flexion dans le plan (à plus haute fréquence), des mouvements dans le plan peuvent alors être initiés à basse fréquence.

Cette idée sera le fil conducteur de ce travail, on essaiera par une étude numérique, à l'aide de l'opérateur *MODE_NON_LINE* de *Code_Aster*, de vérifier l'existence de cette résonance interne et de la mettre en évidence par une étude expérimentale. Un travail similaire a été effectué sur une structure spatiale dont les résultats sont reportés dans [74, 86].

4.2 Présentation du modèle

Le modèle étudié ici est issu des travaux de thèse de Thenint [96] qui avait pour objectif, entre autres, de construire un modèle numérique de la maquette du banc GV-Local d'EDF R&D (dont on fera une brève description dans la section 4.4). On considérera pour notre étude une seule plaque entretoise, on considérera que celle-ci n'a pas d'épaisseur et par conséquent que la non-linéarité de contact ne s'applique qu'à un seul noeud. De plus on considère des conditions aux limites d'encastrement au pied du tube. L'étude du premier MNL pour ce modèle a pour but de vérifier l'existence d'une résonance interne à basse fréquence avec un mode dont le déplacement est majoritairement dans le plan. Les résultats attendus sont qualitatifs et ne nécessiteront pas un recalage du modèle.

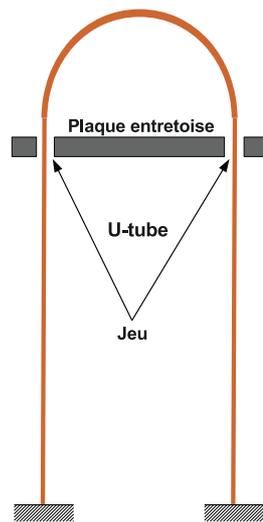


FIGURE 4.2 – Modèle du tube en U avec deux non-linéarités de contact annulaire.

On considère un tube en “U” inversé avec deux conditions aux limites de contact comme

indiqué sur la Fig. 4.3. Le tube est modélisé comme une poutre linéaire isotrope et homogène, discrétisée par éléments finis avec 21 éléments de poutre. La discrétisation est de 22 noeuds ayant chacun six degrés de liberté (les axes de déplacements DX , DY , DZ et de rotations DRX , DRY et DRZ) donnant un système à $n = 120$ ddls. Les conditions aux limites de contact avec la plaque entretoise sont modélisées à l'aide d'anneaux circulaires élastiques comme défini par l'Eq. (2.29).

Les paramètres géométriques et de matériels suivants sont utilisés :

Paramètres	Valeurs
ρ (densité)	8357 kg/m ³
E (module de Young)	$2,06 \times 10^{11}$ Pa
ν (coefficient de Poisson)	0,3
r (rayon extérieur du tube)	0,0111 m
e (épaisseur du tube)	0,00127 m
g (rayon de l'anneau)	0,00029 m
(e_x, e_y) (excentricité des anneaux / noeud de contact)	$(0, 1 \times g, 0) = (2,9 \times 10^{-5}, 0)$ m
α (raideur de l'anneau)	4×10^6 N/m

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des paramètres physiques du modèle de tube en U.

Le modèle a été discrétisé par éléments finis et les modes propres ont été calculés à l'aide du logiciel *Code_Aster*, pour la structure sans prise en compte des contacts. Cette première étape permet de repérer et de localiser dans le domaine fréquentiel où se situent les modes de flexion dans le plan du tube. Les neuf premiers modes sont reportés Table 4.2 pour les fréquences et Fig. 4.3 pour les déformées modales. Les modes sont différenciés suivant que le mouvement a lieu dans le plan du tube, hors de ce plan, ou en torsion. Le premier mode est un mode de flexion hors-plan, suivi d'un mode de flexion dans le plan et d'un mode de torsion. Les modes 5 et 6 sont deux modes de flexion dans le plan.

Mode j	f_j (Hz)	Type de déformée
1	4,91	1 ^{er} mode de flexion hors-plan
2	8,49	1 ^{er} mode de flexion dans le plan
3	16,92	1 ^{er} mode de torsion
4	32,04	2 ^{ème} mode de flexion hors-plan
5	32,46	2 ^{ème} mode de flexion dans le plan
6	48,57	3 ^{ème} mode de flexion dans le plan
7	50,52	2 ^{ème} mode de torsion
8	89,3	4 ^{ème} mode de flexion dans le plan
9	89,39	3 ^{ème} mode de flexion hors-plan

TABLE 4.2 – Fréquences et déformées du tube sans contact.

On s'intéressera ici au premier mode non-linéaire initié à faible énergie par le premier mode propre, mode de flexion hors-plan. Les résonances internes qui nous intéressent sont celles avec les modes ayant des mouvements de flexion dans le plan c'est-à-dire les deuxième, cinquième, sixième et huitième modes.

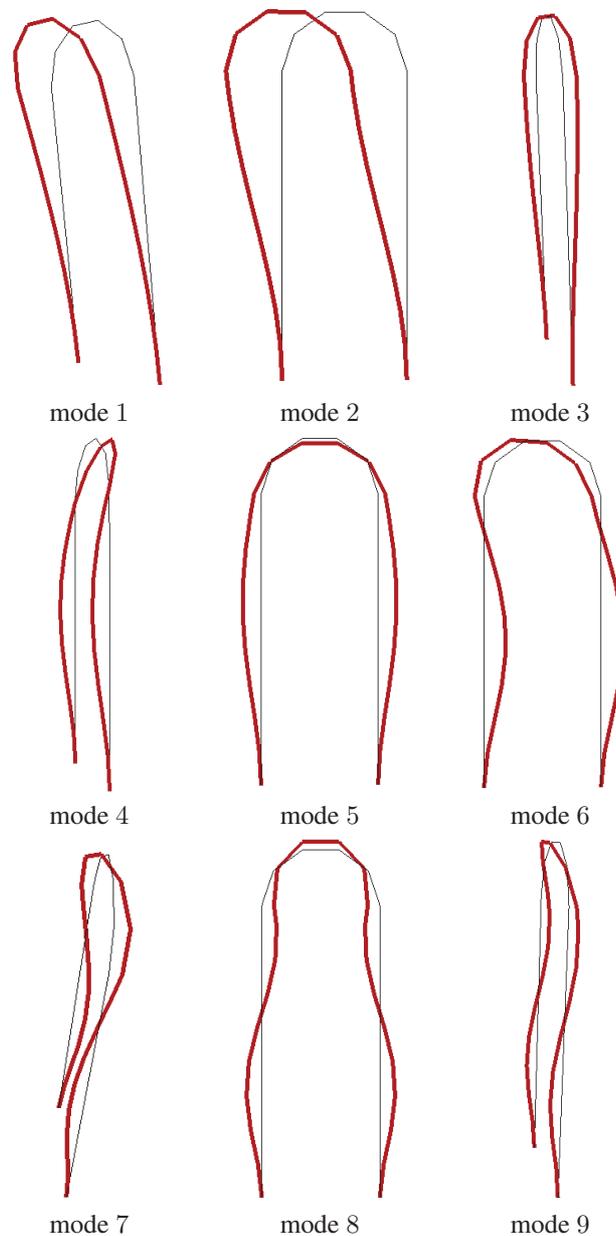


FIGURE 4.3 – Déformées modales du tube sans contact

4.3 Étude numérique

4.3.1 Choix de l'ordre de troncature H_l

Après cette étape nécessaire de calcul des fréquences propres du système linéaire sous-jacent, on peut passer à une analyse modale non-linéaire. On utilise l'opérateur *MODE_NON_LINE* de *Code_Aster*, qui implémente la Fast-EHMAN. On choisit comme ordre de troncature $H_{nl} =$

201, et comme paramètre de régularisation $\eta = 2,5 \times 10^{-5}$. On se reporte à la section 2.5 pour plus de détails sur le choix de ces paramètres.

La première étape est de prendre $H_l = 1$ afin de déterminer la fréquence limite du premier MNL. La Fig. 4.4, présente le résultat obtenu à l'aide d'un graphique fréquence-énergie. La limite supérieure est $f_{L_1^*} = 29,9$ Hz, qui est donc plus élevée que la fréquence propre du deuxième mode (8,49 Hz). Cette observation ne rentre pas en contradiction avec ce qui a été dit Section 3, ainsi que ce qui a été décrit dans la littérature [53], l'existence d'une "zone interdite" entre les modes. En effet, ici le premier MNL est en flexion hors-plan alors que le deuxième MNL est en flexion dans le plan. L'aspect tri-dimensionnelle doit être pris en compte dans ce type d'analyse ce qui n'était pas le cas des modèles considérés. Au regard de la fréquence du deuxième mode en flexion hors-plan (Mode 4 : 32,04 Hz), on constate que la limite supérieure $f_{L_1^*} = 29,9$ Hz reste inférieure à la fréquence du mode hors-plan suivant.

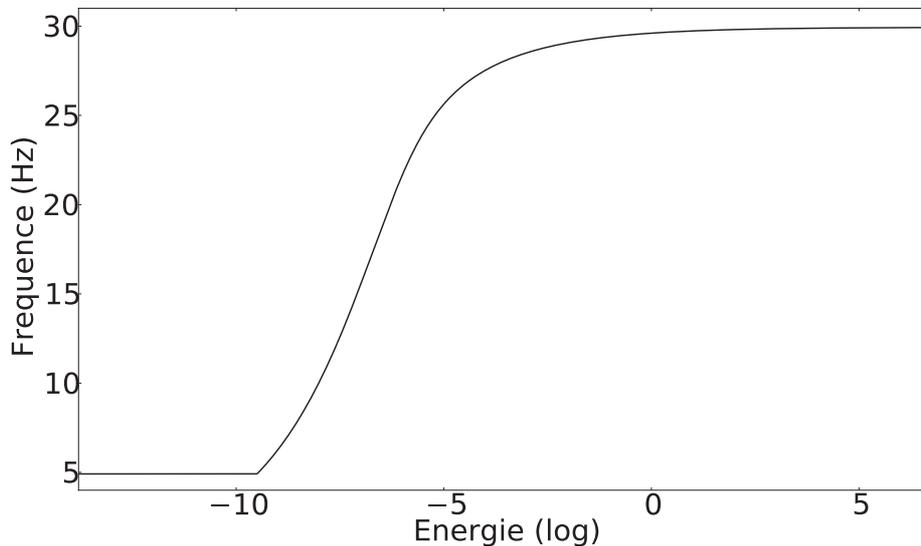


FIGURE 4.4 – FEP du premier MNL du tube cintré en flexion hors-plan pour $H_l = 1$.

On note que la plage de fréquence du premier MNL est très grande. Notre objectif étant de trouver une résonance interne à basse fréquence, on choisit de ne pas calculer le MNL dans sa totalité, et surtout d'avoir un ordre de troncature H_l qui ne soit pas lié à la fréquence limite $f_{L_1^*}$. En effet, si on prend $H_l = 3$, on sait que l'on peut avoir des résonances internes avec l'ensemble des modes décrits dans la Section 4.2, car $3 \times f_{L_1^*} = 3 \times 29,9 = 89,7$ Hz. Toutefois, les interactions se produiront pour des fréquences trop élevée, par exemple une interaction avec le sixième MNL ne peut se produire que pour une fréquence supérieure à 16,19 Hz. Donc, le choix de $H_l = 3$ n'est pas approprié pour avoir une résonance interne qui apparaisse à basse fréquence avec un mode à haute fréquence, comme le montre la Fig. 4.5. Il n'y a pas de résonance interne avec un MNL de flexion dans le plan.

Pour remédier à ce problème, on propose d'imposer une plage de fréquence avec une fréquence maximale, qu'on appelle f_{max} qui soit suffisamment basse (on cherche une résonance interne à basse fréquence). Ainsi le choix d'ordre de troncature H_l se fera en fonction de f_{max} , pour inclure une possibilité d'entrer en résonance avec l'ensemble des modes en flexion dans le plan décrit dans la Section 4.2. On choisit $f_{max} = 8$ Hz c'est-à-dire qu'on recherche une

résonance interne dans la plage de fréquence $[4.91, 8]$ Hz, ainsi le choix de $H_l = 13$ donne la possibilité d'une interaction avec un grand nombre de MNL ($[4.91, 104]$ Hz) en flexion dans le plan et que celle-ci se produise à basse fréquence.

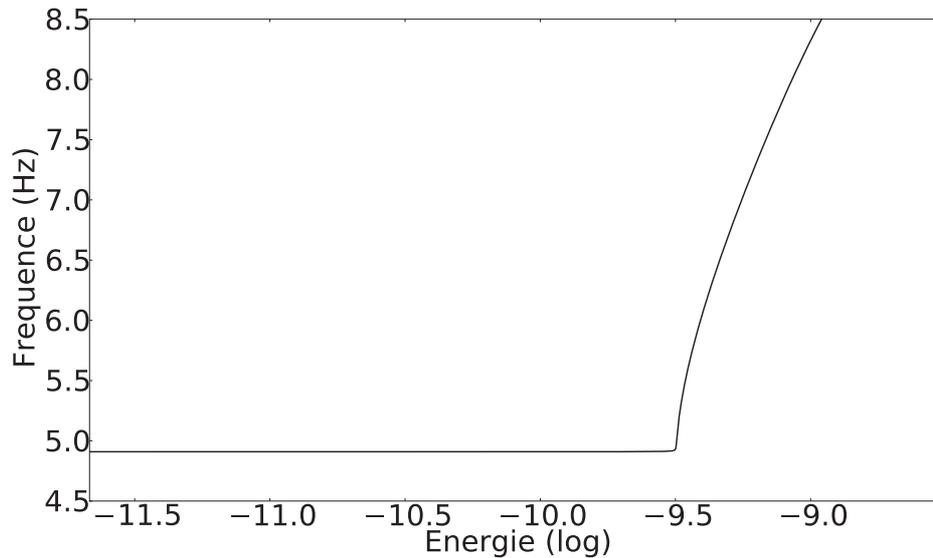


FIGURE 4.5 – FEP du premier MNL du tube cintré en flexion hors-plan pour $H_l = 3$.

4.3.2 Premier MNL de flexion hors-plan

On peut alors calculer le premier MNL avec les ordres de troncatures d'harmoniques $H_l = 13$ et $H_{nl} = 201$, et le paramètre de régularisation $\eta = 2.5 \times 10^{-5}$. La Fig. 4.6 représente le résultat obtenu, sous la forme habituelle d'un graphique fréquence-énergie. On observe des résultats similaires à ce que l'on a obtenu sur les différents systèmes étudiés à savoir, une "branche linéaire" correspondant à une amplitude suffisamment faible pour que le tube n'entre pas en contact avec les plaques entretoises puis la fréquence croît avec l'énergie. Une première résonance interne 8 : 1 apparaît par la suite, issue d'une bifurcation, avec le sixième MNL, c'est-à-dire troisième MNL de flexion dans le plan.

La déformée modale associée (obtenue à $f = 4.91$ Hz, voir Fig. 4.6-cercle violet) est représentée dans la Fig. 4.7, et seul un mouvement hors-plan est présent. Lorsque l'amplitude est suffisante pour faire apparaître des impacts, la fréquence augmente pour faire apparaître une résonance interne 8 : 1 avec le sixième MNL correspondant au troisième mode dans le plan (voir cercle violet de la Fig. 4.6 à $f = 6,0729$ Hz). La Fig. 4.8 représente la déformée associée, avec un mouvement purement dans le plan, et où on observe clairement la position des butées.

On peut effectuer ici la même observation que celle faite sur le système à 2 ddl et le modèle de poutre en flexion. En effet, ici la non-linéarité est également impaire, malgré le décalage e_x , on a donc l'apparition d'une bifurcation qui mène à une résonance interne paire. Celle-ci provoque une brisure de symétrie, puisqu'on passe d'un mouvement purement hors-plan (voir Fig. 4.7) à un mouvement dans le plan (voir Fig. 4.8).

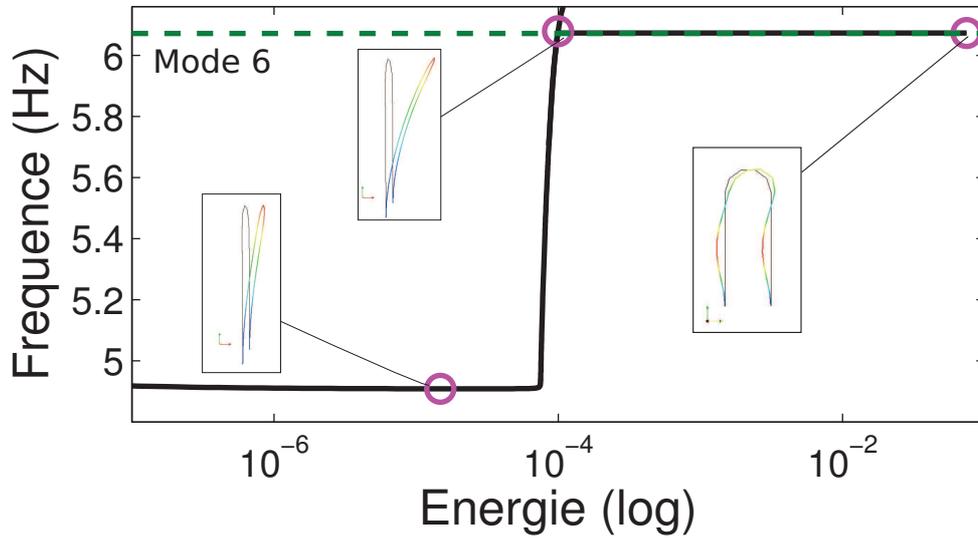


FIGURE 4.6 – FEP du premier MNL du tube cintrée en flexion hors-plan pour $H_l = 13$.

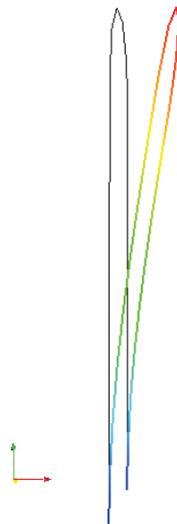


FIGURE 4.7 – Déformée issue de la famille de solutions périodiques du premier MNL en flexion hors-plan ($E = 1,48 \times 10^{-5}$ J, $f = 4,91$ Hz). Mouvement purement hors-plan.

L'analyse modale non-linéaire numérique qu'on a effectuée sur un modèle de tube permet de contredire le présupposé théorique qui nous dit qu'on ne peut pas avoir un mouvement dans le plan à basse fréquence. En effet, l'influence de la non-linéarité provoque l'apparition de résonances internes et donc des interactions entre les modes. Cet aspect influence nécessairement la durée de vie de ce type de structure.

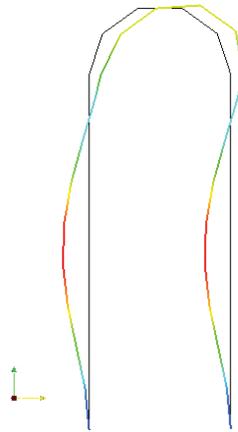


FIGURE 4.8 – Déformée issue de la famille de solutions périodiques du premier MNL en flexion hors-plan ($E = 0,0746$ J, $f = 6,0729$ Hz). Mouvement purement dans le plan.

4.4 Étude expérimentale

On a vu précédemment qu'il existe une résonance interne entre un MNL hors-plan avec un MNL dans le plan. On essaiera, ici, de confirmer ce résultat de manière expérimentale. Le but n'est pas de retrouver le MNL expérimentalement mais de confirmer la présence de mouvement dans le plan pour une excitation de la structure à basse fréquence.

4.4.1 Dispositif d'essai

Pour la campagne expérimental, on utilise le banc GV-LOCAL représenté sur la Fig. 4.9 dont on peut retrouver une étude relativement complète dans [96]. Celui-ci est composé d'une portion de tube cintré de Générateur de Vapeur, dont les dimensions sont données par la Table 4.1, bridé à sa base pour simuler un encastrement. Les deux parties verticales du tube sont maintenues par un obstacle quadrifolié, que l'on peut voir dans la Fig. 4.10, qui reprend la géométrie d'une plaque entretoise. On excite le tube selon un angle de 45° (voir schéma Fig. 4.12) à l'aide d'un pot vibrant B&K 4809, par un sinus balayé, comme on peut le voir Fig. 4.11.

Les accélérations selon DX , DY et DZ sont mesurées en 12 points à l'aide d'accéléromètres PCB 356A15. La position des capteurs est déterminé par la Fig. 4.12. Les signaux sont numérisés et sauvegardés à l'aide d'un système d'acquisition LMS SCADAS Mobile à fréquence d'échantillonnage $f_e = 256$ Hz.

Le dispositif présenté ci-dessus nous permet d'exciter le tube avec une force de niveau suffisamment élevé pour que le tube entre en contact avec les obstacles. Le balayage en fréquence sera réalisé sur une plage en fréquence proche de la fréquence du premier mode hors-plan. L'objectif est de capturer une réponse périodique à une fréquence plus élevée. En effet, on rappelle que lorsqu'on excite une structure au voisinage de son mode non-linéaire, comme dans le cas linéaire, la structure entre en résonance. Par conséquent, on cherche ici à ce que la structure entre en résonance au voisinage de la résonance interne que l'on a identifié par le biais du calcul numérique effectué précédemment.



FIGURE 4.9 – Vue global du banc GV local

Le balayage en sinus de type linéaire est effectué sur la plage $[4, 9]$ Hz et sur une durée de 512 secondes correspondant à une acquisition de $512 \times f_e = 131072$ points.

Les données temporelles obtenues seront analysées par transformée de Fourier à fenêtre glissante à l'aide d'une fenêtre type Hann de taille 2048 points donnant une discrétisation fréquentiel de $\Delta f = 0.1251$ Hz. Nous procéderons aussi à l'estimation de déformées modales en utilisant le principe des déformées en fonctionnement [87].

4.4.2 Discussion des résultats expérimentaux

La Fig. 4.13 représente en terme de module le résultat de l'analyse de Fourier à fenêtre glissante pour les données mesurées par l'accéléromètre placé sur le onzième noeud dans la direction DY (voir Fig. 4.12). On observe une concentration de l'énergie sur des droites obliques (Fig. 4.13 en haut), la plus basse correspondant à la fréquence de balayage et les autres à ses harmoniques.

De plus, Fig. 4.13 en bas, une zone énergétiquement élevée apparaît autour de la fréquence d'analyse $f = 46,1$ Hz correspondant à un multiple de 7 de la fréquence d'excitation.

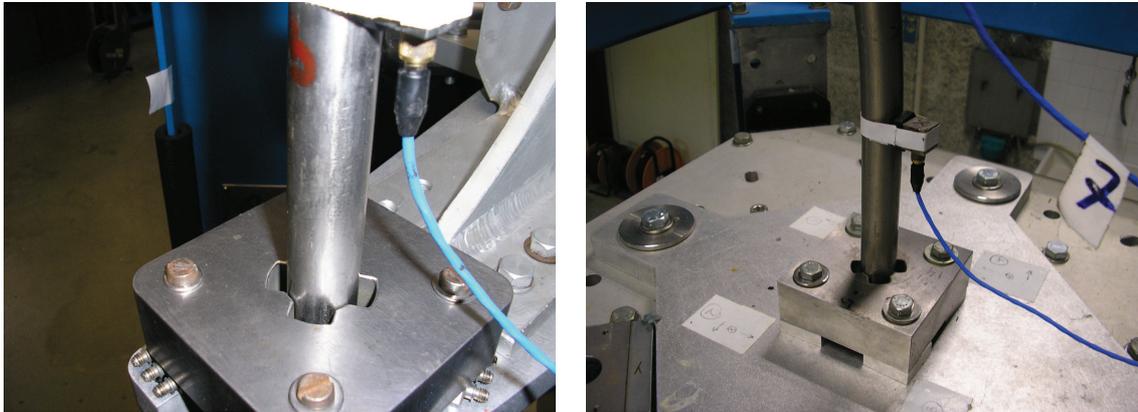


FIGURE 4.10 – Pied gauche maintenu par un obstacle quadrifolié (à gauche). Pied droit maintenu par un obstacle quadrifolié (à droite).

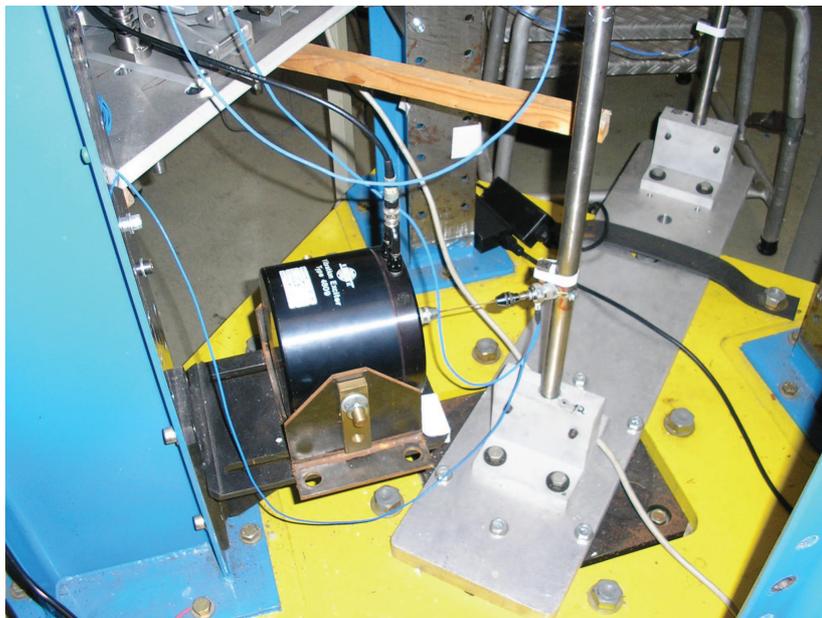


FIGURE 4.11 – Pot vibrant qui excite le pied gauche selon un angle de 45° , par un sinus balayé.

Les déformées estimées sont représentées Fig. 4.14 à partir des mesures aux voisinages de $t = 260$ s. Pour la fréquence d'excitation $f = 6,625$ Hz proche de la fréquence de résonance du Mode 1, le mouvement se localise principalement sur le pied gauche. Pour la fréquence d'excitation plus grande, $f = 46,13$ Hz, le mouvement est de type plan avec un pivotement autour des points de contact avec la plaque entretoise. Cette déformée est similaire à la déformée du Mode 6, c'est-à-dire du troisième mode de flexion dans le plan. On peut confirmer le résultat en traçant Fig. 4.15 l'amplitude en fonction de la fréquence du noeud de référence, le onzième noeud dans la direction DY .

On a donc montré, qu'en excitant une structure, sous forme de tube cintré et deux obstacles quadrifoliés, à une fréquence de l'ordre de 6,6 Hz, on obtient une réponse périodique à une

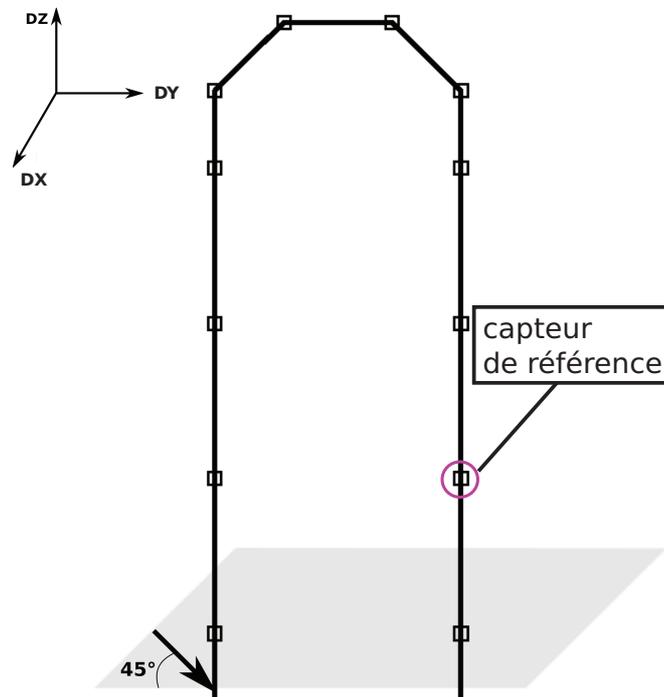


FIGURE 4.12 – Position des capteurs sur la structure et capteur de référence entouré par un cercle violet. Direction de la force d'excitation.

fréquence plus élevée, de l'ordre de 46 Hz, avec une déformée majoritairement dans le plan. L'hypothèse de départ est donc confirmée expérimentalement.

4.5 Conclusion

L'étude d'un tube en U à l'aide de modes linéaires montre que la plupart des modes dans le plan se produisent à haute fréquence. Notre hypothèse de départ suppose que la prise en compte des non-linéarités dans l'analyse modale, peut remettre en cause la validité de l'énoncé précédent. En effet, on a vu qu'en présence de non-linéarités, l'existence de résonances internes, c'est-à-dire de l'interaction entre les différents modes de la structure étaient relativement courant. Notre supposition était donc qu'il pouvait exister une résonance interne entre le premier mode non-linéaire hors-plan et un mode non-linéaire dans le plan.

Après une étude numérique en utilisant le nouvel opérateur *MODE_NON_LINE* introduit dans *Code_Aster*, on a calculé le premier mode non-linéaire hors-plan. Celui-ci contient une résonance interne 8 : 1 avec le sixième mode, c'est-à-dire le troisième mode dans le plan. Ainsi, on a pu démontrer la validité de notre hypothèse de manière numérique.

Pour confirmer cette hypothèse, on a effectué également une étude expérimentale, l'idée étant de faire émerger une solution périodique au voisinage de la résonance interne identifiée précédemment de manière numérique. L'excitation sinusoïdale d'un tube en U au voisinage de la fréquence $f = 6.6$ Hz, montre que l'énergie se concentre principalement aux alentours de 46 Hz, avec un mouvement majoritairement dans le plan. L'hypothèse est donc validée expérimentalement.

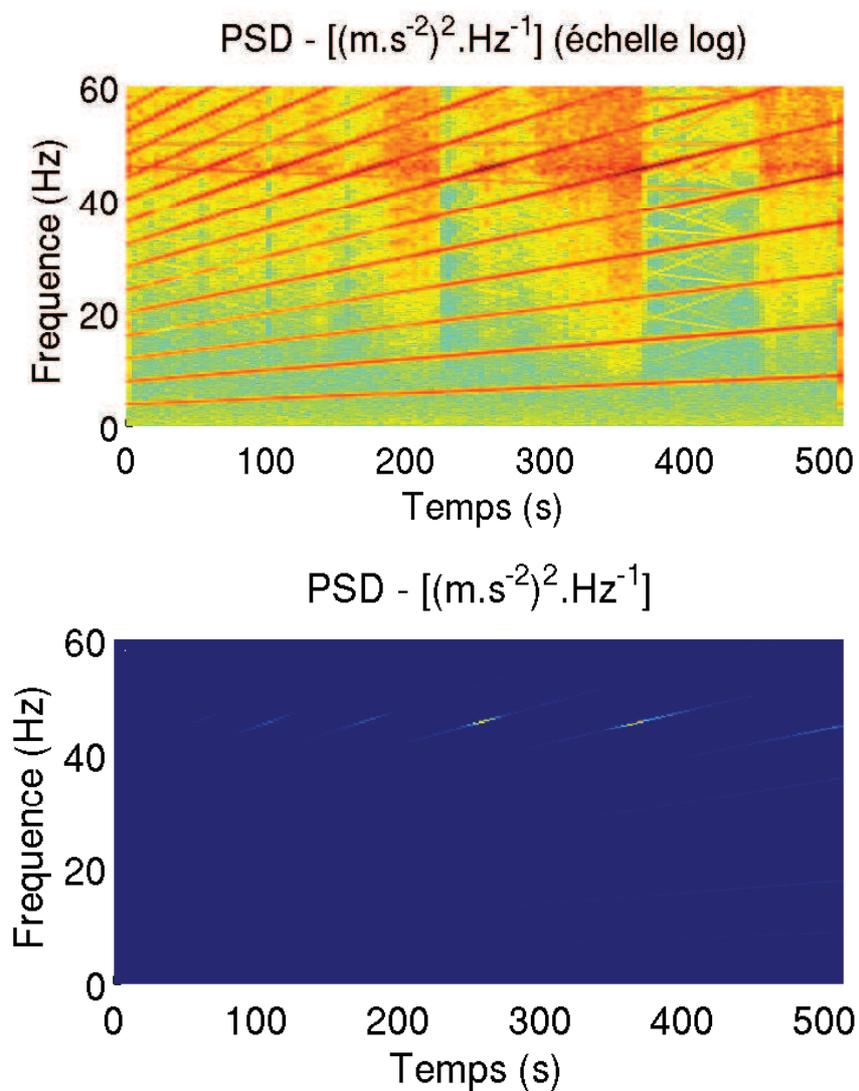


FIGURE 4.13 – PSD en fonction de la fréquence et du temps.

Ces résultats nous montrent la nécessité d'une analyse modale non-linéaire, celle-ci pouvant remettre en cause des conclusions issues d'une analyse modale linéaire classique, comme la durée de vie des structures en terme de fatigue vibratoire.

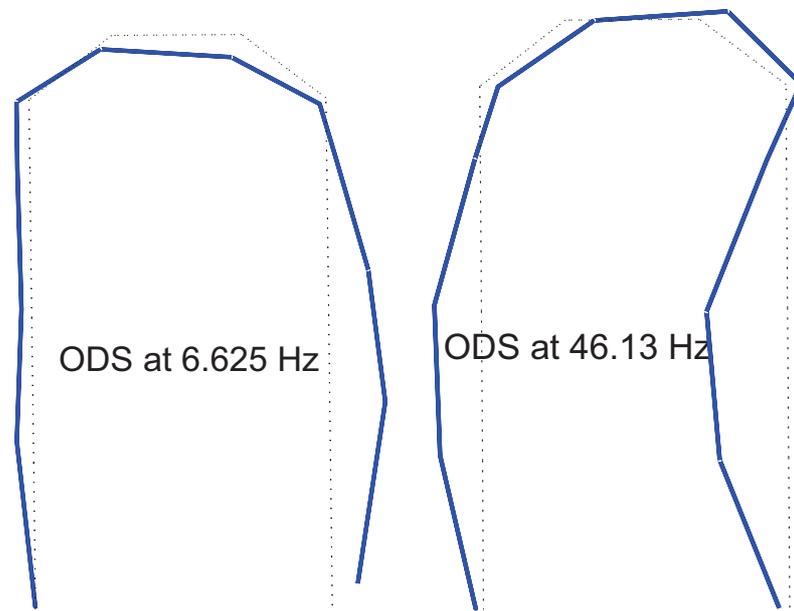


FIGURE 4.14 – Déformées en fonctionnement (ODS) au voisinage de $t = 260$ s à la fréquence $f = 6.625$ Hz (à gauche) et pour la septième harmonique, $f = 46.13$ Hz (à droite).

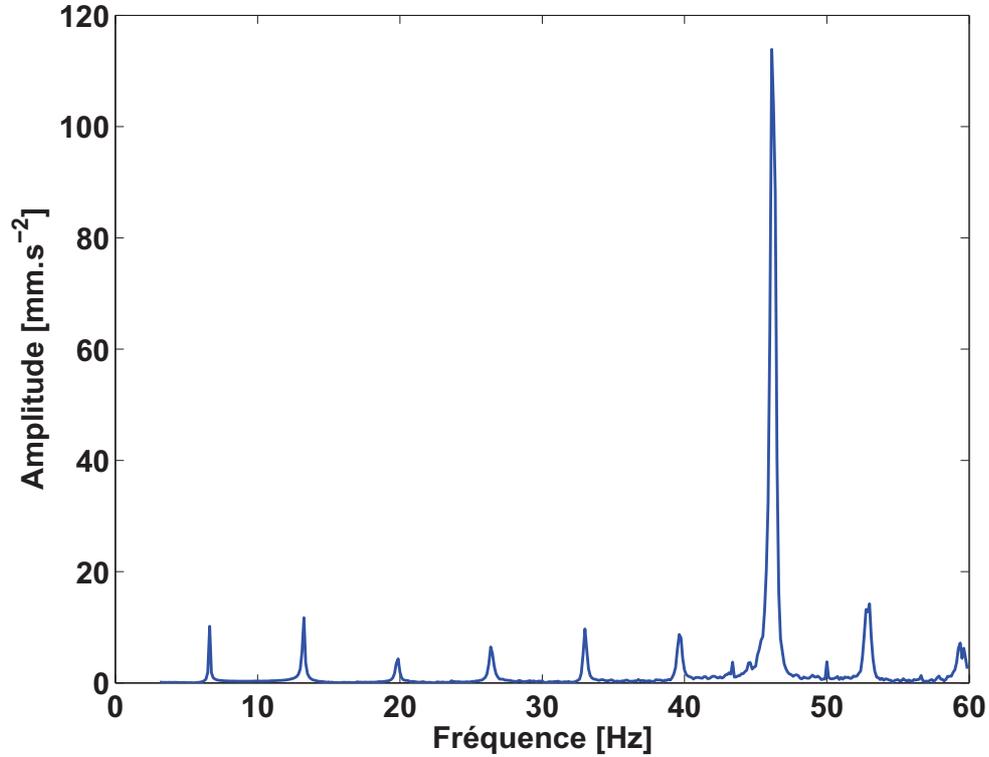


FIGURE 4.15 – Amplitude en fonction de la fréquence du onzième noeud dans la direction DY .

Conclusions et Perspectives

Le concept de mode non-linéaire (MNL) est un outil qui devient pratiquement accessible à l'ingénieur, dans un contexte de calcul de structures faisant intervenir des modélisations non-linéaires de plus en plus précises. Les MNLs permettent, entre autre, de mieux comprendre certains phénomènes non-linéaires inexpliqués, voir inattendus, d'un point de vue linéaire. Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans cet effort de rendre accessible à l'ingénieur un calcul de modes non-linéaires. Les contributions se situent principalement dans la réduction du temps de calcul des méthodes numériques, dans leur adaptation aux modèles industriels à plusieurs dds, mais aussi dans la proposition d'une méthodologie pour effectuer une étude.

Pour EDF R&D, un certain nombre de structures étudiées dans le contexte de la dynamique vibratoire présentent des non-linéarités localisées avec du contact. Ces non-linéarités sont souvent modélisées sous la forme de butées élastiques à jeu. Dans ce contexte, on a proposé une modélisation comportant une régularisation des non-linéarités pour pouvoir appliquer des méthodes numériques robustes pour le calcul des modes non-linéaires. En effet, la combinaison de la méthode d'équilibrage harmonique (EH) et de la méthode asymptotique numérique (MAN), c'est-à-dire la méthode EHMANN, est une méthode robuste et éprouvée pour le calcul de solutions périodiques. La prise en compte de la dissipation dans un calcul de MNL étant encore difficile aujourd'hui, on se concentre sur le cas conservatif en définissant un mode non-linéaire comme une famille de solutions périodiques. Toutefois les modèles que l'on souhaite étudier sont issus de modélisations éléments finis avec un nombre de degrés de liberté élevé. De plus, les non-linéarités traitées étant une régularisation de modèles de contacteur, il est nécessaire d'utiliser un grand nombre d'harmoniques pour les modéliser à l'aide de séries de Fourier. Les temps de calcul sont par conséquent importants.

Notre contribution principale a été de remédier à ce problème par des améliorations de la méthode EHMANN. En résolvant le système au second ordre, en introduisant l'algorithme Alternating Fourier Transform (AFT) et par une optimisation du calcul de la matrice jacobienne. Ces éléments ont permis d'avoir un algorithme beaucoup plus performant, sans diminuer la robustesse. Un autre apport a été de dissocier le nombre d'harmoniques des variables suivant leur spécificités physiques, en l'occurrence les variables de déplacement et les forces de contact régularisées. Par ce procédé, on a augmenté la performance et accru la robustesse de l'algorithme en permettant un meilleur contrôle des résonances internes. Pour différencier la méthode initiale de celle comportant ces améliorations, on a nommé cette dernière Fast-EHMANN.

Les premiers développements de la Fast-EHMANN ont été effectués principalement autour du logiciel MANLAB, qui implémente la méthode EHMANN. Cependant, l'objectif étant d'avoir un outil pour l'étude de structures industrielles, la méthode Fast-EHMANN a été également implémentée dans le code de calcul industriel *Code_Aster*.

La performance de l'outil développé a permis de montrer son utilité pour l'étude détaillée de systèmes de petite taille, tel un système à 2 ddl doté d'une non-linéarité de contact bilatéral.

On a pu observer que les modes non-linéaires sont définis sur une plage de fréquence qu'on peut déterminer a priori. Aussi, on a vu qu'il existe un certain nombre de résonances internes avec les autres modes non-linéaires, dépendant de la raideur de butée. De plus, lorsque la non-linéarité est symétrique, des phénomènes de brisures de symétries sont observées pour les résonances internes paires.

A l'aide de systèmes académiques, une poutre en flexion et une barre en traction, une méthodologie a été mise au point, aidée des observations effectuées sur le système précédent. La méthodologie porte principalement sur le choix de l'ordre de troncature des harmoniques, H_l , pour le déplacement. On a vu que le mode non-linéaire évolue sur une certaine plage de fréquence ; le choix de H_l va nous permettre de déterminer quels modes non-linéaires vont interagir avec le MNL calculé. Auparavant, pour obtenir la plage de fréquence il suffit de faire un premier calcul avec $H_l = 1$.

Enfin, pour démontrer à la fois la capacité de l'outil à traiter des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, mais aussi l'utilité d'une analyse modale non-linéaire, une étude a été effectuée sur un tube cintré représentatif des tubes que l'on rencontre dans certaines structures des centrales de production d'électricité d'EDF. Le but de cette étude était de démontrer qu'une analyse modale linéaire n'est pas toujours suffisante pour statuer sur la durabilité des structures. Une analyse modale linéaire nous indique que pour ce tube des mouvements dans son plan sont impossibles à basse fréquence (autour de 5 Hz). En effet, les modes faisant intervenir des mouvements dans le plan sont plutôt à haute fréquence. Ainsi, en utilisant la méthodologie proposée auparavant, un calcul du premier mode non-linéaire a permis de mettre en évidence une résonance interne entre le premier MNL et le sixième MNL, et donc la possibilité de mouvement dans le plan à basse fréquence. Ce résultat a été confirmé par une étude expérimentale.

Perspectives

De nombreuses perspectives existent pour apporter encore des améliorations aux méthodes numériques ainsi qu'aux applications :

- (i) La dissociation des harmoniques, entre les variables de déplacement et les forces de contact, impose un choix a priori des ordres de troncature (H_l et H_{nl}). Pour le choix de H_l , une méthodologie a été proposée, basée sur la sélection d'une plage de fréquence de modes avec lesquels le mode calculé va interagir. Pour H_{nl} , l'expression analytique de la force de contact étant connue, il peut être utile de l'utiliser pour statuer sur la pertinence du choix de H_{nl} . Des techniques d'adaptation des harmoniques ont été développées récemment [36, 44, 57], leur utilisation peut être bénéfique pour un choix optimal de H_{nl} .
- (ii) Lors d'un calcul avec la MAN, le temps de calcul est principalement concentré sur le calcul de la matrice jacobienne. Les améliorations apportées à la méthode ont permis de réduire ce coût, mais celui-ci reste tout de même prépondérant. Le calcul de cette matrice s'effectuant colonne par colonne et étant indépendant, l'utilisation du parallélisme permettrait de réduire le temps de calcul. Les principaux freins, aujourd'hui, sont purement informatiques puisque liés aux structures de données de stockage des matrices.
- (iii) Les systèmes traités ici possèdent des non-linéarités localisées ; par conséquent l'utilisation de méthode de sous-structuration pour la réduction de modèle, du type Craig-Bampton, peut être un moyen simple pour traiter des systèmes de très grandes tailles avec des temps de calcul raisonnables.

- (iv) Les systèmes mécaniques pour lesquels on souhaite calculer les modes non-linéaires ont souvent la propriété d'être hamiltoniens. Il serait intéressant d'explorer la piste des algorithmes [41] dits symplectiques, dédiés à ce type de systèmes. La remarque est aussi vraie pour le calcul de stabilité, où il a été montré [79] la supériorité du schéma de Newmark, qui est un schéma symplectique, sur les autres méthodes.
- (v) Les non-linéarités qui ont été introduites dans ce travail sont relativement restreintes. Un élargissement de ces non-linéarités pour positionner les obstacles dans n'importe quelle direction permettrait d'élargir les possibilités de modélisation.
- (vi) Les résultats numériques du chapitre 4 ont été confirmés par une étude expérimentale sans que le modèle numérique soit recalé et avec des conditions aux limites relativement différentes au niveau de l'encastrement et des obstacles. Il serait intéressant d'effectuer une étude numérique et expérimentale plus rigoureuse pour une meilleure comparaison.
- (vii) Enfin, il sera intéressant d'envisager la prise en compte de la dissipation, notamment au niveau des impacts, pour calculer à terme, des modes linéaires amortis.

Bibliographie

- [1] Acary, V. and Brogliato, B. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems : Applications in mechanics and electronics*. Springer, 2008.
- [2] Andreaus, U., Casini, P., and Vestroni, F. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 42 : 566–575, 2007.
- [3] Angles, J. *Étude qualitative des vibrations en présence d’obstacle d’un système mécanique*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1996.
- [4] Apiwattanalungarn, P., Shaw, S. W., and Pierre, C. Component mode synthesis using nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics*, 41 :17–46, 2005.
- [5] Arquier, R. *Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures*. PhD thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2007.
- [6] Arquier, R., Bellizzi, S., Bouc, R., and Cochelin, B. Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers and Structures*, 84 :1565–1576, 2006.
- [7] Ballard, P. Contribution à l’étude de quelques problèmes unilatéraux de la mécanique des solides. Mémoire HDR, Université Aix-Marseille II, 2010.
- [8] Bellet, R. *Vers une nouvelle technique de contrôle passif du bruit : absorbeur dynamique non linéaire et pompage énergétique*. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I, 2010.
- [9] Bellet, R., Cochelin, B., Côte, R., and Mattei, P.-O. Enhancing the dynamic range of targeted energy transfer in acoustics using several nonlinear membrane absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :2768–2791, 2012.
- [10] Bellet, R., Cochelin, B., Herzog, P., and Mattei, P.-O. Experimental study of targeted energy transfer from an acoustic system to a nonlinear membrane absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :2768–2791, 2010.
- [11] Bellizzi, S. and Bouc, R. A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 287 (3) :545–569, 2005.
- [12] Bellizzi, S. and Bouc, R. An amplitude-phase formulation for nonlinear modes and limit cycles through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 300 (3) :896–915, 2007.

- [13] Blanc, F., Touzé, C., Mercier, J.-F., Ege, K., and Bonnet Ben-Dhia, A.-S. On the numerical computation of nonlinear normal modes for reduced-order modelling of conservative vibratory systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36 (2) :520–539, 2013.
- [14] Boiteau, O. *Solveurs modaux et résolution du problème généralisé*. Code_Aster, 2013.
- [15] Boivin, N., Pierre, C., and Shaw, S.W. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 182 (2) :336–341, 1995.
- [16] Cameron, T. M. and Griffin, J. H. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56 :149–154, 1989.
- [17] Chen, S.-L. and Shaw, S.W. Normal modes for piecewise linear vibratory systems. *Nonlinear Dynamics*, 10 :135–164, 1996.
- [18] Cochelin, B., Damil, N., and Potier-Ferry, M. *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoisier, 2007.
- [19] Cochelin, B., Herzog, P., and Mattei, P.-O. Experimental evidence of energy pumping in acoustics. *Comptes Rendus Mécanique*, 334 :639–644, 2006.
- [20] Cochelin, B. and Medale, M. Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of asymptotic numerical method in the vicinity of bifurcations. *Journal of Computational Physics*, 236 :594–607, 2013.
- [21] Cochelin, B. and Vergez, C. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324 (1-2) :243–262, 2009.
- [22] Cooke, C. H. and Struble, R. A. On the existence of periodic solutions and normal mode vibrations of nonlinear systems. *Quarterly of applied mathematics*, 24 :177–193, 1966.
- [23] Craig, R. and Bampton, M. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6 (7) :1313–1319, 1968.
- [24] di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R., and Kowalczyk, P. *Piecewise-smooth dynamical systems : Theory and applications*. Springer, 2008.
- [25] Didier, J., Sinou, J.-J., and B., Faverjon. Nonlinear vibrations of a mechanical system with non-regular nonlinearities and uncertainties. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18 (11) :3250–3270, 2013.
- [26] Doedel, E. Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations. Technical report, Concordia university, 2010.
- [27] Doedel, E., Keller, H. B., and Kernevez, J. P. Numerical analysis and control of bifurcation problems (i) bifurcation in finite dimensions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3 :493–520, 1991.
- [28] Dulac, H. Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. *Bulletin de la société mathématiques de France*, 40 :324–383, 1912.
- [29] Duvaut, G. and Lions, J.L. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.

- [30] Ervin, E. K. and Wickert, J. A. Repetitive impact response of a beam structure subjected to harmonic base excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 307 :2–19, 2000.
- [31] Floquet, G. *Sur la théorie des équations différentielles linéaires*. Gauthier-Villars, 1879.
- [32] Friedmann, P. Numerical methods for determining the stability and response of periodic systems with applications to helicopter rotor dynamics and aeroelasticity. *Computers & Mathematics with Applications*, 12 :131–148, 1986.
- [33] Gendelman, O., Manevitch, L., Vakakis, A. F., and R., M'Closkey. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part i - dynamics of the underlying hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68 :34–41, 2001.
- [34] Giannini, O., Casini, P., and Vestroni, F. Experimental evidence of bifurcating nonlinear normal modes in piecewise linear systems. *Nonlinear Dynamics*, 63 (4) :655–666, 2011.
- [35] Gourdon, E., Alexander, N.A., Taylor, C.A., Lamarque, C.H., and Pernot, S. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of sound and vibration*, 300 :522–551, 2007.
- [36] Grolet, A. and Thouverez, F. On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30 :43–60, 2012.
- [37] Guckenheimer, J. and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [38] Hadjedemetriou, J. D. Periodic orbits in gravitational systems. In Steves, B.A., Maciejewski, A.J., and Hendry, M., editors, *Chaotic Worlds : from Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems*, volume 227, pages 43–79, 2006.
- [39] Hairer, E. and Wanner, G. *Solving ordinary differential equations I : non-stiff problems*. Springer series in computational mathematics, 1996.
- [40] Hairer, E. and Wanner, G. *Solving ordinary differential equations II : stiff and differential-algebraic problems*. Springer series in computational mathematics, 1996.
- [41] Hairer, E., Wanner, G., and Lubich, C. *Geometric numerical integration : Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*. Springer Series in Computational Mathematics, 2006.
- [42] *L'accident de rupture de tube(s) de générateur de vapeur dans une centrale nucléaire*. IRSN, 2013. www.irsn.fr (dernière visite le 06/06/2013).
- [43] *Guideline for Fluid-elastic Vibration Evaluation of U-bend Tubes in Steam Generators*. Japan Society of Mechanical Engineers, 2002.
- [44] Jaumouillé, V., Sinou, J.-J., and Petitjean, B. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems - application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :4048–4067, 2010.
- [45] Jezequel, L. and Lamarque, C.H. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149 (3) :429–459, 1991.
- [46] Jiang, D., Pierre, C., and Shaw, S. W. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 272 :869–891, 2004.

- [47] Jiang, D., Pierre, C., and Shaw, S. W. Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of sound and vibration*, 288 :791–812, 2005.
- [48] Jones, S. and Legrand, M. On solving one-dimensional partial differential equations with spatially dependent variables using the wavelet-galerkin method. *Journal of Applied Mechanics*, 80 (6), 2013.
- [49] Jones, S. and Legrand, M. Vibration of mechanical systems undergoing regularized unilateral contact conditions through the wavelet balance method. Under review, 2013.
- [50] Karkar, S. *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 2012.
- [51] Keller, H. B. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In *Applications of Bifurcation Theory*, pages 359–384. (Rabinowitz, P. ed.) Academic press, 1977.
- [52] Kelley, A. On the liapounov subcenter manifold. *Journal of mathematical analysis and applications*, 18 :472–478, 1967.
- [53] Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J.C., and Vakakis, A.F. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :170–194, 2009.
- [54] Kudawoo, A.D. *Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse*. PhD thesis, Université d’Aix-Marseille, 2012.
- [55] Kuss, F. and Lebon, F. Stress based finite element methods for solving contact problems : comparisons between various solution methods. *Advances in Engineering Software*, 40 (8) :697–706, 2009.
- [56] Lagrange, J. L. *Recherches sur la nature et la propagation du son*. Miscellanea Taurinensia, t. I, 1759.
- [57] Laxalde, D. *Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [58] Laxalde, D. and Legrand, M. Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces. *Computational Mechanics*, 47 :469–478, 2011.
- [59] Laxalde, D. and Thouverez, F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4-5) :1009–1025, 2009.
- [60] Lazarus, A. and Thomas, O. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338 (9) :510–517, 2010.
- [61] Lee, Y.S., Kerschen, G., McFarland, D.M., Hill, W.J., Nickkawde, C., Strganac, T.W., Bergman, L.A., and Vakakis, A.F. Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2 : Experiments. *AIAA Journal*, 45 :2391–2400, 2007.

- [62] Lee, Y.S., Vakakis, A.F., Bergman, L.A., McFarland, D.M., and Kerschen, G. Suppression of aeroelastic instabilities by means of targeted energy transfers : Part i, theory. *AIAA Journal*, 45 (3) :693–711, 2007.
- [63] Lee, Y. S., Kerschen, G., Vakakis, A.F., P., Panagopoulos, Bergmand, L. A., and McFarland, D. M. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. *Physica D*, 204 :41–69, 2005.
- [64] Lee, Y. S., Nucera, F., Vakakis, A.F., McFarland, D. M., and Bergmand, L. A. Periodic orbits, damped transitions and targeted energy transfers in oscillators with vibro-impact attachments. *Physica D*, 238 :1868–1896, 2009.
- [65] Lewandowski, R. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part i : theoretical background. *International journal of solids and structures*, 34 :1925–1947, 1997.
- [66] Lewandowski, R. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part ii : numerical strategy and examples. *International journal of solids and structures*, 34 :1949–1964, 1997.
- [67] Liapounoff, A. (traduit par Davaux E.). *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 1907.
- [68] Mariani, R., Bellizzi, S., Cochelin, B., Herzog, P., and Mattei, P.-O. Toward an adjustable nonlinear low frequency acoustic absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 330 : 5657–5668, 2011.
- [69] Martinez, D. R., Carne, T. G., Gregory, D. L., and Miller, A. K. Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. *Computers & Structures*, 78 : 583–590, 1984.
- [70] MHI. Root cause analysis report for tube wear identified in the unit 2 and unit 3 steam generators of san onofre nuclear generating station. Technical report, NRC, 2013.
- [71] Mikhlin, Y.V., Vakakis, A.F., and Salenger, G. Direct and inverse problems encountered in vibro-impact oscillations of a discrete system. *Journal of Sound and Vibration*, 216(2) :227–250, 1998.
- [72] Moser, J. Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by alan weinstein. *Communication on pure and applied mathematics*, 29 :727–747, 1976.
- [73] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T. *Nonlinear oscillations*. Wiley, 1979.
- [74] Noel, J.P., Renson, L., Kerschen, G., and Newerla, A. Experimental identification of a nonlinear space structure. In *Proceedings of the 12th European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Environmental Testing*, 2012.
- [75] Nucera, F., Lo Laconoa, F., McFarland, D.M., Bergman, L.A., and Vakakis, A.F. Application of broadband nonlinear targeted energy transfers for seismic mitigation of a shear frame : Experimental results. *Journal of sound and vibration*, 313 :57–76, 2008.
- [76] Pascal, M. Dynamics and stability of a two degree of freedom oscillator with an elastic stop. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 1 :94–102, 2006.

- [77] Peeters, M., Viguié, R., Sérandour, G., Kerschen, G., and Golinval, J.-C. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :195–216, 2009.
- [78] Peletan, L. *Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non-linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor-stator*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2012.
- [79] Peletan, L., Baguet, S., Torkhani, M., and Jacquet-Richardet, G. A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. *Nonlinear Dynamics*, 72(3) :671–682, 2013.
- [80] Pesheck, E., Pierre, C., and Shaw, S.W. A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249 (5) :971–993, 2002.
- [81] Pesheck, E., Pierre, C., and Shaw, S. W. Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes. *Mathematical and Computer*, pages 1085–1097, 2001.
- [82] Pierre, C., Jiang, D., and Shaw, S. W. Nonlinear normal modes and their application in structural dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006 (ID 10847) :1–15, 2006.
- [83] Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthiers-Villars, 1892.
- [84] Pérignon, F. *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non-linéaires*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 2004.
- [85] Renson, L. and Kerschen, G. Numerical computation of nonlinear normal modes of nonconservative systems. In *IDETC/CIE 2013*, 2013.
- [86] Renson, L., Kerschen, G., and Newerla, A. Nonlinear modal analysis of the smallsat spacecraft. In *Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 3. Proceedings of the 30th IMAC*, pages 45–60. Springer, 2012.
- [87] Richardson, M.H. Is it a mode shape, or an operating deflection shape? *Sound & Vibration*, 30th Anniversary Issue, 1997.
- [88] Rosenberg, R. M. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29 :7–14, 1962.
- [89] Rosenberg, R. M. On nonlinear vibrations of systems with many degree of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 242 (9) :155–242, 1966.
- [90] Rosenberg, R. M. and Atkinson, C. P. On the natural modes and their stability in non-linear two-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 26 :377–385, 1959.
- [91] Seydel, R. *Practical bifurcation and stability analysis*. Springer, 2010 (third edition).
- [92] Shaw, S.W. and Pierre, C. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991.
- [93] Shaw, S.W. and Pierre, C. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164 :85–124, 1993.

- [94] Shaw, S.W. and Pierre, C. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169 (3) :319–347, 1994.
- [95] Strutt, J.W. (Baron Rayleigh). *Theory of sound, Vol. 1*. Dover Publications Inc., 1998 (première édition en 1877).
- [96] Thenint, T. *Etude d'un système non-linéaire à chocs sous excitation large bande. Application à un tube de générateur de vapeur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2011.
- [97] Toulemonde, C. *Dynamique des oscillateurs à impacts*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 1997.
- [98] Touzé, C. A normal form approach for non-linear normal modes. *Publications du LMA*, 156 :15–38, 2003.
- [99] Touzé, C. and Amabili, M. Non-linear normal modes for damped geometrically non-linear systems : application to reduced-order modeling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, 298 :958–981, 2006.
- [100] Touzé, C. and Amabili, M. Reduced-order models for nonlinear vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells : Comparison of pod and asymptotic nonlinear normal modes methods. *Journal of fluids and structures*, 23 (6) :885–903, 2007.
- [101] Touzé, C., Amabili, M., and Thomas, O. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197 :2030–2045, 2008.
- [102] Touzé, C., Thomas, O., and Chaigne, A. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273 :77–101, 2004.
- [103] Vakakis, A.F. Non-linear normal modes (nnms) and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(1) :3–22, 1997.
- [104] Vakakis, A.F., Gendelman, O.V., Bergman, L.A., McFarland, D.M., Kerschen, G., and Lee, Y.S. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems I & II*. Springer, 2008.
- [105] Vakakis, A. F. and Gendelman, O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part ii - resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, 68 :42–48, 2001.
- [106] Vakakis, A. F., Mikhlin, L. I., and Pilipchuck, Y. V. Zevin, A. A. *Normal modes and localization in nonlinear systems*. Wiley, 1996.
- [107] Vestroni, F., Luongo, A., and Paolone, A. A perturbation method for evaluating non-linear normal modes of a piecewise linear two-degrees-of-freedom system. *Nonlinear Dynamics*, 54 (4) :379–393, 2008.
- [108] Von Groll, G. and Ewins, D.J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of sound and vibration*, 241(2) :223–233, 2001.
- [109] Weinstein, A. Normal modes for nonlinear hamiltonian systems. *Inventiones mathematicae*, 20 :47–57, 1973.

- [110] Woo, K., Rodger, A. A., Neilson, R. D., and Wiercigroch, M. Application of the harmonic balance method to ground moling machines operating in periodic regimes. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11 :2515–2525, 2000.
- [111] Yakubovich, V. A. and Starzhinskii, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*. John Wiley & Sons, 1975.

Annexe A

Produit de deux séries de Fourier : Analytique vs. DFT

Soient deux séries de Fourier, $X(t)$ et $Y(t)$, tronquées à un nombre d'harmoniques noté H .

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \sum_{k=1}^H X_{Ck} \cos(k\omega t) + X_{Sk} \sin(k\omega t) \\ Y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^H Y_{Ck} \cos(k\omega t) + Y_{Sk} \sin(k\omega t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On cherche à déterminer les coefficients de Fourier de,

$$Z(t) = X(t)Y(t) = Z_0 + \sum_{k=1}^H Z_{Ck} \cos(k\omega t) + Z_{Sk} \sin(k\omega t) \quad (\text{A.2})$$

Dans un premier temps, on présente comment utiliser la Discrete Fourier Transform (DFT) pour faire le produit entre deux séries de Fourier tronquées. Puis on fera la preuve de l'équivalence de cette méthode avec celle proposée dans l'annexe de [21].

A.1 Description de la méthode avec DFT

On rappelle que l'on possède comme seule donnée l'ensemble des coefficients de Fourier des variables $X(t)$ et $Y(t)$, qu'on réunit sous la forme de vecteurs,

$$\begin{cases} X^F = [X_0 \ X_{C1} \ \dots \ X_{CH} \ X_{S1} \ \dots \ X_{SH}] \\ Y^F = [Y_0 \ Y_{C1} \ \dots \ Y_{CH} \ Y_{S1} \ \dots \ Y_{SH}] \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

A.1.1 Le formalisme de la DFT

La première étape consiste transformer les vecteur décrits par l'Eq. (A.3) dans le formalisme nécessaire pour utiliser la DFT.

$$\begin{cases} X_0^D &= NX_0 \\ X_k^D &= \frac{N}{2}(X_{Ck} - iX_{Sk}) \quad , k = 1, \dots, H \\ X_{N-k}^D &= \frac{N}{2}(X_{Ck} + iX_{Sk}) \quad , k = 1, \dots, H \\ X_l^D &= 0 \quad , N - H + 2 \geq l \geq H + 1 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où N est la discrétisation temporelle que l'on souhaite obtenir après avoir appliqué la DFT inverse, la transformation inverse, s'écrivant,

$$\begin{cases} X_0 &= \frac{1}{N}X_0^D \\ X_{Ck} &= \frac{1}{N}(X_k^D + X_{N-k}^D) \quad , k = 1, \dots, H \\ X_{Sk} &= \frac{i}{N}(X_k^D - X_{N-k}^D) \quad , k = 1, \dots, H \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Pour simplifier les notation, on introduit une matrice rectangulaire P_1 qui permet la transformation décrite par l'Eq. (A.5). Pour la transformation inverse, c'est-à-dire le passage du formalisme DFT aux coefficients de Fourier, on utilisera la notation P_2 . Ainsi, on peut écrire,

$$\begin{cases} X^D &= P_1 X^F \\ X^F &= P_2 X^D \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

où $X^D = [X_0^D \ X_1^D \ \dots \ X_H^D \ 0 \ \dots \ 0 \ X_{N-H}^D \ \dots \ X_{N-1}^D]$

A.1.2 Matrice de transition

On peut maintenant définir la matrice de transition D de la DFT, qui permet le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma & \dots & \gamma^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma^{N-1} & \dots & \gamma^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

où $\gamma = \exp\left(-\frac{i2\pi}{N}\right)$

La matrice inverse D^{-1} permet le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel, et s'écrit,

$$D^{-1} = \frac{1}{N}D^* \quad (\text{A.8})$$

où $*$ désigne le conjugué. Ainsi si on note, $X^t = [X(t_0) \ \dots \ X(t_{N-1})] = [X_0^t \ \dots \ X_{N-1}^t]$, où $t_k = \frac{kT}{N}$, alors on peut revenir au domaine temporel de la manière suivante,

$$X^t = \frac{1}{N}D^*P_1X^F \quad (\text{A.9})$$

et de la même manière pour Y^F ,

$$Y^t = \frac{1}{N} D^* P_1 Y^F \quad (\text{A.10})$$

A.1.3 Choix de la discrétisation temporelle

Le choix de N est crucial pour que le résultat soit exact. Pour une utilisation classique de la DFT, le théorème de Shanon nous indique que la discrétisation nécessaire pour obtenir de manière exacte les $2H + 1$ coefficients de Fourier est de prendre $N \geq 2H + 1$. Dans notre cas, c'est le produit de deux séries de Fourier qui nous intéresse. Or si on effectue le produit de deux séries de Fourier possédant chacune $2H + 1$ coefficients alors le résultat sera une série de Fourier de $4H + 1$ harmoniques. Le choix le plus judicieux est donc de prendre $N = 4H + 1$.

A.1.4 Produit de deux séries de Fourier

On définit la fonction,

$$p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(X^t, Y^t) \mapsto Z^t = \begin{pmatrix} X_0 Y_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} Y_{N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Pour obtenir Z^F , on effectue l'opération suivante,

$$Z^F = P_2 D Z^t = P_2 D p(X^t, Y^t) = P_2 D p\left(\frac{1}{N} D^* P_1 X^F, \frac{1}{N} D^* P_1 Y^F\right) \quad (\text{A.12})$$

A.2 Preuve de l'équivalence entre les deux méthodes

On démontrera ici l'équivalence entre l'opération décrite par l'Eq. (A.12) et la méthode purement analytique proposé dans [21]. Pour cela, on déterminera ici de manière explicite les coefficients de Fourier Z^F .

A.2.1 Passage au domaine temporel

On passe au formalisme de la DFT les vecteurs X^F et Y^F ,

$$X^D = P_1 X^F = \frac{N}{2} [2X_0 (X_{C1} - iX_{S1}) \dots (X_{CH} - iX_{SH}) 0 \dots 0 (X_{CH} + iX_{SH}) \dots (X_{C1} + iX_{S1})] \quad (\text{A.13})$$

On applique la matrice de transition inverse D^{-1} ,

$$X_{l-1}^t = e_l^t \frac{1}{N} D^* P_1 X^F$$

$$= X_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^H (X_{Ck} - iX_{Sk}) (\gamma^*)^{(l-1)k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^H (X_{Ck} + iX_{Sk}) (\gamma^*)^{(l-1)(N-k)} \quad (\text{A.14})$$

pour $l = 1, \dots, N$.

A.2.2 Coefficient Z_0

On sait que,

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \frac{1}{N} Z_0^D \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N X_{l-1}^t Y_{l-1}^t \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left(X_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^H (X_{Ck} - iX_{Sk})(\gamma^*)^{(l-1)k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^H (X_{Ck} + iX_{Sk})(\gamma^*)^{(l-1)(N-k)} \right) \\
&\quad \times \left(Y_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^H (Y_{Cm} - iY_{Sm})(\gamma^*)^{(l-1)m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^H (Y_{Cm} + iY_{Sm})(\gamma^*)^{(l-1)(N-m)} \right)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Les propriétés de γ permettent de simplifier l'Eq. (A.15),

$$\begin{aligned}
Z_0 &= X_0 Y_0 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^H (X_{Ck} - iX_{Sk})(Y_{Ck} + iY_{Sk}) + (X_{Ck} + iX_{Sk})(Y_{Ck} - iY_{Sk}) \\
&= X_0 Y_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^H X_{Ck} Y_{Ck} + X_{Sk} Y_{Sk}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

On retrouve bien la formule obtenue dans [21].

A.2.3 Coefficient Z_{Cp}

On sait que, pour $p = 1, \dots, H$

$$\begin{aligned}
Z_{Cp} &= \frac{1}{N} (Z_p^D + Z_{N-p}^D) \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{l=1}^N X_{l-1}^t Y_{l-1}^t \gamma^{(l-1)(p-1)} + \sum_{l=1}^N X_{l-1}^t Y_{l-1}^t \gamma^{(l-1)(N-p-1)} \right)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

En utilisant les propriétés de γ , on obtient pour Z_p^D

$$\begin{aligned}
Z_p^D &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N X_{l-1}^t Y_{l-1}^t \gamma^{(l-1)(p-1)} \\
&= \frac{N}{2} X_0 (Y_{Cp} - iY_{Sp}) + \frac{N}{2} Y_0 (X_{Cp} - iX_{Sp}) \\
&\quad + \frac{N}{4} \sum_{k=1}^{p-1} (X_{Ck} - iX_{Sk})(Y_{Cp-k} - iY_{Sp-k}) \\
&\quad + \frac{N}{4} \sum_{k=p+1}^H (X_{Ck} - iX_{Sk})(Y_{Ck-p} - iY_{Sk-p}) + (X_{Ck-p} - iX_{Sk-p})(Y_{Ck} - iY_{Sk})
\end{aligned} \tag{A.18}$$

et pour Z_{N-p}^D ,

$$\begin{aligned}
Z_{N-p}^D &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N X_{l-1}^t Y_{l-1}^t \gamma^{(l-1)(N-p-1)} \\
&= \frac{N}{2} X_0 (Y_{Cp} + iY_{Sp}) + \frac{N}{2} Y_0 (X_{Cp} + iX_{Sp}) \\
&\quad + \frac{N}{4} \sum_{k=1}^{p-1} (X_{Ck} + iX_{Sk}) (Y_{Cp-k} + iY_{Sp-k}) \\
&\quad + \frac{N}{4} \sum_{k=p+1}^H (X_{Ck} + iX_{Sk}) (Y_{Ck-p} iY_{Sk-p}) + (X_{Ck-p} - iX_{Sk-p}) (Y_{Ck} + iY_{Sk})
\end{aligned} \tag{A.19}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
Z_{Cp} &= \frac{1}{N} (Z_p^D + Z_{N-p}^D) \\
&= X_0 Y_{Cp} + Y_0 X_{Cp} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} X_{Ck} Y_{Cp-k} - X_{Sk} Y_{Sp-k} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^H (X_{Ck} Y_{Ck-p} + X_{Sk} Y_{Sk-p}) + (X_{Ck-p} Y_{Ck} + X_{Sk-p} Y_{Sk})
\end{aligned} \tag{A.20}$$

On retrouve bien la formule obtenue dans [21].

A.2.4 Coefficient Z_{Sp}

En procédant de la même manière que pour Z_{Cp} , on obtient,

$$\begin{aligned}
Z_{Sp} &= \frac{i}{N} (Z_p^D - Z_{N-p}^D) \\
&= X_0 Y_{Sp} + Y_0 X_{Sp} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} X_{Ck} Y_{Sp-k} - X_{Sk} Y_{Cp-k} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^H (X_{Sk} Y_{Ck-p} - X_{Ck} Y_{Sk-p}) + (X_{Ck-p} Y_{Sk} - X_{Sk-p} Y_{Ck})
\end{aligned} \tag{A.21}$$

On retrouve bien la formule obtenue dans [21].

A.2.5 Conclusion

La formule décrite par l'Eq. (A.12) est équivalente à celle proposée dans [21]. Lorsqu'on applique la méthode, on utilise en fait l'algorithme FFT au lieu de la matrice de transition D introduite auparavant. Cet algorithme permet donc d'accélérer l'opération de convolution, qui consiste à chercher les coefficients de Fourier du produit de deux séries de Fourier.

Annexe B

Calcul optimal de la matrice jacobienne issue de la MAN

On rappelle qu'on cherche à calculer la matrice jacobienne du système d'Eq. (2.47) algébriques non-linéaires. On définit trois variables V_1 , V_2 et V_3 qui regroupent les inconnues du systèmes

$$\begin{cases} V_1 = [U_0 \ U_{C1} \ \cdots \ U_{CH_l} \ \cdots \ U_{S1} \ \cdots \ U_{SH_l}]^t \\ V_2 = [F_0^{nl} \ F_{C1}^{nl} \ \cdots \ F_{CH_{nl}}^{nl} \ \cdots \ F_{S1}^{nl} \ \cdots \ F_{SH_{nl}}^{nl} \ Z_0 \ Z_{C1} \ \cdots \ Z_{CH_{nl}} \ \cdots \ Z_{S1} \ \cdots \ Z_{SH_{nl}}]^t \\ V_3 = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \lambda \ \omega]^t \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

On sépare également les équations du système défini par la fonction \mathbf{R} , en trois sous-fonctions \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 et \mathbf{R}_3 , définies par

$$\mathbf{R}_1(V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}U_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_0^{nl} \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}U_{Ck} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{Ck}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1 \mathbf{M}U_{Ck} - k\gamma_2 \mathbf{U}_{Sk} \\ \mathbf{K}U_{Sk} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{Sk}^{nl} \end{pmatrix} - k^2\gamma_1 \mathbf{M}U_{Sk} - k\gamma_2 \mathbf{U}_{Ck} \end{pmatrix}_{k=1, \dots, H_l} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{R}_2(V_1, V_2, V_3) = \mathcal{G}_c + \mathcal{G}_l(\mathcal{X}) + \mathcal{G}_q(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \quad (\text{B.3})$$

où $\mathcal{X} = [V_1|_{I_{nl}} \ V_2]$, et les opérateurs \mathcal{G}_c , \mathcal{G}_l et \mathcal{G}_q sont ceux définis dans la section 2.4. A noter que $V_1|_{I_{nl}} = [U_0^{nl} \ U_{C1}^{nl} \ \cdots \ U_{CH_l}^{nl} \ \cdots \ U_{S1}^{nl} \ \cdots \ U_{SH_l}^{nl}]^t$.

$$\mathbf{R}_3(V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} \gamma_1 - \omega^2 \\ \gamma_2 - \lambda\omega \\ \sum_{k=1}^{H_l} k\omega \mathbf{U}_{Sk}^i \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d\mathbf{R}_3}{dV_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \omega e_i^t & & H_l \omega e_i^t \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d\mathbf{R}_3}{dV_2} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{d\mathbf{R}_3}{dV_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 1 & -\omega & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\sum_{k=1}^{H_l} k U_{S_k}^i \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

De cette manière, on évite de calculer les parties "creuses" de la matrice, ce qui permet de réduire le temps de calcul nécessaire à l'obtention de la matrice jacobienne.

Annexe C

Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system

Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system

E.H. Moussi^{a,b,*}, S. Bellizzi^a, B. Cochelin^a, I. Nistor^b

^a*LMA, CNRS, UPR 7051, Centrale Marseille, Aix-Marseille Univ, F-13402 Marseille Cedex 20, France*

^b*LaMSID, UMR EDF-CNRS-CEA 2832, 1 Avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart, France*

Abstract

A study of the Nonlinear Normal Modes (NNMs) of a two degrees of freedom mechanical system with a bilateral elastic stop for one of them is considered. The issue related to the non-smoothness of the impact force is handled through a regularization technique. In order to obtain the NNM, the Harmonic Balance Method (HBM) with a large number of harmonics, combined with the Asymptotic Numerical Method (ANM), is used to solve the regularized problem. The results are validated from periodic orbits obtained analytically in the time domain by direct integration of the non-regular problem. The two NNMs starting respectively from the two Linear Normal Modes (LNMs) of the associated underlying linear system are discussed. The frequency-energy plot is used to present a global vision of the behaviour of the two modes. Local vision of the dynamic of the mode are also provided using modal line plots. The first NNM shows an elaborate dynamics with the occurrence of multiple impacts per period, internal resonance and instabilities. On the other hand, the second NNM presents a more simple, almost linear, dynamics. The two NNMs converge asymptotically (for an infinite energy) toward two other LNMs, corresponding to the system with a gap equal to zero.

Keywords: Nonlinear Normal Mode, Piecewise linear system, Periodic orbit, Stability, Harmonic Balance Method, Asymptotic Numerical Method.

1. Introduction and industrial issue

Many engineering systems involves components with clearance and intermittent contact. This type of nonlinearities is relevant for example in nuclear power plants, specifically in steam generator. In vibration analysis this type of

*Corresponding Author

Email addresses: moussi@lma.cnrs-mrs.fr, el-hadi.moussi@edf.fr (E.H. Moussi), Bellizzi@lma.cnrs-mrs.fr (S. Bellizzi), bruno.cochelin@centrale-marseille.fr (B. Cochelin), ionel.nistor@edf.fr (I. Nistor)

nonlinearities can be modeled considering piecewise linear elastic stops [26, 8] or nonlinear elastic stops [7] or rigid impacts [16]. Such nonsmooth systems have been subject of numerous investigations specially to analyze forced responses. The following references [28, 32, 1, 9] give a small selection of the developed procedures .

Recent works have shown that the Nonlinear Normal Modes (NNMs) constitute an efficient vibration analysis framework for nonlinear mechanical systems from theoretical [31, 15] as well as experimental [22] point of view. The NNMs can be viewed as an extension of the concept of the normal modes in the theory of the linear systems to nonlinear ones. One of the most attractive definitions is due to Shaw and Pierre [27] in terms of a two-dimensional invariant manifold in phase space. This definition has the advantage that it is valid for conservative and non-conservative systems. However in case of conservative systems, a more numerically tractable definition can be used. This definition is an extension of the definition introduced by Rosenberg [25] and considers a NNM as a family of free motion parametrized by energy level. Hence, the NNMs can be computed using numerical continuation techniques of periodic solutions in conservative system. An approach combining a shooting method to approximate the periodic orbit in time domain and the pseudo-arclength continuation method is proposed in [23] to compute the NNMs. Another methodology combining the Harmonic Balance Method (HBM) to approximate the periodic orbit and the Asymptotic Numerical Method (ANM) as a continuation method is discussed in [6, 14] to compute the periodic solutions of dynamical systems and can be advantageously used to compute the NNMs. Other approaches exists like combining the alternating frequency/time-domain harmonic balance method (AFT-HBM) with the pseudo-arclength continuation method to compute mostly forced response [12, 9].

The concept of NNMs is not limited to smooth systems. Nonsmooth systems have received great attention in regard to NNMs. Conservative piecewise linear vibratory systems were considered in [3, 13] where NNMs were obtained using the invariant manifolds form. In [20] the concept of NNMs formulated as a functional relation between the two coordinates of the system was used to analyze a two Degrees Of Freedom (DOF) system with vibro-impact allowing the computation of various branches of bifurcating periodic solutions with different impacting characteristics. Rigid elastic stops were considered in [30] where the NNMs of a single DOF linear system with a vibro-impact attachment were obtained by employing the method of nonsmooth transformation introduced in [24] to approximate the periodic orbit in time domain. In [21], the family of periodic solutions were found in analytical form for a conservative two DOF oscillator with elastic and rigid stop. In [17], a dissipative system is considered and a Fourier series including decreasing exponential terms is used to approximate the NNMs combined with a HBM formulation.

Though many researchers have examined the problem of computing the nonlinear normal modes for nonsmooth systems, few tools to analyze the complete behavior of the NNMs including bifurcation diagram analysis, internal resonances characterization and stability properties are available. In this context,

the objective of this paper is to demonstrate that a method combining the HBM method (to approximate the periodic responses) and the ANM (to carry out the continuation of branches of periodic orbits) to analyze the NNMs of a nonsmooth system can be efficient. As suggested in [6], the efficiency of the HBM and ANM will be ensured introducing a regularization of the nonsmooth terms using a family of implicit polynomial. A two degrees of freedom oscillator with a bilateral elastic stop have been used to carry out the study. It is an analogy with a simplified model of the out-of-plane bending of U-tube going through supporting plates as shown in Fig. 1. Similar two degrees-of-freedom systems have been considered in [3, 13, 21].

The paper is organized as follows. In the next section, the nonsmooth model under consideration is described and periodic orbits with two impacts per period are investigated. Section 3 is dedicated to the description of the proposed procedure to compute the NNM branches. A regularized model is first introduced and the HBM and ANM methods are next described. Finally, in Section 4, the results for the NNMs are discussed in detail, analysing the influence of the regularization parameters.

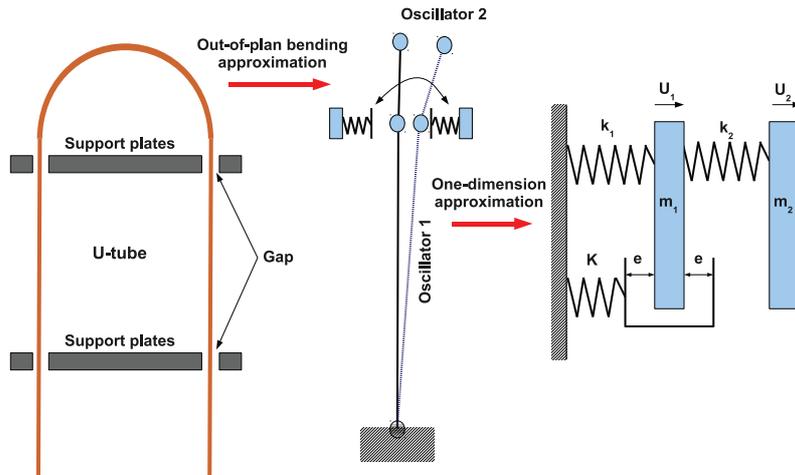


Figure 1: Analogy of a simplified model of a U-tube with a two degrees of freedom oscillator

2. Nonsmooth model under consideration

2.1. A two degrees of freedom oscillator with an elastic stop

The system under consideration is shown Fig. 1 (right side). It consists of two masses m_1 and m_2 connected by two linear springs of stiffness k_1 and k_2 . The motion of the mass m_1 is limited by a bilinear elastic stops with a linear spring of stiffness K and a gap e . The equations of motion are given by

$$\begin{cases} m_1 \ddot{U}_1(t) + k_1 U_1(t) + k_2(U_1(t) - U_2(t)) + F(U_1(t)) & = 0 \\ m_2 \ddot{U}_2(t) + k_2(U_2(t) - U_1(t)) & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

with

$$F(U) = \begin{cases} K(U - e) & \text{if } e \leq U \\ 0 & \text{if } -e \leq U \leq e \\ K(U + e) & \text{if } U \leq -e \end{cases} \quad (2)$$

where U_i denotes the displacement of the mass m_i (for $i = 1, 2$) and F denotes the bilateral contact force. Using now the following rescaled quantities $x = \frac{U_1}{e}$, $u = \frac{U_2}{e}$, $\hat{f} = \frac{F}{k_1 e}$ and the time normalization $\tau = \omega t$ with $\omega = \sqrt{k_1 m_1^{-1}}$, Eqs. (1)(2) take the following nondimensional form

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) + \hat{f}(x(\tau)) & = 0 \\ \delta \ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (3)$$

with

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \alpha(x - 1) & \text{if } 1 \leq x \\ 0 & \text{if } -1 \leq x \leq 1 \\ \alpha(x + 1) & \text{if } x \leq -1 \end{cases} \quad (4)$$

where $\beta = \frac{k_2}{k_1}$, $\alpha = \frac{K}{k_1}$, $\delta = \frac{m_2}{m_1}$ and (\cdot) denotes now the time derivative with respect to the new time τ .

Eqs. (3)(4) only depend on three parameters. The two parameters β and δ characterize the linear system and α characterizes the stop. In practice, α must be chosen large for a good representation of the stops. The gap parameter e is reduced to one in the nondimensional model. In the sequel, we will restrict the discussion to the piecewise linear system of Eqs. (3)(4).

2.2. Computation of some periodic orbits

Based on the piecewise linear structure of Eqs. (3)(4), it is possible to characterize some periodic solutions using event-driven resolution as in [21], or using other methods as in [20, 28]. We focus on the synchronous oscillations (i.e. periodic vibration in unison: all material points of the system reach their extreme values and pass through zero simultaneously) which corresponds to the definition of the NNM proposed by Rosenberg [25]. Periodic orbits with two impacts per period (one impact per stop) can easily be obtained.

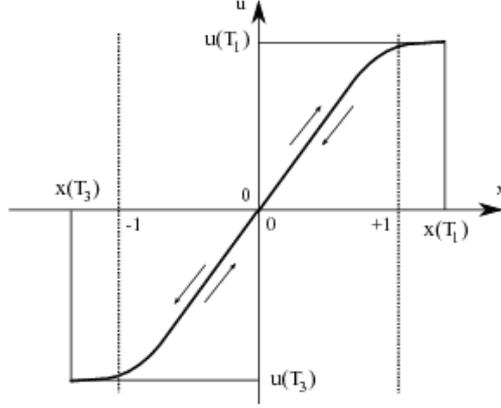


Figure 2: Modal line with two impacts per period.

Starting from the equilibrium point $(x_0, u_0) = (0, 0)$, a modal line in the configuration space can be decomposed in four branches (see Fig. 2):

- for $0 \leq \tau \leq T_1$ where T_1 corresponds to $\dot{x}(T_1) = 0$, $\dot{u}(T_1) = 0$ with the associated extreme values $x(T_1) = \max_{0 \leq \tau \leq T_1} x(\tau)$ with $x(T_1) > 1$ and $u(T_1) = \max_{0 \leq \tau \leq T_1} u(\tau)$;
- for $T_1 < \tau \leq T_2$ where T_2 corresponds to $x(T_2) = 0$ and $u(T_2) = 0$;
- for $T_2 < \tau \leq T_3$ where T_3 corresponds to $\dot{x}(T_3) = 0$, $\dot{u}(T_3) = 0$ with the associated extreme values $x(T_3) = \min_{T_2 \leq \tau \leq T_3} x(\tau)$ with $x(T_3) < -1$ and $u(T_3) = \min_{T_2 \leq \tau \leq T_3} u(\tau)$;
- for $T_3 < \tau \leq T_4$ where T_4 corresponds to $x(T_4) = 0$ and $u(T_4) = 0$;

Due to the symmetry of the system, the branches satisfy the following relations

- for $T_1 \leq \tau \leq T_2$, $x(t) = x(2T_1 - \tau)$ and $u(t) = x(2T_1 - \tau)$;
- for $T_2 \leq \tau \leq T_3$, $x(t) = -x(T_2 + T_1 - \tau)$ and $u(t) = x(T_2 + T_1 - \tau)$;
- for $T_3 \leq \tau \leq T_4$, $x(\tau) = -x(T_3 + T_1 - \tau)$ and $u(\tau) = x(T_3 + T_1 - \tau)$.

showing that $T_2 = 2T_1$, $T_3 = 3T_1$ and $T_4 = 4T_1$. Hence, the period is equal to $T = T_4 = 4T_1$ and the periodic orbit is only characterized by the first branch (i.e only on a quarter period).

Re-writing Eqs.(3)(4) as

- for $-1 \leq x(\tau) \leq 1$,

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) & = 0 \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (5)$$

- for $x(\tau) \geq 1$,

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + (1 + \alpha)x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) & = \alpha \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (6)$$

- for $x(\tau) \leq -1$,

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + (1 + \alpha)x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) & = -\alpha \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (7)$$

the first branch is defined in two steps :

- for $0 \leq \tau \leq \tau_1$, the branch solves the equations of motion Eq. (5) with the initial conditions $(0, 0, \dot{x}_0, \dot{u}_0)$ and the time duration τ_1 satisfies $x(\tau_1) = 1$;
- for $\tau_1 \leq \tau \leq T_1$, the branch solves the equations of motion Eq. (6) with the initial conditions $(1, 0, \dot{x}(\tau_1), \dot{u}(\tau_1))$ and the final time T_1 satisfies $\dot{x}(T_1) = 0, \dot{u}(T_1) = 0$.

Four unknowns $(\dot{x}_0, \dot{u}_0, \tau_1, T_1)$ are needed to characterize the quarter period branch and the unknowns satisfy three equations: $x(\tau_1) = 1, \dot{x}(T_1) = 0, \dot{u}(T_1) = 0$. As in [21], analytic expressions of the Cauchy problems associated to Eq. (5) and Eq. (6) can be obtained. The expressions are not reported here for the sake of brevity. The resulting equations can be re-written in terms of a nonlinear algebraic system. This nonlinear algebraic system has been solved using the continuation Asymptotic Numerical Method (ANM) [4].

This approach gives access to the periodic orbits with two impacts per period of the two degrees of freedom oscillator with an elastic stop. It will be used to validate the method based on the HBM combined with a regularization of the nonsmooth terms using a family of implicit polynomial, method which permits to compute more complicated dynamics.

3. The regularized-HBM-ANM method to compute the NNM

For conservative systems, a NNM may be defined as a family of periodic orbits as retained in [29, 2, 15]. To compute them, the proposed method, named regularized-HBM-ANM method, combines the HBM method to approximate the NNM motions and the ANM method to gives access to the branches of solution. Moreover the efficiency of the HBM and ANM will be ensured introducing a regularization of the nonsmooth terms using a family of implicit polynomial.

3.1. *The associated two degrees of freedom oscillator with regularized elastic stop*

Regularized equations of motion can be derived approximating the piecewise linear function (4) by the following implicit polynomial of degree three (with respect to the variable f)

$$f(f - \alpha(x - 1))(f - \alpha(x + 1)) + \eta\alpha^2x = 0 \quad (8)$$

where η denotes the regularization parameter. We will assume in the sequel that $\eta \geq 0$. For $\eta = 0$, the possible values of $\hat{f}(x)$ for any given x (see Eq. (4)) appear to be the roots of the polynomial Eq. (8). For $\eta \neq 0$ and a given set of parameter values (x, α, η) , the polynomial Eq. (8) always admits a real root denoted $f(x; \alpha, \eta)$ (the expression is not given here) represented in Fig. 3, which satisfies the following properties:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x \text{ and } f(x; \alpha, \eta) \text{ have the same sign,} \\ (ii) \quad & f(x; \alpha, \eta) = -f(-x; \alpha, \eta), \\ (iii) \quad & \text{if } |x| \ll 1, f(x; \alpha, \eta) \approx \eta x, \\ (iv) \quad & \text{if } |x| \gg 1, f(x; \alpha, \eta) \approx \alpha(x + \text{sign}(x)). \end{aligned} \quad (9)$$

Hence, the regularized elastic stop can be viewed as an odd restoring force where the regularization parameter introduces a linear spring with stiffness coefficient η at the neighborhood of the equilibrium point $x = 0$ (see Eq. (9)(iii)) and for large x reproduces the elastic stop behavior (see Eq. (9)(iv)). Finally, the regularized equations of motion defined by

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) + f(x(\tau); \alpha, \eta) & = 0 \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (10)$$

can advantageously replace Eqs.(3)(4) when η is small compared to spring stiffness of the underlying linear system.

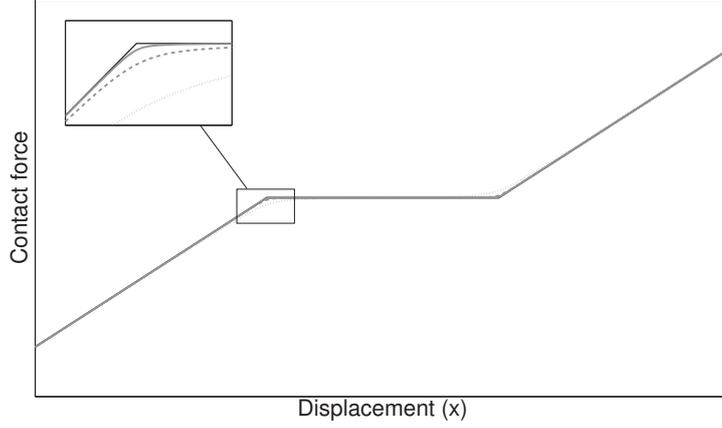


Figure 3: Comparison of the piecewise-linear contact force obtained with Eq. (2) (in black) and the regularized contact force obtained with Eq. (9) (in grey) for different values of η . Parameter values : $\alpha = 30$, $\eta = 0.005$ (solid line), $\eta = 0.05$ (dashed line), $\eta = 0.5$ (dotted line).

3.2. Computation of the branch of periodic solutions

To apply ANM, the equations of motion (10) are first recast into a dynamical system where the nonlinearities are polynomial and at most quadratic [6].

Introducing a new variable z , the nonlinearity as defined by Eq.(8) is rewritten in the quadratic form

$$\begin{cases} f - \eta x - fz & = 0 \\ z - (\frac{f}{\alpha} - x)^2 & = 0 \end{cases} \quad (11)$$

and is combined with Eq. (10) giving the following quadratic algebro-differential system

$$\begin{aligned} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) + f(\tau) & = 0 \\ \delta \ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} f(\tau) - \eta x(\tau) - f(\tau)z(\tau) & = 0 \\ z(\tau) - (\frac{f(\tau)}{\alpha} - x(\tau))^2 & = 0 \end{aligned} \quad (12b)$$

Assuming periodicity, the nonlinear response is approximated by a truncated Fourier series up to H th term for the displacement variables u and x :

$$\begin{aligned} u(\tau) & = u_0 + \sum_{k=1}^H u_c^k \cos(k\omega\tau) + u_s^k \sin(k\omega\tau) \\ x(\tau) & = x_0 + \sum_{k=1}^H x_c^k \cos(k\omega\tau) + x_s^k \sin(k\omega\tau) \end{aligned} \quad (13)$$

and up to H_f th term for the nonlinear force f and the associated internal variable z :

$$\begin{aligned} f(\tau) &= f_0 + \sum_{k=1}^{H_f} f_c^k \cos(k\omega\tau) + f_s^k \sin(k\omega\tau) \\ z(\tau) &= z_0 + \sum_{k=1}^{H_f} z_c^k \cos(k\omega\tau) + z_s^k \sin(k\omega\tau) \end{aligned} \quad (14)$$

where as classical ω denotes the frequency (which is related to the period as $T = 2\pi/\omega$). This formulation permits selecting $H_f \gg H$ to improve the approximation of the nonlinear term. Indeed, $f(\tau)$ is almost zero when there is no contact and reach high values during contact. Then, its Fourier series representation requires more harmonics than for u and x .

Substituting Eqs. (13) and (14) into Eqs. (12a) and (12b) and balancing the terms of same frequency up to H th term in Eq. (12a) and up to H_f th term in Eq. (12b), one obtains a nonlinear algebraic system of $2(2H + 1) + 2(2H_f + 1)$ equations which can be written under the quadratic form

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0 \quad (15)$$

where $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_d, \mathbf{U}_f, \omega) \in \mathbb{R}^{2(2H+1)+2(2H_f+1)+1}$ denotes the unknown coefficients with $\mathbf{U}_d = (u_0, x_0, \dots, u_s^H, x_s^H)$ and $\mathbf{U}_f = (f_0, \dots, f_s^{H_f}, z_0, \dots, z_s^{H_f})$, \mathbf{L} is linear transformation and \mathbf{Q} is quadratic transformation.

Finally, the system (15) is solve applying the ANM method which is based on power series expansions of the unknowns \mathbf{U} with respect to the path parameter a as $\mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i a^i$. ANM generates a succession of continuous branches, instead of a sequence of points to compute the NNM. This method has been implemented as described in [4] excepts that Fast Fourier Transform (FFT) algorithm has been used to compute efficiently the quadratic term $\mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ with a passage in the time domain as in the Alternating Frequency-Time HBM method. Moreover, the bifurcation indicator as described in [5] to locate and compute very efficiently any simple bifurcation point has been used.

The ANM method is a continuation method which needs a starting point. A periodic orbit of the underlying linear system can be used as a first point (one orbit) for initiating continuation.

3.3. Stability analysis

The linear stability of the NNM motions are characterized using Floquet theory [11].

Rewriting Eq. (10) into a first-order dynamical system, the stability of a periodic solution $\mathbf{p}_0(\tau) = [x_0(\tau) \ y_0(\tau) \ u_0(\tau) \ v_0(\tau)]$ of period T can be deduced from the eigenvalues of the monodromy matrix (also named the Floquet multipliers) associated with the fundamental matrix solution of the T -periodic variational

linear differential system

$$\dot{\pi}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1 + \beta) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(\tau); \alpha, \eta) & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\delta} & \frac{\beta}{\delta} \end{pmatrix} \pi(\tau) \quad (16)$$

where an analytic expression of the gradient function $\frac{\partial f}{\partial x}(x; \alpha, \eta)$ is deduced from the implicit equation (8) as

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; \alpha, \eta) = \frac{2\alpha^2(f(x; \alpha, \eta)^2 - x(\tau)f(x; \alpha, \eta)) - \alpha^2(x(\tau)^2 - 1) - \eta\alpha^2}{3f(x; \alpha, \eta)^2 - 4\alpha x(\tau)f(x; \alpha, \eta)}. \quad (17)$$

The monodromy matrix is computed over one period, using the four canonical basis vectors as initial conditions successively.

The autonomous equations of motion Eq. (10) defining an Hamiltonian system, it can be shown [10] that two Floquet multipliers are equal to one and the other two are reciprocal and complex-conjugate.

Hence, no Floquet multiplier can leave the unit circle with a nonzero imaginary part and the motion will be unstable only if at least one Floquet multiplier is greater than one or smaller than minus one.

4. Application

This section is dedicated to the analysis of the NNM of Eqs. (12) with the following numerical values : $\beta = 1$, $\delta = 1$ and $\alpha = 30$ using the regularized-HBM-ANM method (η , H and H_f will be given later).

4.1. About the associated linear systems

To enlight the behavior of the NNMs, it is useful to introduce a notation for the Linear Normal Modes (LNMs) of the various linear systems which are connected to the nonlinear system.

Three linear systems have been yet introduced: Eq. (5) which characterizes motions without impact and Eq. (6) (respectively Eq. (7)) which characterizes motions during the impact on the right (respectively left) elastic stop. One more linear system has to be considered. It is defined as

$$\begin{cases} \ddot{x}(\tau) + (1 + \eta)x(\tau) + \beta(x(\tau) - u(\tau)) & = 0 \\ \delta\ddot{u}(\tau) + \beta(u(\tau) - x(\tau)) & = 0 \end{cases} \quad (18)$$

and corresponds to the underlying linear system around the equilibrium position associated to Eq. (10) (the regularized piecewise linear system).

These linear systems (Eqs. (5), (18), (6) and (7)) differ by the stiffness associated to the component x which is equal to 1, $1 + \eta$, $1 + \alpha$ and $1 + \alpha$

respectively. In the sequel, the LNMs of the linear systems (Eq. (5), Eq. (18) and Eq. (6)) will be denoted L_p^0 , L_p^η and L_p^α respectively where the integer index p refers to the first ($p = 1$) and second ($p = 2$) linear normal mode. Note that the LNMs of Eq. (7) coincide with the LNMs of Eq. (6) and hence no distinction will be made.

Finally, the last linear system considered in the sequel is the one with the mass at rest, $x(\tau) = 0$. It is a 1-DOF system and the associated LNM will be denoted L_1^∞ .

4.2. Validation of the regularized-HBM-ANM method

The objective here is to compare the NNMs of the piecewise linear system Eqs. (3)(4) obtained from the direct computation (see Section 2.2) and from the regularized-HBM-ANM method (Section 3.2) applied to Eqs. (12). We focus on the first NNM starting at low energy level from the LNM L_1^0 (corresponding to the resonance frequency $\omega_{L_1^0}^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 2\pi 0.098$). The starting point used in the regularized-HBM-ANM method is defined from the LNM L_1^η .

To implement the regularized-HBM-ANM method, the regularization parameter η and the harmonic numbers H and H_f have to be chosen. At low energy level, the NNM being approximated by the LNM L_1^η (corresponding to the resonance frequency $\omega_{L_1^\eta}^2 = \frac{3+\eta-\sqrt{5+2\eta+\eta^2}}{2}$), the numerical value of η can be chosen such that $\frac{|\omega_{L_1^0} - \omega_{L_1^\eta}|}{\omega_{L_1^0}} < \epsilon_{\text{rel}}$. The results discussed here after have been obtained with $\eta = 0.005$ corresponding to the relative error $\epsilon_{\text{rel}} = 2 \times 10^{-3}$. The following numerical values will be used for the harmonic numbers: $H = 33$ and $H_f = 151$.

The NNM obtained from the two approaches are compared in Fig. 4 in terms of Frequency-Energy Plot (FEP). The energy range considered here corresponds to periodic orbits with zero or one impact on each stop per period (see Section 2.2). As expected, the curves differ at low energy level due to the bias introduced by the parameter η . At high energy level, the curves coincide showing that $H = 33$, $H_f = 151$ is enough to correctly approximate the periodic orbits. However around the threshold energy level ($\approx 7 \times 10^{-1}$) where impacts occur, the approximation is less accurate due to the regularization procedure of the regularized-HBM-ANM method.

The period orbits obtained from the two approaches are compared in Fig. 5 for an intermediate energy level near the impact threshold energy level (point a) in Fig. 4) and for a high energy level (point b) in Fig. 4). At the first energy level (point a)), the orbits obtained from the direct computation and from the regularized-HBM-ANM method slightly differ. The direct computation shows impacts (see Fig. 5, left) whereas the regularized-HBM-ANM method predicts x displacement in the range $] -1, 1[$ (no impact). However, in the configuration space, the modal curves are in very good agreement. At the second energy level (point b)), the two approaches give results in very good agreement.

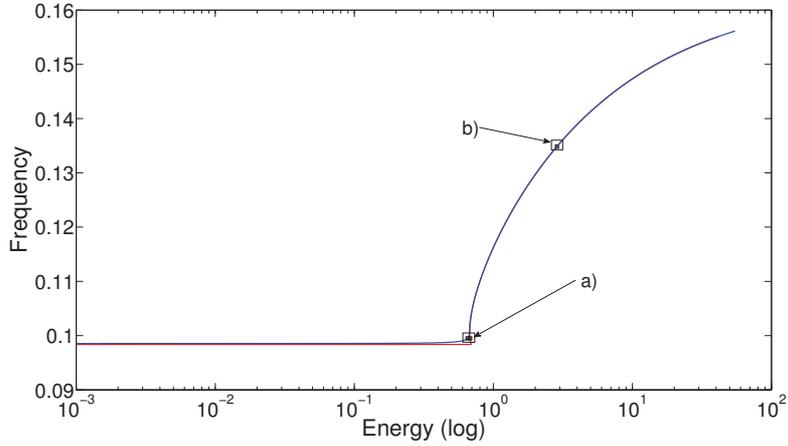


Figure 4: FEP corresponding to the first NNM of the non-smooth system obtained from direct computation (in red) and from the regularized-HBM-ANM method (in blue). (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$ and $H_f = 151$).

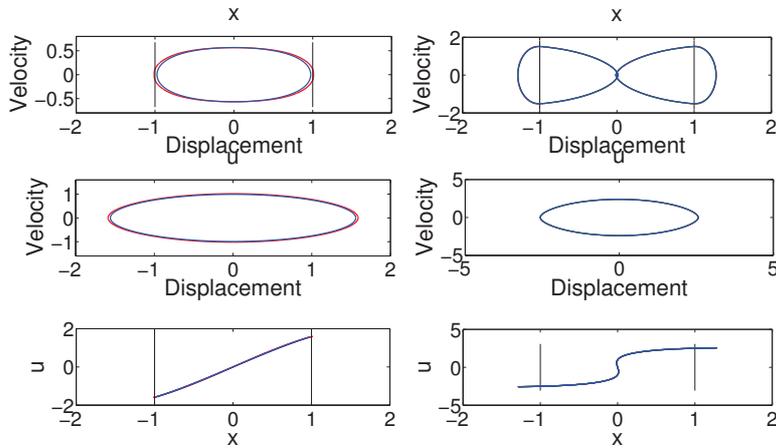


Figure 5: Periodic orbits for point a) and b) in Fig. 4 obtained from direct computation (in red) and from the regularized-HBM-ANM method (in blue). First row : phase subspace (x, \dot{x}) , second row : phase subspace (u, \dot{u}) , third row : configuration space (x, u) . (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$ and $H_f = 151$).

The time series of the contact forces are shown in Fig. 6. In both cases (point a) and point b)), the two approaches give results in very good agreement.

These results show that the smoothness can be explicitly controlled and give a good approximation.

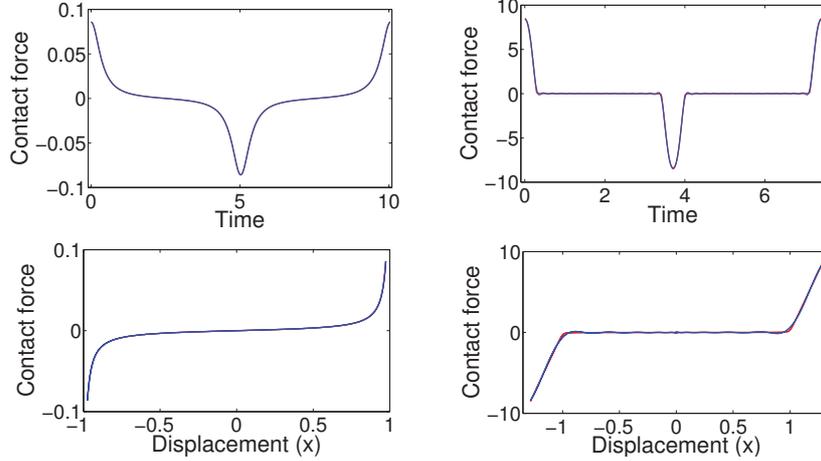


Figure 6: Contact force for point a) and b) in Fig. 4 given by Eq. (9) (in red) and obtained from the regularized-HBM-ANM method (in blue). First row : Time evolution over one period, second row : $(x, f(x))$ -plot. (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$ and $H_f = 151$).

4.3. Analysis of two NNMs of the regularized piecewise linear system

The regularized-HBM-ANM method is now used to analysis in detail and on a large energy range two NNMs of the regularized piecewise linear system of Eqs. (12), one starting from the LNM L_1^0 (the in-phase NNM) and the other starting from L_2^0 (the out-of-phase NNM). The following parameter values have been used: $\eta = 0.005$, $H = 33$ and $H_f = 151$ to implement the regularized-HBM-ANM method.

As in [18, 19], the following classification of the periodic orbits will be used:

- (i) $S_{nmpq\pm}$ denotes symmetric orbits with n and m the number of half waves in a half period respectively for the variable x and u . The indices p and q correspond respectively to the number of impacts for the first and second quarter period. The sign \pm indicate if the curve in the configuration space (x, u) pass through the origin with positive or negative slope.
- (ii) U_{nmpq} denotes unsymmetric orbits with the same meaning for the integer indices than the previous one. Besides, there is no \pm to indicate the sign of the slope because the motion is asynchronous and is represented by Lissajous curves in the configuration space (x, u) .

4.3.1. The out-of-phase NNM

The out-of-phase NNM of the regularized piecewise linear system of Eqs. (12) is defined at low energy level by the LNM L_2^0 where the components of the associated mode shape have opposite sign. The behavior of the out-of-phase NNM is shown in Fig. 7 in terms of Frequency-Energy Plot (FEP). Modal line

of periodic orbits are also reported in Fig. 7 in the configuration space (x, u) . The tick mark locations are given at the multiples of the gap 1 in x and u direction and two vertical lines represent the gap positions in x direction. At low energy level, the branch starts with S1100- motions (black branch) and it coincides with the LNM L_2^η which is close to LNM L_2^0 . At the impact threshold energy level, S1110- motions (one impact per half period) take place and this type of motions persists when the energy level increases (dark gray branch) up to the LNM L_2^α .

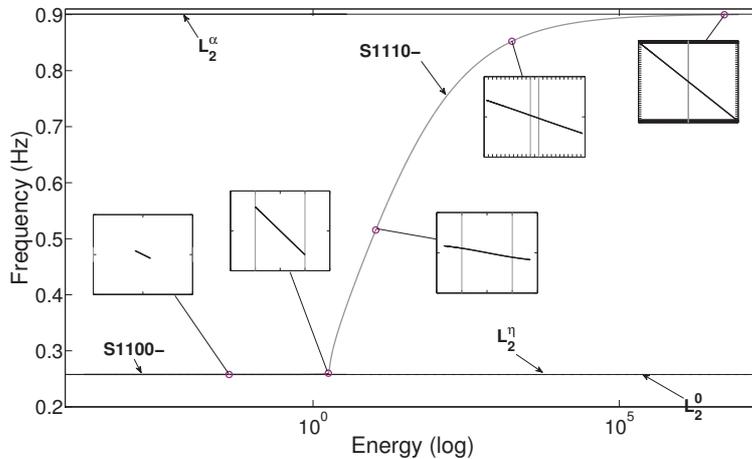


Figure 7: FEP of the out-phase NNM (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

4.3.2. The in-phase NNM

The in-phase NNM of the regularized piecewise linear system of Eqs. (12) is defined at low energy level by the LNM L_1^0 where the components of the associated mode shape have the same sign. The behavior of the in-phase NNM is shown in Fig. 8 in terms of FEP. Similarly to the out-of-phase NNM, the branch starts, at low energy level, with S1100+ motions (black branch) and it coincides with the LNM L_1^η which is close to LNM L_1^0 . At very high energy level, S1110+ motions take place and this type of motions persists when the energy level increases (dark gray branch) up to the LNM L_1^α . Moreover and contrary to the out-of-phase NNM, more complicated dynamics are observed between these two states characterized by period motions with the number of impacts which increases and internal resonances. Internal resonances corresponds to interaction of the in-phase NNM with the out-of-phase NNM. Three internal resonances ($3 : 1$, $4 : 1$, $5 : 1$) have been identified (see the tongues (S3121+, S3121-), U4122 and (S5132+, S5132-)). It is interesting to note the absence of the internal resonance $2 : 1$ which is due to asymmetrical spring configuration of the model (see for example the system [23]), and also the absence of internal

resonances $k : 1$ for $k > 5$ which is due to the stiffness parameter α of the system (see Section 4.3.3).

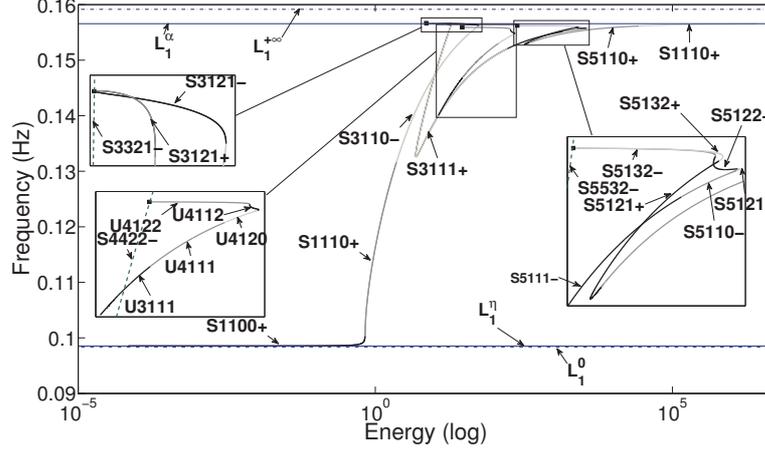


Figure 8: FEP of the in-phase NNM (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

To understand the behavior of this complicate NNM, zooms on different branches of FEP are analyzed in detail in Figs. (9-16) reporting some representative periodic orbits in the configuration space (x, u) and including stability properties.

Fig. 9 shows the branches S1100+ (black curve), S1110+ (dark gray curve), S3110- (light gray curve). All the branches characterize stable periodic motions. As already mentioned, the branch S1100+ coincides with the LNM L_1^η which ends when the energy (or the amplitude) is sufficient for the first mass (x component) to reach the stop. From this point modal straight lines in the configuration space are replaced by modal curved lines. Then the amplitude of the second mass (u component) increase whereas that the amplitude of the first mass which is limited by the elastic stop. This behavior implies a change of the sign of the slope of the modal line (on the neighborhood of the origin), and the apparition of a new oscillation. The transition between S1110+ and S3110- occurs. This new oscillation increases with the energy level and the the first mass (x component) reaches the stops. A new impact occurs which corresponds to the transition between S3110- and S3121-.

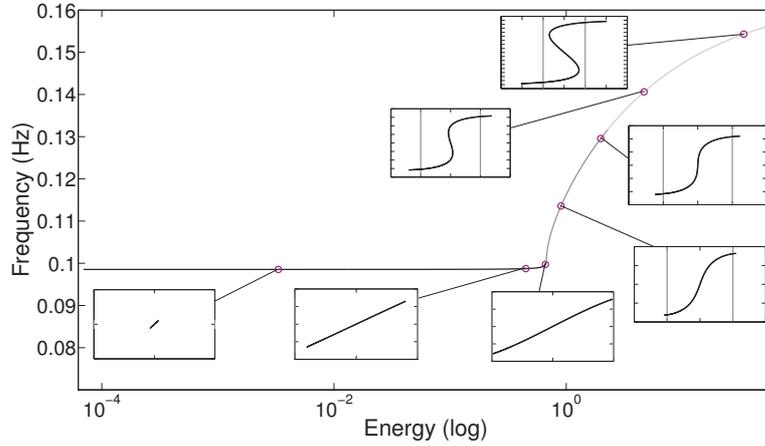


Figure 9: Zoom on particular branches (S1100+, S1110+, S3110-) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

Fig. 10 shows the branches S3121- (dark gray curve), S3121+ (light gray curve) corresponding to the first tongue. Following the branch S3121-, the energy level decreases and only the amplitude of the second mass is mainly influenced. This type of motions persists up to the modal curved lines tend towards a modal straight line where a bifurcation point between the in-phase NNM and the branch S1110- of the out-of-phase NNM (depicted on three-period given a S3121- motion) is reached (see black square) corresponding to the internal resonance 3 : 1. At this point, the transition between S3121- and S3121+ also occurs with the change of sign of the slop of the modal line. Increasing the energy level, the S3121+ branch vanishes when the number of impacts decreases and the transition between S3121+ and S3111+ occurs. Note that instability zones have been detected on these branches.

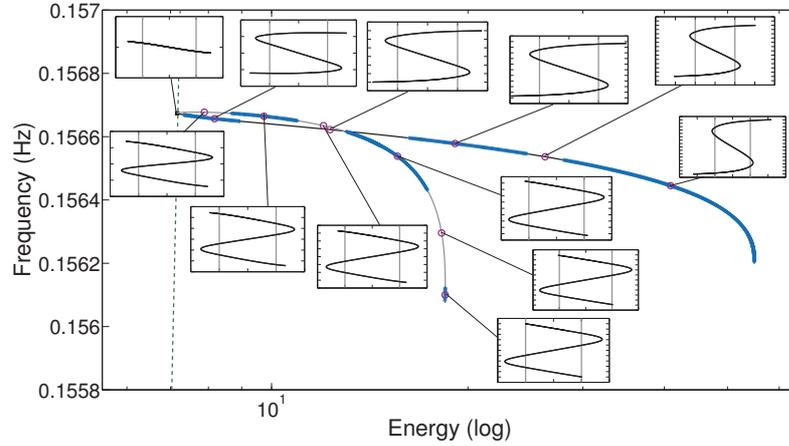


Figure 10: Zoom on particular branches (S3121 $-$, S3121 $+$) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). The instability is depicted by dark blue (+) (Floquet multiplier greater than +1). (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

Fig. 11 shows the branches S3111 $+$ and S5111 $-$. The transition between S3111 $+$ and S5111 $-$ occurs at the black (+). This point corresponds to the increase in the oscillation of the x motion. Another important phenomenon is the appearance of a bifurcation point (see black circle), obtained by the method described in [5]. This bifurcation point doesn't correspond to an internal resonance but leads to a new branch of periodic solutions. This secondary branch is the tongue associated to the even internal resonance 4 : 1 (see Figs. 12-13).

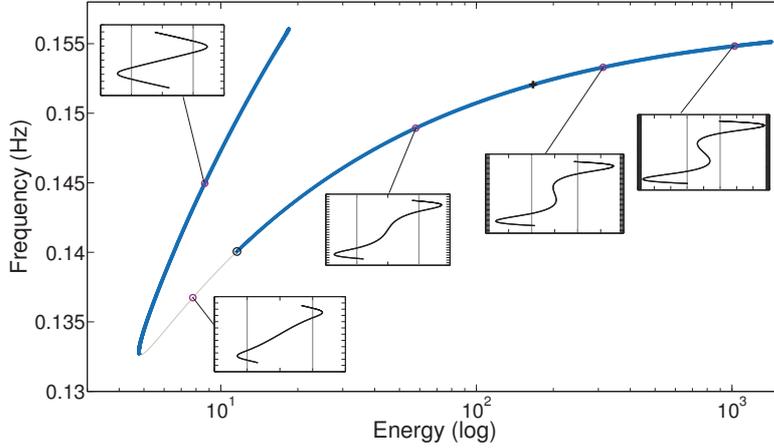


Figure 11: Zoom on particular branches (S_{3111}^+ , S_{5111}^-) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). The instability is depicted by dark blue (+) (Floquet multiplier greater than +1). The black marker (+) indicate the change of branches. (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

Fig. 12 (respectively Fig. 13) shows the branches U3111, U4111, U4120 (respectively U4121, U4122). The motions here are no more symmetric, however some kinds of phenomenon such as variations of the number of oscillations and variations of the number of impacts are observed, but only for a half-period. After the transition between U4121 and U4121 (see black (+) Fig. 13) the motions persist up to the modal curved lines tend towards a modal line where a bifurcation point between the in-phase NNM and the branch S1110- of the out-of-phase NNM (depicted on four-period given a S4422- motion) is reached (see black square) corresponding to the internal resonance 4 : 1. We can also observed that for these branches instabilities occur (with a Floquet multiplier greater than +1).

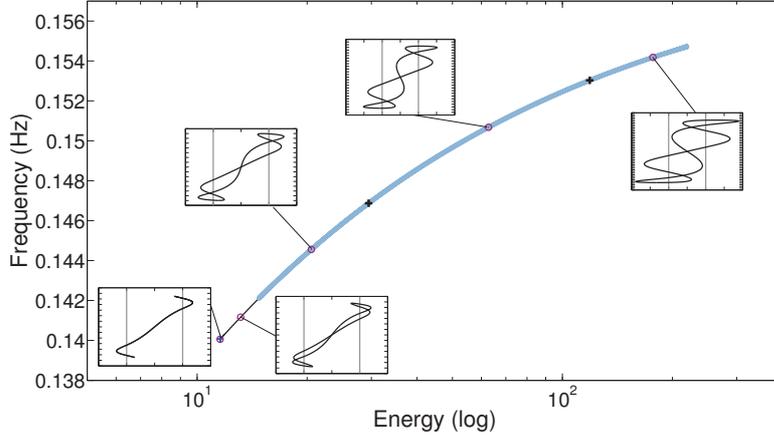


Figure 12: Zoom on particular branches (U3111, U4111, U4120) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). The instability is depicted by light blue (o) (Floquet multiplier smaller than -1). The black markers ($+$) indicates the change of branches. (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

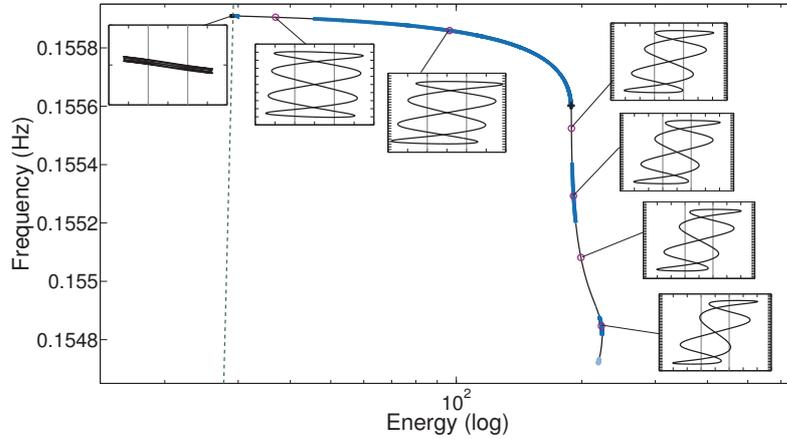


Figure 13: Zoom on particular branches (U4121, U4122) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). The instability is depicted by dark blue ($+$) when a Floquet multiplier is greater than $+1$, and by light blue (o) when a Floquet multiplier is smaller than -1 . The black marker ($+$) indicate the change of branches. (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

Fig. 14 shows the branches S5110–, S5121–, S5122– on the main backbone of the FEP. These branches correspond to symmetric motions. Oscillations occur during the first and the second half-period, and the first mass (x component)

reaches the elastic stop increasing the number of impacts (transition between S5110–, and S5121– and between S5121– and S5122–) without changing the number of half waves. Hence internal resonance can not occur here. The number of impacts need to be equal to five, which happens at the end of the branch S5122–.

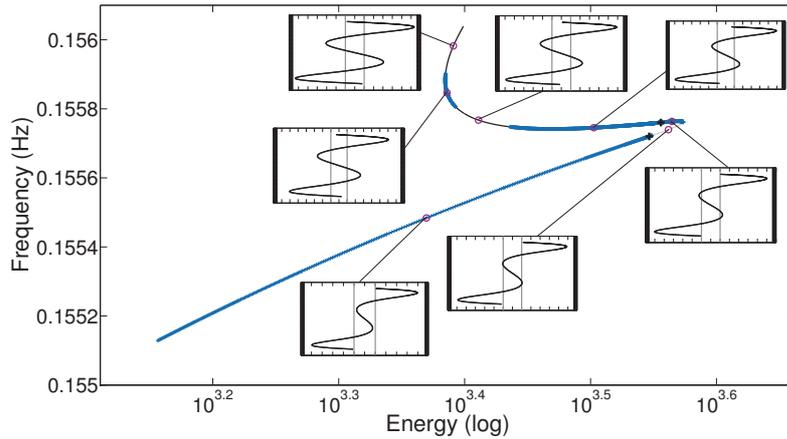


Figure 14: Zoom on particular branches (S5110–, S5121–, S5122–) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). The instability is depicted by dark blue (+) (Floquet multiplier greater than +1). The black markers (+) indicates the change of branches. (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

Fig. 15 shows the part of the third tongue where the internal resonance 5 : 1 occurs (branches S5132– and S5132+). These two branches (in the FEP plot) are nearly identical and they are plotted separately. As observed for the 3 : 1 internal resonance, a bifurcation point between the in-phase NNM and the branch S1110– of the out-of-phase NNM (depicted on five-period given a S5132– motion) is reached. At this point, the transition between S5132– and S5132+ also occurs with the change of sign of the slope of the modal line.

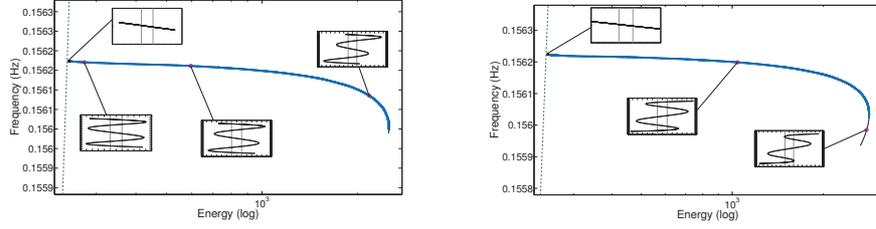


Figure 15: Zoom on particular branches (S5132– at left, S5132+ at right) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). The instability is depicted by dark blue (+) (Floquet multiplier greater than +1). (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

Finally the last part of the main backbone of the FEP is shown Fig. 16. The same phenomenon observed on the branch S3111+ is observed here, so the number of impacts decreases. But instead of the apparition of an oscillation when the energy starts to increase, which implies new impacts, the amplitude of the second mass increases and the impacts disappears. The period motions are now close to the LNM L_1^α .

It is interesting to note that the frequency contain of the backbone of the in-phase NNM can be greater than $\omega_{L_1^\alpha}$ (see Fig. 10). An upper bound is given by $\omega_{L_1^\infty}$ (see Fig. 8).

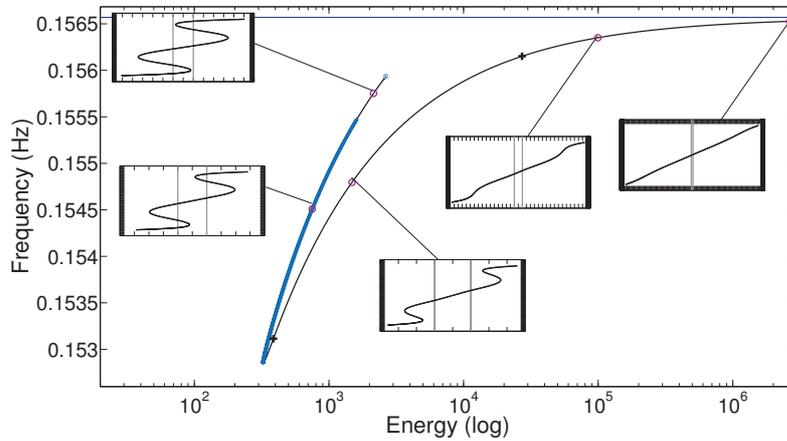


Figure 16: Zoom on particular branches (S5121+, S5110+, S1110+) of the FEP of the in-phase NNM, some periodic orbits are represented by modal line (see the boxes). The instability is depicted by dark blue (+) (Floquet multiplier greater than +1). The black markers (+) indicates the change of branches. (Parameter values: $\alpha = 30$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

4.3.3. About the parameter α

The objective of this section is to evaluate the influence of the parameter α on the dynamics richness of the in-phase NNM. .

Figs. 17-18 show the behavior of the in-phase NNM in terms of FEP for $\alpha = 20$ and $\alpha = 50$.

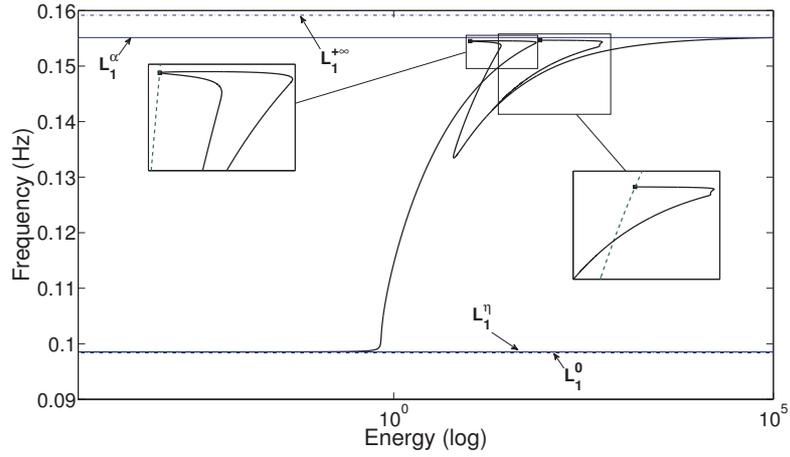


Figure 17: FEP of the first NNM, with $\alpha = 20$. (Parameter values: $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 151$).

We note that we use for $\alpha = 50$ a higher number of harmonics $H_f = 201$ to have a better precision.

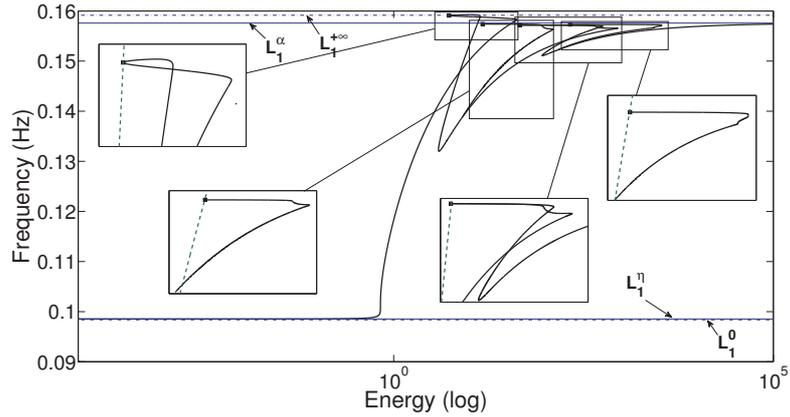


Figure 18: FEP of the first NNM, with $\alpha = 50$. (Parameter values: $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\eta = 0.005$, $H = 33$, $H_f = 201$).

We observe that the parameter α (stiffness of the elastic stop) influences the number of internal resonance. For $\alpha = 20$, we have only the internal resonances 3 : 1 and 4 : 1 whereas for $\alpha = 50$ we have the internal resonances 3 : 1, 4 : 1, 5 : 1 and 6 : 1. Note that the odd internal resonances appear as the turning points of the main branch whereas the even internal resonances appear as a turning point of the secondary branches.

As already mentioned, the upper bound in terms of frequency of the backbone of the in-phase NNM is given by $\omega_{L_1^\infty}$. By increasing α the asymptotic limit $\omega_{L_1^\alpha}$ increases and tends to approach the limit $\omega_{L_1^\infty}$. The comparison of the Figs. 17, 8 and 18 helps to understand this phenomenon that is the increase of the number of internal resonance with α .

5. Conclusion

The computation of the nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom with a piecewise linearity was performed using a numerical procedure, called regularization-HBM-ANM. This procedure combine a regularization of the contact force, the harmonic balance method and the asymptotic numerical method. The HBM was considered using Fourier series with different order of truncation for linear and nonlinear components. Moreover, stability analysis of the periodic orbits was carry out using Floquet theory, reminding also the specificity of 2-DOF Hamiltonian system. The regularization-HBM-ANM method was validate comparing the results with a direct computation of the periodic solutions of the piecewise linear system when only two impact per period occur. Some particular behaviour was observed more often for the in-phase nonlinear normal mode. The first was the absence of the internal resonance 2 : 1 due to the asymmetrical spring configuration. Moreover, the stiffness of the spring of the elastic stop influences the number of internal resonance. The NNMs tend asymptotically to the in-phase linear normal mode of the system where the spring of the elastic stop is directly connected to the mass (in other words for a gap equal to zero). Besides, the odd internal resonances appear as the turning points of the main branch whereas the even internal resonances appear as a turning point of the secondary branches. These efficient numerical procedure can be used to compute NNMs of industrial structure.

References

References

- [1] Andeaus, U., Casini, P., Vestroni, F., 2007. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation. *International Journal of Non-linear Mechanics* 42, 566–575.
- [2] Arquier, R., Bellizzi, S., Bouc, R., Cochelin, B., 2006. Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers and Structures* 84, 1565–1576.

- [3] Chen, S., Shaw, S., 1996. Normal modes for piecewise linear vibratory systems. *Nonlinear Dynamics* 10, 135–164.
- [4] Cochelin, B., Damil, N., Allgowe, E., 2007. *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoisier.
- [5] Cochelin, B., Medale, M., 2012. Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of asymptotic numerical method in the vicinity of bifurcations. *Journal of Computational Physics* In Press, Accepted Manuscript. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2012.11.016>.
- [6] Cochelin, B., Vergez, C., 2009. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration* 324 (1-2), 243–262.
- [7] Coudeyras, N., Nacivet, S., Sinou, J.-J., 2009. Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration* 328, 520–540.
- [8] Ervin, E. K., Wickert, J. A., 2000. Repetitive impact response of a beam structure subjected to harmonic base excitation. *Journal of Sound and Vibration* 307, 2–19.
- [9] Grolet, A., Thouverez, F., 2012. On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing* 30, 43–60.
- [10] Hadjedemetriou, J. D., 2006. Periodic orbits in gravitational systems. In: Steves, B., Maciejewski, A., Hendry, M. (Eds.), *Chaotic Worlds: from Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems*. pp. 43–79.
- [11] Hale, J., 1969. *Ordinary Differential Equations*. Wiley-Interscience, New York.
- [12] Jaumouillé, V., Sinou, J.-J., Petitjean, B., 2010. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems - application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration* 329(19), 4048–4067.
- [13] Jiang, D., Pierre, C., Shaw, S. W., 2004. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration* 272, 869–891.
- [14] Karkar, S., Cochelin, B., Vergez, C., 2013. A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions: The case of non-polynomial nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration* 332, 968–977.
- [15] Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J., Vakakis, A., 2009. Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing* 23, 170–194.

- [16] Lamarque, C., Janin, O., 2000. Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal superposition. *Journal of Sound and Vibration* 235(4), 567–609.
- [17] Laxalde, D., Thouverez, F., 2009. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems: Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration* 322, 1009–1025.
- [18] Lee, Y. S., Kerschen, G., Vakakis, A., P., P., Bergmand, L. A., McFarland, D. M., 2005. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. *Physica D* 204, 41–69.
- [19] Lee, Y. S., Nucera, F., Vakakis, A., McFarland, D. M., Bergmand, L. A., 2009. Periodic orbits, damped transitions and targeted energy transfers in oscillators with vibro-impact attachments. *Physica D* 238, 1868–1896.
- [20] Mikhlin, Y., Vakakis, A., Salenger, G., 1998. Direct and inverse problems encountered in vibro-impact oscillations of a discrete system. *Journal of Sound and Vibration* 216(2), 227–250.
- [21] Pascal, M., 2006. Dynamics and stability of a two degree of freedom oscillator with an elastic stop. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 1, 94–102.
- [22] Peeters, M., Kerschen, G., Golinval, J., 2011. Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes: Experimental demonstration. *Mechanical Systems and Signal Processing* 25, 1227–1247.
- [23] Peeters, M., Vigié, R., Sérandour, G., Kerschen, G., Golinval, J.-C., 2009. Nonlinear normal modes, part ii: Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing* 23, 195–216.
- [24] Pilipchuk, V., Vakakis, A., Azeez, M., 1997. Study of a class of subharmonic motions using a non-smooth temporal transformation (nstt). *Physica D* 100, 145–164.
- [25] Rosenberg, R., 1966. On nonlinear vibrations of systems with many degree of freedom. *Advances in Applied Mechanics* 242 (9), 155–242.
- [26] Shaw, S., Holmes, P., 1983. A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration* 90, 129–155.
- [27] Shaw, S., Pierre, C., 1991. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration* 150(1), 170–173.
- [28] Toulemonde, C., Gontier, C., 1988. Sticking motions of impact oscillators. *Eur. J. Mech., A/Solids* 17(2), 339–366.

- [29] Vakakis, A., 1997. Non-linear normal modes (nnms) and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing* 11(1), 3–22.
- [30] Vakakis, A., Gendelman, O., Bergman, L., McFarland, D., Kerschen, G., Lee, Y., 2008. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems I & II*. Springer.
- [31] Vakakis, A., Manevitch, L., Mikhlin, Y., Pilipchuk, V., Zevin, A., 1996. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley, NewYork.
- [32] Woo, K., Rodger, A. A., Neilson, R. D., Wiercigroch, M., 2000. Application of the harmonic balance method to ground moling machines operating in periodic regimes. *Chaos, Solitons and Fractals* 11, 2515–2525.

Annexe D

Un système à un degré de liberté avec contact unilatéral

On étudie un modèle composé d'une masse m reliée à un ressort de raideur k , celle-ci peut impacter sur un ressort de raideur α qui est à une distance de g .

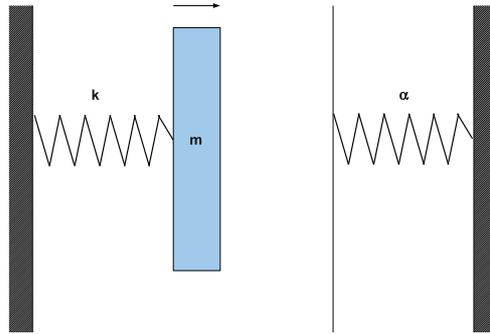


FIGURE D.1

On note u le déplacement et f^{nl} la force de contact,

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(t) + ku(t) + f^{nl}(u(t)) &= 0 \\ f^{nl}(u(t)) &= \begin{cases} \alpha(u(t) - g) & \text{si } u(t) > g \\ 0 & \text{si } u(t) < g \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Pour faciliter l'étude du modèle, on adimensionne les variables, $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}}t$, $x = \frac{u}{g}$, $\hat{f}^{nl} = \frac{f^{nl}}{kg}$, et $\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{k}$. On obtient alors le système suivant,

$$\begin{aligned} \ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \hat{f}^{nl}(x(\tau)) &= 0 \\ \hat{f}^{nl}(x(\tau)) &= \begin{cases} \hat{\alpha}(x(\tau) - 1) & \text{si } x(\tau) > 1 \\ 0 & \text{si } x(\tau) < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

On rappelle qu'on cherche les solutions périodiques du système, on considère alors qu'il existe une période T tel que $u(0) = u(T)$.

Ce système est linéaire par morceaux on le divise donc en deux systèmes, le premier correspondant au cas où $x(\tau) \leq 1$ et le second où $x(\tau) > 1$.

D.1 1^{er} cas : $x(\tau) \leq 1$

Dans le cas, $x(\tau) \leq 1$, le système d'Eq. (D.1) devient linéaire et s'écrit :

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = 0 \quad (\text{D.3})$$

On choisit comme condition initiale,

$$\begin{cases} x(0) = x_{min} \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

où $x_0 < 0$. La solution du système d'Eq. (D.3)-(D.4) est la suivante,

$$x(\tau) = x_{min} \cos(\tau) \quad (\text{D.5})$$

Soit $\tau = \frac{T_1}{2}$, l'instant tel que la masse impacte sur la butée, c'est-à-dire que $x(\frac{T_1}{2}) = 1$. On peut donc en déduire que,

$$T_1 = 2 \arccos\left(\frac{1}{x_{min}}\right) \quad (\text{D.6})$$

On rappelle que l'énergie peut s'écrire de la manière suivante, pour $x(\tau) \leq 1$,

$$E(\tau) = \frac{1}{2}[\dot{x}(\tau)]^2 + \frac{1}{2}[x(\tau)]^2 \quad (\text{D.7})$$

L'énergie est constante puisque le système est conservatif donc $E(\tau) = E(0) = \frac{1}{2}x_{min}^2$. On peut alors reformuler T_1 en fonction de l'énergie,

$$T_1 = 2 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2E}}\right) \quad (\text{D.8})$$

D.2 2^{ème} cas : $x(\tau) > 1$

Dans le cas, $x(\tau) \geq 1$, le système d'Eq. (D.1) devient linéaire et s'écrit :

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \hat{\alpha}(x(\tau) - 1) = 0 \quad (\text{D.9})$$

Avant de continuer, on centre le système au point d'équilibre en posant $\hat{x}(\tau) = x(\tau) - x_{eq}$, où $x_{eq} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + 1}$. Ainsi, le nouveau système s'écrit,

$$\ddot{\hat{x}}(\tau) + (1 + \hat{\alpha})\hat{x}(\tau) = 0 \quad (\text{D.10})$$

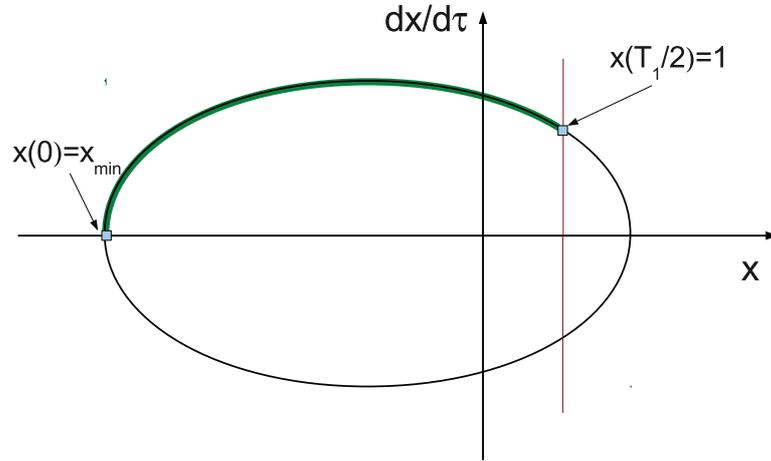


FIGURE D.2 – Trajectoire de la solution de l'Eq. (D.3)-(D.4) dans l'intervalle $[0, \frac{T_1}{2}]$ représenté dans l'espace des phases (x, \dot{x}) .

On prend les conditions initiales suivantes,

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = x_{max} - x_{eq} \\ \dot{\hat{x}}(0) = 0 \end{cases} \quad (D.11)$$

La solution s'écrit alors,

$$x(\tau) = (x_{max} - x_{eq}) \cos(\sqrt{1 + \hat{\alpha}}\tau) \quad (D.12)$$

Soit $\tau = \frac{T_2}{2}$, l'instant tel que la masse impacte sur la butée, c'est-à-dire que $x(\frac{T_2}{2}) = 1$. On peut donc en déduire que,

$$T_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + \hat{\alpha}}} \arccos\left(\frac{1 - x_{eq}}{x_{max} - x_{eq}}\right) \quad (D.13)$$

De la même manière que précédemment, on utilise l'énergie pour reformuler T_2 ,

$$T_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + \hat{\alpha}}} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2E(1 + \hat{\alpha})}}\right) \quad (D.14)$$

D.3 Conclusion

La période pour une solution périodique du système d'Eq. (D.2) s'écrit,

$$T(E) = T_1 + T_2 = 2 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{2}{\sqrt{1 + \hat{\alpha}}} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2E(1 + \hat{\alpha})}}\right) \quad (D.15)$$

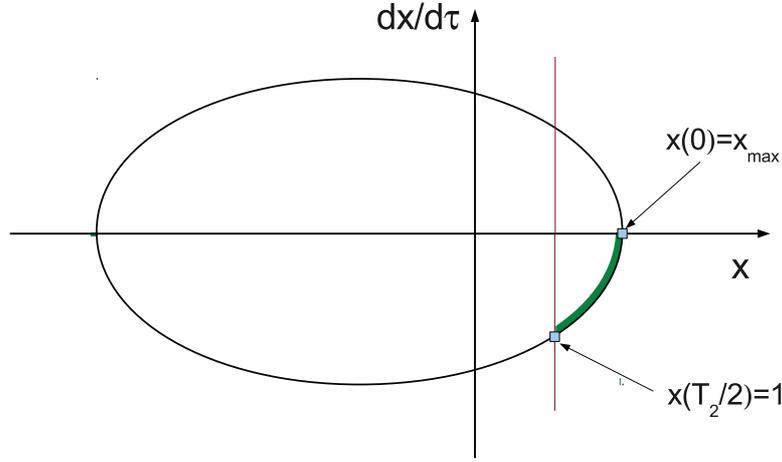


FIGURE D.3 – Trajectoire de la solution de l'Eq. (D.10)-(D.11) dans l'intervalle $[0, \frac{T_2}{2}]$ représenté dans l'espace des phases (x, \dot{x}) .

On peut alors écrire la fréquence en fonction de l'énergie,

$$f(E) = \frac{1}{2 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{2}{\sqrt{1+\hat{\alpha}}} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2E(1+\hat{\alpha})}}\right)} \quad (\text{D.16})$$

Si on fait tendre l'énergie vers l'infini, alors

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow +\infty} f(E) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\hat{\alpha}}}\right) \pi} \\ &= \frac{1}{\left(2\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{1+\hat{\alpha}}}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

où $f_1 = \frac{1}{2\pi}$ et $f_2 = \frac{\sqrt{1+\hat{\alpha}}}{2\pi}$ sont respectivement les fréquences propres des systèmes d'Eq. (D.3) et d'Eq. (D.10). Lorsque l'énergie tend vers l'infini, la fréquence tend vers la moyenne harmonique des fréquences f_1 et f_2 .

